PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico.

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

CARLOS TORRES NINAHUANCA

Dirigida por

ULDARICO MALASPINA JURADO

San Miguel, 2016

DEDICATORIA

A mi adorada hija Tiana Sophie Torres Bohórquez, por todo el tiempo que estuve ausente y que tomé prestado para realizar este trabajo. Siempre serás mi energía y motivación para vivir, mi pequeña princesa.

A mis padres, Hernán y Natividad, por estar siempre a mi lado. Su ejemplo de superación y entrega me ha enseñado a luchar por mis sueños. Todo lo que he logrado en mi vida se los debo a ustedes.

AGRADECIMIENTOS

A toda mi familia por apoyarme constantemente y saber comprender mis ausencias.

A todos los profesores participantes del taller de creación de problemas denominado *Creación de problemas de matemáticas para la enseñanza y aprendizaje de funciones en la educación secundaria*, desarrollado en noviembre del 2015 en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Al Dr. Uldarico Malaspina Jurado por dedicar su valioso tiempo al desarrollo de este trabajo de tesis, sus consejos y sugerencias fueron pertinentes para culminar con este proyecto. Cabe mencionar que su pasión por la investigación fue el combustible que me ha impulsado, en gran medida, a continuar con esta travesía dentro de la Didáctica de la Matemática. Espero que, después de muchas discusiones sobre temas de enseñanza de la matemática, algunas de las ideas que fueron fluyendo en estos encuentros se plasmen en esta tesis.

A la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre y al Dr. Vicenç Font Moll, quienes tuvieron a bien evaluar el presente trabajo para asegurar su calidad académica.

A todos mis colegas y amigos de muchos años. Especialmente a Luis Miguel Maraví Zavaleta, por las sugerencias bibliográficas que fueron muy valiosas para este trabajo, y a Maritza León Jordán, por su apoyo constante en la realización de esta investigación.

RESUMEN

Este estudio explora la creación de problemas mediante la implementación de una estrategia de creación de problemas matemáticos que integra nociones del análisis didáctico y pretende contribuir a la formulación de problemas con énfasis didáctico para el aprendizaje y enseñanza en el entorno de las funciones cuadráticas. Para este propósito, se desarrolla talleres de creación de problemas con profesores en servicio, en los cuales se utiliza experiencias didácticas, elaboración de configuraciones epistémicas y cognitivas, y análisis de prácticas matemáticas; estas dos últimas herramientas son propias del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). También examinamos los problemas creados con énfasis didáctico mediante una rúbrica propuesta para este estudio que articula los criterios de idoneidad didáctica del EOS. Con base en un estudio de casos y los procedimientos metodológicos como la triangulación de investigadores y análisis del contenido, se ha llegado a tener indicios para suponer una relación entre creación de problemas y resolución de problemas. Esta afirmación se sustenta en estudios anteriores que revisamos sobre la competencia matemática del profesor y la creación de problemas (por ejemplo: Yuan & Sriraman, 2011; Cai & Hwang, 2002; Crespo, 2003; Silver, 2013; Abu-Elwan, 1999; Kar, Ozdemir, Ipek, & Albayrak, 2010); es decir, la competencia de creación de problemas podría estar estrechamente relacionada con la competencia matemática, especialmente en los dos casos que formaron parte de nuestra investigación. Finalmente, se brindan algunas sugerencias y recomendaciones para propuestas e investigaciones posteriores que hagan uso de la estrategia implementada en la presente investigación.

Palabras clave: Creación de problemas, estrategia de creación de problemas, análisis didáctico, problemas didácticamente buenos, problemas pre, valoración de problemas creados, función cuadrática, enfoque ontosemiótico, profesores en servicio, resolución de problemas.

ABSTRACT

In recent years, mathematical problem posing has been gaining considerable attention as a tool to innovate the role of problem solving in mathematics teaching and learning. This role about problem posing should be handled by mathematics teacher, who must have the competence to develop it. This study explores problem posing by means of a strategy mathematical problem posing which involves notions of didactic analysis and it pretends to contribute in how we formulate mathematical problems with didactical emphasis for teaching and learning in quadratic functions environment. For this purpose, problem posing workshop with in-service teachers are implemented and these activities include didactical experiences, cognitive and epistemic configurations, analysis of mathematical practices, these two last tools belong to the *onto-semiotic approach of cognition and mathematical instruction* (OSA), besides that the posed problems focus in didactical aspects are assessed through a rubric which has been developed using indicators of didactical suitability introduced in the OSA.

By using a case study and the methodological procedures such as triangulation of research and content analysis, the results of the study show evidence to indicate a relationship between problem-posing and problem solving. We state this relationship based in our results and these confirm another results found in the literature about problem posing (e.g. Yuan & Sriraman, 2011; Cai & Hwang, 2002; Crespo, 2003; Silver, 2013; Abu-Elwan, 1999; Kar, Ozdemir, Ipek, & Albayrak, 2010).

Finally, some suggestions and recommendations for further research which use the strategy implemented in this study are provided.

Keywords: Problem posing, problem posing strategy, didactic analysis, quadratic function, onto-semiotic approach, problem solving, in-service teachers.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos de la enseñanza de la matemática en la actualidad es educar a nuestros estudiantes en la resolución de problemas, especialmente en situaciones cercanas a su entorno. Sin embargo, desde hace más de tres décadas, científicos y matemáticos de renombre mundial como Albert Einstein, Jeremy Kilpatrick, Jacques Hadamard o Paul Halmos han manifestado su intención de prestar atención al papel que juega la creación de problemas en la enseñanza de la matemática, aspecto que algunos investigadores lo relacionan con la resolución de problemas y otros lo desglosan parcialmente. Ahora bien, si pretendemos educar en la creación de problemas, se debe tomar en cuenta tanto la labor del docente como la del estudiante. Creemos firmemente que la mayor responsabilidad para la incorporación de la creación de problemas como una herramienta de apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje recae en el docente. Así, si pretendemos formar buenos creadores de problemas, debemos primero formar docentes con experiencia en creación de problemas. Cabe mencionar que estos problemas podrían ser analizados desde una perspectiva amplia, como lo demuestran las últimas investigaciones dentro del campo de la creación de problemas (como se explica en el Capítulo 1); en particular, asumimos que la creación de problemas puede ser una herramienta poderosa para formular problemas con énfasis didáctico para la enseñanza y aprendizaje. Con este propósito, hemos desarrollado nuestro estudio, en el que implementamos una estrategia de creación de problemas que integra nociones del análisis didáctico; estos últimos constructos teóricos pertenecen al enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS).

En esta investigación ponemos énfasis en la creación de *problemas didácticamente buenos* (PDB) mediante el desarrollo de talleres de creación de problemas en el entorno de la función cuadrática con profesores en servicio y en los que se hace uso de un episodio de clase como contexto de reflexión. Para la creación de problemas PDB, se propone una estrategia que denominamos ERPP (episodio, reflexión didáctica, problema pre, problema pos) mediante la cual se resalta una faceta reflexiva didáctica: esta hace uso de configuraciones de objetos, análisis de prácticas matemáticas y valoración de los problemas creados mediante una rúbrica con indicadores vinculados a los criterios de idoneidad didáctica del EOS.

Para el estudio de la creación de problemas mediante la implementación de la estrategia ERPP, utilizamos el método cualitativo del tipo estudio de casos evaluativo, junto con el análisis ontosemiótico, el análisis del contenido y la triangulación de investigadores para el estudio de los datos. De esa forma, analizamos las soluciones tanto del problema del episodio como de los problemas creados por los participantes del taller, usando para ello las herramientas del EOS: configuraciones epistémicas (CE) y configuraciones cognitivas (CC) y el análisis de las prácticas matemáticas involucradas en la solución y la creación. También se hizo uso de una rúbrica junto con indicadores para valorar los problemas creados desde el punto de vista didáctico. Se adoptaron soluciones expertas del problema del episodio y de los problemas creados, y se elaboraron CE de tales soluciones para tenerlas como referencia para el análisis y las comparaciones con las CC de las soluciones de los participantes. Los problemas creados como resultado de la reflexión didáctica fueron sometidos a una triangulación de expertos, quienes emplearon una rúbrica con indicadores de un PDB.

Nuestro trabajo se desarrolla en cinco capítulos:

En el Capítulo 1 presentamos la revisión de la literatura tanto nacional como internacional relacionada con nuestro estudio. Esta reflexión lleva a presentar la pregunta de investigación y los objetivos respectivos, acompañados de las justificaciones asociadas.

En el Capítulo 2 describimos el objeto matemático función cuadrática siguiendo un marco epistémico-histórico. En él destacamos las configuraciones según el marco de EOS que se detectan en el desarrollo histórico de la noción de función y, especialmente, la función cuadrática.

En el Capítulo 3 mostramos los elementos de nuestros marcos teóricos relacionados con la creación de problemas y la Didáctica de la Matemática. También presentamos nuestro marco metodológico que involucra estudio de casos, análisis ontosemiótico, análisis del contenido y la triangulación de expertos. Así mismo, se muestra los fundamentos para la elaboración de la evaluación diagnóstica sobre las funciones cuadráticas.

En el Capítulo 4 exponemos las conclusiones de nuestro estudio respecto a los objetivos planteados en el Capítulo 1. Así mismo, señalamos algunas sugerencias y recomendaciones para futuras investigaciones relacionadas con nuestro estudio, en particular la implementación de la estrategia ERPP.

Finalmente, en los anexos presentamos los instrumentos que nos permitieron concretizar nuestra investigación, así como las respuestas de los dos profesores en servicio que forman parte de nuestro caso de estudio.

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA

En matemáticas el arte de formular problemas es más valioso que resolver problemas

George Cantor, *1845-1918*, frase escrita en su tesis doctoral en 1867.

En este capítulo hacemos una presentación de la problemática relacionada con nuestro tema de investigación y de las diversas motivaciones vinculadas a nuestro interés por desarrollarlo. También describimos el campo de la creación de problemas desde un punto de vista global, enfocándonos en las líneas de investigaciones actuales. Del mismo modo, mostramos algunas investigaciones vinculadas a: 1) la creación de problemas, 2) la relación de esta con la competencia matemática y la competencia didáctica del profesor, y 3) la valoración de los problemas creados, tanto por profesores como por estudiantes. Presentamos también algunos aportes sobre la creación de problemas y el entorno de las funciones cuadráticas. En este marco justificamos nuestro tema de estudio con base y motivación en nuestra experiencia docente en educación básica. Finalmente, planteamos nuestro problema de investigación y sus objetivos respectivos. Cabe recalcar que todas las traducciones de párrafos en inglés son propias.

1.1. Presentación del problema

Desde hace varias décadas se ha considerado a la resolución de problemas como el centro de la enseñanza de la matemática, situación que ha ayudado a elaborar diversas teorías y metodologías de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Así mismo, matemáticos famosos y de renombre mundial se han encargado de su desarrollo, como es el caso de George Polya, Jeremy Kilpatrick y Alan Schoenfeld. Precisamente, Polya (1975), en la descripción de su famosa heurística para resolver problemas, sugiere en el último paso (denominado comúnmente *mirar hacia atrás*) que se debe hacer una revisión al final de la resolución de un problema. Este paso en la resolución ha conllevado, entre otros hechos de vital importancia, a plantear una nueva forma de enfocar la resolución de problemas y su relación con la creación de problemas. Al respecto, prominentes científicos han enfatizado la importancia de crear problemas; así tenemos la afirmación de Einstein e Infeld (1938):

> La formulación de un problema es a menudo más importante que su solución, que puede ser simplemente una cuestión de habilidades matemáticas o experienciales. Para plantear nuevas preguntas, nuevas posibilidades y considerar viejas preguntas desde un nuevo ángulo, se requiere imaginación creativa y ello marca el avance real en la ciencia. (p. 92)

Actualmente, se tiene un número considerable de investigaciones, como se explica líneas más adelante, en las cuales la resolución de problemas está más vinculada a la creación de problemas (en el presente trabajo consideramos el *problem posing*, en lengua inglesa, como invención, creación o planteamiento de un problema matemático), aunque podríamos considerar que siempre estuvo relacionada, pero en forma implícita. Diversos trabajos en el campo de la enseñanza de la matemática, en especial en el campo de investigación denominada *Problem Posing*, han tomado como objeto de estudio este importante aspecto de la resolución de problemas y otros lo relacionan, en forma más específica, con el último paso de la heurística de Polya, ya que al realizar la revisión del proceso resolutivo se pueden generar nuevos problemas a plantear (Silver, 1994).

Por otra parte, actualmente las clases de matemática se orientan hacia el uso de la heurística de Polya, como se propone en las Rutas de Aprendizaje (Perú, Ministerio de Educación, 2015), y en tal sentido los profesores en servicio debemos generar proyectos que conlleven a un mejor manejo en la resolución de problemas. Existen varios trabajos sobre este último aspecto (ver Armella y Santos-Trigo, 2013; Kaur, Yeap y Kapur, 2009; Wong, 2009). En particular, desarrollamos un proyecto relacionado con la resolución de problemas que fue presentado en un evento internacional. Así, en Torres (2014), mostramos una experiencia didáctica de cómo se puede motivar a los estudiantes mediante la resolución de problemas retadores. A raíz de esa experiencia, fijamos nuestro interés en rescatar la creación de problemas y, tal como lo mostró Silver (1994), “también hay un interés en explorar la relación de creación de problemas con otros aspectos del conocimiento y desempeño matemático” (p. 24), que implica ir más allá de la resolución de un problema. Esta última propuesta se relaciona con la acción de crear problemas matemáticos, y no solo a partir de un problema dado sino también a partir de una situación dada (Malaspina, 2015a).

1.2. Antecedentes de la investigación

Debido a la amplitud de nuestro tema de investigación, hemos dividido nuestros antecedentes en los apartados: *creación de problemas como campo de estudios, investigaciones sobre creación de problemas y la competencia didáctica*, *investigaciones sobre valoración de los problemas creados* e *investigaciones sobre creación de problemas en el entorno de las funciones cuadráticas.*

1.2.1. Creación de problemas matemáticos como campo de estudio

De acuerdo con Silver (1994), la resolución de problemas ha sido identificada por algunos distinguidos líderes matemáticos y educadores matemáticos como un importante aspecto de la educación matemática, y dicho interés se muestra en trabajos de Polya (1954), Kilpatrick (1987) y Freudenthal (1973), principales referentes desde hace varias décadas. La importancia que se ha dado a la resolución de problemas se resalta en lo manifestado por Halmos (1980), quien ya se refiere también a la creación de problemas:

> Creo que los problemas son el corazón de la matemática y espero que como profesores, en clases, en seminarios, en libros y artículos que escribimos lo enfaticemos más y más, de tal forma que instruyamos a nuestros estudiantes a ser mejores creadores y resolutores de problemas que nosotros. (p. 524).

La idea de Halmos (1980) sigue todavía vigente pues está demostrado que el avance de las matemáticas ha influenciado en el desarrollo de la ciencia en nuestra sociedad, y la resolución de problemas es el motor de dicho avance.

Si bien es cierto que Halmos (1980) considera instruir a los estudiantes en la creación y la resolución de problemas, creemos importante que esta instrucción debe ser dirigida por un profesor de matemática formado en la creación y la resolución de problemas. Sobre todo en el primer factor, ya que se ha tomado poca importancia al desarrollo de la creación, a pesar de que esta es considerada como una innovación curricular y pedagógica en diversas partes del mundo. Así lo manifiesta, por ejemplo, el National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (citado por Malaspina, 2013a): “Los estudiantes deben tener algunas experiencias reconociendo y formulando sus propios problemas, actividad que es el corazón del hacer matemáticas” (p. 138).

Por otro lado, en un enfoque histórico cultural, Kontorovich (2009) muestra que el reconocimiento del potencial de la creación de problemas sucede en tres periodos: el primero sucedió entre los cuarentas y cincuentas del siglo pasado, cuando diversas publicaciones de matemáticos de renombre introdujeron la creación de problemas como parte integral de su trabajo profesional (por ejemplo Einstein e Infeld, 1938; Hadamar, 1947; Polya,1954). El segundo, en los setentas y ochentas del mismo siglo, cuando los educadores consideraron la creación de problemas como una actividad de aprendizaje potencialmente rica que podría promover el razonamiento, la creatividad y las habilidades de resolución de problemas de los escolares (por ejemplo Kilpatrick, 1987; Krutetskii, 1976). Y el tercero se inició en 1989, hasta la actualidad, cuando el NCTM (1989) promovió el uso de actividades de creación de problemas en las clases regulares de matemática.

Por su parte, Kilpatrick (1987) afirma que la creación de los problemas es un complemento importante para la resolución de problemas y que extiende el significado de la actividad matemática. Esta idea ha sido compartida por diversos investigadores en estos últimos años; en particular, rescatamos lo propuesto por Dunker (1945) y Silver (1994).

Otra concepción similar a la de Dunker (1945) y Silver (1994) es la de Malaspina (2013a), quien manifiesta que la creación de un problema matemático se puede originar por variación de un problema dado o por la elaboración de un problema, ya sea ante una situación concreta o por un pedido específico; este último es de carácter matemático o didáctico. Esta concepción se distingue de las otras pues considera dos aspectos de la creación matemática: la resolución de problemas y la creatividad. La primera se relaciona con la creación de problemas por variación y la segunda con la creación de problemas por elaboración. Esta concepción será tomada en cuenta para nuestra presente investigación y será explicada en detalle en el Capítulo 3.

Por otro lado, en el trabajo de Silver (1994) también se presentan las distintas perspectivas sobre la creación de problemas propuestas hasta esos años. En primer lugar, se muestra a la creación de problemas como una característica de la actividad creativa o excepcional de la habilidad matemática. Al respecto, se señala que la importancia de la creación de problemas se materializa en el uso masivo que se ha dado a la creación de problemas en las evaluaciones de creatividad. Esta afirmación se relaciona con lo mencionado por Malaspina (2013b), ya que la creación de problemas es un medio para el desarrollo de la creatividad y se debe profundizar en este ámbito. Una de las conclusiones más resaltantes del trabajo de Silver (1994), y que es pertinente para nuestra investigación a pesar de que es una reflexión de hace más de dos décadas, se vincula con el hecho de que se ha dejado de lado el estudio de la creación de problemas. Esta falta de atención hacia ese punto parece ir cambiando, ya que durante estos últimos cincos años los trabajos y las investigaciones relacionados con la creación de problemas ha ido aumentando (más adelante se presentarán las razones para esta afirmación). Del mismo modo, se compara la atención que ha tenido la resolución de problemas y se deja de lado la importancia de formular buenos problemas, en especial por parte de los profesores de matemática.

Es importante remarcar la existencia de investigaciones que plantean escenarios en los que se propicia el proceso de creación de un problema. Así, tenemos que Stoyanova (1998) se centró en estudiar la resolución de los problemas vía la creación de problemas. En ese sentido, esta investigadora propone contextos donde se propicia el proceso de creación de un problema, por lo que identifica tres formas de categorizar las situaciones para la creación de problemas: situaciones libres, situaciones semiestructuradas y situaciones estructuradas. En el primer caso, no hay restricciones para la creación de problemas. El segundo caso se da cuando se propone crear problemas dada una situación abierta, para lo cual los estudiantes deberán explorarla utilizando sus conocimientos, habilidades y relaciones de sus experiencias matemáticas previas. Los problemas creados con base en situaciones escritas o a ilustraciones son ejemplos de estrategias semiestructuradas de formulación de problemas matemáticos. Finalmente, para las situaciones estructuradas, las actividades de creación de problemas se basan en un problema específico o modificación de las condiciones del mismo. Es necesario mencionar que en esta última categoría se encuentra la estrategia del *What if?...What if not?* desarrollada por Brown y Walter (1990). Como una conclusión del estudio, Stoyanova (1998) manifiesta que, si bien es cierto que se ha dado reconocimiento a la creación de problemas, la falta de investigaciones asociadas a la relación entre creación de problemas, resolución de problemas y marco curricular ha reducido la credibilidad de las investigaciones en esta área. Esta situación ha retrasado el uso de la creación de problemas en las clases rutinarias de matemática. Así, manifiesta que la propuesta sobre las categorías de situaciones de creación de problemas es un aporte importante para consolidar el área de la creación de problemas como campo de estudio.

Si bien es cierto que el trabajo de Stoyanova (1998) tiene más de una década de haberse aplicado, creemos que ha significado un aporte muy importante para iniciar la consolidación del campo de la creación de problemas, y sus conclusiones, en particular la descrita en el párrafo anterior, actualmente todavía tienen vigencia. Esta importancia se puede evidenciar en diversos trabajos que usan su aporte teórico sobre situaciones de creación de problemas, para realizar investigaciones al respecto. Por citar dos ejemplos, el trabajo de Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi y Sriraman (2005) está relacionado con su clasificación de las tareas o actividades de creación de problemas, y el de Sengül y Katranci (2012) estudia las habilidades de resolución y creación de problemas en profesores en formación siguiendo las ideas de esta investigadora.

Ámbitos de investigación en la creación de problemas

Kontorovich (2009) manifiesta que hay diversos trabajos relacionados con la investigación sobre la creación de problemas y sus implicancias en otras áreas de estudioe, como por ejemplo: el *campo de investigación que se encarga del estudio de las habilidades en la creación de problemas y procesos asociados*, también los relacionados con *las oportunidades de aprendizaje heredados en la creación de problemas*. De la misma forma, hay estudios que utilizan la *creación de problemas como una ventana de oportunidades para la comprensión de la matemática en estudiantes y profesores* y existen estudios de *estrategias particulares para la creación de problemas*.

Recientemente, Kontorovich, Koichu, Leikin y Berman (2012) muestran las temáticas de investigación que han sido tomadas por los últimos estudios en el campo de la creación de problemas, que describimos y adaptamos a continuación: *ocurrencia de la creación de los problemas* (Silver, 1994; Stoyanova, 1998; Brown & Walter, 1990; Malaspina, 2013a) que se despliega en los focos de investigación denominados *estudio de los procesos cognitivos que involucran la creación de problemas* (Christou et al., 2005; English, 1998; Harel, Koichu, & Manaster, 2006), *relación entre creación de problemas y resolución de problemas* (Ellerton, 1986; Silver, Mamona, Yuan & Sriraman, 2011) y *estrategias de creación de problemas con estudiantes y con profesores de matemática* (English, 1998; Silver & Cai, 1996; Brown & Walter, 1990; Malaspina, 2014a). También se encuentra las temáticas agrupadas en el *estudio de la promoción de las habilidades de creación de problemas (*Brown & Walter, 1990; Crespo, 2008; Lavy & Bershadsky, 2003). De la misma forma, tenemos la *contribución de la creación de problemas para el aprendizaje de la matemática* (Crespo, 2008; English, 2003; Lowrie, 2002; Malaspina, 2015a). Finalmente, el de *uso de la creación de problemas para estimular la comprensión de la matemática* (Harel et al., 2006; Toluk-Ucar, 2009; Malaspina, 2014b).

Otro panorama importante para el estudio de la creación de problemas se muestra en la edición especial de la revista *Educational Studies in Mathematics* (ESM), que se editó el 2013, en la que se publicó diez trabajos recientes en el campo de la creación de problemas relacionados con ámbitos actuales de interés respecto a la enseñanza de la matemática. Cabe mencionar, basándonos en la opinión de Singer, Ellerton, y Cai (2013), que la creación de problemas es todavía muy diversa y carece de definiciones y una estructura como campo de estudio. Esta afirmación calza muy bien con la propuesta de Kontorovich et al. (2012), puesto que existen muchos trabajos que no se enmarcan todavía en un ámbito reconocido de la creación de problemas pero que no deja de ser importante y, seguramente, promoverán la apertura a otros ámbitos de atención. Sin embargo, creemos que el aporte de los trabajos mostrados en el ESM ordena en cierta forma las investigaciones y es un intento muy loable para organizar el campo emergente de la creación de problemas. Singer et al. (2013) afirman, en su presentación de las investigaciones listadas en la revista, que estas fueron estructuradas alrededor de los siguientes tópicos: *investigaciones dirigidas al estudio del diseño de actividades de creación e problemas*, *investigaciones centradas en el estudio d la naturaleza de la creación de problemas* y *la creación de problemas como herramienta de investigación y enseñanza*.

De los trabajos presentados, se destaca la aparición de nuevos focos de investigación tanto para la instrucción como para la investigación y la enseñanza. Una primera perspectiva sugiere el diseño de tareas de creación de problemas partiendo de marcos de resolución de problemas, situaciones significativas que involucran el uso de artefactos culturales, o por la implementación o refuerzo del currículo (Singer & Voica, 2013; Olson & Knott, 2013; Bonotto, 2013). Otra perspectiva se enfoca en la comprensión de la naturaleza de la creación de problemas por medio de estudios comparativos (Cai et al., 2013; Koichu & Kontorovich, 2013). También está la perspectiva sobre el estudio de la creatividad y la creación de problemas, que valora la importancia de la relación entre el conocimiento del contenido matemático del estudiante y sus habilidades de creación de problemas matemáticos (Ellerton, 2013; Leung, 2013; Harpen & Presmeg, 2013). Finalmente, se menciona el efecto de la creación de problemas basados en situaciones de aprendizaje, en procesos de instrucción (Tichá & Hošpesová, 2013; Ponte & Henriques, 2013).

Ahora bien, dentro de esta amplia gama de marcos de investigación para la creación de problemas, es necesario reflexionar cómo las teorías más globales, esto es, los enfoques contemporáneos de la Didáctica de la Matemática, se relacionan con la creación de problemas.

Al respecto, Malaspina (2015a) menciona que en la *teoría de situaciones didácticas* (TSD) el objeto final del aprendizaje es que el estudiante pueda hacer funcionar el saber en situaciones en las que el profesor no está presente. En este aspecto coincidimos con Malaspina (2015a) respecto a que esta característica de la TSD está estrechamente relacionado con la creación de problemas basado en un contexto de clase o texto matemático, ya que en este proceso el estudiante reconstruye conocimientos y eso lo posibilita a ir más allá del ámbito resolutivo de problemas y en ámbitos en los que el profesor no está presente. Por otro lado, este investigador manifiesta que en *la teoría antropológica de lo didáctico* (TAD) la creación de problemas está relacionada al proceso de enseñanza y aprendizaje respecto a la reconstrucción de organizaciones matemáticas para utilizarlas en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones, concepción principal de la TAD. Incluso, crear problemas forma parte de la reconstrucción de organizaciones matemáticas en las que se consideran diversos tipos de problemas y a estos como parte del saber-hacer matemática (Malaspina, 2015a). Finalmente, en el *enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática* (EOS) se considera que el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender a realizar una práctica operativa (de lectura y producción de textos) y, especialmente, una práctica discursiva (de reflexión sobre la práctica operativa) que puede ser reconocida como matemática por un interlocutor experto. Al respecto, Malaspina (2015a) encuentra "que implícitamente consideran la creación de los problemas como parte de la práctica operativa y discursiva, pues la creación de problemas conlleva la producción de textos y la reflexión sobre la práctica operativa, al hacer variaciones a problemas trabajados o elaborar nuevos problemas a partir de situaciones concretas" (p. 3).

Mientras los focos de atención actuales han permitido el avance del campo de la creación de problemas mostrados por Kontorovich et al. (2012) y Singer et al. (2013), creemos conveniente destacar el trabajo de Christou et al. (2005), Kontorovich y Koichu (2009) y Kontorovich et al. (2012), que a continuación describimos ya que estos investigadores tratan de realizar una confluencia de propuestas y facetas de la creación de problemas en una alternativa de estudio de creación de problemas.

La investigación de Christou et al. (2005) se enfocó en la construcción, descripción y aplicación de un modelo teórico de la creación de problemas. Su modelo teórico se basa en trabajos previos como el de Silver (1994), Kilpatrick (1987), Silver y Cai (1996), English (1997, 1998) y Stoyanova (1998). Este modelo considera cómo los estudiantes piensan durante el proceso de creación de problemas, por lo que el modelo se compone por cuatro procesos:

edición de información, selección de información cuantitativa, comprensión y organización de información cuantitativa y traducción (traslación) cuantitativa de una forma de representación a otra. En la investigación de Christou et al. (2005), los sujetos de investigación fueron 143 estudiantes de Grado 6 (en el sistema educativo de Chipre) de seis centros educativos urbanos. Ninguno de los estudiantes estuvo sometido antes a un estudio sobre creación de problemas. Los instrumentos utilizados consistieron en cinco pruebas sobre creación de problemas, los cuales ayudaron a percibir al estudiante distintos contextos matemáticos. En cada una de estas pruebas, los estudiantes tuvieron que proponer problemas con sus soluciones respectivas, justificando sus respuestas con un lenguaje matemático. De las conclusiones se desprende que este modelo presentado ofrece a los profesores e investigadores oportunidades para examinar la complejidad de la creación de problemas. Del mismo modo, desde la perspectiva del profesor, el modelo propuesto por Christou et al. (2005) puede ser incluido y usado en los diseños de procesos de instrucción que involucren el desarrollo de los cuatro procesos cognitivos asociados a la creación de problemas. Otra conclusión relevante se refiere a la implicación futura de la investigación en la creación de problemas, ya que según Christou et al. (2005) servirá para crear una métrica con la operacionalización de variables (edición, traslación, selección, comprensión), a través de la cual se podría evaluar la estructura de los problemas creados por los estudiantes, que utilizan información cuantitativa. Una aplicación del trabajo de Christou et al. (2005) se puede ver en Isık, Kar, Yalçın, y Zehir (2011) y cuyo análisis mostraremos más adelante.

Hasta esta parte se ha descrito la propuesta de creación de problemas y facetas asociadas. Sin embargo, queda la pregunta sobre si se ha tratado de rescatar lo avanzado en la creación de problemas y proponer un marco teórico para su análisis. En esta perspectiva encontramos los trabajos de Koichu y Kontorovich (2013) y Kontorovich et al. (2012).

El trabajo de Koichu y Kontorovich (2013) se enfocó en proponer un marco teórico consolidado para el análisis de la creación de problemas matemáticos. Estos investigadores se manifiestan así al respecto: “We argue that the framework is applicable to a wide range of mathematical domains, different types of problem posing task and social settings in which problem posing occurs” (p. 2). [Sostenemos que el marco es aplicable a una amplia gama de dominios matemáticos, diferentes tipos de tareas de creación de problemas y entornos sociales en los que ocurre la creación de problemas] (*Traducción propia*). El marco presenta características especiales, puesto que es construido con base en amplios y aceptados modelos de resolución de problemas. A su vez, dichos constructos teóricos se identifican como específicos para la creación de problemas, ya que los modelos planteados sobre el estudio de un marco de referencia para la creación de problemas (como el caso de Christou et al., 2005) solo consideran aspectos cognitivos del proceso de creación sin tomar en cuenta otros muy importantes. Inclusive, Koichu y Kontorovich (2013), tomando como referencia los aportes de Schoenfeld (1985, 1992) y Carlson y Bloom (2005), plantean inicialmente cuatro facetas: dos facetas cognitivas y dos facetas afectivas, ambas relacionadas con la creación de problemas. Las *facetas cognitivas* se despliegan en el conocimiento base, esquemas y heurísticas de la creación de problemas; mientras que las *facetas afectivas* toman en cuenta la consideración de lo apropiado en la creación de problemas y la dinámica de grupos e interacciones cuando se crear un problema matemático. El modelo anterior se complementa con un constructo teórico propuesto recientemente por Kontorovich et al. (2012), el cual propone agregar el constructo denominado o*rganización de tareas*. El desarrollo de este constructo se basó en el trabajo de Silver y Cai (1996) y engloba todas las decisiones didácticas que un profesor considera cuando diseña una actividad de creación de problemas. Este marco se aplicó en diversas investigaciones y consideramos importante destacar los trabajos de Kontorovich et al. (2012) y Koichu y Kontorovich (2013).

Una conclusión del trabajo de Koichu y Kontorovich (2013) refiere que el marco pretende estudiar la complejidad del proceso de creación de problemas considerando aspectos no contemplados por otras propuestas similares (ver Figura 1). Así, se afirma que los criterios descritos se relacionan adecuadamente con los aportes de estudios previos. También se menciona que el aspecto social de la creación de problemas requiere de atención, ya que deberán ser analizados en grupos pequeños, estudios individuales o clases rutinarias. Por otro lado, los investigadores se proponen llevar a cabo investigaciones al respecto (como el caso de Kontorovich et al., 2012; y Koichu & Kontorovich, 2013) con el objetivo de consolidar el marco teórico y mejorarlo.

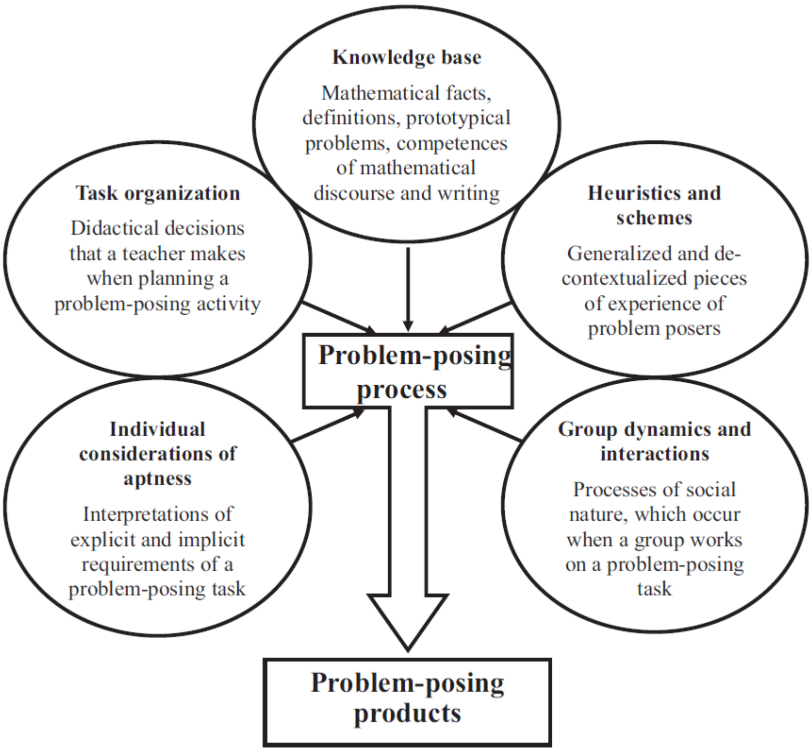


Figura 1. Un marco de confluencia para el manejo de la complejidad de la creación de problemas. Fuente: Koichu y Kontorovich (2013, p. 3)

Cabe destacar que la visión mostrada por Kontorovich y Koichu (2009) tiene aspectos coincidentes con el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), especialmente en lo referente a las idoneidades didácticas. Así, en el EOS también apreciamos aspectos cognitivos y afectivos (denominados facetas didácticas); sin embargo, creemos que este enfoque presenta más facetas de análisis que la propuesta de Kontorovich y Koichu (2009) como la idoneidad ecológica e idoneidad mediacional. Una forma de utilizar el EOS en la creación de los problemas lo encontramos en Malaspina (2011b) y en Malaspina, Mallart y Font (2015), y para los propósitos de esta investigación tomamos tales constructos como parte de nuestro marco teórico.

Creemos que las ideas vertidas en Malaspina y Vallejo (2014) coinciden con lo manifestado por Koichu y Kontorovich (2013), respecto a las facetas de creación de un problema, tanto cognitivas como afectivas, y nos servirán para proponer actividades de creación de problemas matemáticos y analizar la idoneidad de estos, como recomienda Malaspina (2011b).

Finalmente, creemos importante seguir aportando a este campo de estudio que, si bien es cierto no es nuevo, ha sido descuidado durante mucho tiempo, como lo manifestó Stoyanova (1998), en sus conclusiones de investigación, hace más de una década.

1.2.2. Investigaciones sobre creación de problemas y la competencia didáctica

En el apartado anterior se muestra un resumen de la situación actual del campo de la creación de problemas, y uno de los focos de atención que ha tenido la creación de problemas está vinculado con el desarrollo de la competencia didáctica del profesor de matemática, situación que ha sido tomada en cuenta desde hace varios años. Uno de estos investigadores es Kilpatrick (1987), quien en su artículo *Problem formulating: Where do good problems come from?* nos propone reflexionar sobre la importancia de crear buenos problemas y prestar atención a la fomulación de estos. Implícitamente, Kilpatrick (1987) centra su atención en el desarrollo de lo que actualmente se denomina competencia matemática y competencia didáctica del profesor (este aspecto se discute ampliamente en el Capítulo 3).

Otro aspecto que señala Kilpatrick (1987) se relaciona con las fuentes de los buenos problemas. Actualmente, la mayoría de profesores en servicio utilizan textos guías de trabajo que contienen los problemas a usarse en clase. El libro se ha convertido, junto con fuentes de Internet, en el cajón de problemas y no permite reflexionar sobre la importancia de crear problemas para la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Esta idea ya se viene discutiendo desde hace más de 20 años, como lo muestra Gonzales (1994, p. 78):

> It is imperative that teachers – not the textbooks – take the control of classroom learning and ownership of mathematical knowledge. This is especially true if problem solving is to become an integral part of the mathematics curriculum. In teacher training programs we must de-emphasize the authority of the textbook and enhance the prospective teachers' content knowledge and problem posing skills so that they will have confidence in determining direction for creative problem solving.
>
> [Es imperativo que los profesores – no los libros de texto – tomen el control del aprendizaje y la apropiación de los conocimientos matemáticos en el aula. Esto es especialmente cierto si la resolución de problemas se convierte en una parte integral del currículo de matemáticas. En los programas de formación de profesores debemos restar importancia a la autoridad del libro de texto y mejorar los conocimientos matemáticos y las habilidades de creación de problemas de los futuros profesores para que puedan tener confianza en la determinación de la dirección para una resolución creativa de problemas.] (*Traducción propia*)

Al respecto, en estos últimos años, las investigaciones en Didáctica de la Matemática han centrado su atención en el estudio de las competencias que el profesor debe tener para enseñar mejor la matemática en diversos niveles educativos (este aspecto se muestra en más detalle en el Capítulo 3). En particular, nos interesamos en las investigaciones que integran la creación de problemas y en la competencia didáctica del profesor, como por ejemplo: Crespo (2003); Isik, Kar, Yalcin y Zehir (2011); Kar, Ozdemir, Ipek y Albayrak, (2010); Leung y Silver (1997); Malaspina et al. (2015); Singer, Ellerton y Cai (2013); Tichá y Hošpesová (2013).

A continuación describimos las investigaciones de Tichá y Hošpesová (2013), Malaspina et al. (2015) y Abu-Elwan (1999), que consideramos como referencias importantes para nuestro trabajo.

Tichá y Hošpesová (2013, p. 135) realizaron una investigación sobre el desarrollo de *the subject–didactical competence* y *the competence of reflection*, que son definidas de la siguiente forma:

> *Subject–didactical* competence consists of skilled orientation towards the educational meaning of the teaching of a specific subject, mastering the scientific basis of teaching of the subject, as well as didactical creativity. We believe that the concept of subject didactic competence connects several aspects of a teacher's work and pinpoints its complexity. With respect to the tradition of European didactics, we prefer this concept to the widely used concept of a knowledge base for teaching (Shulman, 1986). The competence of reflection mirrors one's need to develop an awareness of unceasing work on oneself (to sustain and refine one's own professionalism). The benefits of qualified joint reflection and aspects associated with its development have been summarized by Ticha and Hošpesová (2006).
>
> [La compentencia Subject-didactical consiste en un conjunto de habilidades dirigidas a un propósito educativo de enseañanza de una matería específica, que implica un dominio de conocimiento científico base para la enseñanza de dicha materia, asi como de la creatividad didáctica. Creemos que el concepto de este competencia conecta varios aspectos del trabajo docente y se enfoca en su complejidad. Considerando la tradición de las didáctica europea, preferimos esta concepción en vez del amplio y usado concepto del conocimiento base para la enseñanza (Shulman, 1986). La competencia de *reflection* refleja una necesidad que implica el desarrollo de una conciencia de incesante trabajo sobre uno mismo (para sostener y perfeccionar la propia profesionalidad). Los beneficios de la reflexión cualificada en conjunto y los aspectos asociados con su desarrollo han sido resumidos por Ticha y Hošpesová (2006).] (*Traducción propia*)

En el desarrollo de su investigación, Tichá y Hošpesová (2013) proponen una serie de etapas de trabajo para el objeto fracción y enfatizan en el uso de la creación de problemas utilizando una estrategia que incluye una etapa de reflexión, la cual describen como *individual written reflections (both about problem(s) created by that individual, and about problems created by other students)*. Además analizaron los problemas creados utilizando el análisis semántico del texto del problema, lo cual les permitió clasificarlos de acuerdo con cómo pudieran estos representar la compresión del estudiante respecto al objeto fracción. Así, los investigadores se enfocaron en utilizar la creación de problemas como un instrumento educativo y de diagnóstico en profesores en formación del nivel primario.

En las conclusiones que ofrecen Tichá y Hošpesová (2013) rescatamos que la creación de problemas es un instrumento muy importante y apropiado para introducir a los profesores, en este caso en formación, a la enseñanza de las matemáticas. Así mismo, afirman que los profesores en formación que tuvieron la experiencia de crear problemas y reflexionar al respecto pudieron ser conscientes de los diferentes aspectos que esta involucra en comparación con los que solo se centran en resolver problemas. También, basados en el análisis de sus datos, mencionan que la creación de problemas puede ser una herramienta significativa para profundizar la exploración del contenido matemático. Finalmente, dan respaldo a la etapa de reflexión colectiva (*joint reflection*) acerca de los problemas creados, ya que los futuros profesores obtienen una comprensión más profunda de conceptos y tienen la posibilidad de obtener distintos enfoques de un mismo problema; en consecuencia, extienden su repertorio de interpretaciones sobre el problema creado. Coincidimos con los investigadores en que este aspecto debe ser uno de los temas centrales en la formación del profesor de matemática.

Por su parte, Malaspina et al. (2015) realizaron una investigación enfocados en el desarrollo de las competencias didácticas y matemáticas del profesor mediante la creación de problemas. Este estudio se basó en proponer una estrategia específicamente diseñada en la modificación de un problema dado y enriquecerlo con un potencial matemático y didáctico. Cabe señalar que esta estrategia tuvo como base un episodio de clase, el cual incluye un problema previo, así como las reacciones de algunos estudiantes que intentaron resolverlo.

Malaspina et al. (2015) propusieron a profesores en servicio crear un *problema pre* y un *problema pos* trabajados en forma individual al inicio y luego en forma grupal, respectivamente, ya que uno de los objetivos de su investigación fue mostrar que la creación de problemas es una vía que contribuye al desarrollo de la competencia matemática y competencia didáctica del profesor. Al respecto, los investigadores desarrollaron talleres de creación de problemas y aplicaron la estrategia denominada EPP, que se entiende como una estrategia que involucra un *episodio*, un *problem pre* y un *problema pos* (este aspecto se describe en detalle en el Capítulo 3). Luego del análisis cualitativo de los problemas creados, mediante la aplicación de una estrategia, la observación y el estudio de casos, se concluye que en el desarrollo de talleres de creación de problemas es importante trabajar en forma individual al inicio y aprovechar luego la riqueza del trabajo en grupos. Estas facetas de trabajo contribuyeron, según los investigadores, al desarrollo de la competencia de creación de problemas, a pensar didácticamente en ellos y, por extensión, al desarrollo de la competencia de análisis didáctico y competencia matemática (el primero relacionado con el proceso de reflexión sobre la pertinencia didáctica del problema, y el segundo por la profundización del contenido matemático que esta presupone). Por consiguiente, como lo manifiestan Malaspina et al. (2015), la creación de problemas permite interactuar con estas dos competencias y contribuir a su desarrollo.

Malaspina et al. (2015) afirman también que la creación de problemas rompe con la idea de que siempre se tiene que resolver problemas creados por otros sin considerar que los profesores de matemática pueden crear buenos problemas. Así, el desarrollo de estas competencias podrían repercutir en su labor docente y promover la creación de problemas en sus estudiantes. La estrategia mostrada, según los investigadores, es una propuesta interesante que podría ser usada en la formación de profesores.

Por su parte, Abu-Elwan (1999), enfocado en la importancia que los futuros profesores de matemática tienen en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, señala que -si bien es cierto que la resolución de problemas debe ser parte integral en la formación del futuro profesor de matematica- el docente debe ir más allá. Es decir, además de desempeñar el papel de resolutor, debe tener la habilidad de un creador de problemas. De ahí que este investigador se propone desarrollar la habilidad de crear problemas matemáticos en profesores en formación utilizando dos estrategias de la literatura de la creación de problemas: crear problemas considerando los problemas propuestos en un libro de texto (Kilpatrick, 1987) y crear problemas con base en situaciones semiestructuradas (Stoyanova, 1998). En el primer caso, la estrategia consistió en modificar algunas condiciones del problema escogido de un texto de matemática, así como la modificación de la demanda del problema. En el segundo caso, la estrategia consistió en crear problemas basándose en una situación cotidiana presentada, y que estuviera incompleta, permitiendo al creador completar la situación y generando dos o tres preguntas de la situación modificada. Uno de sus objetivos fue desarrollar una estrategia de creación de problemas que podría ser enseñada en los centros de formación para profesores. Una de las preguntas de investigación que dirigió el estudio de Abu-Elwan (1999) se relaciona con la búsqueda de una estrategia efectiva para desarrollar la habilidad de crear problemas en futuros profesores de educación media, donde -desde su punto de vista- se podrían seguir varios principios. En particular, destacamos el enfoque que versa sobre situaciones de creación de problemas que se generan en base a problemas propuestos en textos de matemática, vía modificación o reformulación del lenguaje o de las características de la tarea que se propone.

Asimismo, Abu-Elwan (1999) manifiesta que el uso de las actividades de creación de problemas para la enseñanza y aprendizaje de la matemática requiere de varias habilidades, y que la más importante para nuestro trabajo es reconocer relaciones entre diferentes tópicos matemáticos dentro de un problema. Por medio de un estudio experimental comparativo de tres grupos de futuros profesores de matemática y con base en un análisis estadístico de una prueba de habilidad para crear problemas, este investigador concluye que las dos estrategias son efectivas para crear problemas y desarrollan la habilidad de creación en los futuros profesores de matemática.

1.2.3. Investigaciones sobre valoración de los problemas creados

De los diversos ámbitos de investigación en el campo de la creación de problemas, el análisis de los problemas creados ha sido tomado en cuenta por algunos investigadores en estos últimos años, con la propuesta de utilizar los problemas creados como un instrumento de evaluación. Así, Tichá y Hošpesová (2009) afirman que la creación de problemas podría ser usada como un instrumento de diagnóstico para descubrir las razones de la confusión y los errores que tienen los estudiantes cuando aprenden matemáticas. Creemos también que estos detalles, que pueden descubrirse analizando los problemas creados, deben estar acompañados de una competencia que el profesor de matemáticas debe tener, por lo que la propuesta de Malaspina (2015a) sobre el desarrollo de una competencia de análisis didáctico es importante. Esta competencia, siguiendo la idea de Malaspina (2015a), se puede desarrollar utilizando tareas adecuadas en la formación de profesores, y -en términos del EOS- la creación de problemas y su análisis didáctico son una tarea que ayuda al desarrollo de esta.

En este apartado mostraremos el trabajo de Sengül y Katranci (2012) sobre la relación entre resolución de problemas y creación de problemas; el de Isık et al. (2011) sobre las habilidades de creación de problemas matemáticos, considerando diferentes modelos de creación de problemas; el de Sengül y Katranci (2014), que está relacionado con la creación de problemas estructurados; todos estas investigaciones enfocadas en futuros profesores de matemática. Del mismo modo, el de Lin y Leng (2008), quienes usan la creación de problemas como una herramienta de evaluación. En el caso iberoamericano, las investigaciones pertinentes para nuestra investigación son escasas, por lo que citaremos solo los trabajos de Malaspina (2011b, 2014a, 2014c), Malaspina y Vallejo (2014) para el caso de profesores de primaria, y el de Salazar (2014).

A continuación, detallamos las investigaciones señaladas:

Sengül y Katranci (2012) investigaron los hábitos de profesores en formación en relación con la resolución y la creación de problemas matemáticos, en el caso particular de la teoría de conjuntos. Como marco teórico, se apoyaron en las estrategias de creación de problemas como el de Stoyanova (1998) y Brown y Walter (1990). Cabe destacar que en esta investigación se hizo uso de una rúbrica para evaluar los problemas creados por los participantes. Esta tuvo seis dimensiones: comprensibilidad del problema (lenguaje y expresiones), consistencia de los problemas con los principios matemáticos, estructura de los problemas, números de preguntas formuladas, tipos de problemas y solubilidad del problema. La conclusión más importante y que es relevante para nuestro trabajo se refiere a la falta de preparación de los profesores en formación en la creación de problemas. Además se manifiesta que se encontraron falencias en las etapas de creación relacionadas a la dificultad de los problemas dentro del ámbito de la educación primaria. Al respecto, los estudiantes evaluados hicieron recomendaciones sobre la practicidad de crear y resolver problemas, examinando fuentes distintas como libros usuales de matemática y procurando enfrentarse a diferentes tipos de preguntas o problemas matemáticos. Finalmente, el uso de la rúbrica para evaluar las habilidades de la creación de problemas nos proporciona una oportunidad para plantear nuestros instrumentos de investigación.

Isık et al. (2011) realizaron un estudio de las habilidades de 80 futuros profesores de matemática de educación primaria en una universidad estatal de Turquía. Esta investigación se enfoca en los procesos de selección, traslación, comprensión y edición de modelos planteados por Christou et al. (2005). Para tal propósito, a juicio de expertos, se construyó un test compuesto por cuatro ítems acerca de fracciones, que estuvo acorde al modelo de creación de problemas propuesto por Christou et al. (2005). Así, cada problema formulado fue analizado tomando en cuenta su apropiación al modelo. Todos los problemas fueron etiquetados por *true*, *false* o *blank*. El estudio revela que los futuros profesores de matemática, quienes se suponen deberán evaluar los problemas creados por sus estudiantes en clases y guiarlos al respecto, deberían ser educados en el proceso de creación de problemas.

Sengül y Katranci (2014) se proponen evaluar los casos de creación de problemas estructurados de futuros profesores de matemática de primaria, considerando el objeto matemático denominado razones y proporciones. De sus instrumentos, resaltamos el utilizado para analizar las respuestas de los futuros profesores: un formato de evaluación denominado *Problem Posing Evaluation Form* (PPEF), el cual fue desarrollado por los investigadores. Para nuestra investigación, es relevante describir que el formulario utilizado se compone de tres partes: (a) la evaluación de los problemas estructurados, (b) las experiencias durante el proceso de creación de problemas, y (c) las sugerencias de estrategias de solución. Los criterios para evaluar los problemas estructurados, según este formulario, son los siguientes: texto del problema (lenguaje y expresiones), la compatibilidad del problema con los principios matemáticos, el tipo o estructura del problema y la solubilidad del problema.

De las conclusiones formuladas por Sengül y Katranci (2014) resaltamos la que se relaciona con la dificultad de los futuros profesores de matemática respecto a la edición y caracterización de sus problemas, y principalmente a las confusiones acerca del concepto mismo de dicho término: los sujetos de investigación consideran ejercicios como sinónimo de problemas. También se considera que los futuros profesores tienen dificultades en diferentes aspectos durante la creación de problemas. Estas se vinculan con el resultado, edición, texto del problema, apropiado a la vida cotidiana y nivel a quien va dirigido el problema. Por otro lado, se toma en cuenta que los futuros profesores muestran la necesidad del uso de situaciones cotidianas para crear problemas. Esto respalda lo manifestado por Crespo (2008) en relación con la creación de problemas como una importante herramienta para conectar la matemática a la vida cotidiana y atraer la atención de los estudiantes.

Lin y Leng (2008) estudian los problemas matemáticos creados por estudiantes con talento para la matemática, para lo cual emplean la propuesta de Silver y Cai (2005). Estos investigadores crearon una rúbrica para evaluar, en especial, los procesos cognitivos de las respuestas de los estudiantes a una actividad de creación de problemas. Esta rúbrica fue adaptada del *Mathematics Framework for the National Assessment of Educational Progress* (2005) de Singapur, que describe tres niveles de complejidad matemática: baja, media y alta. También utilizaron la propuesta de Silver y Cai (1996) para clasificar los problemas creados por los estudiantes, sujetos de su investigación (ver Figura 2). Cabe resaltar que el grupo de estudiantes partícipe de esta investigación se caracterizó por ser un grupo con altas habilidades matemáticas y ninguna experiencia previa en creación de problemas, de tal forma que los profesores tuvieron un papel importante como facilitadores y su trabajo fue fundamental para la evaluación de los aprendizajes. Lin y Leng (2008) muestran, en una de sus conclusiones, la importancia de analizar los tipos de problemas creados y los procesos de pensamiento de cada estudiante, ya que se relacionan con la construcción de la taxonomía del proceso cognitivo. Estos pueden potencialmente mostrar a los profesores las competencias y comprensión del ámbito matemático de los estudiantes.

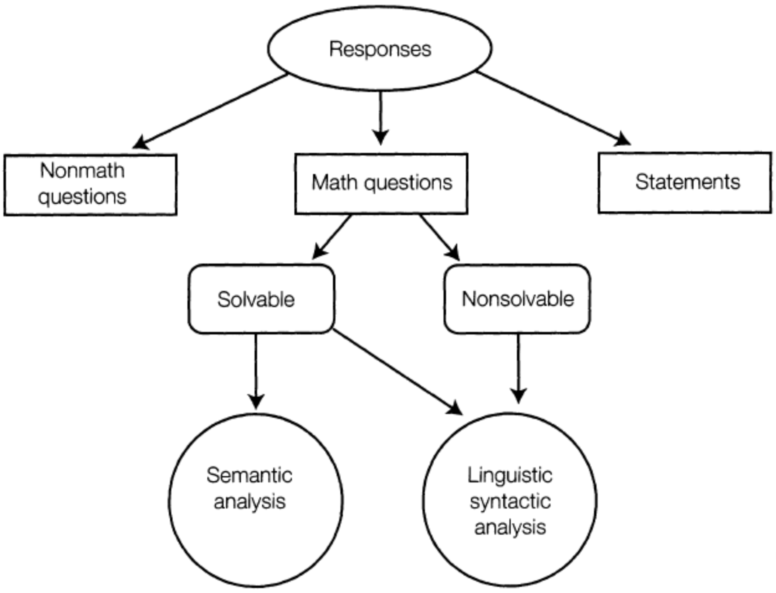


Figura 2. Esquema analítico para la clasificación de los problemas creados por los estudiantes

Fuente: Silver y Cai (1996, p. 526)

En el caso latinoamericano, las investigaciones pertinentes para los propósitos de este trabajo son escasas. Así tenemos los trabajos de Malaspina (2011b, 2014c, 2014a), Malaspina y Vallejo (2014) y Salazar (2014), los cuales muestran diversas formas de enfocar tanto la motivación a la creación de problemas como el intento de análisis de un buen problema creado. En el caso de Malaspina (2011b), el autor nos muestra una propuesta de análisis para la evaluación de los problemas creados, considerando los criterios de idoneidad EOS (este aspecto será explicando en extenso en el Capítulo 3). Creemos que esta descripción de un buen problema desde el punto de vista didáctico y en asociación con el EOS, desde un punto de vista más global, presenta una propuesta interesante para analizar y valorar los problemas creados. De la misma forma, nos da herramientas para realizar nuestro estudio de la idoneidad de los problemas creados por profesores en servicio respecto a una actividad.

Cabe resaltar que la propuesta de Malaspina (2011b) tiene relación con el marco mostrado en Koichu y Kontorovich (2013), situación que explicaremos en detalle en el Capítulo 3. Asimismo, en Malaspina (2014c, 2014a) y Malaspina y Vallejo (2014) se menciona que todo problema matemático tiene cuatro elementos fundamentales: información, requerimiento, contexto y entorno matemático. Así, en Malaspina y Vallejo (2014) se presentan tres problemas creados considerando la creación de problemas por elaboración y por variación de un problema dado. En esa misma línea, en Malaspina y Vallejo (2014) y Malaspina (2014a) se muestran reflexiones sobre la creación de problemas, tanto desde el punto de vista didáctico como desde la propuesta para mejorar la competencia didáctica y matemática de los profesores; por citar un ejemplo, en Malaspina (2014a) se manifiesta que “la creación de problemas provee oportunidades en las cuales las dos competencias (didáctica y matemática) tienen la posibilidad de interactuar en forma creativa” (p. 8).

Por su parte, Salazar (2014) realiza una investigación considerando una experiencia de aula y el efecto que produce en la comprensión y el rendimiento académico de futuros profesores de matemática. Esta experiencia didáctica se basa en la incorporación de tareas que implican modificación de problemas propuestos en libros de textos. Cabe resaltar que el trabajo de campo toma en cuenta como contexto de reflexión el objeto matemático continuidad de funciones reales de variable real. Como estrategia de creación de problemas, utiliza la propuesta de Malaspina (2013a) sobre los problemas pre y problemas pos para crear problemas por variación de un problema dado. Asimismo, utiliza la propuesta de los elementos básicos de un problema (en nuestro trabajo, este aspecto se explica en detalle en el Capítulo 3). Con ayuda de la observación participante y el registro detallado de información como técnicas de investigación, la investigadora analiza sus resultados y concluye que la actividad de modificación de problemas fue motivadora para los estudiantes y esta permitió un mejor desempeño en el desarrollo de la sesión de clase. También menciona que se observó mayor profundización de los contenidos asociados a la continuidad de funciones en las evaluaciones realizadas luego del desarrollo de la actividad.

1.2.4. Investigación relacionada con la creación de problemas en el entorno de las funciones

Revisando la literatura, encontramos dos trabajos relacionados con nuestro propósito: el primero desarrollado por Malaspina (2015b), que nos presenta una actividad de creación de problemas relacionado con la función cuadrática; y, el segundo, el de Malaspina, Rubio y Torres (en prensa), que presenta una propuesta de creación de problemas con énfasis didáctico y que se basa en experiencias didácticas con profesores en servicio.

En el artículo de Malaspina (2015b) encontramos la experiencia desarrollada por el investigador: un taller con profesores de secundaria bajo la perspectiva de la creación de problemas. El episodio transcurre bajo la consigna de introducir el tema de función cuadrática, luego de haber trabajado con los participantes problemas y gráficos de funciones afines (funciones de la forma $f\ (x) = \ ax\ +\ b$ para $x\ \in \mathbb{R}$ con a y b parámetros en $\mathbb{R}$). El estudio se centró en el trabajo individual y luego en parejas. La indicación fue que el problema creado debía ser un problema de contexto extramatemático (problemas vinculados a situaciones cotidianas). La tarea propuesta se ve en la Figura 3.

Tarea

Crear un problema de contexto extra matemático en cuya solución se emplee la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15,\ x \in R$.

Figura 3. Tarea de creación de problemas sobre funciones

Fuente: Malaspina (2015b, p. 5)

Malaspina (2015b) señala que esta tarea resulta interesante puesto que obliga a los participantes a realizar actividades ajenas a su rutina; es decir, proponer problemas de corte novedoso sobre funciones cuadráticas utilizando funciones afines. Así, de la lista de problemas creados por los profesores participantes del taller, surgió el problema al que el investigador pretendía que llegaran todos (ver Figura 4):

Esbozar el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$*, empleando los gráficos de dos funciones afines.*

Figura 4. Problema sobre funciones cuadráticas creado en el taller
Fuente: Malaspina (2015b, p. 4)

De las conclusiones más importantes, resaltamos la relacionada con la ventaja del uso de la creación de problemas:

> Una ventaja de usar la creación de problemas es involucrar a los participantes en la búsqueda de relaciones intramatemáticas y extramatemáticas y afrontar el reto de resolver problemas creados por ellos mismos o por sus coparticipantes. Esto fue evidente en el taller realizado, pues las socializaciones de problemas y sus soluciones contribuyeron a crear nuevos problemas a partir de los problemas que se socializaba. (Malaspina, 2015b, p. 141)

Cabe mencionar que la estrategia manejada en el taller dirigido por Malaspina (2015b) nos servirá de modelo para llevar a cabo nuestros talleres de creación de problemas con profesores en servicio, y extenderemos su descripción en los Capítulos 3.

En la investigación de Malaspina et al. (en prensa), se muestra el desarrollo de un taller acerca de creación de problemas sobre funciones lineales. Como consecuencia de este estudio, se constata que el desarrollo de tareas de creación de problemas que faciliten o profundicen aprendizajes es deficiente en la competencia docente de análisis didáctico. Con la ayuda de elementos teóricos del EOS, como la elaboración de configuraciones, los investigadores analizan los problemas creados mediante sus soluciones, de tal forma que en una de sus conclusiones afirman que existe una deficiencia en la formulación de problemas para la enseñanza y aprendizaje. Este aspecto se identifica con la concepción de un problema didáctico, cuya elaboración implica el manejo de una competencia de análisis didáctico. Cabe mencionar que para el desarrollo del taller de creación de problemas los investigadores utilizan la estrategia episodio, problema pre y problema pos (EPP), enfocándose principalmente en los problemas pre. Al respecto, concluyen que esta estrategia deberá ser reforzada con una fase de reflexión sobre las prácticas matemáticas realizadas y los objetos asociados a ella; esta actividad deberá ser desarrollada por los proponentes.

El análisis de estos trabajos sobre creación de problemas, tanto de las funciones como de otros objetos matemáticos, descritos anteriormente, nos permite ubicar nuestra investigación y proponer una estrategia sobre creación de problemas con énfasis didáctico, en la que la competencia de análisis didáctico juega un papel importante.

Finalmente, las investigaciones de creación de problemas sobre el objeto función cuadrática son escasas. Por lo que creemos importante seguir aportando a la creación de problemas, especialmente, en el estudio de la función cuadrática como objeto de reflexión para la creación de problemas.

1.3. Justificación de la investigación

En este apartado presentaremos justificaciones de nuestro trabajo dentro del campo de la educación matemática, del currículo nacional e internacional y de la línea de investigación que corresponda. También mostraremos una relevancia personal basada en nuestra experiencia.

1.3.1. Desde el campo de investigación que corresponda

De la descripción de los focos de atención en la investigación de la creación de problemas descritos en el apartado 1.1, tomamos la referencia de Singer et al. (2013), respecto al ámbito de investigación de la creación de problemas como herramienta de investigación y enseñanza.

Nuestra elección también está justificada por las diversas investigaciones sobre creación de problemas como: Sengül y Katranci (2012, 2014), Isık et al. (2011), Lin y Leng (2008), Tichá y Hošpesová (2013), Malaspina (2011b, 2014a, 2014c); Malaspina y Vallejo (2014), Silver y Cai (1996, 2005).

Del mismo modo, consideramos el trabajo de Koichu y Kontorovich (2013) como relevante, puesto que afirman que hay muchos estudios vinculados con la investigación sobre la creación de problemas y sus aspectos relacionados, y se refieren a estos como el campo de investigación que se encarga del estudio de las habilidades en la creación de problemas y procesos asociados; también están los estudios relacionados con las oportunidades de aprendizaje heredados de la creación de problemas. Inclusive, hay estudios que utilizan la creación de problemas como una ventana de oportunidades para la comprensión de la matemática en estudiantes y profesores, y existen estudios de estrategias particulares para la creación de problemas. En este último aspecto situamos la propuesta de Malaspina (2014a), ya que propone la creación de problemas por variación de un problema dado y por elaboración con base en una situación específica. Esta propuesta de Malaspina (2014a) nos servirá de modelo para viabilizar nuestra investigación en los talleres con profesores en servicio y que se explica en detalle en el Capítulo 3.

Dentro de la amplia gama de ámbitos de investigación en el marco de las teorías más globales -esto es, los enfoques didácticos contemporáneos de la didáctica de la matemática-, seguimos la idea de Malaspina (2015a) respecto al EOS y la creación de problemas. El autor afirma que para el EOS, en el que se considera que el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender a realizar una práctica operativa (de lectura y producción de textos) y, especialmente, una práctica discursiva (de reflexión sobre la práctica operativa) que puede ser reconocida como matemática por un interlocutor experto, se encuentra “que implícitamente consideran la creación de los problemas como parte de la práctica operativa y discursiva, pues la creación de problemas conlleva la producción de textos y la reflexión sobre la práctica operativa, al hacer variaciones a problemas trabajados o elaborar nuevos problemas a partir de situaciones concretas” (Malaspina, 2015a, p. 3).

De lo anterior se puede colegir la importancia que se le debe dar a la creación de problemas y, en cierta forma, justifica nuestra investigación, pues ampliaremos el ámbito de estudio de la creación de problemas articulándolo con un enfoque más global en la didáctica de la matemática, para proponer una nueva estrategia de creación de problemas y valorarlos desde el punto de vista didáctico, es decir, problemas creados para la enseñanza considerando las facetas asociadas como el producto de la creación.

Por otro lado, como lo manifiesta Silver (2013), si bien es cierto que la creación de problemas tiene diversos focos de atención, todavía hay mucho por investigar.

> [...] el progreso se ha visto obstaculizado por la falta de una explicación teórica explícita, basada en la relación entre la creación de problemas y resolución de problemas que sea consistente con la evidencia existente y que podría ser probado en nuevas investigaciones. Mi presentimiento es que estamos muy cerca de ser capaces de proporcionar una explicación y que hacerlo sería un gran avance en nuestra comprensión de la creación de problemas matemáticos. (p. 160)

Esta problemática tiene que ser discutida en intensidad para tomar una postura y que esta se relacione con la conexión entre resolución de problemas y creación de problemas, ya que esta última puede ser un medio para recrear en el estudiante auténticas experiencias como las vividas por un matemático profesional, pues la creación de problemas es un importante componente de la creación matemática (Silver, 1994). Por tal motivo es trascendente que se estudie los problemas creados y que se pueda visualizar diversos componentes relacionados con el estudiante y la matemática, como su experiencia y su disposición hacia la matemática, ya que así estas se verán volcadas en la invención de un problema.

Diversos autores, como Koichu y Kontorovich (2013), proponen ubicar a la creación de problemas dentro de la línea de investigación de la resolución de problemas. Al respecto los autores señalan:

> [...] La creación de problemas es un caso especial de resolución de problemas. Una situación dada, un estímulo para la creación de problemas, es decir algún conjunto de condiciones e instrucciones del cual debe partir la creación de problemas. Un objetivo es la formulación, de un nuevo problema, por lo menos para el proponente, que satisface algunas especificaciones predefinidas. (p. 4).

Sin embargo, existen diversas investigaciones que muestran resultados contrarios al respecto. Así tenemos el trabajo de Cai y Hwang (2002), quienes en su estudio examinaron las habilidades de creación y resolución de problemas de estudiantes de Estados Unidos y China. Un resultado de esta investigación muestra diferencias entre las habilidades de resolución de problemas y las de creación. Toma como ejemplo el desempeño de los estudiantes chinos en la resolución y en la creación de problemas, y lo contrasta con los resultados de los estudiantes estadounidenses, en los que la relación no es tan clara.

Siguiendo esta línea, Crespo (2003) sugiere que los buenos resolutores de problemas podrían no ser tan buenos creadores de problemas. También menciona que la relación entre creación de problemas y resolución de problemas no se muestra tan clara y que es un aspecto que debe ser investigado.

De lo explicado en este apartado, asumimos una postura respecto al enfoque de Malaspina (2015a), ya que su propuesta permite ubicar la creación de problemas por variación de un problema dado en un ámbito bastante relacionado con la resolución de problemas; pero la creación de problemas por elaboración, a partir de una situación dada o configurada, o por requerimientos específicos, matemáticos o didácticos, está más relacionada con la creatividad matemática. Esta perspectiva es la que adoptamos para el presente trabajo y pretendemos, en cierta forma, responder a algunas de las actuales preguntas que han generado diversos estudios en la creación de problemas, como Cai, Hwang, Jiang, y Silver (2015) proponen: ¿Pueden los profesores de matemática plantear problemas de alta calidad? ¿Cómo se relacionan las habilidades de creación de problemas con las habilidades de resolución de problemas?

1.3.2. Desde el punto de vista curricular y los profesores en servicio

Nuestro interés por discutir la creación de problemas en un vínculo directo con el currículo y la formación de profesores en servicio queda resumido en lo mencionado por Silver, Kilpatrick, y Schlesinger (1990): los estudiantes necesitan practicar en la formulación de problemas matemáticos. Si siempre se les presenta problemas bien formulados que contienen información necesaria para su solución, ¿cuándo aprenderán a enfrentarse a situaciones en las que las ideas matemáticas apropiadas y técnicas no son obvias, como sucede en la vida real?

Nuestra experiencia como profesores de educación básica regular nos ha mostrado que se pone poco énfasis en el desarrollo de la creación de problemas en las clases rutinarias de matemática. Más todavía, se evitan actividades de creación de problemas debido a un prejuicio de que los estudiantes no están capacitados para crear buenos problemas. A propósito, y tomando en consideración que sin problemas creados no hay problemas que resolver, emergen dos preguntas, como lo proponen Singer, Ellerton, Cai, y Leung (2011): ¿quién crea problemas? Se sabe que todos podemos crear problemas y que el tipo de problema planteado depende del contexto en el que nos encontremos, así como del propósito de creación; la segunda pregunta sería ¿a quiénes van dirigidos los problemas matemáticos propuestos? Y eso dependerá del marco curricular en el que nos ubiquemos.

A continuación, justificamos nuestra investigación y trataremos de responder a las preguntas planteadas en el párrafo anterior, es decir, desde el ámbito curricular y el desempeño de los profesores de matemática en servicio.

Desde del ámbito curricular

El marco curricular de un determinado sistema educativo debería tomar en cuenta las razones de fuerza que involucran la inclusión de la creación de problemas. Cai et al. (2013) afirman que hay dos razones que sustentan que las actividades de creación de problemas tienen un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes.

Primero, las actividades de creación de problemas involucran usualmente tareas de demanda cognitiva. Con el uso de una estrategia específica de creación, como el caso de reformulación de un problema dado, el estudiante involucrado en este proceso necesitará ir más allá de los procedimientos de resolución de problemas y profundizará en concordancia con los objetivos de la actividad asignada. Segundo, dado que la resolución de problemas frecuentemente involucra el uso de procedimientos y habilidades rutinarias, en la creación de problemas el estudiante deberá desarrollar estrategias más elaboradas y avanzadas de resolución de problemas con el objetivo de brindar una solución satisfactoria a lo planteado y no solo para fortalecer la comprensión de un problema en contexto, sino para fomentar el desarrollo de estrategias de resolución de problemas más avanzados. Estas recomendaciones han sido tomadas en cuenta, en cierta forma, por algunos países desde hace varias décadas.

Silver (1994), basándose en el trabajo de matemáticos profesionales, argumenta que es necesario incorporar la creación de problemas en los distintos currículos para que el estudiante experimente el deseo de resolver problemas, plantear sus propios problemas y reflexionar sobre su práctica. Como ejemplo, Silver (1994) cita lo que se propuso en el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de 1989: “Se debe formular problemas interesantes basados en una amplia variedad de situaciones, tanto dentro como fuera de la matemática” (p. 258). En pocas líneas, se reconoce la necesidad de motivar a los estudiantes en la indagación de situaciones que no sean rutinarias, lo que permitirá educar el intelecto al generalizar ideas matemáticas. Esta recomendación también involucra realizar un trabajo de investigación respecto a las conjeturas y aprender a generalizar problemas con base en la actividad de creación.

De igual manera, en Australia se toma en consideración el tópico de creación de problemas. Así lo manifiesta *The National Statement on Mathematics for Australian Schools* (Silver, 2013): “Los estudiantes deben involucrarse en actividades matemáticas de extensión que fomenten la creación de problemas, el pensamiento divergente, la reflexión y la persistencia. Deben [...] plantear e intentar responder a sus propias preguntas”. (p. 39).

Esta característica plasmada en el NCTM no es ajena a lo que actualmente se viene trabajando sobre el tema en distintos países, como el Perú: así podemos notarlo en el diseño curricular (Perú, Ministerio de Educación, 2009), los mapas de progreso (Perú, Ministerio de Educación, 2014) y las rutas de aprendizaje (Perú, Ministerio de Educación, 2015). En este último rubro se señala que el sistema educativo peruano se centra en un enfoque de resolución de problemas, que orienta las actividades en la escuela de tal forma que:

> [...] permita al estudiante situarse en diversos contextos para crear, recrear, investigar y resolver problemas; involucrando la prueba de diversos caminos de resolución, el análisis de estrategias y formas de representación, la sistematización y comunicación de los nuevos conocimientos, entre otros. (Perú, Ministerio de Educación, 2015, p. 15).

Siguiendo la misma línea, Silver (1994) está de acuerdo con la idea de que la resolución de problemas se verá potenciado con la creación de problemas. A propósito, cita el trabajo realizado por investigadores japoneses y australianos sobre cómo incluir la creación de problemas en las clases rutinarias de matemática. Sin embargo, afirma que no se ha establecido, de modo conciso, la relación entre creación de problemas y resolución de problemas. Finalmente, Silver (1994) ilustra a la creación de problemas como una ventana de oportunidades para estudiar la comprensión matemática de los estudiantes, sumando a ello la posibilidad de analizar las actitudes y las disposiciones de los estudiantes frente a la matemática.

Ahora bien, es importante remarcar que las reflexiones de Silver (1994) se refuerzan con trabajos actuales como los citados en Cai, J., Hwang, S., Jiang, C, & Silber, S. (2015). Una muestra de la importancia que algunos países han dado a la creación de problemas lo evidenciamos en la propuesta curricular de Singapur.

El currículo de Singapur es considerado como parte de uno de los más importantes sistemas educativos en el mundo, pues enfatiza la resolución y la creación de problemas. Se puede citar la mención que se muestra en dicho currículo acerca de la creación de problemas, puesto que su sistema educativo, relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, se centra en la resolución de problemas. Así lo manifiestan Wong et. al. (2009, pp. 264-265):

> The framework of the Singapore Curriculum since 1990 has embodied Mathematical Problem Solving in its core. Mathematical problem solving, as stated in the framework, includes using and applying mathematics in practical tasks, in real life problems and within mathematics. It advocates that problems should cover a wide range of situations from routine to non-routine mathematical challenges in unfamiliar context as well as open-ended investigations that require heuristics and thinking processes.
>
> (El marco teórico del currículo de Singapur desde 1990 se ha centrado en la resolución de problemas matemáticos como eje de atención principal. La resolución de problemas, como se muestra en el marco teórico, incluye el uso y la aplicación de las matemáticas en diversas tareas prácticas, en problemas de la vida real y dentro de las matemáticas mismas. Esto implica que los problemas deberían cubrir un amplio rango de situaciones matemáticas retadoras rutinarias y no rutinarias de contexto novedoso como de investigaciones abiertas que requieran procesos heurísticos y de pensamiento.) (*Traducción propia*)

Además, reafirman el papel que juega la creación de problemas en el desarrollo curricular:

> Se promociona la resolución de problemas de matemáticas con el objetivo de desarrollar a los estudiantes para ser buenos resolutores de problemas; también es deseable que se conviertan en buenos creadores de problemas. Por lo tanto, la creación de problemas es otra experiencia de resolución de problemas que puede promover el aprendizaje comprometido y mejorar el proceso metacognitivo de los estudiantes (Wong et. al., 2009, p. 269)

En ese sentido, se necesita de profesores formados en la actividad de creación de problemas y, en particular, que tengan la competencia de estudiar la calidad de los problemas creados por sus estudiantes. De ahí la importancia de la actualización de los profesores de matemática para que conozcan las últimas propuestas sobre enseñanza de la matemática, en particular la creación de problemas y el uso de estos como instrumento de evaluación.

La función cuadrática en el ámbito curricular

En los diseños curriculares, desde hace décadas, se ha instaurado la enseñanza de las funciones como eje central del proceso y enseñanza de la matemática. Esto se debe a que el desarrollo histórico del concepto de función sugiere diversas preguntas del tipo: ¿se debe enseñar el cálculo sin funciones?, ¿cuándo se debe introducir la noción de función?, ¿qué definición de función se debe enseñar a los estudiantes principiantes?, como lo plantea Kleiner (2012).

En cierta forma, las preguntas formuladas por Kleiner (2012) han guiado desde hace buen tiempo la importancia de la enseñanza del concepto de función en el sistema escolar y han generado propuestas que se han materializado en diversos cambios curriculares. Una muestra de esta preocupación fue evidenciada por el matemático alemán Felix Klein, quien a inicios del siglo veinte sugirió que el concepto de función debería ocupar un papel principal en el currículo de matemática de la educación básica. Esta propuesta, como afirman Karp y Schuring (2014), fue discutida en la fase inicial de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) y fue tomada a bien por los interesados en la enseñanza del cálculo integral, pero no por aquellos que pretendían seguir manteniendo el aprendizaje de las manipulaciones algebraicas (expresiones y ecuaciones) como base fundamental para los posteriores aprendizajes de matemáticas. Esta preocupación originó un movimiento que se enfocó en el desarrollo del currículo de matemáticas y que fue liderado por Kilpatrick (1992), quien recalcó que el eje central de la reforma curricular debía ser el concepto de función. En estos últimos años la propuesta de Klein ha ganado terreno, por lo que el concepto de función está presente en los principales currículos de matemática en el mundo.

Cabe recalcar que la evolución del concepto de función se enfrasca en dos imágenes mentales, como lo muestra Kleiner (2012): la geométrica (expresada en forma de curva) y la algebraica (expresada como fórmula). También se encuentra la definición desde el punto de vista de *la lógica*, que define a la función como una correspondencia, refiriéndose a una imagen mental de entrada y salida de una máquina (*máquina de funciones*). De ahí que estas posturas son las que actualmente se manejan en algunos currículos, en especial la concepción lógica (abstracta, sintética) y la concepción algebraica (concreta, analítica). En particular, el concepto de función que actualmente se maneja pertenece a Euler, quien lo propuso en el siglo XVIII y que fue introducido en los 50’s del siglo pasado en la reforma denominada *matemática moderna*.

Nuestro país no ha sido ajeno a este fenómeno. En los documentos oficiales recientes, tanto en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (DCN) (Perú, Ministerio de Educación, 2009) y los Campos temáticos del Marco Curricular (Perú, Ministerio de Educación, 2014), se muestra el tratamiento de la función, en particular la función cuadrática. En el DCN 2009, se señala explícitamente que el objeto función cuadrática se debe enseñar en el tercer grado de educación secundaria, correspondiente al Ciclo VII de educación básica regular. En ese sentido, se hace una caracterización de la competencia asociada a este objeto en la Figura 5, respecto al organizador Números, relaciones y funciones para el Ciclo VII.

	CICLO VI	CICLO VII
NÚMERO, RELACIONES Y FUNCIONES	Resuelve problemas con números reales y polinomios; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.	Resuelve problemas de programación lineal y funciones; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.
GEOMETRÍA Y MEDICIÓN	Resuelve problemas que relacionan figuras planas y sólidos geométricos; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.	Resuelve problemas que requieren de razones trigonométricas, superficies de revolución y elementos de Geometría Analítica; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD	Resuelve problemas que requieren de las conexiones de datos estadísticos y probabilísticos; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.	Resuelve problemas de traducción simple y compleja que requieren el cálculo de probabilidad condicional y recursividad; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.

Figura 5. Competencia por ciclo DCN (2009)

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2009, p. 318)

De la misma forma, en el DCN 2009 se desagrega la competencia mostrada en la Figura 5 en capacidades e indicadores específicos que resumimos en la Tabla 1.

Tabla 1. Competencias y contenidos asociados a la función cuadrática de una variable

Capacidad	**Contenidos**
• ***Comunicación matemática:*** Representa funciones cuadráticas, valor absoluto y raíz cuadrada en tablas, gráficas o mediante expresiones analíticas. • ***Razonamiento y demostración:*** Identifica el dominio y rango de funciones cuadráticas, valor absoluto y raíz cuadrada. Elabora modelos de fenómenos del mundo real con funciones • ***Resolución de problemas:*** Resuelve problemas que implican la función cuadrática.	• Ecuaciones cuadráticas. Dominio y rango de funciones cuadráticas. • Gráfica de funciones cuadráticas. • Modelación de fenómenos del mundo real con funciones. • Análisis de funciones cuadráticas completando cuadrados. • Gráficas de las funciones, valor absoluto, cuadrática y raíz cuadrada.

Por otro lado, en documentos recientes como los Mapas de Progreso (Perú, Ministerio de Educación, 2014), se visualiza algunas competencias correspondientes al Ciclo VII (tercero, cuarto y quinto grado de educación secundaria), donde funciones como la cuadrática cobran importancia. Así, tomando el documento oficial correspondiente al mapa de progreso de cambio y relaciones (Perú, Ministerio de Educación, 2014, p. 8), se describe el aprendizaje correspondiente a la educación básica regular:

a) Interpretación y generalización de patrones. Implica el desarrollo de capacidades para identificar, interpretar y representar la regularidad existente en diferentes sucesiones a través de una expresión general que modele el comportamiento de sus términos.
b) Comprensión y uso de igualdades y desigualdades. Implica el desarrollo de capacidades para interpretar y representar las condiciones de una situación problemática, mediante igualdades o desigualdades, que permite determinar valores desconocidos y establecer equivalencias entre expresiones algebraicas.
c) Comprensión y uso de las relaciones y funciones. Implica el desarrollo de capacidades para identificar e interpretar las relaciones entre dos magnitudes, analizar la naturaleza del cambio y modelar situaciones o fenómenos del mundo real mediante funciones, con la finalidad de formular y argumentar predicciones.

En el mismo documento, se hace una descripción de las competencias correspondientes al Ciclo VII (tercero, cuarto y quinto grado de educación secundaria), como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Competencia relacionada con la función cuadrática.

Competencias del mapa Cambio y relaciones correspondientes al ciclo VII
Generaliza y verifica la regla de formación de progresiones geométricas, sucesiones crecientes y decrecientes con números racionales e irracionales, las utiliza para representar el cambio y formular conjeturas respecto del comportamiento de la sucesión. Representa las condiciones planteadas en una situación mediante ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones lineales con una variable; usa identidades algebraicas y técnicas de simplificación, comprueba equivalencias y argumenta los procedimientos seguidos. Modela diversas situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas, las describe y representa con expresiones algebraicas, en tablas o en el plano cartesiano. Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes puede tener un comportamiento lineal o cuadrático; formula, comprueba y argumenta conclusiones.

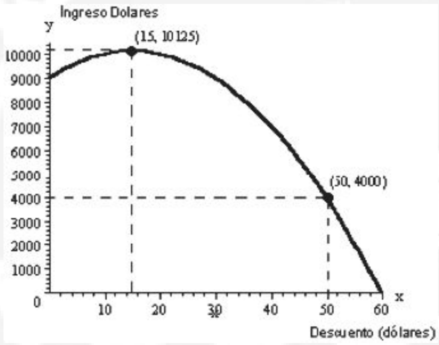
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2014, p. 9)

Asociados a esta competencia se tienen los siguientes logros, propuestos, como ejemplos, en las Rutas de Aprendizaje (Perú, Ministerio de Educación, 2014, p. 32)

a) Resuelve situaciones problemáticas mediante ecuaciones cuadráticas con una variable e interpreta los valores obtenidos de acuerdo con el contexto del problema.
b) Discrimina si un conjunto de pares ordenadas o un gráfico cartesiano representa a una función lineal, cuadrática o exponencial, a partir de las características de crecimiento de cada función.
c) Interpreta y describe modelos de funciones cuadráticas; por ejemplo, interpreta los intervalos de crecimiento y decrecimiento en la función

$$y = -5x^2 + 150x + 9000$$

que define la relación de ingreso y descuento.



d) Argumenta sus predicciones sobre el comportamiento lineal o cuadrático de la relación entre dos magnitudes; por ejemplo, respecto a los gráficos y tablas que se presentan líneas abajo, indica que se observa que por cada kilo adicional de arroz aumenta el precio en 4, 5 soles; por tanto, el cálculo del precio del arroz está dado por la función lineal $y = 4,5x$ y su comportamiento es lineal.

Ahora bien, asociados a estas competencias tenemos los conocimientos matemáticos pretendidos en los campos temáticos de los Mapas de Progreso (Perú, Ministerio de Educación, 2014). A continuación se presentan los conocimientos fundamentales que desarrollarán las competencias en el transcurso de la educación básica regular.

Tabla 3. Campo temático relacionado con la función cuadrática

Relacionado a situaciones de regularidad, equivalencia y cambio
• Sucesiones. • Progresión geométrica. • Operaciones algebraicas. • Inecuaciones lineales. • Sistema de ecuaciones lineales. • Ecuaciones cuadráticas. • Funciones cuadráticas. • Función trigonométrica (seno y coseno).

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2014, p. 65)

Esta propuesta relacionada con el objeto función cuadrática nos interesa, ya que mediante la resolución y la creación de problemas se puede desarrollar las competencias mostradas líneas arriba. Esto implica que el profesor de matemática deberá estar capacitado para proponer y evaluar actividades que involucren la resolución y la creación de problemas, en especial esta última. Por lo tanto, es necesario realizar nuestra investigación centrados en las funciones cuadráticas, ya que se ha mostrado que es un objeto de suma importancia para el desarrollo de la matemática superior y competencias propuestas en los marcos curriculares actuales.

Desde la perspectiva de los profesores en servicio

En el 2007 fue publicado el Proyecto Educativo Nacional al 2021: la educación que queremos para el Perú (PEN 2021), y desde ese año se ha venido implementando ciertos cambios sustanciales en el campo educativo peruano. Este proyecto, que estuvo a cargo del Consejo Nacional de Educación (CNE), está siendo aplicado por el Ministerio de Educación del Perú.

En el documento en mención, se especifica el tercer objetivo estratégico: *los maestros bien preparados que ejercen profesionalmente la docencia*, que es importante para nuestra investigación. Este objetivo se puede explicitar como el cambio en el sistema integral de formación docente, esto es inicial y continuamente, y que deberá ser desarrollado en concordancia con los avances pedagógicos contemporáneos tanto en los Institutos Superiores Pedagógicos como las universidades acreditadas. Esta iniciativa forma parte de una respuesta a uno de los problemas resaltantes en estas dos últimas décadas: casi un tercio de docentes enseña aquello para lo que no se preparó. Así, según las cifras del 2002, el 26% y 31% de los docentes de educación primaria y secundaria, respectivamente, no cumplían con la certificación académica requerida para el nivel educativo en que se desempeñaban, según el Consejo Nacional de Educación (2007).

El porcentaje de docentes que presentan deficiencia en el ámbito académico del 2002 ha disminuido, ya que el Ministerio de Educación durante esta última década ha venido implementando una serie de capacitaciones muy frecuentes. Lamentablemente, coincidimos con el Consejo Nacional de Educación (2007), ya que "la persistencia de hábitos de enseñanza siembra dudas sobre el real impacto de este importante esfuerzo nacional" (p. 89). Creemos que estos resultados, específicamente en el área de la enseñanza de la matemática, fruto de estas capacitaciones brindadas por diversos centros de enseñanza superior, no han respondido a las exigencias esperadas, ya que no todas estas instituciones tienen como centro de atención la investigación en el área de la Didáctica de la Matemática. Esta aseveración va respaldada por el artículo presentado por Flores y Gaita (2014) acerca de la situación actual de la enseñanza de la matemática en el Perú, ya que desde los años 80, a través de la Maestría en Enseñanza de la Matemática, la Pontifica Universidad Católica del Perú (PUCP) ha articulado los enfoques didácticos dentro de la educación matemática y las propuestas de mejora para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en el Perú. Esta situación no ha sido significativa en otros centros de estudio superior, como lo proponen Carranza y Malaspina (2015), quienes también hacen un recuento de la educación matemática en el Perú -que ha sido influenciada fuertemente por experiencias externas de enseñanza de la matemática- y describen que la investigación en Didáctica de la Matemática está distribuida en pocas universidades, por ejemplo, la PUCP con su centro de investigación IREM-Perú.

Por otro lado, en estos últimos años la formación de profesores ha sido relegada a una agenda rutinaria, especialmente en el Perú; así se muestra en el estudio realizado por el Banco Mundial (2006) respecto a uno de los factores fundamentales de la problemática educativa peruana:

> La mala calidad de los docentes y de la enseñanza. Estos problemas de calidad resultan fundamentales y podrían estar relacionados con la falta de capacidad de los profesores. Esto parece difícil de corregir con los tradicionales métodos de capacitación docente, y probablemente tiene que ver con la selección y motivación de los maestros. [...] a esto se añade un currículo demasiado ambicioso y conceptualmente complejo, difícil de aplicar para los docentes (p. 10)

Esta problemática se sigue manteniendo de alguna forma, ya que la ubicación del Perú en la evaluación PISA 2012 frente a los países participantes, aunque muestre cierta mejora, es lastimosa (Perú, Ministerio de Educación, 2013). Una de las causas de este fracaso se relaciona con la prevalencia en la educación peruana de problemas rutinarios, ejercicios repetitivos que no permiten que la creatividad de los estudiantes se muestre en su real dimensión. Según los indicadores de PISA, el estudiante debe estar en la capacidad de resolver problemas aplicados en contextos diversos, es decir, problemas relacionados con la realidad. Ahora bien, si queremos que nuestros estudiantes estén preparados para rendir no solo las pruebas PISA sino problemas relacionados con su contexto, debemos tener profesores bien formados en las nuevas estrategias relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Ahora bien, en nuestra investigación tomamos las ideas de Silver (1994) en relación con los futuros profesores de matemática, ya que si queremos educar en creación de problemas es necesario que el profesor que tenga esa función deba estar capacitado para tal ejercicio. Es decir, tenga las cualidades de un buen creador de problemas y, como consecuencia, enseñar y evaluar a sus estudiantes en la creación de problemas matemáticos. Así mismo, en el trabajo de Malaspina y Vallejo (2014) se muestran razones didácticas e investigativas en relación con la creación de problemas. Las razones didácticas se muestran para la enseñanza (creación de problemas por los profesores) y el aprendizaje (creación de problemas por los estudiantes), y de ellas realizamos una lista breve de las que consideramos importantes para nuestro trabajo.

Razones didácticas para la enseñanza:

- Proponer problemas que sean cercanos a las motivaciones de los estudiantes y a los contextos en los que viven.
- Crear secuencias de problemas de dificultad gradual que lleven a un problema particularmente interesante.
- Proponer problemas y actividades que respondan a las orientaciones generales que suelen darse en los diseños curriculares y documentos complementarios desde los organismos centrados en la educación.
- Proponer problemas que recojan las iniciativas, percepciones o interrogantes de los estudiantes, que contribuyan a aclarar o ampliar ideas, ante el reto de resolver problemas o de comprender temas matemáticos.

- Llenar el vacío que hay en la mayoría de textos de matemáticas, sobre todo en los niveles escolares.
- Tener problemas adecuados para aplicar las teorías sobre Educación Matemática, fuertemente apoyados en la resolución de problemas.
- Mejorar la calidad de las evaluaciones.
- Consolidar la formación matemática de los profesores.

Razones didácticas para el aprendizaje

- Fortalecer las capacidades de resolver problemas, de formular (se) preguntas, de identificar problemas y de investigar.
- Establecer conexiones entre la matemática y otros campos del conocimiento.
- Ampliar la visión de las matemáticas.
- Fortalecer la autoestima del estudiante.

Respecto a las razones investigativas resaltamos la relacionada con aplicar y continuar investigaciones sobre educación matemática basadas en la resolución y creación de problemas. Precisamente esta es una justificación académica para nuestro trabajo, ya que intentamos promover el estudio del campo de la creación de problema con miras a proponer propuestas de mejora en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Precisamente, siguiendo lo planteado por Singer et al. (2013), ubicamos nuestra investigación dentro del marco de la creación de problemas como un instrumento para la investigación e instrucción, que es considerado un tópico de importancia dentro del campo de la creación de problemas. De esta forma, pretendemos motivar la aplicación de los últimos resultados en el campo de la investigación en educación matemática para proponer cambios curriculares tanto en formación inicial como continua de profesores de matemática.

1.4. Preguntas y objetivos de investigación

En este punto, surge la necesidad de formularnos una pregunta para iniciar nuestra investigación. Así, basándonos en los antecedentes presentados, las justificaciones mencionadas y nuestro interés personal, la pregunta de investigación que guiará nuestro trabajo es:

¿Cómo crear problemas de funciones cuadráticas mediante una estrategia que integre nociones del análisis didáctico en profesores de servicio?

1.4.1. Objetivo general

Para responder a nuestra pregunta de investigación, nos planteamos el siguiente objetivo general:

Integrar nociones del análisis didáctico a una estrategia de creación de problemas, para la invención de problemas didácticamente buenos, por profesores en servicio, en el entorno de las funciones cuadráticas.

1.4.2. Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general, planteamos los siguientes objetivos específicos de investigación, considerando la muestra de profesores de matemática en servicio:

1 Identificar los conocimientos matemáticos de los profesores sobre la función cuadrática y los objetos matemáticos asociados a ella.

2 Analizar e identificar las prácticas matemáticas, configuraciones epistémicas y cognitivas asociadas a la resolución y creación de problemas sobre funciones cuadráticas por variación de un problema dado.

3 Explicitar la vinculación de la calidad de los problemas creados con los criterios de idoneidad didáctica.

CAPÍTULO 2

ESTUDIO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Mi experiencia al hacer matemáticas es la de entrar en una mansión a oscuras. Entras en la primera habitación y está a oscuras, completamente a oscuras. Tropiezas con los muebles, te tambaleas. Poco a poco aprendes dónde está cada mueble. Y finalmente, tras unos seis meses, encuentras el interruptor y das a la luz. De repente todo se ilumina y puedes ver dónde estás exactamente. Entonces entras en la siguiente habitación a oscuras...

Andrew Wiles, sobre su demostración del Último Teorema de Fermat, *1993*

En este capítulo, mostramos un estudio del contenido matemático para la enseñanza relacionado con las funciones; en particular, centramos nuestra atención al estudio de la función cuadrática. Se inicia el capítulo presentando una breve revisión histórica de la noción de función, destacando el desarrollo epistémico de dichas nociones y mediante el uso de los elementos teóricos del EOS (en especial las configuraciones de objetos); luego se realiza un análisis de las configuraciones epistémicas en la enseñanza no universitaria del objeto función cuadrática.

Este capítulo nos servirá de sustento para analizar los problemas creados por los profesores en servicio utilizando configuraciones. Todo ello se explica en detalle en el Capítulo 4.

2.1. Evolución histórica de la noción de función

El concepto de función ha sido considerado durante mucho tiempo como el más importante en todo el desarrollo de la matemática (Ponte, 1992). Diversos investigadores han realizado un estudio de su evolución histórica (Sánchez & Valdés, 2007; Kleiner, 2012; Youschkevitch, 1976; Higueras, 1998; Ponte, 1992; Font et. al, 2012). La coincidencia entre estos investigadores radica en que la noción de función, como se maneja en nuestro tiempo, es relativamente nueva. Sin embargo, para una real comprensión de este desarrollo, es necesario estudiar algunos conceptos asociados a la noción de función y cuyo tratamiento es de suma importancia.

En las siguientes líneas, describimos el desarrollo histórico de la noción de función tomando como base para este propósito la investigación de Font et al. (2012) y complementado algunos aspectos con los trabajos de Youschkevitch (1976), Ponte (1992), Sánchez y Valdés (2007), Swetz (2013), Hitt (2002), Higueras (1998), Kline (1990a, 1990b, 1990c), Kleiner (2012) y Cha (1999).

El objeto matemático *función* es el resultado de una emergencia que se ha producido a lo largo de mucho tiempo, y diversas culturas han influenciado en su consolidación:

- Los babilonios realizaron anotaciones de sus observaciones mediante tablillas. En algunos casos, estas observaciones estaban dirigidas a fenómenos astronómicos. Dichas anotaciones se pueden catalogar como una aproximación a la noción del concepto de función. Aunque no utilizaron letras para representar cantidades variables, los términos longitud, anchura, área y volumen servían perfectamente para este fin. En esta etapa las formas de representación son las tablas y el lenguaje verbal.

- Los filósofos de la cultura griega, quienes sentarían las bases del carácter deductivo y axiomático de la matemática, consideraban el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas. Según Aristóteles, los objetos matemáticos no estaban sujetos al movimiento, con la sola excepción de aquellos a que se refiere la astronomía. Esta visión estática es claramente dominante en los Elementos de Euclides (como lo señala Irving, 2013). A pesar de ello, en la Grecia clásica las curvas se consideraron como secciones o bien como la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones. En esta etapa las formas de representación son el lenguaje verbal y las figuras geométricas.

- En la época griega la relación entre número y magnitud fue problemática y el uso de las proporciones fue fundamental para poder convivir con ella. En lugar de relacionar, por ejemplo, la longitud de la circunferencia con el diámetro, se comparaban la longitud de una circunferencia con la longitud de otra y el diámetro de la primera con el de la segunda en forma de proporción (L_1:L_2=D_1:D_2). El recurso a las proporciones dificulta considerar que la longitud está en función del radio.

- Durante la Edad Media, en el mundo occidental, aumentó el interés por el estudio de los fenómenos sujetos al cambio, en especial interesó mucho el estudio del movimiento de los objetos.
- Se puede considerar que la primera idea incipiente de función como una relación entre variables aparece en las escuelas medievales de Oxford y París. En la Edad Media aparece la primera gráfica conocida, la cual representa los cambios de latitud de los planetas respecto de la longitud. El método que introdujo Oresme para representar gráficamente el movimiento (uniforme, uniformemente acelerado y de otro tipo) tenía como principal limitación la carencia de un simbolismo matemático adecuado.
- Oresme, matemático francés, adelantó las ideas geométricas primigenias de Descartes, de tal forma que plantea un uso más sofisticado de coordenadas en la forma de longitud y latitud. Su idea central fue el análisis de la relación entre magnitudes variables, por lo que tiene un significado histórico muy importante, como muestran Sánchez y Valdés (2007, p. 55):

1. La introducción de la medición de algunas magnitudes físicas mediante segmentos de recta.
2. El reconocimiento de la importancia del estudio de las relaciones funcionales entre magnitudes.
3. El estudio de estas relaciones mediante la representación gráfica y el uso de coordenadas.

De ahí que Oresme da pie a la idea de dependencia e independencia de magnitudes, cuyo propósito era utilizar el medio geométrico para la representación de cualidades por medio de cantidades. Una muestra de sus ideas se observa en el uso de la representación gráfica que se encuentra en su *método gráfico* para explicar el teorema de la rapidez media; este teorema también es conocido como *el teorema de Merton*, ya que primero se desarrolló en el Merton College de Oxford (Holton & Brush 2001). A continuación mostramos la estrategia de solución que Oresme propuso para este problema.

En notación moderna, como se muestra en Holton y Brush (2001), el teorema de la rapidez media refiere a un movimiento que es acelerado con una rapidez inicial *Vo* y rapidez final *V*, en un intervalo de tiempo *T*. El teorema afirma que la distancia recorrida es igual a la distancia que se obtiene en otro movimiento que toma lugar la rapidez media (esto es, una rapidez constante igual al promedio de *Vo* y *V*) durante el mismo intervalo de tiempo *T*. Es decir, si todo el movimiento hubiera considerado una rapidez constante de *Vo* para un tiempo *T*, la distancia sería *Vo.T*; si consideramos una rapidez constante *V* para un tiempo *T*, esta distancia recorrida sería *VT*; pero, en el caso en que la rapidez cambia uniformemente de *Vo* a *V*, la distancia recorrida será la misma si consideramos la rapidez como una rapidez constante de magnitud *1/2 (Vo+V)*, por lo que la distancia recorrida sería $\frac{T(Vo+V).}{2}$

Este teorema puede ser entendido fácilmente, pero lo interesante está en el método utilizado por Oresme para atacar este problema en el siglo XIV.

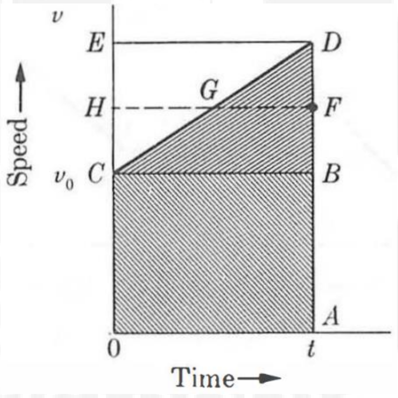


Figura 6. Representación gráfica de Oresme sobre la relación entre rapidez, tiempo y espacio.

Fuente: Holton y Brush 2001, p. 73

El razonamiento de Oresme se basa en la interpretación de la Figura 6, en la que se muestra que una cantidad como *Vo.T* es el producto de dos números, que puede ser representado como el área de un rectángulo cuyas medidas de sus lados son *Vo* y *T*. El rectángulo *OABC* muestra esta idea. En forma similar, *VT* es el área de un rectángulo OADE. Como consecuencia, Oresme afirma que la distancia recorrida cuando la rapidez cambia uniformemente de *Vo* a *V* debe estar representada por el área sombreada correspondiente al rectángulo *OABC* más el área del triángulo *CBD*.

Por consiguiente, se puede concebir que el movimiento acelerado se representa por el área sombreada OABDC; la prueba del teorema de la rapidez media es simple. Así, si a esta área le sumamos el triángulo *CGH*, y restamos el triángulo *GFD*, obtenemos el rectángulo *OAFH*. Ahora, si el segmento *HGF* es paralela a ED y CB y es exactamente el segmento medio entre estas dos líneas rectas, entonces el punto *G* será exactamente el punto medio del segmento que une C y *D*; y el segmento de la recta *CH* será igual a *DF*. También, *HG* =*GF* y $\measuredangle DGF = \measuredangle HGC$. Por lo tanto, los triángulos *HCG* y *GDF* son congruentes y tienen igual área. De ahí que el área sumada es igual al área restada. Entonces el área del rectángulo *OAFH*, el cual representa la distancia recorrida a una rapidez constante que es el promedio entre *Vo* y *V*, es igual al área de la figura original (rectángulo *OABC* más triángulo *CBD*) que representa el área cubierta en un movimiento uniforme acelerado con un incremento de la rapidez constantemente de *Vo* a *V*.

Esta idea de Oresme, como se muestra en Holton y Brush (2001), apunta al teorema fundamental del cálculo de Newton y Leibniz, que actualmente es la parte esencial de enseñanza del cálculo a nivel superior.

- Uno de los científicos influenciados por las ideas de Oresme fue Galileo Galilei, quien tomó como base estas ideas para iniciar una nueva ciencia: la cinemática. Por lo que ahora se inicia un nuevo tratamiento de las curvas. Se dejará la idea sobre lo estático de las curvas para utilizarlas en la comprensión de los fenómenos, considerando de esta forma a la curva como la trayectoria de un punto móvil. Este estudio de las curvas se asemeja a lo que se conoce como representación cartesiana de una cantidad por medio de gráficas, por tanto las variables de estudio fueron la rapidez, el tiempo y la distancia. Cabe resaltar que, dado que estas variables son continuas, Galileo les dará un énfasis discreto utilizando el punto de vista geométrico. De ahí que la nueva metodología será “la expresión de los fenómenos de la naturaleza mediante relaciones matemáticas expresadas por fórmulas” (Sánchez & Valdés, 2007, p. 56).

  Con relación a la construcción del concepto de función, la obra de Galileo se destaca por el establecimiento de relaciones entre cantidades variables, al tiempo que se aproxima la expresión de cantidades por medio de gráficas, estableciendo para determinada cantidad una correspondiente de otra naturaleza. La importancia de la concepción de Galileo es un avance tremendo en el desarrollo de la concepción más común que tenemos de la noción de función, que -como se ha mostrado- no fue un concepto predefinido sino que surge como consecuencia de la actividad matemática.

Estos aportes de Galileo servirán más adelante a Isaac Newton para la creación del Cálculo Infinitesimal, dándole énfasis a la teoría de la gravitación desde los problemas de caída de los cuerpos.

- En los siglos XV y XVI destaca la creación del álgebra simbólica que, si bien inicialmente no incidió en el desarrollo de la noción de función, puso los cimientos para la posterior representación analítica de las funciones.
- Por su parte, Descartes -en su libro *Géométrie*-, para demostrar la potencia de su método, parte de una cuestión planteada por la geometría clásica, el problema de Pappus, para preguntarse cuáles son los puntos que cumplen las condiciones. El problema de Pappus era un problema abierto, a pesar de las tentativas de Euclides, Apolonio y del propio Pappus para resolverlo utilizando los métodos de los *clásicos*.

  En general, las curvas que aparecen en l*a Géométrie* no son construidas a partir de una ecuación, sino que son generadas por el movimiento de un punto a partir del movimiento de curvas más simples. Para Descartes, las curvas, más que el conjunto de puntos que cumplen una determinada ecuación, son el resultado de movimientos sucesivos de curvas más simples, de manera que los últimos vienen determinados por los anteriores. Lo que hace Descartes es considerar la curva generada a partir de curvas más simples, y a partir del estudio de estos movimientos halla la ecuación de la curva.

- Fermat aplicó los métodos de Vieta a los problemas de lugares geométricos y presenta con las notaciones de Vieta los principios fundamentales de la Geometría Analítica. Una de estas proposiciones viene a ser la base de la geometría analítica, que introduce la idea de variable algebraica. Fermat expone muy claramente la idea de que una ecuación con dos incógnitas es una expresión algebraica de las propiedades de la curva. De acuerdo con Font (1999), consideramos que se puede decir que Descartes se preocupa más de la traducción de la gráfica a la expresión simbólica, mientras que Fermat se preocupa más de la traducción de la expresión simbólica a la gráfica.

Se puede considerar que, después de Descartes y Fermat, dada una ecuación de dos variables (función implícita) se tenía, aunque no de una manera demasiado explícita, la idea de gráfica de dicha función, representada en un sistema de ejes de coordenadas.

Si bien es cierto que las ideas primitivas de función de las que se tiene rastro pertenecen a los babilonios, en la historia de la matemática encontramos a personajes que influyeron decididamente al estudio de la noción de función. Así, encontramos matemáticos y físicos como Galileo, Newton, y Kepler que estudiaron los problemas físicos asociados con el movimiento a fines de los siglos XVI e inicios del siglo XVII (Youschkevitch, 1976; Kline, 1990b).

Como se mostró líneas atrás, el estudio de la relación entre fenómenos naturales y las expresiones matemáticas -en sentido más formal, la búsqueda de herramientas que describan estos fenómenos- fue fundamental para llegar al concepto de función.

Del trabajo de Cha (1999, pp. 37-39), mostramos en la Tabla 4 las definiciones de funciones manejadas durante los siglos XVII y XVIII, las cuales apuntan a una acepción de función vista como cantidad, operación, fórmula, expresión o relación. En la Tabla 5 se muestra una lista las definiciones de función manejadas en el siglo XIX y siglo XX como regla de correspondencia, esta última manejada en el sistema escolar de educación básica.

Tabla 4. Definiciones de funciones considerando la dependencia de cantidades

Year	**By Whom**	**Definition**
1665	Newton	Any *relationship* between variables.
1667	Gregory	A *quantity* obtained from other quantities by a succession of algebraic *operations* or by any other operation imaginable.
1673	Leibniz	Any *quantity* varying from point to point of curve.
1697	Bernoulli	*Quantities* formed using algebraic and transcendental *expressions* of variables and of constants.
1714	Leibniz	*Quantities* that *depend on* a variable.
1718	Bernoulli	Function of a certain variable [as] a *quantity* that is composed in some way from that variable and constants.
1748	Euler	*Formula* or *analytic expression* composed in any manner from that variable quantity and numbers or constant quantities representing the relation between variables.

1755	Euler	If *x* denotes a variable quantity then all the quantities, which *depend on x* in any manner whatever or are determined by it are called its functions. If some *quantities* depend on others in such a way that if the latter are changed the former undergo changes themselves then the former quantities are called functions of the latter quantities.
1797	Lagrange	Any *expression* useful for calculation in which these variables enter in any manner whatsoever.
1806	Lagrange	A combination of *operations* that must be performed on known quantities to obtain the values of unknown quantities, and that the latter are properly only the last result of the calculation.

Tabla 5. Definiciones de funciones considerando la correspondencia de cantidades

Year	**By Whom**	**Definition**
1829	Dirichlet	*y* is a function of a variable *x*, defined on the interval $a < x < b$, if to every value of the variable *x* in this interval there *corresponds a definite* value *y*. Also, it is irrelevant in what way this correspondence is established.
1917	Caratherdory	A *rule of correspondence* from a set A to real numbers.
1939	Bourbaki	A *rule of correspondence* between two *sets*.
1939	Bourbaki	Let *E* and *F* be two sets, which may or may not be distinct. A relation between a variable element *x* of *E* and a variable element *y* of *F* is called a functional relation in *y* if, for all *x* in *E*, there exists a unique *y* in *F*, which is in the given relation with *x*.
*	Dirichlet/ Bourbaki	Any *correspondence* between two sets which assigns to every element in the *domain* exactly one element in the *range*.

*Finales de la primera mitad del siglo XX

Esta visión general del concepto de función en estos últimos siglos, por extensión, nos permite resaltar la concepción de función cuadrática dada por estos principales autores. En ese sentido, estamos de acuerdo con Mesa (2008) en que la concepción de Newton sobre la función cuadrática se refiere a la relación entre la variable (considerada como instante de un movimiento) y un punto de la parábola, esta última representada por la ecuación de segundo grado. Por otro lado, Pierre de Fermat y René Descartes aportan con sus descubrimientos de las relaciones entre ecuaciones y el estudio de las curvas, los cuales permitieron comprender la idea de cuadrado como potencias de números. Asimismo, dada la asociación de la curva con una ecuación en el plano, se nos permitirá entender el concepto de función como una relación unívoca en el plano, que de la misma forma implica buscar relaciones entre variables para representarlas en el plano. Entonces, tomando en cuenta esta relación entre ecuación y las curvas, constituidas por medio de una ecuación cuadrática, se podía distinguir un tipo de relación unívoca entre cantidades que posteriormente se denominarán función cuadrática.

Por otro lado, Dirichlet propone una definición más amplia, que se caracteriza por la interpretación de correspondencia entre el punto, el cual deja de ser solo una representación gráfica propiamente dicha a ser un punto donde se relacionan dos magnitudes en una determinada cantidad. Así, el punto A se corresponde a una pareja ordenada (x, y). Sin embargo, esta definición fue considerada muy amplia, por lo que a mitad del siglo XX Dirichlet y Bourbaki proponen la definición de función que se ha convertido en una de las prácticas más manejadas actualmente: “A function is any correspondence between two sets which assigns to every element in the domain exactly one element in the range” (Even, citado en Cha, 1999, p. 42).

La evolución histórica de la noción de función, en particular la función cuadrática, muestra cómo a lo largo de la historia dicha noción se ha entendido de maneras diferentes. En cada una de estas *maneras* de entender se utilizan propiedades, representaciones, definiciones y argumentos diferentes y se resuelven tipos de problemas diferentes.

2.2. Reflexiones como consecuencia del desarrollo histórico de la noción de función

En el trabajo de Font et. al. (2012) se presentan algunas ideas importantes como consecuencia del desarrollo histórico de la noción de función. En las siguientes líneas, describiremos en forma resumida dichas ideas y haremos adaptaciones necesarias para el estudio de la enseñanza de las funciones en nuestro país utilizando herramientas teóricas del EOS. Cabe mencionar que este estudio de la noción de función nos servirá de marco de análisis de los problemas creados, los cuales mediante configuraciones didácticas brindarán algunos rasgos de información sobre la noción de función que los profesores en servicio utilizan cuando crean problemas.

Entre las principales ideas tenemos:

2.1.1. De las magnitudes a la variable

Los distintos fenómenos que se observan en la naturaleza están relacionados unos con otros por medio de leyes físicas. Estas leyes indican que las distintas magnitudes que caracterizan un fenómeno están tan íntimamente relacionadas que algunas de ellas quedan completamente determinadas por los valores de las demás. Este tipo de relaciones son las que sirvieron de origen al concepto de función y también pueden servir para introducir este concepto en la secundaria. Algunas relaciones de dependencia entre cantidades físicas son:

- La relación entre la velocidad y el tiempo para una aceleración constante: $v=at$.
- La relación entre la altura y la sombra de un edificio.
- La ley de Ohm, que nos dice que la diferencia de potencia V aplicada a un conductor de resistencia constante R es proporcional a la intensidad de corriente eléctrica I que circula por él: $V = RI$.
- La ley de Hooke: si colgamos un muelle por un extremo y le aplicamos un peso p en el otro extremo, le produciremos un alargamiento Δl que viene dado por la fórmula: $\Delta l = kp$, donde k es una constante característica del material y de las dimensiones y la forma del muelle.

Todas estas fórmulas tienen la misma estructura y permiten, fijado un valor para el parámetro, calcular el valor y (*variable dependiente*) conocido el valor x (*variable independiente*). Se trata de la *función de proporcionalidad directa* $y = ax$. Este tipo de función tiene una extraordinaria importancia ya que permite modelar una gran variedad de situaciones en todos los campos de aplicación de las matemáticas. Así mismo, lo que hay que destacar es que al pasar de la expresión, por ejemplo, $e = vt$ a la fórmula matemática $y = ax$ hacemos el paso de las magnitudes concretas (espacio y tiempo) a las variables generales (x e y).

El siguiente nivel de abstracción consiste en considerar que las funciones del tipo $y = ax$ son un caso particular de la relación entre la variable independiente x y la variable dependiente y que se representa mediante el siguiente simbolismo: $y = f(x)$

La idea de que una función es una dependencia entre magnitudes variables que a cada valor de la variable independiente le hace corresponder un único valor de la variable dependiente es la que más se utiliza cuando se inicia el estudio de las funciones en la Educación Básica Regular (EBR). Por ejemplo, la siguiente secuencia de actividades (ver Figura 7) tiene por objetivo introducir las funciones en la EBR como una relación entre magnitudes:

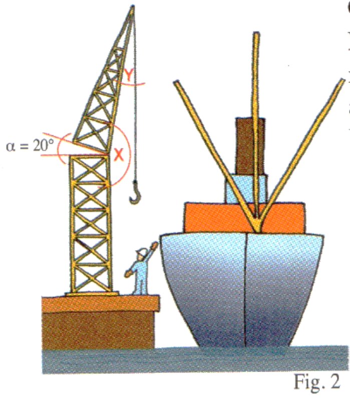


Fig. 2

CASO 2

El brazo de una grúa puede inclinarse hacia abajo desde la posición más alta un ángulo máximo de 60° (α) (Fig.2).

a) Escribe la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Indica la regla algebraica para la relación que asigna a cada tamaño del ángulo x un tamaño de ángulo y.

x	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
y							

c) Observa que la expresión b) permite hallar y para cada valor de x de la tabla a). ¿Por qué dicha tabla sólo presenta valores de x entre 120° y 180° inclusive?

Figura 7. Ejemplo de actividad sobre funciones en la EBR

Fuente: Schmid y Weidig (2002, p. 134)

2.1.2. Regla de asignación y dominio de la función

La idea de que una función es una dependencia entre variables que a cada valor de la variable independiente le hace corresponder un único valor de la variable dependiente lleva a pensar en la función básicamente como una regla de asignación. Ahora bien, la interpretación de la función como una terna (A, B, G) lleva a considerar que dos funciones con la misma regla de asignación no son necesariamente la misma función.

En la terna (A, B, G) con G un subconjunto de $A \times B$, dado el par $(a, b) \in G$, se dice que b es la imagen de a y se representa de la siguiente manera: $b = f(a)$. Al conjunto A se le llama el dominio de la función y es el conjunto de elementos que tienen imagen. B se llama el codominio de f. El conjunto de todas las imágenes de los elementos de A se dice que es la imagen de f (llamado rango o recorrido en muchos libros de texto de EBR) y, en general, no coincide con el codominio.

La fórmula de la función $y = x^2$ se puede considerar una regla que a cada número real le hace corresponder su cuadrado o bien, por ejemplo, como una regla que a cada número $0 < x < 1$ le hace corresponder su cuadrado. La regla es la misma pero se consideran dos funciones diferentes ya que su dominio es distinto. Estrictamente hablando, dadas las funciones f: $A \rightarrow B$

y g: $C \rightarrow D$, decimos que f *es igual a* g y escribimos $f = g$ si y solo si se cumple que ambas funciones: 1) tienen igual dominio, A=C, 2) tienen igual codomino, B=D, y 3) tienen la misma asignación, es decir, para cada x se cumple que $f(x)=g(x)$.

En la EBR el lenguaje conjuntista no es habitual y las funciones no se presentan como una terna (A, B, G), con G un subconjunto de AxB. Lo normal es presentar la función como una regla que a cada valor de la variable independiente le hace corresponder un único valor de la variable dependiente. Con este tipo de presentación, el dominio se entiende como el conjunto de los valores de la variable independiente para los cuales la regla permite asignar un único valor (los valores para los cuales la función está definida). Se trata pues del máximo dominio posible.

2.1.3. Diferentes representaciones de las funciones

La evolución histórica de la noción de función, como se describe en la primera parte de este capítulo, muestra que a lo largo del tiempo se han utilizado diferentes representaciones para dicha noción. En los trabajos de Janvier (citado en Font et. al., 2012) sobre el concepto de función, se considera que las representaciones asociadas al concepto de función se pueden clasificar en cuatro clases:

1) *Expresión verbal*. Por ejemplo, dado un número real le hacemos corresponder la mitad de su cuadrado
2) *Expresión simbólica*. Por ejemplo, $y - 2x = 4$ (implícita) o $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ (explícita)
3) *Tabla de valores*. Las tablas de valores de una función están formadas por dos filas (o columnas) de manera que en la primera tenemos los elementos del conjunto de salida y en la segunda los del conjunto de llegada (imágenes). Si el dominio es finito, la tabla también lo será, pero lo más habitual es que el dominio sea un conjunto infinito y la tabla no sea completa. Por ejemplo,

Millas por hora	10	20	30	40
Kilómetros por hora	16,1	32,2	48,3	64,4

4) *Gráfica*. La gráfica de una función f está formada por todos los puntos de coordenadas $(x, f(x))$. Un punto (x_0, y_0) pertenece a la gráfica de la función f cuando se cumple que $y_0 = f(x_0)$. Para representar los puntos de coordenadas $(x, f(x))$ lo más habitual es utilizar un sistema de coordenadas rectangulares que consiste en elegir dos rectas

perpendiculares, el eje x de abscisas y el eje y de ordenadas, y fijar una dirección positiva sobre cada una de ellas. El origen de coordenadas O es el punto de intersección de las dos rectas. Cada punto del plano queda determinado por dos números (x e y), llamados coordenadas, que indican la distancia con signo del punto a los ejes de ordenadas y abscisas respectivamente. Por citar algunos ejemplos, ver Figura 8.

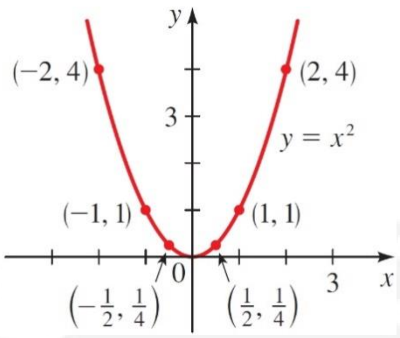


Figura 8. Gráfica de funciones

En la actividad matemática se han de resolver problemas utilizando determinadas técnicas que se plasman en diferentes representaciones. Un cambio de representación puede facilitar o dificultar la resolución de la tarea. Por este motivo se considera que las diferentes representaciones de los objetos matemáticos, las traducciones y las conversiones entre ellas son un elemento fundamental para su comprensión y, por tanto, para su enseñanza y aprendizaje (Duval, 1995 y 2006).

2.1.4. Visión unitaria y sistémica de las funciones

El significado del término *función* se puede comprender o concebir como que dicho significado es su definición. A esta forma de enfocar el significado de un término se le puede denominar elemental o *unitaria*. Sin embargo, podemos optar por comprender el *significado* mediante términos de uso; es decir, el significado de un objeto matemático se puede entender en términos de lo que se puede hacer con dicho objeto.

Este último aspecto se destaca por ser pragmatista y *sistémico*, puesto que considera el significado de un objeto como el conjunto de prácticas en las que dicho objeto es determinante para su realización.

Un ejemplo de este enfoque pragmatista y sistémico se presenta en la Figura 9 (se utiliza un mapa conceptual para este propósito), en la que se destaca que además de la definición se utilizan tanto diferentes representaciones como determinadas características y propiedades;

también se utilizan otros objetos matemáticos relacionados como son las ecuaciones, inecuaciones, etc.

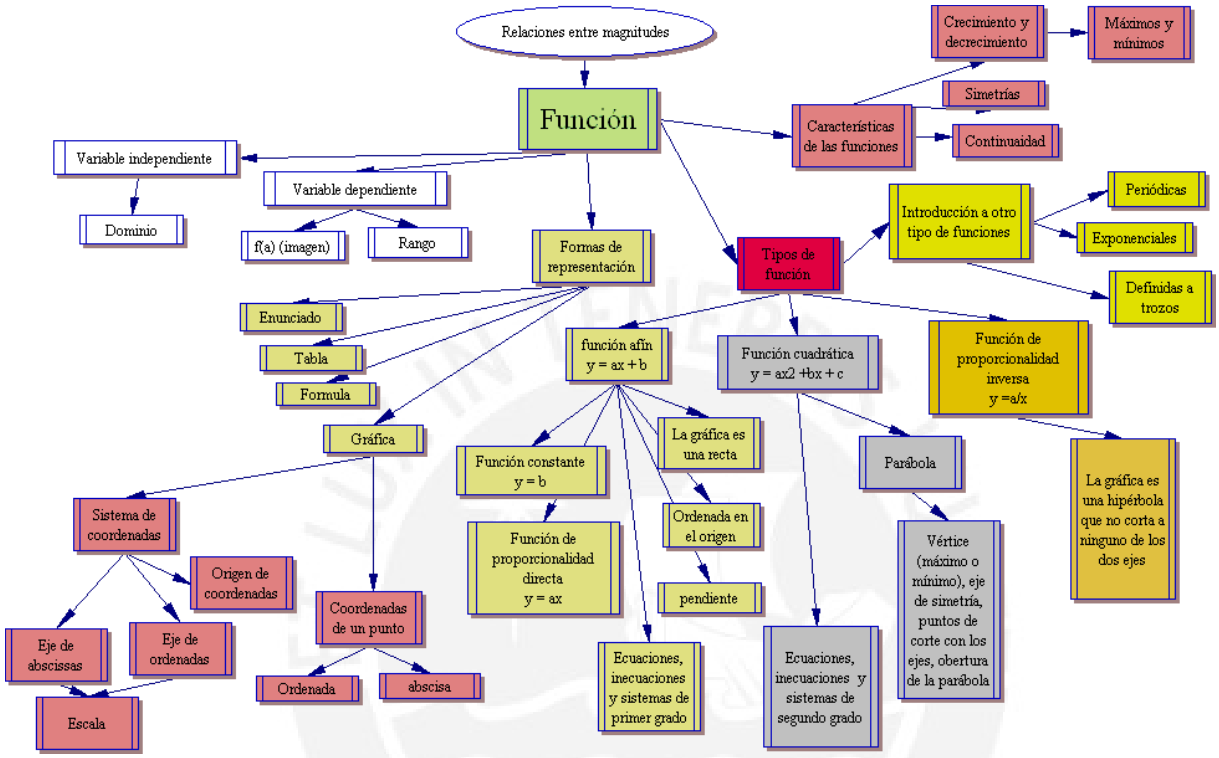


Figura 9. Las funcione en la EBR.

Fuente: Font et al. (2012, p. 159)

Otro instrumento útil, aparte de los mapas conceptuales, para describir la pluralidad (sin buscar la exhaustividad) de conglomerados de representaciones, definiciones, propiedades, tipos de problemas, etc. que a lo largo del tiempo se han ido sucediendo para el estudio de las funciones es la herramienta configuración epistémica (Font & Godino, 2006) propuesta en el EOS.

En el currículo de algunos países los tipos de *contenidos matemáticos* que se consideran son solo dos: conceptos y procedimientos. Se trata de una clasificación demasiado simplista para analizar un texto matemático y, más en general, la actividad matemática, sea profesional o escolar. Es necesario contemplar como mínimo los siguientes elementos: 1) notaciones, representaciones (lenguaje), 2) situaciones-problema, 3) definiciones, 4) procedimientos, técnicas,…, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc. y 6) argumentos. Estos seis tipos de elementos se articulan formando configuraciones epistémicas (Figura 10) cuyo análisis nos informa de la *anatomía de un texto matemático* (como se explica en forma extensa en el Capítulo 3). Se trata de una herramienta que puede ser útil para describir las características de los textos matemáticos de distintas épocas y orientación epistemológica; en particular resulta útil tanto para el análisis global de una unidad didáctica como para el análisis de un texto puntual.

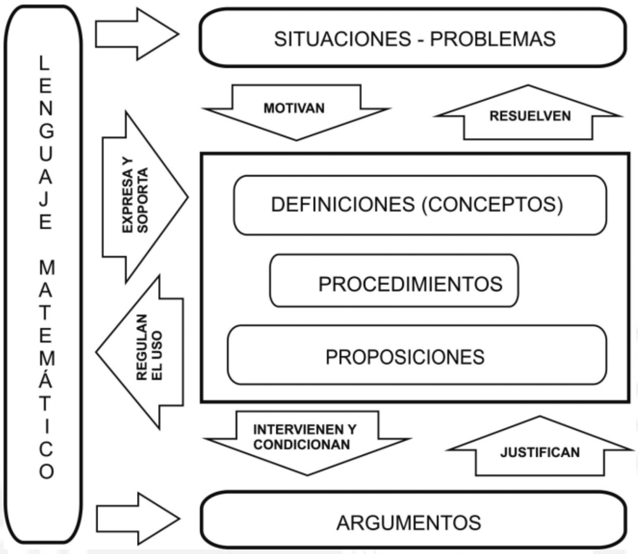


Figura 10. Componentes y relaciones en una configuración epistémica

Por tanto, estamos de acuerdo con Font et. al. (2012, p. 155) en que:

> […] la introducción de la dualidad unitaria-sistémica permite reformular la visión ingenua de que hay un mismo objeto matemático (función) con distintas representaciones. Lo que hay es un sistema complejo de prácticas, que permiten resolver problemas, en las que el objeto matemático función no aparece, lo que si aparece son representaciones de las funciones, diferentes definiciones de las funciones, proposiciones y propiedades de las funciones, procedimientos y técnicas que se aplican a las funciones y argumentos sobre las funciones. Dicho de otra manera, a lo largo de la historia las diferentes civilizaciones han ido generando diferentes configuraciones epistémicas para el estudio de las funciones, algunas de las cuales han servido para generalizar algunas de las preexistentes.

Asimismo, estos investigadores afirman que Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), basándose en el análisis epistemológico y didáctico realizado por Ruiz (citado en Font, 2012) para determinar las concepciones de los estudiantes de secundaria sobre la noción de función, consideran que la evolución anterior se puede organizar en cuatro configuraciones epistémicas, que en la Figura 11 están dispuestas en círculos concéntricos. Esta disposición expresa la progresiva ampliación de los sistemas de prácticas matemáticas asociados a la noción de función, desde planteamientos implícitos/intuitivos (protomatemáticos) hasta la formalización más general mediante la teoría de conjuntos.

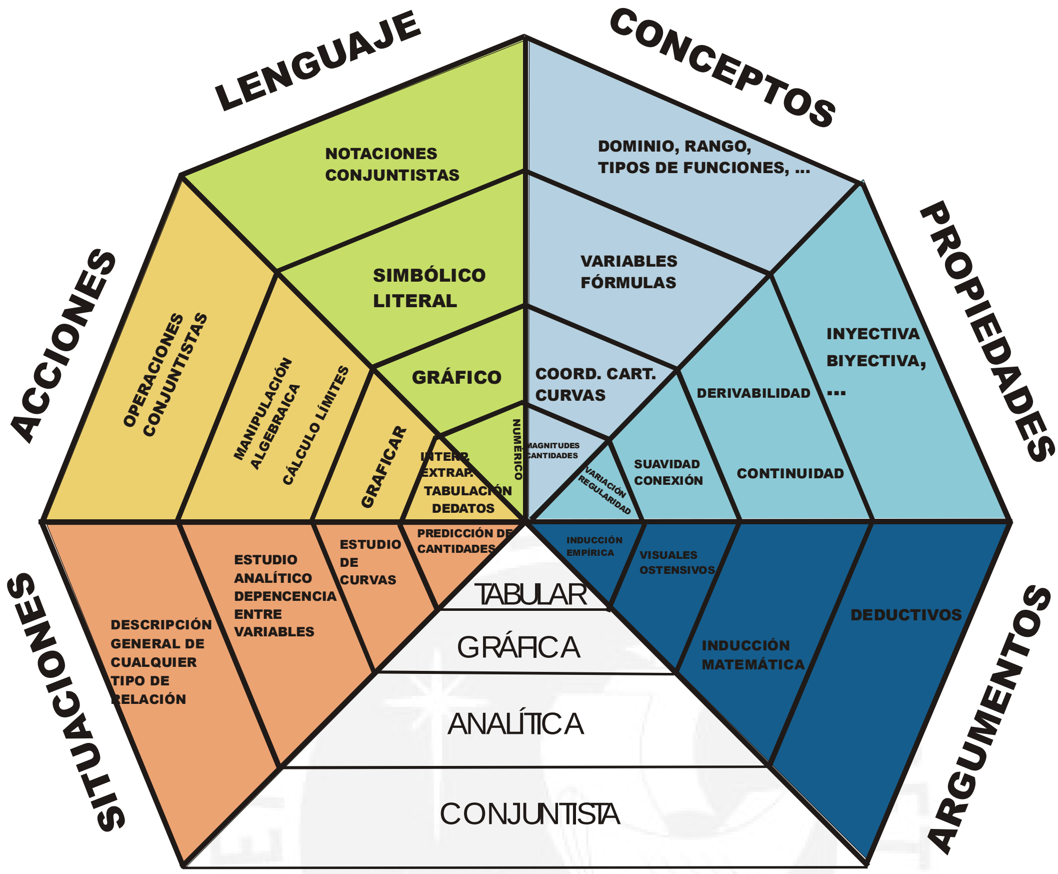


Figura 11. Configuraciones epistémicas de la noción de función

Fuente: Font et al. (2012, p. 156)

En la Figura 11 se destacan cuatro configuraciones epistémicas que, en cierta manera, resumen el desarrollo de la noción de función que se ha traspuesto a los libros de texto mediante dos tipos de configuraciones epistémicas. Por una parte tendríamos las configuraciones epistémicas formales (o intramatemáticas) y las empíricas (o extramatemáticas). Las primeras tendrían como referente la configuración epistémica que se ha llamado conjuntista; mientras que las segundas tendrían como referente una combinación de las otras tres. Estos dos tipos de configuraciones epistémicas son los que podemos encontrar en los manuales universitarios y en los libros de texto de la EBR.

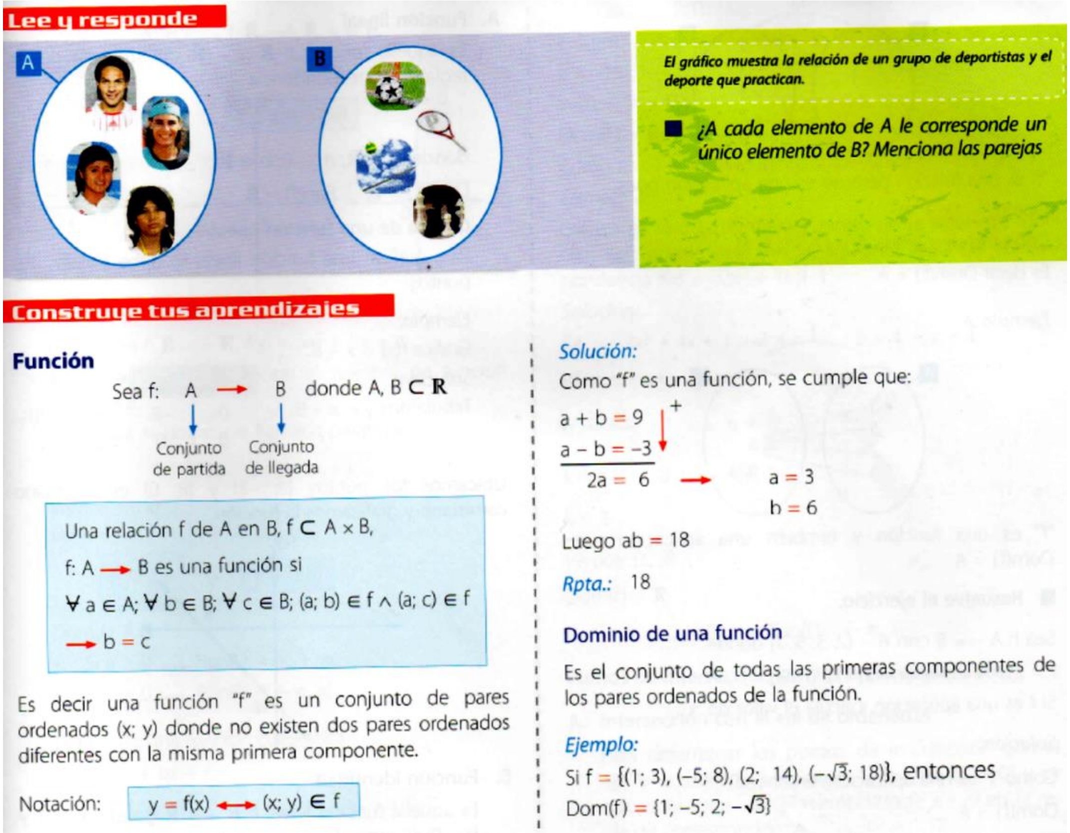
Al adaptar el trabajo de Font et. al. (2012), en los siguientes dos apartados analizaremos estos dos tipos de configuraciones epistémicas de las funciones: las empíricas (o extramatemáticas) y las formales (o intramatemáticas). De estas últimas también comentaremos una versión *degenerada* de ellas, que las llama configuraciones epistémicas mecanicistas (instrumentalistas, conductistas, etc.). Ambas responden a concepciones filosóficas muy diferentes sobre la naturaleza de las matemáticas. Las formales se basan en una concepción convencionalista de las matemáticas y suelen *vivir* en las instituciones universitarias, aunque también se pueden hallar en las instituciones de secundaria; mientras que las empíricas (contextualizadas, realistas,…) parten del supuesto de que las reglas matemáticas se pueden justificar por su acuerdo con situaciones extramatemáticas y suelen *vivir* en las instituciones de secundaria.

2.3. La perspectiva formalista de las funciones

En la mayoría de libros universitarios de nuestro país predomina lo que se suele llamar *conjuntismo*, *matemáticas modernas* o *formalismo*. Desde el punto de vista educativo, la herencia del formalismo fue la enseñanza de las llamadas *matemáticas modernas*. Dicho tipo de enseñanza es habitual en la universidad y también se mantiene, en menor escala, en la enseñanza no universitaria. Un caso especial se muestra en la elaboración de los programas de enseñanza de las *matemáticas modernas* (por los años 70 y 80 del siglo pasado). Este enfoque denominado matemáticas modernas procuró conseguir una coherencia interna desde el punto de vista de los contenidos matemáticos que se concretó en: 1) el desarrollo consecuente del punto de vista conjuntista y vectorial, 2) el desarrollo sistemático y coherente de la geometría a través del concepto de transformación y 3) el desarrollo de las estructuras algebraicas con aplicación inmediata a diferentes partes de la aritmética, del álgebra y de la geometría.

Por otro lado, en dichas épocas de las matemáticas modernas, los matemáticos profesionales partidarios de esta reforma creían que las dificultades que se producían en el aprendizaje de las matemáticas eran causadas, básicamente, por las presentaciones defectuosas de la matemática tradicional (definiciones poco precisas, conceptos no suficientemente generales, demostraciones poco rigurosas, etc.) que inducían en el estudiante una concepción confusa de la matemática por la ausencia de una estructura deductiva rigurosa. Dicho en términos constructivistas: consideraban que la matemática tradicional hacía una presentación confusa de las matemáticas y que, por lo tanto, no era potencialmente significativa para los estudiantes (Font et al., 2012).

Un ejemplo ilustrativo de la prevalencia de esta manera de enseñar las matemáticas en la educación secundaria en nuestro país se puede observar en el libro de texto editado por la editorial Corefo (Ojeda, 2013). Si nos centramos en la presentación de introducción de las funciones (ver Figura 12) podemos observar que se inicia con una actividad de *motivación* que pretende hacer una correspondencia entre dos conjuntos A y B.


Lee y responde

A

B

El gráfico muestra la relación de un grupo de deportistas y el deporte que practican.

■ *¿A cada elemento de A le corresponde un único elemento de B? Menciona las parejas*

Construye tus aprendizajes

Función

Sea f: $A \rightarrow B$ donde $A, B \subset \mathbb{R}$

A: Conjunto de partida

B: Conjunto de llegada

Una relación f de A en B, $f \subset A \times B$,

$f: A \rightarrow B$ es una función si

$\forall a \in A; \forall b \in B; \forall c \in B; (a; b) \in f \wedge (a; c) \in f$

$\rightarrow b = c$

Es decir una función "f" es un conjunto de pares ordenados (x; y) donde no existen dos pares ordenados diferentes con la misma primera componente.

Notación: $\boxed{y = f(x) \leftrightarrow (x; y) \in f}$

Solución:

Como "f" es una función, se cumple que:

$$\begin{array}{r} a + b = 9 \\ a - b = -3 \\ \hline 2a = 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 6 \end{array}$$

Luego ab = 18

Rpta.: 18

Dominio de una función

Es el conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados de la función.

Ejemplo:

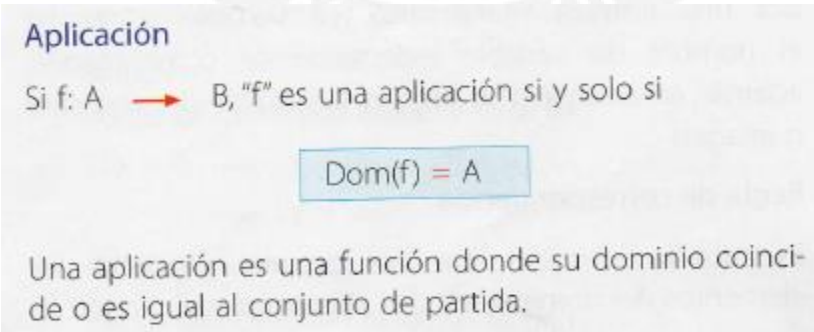
Si $f = \{(1; 3), (-5; 8), (2; 14), (-\sqrt{3}; 18)\}$, entonces

$Dom(f) = \{1; -5; 2; -\sqrt{3}\}$

Figura 12. Actividad de inicio en un libro de matemática formalista.

Fuente: Ojeda (2013, p. 107)

Asimismo, más adelante (ver Figura 13) se define aplicación como función (enfatizando un caso particular de correspondencia entre conjuntos).


Aplicación

Si f: $A \rightarrow B$, "f" es una aplicación si y solo si

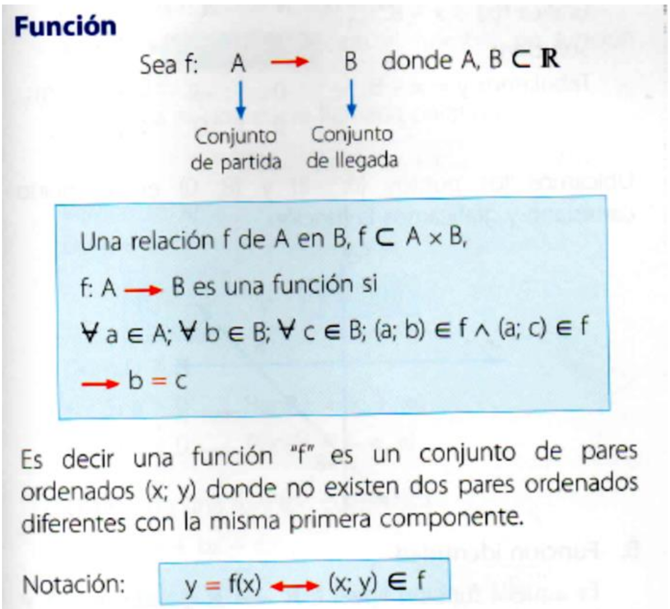
$$\boxed{Dom(f) = A}$$

Una aplicación es una función donde su dominio coincide o es igual al conjunto de partida.

Figura 13. Definición de función en libro de EBR

Fuente: Ojeda (2013, p. 107)

Por otro lado, se presenta la definición de función real describiendo la dependencia de magnitudes y utilizando lenguaje conjuntista (ver Figura 14)



Función

Sea f: A ⟶ B donde A, B ⊂ ℝ

Conjunto de partida (A) — Conjunto de llegada (B)

Una relación f de A en B, f ⊂ A × B,

f: A ⟶ B es una función si

∀ a ∈ A; ∀ b ∈ B; ∀ c ∈ B; (a; b) ∈ f ∧ (a; c) ∈ f

⟶ b = c

Es decir una función "f" es un conjunto de pares ordenados (x; y) donde no existen dos pares ordenados diferentes con la misma primera componente.

Notación: y = f(x) ⟷ (x; y) ∈ f

Figura 14. Definición de función real de variable real en un libro de la EBR.

Fuente: Ojeda (2013, p. 107)

Este bloque sobre las funciones reales está compuesto por dos unidades: Funciones I (dominio y rango de funciones, función real de variable real, funciones especiales, análisis de funciones cuadráticas completando cuadrados) y Funciones II (función inyectiva y sobreyectiva, función biyectiva e inversa, composición de funciones). La primera unidad se puede representar mediante la siguiente configuración epistémica (Tabla 6):

Tabla 6. Configuración epistémica formalista en secundaria

LENGUAJES	SITUACIÓN PROBLEMA
Representaciones verbales: Función, variable, conjunto de partida, conjunto de llegada, pares ordenados, componentes, relación, dominio, rango, aplicación, regla de correspondencia. ***Representaciones simbólicas:*** • Representaciones conjuntistas $f: A \rightarrow B$, $\mathbb{R}$, $\in$; $\forall$; $=$; $\rightarrow$; $\subset$; (a, b); $\wedge$; … • Expresiones analíticas $y = f(x); f(x) = mx + b; f(x) = x$ $f(x) = x^2$ ***Representaciones numéricas:*** Gráficas cartesianas. Diagramas de Venn.	*Problemas de aplicación descontextualizada* (especialmente de aplicación de procedimientos) *Ejemplos* (ejemplifican las definiciones)
PROPOSICIONES	**CONCEPTOS (DEFINICIONES)**
Propiedades de las funciones básicas. Teoremas asociados a ecuaciones e inecuaciones algebraicas. Análisis de las funciones cuadráticas completando cuadrados.	Conjuntos, producto cartesiano, correspondencia, relaciones binarias, aplicaciones (sobreyectiva, inyectiva, biyectiva). Función, dominio, rango, variables (dependiente e independiente), función lineal, función cuadrática, función constante, función identidad.
	PROCEDIMIENTOS
	Determinar si es función. Calcular el dominio. Calcular el rango. Determinar los elementos de las funciones elementales (lineal, cuadrática, etc.). Representar funciones a partir de la fórmula.

ARGUMENTOS
Ejemplificación de la técnica a seguir (por ejemplo el cálculo del dominio y rango de una función, el cálculo de los elementos de la parábola asociada a una función). Deductivos a partir de las definiciones (en el caso de la definición de función como el conjunto de pares ordenados (x, y), la determinación del gráfico de la función cuadrática utilizando dominio y rango).

La unidad Funciones I del texto en mención se presenta como continuación de otra unidad titulada *Relaciones binarias* y era seguida, como se mencionó, de otra unidad titulada Funciones II. En este caso se trataba los objetos matemáticos como composición de funciones, función inyectiva, función sobreyectiva y función biyectiva.

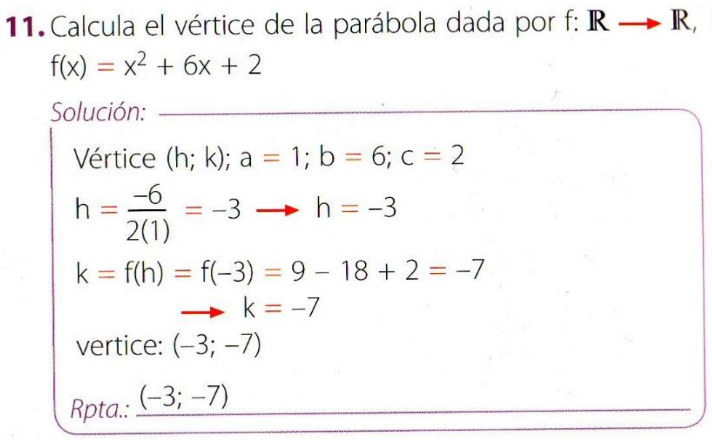
La configuración epistémica hace evidente la información sobre el concepto de función que al inicio no fue de fácil comprensión. El concepto de función se presenta de una manera descontextualizada y las situaciones-problemas o bien son ejemplos que sirven para ilustrar la definición o bien son problemas descontextualizados propuestos al final de la unidad con el objetivo de que los estudiantes apliquen la definición de función. Es decir, las situaciones-problema solo tienen la función de concretar el concepto de función; en ningún caso sirven para que se construya dicho concepto a partir de ellas.

El lenguaje utilizado básicamente es el conjuntista. Para los conjuntos infinitos se recurre a las gráficas cartesianas y, en algunos casos, también se recurre a expresiones simbólicas. No se contemplan las conversiones entre diferentes formas de representación y, en los pocos casos que esto sucede, siempre es la conversión de expresión simbólica a gráfica.

Hay conceptos que ya se suponen conocidos: conjunto, correspondencia, producto cartesiano, relación binaria, ecuaciones e inecuaciones. Otros que se introducen en el capítulo mediante definiciones: función real de variable real, dominio, rango, variable independiente y dependiente, regla de correspondencia y las funciones polinómicas elementales (lineal, cuadrática), función constante.

En este tipo de enseñanza, la metodología implícita es la siguiente: el profesor define los conceptos, pone ejemplos y demuestra propiedades (de manera deductiva si es que las hubiera, como por ejemplo la determinación del vértice de la parábola asociada a la función cuadrática) mediante una clase magistral. Los estudiantes han de aplicar dichos conceptos y propiedades a la resolución de problemas descontextualizados.

Es peculiar encontrar en algunos textos de matemática de enseñanza secundaria unidades didácticas sobre funciones del tipo formalista. Es más, en algunas de estas unidades se visualiza un modelo que llamaremos, siguiendo la propuesta de Font et. al. (2012), unidades didácticas degeneradas. En particular, se denominan degeneradas a las unidades formalistas en las que se presentan aspectos matemáticos instrumentalistas, mecanicistas (ver Figura 15). Estas se caracterizan por contener objetos matemáticos descontextualizados, que involucran conceptos y reglas matemáticas que se supone que se aprenden con la práctica y no mediante un aprendizaje significativo.



11. Calcula el vértice de la parábola dada por f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6x + 2$

Solución:

Vértice (h; k); a = 1; b = 6; c = 2

$h = \frac{-6}{2(1)} = -3 \rightarrow h = -3$

$k = f(h) = f(-3) = 9 - 18 + 2 = -7$

$\rightarrow k = -7$

vertice: (–3; –7)

Rpta.: (–3; –7)

Figura 15. Actividad instrumentalista en un texto de EBR.

Fuente: Ojeda (2013, p. 114)

Estamos de acuerdo con Font et al. (2012, p. 160) en que la permanencia de este modelo, entre otras razones, se debe a que:

> […] resulta más fácil a muchos profesores con poca formación matemática, o para aquellos que teniendo una visión un poco más amplia, se ven atrapados por diversos tipos de presiones que los inducen a seguir la tradición (estudiantes que esperan que se les enseñe de manera tradicional o que rechazan formas alternativas de enseñanza; autoridades que inducen a “cumplir con los programas”, la escuela y el entorno social que presiona para que los estudiantes tengan éxito en los exámenes de admisión de las universidades, etc.).
>
> Esta propuesta instrumentalista (mecanicista, etc.) presenta casi todos los inconvenientes de la presentación formalista de las matemáticas y ninguna de sus ventajas.

2.4. La perspectiva empírica (realista) de las funciones

En el libro escrito por Kline (1976) se muestran argumentos contundentes de por qué la propuesta de la matemática moderna fue un fracaso. Entre los argumentos, relativamente más actuales que podemos esgrimir, tenemos (Núñez & Font, 1995): a) Deductivismo exagerado: las matemáticas se presentaban como unos conocimientos terminados y organizados deductivamente. Esta presentación podía poner de manifiesto al estudiante la ordenación lógica de la materia, pero, al presentar el producto terminado, impedía la acción, las conjeturas, la imaginación, etc. b) Definiciones formalizadas: se cayó en el error de identificar el concepto que se quería enseñar con su definición formalizada. Esta identificación llevó: 1) a presentar a los estudiantes un exceso de simbolismo, 2) a hacerlos manipular mecánicamente estos símbolos, sin saber lo que estaban haciendo (formalismo prematuro) y 3) a olvidar que, para comprender un concepto matemático, son necesarias situaciones de referencia que le den sentido, al mismo tiempo que permiten descubrir las relaciones con otros conceptos. c) Exceso de generalización y, por tanto, falta de procesos de abstracción: los conceptos se presentaban de la manera más general posible, con lo cual se iba de lo más general a lo más particular y, por tanto, no se mostraban al estudiante las situaciones concretas que permitían abstraer sus similitudes e ir de lo concreto a lo más general. d) Las matemáticas por las matemáticas: se presentaban unas matemáticas centradas sobre ellas mismas y muy alejadas de las otras ciencias. Los textos didácticos ofrecían pocas situaciones no matemáticas que permitiesen a los estudiantes conocer la aplicación de las matemáticas a la realidad, lo cual facilitaba preguntas del tipo *esto para qué sirve.*

El centralismo en la enseñanza de la matemática bajo el enfoque de las matemáticas modernas modificó la forma de trabajo en instituciones no universitarias, en particular. Tal como lo afirma Flores y Gaita (2015), este apego por las matemáticas modernas estuvo influenciado por los matemáticos profesionales que estuvieron capacitando a los profesores de aula en el manejo de las matemáticas desde el punto de vista formal. Podemos afirmar que este enfoque tuvo diversas réplicas. Una de ellas se relaciona con la presentación de teorías acabadas, sin demostrarlas deductivamente, focalizando el manejo de algoritmos derivados de la teoría. En palabras de Font et. al. (2012), esta propuesta tiene un tono conductista desde el punto de vista psicológico.

Otro punto importante como consecuencia de la enseñanza bajo el enfoque de la matemática moderna está en el florecimiento primigenio de la línea de trabajo denominado *semántica* (Font et. al., 2012). El término semántica se relaciona, para nuestros propósitos, con todo aquello que tiene que ver con la construcción de significados que hace el estudiante, pretendiendo resolver una de las grandes dificultades del aprendizaje de las matemáticas: su nivel de abstracción y generalización. Esta forma de entender la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas consideraba imprescindible presentar contextos variados que diesen sentido al concepto, oponiéndose a las versiones más formalistas de la matemática moderna, las cuales pretendían presentarlos de la manera más general posible y separados de los contextos que les daban sentido, para así evitar las dificultades de comprensión que la presentación contextualizada pudiese producir. Con el paso de los años, recientemente esta postura está dominando los currículos escolares peruanos y, además, se viene presentando en diversos textos escolares actuales (aunque no se puede decir que sea el estilo dominante en todos ellos).

Como muestra de este último enfoque, que denominados realista, haremos la comparación de un capítulo sobre funciones (tomado del libro de Schmid & Weidig, 2002) con el presentado en el texto de Ojeda (2013) líneas arriba. Así, en el primero destaca la propuesta de tareas que suponen problemas contextualizados, usando diferentes representaciones y las conversiones entre ellas. Como ejemplo, en la Figura 16 presentamos una de dichas tareas.

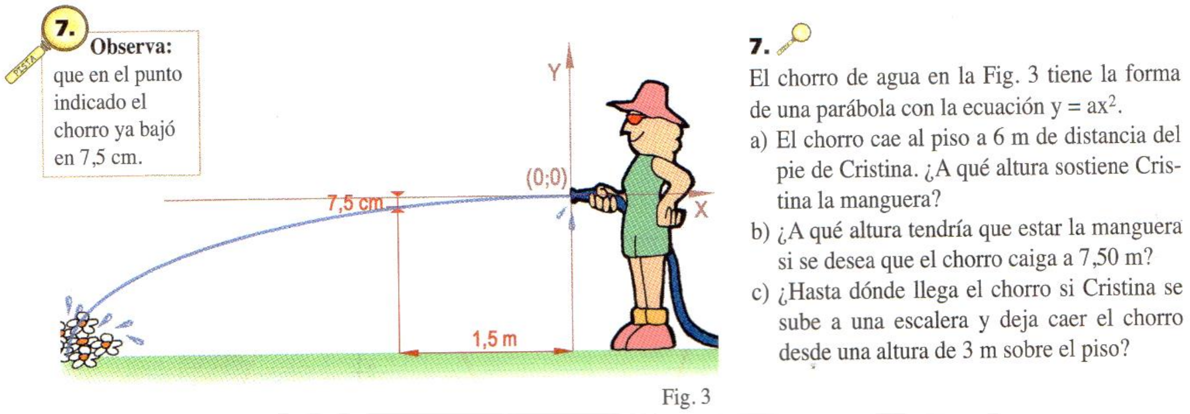


Figura 16. Tarea contextualizada en un libro de EBR.
Fuente: Schmid &Weidig (2002b, p. 140).

La organización de la unidad de funciones propuesta en este segundo libro (Schmid &Weidig., 2002a), titulada “Funciones”, se puede representar mediante la siguiente *configuración epistémica* (ver Tabla 7):

Tabla 7. Configuración epistémica realista en secundaria

LENGUAJES	SITUACIÓN PROBLEMA
Representaciones verbales: función, variable, conjunto de partida, conjunto de llegadas, componentes, relación, correspondencia entre conjuntos. Se representan funciones mediante un enunciado simbólico. ***Representaciones simbólicas:*** • Representaciones conjuntistas $f: x \rightarrow 4x - 3, =; \rightarrow; \ldots$ • Expresiones analíticas: $f(x) = 4x + 3$ ***Representaciones gráficas*** Gráficas cartesianas, gráficas tabulares	*Problemas de aplicación contextualizados en los que las variables son magnitudes. Ejemplos* que suponen la construcción de la noción de función.
	CONCEPTOS (DEFINICIONES)
	Magnitud, modelos de funciones básicas (proporcionalidad directa, afines, cuadráticas y de proporcionalidad inversa). Función. Rango y dominio. Variables. Crecimiento. Decrecimiento. Máximo y mínimos.

PROCEDIMIENTOS	PROPOSICIONES
Determinar si es función utilizando una regla de correspondencia. Calcular el dominio y rango de una función, utilizando tabla de valores mediante una regla de correspondencia. Traducir y convertir las funciones en diferentes registros. Determinar el máximo y mínimo de una función.	Propiedades de las relaciones (pocas). Propiedades de magnitudes directas e indirectamente proporcionales.
	ARGUMENTOS
	Ejemplificación de la técnica a seguir. Inductivo a partir de situaciones problemáticas. Gráficos visuales.

La unidad sigue la estructura siguiente: a) problemas contextualizados introductorios, b) desarrollo de la unidad didáctica con problemas contextualizados intercalados, c) problemas contextualizados de consolidación. En realidad se trata de poner en el centro de la actividad matemática escolar la modelización.

El concepto de función se generaliza a partir de diferentes situaciones en las que hay una relación entre magnitudes. No se necesitan conceptos previos conjuntistas (por ejemplo, el de correspondencia). El concepto de función se presenta de una manera contextualizada ya que se presentan situaciones problemas al inicio de la unidad cuyo objetivo es facilitar al estudiante su propia construcción de la definición de función. En este caso, no se trata tanto de aplicar conocimientos matemáticos acabados de estudiar, sino que el objetivo es presentar una situación del mundo real que el estudiante puede resolver con sus conocimientos previos (matemáticos y no matemáticos). Son problemas introductorios diseñados para que queden dentro de la zona de desarrollo próximo (en términos de Vygotsky). Su principal objetivo es facilitar la construcción, por parte de los estudiantes, de los conceptos matemáticos nuevos que se van a estudiar en la unidad didáctica.

El lenguaje conjuntista ha desaparecido. En cambio, se introducen cuatro formas de representación de las funciones (enunciado, tabla, gráfica y fórmula) y se proponen actividades cuyo objetivo es la traducción dentro del mismo tipo de representación y la conversión entre diferentes formas de representación, lo que potencia y enriquece la comprensión.

La metodología implícita es la siguiente: el profesor propone problemas que los estudiantes han de intentar resolver (normalmente en grupo). En el proceso de puesta en común de las soluciones, además de resolver los problemas, se van construyendo los conceptos de la unidad. Estos conceptos se relacionan y organizan para ser primero aplicados a ejercicios y después ser utilizados en la resolución de problemas contextualizados más complejos.

Puesto que se pretende que los conceptos, propiedades y procedimientos surjan a partir de generalizaciones y de procesos de abstracción de los estudiantes, la argumentación deductiva es casi inexistente. El tipo de argumentación que se utiliza es, sobre todo, de tipo inductivo. También tiene un papel importante la argumentación visual a partir de gráficas para distinguir gráficamente la función y la relación entre magnitudes, reconocer gráficamente los conceptos de función creciente, decreciente y distinguir los máximos y mínimos relativos, así como los puntos de inflexión de las funciones.

Otro aspecto a destacar es que esta unidad incorpora de manera explícita pocas propiedades, en contraste con el texto de matemáticos previamente estudiado, en el que se presentan propiedades diversas.

El cambio que se puede observar entre las dos unidades didácticas de funciones es el resultado de diferentes factores. Algunos son específicos de la investigación didáctica sobre las funciones (por ejemplo, las investigaciones didácticas sobre las traducciones y conversiones entre las diferentes representaciones de las funciones), mientras que otros son generales, como es el caso de la reflexión de tipo constructivista sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, o bien la importancia que se le da al contexto en los intentos para relacionar lo que los psicólogos han aprendido sobre el modo en que los humanos razonan, sienten, recuerdan, imaginan y deciden.

La unidad contextualizada como la explicada anteriormente, muestra una importancia primordial a las situaciones problema y presuponen actividades para la emergencia de objetos matemáticos. Cabe resaltar como lo mostrado en Font et. al. (2012), que las configuraciones epistémicas (contextualizadas, realistas, etc.) se relacionan a una concepción empírica de la matemática. Esta concepción, que actualmente está comenzando a predominar el diversos currículos, considera que las matemáticas son (o se pueden enseñar *como*) generalizaciones de experiencias.; una concepción de las matemáticas que supone que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales. Por otra parte, también presuponen que *saber matemáticas* incluye la competencia para aplicar las matemáticas a situaciones extramatemáticas de la vida real.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO, MÉTODO Y METODOLOGÍA

Si he logrado ver más lejos ha sido porque he subido a hombros de gigantes.

Isaac Newton, 1642-1726, de la carta de Newton dirigida a Robert Hooke

En este tercer capítulo presentamos los elementos teóricos que sustentan nuestra investigación, a saber, el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) y la propuesta de creación de problemas de Malaspina (2014a). Se inicia la presentación con una breve introducción sobre el desarrollo del EOS, para luego mostrar algunas de sus nociones teóricas, enfatizando en aquellas que respaldan y sustentan nuestra investigación. Luego, explicaremos en detalle la propuesta de Malaspina (2014a), que ayudará a categorizar los problemas creados por los profesores en servicio, tomando en consideración una estrategia de creación de problemas, así como el manejo de un taller de creación de problemas que guiará el trabajo de campo de nuestra investigación y que está relacionado con las trayectorias didácticas asociadas a la práctica matemática de creación de problemas. Culminamos este capítulo explicando en forma detallada nuestros método y metodología de investigación, enfatizando en la validez y la fiabilidad de los datos y el análisis realizado.

3.1 Marco teórico

En el presente trabajo de investigación se propone una estrategia de creación de problemas por profesores en servicio desde la perspectiva didáctica en el entorno de la función cuadrática. La intencionalidad es articular nociones del análisis didáctico desde un marco teórico global con una estrategia de creación de problemas con énfasis didáctico; este último aspecto sigue las consideraciones de Malaspina (2011b) sobre los criterios de idoneidad didáctica propuesta por el EOS y su relación con la creación de problemas. Esta propuesta se desarrollará en profesores de matemática en servicio tomando en consideración la competencia de análisis didáctico desde la perspectiva del EOS (Rubio, 2012) y la estrategia episodio, reflexión metacognitiva y didáctica, problema pre y problema pos (o más brevemente ERPP para el proceso de creación de problemas). La estrategia ERPP es una propuesta mejorada de la estrategia EPP (episodio, problema pre, problema pos) planteada por Malaspina, Mallart, y Font (2015) y hace énfasis en la reflexión sobre la práctica de solución y creación de problemas con base en un episodio de clase. Esto implica el desarrollo de prácticas matemáticas de solución y creación de problemas.

En el EOS se entiende como práctica matemática a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla y generalizarla a otros contextos y problemas. Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución, que está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. Junto a la resolución de problemas que se deriva de una práctica matemática, como se presenta en el EOS, también creemos que la creación de problemas se puede catalogar como una práctica matemática. Así lo manifiesta Malaspina (2015a):

> En la afirmación que hacen Font et al. (2010), en el marco del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, que el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender a realizar una práctica operativa (de lectura y producción de textos) y, sobre todo, una práctica discursiva (de reflexión sobre la práctica operativa) que puede ser reconocida como matemática por un interlocutor experto, encontramos que implícitamente consideran la creación de los problemas como parte de la práctica operativa y discursiva, pues la creación de problemas conlleva la producción de textos y la reflexión sobre la práctica operativa, al hacer variaciones a problemas trabajados o elaborar nuevos problemas a partir de situaciones concretas. (p. 3)

Por lo tanto, en nuestra investigación estudiaremos la creación de problemas desde la perspectiva de la competencia de análisis didáctico, enfocándonos en la reflexión sobre la práctica y los objetos matemáticos asociados a los problemas creados como producto de una actividad, siguiendo una trayectoria didáctica de creación de problemas desde un punto de vista didáctico.

3.1.1 Competencia matemática y didáctica del profesor

Como se menciona en Malaspina, Mallart y Font (2015), actualmente existe un interés internacional que converge en diseñar los currículos de formación universitaria basados en competencias. Algunos currículos se organizan por unas competencias más específicas de los profesionales en formación; en particular, tenemos el caso del futuro profesor de matemáticas. Del mismo modo, en los currículos escolares también se presenta dicha tendencia (Ferreres & Vanegas, 2015) y es pertinente que el profesor de matemática esté cualificado para evaluar dichas competencias. En ese sentido, Rubio (2012) afirma que, para realizar la evaluación de la competencia matemática de los estudiantes, el futuro profesor debe tener competencia matemática y competencia en el análisis de la actividad matemática. Esto último, enfocado en el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos. Si bien es cierto que la competencia matemática no es específica del profesor, la segunda sí lo es.

Por otro lado, con el propósito de desarrollar y evaluar las competencias del estudiante, las tareas son enfocadas en la resolución de problemas, por lo que el profesor no solo debe ser bueno resolviendo problemas matemáticos, sino también deberá ser bueno escogiendo, modificando y creando problemas con propósitos didácticos (Malaspina, Mallart, & Font, 2015), que a su vez ha sido un reclamo marcado desde hace décadas, como lo manifestaron Kilpatrick (1987) y Gonzales (1994). Este proceso de análisis del problema, por parte del profesor de matemáticas para fines didácticos, debe ir acompañado de una actitud de reflexión sobre la práctica matemática de resolución y creación de problemas, y evaluando estos con base en criterios didácticos que se considere pertinentes; de ahí que el profesor deberá tener la competencia de análisis didáctico para este tipo de actividades.

Para nuestra investigación, coincidimos con Giménez, Font y Vanegas (2013) y Rubio (2012), ya que consideramos que la competencia de análisis didáctico se referiere a diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y uso de criterios de calidad, con el fin de establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y mejora de procesos de instrucción. Ahora, como se nota en Malaspina, Mallart, y Font (2015), en la formación de profesores, esta competencia tiene que ser desarrollada mediante tareas que involucren el manejo de la técnica de análisis didáctico.

Una de estas tareas consiste en crear problemas y reflexionar didácticamente en ellos. Más todavía, en nuestra propuesta integramos nociones de la técnica del análisis didáctico con una técnica de creación de problemas para crear problemas didácticamente buenos.

De la misma forma, estamos de acuerdo con Godino (2009) cuando señala que:

> Se suele reconocer que el conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológica (cómo aprenden los estudiantes, conocer los afectos, dificultades y errores característicos,…). Los profesores deberían ser capaces también de organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados y comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje. (p. 14)

Así, en el EOS se propone un modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor (CDM) que tiene la intención de analizar los conocimientos matemáticos y didácticos de este. Tal análisis, a diferencia de otros modelos como propone Godino (2009), tiene la ventaja de ser más analítico y sistemático. Desde una perspectiva global, el modelo CDM se compone de una herramienta denominada análisis didáctico que puede ser utilizada por los propios profesores para indagar sobre su propia práctica (este aspecto se explica más adelante) mediante seis facetas o dimensiones de análisis.

3.1.2 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática

La estrategia de creación de problemas que proponemos en este trabajo se apoya fuertemente en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Nuestro criterio de selección para optar por este marco teórico se fundamenta en varios aspectos que propone dicha teoría. En particular, nos centramos en utilizar las nociones de análisis didáctico que propone el EOS referidas a la elaboración de configuraciones de objetos y la reflexión sobre la práctica matemática. Debido al alcance y el tiempo de trabajo de nuestra investigación, no haremos uso de todos los aspectos y propuestas importantes del EOS y que, seguramente, podrían fortalecer nuestra estrategia ERPP y permitir consolidarla como una propuesta innovadora. En las próximas líneas, haremos una presentación breve y sistemática del EOS, enfocándonos en los constructos teóricos que nos servirán para interpretar y analizar los datos de nuestra investigación, de tal forma que formulemos argumentos sólidos dentro de la Didáctica de la Matemática.

Estamos convencidos de que la Didáctica de la Matemática es la ciencia llamada a asumir las tareas y la responsabilidad de elaborar, organizar y sistematizar los conocimientos útiles para describir, diseñar, implementar, ejecutar y valorar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en sus distintos niveles de la educación. Como consecuencia, la Didáctica de la Matemática debe integrar cuestiones que son normalmente abordadas en forma separada por otras disciplinas del conocimiento, tales como la epistemología, la ontología, la semiótica, la psicología, pedagogía, sociología, entre otras. Como respuesta a las tareas antes mencionadas surge el EOS (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2006; Godino, Batanero, & Font, 2007; D'amore & Godino, 2007; Ramos & Font, 2008), enfoque que hemos tomado como marco teórico de referencia para nuestro trabajo de investigación.

El conjunto de nociones teóricas que en la actualidad componen el EOS se clasifica en seis grupos, cada uno de los cuales permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas. Tales niveles se describen en Godino (2015). Para nuestro propósito haremos uso de los siguientes:

1. **Sistemas de prácticas** (operativas, discursivas y normativas), que asume una concepción pragmatista-antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). Se aplica, sobre todo, a la planificación e implementación de un proceso de estudio, en el que la actividad de resolución de problemas es adoptada como elemento central en la construcción del conocimiento matemático.

2. **Configuración de objetos y procesos** matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas. En este nivel se asume una noción interaccionista del objeto matemático y pragmatista del significado (contenido de funciones semióticas). Aquí los diversos medios de expresión, es decir, los lenguajes, desempeñan un doble papel: de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los objetos matemáticos.

3. **Configuración didáctica**, como sistema articulado de papeles docentes y discentes a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación-problema; constituye la herramienta básica para analizar la instrucción matemáticas, matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas.

4. **Idoneidad didáctica del proceso de estudio.** Desglosada en una serie de idoneidades parciales, es concebida como criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones realizadas por los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. En cada una de las facetas o idoneidades parciales, se ha identificado un sistema de indicadores empíricos que constituye una guía para el análisis y la reflexión sistemática y que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje. La perspectiva global adoptada por el EOS tiene en cuenta las diferentes dimensiones implicadas y las interacciones entre estas dimensiones.

3.1.3 Niveles de análisis didáctico en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático

Según Font et al. (2010), en diferentes trabajos de investigación en Didáctica de la Matemática hechos bajo el marco del EOS (Godino, Font, et al. ,2006; Godino, Bencomo, Font, & Wilhelmi, 2007; D'amore & Godino, 2007) se han propuesto cinco niveles o grupos de análisis que se pueden aplicar en un proceso (planificado o bien implementado) de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Estos niveles son:

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4. Identificación del sistema de normas y metanormas.
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Estos cinco grupos o niveles de análisis tienen un peso distinto según el momento del proceso de instrucción que se considere. Así, el primer y el segundo nivel de análisis son particularmente útiles en la fase de diseño curricular y en la planificación de un proceso de instrucción matemática. El tercer y el cuarto nivel de análisis son aplicables al estudio de la implementación realizada del proceso de instrucción. En tanto que el quinto nivel es aplicable en la fase de planificación y en la valoración de los procesos de instrucción matemática. Una interacción entre estos niveles y las facetas de análisis se distingue en la Figura 17

Figura 17. Facetas y niveles de análisis didáctico.

Fuente: Godino (2011, p. 3)

A continuación vamos a precisar y ampliar la ontología que se propone en el EOS respecto del primer, segundo y quinto nivel de análisis, que son focos de atención para nuestro trabajo de investigación.

Primer nivel de análisis: sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas

Este primer nivel de análisis está basado en la aplicación de las nociones de práctica matemática ligada a la solución de un tipo de situaciones-problema (en nuestro caso la creación de problemas en el entorno matemático de la función cuadrática), objetos emergentes e intervinientes y a los significados sistémicos personales e institucionales.

Según Font et al. (2010), el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender a realizar una práctica operativa (por ejemplo lectura y producción de textos), así como una práctica discursiva (por ejemplo, reflexión de la lectura o de la producción de textos) que puede ser reconocida como matemática por un interlocutor experto, siendo este el profesor. Así, el discurso del profesor es un componente de su práctica profesional que tiene como objetivo generar en el estudiante un tipo de práctica operativa y una reflexión discursiva de esta práctica operativa, considerada como matemática por el docente.

Como consecuencia, Godino y Batanero (1994) consideran práctica matemática a toda actuación o manifestación (lingüística o no) ejecutada por alguien (persona o institución) en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de las soluciones obtenidas a otras personas, con la finalidad de validarlas y generalizarlas a otros contextos de la realidad y otros problemas del conocimiento que implican la aplicación de las matemáticas. Este nivel de análisis que plantea estudiar las prácticas matemáticas planificadas y realizadas en un proceso de instrucción matemática se aplica, fundamentalmente, en la fase de planeamiento e implementación de un proceso de enseñanza y aprendizaje; permite descomponer el proceso de instrucción en una secuencia de episodios y, para cada uno de los episodios, describir las prácticas realizadas siguiendo su curso temporal. Además permite describir una configuración epistémica global (previa y emergente) que determina las prácticas planificadas y realizadas.

Godino, Batanero, y Font (2007) son de la opinión que en el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas, como es el caso específico de las funciones cuadráticas. Los significados entendidos como sistemas de prácticas y su utilidad en el análisis didáctico de un proceso de estudio se resumen en la Figura 18. Tales significados pueden ser personales e institucionales.

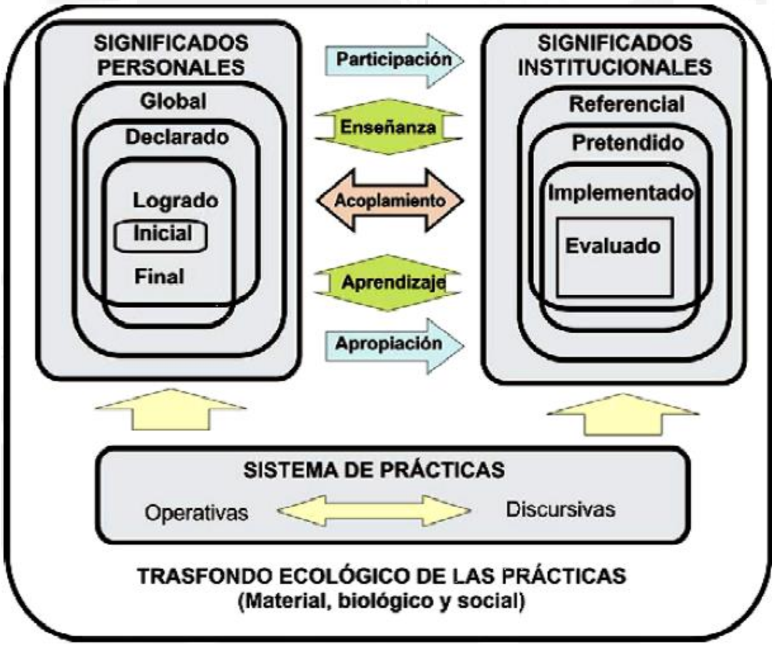


Figura 18. Tipos de significados institucionales y personales.

Fuente: Godino, Batanero, y Font (2007, p. 5)

Con relación a los significados institucionales, Godino, Batanero y Font (2007) recomiendan tener en cuenta los siguientes tipos:

- **Implementado:** en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- **Evaluado:** el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- **Pretendido:** sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y la evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso del objeto matemático en los que se pone en juego dicho objeto.

En nuestra investigación enfatizaremos en el significado institucional implementado por los participantes del taller de creación de problemas en el entorno de la función cuadrática.

Con relación a los significados personales, Godino, Batanero y Font (2007) proponen los siguientes tipos:

- **Global:** corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto en relación con un objeto matemático.
- **Declarado:** da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- **Logrado:** corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

Para los propósitos de nuestra investigación, nos centraremos en estudiar los significados declarados por los participantes del taller sobre creación de problemas en el entorno de la función cuadrática.

Como se puede observar y tal como Godino, Batanero y Font (2007) manifiestan, en la parte central de la Figura 18 se señalan las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje. Esto supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales, por lo que la enseñanza supone la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que sirve de base para los significados institucionales, y el aprendizaje implica que el estudiante se apropie de dichos significados.

Segundo nivel de análisis: configuración de objetos y procesos matemáticos

Si bien la noción de sistemas de prácticas es particularmente útil para determinados análisis de tipo macrodidáctico de los procesos de instrucción, se requiere también un análisis más detallado de la actividad matemática, razón por la cual se hace necesario introducir una clasificación de objetos matemáticos, los mismos que emergen de los sistemas de prácticas. Godino, Batanero y Font (2007) plantean que en el EOS se asumen los presupuestos de la epistemología pragmatista y los objetos se derivan de las prácticas matemáticas. En concreto se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel, tenemos aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel, tenemos una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior; nos referimos a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc.

Objeto matemático

Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos (Godino, Batanero, & Font, 2007). Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y la evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema, en la que deberá plantear y resolver, por ejemplo, funciones cuadráticas, observamos que se ha de utilizar un lenguaje verbal (por ejemplo: función, dominio, rango, máximo, mínimo), lenguaje gráfico (por ejemplo: vértice, parábola, punto de intersección con los ejes coordenados), lenguajes simbólico (por ejemplo: $f\ (x) =\ ax^2 + bx + c$). Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos (por ejemplo, regla de correspondencia de una función cuadrática), proposiciones (por ejemplo: el vértice es un punto en el plano que verifica la ecuación del eje de simetría) y procedimientos (por ejemplo: encontrar el dominio de una función utilizando reglas algebraicas) que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica matemática, y ella en tanto es acción compuesta, son satisfactorias. Como consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, y que está articulado en la configuración de la Figura 19.

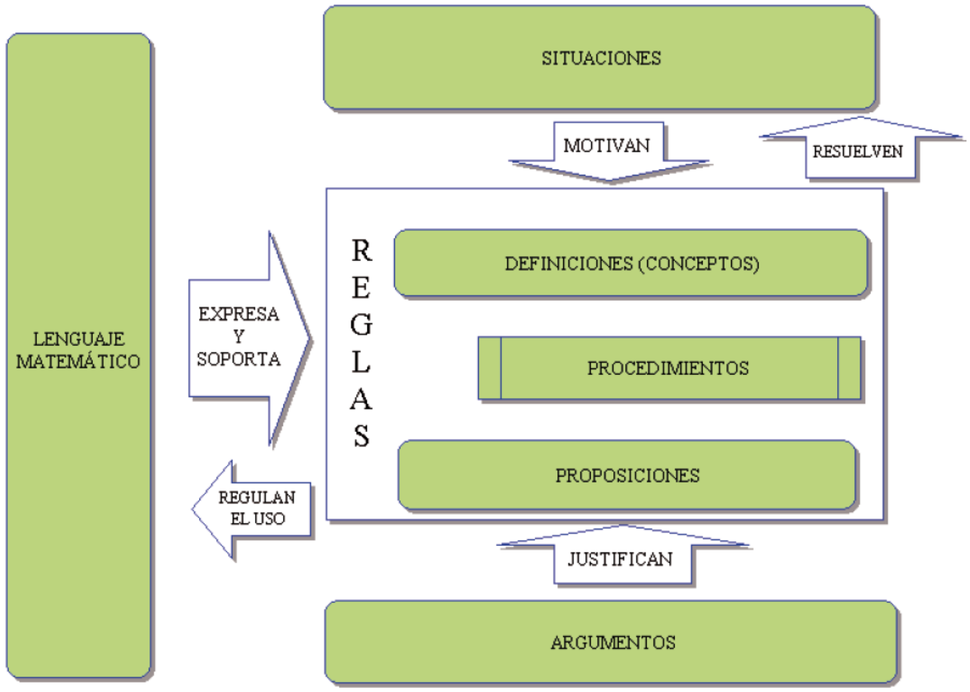


Figura 19. Configuración de objetos primarios

Fuente: Font y Godino (2006, p. 3)

Según Godino, Batanero, y Font (2007), cuando una persona realiza y evalúa una práctica matemática tiene que activar un conglomerado formado por algunos o todos los objetos matemáticos, a saber: situaciones-problema, lenguajes, proposiciones, definiciones, procedimientos y argumentos. A continuación, describimos la tipología de objetos matemáticos primarios que se muestran en la Figura 19.

- *Lenguajes.* Conformado por términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. en sus diversos registros o representaciones (escrito, oral, gráfico, gestual, etc.).
- *Situaciones-problema*. Manifestadas mediante aplicaciones extramatemáticas, tareas, ejercicios, problemas intramatemáticos, problemas extramatemáticos, problemas creados, casos de aplicación, etc.

- *Conceptos-definiciones*. Introducidos y presentados mediante definiciones o descripciones, como por ejemplo definición de una función cuadrática, vértice de una función cuadrática, eje de simetría, máximo y mínimos de una función cuadrática, etc.
- *Proposiciones.* Se expresan mediante enunciados sobre conceptos y definiciones de un tema matemático específico.
- *Procedimientos.* Algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, formas de proceder propias del quehacer matemático.
- *Argumentos*. Se manifiestan a través de enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, como por ejemplo teoremas, corolarios y sus demostraciones.

Como se mencionó líneas arriba, la noción de sistemas de prácticas es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática, es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias comentadas anteriormente: situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

En esta investigación proponemos un agregado a la descripción de los objetos matemáticos que son componentes de la configuración de objetos primarios, por lo que en las situaciones problemas deben explicitarse los cuatro elementos básicos de un problema matemático: información, requerimiento, contexto (intramatemático o extra matemático) y entorno matemático (Malaspina, 2015a). Esta propuesta se explica en detalle en el apartado 3.2.

Es necesario mencionar que en la presente investigación no se hará un estudio detallado de los procesos matemáticos (como se puede ver en Rubio, 2012), en los que se descompone el proceso de creación y resolución de problemas investigado en este trabajo.

Quinto nivel de análisis: valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción

El quinto nivel de análisis que propone el EOS es la noción de la idoneidad didáctica, cuyas dimensiones, criterios y un desglose operativo de dicha noción (Godino, 2011) han sido introducidos en el EOS como consecuencia de diversas investigaciones (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo & al., 2007) y como herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica normativa, es decir, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. Estos constructos teóricos originales y significativos son propios de un enfoque instruccional apropiado para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como caso particular, en nuestra investigación en el tratamiento del objeto función cuadrática.

Godino (2011) considera que esta noción puede servir de punto de partida para una teoría de diseño instruccional (Teoría de la Idoneidad Didáctica) que tenga en cuenta, de manera sistémica, las dimensiones epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva, interaccional y mediacional, implicadas en los procesos de estudio de las áreas curriculares específicas. La Figura 20 resume las principales características de dicha noción. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de los seis componentes siguientes:

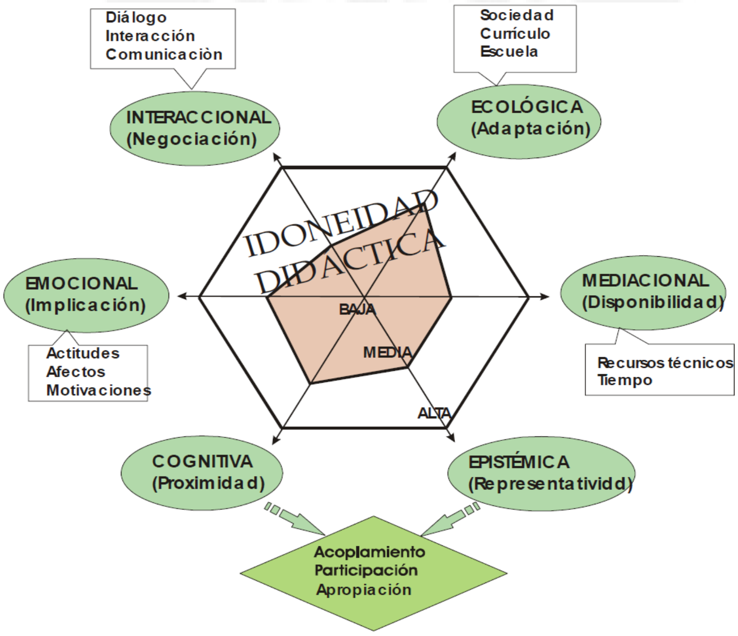


Figura 20. Componentes de la idoneidad didáctica
Fuente: Godino, Batanero y Font (2007, p. 5)

En el hexágono regular de la Figura 20 están representadas las idoneidades que competen a un proceso de estudio pretendido, planificado o programado, en el que a priori se asume un grado máximo de las idoneidades parciales. Por otro lado, en el hexágono irregular interior se representan las idoneidades efectivamente logradas en el desarrollo de un proceso de enseñanza-aprendizaje implementado. Además se sitúa en la base las idoneidades epistémica y cognitiva, puesto que en el EOS se considera que un proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de ciertos conocimientos específicos.

De lo descrito anteriormente, podemos deducir que la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos criterios de idoneidad se deben abordar de manera interrelacional, es decir, debemos referirnos a la idoneidad didáctica de manera holística, con un criterio sistémico de adaptación y pertinencia respecto del proyecto educativo global. Sin embargo, esta idoneidad se debe interpretar como relativa a determinadas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo cual exige una actitud de reflexión e investigación por parte del docente, discente y demás miembros involucrados en el proyecto de desarrollo educativo e institucional.

Todas estas nociones son consideradas en Godino, Batanero y Font (2007) como útiles para el análisis de proyectos y experiencias de enseñanza. Lograr alta idoneidad en una de las dimensiones antes mencionadas, por ejemplo, la epistémica, puede requerir ciertas capacidades cognitivas que no posean los estudiantes a quienes se dirige la enseñanza. Se debe procurar lograr un equilibrio entre las dimensiones epistémica y cognitiva para después identificar y solucionar conflictos semióticos a través de la trayectoria didáctica. En tanto que los recursos técnicos y el tiempo disponibles también interactúan con los objetos primarios como las situaciones-problema, el lenguaje, los argumentos, los procedimientos, entre otros.

Es necesario mencionar que las herramientas descritas, es decir, los criterios de idoneidad, se pueden aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de aprendizaje (microcurrículo), a la planificación y desarrollo de una unidad didáctica (mesocurrrículo) o a un nivel de planificación más global, como por ejemplo al análisis de una propuesta curricular (macrocurrículo).

Además podemos utilizar también la idoneidad didáctica como herramienta de análisis de ciertos aspectos de un proceso de estudio, como un material didáctico, un módulo de estudio, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o aquellos incidentes didácticos que pudieran ocurrir en el proceso de enseñanza-aprendizaje, como es el caso de la creación de problemas, que será una herramienta fundamental para nuestra investigación.

3.1.4 Nociones teóricas de la idoneidad didáctica del EOS adaptadas a la creación de problemas

En esta investigación y para efectos de hacerla viable con respecto a la duración de la misma, hemos procedido a delimitar y a considerar solo algunos niveles del EOS, los cuales nos servirán como herramienta para determinar el grado de idoneidad de los problemas creados por profesores en servicio en el entorno de las funciones cuadráticas. Así mismo, describir y analizar los problemas creados como producto de una actividad, es decir, posicionarnos en la línea de investigación denominada *creación de problemas como un instrumento de investigación e instrucción* (Singer et al., 2013).

Dado que nuestra investigación es evaluativa (Pérez, 2001), hemos considerado el primer (análisis de los tipos de problemas y las prácticas matemáticas) y el segundo nivel de análisis (configuración de objetos matemáticos). Con estos dos niveles pretendemos hacer el análisis de los objetos emergentes e intervinientes como consecuencia del proceso de creación de problemas y la reflexión sobre la práctica matemática de creación utilizando las herramientas configuración epistémica (CE) y configuración cognitiva (CC) que propone el EOS. También consideramos el quinto nivel de análisis denominado idoneidad didáctica; este, adaptado a la creación de problemas según la propuesta de Malaspina (2011b) respecto de los criterios de idoneidad didáctica del EOS. A continuación mostramos los indicadores relacionados con la idoneidad didáctica de un problema creado desde el punto de vista didáctico (Malaspina, 2011b):

a) La dificultad no es demasiado grande y se percibe que la solución es alcanzable. (Idoneidad cognitiva)
b) Favorece intuir un camino para obtener la solución o conjeturar una solución. (Idoneidad interaccional, afectiva y cognitiva)
c) Favorece hacer algunas verificaciones, eventualmente con ayuda de calculadora o computadoras, para mantener o rechazar las conjeturas. (Idoneidad interaccional y mediacional)
d) Se percibe que es interesante o útil resolver el problema. (Idoneidad afectiva y ecológica)

e) Favorece establecer conexiones matemáticas, ya sea entre varios temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento. (Idoneidad epistémica y ecológica)
f) Se percibe claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.). (Idoneidad interaccional y cognitiva)
g) Favorece el uso de relaciones lógicas antes que el uso mecánico de algoritmos. (Idoneidad epistémica)
h) Favorece crear nuevos problemas, haciendo de manera natural algunas variaciones que llevan a situaciones significativas, tanto didáctica como matemáticamente. (Idoneidad epistémica)

De estas seis dimensiones que contiene la idoneidad didáctica, resaltamos las idoneidades epistémica, cognitiva y ecológica. Esta elección se justifica en la concepción tomada de Cai et al. (2013) respecto de la importancia del aspecto cognitivo de la creación de los problemas para un diseño curricular que considere la actividad de creación de problemas como un medio para mejorar el aprendizaje y la enseñanza de la matemática, ya que implica una fuerte demanda cognitiva. Así mismo, Cai et al. (2013) afirman que la creación de problemas permite desarrollar estrategias más elaboradas y avanzadas de resolución de problemas. Este último aspecto, pensamos, se corresponde muy bien con las idoneidades epistémica y ecológica.

Con la aplicación y la adaptación del quinto nivel a nuestra investigación, pretendemos explicitar la calidad de los problemas creados como producto de una tarea efectuada por profesores en servicio. La denominación de tareas de creación de problemas la adoptamos de Malaspina (2015a), quien menciona:

> De acuerdo con Giménez, Font y Vanegas (2013) y Rubio (2012), entendemos la competencia de análisis didáctico como la habilidad de diseñar, aplicar y evaluar secuencias de aprendizajes usando herramientas de análisis didáctico y criterios de calidad. En la formación de profesores, esta competencia debe desarrollarse mediante la propuesta de tareas, a los futuros profesores y a los que están en servicio, que requieran de ellos el ejercicio del análisis didáctico. Una de tales tareas es crear problemas y examinarlos didácticamente. (pág. 3)

Por otro lado, la importancia de enfocar la creación de problemas como un proceso complejo se nota en la propuesta de Koichu y Kontorovich (2013), ya que estos investigadores plantean un marco general para el estudio del proceso de creación de problemas. Creemos que el EOS, siendo un enfoque teórico foráneo a la creación de problemas, encaja muy bien -mediante sus constructos teóricos y supuestos epistemológicos- en el estudio de la práctica matemática de crear problemas. Así mismo, como se muestra en el apartado 1.1, la propuesta de Koichu y Kontorovich (2013) considera facetas de estudio similares a las propuestas por el EOS. Por ejemplo, respecto a las facetas cognitivas, en el EOS se propone la idoneidad epistémica e idoneidad cognitiva. También, considerando las facetas afectivas, en el EOS se plantea la idoneidad afectiva e idoneidad interaccional. A pesar de que el marco teórico elaborado por Koichu y Kontorovich (2013) está dirigido estrictamente a la creación de problemas, creemos que el EOS posee herramientas más apropiadas para el estudio del proceso complejo de creación de problemas. Por tanto, en nuestra investigación mostramos la articulación del EOS con el estudio del proceso de creación de problemas, teniendo como último nivel de análisis la valoración de los problemas creados como producto de una actividad y la implementación de una estrategia que involucra una faceta de reflexión sobre la práctica matemática.

3.2 Estrategia de creación de problemas matemáticos

Para los propósitos de nuestra investigación, consideramos la propuesta teórica de creación de problemas de Malaspina (2013a, 2011b, 2015) acerca de lo que se entiende sobre creación de problemas y sus aspectos asociados. Este planteamiento ayudará a categorizar los problemas creados por los docentes en servicio tomando en consideración dos formas de crearlos: por elaboración de problema y por variación de un problema dado. Del mismo modo, nos servirá para hacer más específica la configuración de objetos propuesta por el EOS, en particular el objeto matemático denominado *situación-problema*. Por otra parte, esta estrategia de creación de problemas servirá de apoyo para proponer nuestra estrategia ERPP, enfatizando en los problemas creados por variación.

A continuación mostramos estas definiciones y las ejemplificamos para mostrar los constructos teóricos que usaremos en nuestro análisis de problemas creados.

En el Capítulo 1, mostramos -según la propuesta de Malaspina (2013a)- que la creación de un problema matemático se puede originar por variación de un problema dado o por elaboración de un problema, ya sea ante una situación concreta o por un pedido específico; este último, de carácter matemático o didáctico. Esta concepción de creación de un problema va de la mano con los cuatro elementos fundamentales que caracterizan a un problema matemático, como propone Malaspina (2014c, 2014a): *información*, r*equerimiento*, *contexto* y *entorno matemático* y cuyas definiciones se resumen a continuación:

1. ***Información***: está constituida por los datos cuantitativos o relaciones que se dan en el problema.

2. ***Requerimiento:*** es lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones.

3. ***Contexto:*** se refiere a la situación que involucra el problema. De esa manera se tienen los problemas relacionados con la vida cotidiana. El contexto también puede ser estrictamente matemático. De lo anterior se define que el problema puede ser de contexto intramatemático o extramatemático. En el primer caso, se refiere al entorno netamente matemático del problema (por ejemplo, graficar la función lineal, resolver una ecuación). En el segundo caso, el problema está más vinculado a una situación real.

4. ***Entorno matemático:*** se refiere a los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema. Se sabe que un problema puede resolverse de distintas formas y con diversos objetos matemáticos, de ahí que el entorno no es específico para un problema. Es decir, “[...] no habiendo una única manera de resolver un problema, el entorno matemático no tiene que ser único y la misma información, requerimiento y contexto pueden llevar a problemas diferentes, al precisar el entorno matemático que se debe usar para resolverlo.” (Malaspina y Vallejo, 2014, p. 13).

Para evidenciar el uso de este tipo de descriptores de un problema matemático, mostramos en la Figura 21 un problema que fue propuesto por Malaspina (2014c) a 22 profesores de inicial y primaria en formación cuyo contenido englobó la papiroflexia y la geometría elemental.

Problema

Pedro tiene una hoja rectangular de papel ABCD, de 20 cm de largo por 12 cm de ancho, como se ilustra en la figura.

Pedro dobla la hoja de modo que el vértice C se ubica en el lado AD y el lado CD se superpone sobre el lado AD. ¿Es verdad que el área del trapecio que se visualiza es el 75% del área del rectángulo ABCD? ¿Por qué?

Figura 21. Actividad presentada en el taller de creación de problemas

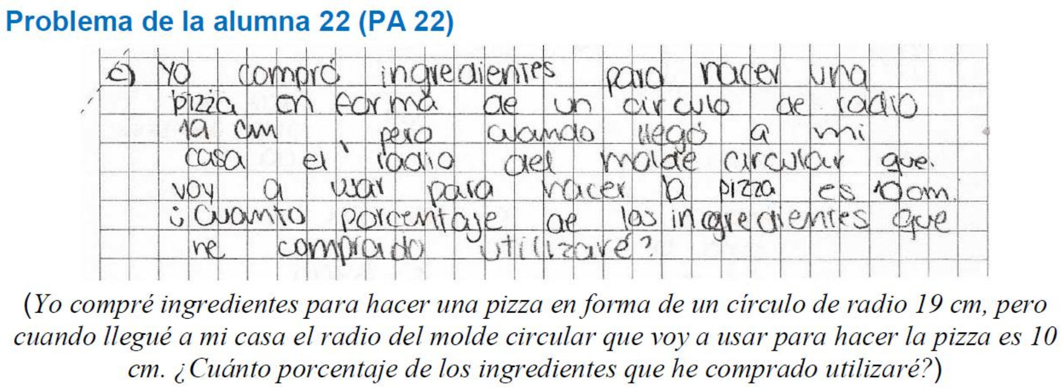
Fuente: Malaspina (2014c, p. 2)

Las indicaciones para esta actividad fueron las siguientes:

a) Resolver el problema.
b) Identificar en el problema: información, requerimiento, contexto y entorno matemático.
c) Crear un nuevo problema modificando uno o más de los elementos del problema dado identificados en (b).
d) Resolver el problema creado.

En el artículo de Malaspina (2014c) se muestran diversos problemas creados como consecuencia de la actividad mostrada en la Figura 21.

Para nuestro interés, presentamos uno de los problemas creados y que, desde nuestro punto de vista, describe el enfoque propuesto (ver Figura 22).


Problema de la alumna 22 (PA 22)

c) Yo compró ingredientes para hacer una pizza en forma de un circulo de radio 19 cm, pero cuando llegó a mi casa el radio del molde circular que voy a usar para hacer la pizza es 10 cm. ¿Cuanto porcentaje de los ingredientes que he comprado utilizaré?

(*Yo compré ingredientes para hacer una pizza en forma de un círculo de radio 19 cm, pero cuando llegué a mi casa el radio del molde circular que voy a usar para hacer la pizza es 10 cm. ¿Cuánto porcentaje de los ingredientes que he comprado utilizaré?*)

Figura 22. Problema creado sobre porcentajes

Fuente: Malaspina (2014c, p. 2)

A continuación, se realiza la descripción considerando los elementos del problema creado:

> Como es evidente, en este problema no solo hay modificaciones cualitativas en la información, pues los objetos geométricos son círculos, sino que, manteniendo el carácter extramatemático del contexto del problema, también hay modificación de la situación en tal contexto, pues ya no se trata de dobleces en una hoja de papel, sino de la cantidad de ingredientes que se use en la preparación de una pizza, según el tamaño de esta. [...] Se destaca el uso de 1/4 sin usar una aproximación decimal y el uso de un planteamiento algebraico para encontrar el porcentaje buscado. (Malaspina, 2014c, p. 139)

En la misma línea, en Malaspina (2013a) encontramos tres problemas creados considerando la creación de problemas por elaboración y por variación de un problema dado (Malaspina & Vallejo, 2014). Por razones prácticas, presentamos dos de los problemas creados y sus respectivos elementos:

1. **Por elaboración de un problema**

Situación

Se tiene un alambre flexible de 20 cm de longitud.

Primer problema creado

Determinar el mayor número entero de cuadrados, con lados de longitud entera, que se puede formar con un alambre de 20 cm de longitud.

- *Información:* longitud del alambre.
- *Requerimiento:* el mayor número de cuadrados con los lados de longitud entera que se pueden formar.
- *Contexto:* extramatemático.
- *Entorno matemático:* geometría, cuadrados, perímetro, división entera.

2. **Por variación de un problema**

Problema

Determine el mayor número de cuadrados con lados de longitud entera que se puede formar con un alambre de 20 cm de longitud.

Problema creado

Determine el mayor número de triángulos no equiláteros con lados de longitud entera que se puede formar con un alambre de 20 cm de longitud.

- *Información:* longitud del alambre. (No modificada)
- *Requerimiento:* el mayor número de triángulos no equiláteros, con lados de longitud entera, que se puede formar con un alambre de 20 cm de longitud. (Modificado)
- *Contexto:* extramatemático. (No modificado)
- *Entorno matemático:* geometría, triángulos, perímetro, relaciones entre longitudes de los lados de un triángulo, división entera. (Modificado)

Ahora bien, considerando los aspectos teóricos sobre la creación de problemas bajo la propuesta de Malaspina (2014c, 2014a), planteamos para una mejor integración de las herramientas del EOS con la creación de problemas hacer explícito que al crear un problema por variación pueden modificarse uno o más de sus cuatro elementos básicos: información, requerimiento, contexto (intramatemático o extramatemático) (Malaspina, 2015a). Esta propuesta se hace efectiva adaptando una estrategia de desarrollo de talleres de creación de problemas, tomada de Malaspina et al. (2015), para la creación de problemas por variación y que considera un episodio en clase que se explica en detalle en el Capítulo 4.

3.3 Método de investigación

En este apartado describimos de manera resumida el método de investigación cualitativa que seguimos y justificamos su elección en el ámbito de la educación matemática. Por otro lado, presentamos las etapas que guían nuestro trabajo; es decir, la ejecución de cada una de las actividades planeadas. Para esto último, consideramos una metodología que consta de seis fases y que creemos se adapta a nuestra investigación cualitativa.

3.3.1 Método de estudios de casos en la educación matemática

En el presente trabajo nos posicionamos en la metodología cualitativa de estudio de casos del tipo evaluativo, ya que tenemos como finalidad la valoración de la estrategia de creación de problemas con énfasis didáctico en el proceso de creación de problemas por profesores de matemática en servicio y su relación con el EOS. También consideramos que, acorde a la característica de nuestra metodología de investigación, nuestro estudio es flexible, puesto que haremos adaptaciones de las herramientas teóricas de análisis didáctico e indicadores de idoneidad didáctica propuestos por el EOS (Godino, 2011). Nuestra elección está basada en ciertos referentes que tenemos sobre lo que se entiende por investigación cualitativa y en el estudio de casos aplicado a la investigación en la educación matemática, que se resume en los siguientes párrafos.

Diversos autores han propuesto definiciones sobre qué se entiende por investigación cualitativa, por ejemplo Bryman (2012), Yin (2003), Merriam (1998), Pérez (2001) y Martínez (2006). En nuestra investigación, consideramos lo manifestado por Martínez (2006) desde un punto de vista general:

> [...] la investigación cualitativa trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón plena de su comportamiento y manifestaciones. De aquí que lo cualitativo (que es el todo integrado) no se opone a lo cuantitativo (que es solo un aspecto), sino que lo implica e integra, especialmente donde sea importante. (p. 128)

Así mismo, para nuestro trabajo compartimos la afirmación de Martínez (2006) respecto de lo esencial de toda investigación, que tiene dos centros básicos de actividad. Estos son:

> Recoger toda la información necesaria y suficiente para alcanzar esos objetivos, o solucionar ese problema. Estructurar esa información en un todo coherente y lógico, es decir, ideando una estructura lógica, un modelo o una teoría que integre esa información. Analógicamente, podríamos decir que todo pende o se apoya en dos pilares centrales, como penden o se apoyan todos los componentes de un puente colgante en sus dos pilares. (pág. 128)

Así, estos dos centros fundamentales de actividad se entrelazan continuamente en el proceso de investigación. A medida que se avanza en el desarrollo del trabajo este va mejorando; es decir, la interacción entre teoría y los datos recogidos debe estar en concordancia con los objetivos de la investigación. En nuestro caso, usaremos la estrategia de creación de problemas propuesta por Malaspina, Mallart y Font (2015) y las nociones de análisis didáctico del EOS.

Martínez (2006) precisa que la metodología a utilizar en una investigación en general, en particular en la cualitativa, va acompañada de una postura epistémica (conocimiento) y ontológica (naturaleza de la realidad), de ahí que surgen diversos métodos de investigación, como por ejemplo: hermenéuticos, fenomenológicos, etnográficos y el de investigación-acción. Para Martínez (2006), el método etnográfico se utiliza para estudiar un grupo social (étnico, institucional entre otros) muy particular (único) en el que sus reglas, modos de vida, entre otros aspectos, son muy propios del grupo. Es decir, forman un todo (global), el que se debe estudiar de la misma forma como se presenta.

A diferencia de Martínez (2006), la postura de Ponte (2006) muestra que tradicionalmente algunos tipos de investigación suelen denominarse estudios de caso, como por ejemplo el método etnográfico. Nuestra investigación utilizará el método de estudios de casos considerando lo expuesto por Ponte (2006), quien señala que un estudio de caso analiza en profundidad entidades bien definidas como una persona o institución, curso, sistema educativo o cualquier otro de ámbito social. Además, este estudio se realiza con el objetivo de buscar respuesta del cómo y del porqué de una situación particular única. En cierta medida, este interés está dirigido por el investigador, quien procura discriminar ciertos aspectos esenciales y característicos, de tal forma que permita la comprensión de algunos fenómenos de interés.

El método de estudio de casos, como lo señala Ponte (2006), ha sido usado para investigar ámbitos de aprendizaje de estudiantes, formación de profesores, proyectos de innovación curricular, entre otros. En el campo de investigación de la creación de problemas visualizamos, aunque a veces en forma implícita, el uso del estudio de casos. Por ejemplo, en el trabajo de Sengül y Katranci (2014) la unidad de estudio fue profesores de matemática en formación.

Nuestro trabajo cumple con los tres propósitos de un estudio de casos. De acuerdo con Ponte (2006), estos son: exploratorio (es una primera investigación en la que se utiliza el análisis didáctico y una estrategia de creación de problemas), descriptivo (se describen los problemas desde diversas facetas considerando el énfasis didáctico) y analítico (la investigación amplía el campo de estudio de los problemas creados, proponiendo una nueva herramienta de análisis en la literatura existente).

Ahora bien, como menciona Pérez (2001) respecto de los tipos de estudio de casos (descriptivos, interpretativos y evaluativos), consideramos que nuestro trabajo es de tipo evaluativo, ya que investigaremos en el juicio de valor, usando la adaptación del EOS con la creación de problemas.

Por otro lado, un método de estudio de casos es de naturaleza empírica, basado en el análisis documental de la identidad de su contexto real (Ponte, 2006). Estos documentos provienen de entrevistas, observaciones, etc. Los resultados de un estudio de casos pueden ser dados a conocer de diversas maneras, incluyendo textos escritos, comunicaciones orales o registros de video. Asimismo, este tipo de investigación utiliza el componente narrativo para salvaguardar la situación presentada en la investigación.

Una de las condiciones más importantes para que se pueda formular un juicio acerca de la credibilidad de un estudio de casos está precisamente en la posibilidad de verificación de la evidencia obtenida en los procesos de tratamiento de esta. En ese sentido, en Ponte (2006) se menciona que existen dos tipos de validez: interna y externa. Afirmamos que nuestro trabajo se caracteriza por tener una validez interna, ya que analizamos las tareas de creación de problemas en diversas facetas mediante la configuración de objetos y el análisis de las prácticas matemáticas bajo el enfoque de análisis ontosemiótico propuesto por el EOS. También valoramos los problemas creados desde un punto de vista didáctico, explicitando la vinculación de su calidad con los criterios de idoneidad didáctica.

Es necesario recalcar que las evidencias obtenidas durante la fase de aplicación de nuestra investigación y el análisis didáctico realizado fueron sometidas a la técnica de triangulación. En primer lugar, se realizó una triangulación de datos, ya que además de las fichas de trabajo se consideraron como evidencias el cuestionario aplicado a los dos sujetos parte del caso y los apuntes del investigador, tanto en la revisión de las fichas de trabajo como en el desarrollo de las sesiones del taller de creación de problemas. Finalmente, los resultados obtenidos de la interpretación de las evidencias fueron objeto de una triangulación de expertos, pues el análisis inicial fue sometido a la opinión del asesor de tesis y un especialista en el EOS.

Para el estudio cualitativo de la información recopilada, nos apoyamos en la técnica de análisis denominada análisis semiótico, que en algunos casos se denomina análisis ontosemiótico (Godino, 2002), la cual permite describir de manera sistemática la actividad matemática realizada por los futuros profesores al resolver y crear problemas, y los objetos matemáticos primarios (lenguaje, situación-problema, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas de resolución y creación y que conforman una configuración didáctica (del tipo epistémica y cognitiva), cuando estos objetos matemáticos emergen de una práctica personal, en particular por los profesores de matemática en servicio.

Como se muestra en el marco teórico, para analizar la actividad de creación de problemas utilizamos las nociones del análisis didáctico pertenecientes a los constructos teóricos del EOS a dos niveles: 1) analizando las prácticas matemáticas del tipo operativas o discursivas que realiza el sujeto; y 2) analizando los objetos que intervienen en la realización de tales prácticas. En ambos casos se trata de un análisis del contenido de los textos en los que se refleja o concreta la actividad matemática de resolución o creación. Cabe destacar que, según McKnight et al. (2000), el *análisis del contenido* es un procedimiento para analizar el contenido de información obtenida en forma de texto, respuestas obtenidas de una entrevista o respuestas a un cuestionario abierto, por citar algunos ejemplos. Dado que se hace un análisis de la información escrita, resulta necesario realizar una codificación de la información mediante un formulario (por ejemplo, el formulario de configuración de objetos propuesta por el EOS). Gall, Borg y Gall (citados en McKnight et al., 2000) proponen una lista de pasos para desarrollar el análisis del contenido:

(1) Identificar documentos que sean relevantes para la investigación.

(2) Seleccionar un documento de muestra a analizar.

(3) Desarrollar un procedimiento de categorización y codificación.

(4) Llevar a cabo el análisis de contenido.

(5) Interpretar los resultados.

El análisis del contenido, aplicado en nuestro estudio, se apoya en la tipología de objetos propuestos por el EOS, cuyo detalle se describe en diversos artículos (Godino, Contreras &Font, 2006; Font, Godino & Gallardo, 2013). En el caso de la clasificación de los problemas según la propuesta de Malaspina (2014c) y que se muestra en la Tabla 39, también se utilizó el análisis del contenido.

Finalmente, Ponte (2006) manifiesta que la calidad de un estudio de casos es flexible, por lo que es preferible plantear criterios de calidad. Este autor propone tres criterios específicos para el estudio de casos:

1. El objeto de estudio está bien definido.
2. El estudio evidencia aspectos característicos fundamentales del caso.
3. El estudio, en su relato, procura acrecentar el conocimiento ya existente.

Así, pretendemos que nuestro estudio cumpla con estos tres criterios específicos señalados por Ponte (2006), para lo cual utilizaremos el esquema de investigación cualitativa (ver Figura 23)

Figura 23. Fases de la investigación cualitativa

Fuente: Adaptada de Latorre et al. (1996)

3.3.2 Metodología y procedimiento

En nuestra investigación obtuvimos diferentes tipos de información: elaboración de las configuraciones de objetos, reflexión sobre la práctica y la formulación de los *problemas pre* al utilizar una estrategia de creación de problemas con una faceta reflexiva. Asimismo, obtuvimos información mediante un cuestionario que nos permite reflexionar sobre el proceso de creación con base en aspectos teóricos del análisis didáctico propuesto por el EOS.

Como ya se mencionó en forma detallada, el método de investigación que adaptamos para los intereses de la presente investigación es la cualitativa del tipo estudio de casos. Para ello, como se muestra en la Figura 23, tomando las ideas de Latorre et al. (1996), adaptamos las seis fases de la siguiente forma:

Fases de la investigación cualitativa

Fase (1) Exploración

Se realiza la exploración y el análisis de la literatura relacionada con la creación de problemas. Planteamos nuestra pregunta de investigación y los objetivos respectivos. Asimismo, se describe el desarrollo histórico matemático y epistémico del objeto función cuadrática. Se realiza una reflexión sobre la noción de función y se categorizan dichas nociones mediante configuraciones epistémicas bajo el marco del EOS.

Fase (2) Planificación: implementación de herramientas del análisis didáctico

Planteamos nuestra pregunta y nuestros objetivos de investigación, elegimos nuestro escenario de investigación, seleccionamos una estrategia, elaboramos nuestros instrumentos de recojo de información y planificamos el desarrollo del taller de creación de problemas sobre funciones (ver Capítulo 4). Elaboramos y analizamos las configuraciones epistémicas de referencia (experta) y las prácticas matemáticas asociadas; para este último punto se proponen protocolos de resolución de problemas y creación de problemas que servirán de guía para las actividades diseñadas en el taller. Del mismo modo, se construye la evaluación diagnóstica (compuesta por preguntas sobre funciones cuadráticas sometidas a triangulación de investigadores). Finalmente, se propone un cuestionario de recojo de información para caracterizar a la muestra.

Fase (3) Entrada al escenario

Organizamos el taller de creación de problemas tomando como ejemplo la propuesta de Malaspina (2015) y definimos el papel del investigador. Llevamos a cabo el taller con profesores de matemática en servicio y seleccionamos nuestros sujetos de investigación mediante una evaluación diagnóstica. Luego caracterizamos a nuestra muestra mediante un cuestionario elaborado para los propósitos de la presente investigación. Tal como se muestra en el Capítulo 4, en las primeras sesiones se plantea una introducción a la creación de problemas, para lo cual se realiza una exposición de las potencialidades de la creación de problemas y su conexión con los constructos teóricos del EOS, en particular el análisis de las prácticas matemáticas y las configuraciones epistémicas asociadas a los problemas. Los participantes serán instruidos en la elaboración y el análisis de estas últimas. Para ello se les hace entrega de una consigna (formulario con ejemplos propuestos) para que reconozcan los objetos matemáticos asociados a cada problema.

Fase (4) Recojo y análisis de la información

Aplicamos las estrategias de creación de problemas por variación enfocándonos en los problemas pre, como se muestra en Malaspina (2015) en el entorno de las funciones cuadráticas. Utilizamos una ficha de trabajo para recolectar los problemas creados por nuestros sujetos de investigación. También hicimos uso de hojas de observación, notas de campo sobre aspectos de creación de problemas. Asimismo, se realizó el recojo de la descripción de las prácticas matemáticas utilizando el protocolo de resolución y el de creación de problemas. Finalmente, se aplicó una cuestionario de salida para los miembros de nuestro caso de estudio, que estuvo conformado por dos profesores de matemática en servicio.

Fase (5) Retirada del escenario

- **Análisis de las prácticas matemáticas y configuraciones epistémicas y cognitivas de objetos matemáticos**

  Analizamos las configuraciones epistémicas y cognitivas asociadas a las tareas de creación de problemas realizadas por el investigador y los participantes del taller de creación de problemas, respectivamente. Para este propósito se hace uso de las configuraciones epistémicas de las soluciones expertas y las prácticas matemáticas de referencia.

- **Explicitar la vinculación de la calidad de los problemas creados con los criterios de idoneidad didáctica del EOS**

  Analizamos el acercamiento a la idoneidad didáctica de los problemas creados por los profesores en servicio en el entorno de la función cuadrática, en sus seis dimensiones. Es preciso señalar que este análisis de las idoneidades se realiza tomando en consideración los indicadores de un buen problema, desde el punto de vista didáctico propuesto por Malaspina (2011b) y explicado en el Capítulo 3. Para ello se elaboró un instrumento con base en una rúbrica. Por consiguiente, los problemas que forman parte de nuestro caso fueron sometidos a una valoración mediante una triangulación de investigadores.

- **Elaboración del informe**

Elaboramos el documento final de nuestra tesis considerando los resultados y revisiones de nuestro marco teórico como consecuencia del análisis e interpretación de los datos.

Por otro lado, es necesario señalar que existe diversidad de estrategias en la investigación cualitativa. En la Tabla 8 se presentan las consideraciones para nuestro trabajo: la relación entre nuestra cuestión de investigación, las estrategias a usar y las técnicas de recogida de información.

Tabla 8. Relación entre cuestión, estrategia y técnicas de investigación

Cuestión de investigación	**Estrategia de investigación**	**Técnicas de investigación**
Evaluativa	Estudio de casos	Evaluación escrita, cuestionarios, observación no participante, notas de campo, triangulación de investigadores, análisis del contenido.

Fuente: Adaptado de Latorre et al. (1996)

Todas las etapas descritas anteriormente serán guiadas por el rigor en la investigación en un estudio de casos, por lo que coincidimos con Ponte (2006) en señalar que este rigor siempre depende de un cuadro teórico adoptado para el trabajo de investigación. Es más, creemos que:

> La principal vía para la mejora de la calidad de los estudios de caso (así como otros trabajos de índole interpretativa) es más en el fortalecimiento de la base teórica que en el desarrollo de más instrumentos rigurosos. Por lo tanto, uno no puede dejar de mirar con reserva pragmática tendencias que asumen la posibilidad de combinar elementos de diferentes paradigmas para ocultar una falta de preocupación por la coherencia teórica y metodológica de la investigación (Ponte, 2006, p. 20).

El rigor en nuestra investigación se relaciona con los diversos constructos teóricos respecto de cada uno de los objetivos específicos propuestos. A continuación mencionamos los principales aspectos de la rigurosidad de nuestra investigación por cada objetivo específico.

Para alcanzar el primer objetivo de nuestra investigación se elaboró un instrumento denominado evaluación diagnóstica, que se aplicó a los profesores en servicio. La elaboración de este instrumento se basó en una categorización de procesos cognitivos denominados taxonomía MATH, cuyos indicadores específicos para estudiar la competencia matemática del profesor respecto de la función cuadrática fueron adaptados considerando los propósitos de nuestro estudio.

Por otro lado, para conseguir los objetivos 2 y 3 de nuestro trabajo, se tuvo en cuenta la metodología de investigación propuesta por el EOS (Godino, 2002). En esta propuesta se clasifican las cuestiones de investigación didáctica según cuatro ejes o dimensiones: el *foco*, el *fin,* la *generalizabilidad* y el *nivel* de la investigación, cada uno de ellos con categorías anexas, como se muestra a continuación:

1. Foco:
    a. Epistémico (significados institucionales)
    b. Cognitivo (significados personales)
    c. Mediacional (recursos temporales y tecnológicos)
    d. Emocional (afectos, motivación, emociones)
    e. Interaccional (interacción entre significados institucionales y personales)
    f. Ecológico (relaciones intra e interdisciplinar y sociales)
2. Fin:
    a. Descripción de significados, procesos y factores (¿Qué es…? ¿Cómo es…?)
    b. Explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los efectos de los factores intervinientes (¿Por qué…?)
    c. Actuación o implementación de acciones para el logro de un fin (¿Cómo diseñar, motivar,…?)
    d. Valoración de la idoneidad de un proceso de estudio o alguno de sus componentes (¿En qué medida es adecuado o idóneo este recurso…?)
3. Generalizabilidad
    a. Exploratorio (no se pretende generalizar a otros contextos o poblaciones)
    b. Inferencial (se pretende generalizar los hechos y las relaciones observadas)
4. Nivel de análisis
    a. Puntual (hechos y fenómenos ligados al estudio de una cuestión matemática específica en un contexto determinado)
    b. Temático (hechos y fenómenos ligados al estudio de una unidad temática en un nivel educativo determinado)
    c. Global (hechos y fenómenos ligados al estudio de un área temática en uno o varios niveles educativos)

Por lo anterior, en la presente investigación, el *foco* fue epistémico (configuraciones epistémicas institucionales) y, sobre todo, cognitivo (configuraciones cognitivas personales de los profesores en servicio); el *fin* fue la descripción de significados personales de los profesores en servicio, mediante el estudio de sus configuraciones cognitivas; el nivel de *generalizabilidad* fue exploratorio, ya que no se pretende generalizar los resultados a otros contextos o poblaciones; y el *nivel de análisis* fue puntual, puesto que se pretendió investigar hechos y fenómenos ligados al estudio de una cuestión matemática específica en un contexto determinado.

Para el análisis de la información recolectada mediante fichas de trabajo respecto de las configuraciones de objetos y la reflexión sobre la práctica de resolución y creación, usamos las herramientas del EOS denominadas configuración epistémica y configuración cognitiva, esto para examinar la resolución y la creación de problemas matemáticos mediante el análisis semiótico y análisis de contenido y sometidos a la triangulación de investigadores. Para este último aspecto, estamos de acuerdo con Pérez (1998) respecto a que la triangulación implica que los datos se recojan desde puntos de vista distintos y que se deben realizar comparaciones múltiples de un fenómeno único, en varios momentos, utilizando perspectivas diversas y múltiples procedimientos.

Para el objetivo 2 de investigación, pedimos a los participantes elaborar sus configuraciones cognitivas de la solución de un problema dado, y otro de la solución de su problema creado. En este sentido, se elaboró para cada sujeto de investigación una configuración epistémica, para el problema del episodio y para el problema creado por los profesores en servicio. De esa forma, creemos que en este caso el *foco* fue epistémico (significados institucionales) y cognitivo (significados personales), el *fin* es descriptivo, explicativo y valorativo, la *generalizabilidad* es exploratoria y el *nivel* es puntual puesto que se estudiarán los problemas creados sobre el objeto función cuadrática.

Para el estudio cualitativo de las configuraciones como producto de las prácticas matemáticas de resolución y creación, nos apoyamos en la técnica denominada *análisis ontosemiótico* (Godino, 2002), la cual permite describir sistemáticamente tanto la actividad matemática realizada por profesores en servicio (práctica matemática de resolución), la actividad matemática de creación de problemas (práctica matemática de creación), como los objetos matemáticos primarios (lenguaje, situación-problema, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos).

Por otro lado, para el objetivo 3 de investigación, utilizamos una triangulación de investigadores para valorar los problemas creados y explicitar su vinculación con la calidad de los problemas creados por variación. En este caso, se hace uso de una rúbrica considerando aspectos relacionados con un *problema didácticamente bueno* propuesto por Malaspina (2011a).

3.3.3 Técnicas e instrumentos

La investigación cualitativa del tipo estudio de casos, siguiendo la idea de Ponte (2006), presenta diversas técnicas para la obtención de la información: la entrevista, la observación directa, la observación participante, el diálogo, el análisis, las grabaciones de video, las charlas, los problemas que aparecen dentro de la investigación, diarios del investigador. Tomando en consideración este aspecto teórico y nuestros objetivos de investigación, las técnicas que consideramos son: observación directa no participante, la entrevista y el análisis de los documentos elaborados con base en la creación de problemas por los sujetos de investigación. En este último aspecto, se realizará un análisis que utilizará la técnica de análisis didáctico propuesta por el EOS, en particular el estudio de las configuraciones epistémicas, configuraciones cognitivas y prácticas matemáticas mediante el análisis del contenido. Los aspectos generales se resumen en la Tabla 9.

Tabla 9. Relación entre estrategia, técnica e instrumentos de investigación

Estrategia de investigación	**Técnicas de investigación**	**Instrumentos**
Estudio de casos (taller de creación de problemas)	Entrevistas semiestructuradas, observación no participante, notas de campo, cuestionarios de caracterización de la muestra, evaluación diagnóstica, análisis documental como consecuencia del taller, juicio de expertos, triangulación documental.	Prueba de evaluación diagnóstica, cuestionario, formulario para análisis de objetos, fichas de protocolos de reflexión sobre la práctica de resolución y creación de problemas.

Para el estudio de los problemas creados se programó un taller de creación de problemas denominado *Creación de problemas en el contexto de las funciones para profesores de matemática en servicio*, que fue adaptado de Malaspina et al. (2015) y que se explica en el Capítulo 4.

Diseño de la evaluación diagnóstica

Estamos de acuerdo con Godino (2009) respecto a que es importante tener presente el conocimiento didáctico y matemático del profesor. Nuestra investigación se enfoca, con mayor énfasis, en el primer aspecto. Sin embargo, nos ubicamos en la postura, tal como lo señalan algunos investigadores en el área de la creación de problemas (como Yuan & Sriraman 2011), de que un buen creador debe tener un buen manejo del objeto matemático. Por lo que, para los propósitos de nuestro trabajo, elaboramos un instrumento para evaluar el manejo cognitivo de la función cuadrática por profesores de matemática en servicio.

El instrumento en mención propone un manejo elemental de la función cuadrática a nivel escolar, por lo que creemos pertinente realizar el cruce de información con la propuesta del Diseño Curricular del Perú (DCN) (Perú, Ministerio de Educación, 2009) sobre el objeto función cuadrática y aplicarlo a profesores de matemática en servicio. Esta adaptación presupone que el profesor de matemática debe tener como mínimo el aspecto cognitivo que propone el DCN. Así, trataremos de hacer una adaptación de una taxonomía de procesos cognitivos para la función cuadrática.

Como nuestro instrumento tiene como foco la evaluación cognitiva de la función cuadrática, tratamos de utilizar una taxonomía que se adapte mejor a nuestros propósitos, ya que, en los últimos años, diversos estudios se han concentrado en el desarrollo de distintas técnicas e instrumentos de evaluación. Un caso muy resaltante lo podemos apreciar en el uso masivo de la taxonomía de Bloom (Bloom & Krathwohl, 1984), que ha permitido diversificar y categorizar las habilidades cognitivas que un estudiante usa para demostrar el conocimiento de un contenido.

Resaltamos que también existe cierta discrepancia en el uso y la importancia que se le ha dado al trabajo de Bloom y Krathwohl (1984). Así tenemos lo manifestado por Gierl (citado en Fong & Berinderjeet, 2015), quien menciona que la taxonomía de Bloom no provee un adecuado modelo para los proponentes de preguntas, quienes deben anticipar los procesos usados por los estudiantes que resuelven problemas de una prueba de rendimiento en matemáticas.

Asimismo, tenemos la posición de Thompson (citado en Fong y Berinderjeet, 2015), quien afirma que los profesores de matemática tienen dificultad tanto para interpretar las habilidades cognitivas, sugeridas por la taxonomía de Bloom, como para la creación de preguntas para una prueba de rendimiento cognitivo más avanzado. Sin embargo, diversos investigadores han realizado una especificidad del trabajo de Bloom, como el caso de Smith et al. (1996), quienes afirman que este se presta muy bien para diseñar evaluaciones de ciertas tareas pero tiene limitaciones para situaciones de contexto matemático. Así, Smith et al. (1996) modifican la taxonomía de Bloom y proponen su taxonomía MATH (la denominación MATH proviene de las palabras *Mathematical Assessment Task Hierarchy)* para la elaboración de actividades de evaluación dirigidas al contexto matemático.

En esta taxonomía (ver Tabla 10) se identifican ocho categorías del conocimiento matemático y habilidades respectivas separadas en tres grupos denominados A, B y C. Estas ocho categorías son ordenadas por la naturaleza de la actividad requerida para desarrollar en forma correcta una actividad determinada, mas no por el nivel de dificultad.

A continuación, describimos los dominios y subcategorías asociadas a la taxonomía MATH.

Tabla 10. Niveles de la taxonomía MATH

Nivel A: Reproducción	**Nivel B: Conexión**	**Nivel C: Razonamiento**
A1: Conocimientos previos	B1: Información	C1: Justificación e interpretación
A2: Comprensión	B2: Aplicación en nuevos contextos	C2: Implicaciones, conjeturas y comparaciones
A3: Uso frecuente de procedimientos		C3: Evaluación

Fuente: Smith et al. (1996)

Nivel A: Reproducción

- *Conocimientos previos.* Se refiere a recordar una definición o fórmula específica.
- *Comprensión.* Es el entendimiento de símbolos y/o fórmulas; reconocer ejemplos y contraejemplos del objeto matemático y sus características.
- *Uso frecuente de procedimientos.* Cubre el uso de algoritmos practicados por el estudiante en clase a través de ejemplos básicos.

Nivel B: Conexión

- *Información.* El estudiante realiza tratamientos de información en distintos registros.
- *Aplicación en nuevos contextos.* El estudiante elige y aplica métodos o información apropiada en situaciones nuevas.

Nivel C: Razonamiento

- *Justificar e interpretar.* El estudiante emplea argumentos para probar o demostrar alguna situación.
- *Implicaciones, conjeturas y comparaciones.* El estudiante formula hipótesis para resolver nuevas situaciones al modificar las variables didácticas (nuevas estrategias).
- *Evaluación.* Valorar y emitir juicios utilizando criterios de apreciación de libre elección o impuestos.

Asociados a la taxonomía MATH, se presentan también descriptores para cada una de las subcategorías descritas. En la Tabla 12, consideramos el resumen de dichos descriptores presentados en el trabajo de Fong y Berinderjeet (2015).

Es necesario resaltar que en el artículo de Smith et al. (1996) se presentan ejemplos y otros aspectos relacionados con la taxonomía MATH, por lo que esta se muestra pertinente para evaluar los diferentes tipos y niveles de conocimiento con base en las preguntas generadas para un examen escrito.

A continuación mostramos un instrumento para evaluar un contenido específico (el caso de las funciones cuadráticas) utilizando la taxonomía MATH y sus descriptores (ver Tabla 12).

Instrumento asociado a la taxonomía MATH

En este apartado mostramos y caracterizamos el instrumento asociado a la taxonomía MATH (Smith et al., 1996). En primer lugar, realizamos una breve descripción de nuestro instrumento y su pertinencia al DCN. Luego, presentamos la matriz de especificaciones asociada a la taxonomía MATH y la relacionamos con nuestro objeto matemático. Finalmente, mostramos el instrumento como producto del análisis previo con sus respectivos criterios o indicadores de evaluación.

El objeto matemático elegido es la función cuadrática, que se muestra en el dominio Número, Relaciones y Funciones correspondiente al VII ciclo, en particular al tercer grado de educación secundaria. En este ciclo de estudios, el DCN muestra la competencia y las capacidades asociadas a la función cuadrática (ver Tabla 11).

Tabla 11. Competencia matemática y su relación con el objeto

CONTENIDO MATEMÁTICO	COMPETENCIA	CAPACIDADES ASOCIADAS
Función cuadrática • Dominio y rango de funciones cuadráticas. • Gráfica de funciones cuadráticas. • Modelación de fenómenos del mundo real con funciones. • Análisis de funciones cuadráticas completando cuadrados.	Resuelve problemas de programación lineal y funciones; argumenta y comunica los procesos de solución y el resultado sutilizando lenguaje matemático.	***Razonamiento y demostración:*** Elabora fenómenos del mundo real con funciones. ***Comunicación matemática:*** Representa funciones cuadráticas, valor absoluto y raíz cuadrada en tablas, gráficas o mediante expresiones analíticas. Establece, analiza y comunica relaciones y representaciones matemáticas en la solución de un problema. ***Resolución de problemas:*** Resuelve problemas que implican la función cuadrática. Resuelve problemas de contexto real y matemático que implican la organización de datos a partir de inferencias deductivas.

Fuente: Perú, Ministerio de Educación, 2009

Tabla 12. Indicadores según la taxonomía MATH

Categorías	El profesor
A1: Conocimientos previos	Recuerda información previamente aprendida en su forma original, por ejemplo, una fórmula específica o definición.
A2: Comprensión	Decide si las condiciones de una simple definición se cumplen, entiende el significado de los símbolos en una fórmula, muestra habilidad para la sustitución en una fórmula y reconoce ejemplos y contraejemplos
A3: Uso frecuente de procedimientos	Maneja todos los pasos en un procedimiento que ha sido usado en la práctica de ejercicios de manera previa a la evaluación; obtiene respuestas correctas siempre y cuando el procedimiento se utiliza adecuadamente (a pesar de que hubiera más de un procedimiento apropiado para un problema en particular).

B1: Información	Transforma la información de un registro a otro, por ejemplo, verbal a numérico; decide si las condiciones de una definición conceptual se cumplen (donde una definición conceptual es aquella cuya comprensión requiere una cambio significativo en la forma de pensamiento o conocimiento matemático del estudiante); reconoce cuando una fórmula o método es inapropiado en un contexto dado; resume en términos no técnicos para un público diferente; construye un argumento matemático desde el ámbito verbal del método; explica las relaciones entre las partes del material; explica los procesos o procedimientos; reensambla las partes de un argumento matemático en un orden lógico.
B2: Aplicación en nuevos contextos	Escoge y aplica un método o información apropiado en nuevas situaciones, por ejemplo, modelizar situaciones reales; comprueba un teorema cuya demostración no es conocida y que va más allá de los procedimientos rutinarios; y escoge y aplica algoritmos apropiados.
C1: Justificación e interpretación	Justifica y/o interpreta un resultado dado, por ejemplo, probar un teorema con el objetivo de justificar un resultado; encuentra errores en el razonamiento; reconoce las limitaciones y las fuentes de error de cálculo; discute la importancia de ejemplos y contraejemplos a través del reconocimiento de supuestos tácitos.
C2: Implicaciones, conjeturas y comparaciones	Obtiene implicaciones, realiza conjeturas y los prueba.
C3: Evaluación	Usa criterios establecidos para juzgar el valor de la situación para un propósito específico, por ejemplo, realizar juicios; seleccionar para la relevancia; discute los méritos de un algoritmo, el uso de habilidades organizacionales y el pensamiento creativo en la reestructuración de una actividad propuesta para enfocarla desde diferentes formas.

Fuente: Adaptado de Smith et al. (1996)

Asimismo, se hace el cruce con lo que el DCN plantea acerca del mismo objeto respecto de los indicadores de las capacidades descritas en el Tabla 11. Al revisar cuidadosamente la Tabla 13, nos percatamos de que en el DCN del 2009 (Perú, Ministerio de Educación, 2009) no se realiza un completo estudio del objeto función cuadrática. Esta afirmación la hacemos con base en la taxonomía MATH propuesta, ya que esta plantea un mejor desarrollo de las evaluaciones de procesos cognitivos que el estudiante deberá desarrollar cuando se enfrente a una tarea específica. Se espera que estudios posteriores realicen un análisis más profundo sobre el DCN y la taxonomía MATH, para lo cual podemos tomar como referencia el trabajo de Fong y Berinderjeet (2015), quienes realizan un estudio comparativo sobre el diseño curricular de Singapur y dos taxonomías específicas para la matemática.

Ahora bien, respecto a la matriz de especificaciones, debemos aclarar que no se ha realizado un estudio de peso y porcentaje para cada ítem elaborado. Hemos desarrollado nuestro trabajo desde el punto de vista cualitativo, como se muestra en el instrumento elaborado (ver Anexo B. 3) y basado en la matriz de especificaciones (ver Tabla 13). Este instrumento se aplicó a los participantes del taller sobre creación de problemas, y se esperó que, como profesores de matemática en servicio, nos proporcionen información adecuada para estudiar el proceso de creación de problemas respecto al análisis de las prácticas matemáticas y configuraciones de objetos relacionados.

Matriz de especificaciones

En esta parte del trabajo, presentamos la matriz de especificaciones y la clasificación de habilidades para el contenido matemático función cuadrática. Por consiguiente, se señalan las categorías (niveles), subcategorías y habilidades específicas según la taxonomía MATH. Cabe resaltar que en esta matriz, que se presenta en la Tabla 13, se muestran los indicadores o descriptores para el objeto matemático función cuadrática y su comparación con las consideradas en el DCN (2009).

Tabla 13. Matriz de especificaciones y habilidades de la taxonomía MATH

Niveles	**Categorías**	**Indicadores taxonomía MATH**	**Indicadores DCN**
Reproducción	Conocimientos previos	Recuerda la definición de función cuadrática mediante su regla de correspondencia.	
	Comprensión	Comprende la representación gráfica de la función cuadrática mediante su regla de correspondencia verificando los puntos en el plano correspondiente a dicha función.	
	Uso frecuente de procedimientos	Resuelve problemas sobre funciones cuadráticas utilizando procedimientos correctos	Resuelve problemas que implican la función cuadrática.
Conexión	Información	Reconoce si el gráfico de una función en el plano de coordenadas rectangulares corresponde a una función cuadrática.	Representa funciones cuadráticas en tablas, gráficas o mediante expresiones analíticas. Establece, analiza y comunica relaciones y representaciones matemáticas en la solución de un problema
		Transforma representaciones algebraicas de la función cuadrática en gráficos en el plano de coordenadas rectangulares	
		Explica su procedimiento en la resolución de problemas sobre funciones cuadráticas con un orden lógico.	
	Aplicación en nuevos contextos	Elabora representaciones algebraicas de la función cuadrática, utilizando una regla de correspondencia.	Elabora modelos de fenómenos del mundo real con funciones.

Razonamiento	Justificación e interpretación	Interpreta el resultado obtenido luego de la resolución de problemas que involucre funciones cuadráticas.	
		Justifica con rigor su procedimiento en la resolución de problemas que involucren funciones cuadráticas.	
	Implicaciones, conjeturas y comparaciones	Realiza conjeturas a partir de un problema sobre funciones cuadráticas.	
	Evaluación	Valora el uso de la función cuadrática para la resolución de problemas de contexto matemática específico.	

3.4 Estrategias por objetivos específicos

Para alcanzar los objetivos ya mencionados, se plantean estrategias y procedimientos para la recogida y análisis de la información. En las Tablas 12, 13, 14 y 15 se presentan tanto los objetivos específicos como sus desagregados, además de las estrategias y tareas para cumplir con nuestros objetivos.

Tabla 14. Estrategias a seguir para el primer objetivo específico

Objetivo	Acciones	Pasos por cada actividad
Identificar los conocimientos matemáticos de los profesores sobre la función cuadrática y los objetos matemáticos asociados a ella.	Analizar el desarrollo matemático y epistémico de la función cuadrática.	Para cumplir con esta parte, de la literatura existente elegimos los trabajos de Font et al. (2012), Hitt (2002), Youschkevitch (1976), Ponte (1992), Sánchez y Valdés (2007), Swetz (2013), Higueras (1998), Kline (1990a, 1990b, 1990c), Kleiner (2012), Bashmakova y Smirnova (2000) e Irving (2013). La intención en esta parte es describir cómo desde el punto de vista epistémico y matemático ha ido evolucionando la noción de función, en particular la función cuadrática. Se presentan configuraciones epistémicas asociadas al desarrollo de la noción de función basado en el trabajo de Font et al. (2012).
	Elaborar una evaluación diagnóstica del tipo cognitiva para caracterizar a los sujetos de investigación	Este tercer aspecto se fundamenta en la aplicación de una taxonomía de habilidades adaptadas para la presente investigación. La taxonomía a utilizar fue la de Smith et al. (1996), que es usualmente conocida como MATH y que se distingue por ser específica para la matemática. En el Capítulo 3 se explica en detalle este marco referencial y se construye el instrumento de evaluación denominado evaluación diagnóstica.

Tabla 15. Estrategias a seguir para el tercer objetivo específico

Objetivo	Acciones	Pasos por cada actividad
Analizar e identificar las prácticas matemáticas asociadas a la resolución y creación de problemas, las configuraciones epistémicas y cognitivas asociadas al proceso de instrucción de creación de problemas sobre funciones cuadráticas por variación de un problema dado.	Instruir a los profesores en servicio en la elaboración de las configuraciones cognitivas y análisis de sus prácticas matemáticas respecto a su proceso de instrucción en resolución y creación de problemas.	Se realiza un taller de creación de problemas sobre funciones, en el que se dedicará una sesión a la elaboración de configuraciones cognitivas por los sujetos de investigación. Así mismo, se hará hincapié en la reflexión sobre la práctica matemática tanto de resolución como de creación de problemas.
	Elaborar las C.C. de algunos problemas propuestos a los profesores en servicio.	Los profesores en servicio elaboran las CC de sus problemas mediante la resolución de los mismos. Se utiliza un esquema con ejemplos respectivos que servirán de guía, utilizando la herramienta teórica del EOS (como se explica en el Capítulo 3) de los seis tipos de objetos matemáticos de este enfoque: situación-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que están relacionados entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

	Describir y reflexionar con base en su práctica y siguiendo la consigna diseñada para esta actividad.	Con una consiga diseñada (protocolo) para este propósito, los profesores reflexionan sobre su práctica pedagógica en la resolución y creación de problemas matemáticos. Así mismo, esta reflexión tendrá como base el uso de las CC previamente elaboradas para emitir juicios de valoración didáctica relacionados con el episodio presentado.
	Explicar la estrategia episodio, reflexión didáctica, problema pre y problema pos (ERPP), adaptada de Malaspina et al. (2015).	Se programará una charla magistral para presentar las bondades de la estrategia y para mostrar ejemplos de otros objetos matemáticos.
	Plantear el episodio relacionado con las funciones cuadráticas.	Mediante una ficha de trabajo, se presenta el episodio sobre funciones cuadráticas. Este episodio permitirá la creación de problemas por variación con énfasis didáctico. Para ello los sujetos de investigación resolverán el problema propuesto en el episodio, luego reflexionarán sobre su práctica de resolución.
	Crear un problema pre y resolverlo. Los participantes serán agentes activos para esta actividad. Los sujetos de investigación describen también sus prácticas matemáticas y reflexionan al respecto.	Se aplicará la estrategia de creación por variación propuesta por Malaspina (2014a), enfatizando en el propósito didáctico. Para esta actividad, a los participantes del taller, se les dará la indicación del uso de las CC elaboradas del problema del episodio y consideración del episodio de clase como medio de reflexión.

Tabla 16. Estrategias a seguir para el cuarto objetivo específico

Objetivo	Acciones	Pasos por cada actividad
Explicitar la vinculación de la calidad de los problemas creados con los criterios de idoneidad didáctica.	Discutir sobre lo que se considera un Problema Didácticamente Bueno (PDB) y su acercamiento a las idoneidades: • Epistémica • Cognitiva • Interaccional • Ecológica • Afectiva • Mediacional	Se presenta la propuesta tomada de Malaspina (2011b) sobre lo que se considera un buen problema desde el punto de vista didáctico. Aplicación de una rúbrica para valorar los problemas creados entre pares. Se utiliza las consideraciones de un PDB propuesto por Malaspina (2011a). Este instrumento se puede ver en el Anexo E.2. Someter a una triangulación de investigadores los dos problemas que forman parte de nuestro caso de estudio.

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTACIÓN DEL TALLER DE CREACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EL ENTORNO DE LAS FUNCIONES

Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar a tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento.

G. Polya, *1887-1985*, matemático húngaro impulsor del área de resolución de problemas.

En este cuarto capítulo nos enfocamos en los principales aspectos relacionados con el taller sobre creación de problemas matemáticos en el entorno de las funciones afines y cuadráticas. Iniciamos este apartado con la presentación del diseño, la metodología y la descripción del taller sobre creación de problemas. Asimismo, comentamos la implementación de dicho taller y analizamos las respuestas de los profesores en servicio participantes. Finalmente, presentamos los casos seleccionados para los propósitos de la presente investigación y realizamos la valoración desde el acercamiento a las idoneidades didácticas propuestas por el EOS.

Cabe mencionar que el taller de creación de problemas presenta una estrategia que incluye una faceta reflexiva. Esta propuesta nace como consecuencia del desarrollo de una investigación previa (Malaspina et. al., en prensa) cuyos resultados fueron sometidos a consideración para su presentación en el *13th International Congress on Mathematical Education* (ICME-13) desarrollado el 2016 en Hamburgo, Alemania. En este importante evento, se realizó una selección de las investigaciones mediante un *peer review*, cuyo resultado fue catalogado como *good quality* y aceptado para su presentación y discusión en el *Topic Study Group* sobre *problem solving*.

Como conclusión del trabajo de Malaspina et al. (en prensa) que implica la estrategia EPP para la creación de problemas, se menciona que esta debe ser afinada, considerando una fase (R) de reflexión metacognitiva y didáctica, con lo cual la estrategia se denominaría ERPP (episodio, reflexión didáctica, problema pre, problema pos). En tal fase, el profesor debe hacer una configuración cognitiva de su solución al problema del episodio y –apoyándose en ella– hacer una narración breve (dirigida a otro colega) de los pasos fundamentales que siguió para resolver el problema. También, una vez creado y resuelto el problema pre solicitado, debería hacer una configuración cognitiva de tal solución y luego un comentario fundamentado respecto a su grado de convencimiento de que el problema creado contribuirá a la comprensión y solución adecuada del problema del episodio. Para el problema pos, debería hacerse algo similar, siempre y cuando se tenga en cuenta que este debe ser más retador.

Estas ideas previas, como se señaló en el Capítulo 1, nos permitieron reflexionar y promover la estrategia ERPP en nuestra investigación. Sin embargo, debido al propósito exploratorio de nuestro trabajo, enfatizamos el estudio en la competencia de análisis didáctico que promueve la creación de problemas, prestando una atención más cualitativa (superficial en algunos casos) a la competencia matemática del profesor.

Por tanto, en las líneas que siguen desarrollamos esta estrategia, considerando la creación de problemas pre con énfasis didáctico.

4.1 Diseño y realización del taller de creación de problemas con profesores de matemática en servicio

Como se comentó en el Capítulo 3, el taller sobre creación de funciones adoptó una estrategia de desarrollo de la actividad de creación de problemas de Malaspina et al. (2015). En esta propuesta, se crean *problemas pre* y *problemas pos* utilizando como marco de reflexión *episodios de clase*. En nuestro caso, este episodio se ubica en el contexto de las funciones afines y cuadráticas.

Por los objetivos de la investigación, nos concentraremos en trabajar los *problemas pre*, cuyo propósito fundamental es contribuir a la comprensión y la solución del problema del episodio, lo cual se relaciona con la competencia de análisis didáctico del profesor de matemáticas, en el marco del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). Así, adaptamos los constructos: configuración de objetos y análisis de prácticas matemáticas, y realizamos un acercamiento a la idoneidad didáctica de los problemas creados con énfasis didáctico bajo las consideraciones propuestas por Malaspina (2011b).

Para obtener los resultados esperados y alcanzar nuestros objetivos de investigación, llevamos a cabo un taller sobre creación de problemas en el que pusimos en práctica la estrategia propuesta luego del análisis de la información del taller piloto sobre creación de problemas, la cual consiste en un *episodio*, *reflexión didáctica* y *elaboración de configuraciones*, *problemas pre*, *problemas pos* (a esta la llamaremos estrategia ERPP). En esta investigación, no examinamos los *problemas pos*, considerando que ellos están más relacionados con la competencia matemática que con la competencia didáctica del profesor.

4.2 Metodología y descripción del diseño

La metodología usada en este taller difiere, por varias razones, en cierta forma del aplicado en el taller piloto sobre creación de problemas. En primer lugar, en el taller sobre creación de problemas se utilizó la estrategia ERPP para crear problemas tomando en cuenta un episodio de clase de tercer grado de educación secundaria. Esta experiencia didáctica se basó en un episodio de clase sobre funciones cuadráticas y cuyo propósito fue aplicar una estrategia de creación de problemas considerando aspectos relacionados con la reflexión didáctica y la estrategia de creación de problemas por variación de un problema dado. Por otro lado, cabe destacar que también se promovieron actividades de resolución de problemas, cuya finalidad fue reflexionar sobre la práctica de solución y elaborar configuraciones de objetos asociados a una situación-problema. Asimismo, las actividades de creación también tuvieron una etapa de reflexión sobre la práctica de creación y elaboración de configuraciones de objetos intervinientes en los problemas creados.

Este taller se implementó con la finalidad de aplicar, previa adaptación, una estrategia más reflexiva para crear problemas, específicamente en el análisis de las configuraciones de objetos y la reflexión sobre la práctica matemática en base a los constructos del EOS. Como consecuencia, las sesiones previas al acto de crear problemas tuvieron el objetivo de introducir a los participantes a la experiencia de elaborar configuraciones y reflexiones didácticas sobre su práctica matemática. Así mismo, se promovió la inclusión de nociones sobre objetos matemáticos e idoneidad didáctica desde el punto de vista del EOS y su asociación con la creación de problemas.

4.2.1 Organización del taller

El taller se realizó del 10 al 13 de noviembre de 2015 en el campus de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). La participación se dio por medio de becas completas ofrecidas por el Centro de Investigación y Servicios Educativos (CISE) de la PUCP. Es necesario mencionar que esta selección se realizó por cuenta del CISE y que no hubo una evaluación respecto a la competencia matemática o didáctica de los profesores invitados. El nombre del taller fue *Creación de problemas de matemáticas para la enseñanza y aprendizaje de funciones en la educación secundaria* y tuvo una duración de 8 horas distribuidas en cuatro sesiones de trabajo.

4.2.2 Diseño de las sesiones del taller de creación de problemas

A continuación, describimos el diseño de las sesiones y actividades propuestas para el taller sobre creación de problemas. Como se puede observar en el Anexo A.1 (en el que se muestra la planificación de las sesiones), el desarrollo del taller se divide en cuatro sesiones de dos horas de duración cada una y cuyos objetivos fueron:

- Promover la creación de problemas como una ventana de oportunidades para mejorar el aprendizaje y la enseñanza de la matemática.

- Desarrollar la competencia de análisis didáctico de los profesores mediante la creación de problemas sobre funciones que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas en la educación básica.

Asimismo, la temática del taller fue diversa y se detalla en el sílabo elaborado para las actividades (ver Anexo A.2).

Los contenidos principales de las actividades fueron:

1. Elementos básicos para la creación de problemas de matemáticas y para el análisis didáctico.
2. Elaboración de configuraciones cognitivas mediante el análisis de la solución de un problema dado.
3. Análisis didáctico y creación de problemas didácticamente buenos.

A continuación se explica el diseño de cada una de las cuatro sesiones:

Primera sesión

A.1 Diseño del cuestionario de recolección de información (ver Anexo B. 2) para obtener datos referenciales de los participantes respecto a su experiencia docente y formación académica. También sirvió para conocer la experiencia de los participantes sobre la creación de problemas matemáticos y su implicancia en la enseñanza y el aprendizaje.

A.2. Elaboración y elección de ítems para la evaluación diagnóstica (ver Anexo B.3). Como se explicó en el Capítulo 3, la prueba diagnóstica responde a una taxonomía de habilidades aplicada a esta investigación. Para su validez, este instrumento se sometió a un juicio de expertos.

A.3. Elaboración de una presentación con diapositivas para informar a los participantes la importancia de la creación de problemas en el proceso del aprendizaje y la enseñanza de la matemática (ver Anexo B.1). Así se mostró las cualidades de la competencia de creación de problemas y aspectos relacionados con las estrategias de creación de problemas matemáticos propuestos por Malaspina (2015a).

A.4. Elaboración de una presentación con diapositivas y elección de un episodio de clase que involucre un problema creado por variación en el entorno de las funciones (ver Anexo B.5). Para esto se presenta un episodio de clase de segundo año de secundaria sobre un problema cotidiano y las respuestas de tres estudiantes al ser sometidos a la resolución de este problema.

Segunda sesión

B1. Diseño de la ficha informativa sobre la solución experta del problema del episodio explicado en la primera sesión (ver Anexo C.1). En este material también se incluye la configuración epistémica sobre la solución experta del problema del episodio. Los asistentes recibieron este material al iniciarse la sesión, ya que este sirvió de marco referencial y guía para elaborar sus configuraciones de objetos en la segunda y las posteriores sesiones.

B.2. Adaptación del formulario para la realización de las configuraciones cognitivas de objetos (ver Anexo C.2) propuesto por el EOS asociadas a la solución del problema del episodio sobre funciones afines correspondientes al segundo año de educación secundaria.

B.3 Diseño de la consigna para la realización del análisis de las prácticas matemáticas de solución respecto del problema sobre funciones afines presentado en el episodio de clase correspondiente al segundo año de educación secundaria (ver Anexo C.3).

Tercera sesión

C.1. Elaboración de una presentación con diapositivas sobre las consideraciones de un problema didácticamente bueno (PDB). Este material sirvió de pretexto para iniciar el debate sobre la comprensión de un problema con énfasis didáctico más que evaluativo. También sirvió para presentar la estrategia ERPP (episodio, reflexión didáctica, problema pre y problema pos) para la creación de problemas didácticamente buenos.

C.2 Diseño del episodio de clase sobre función cuadrática correspondiente al tercer año de secundaria y su presentación en diapositivas (ver Anexo D.2). Este episodio de clase consideró la opinión de tres estudiantes que fueron sometidos a la resolución de un problema propuesto.

C.3 Diseño de la ficha de trabajo 1 sobre la elaboración de la configuración cognitiva de objetos matemáticos asociados a la resolución del problema del episodio (ver Anexo

D.3). Los participantes del taller debieron resolver el problema del episodio y luego elaborar su configuración cognitiva de objetos asociados a su solución.

C.4 Diseño de la ficha de trabajo 2 acerca de la reflexión sobre la práctica matemática de solución correspondiente al problema del episodio (ver Anexo D.4). Los participantes tuvieron que explicar el proceso de su solución utilizando sus configuraciones cognitivas de objetos previamente elaborados.

C.5 Diseño de la ficha de trabajo 3 sobre la actividad de creación de problemas pre tomando como referencia el problema del episodio (ver Anexo D.5). Los participantes tuvieron que crear un problema y plantear su solución considerando los aspectos de un PDB y tomando en cuenta las opiniones vertidas por los estudiantes que trataron de resolver el problema. Asimismo, elaboraron la configuración cognitiva de objetos matemáticos presentes en la solución de su problema pre creado en el contexto del tercer año de secundaria.

C.6 Elaboración del protocolo de análisis de prácticas matemáticas de creación de un problema pre (ver Anexo D.6). Los profesores participantes tuvieron que reflexionar sobre la actividad de creación de problemas pre considerando su configuración cognitiva previamente elaborada.

Cuarta sesión

D.1 Elaboración de una presentación con diapositivas sobre las consideraciones de los criterios de un PDB y su conexión con los criterios de idoneidad didáctica del EOS (ver Anexo E.1). Los profesores participantes fueron instruidos en las nociones de idoneidades didácticas y su acercamiento a la creación de problemas dentro del marco de los PDB.

D.2 Diseño de una rúbrica para valorar los problemas pre creados desde el punto de vista didáctico (ver Anexo E.2). Esta actividad se realizó en forma individual, es decir, cada profesor valoró su problema; luego otro profesor, después de resolver el problema, también utilizó la rúbrica para valorar el problema del compañero. Finalmente, para una valoración experta del problema creado, sometimos estos a una triangulación de investigadores, quienes también utilizaron la misma rúbrica. Así, se empleó una triangulación de revisores para catalogar a un problema pre creado como un PDB.

4.2.3 Descripción de la implementación

En este apartado describiremos la implementación realizada de acuerdo con el diseño explicado en el apartado anterior.

4.2.4 Participantes

Los participantes inicialmente eran 27, de los cuales 14 asistieron a las cuatro sesiones y solo 2 a tres de ellas, incluyendo la última sesión. En esta parte del trabajo, nos ceñiremos solo a estos 16 participantes.

El perfil del participante del taller fue de profesores de diferentes centros educativos de Lima, formados en diferentes universidades e institutos pedagógicos del Perú en la especialidad de matemática. También se notó la participación de dos profesoras del nivel primario y dos profesores de matemática en formación que, a la fecha del desarrollo del taller, estaban culminando sus estudios universitarios. La mayoría de los participantes laboraba en instituciones privadas y afirmó tener más de 10 años de experiencia en la enseñanza de la matemática a nivel secundario (aproximadamente un 80 %).

Respecto a la experiencia en creación de problemas, doce manifestaron tenerla, pero solo cuatro supieron explicar la estrategia de creación de problemas que usualmente utilizan.

4.2.5 Tipos de registro de información

El registro de información se realizó mediante un cuestionario y diversas fichas de trabajo entregadas a los participantes durante las sesiones del taller.

4.2.6 Implementación

Dado que el tesista no participó en forma activa en el desarrollo del taller, podemos afirmar que tuvo el papel de observador no participante. El taller sobre creación de problemas se dividió en cuatro sesiones, de dos horas de duración cada uno. Los participantes del estudio piloto fueron profesores de matemática de educación secundaria en servicio. Este grupo de docentes no fue seleccionado previamente, su asistencia fue voluntaria. Por tanto, no se puede considerar una muestra representativa sino intencional.

A continuación describimos cada una de las cuatro sesiones:

Primera sesión

En la primera sesión se presentó el objetivo del taller en su conjunto; además se señaló que este pertenecía a una investigación más extensa. Asimismo, se explicó en forma breve la importancia de la creación de problemas para el aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Esta exposición provocó inquietud en los asistentes, de tal forma que la mayoría de ellos estuvo muy atenta a las ideas planteadas. Para esta actividad se utilizó una presentación en diapositivas que se puede visualizar en el Anexo B.1.

En la segunda parte, los asistentes resolvieron los problemas del examen diagnóstico denominado *exploración inicial* (ver Anexo B.3), que consistió en seis problemas referidos a funciones, de los cuales el primero era sobre funciones afines y los otros sobre funciones cuadráticas. La elaboración de este tipo de evaluación diagnóstica se fundamenta en el Capítulo 3, en el que se explica en detalle las características del instrumento en mención.

Tres profesores, cuya experiencia en el manejo del objeto matemático denominado función es de notoria evidencia (ver Tabla 21), resolvieron en poco tiempo la evaluación diagnóstica. Cada uno de los docentes participantes tuvo una serie de hojas sueltas para resolver los problemas propuestos. Algunos de ellos no llegaron a resolver todos los problemas en el tiempo establecido, por lo que se tuvo que plantear tiempo adicional. Una vez finalizado el tiempo, los profesores entregaron las hojas de trabajo. Cabe mencionar que también aplicamos una hoja de recojo de información (ver Anexo B2).

En la última parte de la sesión 1, se resolvió el primer problema de la evaluación diagnóstica referido a funciones afines. Esta exposición se realizó en forma dinámica con los participantes, lo cual provocó el interés sobre la estrategia de solución. La exposición de la solución del problema (ver Anexo B.5 de la sesión 1 y Anexo C.1 de la sesión 2) fue el motivo para la introducción del constructo Configuración de Objetos del EOS. Así se afirmó que la presente investigación tuvo como propósito enlazar un marco teórico de la Didáctica Fundamental con aspectos más resaltantes de la creación de problemas. Finalmente, se presentó los seis objetos matemáticos primarios (lenguaje, situación-problema, conceptos, procedimiento, proposiciones y argumentos) que componen la Configuración de Objetos y se precisó la importancia de la reflexión sobre estos aspectos en el análisis didáctico correspondiente a la competencia de creación de problemas.

Segunda sesión

Debido a que el taller se llevó a cabo durante la semana de labores escolares, solo asistieron trece profesores. Se comenzó la sesión entregando la ficha informativa, en la que se presentó la solución experta del problema del episodio correspondiente al segundo año de secundaria y la configuración epistémica experta asociada a dicha solución (ver Anexo C.1). Este material sirvió de apoyo fundamental para introducir a los participantes en la práctica de elaboración de configuraciones de objetos y en la reflexión sobre la práctica matemática, que fue el objetivo central de la segunda sesión.

De manera previa al inicio de la actividad, se pidió socializar algunas respuestas al problema del episodio de segundo de secundaria. Así, dos profesores expusieron sus soluciones y generaron un debate sobre la importancia de detectar los objetos matemáticos intervinientes en todo problema para su comprensión cabal.

En esta sesión, los participantes mantuvieron un rol de reflexión dado que estuvieron sometidos a la elaboración de las configuraciones de objetos tomando en cuenta la solución al problema del episodio del segundo de secundaria, este problema fue tomado de la evaluación diagnóstica (Ítem 1). Cabe mencionar que algunas de las respuestas mostradas en esta evaluación no fueron correctas, de tal forma que varios participantes tuvieron que trabajar en parejas la actividad objeto de esta sesión.

Se debe decir que, por ser esta la primera vez que la mayoría de participantes se enfrentó a este tipo de trabajo académico, el encargado del taller tuvo que reflexionar constantemente sobre la importancia de distinguir los objetos matemáticos. Para ello usó la presentación en diapositiva de la sesión 1 (ver Anexo B.1) en la que se muestra la configuración epistémica de la solución experta del problema del episodio.

Tercera sesión

La tercera sesión fue la más ardua respecto al trabajo de campo. Los participantes, que en su mayoría asistieron a la segunda sesión, tuvieron que tomarse un tiempo adicional para desarrollar algunas actividades propuestas. Este percance no permitió culminar a tiempo con la programación de las actividades para ese día, por lo que se tuvieron que posponer algunas de ellas, especialmente las de elaboración de configuraciones y prácticas matemáticas de creación.

Se inició la sesión pidiendo algunos comentarios sobre cómo se habían sentido los participantes respecto a las actividades previas (sesión 1 y sesión 2). La respuesta de la mayoría de los asistentes fue satisfactoria, aunque hubo algunas opiniones con relación a la dificultad de elaboración de configuraciones de objetos, en particular la distinción entre proposiciones y argumentos.

A continuación, se presentó el episodio de clase como modelo de reflexión didáctica (ver Anexo D.2) y se comentó sobre la estrategia ERPP para la creación de problemas didácticamente buenos.

Luego, los asistentes tuvieron que resolver el problema del episodio de clase (ver Anexo D.3). Esta actividad estaba prevista para desarrollarse en 40 minutos, pero tomó más de ese tiempo. Solo tres profesores en servicio terminaron de resolver el problema en el tiempo establecido.

La actividad correspondiente al problema del episodio tuvo la consigna de resolución de problemas. Luego debieron realizar la configuración cognitiva de objetos intervinientes en dicha solución. Después de haber terminado estas dos actividades previas, se entregó la ficha de trabajo sobre reflexión de las prácticas matemáticas de solución del problema del episodio (Ver Anexo D.4)

Debido a la dificultad que tuvieron algunos profesores en servicio en la resolución del problema del episodio, se sociabilizaron algunas soluciones propuestas por los asistentes (socialización de experiencias). Este fue un pretexto para comentar las características de un problema desde el punto de vista didáctico. En ese sentido, el encargado del taller explicó las consideraciones adoptadas en la presente investigación sobre lo que entendemos como problema didácticamente bueno (PDB).

A continuación, se hizo entrega a cada participante de la ficha de trabajo sobre creación de problemas pre (Anexo D.5) y se pidió crear un problema pre desde el punto de vista didáctico, considerando los aspectos de un PDB. Asimismo, se hizo énfasis en que el problema creado debería contribuir a la comprensión y facilite la solución del problema del episodio. Así como la actividad de solución, esta fue también extensa y dificultó la culminación de las actividades previstas para ese día de trabajo.

Como se mencionó, debido a la extensión del taller en esta tercera sesión, algunos participantes no terminaron la actividad de creación, así que se continuó con ello en la cuarta sesión. Con el objetivo de que la recolección de datos fuera más eficiente, se retuvo las hojas de trabajo de esta sesión y estas fueron distribuidas al día siguiente.

Cuarta sesión

La última sesión se inició con la devolución de las fichas de trabajo sobre la creación de problemas pre. Algunos participantes culminaron al poco tiempo esta actividad. Dos de los profesores asistentes a esta sesión estuvieron ausentes en la tercera sesión y tuvieron que realizar la actividad en menor tiempo. Esta actividad pendiente se culminó con el cuestionario de reflexión sobre las prácticas matemáticas de creación (ver Anexo D.6) que articuló la configuración cognitiva de la solución del problema creado y la reflexión didáctica de las prácticas de creación.

Luego de la culminación de esta actividad pendiente, se realizó una exposición mediante diapositivas sobre la conexión entre los criterios de idoneidad didáctica del EOS y la creación de los problemas (ver Anexo E.1), por lo que se compartió con los asistentes la propuesta de acercamiento de las seis idoneidades didácticas para catalogar un problema de *bueno* desde el punto de vista didáctico. Durante la exposición, los profesores en servicio tuvieron la oportunidad de intervenir y reflexionar sobre lo que ellos consideraban como un buen problema desde el punto de vista didáctico.

A continuación, se dio la indicación de que cada participante, en forma individual, evaluaría sus problemas creados utilizando una rúbrica de valoración propuesta para esta actividad (ver Anexo E.2). Esta actividad fue de corta duración, por lo que al término se recogieron los materiales de trabajo y se etiquetaron para su posterior entrega.

Después de valorar sus propios problemas, se pidió a cada participante revisar el problema del compañero utilizando el mismo instrumento pero con la condición de que, previamente, debían resolver el problema para reconocer los indicadores de evaluación propuestos. El encargado del taller solo devolvió la ficha que contenía el problema creado y fue entregada a un compañero de taller distinto al de su entorno.

Todos los participantes tuvieron en sus manos un problema creado por otro compañero y el objetivo era evaluarlo mediante la reflexión de la experiencia al resolverlo. Algunos de los profesores en servicio tuvieron dificultades en resolver los problemas propuestos, de tal forma que esta actividad se extendió un poco más.

Culminado el tiempo para esta actividad, el encargado del taller llevó a cabo una socialización de experiencias tomando como contexto de reflexión los problemas creados por los profesores en servicio. Así, uno de ellos comentó el problema del otro compañero y esto suscitó un interés en los demás. Se discutió si el problema creado cumplía con las características de un PDB. Se propuso soluciones alternas al problema en mención y esta actividad fue aprovechada por los participantes para manifestar sus puntos de vista.

4.2.7 Episodio de clase para el taller sobre creación de problemas, su solución experta y configuración epistémica (CEPe)

El contexto de reflexión para el taller sobre creación de problemas fue un episodio de clase en el marco de las funciones cuadráticas. En la Tabla 17 se muestra el episodio de clase propuesto para este taller, el cual contiene un problema intramatemático sobre función cuadrática y que sirvió como marco de reflexión tanto para las prácticas de solución como las de creación. El problema se ubica en el contexto del tercer año de secundaria (estudiantes de 12 a 13 años aproximadamente en el sistema educativo peruano) que intentaron resolver la situación problemática.

Tabla 17. Episodio de clase en el contexto de la función cuadrática

El profesor Carlos, en una clase de funciones, propuso el siguiente problema a sus estudiantes del tercer grado de educación secundaria:

Encuentra un par de números cuya suma sea 43 y su producto sea el máximo posible.

Resuelve el problema y explica tu procedimiento en forma detallada.

Luego de unos minutos, algunos estudiantes comentaron:

Pedro: Los números son 21 y 22

Isabel: El producto máximo no se puede saber

Santiago: ¿Para qué me sirve resolver este problema?

De acuerdo con este episodio, proponemos una solución experta utilizando el entorno de las funciones cuadráticas.

Solución experta al problema del episodio

A continuación se presenta la solución experta del *problema del episodio*, bajo el supuesto que se plantea en una clase de tercer año de secundaria.

Datos:

- La suma de dos números es 43.
- Su producto sea máximo.

Dado que el requerimiento es encontrar un par de números cuya suma es conocida y su producto debe ser máximo, se define las siguientes variables:

Primer número: x

Segundo número: $43 - x$

Se define la función f como producto de estos números y se busca el valor de la variable que la maximiza:

$$f(x) = x(43 - x)$$

Completando cuadrados se obtiene

$$f(x) = x(43 - x) = -\left(x - \frac{43}{2}\right)^2 + \frac{1849}{4}$$

Ahora bien, dado que f es una función cuadrática cóncava hacia abajo, tendrá máximo para $x = \frac{43}{2}$ y precisamente el producto máximo de dichos números es $\frac{1849}{4}$. Por otro lado, también es común denominar a la primera componente del vértice de este tipo de funciones como el valor de la abscisa que maximiza la función. En tal sentido, también es aceptable utilizar el vértice para encontrar el máximo de la función.

El máximo de esta función también se puede entender en forma gráfica, por lo que la parábola que representa a f se muestra en la Figura 24.

Figura 24. Gráfica de la función producto del problema del episodio

Donde el máximo se encuentra en la cima de la parábola cóncava hacia abajo y corresponde al punto $\left(\frac{43}{2};\ \frac{1849}{4}\right)$ que corresponde a su vértice.

Finalmente, los números que se piden en el problema son ambos iguales a $\frac{43}{2}$.

Configuración epistémica del problema del episodio de tercer año de secundaria (CEPe)

Asociada a la solución experta del problema del episodio, también presentamos la configuración de objetos relacionada con esta solución.

Tabla 18. Configuración epistémica de la solución experta al problema del episodio (CEPe).

Objetos matemáticos	**Especificaciones**
Lenguaje	• ***Términos y expresiones***: primer número, segundo número, máximo, función, producto, completando cuadrados, cóncava, primera componente, vértice, abscisa, parábola, representa, suma. • ***Representaciones verbales:*** número, función, máximo, producto, parábola, vértice • ***Representaciones simbólicas*** 43, x, 43-x, , =, 2, /, 1849, 4, f(x), 43/2, (;), 0 • ***Representaciones gráfica*** 
Situación – problema	**Información:** la suma de dos números es 43. **Requerimiento:** encontrar dos números que cumplan con la información dada, cuyo producto sea máximo. **Contexto:** Intramatemático

	Entorno matemático: funciones cuadráticas, ecuación lineal
Conceptos	Función producto, vértice de una función, gráfico de una función cuadrática, ecuación lineal, potencia de un número.
Proposiciones:	• Como el producto de dos números deber ser el máximo, se define la función producto $f(x) = x(43 - x)$ • Dado que f es una función cuadrática cóncava hacia abajo tendrá máximo para $x = \frac{43}{2}$ • La ordenada del vértice de la parábola correspondiente a *f* es el valor máximo que puede tomar *f*. • El máximo se encuentra en la cima de la parábola invertida y corresponde al punto $\left(\frac{43}{2}; \frac{1849}{4}\right)$
Procedimientos	• Se identifica la información del problema. • Se define la variable x y la función *f*: $f(x) = x(43 - x)$. • Se completa cuadrados para hallar el máximo de la función. • Se interpreta el resultado considerando la concavidad de la parábola que representa a la función bajo las condiciones del problema. • Se plantea la ecuación lineal $x - \frac{43}{2} = 0$ para obtener la abscisa que maximiza la función. • Se esboza el gráfico de la función producto y se interpreta para dar respuesta al problema.
Argumentos	**Tesis 1** La función dada por *f*(*x*) = *x*(S – *x*) tendrá máximo para $x = \frac{S}{2}$ **Argumento** Una manera equivalente de escribir la función dada es $$f(x) = -\left(x - \frac{S}{2}\right)^2 + \frac{S^2}{4}$$ Se desprende que esta función es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, donde $a \neq 0$. Ahora, ya que la función es una función cuadrática, el gráfico de esta será una parábola cóncava hacia abajo dado que en este caso $a < 0$; por lo que el máximo se tiene cuando $x = \frac{S}{2}$. Otro argumento es empleando derivadas, pero como el contexto del problema está a nivel escolar, estudiantes de 12 o 13 años, no utilizaremos este objeto matemático. **Tesis 2** Dada una función cuadrática *f*, su máximo se obtiene hallando las coordenadas del vértice de su gráfico.

	Argumento En el Capítulo 2, referido al objeto matemático función cuadrática, se presenta la demostración para hallar el vértice de una función y su relación con el máximo y mínimo. En esta parte no insistiremos en la explicación.

4.3 Análisis experto de las respuestas de los profesores en servicio

De la información recabada en las cuatro sesiones del taller, presentamos el análisis de los datos más relevantes para nuestra investigación. Como esta investigación utiliza el método cualitativo del tipo estudio de casos, más adelante presentamos el caso compuesto por dos profesores en servicio y que describiremos en detalle.

4.3.1 Sobre el cuestionario de recojo de información y la evaluación diagnóstica

Sobre el perfil de los sujetos de investigación

El cuestionario de recojo de información (ver Anexo B.2) sirvió para recopilar datos respecto al perfil de los participantes del taller de creación de problemas. Como la asistencia al taller fue voluntaria y de libre acceso, al inicio hubo un número significativo de profesores participantes (27). Algunos de ellos tenían experiencia en colegios particulares y unos tantos en colegios estatales. Los aspectos a recopilar fueron:

- Estudios profesionales.
- Años de servicio docente.
- Nivel de mayor experiencia (primaria, secundaria, preuniversitario, superior).
- Experiencia en la enseñanza de las funciones en los últimos tres años.
- Experiencia en la creación de problemas.
- Uso de estrategias en la creación de problemas.
- Percepción acerca de la creación de problemas como instrumento de mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Dado que la información más relevante para los propósitos de nuestra investigación corresponde a un taller conformado por cuatro sesiones, presentamos a continuación el resumen de información de los profesores participantes que acudieron a por lo menos 3 sesiones de las 4 programadas y que hayan realizado la jornada completa de la cuarta sesión. Así, contamos con 16 profesores en servicio participantes del taller sobre creación de problemas.

Con base en las respuestas de los participantes al cuestionario de recojo de información (ver Anexo B.2), elaboramos la Tabla 19.

Tabla 19. Perfil de los sujetos de investigación

Profesión		Centro de estudios		Experiencia docente					Manejo de las funciones cuadráticas	Experiencia en creación de problemas
							Nivel			
Estudiante para profesor	Profesor de matemática	Universidad	Instituto pedagógico	Menos de 5 años	De 5 a 10 años de servicio	Más de 10 años	Primario	Secundario	Ha enseñado en el tema de funciones cuadráticas en los últimos tres años	Tiene experiencia creando problemas
2	14	13	3	5	6	5	2	14	9	11

Sobre la evaluación diagnóstica

Para analizar la información respecto a la evaluación diagnóstica de conocimientos, utilizamos la equivalencia de puntajes (ver Tabla 20) asignados a cada ítem propuesto en la evaluación. Como se mostró en el Capítulo 3, la matriz de evaluación que corresponde a este examen diagnóstico no tiene una jerarquía de habilidades, sin embargo, creemos pertinente asignarle una valoración cualitativa, ya que de esta forma nos permitirá realizar ajustes en el análisis de la información.

Por lo anterior, en la Tabla 21 se plantean los resultados luego del análisis de las respuestas a los problemas propuestos en la evaluación diagnóstica. Esta tabla nos muestra que solo cuatro de los 16 profesores participantes tienen la mayor cantidad de habilidades propuestas por nuestra taxonomía. Cabe mencionar que dentro de los evaluados hubo dos profesoras de nivel primario (P2 y P16 en la Tabla 21). Así mismo, hubo dos futuros docentes de matemática (P12 y P13 en la Tabla 21).

Para tener una visión global de los resultados mostrados en la Tabla 21, presentamos un diagrama estadístico (ver Figura 25) correspondiente a la frecuencia de participantes del taller y los tres niveles de logro (A, B, C) considerando los indicadores de evaluación. El gráfico nos muestra que el indicador 1 es el de mayor frecuencia. Esto quiere decir que once participantes tienen el nivel de reproducción correspondiente a la función cuadrática en la categoría de conocimientos previos; es decir, once de los participantes recuerdan la definición de función cuadrática mediante su regla de correspondencia.

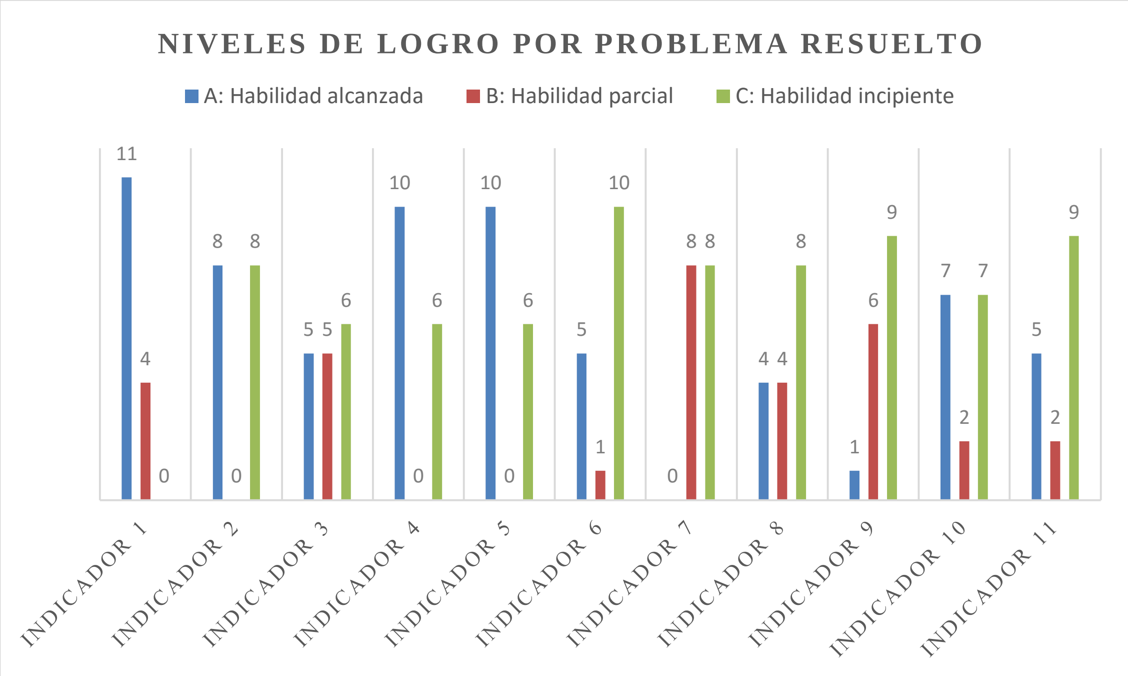


Figura 25. Niveles de logro por problema resuelto de la evaluación diagnóstica

Otro aspecto que resalta de la Figura 25 se relaciona con el indicador 2, que se refiere a la comprensión de la representación gráfica de la función cuadrática mediante su regla de correspondencia. Se evidencia que 8 de los asistentes alcanzaron un nivel de logro propuesto, pero la otra mitad (8 profesores en servicio) carecen de esta habilidad. Este resultado es importante porque, según nuestra taxonomía, esta habilidad se ubica dentro del nivel de reproducción. Asimismo, al revisar la Tabla 19, más de la mitad de los participantes (11) afirmaron tener más de 5 años de experiencia en la docencia. Este resultado confirma nuestra justificación de investigación, pues en diversos estudios se ha mostrado que hay un déficit de la competencia matemática de parte de los profesores que ejercen la docencia de matemática en educación básica.

Ahora, con relación al indicador 3, que involucra la habilidad de *resolver problemas sobre funciones cuadráticas utilizando procedimientos correctos*, 5 sujetos alcanzaron el logro previsto, mientras otros 5 muestran parcialmente dicha habilidad. Hay 6 profesores en servicio que carecen o no muestran esta habilidad. Podemos interpretar que estos resultados son consecuencia de la muestra heterogénea que tuvimos para nuestra investigación, ya que si revisamos la Tabla 19 podemos percatarnos de que solo 14 son profesores de matemática con experiencia y que, de estos, 6 tienen más de 10 años de servicio.

A nivel de conexión, encontramos también que ningún profesor asistente mostró el logro para el indicador *elabora representaciones algebraicas de la función cuadrática utilizando una regla de correspondencia*. Solo 8 de ellos mostraron una habilidad parcial, ya que no lograron resolver el problema propuesto para dicho indicador.

Finalmente, a nivel de razonamiento, pocos profesores participantes justificaron sus procedimientos: uno de ellos justificó con rigor sus afirmaciones, frente a otros 6 que lo hicieron parcialmente. También 7 de los sujetos investigados mostraron la habilidad de realizar conjeturas de un grupo de información dada.

Tabla 20. Equivalencia para la evaluación de conocimientos

Matriz de especificaciones y habilidades según la taxonomía MATH				
Niveles	**Categorías**	**Indicadores taxonomía MATH**		**Ítems**
Reproducción	Conocimientos previos	Indicador 1	Recuerda la definición de función cuadrática mediante su regla de correspondencia.	**2**
	Comprensión	Indicador 2	Comprende la representación gráfica de la función cuadrática mediante su regla de correspondencia verificando los puntos en el plano correspondiente a dicha función.	**3a**
	Uso frecuente de procedimientos	Indicador 3	Resuelve problemas sobre funciones cuadráticas utilizando procedimientos correctos	**3b** **4**
Conexión	Información	Indicador 4	Reconoce si el gráfico de una función en el plano de coordenadas rectangulares corresponde a una función cuadrática.	**4**
		Indicador 5	Transforma representaciones algebraicas de la función cuadrática en gráficos en el plano de coordenadas rectangulares.	**4**
		Indicador 6	Explica su procedimiento en la resolución de problemas sobre funciones cuadráticas con un orden lógico.	**3b** **5**
	Aplicación en nuevos contextos	Indicador 7	Elabora representaciones algebraicas de la función cuadrática utilizando una regla de correspondencia.	**5**
Razonamiento	Justificación e interpretación	Indicador 8	Interpreta los resultados obtenidos luego de la resolución de problemas que involucren funciones cuadráticas.	**3a** **3b** **5**

		Indicador 9	Justifica con rigor su procedimiento en la resolución de problemas que involucren funciones cuadráticas.	**6**
	Implicaciones, conjeturas y comparaciones	Indicador 10	Realiza conjeturas a partir de un problema sobre funciones cuadráticas.	**6**
	Evaluación	Indicador 11	Valora el uso de la función cuadrática para la resolución de problemas de contexto matemático específico.	**3b**

Tabla 21. Tabla de resumen sobre la evaluación diagnóstica

Indicador	Recuerda la definición de función cuadrática	Comprende la representación gráfica de la función cuadrática	Resuelve problemas sobre funciones cuadráticas	Reconoce el gráfico de una función cuadrática	Transforma representaciones algebraicas en gráficos en el plano	Explica su procedimiento en la resolución de problemas	Elabora representaciones algebraicas de utilizando regla de correspondencia	Interpreta el resultado obtenido	Justifica con rigor su procedimiento	Realiza conjeturas	Valora el uso de la función cuadrática
P1	A	A	A	A	A	A	B	A	B	A	A
P2	A	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
P3	A	A	A	A	A	A	B	A	B	A	A
P4	B	C	B	A	A	C	B	C	C	C	C
P5	B	A	C	C	C	C	B	B	C	C	C
P6	A	A	B	A	A	C	C	B	C	C	C
P7	A	C	B	A	A	C	C	C	C	C	C
P8	A	C	B	A	A	C	C	C	C	A	C
P9	B	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
P10	A	A	A	A	A	A	B	A	B	A	A
P11	A	A	A	A	A	A	B	A	A	A	A
P12	A	A	B	A	A	B	B	B	B	A	B
P13	A	C	C	C	C	C	C	C	B	B	C
P14	A	C	A	A	A	A	B	B	B	A	A
P15	B	A	C	C	C	C	C	C	C	B	B
P16	B	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C

Nota: Para presentar la información respecto a la evaluación diagnóstica se utiliza la siguiente escala: A en caso haya alcanzado la habilidad, B en caso la tenga parcialmente y C en caso sea incipiente.

Respuestas sobre la percepción acerca de la actividad de creación de problemas y sus potencialidades para el aprendizaje de la matemática

Como los participantes del taller fueron sujetos a los que se les introdujo en el desarrollo de la competencia de análisis didáctico, creemos pertinente realizar una tabla resumen de las respuestas que dieron previamente al desarrollo de taller respecto a la experiencia de crear problemas. En la Tabla 22 mostramos las respuestas resumidas de los participantes del taller sobre creación de problemas.

Es notorio que la opinión de todos los profesores en servicio fue favorable acerca de que la creación de problemas puede potenciar el aprendizaje de la matemática. Este hecho tiene una explicación más general ya que en el Perú, en el 2015, se inició la implementación de una reforma curricular gracias a la cual, como se mostró en el Capítulo 1, mediante documentos oficiales como las Rutas de Aprendizaje, se promueve el uso de la formulación de problemas para el aprendizaje de la matemática.

Tabla 22. Respuestas sobre creación de problemas y aprendizaje

Profesor	**Experiencia en creación de problemas**	**¿Cree que la creación de problemas puede potenciar el aprendizaje de la matemática?**
P1	Sí	Sí, puesto que genera reflexión sobre diversos contenidos que no logra con ejercicios algorítmicos. Es más motivador.
P2	Sí	Sí, porque permite mejorar el aprendizaje ya que moviliza conocimientos matemáticos.
P3	Sí	Sí porque, al crear, el estudiante investiga sobre las propiedades relacionadas con la resolución de problemas, además se hace más interesante cuando está orientado a situaciones de la vida diaria.
P4	No	Sí, porque sería más motivador para el estudiante.
P5	Sí	Sí, definitivamente ya que potencia el aprendizaje en los estudiantes. Además, ayuda a desarrollar la capacidad de argumentar matemáticamente, permite utilizar diversas estrategias y contribuye al desarrollo de la creatividad.
P6	No respondió	Sí, porque le permite al estudiante aplicar el conocimiento matemático en proceso de aprendizaje.
P7	Sí	Sí, porque permite que los estudiantes se involucren en los problemas y de esa manera se genere un aprendizaje significativo.

P8	No	Sí, porque el estudiante utiliza más su creatividad y le obliga a analizar y pensar detenidamente.
P9	Sí	Sí, porque lo que el estudiante aprende en forma significativa queda en forma permanente.
P10	Sí	Sí, porque se requiere mayor creatividad y experiencia en la resolución de problemas, además de tener los conceptos claros.
P11	No	Sí, porque permite el dominio de conocimientos y habilidades.
P12	No	Sí, porque este promueve el cooperativismo entre estudiantes. Además, hace que el estudiante conozca los problemas para crear otros de mayor riqueza.
P13	No	Sí, porque ayuda a promover tanto la creatividad como la investigación en el profesor y estudiante.
P14	Sí	Sí, ya que de esta forma el estudiante puede ver reflejado que su aprendizaje es contextualizado en su entorno.
P15	Sí	Sí, de alguna forma los profesores al crear problemas personalizamos el proceso de aprendizaje de los estudiantes y si involucramos a estos en la creación de problemas, entonces estaremos afianzando el desarrollo de pensamiento matemático.
P16	Sí	No lo consideraba necesario, sin embargo, este año he observado que crear problemas permite al estudiante estimular su creatividad e imaginación.

4.3.2 Sobre la introducción a los profesores en servicio en el análisis didáctico

Como se explicó en al apartado anterior, los participantes del taller fueron en su mayoría profesores de educación secundaria, quienes asistieron a cuatro sesiones sobre creación de problemas y su conexión con el análisis didáctico, propuesta por el EOS. En la segunda sesión, como se muestra en la programación de actividades (ver Anexo B.1), los asistentes tuvieron la experiencia en la elaboración de configuraciones de objetos y la reflexión sobre su práctica matemática. Debido a la programación del taller durante la semana escolar, solo pudieron asistir 14 profesores.

Se diseñó fichas de trabajo para esta actividad (ver Anexos: C.1, C.2, C.3), las cuales fueron entregadas junto a la solución que previamente los participantes plasmaron en una ficha adicional en la sesión 1. Así, cada profesor tuvo una copia de su solución, y este material y la ficha informativa resumen de la sesión 1 (ver Anexo C.1) sirvieron de guía para la elaboración de las configuraciones cognitivas de los objetos matemáticos presentes en la solución de cada participante. Es necesario precisar que nuestro análisis solo se basará en las configuraciones cognitivas de aquellas soluciones correctas al problema del episodio (13 profesores).

Al inicio se recalcó la situación problema en el contexto de las funciones y la importancia de reflexionar en los seis posibles elementos presentes en la solución de un problema:

1. Lenguaje
2. Situación problema
    a. Información
    b. Requerimiento
    c. Contexto
    d. Entorno matemático
3. Conceptos-definiciones
4. Proposiciones
5. Procedimientos
6. Argumentos

Cada participante elaboró al inicio su configuración cognitiva, pero debido a la dificultad que mostraba se tuvo que trabajar en parejas. Se dio la consigna de elaborar la configuración cognitiva a cada solución propuesta sin alterar la original. Esta instrucción fue bien recibida por los participantes, quienes formularon varias preguntas respecto a los términos mostrados en el formulario de configuración de objetos (Anexo C.2).

La mayoría de participantes tuvo dificultades en reconocer las proposiciones y argumentos en sus soluciones, así que el encargado del taller tuvo un papel importante de guía para la elaboración de las configuraciones cognitivas de las soluciones al problema del episodio de segundo de secundaria.

Debido a la cantidad de información que se obtuvo ese día de sesión, elaboramos la Tabla 23 que resume las características de las configuraciones elaboradas por los profesores en servicio. Tomamos en consideración la cantidad de profesores que tuvo éxito en la distinción de cada uno de los seis componentes de la configuración de objetos.

Tabla 23. Tabla resumen de frecuencias en la elaboración de la configuración cognitiva

Objetos matemáticos											
Lenguaje				Situación problema				Conceptos y definiciones	Proposiciones	Procedimientos	Argumentos
Términos y expresiones	Representaciones verbales	Representaciones simbólicas	Representaciones gráficas	Información	Requerimiento	Contexto	Entorno matemático				
12	11	12	5	11	12	12	11	11	11	11	11

Por otro lado, también presentamos la frecuencia y el porcentaje de elaboración de la configuración cognitiva tomando como escala de valoración cualitativa los siguientes casos: elaboración adecuada, elaboración parcial, elaboración insuficiente y no responden. Para cada uno de los objetos matemáticos analizados, desde el punto de vista cualitativo, se consideraron como *elaboraciones adecuadas* aquellas configuraciones cognitivas formuladas tomando como referencia la solución al problema del episodio y en las que se distinga claramente los objetos señalados. En la categoría *elaboración parcial* se asignan a aquellas que solo tomaban en cuenta pocos objetos matemáticos y sus aspectos relacionados, tomando en cuenta la solución mostrada. Así, una descripción en la que no se hagan tan explícitos los objetos evidentes usados en la solución se categorizó como *elaboración parcial*. Se consideraron *elaboraciones insuficientes* a aquellas en las que no se proporcionó información relevante sobre el objeto matemático mostrado en la solución del problema del episodio.

En las tablas que se presentan a continuación se muestra el grado de elaboración de los objetos matemáticos por cada uno de los profesores participantes del taller.

Tabla 24. Frecuencia y porcentajes para el grado de elaboración del objeto lenguaje

Objeto matemático: lenguaje	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Elaboración adecuada	8	61.5 %
Elaboración parcial	4	30.7 %
Elaboración insuficiente	1	7.8 %
No responden	0	0 %
Total	13	100 %

Tabla 25. Frecuencia y porcentajes para el grado de elaboración del objeto situación-problema

Objeto matemático: problema	Frecuencia	Porcentaje
Elaboración adecuada	10	76.8%
Elaboración parcial	2	15.4 %
Elaboración insuficiente	1	7.8 %
No responden	0	0 %
Total	13	100 %

Tabla 26. Frecuencia y porcentajes para el grado de elaboración del objeto conceptos

Objeto matemático: conceptos	Frecuencia	Porcentaje
Elaboración adecuada	5	38.4 %
Elaboración parcial	5	38.4 %
Elaboración insuficiente	2	15.4 %
No responden	1	7.8 %
Total	13	100 %

Tabla 27. Frecuencia y porcentajes para el grado de elaboración del objeto proposiciones

Objeto matemático: proposiciones	Frecuencia	Porcentaje
Elaboración adecuada	6	46.2%
Elaboración parcial	3	23.1%
Elaboración insuficiente	2	15.4 %
No responden	2	15.4 %
Total	13	100 %

Tabla 28. Frecuencia y porcentajes para el grado de elaboración del objeto procedimientos

Objeto matemático: procedimientos	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Elaboración adecuada	9	69.2 %
Elaboración parcial	1	7.8 %
Elaboración insuficiente	1	7.8 %
No responden	2	15.4 %
Total	13	100 %

Tabla 29. Frecuencia y porcentajes para el grado de elaboración del objeto argumentos

Objeto matemático: argumentos	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Elaboración adecuada	9	69.2 %
Elaboración parcial	1	7.8 %
Elaboración insuficiente	1	7.8 %
No responden	2	15.4 %
Total	13	100 %

Comentarios

Como se puede visualizar en las tablas arriba mostradas, los profesores en servicio participantes del taller elaboraron sus configuraciones cognitivas y luego reflexionaron sobre su práctica de solución del problema del episodio correspondiente al segundo de secundaria en el entorno matemático de la función afín.

Respecto a las tablas, se puede notar que la mayoría de profesores (61.5 %) resolvió con éxito el problema del episodio, elaboraron correctamente el objeto denominado lenguaje. Una posible explicación de este resultado se debe a que tuvieron a la mano el apoyo del encargado del taller y algunos trabajaron en parejas. En la Figura 26 se muestra una configuración cognitiva de este objeto dada por un participante.

<table>
<tr><th>Objetos matemáticos</th><th>Especificaciones</th></tr>
<tr><td>Lenguaje</td><td>
Términos y expresiones:
Conveniencia, Kilogramos, soles, mercado, pasaje, bodega, comparamos.
Representaciones verbales: variable x : cantidad de Kilos de papa
funciones: f :
$f(x)$ = gasto en la bodega al comprar papas $f(x)$ = Gasto en el mercado al comprar papas
Representaciones simbólicas:
S/ ; $f(x) = 3x$ $f(x) = 2x+5$.
Representaciones gráficas:
Representación gráfica (tabular)
<table>
<tr><th>Kilos</th><th>Bodega</th><th>Mercado</th><th></th></tr>
<tr><td>1kg</td><td>S/ 3.00</td><td>S/ 7.00</td><td>} Conviene en la bodega</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6Kg</td><td>S/. 18.00</td><td>S/. 17.00</td><td>} Conviene en el mercado</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Figura 26. Configuración del objeto lenguaje elaborado por el participante P3.

Asimismo, en el análisis de los resultados se observó una falta de claridad en las respuestas sobre las representaciones verbales. En este último grupo se ubica el 30.7 % de los participantes que no lograron distinguirlos en su totalidad. Mostramos en la Figura 27 la configuración cognitiva del objeto lenguaje elaborado en forma parcial por otro participante del taller.

<table>
<tr><th>Objetos matemáticos</th><th>Especificaciones</th></tr>
<tr><td>Lenguaje</td><td>
Términos y expresiones:
- Gasto, soles, pasaje.
Representaciones verbales:
- variable x: Costo por kilo de papa.
- P_1: Gasto en la bodega
- P_2: Gasto en el mercado mayorista + pasaje
Representaciones simbólicas:
- S/3, S/2, $P_1 = 3x$, $P_2 = 2x+5$, $1 \leq x \leq 5$, $5 < x$
- S/3 $\boxed{x}$ S/2 $\boxed{x} + 5$.
Representaciones gráficas:
</td></tr>
</table>

Figura 27. Configuración del objeto lenguaje elaborado en forma parcial por el participante P2.

Tomando en consideración el objeto matemático situación-problema, se observa que el 76.8% de los profesores en servicio elaboró en forma adecuada esta configuración, como es el caso de la configuración de la Figura 28. El tener acceso a una configuración experta del problema del episodio puede ser una causa de este resultado. Asimismo, cabe destacar que hubo una coincidencia respecto a los cuatro aspectos componentes de la situación-problema, destacando el contexto extramatemático que caracteriza al problema en mención.

Situación problema	Información: Relación que existe entre total de gasto al compra una cantidad de kg. de papa en la bodega o el mercado. Requerimiento: Comparación de gastos por la misma compra en los dos lugares Contexto: extra matemático Entorno matemático: funciones afines

Figura 28. Configuración del objeto situación-problema por el participante P15.

Con relación a la configuración del objeto matemático denominado conceptos, se observa que solo el 38.4% de los participantes hizo una correcta elaboración. La dificultad en ello puede deberse a la falta de claridad sobre la naturaleza de los conceptos, ya que tuvieron que elaborar la configuración con base en sus soluciones propuestas de manera previa a la entrega de la ficha de apoyo para la elaboración de configuraciones (ver Anexo C.1). Es más, algunos de los profesores solo se limitaron a copiar lo que encontraron en la ficha de apoyo. En la Figura 29 se muestra una elaboración adecuada y en la Figura 30 una elaboración insuficiente del objeto matemático.

Conceptos	función lineal, función afín, Relación, Razón. tabulación

Figura 29. Elaboración adecuada del objeto conceptos por el participante P15.

Conceptos	Inecuación lineal

Figura 30. Elaboración insuficiente del objeto conceptos por el profesor P2

El objeto proposición, cuya elaboración en forma correcta fue del 46.2%, fue un elemento de mayor explicación. Al inicio no todos los participantes lograron identificarlo. El papel del encargado del taller fue fundamental para dilucidar algunas dudas al respecto. En la Figura 31 se tiene la elaboración adecuada del objeto proposición en la configuración cognitiva propuesta por un participante del taller.

Proposiciones:	Sí existe algún valor (kg) para el cual el GASTO DEL MERCADO MAYORISTA no conviene, entonces no siempre me resulta conveniente comprar en el mercado mayorista.

Figura 31. Elaboración adecuada del objeto proposiciones (profesor P12).

La elaboración de la configuración de los procedimientos y argumentos, en esta sesión, fue realizada con gran acierto. La mayoría, el 69.2 % participantes, coincidieron en proponer proposiciones acorde a sus soluciones elaboradas, así como los argumentos que detectaron.

En la Figura 32 se muestra la descripción del objeto procedimiento y en la Figura 33 del objeto argumento.

Procedimientos	– Organizar una tabla que considere el gasto en la bodega y en el mercado, para determinado número de kilo. – Calcular para 1, 2, 3, ..., kilo, el gasto en bodega y en el mercado. – Comparar el gasto realizado en bodega y en el mercado para 1, 2, 3, ... , kilo. – Identificar, por lo menos un ~~valor~~ número de kilos, para el que la compra en bodega sea igual o menor que la compra en mercado.

Figura 32. Configuración con una elaboración adecuada del objeto procedimiento propuesta por el profesor P11.

Argumentos	a) Tesis: Si existe un número de kilos para el que el gasto sea menor en la bodega que en el mercado, entonces no siempre es más conveniente comprar en este. Argumento: Es más conveniente comprar en el mercado si el gasto en este siempre es menor que el gasto en la bodega. b) Tesis: ~~Si existe~~ Dado el número de kilos para el que el gasto es menor en la bodega que en el mercado, algunas veces es más conveniente comprar en aquella. Argumento: Efectuando la negación del "no - siempre" tenemos una proposición particular negativa: "algunas veces comprar en ~~el mercado~~ la bodega es menor que comprar en el mercado".

Figura 33. Configuración con una elaboración adecuada del objeto argumentos propuesta por el profesor P11.

Creemos importante remarcar que junto al proceso de elaboración de la configuración cognitiva de la solución del problema del episodio (CCPe), como se propuso en la estrategia ERPP, se realizó una reflexión sobre la práctica de solución. Esta reflexión didáctica de la experiencia de solución tuvo el objetivo de utilizar la CCPe elaborada por cada participante que resolvió el problema del episodio para emitir argumentos consistentes de reflexión.

Como esta es la primera vez que los participantes resuelven este tipo de tareas, solo algunos realizaron una buena reflexión didáctica de su práctica de solución. En la Figura 34 mostramos la reflexión didáctica de un profesor participante del taller.

(a) Explique su proceso de resolución de **problema del episodio (PE)** en forma escrita a un colega suyo. Explique en detalle cómo fue desarrollando el problema y especialmente utilice su Configuración Cognitiva (**CCPe**) para emitir argumentos consistentes.

Paso #1:

Consideré las dos situaciones Bodega y Mercado Mayorista, lo que ocurre si compro en la bodega es que cada kilogramo me cuesta S/3, por lo que el precio sólo dependería de la cantidad de kilogramos a comprar, entonces lo exprese como $f(x) = 3x$, en cambio si compro en el mercado mayorista cada kilogramo me cuesta S/2 y adicionalmente gastaría en pasaje S/5, entonces lo exprese como $p(x) = 2x+5$ donde S/5 es un costo fijo, en los dos casos "X" representa número de kilogramos de papa.

Paso #2

- Para saber cual es conveniente comparé las dos expresiones, que resultaron ser funciones lineales, es decir $f(x) < p(x)$ ó $f(x) > p(x)$ si $f(x) < p(x)$, no conviene comprar en el mercado porque el costo sería mayor que comprarlo en la bodega, pero siempre y cuando la cantidad de kilogramos es menor a 5, ahora si $f(x) > P(x)$ será conveniente comprar en el mercado mayorista, pero siempre y cuando la cantidad de kilogramos es mayor a 5.
- El valor de 5 se obtiene al resolver las inecuaciones.

Paso #3

No siempre será conveniente comprar en el Mercado mayorista, eso dependerá de la cantidad de kilogramos de papa que se compre.

Figura 34. Reflexión sobre la práctica de solución elaborada por el profesor P10.

4.3.3 Sobre la solución del problema del episodio en la tercera sesión

En la tercera sesión, los profesores en servicio fueron sometidos a un episodio de clase correspondiente al tercer año de secundaria (estudiantes de 12 a 13 años de edad aproximadamente). Este episodio de clase involucró un problema, en adelante PE, el cual se presentó en la Tabla 17 y cuya solución experta se muestra en la página 138. En relación con esta solución experta también se presenta su Configuración Epistémica, asociada al PE (en adelante CEPe) en la Tabla 18. Junto al problema también se presentaron comentarios de tres estudiantes que intentaron resolver el PE.

Ahora bien, analizando las soluciones de los profesores asistentes a la tercera sesión, elaboramos la Tabla 30, en la que se resumen las principales características de las soluciones propuestas por los profesores participantes de la sesión 3. Este análisis se realizó utilizando como referencia la CEPe. Asimismo, elaboramos nuestra categorización considerando la solución experta al PE.

Observaciones a las soluciones del problema del episodio por los profesores en servicio

Dentro de las observaciones más importantes se tienen:

1. Solo siete profesores participantes del taller explicitaron sus respuestas. Además, en solo cinco se distingue parcialmente la respuesta al requerimiento. Cuatro profesores no resolvieron el problema.
2. Solo diez profesores definieron la variable considerando los números cuya suma sea 43 y su producto el máximo.
3. El PE se ubica en el entorno de las funciones cuadráticas, por lo que solo seis profesores explicitaron la regla de correspondencia de la función asociada al contexto del problema. Asimismo, seis participantes plantearon la noción de función en sus soluciones. Este concepto se mostró ampliamente usando esquemas, tablas, etc.
4. Se evidencia el uso del gráfico de tablas en seis profesores. Se distingue parcialmente el uso de tablas solo en tres. Los otros participantes utilizaron otros tipos de gráficos como organizadores visuales, o simplemente no hicieron uso de gráficos.
5. Para encontrar los números cuya suma es 43 y su producto el máximo, se utilizaron algunas técnicas como completar cuadrados (5), el uso del algoritmo para hallar el vértice e interpretarlo como el máximo pedido (5). Por otro lado, tres participantes hicieron uso de tablas para comprender el problema y su solución correcta.
6. Cuatro profesores en servicio realizaron su análisis en el conjunto de los números naturales.
7. Del grupo de profesores que mostró tener la noción de función, ya sea en forma explícita mediante una regla de correspondencia o esbozando el gráfico ayudado de las tablas, dos de ellos mostraron en forma explícita la concavidad del gráfico de la función cuadrática. También, siete profesores en servicio lo hicieron en forma parcial.

8. El uso de las ecuaciones en la solución del PE se evidencia en la solución de nueve participantes, mientras que solo tres lo hacen en forma implícita. Uno de los profesores utilizó las inecuaciones lineales para responder al PE.
9. Casi la totalidad de los participantes (14) realizó su análisis en el conjunto de los números naturales. Solo uno realizó propuso otro conjunto.
10. Ocho participantes utilizaron gráficos para sustentar su respuesta.

Tabla 30. Análisis de la solución al problema del episodio sobre funciones cuadráticas.

Profesor	Resolvió el problema	Explicita su respuesta	Define variable	Define función	Completa cuadrados	Utiliza el algoritmo para hallar el vértice	Usa tabla	Analiza en N	Considera la concavidad de la parábola	Resuelve ecuación	Resuelve inecuación	Utiliza gráfico para sustentar su solución
P1	SÍ	2	2	2	2	0	0	0	0	2	0	0
P2	SÍ	2	2	2	2	0	2	2	0	2	0	0
P3	SÍ	2	2	2	0	2	0	0	1	1	0	2
P4	SÍ	2	2	1	0	2	0	0	1	1	0	2
P5	NO											
P6	SÍ	1	0	1	0	2	1	2	1	1	0	2
P7	SÍ	1	0	1	0	0	2	2	1	0	0	2
P8	SÍ	1	2	1	0	2	0	0	2	2	0	1
P9	NO											
P10	SÍ	2	2	1	2	0	0	0	0	2	2	0
P11	SÍ	2	2	2	2	0	0	0	1	2	0	0
P12	SÍ	1	2	1	2	0	0	0	1	2	0	2
P13	NO											

P14	SÍ	1	2	2	0	0	2	2	1	0	0	2
P15	SÍ	2	2	2	0	2	0	0	2	0	0	2
P16	NO											

Nota: los niveles de valoración para catalogar las respuestas de los profesores en servicio son: 0 si carece del elemento referencia, 1 si se distingue parcialmente y 2 si está presente en la solución. Así mismo, mostramos el significado correspondiente para cada aspecto considerado en el análisis

Comentarios

Luego del análisis de la información sobre las soluciones al PE, se observa que 12 profesores en servicio resuelven el problema en forma correcta. Cabe resaltar que de los 4 restantes que no llegaron a resolver el PE, 2 son profesoras del nivel primario y 1 es estudiante para profesor de matemáticas. También, se destaca que, si bien 10 participantes definen la variable en la solución del problema, 12 de ellos explicitan la función a maximizar

Por otra parte, para hallar el valor máximo de la función, cinco utilizan la estrategia de completar cuadrados, mientras que cinco lo hacen utilizando el algoritmo para hallar el vértice de la función cuadrática y, como consecuencia, estudiar su máximo correspondiente. Algunos asistentes (3) resolvieron el problema apoyados en una tabla de valores, pero hubo un profesor que usó la tabla en forma parcial, para tener una idea de la secuencia numérica asociada al problema. Precisamente, el uso de las tablas permitió a algunos profesores en servicio (4) realizar sus análisis en el conjunto de los números naturales.

Una característica que solo se observó en cuatro participantes se relaciona con el uso de la noción de concavidad del gráfico de la parábola asociada a la función cuadrática. También, para hallar los números cuyo producto sea el máximo dada su suma, se utilizan ciertas estrategias que involucran, por citar un ejemplo, el planteo de ecuaciones lineales; para este caso, la información muestra que fue utilizado por seis profesores en servicio, frente a tres que lo hicieron en forma parcial.

Un caso especial de resolución se observó en un profesor participante del taller: este docente no optó ni por completar cuadrados ni por utilizar el algoritmo para hallar el vértice de una función, sino utilizó propiedades de desigualdades mediante una inecuación para determinar el máximo de su función propuesta.

El uso del gráfico de la parábola relacionado con la solución de PE se muestra en siete profesores. Sin embargo, un profesor elabora un gráfico pero no explicita su uso para resolver el problema.

Tabla 31. Tabla resumen de frecuencias en la elaboración de la configuración cognitiva de la solución del PE.

Objetos matemáticos											
Lenguaje				Situación problema				Conceptos y definiciones	Proposiciones	Procedimientos	Argumentos
Términos y expresiones	Representaciones verbales	Representaciones simbólicas	Representaciones gráficas	Información	Requerimiento	Contexto	Entorno matemático				
12	9	11	8	12	11	11	12	12	11	11	6

Nota: la tabla muestra el número de profesores que resolvieron en forma correcta el PE y en cuyas configuraciones cognitivas elaboradas por ellos mismos se distinguen los seis objetos matemáticos presentes en su solución junto con sus aspectos relacionados.

4.3.4 Sobre la elaboración de sus configuraciones cognitivas del problema del episodio (CCPe)

Luego de resolver el problema del episodio (mostrado en la Tabla 17) correspondiente a la tercera sesión, los participantes fueron sometidos a la elaboración de las configuraciones cognitivas asociadas a su solución (en adelante CCPe). En la Tabla 31 se muestra el resumen de los aspectos de la CCPe.

Para una visión más precisa y en forma cuantitativa de la elaboración de las CCPe por parte de los profesores participantes del taller, a continuación presentamos un conjunto de tablas que fueron elaboradas siguiendo las categorías de valoración explicadas en el apartado 4.3.3.

Tabla 32. Frecuencia y porcentajes para el grado de elaboración del objeto lenguaje

Objeto matemático: Lenguaje	Frecuencia	Porcentaje
Elaboración adecuada	3	25 %
Elaboración parcial	9	75 %
Elaboración insuficiente	0	0 %
No responden	0	0 %
Total	12	100 %

Tabla 33. Frecuencia y porcentajes para el grado de elaboración del objeto situación problema

Objeto matemático: Situación-problema	Frecuencia	Porcentaje
Elaboración adecuada	10	83 %
Elaboración parcial	2	17 %
Elaboración insuficiente	0	0 %
No responden	0	0 %
Total	12	100 %

Tabla 34. Frecuencia y porcentajes para el grado de elaboración del objeto conceptos

Objeto matemático: Conceptos	Frecuencia	Porcentaje
Elaboración adecuada	9	75 %
Elaboración parcial	3	25 %
Elaboración insuficiente	0	0 %
No responden	0	0 %
Total	12	100 %

Tabla 35. Frecuencia y porcentajes para el grado de elaboración del objeto proposiciones

Objeto matemático: Proposiciones	Frecuencia	Porcentaje
Elaboración adecuada	10	83 %
Elaboración parcial	1	8.5 %
Elaboración insuficiente	0	0 %
No responden	1	8.5 %
Total	12	100 %

Tabla 36. Frecuencia y porcentajes para el grado de elaboración del objeto procedimientos

Objeto matemático: Procedimientos	Frecuencia	Porcentaje
Elaboración adecuada	7	58.3 %
Elaboración parcial	4	33.2 %
Elaboración insuficiente	0	0 %
No responden	1	8.5 %
Total	12	100 %

Tabla 37. Frecuencia y porcentajes para el grado de elaboración del objeto argumentos

Objeto matemático: Argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Elaboración adecuada	3	25 %
Elaboración parcial	3	25 %
Elaboración insuficiente	2	16.6 %
No responden	4	33.4 %
Total	12	100 %

Observaciones de la elaboración de las CCPe por los profesores en servicio

Dentro de las observaciones más importantes se tienen:

1. El objeto matemático más complicado de analizar es el argumento frente a los términos y expresiones, cuya característica fue explicitada por los 12 participantes.
2. Solo seis participantes pudieron distinguir los argumentos de sus soluciones, ya sea en forma parcial o completa.
3. Cabe destacar que no todos realizaron gráficos para resolver el problema; solo ocho profesores lo hicieron.
4. Dos participantes tuvieron dificultades en distinguir la representación verbal (9) del simbólico (11).
5. El objeto matemático conceptos y definiciones fue explicitado por todos los participantes que lograron resolver el PE.
6. Doce participantes distinguieron entre la información y el entorno matemático del problema.
7. Solo once profesores hicieron evidentes el contexto y el requerimiento del PE.
8. La distinción de proposiciones y procedimientos fue plasmada en el formulario de configuraciones por once profesores.

Comentarios

Del análisis cualitativo de las CCPe, podemos resaltar que, debido a que fue la primera vez que los profesores participantes se enfrentaron a la tarea de elaboración de configuraciones de objetos, es rescatable notar que reconocieron la mayoría de objetos, por lo menos en forma parcial.

Algunos de los participantes lograron elaborar con mayor certeza los objetos denominados proposiciones y argumentos. Sin embargo, la mayoría tuvo dificultad y no pudo reconocer por lo menos un argumento usado en su solución del PE. Este resultado en su conjunto se corresponde por lo mostrado en Rubio (2012), ya que los profesores que no han tenido experiencia en este tipo de actividades tendrán serias dificultades para una adecuada elaboración de la CCPe. De la misma forma, la falta de solidez en sus proposiciones y/o argumentos se corresponde con una falta de práctica en el análisis de su quehacer matemático, y por extensión podemos afirmar que carecen o no muestran la competencia de análisis didáctico.

La competencia de análisis didáctico involucra técnicas de análisis didáctico (como se explicó en el Capítulo 3); por lo tanto, el trabajo desarrollado por los profesores en servicio es una forma de promover esta competencia. Es más, la propuesta que planteamos y llevamos a cabo muestra que la mayoría de participantes reconocen algunos objetos matemáticos y la mayoría los utilizó para crear problemas con énfasis didáctico.

El manejo de las configuraciones de objetos permitió detectar los objetos matemáticos involucrados en el PE, lo que ayudó a que los profesores participantes reflexionen sobre estos y la creación problemas.

4.3.5 Sobre la reflexión didáctica de las prácticas matemáticas de solución al problema del episodio

Después de resolver el PE sobre funciones cuadráticas y elaborar la configuración cognitiva (CCPe) asociada a dicha solución, los participantes tuvieron que reflexionar sobre su práctica matemática de solución. Para este fin se utilizó el instrumento del Anexo D.4. En esa ficha de trabajo se presentó la consiga de explicar el proceso de solución del PE. La estrategia se basó en una narración de la experiencia de resolución, tomando en consideración que podría ser leído por un colega y debían utilizar los elementos mostrados en las CCPe como fundamento para su reflexión.

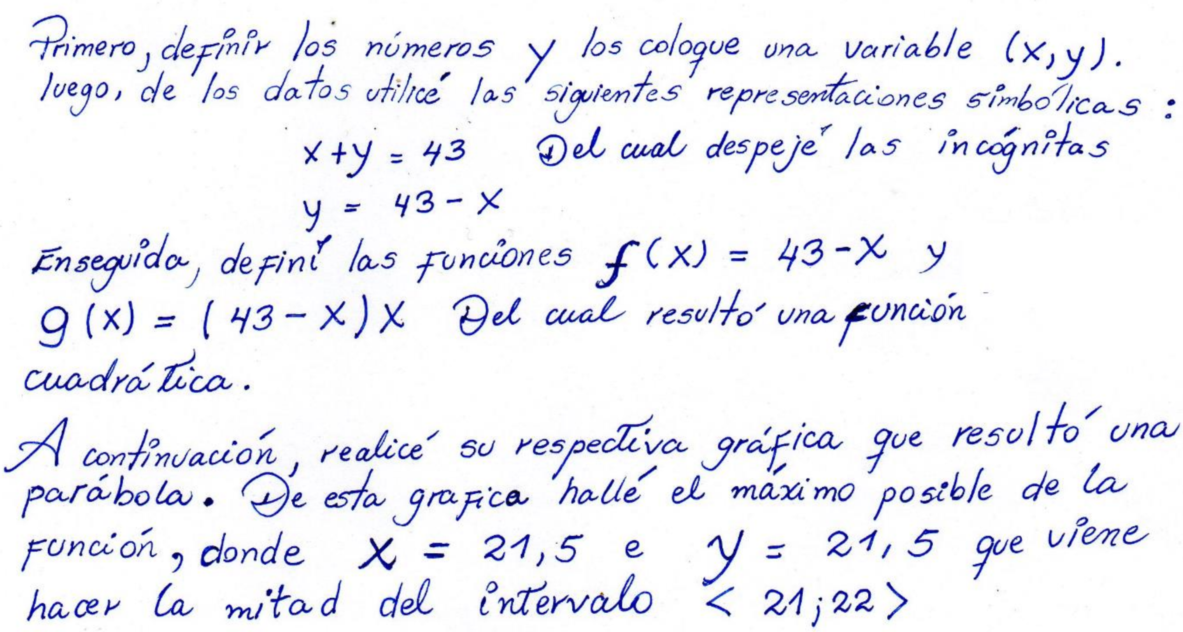
En la Tabla 38 se muestra la caracterización de la reflexión didáctica sobre las prácticas matemáticas de solución del PE. Para realizar este análisis cualitativo, elaboramos una categorización: llamaremos *adecuada* a la reflexión que utilice en mayor cantidad la CCPe para emitir argumentos consistentes o en caso se evidencie algún rastro de los objetos matemáticos mostrados en la CCPe; y en caso no realice esta reflexión o no haga uso de la CCPe será etiquetado como *insuficiente*.

Este análisis se fundamenta en la técnica deductiva y el análisis del contenido. Asimismo, fue sometido a una triangulación de investigadores para no permitir valoraciones subjetivas de la información.

Tabla 38. Análisis cualitativo de las prácticas de solución del PE

Caracterización	Valoración	Frecuencia
Utiliza su CC para describir la práctica	Adecuada	8
No realiza la práctica de análisis	Insuficiente	4

Como muestra del grupo representativo, en la Figura 35 mostramos la reflexión realizada por uno de los profesores en servicio participante del taller de creación de problemas.


Primero, definir los números y los cologue una variable (x, y). luego, de los datos utilicé las siguientes representaciones simbólicas:

$x + y = 43$ Del cual despejé las incógnitas

$y = 43 - x$

Enseguida, definí las funciones $f(x) = 43 - x$ y $g(x) = (43 - x)x$ Del cual resultó una función cuadrática.

A continuación, realicé su respectiva gráfica que resultó una parábola. De esta grafica hallé el máximo posible de la función, donde $x = 21,5$ e $y = 21,5$ que viene hacer la mitad del intervalo $< 21; 22 >$

Figura 35. Reflexión sobre la práctica matemática de solución del PE elaborada por el profesor P7.

Observaciones del análisis de las prácticas de solución del PE realizadas por los profesores en servicio

Dentro de las observaciones más importantes se tienen:

1. Solo ocho participantes realizaron esta actividad en forma adecuada.
2. Cuatro de los profesores en servicio no tuvieron el tiempo suficiente para desarrollar esta actividad, por lo que no la completaron.
3. De los que realizaron la actividad, la mayoría se limitó a narrar los procedimientos que utilizaron para resolver el problema. Esta descripción se basó en los principales

elementos de la configuración cognitiva, como el caso del lenguaje, conceptos, situación-problema.

4. Como no todos los participantes llegaron a elaborar los argumentos y las proposiciones de la configuración de objetos, no se notaron de forma explícita estos en la descripción de sus prácticas de solución.

Comentarios

Debido a que fue la primera vez, al igual que en el caso anterior, que los profesores participantes se enfrentaron a la tarea de reflexión sobre la práctica de solución, tuvieron dificultades en enlazar todos los objetos como un ente integrado, en especial las proposiciones y argumentos mostrados.

De la misma forma, debido a la falta de experiencia en el análisis de las prácticas matemáticas (competencia de análisis didáctico), la mayoría de participantes no supo cómo proseguir esta actividad, sino simplemente la describieron Este resultado refuerza algunas conclusiones manifestadas por las investigaciones previamente referenciadas, en particular de una incipiente competencia de análisis didáctico.

De las configuraciones elaboradas por los profesores en servicio y de la reflexión sobre sus análisis de prácticas de resolución y creación, se observa que la mayoría de ellos presenta una noción de función caracterizada por una configuración formalista.

4.3.6 Sobre los problemas creados por variación de un problema dado

En la tercera parte de la tercera sesión se pidió a los participantes del taller que creen problemas por variación. Previamente, el encargado del taller expuso las bondades de esta técnica, lo que generó algunas reflexiones de los participantes a favor de la propuesta. Es más, en los comentarios acerca de su opinión de la bondad de la creación de problemas (ver Tabla 22) se puede notar su disposición a crear problemas desde el punto de vista didáctico.

A cada participante se le entregó la ficha de trabajo 3 (ver Anexo D.5) para la actividad de creación de problemas pre, tomando en consideración el problema del episodio de clase y los comentarios vertidos por los tres estudiantes sometidos a la solución de este. Además, ya que se presentaron las consideraciones para la presente investigación sobre un PDB, los profesores en servicio debieron hacer uso tanto de sus configuraciones cognitivas elaboradas de su solución del PE como de la reflexión sobre su práctica de solución para crear problemas didácticamente buenos.

La consigna para esta actividad fue crear un problema en el entorno de las funciones que permita la comprensión y la solución del PE. Así mismo, se sugirió utilizar las CCPe, en especial los objetos matemáticos detectados, para facilitar el proceso de creación de un problema para estudiantes de tercer año de secundaria

Luego de revisar los problemas creados, realizamos una clasificación sobre las características generales de estos, considerando algunos aspectos como el énfasis cualitativo o cuantitativo del problema, como lo menciona Malaspina (2014c, p. 135):

> Parece claro lo que se entiende por modificaciones cuantitativas a la información dada en el problema (cambiar las dimensiones de las figuras, los precios de los productos, las rapidez es de los móviles, etc., según lo que se considere en el problema dado). Cabe aclarar lo que estamos entendiendo por modificaciones cualitativas a la información dada. Como su nombre lo indica, se refiere a las cualidades de los objetos intervinientes en la información del problema dado; es decir, a cambios de objetos y a cambios en las relaciones entre los objetos. En ambos casos, estas modificaciones en la información conllevan modificaciones en los requerimientos – pueden ser requerimientos muy evidentes o muy sutiles […].

Con base en un análisis del contenido y un análisis deductivo cualitativo, en la Tabla 39 categorizamos los problemas creados por los profesores en servicio participantes del taller, considerando los aspectos señalados por Malaspina (2014c).

Tabla 39. Clasificación de los problemas creados por variación por los profesores en servicio

<table>
<tr><th colspan="4">Problemas creados por variación</th></tr>
<tr><td rowspan="4">No solubles, carentes de información, relacionados con otro entorno matemático.</td><td colspan="3">Solubles</td></tr>
<tr><td colspan="3">Sobre la función cuadrática</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Con énfasis matemático (más retador)</td><td colspan="2">Con énfasis didáctico</td></tr>
<tr><td>Con modificación cuantitativa</td><td>Con modificación cualitativa y cuantitativa</td></tr>
<tr><td>P7, P2</td><td>P12, P10</td><td>P11, P6</td><td>P3, P15, P1, P8, P4, P14</td></tr>
</table>

Esta clasificación sometida a una triangulación de investigadores (el tesista, el asesor de tesis y un experto en creación de problemas) permitió seleccionar dos problemas que conforman nuestro caso de estudio.

Del estudio de los problemas creados en la Tabla 39 y las configuraciones asociadas a dichos problemas, podemos mencionar que la mayoría de participantes posee una noción de función caracterizada por una configuración epistémica formalista. Este hecho se fundamenta por el tipo de problemas y el énfasis en la parte algebraica, como es el caso del P12. Del mismo modo, de los pocos problemas creados con énfasis didáctico, nos interesó estudiar los problemas en los que la noción de función se caracteriza por una configuración empirista. En palabras de Font et. al. (2012), esta noción -mostrada en los problemas creados y sus soluciones- promueve una situación que motiva la construcción de la noción de función. En particular, escogimos a dos profesores como sujetos de investigación y las características de nuestro caso se explicarán en las líneas que siguen.

4.4 Planteamiento del caso

En el apartado 4.3, analizamos en forma general algunos aspectos relacionados con la estrategia ERPP que implementamos en el taller sobre creación de problemas. Asimismo, caracterizamos los diferentes problemas creados, y nos interesamos en aquellos que tuvieran ciertas características listadas en la Tabla 39. Además, considerando los objetivos de la investigación, planteamos nuestro caso de estudio formado por 2 profesores (P11 y P15, quienes resolvieron correctamente el PE): uno creó problemas con modificación con mayor énfasis cuantitativo, mientras que el otro con modificación cuantitativa y cualitativa de la información presentada acorde al requerimiento del problema.

A continuación realizamos el análisis de los problemas creados y su conexión con el EOS.

Para el caso de las configuraciones y la reflexión sobre las prácticas matemáticas de solución y creación, utilizamos el esquema (Figura 36) acorde a la estrategia ERPP. Este muestra la interacción entre diferentes configuraciones, ya sea epistémicas o cognitivas, para estudiar la competencia matemática (M) o competencia de análisis didáctico (D) del profesor en servicio. Así mismo, durante el análisis de dichas configuraciones y de las reflexiones hechas por los participantes de la investigación (fase R de reflexión sobre la práctica matemática de resolución y creación), fuimos obteniendo diversos tipos de información relacionada en mayor intensidad a la competencia matemática (M) por un lado y a la competencia de análisis didáctico (D) por otro.

En tal sentido, por nuestros intereses, nos enfocamos en estudiar las interacciones que involucran la competencia de análisis didáctico (D). Así, comparamos y analizamos las CEPe y las CEPp, para detectar las modificaciones realizadas utilizando los significados de referencia respecto al PE desde el punto de vista del experto y los significados implementados por los profesores participantes del taller. También, estudiamos las CCPe y las CEPp para detectar la relación entre la interpretación del PE que los profesores en servicio mostraron y los problemas creados; esto último desde la perspectiva del experto con énfasis didáctico. Ahora bien, la otra fase de análisis se relaciona con las CEPe y las CCPp para obtener información acerca de la interpretación didáctica que realizó el profesor en servicio al crear problemas por variación considerando el PE. Este análisis se realizará desde el punto de vista del profesor que elaboró su CCPp. Finalmente, el análisis de la CCPe y las CCPp nos arrojará información relevante sobre la estrategia ERPP, especialmente en la faceta de reflexión sobre la práctica matemática para la creación de problemas pre, puesto que la elaboración de las configuraciones (CCPe y CCPp) y el análisis de los problemas creados fueron realizados por los propios participantes.

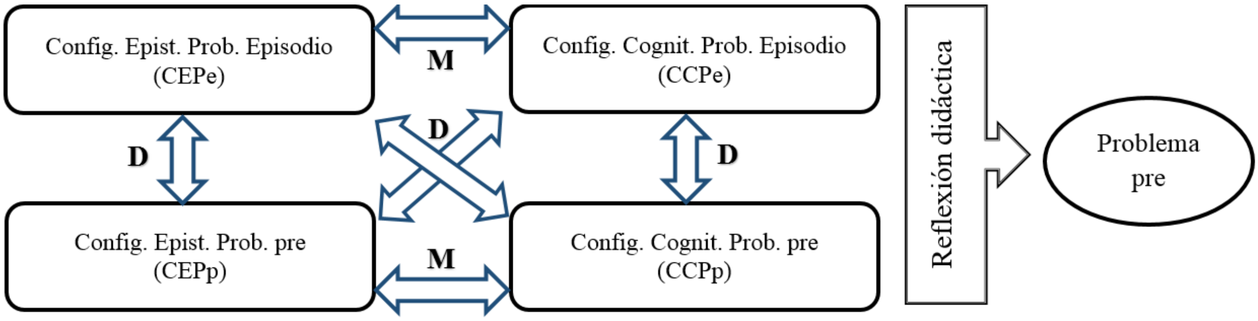


Figura 36. Esquema de comparación de configuraciones para el análisis de los datos según la estrategia ERPP

Es necesario mencionar que los problemas creados, como consecuencia del análisis de los propios participantes, fueron sometidos a una valoración mediante una rúbrica basada en consideraciones sobre problemas didácticamente buenos (Malaspina, 2011). El instrumento, que se muestra en el Anexo D.1, guarda estrecha vinculación con los criterios de idoneidad didáctica del EOS y nos permitió valorar los problemas desde un punto de vista didáctico. La validez de este análisis está respaldada por una triangulación de investigadores (tres expertos en resolución de problemas, dos de ellos involucrados en investigaciones con el EOS). Del mismo modo, se aplicó un cuestionario de salida a los dos profesores que conforman nuestro caso para tener una triangulación de datos, puesto que además de la información del taller mediante los formularios y fichas de trabajo, así como la ficha de datos y evaluación diagnóstica, tuvimos la necesidad de obtener una información más directa desde el punto de vista reflexivo de creación, mediante un cuestionario que se muestra en el Anexo E.3.

4.4.1 Caso 1: problemas creados por modificación cuantitativa

De los dos problemas categorizados para este apartado (ver Tabla 39), a modo de ejemplo, presentamos el caso del profesor P11.

El caso del profesor P11

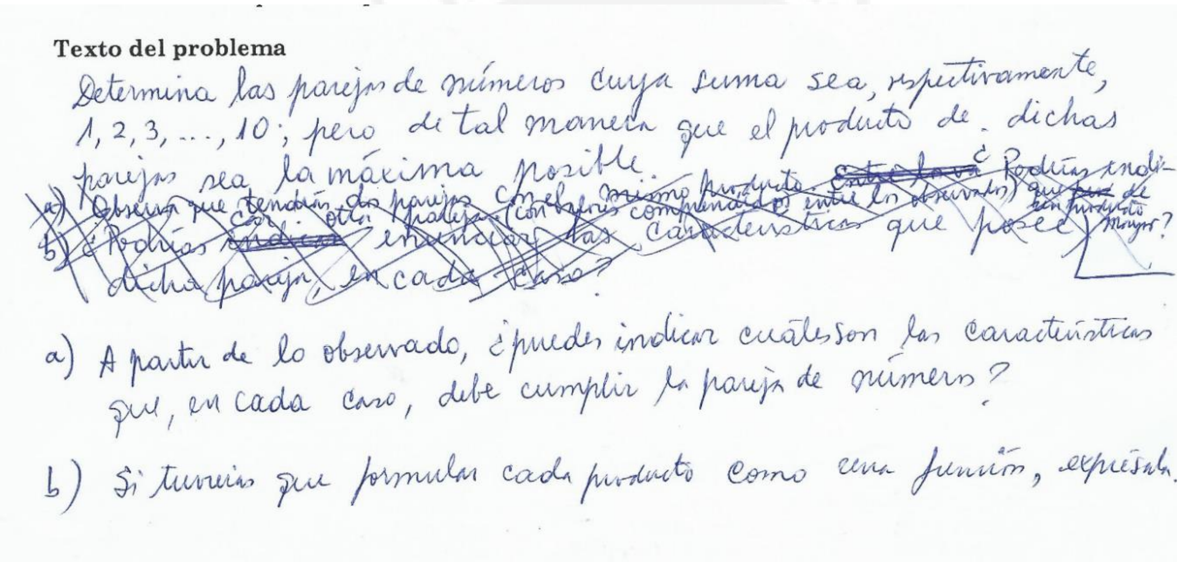
El caso que analizamos en este apartado corresponde a un participante del taller, quien es profesor en servicio del sistema público escolar de una provincia de Perú y a quien asignamos la etiqueta de P11 para el análisis de los datos.

Este profesor se caracterizó por tener experiencia en Didáctica de la Matemática, ya que al momento de la aplicación del taller de creación de problemas se encontraba estudiando una maestría en enseñanza de la matemática.

En la Figura 37 se presenta el problema creado por el profesor P11 y su correspondiente transcripción. Cabe mencionar que, por razones gramaticales y esperando transmitir correctamente la intencionalidad del problema, en la transcripción se realizó una aclaración del enunciado planteado, para su correcta comprensión acorde a la solución propuesta por el profesor. Esta modificación no altera la esencia del problema; todo lo contrario: permitirá al lector comprenderlo y situarse en el contexto de su creación.

También se muestra la solución del problema pre creado y una posible solución propuesta por un experto. De la misma forma, se presentan las configuraciones de objetos elaboradas por este profesor y el experto.

Problema pre creado por el profesor P11



Texto del problema

Determina las parejas de números cuya suma sea, respectivamente, 1, 2, 3, ..., 10; pero de tal manera que el producto de dichas parejas sea la máxima posible.

a) A partir de lo observado, ¿puedes indicar cuáles son las características que, en cada caso, debe cumplir la pareja de números?

b) Si tuvieras que formular cada producto como una función, exprésala.

Figura 37. Problema pre creado por el profesor P11

Transcripción

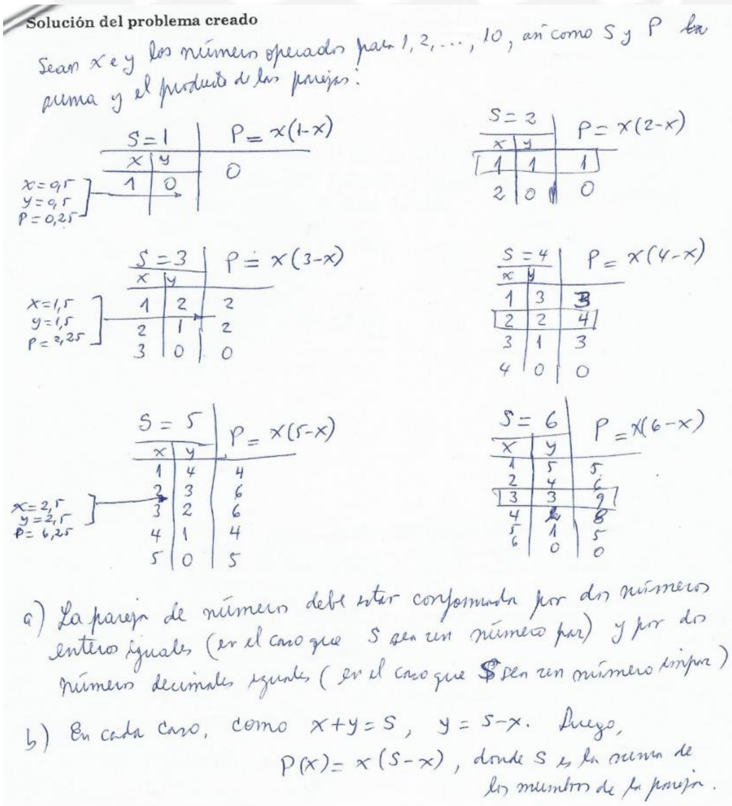
Determina las parejas de números cuya suma sea, respectivamente, 1, 2, 3,…, 10; pero de tal manera que el producto de [*las componentes de*] dichas parejas sea ~~la~~ [*el*] ~~máxima~~ [*máximo*] posible.

a) A partir de lo observado, ¿puedes indicar cuáles son las características que, en cada caso, debe cumplir la pareja de números?
b) Si tuvieras que formular cada producto como una función, exprésala.

El profesor P11, después de crear el problema en la forma antes mencionada, lo resolvió y propuso una solución que nos permitirá adentrarnos en aspectos no tan explícitos del problema. Luego, el profesor elaboró la configuración cognitiva de solución de su problema creado. Finalmente, respondió al cuestionario sobre la práctica matemática de creación.

Solución de problema propuesto por el profesor P11

En la Figura 38 se muestra la solución del profesor P11 de su problema pre creado.



Solución del problema creado

Sean x e y los números operados para 1, 2, …, 10, así como S y P la suma y el producto de las parejas:

$S=1$ $P=x(1-x)$

x	y	P
1	0	0

$x=0{,}5$ $y=0{,}5$ $P=0{,}25$

$S=2$ $P=x(2-x)$

x	y	P
1	1	1
2	0	0

$S=3$ $P=x(3-x)$

x	y	P
1	2	2
2	1	2
3	0	0

$x=1{,}5$ $y=1{,}5$ $P=2{,}25$

$S=4$ $P=x(4-x)$

x	y	P
1	3	3
2	2	4
3	1	3
4	0	0

$S=5$ $P=x(5-x)$

x	y	P
1	4	4
2	3	6
3	2	6
4	1	4
5	0	5

$x=2{,}5$ $y=2{,}5$ $P=6{,}25$

$S=6$ $P=x(6-x)$

x	y	P
1	5	5
2	4	8
3	3	9
4	2	8
5	1	5
6	0	0

a) La pareja de números debe estar conformada por dos números enteros iguales (en el caso que S sea un número par) y por dos números decimales iguales (en el caso que S sea un número impar)

b) En cada caso, como $x+y=S$, $y=S-x$. Luego, $P(x)=x(S-x)$, donde S es la suma de los miembros de la pareja.

Figura 38. Solución propuesta por el profesor P11 de su problema pre creado.

En la Tabla 40 presentamos la configuración cognitiva (CCPp) elaborada por el profesor P11 y que nos dará información sobre aspectos más profundos de su problema creado.

Tabla 40. Configuración cognitiva de la solución del problema pre creado por el profesor P11 (CCPp).

Objetos matemáticos	**Especificaciones**
Lenguaje	• ***Términos y expresiones*:** Suma de dos números, producto de dos números, producto máximo de números, números enteros, números decimales, función. • ***Representaciones verbales:*** Pareja de números, números enteros, números decimales, número par, número impar • ***Representaciones simbólicas*** $P(x) = x(S - x)$
Situación – problema	**Información:** La suma de dos números es, respetivamente, 1, 2, 3, 4,…, 10. El producto de dos números es, en cada caso, el máximo. **Requerimiento:** ¿Cuáles son, en cada caso, las características que debe cumplir la pareja de números? Formular cada producto como una función, exprésala. **Contexto:** Intramatemático **Entorno matemático:** Funciones
Conceptos	Función, dominio, rango
Proposiciones:	• Existe uno y solo un par de números tales que su suma sea “s” y su producto máximo. • Dichos números son iguales.
Procedimientos	• Para cada valor de “s” (del 1 al 10) elaborar una tabla con los valores de “x” e “y”, de tal manera que sumados dan “s”. • Multiplicar los valores de “x” e “y”. • Expresar el producto como $P(x) = x(s - x)$ • Determinar los valores de “x” e “y” que multiplicados originan el producto máximo.
Argumentos	**Tesis 1** Existe uno y solo un par de números tal que su suma sea “s” y su producto máximo. **Argumento** Sean “x” e “y” los números, donde por propiedad de desigualdades se tiene

	$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$ $$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \leq (x+y)^2$$ $$xy \leq s^2$$ **Tesis 2** Los números “x” e “y” son iguales **Argumento** $$xy \leq (x+x)^2$$ $$xy \leq 4x^2$$

Reflexión sobre la práctica matemática de creación del profesor P11

En la Tabla 41 se presenta la transcripción de las respuestas vertidas por el profesor P11 respecto a su reflexión sobre la práctica de creación, que se basó en un protocolo elaborado (cuestionario) para esta actividad.

Tabla 41. Reflexión sobre la práctica de creación por el profesor P11

Protocolo de reflexión	Respuesta
a) ¿El lenguaje usado en el Pp es más sencillo que el lenguaje del PE?	Sí, pues emplea conceptos más ligados a la observación de casos particulares de suma y producto de números.
b) ¿La información que se presenta es más fácil de entender que la información dada en el PE?	Sí, emplea casos particulares.
c) ¿Lo que se requiere en el Pp ayuda a entender lo que se requiere en el PE?	Sí, pero pienso que haría falta poner en juego la generalización de lo formulado en el Pp. Es decir, no basta con brindar casos particulares.
d) ¿Los conceptos involucrados corresponden al grado de estudios considerado?	Sí, se trata de los conceptos básicos de función.
e) ¿Los conceptos involucrados son los mismos o previos a los conceptos considerados en el PE?	Son de carácter previo, pues las operaciones aritméticas corresponden a grados anteriores.

f) ¿Los procedimientos para resolver el Pp son más sencillos que los procedimientos considerados en el PE?	Sí, porque se vinculan a casos particulares, donde las características de suma y producto son observables.
g) ¿Los procedimientos involucrados en el Pp corresponden al grado de estudios considerado?	Sí, pues en realidad trabajan con elementos de grados anteriores.
h) ¿Las proposiciones presentes en la solución del Pp son más fáciles de explicitar que las proposiciones al resolver el PE?	Sí, pues se encuentran vinculadas a un caso particular.
i) ¿Los argumentos usados en el Pp son más intuitivos, menos exigentes (formales, elaborados) que los argumentos del PE?	Sí, porque corresponden a ejemplos (casos particulares) del 1 al 10. De todas maneras, falta la generalización.

Solución experta del problema pre creado por el profesor P11

Para elaborar la configuración epistémica del problema pre creado (CEPp), elaboramos la solución experta de dicho problema. Esta solución considera aspectos *no explícitos* por el proponente del problema pre, tanto de forma como de fondo. Esto último está relacionado con la correcta interpretación del contexto, el entorno y los requerimientos del problema; por citar dos ejemplos: que las parejas puedan ser números naturales o decimales, y la formulación de una expresión más general utilizando función cuadrática. Estos aspectos fueron aclarados y fueron parte de un proceso de reflexión por el profesor P11, de tal forma que, siguiendo la faceta reflexiva de la estrategia ERPP, se concluyó en un problema pre afinado por el proponente como respuesta a una serie de análisis realizados luego de la culminación del taller (ver problema modificado en la Tabla 44).

Solución experta

Datos:

- La suma de cada pareja de números es 1, 2, 3, 4,…, 10.

Dado que el requerimiento señala que el producto de dichas parejas de números debe ser el máximo posible, separamos nuestro análisis en dos partes de acuerdo con las preguntas formuladas.

En primer lugar, elaboramos una tabla con algunos valores de prueba para conjeturar algunas ideas. Para este propósito, consideramos los números positivos, ya que estos darán las sumas requeridas y el producto máximo.

Tabla 42. Valores prueba para conjeturar algunas ideas

Para la suma 4					
Pareja	(1;3)	(2;2)	(2,25;1,75)	(2,5;1,5)	(3;1)
Suma	4	4	4	4	4
Producto	3	4	3,9375	3,75	3
Para la suma 5					
Pareja	(1;4)	(2;3)	(2,50;2,50)	(2,75;2,25)	(4;1)
Suma	5	5	5	5	5
Producto	4	6	6,25	6,1875	4
Para la suma 6					
Pareja	(1;5)	(2;4)	(3;3)	(3,50;2,50)	(3,75;2,25)
Suma	6	6	6	6	6
Producto	5	8	9	8,75	8,4375
Para la suma 7					
Pareja	(1;6)	(2;5)	(3;4)	(3,50;3,50)	(3,75;3,25)
Suma	7	7	7	7	7
Producto	6	10	12	12,25	12,1875

a) A partir de lo observado, ¿puedes indicar cuáles son las características que, en cada caso, debe cumplir la pareja de números?

De la lista de valores mostrados en la Tabla 42, se conjetura que los números que cumplen las condiciones del problema son iguales a la mitad de la suma dada.

b) Si tuvieras que formular cada producto como una función, exprésala.

Para responder a este pedido, realizamos algunos cálculos previos

- Si la suma es 1, se tienen los números x y $1-x$, por lo que podemos formular nuestra función producto de la siguiente forma

  $$f(x) = x(1-x)$$

  Ahora, completamos cuadrados para maximizar la función f

  $$f(x) = x(1-x) = -(x^2-x)^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

  De lo anterior se determina que el máximo de f se obtiene cuando $x = \frac{1}{2}$, de ahí que los números pedidos son iguales a $\frac{1}{2}$.

- Si la suma es 6, se tienen los números x y $6-x$, por lo que podemos formular nuestra función producto de la siguiente forma

  $$g(x) = x(6-x)$$

  Ahora, completamos cuadrados para maximizar la función g

  $$f(x) = x(6-x) = -(x^2-6x)^2 = 9-(x-3)^2$$

  De lo anterior se determina que el máximo de g se obtiene cuando $x = 3$, de ahí que los números pedidos son iguales a 3.

Así, sucesivamente se realiza el análisis para los otros valores, por lo que se observa que los números cuya suma se conoce y su producto es el máximo deben ser iguales; más todavía, son iguales a la mitad de la suma dada.

Sea m la suma de cualquiera de las parejas de números; del mismo modo, se define a la pareja de números como x y $m-x$ cuyo producto deberá ser el máximo posible, donde se formula la función f como función producto de dichos números.

$$f(x) = x(m-x)$$

Completando cuadrados se obtiene la función producto

$$f(x) = -\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m^2}{4}$$

Por lo que la función se maximiza para $x = \frac{m}{2}$, considerando m un número real.

Configuración epistémica de la solución experta del problema pre creado por el profesor P11 (CEPp)

Tomando en cuenta esta solución experta del problema pre creado por el profesor P11, elaboramos la configuración epistémica del problema pre creado (CEPp). En la Tabla 43 mostramos la CEPp.

Tabla 43. Configuración epistémica de la solución experta del problema pre creado por el profesor P11 (CEPp)

<table>
<tr><th>Objetos matemáticos</th><th>Especificaciones</th></tr>
<tr><td>Lenguaje</td><td>

- ***Términos y expresiones*:** suma, número, tabla, valores prueba, pareja de números, producto, infiere, suma dada, función, maximizar, completar cuadrados, mitad, número real, función producto.
- ***Representaciones verbales:***
Función, maximizar, producto, suma, número real, completar cuadrados, función producto.
- ***Representaciones simbólicas***

$f(x) = x(1-x), g(x) = x(6-x), f(x) = x(m-x),$

$f(x) = -\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m^2}{4}, x = \frac{m}{2}, x = 3\ , x = \frac{1}{2}$

- ***Representaciones gráficas***

<table>
<tr><td colspan="6">Para la suma 4</td></tr>
<tr><td>Pareja</td><td>(1;3)</td><td>(2;2)</td><td>(2,25;1,75)</td><td>(2,5;1,5)</td><td>(3;1)</td></tr>
<tr><td>Suma</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Producto</td><td>3</td><td>4</td><td>3,9375</td><td>3,75</td><td>3</td></tr>
</table>

</td></tr>
</table>

	Para la suma 5 Pareja: (1;4), (2;3), (2,50;2,50), (2,75;2,25), (4;1) Suma: 5, 5, 5, 5, 5 Producto: 4, 6, 6,25, 6,1875, 4

Para la suma 5					
Pareja	(1;4)	(2;3)	(2,50;2,50)	(2,75;2,25)	(4;1)
Suma	5	5	5	5	5
Producto	4	6	6,25	6,1875	4
Para la suma 6					
Pareja	(1;5)	(2;4)	(3;3)	(3,50;2,50)	(3,75;2,25)
Suma	6	6	6	6	6
Producto	5	8	9	8,75	8,4375
Para la suma 7					
Pareja	(1;6)	(2;5)	(3;4)	(3,50;3,50)	(3,75;3,25)
Suma	7	7	7	7	7
Producto	6	10	12	12,25	12,1875

Situación – problema	**Información:** La suma de dos números es, respetivamente, 1, 2, 3, 4,…, 10. El producto de dos números es, en cada caso, el máximo. **Requerimiento:** Determina las parejas de números cuya suma se conoce. ¿Cuáles son, en cada caso, las características que debe cumplir la pareja de números? **Contexto:** Intramatemático **Entorno matemático:** Funciones
Conceptos	Máximo, suma, función cuadrática, número real, producto
Proposiciones:	• Elaboramos una tabla con algunos valores de prueba para conjeturar algunas ideas. • Los números que cumplen las condiciones del problema son iguales a la mitad de la suma dada. • Completamos cuadrados para maximizar la función.
Procedimientos	• Se dio lectura al problema para determinar la información y el requerimiento.

	• Se elaboró una tabla de valores prueba para inducir algunas conjeturas respecto del requerimiento del problema. • Se formularon algunas funciones con algunos valores de la tabla previamente elaborada. • Se propuso una conjetura que fue demostrada utilizando la técnica de completar cuadrados y que permitió responder a la segunda pregunta.
Argumentos	**Tesis 1** De la lista de valores mostrados en la Tabla 42, se infiere que los números que cumplen las condiciones del problema son iguales a la mitad de la suma dada. **Argumento** Se deduce utilizando el razonamiento inductivo que la mitad de la suma dada representa el valor de los números pedidos. Este análisis se realizó con base en el patrón que se encontró en la tabla de valores prueba. **Tesis 2** Los números cuya suma se conoce y su producto es el máximo deben ser iguales; más todavía, son iguales a la mitad de la suma dada. **Argumento** Este argumento se justifica mediante la técnica de completar cuadrados para f $$f(x) = x(m - x)$$ $$f(x) = -\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m^2}{4}$$ Además que el valor del máximo se obtiene mediante la ecuación del eje de simetría de la parábola correspondiente a esta función.

4.4.2 Análisis de los resultados para el profesor P11

Para analizar la información obtenida tanto para las configuraciones de objetos y la reflexión sobre la práctica matemática, como ya se señaló líneas arriba, se realiza la comparación de configuraciones epistémicas y cognitivas utilizando el esquema mostrado en la Figura 36. Este análisis lo realiza el tesista al inicio, para luego ser refinado por el asesor de tesis y un especialista en el EOS.

Respecto al uso de las nociones del análisis didáctico por el profesor en servicio en la creación de problemas pre

- ***Respecto a la CEPe y la CEPp***

Después de analizar la CEPe y la CEPp, se observa que la información es similar y que solo fue variada en el sentido cuantitativo. Si bien es cierto que la cantidad de parejas de números es mayor, la bondad se evidencia en que son números más manejables para un estudiante de educación básica. De la misma forma, el requerimiento sufrió una modificación, puesto que en el problema pre se muestran dos preguntas que invitan al estudiante a la reflexión sobre sus resultados. Este paso se puede relacionar con la última etapa en la propuesta de Polya (1975) y pretende terminar, con la segunda pregunta, en la formulación de una función más general, es decir, la expresión matemática que se genera luego del análisis inductivo de las respuestas previas. Una característica resaltante es la continuidad del contexto intramatemático en ambos problemas.

Para responder al requerimiento del PE se hace necesario utilizar expresiones algebraicas, sin embargo, en el problema pre no es necesario utilizar este recurso, salvo en el último apartado en el que se señala la generalización utilizando funciones. Esta sería una ventaja desde el punto de vista didáctico para llegar a resolver el PE, sin hacer uso de la función cuadrática.

Respecto al lenguaje, en general se rescata el uso de representaciones gráficas: el gráfico de la parábola para el problema del episodio y la tabla de valores para el problema pre creado. Asimismo, en ambas situaciones se distingue la idea de máximo. Así se hace explícito el uso de la función cuadrática en el problema pre respecto al PE. A diferencia del problema pre, en el PE se hace necesario utilizar ecuaciones lineales para formalizar y dar rigor a la solución del problema.

Respecto a los conceptos considerados en ambas configuraciones, se nota la coincidencia en muchos de ellos, como es el caso de los conceptos de función, función producto, la idea de máximo de una función, completar cuadrados, entre otros.

Las proposiciones en el PE son más formales y de mayor rigurosidad. En el problema pre, la característica fundamental de las proposiciones es de menor nivel de formalidad, de tal modo que permite utilizar el razonamiento inductivo y deductivo con facilidad. Como muestra para destacar este razonamiento, se tiene la elaboración de una tabla de valores prueba para procurar destacar un patrón que permitirá fácilmente resolver el PE.

Con relación a los procedimientos, se destaca el uso de estrategias similares, en el sentido de que ambos problemas exigen la identificación de la información principal y los requerimientos. Sin embargo, en el problema pre, la situación se vuelve más intuitiva ya que no se necesita formular una regla de correspondencia para resolverlo, salvo el requerimiento explícito. Ciertamente, en el PE también se puede prescindir de este, pero por razones de efectividad.

Los argumentos para el PE son más rigurosos y formales, ya que hacen uso de conceptos más cercanos al entorno de la función cuadrática, como por ejemplo: concavidad de una parábola, vértice de una función cuadrática. Por otro parte, en el problema pre, los argumentos son más cercanos a un razonamiento inductivo, puesto que se pretende llegar a elaborar una técnica que facilite, de forma directa, la solución del PE. Para este último caso, el uso de una tabla de valores permitirá conjeturar la regla práctica que emerge como consecuencia del análisis de los valores dados y que es uno de los propósitos del problema.

- ***Respecto a la CCPe y la CEPp***

Al analizar la CEPp y la CCPe (ver Anexo E.4), detectamos que la primera configuración se caracteriza por ser de mayor riqueza desde el punto de vista de los objetos matemáticos formulados. Una muestra de este aspecto se tiene en el objeto matemático lenguaje, ya que los términos considerados por el profesor P11 están incluidos en cierta forma en la CEPp. Un aspecto notorio de este objeto se refiere al uso de representaciones gráficas que se propone en la CEPp, situación que no sucede en la CCPe. Este detalle es muy importante porque de manera implícita el profesor P11 lo propone en su problema pre. Una coincidencia entre las dos configuraciones está relacionada con las representaciones simbólicas, más precisamente a la formulación de reglas de correspondencia utilizando expresiones algebraicas. En particular, en el problema pre, se hace necesaria la aplicación del razonamiento inductivo para llegar a una regla más general que permitirá deducir la regla práctica para la solución del PE.

Ahora bien, con relación a la situación problema, se observa que el profesor P11 tuvo cierta dificultad para esclarecer con firmeza el requerimiento del PE, de tal forma que solo hace énfasis en la consigna de solución y justificación del problema. Este aspecto podría estar relacionado con la falta de atención al objetivo del PE. En el problema creado por el profesor P11, este aspecto se resalta puesto que el requerimiento se aleja del problema original. Así, solo se enfoca en la solución del problema más que en la conservación del entorno de la función cuadrática.

En los conceptos mostrados en la CCPe, no se resalta el uso de los números reales, en particular de los números decimales para la solución del problema pre, a pesar de que este es un objeto emergente. También observamos que no se considera la estrategia de completar cuadrados para hallar el vértice de la función cuadrática u otra técnica similar.

Al revisar las proposiciones y los argumentos, como se mostró líneas arriba, se identifica que no fueron adecuadamente elaborados. Por tal motivo, se observa una escasa formulación de estos por parte del profesor P11. Solo menciona una proposición que es de mayor rigurosidad que las tomadas en cuenta en el problema pre.

Finalmente, con relación a los procedimientos, el profesor P11 mostró en sus CCPe lineamientos más profundos en comparación con los formulados en el problema pre. Este hecho resulta importante puesto que precisamente el problema pre debe tener esa esencia, de ser un preámbulo para la comprensión del PE y resolverlo.

- ***Respecto a la CEPe y la CCPp***

Si revisamos la CCPp elaborada por el profesor P11, se observa una argumentación insuficiente y muy alejada respecto a la CEPe. Esto, tal vez, se debió al tiempo que tuvo para realizar su configuración; sin embargo, creemos que este problema pre se caracteriza sobre todo por invitar a la búsqueda de patrones más que contextualizar el problema en un entorno más cercano al estudiante, pero cae en un trasfondo ambicioso si se desea encontrar una formulación de los patrones mostrados. Esta última afirmación se obtiene de la CEPp.

En el análisis de la CEPe y la CCPp se observó que el profesor P11, quien elaboró la CCPp, muestra cierta dificultad en la descripción de algunos objetos matemáticos. En especial, las proposiciones y argumentos. También, se muestra una elaboración parcialmente correcta de los conceptos y el lenguaje, pero es rescatable observar que -en los conceptos mencionados y contrastados con las respuestas de reflexión sobre su práctica de creación- el problema posee un lenguaje más sencillo, ya que en el primer requerimiento se hace uso de la suma y el producto de números. Este aspecto se percibe en el objeto matemático denominado lenguaje.

Al revisar las otras respuestas vertidas por el profesor P11, se percibe que la comprensión del problema de episodio depende no solo de la respuesta a los patrones sino de la formulación de la función producto. Creemos que para la solución del PE no es necesario hacer uso de esta formulación, ya que mediante el razonamiento inductivo el estudiante puede resolver el problema fácilmente.

- ***Respecto a la CCPe y la CCPp***

De la comparación de la CCPe y la CCPp, que está más estrechamente relacionada con la competencia de análisis didáctico, podemos afirmar que hubo un proceso de reflexión, y esto se contrasta con el cuestionario de salida desarrollado por el profesor después de su participación en el taller sobre creación de problemas (ver Anexo E.5). Luego de la reflexión didáctica realizada por el participante, se llega a la formulación de un problema que fue consecuencia, precisamente, de la etapa de reflexión sobre las prácticas de solución y creación, haciendo uso de las CCPe y la CCPp. Como muestra de esta reflexión, presentamos el problema pre modificado y sometido a una triangulación de investigadores para su valoración, mediante indicadores de acercamiento a la idoneidad didáctica propuesta por el EOS y una rúbrica de evaluación (este aspecto será discutido más adelante).

Ahora bien, analizando ambas configuraciones, se observa que en la CCPp se hace más explícita la formulación de los objetos matemáticos. Sin embargo, sigue mostrándose una deficiente interpretación de algunas representaciones de objetos. El profesor P11, en su CCPp, muestra los requerimientos en forma parcial.

En el análisis de la reflexión sobre la práctica de creación (ver Tabla 41) desarrollado por el profesor P11, se distingue una reflexión utilizando las CCPe y CCPp, ya que se resalta que el lenguaje usado en el problema pre es más sencillo que el usado en el PE. Esta distinción coincide con el análisis realizado por el experto (CEPe y CCPp); además el profesor P11 hace explícito que el problema va dirigido al uso de casos particulares y a la búsqueda de un patrón. Al considerar la situación-problema del problema pre, el participante manifiesta que no basta con mostrar los casos particulares, sino que se debe llegar a una generalización de lo observado y es este, precisamente, el último requerimiento del problema pre. También mantiene el entorno de la función cuadrática, pues se trata de un concepto básico para el nivel educativo correspondiente al contexto de clase en el que se enmarca el PE. Para los procedimientos y proposiciones, el participante refiere que tienen mayor simplicidad puesto que son de carácter previo y que se centran en los casos particulares.

Si bien es cierto que el profesor P11 no realiza una adecuada elaboración de sus proposiciones y argumentos, es consciente de su importancia y afirma que los argumentos usados en el Pp son más intuitivos, es decir, menos exigentes que los correspondientes al PE.

4.4.3 Sobre su acercamiento a un problema didácticamente bueno del problema creado por variación cuantitativa

En este apartado explicitaremos la vinculación de la calidad de los problemas creados con los criterios de idoneidad didáctica. Para este propósito, pedimos al profesor P11 reformular su problema, considerando un análisis didáctico del proceso de creación de problemas mediante el uso de configuraciones de objetos y reflexiones sobre prácticas de solución y creación. Así, el profesor P11 propuso un problema que se muestra en la Tabla 44.

Tabla 44. Problema pre modificado por el profesor P11

Determina las parejas de números naturales cuyas sumas sean 5 y 6, respectivamente, de tal manera que el producto de las componentes de las parejas sea el máximo posible. Elabora una tabla para cada caso.

a) *Para el caso cuya suma es 6, ¿cuáles son las componentes de la pareja de números cuyo producto es máximo?*
b) *Para el caso cuya suma es 5, ¿existe una sola pareja de números cuyo producto es máximo? Explica tu respuesta.*
c) *Si consideramos que existe una única pareja de números no naturales cuya suma es 5 y cuyo producto es máximo y no es un número natural, ¿cuáles son tales números?*
d) *Elabora una estrategia para la obtención del producto máximo, en el caso que la suma de las componentes de las parejas sea un número par. ¿Esta estrategia es diferente en el caso que la suma sea un número impar? Explica tu respuesta.*
e) *Formula el producto de dos números cuya suma es 5 como una función f de una variable real x.*

Este problema creado fue sometido a una triangulación de investigadores cuyos análisis se muestran en la Tabla 46. Para esta actividad se utilizó el instrumento del Anexo E.2, en el que se presenta la rúbrica (ver Tabla 45) que se fue utilizando para valorar los problemas pre que se modificaron haciendo uso de una tabla, en la que también se muestran los comentarios de los investigadores.

Tabla 45. Rúbrica para la valoración del problema creado

Puntaje	Valoración	Interpretación
3	Alto	El problema muestra grado alto de acercamiento al indicador propuesto.
2	Medio	El problema muestra grado medio de acercamiento al indicador propuesto.
1	Bajo	El problema muestra grado bajo de acercamiento al indicador propuesto.
0	Nulo	El problema carece o no evidencia el indicador propuesto.

Tabla 46. Resultados de la triangulación de investigadores para el problema creado por el profesor P11

	Puntaje asignado por los investigadores		
Indicador	*Investigador1*	*Investigador2*	*Investigador 3*
La dificultad no es demasiado grande y se percibe que la solución es alcanzable.		3	2
Favorece intuir un camino para obtener la solución o conjeturar una solución.		2	3
Favorece hacer algunas verificaciones, eventualmente con ayuda de calculadora o computadora, para mantener o rechazar las conjeturas.		3	1
Se percibe que es interesante o útil resolver el problema.		3	1
Favorece establecer conexiones matemáticas, ya sea entre varios temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento.		3	1
Se percibe claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.)		3	2
Favorece el uso de relaciones lógicas antes que el uso mecánico de algoritmos.		2	3
Favorece crear nuevos problemas, haciendo de manera natural algunas variaciones que llevan a situaciones significativas, tanto didáctica como matemáticamente.		1	2

Comentarios del investigador 1

El investigador afirma que, dada la complejidad del problema, no puede valorarlo de forma global. Sin embargo, está de acuerdo en que este tiene las características de un problema pre. Del mismo modo, afirma que está bien pensado y pautado para conseguir posteriormente una resolución profunda del problema del episodio de clase. Por otro lado, observa que los apartados del problema se podrían considerar como otros problemas. Así, el apartado (c) es una particularización, frente al apartado (d) que invita a la generalización. El apartado (e) sería un simple ejercicio que ayuda mucho a pensar cómo solucionar el problema del episodio de clase.

Comentarios del investigador 2

Por su parte, este investigador está de acuerdo en que la solución del problema pre puede ayudar a conjeturar un patrón que permita llegar a la solución del problema del episodio. En particular, propone el uso de tablas, entre otros recursos gráficos, para otras sumas de números que ayudarán a apreciar el patrón que permite la solución. Por otro lado, manifiesta que la justificación rigurosa mediante la formalización y el completamiento de cuadrados requiere de la intervención del profesor.

Comentarios del investigador 3

Este investigador está de acuerdo en que resolver el problema pre creado facilita la comprensión del problema del episodio y contribuye a obtener una solución correcta de este, ya que en el problema pre se propone comenzar con casos más simples, distinguiendo el caso de que la suma sea par o impar, lo que resulta ser una buena estrategia. Sin embargo, manifiesta que sería más conveniente poner más casos de suma par e impar (por ejemplo, los casos de suma 8 y 7). También sugiere hacer una tabla y representarla gráficamente para que la dificultad no sea demasiado grande para algunos de los resolutores. De esta manera, se facilitaría encontrar la respuesta y justificarla. Finalmente, es de la idea de que el problema tal como está enunciado permite hacer una conjetura de la solución pero deja abierta la forma de justificarla. Este último punto está relacionado con el apartado (e) del problema.

De la revisión de los resultados mostrados por los investigadores de la evaluación del problema pre modificado por el profesor P11, podemos afirmar que el nuevo problema creado por el profesor P11 es uno que cumple las condiciones de un buen problema pre y que presenta algunos indicadores de un problema didácticamente bueno.

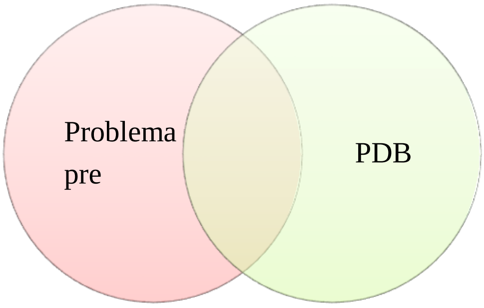


Figura 39. Relación problemas pre y problemas didácticamente buenos.

En la Figura 39, se observa la relación entre un problema pre y un PDB. Creemos que hay problemas que pueden ser buenos problemas pre pero no ser estrictamente PDB, y viceversa. También está el caso de que cumplan con las características de ambos tipos de problemas, que es la propuesta ideal; sin embargo, el nuevo problema creado por el profesor P11 no se clasifica como un problema PDB cabalmente, sino como un buen problema pre con rasgos de un PDB, ya que facilita la solución y la comprensión del PE adoptando condiciones o características de un PDB. Esta apreciación la realizamos después de someter el problema pre modificado a una triangulación de investigadores. Para los tres investigadores, el resultado fue casi coincidente para su categorización como problema pre. Dos de ellos mostraron su valoración utilizando la rúbrica y otorgaron puntajes a cada indicador de un PDB. Así, se observa que el problema pre modificado como consecuencia de la reflexión didáctica mediante las configuraciones y análisis de prácticas matemáticas ayudó en cierta forma a crear un buen problema pre con rasgos de un PDB.

Ahora bien, no podría denominarse PDB a cabalidad ya que el problema intenta, en la mayor parte de su propósito, facilitar la solución de este mediante el razonamiento inductivo, pero dejando de lado el uso de la función cuadrática, que es el entorno matemático principal para comprender fehacientemente el PE. Tal como lo muestran la valoración y la opinión de investigadores, el problema está bien estructurado, es decir, facilita el camino para la obtención de la solución del problema. En este caso necesitaría un respaldo o guía para concretar con la regla de correspondencia de la función cuadrática asociada al PE. Ciertamente, es didáctico porque procura hacer comprender el problema al usar ciertos patrones, pero se aleja del entorno matemático de la función cuadrática. Este aspecto del problema creado es respaldado por nuestro marco teórico, ya que un problema pre debe facilitar la comprensión y la solución de otro problema. Esta afirmación se fundamenta en las consideraciones de la creación de problemas desde las perspectivas para la enseñanza y el aprendizaje propuestas por Malaspina y Vallejo (2014).

Por otra parte, el problema muestra cierta dificultad en la comprensión. Esta característica es resaltada por los investigadores y también es reconocida por el profesor P11, proponente del problema quien reflexiona sobre su práctica de creación. Junto a esta reflexión, se observa que la sugerencia de los investigadores es utilizar algunas estrategias como tablas, gráficos de puntos, etcétera, que puedan ayudar a resolver el problema, como se muestra en la solución experta.

Comentarios finales sobre el profesor P11

El problema mostrado en la Figura 37 se caracteriza por ser intramatemático y su foco de atención es el uso de patrones para encontrar una regla de formación que tiene como propósito invitar a la reflexión al estudiante respecto al producto máximo de dos números. Este problema creado por el profesor P11 emerge como consecuencia de su reflexión didáctica tomando en consideración sus configuraciones de objetos y reflexiones sobre su práctica matemática. Al culminar la sesión 4 del taller de creación de problemas, también realiza una valoración de su problema pre creado mediante un instrumento de valoración (ver Anexo E.2).

Tal como manifiesta Rubio (2012) respecto a que es importante desarrollar la competencia de análisis didáctico, en particular la competencia de análisis de prácticas y objetos matemáticos, se observa que el profesor P11 ha desarrollado una reflexión didáctica utilizando las configuraciones de objetos. Como consecuencia de este análisis, creó un problema utilizando la estrategia por variación con énfasis didáctico. Esta reflexión la realizó con base en sus propias configuraciones, situación que se resalta cuando va desarrollando la reflexión sobre la práctica de creación y también se distingue en el análisis realizado de la CEPe y la CEPp.

Debido a su iniciación en el uso de la técnica de análisis didáctico, también se evidencian algunas deficiencias en la elaboración de configuraciones de objetos. Esto en cierta forma puede tener diversas causas: podríamos citar que la actividad de creación de problemas mediante la ERPP fue de corta duración; también podríamos suponer que el profesor P11 no posee una buena competencia de análisis didáctico o tal vez que, en la sesión 2, el proceso de instrucción para introducir a los docentes en servicio fue poco sofisticada. Sin embargo, luego del análisis del CEPe y CEPp, los principales objetos matemáticos considerados para la creación de problemas cumplen con la característica de ser previos a los considerados en el PE. De ahí que podemos afirmar que el profesor P11 creó un problema con énfasis didáctico, pero solo se enfoca en algunos objetos de la configuración cognitiva, por lo que muestra una competencia de análisis didáctico en proceso, especialmente en la elaboración de configuración de objetos y reflexión sobre su práctica.

Por otro lado, del análisis de las CEPp – CCPe y CEPe – CCPp podemos afirmar que no se han explicitado algunos conocimientos matemáticos que el profesor P11 implícitamente considera en su problema creado. Esta falta de atención a este aspecto podría influir en que el problema pre creado carezca de algunas características de un problema PDB.

Del análisis de las CCPe – CCPp, que nos da más información acerca de la fase de reflexión didáctica, manifestamos que el profesor P11 ha logrado parcialmente distinguir y fundamentar la relación de esta reflexión con su problema creado. Más todavía, esta faceta la podemos catalogar de importante y significativa, puesto que -si bien es cierto no se elaboraron en forma consistente las configuraciones de objetos- la reflexión didáctica para considerar aspectos del propio problema se muestra resaltante, tanto por el experto como por el propio profesor P11, ya que en el protocolo de reflexión sobre la práctica de creación el profesor manifiesta ciertos alcances y dificultades que podría tener el problema creado. Así, coincidimos con Tichá y Hospesová (2013), quienes plantean que la etapa de reflexión en el proceso de creación de problemas es importante para mejorar el proceso de creación.

Como consecuencia de su reflexión sobre la práctica de creación y valoración de su problema creado, el profesor P11 modifica el problema de la Figura 37 y propone otro problema (mostrado en la Tabla 44) cuya valoración fue sometida a una triangulación de investigadores mediante una rúbrica que involucró indicadores de acercamiento a los criterios de idoneidad didáctica del EOS. La elaboración de este problema suscitó el desarrollo de un cuestionario de salida por parte del profesor P11. En dicho cuestionario se resalta las bondades del problema modificado, haciendo énfasis en el uso de la CCPe y la CCPp, especialmente de los objetos situación-problema y conceptos. La falta de atención en los otros objetos, como se propone líneas arriba, debe estar influenciada de una escasa práctica del manejo de estos por el profesor; ya que más adelante él mismo intenta realizar una argumentación haciendo uso de otros objetos no *considerados* para la creación. Este último aspecto, creemos, está muy relacionado con la competencia de análisis didáctico.

Por otro lado, dado que el problema creado por el profesor P11 tiene las características de un problema pre, podemos decir que esto está estrechamente relacionado con la competencia matemática del docente en mención. Si bien es cierto que en esta investigación no nos centramos en estudiar la competencia matemática de los participantes, al realizar una revisión de la Tabla 30 notamos que el profesor P11 muestra un mejor manejo de habilidades según nuestra taxonomía MATH utilizada para la elaboración del instrumento. Por ello se puede afirmar, como Crespo (2003) y Silver (2013), que un buen resolutor puede ser un buen creador, tal como lo muestra la evaluación diagnóstica (ver Tabla 30) para el profesor P11.

También, considerando el vínculo de las bondades del problema y las idoneidades didácticas propuestas por el EOS, bajo la propuesta de Malaspina (2011b), y el estudio de la Tabla 46, podemos afirmar que el problema tiene un acercamiento mayor a las idoneidades cognitivas, interaccional, afectiva y epistémica. Esta apreciación se realiza con base en la opinión de expertos bajo la rúbrica creada para la valoración del problema. Así, estamos de acuerdo en que el problema tiene características de un PDB.

Ahora bien, siguiendo con las respuestas vertidas por el profesor P11 en el cuestionario de salida posterior al taller, se observa que realiza una explicación de las bondades de su problema, utilizando para ello los elementos de su configuración y fundamentando su énfasis didáctico. Precisamente, estos aspectos son resaltados por los investigadores evaluadores del problema pre modificado por el profesor P11.

Finalmente, el participante manifiesta que la estrategia ERPP es de suma utilidad y debe ser aplicada en la formación de profesores; sin embargo, hace el alcance de que debería ser mejor pauteada y con un tiempo más extenso.

4.4.4 Caso 2: Problemas creados por modificación cuantitativa y cualitativa

De los seis problemas categorizados para este apartado (ver Tabla 39) a modo de ejemplo, presentamos el caso de la profesora P15.

El caso de la profesora P15

El caso que analizamos en este apartado corresponde a una participante del taller, quien es profesora en servicio del sistema privado escolar de la capital del Perú y a quien asignamos la etiqueta de P15 para el análisis de los datos.

Esta profesora manifiesta utilizar la creación de problemas para ejemplificar conceptos durante sus clases de matemática y para realizar evaluaciones. Asimismo, luego de la aplicación del cuestionario de salida sobre la experiencia de creación de problemas, menciona que generalmente ha creado problemas mediante variación de otro, pero no muestra una explicación contundente de la estrategia que utiliza.

Por otro parte, como respuesta a la actividad de creación de problemas, la profesora P15 creó un problema pre cuya finalidad fue facilitar la comprensión del PE y permitir resolverlo tomando en cuenta el entorno de la función cuadrática. En la mostramos el problema pre creado por la profesora P15 y su transcripción asociada.

Cabe mencionar que, por razones gramaticales y esperando transmitir correctamente la intencionalidad del problema, en la transcripción se realizó una aclaración del enunciado del problema creado, para su correcta comprensión acorde a la solución propuesta por la profesora. Esta modificación no altera la esencia del problema; todo lo contrario, permitirá al lector comprenderlo y situarse en el contexto de su creación.

También se muestra la solución del problema pre creado y la posible solución propuesta por la profesora P15. De la misma forma, se presentan las configuraciones de objetos elaboradas por esta profesora y el experto, para la comparación de configuraciones y el estudio de las reflexiones sobre la práctica de solución y creación, como se explicó líneas arriba (ver Figura 36).

Problema pre creado por la profesora P15

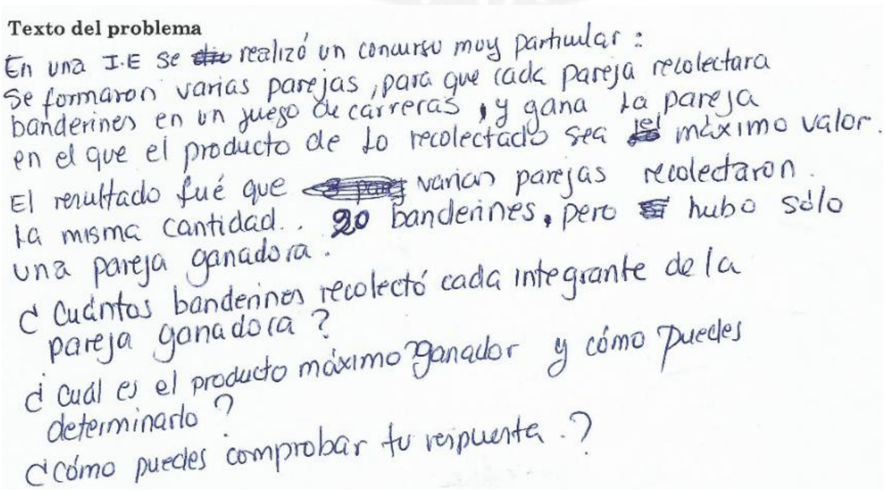

Texto del problema
En una I.E se realizó un concurso muy particular:
Se formaron varias parejas, para que cada pareja recolectara
banderines en un juego de carreras, y gana la pareja
en el que el producto de lo recolectado sea el máximo valor.
El resultado fué que varias parejas recolectaron
la misma cantidad.. 20 banderines, pero hubo sólo
una pareja ganadora.
¿Cuántos banderines recolectó cada integrante de la
pareja ganadora?
¿Cuál es el producto máximo ganador y cómo puedes
determinarlo?
¿Cómo puedes comprobar tu respuesta.?

Figura 40. Problema pre creado por la profesora P15

Transcripción

En un centro de estudios se realizó un concurso muy particular. Se formaron varias parejas, donde cada una de ellas recolectó [*20*] banderines en un juego de carreras con la condición que la pareja ganadora ~~debía ser aquella~~ [*sería aquella*] en ~~el~~ que el producto de la cantidad de ~~sus~~ [*los*] banderines recolectados [*por cada integrante*] sea el máximo ~~valor~~. El resultado fue que ~~varias parejas recolectaron 20 banderines, pero~~ hubo una sola pareja ganadora.

a) ¿Cuántos banderines recolectó cada integrante de la pareja ganadora?
b) ¿Cuál es el producto máximo ganador y cómo puedes determinarlo?
c) ¿Cómo puedes comprobar tu respuesta?

La profesora P15, luego de crear el problema en la forma antes mencionada, pasó a resolverlo y propuso una solución que nos permitirá adentrarnos en aspectos no tan explícitos del problema. Seguidamente, elaboró la configuración cognitiva de solución. Como última etapa, respondió al cuestionario sobre la práctica matemática de creación. Este se muestra en el Anexo E.6.

Solución de problema propuesto por la profesora P15

En la Figura 41 y la Figura 42 mostramos la solución del problema pre creado por la profesora P15.

Solución del problema creado

~~(grupo ganador)~~

Pareja ganadora:

Integrante A: Recolectó a banderines
Integrante B: Recolectó b banderines

$$a+b=20$$

Varias parejas ~~(ganad)~~ recolectaron la misma cantidad.
entonces podrían ser:

15 + 5
12 + 8
1 + 19.
10 + 10 ⇒ Nos damos cuenta que el máximo producto es 100
9 + 11.

Sin embargo, puedo asegurar mi respuesta, determinando una función entre el máximo producto y el valor de una de las cantidades.

1ro determinamos una de las cantidades en función de la otra; de: $a+b=20$

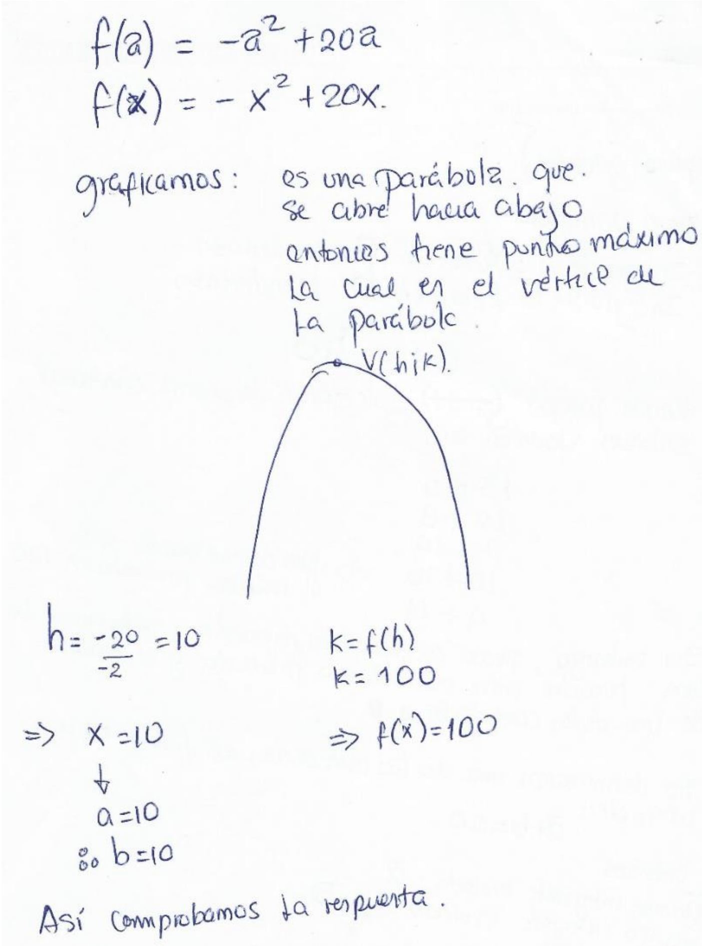
entonces
primer integrante recolectó: a
segundo integrante recolectó: $20-a$

⇒ max producto: $f(a)$.

$$f(a) = a(20-a)$$
$$f(a) = -a^2+20a$$

⟶

Figura 41. Solución propuesta por la profesora P15 de su problema pre creado (primera parte)



$f(a) = -a^2 + 20a$
$f(x) = -x^2 + 20x.$

graficamos: es una parábola que se abre hacia abajo entonces tiene punto máximo la cual es el vértice de la parábola.

$h = \frac{-20}{-2} = 10$ $\quad k = f(h)$
$k = 100$

$\Rightarrow x = 10 \quad \Rightarrow f(x) = 100$
$\downarrow$
$a = 10$
$\therefore b = 10$

Así comprobamos la respuesta.

Figura 42. Solución propuesta por la profesora P15 de su problema pre creado (segunda parte)

También, en la Tabla 47 presentamos la configuración cognitiva elaborada por la profesora P15 y que nos dará información sobre aspectos más profundos de su solución.

Tabla 47. Configuración cognitiva de la solución del problema pre creado por la profesora P15 (CCPp).

Objetos matemáticos	**Especificaciones**
Lenguaje	• ***Términos y expresiones*****:** pareja ganadora, integrante A, integrante B, función, máximo producto, parábola, vértice, comprobación. • ***Representaciones verbales:*** integrante A, integrante B • ***Representaciones simbólicas*** $+$, $a + b = 20$, *15, 5, 12, 1, …,* $f(a) = a(20 - a)$, $f(a) = -a^2 + 20a$, $f(x) = -x^2 + 20x$,

Situación – problema	**Información:** cantidad de banderines recolectados por dos integrantes en un juego en el que hubo una pareja ganadora de acuerdo con las reglas dadas. **Requerimiento:** cantidad de banderines que cada integrante de la pareja ganadora recolectó y mostrar estrategias de solución. **Contexto:** extramatemático **Entorno matemático:** función cuadrática
Conceptos	Ecuación, función lineal, función cuadrática, relación, parábola.
Proposiciones	• Dados algunos valores para cada variable en $a + b = 20$, existe un solo par de valores con el que se obtiene el máximo producto. • Determinada la función, existe un punto máximo en el que hay un valor para una de las cantidades y el producto máximo en función de esta.
Procedimientos	• Ordenar los datos. • Probar valores para la ecuación en $a + b = 20$. • Determinar el producto máximo. • Determinar una variable en función de la otra. • Determinar una función relacionando la variable. • Graficar y comprobar determinando el punto máximo.
Argumentos	**No se muestran**

Reflexión sobre la práctica matemática de creación de la profesora P15

En la Tabla 48 se presenta la transcripción de las respuestas vertidas por la profesora P15 respecto a su reflexión sobre la práctica de creación, que se basó en un protocolo elaborado (cuestionario) para esta actividad.

Tabla 48. Reflexión sobre la práctica de creación por la profesora P15

Protocolo de reflexión	Respuesta
a) ¿El lenguaje usado en el Pp es más sencillo que el lenguaje del PE?	El lenguaje usado en el Pp es tan sencillo como el lenguaje del PE. Como tiene un contexto extramatemático, podría ser considerado más sencillo ya que las cantidades numéricas tienen cierta significancia para el estudiante en el Pp y no son solo representaciones simbólicas como en el PE.
b) ¿La información que se presenta es más fácil de entender que la información dada en el PE?	El Pp utiliza un lenguaje tan o más sencillo que el PE, sin embargo, no siempre podría ser de fácil comprensión por quien lo resuelve. El Pp se presenta en un contexto extramatemático con la intención de que el estudiante recree la situación, pero al analizar el problema le falta claridad y orientación a los temas objetivos del nivel (3er grado de secundaria).

c) ¿Lo que se requiere en el Pp ayuda a entender lo que se requiere en el PE?	Hasta cierto nivel sí ayuda, porque la información permite trabajar con un número que nos conlleva a un tratamiento intuitivo, y aunque al plantear tres preguntas se pretendía orientar al estudiante a utilizar la función cuadrática a modo de comprobación, con la configuración de los objetos matemáticos me doy cuenta de que la información del problema no asegura que el estudiante pueda pasar de la intuición a sistematizar y matematizar lo que entiende de la situación.
d) ¿Los conceptos involucrados corresponden al grado de estudios considerado?	Algunos conceptos no corresponden al grado en consideración, más bien corresponden a sus saberes previos, ecuaciones, relación,... Al revisar la configuración cognitiva del desarrollo del Pp y al analizar una vez más el Pp creado, encuentro que el Pp no involucra una función cuadrática (de variable Real), es decir, la función cuadrática y la parábola no debieron ser consideradas en mi CCPp, porque la información que brinda el problema no implica una gráfica de una parábola. Los puntos de la gráfica no son continuos (número de banderines). Por lo tanto los conceptos involucrados no corresponden al nivel del grado de estudios. Sin embargo, es posible adecuar o replantear la situación (cambiar algunos elementos por variación).
e) ¿Los conceptos involucrados son los mismos o previos a los conceptos considerados en el PE?	De acuerdo con lo explicado anteriormente, los conceptos involucrados no son los mismos. Son conceptos que ya están presentes si el estudiante aplicase función cuadrática.
f) ¿Los procedimientos para resolver el Pp son más sencillos que los procedimientos considerados en el PE?	Inicialmente son más sencillos, debido a que hacen énfasis en la intuición como primer paso. Luego hubo intención de que se realice una comprobación haciendo uso de la función cuadrática, con su respectiva gráfica, y en la que deberían reconocer el punto máximo. Si los estudiantes lo aplican tendrían muchas interrogantes finalmente.
g) ¿Los procedimientos involucrados en el Pp corresponden al grado de estudios considerado?	En la comprobación se involucran procedimientos con funciones cuadráticas, parábola, siempre y cuando se asuma que D(f) = R en: $f(a) = -a^2 + 20a$ Que implica: $f(x) = -x^2 + 20x$ Los procedimientos con los que se parte no corresponden al grado de estudios considerado; implican solo los saberes previos del estudiante. Por ello, parte del requerimiento es la comprobación, que pretende que el estudiante busque como estrategia el uso de una función cuadrática.

h) ¿Las proposiciones presentes en la solución del Pp son más fáciles de explicitar que las proposiciones al resolver el PE?	Por ejemplo, la proposición "varias parejas recolectaron la misma cantidad, pero existe una única posibilidad para el producto máximo" en el Pp es una proposición que se hace evidente y de fácil explicación que en el PE. El PE requiere que el estudiante defina la función y analice la gráfica. Aunque ese es el objetivo, es muy probable que el estudiante no entienda del todo las proposiciones que se desprenden de ella (la ecuación de la función y su gráfica).
i) ¿Los argumentos usados en el Pp son más intuitivos, menos exigentes (formales, elaborados) que los argumentos del PE?	Sí son más intuitivos y menos exigentes inicialmente. Sin embargo, el PE va dirigido a estudiantes que ya tienen conocimiento del tema, es la aplicación y tal vez el análisis de lo que ellos ya saben, no hay construcción de saberes. El estudiante que ya domina el tema seguramente elaborará argumentos formales y complejos. Así también habrá estudiantes que sigan manteniendo dudas como las de Pedro: "los números son 21 y 22", o como Isabel: "El producto máximo no se puede saber",... (del PE). Asimismo, el Pp no plantea con claridad la información ni el requerimiento que permitan al estudiante hacer uso de proposiciones y argumentos correspondientes a su grado de estudio cuando pase de lo intuitivo a lo formal.

Solución experta del problema pre creado por la profesora P15

Para elaborar la configuración epistémica del problema pre creado (CEPp), planteamos la solución experta de dicho problema. Esta solución considera aspectos *no explícitos* por la proponente del problema pre, tanto de forma como de fondo; esto último está relacionado con la correcta interpretación del contexto, el entorno y los requerimientos del problema. Por citar dos ejemplos: que las parejas recolectan 20 banderines y que el producto máximo al cual se refiere se relaciona con la cantidad de banderines recolectado por cada integrante de la pareja. Estos aspectos fueron aclarados y reflexionados por la profesora P15, de tal forma que, siguiendo la faceta reflexiva de la estrategia ERPP, se concluyó en un problema pre afinado por el proponente como respuesta a una serie de análisis realizados luego de la culminación del taller (ver problema modificado en la Tabla 51).

Solución experta

Para elaborar la configuración epistémica del problema pre creado (CEPp), elaboramos la solución experta de dicho problema.

Datos:

- Parejas en competencia de recolección de banderines.
- Se recolectaron 20 banderines.
- Solo hay una pareja ganadora.
- El producto debe ser el máximo posible.

Para tener una idea general del problema elaboramos la Tabla 49 con los posibles valores que verifican algunas condiciones del problema.

Tabla 49. Lista de valores que cumplen con las condiciones del problema

Integrante 1	2	8	5	10	19
Integrante 2	18	12	15	10	1
Producto	36	96	75	100	20

Por simple inspección nos damos cuenta de que el producto máximo de lo recolectado por cada pareja debió ser 10 banderines cada uno. Asimismo, el producto máximo es igual a 100. Sin embargo, dado que el entorno del problema es de funciones cuadráticas, este resultado se puede obtener de forma más rigurosa haciendo uso de la regla de correspondencia de la función producto asociada al problema.

Definimos a x y $20 - x$ como la cantidad de banderines recolectados por el primer y el segundo integrantes de la pareja ganadora, respectivamente. Así, se formula la función f que llamaremos función producto.

$$f(x) = x(20 - x)$$

Para maximizar esta función utilizamos la técnica de completar cuadrados, de lo que se obtiene

$$f(x) = -(x - 10)^2 + 100$$

Donde la cantidad de banderines es 10 para hallar el máximo de f. Esto se puede visualizar esbozando el gráfico de la función producto (gráfico de puntos) (ver Figura 43), en el que el dominio es un subconjunto de los números enteros de 0 a 20 inclusive.

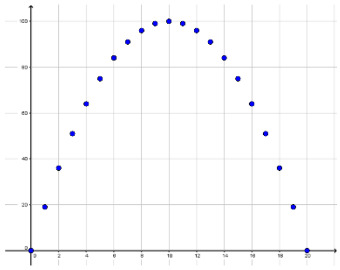


Figura 43. Gráfico de la función producto del problema pre creado por la profesora P15.

Por lo tanto, ambos integrantes recolectaron 10 banderines cada uno y el producto máximo de lo recolectado es 100. De esta forma se comprueba la respuesta inicial

***Configuración epistémica de la solución experta del problema pre creado por la profesora P15* (CEPp)**

Tomando en cuenta esta solución experta del problema pre creado por la profesora P15, elaboramos su configuración epistémica (CEPp), como se presenta en la Tabla 50.

Tabla 50. Configuración epistémica de la solución experta del problema pre creado por la profesora P15 (CEPp)

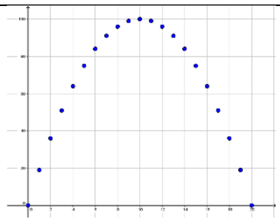
<table>
<tr><th>Objetos matemáticos</th><th>Especificaciones</th></tr>
<tr><td>Lenguaje</td><td>

Términos y expresiones: tabla, función, producto, suma, máximo, simple inspección, completar cuadrados, gráfico
Representaciones verbales:
Función, producto, maximizar, máximo, gráfico.
Representaciones simbólicas

$2, 5, 18, 15, \ldots, 100\ , x, 20 - x, f(x) = -(x - 10)^2 + 100,$

Representaciones gráficas

<table>
<tr><td>Integrante 1</td><td>2</td><td>8</td><td>5</td><td>10</td><td>19</td></tr>
<tr><td>Integrante 2</td><td>18</td><td>12</td><td>15</td><td>10</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Producto</td><td>36</td><td>96</td><td>75</td><td>100</td><td>20</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

	
Situación – problema	**Información:** competencia en parejas que recolectan 20 banderines, donde hay una única pareja ganadora. **Requerimiento:** cantidad de banderines recolectados por cada integrante de la pareja ganadora, cuyo producto de dichas cantidades es el máximo posible. Justificar y comprobar el procedimiento. **Contexto:** extramatemático **Entorno matemático:** funciones cuadráticas, operaciones aritméticas elementales.
Conceptos	Máximo, suma, función cuadrática, completar cuadrado, producto y suma de dos números, producto máximo.
Proposiciones:	• Por simple inspección nos damos cuenta de que el producto máximo de lo recolectado por cada pareja debió ser 10. • El resultado del problema se puede obtener de forma más rigurosa haciendo uso de la regla de correspondencia de la función producto f asociada al problema. $f(x) = x(20 - x)$ • Para maximizar la función f utilizamos la técnica de completar cuadrados. • La cantidad de banderines es 10 para hallar el máximo de f y esto se puede visualizar esbozando el gráfico de la función producto (ver Figura 43), en el que el dominio es un subconjunto de los números enteros de 0 a 20 inclusive.
Procedimientos	• Se dio lectura al problema para determinar la información y el requerimiento. • Elaboramos una tabla con algunos valores prueba para averiguar el producto máximo de dos números enteros. • Formulamos la regla de correspondencia de la función producto asociada al problema. • Verificamos nuestra respuesta utilizando la estrategia de completar cuadrados. Se maximiza la función producto. • Comprobamos que nuestra respuesta tenga sentido.
Argumentos	**Tesis 1** Por simple inspección se obtiene que cada integrante de la pareja ganadora recolecta 10 banderines; además el producto máximo es igual a 100. **Argumento** Esta tesis se justifica con los resultados de la Tabla 49 y utilizando el razonamiento inductivo.

	Tesis 2 La tesis anterior se puede justificar de forma más rigurosa haciendo uso de la regla de correspondencia de la función producto *f* asociada al problema. **Argumento** Este argumento se justifica mediante la técnica de completar cuadrado para f, considerando S la cantidad de banderines recolectados por las parejas concursantes. $$f(x) = x(S - x)$$ $$f(x) = -\left(x - \frac{S}{2}\right)^2 + \frac{S^2}{4}$$ Donde se observa que el producto máximo será $\frac{S^2}{4}$, para $x = \frac{S}{2}$, donde x y $S - x$ son las cantidades de banderines recolectados por cada integrante de la pareja ganadora.

4.4.5 Análisis de los resultados para la profesora P15

Para analizar la información obtenida tanto para las configuraciones de objetos como para la reflexión sobre la práctica matemática, se realiza la comparación de configuraciones epistémicas y cognitivas utilizando el esquema mostrado en la Figura 36. Este análisis lo realiza el tesista al inicio, para luego ser refinado por el asesor de tesis y un especialista en el EOS.

Respecto al uso de las nociones del análisis didáctico por el profesor en servicio en la creación de problemas pre

- ***Respecto a la CEPe y la CEPp***

Al analizar la CEPe y la CEPp, se observa que la información fue variada tanto en el sentido cualitativo como en el cuantitativo: cualitativo porque el problema se caracteriza por ser de contexto extramatemático a diferencia del PE; mientras que es cuantitativo porque la información brindada respecto del punto de vista numérico es de más fácil manejo para un estudiante de educación básica. Este análisis de lo cualitativo y cuantitativo, como se mencionó al explicar la categorización de los problemas creados por los participantes del taller que se muestran en la Tabla 39, se debe a una consideración de la información brindada en el problema. En el problema creado es evidente el manejo más cercano respecto al contexto del problema del PE, ya que el problema pre creado en el contexto referido a los banderines facilita el manejo y el planteamiento de una estrategia de solución.

La estrategia planteada por el experto en la solución del problema es de fácil comprensión y más intuitiva; mediante la elaboración de las tablas se logra interpretar los datos y se facilita la conjetura de los resultados. Por ello, el uso de una regla de correspondencia no es necesario (ciertamente no se explicita su utilización). Sin embargo, le da riqueza matemática a la solución.

Respecto al lenguaje, desde un punto de vista global, se mantienen algunos términos como máximo, completar cuadrados, gráfico. Asimismo, las expresiones verbales como función o producto también se consideran en ambas configuraciones. Por otro lado, se utilizan representaciones gráficas: en el caso del problema creado se presenta una tabla de valores prueba, y el gráfico correspondiente a la función producto con un dominio discreto. Es preciso hacer notar que el uso de este gráfico no es explicitado en el problema creado y se presenta como una solución más elaborada que permite comprender la solución en diferentes registros. Ahora bien, para darle rigurosidad a la solución del problema creado, es necesario explicitar la regla de correspondencia de la función producto, que genera una formalidad de la conjetura de solución mediante las tablas de valores. Cabe notar que esta función propuesta tiene como dominio un conjunto finito y discreto.

Si centramos nuestra atención en el requerimiento del problema, nos percatamos de que la información en el problema creado es de mayor acercamiento al estudiante, puesto que lo ubica en un contexto extramatemático. Así, se proponen dos condiciones similares a las del PE: que hay una pareja ganadora y que el producto de lo recolectado por cada integrante es 20. Por otra parte, en el problema creado el requerimiento se desagrega parcialmente en tres condiciones específicas que se destacan por la necesidad de comprobación. A diferencia del problema del PE, en el que su efectividad de solución exige el uso de la función cuadrática, en el problema creado esta no se muestra tan evidente. Es más, por la naturaleza de la información brindada y que se plasma en la solución experta, el análisis solo se realiza en el conjunto de los números enteros no negativos, evitando así el uso de números decimales como en el PE; por lo tanto, el entorno no se mantiene, es decir, no existe la necesidad de hacer uso de la función cuadrática para resolver el problema y extender el análisis a otros conjuntos numéricos.

Los conceptos para el problema creado, basándonos en la formalidad y la rigurosidad de la solución experta, son más intuitivos y de menos rigurosidad. Esta situación coincide con el uso de valores discretos que permite el trabajo del razonamiento inductivo, de tal forma que se puede conjeturar la solución del problema propuesto.

Lo anterior coincide con el listado de los procedimientos, ya que los del PE son más elaborados. Así, las estrategias usadas en la solución del problema creado permiten un fácil manejo de los datos para llegar a la respuesta. De la misma forma, ambos procedimientos se caracterizan por tener una fase de comprobación que está estrechamente relacionada con una reflexión sobre la práctica de solución, siguiendo la heurística de Polya (1945).

La simplicidad tanto de la información mostrada en el problema creado como de su solución permite manejar y plantear proposiciones menos elaboradas, que estarían más cercanas al entorno del estudiante. En el problema creado, estas son de menos exigencia frente a las más elaboradas y de mayor riqueza matemática que caracterizan al PE. Al igual que este aspecto, los argumentos tienen características similares con énfasis intuitivo, salvo la utilización de la función cuadrática para hallar el producto máximo.

- ***Respecto a la CCPe y la CEPp***

Al analizar la CEPp y la CCPe (ver Anexo E.6), detectamos que la primera configuración se caracteriza por ser de mayor riqueza desde el punto de vista de los objetos matemáticos formulados. Para la CCPe, se muestran objetos matemáticos parcialmente elaborados y que implican la falta de claridad para la formulación del problema pre tomando en consideración el episodio de clase. Esta interpretación que hace la profesora P15 de los objetos matemáticos del PE permitirá realizar una reflexión que culminará en la reformulación de problema pre en otro mejor elaborado.

La profesora P15, quien elaboró su CCPe, muestra expresiones que son de mayor complejidad frente a la CEPp. Este aspecto es importante resaltarlo, puesto que precisamente muestra la naturaleza de un problema pre; sin embargo, no hay una claridad de las representaciones verbales, o por lo menos no están explícitas en su CCPe. Ahora bien, en el CCPe se muestran representaciones simbólicas, y una de ellas implica el manejo de una ecuación diofántica que mediante reglas algebraicas se transforma en una función cuadrática. Esta situación no se evidencia en la CEPp, por lo que es de mayor facilidad el uso de una tabla de valores para comprenderlo y resolverlo. Las representaciones gráficas en ambas configuraciones están presentes, pero son de distinta naturaleza. En el PE se hace uso de una función cuadrática con dominio real; en el problema creado el dominio se restringe a un conjunto finito de valores enteros. Es más, la utilización de esta gráfica no hace efectiva la solución del problema pre: no aporta mayor información que la obtenida mediante el uso de la tabla, por lo menos desde el enfoque del experto.

En la situación-problema, la profesora P15 hace una variación cualitativa y cuantitativa de la información del PE. Sin embargo, se observa una falta de claridad en la formulación del requerimiento. Caso distinto se muestra en la CEPp, lo que nos comprueba la falta de consistencia para la elaboración de configuración de objetos. En ambas configuraciones el contexto se mantiene y es de naturaleza extramatemática. Por otro lado, la profesora P15 hace mención del entorno matemático función cuadrática del PE, pero este aspecto no es tomado en consideración en forma explícita en la formulación de su problema. Es decir, no hay necesidad de su uso para resolver el problema, situación que será tema de reflexión por la proponente en la etapa de reflexión sobre la práctica matemática de creación.

Los conceptos mostrados en ambas configuraciones son similares, con la diferencia que en la CEPp estos son menos rigurosos. Este aspecto puede estar estrechamente relacionado con la consideración de la profesora P15 para la formulación de su problema pre, tal como se muestra en el protocolo de prácticas de creación que comentaremos más adelante.

Por otra parte, al analizar las proposiciones de ambas configuraciones, observamos que la diferencia sustancial está en la cantidad de estas. Mientras que en la CEPp observamos tres proposiciones, en la CCPp solo hay una; sin embargo, si prestamos atención al nivel de formalidad de las proposiciones, las de la CEPp son más simples y son formuladas con mayor consistencia. Este aspecto del análisis de configuraciones nos da algunos rasgos característicos del nivel de elaboración de estas, en especial en el nivel de reflexión sobre la práctica de solución, ya que la profesora P15 tuvo problemas para detectar las proposiciones asociadas a la solución de su problema creado.

Al considerar los argumentos, nos percatamos de que la profesora P15 elaboró en forma parcial los del PE, pero cualitativamente estos son de mayor reflexión que los detectados en el problema creado.

Finalmente, con relación a los procedimientos, la profesora P15 mostró en sus CCPe procedimientos que reflejan una reflexión sobre la práctica de solución. Sin embargo, no presenta, o no es de fácil deducción, una fase de comprobación, como se observa en la CEPp.

- ***Respecto a la CEPe y la CCPp***

Si revisamos la CCPp elaborada por la profesora P15, se observa un manejo parcial del objeto matemático lenguaje, donde se destacan los términos, las expresiones y las representaciones simbólicas, que son de mayor riqueza frente a las representaciones verbales. No se observa la representación gráfica que la profesora P15 utiliza en la solución de su problema creado.

En el caso de la situación-problema y los conceptos, se destaca una buena elaboración del objeto matemático, sin embargo, se observa que el entorno mencionado en la CCPp es función cuadrática y en el problema creado este no se muestra tan claramente. Así, este está estrechamente conectado con los conceptos considerados por la profesora P15.

Las proposiciones mostradas en la CCPp son de menor rigurosidad que las consideradas en la CEPe. De este aspecto se destaca la faceta de comprobación en la CCPp. No se muestran argumentos en la CCPp.

- ***Respecto a la CCPe y la CCPp***

De la comparación de la CCPe y la CCPp, que está más estrechamente relacionada con la competencia de análisis didáctico, podemos afirmar que hubo un proceso de reflexión, y esto se contrasta con el cuestionario de salida desarrollado por la profesora luego de su participación en el taller sobre creación de problemas (ver Anexo E.6) . Luego de la reflexión didáctica realizada por la participante, se llega a la formulación de un problema que fue consecuencia, precisamente, de la etapa de reflexión sobre las prácticas de solución y creación, haciendo uso de las CCPe y la CCPp. Como muestra de esta reflexión, presentamos el problema pre modificado y sometido a una triangulación de investigadores para su valoración, mediante indicadores de acercamiento a la idoneidad didáctica propuesta por el EOS y una rúbrica de evaluación (este aspecto será discutido más adelante).

Al analizar las configuraciones CCPe y CCPp, notamos que en la primera se evidencia una mayor elaboración de objetos matemáticos. Esta situación, sin embargo, no impide que el problema creado tenga ciertas características y bondades. Cabe resaltar que las mayores dificultades, tanto observadas como mostradas por la profesora P15 en la aplicación del cuestionario de salida, están en los objetos matemáticos proposiciones y argumentos. Por otro lado, hay una mejor elaboración del objeto situación-problema.

Con el objetivo de tener un análisis más fino de este proceso para llegar a crear el problema, revisamos el análisis de la reflexión sobre la práctica de la Tabla 48, desarrollado por la profesora P15. Gracias a él se distingue una reflexión utilizando las CCPe y CCPp, ya que se resalta que el lenguaje usado en el problema pre es más sencillo que el usado en el PE, por tener un contexto extramatemático. Por otro lado, respecto a la información, la profesora P15 señala que tal vez no sea de fácil comprensión para los estudiantes, ya que falta claridad en la formulación. Este aspecto fue resaltado a la hora de realizar la transcripción del problema a un lenguaje más asequible. Es destacable que se haga esa acotación pues, como se mencionó más arriba, la profesora P15 consideró este aspecto y reformuló el problema pre (ver problema en la Tabla 51).

De igual modo, al revisar la reflexión sobre la práctica de creación, la profesora P15 manifiesta que el requerimiento de la situación-problema no está formulado de tal forma que obligue al estudiante a pasar a la función cuadrática. Esta reflexión coincide con el análisis de la comparación de configuraciones (CEPe y CEPp) realizado por el experto.

Ahora bien, al reflexionar sobre los conceptos involucrados en la CCPp, se menciona que algunos de ellos no necesariamente son del propósito del problema pre creado. Esto nos muestra que la profesora P15 hace una reflexión didáctica, pues manifiesta que los conceptos como ecuación, relación, entre otros, no corresponden propiamente al nivel de estudios del episodio mostrado. Son contenidos previamente estudiados. Asimismo, también manifiesta que el uso de la gráfica no corresponde al de una función cuadrática, ya que no representa una parábola con trazo continuo, y podría modificarse para una mejor comprensión del entorno del problema.

Por otro lado, de la reflexión sobre los procedimientos del problema pre creado, se menciona que son de menor exigencia, un tanto intuitivos y que permitirán realizar conjeturas que se espera hagan uso de la función cuadrática para su comprobación. Sin embargo, la misma proponente manifiesta que este objetivo es complejo pues no exige su uso en la solución del problema. De ahí que los procedimientos estarían alejados del nivel de estudios del estudiante.

Como se hizo notar anteriormente, la profesora P15 tuvo complicaciones para la elaboración de las proposiciones y los argumentos de la solución del problema pre (CCPp). Sin embargo, en el análisis de su práctica de creación, menciona que en el problema pre se hace uso de proposiciones más simples que en el PE. De la misma forma, afirma que si bien es cierto el PE exige el manejo de proposiciones sobre funciones cuadráticas, en particular referidas a su gráfica y la regla de correspondencia, este sería así más elaborado y de difícil acceso para el estudiante.

Por su parte, para el objeto matemático argumentos, manifiesta que los involucrados en el problema pre son más intuitivos y de menos exigencia que el PE, ya que este último exige el manejo de la función cuadrática en cierto nivel. Por su parte, en el problema creado, el uso de argumentos no está dentro del propósito del problema, es decir, no exige su empleo en forma explícita ya que no se plantean con claridad ni la información ni el requerimiento para ello.

4.4.6 Sobre su acercamiento a un problema didácticamente bueno del problema creado por variación cuantitativa y cualitativa

En este apartado explicitaremos la vinculación de la calidad de los problemas creados con los criterios de idoneidad didáctica. Para este propósito, pedimos a la profesora P15 reformular su problema, considerando un análisis didáctico del proceso de creación de problemas, mediante el uso de configuraciones de objetos, reflexiones sobre prácticas de solución y creación, así como la valoración que realizó de su problema creado por medio del instrumento del Anexo E.2. Como consecuencia, la profesora P15 propuso un problema que se muestra en la Tabla 51.

Tabla 51. Problema pre modificado por la profesora P15

En un concurso de playa, en un tiempo determinado, se recolectan banderines en parejas. Cada pareja muestra al juez la cantidad de banderines que recolectó cada integrante. El juez multiplicará los números correspondientes a esas cantidades y declarará ganadora a la pareja que le corresponda el producto más alto de las multiplicaciones realizadas. a) Si la pareja ganadora estuvo entre las parejas que recolectaron 20 banderines, ¿cuál es el producto máximo ganador y cómo puedes comprobarlo? Explica tu respuesta. b) Otro grupo, en un concurso similar, en lugar de banderines recolectó kilogramos de arena. La pareja ganadora recolectó 21 kilogramos de arena. ¿Cuál es el producto máximo ganador y cómo puedes comprobarlo? Explica tu respuesta

Este problema creado fue sometido a una triangulación de investigadores cuyos resultados de análisis se muestran en la Tabla 52. Para esta actividad se utilizó el mismo instrumento que en el caso del profesor P11 de nuestra investigación. Asimismo, se muestran los comentarios de los investigadores que valoraron el problema pre creado.

Tabla 52. Resultados de la triangulación de investigadores para el problema creado por la profesora P15

	Puntaje asignado por los investigadores		
Indicador	*Investigador1*[1]	*Investigador2*	*Investigador 3*
La dificultad no es demasiado grande y se percibe que la solución es alcanzable.	3,3	1	2
Favorece intuir un camino para obtener la solución o conjeturar una solución.	2,1	1	1
Favorece hacer algunas verificaciones, eventualmente con ayuda de calculadora o computadora, para mantener o rechazar las conjeturas.	3,3	2	1
Se percibe que es interesante o útil resolver el problema.	3,3	2	0
Favorece establecer conexiones matemáticas, ya sea entre varios temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento.	3,3	2	1
Se percibe claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.)	1,3	1	1
Favorece el uso de relaciones lógicas antes que el uso mecánico de algoritmos.	2,3	2	3
Favorece crear nuevos problemas, haciendo de manera natural algunas variaciones que llevan a situaciones significativas, tanto didáctica como matemáticamente.	3,3	1	1

[1] Este investigador valoró cada apartado del problema (a y b) en forma individual, así la puntuación mostrada se refiere a cada apartado respectivamente.

Comentarios del investigador 1

El investigador optó por valorar cada apartado que presenta el problema (a,b). De esa forma afirma que estos apartados pautan un buen camino para comprender la resolución del problema del episodio de clase.

Comentarios del investigador 2

Este investigador afirma que el enunciado del problema pre es más complicado que el del episodio, ya que involucra muchos cálculos para identificar el patrón que llevará a la solución. Del mismo modo, se trata de un problema que requiere un esfuerzo mayor que el del episodio, por lo tanto no permitirá llegar a la solución del problema del episodio en forma eficiente.

Comentarios del investigador 3

A opinión de este investigador, el problema pre creado no facilita la comprensión del problema del episodio y contribuye poco a obtener una solución correcta de este. Asimismo, afirma que, tal como se muestra el enunciado del problema, este no facilita hacer una conjetura de la solución (como el caso del profesor P11) ni sugiere una estrategia para justificarla. Finalmente, manifiesta que el contexto (extramatemático) del problema no juega ningún papel en la resolución.

De la revisión de los resultados mostrados por los investigadores de la evaluación del problema pre modificado de la profesora P15, podemos afirmar que el nuevo problema creado por la profesora P15 tiene pocas características de un PDB y carece o no se acerca contundentemente a ser un problema pre, ya que por un lado no presenta una estrategia clara para solucionar el PE ni tampoco muestra una forma de justificación. De igual manera, no permite intuir la solución del PE. Por el tipo de problemas y la información poco clara que ofrece, no se puede afirmar que esté más cercano a un PDB.

Comentarios finales para la profesora P15

El problema mostrado en la Figura 40 se caracteriza por ser extramatemático y fue variado tanto en la parte cuantitativa como cualitativa. Este problema posee ciertas deficiencias, observadas al realizar la comparación de la CEPe y la CEPp, y estas fueron percibidas por la profesora P15 al realizar su reflexión sobre la práctica de creación en la Tabla 48. Luego de esta reflexión, la profesora creó un nuevo problema que, en cierta forma, fue elaborado considerando el análisis didáctico realizado y la valoración de su problema pre creado de la Figura 40. Esto implica el manejo de las configuraciones cognitivas de objetos matemáticos y la reflexión didáctica de la docente.

Al considerar el desarrollo de la competencia de análisis didáctico, en especial la competencia de análisis de prácticas y objetos matemáticos como lo propone Rubio (2012), se observa que la profesora P15 desarrolló una reflexión didáctica utilizando sus configuraciones de objetos. Precisamente, en la revisión del cuestionario de salida completado por la profesora P15, se evidencia un buen manejo de la reflexión didáctica, a pesar de que no haya una elaboración completa de sus configuraciones de objetos. Este aspecto puede estar relacionado con la noción de prácticas matemáticas que proponen Godino y Batanero (1994), quienes afirman que la práctica matemática puede manifestarse mediante actuación lingüística o no; así la profesora P15 presenta aspectos de su práctica en sus respuestas. Creemos que la profesora P15 muestra una mejor competencia de análisis didáctico en comparación con el profesor P11. Sin embargo, esta reflexión no le permitió crear un buen problema pre, es decir, se necesita analizar otro componente importante, como la competencia matemática de la profesora, para justificar esta observación.

Si analizamos en forma global las CEPp-CCPe y CEPe-CCPp podemos afirmar que hubo una cierta falta de atención a los objetos matemáticos, especialmente en el entorno matemático, ya que, como se señaló líneas arriba, la profesora P15 no realizó una elaboración adecuada de la situación problema, a pesar de haber detectado la función cuadrática en la CCPe. En su CCPp esta se menciona, pero en el problema pre creado no se muestra fehacientemente. Más todavía, en la modificación de su problema pre, formulado inicialmente, la intención parece ser más clara; sin embargo, es de difícil comprensión y mantiene los rasgos del PE. Por otro lado, como lo mencionó el tercer investigador, si bien el problema es de contexto extramatemático, este no aporta significativamente a la solución del problema pre. Es más, se puede percibir como un pretexto para presentar el mismo problema del PE, o todavía más complicado, como lo señaló el segundo investigador.

Una posible interpretación de las características mostradas por la profesora P15 se muestra en lo manifestado por Godino (2009), quien afirma que no basta con tener la competencia de análisis didáctico, sino también deberá manejarse la competencia matemática. Estas dos competencias, la primera específica del profesor de matemática, se evidencian en cierta forma en la profesora P15. Sin embargo, hay un bajo nivel de la competencia matemática. Esta afirmación la hacemos con base en el resultado obtenido por la profesora P15 en la evaluación diagnóstica del objeto matemático función cuadrática (ver Tabla 21). A diferencia del profesor P11, la profesora mostró una habilidad incipiente, según nuestra taxonomía aplicada. Por ello, se notó un bajo nivel del desempeño en la competencia matemática del objeto función cuadrática.

Como consecuencia de su reflexión sobre la práctica de creación, la profesora P15 modifica el problema de la Figura 40 y propone otro (mostrado en la Tabla 51) cuya valoración fue sometida a una triangulación de investigadores mediante una rúbrica que involucró indicadores de acercamiento a los criterios de idoneidad didáctica del EOS. La elaboración de este problema suscitó el desarrollo de un cuestionario de salida por parte de la profesora P15. En dicho cuestionario manifiesta que las configuraciones se relacionan con el contexto, pero que hay conceptos que no están presentes en ambas configuraciones. También, la profesora reflexiona sobre el uso del gráfico de una parábola, que está implícito en el requerimiento de comprobación. Del mismo modo, manifiesta que los procedimientos en la CCPp son más extensos y que involucran conceptos previos al PE. Por otra parte, reconoce que en el problema creado se han variado algunos objetos con la necesidad de que sea de fácil comprensión, pero que no ha revisado aspectos más formales como las proposiciones y los argumentos.

La reflexión de la profesora P15 es pertinente y coincide con la realizada por el experto. Asimismo, hace evidente que su problema tiene una incipiente formulación y que no explicita el uso de la función cuadrática para su solución. Más aún, no fueron tomados a consideración de forma categórica para la reformulación de su problema pre. Así, recalcamos que este aspecto está estrechamente relacionado con la competencia matemática de la profesora P15, por lo que se puede concluir que una deficiente competencia matemática no permite crear buenos problemas. Ahora bien, esta observación coincide con el estudio realizado por el Banco Mundial (2006) sobre la deficiente preparación académica de los docentes que se ha mantenido en el tiempo y que, a pesar de las diversas actualizaciones que realiza el Ministerio de Educación, no se revierte. Por otro lado, como lo mencionan Tichá y Hospesová (2013), la profesora P15 -al realizar la reflexión didáctica mediante las configuraciones y el análisis de prácticas matemáticas- se introdujo en ello y fue consciente de los diferentes aspectos que involucra un problema.

También, considerando el acercamiento de las bondades del problema a las idoneidades didácticas propuestas por el EOS, bajo la propuesta de Malaspina (2011b), y el estudio de la Tabla 52, podemos afirmar que el problema tiene poco acercamiento a las idoneidades cognitivas, interaccional, mediacional, afectiva y epistémica. Esta apreciación se realiza con base en la opinión de expertos bajo la rúbrica creada para la valoración del problema. Así, estamos de acuerdo en que el problema tiene escasas características de un PDB.

Finalmente, la participante manifiesta que en la estrategia ERPP el episodio marca las pautas de reflexión y brinda información sobre lo que se debe considerar en la formulación del problema. De igual modo, manifiesta que el análisis del problema creado debería realizarse en forma grupal, ya que la opinión de un experto puede permitir detectar situaciones ajenas al proceso de creación y mejorar el problema creado.

CAPÍTULO 5

CONSIDERACIONES FINALES

La población en general odia la matemática. […] nadie dice orgulloso que la matemática no es lo suyo. ¿Por qué? Porque en las escuelas, y en general, le damos respuesta a preguntas que los chicos no hicieron. [..]. Nos cuentan cuentos sobre cosas que no sabemos, nos responden preguntas que no hicimos. […] En la vida primero tenemos problemas, luego buscamos soluciones. En las escuelas, especialmente en matemática, para no decir en general, porque no lo sé, lo hacemos a la inversa: primero les damos soluciones, como una teoría, y luego decimos en qué casos se aplica. Lo que querrían los chicos es jugar un videojuego, o con un robot, o cifrando un mensaje, cosas que tienen que ver con sus preocupaciones diarias, cosas que les pasan. […] Además, lo que pasa en la escuela deja una huella inmensa en nuestras vidas.

Adrián Paenza. *1949*, extractado de la conferencia ante la Unión Matemática Internacional, en ocasión de su designación como ganador del premio *Lilavati* 2014, como mejor divulgador matemático del mundo.[2]

En este capítulo presentamos las conclusiones y recomendaciones a las que hemos llegado a lo largo de la investigación, considerando los objetivos planteados en el Capítulo 1. También explicitamos algunas sugerencias para una próxima investigación relacionada con el presente trabajo, sobre estrategias de creación de problemas didácticamente buenos.

5.1 Conclusiones

Nuestro estudio se inició con la revisión de la literatura relacionada con la creación de problemas, especialmente de las investigaciones sobre estrategias de creación y de aquellas vinculadas con la

[2] Tomado del diario Página 12 (recuperado el 11 de enero de 2016): http://www.pagina12.com.ar/diario/sociedad/3-253678-2014-08-24.html

valoración de los problemas creados. Así, durante la revisión de nuestros antecedentes, nos surgió un interés por estudiar la vinculación de un marco teórico general de la Didáctica de la Matemática con la creación de problemas; como consecuencia, nuestro interés se centró en el desarrollo de una estrategia de creación de problemas que utilice como herramientas de análisis constructos teóricos de la didáctica fundamental para crear problemas con énfasis didáctico. A partir de estas investigaciones y la reflexión sobre las mismas, propusimos nuestros instrumentos correspondientes para la obtención de información necesaria y la estrategia de desarrollo de talleres de creación de problemas sobre funciones. Estos esfuerzos se concretizaron utilizando una metodología de investigación pertinente para nuestros propósitos; a su vez, el análisis de los datos mediante triangulación de investigadores, el análisis semiótico y el análisis del contenido propios de la investigación cualitativa nos permitieron arribar a las siguientes conclusiones:

5.1.1 Respecto al primer objetivo específico

Identificar los conocimientos matemáticos de los profesores sobre la función cuadrática y los objetos matemáticos asociados a ella.

En la preparación del taller de creación de problemas sobre funciones recurrimos a un estudio histórico y epistémico de la función cuadrática para comprender la noción actual de función y elaborar nuestra evaluación diagnóstica. Al analizar los resultados de la evaluación diagnóstica (aplicada en la primera sesión del taller) y la revisión histórica con énfasis epistémico de la función cuadrática, podemos afirmar lo siguiente:

1. El manejo del objeto función cuadrática en la mayoría de participantes del taller se muestra incipiente. Esta afirmación se realiza tomando en cuenta el análisis de los resultados de la evaluación diagnóstica, que se basa en la aplicación de la taxonomía MATH para la evaluación cualitativa de las habilidades que los profesores en servicio presentan respecto al manejo del objeto función cuadrática (ver Tabla 21). Nuestra intención fue iniciar un estudio exploratorio para luego relacionar la calidad de los problemas creados con el manejo de la función cuadrática bajo la taxonomía MATH. Por otro lado, si bien nuestro propósito no fue realizar un estudio de la competencia matemática del profesor propiamente, podemos afirmar que una característica de nuestro trabajo fue la incorporación de dicha taxonomía para el estudio de las habilidades de profesor en servicio, respecto a la función cuadrática.
2. La elaboración y la presentación de un episodio en el marco de la estrategia ERPP contribuyen a identificar conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores de

matemática en servicio. El estudio profundo del objeto función cuadrática desde la perspectiva curricular de educación básica regular y el nivel de formación docente nos permitió proponer un episodio de clase con riqueza desde el punto de vista didáctico y matemático. Precisamente este segundo aspecto está estrechamente relacionado con el problema del episodio que fue elaborado como consecuencia de un análisis de los objetos matemáticos asociados a la función cuadrática. Asimismo, este manejo del objeto función cuadrática nos permitió elaborar las configuraciones epistémicas asociadas a las soluciones del problema del episodio y los problemas creados. En tanto, estamos de acuerdo en que realizar un estudio de los problemas y su solución, utilizando constructos teóricos del EOS, es una actividad muy rica que permite realizar un análisis didáctico más profundo de los objetos asociados a este problema. Sin embargo, debemos afirmar que una buena elaboración de estos constructos, en particular las configuraciones de objetos y la reflexión sobre la práctica matemática, implica un buen manejo del objeto por parte del profesor.

5.1.2 Respecto al segundo objetivo específico

Analizar e identificar las prácticas matemáticas, configuraciones epistémicas y cognitivas asociadas a la resolución y creación de problemas sobre funciones cuadráticas por variación de un problema dado.

Luego del desarrollo de la segunda sesión, los participantes del taller de creación de problemas fueron sometidos a la experiencia de creación de problemas con énfasis didáctico. Para este propósito, se aplicó una estrategia de creación de problemas por variación para la creación de problemas pre, tal como se comentó en el Capítulo 4; estos debían ayudar a la solución y la comprensión de un problema previamente ubicado en un contexto de clase. Los problemas creados por los participantes fueron producto de la aplicación de las nociones del análisis didáctico, por lo que estos fueron categorizados en la Tabla 39. Como nuestra investigación utiliza el método cualitativo del tipo estudio de casos, seleccionamos nuestros sujetos de investigación apoyándonos en una triangulación de expertos, por lo que nuestro estudio se enfocó en dos profesores en servicio de educación secundaria, cuyos problemas creados fueron sometidos también a una triangulación de investigadores para su valoración utilizando una rúbrica propuesta para esta fase de la investigación, considerando indicadores para un PDB. Por lo anterior, podemos afirmar lo siguiente:

1. Del análisis cualitativo de las soluciones del PE que forma parte del episodio de clase (Tabla 38), podemos concluir que un gran número de los participantes muestra una baja calidad de competencia matemática, especialmente en la práctica de resolución de problemas utilizando diversas estrategias, a pesar de que estos profesores manifestaron tener más de cinco años de experiencia de servicio docente (Tabla 19). En algunos casos, las soluciones planteadas muestran un manejo parcial del objeto, tal como se muestra en la Tabla 30; esta observación se relaciona con el resultado mostrado en la evaluación diagnóstica (Tabla 21).
2. La dificultad en la resolución del PE está muy relacionada con elaboraciones incipientes de las configuraciones cognitivas y con reflexiones poco profundas o enriquecedoras sobre la práctica matemática tanto de solución como de creación. En el primer caso, las configuraciones cognitivas de solución del PE elaboradas fueron de menor calidad que en las desarrolladas en la sesión de introducción a la elaboración de configuraciones (ver Tabla 23 y Tabla 31). Esta baja calidad influye en reflexiones poco profundas para el caso de funciones cuadráticas, pues la reflexión didáctica se tenía que hacer utilizando las configuraciones cognitivas previamente elaboradas (ver Tabla 38) en torno al problema del episodio.
3. Respecto a los problemas creados como consecuencia de la aplicación de las nociones de análisis didáctico, creemos que los profesores sí poseen una capacidad de crear problemas; sin embargo, la competencia de análisis didáctico se muestra en forma parcial en la mayoría de los participantes (ver Tabla 31). Este hecho se refleja también en el tipo de problemas creados, como se muestra en la Tabla 39. Algunos problemas, que deberían ser problemas pre, fueron más retadores que el problema del episodio, con modificaciones cualitativas y cuantitativas o solo con modificación cuantitativa. Cabe mencionar que si bien es cierto que algunos problemas tienen una formulación endeble, desde el punto de vista gramatical o de redacción, creemos que este análisis invita a una propuesta de investigación que para nuestros propósitos no fue tan relevante.
4. La experiencia desarrollada nos muestra que la estrategia ERPP será más eficiente cuando la competencia matemática de los profesores sea más alta (como se muestra en los apartados 4.4.2, 4.4.3, 4.4.5 y 4.4.6). Más aún, consideramos que los buenos resolutores de problemas, estimulados con la estrategia ERPP, muestran mejores

condiciones para ser buenos creadores de problemas, especialmente de problemas didácticamente buenos.

5. Existen indicios acerca de las relaciones existentes entre la competencia de análisis didáctico, la competencia matemática y la competencia de creación de problemas. En nuestro caso, el profesor P11 mostró una mejor competencia matemática que la profesora P15 y no tanto respecto a la competencia de análisis didáctico. Esta afirmación se realiza luego del análisis de la evaluación diagnóstica (Tabla 21), la solución del problema del episodio (Tabla 30), el análisis de prácticas matemáticas de creación (Tabla 41, Tabla 48) y el cuestionario de salida (Anexo E.5 y Anexo E.6). Asimismo, la valoración de los problemas creados, realizada mediante triangulación de investigadores (Tabla 46, Tabla 52), muestra algunas bondades desde el punto de vista didáctico para el problema creado por el profesor P11. De ahí que creemos que un buen creador de problemas didácticamente buenos deberá poseer tanto una buena competencia de análisis didáctico como una buena competencia matemática.
6. La estrategia ERPP contribuye a que los profesores creen problemas no solamente en el marco de los conocimientos matemáticos, sino en una perspectiva didáctica que facilite la resolución de otros, como se muestra en el estudio de los profesores P11 y P15 para nuestra investigación.

5.1.3 Respecto al tercer objetivo específico

Explicitar la vinculación de la calidad de los problemas creados con los criterios de idoneidad didáctica.

Los problemas pre, creados por los profesores en servicio de la muestra, fueron sometidos a una evaluación por ellos mismos con base en una rúbrica que considera indicadores de un PDB. Así, luego de la reflexión didáctica, los profesores miembros de nuestro caso de estudio modificaron su problema pre tomando en cuenta sus configuraciones cognitivas y el análisis de prácticas matemáticas. Estos problemas fueron sometidos a evaluación y análisis mediante una triangulación de expertos. En esta última valoración se usó criterios considerados para un PDB como indicadores de evaluación mediante una rúbrica. Los resultados obtenidos nos han permitido concluir lo siguiente:

1. El uso de una rúbrica para valorar los problemas creados se muestra importante y pertinente, de tal forma que colabora con la toma de decisiones para la reflexión

didáctica antes o después de la creación de un problema. Como se evidencia en nuestros sujetos de investigación, el profesor P11 realizó una mejor modificación de su problema pre creado para acercarlo más a un PDB. Mientras que la profesora P15, si bien es cierto se percata de las debilidades de su problema pre, en su modificación no logra plasmar estas reflexiones y su nuevo problema no se acerca a un PDB. Podemos afirmar, basados en los análisis de datos tanto del cuestionario de salida como la reflexión sobre la práctica de creación y la evaluación diagnóstica, que esta reflexión basada en los criterios de un PDB es más enriquecedora y profunda si se tiene una buena competencia matemática.

2. Si bien es cierto que los criterios de idoneidad didáctica propuesta por el EOS se aplican a procesos de instrucción, creemos que su acercamiento mediante indicadores en una rúbrica de valoración de la calidad didáctica de un problema es un aporte importante para el campo de la creación de problemas. Estos indicadores relacionan aspectos de análisis que involucran las seis idoneidades didácticas (epistémica, cognitiva, ecológica, afectiva, interaccional y mediacional) y han permitido el análisis y la evaluación de los problemas creados por los tres investigadores expertos. En los dos casos analizados para esta investigación, destacamos que se enfatiza en las idoneidades epistémicas, cognitivas y afectivas, dejando de lado o prestando poca atención a las idoneidades ecológica, interaccional y mediacional (Tabla 46 y Tabla 52). Así, destacamos que este tipo de acercamiento a las idoneidades didácticas podría aportar información sobre los problemas que se creen y tomar decisiones para su reformulación.

5.1.4 Respecto al objetivo general

En el capítulo I señalamos que el objetivo general de nuestra tesis es:

Integrar nociones del análisis didáctico a una estrategia de creación de problemas para la invención de problemas didácticamente buenos por profesores en servicio, en el entorno de las funciones cuadráticas.

Con el fundamento otorgado por las respuestas a los tres objetivos específicos podemos concluir que:

1. La descripción hecha en el Capítulo 4 nos permite afirmar que se ha cumplido con este objetivo, ya que los profesores en servicio crearon problemas sobre funciones cuadráticas, con énfasis didáctico, utilizando una estrategia de creación. Este proceso

de creación consideró una faceta de reflexión didáctica que junto al acoplamiento de la noción de configuración de objetos y su acercamiento a los criterios de idoneidad didáctica propuesta por el EOS permitió reflexionar sobre la práctica matemática de resolución y creación. Esta afirmación se realiza con base en el estudio de los problemas creados y la triangulación de expertos para la valoración de estos.

2. Creemos que hay evidencia (mostrada en el objetivo 2) para afirmar que la estrategia Episodio, Reflexión didáctica, Problema pre, Problema pos (ERPP) tiene bondades para la creación de problemas con énfasis didáctico, en particular problemas pre con carácter didáctico. Así, deberá seguir afinándose, puesto que es una propuesta interesante y que guarda relación con los últimos avances en el campo de la Didáctica de la Matemática, específicamente dentro del rubro de la creación de problemas.
3. De los objetivos 2 y 3 tenemos indicios de que las nociones del análisis didáctico adaptados en esta investigación han permitido profundizar en el proceso de creación de problemas, especialmente en los objetos matemáticos y el análisis de las prácticas matemáticas para tomar decisiones de índole didáctica y crear problemas didácticamente buenos. Así, basándose en los cuestionarios de reflexión sobre las prácticas matemáticas de solución y creación (mostrados en el Anexo D), los profesores manifestaron una competencia de análisis didáctico en diferente medida, la que creemos influyó, junto con la competencia matemática, en la invención de sus problemas.

5.2 Sugerencias para próximas investigaciones

A continuación mostramos algunas sugerencias para próximas investigaciones:

- Realizar los ajustes necesarios a la propuesta de creación de problemas y estudiar otros aspectos relacionados con el proceso de creación, como el estudio de los procesos que emergen al crear problemas.
- Un aspecto poco estudiado se relaciona con la metacognición y la creación de problemas; creemos que la faceta de reflexión didáctica en la estrategia ERPP puede concatenar muy bien con posturas de investigación de este tipo.
- Aplicar la estrategia ERPP realizando los ajustes necesarios, con un nuevo grupo de profesores en formación y con la certeza de que se tenga etapas pre y pos de creación de problemas por variación, enfatizando en la trayectoria didáctica de socialización de experiencias para enriquecer el taller de creación de problemas.

- Una visión amplia desde el punto de vista histórico nos puede permitir apoyarnos en los problemas formulados a lo largo de la historia de la matemática para, previa variación con énfasis didáctico, incluirlos en las clases de matemática y utilizarlos como referentes para reflexiones didácticas.
- La rúbrica utilizada para caracterizar a los buenos problemas desde el punto de vista didáctico se muestra como un instrumento útil que puede ser afinado para contribuir a la formación de futuros profesores de matemática. Es más, la propuesta de que se creen problemas didácticamente buenos es de suma importancia para la adquisición de una competencia de análisis de prácticas, objetos y procesos que es a su vez componente de otra competencia mayor: en términos del EOS, competencia de análisis didáctico.

5.3 Recomendaciones para próximas investigaciones

Teniendo en cuenta las experiencias desarrolladas en esta investigación, formulamos las siguientes recomendaciones:

- El desarrollo de la segunda sesión del taller de creación de problemas involucró la introducción de los profesores en servicio en el análisis de sus prácticas matemáticas. Esta etapa del taller emerge como consecuencia del análisis de los resultados del desarrollo de un taller piloto sobre creación de problemas (ver Capítulo 4) y la reflexión sobre la estrategia EPP para la creación de problemas. La inclusión de una etapa de introducción en las nociones del análisis didáctico dentro de nuestro trabajo de taller nos permitió concluir lo siguiente:

- El trabajo con profesores en servicio mediante talleres de creación de problemas deberá prever más sesiones de trabajo para que los participantes estén mejor familiarizados con las nociones del análisis didáctico propuestas por el EOS, en particular con la elaboración de configuraciones de objetos y el análisis de la práctica matemática. Esta conclusión se basa en el análisis de los resultados obtenidos en el estudio de las configuraciones cognitivas de sus soluciones del problema del episodio (ver Tabla 23) y sus reflexiones acerca de su práctica en las soluciones del problema del episodio sobre función lineal, desarrollada en la segunda sesión.

- Es importante brindar pautas más claras para la introducción a los profesores en servicio en el manejo de los constructos teóricos del EOS. Como se muestra en el estudio de las configuraciones cognitivas de solución realizadas en la segunda sesión del taller (ver

Tabla 23, Tabla 24, Tabla 25, Tabla 26, Tabla 27, Tabla 28, Tabla 29), los profesores realizaron una mejor elaboración frente a las mostradas en la tercera sesión (ver Tabla 31, Tabla 32, Tabla 33, Tabla 34, Tabla 35, Tabla 36, Tabla 37, Tabla 38). Creemos que este resultado es consecuencia del acceso a un documento previamente elaborado sobre la configuración epistémica del problema del episodio en la segunda sesión, situación que no sucedió en la tercera sesión. Así, algunos participantes del taller mostraron objetos mejor elaborados, pero esto no se mostró en la sesión misma de la creación de problemas (tercera sesión).

- Respecto a las consideraciones de un PDB, afirmamos que estas deben ser explicadas con detalle a los participantes de un taller de creación de problemas. Se debe enfatizar en que se ubiquen en el episodio de clase y centrarse en los elementos de la situación problema, así como en los seis objetos matemáticos componentes de una configuración de objetos según el EOS.
- La creación de problemas debe ser tomada en cuenta en el currículo de formación de profesores, en el que la estrategia ERPP puede tener un papel central.
- El manejo del taller de creación de problemas debe estar a cargo de una persona con competencia matemática y competencia didáctica. Así, en el desarrollo de la segunda sesión del taller, el trabajo del encargado resultó muy importante, puesto que fue guiando a los profesores en servicio y esto sirvió de apoyo para motivarlos y persistir en la asistencia al taller.
- Consideramos que la estrategia ERPP deberá contar con una aplicación más extensa desde el punto de vista temporal. El proceso de creación de un problema toma su tiempo y sería conveniente desarrollar las sesiones en un curso formativo en el manejo de la estrategia ERPP.
- Es importante señalar que se debe incluir una fase de reflexión grupal en el proceso de creación de problemas. Tenemos indicios de que esta fase podría ayudar a la formulación de mejores problemas didácticamente buenos, tal como lo proponen Tichá y Hošpesová (2013).

REFERENCIAS

Abu-Elwan, R. (1999). The development of mathematical problem posing skills for prospective middle school teachers. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International conference on Mathematical Education into the 21st Century: Social Challenges, Issues and Approaches*, *II*, pp. 1-8. Cairo, Egypt.

Armella, L. M., & Santos-Trigo, M. (2013, Enero). Introduction to International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1), 3-8.

Banco Mundial. (2006). *Por una educación de calidad para el Perú. Estándares, rendición de cuentas y fortalecimiento de capacidades.* Banco Mundial.

Bashmakova, I. G., & Smirnova, G. S. (2000). *The beginnings and evolution of algebra.* The Mathematical Association of America.

Bloom, B. S., & Krathwohl, D. R. (1984). *Taxonomy of educational objectives book 1: Cognitive domain.* Addison Wesley Publishing Company.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 37-55.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1990). *The art of problem posing* (2nd ed.). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Bryman, A. (2012). *Social research methods.* Oxford University Press.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 401-421.

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students learning. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 57-69.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C, & Silber, S. (2015). Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. En Singer, F. M., Ellerton, N. F., & Cai, J. (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice*. New York, NY: Springer.

Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics, 58*(1), 45-75.

Carranza, C., & Malaspina, U. (2015). Perú: A Look at the History of Mathematics and Mathematics Education. En H. Rosario, P. Scott, & B. Vogeli (Eds.), *Mathematics and its Teaching in the Southern Americas* (pp. 363–380). N.J.: World Scientific Pub. Co.

Cha, I. (1999). Mathematical and pedagogical discussions of the function concept. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, *3*(1), 35 – 46.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, *37*(3), 149-158.

Connelly, J. (2012). Mathematical competitions in Hungary: promoting a tradition of excellence \& creativity. *The Mathematics Enthusiast*, *9*(1/2), 37-58.

Consejo Nacional de Educación. (2007). *Hacia un proyecto educativo nacional 2006-2021*. Lima. Recuperado de http://www.cne.gob.pe/index.php/Proyecto-Educativo-Nacional/proyecto-educativo-nacional-al-2021.html

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 243-270.

Crespo, S. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(5), 395-415.

D'amore, B., & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *RELIME: Revista lationamericana de investigación en matemática educativa*, *10*(2), 191-218.

Dunker, K. (1945). On problem solving. *Psychological Monographs*, *58*(5), i-113.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berne, CH, Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Einstein, A., & Infeld, L. (1938). *The evolution of physics*. New York: Simon & Schuster.

Ellerton, N. F. (1986). Children's Made-Up Mathematics Problems: A New Perspective on Talented Mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3), pp. 261-271.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), pp. 87-101.

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 183-217.

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 83-106.

English, L. D. (2003). Problem posing in the elementary curriculum. En F. Lester & R. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving* (pp. 187–198). Reston, Virgina: National Council of Teachers of Mathematics.

Ferreres, S., & Vanegas, Y. (2015). Uso de criterios de calidad en la reflexión sobre la práctica de los futuros profesores de secundaria de matemáticas. *Procedia-Social and Behavioral Sciences* (196), 219-225.

Flores, J. V., & Gaita, C. (2014). Situación actual de la Educación Matemática. en el Perú. *Revista de matemática, ensino e cultura, 9*(15), 82-95. Recuperado de http://www.rematec.net.br/index.php/inicio/issue/current

Fong, W. L., & Berinderjeet, K. (2015). A Study of Mathematics Written Assessment in Singapore Secondary Schools. *The Mathematics Educator, 16*(1), 1-26.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral no publicada. Barcelona: Universitat de Barcelona. http://www.tesisenxarxa.net/TDX-0408108-104902/

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de texto matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educao Matematica Pesquisa, 8*(1), 67-68.

Font, V., Godino, J. D. & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82, 97–124.*

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didático en educación matemática. *Infancia y aprendizaje*. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Font, V., J., Vanegas, Y., Ferreres, S., Carvajal, S, y Adán, M. (2012). Funciones. En V. Font, J. Giménez, V. Larios y J. F. Zorrilla (Eds.). *Competencias del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato* (133-210). Publicaciones de la Universitat de Barcelona: Barcelona, España

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Springer Science & Business Media.

Giménez, J., Font, V., & Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study, 22*, 581-590.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22* (2-3), 237-284. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión: Revista iberoamericana de educación matemática* (20), 13-31.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* (Vol. 7, pp. 111–132). Costa Rica: Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Universidad de Costa Rica.

Godino, J. D. (2015). Articulación de teorías en educación matemática desde la perspectiva ontosemiótica. En N. Planas (Ed.), *Avances y realidades de la educación matemática* (pp.189–206). Barcelona, España: Editorial GRAÓ.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for research in mathematics education. In *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Springer.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontesemiótico de la cognición e instrucción matemática. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 39*, 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27* (2), 221-252.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. (2007). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada*. Retrieved from http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontesemiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(76), 39-45.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A., & Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontesemiótico de la cognición e instrucció matemática. *RELIME: Revista lationamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 117-115.

Gonzales, N. A. (1994, Febrero). Problem Posing: A Neglected Component in Mathematics Courses for Prospective Elementary and Middle School Teachers. *School Science and Mathematics, 94*(2), 78-84.

Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático.* Espasa Calpe Argentina.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly, 87*(7), 519-524.

Harel, G., Koichu, B., & Manaster, A. (2006). Algebra teachers ways of thinking characterizing the mental act of problem posing. En J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 241–248). Prague, Czech Republic: Charles University.

Harpen, X. Y., & Presmeg, N. C. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 117-132.

Higueras, L. R. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto.* México: Pearson Educación.

Holton, G. J., & Brush, S. G. (2001). *Physics, the human adventure: from Copernicus to Einstein and beyond*. Rutgers University Press.

Isik, C., Kar, T., Yalcín, T., & Zehir, K. (2011). Prospective teachers skills in problem posing with regard to different problem posing models. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 15*, 485-489.

Irving, R. (2013). *Beyond the Quadratic Formula* (1.ª ed.). Mathematical Association of America.

Kar, T., Ozdemir, E., Ipek, A., & Albayrak, M. (2010). The relation between the problem posing and problem solving skills of prospective elementary mathematics teachers. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 2*(2), 1577-1583.

Karp, A., & Schubring, G. (2014). *Handbook on the history of mathematics education*. Springer.

Kaur, B., Yeap, B. H., & Kapur, M. (2009). *Mathematical Problem Solving: Yearbook.* World Scientific.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from?. *Cognitive science and mathematics education*, 123-147.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3–38). New York: MacMillan.

Kleiner, I. (2012). *Excursions in the History of Mathematics: the State Space Method* (Vol. 178). Springer Science & Business Media.

Kline, M. (1976). *Por qué Juanito no sabe sumar. El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI.

Kline, M. (1990a). *Mathematical thought from ancient to modern times* (Vol. 3). Oxford University Press.

Kline, M. (1990b). *Mathematical thought from ancient to modern times* (Vol. 1). Oxford University Press.

Kline, M. (1990c). *Mathematical thought from ancient to modern times* (Vol. 2). Oxford University Press.

Koichu, B., & Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: a case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 71-86.

Kontorovich, I. (2009). Essential aspects for inclusion in future consolidated problem posing frameworks. *Proceeding of the sixth International Conference on Excellent in Academia.* Retrieved from http://edu.technion.ac.il/personal_files/1531380050705.pdf

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 149-161.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* University of Chicago Press.

Lages, E., Pinto, P., Wagner, E., & Morgado, A. (2000). *La matemática de la enseñanza media* (Vol. 1). (R. Benazic, C. Camacho, F. Escalante, & R. Metzger, Eds.) Instituto de Matemática y Ciencias Afines (IMCA).

Latorre, A., Rincón, D., & Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Barcelona : GR92.

Lavy, I., & Bershadsky, I. (2003). Problem posing via what if not? Strategy in solid geometry-A case of study. *The Journal Mathematical Behavior, 22*(4), 369-387.

Leung, S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), pp. 103-116.

Leung, S., & Silver, E. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *9*(1), 5-24.

Lin, K. M., & Leng, L. W. (2008). Using problem-posing as an assessment tool. *10th Asia-Pacific Conference on Giftedness, Singapore*, 1-15. Recuperado de http://hkage.org.hk/en/events/080714_10th_APCG.htm

Lowrie, T. (2002). Young children posing problems: the influence of teacher intervention on the type of problems children pose. *Mathematics Education Research Journal*, *14*(2), 87-98.

McKnight, Curtis C. (Eds.) (2000) *Mathematics education research: a guide for the research mathematician*. Providence, R.I.: American Mathematical Society

Malaspina, U. (2011a). *Intuición y resolución de problemas de optimización. Un análisis ontosemiótico y propuestas para la educación básica.* Alemania: Lap Lambert Academic Publishing GMBH & Co. KG-Editorial Académica Española.

Malaspina, U. (2011b). Resolución de problemas y estímulo del pensamiento optimizador en la educación básica. En *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* (Vol. 7, pp. 165–181). Costa Rica: Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Universidad de Costa Rica.

Malaspina, U. (2013a). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* Montevideo. Retrieved from http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/729.pdf

Malaspina, U. (2013b). La enseñanza de las matemáticas y el estímulo a la creatividad. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 63,* 41-49.

Malaspina, U. (2014a). El rincón de los problemas: flexibilidad, originalidad y fluidez en la variación de problemas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática* (39), 135-140.

Malaspina, U. (2014b). Papiroflexia y elementos para construir indicadores sobre creación de problemas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática* (38), 135-141.

Malaspina, U. (2014c). Papiroflexia y elementos para construir indicadores sobre creación de problemas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática* (38), 135–141.

Malaspina, U. (2015a, Mayo). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM).*

Malaspina, U. (2015b). El rincón de los problemas: La función cuadrática. Una experiencia didáctica en la perspectiva de la creación de problemas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*(41), 136-141.

Malaspina, U., Mallart, A. & Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. In Krainer, K., & Vondrová, N. (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9),* (pp. 2861-2866). Prague, Czech Republic: ERME

Malaspina, U., Rubio, N. & Torres, C. (En prensa). A proposal to stimulate in-service teachers' competence in didactic analysis by problem posing. *Artículo aceptado para su presentación en el 13th Internacional Congress on Mathematical Education (ICME 13).* Hamburg, 24-31, July 2016.

Malaspina, U., & Vallejo, E. (2014). Creación de Problemas en la Docencia e Investigación. En *Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática* (pp. 7–54). Lima, Perú: Editorial Moshera S.R.L.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa: síntesis conceptual. *Revista de investigación en psicología, 9*(1), 123-146.

Merriam, S. (1998). *Qualitative research and case study applications in education.* San Francisco: Josey-Bass.

Mesa, Y. M. (2008). *El concepto de función cuadrática:Un análisis de su desarrollo histórico.* Tesis de grado para optar por el título de licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas., Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Recuperado de http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/939/1/doc.pdf

Núñez, J. & Font, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas: una aproximación histórica. Revista de Educación, 306, 295-314.

Ojeda, D. E. (2013). Matemática 3er año. Lima, Perú: Editorial Corefo.

Perú, Ministerio de Educación. (2009). *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular.*

Perú, Ministerio de Educación. (2013). PISA 2012: Primeros resultados. Informe nacional del Perú, *Unidad de Medición de la Calidad (UMC).*

Perú, Ministerio de Educación. (2014). *Mapas de Progreso de Matemática.* Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formaciondeformadores/?p=446

Perú, Ministerio de Educación. (2015). *Rutas de Aprendizaje.* Recuperado de http://recursos.perueduca.pe/rutas/secundaria.php

National Council of Teacher of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* National Council of Teacher of Mathematics.

Olson, J. C., & Knott, L. (2013). When a problem is more than a teacher's question. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 27-36.

Pérez, G. (2001). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes: I Métodos.* Editorial La Muralla SA.

Pérez, G. (1998). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes: II Técnicas y análisis de datos.* Editorial La Muralla SA.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning.* Oxford University Press.

Polya, G. (1975). Como resolver y plantear problemas. *Trillas, Mexico*.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3*(2).

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educacao matemática. *Bolema, 19*(25), 105-132.

Ponte, J. P., & Henriques, A. (2013). Problem posing based on investigation activities by university students. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 145-156.

Ramos, A. B., & Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *RELIME: Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11*(2), 233-265.

Rubio, N. (2012). *Competencias del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos.* Tesis doctoral no publicada, Universtitat de Barcelona, España.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Salazar, L. (2014). Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto de matemática. *Paradígma, 35(1)*, 55-77.

Sánchez, C., & Valdés, C. (2007). *Las funciones: Un paseo por su historia.* Editorial Nivola.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* NY: Academic Press, Inc.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370.

Sengül, S., & Katranci, Y. (2012). Problem solving and problem posing skills of prospective mathematics teachers about the sets subject. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 69*, 1650-1655.

Sengül, S., & Katranci, Y. (2014). Structured Problem Posing Cases of Prospective Mathematics Teachers: Experiencies and suggestions. *International Journal on New Trends in Education and Their Implications, 5*(4), 190-204. Recuperado de http://www.ijonte.org/FileUpload/ks63207/File/17..sengul.pdf

Sharma, S. (2013). Qualitative Approaches in Mathematics Education Research: Challenges and Possible Solutions. *Education Journal, 2*(2), 50-57.

Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, 19-28.

Silver, E. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 157-162.

Silver, E. A., Mamona, J., Leung, S., & Kenney, P. A. (1996). Posing Mathematical Problems: An Exploratory Study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 293-309.

Silver, E., & Cai, J. (1993). Mathematical problem posing and problem solving by middle school students. *Annual meeting of the American Educational Research Association, Atlanta, GA.*

Silver, E., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 521-539.

Silver, E., & Cai, J. (2005). Assessing Students Mathematical Problem Posing. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 129.

Silver, E., & Mamona, J. (1989). Problem posing by middle school teachers. *Proceedings of the eleventh annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 263-264.

Silver, E., Kilpatrick, J., & Schlesinger, B. (1990). Thinking through Mathematics: Fostering Inquiry and Communication in Mathematics Classrooms. *New York: College Entrance Examination Board*.

Silver, E., Mamona, J., Leung, S., & Kenney, P. (1996). Posing mathematical problems: an exploratory study. *Journal for research in mathematics education, 27*(3), 293-309.

Singer, F., & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Education Studies in Mathematics, 83*(1), 9-26.

Singer, F., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem posing research in mathematics education: New questions and Directions. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 1-7.

Singer, F., Ellerton, N., Cai, J., & Leung, E. (2011). Problem posing in mathematics learning and teaching: A research agenda. En B. Ubuz (Ed.), *Developing mathematical thinking. Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 137–166). Ankara, Turkey: PME.

Smith, G., Wood, L., Coupland, M., Stephenson, B., Crawford, K., & Ball, G. (1996). Constructing mathematical examinations to assess a range of knowledge and skills. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *27*(1), 65-77.

Schmid, A. &Weidig, I. (2002a). Matemática para todos 2: secundaria (Versión traducida y adaptada al español por el Instituo APOYO). Stuttgart, Alemania: Klett.

Schmid, A. &Weidig, I. (2002b). Matemática para todos 3: secundaria (Versión traducida y adaptada al español por el Instituo APOYO). Stuttgart, Alemania: Klett.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing inmathematics classrooms. En A.McIntosh & N. Ellerton (Eds.), *Research in mathematics education: a contemporary perspective* (pp. 164–185). Edith Cowan University:MASTEC.

Swetz, F. J. (2013). *Expediciones matemáticas: La aventura de los problemas matemáticos a través de la Historia*. Madrid: La Esfera de los Libros.

Tichá, M., & Hospesová, A. (2009). Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training. *Paper presented at the meeting of CERME 6, Lyon*.

Tichá, M., & Hospesová, A. (2013). Developing teachers subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 133-143.

Toluk-Ucar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education, 25*(1), 166-175.

Torres, C. (2014). Desafíos matemáticos como motivación al aprendizaje. En *VII Coloquio Internacional sobre Enseñanza de la Matemática: Matemática en contexto* (pp. 601–612). Lima, Perú: Pontifica Universidad Católica del Perú.

Van Harpen, I. Y., & Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: an analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 201-221.

Wong, K. Y. (2009). *Mathematics education: the Singapore journey* (Vol. 2). World Scientific.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods* (Second ed.). Thousand Oaks, CA: Sage publications.

Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, *16*(1), pp. 37-85.

Yuan, X., & Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem-posing abilities. *The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics*, 5-28.

ANEXOS

ANEXOS A: DEL TALLER DE CREACIÓN DE PROBLEMAS SOBRE FUNCIONES CUADRÁTICAS

ANEXOS A.1:

Planificación de las sesiones para el taller sobre creación de problemas

Resumen de sesiones y actividades de taller de creación de problemas				
Día 1	Sesión 1	**Instrumentos**	**Actividades propuestas**	
			Nombre de la actividad	**Propósito de la actividad**
		Prueba exploratoria escrita	Evaluación diagnóstica (ED)	Evaluar los conocimientos matemáticos sobre el objeto función, función afín y función cuadrática de los participantes, para la selección de la muestra
		Hoja de recojo de información complementaria	Cuestionario para caracterizar la muestra	Seleccionar a los sujetos de investigación
		Consigna de solución de un problema / Protocolo de prácticas matemáticas de solución	Resolución de algunos problemas de la evaluación diagnóstica / Análisis de la CE	• Introducción a la creación de problemas por variación, enfatizando en los *problemas pre* y los elementos de un problema: información, requerimiento, contexto y entorno matemático. • Presentación de una solución experta respecto a un problema de función lineal afín y la discusión de su configuración epistémica (CE) asociada.
Día 2	Sesión 2	Instrumentos	**Actividades propuestas**	
			Nombre de la actividad	**Propósito de la actividad**
		Consigna de solución de un problema	Elaboración de CC	Los participantes elaboran la configuración cognitiva (CC) relacionada a un problema resuelto en la ED.
		Protocolo de prácticas matemáticas de solución	Prácticas matemáticas de solución	Análisis de las prácticas matemáticas de solución de un problema de la ED. Discusión y reflexión sobre la práctica de solución, enfatizando la vinculación con las CC elaboradas.
Día 3	Sesión 3	Instrumentos	**Actividades propuestas**	
			Nombre de la actividad	**Propósito de la actividad**
		Hoja informativa	Estrategia ERPP	Presentación de la estrategia episodio, reflexión sobre la práctica matemática y elaboración de configuraciones cognitivas, problema pre, problema pos (ERPP)

		Hoja de aplicación (Individual)	Episodio de la función cuadrática (PE)	• Presentación del episodio sobre la función cuadrática. • Resolución del problema del episodio. • Elaboración de la CCPe asociada a la solución del problema del episodio.
		Protocolo de prácticas matemáticas de solución	Prácticas matemáticas de solución	• Análisis de las prácticas matemáticas de solución del problema PE. • Discusión y reflexión sobre la práctica de solución, enfatizando la vinculación con la CCPe elaborada.
		Hoja de aplicación (individual)	Problema pre: Creación de *problemas pre* por variación	• Creación de *problemas pre* por variación respecto al problema del episodio. • Solución del *problema pre* creado por variación. • Elaboración de las CCPp de la solución del *problema pre.*
		Protocolo de prácticas matemáticas de solución	Problema pre: Creación de *problemas pre* por variación	• Creación de *problemas pre* por variación respecto al problema del episodio. • Solución del problema pre creado por variación. • Elaboración de las CCPp de la solución del *problema pre.*
		Protocolo de prácticas matemáticas de solución	Prácticas matemáticas de creación	• Análisis de las prácticas matemáticas de creación sobre el problema pre. • Discusión y reflexión sobre la práctica de creación, enfatizando la vinculación con las CCPe y CCPp elaborada.
Día 4	Sesión 4	Instrumentos	**Actividades propuestas**	
			Nombre de la actividad	Propósito de la actividad
		Hoja informativa	Problema Didácticamente Bueno (PDB)	Discusión sobre los criterios considerados en el PDB y su conexión con los criterios de idoneidad didáctica del EOS.
		Hoja de rúbrica de valoración de los problemas creados (Individual)	Valoración de problemas desde el punto de vista didáctico	Aplicación de la rúbrica a los problemas creados del episodio.

ANEXOS A.2

Sílabo del taller sobre creación de problemas

SÍLABO

I. DATOS GENERALES

Curso - taller	:	**Creación de problemas de matemáticas para la enseñanza y aprendizaje de funciones en la educación secundaria**
Duración	:	8 horas
Carácter	:	Teórico-práctico
Docente especialista	:	**Dr. Uldarico Malaspina Jurado** Profesor Principal del Departamento de Ciencias-Matemáticas, de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Docente de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Autor y coautor de publicaciones sobre educación matemática. Expositor en eventos nacionales e internacionales sobre educación matemática.
Área	:	Currículo y didáctica
Fecha de inicio y término	:	Del 10, 11, 12 y 13 de noviembre de 2015
Horario	:	• Martes 10, miércoles 11, jueves 12 y viernes 13: de 18:00 a 20:00 horas
Modalidad	:	Presencial

II. FUNDAMENTACIÓN

El aprendizaje de las matemáticas está estrechamente vinculado a la resolución de problemas y ésta última a la creación de problemas. Es fundamental que los profesores no solamente conozcan técnicas de resolución de problemas sino que tomen conciencia del importante rol que juegan ambas (creación y resolución) en el aprendizaje, en el desarrollo del pensamiento matemático y en el estimulo de la creatividad.

El curso taller, se enfocará en las funciones lineal, afín y cuadrática. Este enfoque se sustentará en estrategias de creación de problemas y en el análisis didáctico como herramienta para mejorar la práctica docente del profesor de matemática. Los temas matemáticos serán desarrollados siguiendo una estrategia basada en la creación de *problemas-pre* y *problemas-pos* en el marco de episodios en clase relacionados con estos temas. Se incluirá una fase de reflexión didáctica con herramientas del *enfoque onto-semiótico de la educación matemática* (EOS), para estimular la competencia de análisis didáctico mediante la creación de problemas.

III. OBJETIVOS

Objetivos generales:

- Promover la creación de problemas como una ventana de oportunidades para mejorar el aprendizaje y enseñanza de la matemática.
- Desarrollar la competencia de análisis didáctico de los profesores mediante la creación de problemas sobre funciones, que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas en la educación básica.

Objetivos específicos:

- Introducir a los profesores en servicio en el análisis de sus prácticas matemáticas y objetos matemáticos relacionados a los problemas matemáticos.
- Analizar e identificar las prácticas matemáticas asociadas a la resolución y creación de problemas.
- Explicitar la vinculación de la calidad de los problemas creados con los criterios de idoneidad didáctica.

IV. CONTENIDOS

1: Elementos básicos para la creación de problemas de matemáticas y para el análisis didáctico

1.1 Introducción a la creación de problemas sobre funciones afines por variación.
1.2 Presentación de una solución experta de un problema.
1.3 Caracterización de los elementos de un problema matemático.
1.4 Presentación de la configuración epistémica de la solución experta del problema examinado.

2: Elaboración de configuraciones cognitivas mediante el análisis de la solución de un problema dado

2.1 Descripción de los objetos matemáticos emergentes en la resolución de problemas
2.2 Elaboración de configuraciones cognitivas relacionadas a un problema previamente resuelto.
2.3 Reflexión sobre la práctica docente de resolución de problemas.
2.4 Vinculación de las configuraciones cognitivas y las prácticas matemáticas de resolución.

3: Análisis didáctico y creación de problemas

3.1 Presentación de la estrategia episodio, reflexión sobre la práctica matemática, *problema pre, problema pos* (ERPP)
3.2 Elaboración de configuraciones cognitivas de un problema resuelto en base a un episodio sobre funciones cuadráticas.
3.3 Análisis de las prácticas matemáticas de solución de un problema sobre funciones cuadráticas.
3.4 Creación de *problemas pre* por variación respecto a un episodio previamente establecido sobre funciones cuadráticas.
3.5 Análisis de las prácticas matemáticas de creación de un problema sobre funciones cuadráticas.

4: Análisis didáctico y creación de problemas didácticamente buenos.

4.1 Discusión sobre los criterios para considerar a un problema didácticamente bueno (PDB).
4.2 Aplicación de los criterios PDB en los *problemas pre* creados por variación de un problema dado, relacionado con las funciones cuadráticas.

V. METODOLOGÍA

La metodología que se empleará en el curso-taller estará basada en la resolución y creación de problemas. Se fomentará la participación activa. Los participantes desarrollarán trabajos, analizarán episodios en clases y situaciones problemáticas motivadoras que se les presente para la creación y resolución de problemas y el estímulo de su competencia de análisis didáctico. Se consolidará estos conocimientos y se desarrollarán las capacidades de creación de problemas con las discusiones en la fase de socialización

VI. BIBLIOGRAFÍA

Artículos de investigación y experiencias didácticas

Crespo, S. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Invinting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11(5)*, 395–415.

Giménez, J., Font, V., & Vanegas, Y. (2013). Designing professional tasks for didactical analysis as a research process. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in Mathematics Education*, ICMI Study 22 (pp. 581-590). Oxford, UK: ICMI.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Kontorovich, I, & Koichu, B. (2009). Towards a comprehensive framework of mathematical problem posing. In M. Hoines & A. Flugestad (Eds.), *Proc. 33rd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 3 (pp. 401-408). Thessaloniki, Greece: PME.

Malaspina, U., Mallart, A. & Font, V. (2014). Problem posing as a means for developing teacher competences. In Oesterle, S., Nicol, C., Liljedahl, P., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 6* (p. 356). Vancouver, Canada: PME.

Malaspina, U. (2015). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia presentada en la XIV CIAEM. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México: CIAEM. Recuperable de: http://xiv.ciaemiacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1485/607

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona, España.

ANEXOS B

INSTRUMENTOS DE LA SESION 1

ANEXOS B.1

DIAPOSITIVAS DE LA PRESENTACIÓN DEL TALLER

Escuela de Posgrado
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas

TALLER DE CREACIÓN DE PROBLEMAS SOBRE FUNCIONES
10, 11, 12 y 13 de noviembre de 2015

Uldarico Malaspina Jurado
umalasp@pucp.edu.pe

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

CONSIDERACIONES BÁSICAS

4. Los profesores no podrán usar apropiadamente en sus clases los resultados de importantes investigaciones en educación matemática, basadas en la resolución de problemas, si no tienen problemas buenos y adecuados para sus realidades específicas.

CONSIDERACIONES BÁSICAS

2. En los textos no solo hay escasez de problemas – en su mayoría son solo ejercicios – sino que los pocos que hay, difícilmente corresponden a las necesidades específicas de los profesores que buscan estimular el aprendizaje de sus alumnos, cuyas experiencias y motivaciones son muy particulares, según los diversos contextos sociales, culturales y regionales.

CONSIDERACIONES BÁSICAS

Es muy importante estudiar e investigar la creación de problemas de matemáticas simultáneamente con la resolución de problemas.

Algunas razones:

1. El aprendizaje por descubrimiento lleva al niño a imaginar situaciones y hacer preguntas que el profesor debe usar creativamente para proponer "nuevos problemas" y favorecer tanto la comprensión del concepto que se está tratando, como el desarrollo de la autoestima del niño al valorar sus ideas.

3

CONSIDERACIONES BÁSICAS

3. En los diseños curriculares y en documentos que se elaboran institucionalmente con el propósito de mejorar el logro de aprendizajes de nuestros niños y jóvenes, hay muchas propuestas que deben ser complementadas por los maestros,

Esto es difícil o imposible de realizar adecuadamente si ellos no han desarrollado su capacidad de crear problemas.

CONSIDERACIONES BÁSICAS

- *Tengamos en cuenta que:*

(A) Se ha reconocido que la incorporación de actividades de creación de problemas en situaciones regulares en salones de clases puede ser un enfoque poderoso para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes (Silver, Kilpatrick y Schlesinger, 1990).

CONSIDERACIONES BÁSICAS

- *Tengamos en cuenta que:*

(B) "La actividad de crear problemas matemáticos complementa muy bien la de resolver problemas, porque estimula aún más la creatividad y contribuye a precisar la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se espera manejen los estudiantes, en el marco de una configuración epistémica adecuada." (Malaspina, 2011a)

CONSIDERACIONES BÁSICAS

- *Tengamos en cuenta que:*

(C) La tarea de crear problemas debe ser estimulada por los profesores a sus alumnos, como parte de las actividades en la solución de problemas, buscando variaciones al problema dado, casos particulares, generalizaciones, conexiones y contextualizaciones.

De esta manera se generará una dinámica interesante en las clases de matemáticas, pues surgirán nuevas dificultades, creadas por los mismos estudiantes. (Malaspina, 2011b)

PARA MEJORAR LA CAPACIDAD DE CREAR PROBLEMAS

2. El problema que se cree, debe tener estos 4 elementos.

Dos posibilidades:

a) Obtenerlos por variación , a partir de lo que existe en un problema dado.
b) Obtenerlos por elaboración, a partir de
   - *una situación dada, o configurada a propósito*
   - un requerimiento específico (matemático o didáctico)

PARA MEJORAR LA CAPACIDAD DE CREAR PROBLEMAS

1. Elementos fundamentales de un problema
   - *Información*
   - *Requerimiento*
   - *Contexto*
   - *Entorno matemático*

2. El problema que se cree, debe tener estos 4 elementos.

CONSIDERACIONES BÁSICAS

- *Tengamos en cuenta que:*

(D) La creación de problemas está estrechamente relacionada con formular(se) preguntas y con el uso de la lógica.

- ¿Qué pasaría si?
- ¿Podemos generalizar?
- ¿Qué casos particulares puedo analizar?
- ¿Qué condiciones son necesarias?¿Puedo cambiarlas?
- ¿Qué condiciones son suficientes?¿Puedo cambiarlas?

EPISODIO DE CLASE

El profesor Mario, en una de sus clases sobre funciones, propuso el siguiente problema a sus alumnos del segundo grado de educación secundaria:

En la bodega de la esquina de mi cuadra, cada kilogramo de papa cuesta S/.3. En el Mercado Mayorista, el cual se encuentra lejos de mi casa, cada kilogramo de papa cuesta S/.2, pero debo gastar en pasajes de ida y vuelta la cantidad de S/.5. ¿Siempre me resultará más conveniente comprar papas en el Mercado Mayorista? ¿Por qué?

Luego de unos minutos, algunos alumnos comentaron:

- **Juan:** *Claro, siempre será más conveniente comprar en el mercado, porque ahí es más barato.*
- **María:** *No siempre...depende...*
- **Mateo:** *Será más conveniente comprar en el mercado si tiene que comprar más de 8 kilos de papa.*

PARA MEJORAR LA CAPACIDAD DE CREAR PROBLEMAS

3. Dinámica que estimula la capacidad de crear problemas.
   - Trabajo individual
   - Trabajo grupal
   - Socialización

CONFIGURACIÓN DE OBJETOS Enfoque Ontosemiótico (EOS)

1) Lenguaje
2) Situación-problema
   a) Información
   b) Requerimiento
   c) Contexto
   d) Entorno matemático
3) Conceptos-definiciones
4) Proposiciones
5) Procedimientos
6) Argumentos

PARA MEJORAR LA CAPACIDAD DE CREAR PROBLEMAS

- Con profesores:
  - Para crear problemas por variación (a partir de un problema dado)
    - Considerar episodios en clases en torno a un problema.
    - Pedir la creación de "problemas pre"
    - Pedir la creación de "problemas pos"
    - Socializar las soluciones de los problemas creados, así como la racionalidad para su creación.

UNA EXPERIENCIA DIDÁCTICA

SOLUCIÓN EXPERTA DEL PROBLEMA DEL EPISODIO

CONCEPTOS

- Función lineal, función afín, función gasto, pendiente, intersección del gráfico de una función con el eje Y, gráficos de funciones, inecuación lineal.

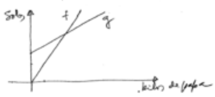
CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA DE LA SOLUCIÓN EXPERTA

PROCEDIMIENTOS

- Definir la variable x
- Escribir algebraicamente las funciones gasto al comprar x kilos de papa en la bodega y en el mercado (f y g, respectivamente)
- Esbozar los gráficos de las funciones f y g
- Comparar las imágenes de x según las funciones f y g.
- Resolver la inecuación lineal $g(x) < f(x)$.

LENGUAJE

- ***Términos y expresiones***: gasto, soles, compra, kilogramos
- ***Representaciones verbales:***
  - **Variable x:** cantidad de kilos de papa que se compra
  - **Función f:** gasto en la bodega al comprar papas
  - **Función g:** gasto en el mercado al comprar papas.
- ***Representaciones simbólicas***
  - S/.3, S/.2, $f(x)= 3x$, $g(x)= 2x +5$, $g(x)< f(x)$, $\rightarrow$,…
- ***Representaciones gráficas***



SITUACIÓN-PROBLEMA

- ***Información***: precios de un producto en dos lugares, considerando costo fijo por pasaje para comprar en el lugar que ofrece menor precio.
- ***Requerimiento:*** Comparación de gastos por la misma compra en los dos lugares
- ***Contexto:*** extra matemático
- ***Entorno matemático:*** funciones afines

PROPOSICIÓN

- Si hay valores de x para los cuales f(x) < g(x), entonces no siempre es más conveniente comprar en el mercado.

Veamos el caso del profesor Juan

- Solución al problema del episodio

(a) Resuelva el problema propuesto.

Cant	Bodega A	Bodega B		
	Costo A	Costo B	Pasaje	Total
1	3	2	5	7
2	6	4	5	9
3	9	6	5	11
4	12	8	5	13
5	15	10	5	15
6	18	12	5	17
7	21	14	5	19

Respuesta:
✓ Resultará conveniente del Mercado Mayorista cuando se compra más de 5 Kg de papas.
✓ No es conveniente comprar del Mercado mayorista cuando la compra es 5 kg o menos de papas.
✓ $f_A: 3n$ y $f_B: 2n+5$

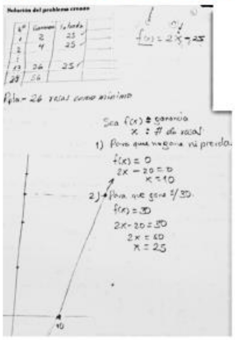
(b) Vuelva a leer el Episodio y cree un problema cuya solución contribuya a orientar a los

- CC de la solución del problema del episodio
  Procedimientos:
  - Elabora una tabla considerando la cantidad de kilos y el gasto generado.
  - Compara los gastos de compra en ambos lugares
  - Observa una fila en particular para emitir una respuesta.

ARGUMENTOS

- **Tesis 1**
  Si hay valores de x para los cuales f(x) < g(x), entonces no siempre es más conveniente comprar en el mercado.
  Argumento
  Es más conveniente comprar x kilos de papa en el mercado si y sólo si g(x) < f(x).
- **Tesis 2**
  Sean u y v funciones reales de variable real. El gráfico de u está por debajo del gráfico de v para todo valor de la variable z en un intervalo J si y sólo si $u(z) < v(z)$ para todo $z \epsilon$ J.
  Argumento
  Si (p; q) y (p; r) representan, respectivamente, los puntos A y B de una recta vertical en el plano cartesiano, A está debajo de B si y solo si q < r.

Solución del *Problema pre* creado por el profesor Juan



CC de la solución del problema pre creado
Conceptos:
- Función lineal afín, gráficos de funciones, intersección del gráfico de una función con el eje X, función estrictamente creciente, función ingreso, función ganancia, ecuación lineal, variable, expresión algebraica, mínimo entero de un conjunto de números reales.

ARGUMENTOS

- **Tesis 3**
  No siempre es más conveniente comprar en el Mercado Mayorista
  Argumento
  Hay puntos del gráfico de f que están por debajo del gráfico de g. Entonces, por la **Tesis 2**, existen valores de x para los cuales f(x) < g(x). La conclusión se obtiene por la **Tesis 1**.

PROBLEMA CREADO POR VARIACIÓN

Problema pre creado por el profesor Juan

(b) Vuelva a leer el Episodio y **cree un problema** cuya solución contribuya a orientar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado y a obtener una solución correcta del mismo. Su problema puede tener más de una pregunta o requerimiento.

Texto del problema

Lalo, es un niño que se "gana la vida" vendiendo rosas, ganando S/. 2 por cada unidad. Para asegurar su venta del día él decide ingresar a un concierto de "música romántica" al que accede pagando S/ 20. ¿Cuántas rosas como mínimo deberá vender para superar sus ventas normales que es en promedio de S/ 30 de ganancia diaria? (Solución al reverso)

- CC de la solución del problema pre creado
  Conceptos:
  - Función lineal afín, gráficos de funciones, intersección del gráfico de una función con el eje X, función estrictamente creciente, función ingreso, función ganancia, ecuación lineal, variable, expresión algebraica, mínimo entero de un conjunto de números reales.

ANEXOS B.2

Cuestionario de recojo de información

SESIÓN 1 Taller de creación de problemas

PUCP

TALLER DE CREACIÓN DE PROBLEMAS
10, 11, 12 y 13 de noviembre de 2015

Ficha de recojo de información

Apellidos y Nombres: ____

Profesión: _______________________________ Sexo: M F

Hizo sus estudios profesionales en: Universidad _____ Inst. Pedagógico_____

Nombre de la institución: ____

Año en que concluyó sus estudios profesionales ___________

Años de servicio como docente ____________

Grado y nivel en el que ha enseñado con mayor frecuencia en los últimos 5 años:

Grado ________________ Nivel ____

Nivel en el que tiene más experiencia enseñando:

Primaria Secundaria Otro:_______________________________

¿Ha enseñado el tema de funciones cuadráticas en estos últimos tres años?_________________

¿Ha estado involucrado en la experiencia de creación de problemas?_______________

En caso tenga experiencia creando problemas, ¿utiliza alguna estrategia de creación de problemas?

¿Cree que la creación de problemas puede potenciar el aprendizaje de la matemática? ¿Por qué?

Ficha 1 Página 1

ANEXOS B.3

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

PUCP

Taller Sobre Creación de Problemas

10, 11, 12 y 13 de noviembre de 2015

Exploración Inicial

Nombre y Apellidos: ______________________________

1. El profesor Mario ha decidido proponer el siguiente problema a sus alumnos de segundo año de secundaria, en una clase sobre funciones:

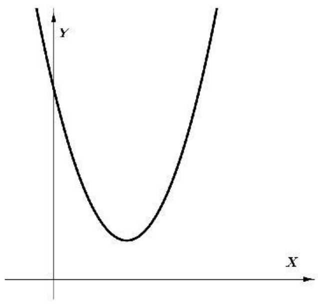
   En la bodega de la esquina de mi cuadra, cada kilogramo de papa cuesta S/.3. En el Mercado Mayorista, el cual se encuentra lejos de mi casa, cada kilogramo de papa cuesta S/.2 pero debo gastar en pasajes de ida y vuelta la cantidad de S/.5. ¿Siempre me resultará más conveniente comprar papas en el Mercado Mayorista? ¿Por qué?

   Resuelva el problema poniéndose en el papel del profesor Mario.

2. De la lista de funciones que se muestran a continuación, señale escribiendo **SÍ** en caso sea una función cuadrática y **NO** en otros casos. Use el recuadro correspondiente para su respuesta.

Función	**Respuesta**
$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$	
$g(x) = -x + 3 - x^3$	
$h(x) = x + 4$	
$p(x) = 4^2 + \sqrt{x}$	
$q(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$	

3. A continuación se presenta el arco P de una parábola.



(a) Jaime afirma que el arco P es una parte del gráfico de una función cuadrática f. ¿Esta afirmación es verdadera? *Justifique.*

(b) ¿Cómo encuentra la ley de correspondencia de la función f sabiendo que el punto más bajo del arco P tiene coordenadas $(1;1)$ y que interseca al eje de ordenadas en el punto $(0;4)$. *Explique.*

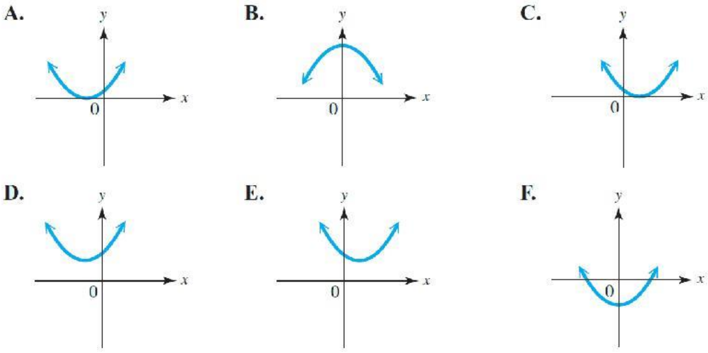
$\boxed{4}$ Complete el siguiente cuadro relacionando gráficos y funciones.

A	B	C	D	E	F

$p(x) = x^2 - 5$ $s(x) = -x^2 + 4$

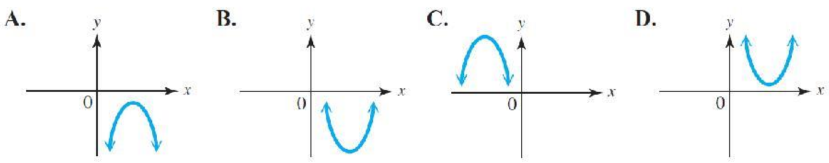
$q(x) = (x-1)^2$ $t(x) = (x+1)^2$

$r(x) = (x-1)^2 + 1$ $u(x) = (x+1)^2 + 1$



$\boxed{5}$ Por información anterior se sabe que la función f dada por $f(x) = -x^2 + 60x - 800$ expresa la cantidad de alumnos que hace deporte en el colegio, en un día, donde x representa la cantidad de horas que ese día está abierto el colegio. Encuentre el número máximo de alumnos que puede hacer deporte en el colegio, un determinado día. *Justifique.*

$\boxed{6}$ ¿Cuál de las siguientes figuras se parece más al gráfico de la función $f(x) = a(x-h)^2 + k$ si $a < 0$, $h > 0$ y $k < 0$?



Marque una de las cuatro opciones. *Justifique.*

ANEXOS B.4

SOLUCIONARIO DE LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

PUCP

Taller Sobre Creación de Problemas

10, 11, 12 y 13 de noviembre de 2015

Solucionario de la Exploración Inicial

1 El profesor Mario ha decidido proponer el siguiente problema a sus alumnos de segundo año de secundaria, en una clase sobre funciones:

En la bodega de la esquina de mi cuadra, cada kilogramo de papa cuesta S/.3. En el Mercado Mayorista, el cual se encuentra lejos de mi casa, cada kilogramo de papa cuesta S/.2 pero debo gastar en pasajes de ida y vuelta la cantidad de S/.5. ¿Siempre me resultará más conveniente comprar papas en el Mercado Mayorista?¿Por qué?

Resuelva el problema poniéndose en el papel del profesor Mario.

Solución

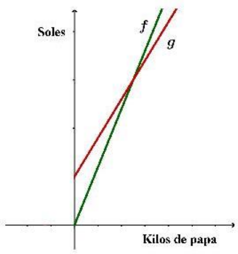
Datos:

- Bodega: cada kilogramo de papa a S/. 3.
- Mercado mayorista: cada kilogramo de papa a S/. 2.

Sea x la cantidad (en kilos) de papa que se compra, se define las siguientes funciones:

$f(x) = 3x$ lo que se gasta (en soles) por la compra de x kilos de papa en la bodega
$g(x) = 2x + 5$ lo que se gasta (en soles) por la compra x kilos de papa en el mercado mayorista.

Esbozamos los gráficos de estas funciones



El esbozo se realiza en base a las pendientes y a las intersecciones con el eje Y.

Se ve claramente que **no siempre** el gasto por la compra de x kilos de papa es menor en el mercado mayorista, pues el gráfico de g no está por debajo del gráfico de f para todos los valores de x.

Algebraicamente

$$\begin{aligned} g(x) < f(x) &\Leftrightarrow 2x + 5 < 3x \\ &\Leftrightarrow 5 < x \end{aligned}$$

Así, será más conveniente comprar en el mercado mayorista cuando se tenga que comprar más de 5 kg de papa. En otros casos no.

Presentamos a modo de ejemplo una ilustración tabular de las funciones:

Kilos de papa	x	0	1	2	3	4	5	6	7
Bodega	$f(x)$	0	3	6	9	12	15	18	21
Mercado mayorista	$g(x)$	5	7	9	11	13	15	17	19

Se ve claramente que hay valores de x para los cuales $f(x) < g(x)$ y otros para los cuales $f(x) > g(x)$.

Nota: No consideramos como solución experta la de mostrar un contraejemplo.

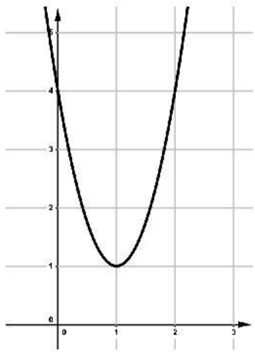
2 De la lista de funciones que se muestran a continuación, señale escribiendo **SÍ** en caso sea una función cuadrática y **NO** en otros casos. Use el recuadro correspondiente para su respuesta.

Función	**Respuesta**
$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$	
$g(x) = -x + 3 - x^3$	
$h(x) = x + 4$	
$p(x) = 4^2 + \sqrt{x}$	
$q(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$	

Solución

Función	**Respuesta**
$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$	Sí
$g(x) = -x + 3 - x^3$	No
$h(x) = x + 4$	No
$p(x) = 4^2 + \sqrt{x}$	No
$q(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$	Sí

3 A continuación se presenta el arco P de una parábola.



(a) Jaime afirma que el arco P es una parte del gráfico de una función cuadrática f. ¿Esta afirmación es verdadera? *Justifique.*

(b) ¿Cómo encuentra la ley de correspondencia de la función f sabiendo que el punto más bajo del arco P tiene coordenadas $(1;1)$ y que interseca al eje de ordenadas en el punto $(0;4)$. *Explique.*

Solución

Parte (a):

La afirmación es verdadera, ya que el gráfico de una función cuadrática es una parábola.

Parte (b):

Considerando la función cuadrática de la forma

$$f(x) = a(x-1)^2 + k$$

se tiene que el vértice $V = (h;k) = (1;1)$ puesto que este último dato revela que es el punto más bajo de la parábola, por lo que la función queda expresada de la siguiente forma:

$$f(x) = a(x-1)^2 + 1 \tag{1}$$

Por otro lado, por información del problema el punto $A = (0;4)$ también pertenece a f. Así que evaluando este punto A, se tiene que $x = 0$ por consiguiente $f(0) = 4$.

Reemplazando en 1:

$$f(0) = a + 1 = 4 \Rightarrow a = 3$$

por lo anterior,

$$f(x) = 3(x-1)^2 + 1$$

o que es lo mismo

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

.

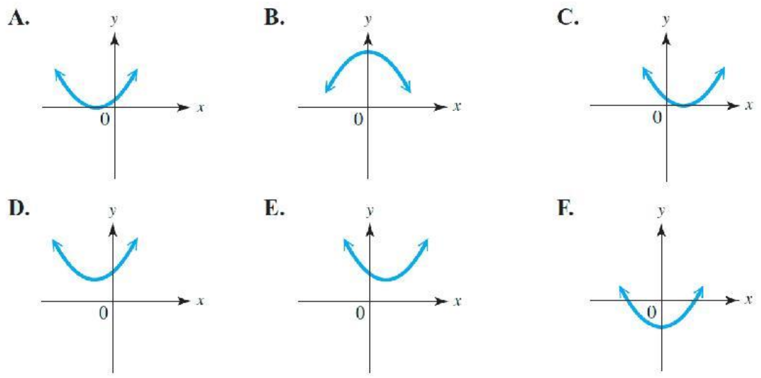
$\boxed{4}$ Complete el siguiente cuadro relacionando gráficos y funciones.

A	B	C	D	E	F

$p(x) = x^2 - 5$ $\quad$ $s(x) = -x^2 + 4$

$q(x) = (x-1)^2$ $\quad$ $t(x) = (x+1)^2$

$r(x) = (x-1)^2 + 1$ $\quad$ $u(x) = (x+1)^2 + 1$



Solución

A	B	C	D	E	F
t	s	q	u	r	p

$\boxed{5}$ Por información anterior se sabe que la función f dada por $f(x) = -x^2 + 60x - 800$ expresa la cantidad de alumnos que hace deporte en el colegio, en un día, donde x representa la cantidad de horas que ese día está abierto el colegio. Encuentre el número máximo de alumnos que puede hacer deporte en el colegio, un determinado día. *Justifique.*

Solución

Consideraciones del problema:

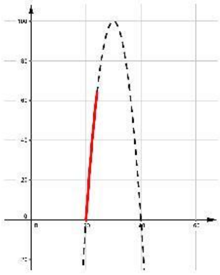
- $f(x) = -x^2 + 60x - 800$ que expresa la cantidad alumnos que hace deporte en el colegio en un día.
- x representa la cantidad de horas que un día está abierto el colegio.

Dado que f es una función cuadrática con coeficiente principal negativo, la parábola que representa a su gráfico en el sistema de coordenadas rectangulares, es cóncava hacia abajo. El vértice de esta parábola es igual a $V = (30; 100)$ que se comprueba completando cuadrados

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 60x - 800 \\ &= -(x-30)^2 + 100 \Rightarrow f(x) = -(x-30)^2 + 100 \end{aligned}$$

Luego, dado que f tiene un máximo cuando $x = 30$, se determina que dicho máximo para la cantidad de estudiantes practicando deportes un determinado día es de 100. Sin embargo, $x = 30$ rompe con el esquema de las horas diarias ya que a lo mucho podrá funcionar hasta la medianoche, es decir hasta las 24 horas. Cabe recalcar que el dominio de la función es $[20; 24]$ para la función no negativa f, puesto que esta última representa la cantidad de estudiantes.

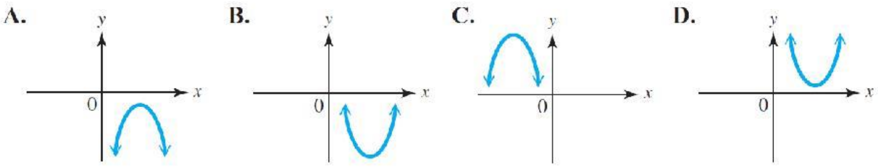
Se observa que en $[20; 24]$ la función es estrictamente creciente, en consecuencia obtendrá un máximo para $x = 24$. Por otro lado, gráficamente también se observa ese detalle de la solución.



Si analizamos el gráfico de la función f previamente mostrada, se observa que su máximo no coincide con su vértice, esto sucede por las condiciones del problema.

Finalmente, el máximo número de estudiantes que pueden hacer deporte en el colegio un determinado día es 64.

$\boxed{6}$ ¿Cuál de las siguientes figuras se parece más al gráfico de la función $f(x) = a(x-h)^2 + k$ si $a < 0$, $h > 0$ y $k < 0$?



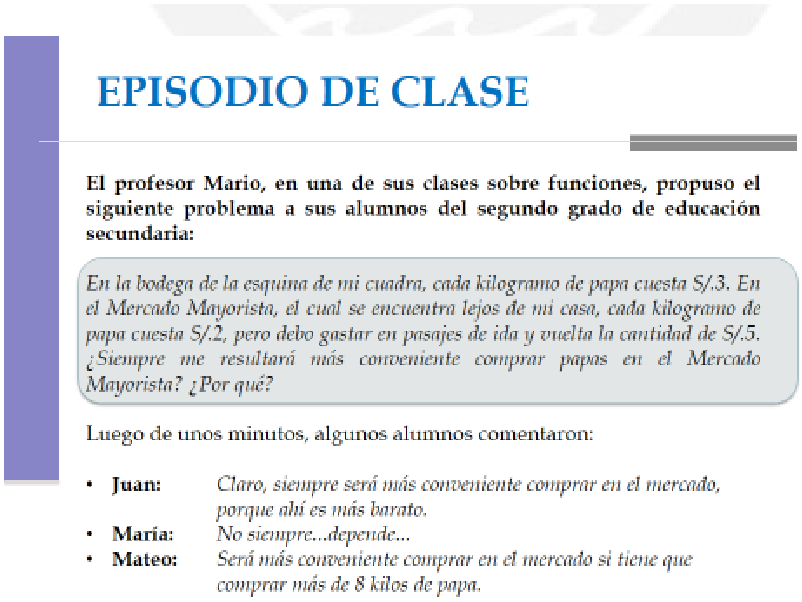
Marque una de las cuatro opciones. *Justifique.*

Solución

Bajo las condiciones del problema, se trata de un problema dentro del contenido traslaciones del gráfico de una función, quedando definida la gráfica A como respuesta.

ANEXOS B.5

DIAPOSITIVAS DE LA PRESENTACIÓN DEL EPISODIO DE CLASE DE SEGUNDO DE SECUNDARIA



ANEXOS C

INSTRUMENTOS DE LA SESION 2

ANEXOS C.1

FICHA DE INFORMACIÓN SOBRE LA SOLUCIÓN EXPERTA AL PROBLEMA DEL EPISODIO

PUCP

Taller Sobre Creación de Problemas

10, 11, 12 y 13 de noviembre 2015

Episodio 1: Segundo de secundaria

El profesor Carlos, en una de sus clases sobre funciones, propuso el siguiente problema a sus estudiantes del segundo grado de educación secundaria:

Situación Planteada

En la bodega de la esquina de mi cuadra, cada kilogramo de papa cuesta S/.3. En el Mercado Mayorista, el cual se encuentra lejos de mi casa, cada kilogramo de papa cuesta S/.2, pero debo gastar en pasajes de ida y vuelta la cantidad de S/.5.

¿Siempre me resultará más conveniente comprar papas en el Mercado Mayorista? ¿Por qué?

Luego de unos minutos, algunos alumnos de Carlos comentaron:

Juan: Claro, siempre será más conveniente comprar en el mercado, porque ahí es más barato.

María: No siempre...depende...

Mateo: Será más conveniente comprar en el mercado si tiene que comprar más de 8 kilos de papa.

Solución experta

Datos:

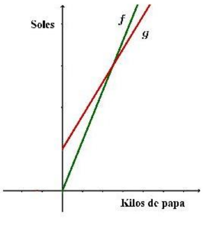
- Bodega: cada kilogramo de papa a S/. 3.
- Mercado mayorista: cada kilogramo de papa a S/. 2.

Sea x la cantidad (en kilos) de papa que se compra, se define las siguientes funciones:

$f(x) = 3x$ lo que se gasta (en soles) por la compra de x kilos de papa en la bodega

$g(x) = 2x + 5$ lo que se gasta (en soles) por la compra x kilos de papa en el mercado mayorista.

Esbozamos los gráficos de estas funciones



El esbozo se realiza en base a las pendientes y a las intersecciones con el eje Y.

Se ve claramente que **no siempre** el gasto por la compra de x kilos de papa es menor en el mercado mayorista, pues el gráfico de g no está por debajo del gráfico de f para todos los valores de x.

Algebraicamente

$$\begin{aligned} g(x) < f(x) &\Leftrightarrow 2x + 5 < 3x \\ &\Leftrightarrow 5 < x \end{aligned}$$

Así, será más conveniente comprar en el mercado mayorista cuando se tenga que comprar más de 5 kg de papa. En otros casos no.

Presentamos a modo de ejemplo una ilustración tabular de las funciones:

Kilos de papa	x	0	1	2	3	4	5	6	7
Bodega	$f(x)$	0	3	6	9	12	15	18	21
Mercado mayorista	$g(x)$	5	7	9	11	13	15	17	19

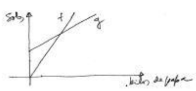
Se ve claramente que hay valores de x para los cuales $f(x) < g(x)$ y otros para los cuales $f(x) > g(x)$.

Nota: No consideramos como solución experta la de mostrar un contraejemplo.

Configuración epistémica del problema del episodio

En el cuadro 1 se muestra la Configuración Epistémica del problema del episodio.

Cuadro 1: Configuración epistémica experta del problema del episodio

Objetos matemáticos	Especificaciones
Lenguaje	Términos y expresiones: gasto, soles, compra, kilogramos Representaciones verbales: ■ Variable x: cantidad de kilos de papa que se compra. ■ Función f: gasto en la bodega al comprar papas. ■ Función g: gasto en el mercado al comprar papas. Representaciones simbólicas: S/. 3, S/. 2, $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x + 5$, $g(x) < f(x)$, $\rightarrow$ Representaciones gráficas: 
Situación - problema	■ **Información:** Precios de un producto en dos lugares, considerando costo fijo por pasaje para comprar en el lugar que ofrece menor precio. ■ **Requerimiento:** Comparación de gastos por la misma compra en los dos lugares. ■ **Contexto:** extra matemático. ■ **Entorno matemático:** funciones afines

Continúa en la página siguiente

Cuadro 1 – continúa de la página anterior

Objetos matemáticos	**Especificaciones**
Conceptos	Función lineal, función afín, función gasto, pendiente, intersección del gráfico de una función con el eje Y, gráficos de funciones, inecuación lineal.
Proposiciones	Si hay valores de x para los cuales $f(x) < g(x)$, entonces no siempre es más conveniente comprar en el mercado.
Procedimientos	▪ Definir la variable x. ▪ Escribir algebraicamente las funciones gasto al comprar x kilos de papa en la bodega en el mercado (f y g respectivamente). ▪ Esbozar los gráficos de las funciones f y g. ▪ Comparar las imágenes de x según las funciones f y g. ▪ Resolver la inecuación lineal $g(x) < f(x)$.
Argumentos	▪ **Tesis 1**: Si hay valores de x para los cuales $f(x) < g(x)$, entonces no siempre es más conveniente comprar en el mercado. **Argumento** Es más conveniente comprar x kilos de papa en el mercado si y sólo si $g(x) < f(x)$. ▪ **Tesis 2:** Sean u y v funciones reales de variable real. El gráfico de u está por debajo del gráfico de v para todo valor de la variable z en un intervalo J si y sólo si $u(z) < v(z)$ para todo $z \in J$. **Argumento** Si (p, q) y (p, r) representan, respectivamente los puntos A y B de una recta vertical en el plano cartesiano, A está debajo de B si y solo si $q < r$. ▪ **Tesis 3**: No siempre es más conveniente comprar en el Mercado Mayorista. **Argumento** Hay puntos del gráfico de f que están por debajo del gráfico de g. Entonces, por la **Tesis 2**, existen valores de x para los cuales $f(x) < g(x)$. La conclusión se obtiene por la **Tesis 1**.

ANEXOS C.2

PROTOCOLO DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PUCP

TALLER SOBRE CREACIÓN DE PROBLEMAS
10, 11, 12 y 13 de noviembre de 2015

Episodio: (Segundo de secundaria)

El profesor Carlos, en una de sus clases sobre **funciones**, propuso el siguiente problema a sus estudiantes del segundo grado de educación secundaria:

> *En la bodega de la esquina de mi cuadra, cada kilogramo de papa cuesta S/.3. En el Mercado Mayorista, el cual se encuentra lejos de mi casa, cada kilogramo de papa cuesta S/.2, pero debo gastar en pasajes de ida y vuelta la cantidad de S/.5.*
>
> *¿Siempre me resultará más conveniente comprar papas en el Mercado Mayorista? ¿Por qué?*

Luego de unos minutos, algunos alumnos de Carlos comentaron:

Juan: *Claro, siempre será más conveniente comprar en el mercado, porque ahí es más barato.*

María: *No siempre...depende...*

Mateo: *Será más conveniente comprar en el mercado si tiene que comprar más de 8 kilos de papa.*

Actividad individual

(a) Revise la solución al problema del episodio (PE). (***Se le hará entrega de su problema resuelto en la exploración inicial***).

(b) Elabore su Configuración Cognitiva de su solución mostrada en la parte **(a)**, para ello utilice el formulario que se adjunta.

(Para este trabajo complete la tabla que se encuentra en la siguiente página).

Configuración cognitiva del problema del episodio

Elabore su Configuración Cognitiva de su solución mostrada en la parte **(a)**, para ello utilice el formulario que se adjunta

Objetos matemáticos	Especificaciones
Lenguaje	***Términos y expresiones***: ***Representaciones verbales:*** ***Representaciones simbólicas:*** ***Representaciones gráficas:***
Situación - problema	**Información:** **Requerimiento:** **Contexto:** **Entorno matemático:**
Conceptos	

Proposiciones:	
Procedimientos	
Argumentos	

ANEXOS C.3

PROTOCOLO DE ANÁLISIS DE PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE SOLUCIÓN

SESIÓN 2 **Taller sobre creación de problemas**

PUCP

TALLER SOBRE CREACIÓN DE PROBLEMAS
10, 11, 12 y 13 de noviembre de 2015

Análisis de prácticas matemáticas de solución

(a) Explique su proceso de resolución de **problema del episodio (PE)** en forma escrita a un colega suyo. Explique en detalle cómo fue desarrollando el problema y especialmente utilice su Configuración Cognitiva (CCPe) para emitir argumentos consistentes.

Ficha 3 Página 1

ANEXOS D

INSTRUMENTOS DE LA SESION 3

ANEXOS D.1

PRESENTACIÓN SOBRE UN PROBLEMA DIDÁCTICAMENTE BUENO

Problema didácticamente bueno.
Su vinculación con los criterios de idoneidad didáctica

Uldarico Malaspina Jurado
umalasp@pucp.edu.pe
IREM
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Si bien es cierto que puede ser muy subjetivo considerar un problema como bueno – porque esto depende no sólo de quien resuelve o crea el problema, sino de los objetivos y del contexto en el que se propone – los criterios de idoneidad establecidos en el EOS pueden ayudar a valorar la "bondad" o "idoneidad de un problema".

Dichos criterios son

idoneidad epistémica,
idoneidad cognitiva,
idoneidad interaccional,
idoneidad mediacional,
idoneidad emocional
idoneidad ecológica.

Teniendo en cuenta estos criterios de idoneidad y, sobre todo, por las experiencias desarrolladas en diversos niveles educativos, consideramos que un "buen" problema desde el punto de vista didáctico, debería cumplir con lo siguiente:

Comentarios:

- La idoneidad epistémica tiene que ver con "hacer matemáticas". Es en este sentido su vinculación con *e, g* y *h*, pues establecer conexiones matemáticas, usar relaciones lógicas y crear nuevos problemas es esencial en la actividad matemática.
- La idoneidad interaccional tiene que ver con el "camino" que permite superar las dificultades para hallar la solución. Es en este sentido su vinculación con *b, c* y *f*: la *f* permite ver el inicio del camino, la *b* el camino, y la *c* "hacer el camino".
- La característica *b*, además de su vinculación con la idoneidad interaccional la vinculamos con la emocional, pues consideramos que si se intuye un camino para resolver el problema, no habrá frustración, ya que algo se intentará. También - en cierta medida - cognitiva, porque abre las posibilidades para resolver el problema.

a) La dificultad no es demasiado grande y se percibe que la solución es alcanzable. (idoneidad cognitiva)
b) Favorece intuir un camino para obtener la solución o conjeturar una solución. (idoneidad interaccional, emocional y cognitiva)
c) Favorece hacer algunas verificaciones – eventualmente con ayuda de calculadoras o computadoras – para mantener o rechazar las conjeturas. (idoneidad interaccional y mediacional)
d) Se percibe que es interesante o útil resolver el problema. (idoneidad emocional y ecológica)
e) Favorece establecer conexiones matemáticas, ya sea entre varios temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento. (idoneidad epistémica y ecológica)
f) Se percibe claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.). (idoneidad interaccional y cognitiva)
g) Favorece el uso de relaciones lógicas antes que el uso mecánico de algoritmos (idoneidad epistémica)
h) Favorece crear nuevos problemas, haciendo de manera natural algunas variaciones que llevan a situaciones significativas, tanto didáctica como matemáticamente. (idoneidad epistémica)

ANEXOS D.2

PRESENTACIÓN DEL EPISODIO DE CLASE SOBRE FUNCIONES CUADRÁTICAS.

Escuela de Posgrado
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas

TALLER DE CREACIÓN DE PROBLEMAS SOBRE FUNCIONES
10, 11, 12 y 13 de noviembre de 2015

Uldarico Malaspina Jurado
umalasp@pucp.edu.pe

EPISODIO DE CLASE (Tercero de secundaria)

El profesor Carlos, en una clase de **funciones**, propuso el siguiente problema a sus alumnos del tercer grado de educación secundaria:

Encuentra un par de números cuya suma sea 43 y su producto sea el máximo posible.

Resuelve el problema y explica tu procedimiento en forma detallada.

Luego de unos minutos, algunos alumnos comentaron:

Pedro: Los números son 21 y 22

Isabel: El producto máximo no se puede saber

Santiago: ¿Para qué me sirve resolver este problema?

ANEXOS D.3

FICHA DE TRABAJO PARA EL EPISODIO DE CLASE

SESIÓN 3 Taller sobre creación de problemas

Configuración cognitiva del problema del episodio (CCPe)

(b) Elabore su Configuración Cognitiva de su solución mostrada en la parte **(a)**, para ello utilice el formulario que se adjunta

Objetos matemáticos	Especificaciones
Lenguaje	***Términos y expresiones***: ***Representaciones verbales:*** ***Representaciones simbólicas:*** ***Representaciones gráficas:***
Situación - problema	**Información:** **Requerimiento:** **Contexto:** **Entorno matemático:**
Conceptos	

Ficha 1 Página 2

PUCP

TALLER SOBRE CREACIÓN DE PROBLEMAS
10, 11, 12 y 13 de noviembre de 2015

Episodio: Tercero de secundaria

El profesor Carlos, en una clase de **funciones**, propuso el siguiente problema a sus alumnos del tercer grado de educación secundaria:

> Encuentra un par de números cuya suma sea 43 y su producto sea el máximo posible.
>
> *Resuelve el problema y explica tu procedimiento en forma detallada.*

Después de unos minutos, algunos de sus alumnos comentaron:

Pedro: Los números son 21 y 22

Isabel: El producto máximo no se puede saber

Santiago: ¿Para qué me sirve resolver este problema?

Actividad individual

(a) Resuelva el problema propuesto

Proposiciones:	
Procedimientos	
Argumentos	

ANEXOS D.4

PROTOCOLO DE ANÁLISIS DE PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE SOLUCIÓN

SESIÓN 3 **Taller sobre creación de problemas**

PUCP

TALLER SOBRE CREACIÓN DE PROBLEMAS
10, 11, 12 y 13 de noviembre de 2015

Episodio: Tercero de secundaria

El profesor Carlos propuso el siguiente problema a sus alumnos del tercer grado de educación secundaria:

> Encuentra un par de números cuya suma sea 43 y su producto sea el máximo posible.
>
> *Resuelve el problema y explica tu procedimiento en forma detallada.*

Después de unos minutos, algunos de sus alumnos comentaron:

Pedro: Los números son 21 y 22

Isabel: El producto máximo no se puede saber

Santiago: ¿Para qué me sirve resolver este problema?

Actividad individual

(a) Vuelva a leer el Episodio y **cree un *problema pre (Pp)*** cuya solución contribuya a orientar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado y a obtener una solución correcta del mismo. Su problema puede tener más de una pregunta o requerimiento.

Texto del problema

Ficha 3 Página 1

ANEXOS D.5

FICHA DE TRABAJO PARA LA CREACIÓN DE PROBLEMAS

SESIÓN 3 | Taller sobre creación de problemas

PUCP

TALLER SOBRE CREACIÓN DE PROBLEMAS
10, 11, 12 y 13 de noviembre de 2015

Episodio: Tercero de secundaria

El profesor Carlos propuso el siguiente problema a sus alumnos del tercer grado de educación secundaria:

> Encuentra un par de números cuya suma sea 43 y su producto sea el máximo posible.
>
> *Resuelve el problema y explica tu procedimiento en forma detallada.*

Después de unos minutos, algunos de sus alumnos comentaron:

Pedro: Los números son 21 y 22

Isabel: El producto máximo no se puede saber

Santiago: ¿Para qué me sirve resolver este problema?

Actividad individual

(a) Vuelva a leer el Episodio y **cree un *problema pre (Pp)*** cuya solución contribuya a orientar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado y a obtener una solución correcta del mismo. Su problema puede tener más de una pregunta o requerimiento.

Texto del problema

Solución del problema creado

Configuración cognitiva del problema del episodio (CCPp)

(b) Elabore su configuración cognitiva de su solución mostrada en la parte **(a)**, para ello utilice el formulario que se adjunta

Objetos matemáticos	Especificaciones
Lenguaje	***Términos y expresiones***: ***Representaciones verbales:*** ***Representaciones simbólicas:*** ***Representaciones gráficas:***
Situación - problema	**Información:** **Requerimiento:** **Contexto:** **Entorno matemático:**
Conceptos	

Proposiciones:	
Procedimientos	
Argumentos	

ANEXOS D.6

PROTOCOLO DE ANÁLISIS DE PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE CREACIÓN

SESIÓN 3 Taller sobre creación de problemas

PUCP

TALLER SOBRE CREACIÓN DE PROBLEMAS
10, 11, 12 y 13 de noviembre de 2015

Análisis de prácticas matemáticas de creación

(Protocolo de reflexión sobre la práctica de creación)

Explique su proceso de resolución del ***problema pre creado (Pp)*** en forma escrita respondiendo a las preguntas abajo señaladas. Explique en detalle sus respuestas y especialmente utilice su ***Configuración Cognitiva del problema pre creado (CCPp)*** para emitir argumentos consistentes.

(a) ¿El lenguaje usado en el Pp es más sencillo que el lenguaje del PE?

En cuanto a la situación problema del Pp:

(b) ¿La información que se presenta es más fácil de entender que la información dada en el PE?

(c) ¿Lo que se requiere en el Pp ayuda a entender lo que se requiere en el PE?

Ficha 4 Página 1

(d) ¿Los conceptos involucrados corresponden al grado de estudios considerado?

(e) ¿Los conceptos involucrados son los mismos o previos a los conceptos considerados en el PE?

(f) ¿Los procedimientos para resolver el Pp son más sencillos que los procedimientos considerados en el PE?

(g) ¿Los procedimientos involucrados en el Pp corresponden al grado de estudios considerado?

(h) ¿Las proposiciones presentes en la solución del Pp son más fáciles de explicitar que las proposiciones al resolver el PE?

(i) ¿Los argumentos usados en el Pp son más intuitivos, menos exigentes (formales, elaborados) que los argumentos del PE?

ANEXOS E

INSTRUMENTOS DE LA SESION 4

ANEXOS E.1

PRESENTACIÓN SOBRE PROBLEMAS DIDÁCTICAMENTE BUENOS Y SU CONEXIÓN CON LAS IDONEIDADES DIDÁCTICAS

Problema didácticamente bueno.
Su vinculación con los criterios de idoneidad didáctica

Uldarico Malaspina Jurado
umalasp@pucp.edu.pe
IREM
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Si bien es cierto que puede ser muy subjetivo considerar un problema como bueno – porque esto depende no sólo de quien resuelve o crea el problema, sino de los objetivos y del contexto en el que se propone – los criterios de idoneidad establecidos en el EOS pueden ayudar a valorar la "bondad" o "idoneidad de un problema".

Dichos criterios son

idoneidad epistémica,

idoneidad cognitiva,

idoneidad interaccional,

idoneidad mediacional,

idoneidad emocional

idoneidad ecológica.

Teniendo en cuenta estos criterios de idoneidad y, sobre todo, por las experiencias desarrolladas en diversos niveles educativos, consideramos que un "buen" problema desde el punto de vista didáctico, debería cumplir con lo siguiente:

a) La dificultad no es demasiado grande y se percibe que la solución es alcanzable. (idoneidad cognitiva)
b) Favorece intuir un camino para obtener la solución o conjeturar una solución. (idoneidad interaccional, emocional y cognitiva)
c) Favorece hacer algunas verificaciones – eventualmente con ayuda de calculadoras o computadoras – para mantener o rechazar las conjeturas. (idoneidad interaccional y mediacional)
d) Se percibe que es interesante o útil resolver el problema. (idoneidad emocional y ecológica)
e) Favorece establecer conexiones matemáticas, ya sea entre varios temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento. (idoneidad epistémica y ecológica)
f) Se percibe claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.). (idoneidad interaccional y cognitiva)
g) Favorece el uso de relaciones lógicas antes que el uso mecánico de algoritmos (idoneidad epistémica)
h) Favorece crear nuevos problemas, haciendo de manera natural algunas variaciones que llevan a situaciones significativas, tanto didáctica como matemáticamente. (idoneidad epistémica)

Comentarios:

- La idoneidad epistémica tiene que ver con "hacer matemáticas". Es en este sentido su vinculación con *e, g* y *h*, pues establecer conexiones matemáticas, usar relaciones lógicas y crear nuevos problemas es esencial en la actividad matemática.
- La idoneidad interaccional tiene que ver con el "camino" que permite superar las dificultades para hallar la solución. Es en este sentido su vinculación con *b, c* y *f*: la *f* permite ver el inicio del camino, la *b* el camino, y la *c* "hacer el camino".
- La característica *b*, además de su vinculación con la idoneidad interaccional la vinculamos con la emocional, pues consideramos que si se intuye un camino para resolver el problema, no habrá frustración, ya que algo se intentará. También - en cierta medida - cognitiva, porque abre las posibilidades para resolver el problema.

ANEXOS E.2

RÚBRICA DE VALORACIÓN DE LOS PROBEMAS CREADOS

SESIÓN 4 Taller sobre creación de problemas

TALLER SOBRE CREACIÓN DE PROBLEMAS
10, 11, 12 y 13 de noviembre de 2015

A continuación se muestra una rúbrica de valoración de los problemas creados desde el punto de vista didáctico

Actividad Grupal

(a) Resuelve el problema de un compañero de taller.
Resolución del problema

Actividad grupal

(b) Evalúe el problema creado utilizando la siguiente rúbrica

Caracterización	Idoneidad	Cumple con el indicador (SÍ / NO)	Valoración en caso cumpla con el indicador			
Favorece establecer conexiones matemáticas, ya sea entre varios temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento.	Epistémica		2	1	0	*
Favorece el uso de relaciones lógicas antes que el uso mecánico de algoritmos.			2	1	0	*
Favorece crear nuevos problemas, haciendo de manera natural algunas variaciones que llevan a situaciones significativas, tanto didáctica como matemáticamente.			2	1	0	*
La dificultad no es demasiado grande y se percibe que la solución es alcanzable.	Cognitiva		2	1	0	*
Favorece intuir un camino para obtener la solución o conjeturar una solución.			2	1	0	*
Se percibe claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.)			2	1	0	*
Se percibe que es interesante o útil resolver el problema.	Ecológica		2	1	0	*
Favorece establecer conexiones matemáticas, ya sea entre varios temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento.			2	1	0	*
Se percibe que es interesante o útil resolver el problema.	Afectiva		2	1	0	*
Favorece intuir un camino para obtener la solución o conjeturar una solución.			2	1	0	*
Favorece intuir un camino para obtener la solución o conjeturar una solución.	Interaccional		2	1	0	*
Favorece hacer algunas verificaciones, eventualmente con ayuda de calculadora o computadoras, para mantener o rechazar las conjeturas.			2	1	0	*
Se percibe claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.)			2	1	0	*
Favorece hacer algunas verificaciones, eventualmente con ayuda de calculadora o computadoras, para mantener o rechazar las conjeturas.	Mediacional		2	1	0	*

Peso	Valoración	Interpretación
2	Alto	El problema muestra alto grado de acercamiento al indicador propuesto.
1	Medio	El problema muestra grado medio de acercamiento al indicador propuesto.
0	Bajo	El problema muestra bajo grado de acercamiento al indicador propuesto.
*	Problema no revisado	

ANEXOS E.3

CUESTIONARIO DE SALIDA PARA EL CASO DE INVESTIGACIÓN

Nombre:____

Cuestionario

Este cuestionario es parte de una investigación en curso desarrollado en la Maestría de Enseñanza de la Matemática de la Pontifica Universidad Católica del Perú. La investigación apunta al desarrollo de una estrategia de creación de problemas que integra nociones de un marco referencial de la Didáctica fundamental de la matemática, con el propósito de realizar una reflexión didáctica para la creación de problemas para la enseñanza y aprendizaje. Ninguna de las preguntas tiene una respuesta que se puede catalogar como "correcta" o "incorrecta". Es muy importante que respondas a todas las preguntas de este cuestionario.

Queremos agradecerte por el tiempo que dedicaste a responder este cuestionario.

Previo al taller

1. ¿Qué entiendes por creación de problemas?

2. ¿En qué medida usas las siguientes fuentes para la selección de los problemas matemáticos en tu trabajo docente?

	Casi siempre	**Frecuentemente**	**Algunas veces**	**Rara vez**	**Casi nunca**
Libros de matemática para la clase					
Otros libros					
Recursos de Internet					
Creo mis propios problemas					
Problemas creados por mis estudiantes					
Otros					

Señala cualquier otro recurso que utilizas:______________________________

3. ¿Consideras la creación de problemas como una herramienta para un mejor aprendizaje y enseñanza de la matemática? Fundamenta tu respuesta

____

____

____

4. En caso utilices una estrategia de crear problemas, explica brevemente en qué consiste.

____

____

____

5. ¿Para qué propósitos creas tus propios problemas?

____

Durante el taller

Marca la casilla correspondiente a un SÍ o un NO en cada tabla mostrada, según sea la intención de la pregunta.

1. ¿Cómo considerarías el uso de la estrategia de creación de problemas por variación para crear problemas didácticamente buenos?

	SI	NO
Me parece Interesante		
Me parece Útil		
Me parece fácil de entender		
Me parece fácil de aplicar		
Me puede permitir mejorar mi práctica docente		

Fundamenta tu respuesta:

____

____

____

2. ¿Cuál es tu percepción sobre las configuraciones de objetos asociados a un problema?

	SI	NO
Me parece Interesante		
Me parece Útil		
Me parece fácil de entender		
Me parece fácil de elaborar		
Me puede permitir mejorar mi práctica docente		

Fundamenta tu respuesta:

____

____

____

3. ¿Te sirvió de referencia la elaboración de la Configuración cognitiva del problema del episodio (CCPe), sobre funciones cuadráticas, para crear tu problema pre? ¿Y la reflexión sobre la práctica de resolución del problema del episodio?

Fundamenta tu respuesta:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

4. ¿Qué relación encuentras entre la CCPe y la Configuración cognitiva del problema pre creado (CCPp)?

Fundamenta tu respuesta:

____

____

____

____

____

____

5. Realiza un comentario fundamentado en su CCPp sobre el grado de convencimiento de que el problema creado contribuirá a la comprensión y solución adecuada del problema del episodio.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Sobre el problema pre creado

1. ¿Cuáles son las características similares/diferentes entre el problema pre creado y el problema del episodio?

____

____

____

____
____
____
____
____
____

2. ¿Cuál es tu percepción sobre la estrategia Episodio, reflexión didáctica, problema pre, problema pos (ERPP) para crear problemas didácticamente buenos?

	SI	**NO**
Me parece Interesante		
Me parece Útil		
Me parece fácil de entender		
Me parece fácil de aplicar		
Me puede permitir mejorar mi práctica docente		

Fundamenta tu respuesta:

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

3. ¿Qué recomendarías para una mejor implementación del taller de creación de problemas?

____
____

ANEXOS E.4

CONFIGURACIÓN COGNITIVA DEL PROBLEMA DEL EPISODIO (CCPe) ELABORADA POR EL PROFESOR P11

Objetos matemáticos	**Especificaciones**
Lenguaje	• ***Términos y expresiones*:** Producto, máximo valor, suma • ***Representaciones verbales:*** Sea M el producto: $M = a \times b$ Representar $M(a)$ como $a(43 - a)$ • ***Representaciones simbólicas*** *ab; M(a); a+b; 21, 5; 43a-a²* • ***Representaciones gráficas***
Situación – problema	**Información:** Dos números sumados dan 43, su producto es el máximo posible. **Requerimiento:** Resolver el problema y explicar el procedimiento. **Contexto:** Intra matemático **Entorno matemático:** Funciones cuadráticas
Conceptos	Función, función cuadrática, valor máximo de una función cuadrática.
Proposiciones:	• En una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a < 0$, el valor máximo se obtiene cuando $x = \frac{-b}{2a}$.
Procedimientos	• Definir la variable independiente de la función, a partir de a+b=43. • Escribir la regla de correspondencia de la función M. • Determinar el valor de $x = \frac{-b}{2a}$, para que M alcanza el valor máximo. Este también se puede lograr mediante completación de cuadrados. • Obtener, a continuación, el valor de y.
Argumentos	**Tesis 1** La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a < 0$, posee valor máximo cuando $x = \frac{-b}{2a}$.

	Argumento Al resolver la ecuación $f(x) = 0$, se tiene $x = \frac{-b}{2a}$ (número crítico). Luego de evaluar este número en la función, alcanza el valor máximo.

CONFIGURACIÓN COGNITIVA DEL PROBLEMA DEL EPISODIO (CCPe) ELABORADA POR EL PROFESOR P15

Objetos matemáticos	**Especificaciones**
Lenguaje	• ***Términos y expresiones*:** Primer número, segundo número, producto máximo, parábola invertida, valor máximo. • ***Representaciones verbales:*** Variable: a Función: $f(a)$ • ***Representaciones simbólicas*** $a + b = 43$,*a; 43-a; a(43-a)*, $f(a) = -a^2 + 43a$, *v(h,k), h=43/2; a=43/2; b=43/2* • ***Representaciones gráficas*** 
Situación – problema	**Información:** Valores de dos números los cuales suman 43. **Requerimiento:** El producto de los valores de dichos números que resulte el máximo. **Contexto:** Intra matemático **Entorno matemático:** Funciones cuadráticas, funciones
Conceptos	Función, ecuación lineal, función, cuadrática, parábola.
Proposiciones:	• En la gráfica de la parábola existe un punto máximo, entonces existe un valor máximo para el producto.
Procedimientos	• Ordenar los datos. • De la ecuación, establecer, definir las variables. • Analizar la pregunta (requerimiento) y definir el producto máximo como función del valor a. • Analizar la función cuadrática generada para esbozar la gráfica (de la parábola). • Reconocer el punto máximo (vértice de la parábola). • Hallar el valor de a en ese punto máximo. • Por el dato $a + b = 43$, se halla el valor de b.

Argumentos	**Tesis 1** Si la gráfica de la función cuadrática se abre hacia abajo, entonces existe un valor máximo para el producto. **Argumento** La gráfica de una función cuadrática se abre hacia abajo si y solo si $x < 0$ en $$f(x) = x^2 + bx + c$$ **Tes**is **2** El producto máximo se puede conocer. **Argumento** La gráfica que corresponde a la función cuadrática $$f(a) = -a^2 + 43a$$ Se abre hacia abajo por la tesis 1.

ANEXOS E.5

RESPUESTAS AL CUESTIONARIO DE SALIDA DESARROLLADO POR EL PROFESOR P11

Previo al taller

1 ¿Qué entiendes por creación de problemas?

Crear problemas es elaborar situaciones que generen contradicción de carácter subjetivo en quien los enfrenta. Dicha contradicción se registra entre los conocimientos de la persona y lo que se le pide responder.

2 ¿En qué medida usas las siguientes fuentes para la selección de los problemas matemáticos en tu trabajo docente?

	Casi siempre	Frecuentemente	Algunas veces	Rara vez	Casi nunca
Libros de matemática para la clase	X				
Otros libros	X				
Recursos de Internet					X
Creo mis propios problemas					X
Problemas creados por mis estudiantes					X
Otros					

Señala cualquier otro recurso que utilizas: ______________________________

3 ¿Consideras la creación de problemas como una herramienta para un mejor aprendizaje y enseñanza de la matemática? Fundamente su respuesta

Sí, porque pone en juego la aplicación de los conceptos matemáticos en la elaboración de condiciones y requerimientos del problema.

4 En caso utilices una estrategia de crear problemas, explica brevemente en qué consiste.

Buscar elementos contradictorios en el concepto matemático dado.

5 ¿Para qué propósitos creas tus propios problemas?

Para fines de enseñanza o ilustración de conceptos, para introducir un nuevo tema de estudio.

Durante el taller

Marca la casilla correspondiente a un SÍ o un NO en cada tabla mostrada, según sea la intención de la pregunta.

1 ¿Cómo considerarías el uso de la estrategia de creación de problemas por variación para crear problemas didácticamente buenos?

	SI	NO
Me parece Interesante	X	
Me parece Útil	X	
Me parece fácil de entender	X	
Me parece fácil de aplicar		X
Me puede permitir mejorar mi práctica docente	X	

Fundamenta tu respuesta:

Pienso que las condiciones para la creación de un problema didácticamente bueno necesita ser mejor comprendido.

2 ¿Cuál es tu percepción sobre las configuraciones de objetos asociados a un problema?

	SI	NO
Me parece Interesante	X	
Me parece Útil	X	
Me parece fácil de entender		X
Me parece fácil de elaborar		X
Me puede permitir mejorar mi práctica docente	X	

Fundamenta tu respuesta:

Realizar un análisis didáctico a este nivel es una habilidad que necesita ser mejor estudiada o explicada para poder aplicarlo con precisión.

3 ¿Te sirvió de referencia la elaboración de la Configuración cognitiva del problema del episodio (CCPe), sobre funciones cuadráticas, para crear tu problema pre? ¿Y la reflexión sobre la práctica de resolución del problema del episodio?

Fundamenta tu respuesta:

La CCPe influyó en la creación del problema, pero sobre todo en el aspecto de la situación problema y los conceptos involucrados. La definición de información, requerimiento, contexto y entorno matemático fueron elementos que consideré para la creación del problema pre.

La reflexión sobre la práctica de resolución influyó en menor medida en la creación del problema pre. A lo más, solo el punto 1. Elementos provenientes del álgebra no fueron considerados en detalle.

4 ¿Qué relación encuentras entre la CCPe y la Configuración cognitiva del problema pre creado (CCPp)?

Fundamenta tu respuesta:

Observo que términos y expresiones (lenguaje) en una y otra forma son similares. También lo son los elementos referidos a la situación problema (en información y requerimientos, mucho más en el contexto y entorno). Proposiciones, procedimientos y argumentos en CCPe y CCPp, son muy distintos, pues en la primera casi se refiere al desarrollo de funciones cuadráticas y en el segundo, no se requieren conceptos tan profundos acerca de ellas.

5 Realiza un comentario fundamentado en su CCPp sobre el grado de convencimiento de que el problema creado contribuirá a la comprensión y solución adecuada del problema del episodio.

Creo que el problema creado contribuirá a la comprensión y solución adecuada del problema del episodio pues el requerimiento y la información presentada en la situación problema ha sido restringida a los números naturales. Así mismo, el grado de dificultad planteado e las preguntas del problema fueron aumentando en forma adecuadamente dosificada. Finalmente, el “tamaño” de los números fue reducido para facilitar la búsqueda de las parejas, tarea que fue asignada a los estudiantes.

Sobre el problema pre creado

1. ¿Cuáles son las características similares/diferentes entre el problema pre creado y el problema del episodio?

Ambos problemas defieren en que el lenguaje del Pp es más sencillo en tanto que se encuentra más ligado a la observación de casos particulares de suma y producto de números naturales.

Por ello mismo es que la información dada en el Pp es más fácil de entender (pues emplea casos particulares) y ayuda a comprender lo que se requiere en el PE. Los conceptos involucrados corresponden al grado de estudios considerado y los procedimientos, proposiciones y argumentos contemplados en el Pp son más fáciles de explicitar y menos exigentes que en el PE.

2. ¿Cuál es tu percepción sobre la estrategia Episodio, reflexión didáctica, problema pre, problema pos (ERPP) para crear problemas didácticamente buenos?

	SI	NO
Me parece Interesante	X	
Me parece Útil	X	
Me parece fácil de entender	X	
Me parece fácil de aplicar		X
Me puede permitir mejorar mi práctica docente	X	

Fundamenta tu respuesta:

En la parte correspondiente a la explicitación de argumentos que permitan realizar la reflexión didáctica, se hace necesario el dominio de mayores conocimientos matemáticos y lógicos; para determinar así los fundamentos del problema. No es fácil la estrategia, toma su tiempo, pero es necesario y útil.

3. ¿Qué recomendarías para una mejor implementación del taller de creación de problemas?

Aumentar la cantidad de tiempo para desarrollarlo en toda su extensión.

ANEXOS E.6

RESPUESTAS AL CUESTIONARIO DE SALIDA DESARROLLADO POR EL PROFESOR P15

Previo al taller

1. ¿Qué entiendes por creación de problemas?

   Plantear una situación problemática con un sentido didáctico, hacer evidente lo que el estudiante ha aprendido, y/ o ponga en práctica estrategias que le permita desarrollar su pensamiento matemático.

2. ¿En qué medida usas las siguientes fuentes para la selección de los problemas matemáticos en tu trabajo docente?

	Casi siempre	**Frecuentemente**	**Algunas veces**	**Rara vez**	**Casi nunca**
Libros de matemática para la clase		X			
Otros libros		X			
Recursos de Internet			X		
Creo mis propios problemas			X		
Problemas creados por mis estudiantes			X		
Otros					

   Señala cualquier otro recurso que utilizas: exámenes de admisión

3. ¿Consideras la creación de problemas como una herramienta para un mejor aprendizaje y enseñanza de la matemática? Fundamente su respuesta

   En definitiva sí, ya que crear un problema requiere algo más que sólo resolver problema, y si tienen fines didácticos requiere algo más que el dominio disciplinar.

4. En caso utilices una estrategia de crear problemas, explica brevemente en qué consiste.

Recurrir a variar o modificar un problema tomando en cuenta las dificultades que he observado en los estudiantes para comprender determinado tema, o las dificultades para resolver previos problemas. Otra estrategia es pedirles que ellos mismo planteen un problema, por ejemplo pedirles en grupo que diseñen un examen, la que luego es revisado y aplicado, ello ha permitido que los estudiantes indaguen y se interesen en profundizar la disciplina.

5. ¿Para qué propósitos creas tus propios problemas?

Para ayudar al estudiante a comprender lo que va a aprender como algo nuevo o en las dificultades que ellos presentan. Y para evaluar.

Durante el taller

Marca la casilla correspondiente a un SÍ o un NO en cada tabla mostrada, según sea la intención de la pregunta.

6. ¿Cómo considerarías el uso de la estrategia de creación de problemas por variación para crear problemas didácticamente buenos?

	SI	NO
Me parece Interesante	X	
Me parece Útil	X	
Me parece fácil de entender	X	
Me parece fácil de aplicar		X
Me puede permitir mejorar mi práctica docente	X	

Fundamenta tu respuesta:

La creación de problemas por variación probablemente es la forma más usada por nosotros los docentes, sin embargo, no se suele realizar un análisis como la configuración cognitiva del problema y su desarrollo. Considero que la dificultad de en su aplicación va a estar determinado por ciertos requerimientos del quien crea el problema, y tener en cuenta quien resolverá el problema (tiempo, dominio disciplinar, socialización, …).

7. ¿Cuál es tu percepción sobre las configuraciones de objetos asociados a un problema?

	SI	NO
Me parece Interesante	X	
Me parece Útil	X	
Me parece fácil de entender	X	
Me parece fácil de elaborar		X
Me puede permitir mejorar mi práctica docente	X	

Fundamenta tu respuesta:

Como se explicó anteriormente, realizar la configuración cognitiva, un reconocimiento y análisis de los objetos matemáticos va a ayudar a plantear un buen problema para que el estudiante desarrolle realmente su pensamiento matemático. Se dice que el docente debe ser un investigador, justamente realizar éste tipo de análisis de los elementos matemáticos requiere ese sentido del profesor además de los otros factores. Generalmente hablando, en la realidad de un docente de una IE de nuestro país el sistema en el que se desenvuelve no favorece ese sentido de investigación.

Ayudaría mucho la socialización de estas prácticas, acostumbrarnos a realizar éste tipo de análisis con los fundamentos del EOS. Realmente hacer una configuración es como sacar una “radiografía” o tal vez “tomografía” de un problema, permite el reconocimiento de los objetos matemáticos, el corazón y sus conexiones, las “anomalías”,… pero para ello es necesario un buen “ojo clínico”.

8. ¿Te sirvió de referencia la elaboración de la Configuración cognitiva del problema del episodio (CCPe), sobre funciones cuadráticas, para crear tu problema pre? ¿Y la reflexión sobre la práctica de resolución del problema del episodio?

Fundamenta tu respuesta:

Sí sirvió, sobre todo en el reconocimiento de todos los elementos que debe tener un problema, sin embargo, al momento de crear el problema mi objetivo fue limitado, ya que me enfoqué en que el problema absolviera los probables vacíos que habría dejado el PE, y algunos objetos matemáticos no se consideraron al momento de crear el problema.

9. ¿Qué relación encuentras entre la CCPe y la Configuración cognitiva del problema pre creado (CCPp)?

Fundamenta tu respuesta:

Las diferencias que resaltan son: el contexto; los conceptos, en La CCPe están definidas con claridad los conceptos de función, función cuadrática, parábola, en el caso de CCPp ciertamente sea considerado tales conceptos en la configuración, pero analizando la información de la situación problema, ésta no implica parábola, aunque se busca su aplicación en una parte del requerimiento (comprobación). En las proposiciones y argumentos se encuentra más claridad en el CCPe. En CCPp los pasos del procedimiento son más extensos pero sigue una secuencia, en el caso de CCPp es directa aplicación de los conceptos que involucra el problema.

La relación que encuentro es que la CCPp es una variación de CCPe que ha variado algunos objetos matemáticos para facilitar la comprensión pero no ha atendido los objetos que le dan formalidad al problema (Proposiciones, argumentos).

10. Realiza un comentario fundamentado en su CCPp sobre el grado de convencimiento de que el problema creado contribuirá a la comprensión y solución adecuada del problema del episodio.

Con la revisión del problema y la CCPp encuentro que el problema no ha sido formulado adecuadamente, si la información y la información no están del todo claras, y con seguridad la configuración de los siguientes objetos matemáticos lo evidenciará.

Generalmente los docentes solemos “crear” un problema variando otros problemas vistos en los libros, en los exámenes, etc. Pensé en ese momento en crear uno diferente a lo que se suele encontrar en los libros. Así que busque crear uno totalmente partiendo del PE. Personalmente quise crear un problema variando el PE justamente para que ayude a la comprensión y solución del problema de forma autónoma por el estudiante quienes podrían tener muchas dudas (como se muestra en los PE). Sin embargo, no estoy convencida de que el Pp ayude a comprender los conceptos de función cuadrática.

Sobre el problema pre creado

1. ¿Cuáles son las características similares/diferentes entre el problema pre creado y el problema del episodio?

   Las características diferentes son: el contexto en Pp es extra matemático, se relaciona con actividades que el estudiante realiza, incluso podrían recrear.

   La solución del problema implica primero procedimiento intuitivo y que se extiende a una comprobación haciendo uso de la función cuadrática. En el caso del PE implica procedimientos directos y con argumentos que requieren un dominio previo del estudiante.

   El entorno matemático en el PE son los que corresponden al grado correspondiente, en el caso de Pp hace mayor incidencia en conceptos previos.

2. ¿Cuál es tu percepción sobre la estrategia Episodio, reflexión didáctica, problema pre, problema pos (ERPP) para crear problemas didácticamente buenos?

	SI	NO
Me parece Interesante	X	
Me parece Útil	X	
Me parece fácil de entender	X	
Me parece fácil de aplicar	X	
Me puede permitir mejorar mi práctica docente	X	

Fundamenta tu respuesta:

El problema episodio marca las pautas, brinda información de lo que se tiene que considerar para crear un problema, para ello es importante hacer una análisis del problema episodio, así sabremos que hacer o no hacer partiendo de ese problema. La reflexión didáctica es una etapa importante porque es de ahí que se puede obtener los resultados de la estrategia: crear, mejorar o corregir. Y si se realiza en un grupo de interaprendizaje tendrá resultados óptimos.

3. ¿Qué recomendarías para una mejor implementación del taller de creación de problemas?

Cuando una creación es sometida a un análisis externo ayuda a que el creador pueda observar lo que no había tomado en cuenta antes, y el que analiza se vuelve experto. Por ello recomendaría que en la parte práctica se inicie el análisis en grupos y que se socialice, es decir, que un grupo analice un solo problema. Al final puede realizarse un análisis individual de la creación.