

# PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

## ESCUELA DE POSGRADO



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD**  
**CATÓLICA**  
DEL PERÚ

### PROPUESTA DE MÉTODO DE DISEÑO PARA REFORZAMIENTO SÍSMICO DE MUROS DE ADOBE CON MALLA DE CUERDAS

Tesis para optar el Grado de **Magíster en Ingeniería Civil**, que presenta:

Javier Carlos Sarmiento Huamán

Asesor: MARCIAL BLONDET SAAVEDRA, PhD.

Lima, abril de 2016

## AGRADECIMIENTOS

De modo especial agradezco al PhD. Marcial Blondet por todo lo aprendido en esta etapa y por brindar su tiempo y dedicación en guiar esta tesis. Ha sido muy grato aprender de él como asesor. Sobretudo aprender de él como amigo por sus historias que permiten comprender mejor el camino de la vida.

Al Ing. Julio Vargas Neumann por su asesoría y consejos durante las reuniones de investigación grupal. Su labor me ha demostrado que la investigación debe enfocarse con prioridad en el beneficio de las poblaciones más vulnerables. Gracias también al Dr. Nicola Tarque por su asesoría y consejos. Su experiencia me permitió aprender más sobre los elementos finitos y sobretudo aprender a trabajar mejor.

A la Ing. Gladys Villa-García y al personal de Laboratorio de Estructuras de la PUCP quienes siempre están dispuestos a ayudar y sobretudo enseñar. También muchas gracias al Ing. Guillermo Pachas y al Sr. Martín quienes no tuvieron reparo en compartir su experiencia y conocimiento sobre adquisición de datos en instrumentos electrónicos.

A mis amigos Jonathan Soto y Carlos Sosa quienes me enseñaron todo lo que aprendieron durante sus ensayos. A ellos les debo el conocimiento previo y necesario para la elaboración de esta tesis.

Muchas gracias a la Dra. Sandra Santa Cruz por su gestión para apoyar el proyecto de esta tesis. Gracias al Estado Peruano el cual a través de CONCYTEC me brindó su apoyo para seguir el camino de la investigación.

### **DEDICATORIA**

*A Dios por cada día nuevo y por comunicarse a través de su creación*

*A mi mamá por su apoyo incondicional en todo momento, a mi madrina de quien siempre aprendí a ser mejor.*

*A mi familia a quien tengo una deuda invaluable, a ellos siempre lo mejor.*



CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	i
DEDICATORIA	li
CONTENIDO	iii
1. RESUMEN	1
2. INTRODUCCIÓN	2
3. ENSAYO EXPERIMENTAL DEL PROTOTIPO DE ADOBE	3
3.1. Descripción del prototipo e instrumentación	3
3.2. Señal sísmica y protocolo de ensayo	4
3.3. Resultados experimentales	5
4. MODELO NUMÉRICO DEL PROTOTIPO DE ADOBE	8
4.1. Descripción del modelo	8
4.2. Calibración de las propiedades mecánicas del modelo	9
4.2.1. Módulo de elasticidad de la albañilería de adobe	9
4.2.2. Módulo de Poisson	10
4.2.3. Amortiguamiento del modelo	10
4.3. Análisis dinámico lineal	10
4.4. Resultados numéricos	11
4.4.1. Respuesta de aceleraciones	11
4.4.2. Esfuerzos máximos	24
4.5. Rigidez lateral del modelo	32
5. MODELO EN SÓLIDO RÍGIDO DEL PROTOTIPO DE ADOBE	33
5.1. Descripción del modelo	33
5.2. Movimiento sin impacto	34
5.3. Movimiento con impacto	35
5.4. Amortiguamiento para simular impacto	35
5.3.1. Caso 1: Aceleración nula $\ddot{u}_g = 0$	35
5.3.1.1. Movimiento armónico libre	35
5.3.1.2. Movimiento armónico con impacto	36
5.3.1.3. Movimiento amortiguado	36
5.3.1.4. Comparación amortiguamiento impacto	37
5.3.2. Caso 2: Aceleración sinusoidal $\ddot{u}_g = a g \sin \omega t + \phi 0$	38
5.3.2.1. Movimiento forzado	38
5.3.2.2. Movimiento forzado con impacto	38
5.3.2.3. Movimiento amortiguado forzado	40
5.3.2.4. Comparación amortiguamiento impacto	41
5.3.3. Caso 3: Aceleración sísmica	49
5.3.3.1. Registro de aceleración sísmica	50
5.3.3.2. Amortiguamiento para simular impacto	50
6. CONCLUSIONES	51
7. BIBLIOGRAFÍA	52
8. ANEXO	53

## 1. RESUMEN

Esta tesis presenta los resultados del análisis dinámico lineal por elementos finitos de un prototipo de casa de adobe a escala natural. Este prototipo fue ensayado en la mesa vibradora del Laboratorio de Estructuras Antisísmicas del Departamento de Ingeniería (LEDI) de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). El ensayo consistió en tres fases de simulaciones sísmicas de aceleración incrementada y tres vibraciones libres. Durante el ensayo se registraron desplazamientos y aceleraciones en los muros y en la base, incluyendo la fuerza resultante en el actuador de la mesa vibradora. Luego, se procesaron los registros para obtener el periodo de vibración y la rigidez lateral del prototipo.

El análisis numérico se realizó con el objetivo de obtener un modelo de elementos finitos cuyo comportamiento sea similar al experimento del prototipo de adobe en el rango lineal. El módulo de elasticidad ( $E$ ) de la albañilería de adobe del modelo numérico fue calibrado de tal forma que el periodo del primer modo de vibración sea igual al periodo experimental. El cociente de amortiguamiento ( $\xi$ ) fue tomado de investigaciones realizadas por Groenenberg (2010) y Tarque (2008). El modelo numérico lineal fue sometido a una aceleración igual a la registrada en la mesa vibradora durante la primera simulación del ensayo experimental. La similitud entre periodo de vibración, respuesta de aceleraciones y cortante basal validan la calibración realizada. También se identificó la coincidencia entre esfuerzos máximos de tracción del modelo con las zonas agrietadas del prototipo sometido a una mayor aceleración en la tercera fase. Por lo tanto, el modelo numérico representa numéricamente el comportamiento elástico del prototipo de adobe y predice las zonas potenciales de agrietamiento.

El modelo y las zonas agrietadas predicen la formación de bloques de adobe separables. Esta predicción mejorará el análisis del prototipo de adobe como un sistema de bloques rígidos divididos. El objetivo es diseñar un reforzamiento de cuerdas que envuelvan los muros de adobe, impidan la excesiva separación de estos bloques y eviten el colapso de la estructura. Sosa y Soto (2014) reforzaron con cuerdas un prototipo de adobe impidiendo el colapso con simulaciones sísmicas de hasta 1.3 g. Sin embargo, debido a que no hay un diseño, se busca simular el movimiento e impacto de los bloques de adobe reforzado. Los programas de análisis estructural más comunes no modelan el impacto, pero si modelan el movimiento amortiguado. Por ello se realizó una primera aproximación del movimiento de un bloque que impacta en traslación. Se simuló el movimiento con impacto que ocurre con coeficiente de restitución, con el movimiento amortiguado con cociente de amortiguamiento. La equivalencia se comprobó para casos en que el bloque impacta con una superficie estática, acelerada armónicamente y con aceleración sísmica.

## 2. INTRODUCCIÓN

Aproximadamente el 35% de viviendas del Perú son construidas con adobe y tapial (INEI, 2008). Sus características de bajo costo, alto aislamiento térmico y uso de material disponible en la zona hacen que sea un material de uso común en las zonas rurales del Perú. Sin embargo, las viviendas de adobe tienen alta vulnerabilidad sísmica debido a la baja resistencia de los bloques de adobe, técnicas de autoconstrucción inadecuadas y elevado peso de estas estructuras (Tarque et al., 2012). Por ello es importante estudiar experimentalmente el comportamiento sísmico de las viviendas de adobe, mejorar el comportamiento dinámico y reducir su vulnerabilidad.

Blondet et al. (2006) realizaron ensayos de simulación de prototipos de adobe a escala natural sin refuerzo con el objetivo de evaluar la capacidad de las estructuras de adobe. Luego, Bossio (2010) realizó simulaciones sísmicas de dos prototipos de vivienda reforzadas con geomallas con el objetivo de evaluar el comportamiento sísmico de los dos prototipos reforzados. Groenberg (2010) propuso una técnica simple de reparación de inyección de grout barro y la utilizó para reparar un prototipo de adobe dañado por una simulación sísmica. Luego, Groenberg realizó una nueva simulación sísmica para evaluar la recuperación de la capacidad del prototipo reforzado. En base a estas investigaciones previas, Sosa y Soto (2014) propusieron un sistema dual de reparación con grout de barro y reforzamiento con cuerdas sintéticas (nylon) para un prototipo de adobe dañado por una simulación sísmica. El refuerzo permitió recuperar el 70% de la rigidez lateral de la estructura y por ello es recomendable utilizarlo. Sin embargo, aún no se ha planteado un método ni diseño de reforzamiento confiable.

Esta tesis presenta el análisis por elementos finitos del prototipo de adobe ensayado por Sosa y Soto (2014). Durante los ensayos se registraron desplazamientos y aceleraciones de la estructura original y la reparada. El modelo numérico sólo se basó en los datos de la estructura original. El objetivo fue la calibración del módulo de elasticidad de la albañilería de adobe y entender el proceso de agrietamiento de los muros.

A pesar que el adobe tiene un comportamiento no lineal, en esta investigación se asume que para solicitaciones leves el comportamiento es aún lineal. Por ello se espera que esta investigación sea útil para determinar y predecir el inicio de la fractura de un prototipo de adobe sometido a simulaciones sísmicas.

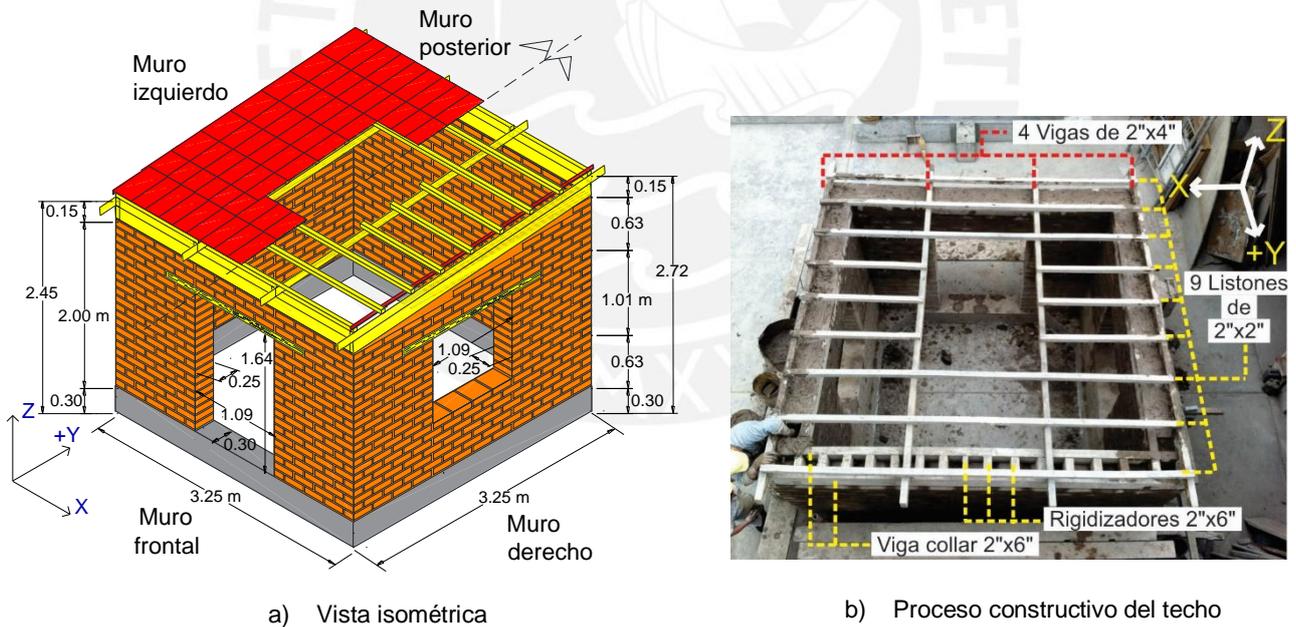
### 3. ENSAYO EXPERIMENTAL DEL PROTOTIPO DE ADOBE

Sosa y Soto (2014) ensayaron un prototipo de adobe a escala natural en la mesa vibradora del LEADI para generar sólo fisuras en los muros de adobe. Posteriormente, los muros fueron reparados con inyección de grout de barro y reforzados con cuerdas sintéticas. El prototipo fue ensayado experimentalmente de nuevo. El objetivo de dicho proyecto de investigación fue evaluar la capacidad del refuerzo para resistir en conjunto con los muros de adobe otros niveles de movimiento sísmico.

#### 3.1. Descripción del prototipo e instrumentación

Las Figura 1a y 1b muestran las dimensiones de los muros y una vista del proceso constructivo del techo del prototipo de vivienda de adobe. Los muros izquierdo y derecho son simétricos. El prototipo de adobe (97.3 kN de peso) fue construido sobre un anillo de concreto armado (27.3 kN de peso) en el patio del LEADI. Los muros de adobe fueron construidos con unidades de adobe de 250 mm x 250 mm x 70 mm. También se utilizaron medias unidades de 125 mm x 250 mm x 70 mm para construir las hiladas en forma intercalada. Las unidades fueron fabricadas con tierra, arena y paja en proporción 5:1:1 en volumen y unidas con mortero hecho con los mismos materiales en proporción 3:1:1 en volumen.

Los dinteles de la puerta y de las ventanas (Figura 1a) fueron hechos con cañas amarradas con alambre de acero #16. Sobre los muros se colocó una viga collar de madera tornillo en forma de viga Vierendeel volteada. La viga fue rellena con mortero para unirse a los muros y funcione como arriostre horizontal. Sobre la viga collar se clavaron 4 vigas y 9 listones (Figura 1b). Los listones sostuvieron las tejas de arcilla y se dejó una abertura de 1.1 m por 1.6 m en el centro del techo para facilitar el traslado del prototipo. El prototipo construido se dejó secar por 30 días antes del ensayo de simulación sísmica.



**Figura 1.** Medidas de los muros y vista superior de la construcción del techo del prototipo de adobe

Las Figura 2a y 2b muestran la instrumentación instalada en el prototipo: 6 transductores diferenciales variables y lineales (LVDT's) para medir desplazamientos (D1 a D5 y D8), 2 LVDT's para medir desplazamientos locales (D6 y D7) y 10 acelerómetros (A1 a A10). En la mesa vibradora se instalaron 1 LDVT (D0) y un acelerómetro (A0) para registrar el movimiento en la base y una celda de carga (Fa) para medir la fuerza resultante en el actuador servohidráulico que mueve la mesa vibradora.

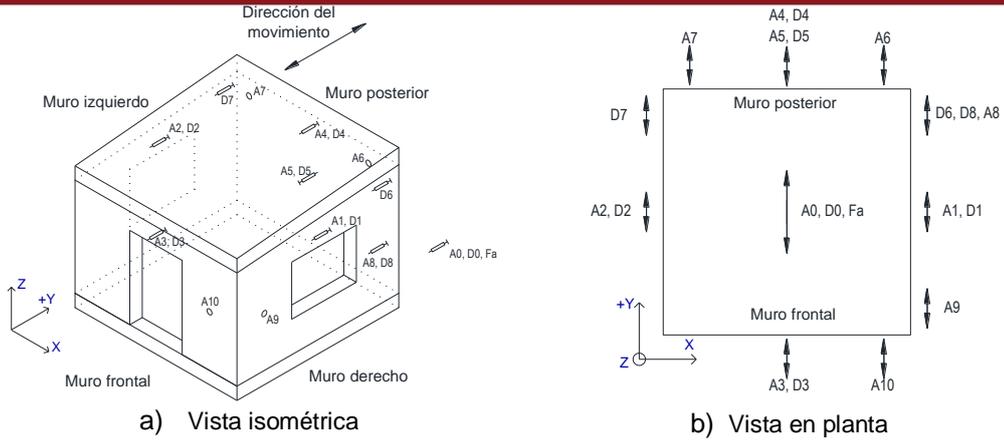


Figura 2. Esquema de la instrumentación instalada en el prototipo de adobe

### 3.2. Señal sísmica y protocolo de ensayo

La simulación sísmica del prototipo se realizó con una señal de comando de desplazamiento de la mesa vibradora. Esta señal fue obtenida de la componente longitudinal de la aceleración registrada en Lima durante el terremoto del 31 de mayo de 1970 (Figura 3a). La señal de comando se normalizó en el LEADI para que el desplazamiento máximo sea 1 mm y luego se amplificó electrónicamente para obtener 3 fases de simulación.

El ensayo consistió en 3 fases de simulación sísmica unidireccional y 3 ensayos de vibración libre. Se escaló la señal de comando para que el desplazamiento máximo de la mesa vibradora en la primera fase sea de 30 mm, en la segunda de 60 mm y en la tercera nuevamente 60 mm. La duración de las dos primeras fases fue de 30 s y la tercera se interrumpió a los 6 s para evitar el colapso de los muros. Las Figura 3a y 3b muestran el registro del desplazamiento y la aceleración de la mesa durante la fase 1.

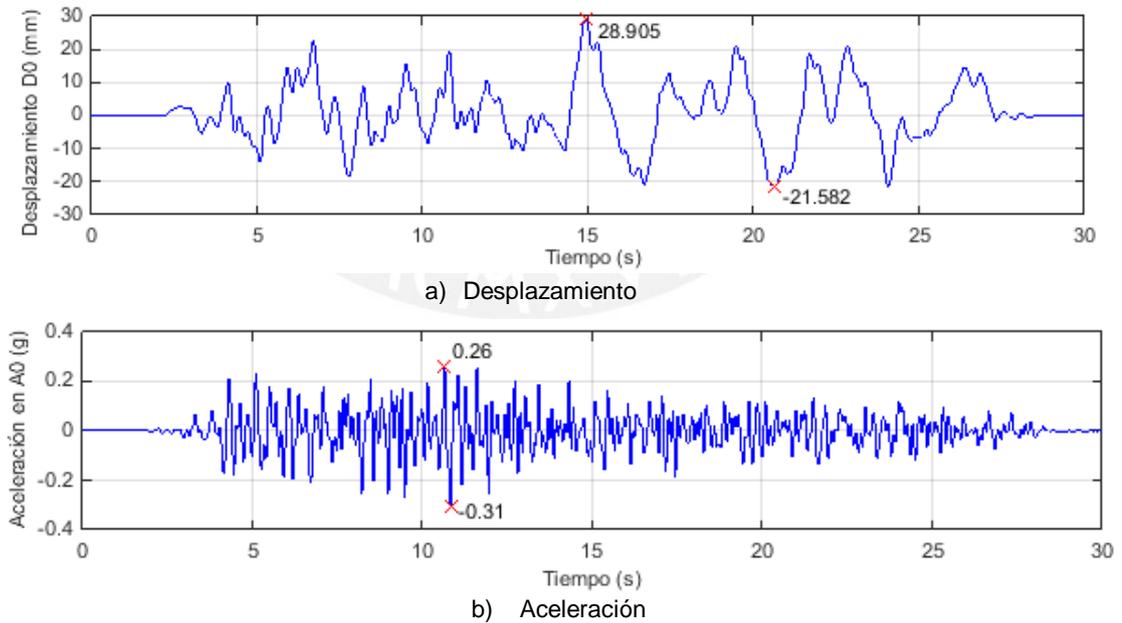


Figura 3. Registros de desplazamiento y aceleración de la mesa vibradora durante la fase 1

Antes de cada fase se realizó un ensayo de vibración libre para identificar los periodos de vibración del prototipo. La señal utilizada consistió en 4 pulsos (similares a la función escalón) que generaron desplazamientos de 3.5 mm en la mesa vibradora. Cuando el pulso dejó de actuar se obtuvo aproximadamente una vibración libre amortiguada del prototipo.

### 3.3. Resultados experimentales

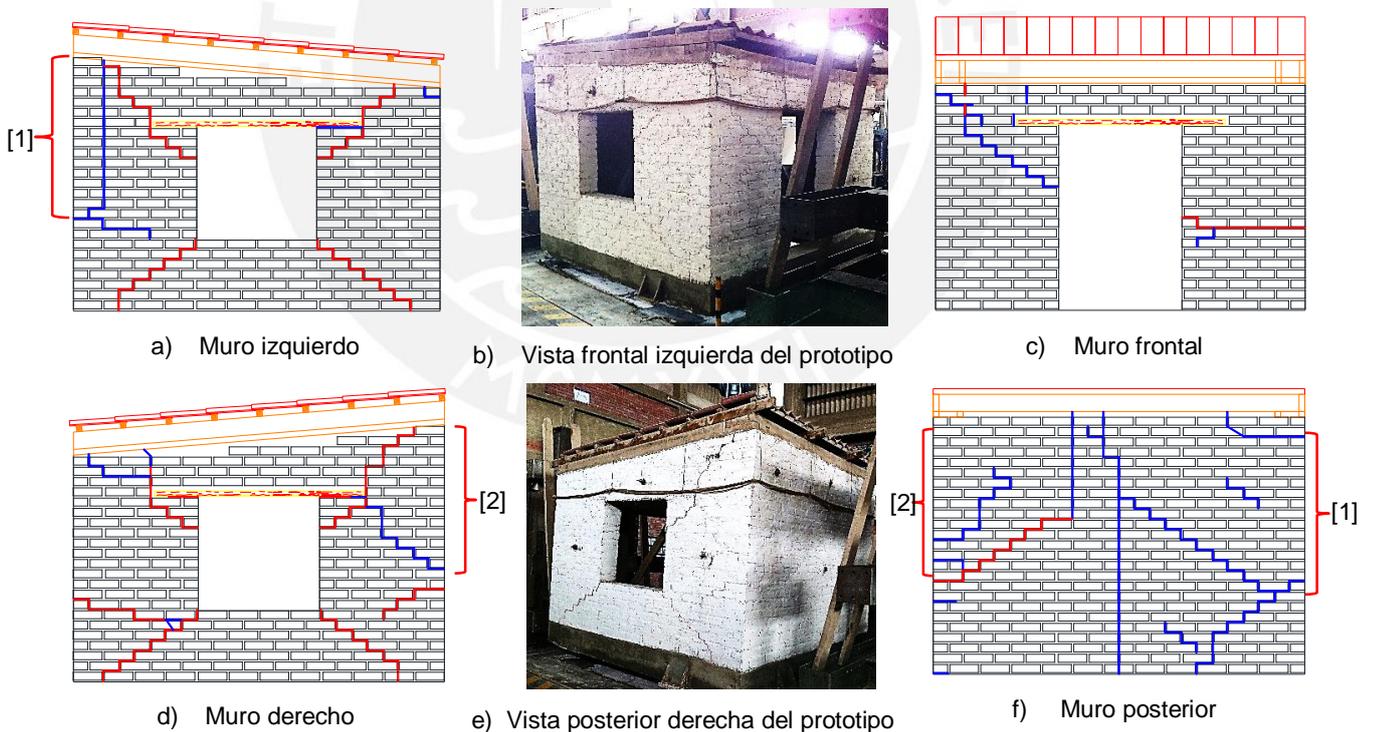
Durante la primera fase ( $D_{m\acute{a}x} = 30 \text{ mm}$ ) no se apreciaron da\u00f1os en el prototipo. Durante la segunda fase ( $D_{m\acute{a}x} = 60 \text{ mm}$ ) aparecieron fisuras visibles entre los 11 y 17 s correspondientes a los instantes de m\u00e1ximos desplazamientos de la mesa vibradora. Durante la tercera fase se generaron nuevas fisuras y las existentes se ensancharon (Figura 4b y 4e).

El esquema de grietas del prototipo al terminar la fase 3 permiti\u00f3 identificar las zonas de inter\u00e9s para estudiar los esfuerzos. Estas grietas se generaron principalmente por la poca resistencia a tracci\u00f3n y reducida adherencia entre el adobe y mortero. Los principales tipos de grietas fueron por tracci\u00f3n en el encuentro de muros, por flexi\u00f3n y por corte.

La grieta vertical indicada en la Figura 4a ocurri\u00f3 en la zona m\u00e1s alta del muro izquierdo debido principalmente a esfuerzos de tracci\u00f3n directa ya que funcion\u00f3 como arriostre lateral al muro posterior.

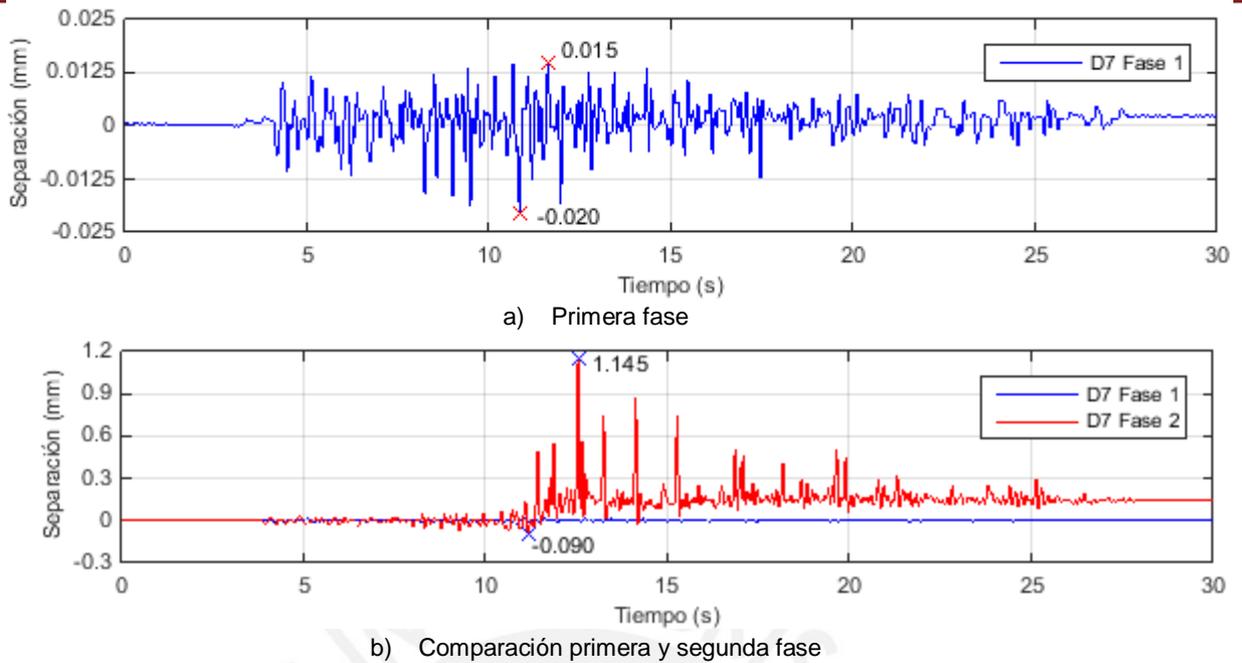
Las grietas verticales y oblicuas del muro posterior (Figura 4f) se debieron a esfuerzos de tracci\u00f3n por flexi\u00f3n. Debido a que el muro actu\u00f3 como una losa apoyada en su base y en los muros izquierdo y derecho que lo arriostran. Las grietas horizontales y oblicuas del muro frontal (Figura 4c) tambi\u00e9n se debieron a esfuerzos por flexi\u00f3n.

Las grietas oblicuas en los muros izquierdo (Figura 4a) y derecho (Figura 4d) se deben a que estos trabajaron como muro de corte. Por ello se generaron esfuerzos tangenciales en las juntas. Las grietas diagonales se generaron desde la esquina superior del prototipo hasta la esquina superior de las ventanas (al lado de los dinteles). Tambi\u00e9n se generaron grietas diagonales desde las esquinas inferiores de las ventanas hasta la base.



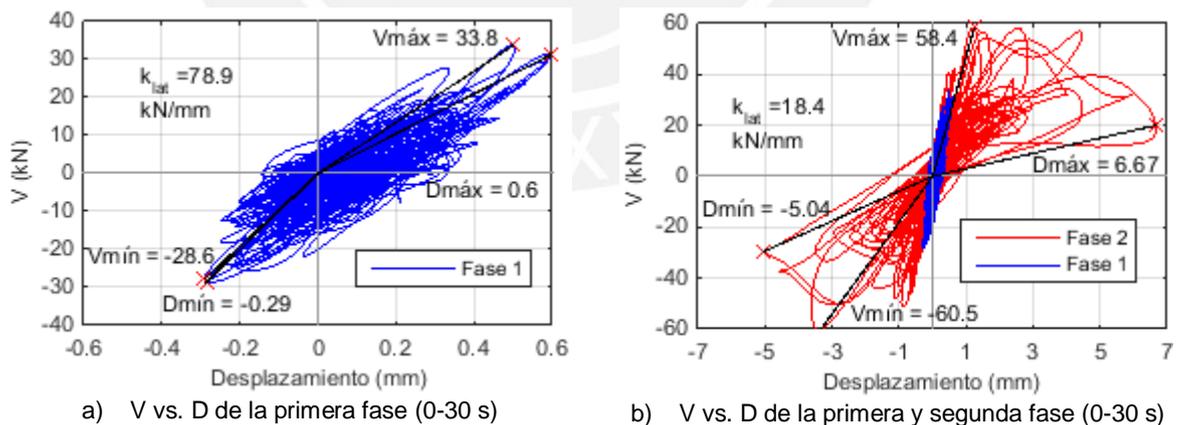
**Figura 4.** Esquema y fotos de las fisuras en el prototipo posteriores a la fase 2 (—) y a la fase 3 (—)

Se analiz\u00f3 el registro de desplazamiento local del LVDT D7. Este LVDT mide la separaci\u00f3n entre los muros izquierdo y posterior en la parte superior de la esquina que los une. El LVDT D6 no fue procesado porque las mediciones conten\u00edan ruido. La Figura 5a muestra una separaci\u00f3n de hasta 0.015 mm durante la primera fase. En cambio durante la segunda fase (Figura 5b) la esquina alcanz\u00f3 una separaci\u00f3n m\u00e1xima de 1.145 mm y dej\u00f3 una separaci\u00f3n permanente de 0.14 mm.



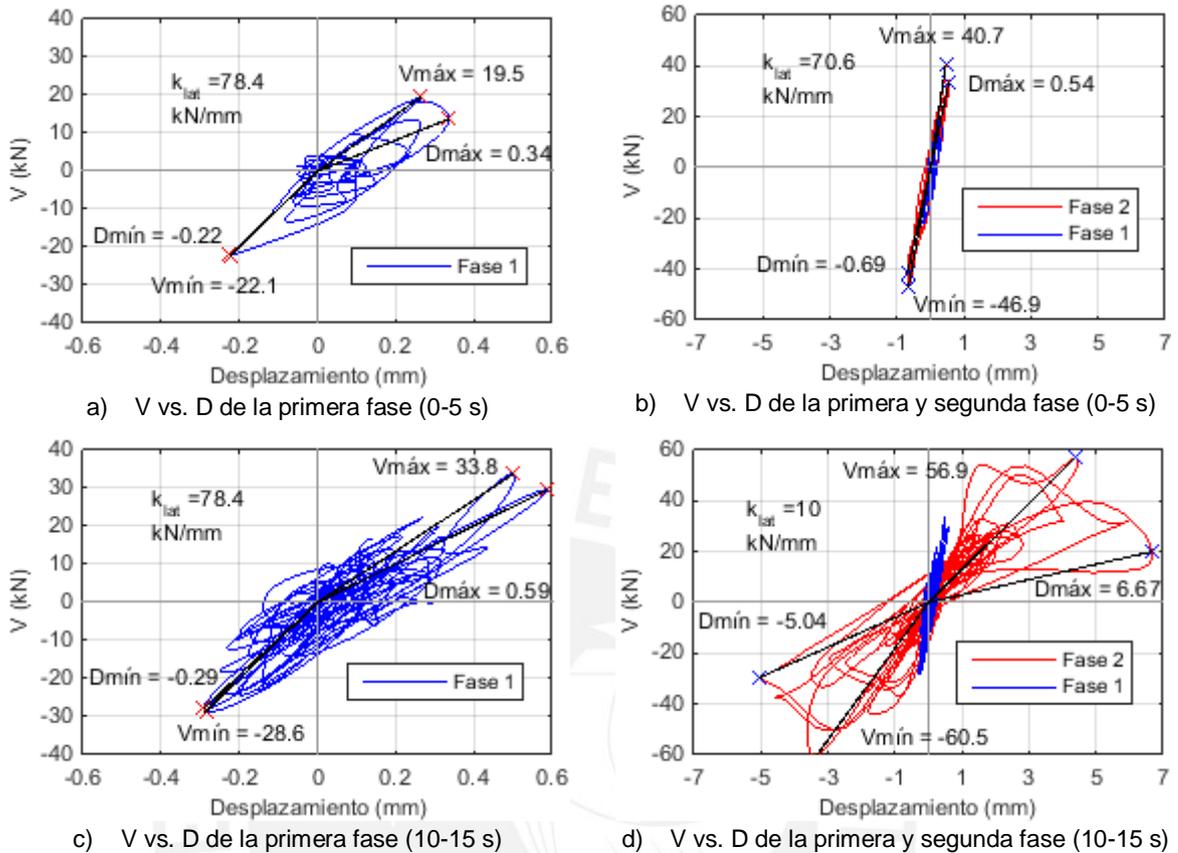
**Figura 5.** Separación medida en D7 del prototipo durante la simulación sísmica

La rigidez lateral del prototipo fue determinada considerando la fuerza cortante en la interacción cimentación y muros de adobe y el desplazamiento promedio de la parte superior de los muros izquierdo y derecho. La fuerza cortante se obtuvo con la fuerza medida en el actuador servohidráulico menos la fuerza inercial de la mesa vibradora junto con el anillo de cimentación. El desplazamiento fue el promedio de D1 y D2 (Figura 2a) relativos a la mesa. Las Figura 6a y 6b muestran el comportamiento histerético de la primera y segunda fase de la simulación sísmica respectivamente. La rigidez lateral ( $K_{lat}$ ) es el promedio de las pendientes de las 4 segmentos trazados en las Figura 6a y 6b. Dos segmentos unen el origen con los máximos cortantes y otros dos con los máximos desplazamientos. La rigidez resultó 79 kN/mm y 18 kN/mm durante la primera y segunda fase respectivamente.



**Figura 6.** Cortante basal versus Desplazamiento promedio D1R y D2R del prototipo de adobe durante las dos primeras simulaciones sísmicas

Las Figura 7a hasta la 7d muestran una comparación entre dos intervalos de tiempo de 5 s en los que hay mayor similitud y mayor diferencia de las rigideces laterales obtenidas.



**Figura 7.** Cortante basal versus Desplazamiento promedio D1R y D2R del prototipo de adobe analizado en intervalos de tiempo durante las dos primeras simulaciones sísmicas

La Tabla 1 presenta una comparación de la rigidez medida durante las fases 1 y 2 en cual se llegó a reducir la rigidez hasta en 13%. Sin embargo, durante los primeros 5 s de la fase 2 se alcanzó hasta 91% de la rigidez de la fase 1 obtenida en el mismo intervalo.

**Tabla 1.** Rigidez lateral del prototipo durante las dos primeras fases de la simulación sísmica

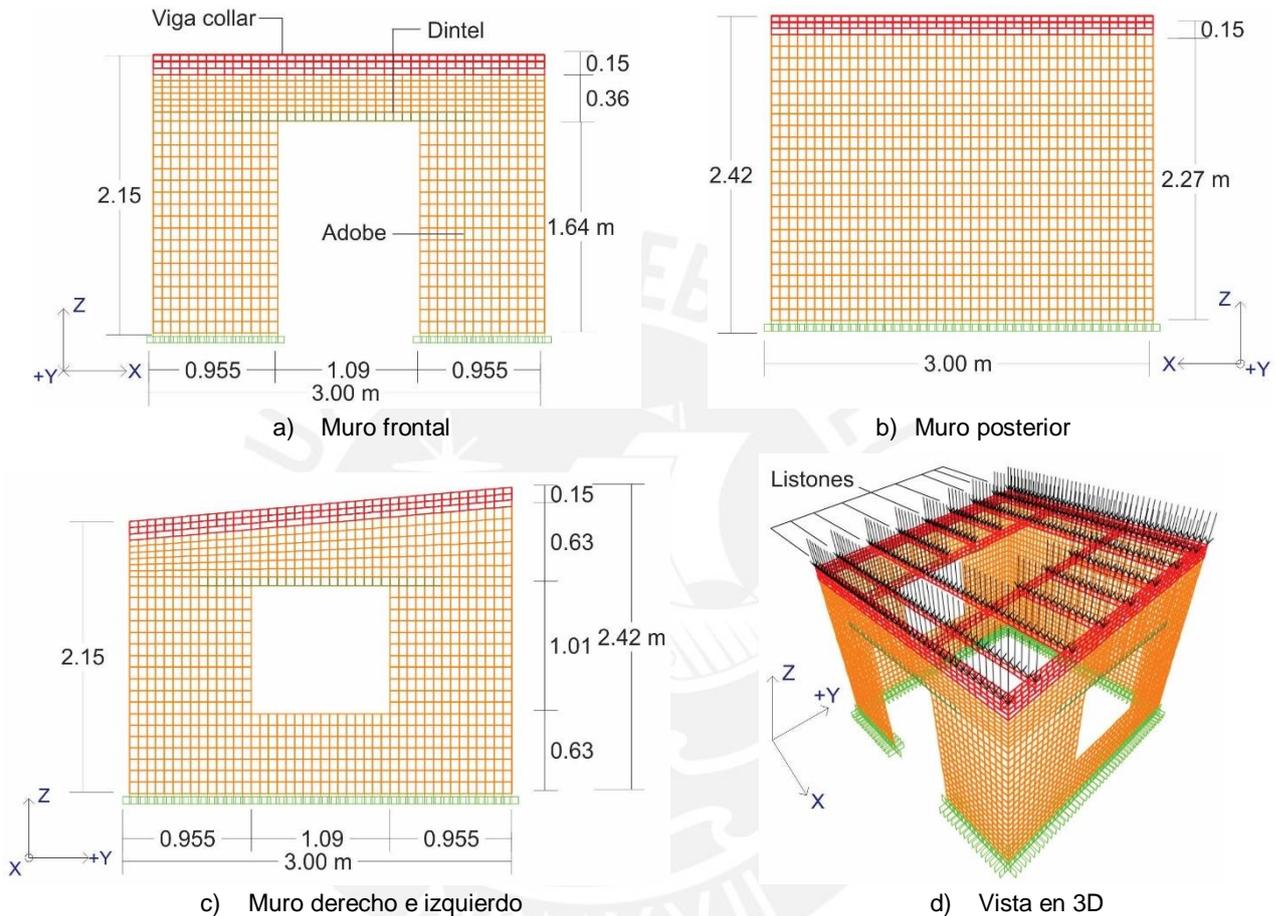
Intervalos de tiempo (s)	Rigidez (kN/mm) Fase 1	Rigidez (kN/mm) Fase 2	Proporción rigidez fase 2 / fase 1
0 - 5	78	71	0.91
5 - 10	88	41	0.47
10 - 15	78	10	0.13
15 - 20	66	13	0.20
20 - 25	72	21	0.29
25 - 30	39	23	0.59

Durante la primera fase del ensayo de simulación sísmica no se observaron daños ni fisuras visibles. En esta fase hubo una separación máxima de 0.015 mm medido en la parte superior de la esquina de los muros izquierdo y posterior. Además, las curvas de cortante vs. desplazamiento son aproximadamente lineales. Entonces es válido aproximar el movimiento del prototipo durante la fase 1 en el rango lineal elástico. Sin embargo, durante la segunda fase se observaron grietas en los muros. La separación máxima medida en la esquina del muro izquierdo y posterior fue de 1.145 mm. Por lo tanto, el comportamiento del prototipo durante la fase 2 estuvo en el rango inelástico.

## 4. MODELO NUMÉRICO DEL PROTOTIPO DE ADOBE

### 4.1. Descripción del modelo

Se ensambló un modelo numérico de elementos finitos para reproducir el comportamiento dinámico lineal del prototipo de adobe durante la primera fase. Este modelo se realizó en el programa SAP2000 (CSI, 2015). El módulo de elasticidad utilizado para la mampostería de adobe se calibró en base a los resultados del prototipo experimental. Las Figura 8a, 8b y 8c muestran el modelo numérico compuesto por mallas de elementos shell de cuatro puntos de integración.



**Figura 8.** Modelo numérico del prototipo de adobe

En este modelo numérico se ha considerado que tanto las unidades de adobe y el mortero forman un único material (albañilería de adobe) elástico, homogéneo e isótropo. La distribución de la malla de elementos shell permitió considerar que cuatro elementos representen una unidad de adobe incluyendo el mortero que los une. La mayoría de los elementos para la albañilería y dinteles fueron rectángulos de 70 por 90 mm y 250 mm de espesor. La Figura 8d muestra los listones de madera modelados como elementos shell de sección cuadrada de 50 mm de lado y 50 mm de espesor. El peso de las tejas de arcilla (24.5 N cada una) fue considerado como una carga distribuida en los nodos de los listones del modelo numérico.

No se consideró el modelamiento de la cimentación, sin embargo, los muros están empotrados en la base. La viga collar real tenía relleno de barro dentro de los huecos del armazón de madera para que pueda conectarse con los muros (Figura 9a). Esta viga se modeló como un elemento de sección constante y para ello se calibró en un modelo aparte. La calibración se realizó con elementos shell de madera y adobe con una carga repartida en la parte frontal y posterior (Figura 9b). Luego se modeló una viga simplificada de madera y de sección constante de 205 mm de ancho y 150 mm de alto (Figura 9d). El ancho de la viga se calculó de tal forma que las deflexiones en la viga collar de elementos shell (Figura 9c) y la viga simplificada (Figura 9f) sean

semejantes ante una carga unitaria en el centro y una carga repartida en toda la viga. La Figura 9d muestra una conexión rígida entre la viga collar y los muros de adobe en forma intercalada para simular la interconexión real (Figura 9a). Sin embargo, hubo conexión rígida continua entre los dinteles de caña y los muros. Los listones de madera del prototipo fueron clavados entre sí en los cruces (Figura 9a). En el modelo numérico estas uniones fueron reemplazadas por conexiones rígidas (Figura 9d).

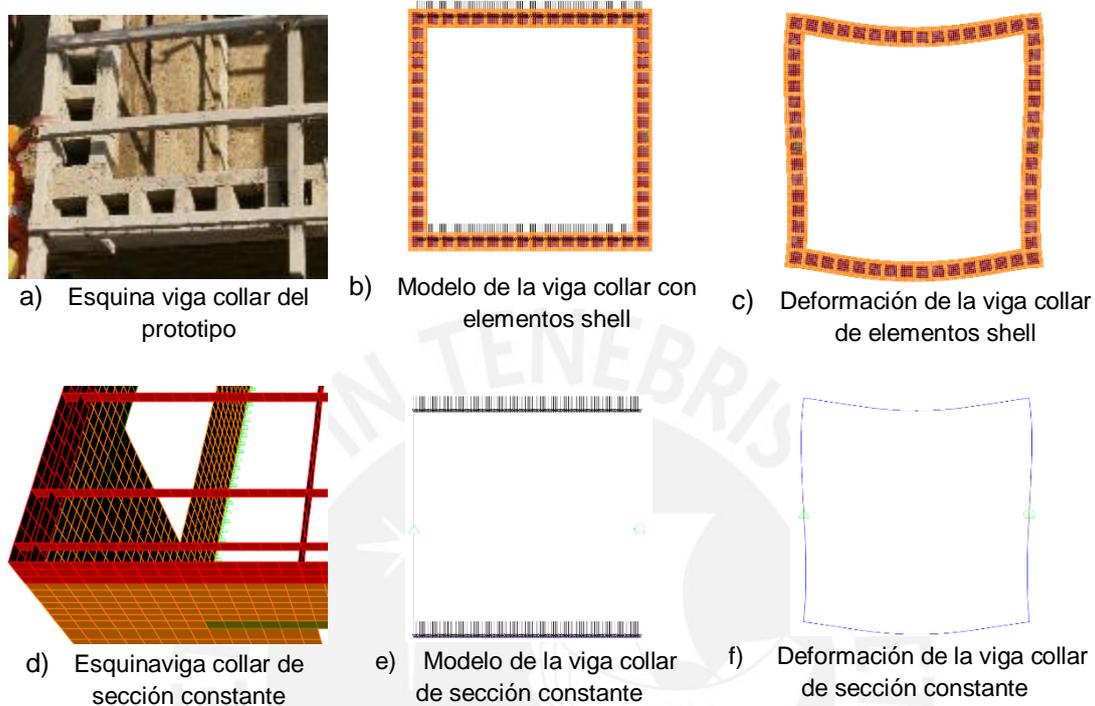


Figura 9. Modelamiento de la viga collar

La Tabla 2 resume las propiedades consideradas en el modelo numérico. El módulo de elasticidad del adobe fue calibrado para que el periodo del primer modo de vibración coincida con el periodo de vibración natural del prototipo.

Tabla 2. Propiedades elásticas de los materiales para el modelo numérico

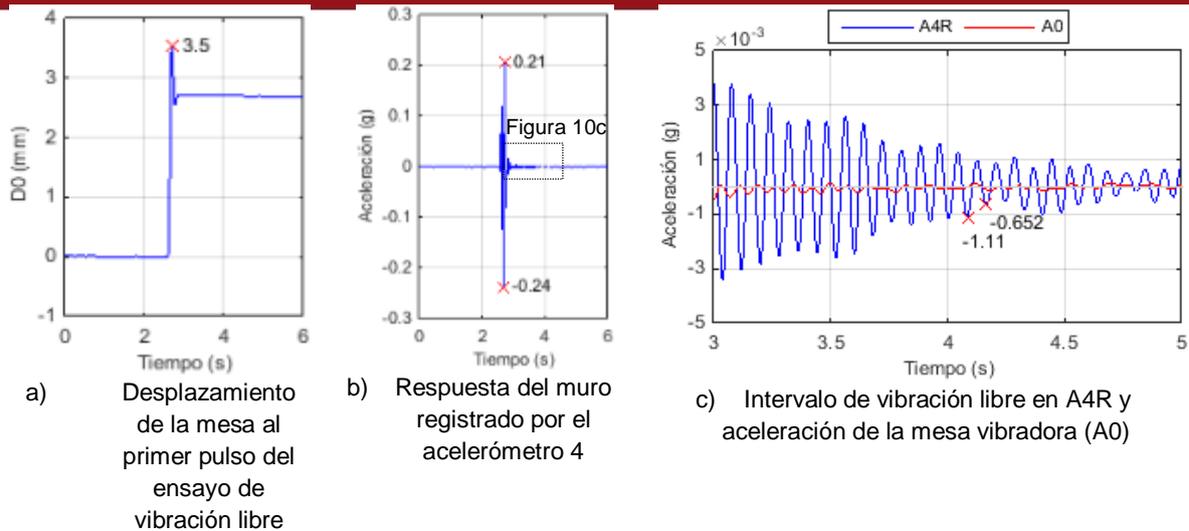
Material	Peo específico (kN/m <sup>3</sup> )	Módulo de Elasticidad (MPa)	Coefficiente de Poisson	Referencia
Albañilería de adobe	16.7	250	0.20	Prototipo experimental
Madera Tornillo	7.0	12 750	0.20	(RNE Norma E.010, 2006)
Caña	6.5	6 500	0.20	(Groenenberg, 2010)

## 4.2. Calibración de las propiedades mecánicas del modelo

### 4.2.1. Módulo de elasticidad de la albañilería de adobe

Una de las propiedades mecánicas importantes en el adobe es el módulo de elasticidad (Tarque, 2011). Por ello fue necesario calcular el valor del módulo de elasticidad que se debe usar en el modelo numérico con el objetivo de obtener un periodo de vibración similar al obtenido experimentalmente.

El periodo de vibración (T) del prototipo se calculó aplicando un pulso de desplazamiento en la mesa vibradora (Figura 10a). La Figura 10b muestra la respuesta de vibración libre del muro. Para hallar el T se dividió cada intervalo de vibración libre entre el número de ciclos observados en ese intervalo (Figura 10c).



**Figura 10.** Respuesta de la mesa vibradora y respuesta de aceleraciones relativas del prototipo durante el ensayo de vibración libre inicial (VL0)

Se tomó como periodo de vibración el promedio de los acelerómetros del A1R, A2R, A3R y A5R debido a que se analiza el movimiento longitudinal del prototipo. El periodo resultante fue  $T = 0.081$  s.

El periodo depende de la masa y rigidez del modelo numérico, y esta última depende del módulo de elasticidad ( $E$ ). Entonces fue posible calibrar el módulo de elasticidad con el fin de obtener el primer periodo del análisis modal igual al periodo experimental. El valor hallado fue  $E = 250$  MPa.

#### 4.2.2. Módulo de Poisson

Blondet y Vargas (1978) obtuvieron un módulo de Poisson  $\nu = 0.28$  en ensayos de compresión diagonal de muretes y  $\nu = 0.15$  en ensayos de corte en muros. En el modelo numérico se tomará un valor intermedio de  $\nu = 0.20$ .

#### 4.2.3. Amortiguamiento del modelo

Durante el ensayo de vibración libre la mesa continuaba en movimiento durante la respuesta armónica del muro (Figura 10c) y por ello no se pudo calcular la envolvente que represente el decremento logarítmico.

Bossio (2010) realizó un ensayo de vibración libre inicial de un prototipo de adobe con viga collar donde obtuvo coeficientes de amortiguamiento entre 7 y 14.5 %. Luego realizó un ensayo dinámico similar a la fase 1 de Sosa y Soto (2014) y posteriormente un ensayo de vibración libre donde obtuvo coeficientes de amortiguamiento entre 8 y 13.6 %.

Para el análisis dinámico del modelo numérico de este trabajo se utilizó un amortiguamiento de 11% recomendado por Groenberg (2010) y Tarque (2011).

### 4.3. Análisis dinámico lineal

Para el análisis dinámico lineal se utilizó el registro de aceleraciones de la primera fase medido en la mesa vibradora. El análisis dinámico consistió en 2 etapas, la primera fue la aplicación del peso propio y la segunda fue la aplicación de la señal de aceleración. El tiempo de cálculo en una computadora utilizando 4 Gb de memoria RAM y procesador Core i5 fue de 30 s para el análisis estático por peso propio y de 130 s para el análisis dinámico de la fase 1 de la simulación sísmica.

Antes de iniciar con la segunda etapa se verificó que el peso total del modelo numérico (97.85 kN) sea consistente con el calculado en el prototipo experimental. La solución adoptada en SAP2000 durante la etapa dinámica fue por el método de superposición modal. El método utiliza cada modo para desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales que definen el equilibrio dinámico de la estructura. En esta investigación los vectores de cada modo se obtuvieron con el algoritmo vectorial de Ritz. Además, se utilizaron 150 modos para obtener más del 90% de participación de masas en cada dirección de análisis (rotación en z, traslación en x e y). Cada ecuación desacoplada es resuelta en SAP2000 con los datos de las aceleraciones registradas en la mesa vibradora durante la primera fase de la simulación sísmica. Finalmente, las respuestas de cada ecuación fueron superpuestas utilizando los vectores modales para obtener la respuesta final de la estructura.

#### 4.4. Resultados numéricos

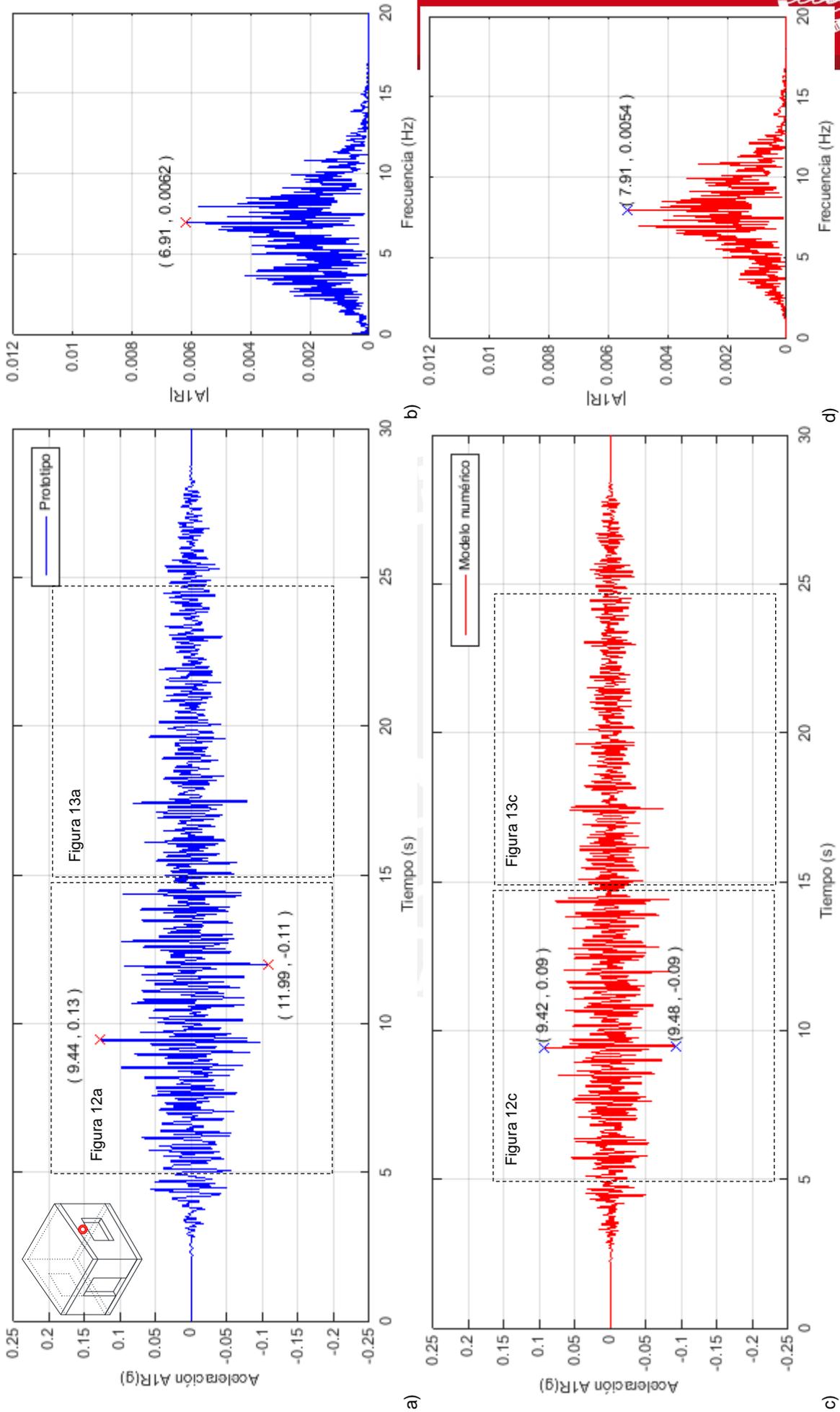
##### 4.4.1. Respuesta de aceleraciones

Las Figura 11, 14, 17 y 20 muestran la comparación de aceleraciones entre el prototipo de adobe y el modelo numérico. Para ello se utilizaron los registros de aceleraciones de la fase 1 tomados en la parte superior de los muros (i.e. A1, A2, A3 y A4). Se calcularon las aceleraciones relativas respecto a la base, por lo que a cada medición se le restó la aceleración A0. La comparación se dividió en dos intervalos de tiempo (de 5 a 15 s y de 15 a 25 s) indicadas en dos Figuras subsiguientes a las Figura 11, 14, 17 y 20. Con el fin de complementar la comparación se agregaron espectros con el contenido de frecuencias. No se compararon los desplazamientos relativos ya que D1 contenía ruido y el resto de LVDT's registraron frecuencias de 0 a 1 Hz que no corresponden con el espectro de frecuencias obtenido de los acelerómetros.

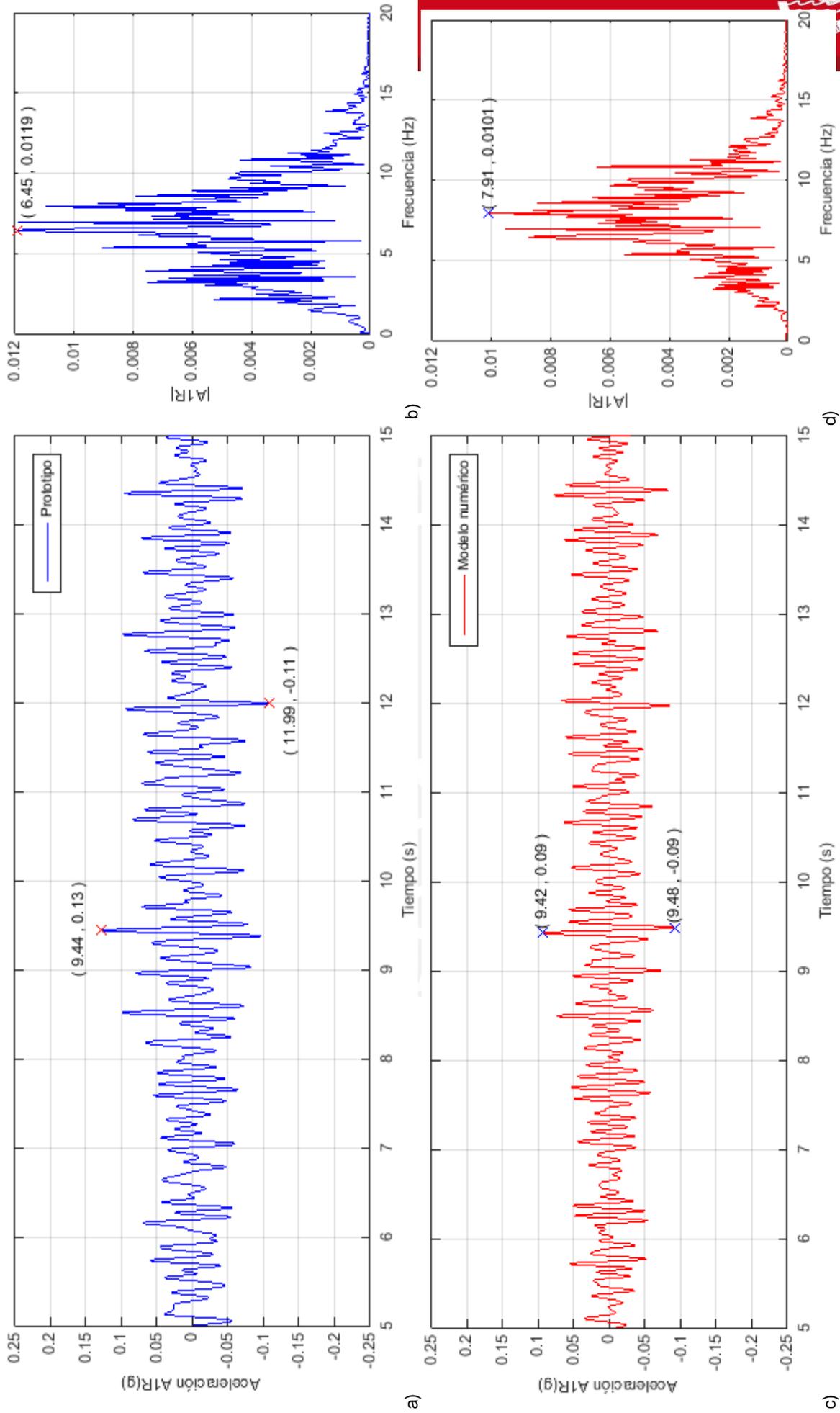
La Tabla 3 resume el error de las aceleraciones máximas y mínimas del modelo respecto al prototipo. En todos los espectros de las aceleraciones se observa mayores amplitudes en el prototipo que el modelo. Esta es una limitación del modelo numérico respecto a la respuesta de la estructura.

**Tabla 3.** Error (%) de las aceleraciones del modelo respecto al prototipo

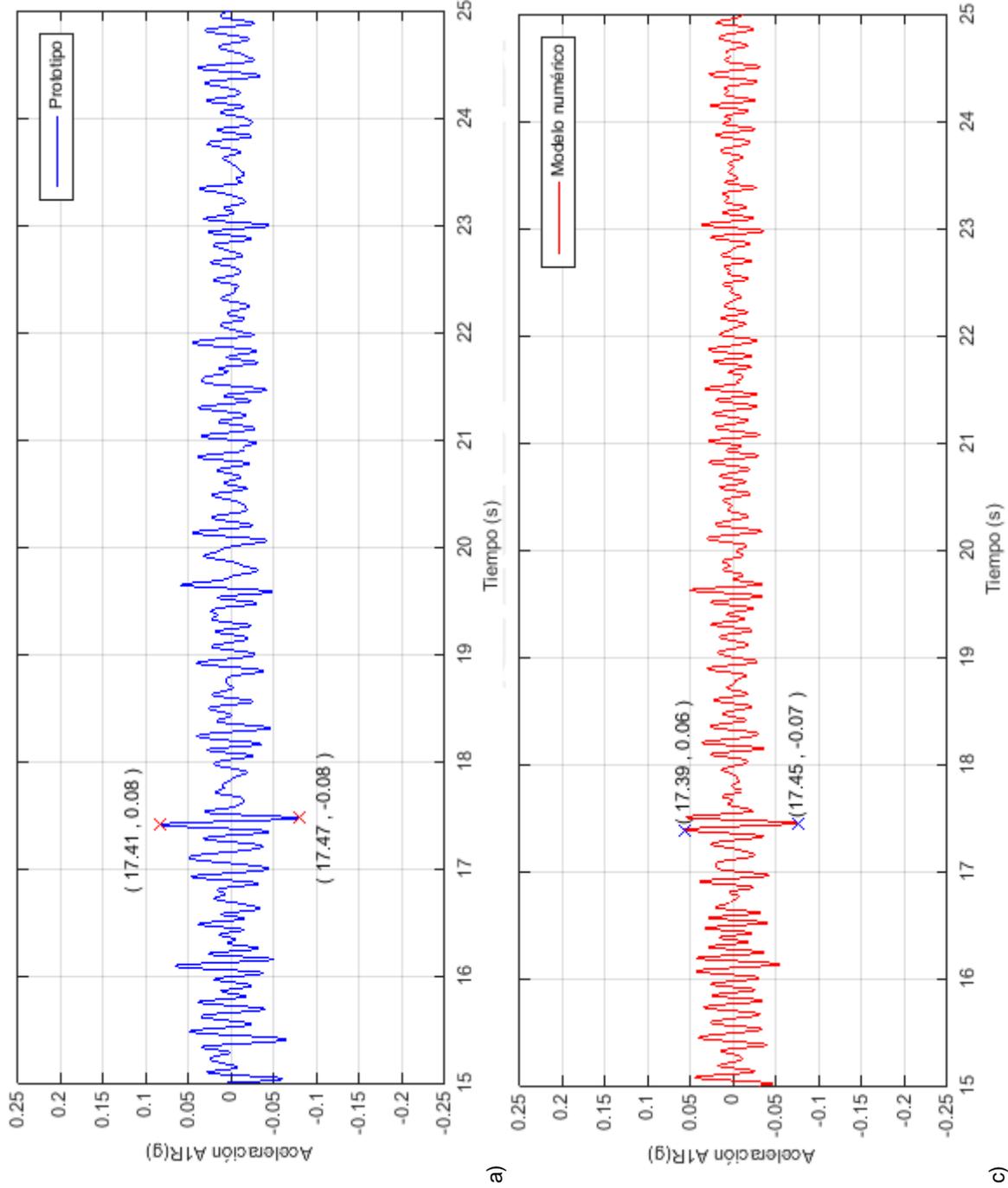
	A máx		A mín	
	5 – 15 s	15 – 25 s	5 – 15 s	15 – 25 s
A1R	-30	-25	-27	-13
A2R	-25	-25	-20	0
A3R	-27	-27	-31	-15
A4R	-32	-31	-54	-29



**Figura 11.** Aceleración A1 relativa a la mesa vibradora medida en el prototipo y en el modelo numérico durante toda la fase 1 y su contenido de frecuencias



**Figura 12.** Aceleración A1 relativa a la mesa vibradora medida en el prototipo y en el modelo numérico desde  $t = 5$  s hasta 15 s de la fase 1 y su contenido de frecuencias



**Figura 13.** Aceleración A1 relativa a la mesa vibradora medida en el prototipo y en el modelo numérico desde t = 15 s hasta 25 s de la fase 1 y su contenido de frecuencias

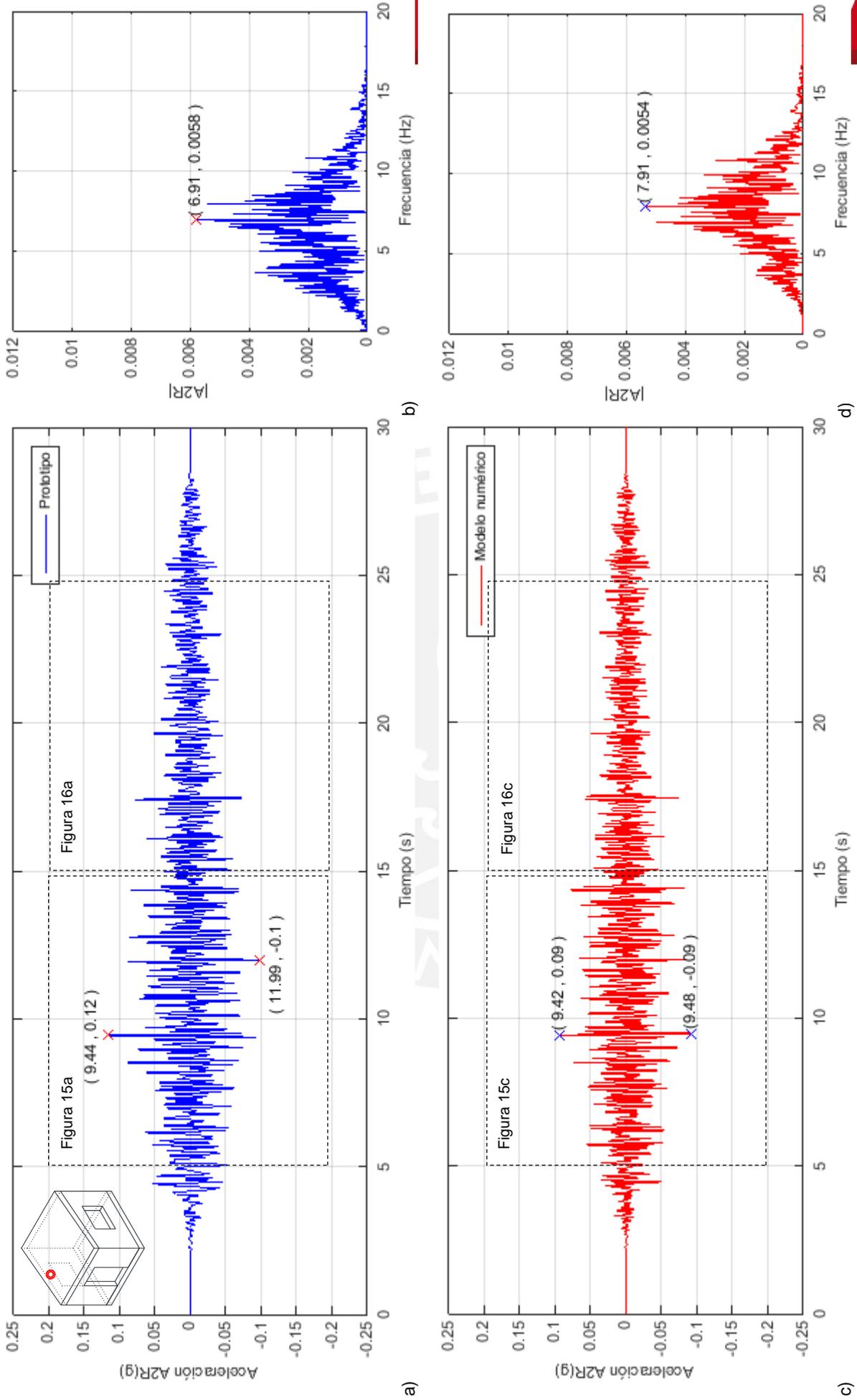
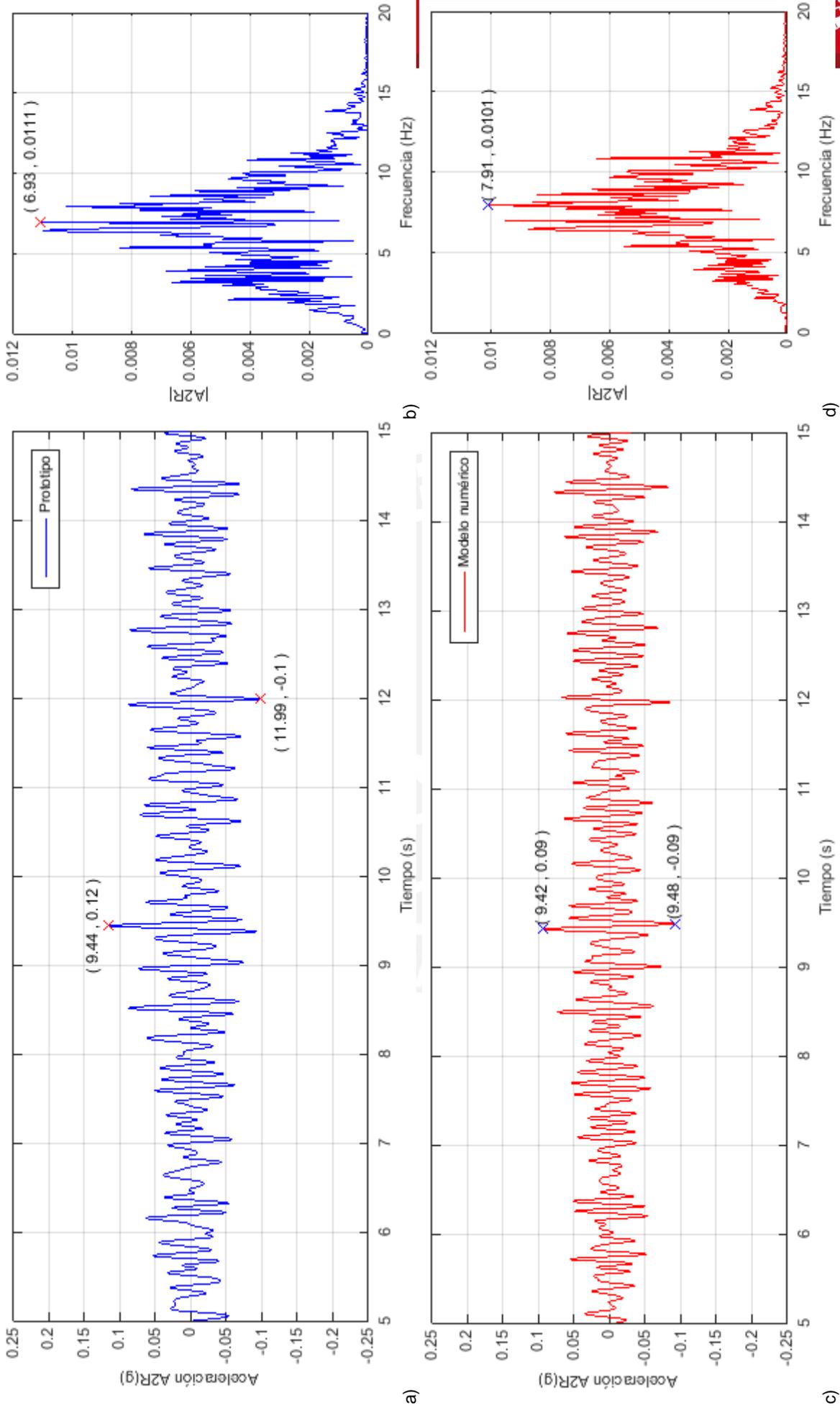
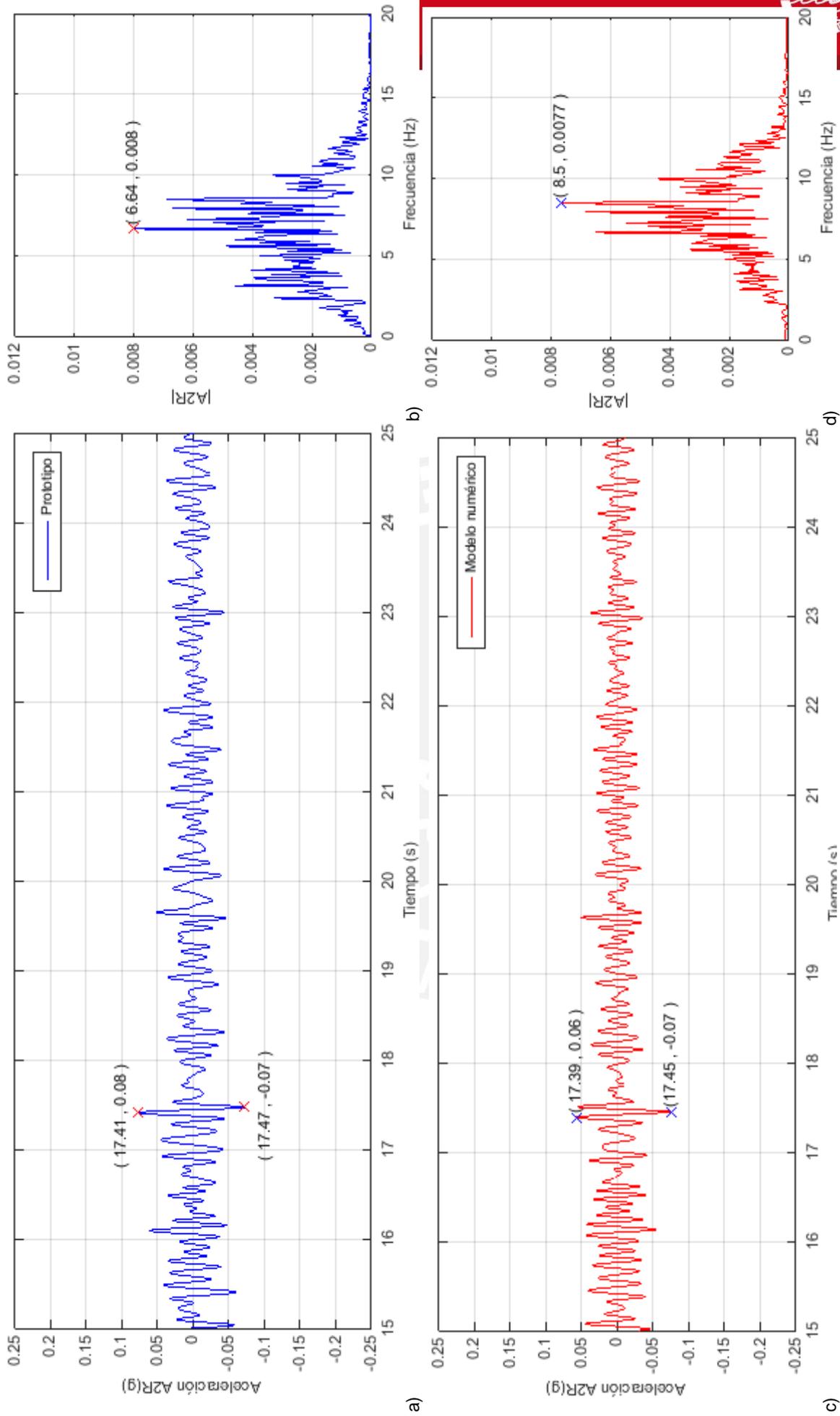


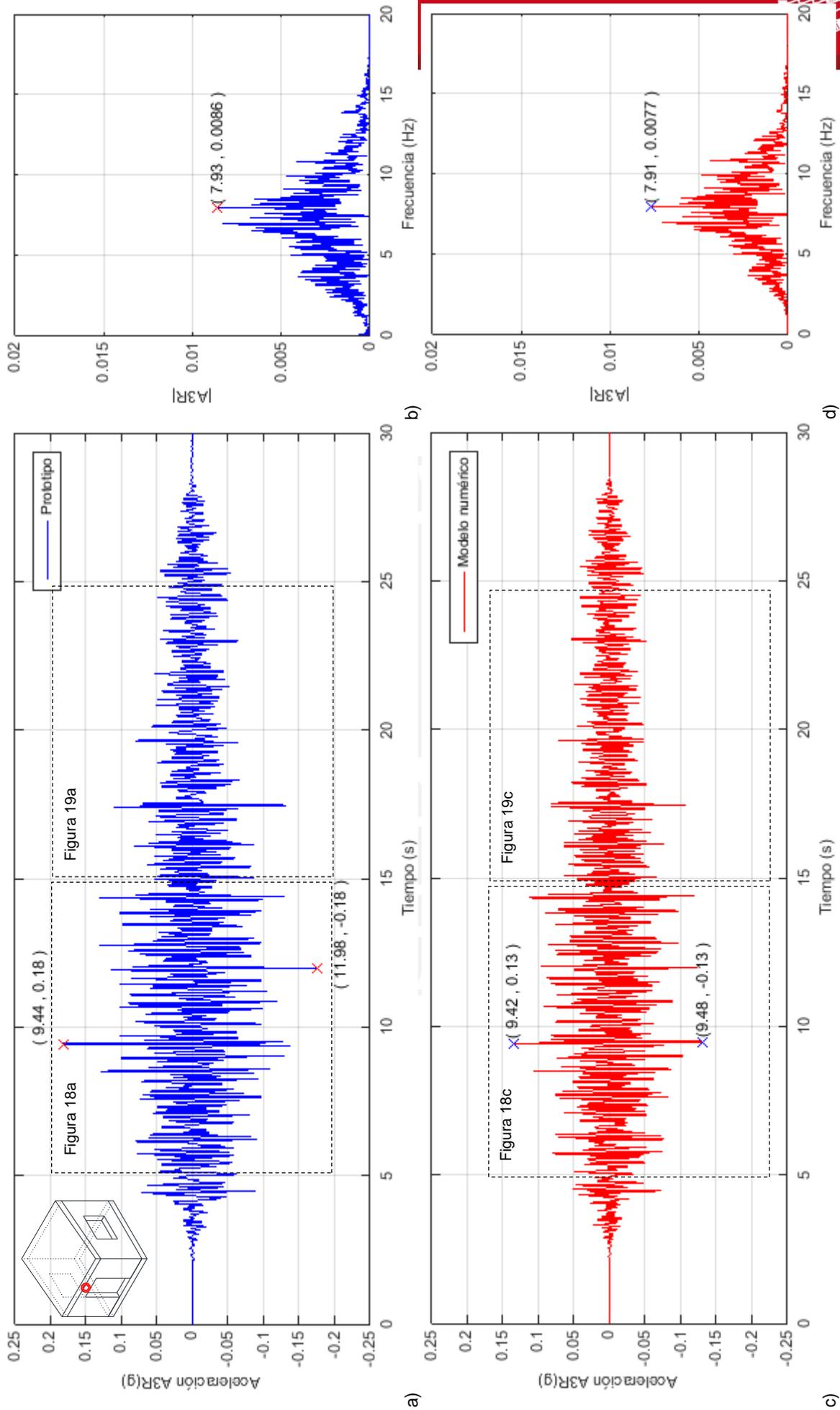
Figura 14. Aceleración A2 relativa a la mesa vibradora medida en el prototipo y en el modelo numérico durante toda la fase 1 y su contenido de frecuencias



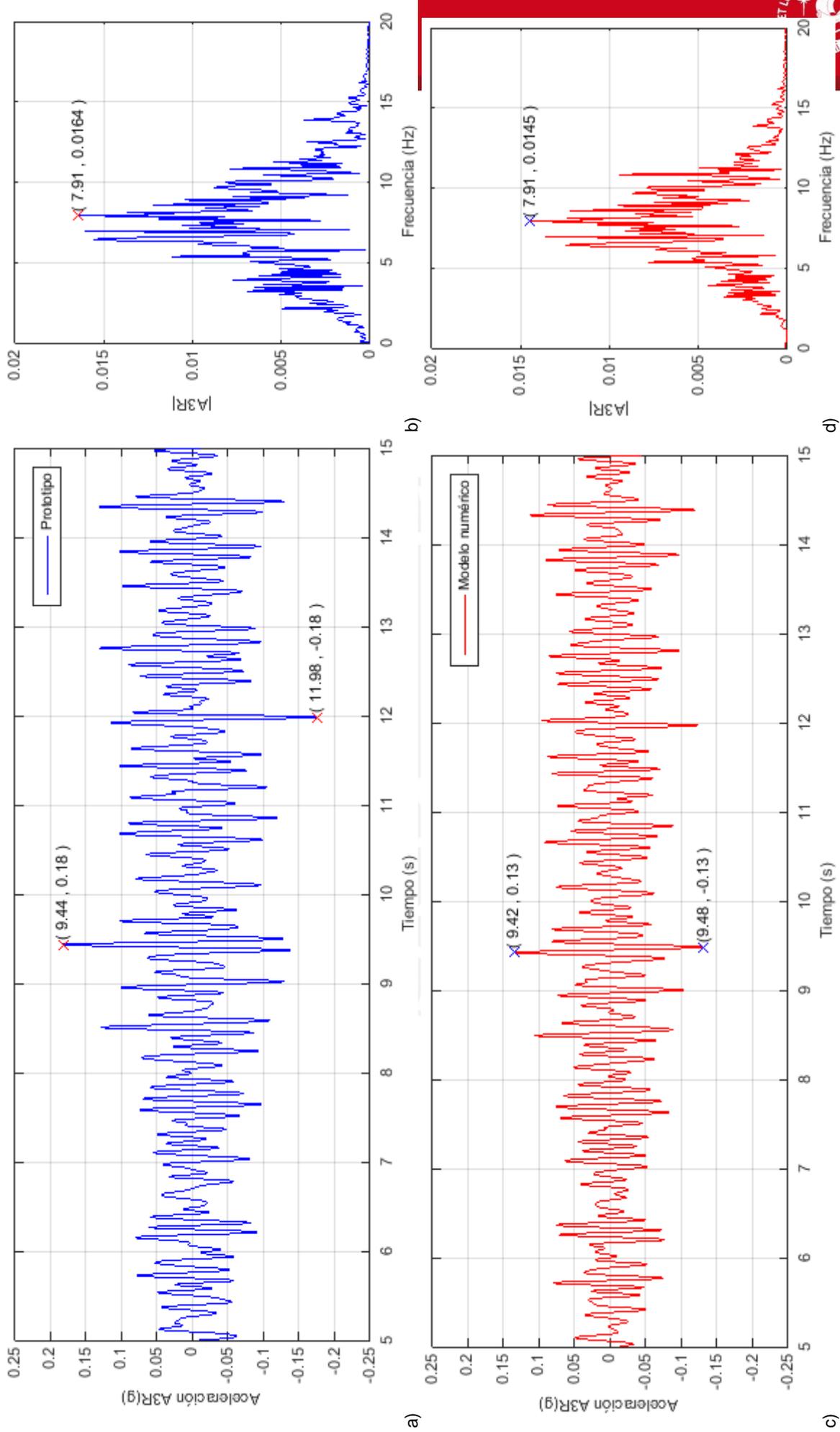
**Figura 15.** Aceleración  $A_2$  relativa a la mesa vibradora medida en el prototipo y en el modelo numérico desde  $t = 5$  s hasta 15 s de la fase 1 y su contenido de frecuencias



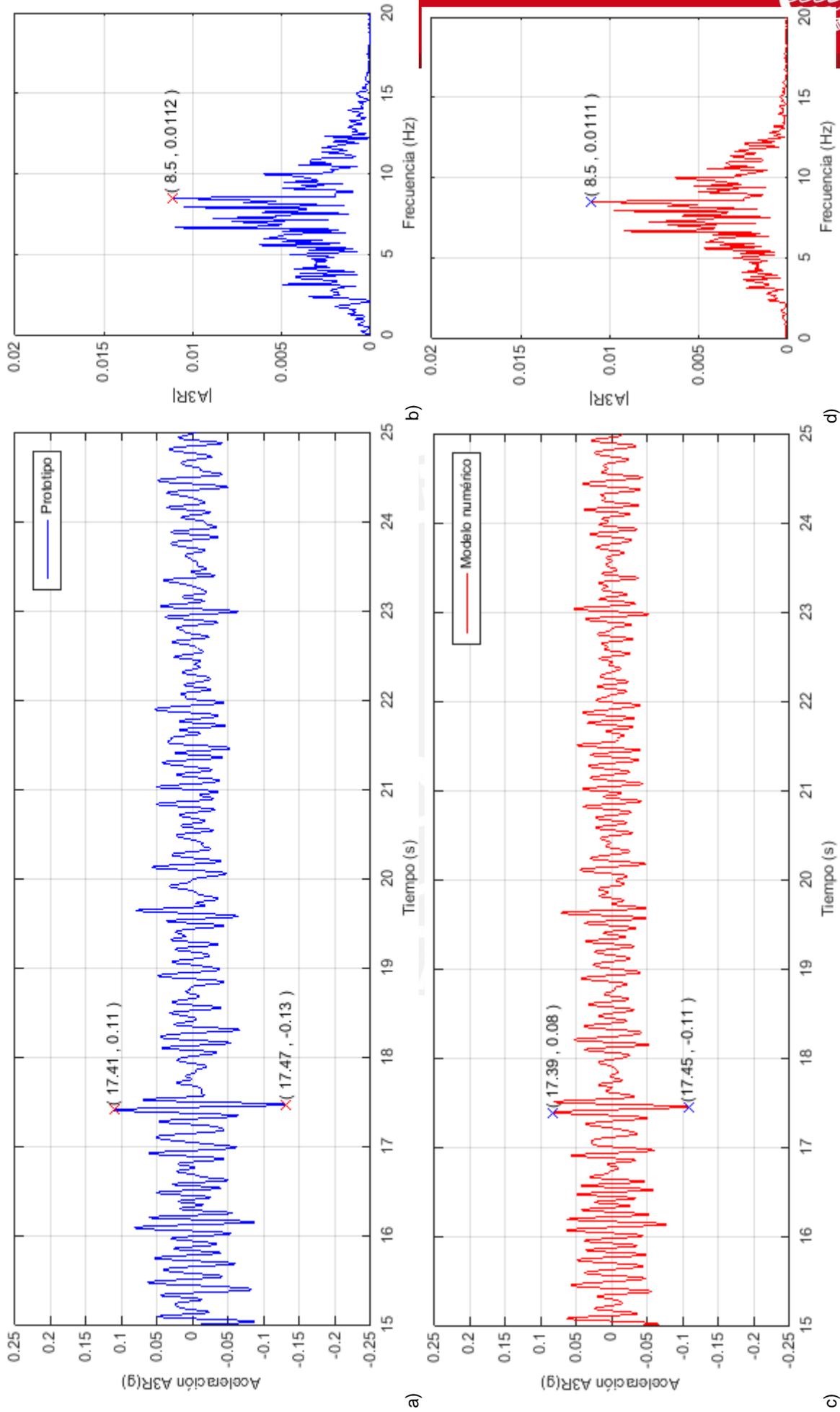
**Figura 16.** Aceleración A2R relativa a la mesa vibradora medida en el prototipo y en el modelo numérico desde  $t = 15$  s hasta 25 s de la fase 1 y su contenido de frecuencias



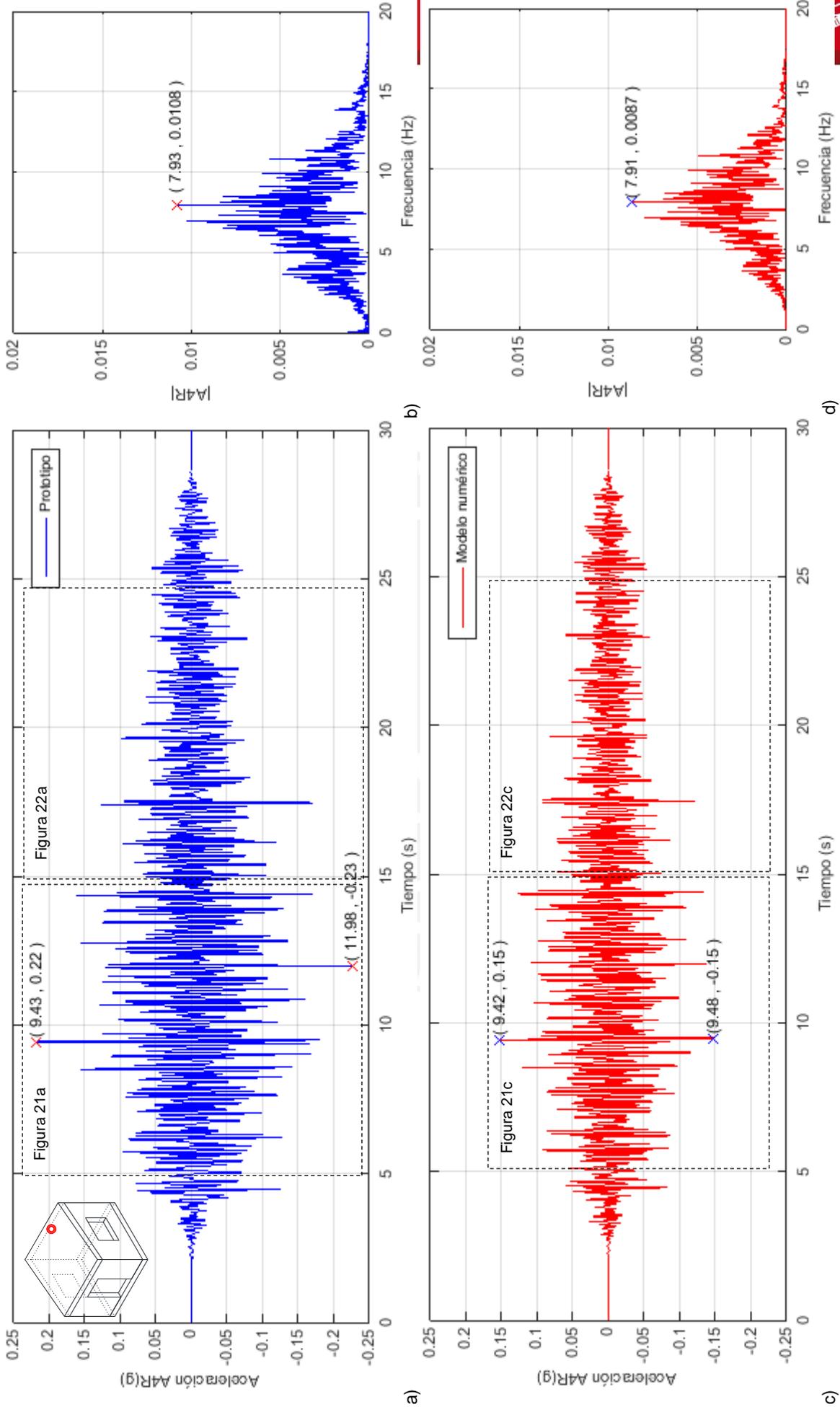
**Figura 17.** Aceleración A3R relativa a la mesa vibradora medida en el prototipo y en el modelo numérico durante toda la fase 1 y su contenido de frecuencias



**Figura 18.** Aceleración A3 relativa a la mesa vibradora medida en el prototipo y en el modelo numérico desde  $t = 5$  s hasta 15 s de la fase 1 y su contenido de frecuencias



**Figura 19.** Aceleración A3R relativa a la mesa vibradora medida en el prototipo y en el modelo numérico desde  $t = 15$  s hasta 25 s de la fase 1 y su contenido de frecuencias



**Figura 20.** Aceleración A4 relativa a la mesa vibradora medida en el prototipo y en el modelo numérico durante toda la fase 1 y su contenido de frecuencias

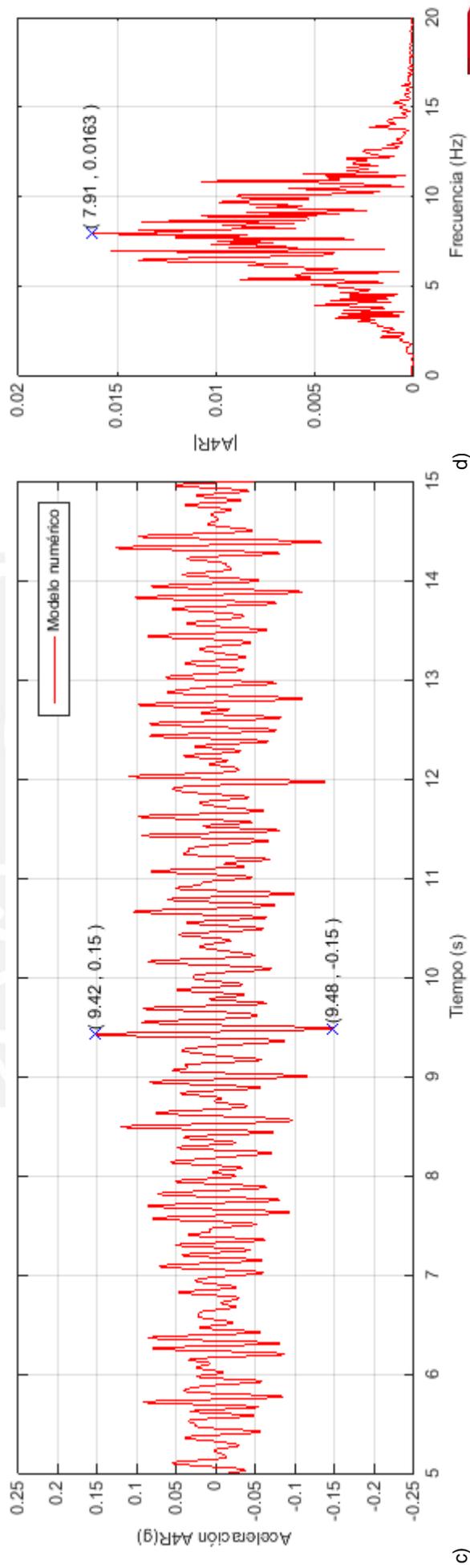
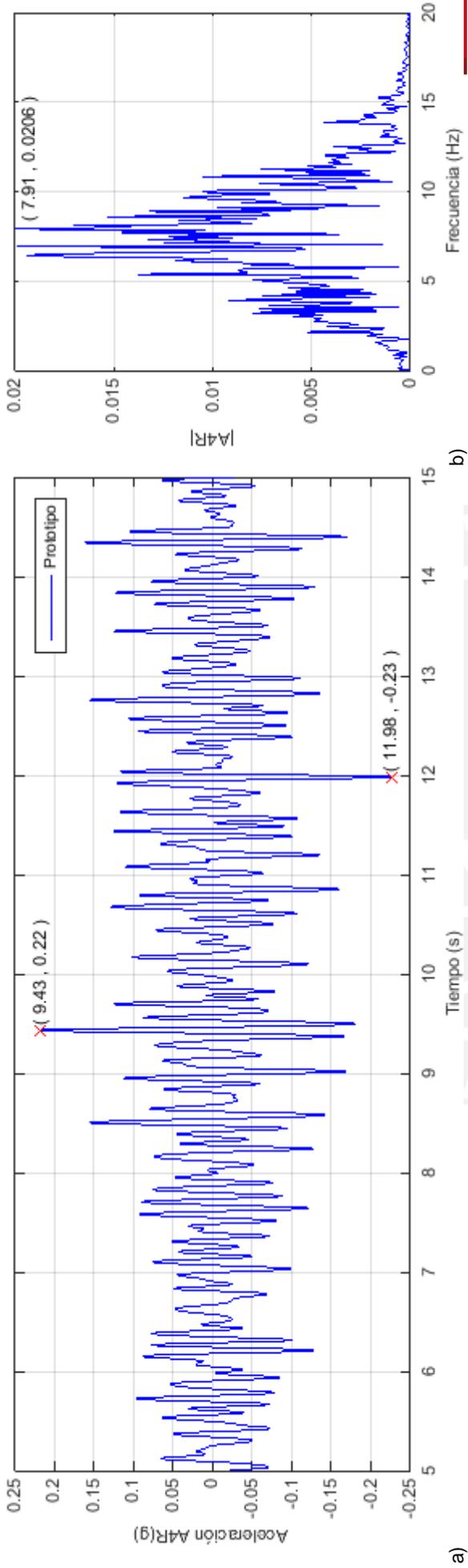
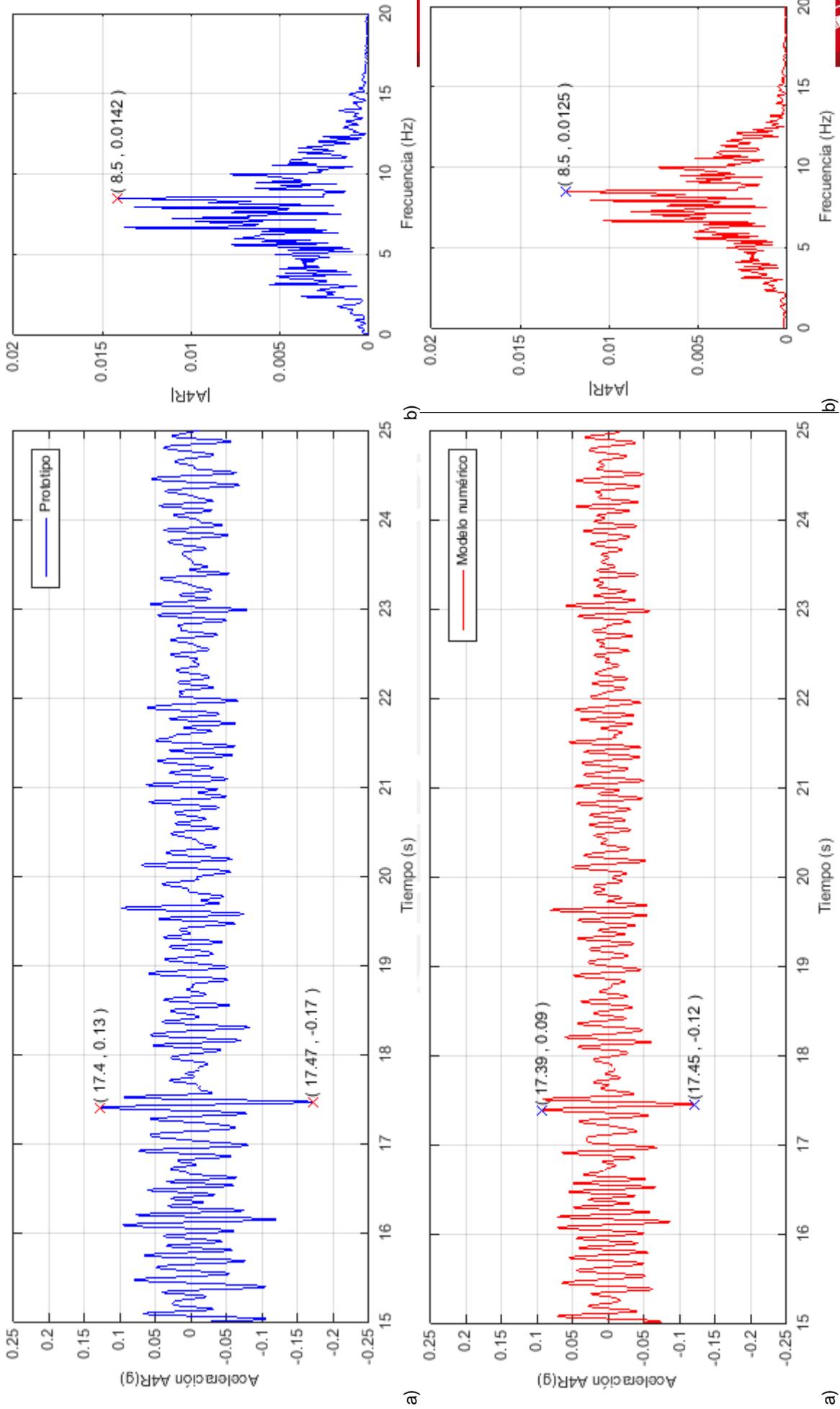


Figura 21. Aceleración A4 relativa a la mesa vibradora medida en el prototipo y en el modelo numérico desde  $t = 5$  s hasta 15 s de la fase 1 y su contenido de frecuencias



**Figura 22.** Aceleración A4 relativa a la mesa vibradora medida en el prototipo y en el modelo numérico desde  $t = 15$  s hasta 25 s de la fase 1 y su contenido de frecuencias

4.4.2. Esfuerzos máximos

Las Figura 23a y 23d son las vistas externa e interna de los esfuerzos máximos cuando el muro se deforma a la derecha. Son vistas válidas para los muros derecho o izquierdo debido a la simetría del modelo. La escala de grises muestra la variación de esfuerzos máximos de tracción y compresión. En este caso los máximos esfuerzos se produjeron en las esquinas de los vanos. Se observó que los esfuerzos máximos a tracción ocurren en el instante 9.485 s para los puntos superior izquierdo (Figura 23b y 23e) e inferior derecho (Figura 23c y 23f). La tendencia de zonas con esfuerzos máximos indica la posibilidad de inicio de fisuración por tracción, tal como se verificó en el prototipo experimental luego de las fases 2 y 3. Las Figura 23a y 23d no muestran los dinteles ni la viga collar con el fin de visualizar solamente los esfuerzos en la albañilería de adobe.

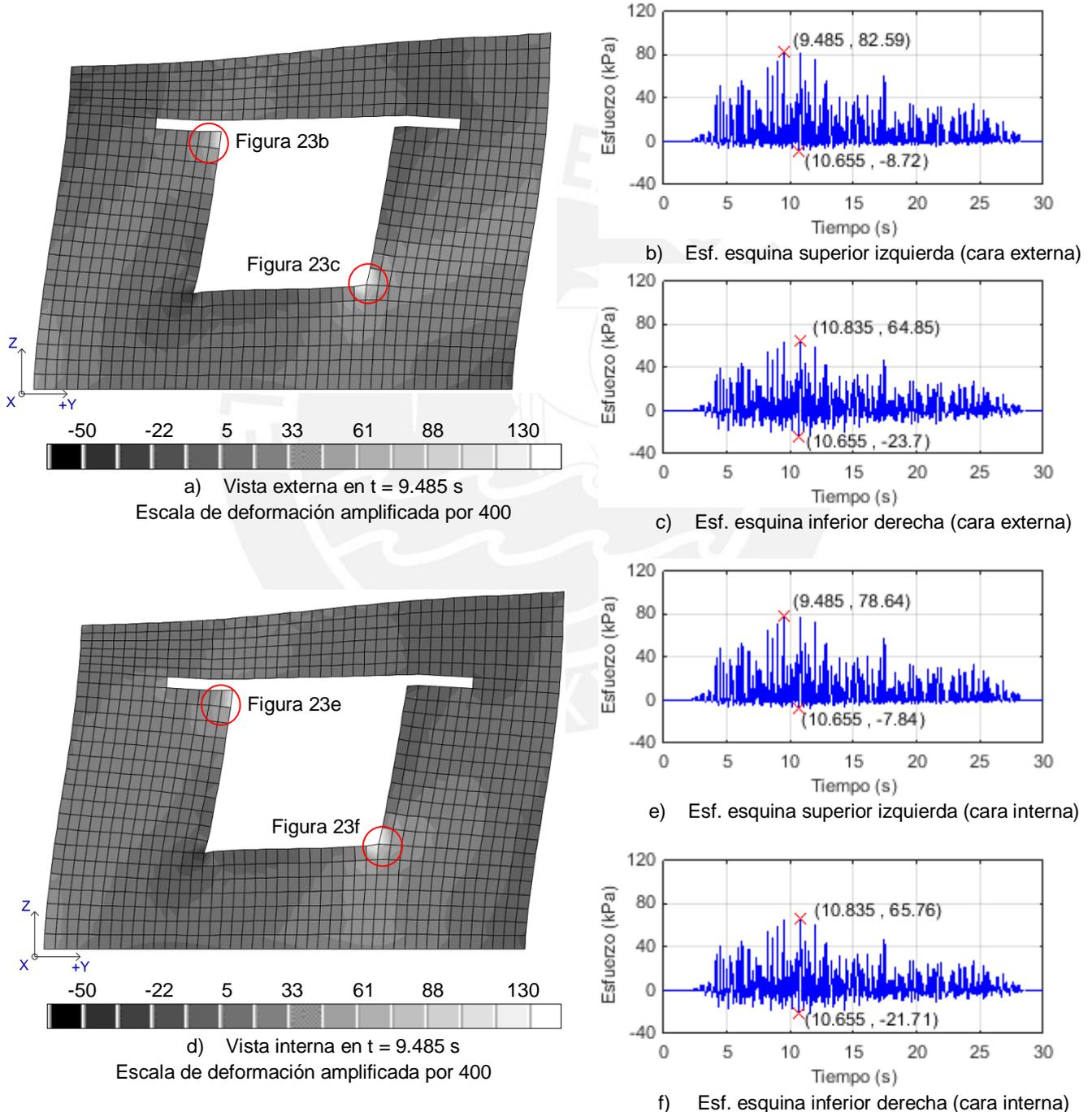
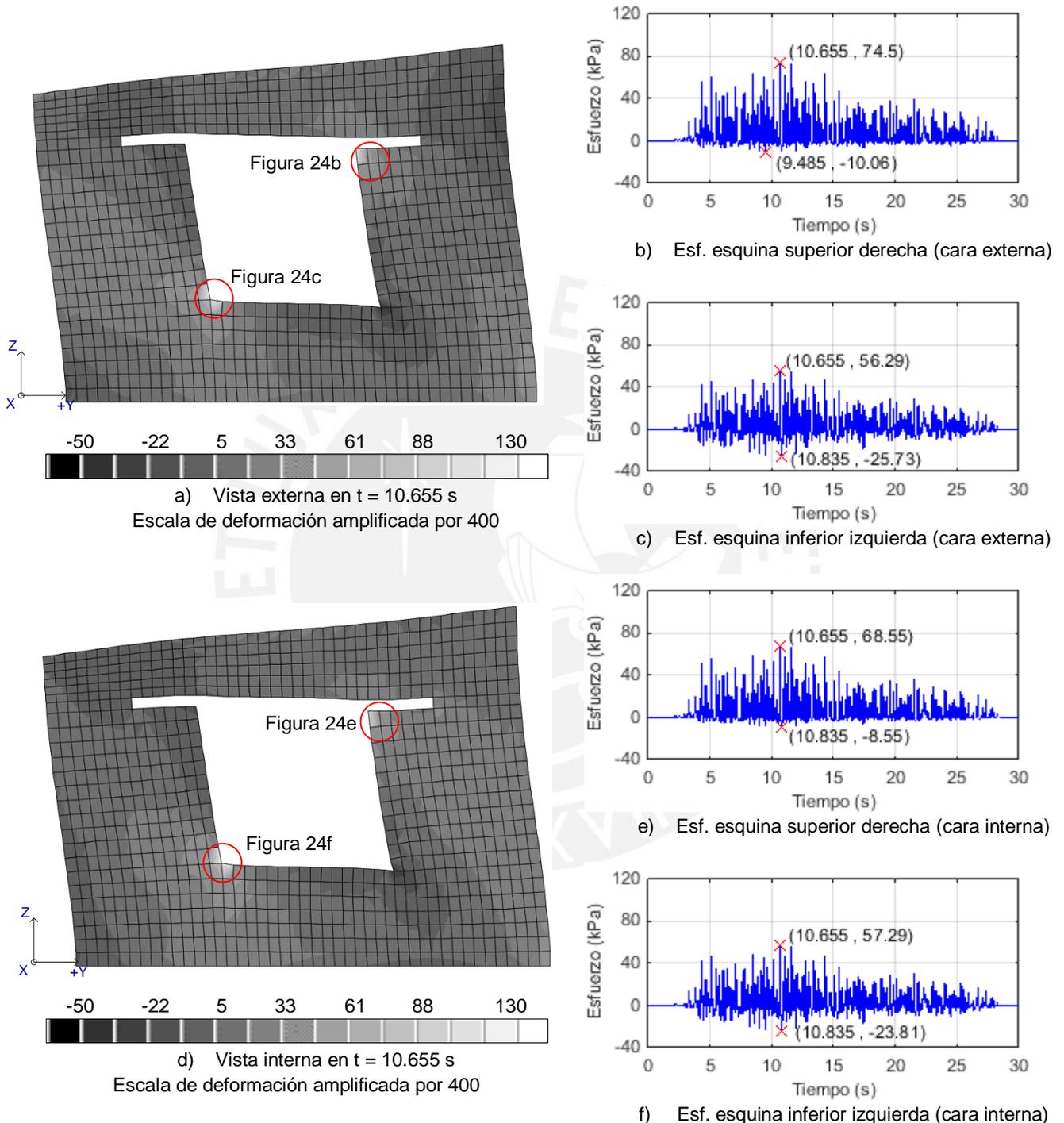


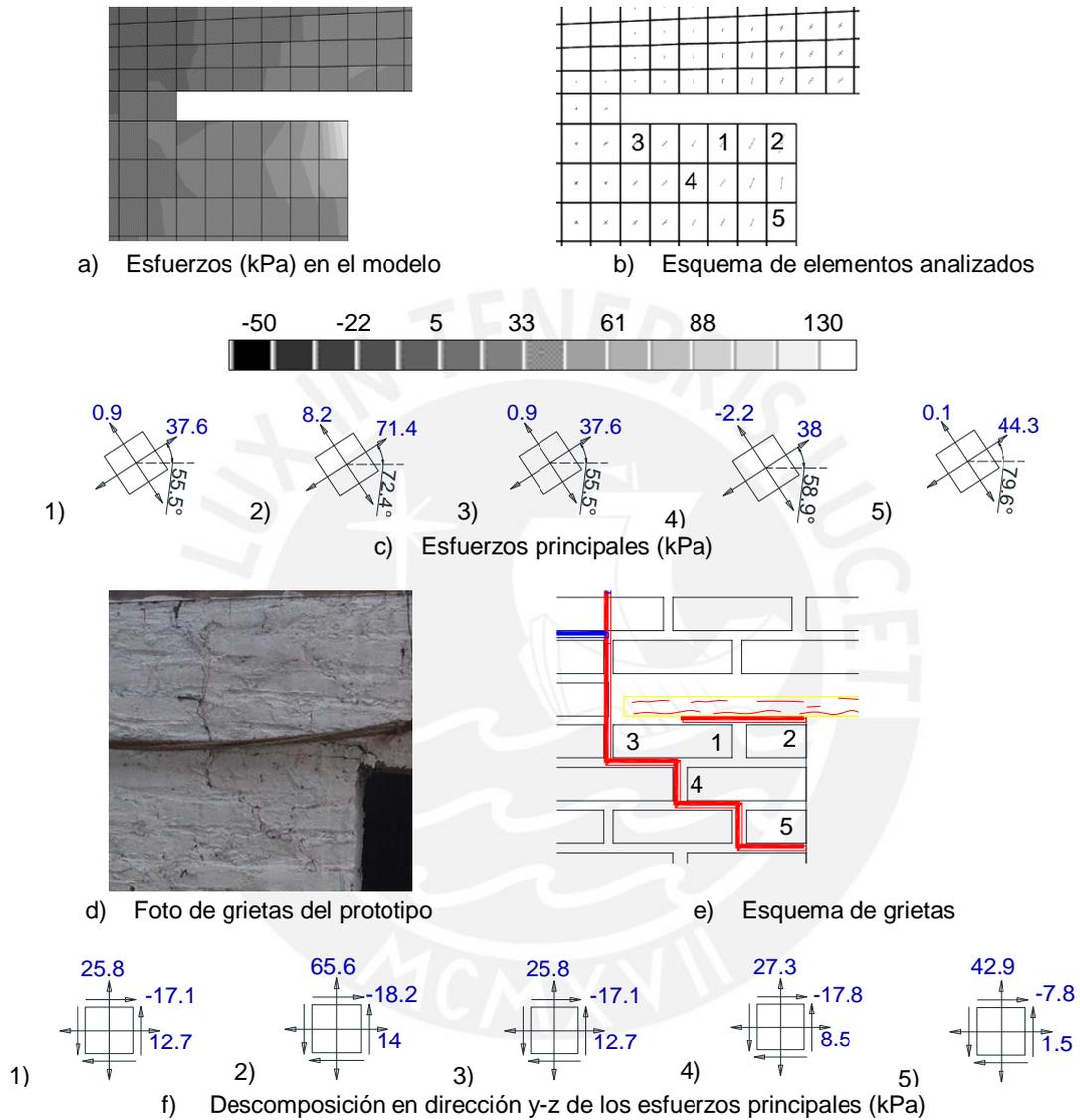
Figura 23. Esfuerzos (kPa) en la cara externa e interna del muro izquierdo o derecho en el instante  $t = 9.485$  s durante la primera fase de la simulación sísmica

Las Figura 24a y 24d son las vistas externa e interna de los esfuerzos máximos cuando el muro se deforma a la izquierda. En este caso los máximos esfuerzos se produjeron en las esquinas de los vanos. Se observó que los esfuerzos máximos a tracción ocurren en el instante 10.655 s para los puntos superior derecho (Figura 24b y 24e) e inferior izquierdo (Figura 24c y 24f). La tendencia de zonas con esfuerzos máximos indica la posibilidad de inicio de fisuración por tracción, tal como se verificó en el prototipo experimental luego de las fases 2 y 3.



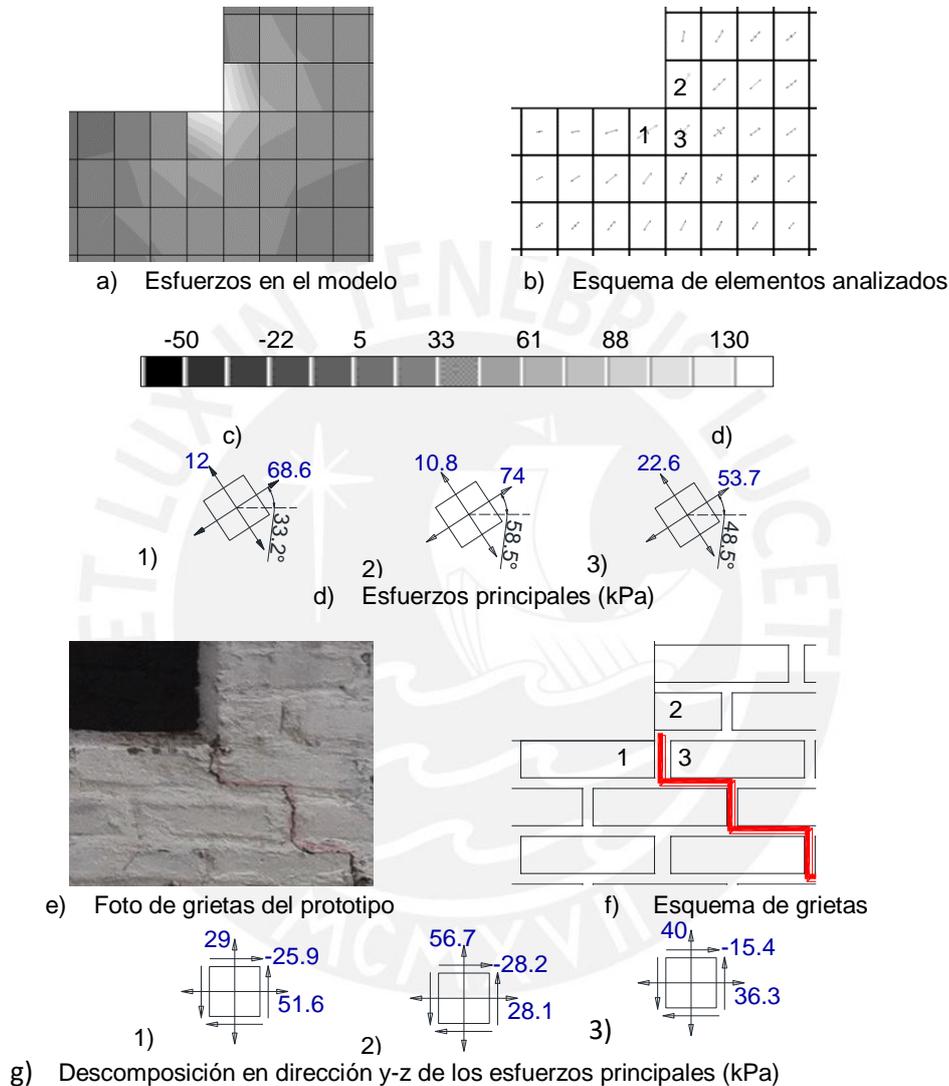
**Figura 24.** Esfuerzos (kPa) en la cara externa e interna del muro izquierdo o derecho en el instante  $t = 10.655$  s durante la primera fase de la simulación sísmica

La Figura 25a es una vista ampliada de los esfuerzos en la esquina superior izquierda de la Figura 23a. Esta representa el instante ( $t = 9.485$  s) en que ocurrió el máximo esfuerzo en la esquina interior. La Figura 25b enumera los elementos analizados en la Figura 25c donde se identificaron los esfuerzos principales. La Figura 25f son los esfuerzos transformados en el sistema y-z para identificar esfuerzos perpendiculares y tangenciales a las juntas de mortero. Estos esfuerzos fueron comparados con las grietas reportadas en la Figura 25e luego de la fase 3. La Figura 25d muestra las grietas en el prototipo.



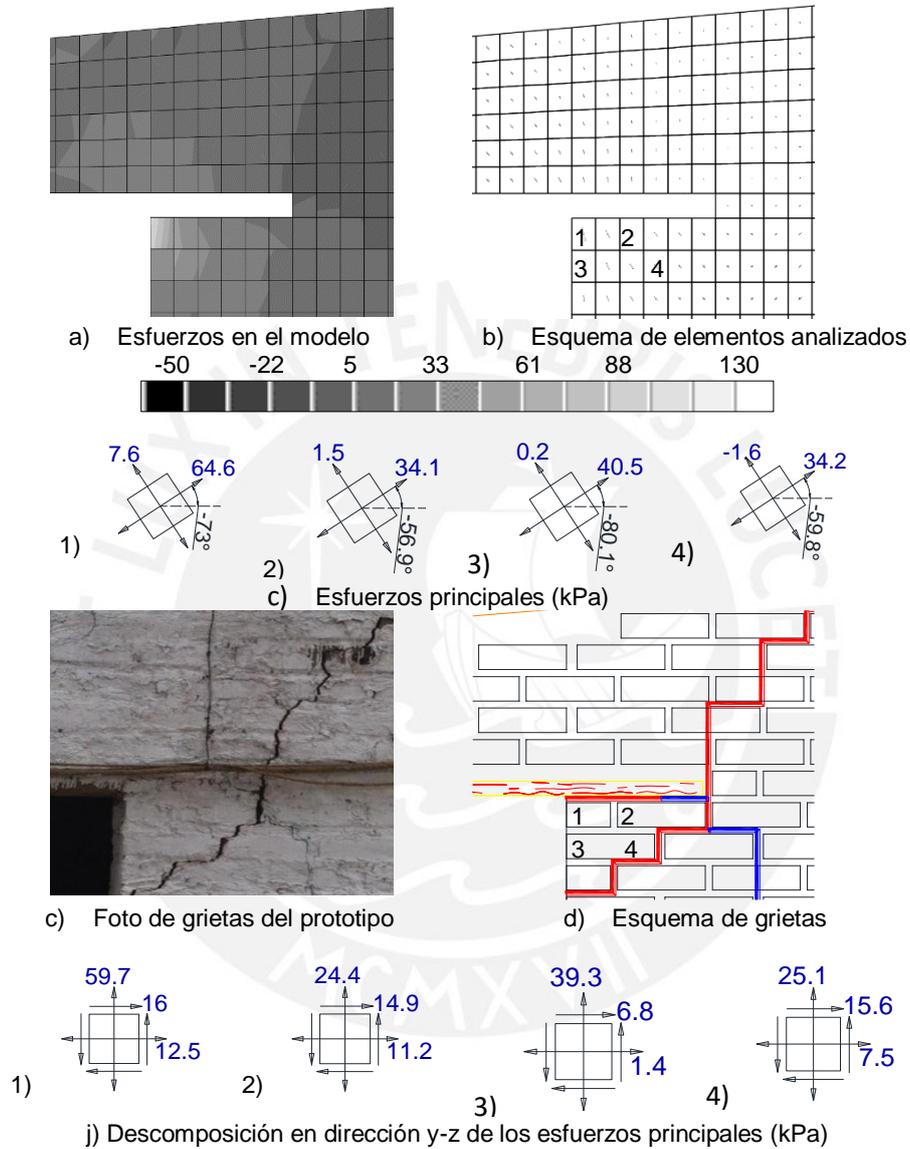
**Figura 25.** Esfuerzos en el modelo numérico en  $t = 9.485$  s de la fase 1 y esquema de grietas posteriores a la fase 2 (—) y a la fase 3 (—) en la esquina superior izquierda

La Figura 26a es una vista ampliada de los esfuerzos en la esquina superior izquierda de la Figura 23a. Esta representa el instante ( $t = 9.485$  s) en que ocurrió el máximo esfuerzo en la esquina interior. La Figura 26b enumera los elementos analizados en la Figura 26c donde se identificaron los esfuerzos principales. La Figura 26f son los esfuerzos transformados en el sistema y-z para identificar esfuerzos perpendiculares y tangenciales a las juntas de mortero. Estos esfuerzos fueron comparados con las grietas reportadas en la Figura 26e luego de la fase 3. La Figura 26d muestra las grietas en el prototipo.



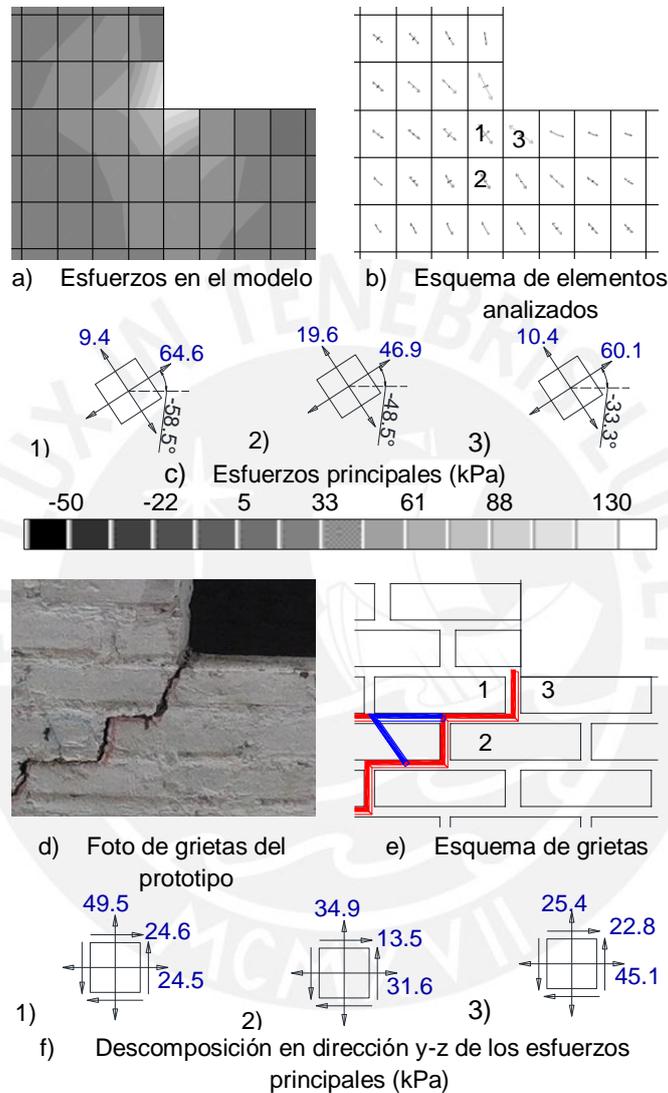
**Figura 26.** Esfuerzos en el modelo numérico en  $t = 9.485$  s de la fase 1 y esquema de grietas posteriores a la fase 2 (—) y a la fase 3 (—) en la esquina inferior derecha

La Figura 27a es una vista ampliada de los esfuerzos en la esquina superior izquierda de la Figura 27a. Esta representa el instante ( $t = 9.485$  s) en que ocurrió el máximo esfuerzo en la esquina interior. La Figura 27b enumera los elementos analizados en la Figura 27c donde se identificaron los esfuerzos principales. La Figura 27f son los esfuerzos transformados en el sistema y-z para identificar esfuerzos perpendiculares y tangenciales a las juntas de mortero. Estos esfuerzos fueron comparados con las grietas reportadas en la Figura 27e luego de la fase 3. La Figura 27d muestra las grietas en el prototipo.



**Figura 27.** Esfuerzos en el modelo numérico en  $t = 10.655$  s de la fase 1 y esquema de grietas posteriores a la fase 2 (—) y a la fase 3 (—) en la esquina superior izquierda

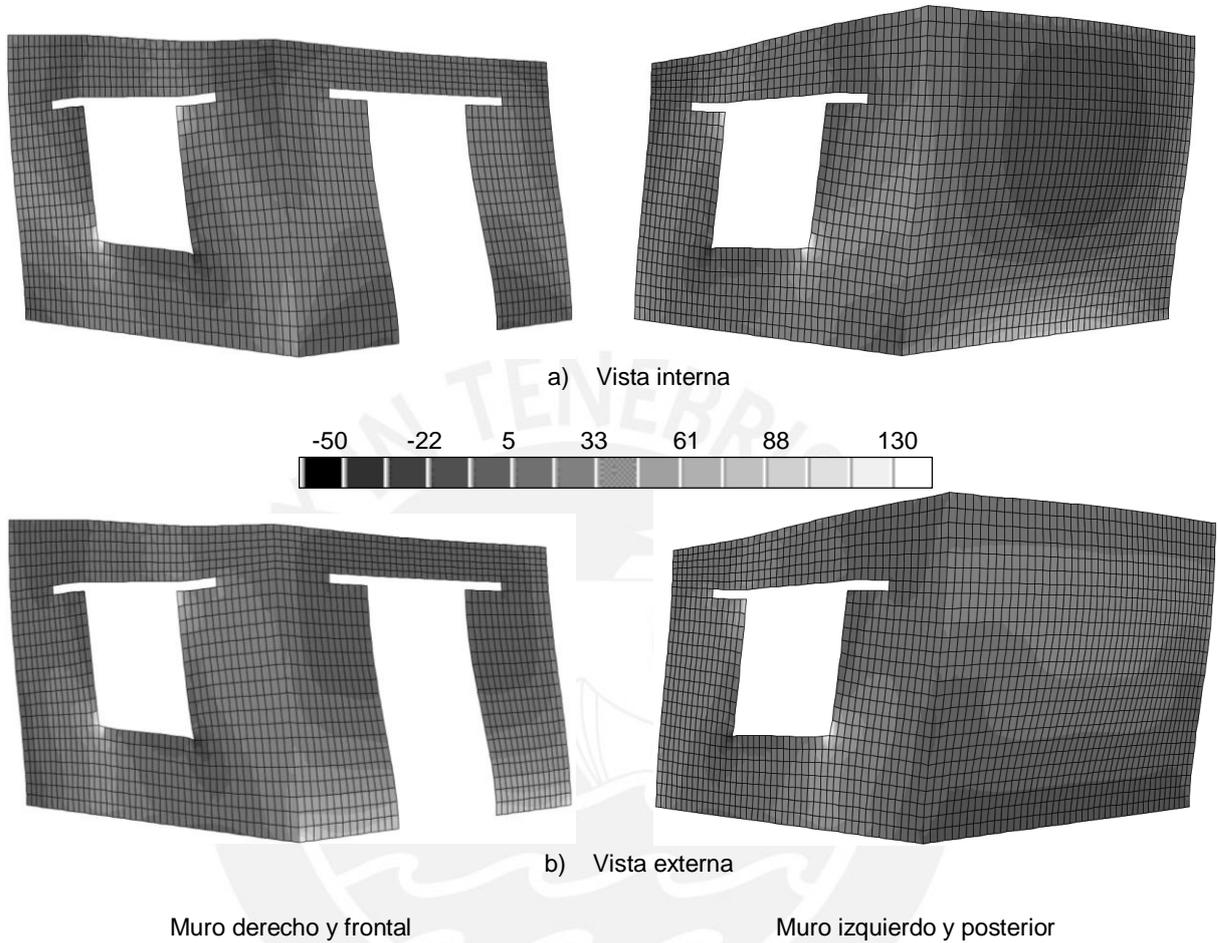
La Figura 28a es una vista ampliada de los esfuerzos en la esquina superior izquierda de la Figura 28a. Esta representa el instante ( $t = 9.485$  s) en que ocurrió el máximo esfuerzo en la esquina interior. La Figura 28b enumera los elementos analizados en la Figura 28c donde se identificaron los esfuerzos principales. La Figura 28f son los esfuerzos transformados en el sistema y-z para identificar esfuerzos perpendiculares y tangenciales a las juntas de mortero. Estos esfuerzos fueron comparados con las grietas reportadas en la Figura 28e luego de la fase 3. La Figura 28d muestra las grietas en el prototipo.



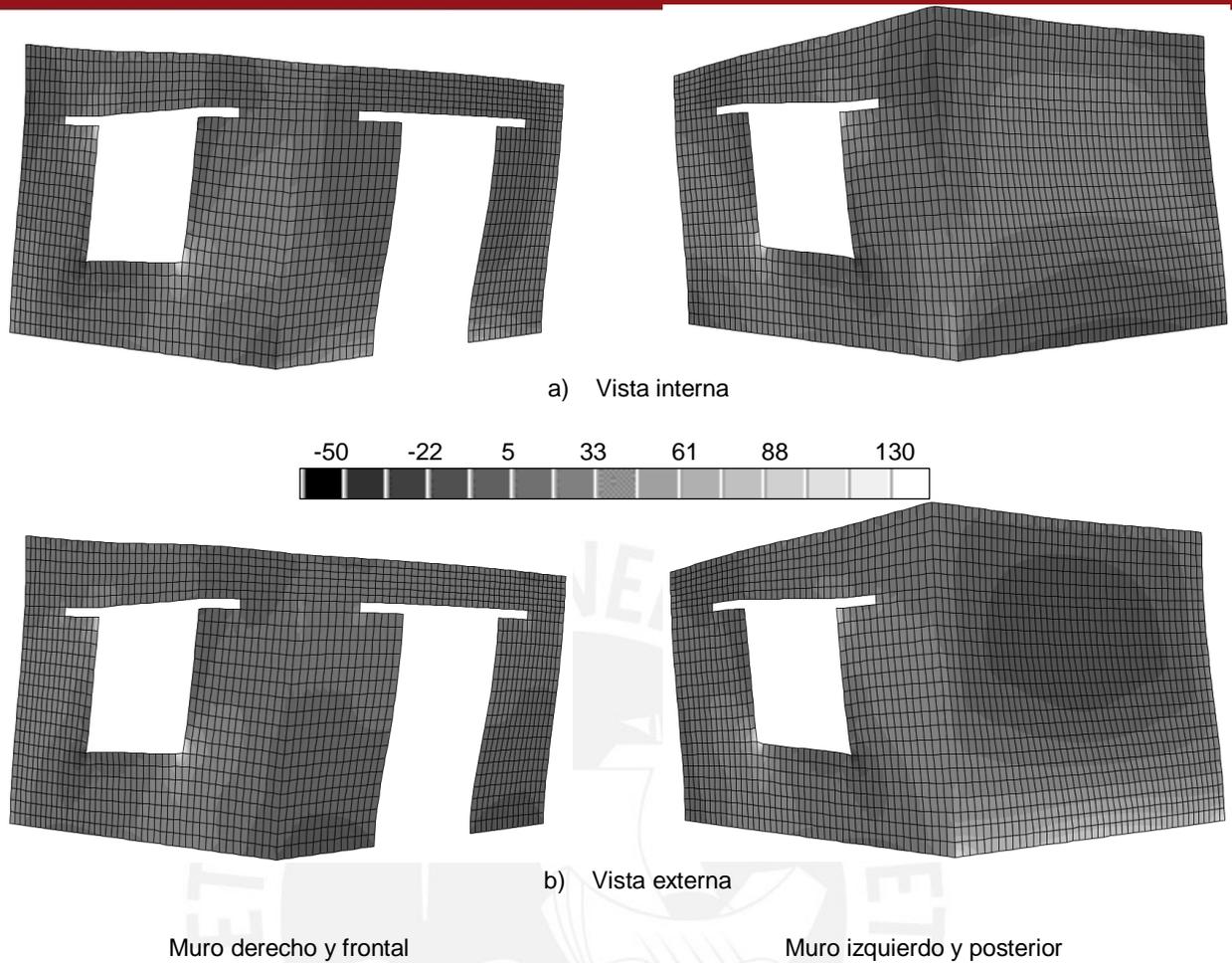
**Figura 28.** Esfuerzos en el modelo numérico en  $t = 10.655$  s de la fase 1 y esquema de grietas posteriores a la fase 2 (—) y a la fase 3 (—) en la esquina inferior derecha

De acuerdo a Tarque (2011) el esfuerzo máximo a tracción en la albañilería de adobe es 40 kPa. En este análisis elástico se obtuvieron esfuerzos alrededor de 115 kPa en las esquinas de los vanos que descienden en valor conforme se alejan de esas esquinas. Después de observar los esfuerzos principales en los elementos de las esquinas se hallaron los esfuerzos perpendiculares al mortero que une los bloques de adobe. Se resalta que en algunos casos se supera los 40 kPa en dirección horizontal lo que indicaría el inicio de fisuras perpendiculares a dicho sentido, ello se comprueba con el esquema de grietas en las esquinas inferiores. Del mismo modo ocurre en la dirección vertical lo cual indicaría el inicio de grietas en sentido horizontal.

En los muros frontal y posterior (Figura 29b y 29a) se observan esfuerzos de tracción en la unión muro de adobe y viga de cimentación. Ello es debido a la suposición de conexión rígida entre muro y viga de cimentación. En caso de mayores intensidades sísmicas, esta conexión se perdería al sobrepasar la resistencia máxima a tracción de la albañilería de adobe y ocasionaría una falla por volteo.



**Figura 29.** Esfuerzos (kPa) en el instante  $t = 9.485$  s de la fase 1 de la simulación sísmica  
Escala de deformación ampliada por 400



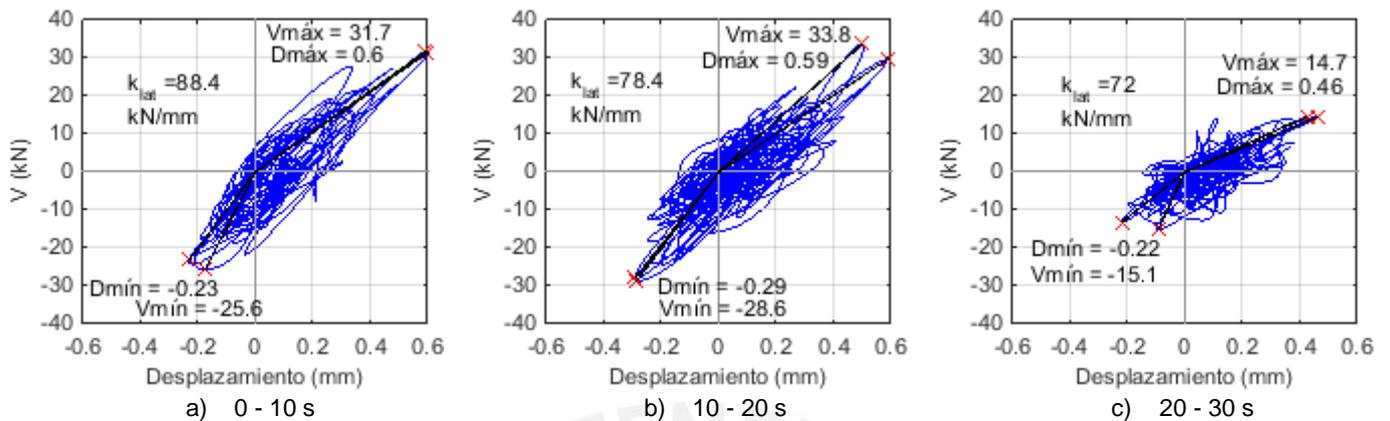
**Figura 30.** Esfuerzos (kPa) en el instante  $t = 10.655$  s de la primera simulación sísmica  
Escala de deformación amplificada por 400

En el muro posterior (Figura 29a) se aprecian mayores esfuerzos en la parte central superior producto de una flexión horizontal y vertical producidas por cargas perpendiculares al plano. En el muro frontal (Figura 29b) los esfuerzos máximos ocurren a media altura de la puerta.

Una limitación del modelo numérico es que considera a toda la albañilería como un elemento continuo y no está separado el adobe y mortero, por lo tanto, el modelo no sigue exactamente las zonas de ruptura, sino que indica más bien las zonas más propensas a romperse.

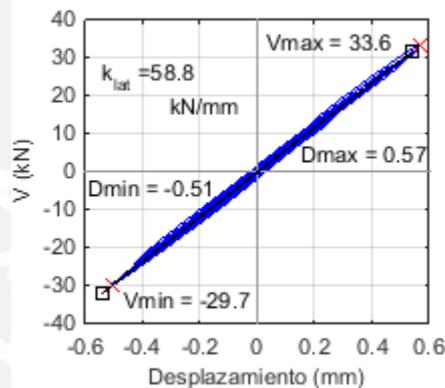
#### 4.5. Rigidez lateral del modelo

Las Figura 31a a la 31c muestran el comportamiento histerético en los instantes 10 s, 20 s y 30 s. Cada Figura tiene una línea cuya pendiente representa el promedio de los lazos.



**Figura 31.** Cortante basal vs. desplazamiento promedio (D1R y D2R) durante la primera fase de la simulación sísmica del prototipo

La Figura 32 muestra la gráfica del cortante basal vs. desplazamiento promedio de D1R y D2R obtenidos del modelo numérico. La rigidez calculada fue 60 kN/mm, valor cercano al calculado experimentalmente. El cortante máximo de 35.2 kN es el 27.6% del peso total de la estructura 127.4 kN. Este valor tiene relación con el 0.31 g de aceleración máxima de la fase 1.



**Figura 32.** Cortante basal vs. desplazamiento promedio (D1R y D2R) del modelo numérico al finalizar la primera fase de la simulación

## 5. MODELO EN SÓLIDO RÍGIDO DEL PROTOTIPO DE ADOBE

### 5.1. Descripción del modelo

La Figura 33a muestra el prototipo de casa de adobe ensayado por Sosa y Soto (2014) que fue reforzado con cuerdas. El prototipo fue sometido a aceleraciones sísmicas que le generaron grietas y desprendimientos de bloques de adobe. Se puso especial interés en el bloque del muro posterior (Figura 33a) que se desprende de la conexión de sus lados y del techo. En base a esta observación se propuso el caso más conservador del desprendimiento total del muro posterior que se encuentra sostenido por cuerdas de refuerzo (Figura 33b).

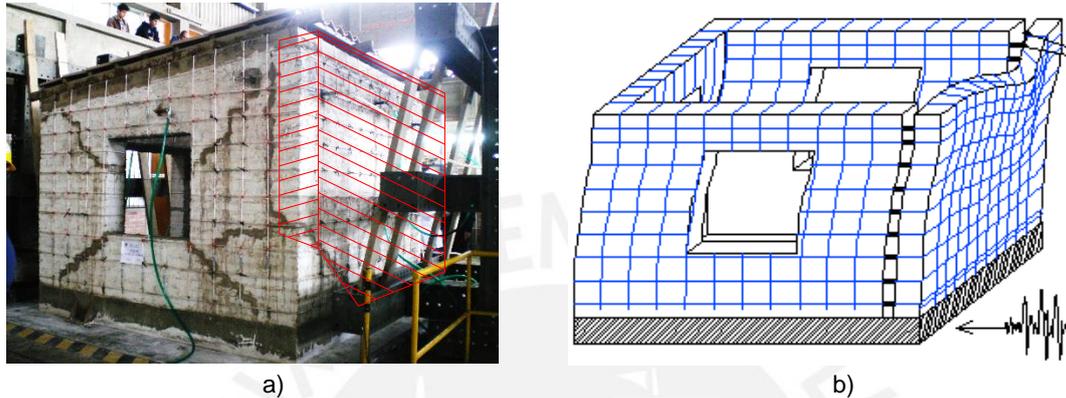


Figura 33. Modelamiento del muro como bloque rígido; a) prototipo de vivienda de adobe, b) esquema de colapso

La Figura 34a muestra el esquema con sólidos rígidos del muro volcante mostrado en la Figura 33b. El muro vuelca como un péndulo invertido que gira apoyado en O y cuyas cuerdas de rigidez  $k_i$  le generan fuerzas restitutivas. La Figura 34b muestra el diagrama de cuerpo libre DCL del muro cuando ocurre un movimiento en la base.

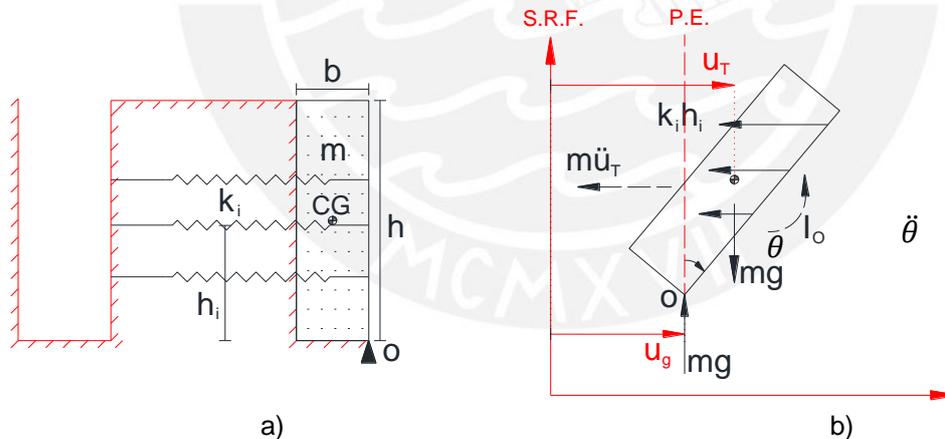


Figura 34. Idealización del muro volcante; a) muro volcante como sólido rígido, b) DCL

Los términos indicados en la Figura 34 tienen los siguientes significados:

$b$	Ancho del muro	$u_T$	Posición medida respecto al SRF
$h$	Alto del muro	$u_g$	Posición del suelo respecto al SRF
$m$	Masa del muro	$\theta$	Giro del muro respecto a O
$k_i$	Rigidez de cada cuerda de refuerzo	$mg$	Peso del muro
$h_i$	Altura de cada cuerda de refuerzo	$m\ddot{u}_T$	Fuerza inercial del muro
$O$	Punto de apoyo del muro	$I_O \ddot{\theta}$	Momento inercial del muro
$CG$	Centro de gravedad del muro	P.E.	Posición de equilibrio
		S.R.F.	Sistema de referencia fijo

El muro volcane de la Figura 34a impacta con una superficie que se encuentra a la izquierda. Por lo que el movimiento del péndulo invertido se complementa con una condición de impacto en que la velocidad del muro se reduce y cambia de sentido instantáneamente.

Se halló la sumatoria de momentos respecto a O suponiendo giros pequeños en la Figura 34b y suponiendo que el momento generado por el peso no es despreciable. La suma de momentos se igualó a cero y se despejaron términos semejantes para obtener la siguiente ecuación de movimiento:

$$\left[ m \left( \frac{h}{2} \right)^2 + I_o \right] \ddot{\theta} + \left[ \Sigma k_i h_i^2 - mg \frac{h}{2} \right] \theta = -m \left[ \frac{h}{2} \ddot{u}_g + \frac{b}{2} g \right] \quad (1)$$

Las condiciones iniciales de movimiento son: el giro inicial ( $\theta_{t_0}$ ) y la velocidad angular inicial ( $\dot{\theta}_{t_0}$ ). El giro inicial (2) depende del momento generado por las tensiones iniciales  $T_i$  en cada cuerda y de la rigidez rotacional obtenida en (1). La velocidad angular inicial (3) depende de la velocidad  $V_{m\acute{a}x}$  con la que se desprendió el muro posterior del prototipo de casa de adobe.

$$\theta_{t_0} = \frac{\Sigma T_i h_i}{\Sigma k_i h_i^2 - mg \frac{h}{2}} \quad (2) \quad \dot{\theta}_{t_0} = \frac{2V_{m\acute{a}x}}{h} \quad (3)$$

Previamente al análisis del movimiento del péndulo se estudió el movimiento traslacional de un sistema masa resorte que se mueve debido al movimiento del suelo. Este capítulo presenta un estudio comparativo de sistemas de un grado de libertad para simular respuestas de movimiento con impacto. Los sistemas consisten en un bloque conectado con una pared por intermedio de un resorte linealmente elástico. El objetivo fue buscar un sistema amortiguado cuyo máximo desplazamiento coincida con la amplitud del sistema con choque.

Se consideraron tres casos de movimiento de la pared: estático, con aceleración sinusoidal y con aceleración sísmica. En cada caso se analizó el movimiento del bloque con impacto y el movimiento del mismo con amortiguamiento viscoso sin impacto. Se estudiaron dos tipos de impacto: elástico (coeficiente de restitución  $e = 1$ ) e inelástico ( $e = 0.5$ ). Los resultados muestran una relación aproximada entre el cociente de amortiguamiento  $\xi$  y el coeficiente de restitución  $e$ , de tal modo que las máximas respuestas son similares entre el movimiento amortiguado y el movimiento con impacto.

## 5.2. Movimiento sin impacto

La Figura 35a muestra un oscilador viscoelástico sometido a excitación externa. El sistema de un grado de libertad 1GDL consiste en un bloque de masa  $m$  que está conectado a una pared a través de un resorte de rigidez  $k$  y un amortiguador de coeficiente  $c$ . El bloque desliza sin fricción y pasa por el costado de la pared la cual se mueve igual que el suelo. La posición absoluta del bloque  $u_T$  y de la pared  $u_g$  se miden con respecto a un sistema de referencia fijo SRF. La posición de equilibrio PE es la ubicación en la que el resorte no está deformado y en este caso coincide con la superficie de la pared. El movimiento relativo  $x$  medido respecto a la PE produce la fuerza restitutiva  $kx$  y la fuerza amortiguadora  $c\dot{x}$ . Sin embargo el movimiento absoluto produce la fuerza inercial  $m\ddot{u}_T$ , por lo tanto

$$u_T = u_g + x \quad (4)$$

La Figura 35b muestra el diagrama de cuerpo libre DCL del sistema de un 1GDL (sin considerar las fuerzas verticales) porque se tiene especial interés en estudiar el movimiento horizontal. El bloque comienza su movimiento en el instante  $t_0$  y parte desde una posición inicial  $x_0 = x(t_0)$  y una velocidad inicial  $\dot{x}_0 = \dot{x}(t_0)$ .

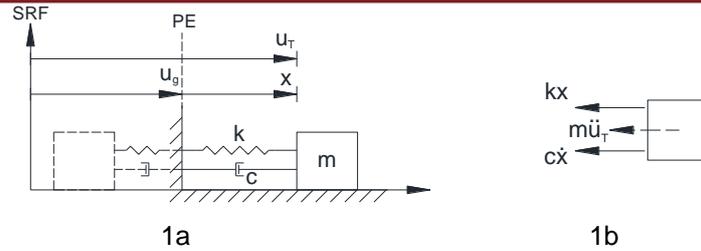


Figura 35. Movimiento traslacional de la partícula, a) medición en sistemas de referencia, b) DCL

Se obtuvo la ecuación de equilibrio dinámico en base al DCL mostrado en la Figura 35b

$$m\ddot{u}_T + c\dot{x} + kx = 0 \tag{5}$$

De la cual se obtuvo la ecuación diferencial de segundo orden

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{u}_g \tag{6}$$

### 5.3. Movimiento con impacto

La Figura 36a muestra un sistema de 1GDL análogo al mostrado en la Figura 35a pero sin amortiguador. Las condiciones iniciales de movimiento también son análogas. La Figura 36b muestra el choque inminente del bloque con la pared en la PE con una velocidad  $V_c$ . El choque ocurre con un coeficiente de restitución  $e$ . La Figura 36c muestra el bloque con la velocidad post-impacto  $V_r = -eV_c$ . Finalmente el bloque rebota hasta alcanzar el desplazamiento máximo  $X_1$  mostrado en la Figura 36d.

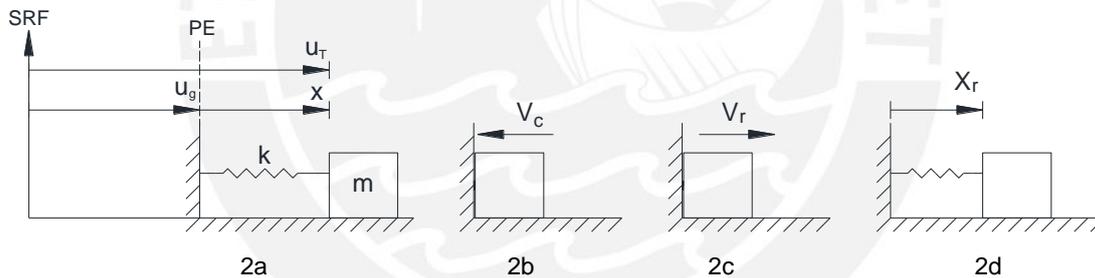


Figura 36. Impacto del bloque, a) inicio de movimiento, b) velocidad pre-impacto, c) velocidad post-impacto y d) máximo desplazamiento post-impacto

### 5.4. Amortiguamiento para simular impacto

Se analizaron tres casos con diferente aceleración en la base: (i)  $\ddot{u}_g = 0$  (pared estática), (ii)  $\ddot{u}_g = \sin(\omega t + \phi)$ , y (iii) aceleración sísmica.

#### 5.3.1. Caso 1: Aceleración nula $\ddot{u}_g = 0$

##### 5.3.1.1. Movimiento armónico libre

Se considera una pared estática y en este caso la ecuación diferencial de movimiento sin amortiguamiento ( $c = 0$ ) es

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{7}$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea (7) es

$$x(t) = x_{max} \sin(\omega_n t + \alpha) \tag{8}$$

Donde  $x_{max}$  es la amplitud del desplazamiento del bloque y por lo tanto el máximo desplazamiento posible

$$x_{max} = x_0 \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}\right)^2 + 1} \quad (9)$$

$\omega_n = \sqrt{k/m}$  es la frecuencia natural de vibración del sistema. Alternativamente se puede obtener el periodo natural  $T_n = 2\pi\sqrt{m/k}$ . Luego  $\alpha = \tan^{-1}(\omega_n \cdot x_0 / \dot{x}_0)$  es el ángulo de fase de la respuesta del sistema. La máxima velocidad resulta de la derivación de (8)

$$\dot{x}_{max} = x_{max} \cdot \omega_n \quad (10)$$

### 5.3.1.2. Movimiento armónico con impacto

La velocidad pre-impacto (choque inminente)  $V_c$  es máxima y coincide con (10). La velocidad post-impacto (rebote)  $V_r$  está afectada por el coeficiente de restitución  $e$ .

$$V_r = e \cdot x_0 \omega_n \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}\right)^2 + 1} \quad (11)$$

Al evaluar la fórmula (9) del máximo desplazamiento en base a las nuevas condiciones iniciales post-impacto (posición inicial cero y velocidad inicial  $V_r$ ) se obtiene la expresión del desplazamiento por rebote después del primer impacto

$$x_r = e \cdot x_0 \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}\right)^2 + 1} \quad (12)$$

### 5.3.1.3. Movimiento amortiguado

Se considera una pared estática y en este caso la ecuación diferencial de movimiento con amortiguamiento  $c$  es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (13)$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea (13), considerando amortiguamiento subcrítico, es

$$x = x_{max} \cdot \sin(\omega_D t + \alpha) \quad (14)$$

$$x_{max} = \exp(-\xi \omega_n t) \cdot x_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \xi^2} \left[ \left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}\right)^2 + 2\xi \left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}\right) + 1 \right]} \quad (15)$$

Donde  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  es la frecuencia natural del sistema y  $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  es la frecuencia amortiguada. Además  $\xi = c/2\sqrt{km}$  es el cociente entre el amortiguamiento  $c$  y el amortiguamiento crítico  $c_{crit} = 2\sqrt{km}$ . Luego  $\alpha = \tan^{-1}[\sqrt{1 - \xi^2}/(\xi + \dot{x}_0/(x_0 \omega_n))]$  es el ángulo de fase de la respuesta del sistema.

El máximo desplazamiento en valor absoluto del movimiento amortiguado se da después que sobrepasa la PE, es decir, cuando recorre medio ciclo de movimiento y el argumento de la expresión (14) es  $\omega_D t + \alpha = 3\pi/2$ .

$$x_{max} = \exp\left[-\xi(3\pi/2 - \alpha)/\sqrt{1 - \xi^2}\right] \cdot x_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \xi^2} \left[ \left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}\right)^2 + 2\xi \left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}\right) + 1 \right]} \quad (16)$$

### 5.3.1.4. Comparación amortiguamiento impacto

La comparación de las máximas alturas halladas en (16) y (12), considerando medio ciclo para el movimiento amortiguado, establece la siguiente relación entre  $\xi$  y  $e$ , es un procedimiento iterativo donde se plantea un valor inicial para  $\xi$  hasta que la expresión (17) se aproxime a un valor convergente. Para simplificar la expresión se tiene que  $q = \dot{x}_0/(x_0\omega_n)$ .

$$\xi = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2\alpha - 3\pi} \ln \left[ \frac{e^2(1-\xi^2)}{1 + 2\xi \frac{q}{q^2 + 1}} \right] \quad (17)$$

Considerando el caso particular en que la velocidad inicial  $\dot{x}_0 \approx 0$  y con el supuesto que  $\xi^2 \approx 0$ , entonces la expresión anterior se simplifica en

$$\xi = \frac{-\ln(e)}{\pi} \quad (18)$$

Como caso práctico se halló la respuesta con impacto de un bloque con coeficiente de restitución  $e = 1$  de masa  $m = 2000 \text{ kg}$ , conectado a un resorte de rigidez  $k = 79000 \text{ N/m}$ , que parte desde la posición  $x_0 = 0.1 \text{ m}$  con velocidad  $\dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s}$ . El cociente de amortiguamiento hallado con la expresión (18) y que produce movimientos similares al impacto es  $\xi = 0$ . La Figura 37 muestra la comparación de desplazamiento en base a los datos anteriores.

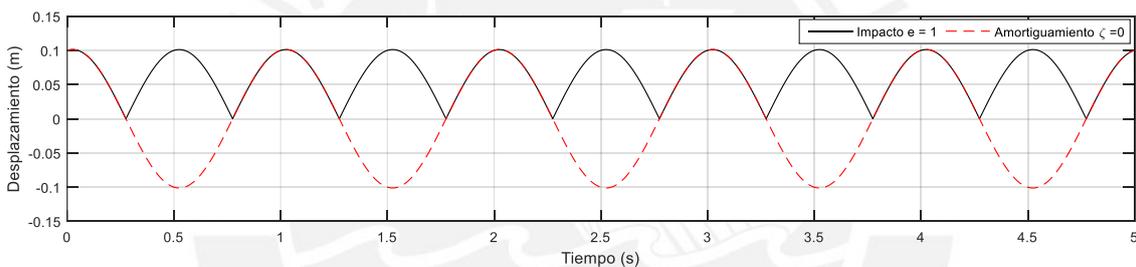


Figura 37. Comparación movimiento con impacto y amortiguamiento

Los máximos desplazamientos del movimiento sin amortiguamiento ( $\xi = 0$ ) de la Figura 37 son idénticos y están en fase con el movimiento libre del sistema masa resorte con impacto y  $e = 1$ . En ambos movimientos no ocurre pérdida de energía.

En forma análoga se evaluó el movimiento con impacto y con coeficiente de restitución  $e = 0.5$  en la expresión (18). Se obtuvo el cociente de amortiguamiento  $\xi = 0.221$ . La Figura 38 muestra la comparación de respuesta con impacto y con amortiguamiento.

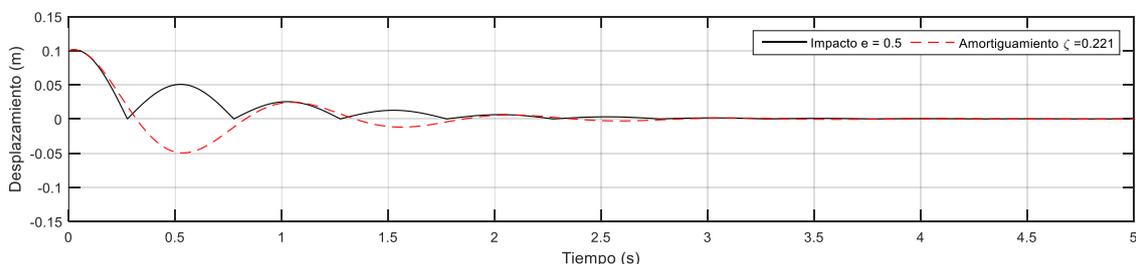


Figura 38. Comparación movimiento con impacto y amortiguamiento

Los máximos desplazamientos de la Figura 38 están desfasados con los análogos del movimiento con impacto, sin embargo hay una adecuada aproximación de los máximos desplazamientos.

### 5.3.2. Caso 2: Aceleración sinusoidal $\ddot{u}_g = a_g \sin(\omega t + \phi_0)$

#### 5.3.2.1. Movimiento forzado

En este caso la pared al igual que el suelo se mueve con una aceleración  $\ddot{u}_g = a_g \sin(\omega t + \phi_0)$  donde  $a_g$  es la amplitud de la aceleración,  $\omega$  es la frecuencia de la aceleración excitadora y  $\phi_0$  es el ángulo de fase con la que se inicia la aceleración. La ecuación diferencial sin amortiguamiento ( $c = 0$ ) es

$$m\ddot{x} + kx = -ma_g \sin(\omega t + \phi_0) \quad (19)$$

La solución a la ecuación diferencial (19) es:

$$x(t) = x_{H \max} \cdot \sin(\omega_n t + \alpha) + x_{P \max} \cdot \sin(\omega t + \beta) \quad (20)$$

Donde  $x_{H \max}$  y  $x_{P \max}$  son las amplitudes de las respuestas homogénea y particular respectivamente

$$x_{H \max} = X_{est} \sqrt{\left( \frac{\dot{x}_0}{X_{est} \omega_n} - \frac{\cos \phi_0 \omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)^2 + \left( \frac{x_0}{X_{est}} - \frac{\sin \phi_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)^2} \quad (21)$$

$$x_{P \max} = \frac{X_{est}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (22)$$

Donde  $\alpha = \tan^{-1}\{(1 - b/x_0)/[\dot{x}_0/(x_0 \omega_n) - (a/x_0)(\omega/\omega_n)]\}$  y  $\beta = \phi_0$  son los ángulos de fase de la respuesta.  $X_{est} = -ma_g/k$  es el máximo desplazamiento estático que alcanzaría el bloque sin considerar el efecto dinámico de la aceleración  $m\ddot{x}$  de la ecuación (19). De la expresión (20) se obtuvo la amplitud del desplazamiento y velocidad:

$$x_{max} = x_{H \max} + |x_{P \max}| \quad (23)$$

$$\dot{x}_{max} = \omega_n \left( x_{H \max} + |x_{P \max}| \frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad (24)$$

#### 5.3.2.2. Movimiento forzado con impacto

Al igual que en la sección 1.1.2 se estudió el movimiento del bloque que impacta con la pared. En este caso se consideró como velocidad de choque  $V_c$  al promedio de posibles velocidades en valor absoluto. Por lo tanto  $V_c$  es el resultado de la amplitud de velocidad obtenida en (24) multiplicada por  $2/\pi$ .

$$V_c = \frac{2}{\pi} X_{est} \cdot \omega_n \left[ \sqrt{\left( \frac{\dot{x}_0}{X_{est} \cdot \omega_n} - \frac{\cos \phi_0 \omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)^2 + \left( \frac{x_0}{X_{est}} - \frac{\sin \phi_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)^2} + \frac{1}{\left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|} \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right] \quad (25)$$

Sea el caso particular con condiciones iniciales nulas de reposo:  $\dot{x}_0 = 0$  y  $x_0 = 0$  y sea la relación de frecuencias  $r = \omega/\omega_n$ , entonces la ecuación (25) quedaría

$$V_c = \frac{2}{\pi} X_{est} \cdot \omega_n \left[ \sqrt{\left( \frac{r \cdot \cos \phi_0}{1 - r^2} \right)^2 + \left( \frac{\sin \phi_0}{1 - r^2} \right)^2} + \frac{r}{|1 - r^2|} \right] \quad (26)$$

Son dos casos en que la expresión (26) es máxima y depende de  $r$ :

**Caso 1:  $r < 1$**

$$V_c = \frac{2}{\pi} X_{est} \cdot \omega_n \left( \frac{1+r}{1-r^2} \right) \quad (27)$$

**Caso 2:  $r > 1$**

$$V_c = \frac{2}{\pi} X_{est} \cdot \omega_n \left( \frac{2r}{r^2-1} \right) \quad (28)$$

El bloque rebota con velocidad  $eV_c$  en sentido contrario. Se consideró como desplazamiento de rebote  $x_r$  al promedio de posibles desplazamientos en valor absoluto. El desplazamiento  $x_r$  se evaluó con la fórmula (23) multiplicada por  $2/\pi$ . en base a la nueva velocidad inicial  $eV_a$ , la nueva posición inicial cero y el nuevo ángulo de fase  $\phi'_0$ .

$$x_r = \frac{2}{\pi} X_{est} \left[ \sqrt{\left( \frac{eV_c}{X_{est} \cdot \omega_n} - \frac{r \cdot \cos \phi'_0}{1-r^2} \right)^2 + \left( \frac{\sin \phi'_0}{1-r^2} \right)^2} + \frac{1}{|1-r^2|} \right] \quad (29)$$

Sin embargo como son dos casos de velocidades de choque  $V_c$  entonces se obtuvieron dos casos de desplazamiento de rebote  $x_r$ .

**Caso 1:  $r < 1$**

Al reemplazar la expresión (27) en (29) se obtuvo:

$$x_r = \frac{2}{\pi} X_{est} \left[ \sqrt{\left( \frac{2}{\pi} e \left( \frac{1+r}{1-r^2} \right) - \frac{r \cdot \cos \phi'_0}{1-r^2} \right)^2 + \left( \frac{\sin \phi'_0}{1-r^2} \right)^2} + \frac{1}{1-r^2} \right] \quad (30)$$

El desplazamiento promedio en (30) se maximiza cuando  $\phi'_0 = \cos^{-1}(-2er/[\pi(1-r)])$ , al considerar este ángulo de fase se obtuvo el desplazamiento de rebote

$$x_r = \frac{2}{\pi} X_{est} \frac{1}{1-r^2} \left[ \sqrt{\left( \frac{2}{\pi} e \right)^2 \left( \frac{1+r}{1-r} \right)^2 + 1 + 1} \right] \quad (31)$$

**Caso 2:  $r > 1$**

Al reemplazar la expresión (28) en (29) se obtuvo:

$$x_r = \frac{2}{\pi} X_{est} \left[ \sqrt{\left( \frac{2}{\pi} e \left( \frac{2r}{r^2-1} \right) + \frac{r \cdot \cos \phi'_0}{r^2-1} \right)^2 + \left( \frac{\sin \phi'_0}{1-r^2} \right)^2} + \frac{1}{r^2-1} \right] \quad (32)$$

El desplazamiento promedio en (32) se maximiza cuando  $\phi'_0 = 0$  al considerar este ángulo de fase entonces se obtiene el desplazamiento de rebote

$$x_r = \frac{2}{\pi} X_{est} \frac{1}{r^2-1} \left( \frac{2}{\pi} er + \frac{r}{2} + 1 \right) \quad (33)$$

### 5.3.2.3. Movimiento amortiguado forzado

Se consideró una pared con aceleración sinusoidal y en este caso la ecuación diferencial de movimiento con amortiguamiento  $c$  resultó

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -ma_g \sin(\omega t + \phi_0) \quad (34)$$

La solución de la ecuación diferencial (34), considerando amortiguamiento subcrítico, es

$$x(t) = x_{H \max} \cdot \sin(\omega_D t + \alpha) + x_{P \max} \cdot \sin(\omega t + \beta) \quad (35)$$

Donde  $x_{H \max}$  y  $x_{P \max}$  son las amplitudes de las respuestas transitoria y estacionaria

$$x_{H \max} = \exp(-\xi \omega_n t) \cdot X_{est} \sqrt{\frac{1}{1 - \xi^2} \left[ \frac{\dot{x}_0}{X_{est} \omega_n} - \frac{a}{X_{est}} \frac{\omega}{\omega_n} + \xi \left( \frac{x_0}{X_{est}} - \frac{b}{X_{est}} \right) \right]^2 + \left( \frac{x_0}{X_{est}} - \frac{b}{X_{est}} \right)^2} \quad (36)$$

$$x_{P \max} = \frac{X_{est}}{\sqrt{\left( 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2}} \quad (37)$$

Además

$$\alpha = \tan^{-1} \left\{ \frac{\frac{x_0}{X_{est}} - \frac{b}{X_{est}}}{\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left[ \frac{\dot{x}_0}{X_{est} \omega_n} - \frac{a}{X_{est}} \frac{\omega}{\omega_n} + \xi \left( \frac{x_0}{X_{est}} - \frac{b}{X_{est}} \right) \right]} \right\} \quad (38)$$

$$\beta = \tanh^{-1} \left[ \frac{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \sin \phi_0 - 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \cos \phi_0}{2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \sin \phi_0 + \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \cos \phi_0} \right] \quad (39)$$

son los ángulos de fase de la respuesta transitoria y estacionaria respectivamente. Los siguientes términos deben evaluarse dentro de las expresiones (36) y (38)

$$\frac{a}{X_{est}} = \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \sin \phi_0 + \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \cos \phi_0}{\left( 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2} \quad (40)$$

$$\frac{b}{X_{est}} = \frac{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \sin \phi_0 - 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \cos \phi_0}{\left( 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2} \quad (41)$$

La amplitud de la respuesta total puede ser máxima cuando los argumentos de las funciones sinusoidales son iguales. Sin embargo, a mayor número de ciclos (mayor tiempo) entonces la respuesta transitoria se vuelve cada vez menor. Por ello la amplitud de la respuesta total se tomará en cuenta una parte de la respuesta transitoria cuando el argumento de la expresión (36) sea  $\omega_D t + \alpha = 2\pi$  más la estacionaria (37)

$$x_{max} = x_{H \max} + x_{P \max} \quad (42)$$

Al considerar como  $r = \omega/\omega_n$  la expresión (42) quedaría

$$x_{max} = \exp \left[ -\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} (2\pi - \alpha) \right] \frac{2}{\pi} X_{est} \sqrt{\frac{1}{1 - \xi^2} \left\{ \frac{(2\xi r)^2 + (1 - r^2)^2 + \xi^2 (1 - r^2)^2}{[(2\xi r)^2 + (1 - r^2)^2]^2} \right\}} + \frac{X_{est}}{\sqrt{(2\xi r)^2 + (1 - r^2)^2}} \quad (43)$$

Donde

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{2\xi^2 + r^2 - 1} \right)$$

#### 5.3.2.4. Comparación amortiguamiento impacto

La comparación de las máximas alturas halladas en (43), (31) y (33) establece la siguiente relación iterativa entre  $\xi$  y  $e$  para dos casos:

**Caso 1:  $r < 1$**

$$\xi = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{(\alpha - 2\pi)} \ln \left( \frac{\frac{1}{1-r^2} \left[ \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}e\right)^2 \left(\frac{1+r}{1-r}\right) + 1} + 1 \right] - \frac{\pi}{2\sqrt{(2\xi r)^2 + (1-r^2)^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1-\xi^2} \left\{ \frac{(2\xi r)^2 + (1-r^2)^2 + \xi^2(1-r^2)^2}{[(2\xi r)^2 + (1-r^2)^2]^2} \right\}}} \right) \quad (44)$$

**Caso 2:  $r > 1$**

$$\xi = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{(\alpha - 2\pi)} \ln \left( \frac{\frac{1}{r^2-1} \left( \frac{2}{\pi}er + \frac{r}{2} + 1 \right) - \frac{\pi}{2\sqrt{(2\xi r)^2 + (1-r^2)^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1-\xi^2} \left\{ \frac{(2\xi r)^2 + (1-r^2)^2 + \xi^2(1-r^2)^2}{[(2\xi r)^2 + (1-r^2)^2]^2} \right\}}} \right) \quad (45)$$

Sin embargo, suponiendo que  $\xi^2 \approx 0$ , las expresiones anteriores quedan simplificadas

**Caso 1:  $r < 1$**

$$\xi = \max \left\{ 0, -\frac{1}{2\pi} \ln \left[ \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}e\right)^2 \left(\frac{1+r}{1-r}\right) + 1} + 1 - \frac{\pi}{2} \right] \right\} \quad (46)$$

**Caso 2:  $r > 1$**

$$\xi = \max \left\{ 0, -\frac{1}{2\pi} \ln \left[ \max \left( 0, \frac{2}{\pi}er + \frac{r}{2} + 1 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} \quad (47)$$

Como caso práctico se halló la respuesta con impacto de un bloque con coeficientes de restitución  $e = 1$  y  $e = 0.5$  de masa  $m = 2000 \text{ kg}$ , conectado a un resorte de rigidez  $k = 79000 \text{ N/m}$ , que parte desde la posición  $x_0 = 0.1 \text{ m}$  con velocidad  $\dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s}$ . Además, se evaluará deformaciones estáticas de acuerdo a una máxima aceleración  $a_g$  de 0.3g, 0.6g 0.9g y 1.3g. El ángulo de fase de la aceleración del suelo es  $\phi_0 = \pi/2$  Del mismo modo para cada deformación estática se evaluaron distintas relaciones  $\omega/\omega_n$  de 0.25 0.5 y 1.5. Los cocientes de amortiguamiento fueron hallados con (46) y (47), estos producen movimientos armónicos similares al impacto y están resumidos en la Tabla 4.

Tabla 4. Cociente de amortiguamiento

$\omega/\omega_n$	$\xi$ ( $e = 1$ )	$\xi$ ( $e = 0.5$ )
0.25	0.051	0.107
0.50	0.014	0.089
1.50	0.000	0.067

Las siguientes figuras muestran el desplazamiento de la pared y la comparación de la respuesta del movimiento con impacto MCI y del movimiento amortiguado MA. Se comparó la efectividad del MA en predecir o simular el rebote máximo del MCI. Las figuras están agrupadas y analizadas en grupos de tres. La primera figura es el movimiento de la pared a una intensidad y frecuencia específica, la segunda es una comparación entre el MA y el MCI cuando el choque es elástico ( $e = 1$ ) y la tercera es la comparación entre el MA y MCI cuando el choque es inelástico ( $e = 0.5$ ).



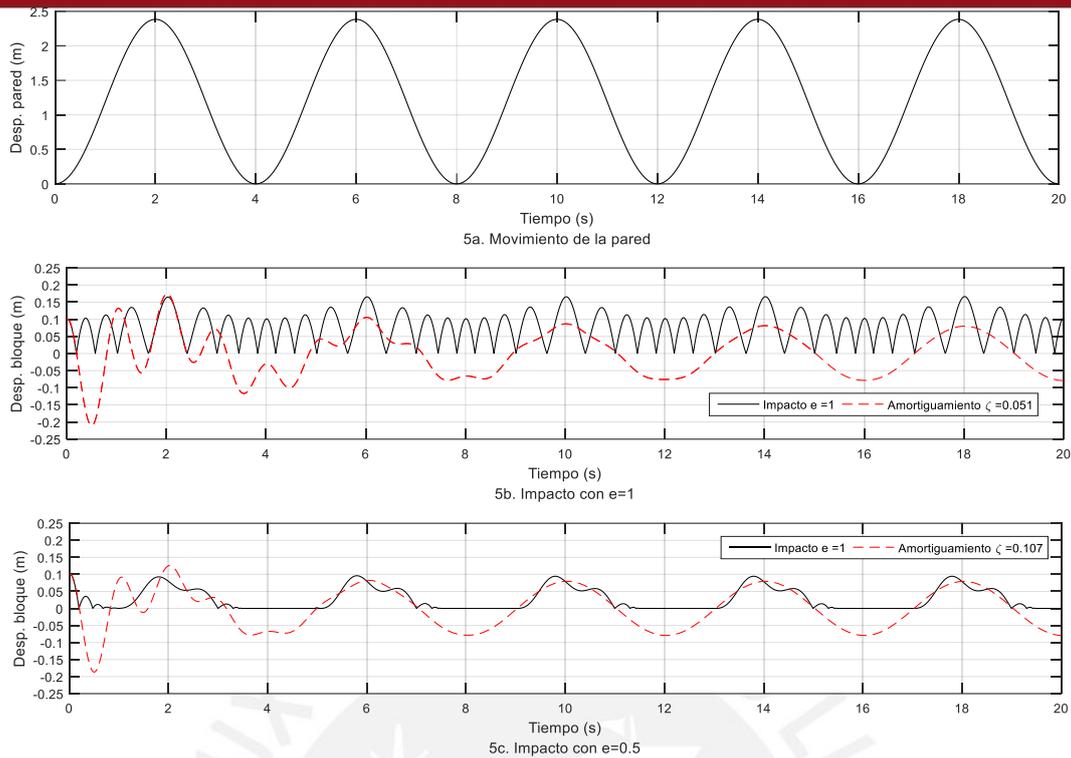


Figura 39. Comparación  $a_g = 0.3g$  y  $\omega/\omega_n=0.25$

Cuando el choque es elástico ( $e = 1$ ) hay mayor similitud entre el MA y el MCI en  $t = 2$  s, es decir cuando ocurre el máximo desplazamiento de la pared y durante la respuesta transitoria. Sin embargo, durante el resto del movimiento la aproximación subestima a la real. Lo contrario ocurre cuando ( $e = 0.5$ ) hay mayor similitud entre la respuesta con impacto y la respuesta estacionaria.

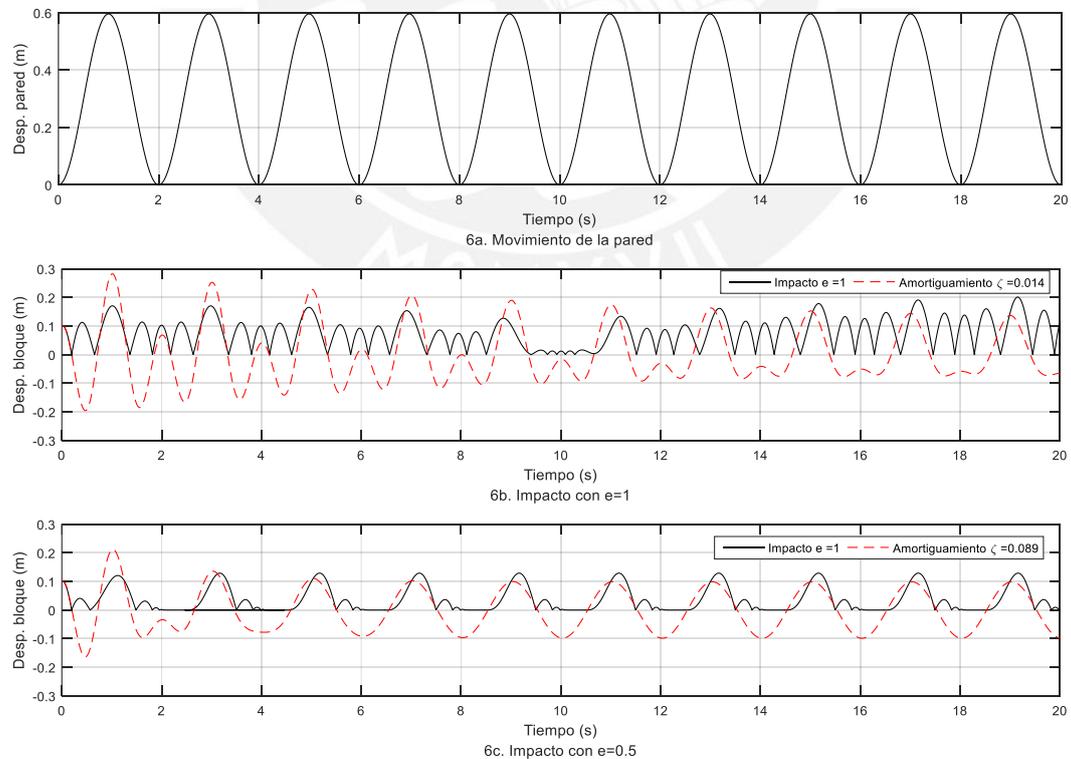


Figura 40. Comparación  $a_g = 0.3g$  y  $\omega/\omega_n=0.50$

Cuando ( $e = 1$ ) y la relación de frecuencias es 0.5 hay una sobreestimación del máximo desplazamiento durante los primeros 14 s. sin embargo, en el resto de tiempo se subestima. Para ( $e = 0.5$ ) hay una mejor predicción entre el desplazamiento del MCI y el MA.

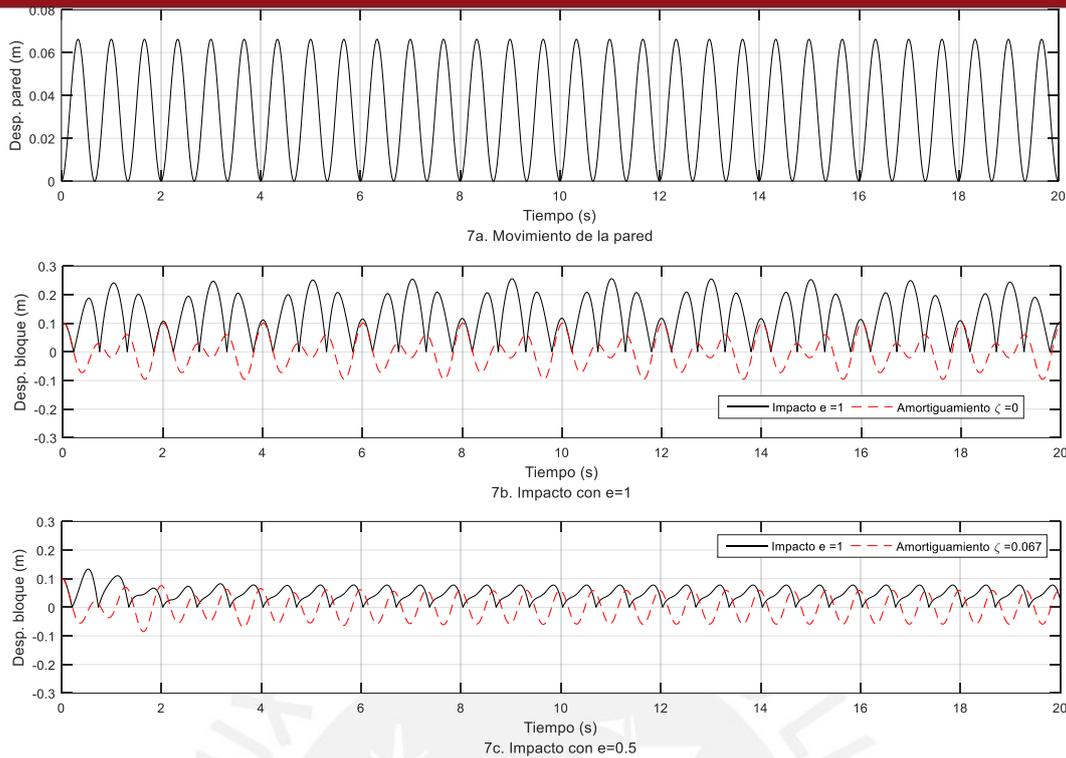


Figura 41. Comparación  $a_g = 0.3g$  y  $\omega/\omega_n=1.50$

Quando ( $e = 1$ ) y la relación de frecuencias  $\omega/\omega_n > 1$  no se puede aproximar el máximo desplazamiento del MCI utilizando el MA. El desplazamiento con  $\xi = 0$  es el máximo desplazamiento posible y este siempre subestima el desplazamiento con impacto. Sin embargo, cuando ( $e = 0.5$ ) ocurre una adecuada aproximación del MCI por parte del MA.

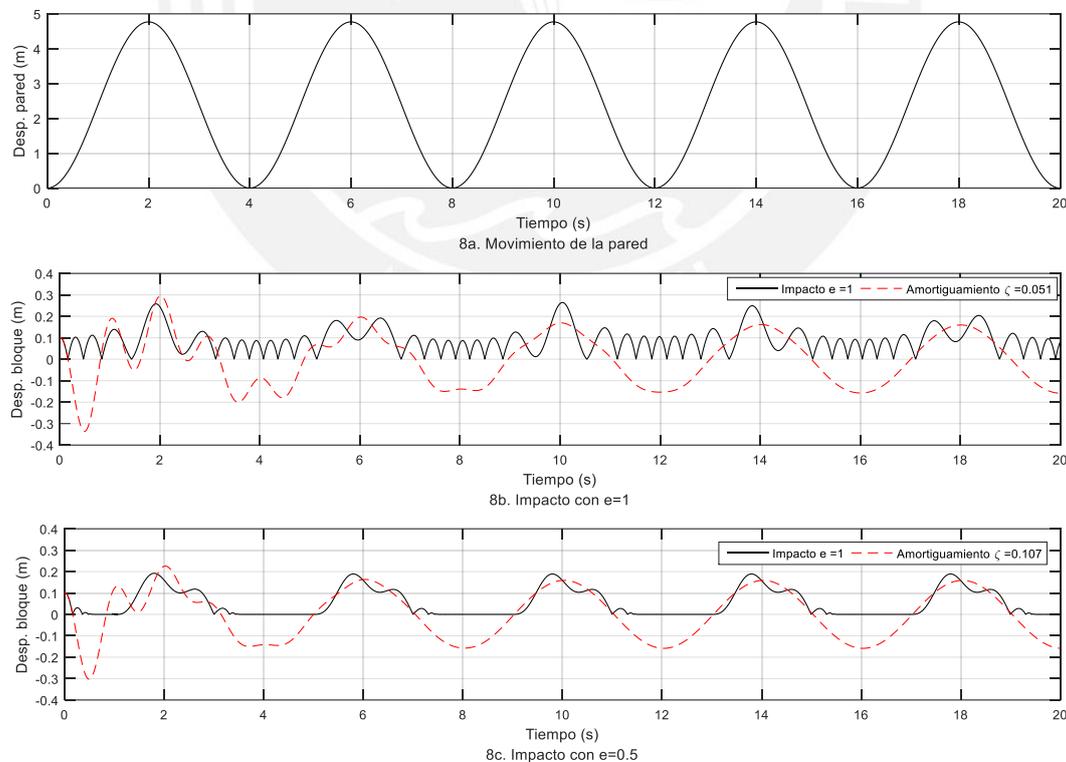


Figura 42. Comparación  $a_g = 0.6g$  y  $\omega/\omega_n=0.25$

Al igual cuando amplitud de aceleración de la base fue  $0.3g$ , en el caso de impacto elástico ( $e = 1$ ) y relación de frecuencias  $\omega/\omega_n < 1$  sólo es posible aproximar el máximo desplazamiento durante los primeros 3 s. Sin embargo cuando el choque es inelástico ( $e < 1$ ) hay una buena aproximación del MCI con el MA.

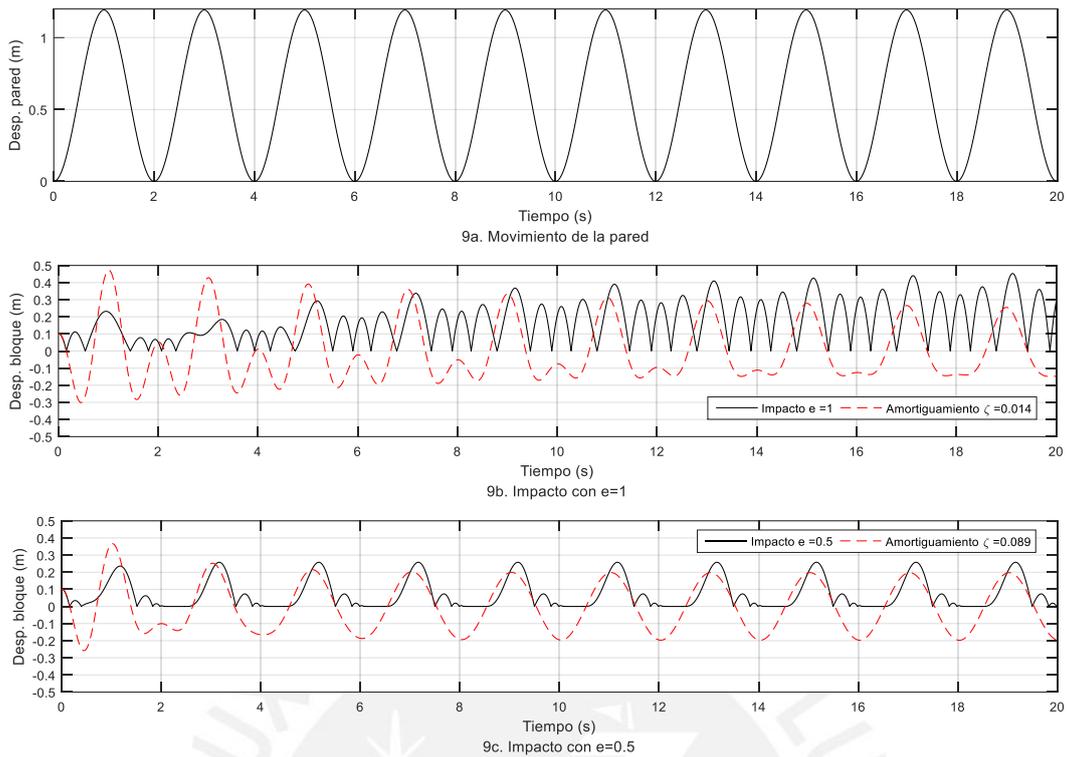


Figura 43. Comparación  $a_g = 0.6g$  y  $\omega/\omega_n=0.50$

En el caso del choque elástico ( $e = 1$ ) se obtiene una adecuada sobreestimación del desplazamiento hasta los primeros 7 s. Luego ocurre la subestimación del desplazamiento del modelo con MA. Una adecuada aproximación se obtuvo de la respuesta del MCI con el MA para el caso de choque inelástico ( $e < 1$ ) y relación de frecuencias  $\omega/\omega_n < 1$ .

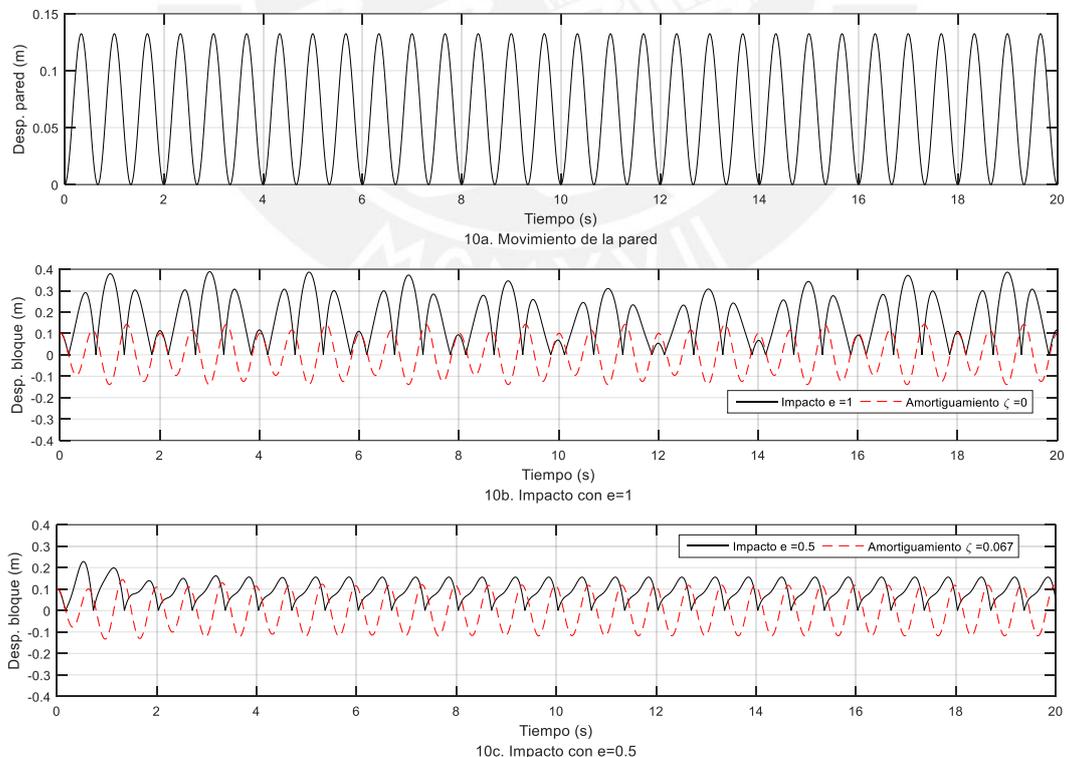


Figura 44. Comparación  $a_g = 0.6g$  y  $\omega/\omega_n=1.50$

Cuando la relación de frecuencias  $\omega/\omega_n > 1$  y el choque es elástico no es posible aproximar el MCI con el modelo de MA a pesar de utilizar un  $\xi = 0$ . Sin embargo si se logró una adecuada aproximación de desplazamiento entre el MCI y el MA cuando el choque es inelástico ( $e < 1$ ).

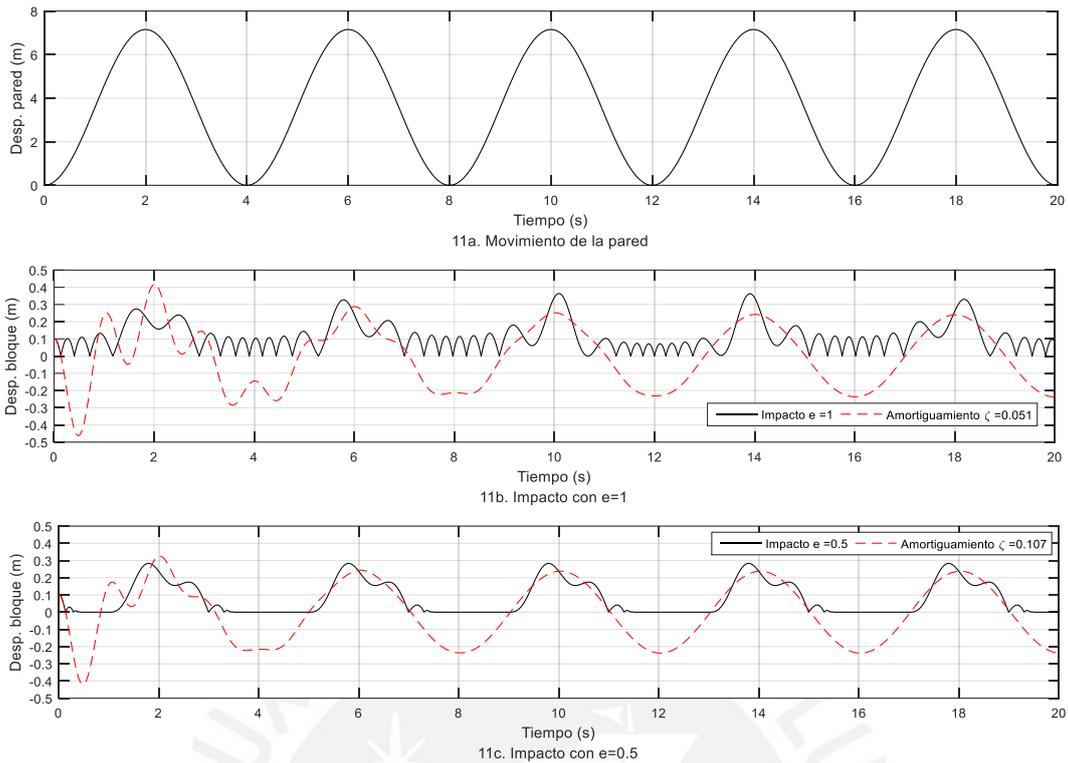


Figura 45. Comparación  $a_g = 0.9g$  y  $\omega/\omega_n=0.25$

Cuando ocurre un choque elástico y hay una relación de frecuencias  $\omega/\omega_n < 1$  ocurre una sobreestimación en los primeros 5 s. Sin embargo, en el resto de tiempo ocurre una subestimación del desplazamiento del MCI. Cuando el choque es inelástico ocurre una adecuada aproximación entre el MA y el MCI.

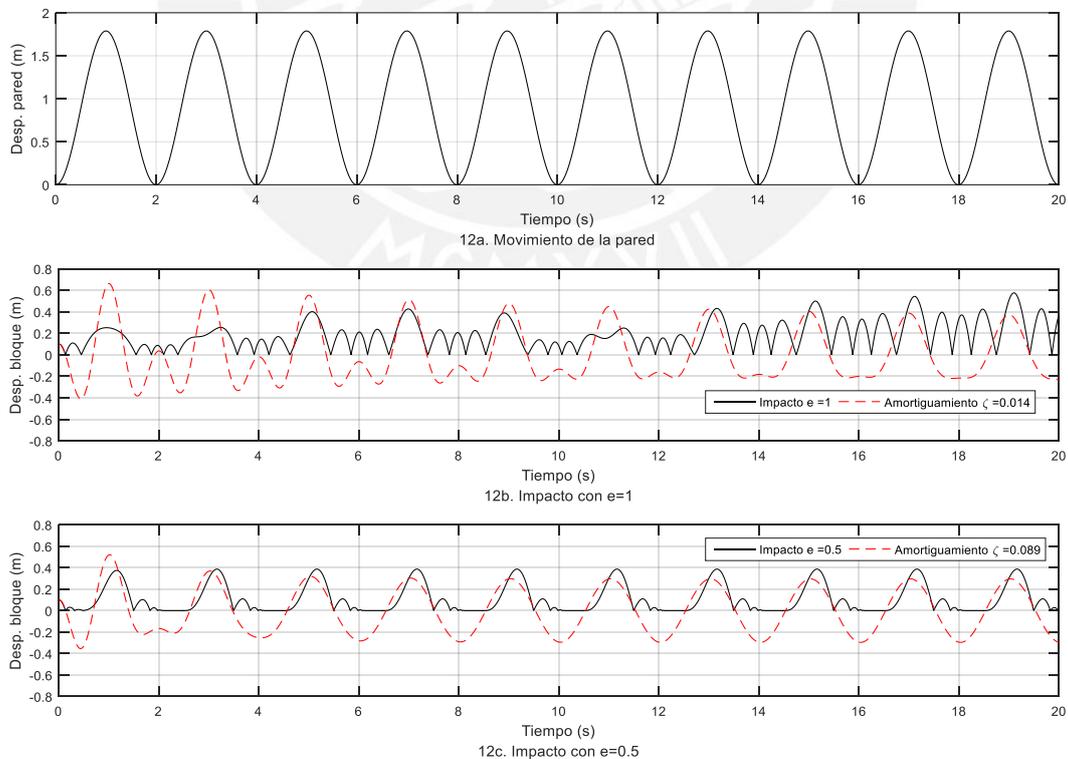


Figura 46. Comparación  $a_g = 0.9g$  y  $\omega/\omega_n=0.50$

Cuando el choque es elástico existe una adecuada aproximación entre el MCI y el MA durante los primeros 13 s. Sin embargo, en el resto de tiempo ocurre una subestimación del MCI por parte del MA. En el caso del choque inelástico hay una adecuada aproximación.

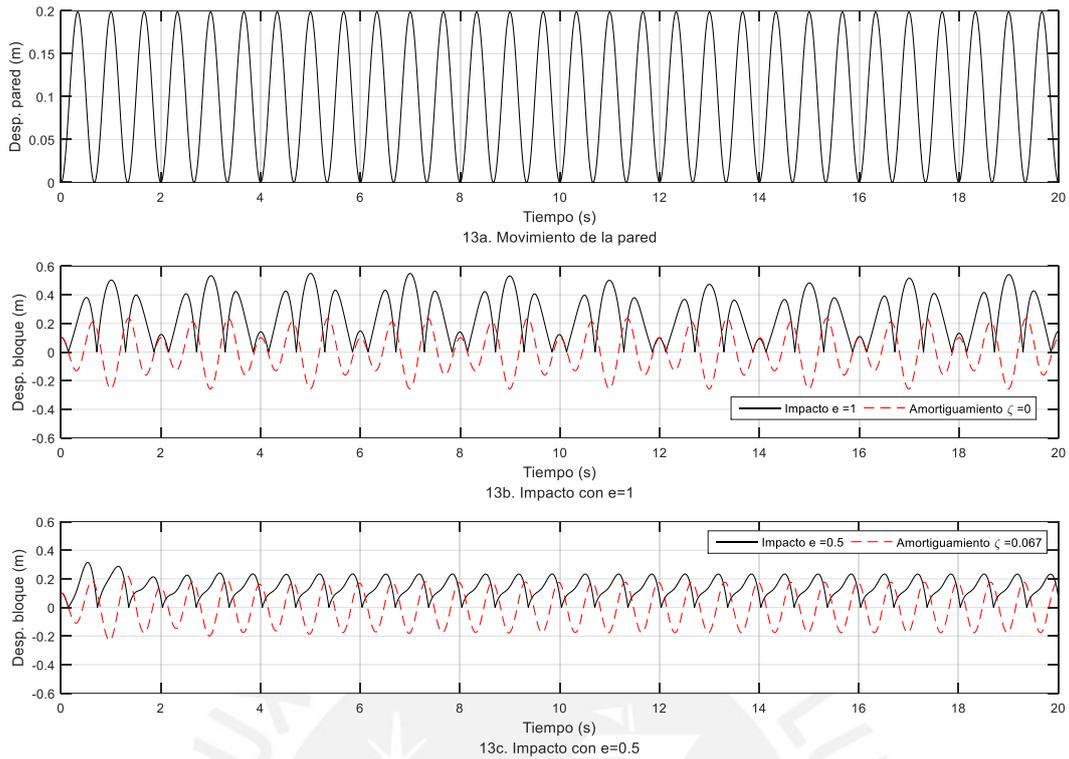


Figura 47. Comparación  $a_g = 0.9g$  y  $\omega/\omega_n = 1.50$

Cuando el choque es elástico y  $\omega/\omega_n = 1.50$ , no hay una adecuada aproximación del desplazamiento del MCI por parte del MA en ningún instante de tiempo, a pesar que el  $\xi = 0$ . Caso contrario ocurre cuando el choque es inelástico, la aproximación del MA es adecuada para la respuesta estacionaria del MCI.

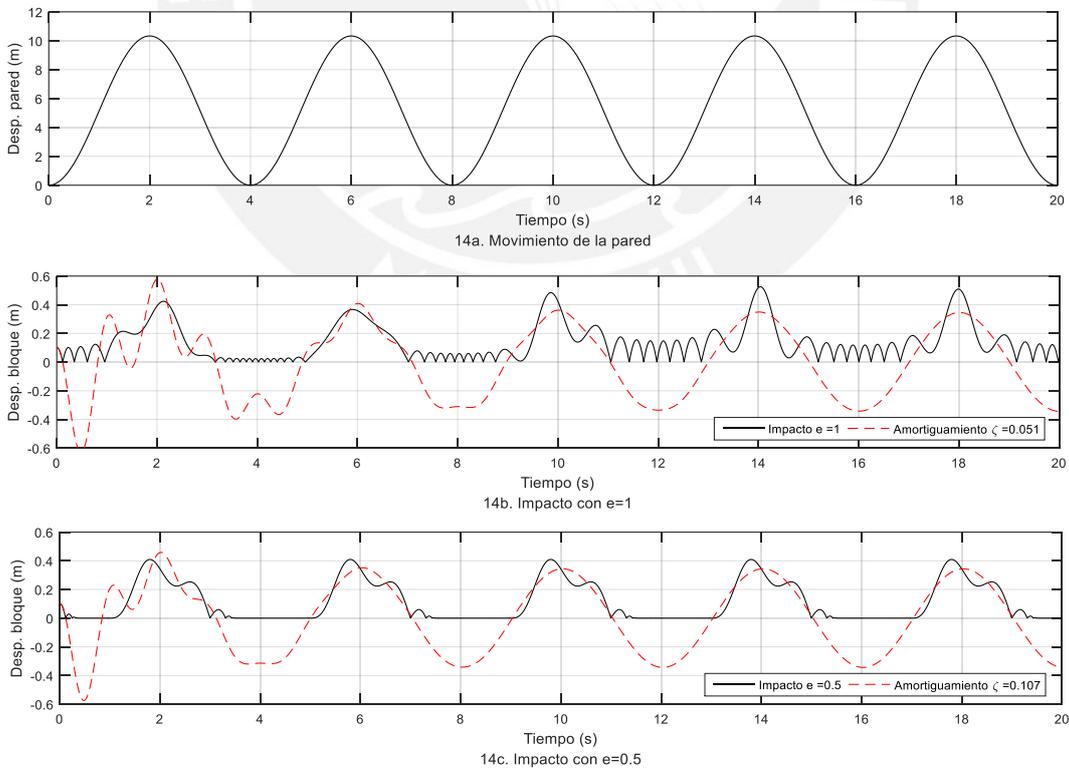


Figura 48. Comparación  $a_g = 1.3g$  y  $\omega/\omega_n = 0.25$

Cuando el choque es elástico ( $e = 1$ ) la adecuada aproximación del MCI utilizando el MA dura hasta el instante de los 9 s, luego de ello ocurre una subestimación del desplazamiento. Sin embargo cuando el choque es inelástico ( $e < 1$ ) hay una adecuada aproximación de desplazamiento del MCI con el MA.

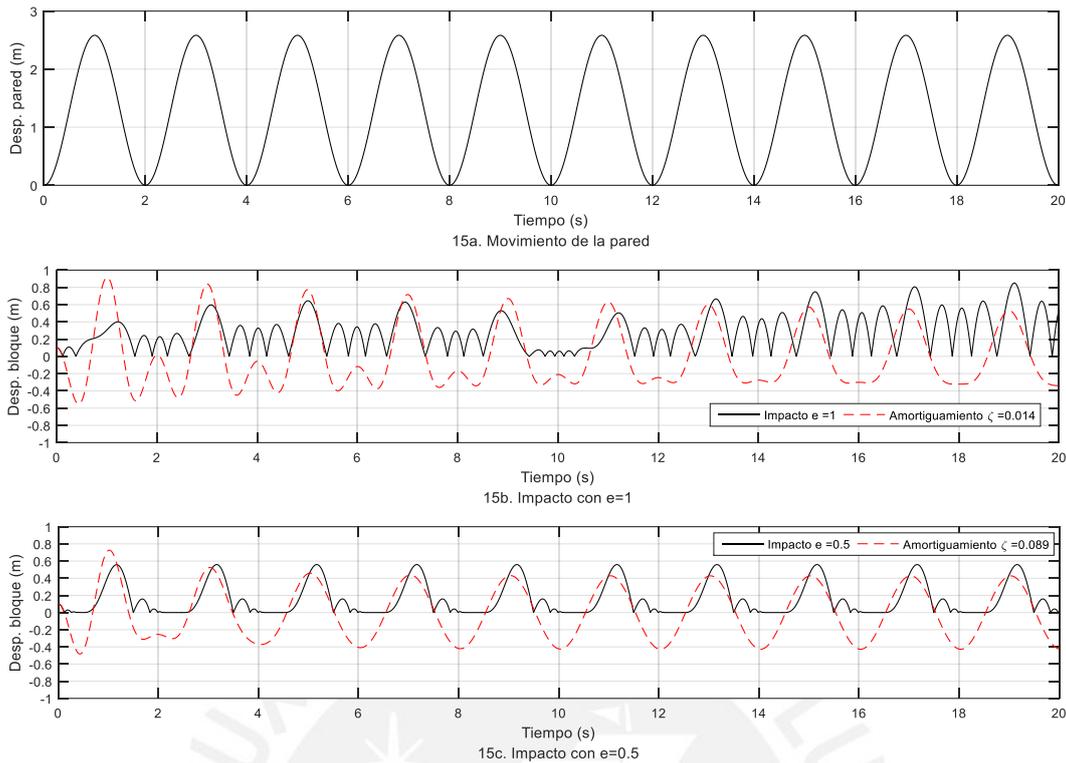


Figura 49. Comparación  $a_g = 1.3g$  y  $\omega/\omega_n=0.50$

Cuando el choque es elástico ( $e = 1$ ) hay una sobreestimación del desplazamiento del MA respecto al MCI hasta los 11 s. Luego de ello se subestima el desplazamiento. Cuando el choque es inelástico ( $e < 1$ ) se obtiene una adecuada aproximación del MCI con el MA.

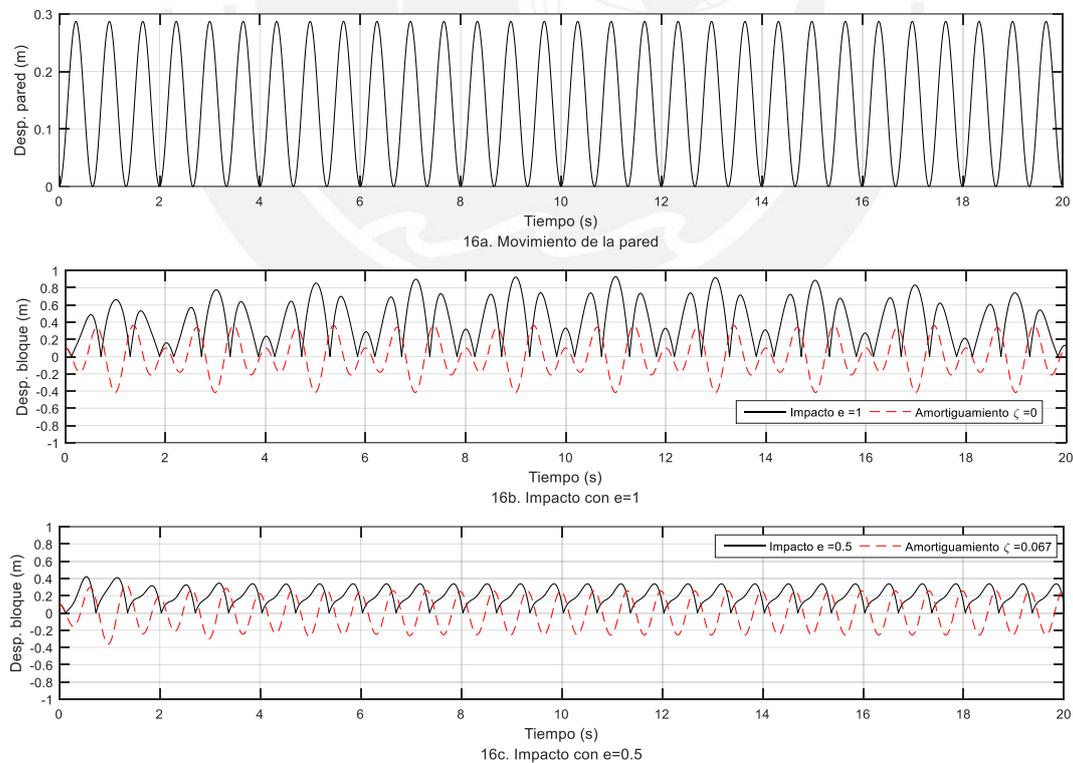


Figura 50. Comparación  $a_g = 1.3g$  y  $\omega/\omega_n=1.50$

Cuando el choque es elástico y la relación de frecuencias  $\omega/\omega_n > 1$  no es posible aproximar el MCI con el MA a pesar de utilizar un amortiguamiento nulo. Sin embargo, cuando el choque es inelástico si se obtiene una adecuada aproximación del desplazamiento del MCI con el MA.

Los valores encontrados para el amortiguamiento en función del coeficiente de restitución tienen un límite. Cuando la relación de frecuencias  $\omega/\omega_n > 1$  y el choque es elástico ( $e = 1$ ) no es posible encontrar un sistema amortiguado cuyos desplazamientos sean equiparables con el MCI. Incluso al utilizar  $\xi = 0$  los desplazamientos del MA subestiman a los del MCI. Por lo tanto, no es posible equiparar el movimiento con impacto elástico a pesar de tener un movimiento armónico libre sin amortiguamiento.

Sin embargo, si se encontró una adecuada aproximación del desplazamiento cuando la relación de frecuencias es  $\omega/\omega_n > 1$  y el choque es inelástico ( $e = 0.5$ ). En general se encontraron adecuadas aproximaciones entre el MA y MCI cuando se analizaron casos de choque inelásticos ( $e = 0.5$ ). Esto concuerda con la intención de equiparar la disipación de energía entre el MA y el MCI, lo cual no ocurre cuando  $e = 1$ .

### 5.3.3. Caso 3: Aceleración sísmica

En este caso se presenta el estudio del movimiento de un bloque conectado a una superficie con aceleración sísmica a través de un resorte de rigidez  $k$  similar a la Figura 36. La ecuación de este movimiento se resuelve numéricamente. Chopra (2012) presenta el método numérico de evaluación paso a paso que utiliza la interpolación de la fuerza. Este método se utiliza para la siguiente ecuación de movimiento análoga a la expresión (6)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{u}_g(t) \quad (48)$$

La respuesta se determina en tiempos discretos  $t_i$  a cada intervalo de tiempo  $\Delta t$ , por lo que (47) quedaría de la forma

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i = p_i \quad (49)$$

Donde  $\ddot{x}_i$  es la aceleración del bloque en el instante  $t_i$ ,  $\dot{x}_i$  es la velocidad del bloque,  $x_i$  es el desplazamiento y  $p_i$  son los valores discretos de la fuerza aplicada. Dadas las condiciones iniciales de movimiento  $x_0$  y  $\dot{x}_0$ , la evaluación numérica de los siguientes desplazamientos y velocidades se obtienen con las expresiones (50) y (51) con ayuda de 8 parámetros:

$$x_{i+1} = A x_i + B \dot{x}_i + C p_i + D p_{i+1} \quad (50)$$

$$\dot{x}_{i+1} = A' x_i + B' \dot{x}_i + C' p_i + D' p_{i+1} \quad (51)$$

Los 8 parámetros se determinan con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 A &= \exp(-\xi \omega_n \Delta t) \cdot \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D \Delta t + \cos \omega_D \Delta t \right) \\
 B &= \exp(-\xi \omega_n \Delta t) \cdot \left( \frac{1}{\omega_D} \sin \omega_D \Delta t \right) \\
 C &= \frac{1}{k} \left\{ \frac{2\xi}{\omega_n \Delta t} + \exp(-\xi \omega_n \Delta t) \left[ \left( \frac{1-2\xi^2}{\omega_D \Delta t} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \sin \omega_D \Delta t - \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_D \Delta t} \right) \cos \omega_D \Delta t \right] \right\} \\
 D &= \frac{1}{k} \left[ 1 - \frac{2\xi}{\omega_n \Delta t} + \exp(-\xi \omega_n \Delta t) \left( \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_D \Delta t} \sin \omega_D \Delta t + \frac{2\xi}{\omega_D \Delta t} \cos \omega_D \Delta t \right) \right] \\
 A' &= -\exp(-\xi \omega_n \Delta t) \cdot \left( \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D \Delta t \right) \\
 B' &= \exp(-\xi \omega_n \Delta t) \cdot \left( \cos \omega_D \Delta t - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D \Delta t \right) \\
 C' &= \frac{1}{k} \left\{ -\frac{1}{\Delta t} + \exp(-\xi \omega_n \Delta t) \left[ \left( \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi}{\Delta t \sqrt{1-\xi^2}} \right) \sin \omega_D \Delta t + \left( \frac{1}{\Delta t} \right) \cos \omega_D \Delta t \right] \right\} \\
 D' &= \frac{1}{k \Delta t} \left[ 1 - \exp(-\xi \omega_n \Delta t) \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D \Delta t + \cos \omega_D \Delta t \right) \right]
 \end{aligned}$$

### 5.3.3.1. Registro de aceleración sísmica

La Figura 51 muestra el registro de aceleración del terremoto del 31 de mayo 1970 normalizado a 0.3 g y que se utilizó para estudiar el movimiento de un bloque análogo a los casos de movimiento 1 y 2.

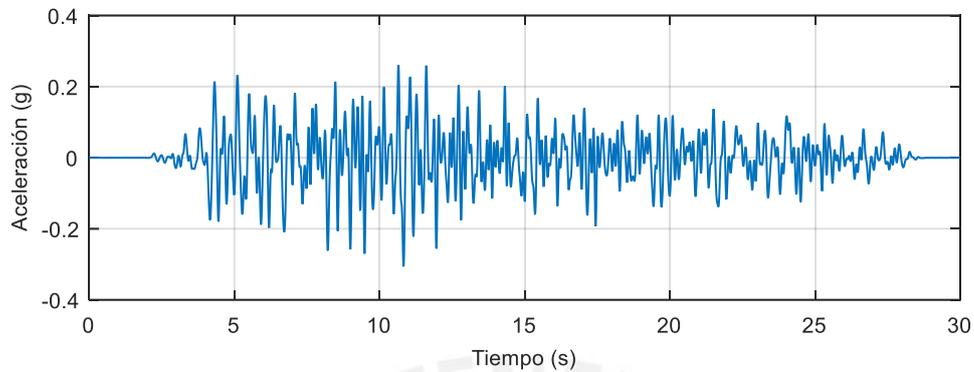


Figura 51. Registro de aceleración sísmica

La Figura 52 muestra el espectro de amplitud de la transformada rápida de Fourier del registro de aceleraciones mostrado en la Figura 51.

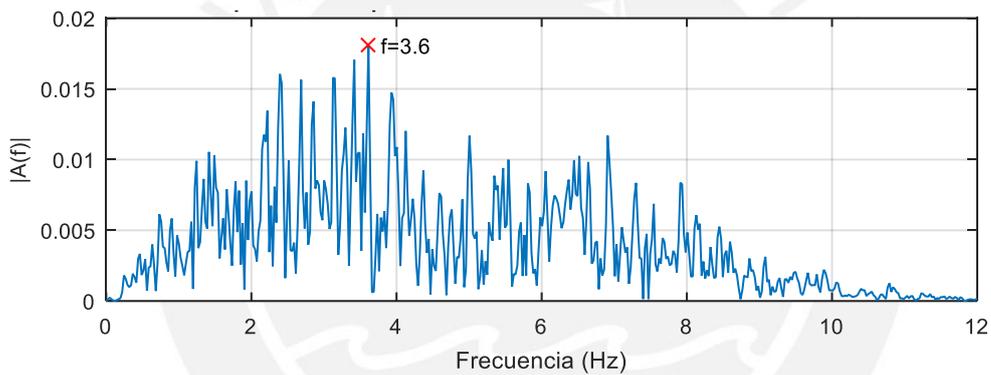


Figura 52. Espectro de la transformada de Fourier de la señal registrada

### 5.3.3.2. Amortiguamiento para simular impacto

La frecuencia dominante identificada en la Figura 52 es 3.6 Hz. Este valor numérico coincide con la relación de frecuencias  $\omega/\omega_n$  ya que la frecuencia natural del sistema bloque resorte estudiado es 1 Hz. Se consideró que el bloque es una arcilla de baja plasticidad, entonces  $e = 0.3$ . El amortiguamiento equivalente para este ratio de frecuencias y este material se obtuvo con la expresión (47)  $\xi = 0.104$ . Las condiciones iniciales de movimiento son nulas. La Figura 53 muestra la comparación de respuestas entre el MCI y el MA.

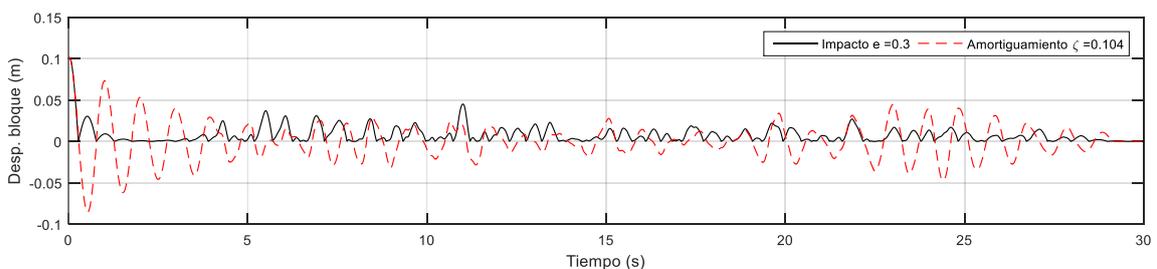


Figura 53. Comparación de respuestas

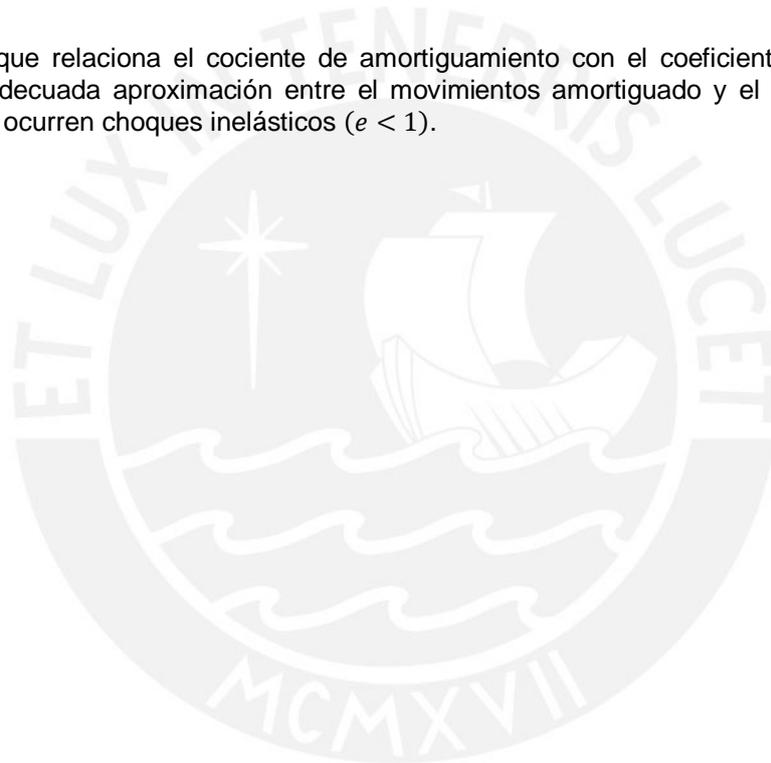
## 6. CONCLUSIONES

Existe similitud y correlación entre las gráficas de aceleraciones del modelo numérico y el prototipo experimental, ello se logró principalmente con la calibración del módulo de elasticidad de la albañilería ( $E$ ) y el coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ ). Ello comprueba la adecuada calibración de los parámetros mecánicos del modelo numérico en base al periodo natural de vibración.

La ubicación de esfuerzos máximos en las esquinas ventanas del modelo numérico coincide con el esquema de fisuras observado en el ensayo experimental. Adicionalmente se identificaron las zonas de esfuerzos máximos en la base de los muros frontal y posterior lo cual indica un inminente colapso si la aceleración fuese mayor.

El cortante basal vs. desplazamiento promedio D1R y D2R indica una similitud del cortante máximo obtenido en el modelo numérico y el prototipo experimental. Este valor máximo está relacionado con el 0.31g de la historia de aceleraciones de la primera fase de la simulación sísmica.

La expresión que relaciona el cociente de amortiguamiento con el coeficiente de restitución permite una adecuada aproximación entre el movimientos amortiguado y el movimiento con rebote cuando ocurren choques inelásticos ( $e < 1$ ).



## 7. BIBLIOGRAFÍA

1. Bossio, S., 2010. Evaluación del Comportamiento Sísmico e Influencia de la Dirección del Movimiento en Módulos de Adobe Reforzado con Geomalla, Tesis para optar el Título Profesional de Ingeniero Civil, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
2. Blondet, M. y Vargas, J., 1978. *Investigación sobre vivienda rural*, Informe, Sección de Ingeniería Civil de la Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
3. Blondet, M., Torrealva, D., Vargas, J., Tarque, N., y Velasquez, J., 2006. Seismic reinforcement of adobe houses. *Proceedings of 1st European Conference on Earthquake Engineering and Seismology*, Génova, Suiza.
4. CSI (Computers and Structures Inc.), 2015. CSI Analysis Reference Manual for SAP2000, ETABS, SAFE and CSiBridge, ISO No. GEN062708M1 Rev.11, Computers and Structures Inc., Berkeley, California, Estados Unidos de América.
5. Groenenberg, R., 2010. The reparation of adobe constructions damaged by earthquake loading and the development of an ATENA-GiD model to simulate shaking table tests for these structures. Tesis para optar el Grado Académico de Magíster en Ingeniería Civil, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
6. INEI (Instituto Nacional de Estadística e Informática), 2008. *Ojo al Perú: Los Censos XI de población y VI de vivienda en el 2007*, 1ra Ed. Instituto Nacional de Estadística e Informática, Lima, Perú.
7. RNE Norma E.010, 2006. *Reglamento Nacional de Edificaciones: Norma para agrupamiento y uso estructural de la Madera*, Ministerio de Construcción Vivienda y Saneamiento, Lima, Perú.
8. Sosa, C., y Soto, J., 2014. Reparación de Muros de Construcciones Históricas de Tierra Mediante el Sellado de Fisuras y Refuerzos Estructurales Adicionales, Tesis para optar el Grado Académico de Magíster en Ingeniería Civil, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
9. Tarque, N., 2008. Seismic risk assessment of adobe dwellings, Tesis para optar el Grado de Master of Science, Universidad de Pavía, Pavía, Italia.
10. Tarque, N., 2011. Numerical Modeling of the Seismic Behavior of Adobe Buildings, Tesis para optar el Grado de Doctor en Filosofía en Ingeniería Sísmica, Universidad de Pavía, Pavía, Italia.
11. Tarque, N., Crowley, H., Pinho, R., y Varum, H., 2012. Displacement-based fragility curves for seismic assessment of adobe buildings in Cusco, Peru, *Earthquake Spectra* 28, 759-794.