

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

**ANÁLISIS ESTRUCTURAL Y MODAL DE LA HÉLICE DE UN
AEROGENERADOR DE 3kW DE POTENCIA MEDIANTE
SIMULACIÓN NUMÉRICA COMPUTACIONAL**

ANEXOS

**Tesis para optar el Título de Ingeniero Mecánico,
que presenta el bachiller:**

RENATTO MARCELLO YUPA VILLANUEVA

ASESOR: Dr. Rosendo Franco Rodríguez

CO-ASESOR: Dr. Quino Valverde Guzmán

Lima, Junio del 2016

ANEXO 1

GUÍA GENERAL DE SIMULACIÓN NUMÉRICA

En este capítulo se explicará detalladamente el procedimiento general a seguir para las simulaciones numéricas a realizar. Los pasos que se detallan a continuación, son comunes para la simulación de flujo externo en ANSYS CFX, para la simulación estructural estática en ANSYS MECHANICAL y para la simulación estructural dinámica en ANSYS MECHANICAL.

1. Definición del problema

Para realizar el análisis de sistema físico usando simulación numérica, es un requerimiento definir el problema, es decir fijarnos los objetivos. Es de vital importancia este paso, ya que condiciona totalmente a los tres pasos siguientes. Para poder definir el problema debemos enfocarnos en aspectos fundamentales, que los mencionaré a continuación.

- Delimitar correctamente el sistema físico a estudiar.
- Definir qué variables del problema son las que se quiere hallar.
- Incorporar las condiciones conocidas del sistema físico, es decir, toda la información que se conozca sobre el sistema físico delimitado (datos de entrada).

Una vez que se definió correctamente el problema, se puede proceder a los siguientes pasos.

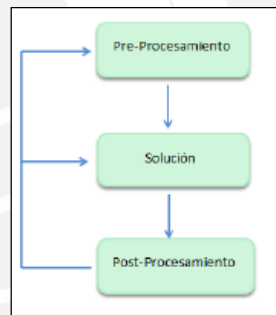


Figura A1.1. Procedimiento general de simulación numérica.

2. Pre-procesamiento

La etapa del pre-procesamiento es la primera etapa de la simulación numérica que se realiza en el computador, específicamente en el software utilizado, el cual para fines de la presente tesis es ANSYS. En esta etapa, se configuran todos los parámetros necesarios y modelos físicos a utilizar. Es de vital importancia la correcta realización del pre-procesamiento en concordancia con el objetivo de la simulación, ya que, de no ser así, los resultados obtenidos en la etapa de solución serán incorrectos (a pesar que la configuración del pre-procesamiento sea incorrecta, la simulación puede llegar a converger totalmente; sin embargo, los resultados no serán correctos). Por tal motivo, es necesario que el usuario adquiera conocimientos previos del software y de la teoría del método de los elementos finitos, para poder discernir con criterio entre lo correcto e incorrecto durante la

simulación. La etapa del pre-procesamiento se subdivide en cinco pasos consecutivos, los cuales se explican a continuación.

2.1. Definición de datos de entrada

En esta etapa se recopila toda la información que se tiene sobre el problema a estudiar, ya que serán los datos de entrada para la simulación numérica. Es importante resaltar que se debe discernir de entre todos los datos, los datos relevantes. Asimismo, en esta etapa se deben hacer todas las simplificaciones posibles del sistema físico a estudiar, siempre y cuando los resultados finales de la simulación se mantengan de acorde con la realidad.

2.2. Diseño CAD del modelo: Definición del dominio de interés

El diseño CAD del modelo se realiza tomando en consideración el dominio de interés (parte del sistema físico delimitado donde el software resuelve las ecuaciones gobernantes). Es importante la correcta definición del dominio de interés, ya que únicamente sobre este dominio se realiza la simulación numérica. La definición del dominio depende principalmente del sistema físico delimitado y del objetivo del problema.

El diseño CAD del modelo se realiza con ayuda de un software CAD. ANSYS trae algunos modeladores CAD 3D tales como SpaceClaim o Design Modeler, los cuales son muy sofisticados. La elección del modelador CAD depende del dominio del usuario. Sin embargo, para fines de la presente tesis, se eligió usar Autodesk Inventor como software CAD, ya que presenta grandes facilidades al dibujante al modelar en 3D. No existe ninguna restricción al crear el modelo 3D en Autodesk Inventor y exportarlo a ANSYS. Al realizar el modelo 3D, se recomienda simplificar al máximo la geometría del dominio de interés. De esta manera, se aligera los posteriores procesos durante la simulación como es la etapa de solución, por ejemplo. Asimismo, una vez que el modelo 3D es exportado a ANSYS, es recomendable “limpiar” la geometría del mismo, es decir, corregir errores de dibujo tales como cruces de aristas, etc. Esto se realiza con el fin de reducir la complejidad de las mallas y, al mismo tiempo, hacer de la geometría lo más cercana a la realidad. Asimismo, la facilidad en el manejo del software CAD es imprescindible en esta etapa.

2.3. Parámetros de mallado

Luego de tener definido y creado el dominio de interés, se procede al mallado. Se define mallado como el proceso de dividir el dominio de interés en subdominios mucho más pequeños (elementos finitos), donde a su vez se resolverán las ecuaciones gobernantes del modelo. Sin embargo, antes de realizar el mismo, se debe definir los parámetros del mallado, tales como tipo de mallado (geometría

del elemento a usar), método de mallado a utilizar, etc. En general, durante el mallado se debe cumplir con las siguientes indicaciones:

- La selección de la forma del elemento (tetraédrico, hexagonal, etc.) debe ser completamente entendido por el solver del ANSYS.
- Los elementos finitos deben cubrir al dominio de interés en su totalidad.
- Todos los elementos finitos deben estar correctamente interconectados.
- Por ningún motivo debe existir elementos superpuestos.
- La distribución de los elementos finitos debe ser la adecuada para capturar las características geométricas.

Los principales parámetros de mallado (método de mallado y tipo de elemento) se explican a continuación:

Tipos de elementos finitos

Existen varios tipos de elementos finitos, entre los más importantes se pueden mencionar:

- **Elementos hexaédricos:** Elementos de 6 caras y 3 secciones de cuadriláteros. Pueden ser de 8 nodos para elementos lineales, y 20 nodos para elementos cuadráticos. En la Figura A1.2, se puede apreciar lo mencionado.

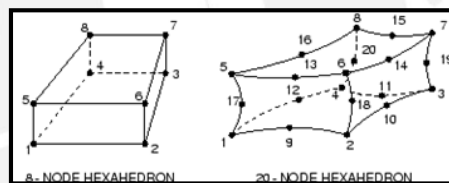


Figura A1.2. Elementos hexaédricos: lineal de 8 nodos (izquierda) y cuadrático de 20 nodos (derecha).

- **Elementos tetraédricos:** Elementos de 4 caras triangulares y 6 secciones triangulares. Cada sección del tetraedro se construye haciendo pasar un plano desde un borde hasta el punto en el borde opuesto más cercano. Pueden ser de 4 nodos para elementos lineales y 10 nodos para elementos cuadráticos. En la Figura A1.3, se puede apreciar lo antes mencionado.

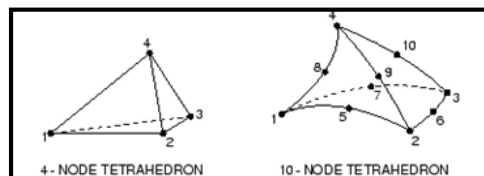


Figura A1.3. Elementos tetraédricos: lineal de 4 nodos (izquierda) y cuadrático de 10 nodos (derecha).

- **Elementos prismáticos:** Elementos de 5 caras, 2 de ellas triangulares y 3 de ellas cuadriláteros. Pueden tener 6 nodos para elementos lineales y 15 nodos para elementos cuadráticos. En la Figura A1.4, se puede apreciar lo antes mencionado.

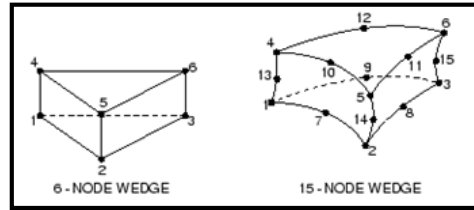


Figura A1.4. Elementos prismáticos: lineal de 6 nodos (izquierda) y cuadrático de 15 nodos (derecha).

Finalmente, es importante precisar que la principal diferencia entre los elementos lineales y los elementos cuadráticos es la cantidad de nodos que poseen los elementos. A mayor cantidad de nodos por elemento, se consigue una mejor interpolación de resultados de las variables evaluadas en el elemento finito.

Métodos de mallado en ANSYS

El software ANSYS tiene diversos métodos de mallado 3D, los principales se detallan a continuación:

- **Mallado automático:** Es un método de mallado que combina el mallado tetraédrico patch conforming con el mallado de barrido, los cuales se explican posteriormente. Este método identifica todas las partes que pueden ser malladas con el método de barrido y procede a mallar de tal manera. Luego, todas las partes restantes son malladas con el método de tetraedros patch conforming.
- **Mallado tetraédrico:** Es un método de mallado que genera elementos tetraédricos, para los cuales existen dos algoritmos de mallado:
 - ✓ **Patch Conforming:** Este algoritmo es preferentemente usado para geometrías limpias, es decir, geometrías reparadas y simplificadas. Al usar este algoritmo, el mallado se realiza a partir de las caras y bordes, finalizando en los volúmenes grandes. En términos coloquiales, al usar este algoritmo se consigue que los elementos finitos se adapten a la geometría, y no al revés.
 - ✓ **Patch Independent:** En este algoritmo, en contraste con el anterior descrito, primero se genera una malla desde el volumen central y hacia los bordes y caras, de tal manera que no necesariamente se respeta la geometría, en los detalles. En términos coloquiales, al usar este algoritmo se consigue que la geometría se adapte a la forma de los elementos finitos, y no al revés.
- **Mallado hexagonal:** Es un método de mallado que genera elementos hexaédricos. La malla hexaédrica se caracteriza por presentar un número reducido de elementos, con lo cual se mejora el tiempo de convergencia del modelo. Asimismo, se consigue una reducción del error numérico con lo que se mejora la precisión del cálculo. Estas comparaciones son válidas

para mallas tetraédrica y hexaédrica de primer orden (lineales). Existen dos métodos de mallados hexaédricos, los cuales se describen a continuación.

- ✓ **Hexaedros dominantes:** El método hexaedro dominante se caracteriza por crear una malla de elementos hexaédricos dominante a los elementos tetraédricos. En términos coloquiales, este método de mallado crea elementos hexaédricos en su mayoría (donde la geometría del modelo permite la creación de elementos hexaédricos), y crea elementos tetraédricos (donde la geometría no permite que se creen elementos hexaédricos).
- ✓ **Mallado de barrido:** El mallado de barrido genera únicamente elementos hexaédricos los cuales se forman a partir de elementos cuadriláteros que se forman en la superficie a partir de la cual se barre. Posteriormente, se genera una malla 3D de elementos hexaédricos que se barren desde la superficie inicial. Los elementos de la superficie de llegada deben tener la misma topología que los elementos de la superficie inicial. Cabe mencionar que circunstancialmente se pueden crear elementos prismáticos en el barrido. La siguiente figura muestra lo antes mencionado.

Estos métodos combinan los diferentes tipos de elementos finitos, de acuerdo a las necesidades del problema. Cada método presenta ventajas y desventajas frente a los otros métodos. La elección depende del usuario y del tipo de problema a resolver. Asimismo, además de configurar el método de mallado a utilizar y los tipos de elementos, se debe definir las configuraciones globales y locales del mallado.

Configuraciones globales

Las configuraciones globales de malla se utilizan para el ajuste global en la estrategia de mallado, que incluye todas las funciones de sizing, inflation, smoothing, parámetros de entrada, etc. Son muy útiles para resolver las principales características del modelo con un mínimo de insumos. A continuación, una breve descripción de los principales parámetros en la configuración global:

- **Physics based settings:** Se establece la física de preferencia, es decir, si se trata de un problema CFD o un problema de mecánica de sólidos.
- **Global sizing controls:** Se establecen configuraciones globales de tamaño de elemento.
- **Inflation:** Inflation es una herramienta que sirve para crear un mallado por capas cercano a una superficie o superficies de interés. Esta herramienta es usada principalmente para problemas de interacción fluido-estructura donde se requiere información en la capa límite del fluido. En este punto, se establece la configuración global de la herramienta en el mallado. En la siguiente figura se aprecia con detalle lo antes mencionado.

- **Patch confirming options:** Se establecen configuraciones globales sobre el algoritmo patch conforming para mallados tetraédricos.
- **Statistics:** Es una herramienta que sirve para visualizar las estadísticas de mallado obtenidas luego de generar la malla. Posteriormente, se explica a detalle este punto.

Configuraciones locales

En las configuraciones locales se establece configuraciones específicas de malla para ciertas zonas o superficies de interés que las requiera. A continuación, una breve descripción de los principales parámetros en la configuración local:

- **Sizing:** Es una herramienta que sirve para definir tamaños de elementos finitos para zonas determinadas de la malla global.
- **Contact sizing:** Es una herramienta que sirve para definir tamaño de elementos para zonas de contacto.
- **Mapped face meshing:** Es una herramienta que sirve para estructurar elementos en una cara determinada.
- **Inflation:** Sirve para crear elementos por capas, como se explicó anteriormente. Se configura esta herramienta en la configuración local para superficies específicas.

Una vez definido todos estos parámetros, se puede pasar a generar la malla.

2.4. Mallado

El siguiente paso es generar el mallado. Con toda la configuración realizada en el paso anterior, solo queda por generar rápidamente el mallado. Es importante mencionar en este punto, que se puede visualizar y evaluar el tipo, la calidad y las propiedades del mallado, luego de la realización del mismo. En caso la malla no sea la adecuada, se puede refinar y dar ajustes para llegar a la calidad de malla adecuada. A continuación, se describe las estadísticas de mallado más importantes.

- **Element quality:** La calidad de elemento proporciona una calidad métrica la cual varía entre 0 y 1. Esta métrica se basa en la relación entre el volumen y la longitud del borde para un elemento dado. Un valor de 1 indica un cubo o un cuadrado perfecto, mientras que un valor de 0 indica que el elemento tiene volumen cero o negativo.
- **Aspect ratio:** La relación de aspecto es una proporción entre el ancho y la altura para un elemento. La relación de aspecto ideal es 1 (para elementos 2D es un triángulo equilátero o un cuadrado).
- **Jacobian ratio:** La relación de jacobiano se calcula y se prueba para todos los elementos excepto triángulos y tetraedros que:

- ✓ Son lineales (no tienen nodos intermedios).
- ✓ Tienen nodos intermedios, los cuales están perfectamente centrados.

Una relación alta indica que el espacio de elementos intermedios de mapas y el espacio real está convirtiendo, computacionalmente, al modelo en poco fiable.

- **Parallel Deviation:** Es una medida de qué tan inclinados están 2 lados paralelos y opuestos de elemento con respecto a otros 2 lados paralelos y opuestos en el mismo elemento. La siguiente figura ayuda a concebir este concepto.

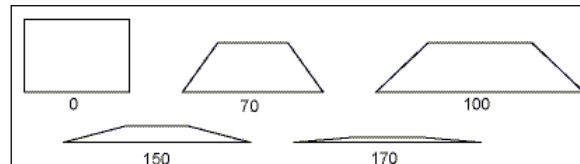


Figura A1.5. Desviación paralela para un elemento 2D cuadrilátero.

La desviación paralela ideal es 0° , sin embargo en la imagen se muestran desviaciones paralelas de 70° , 100° , 150° y 170° .

- **Skewness:** La asimetría es una de las principales medidas de la calidad de una malla. Esta mide qué tan cerca a la ideal (triángulo equilátero o cuadrado) está una cara del elemento.
- **Orthogonal Quality:** La calidad ortogonal es una medida de la calidad de malla que se calcula de la siguiente manera:
 - ✓ Se traza un vector desde el centroide del elemento hacia el centroide de cara una de las caras del elemento.
 - ✓ Se traza un vector normal a cada cara del elemento.
 - ✓ La relación entre qué tan parecidos son dichos vectores es la calidad ortogonal.

2.5. Parámetros de control de la simulación (condiciones de borde)

Los parámetros de control son los que determinan el tipo de modelamiento, los alcances que tiene la simulación y el grado de precisión del cálculo. En otras palabras, los parámetros de control de la simulación son las condiciones de frontera o borde que se aplican tanto en los límites del dominio de interés, como dentro del mismo.

Condiciones de borde más utilizadas en problemas CFD

- Material del dominio de interés
- Tipo de turbulencia
- Condiciones de ingreso, salida, etc.
- Velocidad inicial
- Temperatura inicial
- Tipo de condición de borde, etc.

Condiciones de borde más utilizadas en problemas de mecánica de sólidos

- Presión
- Momentos
- Fuerzas puntuales o distribuidas
- Velocidad
- Contactos
- Apoyos
- Condiciones de temperatura

La correcta configuración de los parámetros de control de la simulación van de acuerdo al objetivo del problema e influyen totalmente en la simulación. Por ello, esta etapa debe ser de sumo cuidado. Cada parámetro elegido debe ser estudiado previamente. Como se mencionó anteriormente, que la simulación converja no asegura la correcta solución del problema.

3. Solución

Transcurrida la etapa del pre-procesamiento, donde se configuró todo el modelo, se procede a la solución. En esta etapa, el proceso seguido es el siguiente:

- Las ecuaciones diferenciales que rigen el modelo se integran sobre todos los elementos finitos o volúmenes de control (en caso de usar el método de los elementos finitos o el método de los volúmenes finitos) en toda la región de interés.
- Luego, el sistema de ecuaciones integrales se convierten en un sistema de ecuaciones algebraicas mediante la generación de un conjunto de aproximaciones para los términos de las ecuaciones integrales.
- Finalmente, el sistema de ecuaciones algebraicas se resuelven de manera iterativa.

Para problemas de CFD:

Durante la última sub-etapa, se menciona que los sistemas de ecuaciones algebraicas se resuelven mediante método iterativos. Al usar dicho método, el solucionador calcula de forma inherente los errores relativos de la iteración. Conforme se acerca más a la realidad, el error relativo es muy pequeño. Entonces, para CFD, se dice que la simulación converge cuando los errores relativos de las variables monitoreadas, llegan al valor de 1×10^{-4} , por defecto para ANSYS CFX. El usuario también puede monitorear las variables creadas durante la etapa de pre-procesamiento, puede modificar los criterios de para de la simulación (máximo número de iteraciones, error relativo permisible, etc.), en el caso de ANSYS CFX.

4. Post-procesamiento

En esta última etapa, el objetivo es obtener la información (cualitativa y cuantitativa) del dominio de interés simulado, para poder mostrarla de manera atractiva, posteriormente. Para ello, el solucionador (solver) generó un archivo de solución al converger el modelo simulado y lo transfiere al post-procesamiento. En esta etapa, se puede realizar procesamiento de gráficos interactivos, generación de reportes, gráficos y tablas, etc. En general, la etapa del post-procesamiento en ANSYS presenta las siguientes características:

- Una interfaz gráfica de usuario que incluye un panel visor en el que se representa toda la producción gráfica del post-procesamiento de ANSYS.
- Soporte para una variedad de objetos gráficos y geométricos para la creación de parcelas de post-procesamiento, visualización de la malla, y para definir las ubicaciones para el cálculo cuantitativo.
- Variables escalares y vectoriales definidas por el usuario.
- Congelación de variables.
- Generación de un reporte de resultados.
- Generación de una variedad de objetos gráficos donde la visibilidad, la transparencia, el color y la visualización de línea / caras puede ser controlado.

Asimismo, es importante mencionar en esta etapa que el usuario debe analizar con precaución y criterio ingenieril los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas. Para tal caso, normalmente, se estila realizar alguna comprobación de los resultados, mediante cálculos teóricos simples o experimentación.

ANEXO 2

TEORÍA BÁSICA DE MATERIALES COMPUESTOS

1. Fundamento teórico

1.1. Definición

Es llamado material compuesto que está compuesto de dos o más fases. Este compuesto posee propiedades mecánicas superiores a la de los materiales constituyentes. Generalmente una de las fases es la más rígida y fuerte, la cual es llamada refuerzo, mientras que la fase menos rígida y débil es llamada matriz.

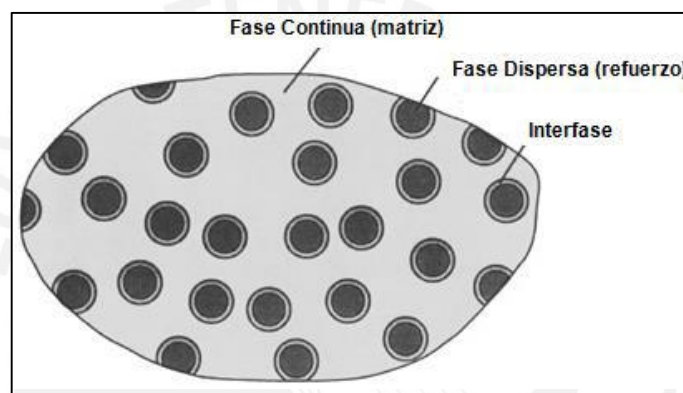


Figura A2.1. Material compuesto

1.2. Anisotropía de los materiales compuestos

Los materiales compuestos poseen ventajas únicas sobre los materiales monolíticos, tales como alta resistencia, alta rigidez, baja densidad. La base del desempeño superior estructural de los materiales compuestos radica en la alta resistencia específica, la alta rigidez específica y en el carácter anisotrópico y heterogéneo del material. Esto último proporciona al material compuesto varios grados de anisotropía para la configuración óptima del material. Algunas propiedades del material, tales como la densidad, calor específico, no poseen ninguna direccionalidad asociada con estas y son descritas por una cantidad escalar para materiales isotrópicos y anisotrópicos. Por otro lado, propiedades tales como la rigidez, coeficiente de Poisson, resistencia, conductividad térmica y conductividad eléctrica están asociadas con la dirección y están en función de la orientación en materiales anisotrópicos. **Las mayores diferencias ocurren entre las propiedades en la dirección longitudinal (fibras) y transversal (normal a las fibras).**

En la siguiente figura A2.2 los subíndices 1, 2, y 3 indican respectivamente las propiedades que presenta el material compuesto en los ejes longitudinales (dirección de las fibras), transversales (normal a las fibras), y fuera del plano.

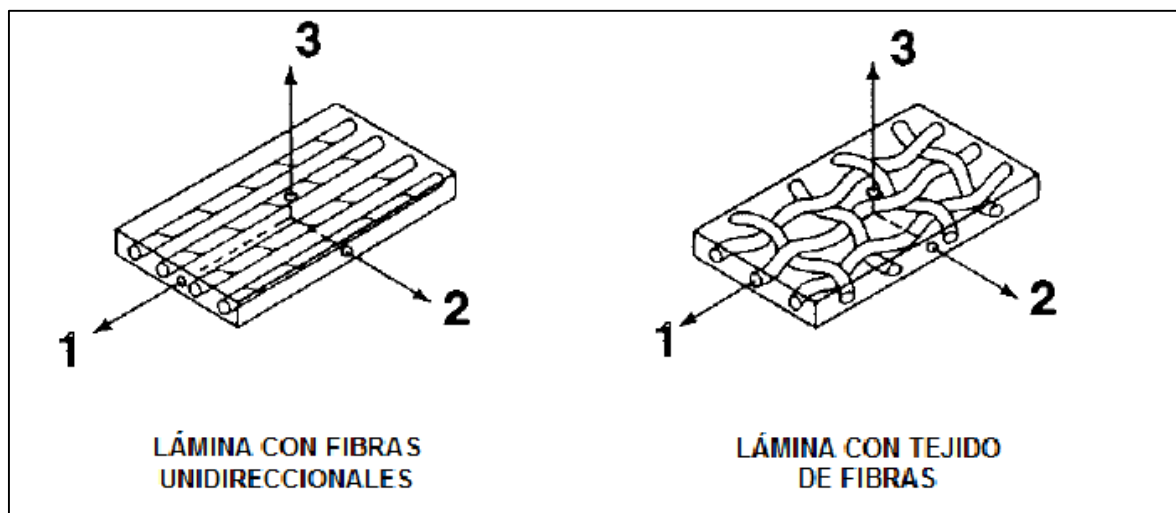


Figura A2.2. Orientación de los ejes en función de las fibras.

1.3. Características y configuración de la lámina y laminado

Una lámina es una capa plana (o curvada) de una matriz con fibras unidireccionales o tejido de fibras. La lámina es un material ortotrópico, el cual se define como aquel material que presenta tres ejes perpendiculares entre sí, y presenta propiedades constantes definidas en cada una de estas tres direcciones (no necesariamente iguales), con ejes principales en la dirección de las fibras (longitudinal), transversal a las fibras (plano transversal) y normal al plano de la lámina. Estos ejes principales se les designa como 1, 2 y 3 respectivamente y se ilustra a continuación.

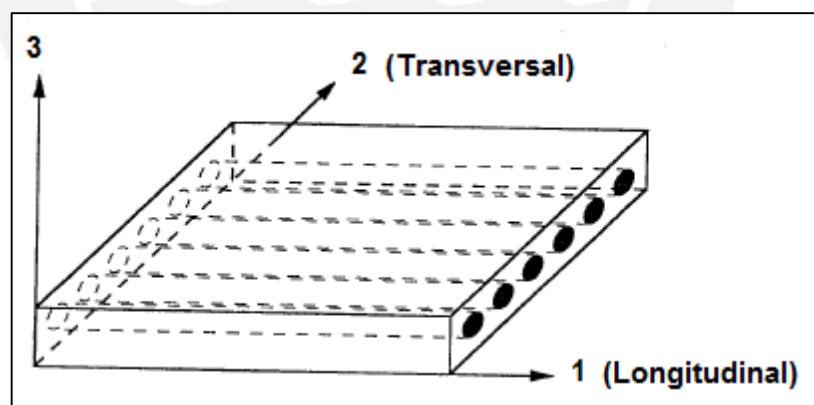


Figura A2.3. Ejes principales de un laminado.

Un laminado consiste de dos o más laminas unidireccionales u orientadas en distintas direcciones unidas unas a otras.

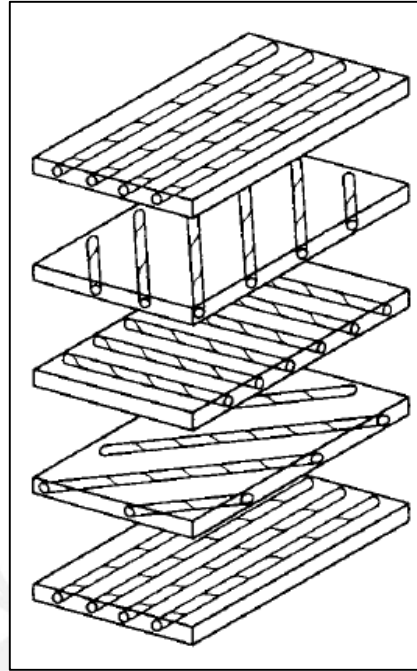


Figura A2.4. Secuencia de laminado.

Los laminados compuestos se designan indicando el número, tipo, orientación, y secuencia de apilamiento de las láminas. A continuación se muestran algunos ejemplos de designaciones de laminados.

- Unidireccionales: $[0 / 0 / 0 / 0] = [0_4]$
- Cruzado simétrico $[0 / 90 / 90 / 0] = [0 / 90]_s$
- Simétrico orientado $[+45 / -45 / -45 / +45] = [\pm 45]_s$
 $[60 / -60 / 60 / -60 / -60 / 60 / -60 / 60] = [\pm 60]_{2s}$
- Multidireccional $[0 / 0 / 45 / -45 / 0 / 0 / 0 / 0 / -45 / 45 / 0 / 0] = [0_2 / \pm 45 / 0_2]_s$
- Híbrido $[0^G / 45^K / -45^K / 90^C / -45^K / 45^K / 0^G] =$
 $[0^G / \pm 45 / \overline{90}^C]_s$

Donde los subíndices y símbolos significan losiguiente:

Subíndice = Múltiplo de láminas o número de laminas

s= Secuencia simétrica

Barra superior denota que el laminado es simétrico respecto al plano medio de dicha lámina.

En el caso de laminados híbridos el índice superior G, K, y C denotan fibras de vidrio, Kevlar (aramida), y carbono (grafito), respectivamente.

1.4. Propiedades básicas de la lámina

La lámina unidireccional es considerada la parte de construcción básica de cualquier laminado o estructura compuesta. Las propiedades necesarias para su análisis y diseño de estas estructuras son las propiedades básicas de la lámina.

Para el algoritmo que se desarrollará más adelante se desprecia el esfuerzo o deformación que se pueda generar en el eje z , normal al plano del laminado, las cuales son algunas de las consideraciones en las cuales está basado el modelo matemático. Es por ello que las propiedades son las siguientes:

- E_1, E_2 = Módulo de young a lo largo de las direcciones principales del plano.
- G_{12} = Módulo de corte en el plano 1 – 2 (igual al G_{21}).
- ν_{12}, ν_{21} =
Coeficiente de Poisson (el primer subíndice indica la dirección de la carga y el segundo denota la dirección de la deformación, estos dos valores no son iguales).
- F_{1t}, F_{2t} =
Resistencia a la tracción a lo largo de las direcciones principales en el plano.
- F_{12} = Resistencia al corte en el plano 1 – 2 (esta valor es igual a F_{21}).

1.5. Propiedades de los materiales constituyentes

1.5.1. Fibras

Existe una gran variedad de fibras como refuerzo para materiales compuestos. Las características que se desean en estos refuerzos de fibras son alta resistencia, alta rigidez y baja densidad relativa.

Las fibras de vidrio son las que más comúnmente se usan cuando se requiere un buen desempeño mecánico en los materiales compuestos, debido a su alta resistencia a la tracción y bajo costo.

A continuación se muestra la figura 9 que muestra la curva de esfuerzo – deformación de fibras típicas usadas como refuerzos.

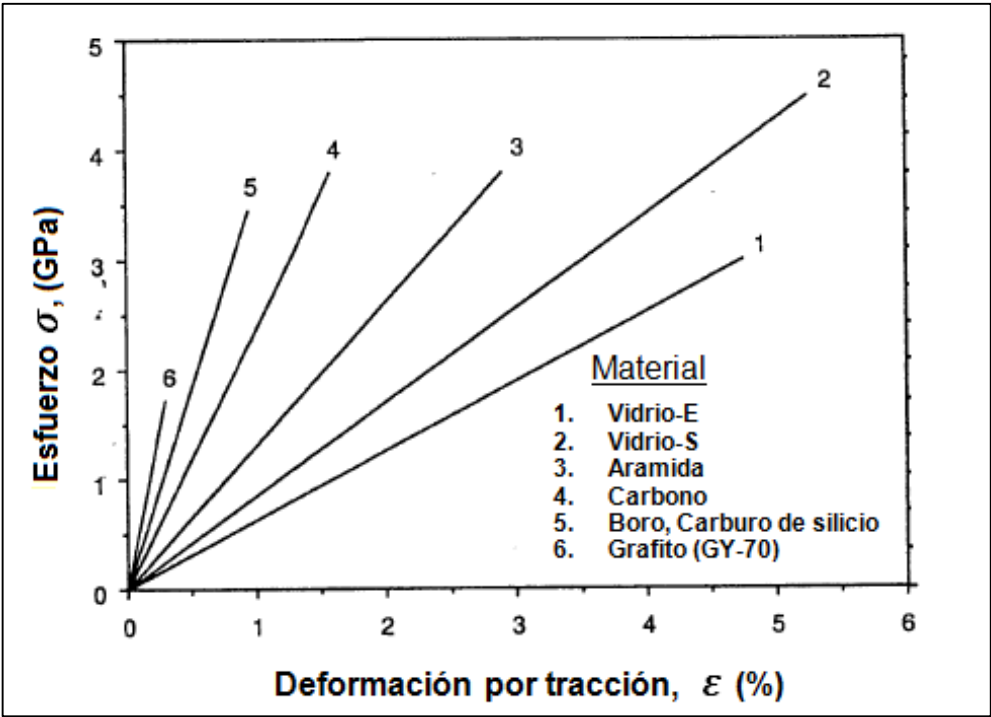


Figura A2.5. Curva esfuerzo – deformación de fibras típicas

1.5.2. Matrices

Los tipos de matrices que se usan en materiales compuestos: polimérica, metálica, cerámica, carbono. Las matrices que comúnmente se usan son las poliméricas, las cuales pueden ser termoestables (epoxi, poliamida, poliéster) o termoplásticas (polisulfona, poliéster-éter cetona). Las matrices de poliéster poseen una buena estabilidad en sus propiedades mecánicas, químicas y eléctricas, ofrecen además una buena resistencia a la corrosión. Las matrices de poliéster más usadas son del tipo ortoftálico y la isoftálica. Las matrices de poliéster ortoftálicas son las matrices de uso general, es decir los elementos que están incluidos en su polimerización son ácidos saturados de bajo costo, es por eso que presentan bajas propiedades mecánicas y químicas comparadas con la matriz de poliéster isoftálica. La matriz de poliéster isoftálica está basada en el ácido isoftálico y en el compuesto orgánico anhídrido maleico. La incorporación del ácido isoftálico crea una resina de alto peso molecular, dando buenas propiedades químicas y mecánicas. En la siguiente figura A2.6 se muestran las propiedades mecánicas que presentan estos dos tipos de poliéster.

Material	Resistencia a la tracción (MPa)	Módulo de elasticidad (GPa)	Elongación (%)	Resistencia a la flexión (MPa)	Resistencia a la compresión (MPa)
Ortoftálico	55	3.45	2.1	80	-
Isoftálico	75	3.38	3.3	130	120

Figura A2.6. Propiedades mecánicas de los dos tipos de poliéster.

1.6. Propiedades de materiales compuestos típicos

Los materiales compuestos que incorporan los constituyentes discutidos anteriormente muestran una amplia gama de **características**. El **comportamiento de los materiales compuestos unidireccionales en la dirección de la fibra, en especial la rigidez, es usualmente dominada por las propiedades de las fibras**. Las curvas de esfuerzo-deformación típicas de materiales compuestos unidireccionales sometidos a tracción en la dirección de la fibra se muestran a continuación, comparadas con la de aluminio. En estas curvas se puede observar que mientras la rigidez aumenta, la deformación a la rotura disminuye. Además **que todos los materiales compuestos mostrados presentan un comportamiento casi lineal además de tener un esfuerzo a la rotura mayor al aluminio**. La siguiente figura A2.7 muestra los materiales sometidos a ensayos de tensión.

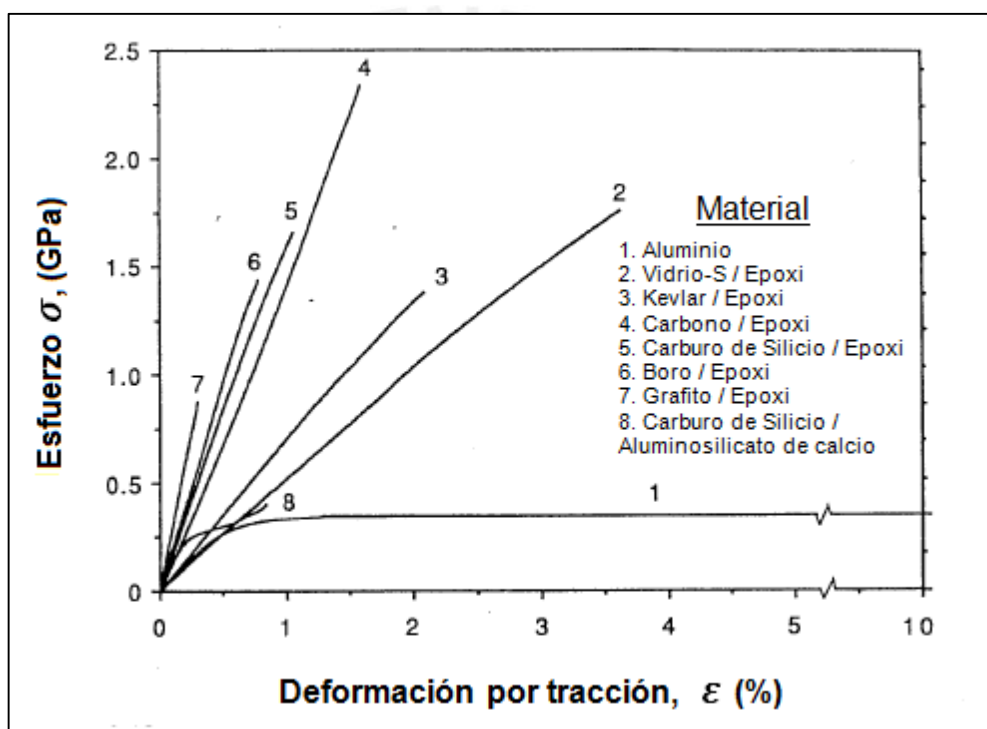


Figura A2.7. Resultados de materiales sometidos a ensayos de tensión.

El comportamiento de materiales compuestos unidireccionales en la dirección transversal a las fibras, en especial la resistencia, está dominado por la matriz. Las curvas de esfuerzo-deformación de materiales compuestos unidireccionales típicos sometidos a tracción en la dirección transversal a las fibras se muestran a continuación. Todos de esos materiales exhiben un comportamiento casi lineal, con bajas deformaciones a la rotura y bajas resistencias, también se observa que los materiales que poseen una matriz epoxi, tienen resistencia transversal casi iguales.

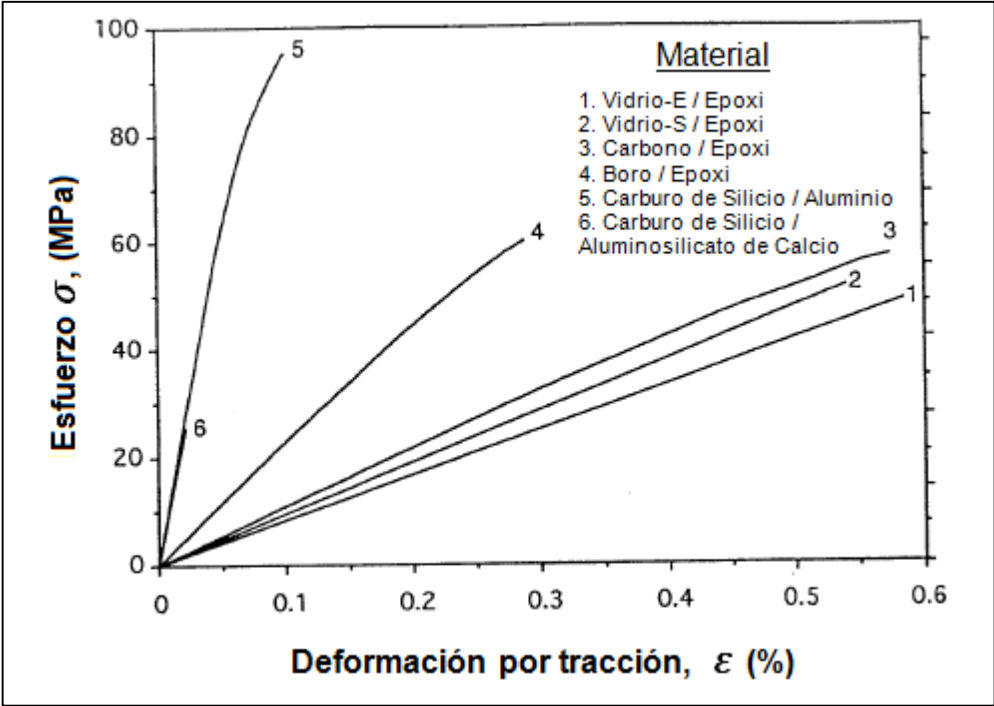


Figura A2.8. Curva de esfuerzo deformación de materiales compuestos unidireccionales sometidos a tensión.

Se muestra en la siguiente figura A2.9 una lista de propiedades que presentan algunos de los materiales compuestos típicos. Las propiedades mostradas en la figura A2.9 mencionada anteriormente fueron obtenidas a una temperatura ambiental (24 °C) y condición de humedad cero.

Propiedades	Vidrio-E / Epoxi	Vidrio-S / Epoxi	Vidrio Tejido / Epoxi	Kevlar / Epoxi	Carbono / Epoxi
Módulo de Elasticidad Longitudinal (E_1 , GPa)	39	43	29.7	87	142
Módulo de Elasticidad Transversal (E_2 , GPa)	8.6	8.9	29.7	5.5	10.3
Módulo Cortante en el Plano (G_{12} , GPa)	3.8	4.5	5.3	2.2	7.2
Coefficiente de Poisson Principal (ν_{12})	0.28	0.27	0.17	0.34	0.27
Coefficiente de Poisson Secundario (ν_{21})	0.06	0.06	0.17	0.02	0.02
Resistencia a la tracción Longitudinal (σ_{1t}^u , MPa)	1080	1280	367	1280	2280
Resistencia a la tracción Transversal (σ_{2t}^u , MPa)	39	49	367	30	57
Resistencia al corte en el plano (τ_{6}^u , MPa)	89	69	97.1	49	71
Deformación última a tracción longitudinal (ϵ_{1t}^u)	0.028	0.029	0.025	0.015	0.015
Deformación última a tracción transversal (ϵ_{2t}^u)	0.005	0.006	0.025	0.005	0.006
Resistencia a la compresión longitudinal (σ_{1c}^u , MPa)	620	690	549	335	1440
Resistencia a la compresión transversal (σ_{2c}^u , MPa)	128	158	549	158	228

Figura A2.9. Propiedades de algunos materiales compuestos.

ANEXO 3

DESARROLLO DEL ALGORITMO MATEMÁTICO DE LA TEORÍA CLÁSICA DE LAMINADO

1. Relación esfuerzo-deformación en una material ortotrópico.

Como se mostró en la sección anterior un material compuesto reforzado con fibra de vidrio unidireccional posee 3 ejes principales (1, 2 y 3), el eje 1 es el eje donde las fibras están orientadas, el eje 2 es el eje transversal a las fibras, donde generalmente las propiedades del compuesto están determinadas por la matriz, y el eje 3 que es el eje normal a los ejes 1 y 2 (ejes en el plano). Esta definición hace que el material se denomine como ortotrópico, como se definió anteriormente un material ortotrópico es aquel que posee tres ejes perpendiculares entre sí, y presenta propiedades constantes definidas a lo largo de estos, además estos ejes son los ejes principales del material. El estado de esfuerzos principales para un volumen definido se muestra en la Figura A3.1.

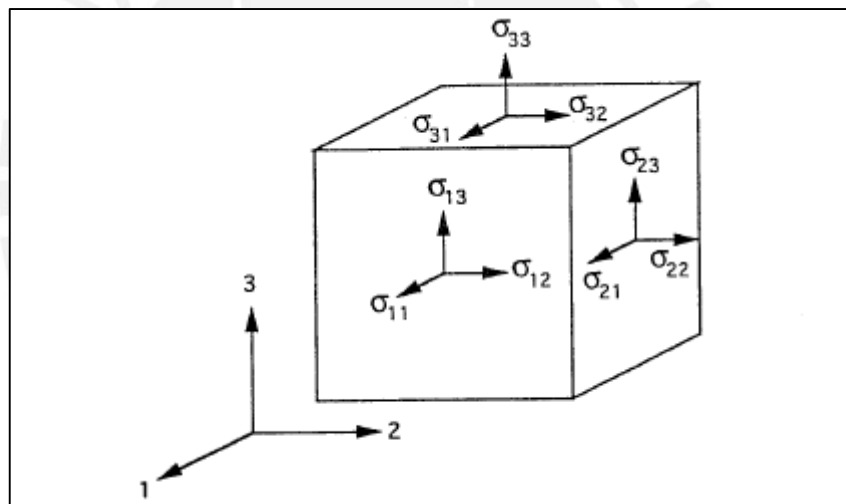


Figura A3.1. Estado de esfuerzos principales.

Para el estado de esfuerzos anterior se cumple lo siguiente:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

(Ec.3.1)

$$\sigma_{11} = \sigma_1 ; \sigma_{22} = \sigma_2 ; \sigma_{33} = \sigma_3 ; \sigma_{23} = \tau_4 ; \sigma_{31} = \tau_5 ; \sigma_{12} = \tau_6$$

(Ec.3.2)

Por lo tanto las matrices de elasticidad que caracterizan el comportamiento de este material ortotrópico son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.3.3.})$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.3.4.})$$

En las ecuaciones (2.3) y (2.4), las constantes C_{ij} y S_{ij} , son parámetros elásticos que dependen de las constantes de ingeniería (módulo de elasticidad, coeficiente de poisson, módulo cortante).

Para cada una de las matrices anteriores se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= C_{ji} \\ S_{ij} &= S_{ji} \end{aligned} \quad (\text{Ec.3.5})$$

Se muestra en las ecuaciones anteriores que un material ortotrópico puede ser caracterizado por nueve constantes elásticas independientes. La matriz $[S_{ij}]$ es inversa de $[C_{ij}]$.

Se pueden hacer las siguientes observaciones de las relaciones de esfuerzo-deformación que se muestran en 2.3 y 2.4.

1. No existe interacción alguna entre los esfuerzos normales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y las deformaciones cortantes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, es decir esfuerzos normales actuando en las direcciones principales del material solo generan deformaciones normales.
2. No existe interacción entre los esfuerzos cortantes τ_1, τ_2, τ_3 , y las deformaciones normales $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ es decir esfuerzos cortantes actuando en los planos principales del material solo generan deformaciones cortantes.
3. No existe interacción entre esfuerzos cortantes y deformaciones cortantes en diferentes planos, es decir un esfuerzo cortante actuando en un plano principal produce una deformación cortante en ese plano.

2.1.1 Material ortotrópico bajo esfuerzos en el plano

En la mayoría de aplicaciones estructurales los materiales compuestos son usados en la forma de laminados delgados, sometidas a cargas en el plano del laminado. Entonces el material compuesto (o laminado) puede ser considerado a estar bajo una condición de tensión plana, con todos los componentes fuera del plano del laminado (dirección en el eje 3) nulos.

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= 0 \\ \tau_{23} &= \tau_4 = 0 \\ \tau_{13} &= \tau_5 = 0\end{aligned}$$

(Ec.3.6)

La matriz de esfuerzos-deformaciones (Ecuación 2.3) se reduce a la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

(Ec.3.7)

Resolviendo la matriz se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ 0 &= C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3 \\ \gamma_4 &= \gamma_5 = 0 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6\end{aligned}$$

(Ec.3.8)

Eliminando la deformación ε_3 de la Ecuación (2.9), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \left(C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_2 \\ \sigma_1 &= Q_{11}\varepsilon_1 + Q_{12}\varepsilon_2 \\ \sigma_2 &= \left(C_{12} - \frac{C_{23}C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{22} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_2 \\ \sigma_2 &= Q_{12}\varepsilon_1 + Q_{22}\varepsilon_2 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6 = Q_{66}\gamma_6\end{aligned}$$

(Ec.3.9)

Las ecuaciones (2.10) se pueden mostrar resumidas en la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

(Ec.3.10)

La matriz inversa de la ecuación (2.11) es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$$

(Ec.3.11)

Como se puede observar en las matrices anteriores, las relaciones de esfuerzo-deformación bajo cargas en el plano pueden expresarse en cuatro parámetros elásticos independientes Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} , Q_{66} ó S_{11} , S_{12} , S_{22} , S_{66}

2. Algoritmo matemático del material

Para poder usar el algoritmo matemático se siguen los siguientes pasos.

1. Introducir las propiedades básicas de la lámina (E_1 ; E_2 ; G_{12} ; ν_{12})

Todo laminado analizado en el presente trabajo está compuesto por un número determinado de láminas, cada una teniendo una determinada orientación, sin embargo cada una de estas láminas presenta los mismo valores de estos parámetros en sus direcciones principales, se halla estas propiedades básicas de la lámina referente a sus ejes principales mediante ensayos, denominados por los subíndices 1 y 2, que significan respectivamente, el eje longitudinal de las fibras y el eje transversal a estas.

2. Hallar la matriz de rigidez $[Q]_{12}$ de cada lámina referido a sus ejes principales (1,2) usando la ecuación (A.13).

Para este trabajo todas láminas son del mismo material (matriz de poliéster isoftálica reforzada con fibra de vidrio), y debido a esto todas las láminas presentan la misma matriz de rigidez referida a sus ejes principales, sin embargo para posteriores cálculos se necesita tener la matriz referida a los ejes del sistema de referencia del laminado (x , y), y es acá donde se verá el efecto de la orientación de las láminas.

3. Habiendo seleccionado ya los ejes de referencia del laminado (x , y), e indicado las cotas superiores (h_k) e inferiores (h_{k-1}). de cada lámina que conforman el laminado, se procede a calcular las matrices de rigidez del laminado ($[A]$; $[B]$; $[D]$), usando la ecuación (A.33).

4. Se procede a calcular las matrices “inversas” del laminado ($[a]$; $[b]$; $[c]$; $[d]$) según la ecuación (A.38).

5. Se calcula las deformaciones del plano de referencia $[\epsilon^0]_{x,y}$ y curvaturas $[k]_{x,y}$, previamente habiendo ingresado la carga mecánica $[N]_{x,y}$ y momentos $[M]_{x,y}$ a los que está sometido el laminado, según las ecuaciones (A.36) y (A.37).

6. Se calcula las deformaciones de cada lámina “k” ($[\varepsilon^k]_{x,y}$) referido a los ejes de referencia del laminado (x, y), según la ecuación (A.21).

Para analizar la deformación real de cada lámina, se introduce la coordenada “z” de interés para su análisis. Para laminados simétricos bajo carga en el plano (los cuales se analizan en el presente trabajo), se usa la coordenada denominada . Para los casos de laminados sometidos a flexión se analizará los esfuerzos máximos en cada lámina, por lo que la coordenada , será medida desde el plano medio del laminado hasta la cota superior de cada lámina. 29

7. Si los ejes principales de una lámina “k” no coinciden con los ejes de referencia del laminado (x, y), las deformaciones halladas en el paso anterior no serán las principales ($[\varepsilon^k]_{x,y}$), por lo cual se deberá usar la siguiente ecuación (A.40) para poder hallarlas.

8. Calcular los esfuerzos principales (1, 2) en cada lámina $[\sigma^k]_{1,2}$, según la ecuación (2.11).

9. Aplicar una teoría de falla (s).

Existen muchas teorías de falla para materiales compuestos (laminados), pero por practicidad se analiza la teoría del esfuerzo máximo y deformación máxima, los cuales se entienden que si algún valor de los esfuerzos o deformaciones principales halladas de cada lámina supera el valor máximo permisible, el material falla en dicha lámina.

3. Consideraciones básicas del modelo matemático del material

Relaciones entre los parámetros elásticos y las constantes de ingeniería

Los parámetros elásticos C_{ij} y C_{ji} , que se explicaron líneas atrás, se deben expresar en términos de las constantes de ingeniería tales como el módulo de elasticidad, coeficiente de poisson, etc. Estas relaciones son obtenidas realizando experimentos elementales imaginarios que se describen a continuación.

Si se sometiera al material a un esfuerzo σ_1 , se cumple:

$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1$$

$$\varepsilon_2 = S_{12}\sigma_1$$

$$\gamma_6 = 0$$

(A.1)

De consideraciones de ingeniería la ecuación (A.1) queda de la siguiente forma:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_1$$

$$\gamma_6 = 0$$

(A.2)

Cabe señalar que los subíndices en el coeficiente de poisson denotan la dirección del esfuerzo y deformación, respectivamente.

De las ecuaciones (A.1) y (A.2) se obtienen las siguientes relaciones:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} ; S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}$$

(A.3)

De manera similar, si el material estuviese sometido a un esfuerzo σ_2 , tenemos:

$$\varepsilon_1 = S_{12}\sigma_2 = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2$$

$$\varepsilon_2 = S_{22}\sigma_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

$$\gamma_6 = 0$$

(A.4)

De donde obtenemos las siguientes relaciones:

$$S_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} ; S_{22} = \frac{1}{E_2}$$

(A.5)

Si sometiéramos al material a esfuerzo cortante puro τ_6 , tenemos:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$$

$$\gamma_6 = S_{66}\tau_6 = \frac{\tau_6}{G_{12}}$$

(A.6)

De donde se obtiene:

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

(A.7)

La matriz de los componentes hallados en (A.3), (A.5) y (A.7) queda de la siguiente forma:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_2} \end{bmatrix}$$

(A.8)

La matriz (2.12) quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{v_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{v_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix}$$

(A.9)

Se puede observar que se cumple lo siguiente:

$$\frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2}$$

(A.10)

Para expresar la matriz (2.11) en términos de las constantes de ingeniería, se debe hallar la inversa de la matriz $[S_{ij}]$, y el resultado sería el siguiente:

$$[S_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} & \frac{v_{21} \cdot E_1}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} & 0 \\ \frac{v_{21} \cdot E_1}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} & \frac{E_2}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

(A.11)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} & \frac{v_{21} \cdot E_1}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} & 0 \\ \frac{v_{21} \cdot E_1}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} & \frac{E_2}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

(A.12)

Dónde:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{v_{21} \cdot E_1}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} = \frac{v_{12} \cdot E_2}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - v_{12} \cdot v_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned}$$

(A.13)

3.1. Consideraciones básicas

El comportamiento global de un material compuesto laminado está en función de las propiedades de cada lámina que lo conforman, así como la distribución de estas láminas dentro del laminado. El modelo matemático planteado a continuación se basa en la teoría clásica de laminación, la cual predice el comportamiento del laminado bajo las siguientes consideraciones:

- Cada lámina del laminado es quasi-homogénea y ortotrópica.
- El laminado es delgado con sus dimensiones laterales más grandes que su espesor, y está cargado solamente en su plano. El laminado y sus láminas están en un estado de tensión plana ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$).
- Todos los desplazamientos son pequeños comparados con el espesor del laminado ($|u|, |v|, |w| \ll h$).
- Los desplazamientos son continuos a través del laminado.
- Los desplazamientos en el plano varían linealmente a través del espesor del laminado. Como se verá en este capítulo los desplazamientos u , v en las direcciones x - e y - respectivamente son lineales y están en función de z .
- Las deformaciones cortantes transversales γ_{xz} y γ_{yz} son despreciables.
- Relaciones de esfuerzo-deformación son lineales.
- Las distancias normales del medio de la superficie permanecen constantes, es decir la deformación transversal normal ϵ_z es despreciable (comparado con las otras deformaciones en el plano ϵ_x y ϵ_y).

3.2. Relaciones de desplazamiento-deformación

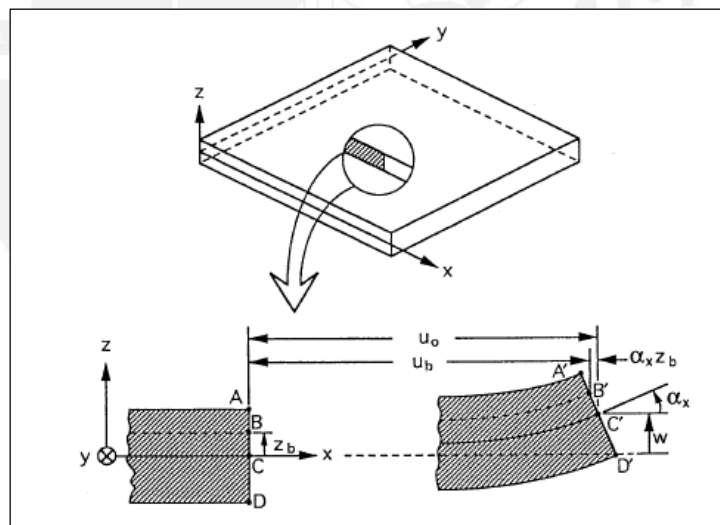


Figura A3.2. Sección del laminado antes (ABCD) y después (A'B'C'D') de la deformación [1]

La Figura 15 muestra una sección del laminado normal al eje y - antes y después de sufrir una deformación. El plano xy es equidistante de la superficie superior e inferior del laminado, y se le denomina plano de referencia. Los desplazamientos del plano de referencia u_0 y v_0 en los ejes x - e y - respectivamente y el desplazamiento w fuera del plano en la dirección del eje z , son solamente funciones de x e y .

$$u_0 = u_0(x, y)$$

$$v_0 = v_0(x, y)$$

$$w = f(x, y) \quad (A.14)$$

Las rotaciones de los ejes x - e y - son:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\partial w}{\partial x} \\ \alpha_y &= \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (A.15)$$

Los componentes de desplazamiento en el plano del punto B de coordenada z_b como se muestra en la Figura A.1 son:

$$\begin{aligned} u_b &= u_0 - \alpha_x z_b \\ v_b &= v_0 - \alpha_y z_b \end{aligned} \quad (A.16)$$

Reemplazando las ecuaciones (A.15) en (A.16), y poniendo la ecuación de forma general, se tiene:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (A.17)$$

Donde z es la coordenada variable de un punto general de la sección transversal. Para pequeños desplazamientos, se obtienen las siguientes relaciones de desplazamiento-deformación de la clásica teoría de elasticidad y derivando las ecuaciones (A.17).

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \gamma_s &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon_z &= \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (A.18)$$

Las componentes de deformación en el plano de referencia se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0 = \gamma_s^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{aligned}$$

(A.19)

Las curvaturas que sufre el laminado se puede expresar también de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \kappa_{xy} = \kappa_s &= -\frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (A.20)$$

Entonces, reemplazando las ecuaciones (A.19) y (A.20) en la ecuación (A.18), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} \quad (A.21)$$

De esta manera podemos relacionar las deformaciones para cualquier punto en el laminado en función de las deformaciones del plano de referencia y las curvaturas del laminado.

3.3. Relaciones de esfuerzo-deformación de la lámina dentro del laminado

Se considera una lámina individual “k” dentro de un laminado multidireccional cuyo plano medio está a una distancia z_k del plano de referencia del laminado (Figura A3.3).

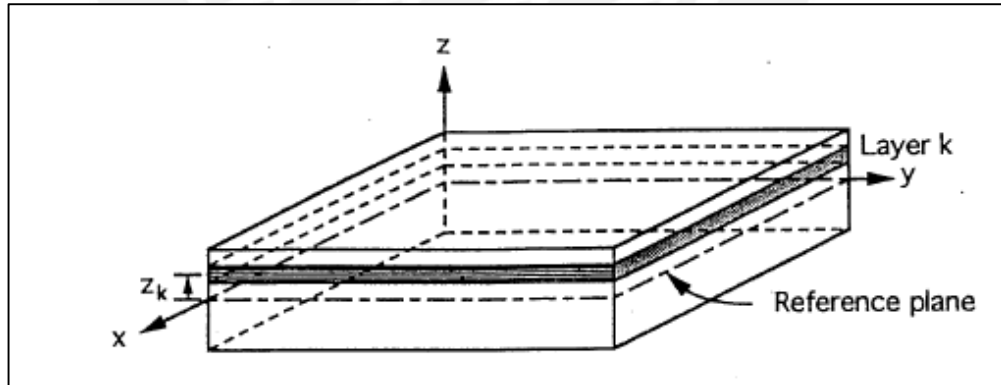


Figura A3.3. Lámina “k” dentro del laminado [1]

Las relaciones de esfuerzo-deformación para esta lámina referida a sus ejes principales se muestran en las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}_k \quad (A.22)$$

La matriz mostrada en (A.22) se transforma al sistema de ejes coordenados del laminado:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{sx} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix}_k$$

(A.23)

Sustituyendo las expresiones de deformaciones de (A.21) en (A.23), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{sx} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix}$$

(A.24)

De las ecuaciones (A.21) y (A.24), se puede observar que mientras las deformaciones varían linealmente a través del espesor del laminado, los esfuerzos no son lineales. Esto es debido a la variación discontinua de la matriz de rigidez transformada $[Q]_{x,y}$ de lámina a lámina dentro del laminado, lo que haría también que los esfuerzos varían discontinuamente de lámina a lámina. Esto se ilustra tomando como ejemplo un laminado compuesto por 4 láminas como se muestra en la Figura A3.4, sometido bajo esfuerzo uniaxial en la dirección $-x$. Se observa que para una determinada variación lineal de la deformación a través del espesor, la cual puede ser debido a una carga axial o carga de flexión, la variación del módulo E_x de lámina a lámina puede causar la variación discontinua del esfuerzo.

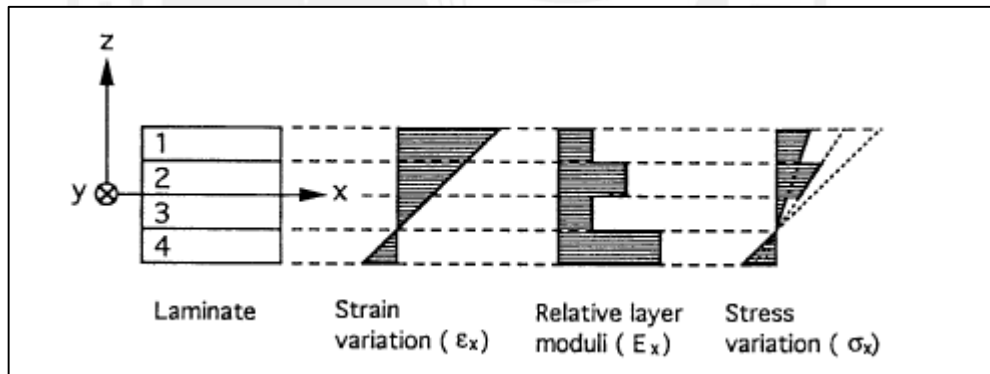


Figura A3.4. Ilustración de la variación lineal de las deformaciones y la variación discontinua del esfuerzo en un laminado multidireccional [1]

Los esfuerzos promedio en cada lámina quedan en función de las deformaciones del plano de referencia del laminado $[\varepsilon^0]_{x,y}$, las curvaturas $[\kappa]_{x,y}$ del laminado, la locación del plano medio de la lámina z_k respecto al plano de referencia del laminado y la matriz de rigidez transformada $[Q]_{x,y}$ de la lámina como se muestra en la ecuación (A.24).

3.4. fuerza y momentos resultantes de un laminado

Como se dijo anteriormente debido a la variación discontinua de los esfuerzos de lámina a lámina, es más conveniente buscar expresiones relacionando fuerza y momentos con la deformación que

sufre el laminado. Los esfuerzos que actúan en una lámina “k” del laminado dados por la ecuación (A.24) pueden ser reemplazados por fuerzas y momentos resultantes como se muestra en la Figura A3.5 y según las siguientes ecuaciones:

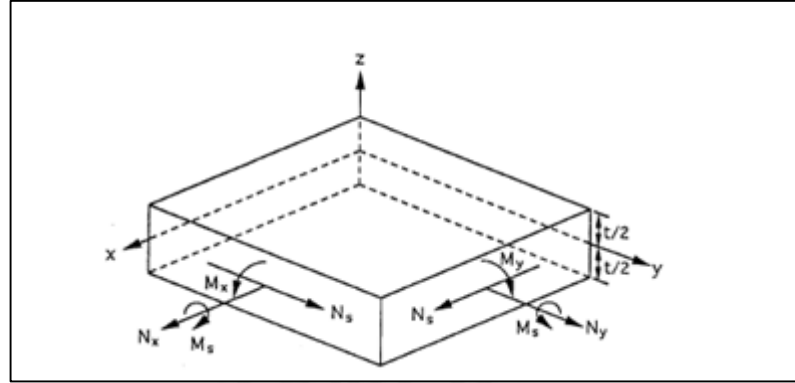


Figura A3.5. Lámina “k” sometida a fuerzas y momentos resultantes [1]

$$N_x^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \partial z$$

$$N_y^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \partial z$$

$$N_{xy}^k = N_s^k = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_s \partial z$$

(A.25)

$$M_x^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z \partial z$$

$$M_y^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z \partial z$$

$$M_{xy}^k = M_s^k = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_s z \partial z$$

(A.26)

Dónde:

z = la coordenada variable de un punto en la sección transversal.

t = Espesor de la lámina.

N_x^k, N_y^k = fuerzas normales por unidad de longitud.

N_s^k = fuerza cortante por unidad de longitud.

M_x^k, M_y^k = momentos de flexión por unidad de longitud.

M_s^k = momento de torsión por unidad de longitud.

Ahora, para un laminado de varias láminas, la fuerza total y los momentos resultantes son obtenidos sumando los efectos de todas las láminas. Entonces, para un laminado compuesto por n -láminas como se muestra en la Figura 19, la fuerza y los momentos resultantes son obtenidos según:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k dz \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k z dz \quad (\text{A.28})$$

Donde h_k y h_{k-1} son las coordenadas z de la superficie superior e inferior respectivamente de la lámina k .

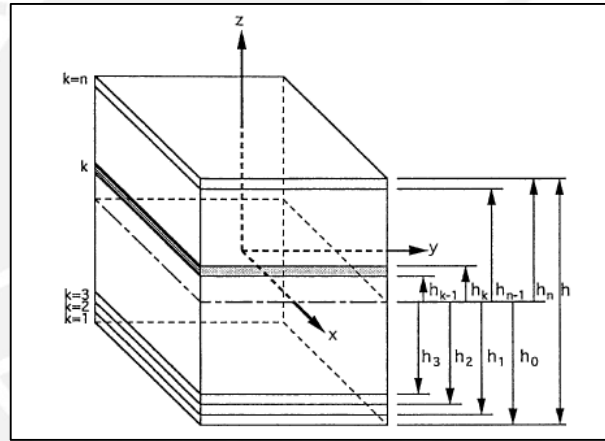


Figura A3.6. Laminado multidireccional, indicando las coordenadas de cada lámina [1]

3.5. Relaciones generales de carga-deformación

Sustituyendo la ecuación (A.24) de esfuerzos para una lámina en las ecuaciones (A.27) y (A.28), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right\} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz + \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right\} \quad (\text{A.30})$$

En las expresiones anteriores la matriz de rigidez $[Q]_{x,y}^k$, las deformaciones del plano de referencia $[\varepsilon^0]_{x,y}$, y las curvaturas $[\kappa]_{x,y}$ son sacadas de la integral, debido a que estas no dependen de z . De

estas tres cantidades solo la matriz de rigidez $[Q]_{x,y}^k$ es única para cada lámina, mientras que las deformaciones del plano de referencia $[\varepsilon^0]_{x,y}$, y las curvaturas $[\kappa]_{x,y}$ dependen del laminado entero y son los mismos para todas las láminas. Es por eso que $[\varepsilon^0]_{x,y}$, y $[\kappa]_{x,y}$ pueden ser factorizados afuera de la sumatoria como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 [N]_{x,y} &= \left[\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \partial z \right] [\varepsilon^0]_{x,y} + \left[\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \partial z \right] [\kappa]_{x,y} \\
 [N]_{x,y} &= \left[\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k - h_{k-1}) \right] [\varepsilon^0]_{x,y} + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \right] [\kappa]_{x,y} \\
 [N]_{x,y} &= [A]_{x,y} [\varepsilon^0]_{x,y} + [B]_{x,y} [\kappa]_{x,y}
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
 [M]_{x,y} &= \left[\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 \partial z \right] [\varepsilon^0]_{x,y} + \left[\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^3 \partial z \right] [\kappa]_{x,y} \\
 [M]_{x,y} &= \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \right] [\varepsilon^0]_{x,y} + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \right] [\kappa]_{x,y} \\
 [M]_{x,y} &= [B]_{x,y} [\varepsilon^0]_{x,y} + [D]_{x,y} [\kappa]_{x,y}
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

Dónde:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (h_k - h_{k-1}) \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \\
 i, j &= x, y, s.
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

Entonces, en forma completa las ecuaciones (A.31) y (A.32) quedan de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} \tag{A.34}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ D_{sx} & D_{sy} & D_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} \tag{A.35}$$

Todas las matrices anteriores son simétricas, por lo tanto:

$$A_{ij} = A_{ji}$$

$$B_{ij} = B_{ji}$$

$$D_{ij} = D_{ji}$$

$$i, j = x, y, s.$$

Las relaciones anteriormente descritas son expresadas en términos de 3 matrices de rigidez del laminado $[A]$, $[B]$, y $[D]$, las cuales están en función de la geometría, propiedades del material y la secuencia de las láminas como se definió en la ecuación (A.33). Estos son los parámetros elásticos del laminado multidireccional con el siguiente significado:

A_{ij} : Es la matriz de rigidez la cual relaciona cargas en el plano con deformaciones en el plano.

B_{ij} : Es la matriz de rigidez la cual relaciona las cargas en el plano con las curvaturas que sufre el laminado, así como los momentos con las deformaciones en el plano. Si $B_{ij} \neq 0$, fuerzas en el plano producen deformaciones de flexión y torsionales.

D_{ij} : Es la matriz de rigidez la cual relaciona momentos con las curvaturas.

3.6. Relaciones inversas de carga-deformación

Como se dijo anteriormente los laminados multidireccionales se caracterizan de presentar discontinuidades de esfuerzo de lámina a lámina, es por eso que se prefiere trabajar con las deformaciones, las cuales son continuas a través del espesor del laminado. Por esta razón se requiere invertir las relaciones de Carga-Deformación de las ecuaciones (A.34) y (A.35), y expresar las deformaciones y curvaturas como funciones de las fuerzas o momentos aplicados como a continuación:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xs} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{ys} \\ a_{sx} & a_{sy} & a_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xs} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{ys} \\ b_{sx} & b_{sy} & b_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} \quad (A.36)$$

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{xs} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{ys} \\ c_{sx} & c_{sy} & c_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xs} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{ys} \\ d_{sx} & d_{sy} & d_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} \quad (A.37)$$

Donde las matrices “inversas” del laminado ($[a]$; $[b]$; $[c]$ y $[d]$) se obtienen según lo siguiente:

- $[a] = [A^{-1}] - \{[B^*] \cdot [D^{*-1}]\} \cdot [C^*]$
- $[b] = [B^*] \cdot [D^{*-1}]$
- $[c] = -[C^*] \cdot [D^{*-1}]$
- $[d] = [D^{*-1}]$

(A.38)

Donde:

- $[A^{-1}] = \text{inversa de la matriz } [A]$
- $[B^*] = -[A^{-1}] \cdot [B]$
- $[C^*] = [B] \cdot [A^{-1}]$
- $[D^*] = [D] - \{[B] \cdot [A^{-1}]\} \cdot [B]$

3.7. propiedades de láminas a diferentes orientaciones

Matriz de rigidez de la lámina

Cuando se presentan láminas cuyos ejes principales no coinciden con los ejes de referencia del laminado, se deberá rotar la matriz de rigidez principal ($[Q_{12}]$) reflejada a los ejes de referencia del laminado mediante las ecuaciones que se muestran en (A.39).

- $Q_{xx} = m^4 \cdot Q_{11} + n^4 \cdot Q_{22} + 2m^2n^2 \cdot Q_{12} + 4m^2n^2 \cdot Q_{66}$
- $Q_{yy} = n^4 \cdot Q_{11} + m^4 \cdot Q_{22} + 2m^2n^2 \cdot Q_{12} + 4m^2n^2 \cdot Q_{66}$
- $Q_{xy} = m^2n^2 \cdot Q_{11} + m^2n^2 \cdot Q_{22} + (m^4 + n^4) \cdot Q_{12} - 4m^2n^2 \cdot Q_{66}$
- $Q_{xs} = m^3n \cdot Q_{11} - mn^3 \cdot Q_{22} + (mn^3 - m^3n) \cdot Q_{12} + 2(mn^3 - m^3n) \cdot Q_{66}$
- $Q_{ys} = mn^3 \cdot Q_{11} - m^3n \cdot Q_{22} + (m^3n - mn^3) \cdot Q_{12} + 2(m^3n - mn^3) \cdot Q_{66}$
- $Q_{ss} = m^2n^2 \cdot Q_{11} + m^2n^2 \cdot Q_{22} - 2m^2n^2 \cdot Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 \cdot Q_{66}$

(A.39)

Dónde: $[m = \cos \theta_k ; n = \sin \theta_k]$, (θ_k) es el ángulo orientado que se encuentra la lámina “k” medido positivo en sentido antihorario desde el eje x.

Deformaciones de la lámina

Las láminas orientadas un ángulo (θ_k) respecto del eje -x, deberá usarse las siguientes ecuaciones (A.40), para poder hallar las deformaciones principales en la lámina a partir de las deformaciones halladas en los ejes (x, y).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_6 \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_s \end{bmatrix}$$

(A.40)

Dónde:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad [m = \cos \theta_k ; n = \sin \theta_k]$$

ANEXO 4

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE VERIFICACIÓN USANDO MATERIAL
ORTOTRÓPICO MEDIANTE LA TEORÍA CLÁSICA DE LAMINADO

1. Análisis usando la Teoría Clásica de Laminado

Se realiza simulaciones a laminados simétrico y asimétrico a fin de validar la simulación objetivo (hélice del aerogenerador). Estas simulaciones de validación con sus respectivas validaciones analíticas y así verificar la teoría clásica de laminado. Finalmente realizar un análisis y discusión de resultados de la simulación de la hélice y la simulación de validación.

2. Validación con simulación numérica usando ANSYS APDL

Estas simulaciones, como ya se mencionó líneas atrás se basa en un laminado simétrico (CASO 1) y un laminado antisimétrico (CASO 2), que se describe a continuación.

- CASO 1: Para este caso CASO 1, el laminado es simétrico el cual es denotado de la siguiente manera: $[0/90/90/0]$ o $[0/90]_s$.
- CASO 2: Para este CASO 2. El laminado es antisimétrico el cual es denotado de la siguiente manera: $[0/90]$.

2.1. Simulación de laminado simétrico (CASO 1)

• Etapa de Pre – procesamiento

En esta etapa se define los parámetros de entrada que servirá para realizar la simulación numérica como propiedades del material y la geometría a utilizar, por otro lado también se realiza la discretización o mallado del modelo y finalmente las condiciones de borde, las cuales representan las restricciones del modelo.

Definición de datos de entrada

Como se mencionó líneas atrás este laminado es simétrico como se aprecia en la figura. Además este laminado de fibra de carbono/epoxy posee las siguientes propiedades elásticas. Las dimensiones de la lámina son de 100 mm de largo con 50 mm de ancho y una altura o espesor por lámina de 0.125 mm como se muestra en la figura A4.1.

Tabla A4.1. Propiedades del laminado simétrico $[0/90]_s$.

Propiedades	Magnitud
E_1	140 kN/mm ²
E_2	10 kN/mm ²
G_{12}	5 kN/mm ²
ν_{12}	0.3

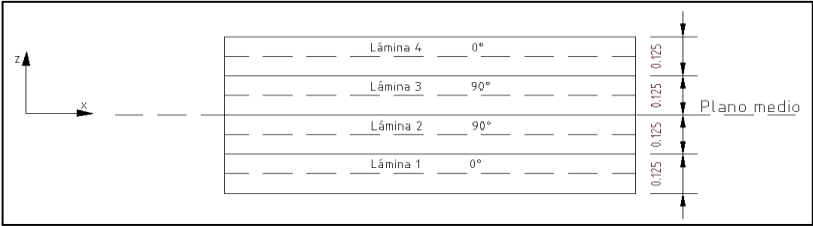


Figura A4.1. Valores de las dimensiones del laminado $[0/90]_s$

Del ANSYS APDL se define las láminas que conforma el laminado. La figura A4.2 muestra detalladamente la orientación de las fibras mediante el ángulo Theta, también muestra el número de láminas, que en este caso son 4, que están superpuestas unas a otras y finalmente el número de materiales “2” (en realidad es uno); para efectos del software se definen 2 materiales con sus propiedades ortotrópicas cruzadas. $E_1 = 140 \text{ kN/mm}^2$ y para el material 2, $E_1 = 10 \text{ kN/mm}^2$.

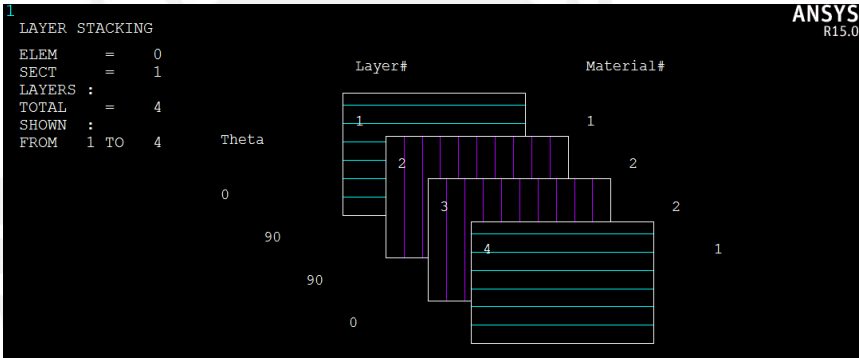


Figura A4.2. Valores de las dimensiones del laminado $[0/90]_s$

Parámetros de mallado

El mallado se hizo con un elemento plano llamado *Shell 181* con 4 nodos, usado para placas. El refinamiento se hizo usando *Refine at nodes* de grado 2. El mallado posee 162 elementos. Con un tamaño promedio de 5.5 mm por cada elemento. En la figura A4.4 se puede apreciar el mallado del laminado, en donde se ve las 4 láminas que conforman todo el laminado.

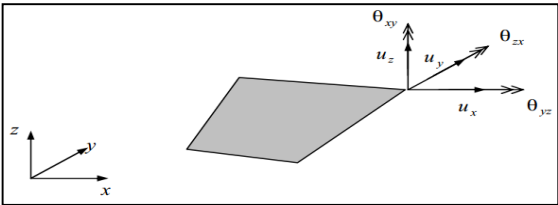


Figura A4.3. Elemento *Shell 181* con 4 nodos.

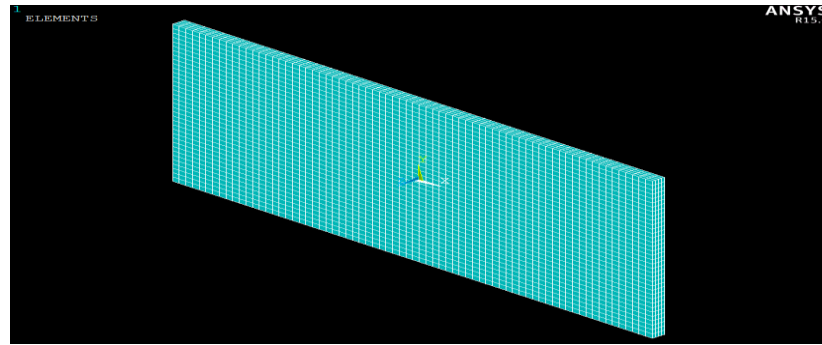


Figura A4.4. Mallado del laminado.

Parámetros de control de simulación (Condiciones de borde)

En esta etapa de generación del modelo por elementos finitos se procede a poner las restricciones y solicitaciones para el modelo, es decir los grados de libertad y el estado de cargas con lo cual estará sometido el laminado.

- **Condición de soporte fijo:**

Esta condición se basa en fijar la lámina mediante un comando en ANSYS APDL restringiendo el desplazamiento de la lámina en el eje Y. Al hacer esto (restringir el modelo) se disminuye los grados de libertad del laminado.

- **Condición de carga:**

Para este caso el laminado es sometido a tracción pura con una fuerza de 5000N a lo largo de las caras paralelas al plano Y-Z. Para las validaciones analíticas de esta simulación se puede denotar esta fuerza como 100 N/mm.

Finalmente se aprecia en la figura A5.5 las dos condiciones que se necesitan para la simulación estructural usando ANSYS APDL.

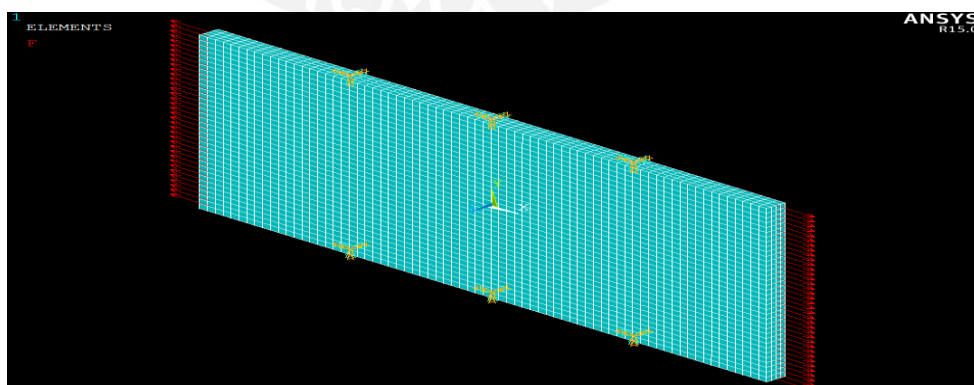


Figura A4.5. Condición de soporte fijo y carga.

- **Etapas de solución**

El método de elementos finitos es un método computacional, que permite estudiar el comportamiento de un material sometido a un estado de cargas por medio de una

aproximación. Luego de una serie de manipulaciones matemáticas, para el caso de elasticidad lineal y estático, el sistema se resuelve según la siguiente ecuación.

$$Kq = Q$$

Donde K es la matriz de rigidez generalizada, Q es el vector de fuerzas globales generalizado y q es el vector de fuerzas de desplazamientos generalizados.

- **Etapas de Post - Procesamiento**

En esta última etapa de la simulación se obtienen, visualizan y analizan los resultados de la simulación. Específicamente se determinan las deformaciones y esfuerzos que se presentan en el laminado. Los resultados se pueden evaluar en forma cuantitativa y cualitativa para así facilitar el entendimiento del lector.

Esfuerzos longitudinal (eje X) y transversal (eje Y)

En las figuras A4.6 y A4.7 se pueden apreciar tanto los esfuerzos longitudinales como los transversales, correspondientes a las direcciones principal 1 y principal 2, respectivamente. Los esfuerzos máximos son 351 MPa (dirección longitudinal) y 25.3 MPa (dirección transversal).

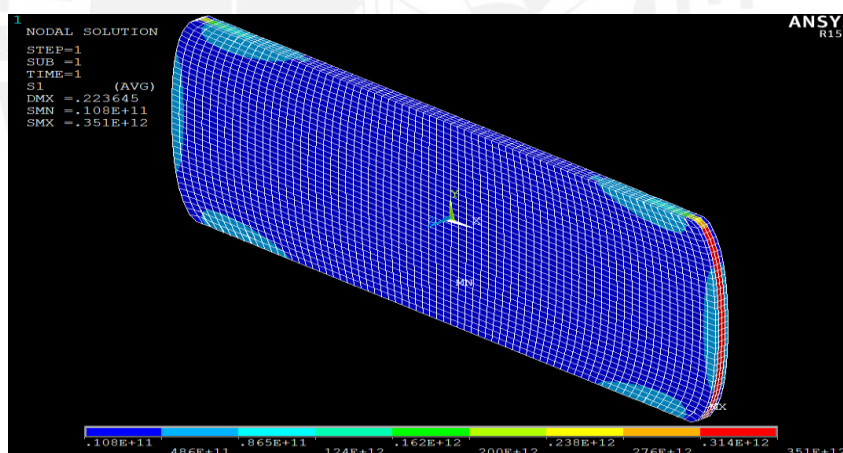


Figura A4.6. Esfuerzo en la dirección principal 1 (Eje X)

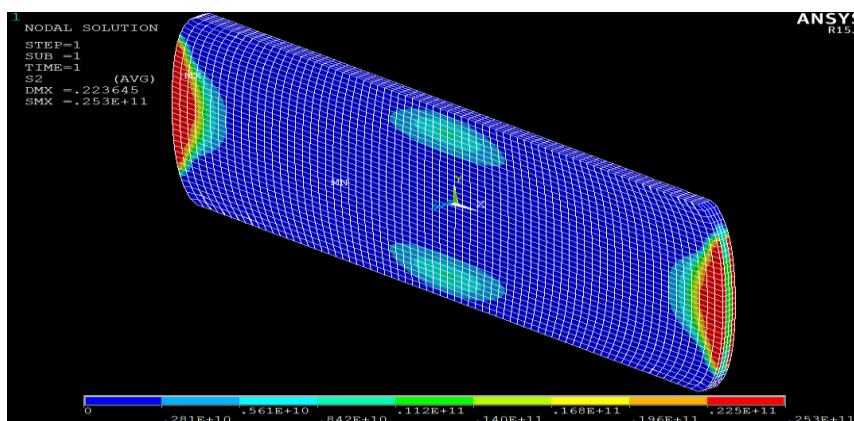


Figura A4.7. Esfuerzo en la dirección principal 2 (Eje Y)

2.2. Simulación de laminado asimétrico (CASO 2)

• Etapa de Pre – procesamiento

Al igual que para el CASO 1 la etapa de pre-procesamiento es prácticamente la misma para el CASO 2, ya que las propiedades de las láminas unidireccionales son las mismas, la geometría del laminado y de cada lámina son las mismas e incluso las condiciones de contorno. Lo único que cambia son las disposiciones de las láminas, ya que este laminado al ser $[0/90]$ es antisimétrico.

Definición de datos de entrada

Las propiedades de cada lámina son las mismas, mas no la configuración de las mismas para el laminado. La configuración se aprecia en la figura A4.8 y las propiedades en la tabla A4.1.

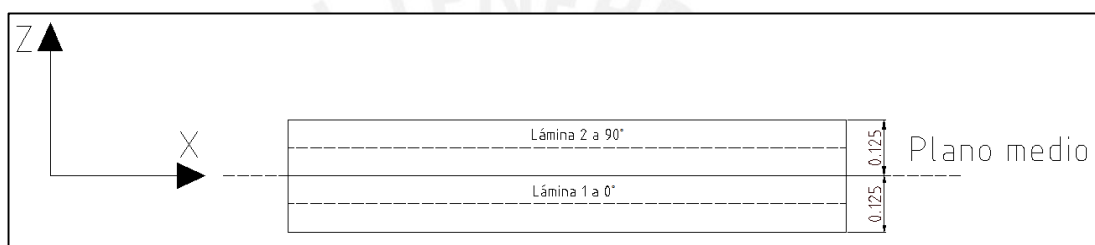


Figura A4.8. Valores de las dimensiones del laminado $[0_2/90_2]$.

Debido a que los parámetros de malla y los parámetros de control de simulación (Condiciones de borde) son iguales al CASO 1, no vale la pena volver a nombrarlos. Por ello, se obvia estas etapas del pre – procesamiento y se muestra los resultados en el post – procesamiento.

• Etapa de Post – Procesamiento

Esfuerzos longitudinal (eje X) y transversal (eje Y)

En las figuras A5.9 y A5.11 se puede apreciar tanto los esfuerzos longitudinales como los transversales, correspondientes a las direcciones principal 1 y principal 2, respectivamente. Los esfuerzos máximos son 543 MPa (dirección longitudinal) y -61.6 MPa (dirección transversal - compresión).

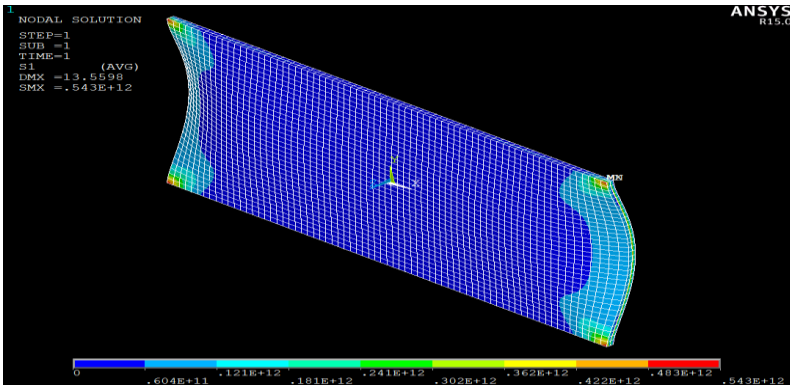


Figura A4.9. Esfuerzo en dirección principal 1.

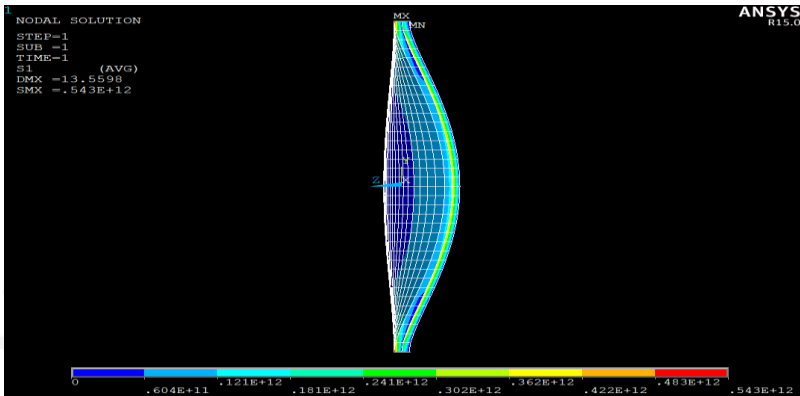


Figura A4.10. Esfuerzo en dirección principal 1 (vista en plano Y-Z).

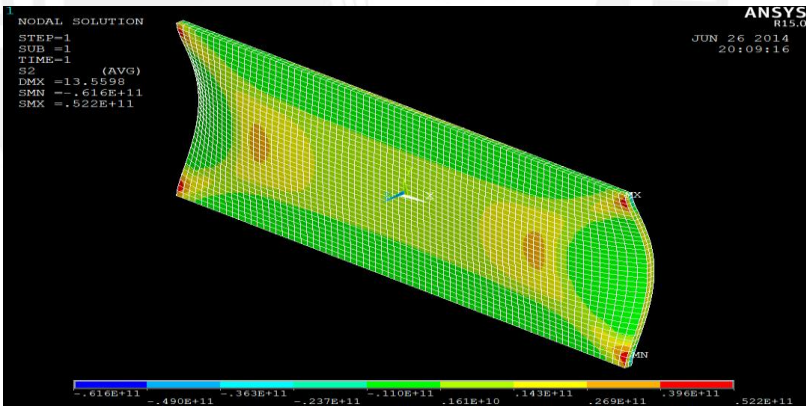


Figura A4.11. Esfuerzo en dirección principal 2.

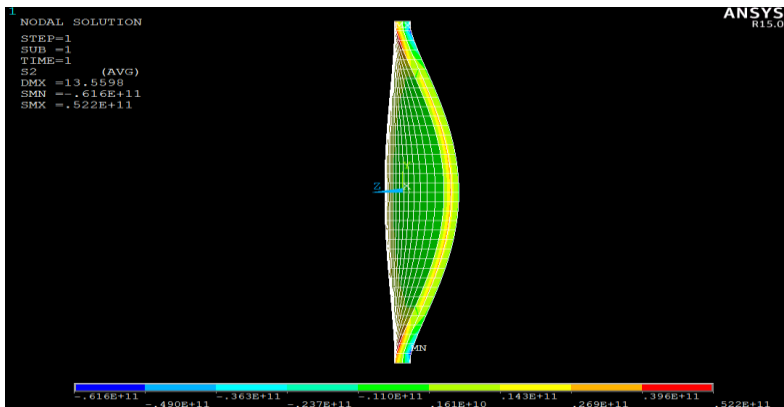


Figura A4.12. Esfuerzo en dirección principal 2 (vista en plano Y-Z).

ANEXO 5

CÁLCULO ANALÍTICO USANDO LA TCL DE LOS LAMINADOS $[0/90]_Y$

$$[0/90]_s$$

Se parte de esta igualdad para desarrollar los cálculos analíticos.

$$v_{12}/E_1 = v_{21}/E_2$$

Entonces,

$$v_{21} = 0.3 \times 10/140 = 0.021$$

Los términos de la matriz de rigidez reducida son:

$$Q_{11} = E_1/(1 - v_{12}v_{21}) = 140/(1 - 0.3 \times 0.021) = 140.9 \text{ kN/mm}^2$$

$$Q_{11} = E_2/(1 - v_{12}v_{21}) = 10/(1 - 0.3 \times 0.021) = 10.1 \text{ kN/mm}^2$$

$$Q_{11} = G_{12} = 5.0 \text{ kN/mm}^2$$

$$Q_{11} = v_{21}E_1/(1 - v_{12}v_{21}) = (0.021 \times 140)/(1 - 0.3 \times 0.021) = 3.0 \text{ kN/mm}^2$$

Por lo tanto, la matriz queda definida como:

$$Q = \begin{bmatrix} 140.9 & 3.0 & 0 \\ 3 & 10.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{bmatrix}$$

Siguiente, los términos de la matriz de rigidez para la lámina de ángulo 0° que se obtienen es:

$$\begin{aligned} m &= \cos(0^\circ) = 1; & m^2 &= 1; & m^4 &= 1 \\ n &= \sin(0^\circ) = 0; & n^2 &= 0; & n^4 &= 0 \\ m^2n^2 &= 0; & 2m^2n^2 &= 0; & 4m^2n^2 &= 0 \\ m^2 - n^2 &= 1 \\ m^4 + n^4 &= 1 \\ m^3n &= 0; & mn^3 &= 0 \\ m^3n - mn^3 &= 0; & 2(m^3n - mn^3) &= 0 \\ mn^3 - m^3n &= 0; & 2(mn^3 - m^3n) &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores trigonométricos se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= m^4Q_{11} + n^4Q_{22} + 2m^2n^2Q_{12} + 4m^2n^2Q_{33} \\ &= (1 \times 140.9) + (1 \times 10.1) + (0 \times 3.0) + (0 \times 5.0) = 140.9 \text{ kN/mm}^2 = Q_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{22} &= n^4Q_{11} + m^4Q_{22} + 2m^2n^2Q_{12} + 4m^2n^2Q_{33} \\ &= (0 \times 140.9) + (1 \times 10.1) + (0 \times 3.0) + (0 \times 5.0) = 10.1 \text{ kN/mm}^2 = Q_{22} \end{aligned}$$

$$\bar{Q}_{33} = m^2n^2Q_{11} + m^2n^2Q_{22} - 2m^2n^2Q_{12} + (m^2 - n^2)Q_{33}$$

$$= (0 \times 140.9) + (0 \times 10.1) + (0 \times 3.0) + (1^2 \times 5.0) = 5.0 \text{ kN/mm}^2 = Q_{22}$$

$$\bar{Q}_{12} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{33}$$

$$= (0 \times 140.9) + (0 \times 10.1) + (1 \times 3.0) + (0 \times 5.0) = 3.0 \text{ kN/mm}^2 = Q_{22}$$

Entonces, la matriz de rigidez para la lámina de 0° queda con los siguientes términos.

$$(\bar{Q})_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 140.9 & 3.0 & 0 \\ 3 & 10.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{bmatrix}$$

Como lo mencionamos si fuera el caso de un laminado $[0_2]_s$. Se obtendría para cada lámina lo siguiente:

Tabla A5.1. Componentes de la matriz de rigidez para cada lámina $[0_2]_s$.

Lámina	θ°	\bar{Q}_{11}	\bar{Q}_{22}	\bar{Q}_{33}	\bar{Q}_{12}	\bar{Q}_{13}	\bar{Q}_{23}
1	0	140.9	10.1	5.0	3.0	0	0
2	0	140.9	10.1	5.0	3.0	0	0
3	0	140.9	10.1	5.0	3.0	0	0
4	0	140.9	10.1	5.0	3.0	0	0

Para validar analíticamente el CASO 1 (Simulación de validación) debemos hacer el estudio para el laminado $[0/90]_s$. Entonces, se plantea los términos de la matriz de rigidez para la lámina de 90°

$$\begin{aligned} m &= \cos 9(0^\circ) = 0; & m^2 &= 0; & m^4 &= 0 \\ n &= \sin(90^\circ) = 1; & n^2 &= 1; & n^4 &= 1 \\ m^2 n^2 &= 0; & 2m^2 n^2 &= 0; & 4m^2 n^2 &= 0 \\ m^2 - n^2 &= -1 \\ m^4 + n^4 &= 1 \\ m^3 n &= 0; & mn^3 &= 0 \\ m^3 n - mn^3 &= 0; & 2(m^3 n - mn^3) &= 0 \\ mn^3 - m^3 n &= 0; & 2(mn^3 - m^3 n) &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores trigonométricos se obtiene:

$$\bar{Q}_{11} = m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{33}$$

$$= (0 \times 140.9) + (1 \times 10.1) + (0 \times 3.0) + (0 \times 5.0) = 10.1 \text{ kN/mm}^2 = Q_{11}$$

$$\bar{Q}_{22} = n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{33}$$

$$= (1 \times 140.9) + (0 \times 10.1) + (0 \times 3.0) + (0 \times 5.0) = 140.9 \text{ kN/mm}^2 = Q_{22}$$

$$\bar{Q}_{33} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2) Q_{33}$$

$$= (0 \times 140.9) + (0 \times 10.1) + (0 \times 3.0) + (1^2 \times 5.0) = 5.0 \text{ kN/mm}^2 = Q_{22}$$

$$\bar{Q}_{12} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{33}$$

$$= (0 \times 140.9) + (0 \times 10.1) + (0 \times 3.0) + ((-1)^2 \times 5.0) = 3.0 \text{ kN/mm}^2 = Q_{22}$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{13} &= m^3 n Q_{11} - m n^3 Q_{22} + (mn^3 - m^3 n) Q_{12} + 2(mn^3 - m^3 n) Q_{33} \\ &= (0 \times 140.9) - (0 \times 10.1) + (0 \times 3.0) + (0 \times 5.0) = 0 \text{ kN/mm}^2 = Q_{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{23} &= mn^3 Q_{11} - m^3 n Q_{22} + (m^3 n - mn^3) Q_{12} + 2(m^3 n - mn^3) Q_{33} \\ &= (0 \times 140.9) - (0 \times 10.1) + (0 \times 3.0) + (0 \times 5.0) = 0 \text{ kN/mm}^2 = Q_{23}\end{aligned}$$

Entonces, la matriz de rigidez para la lámina de 90° queda con los siguientes términos.

$$(\bar{Q})_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 10.1 & 3.0 & 0 \\ 3.0 & 140.9 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{bmatrix}$$

Entonces para el laminado **laminado** $[0/90]_s$ se obtiene lo siguiente:

Tabla 5.2. Componentes de la matriz de rigidez para cada lámina $[0/90]_s$

Lámina	θ°	\bar{Q}_{11}	\bar{Q}_{22}	\bar{Q}_{33}	\bar{Q}_{12}	\bar{Q}_{13}	\bar{Q}_{23}
1	0	140.9	10.1	5.0	3.0	0	0
2	90	10.1	140.9	5.0	3.0	0	0
3	90	10.1	140.9	5.0	3.0	0	0
4	0	140.9	10.1	5.0	3.0	0	0

Como el laminado $[0/90]_s$ es simétrico entonces la matriz de acoplamiento tensión-flexión $[B] = 0$, por lo tanto solo se necesita calcular las matrices $[A]$ y $[D]$; denominadas matriz de rigidez de tensión plana y matriz de rigidez de flexión.

Para realizar los cálculos de la matriz de rigidez de tensión plana $[A]$ y la matriz de rigidez de flexión $[D]$, se necesita de t_p y $(t_p \bar{z}_p^2 + t_p^3/12)$, donde la figura 97 sirve de apoyo. Los valores para cada lámina están dados en la siguiente tabla.

Tabla A5.3. Datos para cálculos de matrices A y D.

Lámina	θ°	t_p	\bar{z}_p	$t_p \bar{z}_p^2 + t_p^3/12$
1	0	0.125	-0.01875	0.00456
2	90	0.125	-0.0625	0.00065
3	90	0.125	0.0625	0.00065
4	0	0.125	0.1875	0.00456

Para determinar los componentes de la matriz $[A]$ y $[D]$ se usan las siguientes ecuaciones:

$$A_{ij} = \sum_{p=1}^N t_p (\bar{Q}_{ij})_p$$

$$D_{ij} = \sum_{p=1}^N (t_p \bar{z}_p^2 + \frac{t_p^3}{12}) (\bar{Q}_{ij})_p$$

Con los valores de la tabla A6.3 y las ecuaciones anteriores se procede a calcular los componentes de cada matriz ($[A]$ y $[D]$).

$$A_{11} = 2[(0.125 \times 140.9)_{\text{Lámina 1}} + (0.125 \times 140.9)_{\text{Lámina 2}}] = 37.8 \text{ kN/mm}$$

$$A_{22} = 2[(0.125 \times 10.1)_{\text{Lámina 1}} + (0.125 \times 140.9)_{\text{Lámina 2}}] = 37.8 \text{ kN/mm}$$

$$A_{33} = 2[(0.125 \times 5.0)_{\text{Lámina 1}} + (0.125 \times 5.0)_{\text{Lámina 2}}] = 2.5 \text{ kN/mm}$$

$$A_{12} = 2[(0.125 \times 3.0)_{\text{Lámina 1}} + (0.125 \times 3.0)_{\text{Lámina 2}}] = 1.5 \text{ kN/mm}$$

$$A_{13} = A_{23} = 0; \text{ como } \bar{Q}_{13} = \bar{Q}_{23} = 0 \text{ para lámina de } 0^\circ \text{ y } 90^\circ$$

$$D_{11} = 2[(0.00456 \times 140.9)_{\text{Lámina 1}} + (0.00065 \times 10.1)_{\text{Lámina 2}}] = 1.2981 \text{ kN/mm}$$

$$D_{11} = 2[(0.00456 \times 10.1)_{\text{Lámina 1}} + (0.00065 \times 140.9)_{\text{Lámina 2}}] = 0.2753 \text{ kN/mm}$$

$$D_{11} = 2[(0.00456 \times 5.0)_{\text{Lámina 1}} + (0.00065 \times 5.0)_{\text{Lámina 2}}] = 0.0521 \text{ kN/mm}$$

$$D_{11} = 2[(0.00456 \times 3.0)_{\text{Lámina 1}} + (0.00065 \times 3.0)_{\text{Lámina 2}}] = 0.0313 \text{ kN/mm}$$

$$D_{13} = D_{23} = 0; \text{ como } \bar{Q}_{13} = \bar{Q}_{23} = 0 \text{ para lámina de } 0^\circ \text{ y } 90^\circ$$

Por lo tanto las matrices de rigidez de tensión plana y de flexión quedan de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 37.8 & 1.5 & 0 \\ 1.5 & 37.8 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix} \text{ kN/mm} ; D = \begin{bmatrix} 1.2981 & 0.0313 & 0 \\ 0.0313 & 0.2753 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0521 \end{bmatrix} \text{ kN/mm}$$

Teniendo las matrices, se procede a calcular las matrices inversas de $[A]$ y $[D]$, denotadas como $[a]$ y $[d]$, respectivamente. A continuación se calculan las componentes de estas matrices inversas.

Matriz inversa de $[A]$ y $[D]$

$$A_{11} = 37.8$$

$$A_{22} = 37.8$$

$$A_{33} = 2.5$$

$$A_{12} = 1.5$$

Además,

$$AA = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = (37.8)(37.8) - 1.5^2 = 1426.6$$

$$a_{11} = A_{22}/AA = 37.8/1426.6 = 0.0265$$

$$a_{22} = A_{11}/AA = 37.8/1426.6 = 0.0265$$

$$a_{33} = 1/A_{33} = 1/2.5 = 0.4000$$

$$a_{12} = -A_{12}/AA = -1.5/1426.6 = -0.0011$$

$$DD = D_{11}D_{22} - D_{12}^2 = (1.2981)(0.2753) - (0.0313)^2 = 0.3564$$

$$d_{11} = D_{22}/DD = 0.2753/0.3564 = 0.77$$

$$d_{22} = D_{11}/DD = 1.2981/0.3564 = 0.0265$$

$$d_{33} = 1/D_{33} = 1/0.0521 = 19.19$$

$$d_{12} = -D_{12}/DD = -0.0313/0.3564 = -0.09$$

$$A_{11} = 37.8$$

$$D_{11} = 1.2981$$

$$\begin{aligned} A_{22} &= 37.8 & D_{22} &= 0.2753 \\ A_{33} &= 2.5 & D_{33} &= 0.0521 \\ A_{12} &= 1.5 & D_{12} &= 0.0313 \end{aligned}$$

$$[a] = \begin{bmatrix} 0.0265 & -0.0011 & 0 \\ -0.0011 & 0.0265 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4000 \end{bmatrix} \text{ kN/mm} \quad [d] = \begin{bmatrix} 0.77 & -0.09 & 0 \\ -0.09 & 3.64 & 0 \\ 0 & 0 & 19.19 \end{bmatrix} \text{ kN/mm}$$

Usando las siguientes ecuaciones:

$$[M] = 0$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xs} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{ys} \\ a_{sx} & a_{sy} & a_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xs} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{ys} \\ b_{sx} & b_{sy} & b_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0265 & -0.011 & 0 \\ -0.011 & 0.0265 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4006 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Que da lo siguiente:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= 2650 \times 10^{-6} \\ \epsilon_y^0 &= -110 \times 10^{-6} \\ \epsilon_z^0 &= 0 \end{aligned}$$

Estos son los valores de deformación a través de todo el espesor del laminado en las cuatro láminas como se ve en la figura A5.1.

Para hacer el estudio en cada lámina se usa las ecuaciones de transformación, las cuales son dependientes de la orientación de cada lámina.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

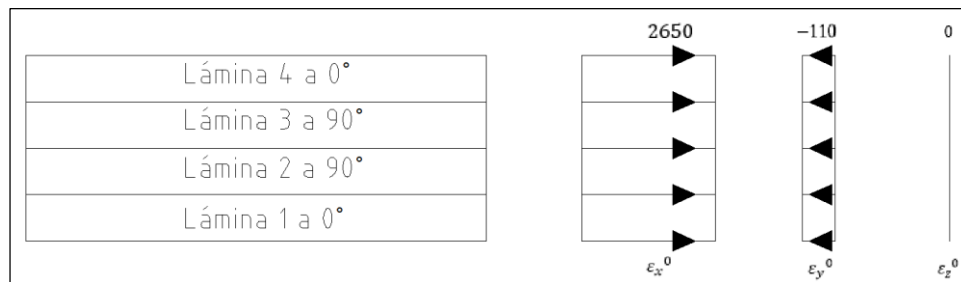


Figura A5.1. Diagrama de deformaciones según ejes X, Y y Z.

Lámina 1 a 0°

$$m = \cos(0^\circ) = 1 \text{ y } n = \sin(0^\circ) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \quad \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2650 \times 10^{-6} \\ -110 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_{\text{Lámina 1}} = \begin{bmatrix} 140.9 & 3.0 & 0 \\ 3.0 & 10.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{bmatrix}_{\text{Lámina 1}} \cdot \begin{bmatrix} 2650 \\ -110 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{Lámina 1}} \times 10^{-6} \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

De donde se obtiene lo siguientes esfuerzos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_{\text{Lámina 1}} = \begin{bmatrix} 373 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{Lámina 1}} \text{ N/mm}^2$$

Lámina 2 a 90°

$$m = \cos(90^\circ) = 0 \text{ y } n = \sin(90^\circ) = 1$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \quad \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -110 \times 10^{-6} \\ 2650 \times 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_{\text{Lámina 2}} = \begin{bmatrix} 140.9 & 3.0 & 0 \\ 3.0 & 10.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{bmatrix}_{\text{Lámina 2}} \cdot \begin{bmatrix} -110 \\ 2650 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{Lámina 2}} \times 10^{-6} \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

De donde se obtiene lo siguientes esfuerzos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_{\text{Lámina 2}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 26 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{Lámina 2}} \text{ N/mm}^2$$

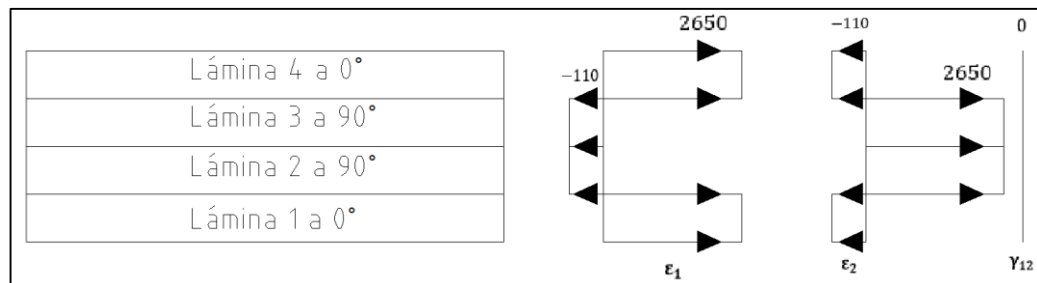


Figura A5.2. Diagrama de deformaciones totales en direcciones principales.

3.7.1.1.1. Cálculos analíticos para CASO 2

El CASO 2 se basa en un laminado compuesto por 2 láminas unidireccionales, la primera orientada a 0° y la segunda a 90° . A continuación se plantea la metodología de cálculo a fin

de entender el comportamiento de estos tipos de materiales (ortotrópicos) para este caso en particular.

Para el CASO 1 se calculó la matriz de rigidez correspondiente a cada lámina. Para este caso al ser las mismas láminas, sus matrices de rigidez también son iguales para cada lámina. Ver la tabla A5.4.

Tabla A5.4. Componentes de la matriz de rigidez para cada lámina.

Lámina	θ°	\bar{Q}_{11}	\bar{Q}_{22}	\bar{Q}_{33}	\bar{Q}_{12}	\bar{Q}_{13}	\bar{Q}_{23}
1	0	140.9	10.1	5.0	3.0	0	0
2	90	10.1	140.9	5.0	3.0	0	0

En forma matricial:

$$(\bar{Q})_0 = \begin{bmatrix} 140.9 & 3.0 & 0 \\ 3 & 10.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{bmatrix} \text{ kN/mm}^2 ; \quad (\bar{Q})_{90} = \begin{bmatrix} 10.1 & 3.0 & 0 \\ 3.0 & 140.9 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{bmatrix} \text{ kN/mm}^2$$

Al ser el laminado antisimétrico aparece la matriz de acoplamiento [B]. Por tanto procedemos a calcular [A], [B] y [D].

$$A_{ij} = \sum_{p=1}^N t_p (\bar{Q}_{ij})_p \quad B_{ij} = -\sum_{p=1}^N t_p \bar{z}_p (\bar{Q}_{ij})_p \quad D_{ij} = \sum_{p=1}^N (t_p \bar{z}_p^2 + \frac{t_p^3}{12}) (\bar{Q}_{ij})_p$$

Para la realización de los cálculos los datos necesarios para las ecuaciones mostradas se muestran en la tabla A5.5.

Tabla A5.5 Datos para los cálculos de matriz A, B y C.

Lámina	θ°	t_p	\bar{z}_p	$t_p \bar{z}_p$	$t_p \bar{z}_p^2 + \frac{t_p^3}{12}$
1	0	0.125	-0.0625	-0.00781	0.00065
2	90	0.125	0.0625	0.00781	0.00065

$$A_{11} = (0.125 \times 140.9)_{\text{Lámina 1}} + (0.125 \times 10.1)_{\text{Lámina 2}} = 18.9 \text{ kN/mm}$$

$$A_{22} = (0.125 \times 10.1)_{\text{Lámina 1}} + (0.125 \times 140.9)_{\text{Lámina 2}} = 18.9 \text{ kN/mm}$$

$$A_{33} = (0.125 \times 5.0)_{\text{Lámina 1}} + (0.125 \times 5.0)_{\text{Lámina 2}} = 1.3 \text{ kN/mm}$$

$$A_{12} = (0.125 \times 3.0)_{\text{Lámina 1}} + (0.125 \times 3.0)_{\text{Lámina 2}} = 0.8 \text{ kN/mm}$$

$$A_{13} = A_{23} = 0; \text{ como } \bar{Q}_{13} = \bar{Q}_{23} = 0 \text{ para lámina de } 0^\circ \text{ y } 90^\circ$$

$$B_{11} = -[(-0.00781 \times 140.9)_{\text{Lámina 1}} + (0.00781 \times 10.1)_{\text{Lámina 2}}] = 1.0 \text{ kN/mm}$$

$$B_{22} = -[(-0.00781 \times 10.1)_{\text{Lámina 1}} + (0.00781 \times 140.9)_{\text{Lámina 2}}] = -1.0 \text{ kN/mm}$$

$$B_{33} = -[(-0.00781 \times 5.0)_{\text{Lámina 1}} + (0.00781 \times 5.0)_{\text{Lámina 2}}] = 0 \text{ kN/mm}$$

$$B_{12} = -[(-0.00781 \times 3.0)_{\text{Lámina 1}} + (0.00781 \times 3.0)_{\text{Lámina 2}}] = 0 \text{ kN/mm}$$

$$B_{13} = D_{23} = 0; \text{ como } \bar{Q}_{13} = \bar{Q}_{23} = 0 \text{ para lámina de } 0^\circ \text{ y } 90^\circ$$

$$D_{11} = (0.00065 \times 140.9)_{\text{Lámina 1}} + (0.00065 \times 10.1)_{\text{Lámina 2}} = 0.0982 \text{ kN/mm}$$

$$D_{11} = (0.00065 \times 10.1)_{\text{Lámina 1}} + (0.00065 \times 140.9)_{\text{Lámina 2}} = 0.0982 \text{ kN/mm}$$

$$D_{11} = (0.00065 \times 5.0)_{\text{Lámina 1}} + (0.00065 \times 3.0)_{\text{Lámina 2}} = 0.0065 \text{ kN/mm}$$

$$D_{11} = (0.00065 \times 3.0)_{\text{Lámina 1}} + (0.00065 \times 5.0)_{\text{Lámina 2}} = 0.0039 \text{ kN/mm}$$

$$D_{13} = D_{23} = 0; \text{ como } \bar{Q}_{13} = \bar{Q}_{23} = 0 \text{ para lámina de } 0^\circ \text{ y } 90^\circ$$

$$A = \begin{bmatrix} 18.9 & 0.8 & 0 \\ 0.8 & 18.9 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix} \text{ kN/mm} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kN/mm} \quad D = \begin{bmatrix} 0.0982 & 0.0039 & 0 \\ 0.0039 & 0.0982 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0065 \end{bmatrix} \text{ kN/mm}$$

Usando las ecuaciones se tiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18900 & 800 & 0 \\ 800 & 18900 & 0 \\ 0 & 0 & 1300 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 98.2 & 3.9 & 0 \\ 3.9 & 98.2 & 0 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix}$$

De esas dos ecuaciones se plantean las siguientes:

$$100 = 18900 \varepsilon_x^0 + 800 \varepsilon_y^0 + 1000 \kappa_x \quad (a)$$

$$0 = 800 \varepsilon_x^0 + 18900 \varepsilon_y^0 - 1000 \kappa_x \quad (b)$$

$$0 = 1300 \varepsilon_{xy}^0 \quad (c)$$

$$0 = 1000 \varepsilon_x^0 + 98.2 \kappa_x + 3.9 \kappa_y \quad (d)$$

$$0 = -1000 \varepsilon_y^0 + 3.9 \kappa_x + 98.2 \kappa_y \quad (e)$$

$$0 = 6.5 \kappa_{xy} \quad (f)$$

$$\text{De (f): } \kappa_{xy} = 0$$

$$\text{De (c): } \varepsilon_{xy}^0 = 0$$

Entonces quedan las ecuaciones (a), (b), (c) y (d). Las cuales poseen 4 incógnitas. Por tanto se obtiene lo siguiente:

$$\varepsilon_x^0 = 11.517 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\varepsilon_y^0 = -0.523 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\kappa_x = -117.256 \times 10^{-3} \text{ 1/mm}$$

$$\kappa_y = -0.667 \times 10^{-3} \text{ 1/mm}$$

Lámina 1 a 0°

$$\varepsilon_x = \varepsilon^0 - z k$$

$$\varepsilon_x = [11517 - (-0.0625)(-117.256)] \times 10^{-3} = 4.1885 \times 10^{-3} = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_y = [-0.523 - (-0.0625)(-0.667)] \times 10^{-3} = -0.5647 \times 10^{-3} = \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_{xy} = 0 = \varepsilon_{12}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_{\text{Lámina 1}} = \begin{bmatrix} 140.9 & 3.0 & 0 \\ 3.0 & 10.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{bmatrix}_{\text{Lámina 1}} \cdot \begin{bmatrix} 4.1885 \\ -0.5647 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{Lámina 1}} \times 10^{-6} \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

De donde se obtiene lo siguientes esfuerzos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_{\text{Lámina 1}} = \begin{bmatrix} 588 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{Lámina 1}} \text{ N/mm}^2$$

Lámina 2 a 90°

$$\varepsilon_x = \varepsilon^0 - z k$$

$$\varepsilon_x = [11517 - (0.0625)(-117.256)] \times 10^{-3} = 18.884 \times 10^{-3} = \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_y = [-0.523 - (0.0625)(-0.667)] \times 10^{-3} = -0.4813 \times 10^{-3} = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_{xy} = 0 = \varepsilon_{12}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_{\text{Lámina 2}} = \begin{bmatrix} 140.9 & 3.0 & 0 \\ 3.0 & 10.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{bmatrix}_{\text{Lámina 2}} \cdot \begin{bmatrix} -0.4813 \\ 18.8455 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{Lámina 2}} \times 10^{-6} \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

De donde se obtiene lo siguientes esfuerzos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_{\text{Lámina 2}} = \begin{bmatrix} -11 \\ 189 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{Lámina 2}} \text{ N/mm}^2$$