PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN FUNCIÓN CUADRÁTICA POR MEDIO DEL TRÁNSITO DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN ESTUDIANTES DE QUINTO AÑO DE SECUNDARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

ELDEN TOCTO NÚÑEZ

Dirigido por

CAROLINA RITA REAÑO PAREDES

San Miguel, 2015

Dedicatoria

Dedico este trabajo

A mis padres, Imelda y Roberto

A mi esposa Edith y a mis dos hijas Angelina y Kimora.

AGRADECIMIENTO

Al Ministerio de Educación del Perú, quien por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominada “Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014”.

A todos los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú; gracias por compartir sus conocimientos y experiencias en el en el transcurso de esta maestría.

Un agradecimiento especial a mi asesora Mag. Carolina RitaReaño Paredes por su dedicación, apoyo constante y sobre todo por sus valiosos aportes para concluir este trabajo.

A los miembros del jurado, Dr. Francisco Ugarte Guerra y Mag. Estela Aurora Vallejo Vargas por sus sugerencias y observaciones, las cuales me ayudaron a mejorar mi trabajo.

A todos mis compañeros de la maestría por ayudarme de una u otra manera en lasdificultades que se presentaron durante el tiempo que estudiamos juntos.

A mis amigos Manuel, Hernán,Socorro, Berta, Lino, Viqui y Luder por su motivación para realizar y culminar esta maestría.

Ala congregación de Hermanas de San José de Tarbes, por su acogida y el apoyo que me brindaron en los estudios de la maestría.

A mis colegas y estudiantes de quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Tito Cusi Yupanqui, Cajamarca - San Ignacio que gentilmente participaron en esta investigación.

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo analizar cómo el tránsito por distintos registros de representación semiótica favorece la comprensión de la noción de función cuadrática en estudiantes de quinto año de educación secundaria. Utilizamos como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesta por Duval. En cuanto a la metodología, hemos tomado algunos aspectos de la ingeniería didáctica de Artigue. Con respecto a la experimentación y análisis, elaboramos y aplicamos una secuencia de dos actividades: la primera consta de cinco partes y la segunda, de dos partes. Estas fueron elaboradas con el propósito de que los estudiantes transiten por los diversos registros de la representación semiótica movilizando la noción de función cuadrática. Por esto, nos focalizamos en el análisis de los aciertos y las dificultades que los estudiantes mostraron al realizar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión en los diferentes registros de dicha representación. Los resultados obtenidos muestran que la mayoría de estudiantes lograron transitar por los siguientes registros de representación semiótica: lengua natural, tabular, algebraico y gráfico, lo cual permitió movilizar sus conocimientos previos referidos a elementos y propiedades de la función cuadrática en sus diferentes representaciones. Sin embargo, presentaron dificultades para explicar y justificar los elementos y propiedades de la función cuadrática en lenguaje natural.

Palabras clave: función cuadrática, registros de representación semiótica, tratamientos, lenguaje natural.

ABSTRACT

This research has as aim analyze how the transit through different registers of semiotic representation favors the understanding of the concept of quadratic function in fifth year of secondary education students. We use as a theoretical framework Records Theory of Semiotics Representation proposed by Duval. In terms of methodology, we have taken some aspects of Artigue didactic engineering. With respect to experimentation and analysis, we elaborate and apply a sequence of two activities: the first consists of five parts and the second of two parts.

These were elaborated by the intention of which the students pass along the diverse records of the representation semiotics mobilizing the notion of quadratic function. For this, we focus ourselves in the analysis of the successes and the difficulties that the students showed on having realized the cognitive activities of treatment and conversion in the different records of the above mentioned representation. The obtained results show that the majority of students managed to pass along the following records of representation semiotics: natural language, tabulates, algebraic and graphically, which allowed mobilize their previous knowledge referred to elements and properties of the quadratic function in their different representations. Nevertheless, they presented difficulties to explain and to justify the elements and properties of the quadratic function in natural language.

Key words: Quadratic Function, Records of Representation Semiotics, Treatments, Natural Language.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación surge por el interés de analizar cómo se produce la comprensión de la noción de función cuadrática a través de sus diversos tipos de representaciones semióticas. Además,por las dificultades que muestran los estudiantes de educación secundaria para resolver problemas sobre función cuadrática, carencia evidenciada en las últimas evaluaciones de rendimiento estudiantil.

La investigación asume como objetivo general: analizar cómo el tránsito de distintos registros de representación semiótica favorece la comprensión de la noción de función cuadrática en estudiantes de quinto año de educación secundaria.

A continuación presentamos la estructura de la investigación compuesta de cuatro capítulos.

En el primer capítulo presentamos el planteamiento y la justificación del tema, incluye los antecedentes, justificación, la pregunta de investigación y los objetivos que orientan la investigación.

En el segundo capítulo se considera el marco teórico que fundamenta la investigación, en el cual se describen algunos aspectos de la teoría de registros de representación semiótica de Duval (1999). Además, se describe el desarrollo de la ingeniería didáctica como metodología de investigación, allí se detalla el análisis preliminar, el análisis a priori y el análisis a posteriori.

En el tercer capítulo se explica el estudio del objeto matemático función cuadrática desde dos niveles. El primero considera al nivel matemático y el segundo está referido al didáctico. A nivel matemático, el estudio del objeto matemático se basó en el enfoque del libro de Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2000) y en el nivel didáctico, se hizo una revisión y análisis de la enseñanza de la función cuadrática en la educación básica, usando como fuente el libro de tercer grado de educación secundaria que el Ministerio de Educación distribuye a nivel nacional a las instituciones educativas estatales para su uso obligatorio.

En el cuarto capítulo se presenta la experimentación y el análisis. Este comprende la descripción de los sujetos de investigación y de la secuencia de actividades, también se tiene en cuenta los instrumentos, recursos, el análisis de las actividades con sus respectivos análisis a priori, a posteriori de los resultados de los estudiantes.

Finalmente, se presentan las conclusiones de la investigación que responde al objetivo general y específicos de la investigación, así también, las sugerencias consideradas que pueden servir para futuras investigaciones relacionadas con temas afines al presente estudio.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL TEMA

En este capítulo, presentamos los antecedentes, la justificación y los objetivos de nuestra investigación. Para ello, realizamos una revisión de investigaciones relacionadas con nuestro objeto de estudio así como también mostramos las razones por las que nuestra investigación resulta pertinente. Finalmente, presentamos el problema de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos.

1.1 Antecedentes

En el presente trabajo se revisan investigaciones relacionadas con el objeto matemático funciones en general, y, de manera particular, el de función cuadrática, las mismas que utilizan como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Además, se señalan las conexiones entre los estudios revisados y el presente trabajo de investigación.

Entre las investigaciones revisadas, figura la de Ospina (2012), quien realizó su trabajo de investigación con estudiantes de octavo grado de Educación Básica de Colombia. Uno de los objetivos que la investigadora se planteó fue comprender las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones relacionadas con el concepto de función lineal, para ello utilizó como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval. Entre sus principales conclusiones, la autora señala que el concepto de función debe ser abordado, para su enseñanza, de la misma forma como se originó epistemológicamente: desde el lenguaje natural. Posteriormente, recomienda realizar la conversión a otros registros de representación semiótica (tabular, gráfico y algebraico), ya que la enseñanza a partir de la fórmula algebraica genera una mayor dificultad en la comprensión de dicho concepto.Asimismo, la investigadora sostiene que la actividad cognitiva de conversión es el proceso por el cual el estudiante puede reconocer los invariantes de cada una de las representaciones semióticas, lo que permite que se logre el aprendizaje del concepto matemático. Además, en esta investigación sostiene que la noción de *función*, en general, puede ser mostrada en diferentes registros de representación semiótica como en el registro verbal, por medio de una descripción en un lenguaje natural; en el registro tabular, por medio de una tabla de valores; en el registro algebraico, por medio de una expresión algebraica o fórmula; y en el registro gráfico, por medio de una línea recta (continua o no), o también por una línea curva; esto depende de la función que se está trabajando.

Esta investigación proporciona elementos teóricos para nuestra investigación, dado que utiliza como sustento teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica, y profundiza en las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, es decir, se identifican las unidades significativas de la función lineal en los diferentes registros, lo que les permite analizar las conversiones a partir de los tres criterios de congruencia entre registros de representación semiótica: correspondencia semántica entre las unidades significativas propias del registro, univocidad semántica terminal y conservación del orden de organización de las unidades significativas en las representaciones. Además, se establecen las características particulares de los registros de representación semiótica (verbal, tabular, algebraico y gráfico) del concepto de función lineal. Estos referentes nos servirán para la presente investigación ya que queremos enfocarnos en las actividades cognitivas de tratamiento y conversión en los diversos registros de representación semiótica del concepto función cuadrática.

Asimismo, la siguiente investigación se centra en el marco de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica cuya incidencia radica en el aprendizaje de nociones de matemática, específicamente algunas propiedades de funciones reales. Guzmán (1998) realizó un estudio con alumnos de primer año de ingeniería, en la que concluye que las respuestas proporcionadas por los estudiantes están presentadas en un solo registro que prioriza el registro algebraico, es decir, los estudiantes no llegan a establecer coordinaciones entre el registro algebraico y el gráfico y la lengua natural. La autora argumenta que estos resultados se deben al tipo de enseñanza que han recibido los estudiantes, ya que su preparación ha sido insuficiente en este tipo de tareas. Esto se evidencia en las deficiencias al coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro algebraico, gráfico o tabular con la expresión o formulación en lenguaje natural, y también su proceso inverso, es decir, la expresión de un enunciado dado en lenguaje natural a términos de un registro matemático.

Esta investigación proporciona argumentos teóricos y prácticos para nuestro trabajo, ya que, fundamenta que, para la comprensión de las nociones de función en general, se requiere que el estudiante se enfrente a tareas en las que se evidencie la coordinación de los distintos registros de representación semiótica, ya que esta coordinación no surge de forma espontánea en elsujeto. Además, tendremos en cuenta que la investigadora concluye que el registro en lenguaje natural debería tener mayor presencia en las clases de matemática, considerándolo como el punto de partida para la comprensión de los objetos matemáticos más complejos. Otra investigación que nos proporciona aportes es la de Huapaya (2012), quien realizó su investigación con alumnos de quinto grado de educación secundaria. El propósito de este trabajo fue, diseñar una propuesta basada en experiencias de enseñanza, en la que se utilizara el gratificador FUNCIONESWIN32 y la hoja de cálculo EXCEL, que favorecen el aprendizaje del concepto de función cuadrática. Sus resultados mostraron que, utilizando los recursos tecnológicos antes mencionados y realizando diversas prácticas de modelación de situaciones-problema en la enseñanza, se favorece la formación de representaciones y la articulación de registros. Asimismo, señala que los alumnos fueron capaces de asociar el objeto matemático "función cuadrática" a dos o más representaciones, lo que les permitió el análisis y la comprensión de dicho concepto. El trabajo presenta, además, como marco teórico la Teoría de Registro de Representación Semiótica y la metodología *DesignExperiment*, las mismas que nos servirán como referentes.

Asimismo, Díaz, Haye, Montenegro y Córdova (2013) realizaron una investigación en la que se reportó las dificultades en la articulación de registros algebraicos, al trabajar con 109 estudiantes de ingeniería. La teoría que sustentó su investigación fue la Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas (TRRS) de Duval. Los resultados de su investigación revelan que, en lo que se refiere a las funciones lineales y cuadráticas, una considerable proporción de los alumnos no logró establecer una articulación exenta de errores en sus representaciones de los objetos matemáticos estudiados. En sus conclusiones señalan lo siguiente:

En lo que se refiere a la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, con *a* (diferente de cero), *b y c* todos ellos números reales, los estudiantes mostraron dificultades para identificar la ecuación con la gráfica de la parábola, pues no establecieron correctamente las relaciones de los signos del coeficiente cuadrático y del término independiente con la concavidad y la ordenada del vértice de la parábola.

Respecto de las dificultades para articular representaciones en el caso de la función cuadrática, los estudiantes no lograron coordinar y encontrar la relación entre el coeficiente del término lineal con la posición del eje de la parábola, pues no acertaron al establecer el coeficiente del término cuadrático mediante la información visual contenida en la gráfica.

Tanto la investigación de Huapaya y Díaz, Haye, Montenegro y Córdova, aportan a este trabajo de investigación, la idea de la importancia de trabajar la comprensión del concepto matemático "función cuadrática" a través de la articulación de los diferentes registros de representación: verbal, algebraico, tabular y gráfico. Estos trabajos también presentan diversas propuestas de conversión de registros, propuestas a considerar para el desarrollo del presente trabajo de investigación.

Otra investigación que nos parece relevante por el trabajo con el objeto matemático es la de Rivera (2009), quién realizó un estudio sobre la interpretación de la función cuadrática en un ambiente computacional. Esta investigación fue elaborada con estudiantes de II ciclo de Bachillerato y utilizó como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Tuvo como objetivo caracterizar los resultados obtenidos por los estudiantes en el descubrimiento de las propiedades y patrones que se presentan en el estudio de la función cuadrática. Entre sus conclusiones, Rivera afirma que la función cuadrática se puede representar en el registro gráfico, tabular, analítico y verbal. Además, sostiene que los estudiantes presentan mayores dificultades al realizar la conversión del registro tabular al registro algebraico, lo cual tendremos en cuenta para nuestro trabajo. Afirma, además, que esto se debe a la falta de congruencia entre estos dos registros, y exige que los estudiantes relacionen e interpreten los datos de la tabla y hallen las segundas diferencias o apliquen un método de interpolación polinomial para poder encontrar la expresión algebraica de la función cuadrática. Otro aporte de esta investigación para nuestro trabajo es que propone actividades para que los estudiantes establezcan conexiones entre los diversos registros de representación semiótica; el autor sugiere que para lograr este propósito es fundamental que el estudiante comprenda las propiedades básicas en cada uno de los registros de representación semiótica.

1.2 Justificación del tema seleccionado

Los bajos resultados de los estudiantes peruanos, en la última evaluación PISA (2012), muestran las dificultades que presentan para la comprensión de conceptos matemáticos y aplicación para resolver situaciones de la vida cotidiana. Según la Unidad de Medición de la Calidad Educativa – Perú (2012), los resultados de los estudiantes peruanos que culminaron su educación secundaria, en relación al desempeño en la escala de la competencia matemática, tuvieron el puntaje más bajo. Los niveles de desempeño indican que un 47,0% de estudiantes peruanos se encuentran por debajo del nivel 1 (tareas matemáticas directas y sencillas), un 16,1% se hallan en el nivel 2 (resuelven problemas que requieren interpretar y realizar inferencias directas), mientras que solo el 9,3% de estudiantes peruanos se encuentran en el nivel 3, 4, 5 y 6; en los cuales los estudiantes debían resolver problemas que involucren un pensamiento y razonamiento matemático avanzado.

Al analizar estos resultados, podemos concluir, sobre la base del informe, que son pocos los estudiantes preparados para resolver problemas en contextos poco familiares, los que demandan un razonamiento avanzado, o los que implican la comprensión de conceptos matemáticos como función cuadrática.

En el año 2005, el Ministerio de Educación (MED), a través de la Unidad de Medición de la Calidad Educativa – UMC, realizó una Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil a los estudiantes de los colegios públicos sobre matemática y comunicación. Esta prueba fue aplicada la tercer y quinto grado de educación secundaria, y tuvo como objetivo evaluar en qué medida el estudiante "Resuelve situaciones problemáticas susceptibles de ser abordadas matemáticamente, mediante diversas estrategias heurísticas y algoritmos, convencionales o no, considerando diferentes contextos y niveles de dificultad" (Perú, 2005, p. 23). A partir del análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes de tercer y quinto grados de educación secundaria, en relación al empleo del algebra y funciones, se formularon los siguientes resultados:

Los estudiantes presentan dificultades para recodificar situaciones mediante el empleo de expresiones algebraicas como ecuaciones o funciones lineales y cuadráticas. Esto se observa en las dificultades que tienen para pasar de una representación en lengua natural al lenguaje algebraico (o viceversa). En esta perspectiva, los estudiantes presentan dificultades para usar la noción de función pues no han logrado la comprensión de este concepto ni como regla para calcular imágenes y/o pre imágenes, ni como una correspondencia entre dos variables, ni como un medio para modelar situaciones.

Por otro lado, Planchart (2000) sostiene que en el proceso didáctico para la adquisición del concepto de función, los docentes mayormente realizan procesos rutinarios. Como consecuencia de este tipo de trabajo, se restringe el aprendizaje.

A partir de los estudios de la prueba PISA y del MED, podemos argumentar que, en la práctica docente, se prioriza más un trabajo rutinario, a través de la enseñanza de conceptos matemáticos para resolver problemas estándar con baja demanda cognitiva. De este modo, se descuida la realización de actividades de conversión de registros, entre ellos el gráfico, el tabular, el algebraico y el de la lengua natural, lo que impide lograr la comprensión del concepto función cuadrática.

Asimismo, la presente investigación es relevante, porque el concepto de función cuadrática es uno de los conceptos centrales en la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica

Regular y Educación Superior, y su comprensión constituye la base para la comprensión de otros conceptos de límites y calculo diferencial en educación superior. Además, el concepto función cuadrática resulta útil para modelar situaciones reales y resolver problemas en diversos contextos. También es pertinente añadir que, según el Diseño Curricular Nacional (Perú, 2009), la noción de función es fundamental porque permite que los conocimientos matemáticos se vayan construyendo en cada nivel educativo, y también permite conectar y articular el conocimiento matemático con otras áreas curriculares. Asimismo, cabe agregar que, con respecto al objeto matemático "función cuadrática", el DCN enuncia que los estudiantes deben internalizar, comprender y utilizar varias formas de representar patrones, relaciones y funciones de manera real. (p. 317). Por ello, se tomará en cuenta en el presente trabajo dicho contenido. Nuestra investigación es relevante porque el contenido de funciones se desarrolla en los diferentes grados del nivel de educación secundaria del DCN. En la siguiente tabla, se observa cómo se organiza el contenido función cuadrática en 3er grado de educación secundaria para desarrollar las capacidades de razonamiento y demostración, comunicación matemática,y resolución de problemas.

Tabla 1. Organización de capacidades - 3er año.

Grado	Ciclo	Organizador	Contenidos de función cuadrática	Capacidades
3ero	VII	Número, relaciones y funciones	Dominio y rango de funciones cuadráticas Gráfica de funciones cuadráticas Modelación de fenómenos del mundo real con funciones Análisis de funciones completando cuadrados Dominio y rango de funciones cuadráticas Gráfica de funciones cuadráticas	**Razonamiento y demostración** Identifica el dominio y rango de funciones cuadráticas. Elabora modelos de fenómenos del mundo real con funciones. **Comunicación matemática** Representa funciones cuadráticas en tablas, gráficas o mediante expresiones analíticas. Representa funciones cuadráticas. Establece, analiza y comunica relaciones y representaciones matemáticas en la solución de un problema. **Resolución de problemas** Resuelve problemas que requieren el uso de la función cuadrática.

Fuente: Diseño Curricular Nacional. Perú (2009, p. 338)

Por otro lado, en la actualidad se vienen implementando a nivel nacional las Rutas de Aprendizaje (2015), documentos complementarios al DCN, en los que se considera el objeto matemático función cuadráticacomo un instrumento para desarrollar la capacidad de comunicación y representación de ideas matemáticas.En este documento mencionan como indicadores de logro que los estudiante de Tercer Grado de Educación Secundaria deben ser capaces de “elaborar representaciones gráficas de $f(x) = x^2$, $f(x) = ax^2+b$, $f(x) = ax^2+bx+c, \forall a \neq 0$, que describan como la variacion de los valores a, b, c afectan la gráfica de una función $f(x) = x^2$, $f(x) = ax^2+b$, $f(x) = ax^2+bx+c$, $\forall a \neq 0$ y que reconozca las funciones cuadráticas a partir de sus diversas representaciones: verbal, tabla, gráfica y simbólica” (Perú, 2015, p. 45). Además, en el mismo documento afirman que los estudiantes, al resolver situaciones significativas vinculadas a variantes de funciones**,** llegan al descubrimiento de sus propiedades.

Podemos considerar el concepto función cuadrática como uno de los conceptos centrales en el aprendizaje de las matemáticas. En esta perspectiva según Perú (2009), sostienen que este concepto, es un elemento unificador, generalizador y de naturaleza modelizadora, y se asume que la comprensión de este concepto se produce través de sus distintas representaciones.

En la misma línea, la noción de función cuadrática resulta de vital importancia en el currículo de matemática. Las investigaciones de Rivera (2009) y Ospina (2012) afirman que la función cuadrática es aplicada en diferentes disciplinas: en Geometría, para resolver problemas de optimización referidos a la construcción de cercas de forma rectangular que abarcan un máximo de área; en Física son importantes, porque existen diversos movimientos con forma parabólica y se utilizan para resolver problemas de proyectiles y movimientos de caída libre y movimientos con aceleración constante; en Administración y Economía, la representación gráfica de la función cuadrática sirve para representar funciones como ganancias, costos de empresas, y situaciones de oferta y demanda. Además, la noción de función cuadrática sirve como un elemento importante para modelar situaciones de cambio, y es la noción de dependencia entre variables la que involucra la existencia de una relación entre cantidades.

Por otra parte, una característica de la actividad matemática es el uso de diversos sistemas de representación. En ese sentido, los registros de representación semiótica son importantes para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, dado que distinguir y coordinar distintos registros es una actividad necesaria y natural en esta área del conocimiento.

> “La actividad matemática es un tipo de actividad que, a pesar de su universalidad cultural, a pesar de su carácter puramente intelectual, supone una manera de pensar que no es nada espontánea para la gran mayoría de los alumnos y adultos. Necesita modos de funcionamiento cognitivo que requieren la movilización de sistemas

> específicos de representación. Estos sistemas constituyen registros de representación semiótica. Su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es la condición absolutamente necesaria para poder comprender en matemáticas.” (Duval, 1999, p. 24).

En esta teoría cognitiva para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, se toma en cuenta a las representaciones semióticas como un medio para llegar a la comprensión de los conceptos matemáticos. Es en ese sentido, que en este trabajo de investigación nos proponemos diseñar, aplicar y analizar una secuencia de actividades basadas en los tratamientos y conversiones de los diversos registros de representaciónsemiótica para la comprensión del concepto “función cuadrática”. En esta idea nos acompaña Duval, quien sostiene que esta actividad no es una espontánea, sino que requiere ser mediada por el profesor, el que, de manera intencional, debe provocar la realización de estas actividades cognitivas.

En la misma línea, diversos autores como Ospina (2012), Guzmán (1998) y Rivera (2009) ratifican la importancia de los registros de representación semiótica en el aprendizaje de la matemática, específicamente con el objeto matemático de funciones. Sostienen que el estudiante, al transitar por los distintos registros de representación semiótica (verbal, tabular, grafico, algebraico), realiza las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, lo que favorece la comprensión del concepto de funciones.

Por otra parte, afirmamos que este trabajo es relevante, porque en el Perú existen pocas investigaciones en didáctica de la matemática con el objeto de estudio “función cuadrática”, y porque en nuestra experiencia docente, en la Educación Básica Regular (EBR), observamos que los estudiantes del tercer grado de educación secundaria muestran dificultades para resolver problemas matemáticos de función cuadrática que involucran la conversión de diversos registros de representación semiótica.

1.3 Problema de Investigación

Ante la problemática identificada y las investigaciones revisadas, surge nuestro interés por analizaruna secuencia didáctica basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica. A continuación nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera estudiantes de quinto grado de educación secundaria comprenden la noción de función cuadrática cuando transitan los distintos registros de presentación semiótica?

1.4 Objetivos de la investigación

Objetivo General

Analizar cómo el tránsito de distintos registros de representación semiótica favorece la comprensión de la noción de función cuadrática en estudiantes de quinto año de secundaria.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr los siguientes objetivos específicos:

- Identificar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que permiten movilizar los elementos y las propiedades de la función cuadrática en sus diferentes registros de representación semiótica (lengua natural, tabular, algebraico y gráfico)
- Describir, interpretar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes al transitar los registros lengua natural, tabular, algebraico y gráfico.

En el siguiente capítulo presentamos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, que es el marco teórico elegido para la presente investigación

CAPÍTULO II: ASPECTOS DEL MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo, presentamos algunos aspectos de la Teoría Registros de Representación Semiótica, que utilizaremos como marco teórico y la metodología en la cual se sustenta nuestra investigación.

2.1 Aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica

La teoría de Registros de Representación semiótica fue desarrolla a partir de los años 70 por Raymond Duval, profesor de la Universidad del Litoral y director de la Academia de Lila, Francia. Es una teoría que se basa en la utilización de los registros de representación semiótica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta perspectiva, la teoría propone que las representaciones semióticas son indispensables para lograr el aprendizaje de los objetos matemáticos. Duval (2006) describe esta concepción afirmando lo siguiente: “La comprensión integral de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva” (p.166).

La coordinación de varios registros de representación semiótica se presenta como un aspecto crucial para el aprendizaje conceptual de los objetos matemáticos. Por ello, Duval (2006) afirma que es esencial no confundir los objetos matemáticos con su representación, es decir, el objeto tiene que ser reconocido en cada una de sus diversas representaciones. Esta confusión implica una comprensión del concepto solo a partir del registro en el cual se ha representado, lo cual no permite la transferencia del objeto a otros tipos de representación.

Representación mental y representación semiótica

Según Duval (2004), en matemática, podemos acceder a los objetos matemáticos a través de sus diferentes formas de representación: de hecho, la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación. Este autor también afirma que para lograr el aprendizaje de la matemática se requiere trabajar actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Estas actividades requieren de la utilización de varios sistemas semióticos de representación y de expresión.

El autor define dos tipos de representaciones:

Representaciones mentales

Son representaciones conscientes referidas a un conjunto de imágenes y de concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado. Además, son de carácter estrictamente interno, es decir, no pueden ser observadas públicamente. Para desarrollar este tipo de representaciones, se requiere de la adquisición e interiorización de diferentes sistemas de representaciones semióticas y, en particular, del lenguaje natural.

Representaciones semióticas

Son representaciones conscientes que se expresan a través de un sistema de signos (iconos, símbolos, índices) engranados, y que se rigen de acuerdo con reglas explicitas o implícitas. Estas reglas se asocian y combinan, de este modo se efectúan en su interior transformaciones de expresión o de representación. Además, son externas, pues estas representaciones son observables y pueden ser expuestas públicamente.

Por otro lado, cumplen las funciones cognitivas de comunicación, de tratamiento, y de objetivación, es decir, las representaciones semióticas son necesarias para la actividad matemática misma, para el tratamiento de la información, para la toma de conciencia y para la comprensión. Además, se caracterizan por movilizar tres actividades cognitivas: formación, tratamiento y conversión.

Asimismo, las representaciones mentales y las representaciones semióticas están relacionadas, y sus funciones permiten la actividad cognitiva del sujeto. Las representaciones semióticas son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos, son el medio del que dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales.

Duval (2004) sostiene que las representaciones semióticas son indispensables para el desarrollo de la actividad matemática, pues nos permiten efectuar tratamientos y acceder a los objetos matemáticos en particular, porque los objetos no son directamente accesibles por los sentidos. Además estas son importantes para el desarrollo de las representaciones mentales, para el funcionamiento cognitivo en sus actividades de aprehensión conceptual, de razonamiento, de comprensión de enunciados; así como también para la comunicación y producción del conocimiento matemático. El mismo autor afirma que el lenguaje natural, las representaciones algebraicas y los gráficos cartesianos son sistemas semióticos constituidos por sistemas particulares de signos.

Registros de representación semiótica

Según Duval (1999), define a los registros como sistemas particulares de representación semiótica y deben permitir tres actividades cognitivas: formación de una representación identificable, tratamiento y conversión.En este sentido, el mismo investigador distingue cuatro tipos de registros de representación semiótica en matemática: los discursivos usan la lengua natural y permiten describir, inferir, razonar, enunciar proposiciones, transformar expresiones e, incluso, calcular; mientras que los no discursivos permiten mostrar formas, configuraciones y organizaciones que permiten visualizar. Además, tenemos los registros multifuncionales, cuyos tratamientos no son algoritmos, y se utilizan en diferentes dominios culturales y sociales. Por último, los registros monofuncionales son sistemas semióticos que se especializan en tratamientos de tipo algorítmico, tienen un carácter técnico y formal, y tienen una gran potencia de tratamientos. A continuación presentamos cada uno de los registros de representación semiótica de la función cuadrática.

Registros de representación de la función cuadrática

El propósito de esta investigación es analizar la efectividad de una secuencia didáctica, para que los estudiantes comprendan el concepto función cuadrática, transitando distintos registros de representación semiótica, es por eso, que es oportuno presentar los registros de representación semiótica, los cuales ponen en funcionamiento diversos procesos cognitivos que permiten la comprensión de los conceptos matemáticos.

A partir de la investigación de Ospina (2012), presentamos los registros de representación semiótica que pueden representar la función cuadrática: registro verbal, registro tabular, registro algebraico y registro gráfico.

Registro de representación en lengua natural

En este registro, la función cuadrática acepta como representación una descripción en lenguaje natural. Este registro nos da la oportunidad de realizar la conversión y representar el objeto matemático función cuadrática en otro registro como el registro algebraico. Asimismo, esta representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas, y es básica para interpretar situaciones contextualizadas.

Registro de representación tabular

Una función cuadrática se representa como una tabla de valores en la que se pone en juego la relación de correspondencia, en la que los valores de la imagen se encuentran a partir de la asignación de valores arbitrarios al dominio. Este registro en forma de tabla se relaciona con el pensamiento numérico.

Registro de representación algebraico

En este registro, la función cuadrática es representada por una expresión algebraica o fórmula, que nos permite calcular la imagen de *f* para todo elemento del dominio de la función. Este registro moviliza la capacidad simbólica y se relaciona con el álgebra.

Registro gráfico

En este registro, la función cuadrática se puede expresar mediante una parábola. Se pone en juego la noción de gráfico de una función. Este registro exige lecturas de representaciones gráficas de dicha función que comprende una interpretación global, pues se trata de discriminar variables visuales (desplazamiento vertical de la parábola, la parábola alcanza su máximo o mínimo valor) y percibir las variaciones correspondientes en los símbolos de la escritura algebraica(signo del término cuadrático y el valor del término independiente).

A continuación, mostramos un ejemplo de función cuadrática expresado en los diferentes registros de representación semiótica.

Registro de representación en lengua natural

Pedro tiene 24 metros de malla de alambre y quiere construir un corral de forma rectangular para sus pollos. ¿Cuál es la mayor área que puede cercar con los 24 m de malla que tiene?

Registro de representación Algebraico

La representación algebraica de la función cuadrática es**:**$f(x) = -x^2+12x$.Donde x es la medida del lado del corral y $f(x)$ es el área del corral correspondiente a un lado de medida x.

Registro de la representación tabular de la función cuadrática

x	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	20	32	36	32	20	0

Registro de representación gráfica de la función cuadrática

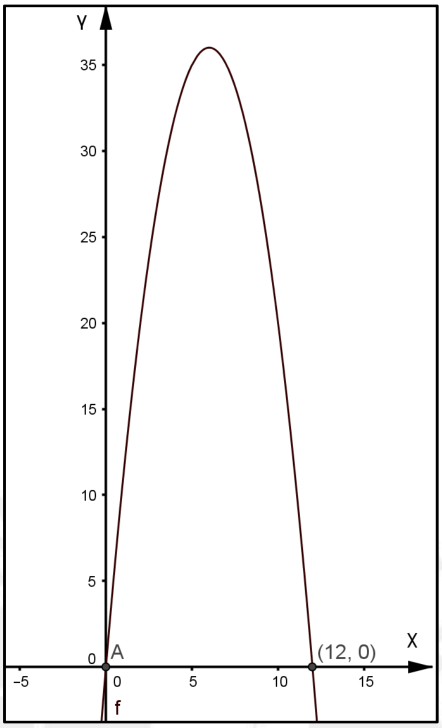


Figura 1. Representación gráfica de la función cuadrática

Representaciones semióticas como un medio de enseñanza-aprendizaje de objetos matemáticos

La función que cumplen los símbolos y signos en el desarrollo del aprendizaje en matemática es determinante, es por ello que la adquisición conceptual de un objeto matemático pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. Es en este sentido que Duval (2004) afirma que “la comprensión conceptual surge de la coordinación de los diversos sistemas semióticos usados, y darse cuenta [SIC] de la forma específica de representar para cada sistema semiótico es condición cognitiva para la comprensión” (pp. 166 y 167).

Desde esta perspectiva es muy importante abordar la enseñanza y la comprensión delos objetos matemáticos a partir de sus diversas representaciones semióticas, puesto que esto le permite al estudiante apropiarse de los elementos y propiedades de cada una de estas representaciones.

En la misma linea, Duval (2012), sostiene que para lograr la comprensión conceptual de los objetos matemáticos, hay que tener en cuenta dos aspectos.

- A nivel matemático se tiene que justificar (procedimiento y resultado)

- A nivel cognitivo se debe reconocer un mismo objeto en contenidos de representaciones diferentes. Este aspecto presenta tres exigencias:
  a. No confundir los objetos matemáticos y sus múltiples representaciones
  b. Poder convertir una representación para explorar y efectuar tratamientos en otro registro.
  c. Poder transferir en todas las situaciones

Por otra parte,D Amore (2005) sostiene que:

> La construcción del conocimiento en matemática significa precisamente la unión de estas tres “acciones” sobre los conceptos, es decir la expresión misma de la capacidad de representar los conceptos, de tratar las representaciones obtenidas al interior de un registro establecido y de convertir las representaciones de un registro a otro (p. 33).

Asimismo, Font (2001) considera que “las diferentes representaciones ostensivas de los objetos matemáticos y las traducciones entre ellas son un elemento fundamental para su comprensión y, por tanto para sus enseñanza y aprendizaje” (p. 184). Es así que el cambio de representación de un objeto matemático es una tarea crucial en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Además, el autor considera que la naturaleza de las representaciones matemáticas influye en el tipo de comprensión generada en el alumno, y recíprocamente, el tipo de comprensión determina el tipo de representación que puede utilizar.

En la misma línea, Duval (2004) sostiene que no existe noésis**(**adquisición conceptual de unobjeto**)** sin semiosís (representación por medio de signos), es decir, no hay aprendizaje de un concepto matemático sin pasar por el tratamiento y conversión de diferentes registros de representación. Propone que, en el aprendizaje, se debe considerar la relación entre noésis y semiosis, y se debe proponer a los estudiantes tareas específicas de conversión de registros.

Asimismo, García (2005) afirma que el aprendizaje centrado en la conversión de las representaciones y, por ende, en la coordinación de diferentes tipos de registros semióticos produce una comprensión efectiva e integradora, que posibilita la transferencia de los conocimientos aprendidos. Desde esta perspectiva, en la presente investigación, pretendemos que los alumnos comprendan el objeto matemático función cuadrática, al proponerles una secuencia de actividades en la que los estudiantes tienen que coordinar dos a más registros de representación semiótica.

En términos de Duval (2004), la adquisición de los conceptos matemáticos es una comprensión conceptual, y se puede lograr a través de la coordinación de diversos registros de representaciones semióticas.

Asimismo, el objeto matemático función admite gran variedad de registros de representación. Font (2001) propone cuatro formas de representación de las funciones: verbal, tabla, gráfica y expresión analítica, con sus habilidades requeridas por los estudiantes para transitar entre dos o más de estas representaciones tal como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. Diferentes formas de representar funciones.

Hacia / desde	Situación, descripción verbal	Tabla	Gráfica	Expresión analítica
Situación, descripción verbal	Distintas descripciones	Estimación/ cálculo de la tabla	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura de las relaciones numéricas	Modificación de la tabla	Trazado de la gráfica	Ajuste numérico
Gráfica	Interpretación de la gráfica	Lectura de la gráficas	Variación de escalas, unidades, origen, etc	Ajuste gráfico
Expresión analítica	Interpretación de la fórmula (interpretación de parámetros)	Cálculo de la tabla dando valores	Representación gráfica	Transformaciones de la fórmula

Fuente: Font (2001. p.182)

En la tabla 2, se observan las posibles traducciones de una forma de representación a otra, así como la traducción dentro de la misma forma de representación, que son las de la diagonal. También se muestran la multiplicidad de relaciones que se pueden establecer entre las diferentes formas de representar una función.

Las tres actividades cognitivas de los registros de representación semiótica

Duval (2006) sostiene que las representaciones semióticas tienen la propiedad fundamental de transformarse en otras representaciones que conserven, ya sea todo el contenido de la representación inicial o solo una parte de ese contenido. Estas trasformaciones no corresponden a la misma actividad cognitiva, dependen de si la transformación se realiza al interior del mismo registro, o que consista en el cambio de registro. A su vez, sostiene que un registro de representación semiótica debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales de la representación: formación de una representación identificable, tratamiento y conversión.

Formación de una representación identificable

La formación identificable, sea esta una frase, un dibujo, una fórmula, o un esquema implica una selección de un conjunto de caracteres (rasgos y datos) de un contenido percibido que se pueden representar en función de las posibilidades propias del registro hecho: su propósito fundamental evocar una representación real y expresar una representación mental.

Tratamiento:

Son transformaciones que producen otra representación en el mismo registro, respecto a una cuestión, a un problema, o a una necesidad. En esta actividad, existe una secuencia de varias transformaciones. El tratamiento es una transformación estrictamente interna a un registro, es decir, no se cambia el sistema de signos en la cual está expresada la representación, y utiliza únicamente las posibilidades de funcionamiento propios del sistema, es así que cada registro ofrece posibilidades específicas de tratamiento.

Asimismo, la actividad cognitiva de tratamiento se produce cuando se responde a una pregunta específica o se satisface una necesidad. Por ello, Duval (2004) considera tratamientos a la realización de cálculos de manera interna en la representación algebraica. Por ejemplo, en el registro de representación gráfica un tratamiento sería resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones. Además, en el registro de representación en lengua natural, considera como tratamiento a la paráfrasis o reformulaciones en lengua natural a través de la cual se transforma una expresión lingüística en otra, ya sea para reemplazarla o explicarla.

El mismo autor presenta como tratamiento, en el registro de representación gráfica, la vía del punto, esto es, cuando se identifican e interpretan puntos considerados aisladamente o cuando se identifican puntos en el espacio a partir de una pareja de valores ordenados; también al proceso inverso de identificar una pareja de valores ordenados a partir de la referencia de un punto dentro del espacio gráfico, teniendo en cuenta los ejes gráficos y sus escalas. Otro tratamiento en este registro de representación gráfica es la interpretación global, en la cual el estudiante discrimina las características de dos gráficas de la misma forma o dedistinta forma. Para esto, el estudiante tiene que identificar la relación entre dos variables definidas sobre un conjunto de valores.

Conversión:

Es una transformación en la que se cambia el sistema semiótico, es decir, es la transformación de la representación de un objeto matemático, dado en un registro, en una representación de este mismo objeto, en otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial, es una transformación de carácter externo. La conversión sería el resultado de la comprensión conceptual del objeto matemático trabajado, es decir, esta actividad cognitiva es la más importante para desarrollar la comprensión de las nociones matemáticas.

Según Duval (1999), la característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto, pero sin conservar las explicaciones de las mismas propiedades de ese objeto. En ese sentido, la representación en el registro de llegada no tendrá el mismo contenido que su representación en el registro de partida.Lo que sucede es que para convertir una representación es necesario seleccionar desde su contenido solo aquellos elementos que interesen en la representación final y además reorganizarlos convenientemente. Por ejemplo, al representar el enunciado de un problema a través de una ecuación,se realiza la conversión del registro de representación en lengua natural al algebraico, pero, algunosaspectos del discurso de la lengua natural se perderán.

Por otra parte, la actividad cognitiva de conversión se puede realizar en ambos sentidos. Por ejemplo, cuando se transita del registro de representación algebraico al gráfico y su proceso inverso del registro de representación gráfico al algebraico. Cabe afirmar que estas conversiones son dos operaciones cognitivas diferentes y una puede ser de mayor demanda cognitiva que la otra.

En la misma línea, Duval (2004), presenta un ejemplo (ver figura 2),en el cual establece las actividades cognitivas de tratamiento y conversión presentes en cualquier actividad matemática.

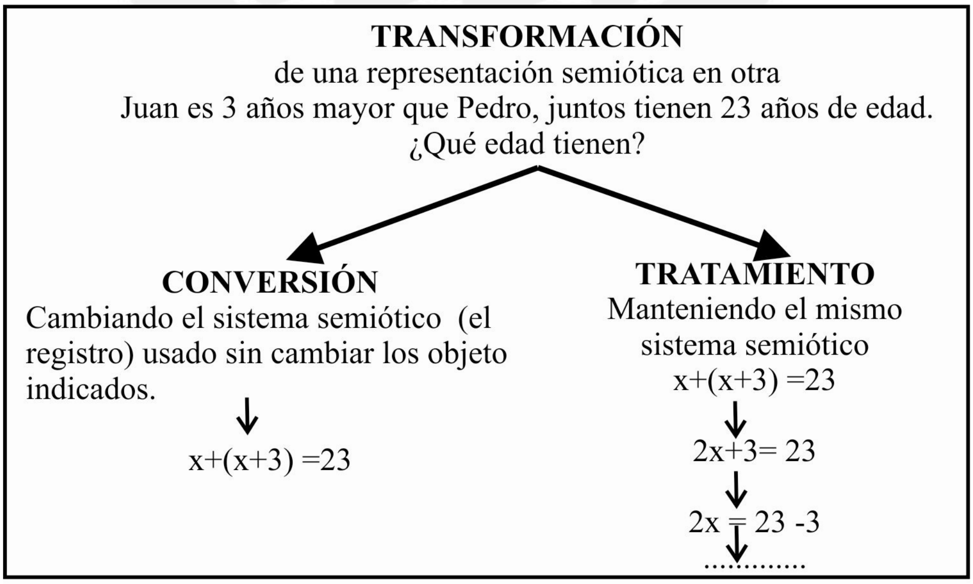


Figura 2. Los proceso cognitivos fundamentales del pensamiento
Fuente; Duval (2004, p. 146)

El tratamiento y la conversión de representaciones en la resolución de problemas de modelización

Duval (1999), sostiene que la principal tarea para resolver problemas de modelización es la comprensión de los enunciados, y esto requiere necesariamente una tarea de conversión. En este sentido, para efectuar esta conversión es necesario discriminar en el enunciado la designación de los objetos pertinentes, es decir, hay que realizar una redescripción del enunciado a través del parafraseo para discriminar las unidades significantes y sustituirla por letras o variables. En la misma línea, García (2005), afirma quela actividad cognitiva de conversión es importante en la resolución de problemas matemáticos, pues se relaciona con la construcción de un modelo matemático sobre la información presentada en el problema y con las posibilidades que presente ese modelo para realizar transformaciones a otra representación semiótica.

Los estudiantes que se enfrentan a un problema contextualizado necesitan transformar el enunciado que se encuentre en el lenguaje natural en un modelo matemático, luego, deben realizar las conversiones a otros registros de representación semiótica (gráfica, algebraica) a través de diversos tratamientos en cada uno de los registros. En todo este proceso, los estudiantes debaten diversos puntos de vista referentes a la situación, al mismo tiempo que identifican un sentido funcional a las nociones matemáticas.

A continuación, presentamos el marco metodológico de nuestra investigación, la que se sustenta en el enfoque cualitativo. Se presenta como metodología de investigación la ingeniería didáctica.

2.2 Aspectos del marco metodológico

La metodología de nuestra investigación está sustentada en un enfoque cualitativo, según Hernández, Fernández y Baptista (2010). Estos investigadores sostienen que la meta de la investigación cualitativa es “describir, comprender e interpretar los fenómenos a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes”(p. 11). Asimismo, afirman que este tipo de investigación evita la cuantificación de los datos recolectados, centrándose más en el proceso que en el resultado, y se caracteriza por ser exploratoria, descriptiva, inductiva y holística. Desde esta perspectiva, en educación matemática, la investigación cualitativa tiene como propósito fundamental describir y analizar procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos, haciendo uso de herramientas teóricas y matemáticas. Por ello, consideramos importante utilizar en nuestra investigación el enfoque metodológico cualitativo de la ingeniería didáctica. A continuación, explicamos en qué consiste esta metodología.

Ingeniería didáctica como metodología de investigación

Según Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995), la ingeniería didáctica como metodología de investigación de corte cualitativo, se caracteriza por su esquema experimental, basado en las realizaciones didácticas en clase y, por ese motivo, este tipo de metodología nos permite observar y analizar las secuencias de enseñanza. Se le llamó ingeniería didáctica, porque se compara al trabajo didáctico del profesor con el trabajo de un ingeniero. Es así que los investigadores mencionan que, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico.

La ingeniería didáctica se caracteriza y se ubica en los estudios de caso, y fundamenta su validez de manera interna a través de la confrontación entre el análisis a priori (lo que se planificó) y posteriori (lo que realmente sucedió). En esta perspectiva, Artigue et al (1995, p. 37), citando a Douady (1987), afirma que "la ingeniería didáctica, es un instrumento privilegiado para tener en cuentala complejidad de la clase", ya que facilita el estudio de los procesos de aprendizaje de un concepto matemático y, en particular, la elaboración de una génesis artificial de un saber concreto; es decir, la ingeniería didáctica permite la reconstrucción de un determinado saber matemático, basado en la elección de condiciones que permitan desarrollar los conocimientos de los estudiantes.

Fases de la ingeniería didáctica

Artigue et al (1995) señalan que la ingeniería didáctica consta de cuatro fases: La primera fase considera el análisis preliminar, en el que se consideran los aspectos cognitivos, epistemológicos y didácticos del objeto matemático; la segunda fase trata sobre el análisis a priori, en la que se identifican y se proponen las variables macro, micro didáctica, la secuencia de actividades, y las respuestas esperadas de los estudiantes; en la tercera, se realiza la experimentación, que es la puesta en marcha de las secuencias didácticas diseñadas; finalmente, en la cuarta fase, se realiza el contraste entre los resultados esperados y lo que realmente sucedió en clase.

Fase 1: Análisis preliminar

Según Artigue et al (1995),el análisis preliminar se divide en las siguientes dimensiones: dimensión epistemológica (en esta investigación solo se tratarán algunos aspectos), dimensión didáctica y dimensión cognitiva. Con relación a la primera, se señala que se refiere al análisis de los contenidos contemplados en la enseñanza. En nuestra investigación, se trabaja este análisis, mostrando el objeto matemático función cuadrática desde una perspectiva de la matemática formal, tomando como referencia el libro de Elon Lima, Paulo Pinto, Eduardo Wagner y Augusto Morgado, en el que profundizan y demuestran rigurosamente los elementos y propiedades de la función cuadrática a partir de la representación algebraica y gráfica.

Con relación a la segunda, Artigue et al (1995) señala que está relacionada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza; es decir, hay que identificar y analizar el nivel del conocimiento previo de los estudiantes involucrados en la investigación. En este sentido, en nuestro trabajo mostramos las investigaciones de Ospina (2012), Guzmán (1998), Rivera (2009) y Diaz, Haye, Montenegro y Córdova (2013); puesto que, estas investigaciones identifican los conocimientos previos y las dificultades que presentan los estudiantes sobre el objeto matemático función cuadrática. Estas investigaciones presentan resultados similares a las características de los sujetos participantes de nuestro estudio.

Con relación a la tercera, Artigue et al (1995) sostienen que se le asocia con las características del sistema de enseñanza, ya que, en esta dimensión, se identifica y caracteriza cómo se está enseñando el objeto matemático a los estudiantes, ello implica en este apartado hay que analizar cómo se está trabajando a nivel didáctico el objeto matemático en los libros de texto proporcionados a los estudiantes en la Educación Básica Regular.

En nuestra investigación, analizamos a nivel didáctico el libro de texto de *Matemáticas de Tercer Grado de Educación Secundaria*, Editorial Norma. En el texto, examinamos cómo se ha trabajado a nivel didáctico al objeto matemático función cuadrática en términos de la teoría de registros de representación semiótica.

Fase 2: Concepción y análisis a priori

Artigue et al (1995) afirman que, en esta fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. En esta perspectiva, la investigadora, para ayudar al análisis de la ingeniería, propone dos tipos de variables: En primer lugar, tenemos las variables macro didácticas, las cuales cumplen con el propósito de la organización global de la ingeniería, orientan y organizan en forma general la investigación. En nuestra investigación, hemos considerado la siguientes variables macro didácticas:

- Se ha considerado en la elaboración de la secuencia de actividades el nivel de conocimiento previo de los estudiantes.

Se ha considerado en la elaboración de la secuencia de actividades el registro de representación en lengua natural como un registro importante para la coordinación de los otros registros, y también porque permite el aprendizaje de las nociones de la función cuadrática.

Los conocimientos previos o prerrequisitos se han trabajado con el profesor del grado, en este caso, con el profesor del área, quien les enseñó los elementos, propiedades y problemas contextualizados referidos a la función cuadrática.

En segundo lugar, tenemos las variables micro didácticas o locales. Artigue et al (1995) señalan que, nos permiten la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o una fase. En esta perspectiva, en nuestra tesis, estas variables las tuvimos en cuenta para diseñar la secuencia de actividades, puesto que, en función a estas variables, se plantearon actividades que permitieron la articulación de los registros de representación semiótica, como los registros de representación en lengua natural, algebraico y gráfico del objeto matemático función cuadrática. En este sentido, en la secuencia de actividades, consideramos las siguientes variables micro didácticas: signo del coeficiente del término cuadrático y, el valor del término independiente, cuyasvariaciones se producen a partir de la modificación de los datos de la representación en lengua natural del objeto matemático función cuadrática. En esta perspectiva, en la secuencia de actividades, hemos realizado las variaciones del signo del coeficiente del término cuadrático de negativo a positivo. También se modificó el valor del término independiente de 300 a 160. En el siguiente cuadro se muestran las variables micro didácticas que utilizamos en nuestra investigación.

Variable micro didácticas	Representación algebraica de la función cuadrática indicando la variable didáctica.	Casos que se presentan en la representación gráfico
Signo del coeficiente término cuadrático	$f(x)=ax^2+bx+c$	Caso 01: Cuando a >0, la parábola se abre hacia arriba Caso 02: cuando a<0, la parábola se abre hacia abajo.

Valor del término independiente	$f(x)=ax^2+bx+c$	Caso 01: cuando c>0, la parábola se desplaza □c□ unidades desde el origen hacia arriba. Caso 02: c<0, la parábola se desplaza □c□ unidades desde el origen hacia abajo.

Según la investigadora antes mencionada, en esta fase también se lleva a cabo la predicción de las repuestas de los estudiantes. En este sentido, vamos a presentar las respuestas esperadas de la secuencia de actividades en el capítulo de análisis que detallaremos más adelante.

Fase 03: Experimentación

Según Artigue et al (1995), sostienen que en esta fase se pone en marcha la ingeniería didáctica con los estudiantes, es decir, el investigador, profesor u observador entra en contacto con los estudiantes involucrados en la investigación. Esta fase consiste en la aplicación de los instrumentos elaborados por el investigador; y se llevan a cabo el registro y recojo de la información respecto del desempeño de los estudiantes en las actividades propuestas.

En nuestra investigación, en esta fase, en principio, se explica cómo se va a llevar a cabo la investigación con los estudiantes seleccionados. Luego, se aplican los instrumentos elaborados y se realiza el registro de las observaciones de las dos sesiones realizadas.

Fase 04: Análisis a posteriori y validación

La misma investigadora, señala que en esta fase se realiza el análisis del conjunto de datos recogidos en la fase de experimentación, así como de las producciones de los alumnos en el aula. La fase finaliza con la validación interna, que consiste en contrastar lo que se planifico y lo que realmente sucedió en clase.

En relación a nuestro estudio, analizamos la información recolectada de las dos sesiones realizadas con los estudiantes y los contrastamos con el análisis a priori para validar la investigación. Además, precisamos qué aspectos se lograron ycuáles no.

Por otra parte,afín de recolectar la información para nuestra investigación, utilizamos: fichas de observación, y los archivos de las actividades hechas por cada alumno. En el siguiente capítulo mostraremos el estudio del objeto matemático función cuadrática a el nivel formal y didáctico.

CAPÍTULO III: ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO

En el presente capítulo se realizará un estudio de la función cuadrática desde dos niveles: el matemático formal, en el cual se define función cuadrática, la forma canónica de la función cuadrática (deduciendo sus propiedades y finalizando en el desplazamiento horizontal y vertical de las parábolas); y desde el nivel didáctico, en el que se mostrará la forma cómo se propone la enseñanza de la función cuadrática en la Educación Básica a partir del estudio del libro oficial del Ministerio de Educación de tercer grado de educación secundaria.

3.1 Estudio de la función cuadrática

Para el desarrollo del contenido del objeto de estudio de nuestra investigación, utilizaremos el enfoque del libro de Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2000). En este libro los autores definen la función como:

$$f\colon \mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$\forall\, a, b, c \in \mathrm{IR} \,/\, \mathrm{a} \neq 0$$

Esta definición corresponde a la representación en un registro algebraico, donde a se le denomina término cuadrático, bes el término lineal, y a "c" término independiente, y cuyo grafico corresponde a una parábola.

Por otra parte, tambiénestablecen conexiones entre los conceptos de función cuadrática y trinomio de segundo grado presentados en un registro algebraico, donde, sostienen que un trinomio de segundo grado es una expresión formal del tipo$ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$, con$a, b, c \in \mathrm{IR}$, siendo $\mathrm{a} \neq 0$. La palabra formal significa que la letra *x* es apenas un símbolo, siendo x^2 otro modo de escribir *xx*. El trinomio es lo mismo que la terna ordenada de números reales (a,b,c).

A cada trinomio $\mathrm{a}x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}$ le corresponde la función cuadrática definida por $f(x)= \mathrm{a}x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}$. Esta observación significa que esa correspondencia trinomio *y* función cuadrática que es biunívoca y por definición de función cuadrática, tal correspondencia es suryectiva.

Los autores también, muestran cómo expresar la función cuadrática en su forma canónica y las propiedades que se deducen de esta expresión: puntos máximos, mínimos y el vértice de la parábola.

La forma canónica del trinomio

Realizando tratamientos en el registro algebraico, consideramos el siguiente trinomio:

$$\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = \mathrm{a}\left[x^2 + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}x + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}\right]$$

Los dos primero sumandos dentro del corchete son los mismos dentro del desenvolvimiento del cuadrado $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Completando el cuadrado, podemos escribir:

$$\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = \mathrm{a}\left[x^2 + 2.\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}\right],$$

$$\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = \mathrm{a}\left[\left(x + \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Esta manera de escribir el trinomio de segundo grado (llamada la forma canónica) tiene algunas propiedades, en primer lugar, ella conduce inmediatamente a la fórmula que da las raíces de la ecuación $\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0$. En efecto, siendo $\mathrm{a} \neq 0$, tenemos las siguientes equivalencias.

$$\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0 \text{si y solo si} \left(x + \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\text{si y solo si} \left(x + \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right)^2 + \frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad (2)$$

$$\text{si y solo si } \ x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (3)$$

$$\text{si y solo si } \ x = \pm\frac{-b\pm\ \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (4)$$

El paso de la línea (2) para la línea (3) sólo tiene sentido cuando el discrimínate $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$ es ≥ 0. En el caso que tengamos $\Delta < 0$, las equivalencias entre las líneas (1) y (2) significa que la ecuación dada no posee solución real, pues el cuadrado de x + (b/2a) no puede ser negativo.

El método de completar cuadrados tiene aplicaciones en otras cuestiones matemáticas. Independiente de esto es instructivo hacer que los alumnos practiquen su uso en ejemplos concretos, para resolver la ecuación de segundo grado sin aplicar la fórmula (4).

De la fórmula (4) resulta inmediatamente que, si el discriminante $b^2 - 4ac$ es positivo la ecuación $\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0$.

Tiene dos raíces reales distintas.

$$\alpha = \left(-b - \sqrt{\Delta}\right)/2a$$

$$\beta = \left(-b + \sqrt{\Delta}\right)/2a$$

Con $\alpha < \beta$, cuya suma s = -b/a y cuyo producto es

$$\text{P}= \frac{(b^2-\Delta)}{4a^2} = 4ac/4a^2 = c/a.$$

En particular, la media aritmética de las raíces es –b/2a, o sea, es decir, las raíces $\alpha\ y\ \beta$ son equidistantes del punto –b/2a.Cuando $\Delta = 0$, la ecuación dada posee una única raíz, llamada raíz doble, igual a -b/2a.

Supongamos que $a > 0$, es la forma canónica:

$$f(\text{x}) = \text{a}x^2 + \text{b}x + \text{c} = \text{a}\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

Exhibe, en el interior de los corchetes, una suma de dos sumandos. El primero depende de *x* y es siempre mayor igual a 0. El segundo es constante. El menor valor de la suma se alcanza cuando

$$(x + \frac{\text{b}}{2\text{a}})^2$$

es igual a cero, o sea, cuando *x* = -b/2a. En este punto *f*(*x*) también asume su valor mínimo. Por tanto, cuando $a > 0$, el menor valor asumido por

$$f(x) = \text{a}x^2 + \text{b}x + \text{c}$$

$$\text{es} f(\text{-b/2a}) = \text{c} - (\text{b}^2/4\text{a})$$

Si $a < 0$, el valor de *f*(-b/2a) es el mayor de los números *f*(*x*), para cualquier *x*∈ IR.

Cuando $a > 0$, *f*(*x*) = $\text{a}x^2 + \text{b}x + \text{c}$ no asume valor máximo, es una función ilimitada superiormente. Análogamente cuando $a < 0$, *f*(*x*) no asume valor mínimo: es ilimitado inferiormente.

En Lima et al (2000), menciona que la forma canónica también nos ayuda a responder la siguiente pregunta.

Dada una función cuadrática *f*(*x*) = $\text{a}x^2 + \text{b}x + \text{c}$, ¿para que valores $x \neq x'$ se tiene que *f*(*x*) = ***f***(x')?

Observando la forma canónica, vemos que *f*(*x*) = *f*(x') si, y solamente si,

$$(x + \frac{\text{b}}{2\text{a}})^2 = (x + \frac{\text{b}}{2\text{a}})^2$$

Como estamos suponiendo *x*≠ x', esto significa que

$$x' + \frac{b}{2a} = -\left(x + \frac{b}{2a}\right),$$

$$\frac{x + x'}{2} = \frac{-b}{2a}$$

Por lo tanto, las funciones cuadrática *f*(*x*) = $ax^2 + bx + c$ asume el mismo valor *f(x)* = *f*(x') para x $\neq x'$ si, y solo si, los puntos x y x' son equidistantes de –b/2a.

Asimismo, en Lima et al (2000), se representa en el registro gráfico el desplazamiento horizontal, vertical, alargamiento, encogimiento de las parábolas a partir de la comprobación de su congruencia. Estos autores empiezan mostrando observaciones en gráficos de la función valor absoluto y culminan ejemplificando con la función cuadrática. Realizan esto como una introducción, mediante un ejemplo de traslación horizontal y vertical de la función valor absoluto donde se transforma la gráfica de una función a una congruente.

Aplicando la traslación horizontal (*x*,*y*) ↔ (*x* +m, *y*) al gráfico de la función *f*: R→R, se obtiene el gráfico de la función *g*: IR → IR , tal que *g*(*x*) = *f*(*x*-m) para todo *x*∈ IR.

En efecto, un punto cualquiera (*x*, *f*(*x*)) del gráfico de *f* es transformado por esa traslación en el punto (*x*+m, *f*(*x*)). Escribiendo $\bar{x}$= *x*+m, donde *x* = $\bar{x}$ – m, vemos que la traslación considerada transforma cada punto (*x*, *f*(*x*)) del gráfico de *f* en el punto (*x*, *f*(*x*-m)) = ($\bar{x}$, g($\bar{x}$)) del gráfico *g*.

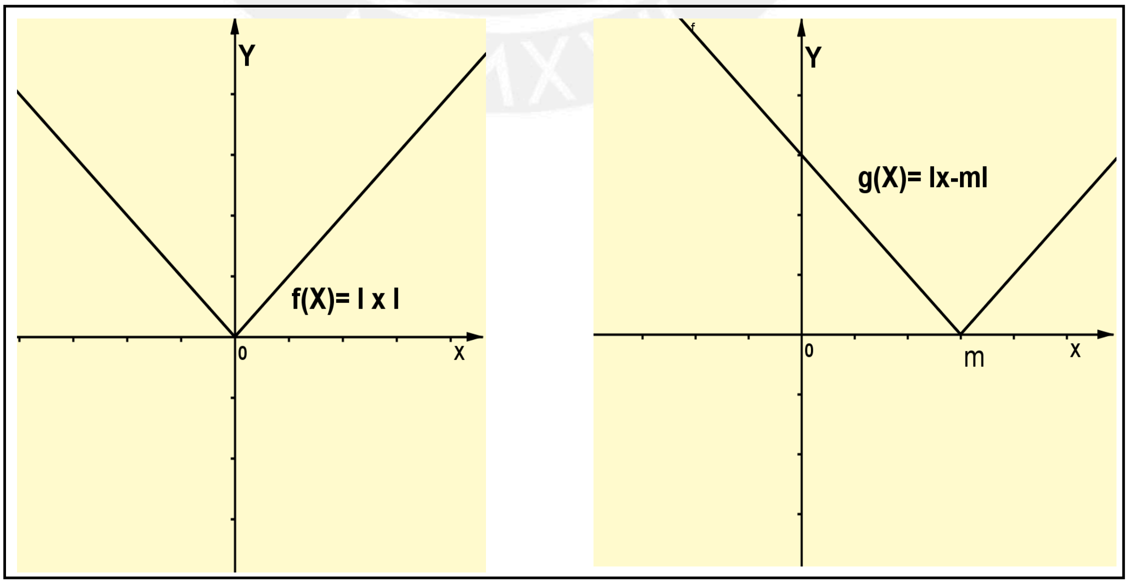


Figura 3. Traslación horizontal de la gráfica de la función valor absoluto
Fuente: Lages, Pinto, Wagner y Morgado (2000, p. 123)

La traslación vertical $(x,y) \rightarrow (x, y+\mathrm{k})$ transforma el gráfico de la función f: IR→ IR en el gráfico de la función h:IR→ IR, tal que $\mathrm{h(x)} = f(x)+\mathrm{k}$ para todo $x \in$ IR.

En efecto, esa traslación lleva cada punto $(x, f(x))$ del gráfico f en el punto $(x, f(x)+\mathrm{k}) = (x,g(x))$ del grafico g.

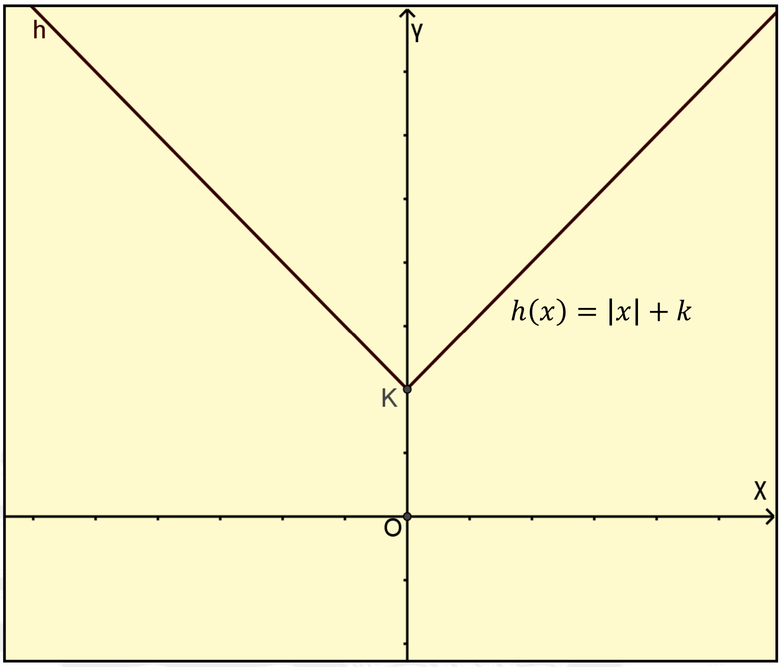


Figura 4. Traslación vertical de la gráfica de la función valor absoluto
Fuente: Lages, Pinto, Wagner y Morgado (2000, p. 123)

Además, en Lima al et (2000) consideran ahora, en particular la función cuadrática

$$f(x) = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$$

Sabemos que su representación gráfica es una parábola, cuyo vértice tiene abscisa igual a m = -b/2a. Sometiendo esa parábola a la traslación horizontal $(x,y) \leftrightarrow (x\text{-m},y)$ obtenemos una nueva parábola, cuyo vértice tiene abscisa igual a cero, esto es, esta sobre el eje OY. Por lo que vimos antes, esta nueva parábola es el gráfico de la función cuadrática, obtenida de acuerdo al siguiente tratamiento.

$$g(x) = f(x - \mathrm{m}) = f\left(x - \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right)$$

$$= \mathrm{a}\left(x - \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right)^2 + \mathrm{b}\left(x - \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right) + \mathrm{c}$$

$$= \mathrm{a}x^2 + \mathrm{k}$$

$$\mathrm{k} = \frac{40\mathrm{c} - \mathrm{b}^2}{4\mathrm{a}}$$

=   =

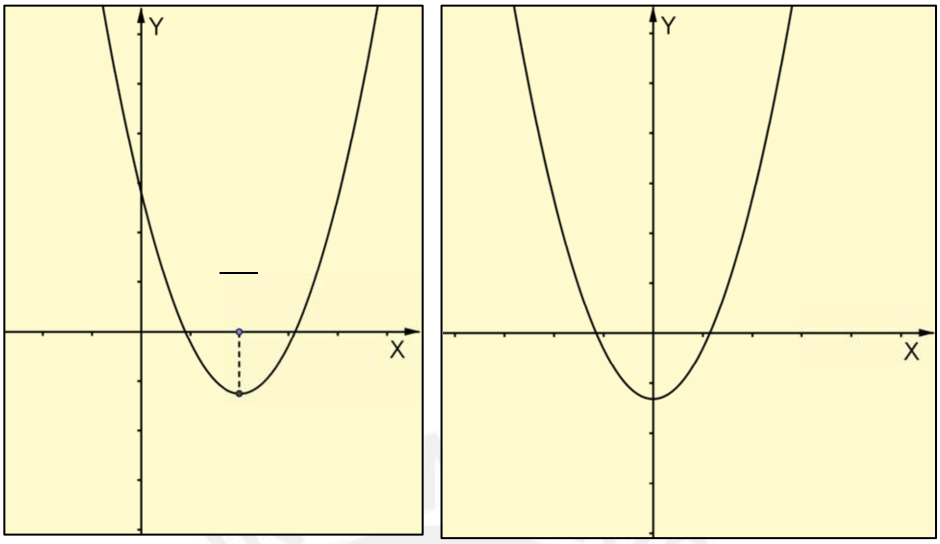


Figura 5. Parábolas congruentes
Fuente: Lages, Pinto, Wagner y Morgado (2000, p. 124)

En seguida, aplicamos a esta segunda parábola la traslación vertical (*x*,*y*)↔(*x*-m,*y*), obteniendo una nueva representación gráfica, cuyo vértice coincide con el origen O = (0,0). Por la segunda observación, esta última parábola es el grafico de la función.

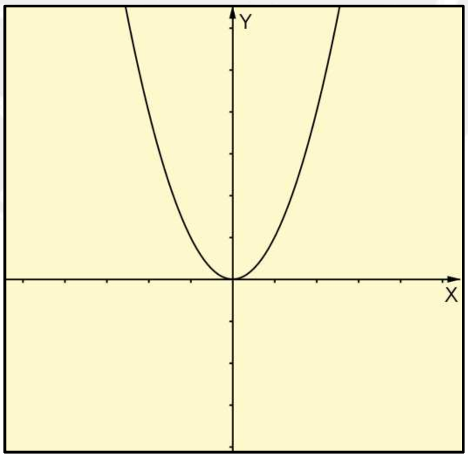


Figura 6. Representación gráfica de la función cuadrática
Fuente: Lages, Pinto, Wagner y Morgado (2000, p. 124)

También, Lima et al (2000) describen la combinación de los dos tipos de traslaciones, donde describen que la parábola que es el gráfico de la función = se transforma en la representación gráfica de la función mediante una traslación horizontal seguida de una traslación vertical. Esto significa que esas dos parábolas son congruentes.

Así, el gráfico de la función $\varphi(x) = -\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ es congruente al gráfico de $\psi(x) = -\mathrm{a}\,x^2$. A su vez, la reflexión alrededor del eje horizontal, o sea, el cambio de$(x,\ y) \leftrightarrow (x, -y)$, transforma el gráfico de $\psi = -\mathrm{a}x^2$ en el gráfico de $h(x) = \mathrm{a}x^2$

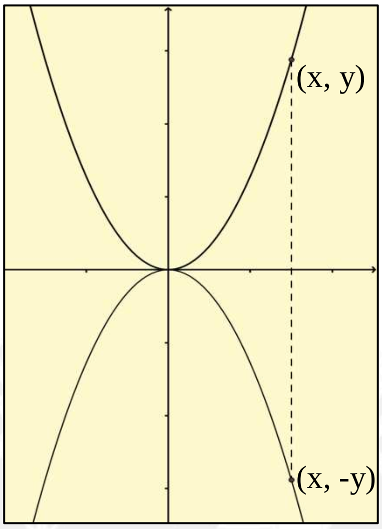


Figura 7. Traslación vertical de la parábola.
Fuente: Lages, Pinto, Wagner y Morgado (2000, p. 125)

Los mismos autores resumen el planteamiento anterior en: $\mathrm{a}' = \pm\mathrm{a}$ entonces las representaciones gráficas de las funciones cuadráticas $f(x) = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ y $\varphi(x) = -\mathrm{a}'x^2 + \mathrm{b}'x + \mathrm{c}'$ son parábolas congruentes.

Cuando$a' = a$, se transforma una de esas parábolas en la otra por medio de una traslación horizontal seguida de una parábola vertical, Si $\mathrm{a}' = -\mathrm{a}$, se debe aumentar también la reflexión alrededor del eje OX.

Vemos así que, para la congruencia de las parábolas, en las representaciones gráficas de las funciones cuadráticas $f(x) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ y $\varphi(x) = -\mathrm{a}'\mathrm{x}^2 + \mathrm{b}'\mathrm{x} + \mathrm{c}'$, no importan los coeficientes $-b'\mathrm{x}^2 + b, b'$ ni c, c'. Ellos apenas determinan la posición de la parábola en relación a los ejes: c es la ordenada del punto en que la parábola corta al eje vertical, mientras que b es la inclinación de la tangente en ese mismo punto.

Cabe, naturalmente preguntar si los gráficos de las funciones f y φ pueden ser congruentes aun cuando$\mathrm{a}' \neq \pm\mathrm{a}$. La respuesta es negativa. Más explícitamente, vale la recíproca del enunciado anterior: si los gráficos de las funciones cuadráticas $f(x) = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ y $\varphi(x) = -\mathrm{a}'x^2 + \mathrm{b}'x + \mathrm{c}'$ son parábolas congruentes entonces $a' = \pm a$.

Para mostrar esto, por lo que vimos arriba, basta considerar las funciones $f(x) = \mathrm{a}\mathrm{x}^2$ y $\varphi(x) = -a'x^2$, con $a > 0$ y $a' > 0$. Si fuera $\mathrm{a} < \mathrm{a}'$ entonces $\mathrm{a}x^2 < -\mathrm{a}'x^2$ (y si $\mathrm{a} > \mathrm{a}'$ entonces $\mathrm{ax}^2 > -\mathrm{a}'\mathrm{x}^2$) para todo $x \in R$.

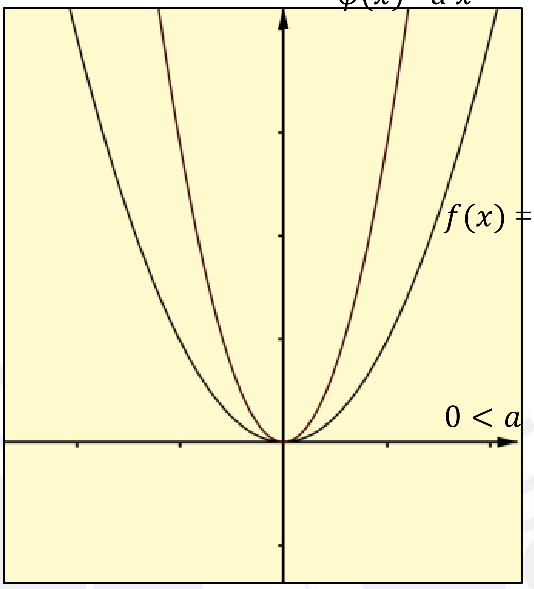


Figura 8. Parábolas no congruentes.
Fuente: Lages, Pinto, Wagner y Morgado (2000, p. 126)

La figura 8muestra la representación gráfica y deja claro que las dos parábolas consideradas no son congruentes. En efecto, dos parábolas con el mismo vértice y el mismo semieje son como dos ángulos que tienen el mismo vértice y la misma (semirrecta) bisectriz: sólo son congruentes si son iguales, esto es, si coinciden.

En términos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, es importante presentar las parábolas congruentes, puesto que, a partir de tratamientos en el registro de representación gráfica se transforma la parábola a un grafica congruente.

3.2 Enseñanza de la función cuadrática

Presentación de la función cuadrática en el libro de *Tercer Grado de Educación Secundaria* (Editorial Norma).

En esta parte del trabajo, presentamos información referida a la enseñanza de la función cuadrática en el libro Tercer Grado de Educación Secundaria de la Editorial Norma. Este libro es distribuido por el Ministerio de Educación con la finalidad de ser usado obligatoriamente tanto por el profesor como por el alumno.

En cuanto a la enseñanza del objeto matemático función cuadrática, se inicia la sesión con una situación problemática contextualizada (figura 9), para que sea resuelta de manera grupal por los estudiantes. Esta actividad está presentada en un registro verbal y utiliza la noción de función cuadrática como regla de correspondencia, es decir, exige que el estudiante establezca relaciones entre la variable independiente y la variable dependiente para que modele la situación y realice una conversión del registro verbal al registro algebraico.

▶ Función cuadrática

En grupo

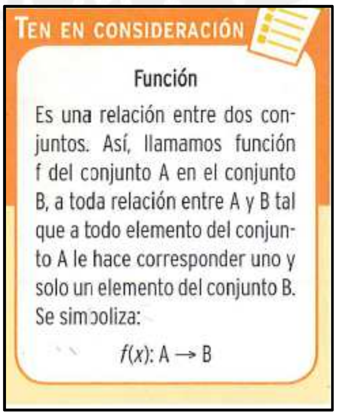
Un viaje a Huancayo

Una compañía de transporte interprovincial, que cobra S/. 10 por el pasaj[e] de Lima a Huancayo y traslada un promedio de 2000 personas al mes, dese[a] incrementar su tarifa en un número entero de nuevos soles. Si la empres[a] estima que por cada nuevo sol de aumento habrá 100 pasajeros menos:

a. En esta situación, explica la relación entre las variables.

Figura 9. Situación problemática
Fuente: Perú, Ministerio de Educación(2012, p. 29)

Asimismo, el libro presenta dos definiciones de función. La primera (figura 10) en un registro en lengua natural, en la cual considera a la función como un conjunto de pares ordenados, en ningún caso dos de las cuales tienen la primera componente.



TEN EN CONSIDERACIÓN

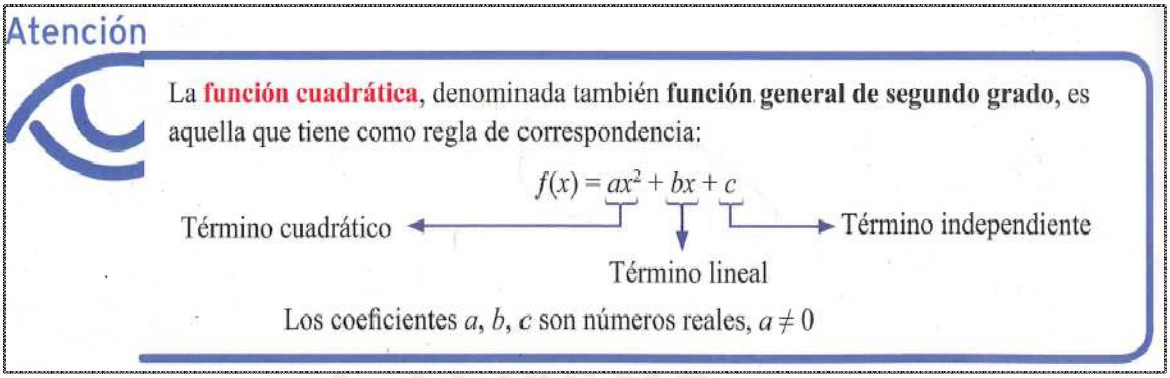
Función

Es una relación entre dos conjuntos. Así, llamamos función f del conjunto A en el conjunto B, a toda relación entre A y B tal que a todo elemento del conjunto A le hace corresponder uno y solo un elemento del conjunto B. Se simboliza:

$f(x): A \rightarrow B$

Figura 10.Definición de función
Fuente: Matemática tercero de Secundaria (2012, p. 94)

La segunda definición se refiere a la definición de función cuadráticaen el registro de representación algebraico (figura 11). Esta definición está dada como una expresión algebraica, en la cual se reconoce la dependencia de una variable con respecto a la otra, a través de una regla o fórmula que asocia a cada valor de la variable independiente uno y solo un valor de la variable dependiente.



Atención

La **función cuadrática**, denominada también **función general de segundo grado**, es aquella que tiene como regla de correspondencia:

$$f(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{Término cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{Término lineal}} + \underbrace{c}_{\text{Término independiente}}$$

Los coeficientes a, b, c son números reales, $a \neq 0$

Figura 11.Definición de función cuadrática
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 94)

Posteriormente, el texto muestrauna expresión en el registro algebraico para hallar el vérticede la parábola que representa a la función cuadrática v(h,k), en la cualh= -b/2a y k=*f*(h) y muestra un ejemplo que incluye una representación gráfica (figura 12).

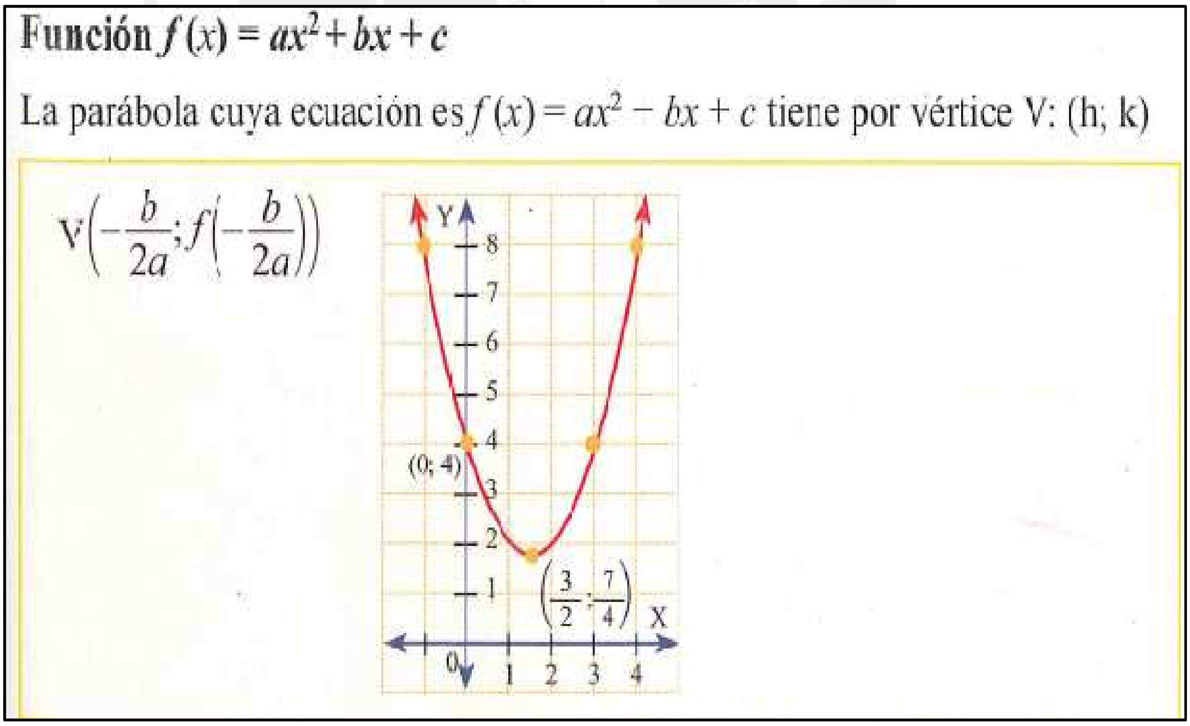
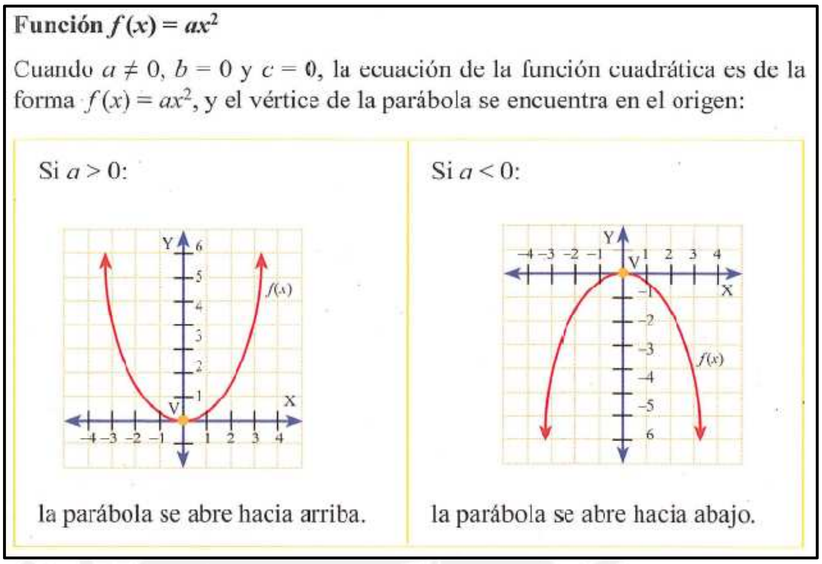


Figura 12. Vértice de la parábola
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 95)

Por otro lado, también se menciona en el libro que,para la representación algebraica de f(x)= ax^2, la orientación que tiene la parábola depende del signo del coeficiente del término cuadrático (figura 13). A continuación se nuestros se muestran los dos casos cuando a > 0 y cuando a < 0.


Función $f(x) = ax^2$

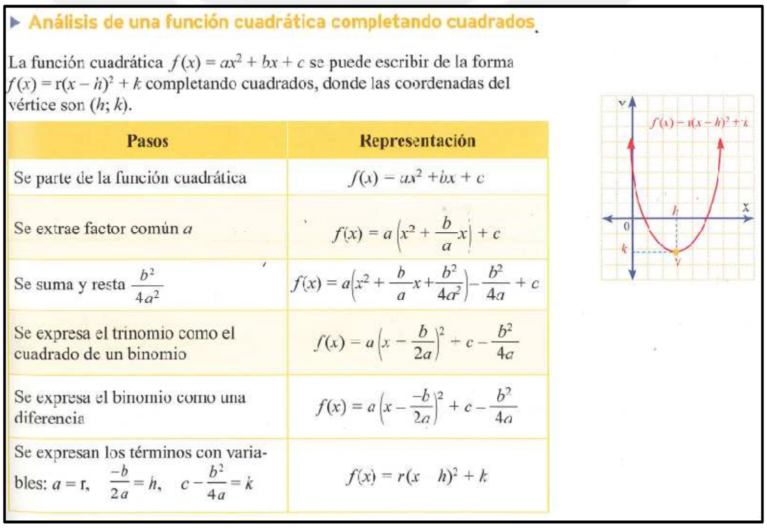
Cuando $a \neq 0$, $b = 0$ y $c = 0$, la ecuación de la función cuadrática es de la forma $f(x) = ax^2$, y el vértice de la parábola se encuentra en el origen:

Si $a > 0$: la parábola se abre hacia arriba.

Si $a < 0$: la parábola se abre hacia abajo.

Figura 13. Comportamiento de la gráfica de la función
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 95)

En la figura 14, se puede observar la forma estándar de la función f(x) = a(x-h)^2+k a partir de su expresión algebraica $f(x)$ =ax^2+bx+c, a≠0 y $x\in$ IR, de la cual se deducen el vértice y el valor máximo o mínimo que puede tomar la función cuadrática (figura 12). También se enfatiza en las actividades propuestas y resueltas enel uso de los registros gráfico y algebraico de manera independiente, ya que no se presentan actividades en las que se evidencie la conexión entre estos dos registros.


Análisis de una función cuadrática completando cuadrados

La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede escribir de la forma $f(x) = r(x-h)^2 + k$ completando cuadrados, donde las coordenadas del vértice son $(h; k)$.

Pasos	Representación
Se parte de la función cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Se extrae factor común a	$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$
Se suma y resta $\frac{b^2}{4a^2}$	$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$
Se expresa el trinomio como el cuadrado de un binomio	$f(x) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$
Se expresa el binomio como una diferencia	$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$
Se expresan los términos con variables: $a = r$, $\frac{-b}{2a} = h$, $c - \frac{b^2}{4a} = k$	$f(x) = r(x \quad h)^2 + k$

Figura 14. Forma estándar de la función cuadrática
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 99)

El libro también presenta, mediante una representación gráfica, el desplazamiento(figura 15)de la gráfica de una función cuadrática, intervalos de crecimiento y decrecimiento;siempre priorizando en estas actividades los registros gráfico y algebraico. Además, presenta diversasactividades resueltas y propuestas en un contexto extramatemático (figura 16), las cuales exigen que los alumnos identifiquen un modelo matemático, interpreten la información de un registro verbal y realicen la conversión a un registro tabular y algebraico. La siguiente figura muestra actividades de modelación.

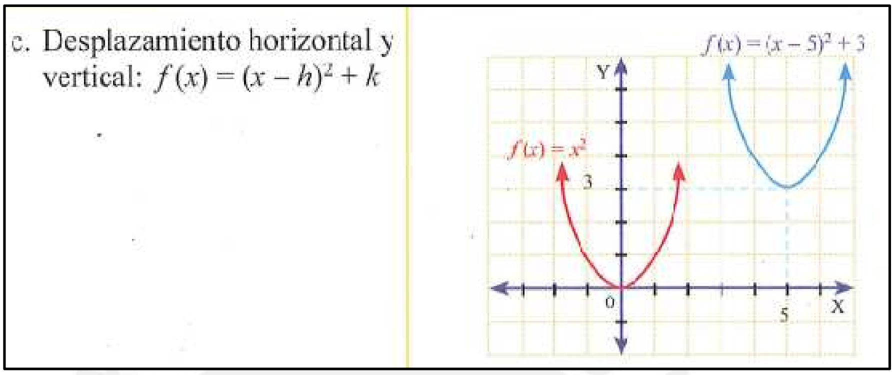


Figura 15. Desplazamiento horizontal y vertical de la gráfica
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 101)

EJEMPLO 9

Realiza la modelación de las siguientes situaciones:

a. Un ingeniero quiere construir una piscina con las condiciones que el largo es el doble del ancho (en metros) y con una profundidad de 1,5 m. Para ello necesita un modelo que le permita proponer a sus clientes el volumen resultado de su propuesta.

b. Un empresario quiere saber con certeza los posibles ingresos en su peña turística. La entrada vale S/. 20 por persona si ingresa un grupo de 10 personas, pero si ingresan más de 10 personas se realiza S/. 1 de descuento por persona adicional. Por ello necesita un modelo que represente la intención. ¿Cuál es? ¿Con qué número de asistentes se obtiene el máximo ingreso?

Figura 16. Situación problemática
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 105)

Sobre la base de lo descrito anteriormente, podemos afirmar que el libro del Ministerio de Educación muestra el objeto matemático función cuadrática, utilizando los registros de representación verbal, gráfico y algebraico. Se observa que se incide en el registro gráfico y en el registro algebraico. Además, se observa que se proponen insuficientes actividades en las que se trabaje la coordinación entre los diversos registros de representación semiótica, es decir, no se proponen actividades en las que se transiten por los diversos registros de representación y se logre la discriminación de unidades o de valores pertinentes de la representación semiótica que permitan relacionar los registros: lengua natural, gráfico y algebraico, los que de acuerdo con Duval (1999), son una condición fundamental para la actividad cognitiva de conversión entre registros; actividad, por otro lado, necesaria para la comprensión y el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Por lo expuesto, la presente investigación se orienta hacia la realización de una secuencia de actividades que tiene por finalidad que los estudiantes transiten por los siguientes registros de representación semiótica lengua natural, tabular, algebraico y gráfico.

En el siguiente capítulo, presentamos la experimentación y el análisis de acuerdo a la metodología de la ingeniería didáctica.

CAPÍTULO IV:EXPERIMENTACIÓNY ANÁLISIS

En el presente capítulo se describe a los sujetos de la investigación, el experimento, el análisis a priori y a posteriori de acuerdo a la metodología de la Ingeniería Didáctica.

4.1 Descripción de los sujetos de la investigación

El presente estudio se realizó con siete estudiantes de Educación Básica Regular, que cursan el Quinto Grado de Educación Secundaria en la Institución Educativa Tito Cusi Yupanqui, de la provincia de San Ignacio, en la región de Cajamarca.

El grupo estuvo integrado por cuatro mujeres y tres varones, sus edades estaban comprendidas entre quince a dieciséis años. Cinco de los estudiantes provienen de la zona rural y dos de la zona urbana. Los estudiantes que provienen de la zona rural viven solos, porque sus padres son agricultores y tienen que ir a trabajar a sus parcelas. Además, presentan un nivel socio económico bajo. Este grupo de estudiantes ha cursado sus estudios desde el primer grado de educación secundaria en la Institución Educativa Tito Cusi Yupanqui.

Asimismo, podemos afirmar que la Institución Educativa Tito Cusi Yupanqui, es una institución pública administrada por la congregación de hermanas San José de Tarbes, regida por un convenio entre el vicariato San Francisco Javier y el Ministerio de Educación. En la actualidad, atiende en un solo turno a una población de 720 estudiantes, distribuidos en 23 aulas con 30 a 35 estudiantes por aula. La mayoría de estudiantes provienen de la zona rural y urbana de la provincia de San Ignacio.

El plan de estudios del grupo de alumnos elegidos se rige bajo las orientaciones de las Rutas de aprendizaje,Mapas de progreso del aprendizaje y el Diseño Curricular Nacional (DCN). Cabe resaltar que el DCN contempla tres niveles articulados: Educación Inicial, Primaria y Secundaria. Estos tres niveles abarcan siete ciclos, que están organizados en función del logro de los aprendizajes de los estudiantes en los diferentes grados de estudio. Los dos primeros ciclos corresponden a educación inicial; los tres siguientes, a educación primaria; y, finalmente, los dos últimos, a educación secundaria. Además, el contenido de función cuadrática se enseña en tercer y cuarto grados de educación secundaria. En quinto grado, se realiza una enseñanza más profunda de este objeto matemático, y se exige del estudiante en relación a su capacidad de matemátizar que reconozca la pertenencia de un modelo referido a funciones cuadráticas al resolver un problema.

Los estudiantes que forman parte de la investigación tienen conocimientos previos sobre las nociones del objeto matemático función cuadrática; es decir, identifican sus elementos, propiedades, utilizan esta noción para desarrollar un modelo matemático. Además, identifican las diversas representaciones semióticas de esta noción. Es importante señalar que esto contribuyó en el desarrollo de las actividades planteadas; es decir, ayudo los estudiantes a movilizar la noción de función cuadrática al responder las preguntas planteadas que exigieron tratamientos y conversiones en los distintos registros de representación semiótica.

Del grupo de los siete estudiantes, en nuestra investigación se muestran respuestas de algunos estudiantes que tuvieron la capacidad paratransitar y relacionarlas diversas representaciones semióticas de la función cuadrática y, de este modo, realizaron tratamientos y conversiones basadas en las propiedades y los elementos de dicha función. Además, también muestran las respuestas de algunosestudiantes que tuvieron dificultadesal realizar estas actividades cognitivas. Analizaremos estos resultados desde la perspectiva de la Teoría de Registros de Representación semiótica.

4.2 Descripción de la secuencia de actividades

Para nuestra investigación, hemos elaborado una secuencia que consta de dos actividades, las cuales tienen por finalidad que los estudiantes movilicen la noción de función cuadrática para que transiten por sus distintos registros de representación semiótica. La primera actividad consta de cinco partes y en ella se presentó un problema contextualizado en el que los estudiantes, de acuerdo a sus conocimientos previos tuvieron que movilizar la noción de función cuadrática para enfrentar las preguntas que se les plantearon y transitar desde el registro en lengua natural, al tabular, algebraico y gráfico. La segunda actividad, constó de dos partes, en ella, a partir de un problema contextualizado, los estudiantes tuvieron que transitar del registro de representación gráfico al algebraico. Para estas actividades hemos considerado aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y los aportes de Ospina (2012).

La primera actividad estuvo dividida en cinco partes. En la primera,se trabajó con el enunciado del problema para comprenderlo y realizar la conversión al registro de representación tabular; luego, se presentaronpreguntas para interpretar en lenguaje natural la relación de dependencia entre las variables que intervinieron en la situación. Enla segunda parte se presentaron preguntas referidas a los tratamientos de tipo algorítmico en el registro de representación algebraico que permitieron realizar la conversión al registro de representación gráfico. La tercera parte consistió en la realización de preguntas que propiciaron tratamientos en el registro de representación gráfico, con el cual los estudiantes tuvieron que explicar y justificar propiedades y elementos de la parábola en lenguaje natural. Enla cuarta parte se trabajó con el coeficiente del término cuadrático, en el cual se propusieron preguntas, que permitieron que los estudiantes establecieran relaciones entre el registro de representación algebraico y gráfico. Finalmente, en la quinta se trabajó con el término independiente de la función cuadrática, en la cual se propusieron preguntas para que los estudiantes establecieran relaciones entre el registro algebraico (término independiente) y el registro de representación grafico (variables visuales). A continuación, se presenta en la figura 17 lo expuesto anteriormente.

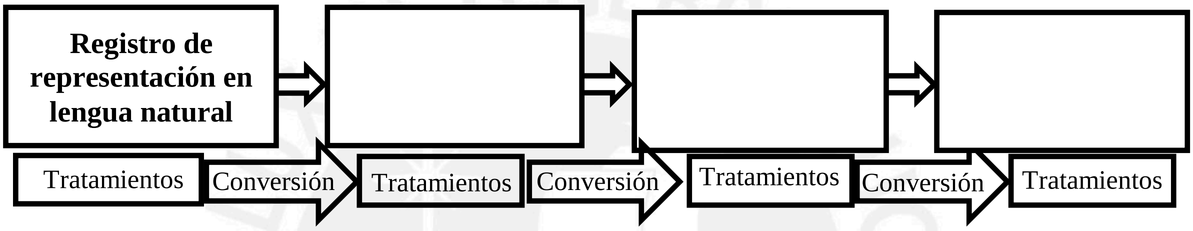


Figura 17. Esquema sobre los registros de representación semiótica

En relación a las dos partes de la segunda actividad, en la primera se trata sobre las preguntas que se refieren a los tratamientos en el registro de representación gráfico para que el estudiante realice la conversión al registro de representación algebraico, y la segunda parte se refiere a preguntas sobre tratamientos de tipo algorítmico en el registro de representación algebraico.Se espera que los estudiantes movilicen la noción de función cuadrática como regla de correspondencia para interpretar y modelar el dato gráfico, realizando así tratamientos y conversiones del registro de representación gráfico al algebraico. En la figura18 se representalo explicado anteriormente.

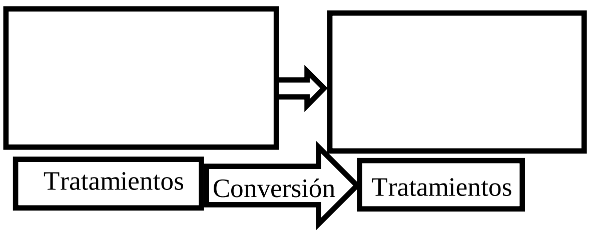


Figura 18. Proceso inverso de los registros de representación semiótica

En la siguiente tabla se muestra se detallan los objetivos de las actividades y las nociones de función cuadrática a movilizar.

Tabla 3. Propósito de la secuencia

Actividad	Propósitos	Nociones de la función cuadrática a movilizar
1	El propósito de esta actividad es que los estudiantes movilicen la noción de función cuadrática, de modo que puedan transitar desde el registro en lengua natural, al tabular, algebraico y gráfico.	• Registro de representación en lengua natural de la función cuadrática • Variable independiente • Variable dependiente • Relación de correspondencia entre dos variables • Representación tabular de la función cuadrática • Registro de representación algebraica de la función cuadrática • Raíces de la ecuación cuadrática • Vértice de la función cuadrática • Puntos de corte con los ejes • Representación gráfica de la función cuadrática • Dominio y rango de la función cuadrática • Gráfica de una función cuadrática
2	El propósito de esta actividad es que los estudiantes movilicen la noción de función cuadrática, de modo que puedan transitar desde el registro en gráfico, al algebraico.	• Representación gráfica de la función cuadrática • Dominio y rango de la función cuadrática • Registro de Representación algebraica de la función cuadrática • Raíces de la ecuación cuadrática • Vértice de la función cuadrática • Puntos de corte con los ejes • Registro de representación en lengua natural de la función cuadrática • Variable independiente • Variable dependiente • Relación de correspondencia entre dos variables

4.3 Técnicas e instrumentos de recolección de información

La observación

En la aplicación de la secuencia de actividades, participamos el investigador como primer observador y un profesor del área de matemática de la Institución Educativa Tito Cusi Yupanqui como segundo observador. A continuación, detallamos los instrumentos y recursos utilizados.

Instrumentos yRecursos

Instrumentos

- Fichas de actividades: cada ficha contuvo los objetivos específicos con sus respectivas secuencias de preguntas. Estas actividades se desarrollaron en tres sesiones de 90 minutos cada una.
- Ficha de observación: para facilitar el recojo y registro de la información relevante para la investigación, se elaboró una ficha de observación para cada una de las actividades, la cual fue entregada a cada uno de los dos observadores no participantes.

Los recursos utilizados fueron:

- Video
- Lápiz, papel y borrador.
- Pizarra acrílica
- Papel bond

4.4 Experimentación y análisis de la secuencia de actividades

Recolección de la información

El tiempo previsto para la realización de las dos actividades fue de 120 minutos, con duración de 60 minutos cada una, y se desarrolló en dos días consecutivos de acuerdo al horario establecido en la Institución Educativa. Cabe resaltar que los estudiantes tenían que resolver las dos actividades en forma individual yen el tiempo establecido.Además,los estudiantes pudieron realizar consultas referidas a los ítems de las actividades propuestas.

Análisis de las actividades

A continuación, presentamos el análisis de las dos actividades aplicadas con sus respectivos análisis a priori y a posteriori,. Este análisis lo hemos realizado desde la perspectiva de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS).

Primero, se muestra el análisis a priori de las preguntas planteadas, luego se presenta el análisis a posteriori a nivel general de todo el grupo y, finalmente, se expone el análisis de cada pregunta. A continuación mostramos la actividad 1, que se ha dividido en cinco partes.

Análisis de la actividad 1

La secuencia de actividades empieza con preguntas destinadas a trabajar tratamientos en el registro en lengua natural, aspecto fundamental para comprender el problema y utilizar la noción de función cuadrática para modelar el enunciado en lengua natural.

Preguntas sobre la actividad 1

Parte 1: Trabajando con la representación verbal de la función cuadrática.

A continuación, mostramos el problema contextualizado y las preguntas formuladas.

Problema contextualizado

El señor Roberto, comerciante de la provincia de San Ignacio, transporta a la ciudad de Chiclayo 50 kilos de naranjilla para la venta a S/. 6 el kilo. En el trayecto a la ciudad Chiclayo, el camión se quedó parado en el distrito de Pucará, debido a las constantes lluvias que causaron derrumbes e interrumpieron la carretera en varios tramos. Por esta razón, se presume que tardará varios días en llegar a Chiclayo. El señor Roberto deduce que por cada día que pasa en la carretera se malogra un kilo de naranjilla, por lo que decide aumentar el precio de cada kilo en 0,20 soles por cada kilo que se malogra. ¿Cuántos días tienen que pasar para que el comerciante al vender todas las naranjillas en buen estado obtenga un máximo ingreso?

Trabajando con el enunciado para comprender el problema

Pregunta 1

a. Escribe con tus propias palabras los dos enunciados verbales, pero sin cambiar el sentido (puedes agregar nombres de personas, lugares y acontecimientos).

- El señor Roberto, comerciante de la provincia de San Ignacio transporta a la ciudad de Chiclayo 50 kilos de naranjilla para la venta a S/. 6 el kilo.
- El señor Roberto deduce que por cada día que pasa en la carretera, se malogra un kilo de naranjilla, por lo que decide aumentar el precio en 0,20 soles por cada kilo que se malogra.

b. ¿Cuáles son los datos? ¿Qué pide el problema?

Pregunta 2

a. ¿Cuál sería el ingreso si pasa 1 día en la carretera?
b. ¿Cuál sería el ingreso si pasan 2 días en la carretera?
c. ¿Cuál sería el ingreso si pasan 18 días en la carretera?

Pregunta 3

a. A partir de las variables definidas organiza la información en una tabla que te permita calcular el ingreso del comerciante según los días que pasan en la carretera.

Pregunta 4

a. ¿Cuál sería el ingreso f si pasan x días? Encuentra la función ingreso en términos de los días transcurridos (x).

Pregunta 5

a. ¿Qué significado tiene que el ingreso f depende de x?.

Análisis a priori

Pregunta 1

Esperamos que los siete estudiantescomprendan el problema contextualizado, identifiquen datos como el número de kilos de naranjilla, el precio de la naranjilla y el aumento del precio. Además, esperamos que identifiquen lo que se pide hallar en el problema: los días que tienen que pasar para el que el comerciante, al vender todas las naranjillas en buen estado, obtenga un máximo ingreso.Luego,queremos quereformulen dos enunciados del problema con sus propias palabras, pero sin cambiar el sentido,lo que implica, según Duval (1999), que estánrealizando tratamientos en el registro de lengua natural, es decir,asocian e identifican las magnitudes que covarían en la situación: número de días que pasan, número de kilos de naranjilla en buen estado, precio de venta e ingreso.A continuación mostramos los resultados esperados para esta etapa de la actividad 1.

- El señor Roberto, comerciante de la provincia de San Ignacio transporta a la ciudad de Chiclayo 50 kilos de naranjilla para la venta a S/. 6 el kilo.

  Respuesta esperada

  Mi tío Roberto es un comerciante del mercado de la provincia de San Ignacio. Él transporta a Chiclayo naranjillas para venderlas a S/.6 el kilo llevando en total 50 kilos.

  Respuesta esperada

Pregunta 2

En la misma línea, esperamos que los estudiantes reconozcan las magnitudes que cambian como el número de kilos y el precio que va tomando la naranjilla;las que permanecen constantes comoel incremento del precio por cada kilo que se malogra. Además, se espera que deduzcan que el ingreso se halla a partir del producto del número de kilos por el precio, y también que calculen el ingreso para algunos casos particulares. Por ejemplo, que hallen el ingreso cuando pasan 1 día, 2 días y 18 días.

a. ¿Cuál sería el ingreso si pasa 1 día en la carretera?

   Respuesta esperada

   El ingreso sería (50-1) (6+0,20) = 303,8 soles

b. ¿Cuál sería el ingreso si pasan 2 días en la carretera?

   Respuesta esperada

   El ingreso sería (50-2) (6+2x0,20) = 307,2 soles

c. ¿Cuál sería el ingreso si pasan 18 días en la carretera?

   Respuesta esperada

   El ingreso sería (50-18) (6+18x0,20) = 307,2 soles

Pregunta 3

Según la teoría de Registros de Representación Semiótica, se espera que los estudiantes realicen la conversión del registro de representación en lengua natural al registro de representación tabular. Para lograr este propósito, se esperaque los estudiantes, al comprender los enunciados, encuentren una representación que permita seleccionar y organizar la información (número de días que pasan, número de kilos, precio e ingreso). En este sentido, esperamos que los estudiantesotorgen valores a la variable independiente (*x*),es decir, que hallen una secuenciade los valores que toman el número de días que pasan. Además, esperamos que relacionen los valores de la variable independiente (*x*) y los valores de la variable dependiente (*y*), para hallar la relación del número de días que pasan y el número de kilos que se encuentran en buen estado con el precio que va tomando el kilo de naranjilla y su respectivo ingreso. En efecto, queremos que los estudiantes realicen tratamientos en el registro tabular y, así, organicen la información en una tabla,yhallen el ingreso que se obtiene multiplicando el precio con el número de kilos para algunos casos particulares.

A continuación mostramos los resultados esperados para esta actividad.

Respuesta esperada

Número de días que pasan	Número de kilos	Precio (S/.)	Ingreso (S/.)
0	50	$[6]$	(50)(6) = 300
1	50-1	$[6+1(0{,}20)]$	(50-1) $[6+1(0{,}20)]$ = 303,8
2	50-2	$[6+2(0{,}20)]$	(50-2) $[6+2(0{,}20)]$ = 307,2
3	50-3	$[(6+3(0{,}20)]$	(50-3) $[(6+3(0{,}20)]$= 310,2
4	50-4	$[(6+5(0{,}20)]$	(50-4) $[(6+4(0{,}20)]$= 312,8

Pregunta 4

Se espera que los estudiantes reconozcan la dependencia de la variable*x*con respecto a la variable *y* a través de una regla que asocia a cada valor de la variable independiente uno y solo un valor de la variable dependiente. En este sentido, se espera que los estudiantes generalicen la información contenida en la tabla, representando al número de días que pasan con*x*, el número de kilos con 50-*x*, el precio con (6+0,20*x*) y el ingreso con (50-*x*) (6+0,20*x*). Esto implica,según Ospina (2012), que están realizando la conversión del registro de representación tabular al registro de representación algebraico. A continuación, se muestra la respuesta esperada para esta pregunta.

a. ¿Cuál sería el ingreso *f* si pasan *x* días? Encuentra la función ingreso en términos de los días transcurridos (*x*).

Respuesta esperada

A pesar que la función no solo es una expresión algebraica. Para esta pregunta esperamos que los estudiantes definan la función cuadrática en el registro de representación algebraica como **$f(x)$ = (50-x)** $[(\mathbf{6} + \boldsymbol{x}(\mathbf{0,20})]$.

Pregunta 5

Se espera que los estudiantes interpreten el significado de la relación de dependencia entre las dos variables, es decir, que comprendan la relación entre la variable independiente (número de días que pasan) y la variable dependiente (ingreso), comprendiendo así que el ingreso del comerciante depende del número de días que transcurren en la carretera. Pasamos a presentar la respuesta esperada para esta pregunta.

a. ¿Qué significado tiene que el ingreso *f* depende de *x*?

Respuesta esperada

Significa que el ingreso del comerciante al vender su producto depende del número de días que transcurren en la carretera.

Análisis a posteriori de la producción de los estudiantes

Análisis de la pregunta 1

En general, con relación al tratamiento en el registro de representación en lengua natural, observamos que cuatro de los sieteestudiantes parafrasearon en forma completa los enunciados, es decir, han realizado una lectura comprensivaparafraseandoel significadode los enunciados; asimismo, los han relacionadocon sus actividades diarias, de acuerdo a lo planificado en el análisis a priori. Otros tres estudiantes tuvieron dificultades para parafrasear, puesto que, en sus producciones,omitieron algunas partes del enunciado o solo se limitaron a escribir lo mismo de este. Pensamos que esto se debe a querealizaron una lectura poco analítica e interpretativa de los enunciados y mostraron desinterés en esta actividad.Se focalizaron más en realizar operaciones con los datos que se les presentó y lesfaltó interpretar el significado real del enunciado, quedándose solo en una lectura superficial.A continuación, pasamos a precisar algunos resultados específicos relacionados con esta pregunta.

En el grupo de estudiantes que contestó adecuadamente, se observa que uno de ellos (ver figura 19) realizó el tratamiento en forma apropiada en el registro de representación en lengua natural, ya que transformó los enunciados presentados como habíamos planificado en el análisis a priori. En este sentido, pensamos que el estudiante leyó en forma compresiva los enunciados y, al mismo tiempo, identificó los datos relevantes y los interpretó de acuerdo con su contexto.De esta manera, en el primer enunciado, primero identificó que son 50 kilos de naranjilla los que se trasportan y que el precio es de S/. 6 por kilo; luego, los ha reconfigurado y ha redactado el nuevo enunciado considerando su contexto. En relación con el segundo enunciado, el estudiante, a partir de la lectura comprensiva, ha identificado la relación que hay entre el número de días que pasan en la carretera, los kilos de naranjilla que se malogran y el precio de S/. 0,20 que aumenta por cada kilo que se malogra y pasó después a redactar el enunciado parafráseandolo.

a. Escribe con tus propias palabras los dos enunciados verbales, pero sin cambiar el sentido (puedes agregar nombres de personas, lugares y acontecimientos).

El señor Roberto, comerciante de la provincia de San Ignacio transporta a la ciudad de Chiclayo 50 kilos de naranjilla para la venta a S/. 6 el kilo.

José es un comerciante de frutas; transporta 50 kg de naranjilla de la provincia de San Ignacio a Chiclayo para venderla a S/6. el kilo.

El señor Roberto deduce que por cada día que pasa en la carretera, se malogra un kilo de naranjilla, por lo que decide aumentar el precio en 0,20 soles por cada kilo que se malogra.

José deduce que por cada día que pasa esperando que arreglen carretera se malogra un kilo de la fruta antes mencionada; es por e decide aumentar en S/0,20 el precio por cada kilo que se le malogr

Figura 19. Respuesta del estudiante 1 – Actividad 1, parte 1

Con respecto a los estudiantes que presentaron dificultades en esta pregunta, se constata que un estudiante realizó el parafraseo del primer enunciado en una forma incompleta (ver figura 20), es decir,parece confundirel precio de venta con el precio de costo. Puede ser que el estudiante ha contestado de esa manera porque ha asumido que el precio de costo y el precio de venta significan lo mismo.Además, el parafraseo del segundo enunciado lo realizó de una forma incompleta,se observa que el estudiante cumplió con una parte de la condición. Sin embargo, le ha faltado agregar “por cada kilo que se malogra en la carretera” en vez de por cada kilo vendido.

Por otra parte, se observa que este estudiante en el parafraseo ha cambiado el nombre de Roberto por el de José. Creemos que esto se debe a quela pregunta del ítem (1a), presenta limitaciones en la redacción en el enunciado (puedes agregar nombres de personas, lugares y acontecimientos), ya que, nosotros esperábamos que los estudiante solo parafraseen los enunciado, sin modificarlos.

a. Escribe con tus propias palabras los dos enunciados verbales, pero sin cambiar el sentido (puedes agregar nombres de personas, lugares y acontecimientos).

El señor Roberto, comerciante de la provincia de San Ignacio transporta a la ciudad de Chiclayo 50 kilos de naranjilla para la venta a S/. 6 el kilo.

El Señor Roberto Transporta de San Ignacio a Chiclay 50K de naranjilla y cada Kilo costara 6 S/.

El señor Roberto deduce que por cada día que pasa en la carretera, se malogra un kilo de naranjilla, por lo que decide aumentar el precio en 0,20 soles por cada kilo que se malogra.

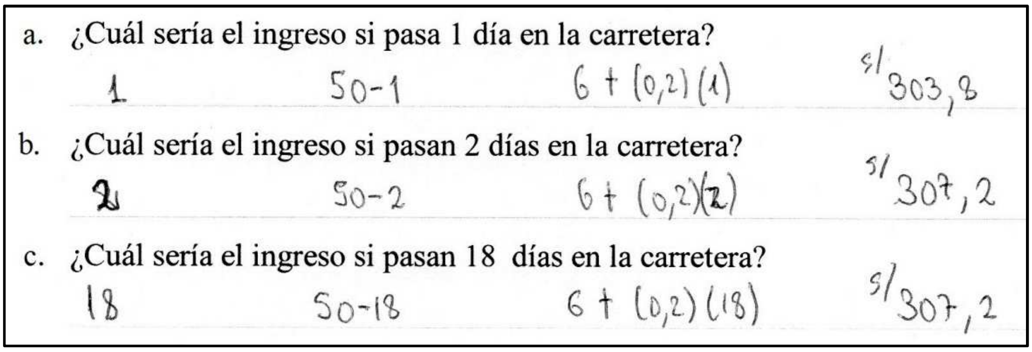
El Señor roberto dice que cada día en la carretera se malogra 1K de naranjilla por lo cual el precio subira en 0,20 por cada Kilo vendido.

Figura 20: Respuesta del estudiante 2 – Actividad 1, parte 1

A partir del análisis de esta pregunta, creemos que los tratamientos en el registro en lengua natural son fundamentales para realizar la conversión al registro de representación tabular, algebraica y gráfica de la noción de función cuadrática.Ya que según Duval (1999), sostiene que convertir el enunciado de un problema en una ecuación o en un sistema de ecuaciones, es una tarea que consiste en establecer relaciones entre cantidades conocidas, desconocidas y una camino para lograr este proposito es realizar el parafraseo de proposiciones.

Análisis de la pregunta 2

Otra pregunta que un estudiante realizó; esta vez en forma apropiada; en el registro de representación en lenguaje natural consistió en hallar situaciones de variación, para ver cómo se comporta el ingreso si pasan 1 día, 2 días y 18 días (ver figura 21). Pensamos que esta actividad la realizó con éxito, porque, al parafrasear, comprendió los enunciados, es decir, asoció las variables que se presentan en los enunciados, y logró concluir que el ingreso se obtiene multiplicando el número de kilos restantes por el precio que va asumiendo la naranjilla.

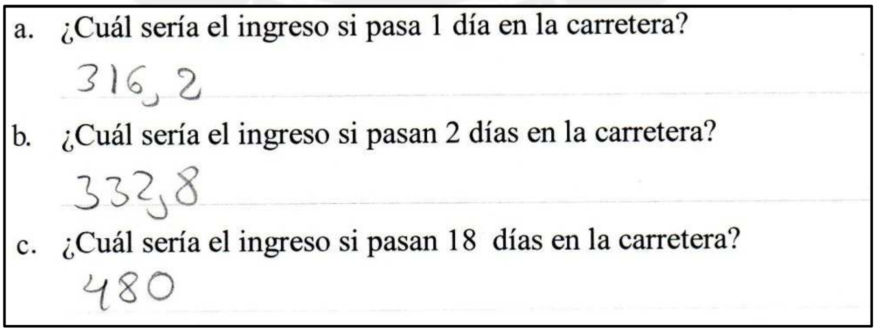

a. ¿Cuál sería el ingreso si pasa 1 día en la carretera?
1 50-1 6 + (0,2)(1) s/ 303,8

b. ¿Cuál sería el ingreso si pasan 2 días en la carretera?
2 50-2 6 + (0,2)(2) s/ 307,2

c. ¿Cuál sería el ingreso si pasan 18 días en la carretera?
18 50-18 6 + (0,2)(18) s/ 307,2

Figura 21: Respuesta del estudiante 1 – Actividad 1, parte 1

Por otro lado, otro estudiante tuvo dificultades en hallar situaciones de variación para calcular el ingreso (ver figura 22). Se observa que no ha colocado las unidades de soles a sus respuestas y ha cometido un error al relacionar el número de días con el número de kilos, asumiendo que, por cada día que pasa en la carretera, el número de kilos va a aumentar, en vez de disminuir. Se observa en la figura 22, para hallar el ingreso cuando pasa un día en la carretera, el estudiante aumentó en 51 kilos en vez de disminuir a 49 kilos; de esa manera, calculó el ingreso de la siguiente forma (50+1)[6+0,20(1)] = 316, 2, y repitió este error para algunos ejemplos. De acuerdo con Duval (1999), esta dificultad se presenta en los estudiantes, porque no logran discriminar en el enunciado la designación de los objetos pertinentes. En este sentido, el estudiante no reconoció la relación que se establece entre el número de días que pasan en la carretera y el número de kilos que quedan para la venta.


a. ¿Cuál sería el ingreso si pasa 1 día en la carretera?
316,2

b. ¿Cuál sería el ingreso si pasan 2 días en la carretera?
332,8

c. ¿Cuál sería el ingreso si pasan 18 días en la carretera?
480

Figura 22: Respuesta del estudiante 2 – Actividad 1, parte 1

A partir del análisis, creemos que esta pregunta les permitió a los estudiantes realizar la conversión hacia el registro de representación tabular. Pensamos que los estudiantes que tuvieron dificultad en este tratamiento no realizaron bien el parafraseo en el registro de lengua natural.

Análisis de la pregunta 3

Por otro lado, en relación a la conversión del registro de representación en lengua natural al registro de representación tabular, cuatro estudiantes realizaron esta conversión de forma apropiada, es decir, que, a partir del tratamiento en el registro de representación en lengua natural, identificaron las variables (números de días que pasan, ingreso), organizaron la información en una tabla y hallaron el ingreso para algunos ejemplos particulares. Los otros tres estudiantes tuvieron dificultades para realizar esta conversión y mostraron limitaciones para interpretar los enunciados verbales, lo que no les permitió identificar de forma correcta las variables.

Del grupo de estudiantes que tuvieron éxito en esta pregunta, se observa que un estudiante a partir del hallazgo del ingreso para algunos ejemplos particulares, organizó la información en una tabla con cuatro columnas. En la primera columna, anotó una secuencia de valores, según el número de días que pasan en la carretera. En la segunda columna, halló el número de kilos que quedan, según los días que pasan. En la tercera, determinó el precio que va tomando cada kilo de naranjilla. Siguiendo con la cuarta columna, calculó el ingreso y lo expresó como el producto del número de kilos y el precio (ver figura 23). Además, también anotó algunos ejemplos particulares como lo habíamos previsto en el análisis a priori, lo cual le permitió generalizar el número de días como *x*, el número de kilos como 50 –*x*, el precio como (6+0,2*x*) y el ingreso como (50-*x*) (6+0,2*x*).Cabe resaltar que la generalización que realizó el estudiante no le solicitamos en forma explícita en la pregunta. Pensamos que el estudiante ha realizado esta generalización, puesto que los ejemplos particulares,le haninducido a generalizar, o tal vez porque está familiarizado en realizar la generalizacióna partir del desarrollo de la tabla.

A partir de estos resultados, creemos que el registro de representación tabular es un registro de tránsito fundamental para lograr la conversión al registro de representación algebraico.

a. A partir de las variables definidas organiza la información en una tabla donde te permita calcular el ingreso del comerciante según los días que pasan en la carretera.

n.º de días que pasan	n.º de kilos	Precio	ingreso
0	50-0	6 + (0,2) (0)	S/ 300
1	50-1 = 49	6+(0,2)(1)	S/ 303·8
2	50-2 = 48	6+(0,2) (2)	S/ 307,2
18	50-18 = 32	6+(0,2)(18)	S/ 307,2
x	50-x	6+(0,2) (x)	(50-x) (6+0,2x)

Figura 23: Respuesta del estudiante 1 – Actividad 1, parte 1

Por otro lado, también se analizó el trabajo de dos estudiantes que presentaron dificultades en la conversión del registro de representación en lengua natural al registro de representación tabular. Hemos constatado que no han relacionado en forma adecuada el número de días que pasan con el número de kilos que le quedan. Creemos que esto se debe a la falta de comprensión del segundo enunciado propuesto en las primeras preguntas. Así como lo afirma Duval (1999), las dificultades relativas a los problemas se basan en la comprensión de los enunciados, ya que la comprensión del enunciado de un problema de aplicación requiere necesariamente de una tarea de conversión.

Por otro lado, se observa en la figura (ver figura 24), que un estudiante realizó los dos primero ejemplos en forma inapropiada, luego para el otro ejemplo estableció en forma correcta la relación entre el número de días que pasan con el número de kilos que le quedan, esto le permitió hallar correctamente el número de kilos, el precioy el ingreso. Además, generalizó el número de kilos como (50-x), el precio como (6+0,2x), y por último le faltó generalizar el ingreso.

a. A partir de las variables definidas organiza la información en una tabla donde te permita calcular el ingreso del comerciante según los días que pasan en la carretera.

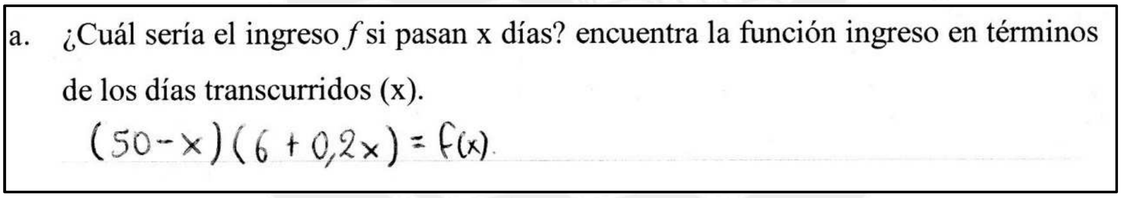
# de días que Paso	# de Kilos	Precio	Ingreso
0	50	6	300
1	51	6,2	316,2
2	52	6,4	332,8
18	50-18=32	(6+0,2)(18)=96	(50.96)=480
x	(50-x)	(6+0,2).x)	

Figura 24: Respuesta del estudiante 2 – Actividad 1, parte 1

El estudiante que tuvo dificultades para realizar la conversión desde el registro de representación en lengua natural al registro de representación tabular no realizó los tratamientos en el registro en lengua natural como lo habíamos previsto en el análisis a priori, y cometió errores que se observaron en el registro de representación tabular. En este caso, según la Teoría de Registros de Representación Semiótica, no hubo un tránsito exitoso entre estos dos registros. Sin embargo, en las respuestas del caso del estudiante 1 sí hubo tránsito entre el registro de partida (registro de representación en lengua natural) al registro de llegada (registro de representación tabular), porque, a partir del parafraseo de los enunciados, pudo interpretar y hallar la relación entre la variable independiente (número de días que pasan) y la variable dependiente (ingreso que se relaciona con el número de kilos y precio). A estas variables, con sus respectivas relaciones, se las hizo corresponder en el registro de llegada, la tabla con sus cuatro columnas: número de días que pasan, numero de kilos, precio e ingreso.

Análisis de la pregunta 4

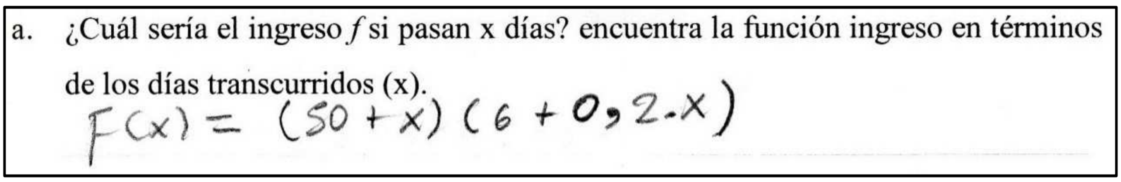
En relación a la conversión del registro de representación tabular al registro de representación algebraica, cuatro estudiantes tuvieron éxito en sus respuestas,los otros tres estudiantes presentaron dificultades en sus procedimientos. Observamos que sí hubo tránsito entre el registro de representación tabular (registro de partida) y el registro de representación algebraica (registro de llegada), porque la conversión se realizó bajo la forma de una codificación, es decir, se hizo corresponder a cada elemento del registro de partida un elemento en el registro de llegada; de esta manera, al número de días se le hace corresponder con *x*, al número de kilos con 50-*x*, al precio con 50 –*x*, y al ingreso con (50-*x*) (6+0,2*x*). Luego, hallaron la función ingreso en función del número de días que pasaron (ver figura 25), movilizando, así, sus conocimientos previos sobre la noción de función como una relación de dependencia entre variables, las cuales están asociadas con una expresión algebraica que se expresó como $f(x) = (50-x)(6+0{,}2x)$.


a. ¿Cuál sería el ingreso *f* si pasan x días? encuentra la función ingreso en términos de los días transcurridos (x).

$(50-x)(6+0{,}2x) = f(x)$

Figura 25: Respuesta del estudiante 3 – Actividad 1, parte 1

Por otro lado, observamos que otro estudiante (ver figura 26) cometió errores al realizar la conversión del registro de representación tabular al registro de representación algebraica, ya que estableció en forma inapropiada la relación entre el número de días que pasan en la carretera y el número de kilos de naranjilla que van quedando, expresando el número de kilos como (50+x) en vez de (50-x).


a. ¿Cuál sería el ingreso *f* si pasan x días? encuentra la función ingreso en términos de los días transcurridos (x).

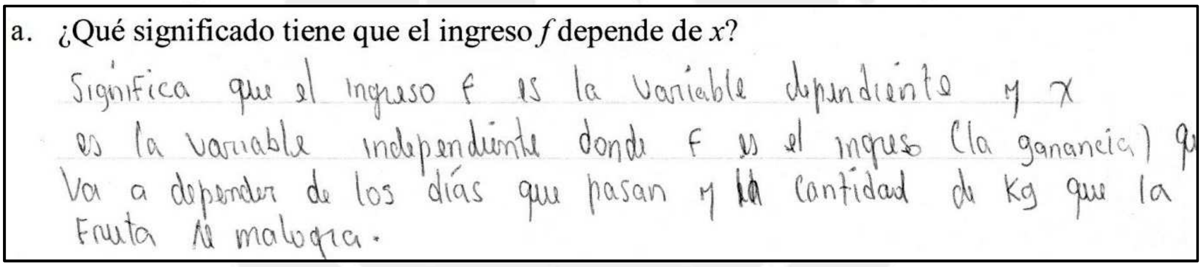
$F(x) = (50+x)(6+0{,}2 \cdot x)$

Figura 26: Respuesta del estudiante 2 – Actividad 1, parte 1

A partir de las respuesta de los estudiantes, creemos que es muy importante para la conversión del registro de representación en lengua natural al algebraico que utilicen el registro tabular como un registro de tránsito obligatorio, ya que este registro ayuda a organizar la información en forma ordenada, a establecer relaciones entre las variables y también permite generalizar para poder realizar la conversión al registro de representación algebraico.

Análisis de la pregunta 5

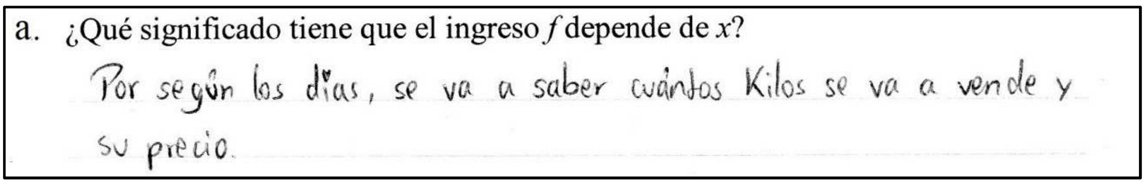
Por otro lado, dentro de los estudiantes que contestaron en forma apropiada esta pregunta, observamos que un estudiante reconoció el significado de la relación entre las dos variables, asumiendo que el ingreso *f* depende del número de días *x* que pasan en la carretera y que está relacionado con la cantidad de fruta que se malogra (ver figura 27). Además, identificó el ingreso como variable dependiente, y a los días que pasan como la variable independiente. Sin embargo, se observa que en el enunciado que ha redactado, ha confundido el ingreso de dinero del comerciante con la ganancia, es decir, ha confundido el dinero que se origina por la venta de un producto con la ganancia que se obtiene al realizar una actividad comercial. Pensamos que esto se debe a que el estudiante presenta dificultades para explicar en lenguaje natural la relación de dependencia de las variables en el contexto del problema.


a. ¿Qué significado tiene que el ingreso *f* depende de *x*?

Significa que el ingreso f es la variable dependiente y x es la variable independiente donde f es el ingreso (la ganancia) q va a depender de los días que pasan y la cantidad de kg que la fruta se malogra.

Figura 27: Respuesta del estudiante 1 – Actividad 1, parte 1

Otro caso fue el de un estudiante (ver figura 28) que tuvo dificultades para comprender el significado de la dependencia entre las dos variables, puesto que solo ha relacionó los días, el número de kilos y el precio, y no consideró la relación de dependencia entre la variable independiente representada por *x* (el número de días que pasan en la carretera) y la variable dependiente representada por *y* (ingreso de dinero). Pensamos que al estudiante le faltó entender el enunciado de la pregunta y darse cuenta de que el ingreso de dinero del comerciante depende del número de días que pase en la carretera, porque le ha faltado mencionar la relación de dependencia entre las dos variables.


a. ¿Qué significado tiene que el ingreso *f* depende de *x*?

Por según los días, se va a saber cuántos Kilos se va a vende y su precio.

Figura 28: Respuesta del estudiante 4 – Actividad 1, parte 1

A partir del análisis precedente, creemos que los distintos tratamientos en el registro de representación en lengua natural son fundamentales, porque ayudan a comprender el enunciado del problema y a movilizar la noción de función cuadrática para coordinar con el registro de representación tabular y el registro de representación algebraico.

Análisis de la actividad 1, parte 2

A continuación presentamos el análisis a priori de las preguntas referidas a tratamientos en el registro de representación algebraica. Estas preguntas tienen como propósito realizar la conversión al registro de representación gráfica.

Parte 2: Trabajando con la representación algebraica de la función cuadrática

Pregunta 1

a. Expresa la función encontrada en la forma $f(x)= ax^2+bx+c$, donde $a\neq 0$
b. ¿Qué tipo de función es f? Justifique su respuesta.

Pregunta 2

a. Expresa la función cuadrática hallada en la forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ y halla el vértice h, k.

Pregunta 3

a. Halla los interceptos de la gráfica de la función cuadrática con el eje x y con el eje y.

Análisis a priori

Pregunta 1

En esta pregunta esperamos que los siete estudiantes realicen el tratamiento tipo cálculo para expresar la función en la forma $f(x)= ax^2+bx+c$, donde $a\neq 0$. En ese sentido, esperamos que los alumnos apliquen la propiedad distributiva al realizar las operaciones, y muestren la función cuadrática en su forma general; luego, queremos que identifiquen la función cuadrática en su representación algebraica denotada por $f(x)= ax^2+bx+c$, donde a, b, c R y $a\neq 0$.

a. Expresa la función encontrada en la forma $f(x)= ax^2+bx+c$, donde $a\neq 0$

Respuesta esperada

$$f(x)=(50-x)\left[(6+x(0,2)\right]$$
$$f(\mathrm{x})=300+10x-6x-0,2x^2$$
$$f(\mathrm{x})=-0,2x^2+4x+300$$

b. ¿Qué tipo de función es f? Justifique su respuesta.

Respuesta esperada

f es una función cuadrática porque es de la forma $f(x)= ax^2+bx+c$, donde a, b, c R y $a\neq 0$

Pregunta 2

Esta pregunta tiene como propósito realizar tratamientos en el registro de representación algebraica para orientar la conversión al registro de representación gráfica. Para tal efecto, esperamos que los estudiantes expresen la función cuadrática en su forma estándar, utilizando el procedimiento de completar cuadrados, es decir, que construyan, mediante operaciones algebraicas, un trinomio cuadrado perfecto y, luego, que reduzcan el resultado a un binomio al cuadrado. Además, a partir de la forma estándar de la función cuadrática, esperamos que identifiquen el punto que representa el vértice. A continuación, mostramos las respuestas esperadas.

c. Expresa la función cuadrática hallada en la forma $f(x)=a(x\text{-h})^2+\text{k}$ y halla el vértice (h; k)

Respuesta esperada

$$f(x) = -0,2x^2+4x+300$$
$$f(x) = \frac{-2}{10}x^2+4x+300$$
$$f(x) = \frac{-1}{5}x^2+4x+300$$
$$f(x) = \frac{-1}{5}\left(x^2-20x\right)+300$$
$$f(x) = \frac{-1}{5}\left(x^2-20x+100-100\right)+300$$
$$f(x) = \frac{-1}{5}\left[\left(x^2-10)^2-100\right)\right]+300$$
$$f(x) = \frac{-1}{5}(x-10)^2+320$$

El vértice (h, k) de la parábola es (10, 320), donde h=10 y k =320.

De acuerdo con Duval (2004), estos tratamientos del registro algebraico son de tipo algorítmicos. En este sentido, esperamos que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos de el algoritmo para completar cuadrados, es decir, a partir de la expresión$f(x)$= -0,2x^2+4x+300 tienen que realizar la transformación a $f(x)$ = $\frac{-1}{5}(x-10)^2+320$.

Pregunta 3

Esta pregunta está orientada a que los estudiantes realicen tratamientos en el registro de representación algebraico. Por consiguiente, esperamos que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos de ecuación cuadrática y función cuadrática. Nuestro propósito es que los estudiantes encuentren las raíces de la ecuación cuadrática a partir de que $f(x)$ = 0.

Además, que determinen el valor que asume *y* cuando *x* toma el valor de cero. Los estudiantes, a partir de este tratamiento en el registro de representación algebraica, deben hallar los puntos de intersección de la gráfica de la función cuadrática con el eje *x* y con el eje y . Mostramos los resultados que se esperan para esta actividad.

a. Halla los interceptos de la gráfica de la función cuadrática con el eje x y con el eje y.

Respuesta esperada

Igualamos a cero la ecuación. Si f(x) = 0, planteamos la siguiente ecuación cuadrática.

$$\frac{-1}{5}(x-10)^2+320=0$$
$$(x-10)^2=1600$$
$$(x-10)=\pm\sqrt{1600}$$
$$x-10=\pm 40$$
$$x_1=-30 \qquad x_2=50$$

Por lo tanto la parábola va a interceptar al eje x en (50, 0) y (-30, 0).

b. Halla el intercepto con el eje y.

Respuesta esperada

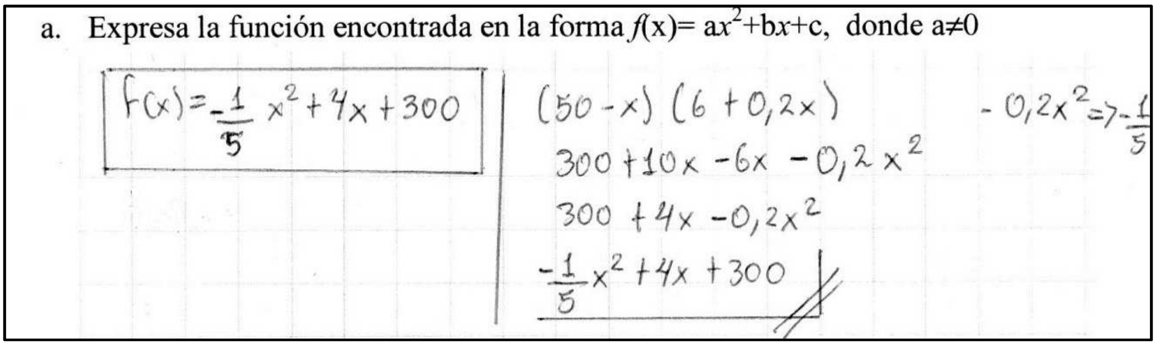
$$f(x)=-\frac{1}{5}(x-10)^2+320$$
$$f(0)=-\frac{1}{5}(0-10)^2+320$$
$$f(0)=-\frac{1}{5}(-10)^2+320$$
$$f(0)=-\frac{1}{5}(100)+320$$
$$f(0)=-20+320$$
$$f(0)=300$$

El intercepto con el eje y es (0, 300).

Análisis a posteriori de la producción de los estudiantes

Pregunta 01

Con respecto a la pregunta relacionada con expresar la función hallada en la forma $f(x)= ax^2+bx+c$, donde $a\neq 0$, observamos que cuatro de los siete estudiantes lograron realizar este tratamiento en forma correcta como lo habíamos planificado en el análisis a priori y los otros tres estudiantes presentaron dificultades en sus procedimientos. Uno de los estudiantes que realizó en forma correcta este tratamiento(ver figura 29), aplicó la propiedad distributiva al multiplicar dos binomios con coeficiente racional. De acuerdo con Duval (1999), los tratamientos en este registro se reducen a la aplicación de algoritmos por tratarse de un registro monofuncional.



a. Expresa la función encontrada en la forma *f*(x)= a*x*²+b*x*+c, donde a≠0

$\boxed{f(x) = -\frac{1}{5}x^2+4x+300}$

$(50-x)(6+0{,}2x)$

$300+10x-6x-0{,}2x^2$

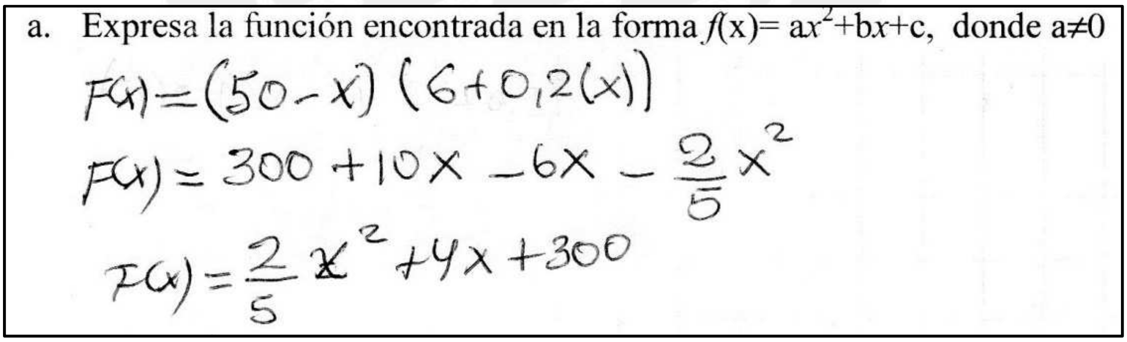
$300+4x-0{,}2x^2$

$-\frac{1}{5}x^2+4x+300$

$-0{,}2x^2 \Rightarrow -\frac{1}{5}$

Figura 29: Respuesta del estudiante 4 – Actividad 1, parte 2

Los otros tres estudiantes presentaron errores de tipo algorítmico en el registro de representación algebraica. Se observa en la figura 30 que este estudiante tuvo dificultades para convertir de0,2 a $\frac{1}{5}$. Observamos que ha aplicado en forma inapropiada el algoritmo de conversión de decimal a fracción. Desde la perspectiva de Duval (1999), el tránsito de la expresión decimal a fracción no es una tarea trivial para los estudiantes, ya que el estudiante tiene que identificar los diferentes tipos de decimales (finitos y periódicos), y aplicar en forma apropiada el algoritmo que trasforme la expresión decimal en fracción.



a. Expresa la función encontrada en la forma *f*(x)= a*x*²+b*x*+c, donde a≠0

$F(x)=(50-x)(6+0{,}2(x))$

$F(x)=300+10x-6x-\frac{2}{5}x^2$

$F(x)=\frac{2}{5}x^2+4x+300$

Figura 30: Respuesta del estudiante 6 – Actividad 1, parte 2

Además, en relación a las preguntas de reconocer y justificar el tipo de función que es *f*, solo uno de los siete estudiantes reconoció la función cuadrática como lo habíamos planificado en el análisis a priori. A la mayoría de estudiantes le ha faltado mencionar las restricciones de a, b, c ∈ R ya≠ 0 (ver figura 31), pues solo se focalizaron en la representación algebraica $f(x)= ax^2+bx+c$.Pensamos que no reconocieron a la función cuadrática con sus restricciones porque los estudiantes solo se centraron en la representación algebraica, o tal vez asumen los restricciones de a, b, c ∈ R y a ≠ 0 de forma tácita. En este sentido, de acuerdo con

Duval(1999) los estudiantes presentan un reconocimiento incompleto del contenido de la representación algebraica, ya que les ha faltado agregar quea, b, c $\in$R y a $\neq$ 0.

b. ¿Qué tipo de función es *f*? Justifique su respuesta.

Es una función cuadrática, porque tiene la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Figura 31: Respuesta del estudiante 3 – Actividad 1, parte 2

Pregunta 2

Siguiendo la misma línea, con relación a la pregunta que implica realizar el tratamiento en el registro de representación algebraica para expresar la función cuadrática en su forma estándar $f(x)=a(x\text{-}h)^2+k$ con el propósito de hallar el punto que representa el vértice, cuatro de los siete estudiantes realizaron en forma apropiada este tratamiento como habíamos previsto en el análisis a priori (ver figura 32). Esto fue posible, porque los estudiantes conocían el procedimiento de completar cuadrados, y que el punto (h, k) representa el vértice de la parábola. Según Duval (1999), los tratamientos en este registro algebraico son algoritmizables;es decir, son tareas de cálculo que se relacionan con un conjunto secuenciado de operaciones para resolver una situación.

a. Expresa la función cuadrática hallada en la forma $f(x)=a(x\text{-}h)^2+k$ y halla el vértice (h; k).

$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 4x + 300$

$f(x) = -\frac{1}{5}(x^2 - 20x) + 300$

$f(x) = -\frac{1}{5}(x^2 - 20x + 100 - 100) + 300$

$f(x) = -\frac{1}{5}(x - 10)^2 + 320$.

$a = -\frac{1}{5}$; $h = 10$; $k = 320$

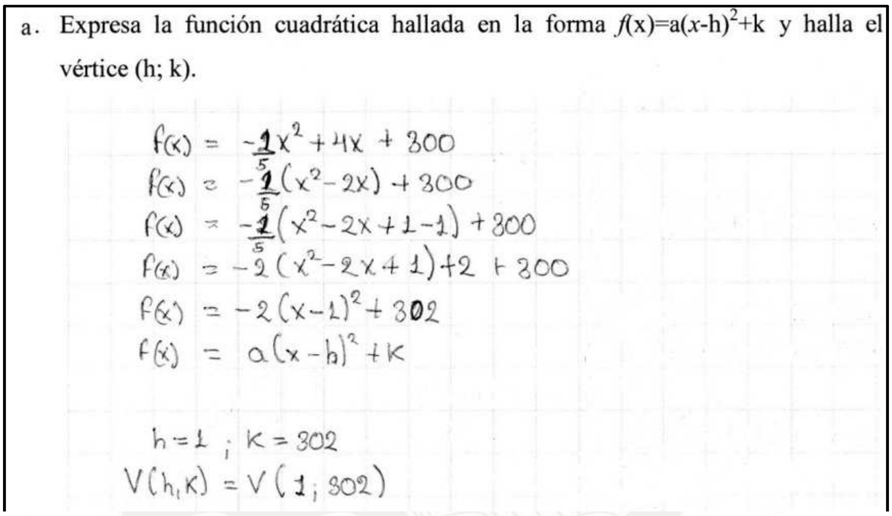
$V = (10; 320)$

Figura 32: Respuesta del estudiante 7 – Actividad 1, parte 2

Los otros tres estudiantes han presentado errores en las operaciones de cálculo, pues no han aplicado en forma apropiada el procedimiento de completar cuadrados. Por ejemplo, se observa en la figura 33 que el estudiante ha realizado la factorización en forma errónea, y, por esta razón no ha completado cuadrados en forma apropiada. Desde la perspectiva de

Duval(2004), para trabajar en este registro de representación algebraica, los estudiantes tienen que automatizar los algoritmos que permiten realizar estos tratamientos.

Por otra parte, también observamos que este tratamiento les posibilitó a los estudiantes el tránsito entre el registro de representación algebraica (registro de partida) y el registro de representación algebraica (registro de llegada). Esto les ayudó a relacionar los valores de h, k de la forma estándar $f(x)=a(x\text{-}h)^2+k$ con el que representa el vértice de la parábola que representa la función cuadrática.


a. Expresa la función cuadrática hallada en la forma $f(x)=a(x\text{-}h)^2+k$ y halla el vértice (h; k).

$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 4x + 300$
$f(x) = -\frac{1}{5}(x^2 - 2x) + 300$
$f(x) = -\frac{1}{5}(x^2 - 2x + 1 - 1) + 300$
$f(x) = -2(x^2 - 2x + 1) + 2 + 300$
$f(x) = -2(x-1)^2 + 302$
$f(x) = a(x-h)^2 + k$

$h = 1 \; ; \; k = 302$
$V(h, k) = V(1; 302)$

Figura 33: Respuesta del estudiante 4 – Actividad 1, parte 2

Pregunta 3

Con relación a la pregunta, en la que los estudiantes tienen que hallar la intersección con los ejes del sistema de coordenadas, a partir de los resultados analizados; observamos que cuatro de los siete estudiantes realizaron en forma apropiada este tratamiento en el registro de representación algebraica (como lo habíamos planificado en el análisis a priori), ya que, según Duval (2004), estás transformaciones tienen éxito si lo estudiantes conocen las reglas del funcionamiento del registro que están trabajando. En este caso, se ha demostrado que en esta pregunta estos cuatro estudiantes conocen que para hallar los puntos de intersección con el eje *x*, hay que determinar $f(x) = 0$. Además, conocen y aplican en forma correcta el procedimiento para hallar las raíces de la ecuación cuadrática. Asimismo, reconocen que para hallar el punto de intersección con el eje *y*, *x* toma el valor de 0 y lo reemplazan en la representación algebraica de *f*. Este conocimiento les ha permitido la realización de los tratamientos en forma exitosa (ver figura 34). Asimismo, observamos que el estudiante identifica el valor dependiente de la variable *y*, al asumir que *f*(x) = *y*. Creemos que esto le ha permitido identificar los valores del rango de la función con los valores de la variable *y*.

a. Halla los interceptos de la gráfica de la función cuadrática con el eje x.

Hallo los interceptos con el eje x cuando $y = 0$

$F(x) = y = -\frac{1}{5}(x-10)^2 + 320$

$0 = -\frac{1}{5}(x-10)^2 + 320$

$-320 = -\frac{1}{5}(x-10)^2$

$\frac{-320}{\boxed{\times(-\frac{1}{5})}} = (x-10)^2$

$1600 = (x-10)^2$

$\pm\sqrt{1600} = \sqrt{(x-10)^2}$

$\pm 40 = (x-10)$

Para x_1: $+40 = x_1 - 10 \rightarrow x_1 = 50$

Para x_2: $-40 = x_2 - 10$; $-30 = x_2$

∴ los interceptos con el eje x son los puntos (50; 0) y (-30; 0)

i. Halla el intercepto con el eje y.

Hallo el intercepto con el eje y cuando x vale 0

$F(x) = y = -\frac{1}{5}(x-10)^2 + 320$

$y = -\frac{1}{5}(0-10)^2 + 320$

$y = -\frac{1}{5}(100) + 320$

$y = -20 + 320$

$y = 300$

∴ El intercepto con el eje y es el punto (0; 300)

Figura 34: Respuesta del estudiante 1 – Actividad 1, parte 2

De acuerdo con la perspectiva de Duval (1999), creemos que este tratamiento ayudó a los estudiantes a transitar desde el registro de representación algebraica (registro de partida) hasta el registro de representación gráfica (registro de llegada). Dicho tratamiento los ayudó a relacionar las raíces de la ecuación cuadrática con los puntos que representa la intersección con el eje *x* del sistema de coordenadas. Además, los ayudó a relacionar el valor de *y* cuando *x* toma el valor 0 con el punto que representa la intersección en el eje *y* del sistema de coordenadas cartesianas.

Los otros tres estudiantes se equivocaron al determinar los puntos de intersección con el sistema de coordenadas, ya que cometieron errores al hallar las raíces de la ecuación cuadrática (ver figura 35). De acuerdo con Duval (1999), estos errores se producen porque los estudiantes no conocen las reglas de combinación en este registro, los cuales vendrían a ser los algoritmos.

a. Halla los interceptos de la gráfica de la función cuadrática con el eje x.

$y = 0$ ó $f(x) = 0$

$f(x) = -\frac{1}{5}(x-1)^2 + 302$

$0 = -2(x-1)^2 + 302$

$-302 = -2(x-1)^2$

$\frac{-302}{-2} = (x-1)^2$

$=$

Figura 35: Respuesta del estudiante 5 – Actividad 1, parte 2

A partir del análisis precedente, observamos que los estudiantes que tuvieron éxito en los tratamientos en el registro de representación algebraica conocían el procedimiento para hallar las raíces de la ecuación cuadrática.

nociones de ecuación cuadrática y función cuadrática. Además, aplicaron en forma apropiada los algoritmos de cálculo y las propiedades básicas de ecuación cuadrática. En cambio, a los estudiantes que cometieron errores, les faltó dominar las nociones ya mencionadas. Esto nos permite confirmar la afirmación de Duval (2004), el cual menciona que la realización de los tratamientos en forma apropiada depende del conocimiento de las reglas del sistema semiótico en el cual se produce la representación.

Análisis de la actividad 01, parte 03

A continuación presentamos el análisis a priori de las preguntas referidas a tratamientos en el registro de representación gráfica. Estas preguntas tienen como propósito realizar tratamientos en este registro y realizar la coordinación con el registro de representación algebraica.

Parte 3: Trabajando con la representación gráfica de la función cuadrática

Pregunta 1

b. Teniendo en cuenta el vértice y los interceptos hallados, realiza la representación gráfica de la función. (sin considerar el contexto del problema).

Pregunta 2

c. Analiza los valores que puede asumir x (dominio de la función) y f (rango de la función), gráfica nuevamente la función cuadrática considerando estos valores.

Pregunta 3

a. ¿Podrá el comerciante alcanzar un ingreso mayor a S/.320?
b. Expresa con tus propias palabras el significado de h y k en el contexto del problema.

Pregunta 4

a. ¿Un intercepto puede tener abscisa negativa?, y ¿En el contexto del problema el intercepto (-30,0), (50,0) y (0,300) qué significan?.

Pregunta 5

a. Si pasan 15 días, ¿cuánto será el ingreso? Ubica el punto en la representación gráfica y explica con tus propias palabras el significado de este punto en términos del problema.
b. Si pasan 45 días, ¿cuánto será el ingreso? Ubica el punto en la representación gráfica y explica con tus propias palabras el significado de este punto en términos del problema.

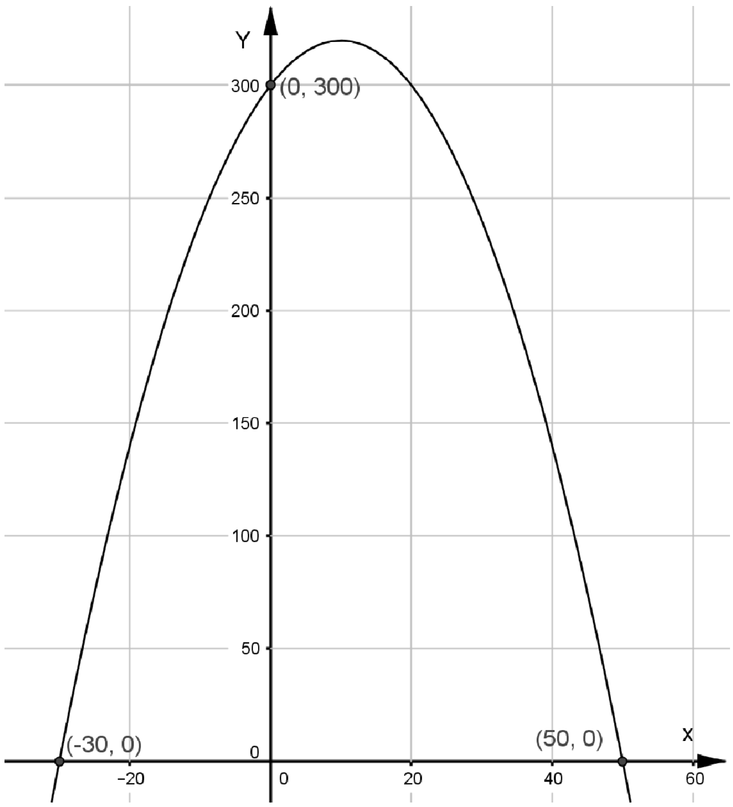
Análisis a priori

Pregunta 1:

Esperamos que los estudiantes realicen la conversión del registro de representación algebraica al registro de representación gráfica, es decir, que grafiquen la función cuadrática (sin considerar el contexto del problema), con el fin de obtener una curva llamada parábola. En este sentido, deben relacionar las raíces de la ecuación cuadrática con el punto de intersección con el eje *x*, el valor *y* cuando *x* toma el valor de cero con el punto que representa la intersección con el eje *y*. Además, también tienen que relacionar los valores h, k de la forma estándar de *f* con el punto que representa el vértice en la representación gráfica de *f*. Mostramos la respuesta esperada para esta pregunta.

- Teniendo en cuenta el vértice y los interceptos hallados, realiza la representación gráfica de la función. (sin considerar el contexto del problema)

Respuesta esperada



Pregunta 2

Con esta pregunta, esperamos que los estudiantes realicen tratamientos en el registro de representación gráfica. De este modo, deben observar toda la gráfica o parte de ella e identificar las variables que intervienen en la gráfica, para determinar, así, que la variable *x*representa el número de días que pasan en la carretera y la variable *y* representa el ingreso de dinero del comerciante. Además, tienen que interpretar la gráfica y percatarse del significado de la relación entre estas dos variables, en particular, del patrón de variación conjunta. A partir de esta interpretación, deben descubrir los respectivos valores que puede tomar cada una de las variables considerando el contexto del problema. Desde la perspectiva de Duval (1999), este tipo de tratamiento requiere de las interpretaciones global y local de la representación gráfica. Por ello, también esperamos que construyan la nueva gráfica de la función cuadrática considerando estos valores ya comprendidos. Mostramos los resultados esperados para esta pregunta.

a. Analiza los valores que puede asumir *x* (dominio de la función) y *f* (rango de la función), grafica nuevamente la función cuadrática considerando estos valores en el contexto del problema.

Respuesta esperada

Los valores que toma *x* es $0 \leq x \leq 50$, donde $x \in R$ y el valor que toma f es $0 \leq f \leq 320$

Pregunta 3

Esperamos que los estudiantes observen la representación gráfica de la función cuadrática, y que, a partir de ahí, interpreten la relación entre las dos variables, identificando así el punto que representa el máximo valor que toma la función cuadrática. Luego, queremos que expliquen, en forma escrita, que el comerciante no puede alcanzar un ingreso mayor a S/ 320. Además, deben interpretar el significado de los valores de h, k en el contexto del problema para relacionar, así, el registro de representación algebraica con el registro de representación gráfica. De acuerdo con Duval (2004), estas preguntas exigen que los estudiantes realicen tratamientos en estos registros de representación. A continuación, presentamos los resultados esperados para esta actividad.

a. ¿Podrá el comerciante alcanzar un ingreso mayor a S/.320?

Respuesta esperada

El comerciante ya no alcanza un ingreso mayor a S/. 320, porque en ese punto la función alcanza su máximo valor.

b. Expresa con tus propias palabras el significado de h y k en el contexto del problema.

Respuesta esperada

Significa que cuando pasan 10 días el comerciante alcanza su máximo ingreso de 320 soles.

Pregunta 4

En esta pregunta, esperamos que los estudiantes interpreten, en el contexto del problema, el significado de los puntos que representan la intersección de la parábola con los ejes del sistema de coordenadas. En este punto se espera que los estudiantes interpreten y justifiquen en forma escrita el significado de los puntos. Mostramos los resultados esperados para esta pregunta.

a. ¿Un intercepto puede tener abscisa negativa?, y ¿En el contexto del problema el intercepto (-30,0), (50,0) y (0,300) qué significan?

Respuesta esperada

Un intercepto si puede tomar abscisa negativa, pero en el contexto del problema el intercepto (-30, 0) significa que tienen que pasar -30 días para que el ingreso sea 0, y esto no tiene sentido, es decir, los días que pasan no pueden ser negativos. Luego, el intercepto (50, 0), quiere decir que cuando pasan 50 días en la carretera no hay ingreso, pues se malogran todas las frutas y por último el intercepto (0,300), significa que cuando no pasa ningún día en la carretera el ingreso sería 300 soles.

Pregunta 5

Esperamos que los estudiantes realicen tratamientos en el registro de representación gráfica referida a hallar, interpretar el significado de algunos puntos que conforman la parábola, es decir, que hallen e interpreten el ingreso del comerciante si pasan 15 días, y 45 días. Según Duval (1999), este tipo de tratamiento se denomina la vía del punteo. Mostramos los resultados esperados para esta pregunta.

> a. Si pasan 15 días, ¿cuánto será el ingreso? Ubica el punto en la representación gráfica y explica con tus propias palabras el significado de este punto en términos del problema.
>
> **Respuesta esperada**
>
> Si pasan 15 días el ingreso es (50-15) $[(6+15(0{,}20)]$ = 315 soles**.**
>
> b. Si pasan 45 días, ¿cuánto será el ingreso? Ubica el punto en la representación gráfica y explica con tus propias palabras el significado de este punto en términos del problema.
>
> **Respuesta esperada**
>
> Si pasan 45 días el ingreso es (50-45) $[(6+45(0{,}20)]$ = 75 soles.

Análisis a posteriori de la producción de los estudiantes

Pregunta 1

Observamos en la figura 36 que solo uno de los siete estudiantes realizó en forma completa la conversión del registro de representación algebraico (registro de partida) al registro de representación gráfica (registro de llegada), así como habíamos planificado en el análisis a priori. Se constata que este estudiante ubicó el punto (10; 320) que representa el vértice de la gráfica; los puntos (-30; 0),(50; 0) que representan la intersección con el eje *x;* y el punto (0, 300) que representa la intersección con el eje *y*, luego trazó la gráfica uniendo estos tres puntos.

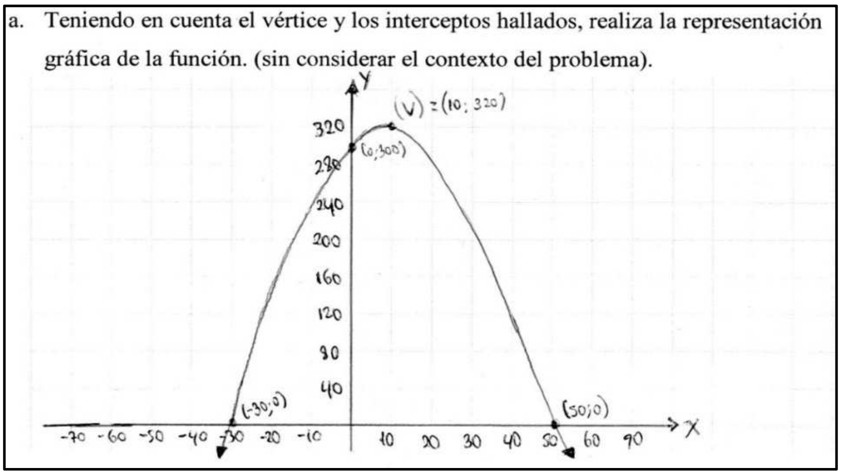


Figura 36: Respuesta del estudiante 1 – Actividad 1, parte 3

Asimismo, cuatro estudiantes realizaron en forma incompleta la conversión del registro de representación algebraica al registro de representación gráfico. Observamos en la figura 37 que uno de estos estudiantes ha construido el gráfico en forma incompleta, pues solo lo ha limitado al lado positivo del eje *y*. Pensamos que esto se debe a que a los estudiantes les ha faltado interpretar la condición de la pregunta (sin considerar el contexto del problema), e identificar que la variable *y* toma valores positivos. Asimismo, observamos que los estudiantes han ubicado en forma correcta los puntos que representan la intersección tanto con el eje *y* como con el eje *x* en el sistema de coordenadas, pero les ha faltado nombrar dichos ejes.

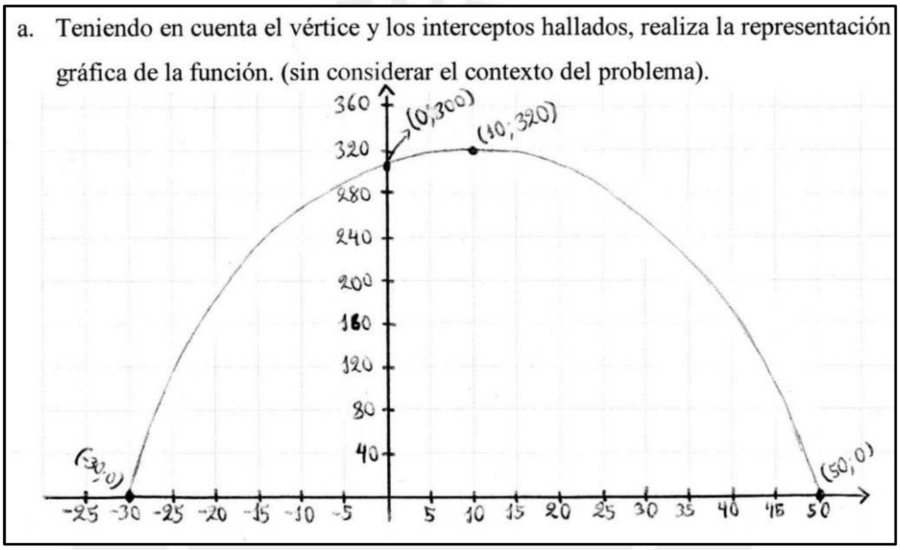


Figura 37: Respuesta del estudiante 3 – Actividad 1, parte 3

A partir del análisis de esta pregunta, hemos constatado que los estudiantes, al realizar la conversión del registro de representación algebraico al gráfico, han movilizado los siguientes conocimientos previos: sistema de coordenadas cartesianas, puntos que representan la intersección tanto con el eje *x* como con el eje *y*, gráfico de la función cuadrática y vértice de la función cuadrática. Además, han establecido relaciones entre los valores de h y k de la representación algebraica con el vértice de la representación gráfica; y los valores que asume *x* cuando $y = 0$, con el punto de intersección de la parábola con el eje *x* del sistema de coordenadas. También han hallado el valor que asume *y* cuando $x = 0$, con el punto de intersección de la parábola con el eje *y*.

Considerando la perspectiva de Duval (1999), creemos que esta conversión se ha producido en forma de una codificación, puesto que depende de los tratamientos de tipo algorítmicos que el estudiante tiene que realizar en el registro algebraico.

Pregunta 2

A partir del análisis de las repuestas dadas por los estudiantes, constatamos que cinco de los siete estudiantes ha contestado tal como lo habíamos previsto en el análisis a priori. En ese sentido, se observa en la figura 38 que un estudiante ha relacionado los valores que pueden asumir el dominio y el rango de la función cuadrática. Pensamos que este estudiante ha utilizado la representación gráfica como soporte perceptivo para identificar los valores que asume el dominio (número de días que pasa el comerciante en la carretera) y los valores que asume el rango (ingreso de dinero del comerciante), de esta manera se percató de que el dominio es [0; 50] y el rango es [0; 300]. Esto implica, según Duval (1999), que el estudiante ha realizado una interpretación local de la representación gráfica.

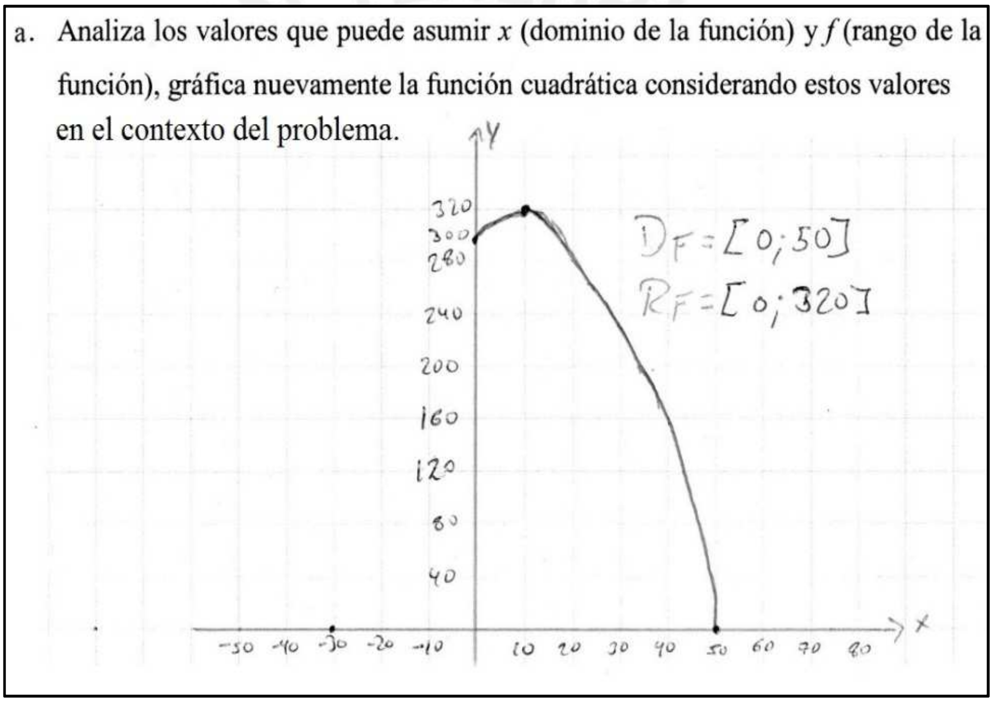


Figura 38: Respuesta del estudiante 4 – Actividad 1, parte 3

Por otro lado, hemos verificado que dos estudiantes han contestado esta pregunta en forma incorrecta, es decir, han presentado dificultades para hallar el rango de la función cuadrática. Es así que se observa en la figura 39 que un estudiante ha confundido el rango de la función cuadrática con el punto que representa la intersección con el eje *y* del sistema de coordenadas, asumiendo así que el rango es [0; 300] en vez de [0; 320]. Pensamos que el estudiante ha utilizado como soporte perceptivo el eje *y* para hallar el rango, pues se verifica que no tiene clara la noción de rango. Desde la perspectiva de Duval (1999), le ha faltado realizar la interpretación local de la figura, es decir, interpretar los puntos de intersección con el eje *x*, con el eje *y*, luego, realizar una reconfiguración de la figura para deducir que el rango corresponde al intervalo [0; 320].

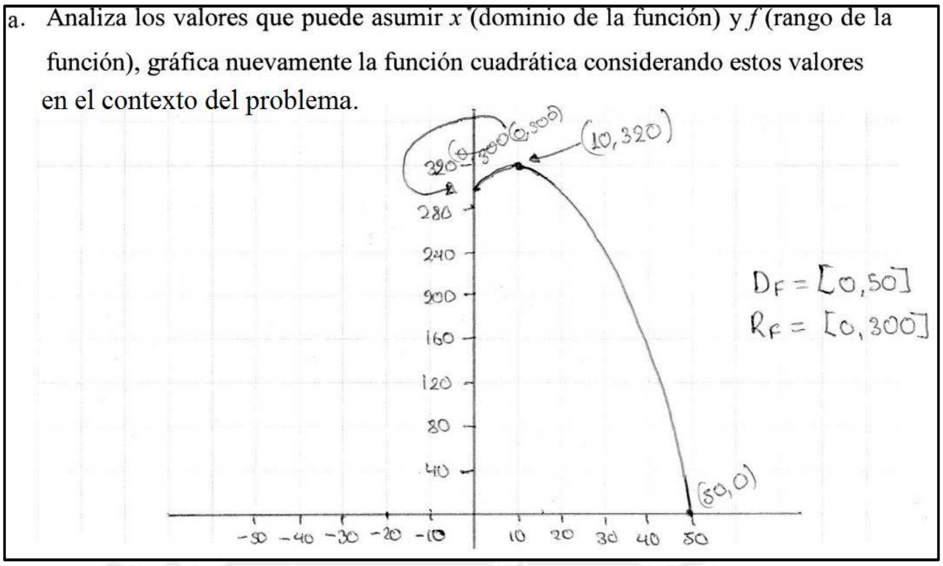


Figura 39: Respuesta del estudiante 5 – Actividad 1, parte 3

Pregunta 3

En relación al ítem (a), cuatro estudiantes han contestado esta pregunta en forma incompleta. Se observa en la figura 40 que a un estudiante le ha faltado justificar que S/. 320 es el máximo valor que alcanza la función cuadrática y que corresponde a la ordenada del vértice de la parábola. Pensamos que estos estudiantes presentan estas dificultades porque están poco familiarizados con el uso de la lengua natural asociada a un discurso matemático para explicar y justificar resultados matemáticos en un contexto dado.

a. ¿Podrá el comerciante alcanzar un ingreso mayor a S/.320?

NO; porque S/320 es el máximo ingreso que alcanza al vender su producto - que este en buenas condiciones

Figura 40: Respuesta del estudiante 7 – Actividad 1, parte 3

Asimismo, solo un estudiante ha relacionado el máximo valor con el vértice de la función cuadrática y se muestra su desarrollo en la figura 41. Se observa que ha movilizado la noción de vértice, pero de una manera errónea, puesto que, el vértice está representado por un punto con su respectiva abscisa y ordenada. Además, ha mencionado que 320 es el vértice máximo. Notamos que presenta dificultades en su noción de vértice y en la determinación del máximo valor que toma la función cuadrática, ya que 320 es el máximo valor que toma la función cuadrática denotado por la ordena del vértice de dicha función. Pensamos que el estudiante muestra deficiencias conceptuales sobre la noción de vértice de la función cuadrática, al mismo tiempo que muestra dificultades para justificar en lenguaje natural temas asociados con nociones matemáticas.

a. ¿Podrá el comerciante alcanzar un ingreso mayor a S/.320?

No, porque 320 es el vértice máximo.

Figura 41: Respuesta del estudiante 3 – Actividad 1, parte 3

Cabe resaltar que cuatro estudiantes contestaron de forma correcta el ítem (b) tal como lo habíamos previsto en el análisis a priori. Observamos en la figura 42 que un estudiante ha movilizado sus conocimientos previos sobre la noción de vértice para interpretar esta noción en el contexto del problema: solo le ha faltado determinar los valores que asumen h y k.

b. Expresa con tus propias palabras el significado de h y k en el contexto del problema.

h: es el número de días que pasarán para que se obtenga un máximo ingreso
K: es el máximo ingreso que se puede obtener.

Figura 42: Respuesta del estudiante 6 – Actividad 1, parte 3

Asimismo, tres de siete estudiantes resolvieron de forma inapropiada esta pregunta (como habíamos previsto en el análisis a priori). En la figura 43, se observa que un estudiante ha tenido dificultades para describir el significado de h, pues, en principio, ha incurrido en errores de redacción, y le ha faltado determinar los días transcurridos en la carretera para obtener el máximo ingreso. Además, le ha faltado precisar que k es el máximo ingreso de dinero que el comerciante puede obtener. Pensamos que esto se debe a que tiene deficiencias conceptuales sobre la noción de vértice de la parábola y está poco familiarizado con la explicación y justificación en lengua natural de las propiedades y elementos de la función cuadrática.

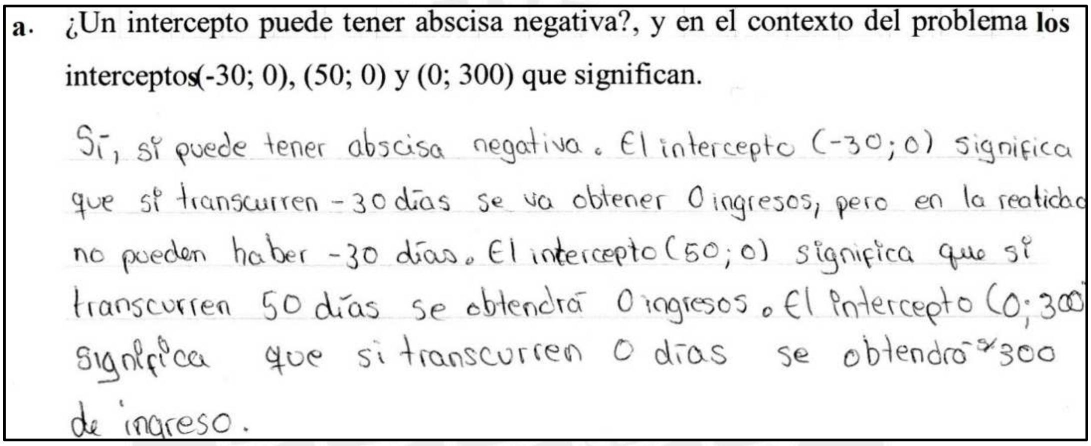
b. Expresa con tus propias palabras el significado de h y k en el contexto del problema.

h => viene hacer los días transcurridos en la carretera
k => viene hacer el (~~precio~~) ingreso obtenido durante los días

Figura 43: Respuesta del estudiante 3 – Actividad 1, parte 3

Pregunta 4

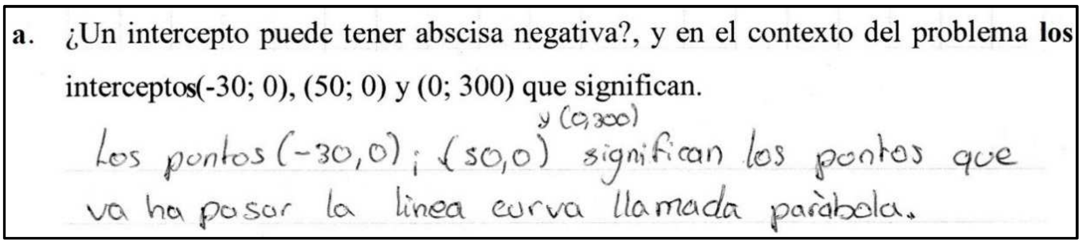
En general, hemos constatado que cuatro de los siete estudiantes han contestado como habíamos previsto en el análisis a priori. Se observa en la figura 44 que un estudiante ha interpretado en el contexto del problema el significado de los puntos de intersección de la parábola con los ejes de coordenadas. Pensamos que esta pregunta ayudó a los estudiantes a comprender el significado de los puntos de intersección con los ejes de coordenadas, a partir de la visualización de la representación gráfica de la función cuadrática, en el cual han relacionado el número de días que pasa el camión en la carretera con el ingreso del comerciante. Esto implica, según Duval (1999), que los estudiantes han realizado un tratamiento por punteo, porque están asociando a cada punto con una pareja de números, relacionando así el número de días que pasan en la carretera con el ingreso de dinero del comerciante.


a. ¿Un intercepto puede tener abscisa negativa?, y en el contexto del problema **los** interceptos(-30; 0), (50; 0) y (0; 300) que significan.

Sí, sí puede tener abscisa negativa. El intercepto (-30;0) significa que si transcurren -30 días se va obtener 0 ingresos, pero en la realidad no pueden haber -30 días. El intercepto (50;0) significa que si transcurren 50 días se obtendrá 0 ingresos. El intercepto (0;300) significa que si transcurren 0 días se obtendrá S/300 de ingreso.

Figura 44: Respuesta del estudiante 3 – Actividad 1, parte 3

Por otro lado, hemos constatado que tres de los siete estudiantes han cometido errores en sus repuestas. Se observa en la figura 45, que un estudiante solo han identificado estos puntos, como puntos de paso de la parábola: le ha faltado reconocer que estos puntos representan la intersección de la parábola con los ejes de coordenadas y explicar su significado en el contexto del problema. Concluimos en que estos estudiantes han tenido dificultades, pues no han leído bien la pregunta y no han utilizado a la representación gráfica de la función cuadrática como soporte perceptivo para interpretar los puntos de intersección en el contexto del problema.


a. ¿Un intercepto puede tener abscisa negativa?, y en el contexto del problema **los** interceptos(-30; 0), (50; 0) y (0; 300) que significan.

Los puntos (-30,0); (50,0) y (0,300) significan los puntos que va ha pasar la linea curva llamada parábola.

Figura 45: Respuesta del estudiante 5 – Actividad 1, parte 3

Pregunta 5

A partir del análisis, hemos constatado que cuatro estudiantes han contestado en forma correcta esta pregunta, pero han empleado un procedimiento diferente al que habíamos previsto en el análisis a priori. En ese sentido, observamos en la figuras 46 que un estudiante ha hallado la imagen *f*(15) utilizando la representación algebraica de la función cuadrática*f*(x) = $\frac{1}{5}x^2$+4x+300, luego han ubicado el punto en la representación gráfica. Desde la mirada de Duval (2004), esta operación es un tipo de tratamiento por punteo, es decir, el estudiante ha identificado un punto de paso de la parábola. Además, observamos que el estudiante ha asociado a esta respuesta una interpretación en lenguaje natural, asumiendo que si pasan 15 días el estudiante obtendrá un ingreso de S/. 315.Luego ha recurrido al registro de representación gráfico para ubicar el punto.

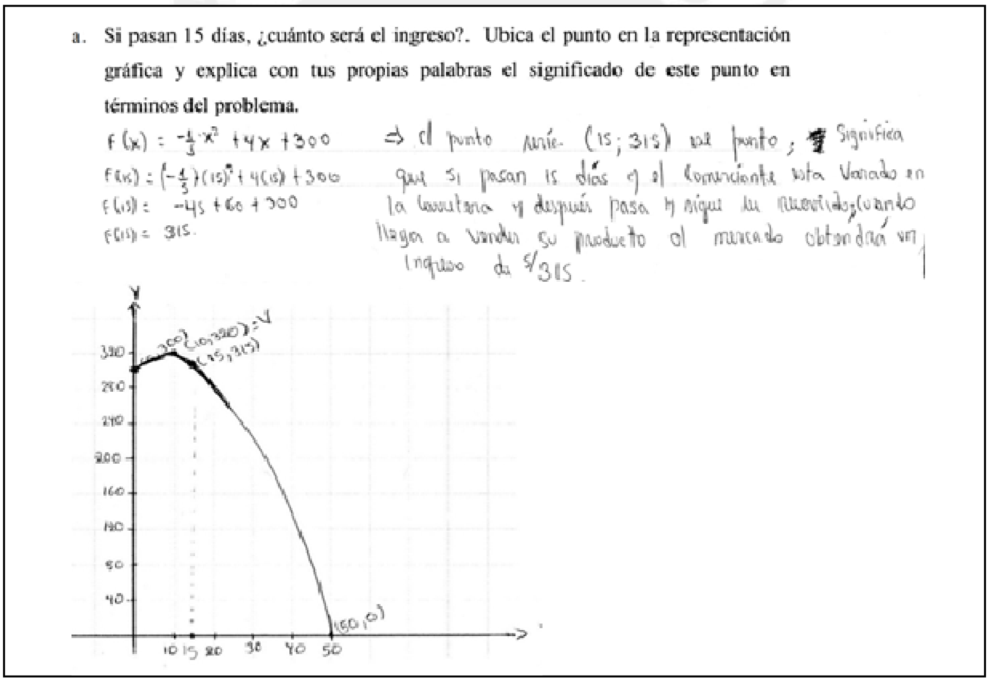


Figura 46: Respuesta del estudiante 1– Actividad 1, parte 3

A partir del análisis, hemos constatado que este estudiante ha relacionado el registro de representación algebraica con el registro de representación gráfica, asociando una justificación en lenguaje natural considerando el contexto del problema.

También hemos constatado que tres estudiantes tuvieron dificultades para responder esta pregunta, ya que no han hallado la forma correcta de la representación algebraica. Esto se observa en la figura 47. Pensamos que esto situación se debe a que no han establecido en forma correcta la regla que asocia el número de días que pasan en la carretera y el ingreso de dinero del comerciante esto, porque no ha realizado en forma correcta el tratamiento de parafraseo en el registro en lengua natural.

a. Si pasan 15 días, ¿cuánto será el ingreso?. Ubica el punto en la representación gráfica y explica con tus propias palabras el significado de este punto en términos del problema.

15 = \$ 50-15=35 (6+0,2)(15)=93 50.93 = 465

Significado: Que al quedarse plantado 15 días su ingreso sera 465.

Figura 47:Respuesta del estudiante 2 – Actividad 1, parte 3

Análisis de la actividad 01, parte 04

En esta parte, presentamos el análisis de las preguntas referidas a la variable didáctica signo del término cuadrático. Estas preguntas tienen como propósito que los estudiantes transiten los registros de representación en lengua natural, algebraica y gráfica a partir de variaciones en el enunciado del problema planteado en la parte 1.

Parte 4: Trabajando con la variable didáctica signo del coeficiente del término cuadrático

Pregunta 1

a. ¿Cómo sería la representación algebraica de la función ingreso *f*, si en vez de que el precio aumente, este disminuiría en 0,20 al día para incentivar la venta de las naranjillas que quedan?Realiza la modificación al problema de la actividad 1.
b. ¿La modificación realizada en el enunciado, qué variaciones originó en la función encontrada en la parte 2a? Escribir las dos funciones y señalar la variación. (sin considerar el contexto del problema)

Pregunta 2

a. ¿Al variar el signo del término cuadrático de la función ingreso *f*, cómo se modificó la representación gráfica?¿la función alcanza un mínimo o máximo valor? Para eso realiza la representación gráfica.

Análisis a priori

Pregunta 01:

En esta pregunta, esperamos que los estudiantes realicen la conversión del registro de representación en lengua natural al registro de representación en registro algebraico considerando las variaciones del enunciado (si en vez de que el precio aumente, este disminuye en 0,20 al día) del problema planteado en la parte 2. Además, esperamos que los estudiantes descubran que las variaciones en el enunciado han producido variaciones en la expresión algebraica de la función cuadrática. Siguiendo a Duval (1999), esperamos que los estudiantes transiten por el registro de representación en lengua natural al registro de representación algebraico, dándose cuenta que al disminuir el precio de la naranjilla en 0, 20 al día, se produce una variación del signo del término cuadrático de negativo a positivo, y también varía el término lineal de $4x$ a $16x$ de la representación algebraica de la función cuadrática. A continuación mostramos la respuesta esperada para esta pregunta.

a. ¿Cómo sería la representación algebraica de la función ingreso *f*, si en vez de que el precio aumente este disminuiría en S/. 0,20 al día para incentivar la venta de las naranjillas que quedan? Realiza la modificaciónal problema de la actividad 1.

Respuesta esperada

$$f(\mathrm{x}) = (50 - \mathrm{x})\left[(6 - \mathrm{x}(0,2))\right]$$
$$f(\mathrm{x}) = 0,2\,\mathrm{x}^2 - 10x - 6x + 300$$
$$f(\mathrm{x}) = 0,2\,\mathrm{x}^2 - 16x + 300$$

b. ¿La modificación realizada en el enunciado, qué variaciones originó en la función encontrada en la parte 2a? Escribir las dos funciones y señalar la variación. (sin considerar el contexto del problema)

Respuesta esperada

Originó una variación en el signo del término cuadrático y también ha variado el término lineal.

$f(x) = -0,2x^2 - 4x + 300$, ha variado a $f(x) = 0,2x^2 - 16x + 300$

Pregunta 2

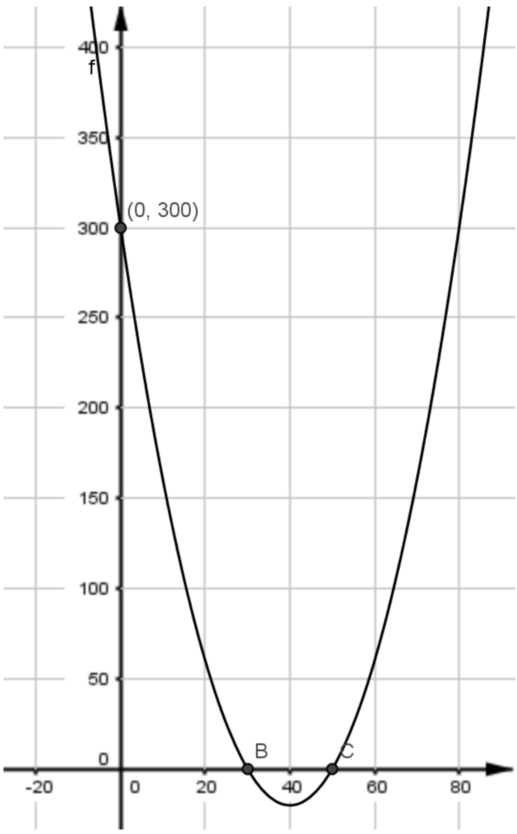
Esperamos que los estudiantes realicen la conversión delregistro de representación algebraica al registro de representación gráfica. Considerando la perspectiva de Duval (1999), esperamos que los estudiantes transiten por el registro de representación algebraica y por el registro de representación gráfica, al poner en correspondencia las unidades significantes de la representación algebraica (signo del término cuadrático) con los valores visuales de la representación gráfica (la parábola alcanza su mínimo valor y se abre hacia arriba)

Pregunta 2

a. ¿Al variar el signo del término cuadrático de la función ingreso *f*, cómo se modificó la representación gráfica?¿la función alcanza un mínimo o máximo valor? Para eso realiza la representación gráfica.

Respuesta esperada

Al variar el signo del término cuadrático la parábola alcanza su mínimo valor y se abre hacia arriba.

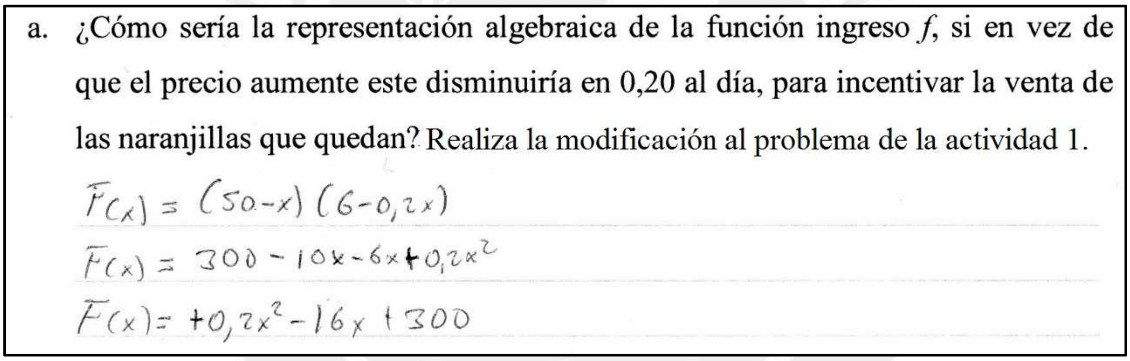


Análisis a posteriori de la producción de los estudiantes

Pregunta 1

A partir del análisis, en relación a las respuestas del ítem (a) hemos constatado que cuatro de los siete estudiantes realizaron en forma correcta la conversión del registro de representación en lengua natural al algebraico como lo habíamos previsto en el análisis a priori. Observamos en la figura 48 que un estudiante realizó en forma apropiada el tratamiento de tipo algorítmico en el registro de representación algebraico, mostrando la función cuadrática como$f(x)= 0{,}2x^2 - 16x + 300$.

Siguiendo la perspectiva de Duval, pensamos que esta conversión se produjo en forma de una codificación, porque los estudiantes ya se habían apropiado de la regla de correspondencia de las dos variables en la parte 1, por ello, en la resolución del problema, se disminuyó en 0,20 en vez de aumentar.


a. ¿Cómo sería la representación algebraica de la función ingreso *f*, si en vez de que el precio aumente este disminuiría en 0,20 al día, para incentivar la venta de las naranjillas que quedan? Realiza la modificación al problema de la actividad 1.

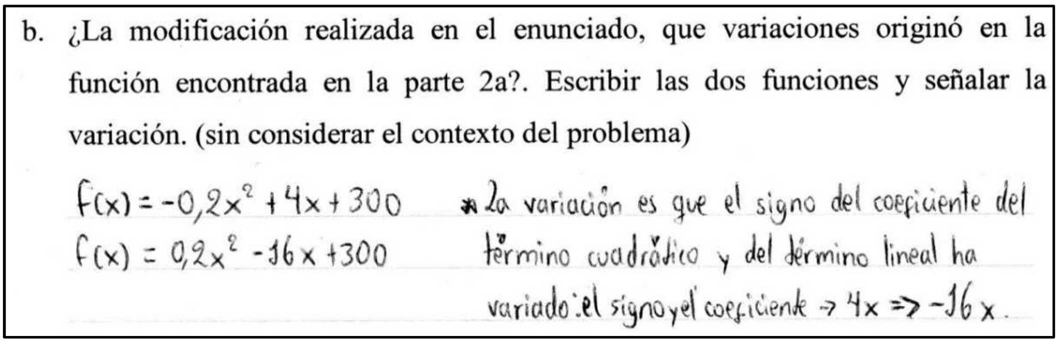
$F(x) = (50-x)(6-0{,}2x)$

$F(x) = 300 - 10x - 6x + 0{,}2x^2$

$F(x) = +0{,}2x^2 - 16x + 300$

Figura 48: Respuesta del estudiante 7 – Actividad 1, parte 4

En la misma línea, con relación a las respuestas del ítem (b), hemos constatado que cuatro de los siete estudiantes han identificado las variaciones en la nueva representación algebraica de la función cuadrática con la representación hallada en la parte 2a. Se observa en la figura 49, que un estudiante ha identificado que ha variado el signo del término cuadrático y el coeficiente del término lineal. Creemos que esta actividad le ha permitido al estudiante establecer relaciones entre el registro de representación en lengua natural con el algebraico.


b. ¿La modificación realizada en el enunciado, que variaciones originó en la función encontrada en la parte 2a?. Escribir las dos funciones y señalar la variación. (sin considerar el contexto del problema)

$f(x) = -0{,}2x^2 + 4x + 300$

$f(x) = 0{,}2x^2 - 16x + 300$

* La variación es que el signo del coeficiente del término cuadrático y del término lineal ha variado: el signo y el coeficiente → 4x => -16x.

Figura 49: Respuesta del estudiante 3 – Actividad 1, parte 4

Asimismo, se observa en la figura 50 que un estudiante de los siete estudiantes realizó con éxito la conversión del registro de representación en lengua natural al registro de representación algebraico, pero ha cometido un error al realizar el tratamiento tipo algorítmico de la expresión algebraica para mostrar la función cuadrática en su forma general. Se observa que ha aplicado en forma incorrecta el algoritmo de la reducción de términos semejantes.

a. ¿Cómo sería la representación algebraica de la función ingreso *f*, si en vez de que el precio aumente este disminuiría en 0,20 al día, para incentivar la venta de las naranjillas que quedan? Realiza la modificación al problema de la actividad 1.

$$f(x) = (50-x)(6-0{,}2x)$$
$$f(x) = 300 - 10x - 6x + \frac{1}{5}x^2$$
$$f(x) = \frac{1}{5}x^2 - 10x + 300.$$

Figura 50: Respuesta del estudiante 6 – Actividad 1, parte 4

También hemos verificado que dos estudiantes cometieron errores al realizar la conversión del registro de representación en lengua natural al algebraico. En este sentido, se observa en la figura 51 que un estudiante no ha relacionado en forma apropiada las variables que intervienen en la situación, es decir, el número de kilos que van quedando de naranjilla, con el precio que va tomando la naranjilla, pues no ha considerado que el precio disminuye en 0,20 soles por cada kilo que se malogra. Concluimos en que esto se debe a que al estudiante le ha faltado comprender lo que pide la pregunta, en el contexto del problema propuesto en la actividad 1, esto implica según Duval (1999), que no han realizado en forma adecuada los tratamientos en el registro de representación en lengua natural.

a. ¿Cómo sería la representación algebraica de la función ingreso *f*, si en vez de que el precio aumente este disminuiría en 0,20 al día, para incentivar la venta de las naranjillas que quedan? Realiza la modificación del problema de la actividad 1.

# de días que pasa	# de Kilos	# de precio	Ingreso
0	50	6	300
1	51	(6-0,20) = 5,8	(51×5,8) = 295,[illegible]
2	52	(6-0,20) = 5,8	(52×5,8) = 301,6

Figura 51:Respuesta del estudiante 5 – Actividad 1, parte 4

Pregunta 2

A partir del análisis, hemos verificado que cuatro estudiantes de los siete han respondido como habíamos planeado en el análisis a priori, es decir, estos estudiantes han realizado la conversión del registro de representación algebraica (registro de partida) alregistro de representación gráfica (registro de llegada), es decir, han relacionado el signo negativo de la expresión algebraica con la orientación de la parábola que se abre hacia arriba y alcanza su mínimo valor. En este sentido, se observa en la figura 52 que un estudiante ha construido en forma correcta la representación gráfica de la función cuadrática a partir de su representación algebraica. A la representación gráfica le ha asociado un discurso en lengua natural para contestar y justificar que, al variar el signo del término cuadrático, la representación gráfica cambió la orientación; de esta manera, concluye que ahora se abre hacia arriba y alcanza su mínimo valor.

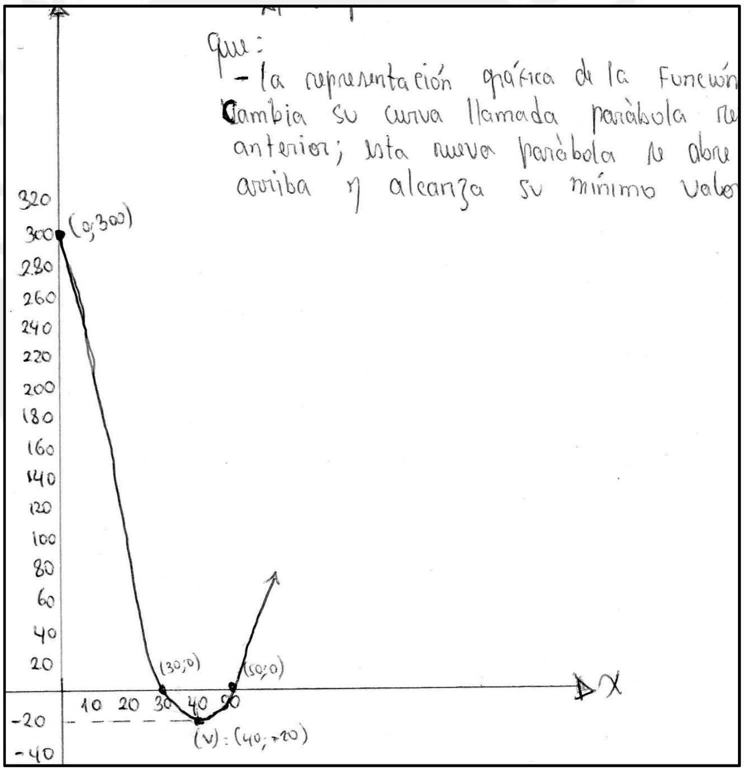


Figura 52: Respuesta del estudiante 5 – Actividad 1, parte 4

También hemos verificado en la figura 53 que un estudiante ha relacionado que, al variar el signo de la función cuadrática, se modifica la representación gráfica de dicha función (la parábola se abre hacia arriba), pero le ha faltado justificar tanto la representación gráfica como la algebraica de la función cuadrática.

a. ¿Al variar el signo del término cuadrático de la función ingreso *f*, cómo se modificó la representación gráfica, la función alcanza un mínimo o máximo valor? Para eso realiza la representación gráfica.

Se modificó la parábola (se abre ahora para arriba) la función alcanza el mínimo ingreso.

Figura 53: Respuesta del estudiante 5 – Actividad 1, parte 4

Por otra parte, observamos que dos estudiantes no lograron realizar esta conversión, y no lograron establecer el paso del el registro de representación algebraico al gráfico. Pensamos que estas dificultades se produjeron porque los estudiantes tuvieron dificultades para establecer en forma correcta la relación entre la variable independiente y la variable dependiente.

Análisis de la actividad 01, parte 05

En esta parte, presentamos el análisis de las preguntas referidas a la variable didáctica término independiente. Esperamos que los estudiantes transiten los registros de representación en lengua natural, registro de representación algebraico y gráfico, a partir de variaciones del enunciado del problema planteado en la parte 1.

Parte 5: Trabajando con la variable didáctica término independiente

Pregunta 1

a. Ahora retomaremos el problema y modificaremos algunos datos como la cantidad de kilos y el precio. Si el comerciante solo tiene 40 kilos de naranjilla y vende cada kilo a 4 soles, ¿cómo sería la representación algebraica de la función de la función *f*, considerando estas modificaciones?
b. ¿Qué termino ha variado en la nueva función en relación a la función encontrada en la pregunta de la parte 2a?

Pregunta 2

a. ¿Al variar el termino independiente de la función ingreso *f*, cómo se modificó la representación gráfica? Para esto realiza la representación gráfica y compárala con la representación gráfica realizada en la pregunta 3a.

Análisis a priori.

Pregunta 1

Esperamos que los estudiantes realicen la conversión del registro de representación en lengua natural al registro de representación algebraica considerando la modificación del enunciado (si el comerciante solo tiene 40 kilos de naranjilla y vende cada kilo a 4 soles) del problema planteado en la parte 2. Además, esperamos que identifiquen el término que ha variado de la nueva función en relación a la función encontrada en la pregunta de la parte 2. Considerando las ideas de Duval (1999), esperamos que los estudiantes transiten por el registro de presentación en lengua natural al registro de representación algebraica, al discriminar que, al variar de 50 kilos a 40 kilos y al cambiar el precio de S/. 6 soles a S/.4, se ha producido un cambio en el término independiente de la representación algebraica de 300 a 160 soles. A continuación, mostramos la respuesta esperada para esta pregunta.

Pregunta 1

a. Ahora retomaremos el problema y modificaremos algunos datos como la cantidad de kilos y el precio. Si el comerciante solo tiene 40 kilos de naranjilla y vende cada kilo a 4 soles, ¿cómo sería la representación algebraica de la función de la función *f*, considerando estas modificaciones?

Respuesta esperada

$$f(\mathrm{x}) = (40 - x)\left[(4 + x(0,20))\right]$$
$$f(\mathrm{x}) = -0,2x^2 - 4x + 8x + 160$$
$$f(\mathrm{x}) = -0,2x^2 + 4x + 160$$

a. ¿Qué termino ha variado en la nueva función en relación a la función encontrada en la pregunta de la parte 2a?

Respuesta esperada

Solo ha variado el término independiente de 300 a 160.

La función $f(\mathrm{x}) = -0,2\,\mathrm{x}^2 + 4x + 300$ ha variado a $f(\mathrm{x}) = -0,2\,\mathrm{x}^2 + 4x + 160$

Pregunta 2

Para esta preguntaesperamos que los estudiantes realicen la conversión del registro de presentación algebraica al registro de representación gráfica. Según Duval (1999), esperamos que los estudiantes coordinen los registro de representación algebraico con gráfico, al hacer corresponder las unidades significantes de la representación algebraica (término independiente) con los valores visuales de la representación gráfica (la gráfica se ha desplazado verticalmente de 300 a 160 en el eje y).

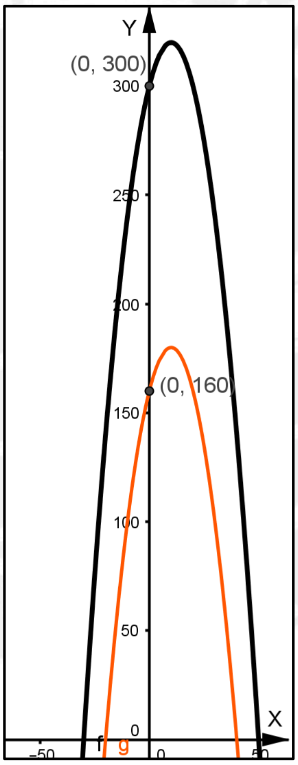
Pregunta 02

¿Al variar el termino independiente de la función ingreso *f*, cómo se modificó la representación gráfica? Para esto realiza la representación gráfica y compárala con la representación gráfica realizada en la pregunta 3a.

Respuesta esperada

Se modificó porque en la nueva gráfica la intersección es (0, 160) y en la anterior era (0, 300). Por lo tanto, la intersección de la gráfica con el eje *y* cambio de 300 a 160.

Representación gráfica de las dos funciones.

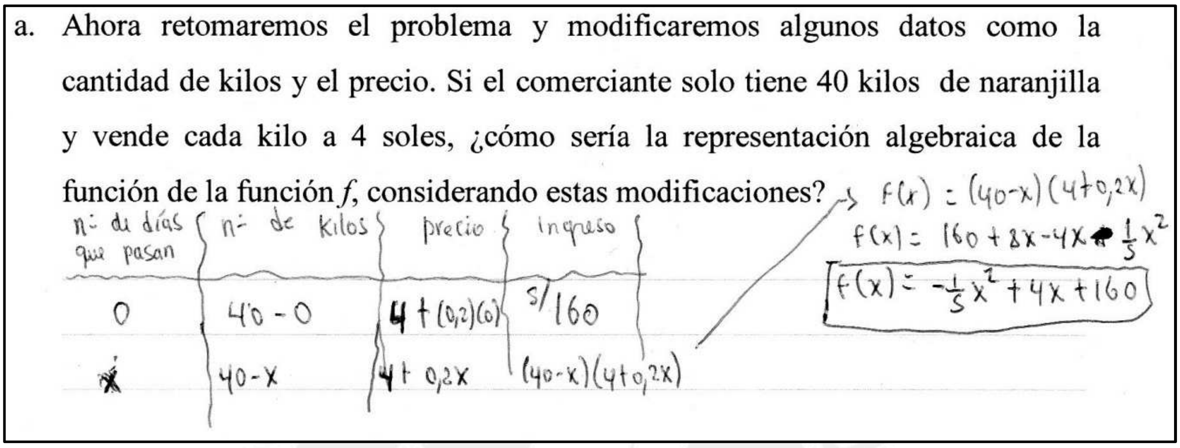


Análisis a posteriori de la producción de los estudiantes

Pregunta 1

A partir del análisis, hemos constatado que dos estudiantes han contestado tal como se esperaba en el análisis a priori. A diferencia de lo que se esperaba, dos estudiantes han resuelto la pregunta utilizando el registro de representación tabular como se hace patente en la figura 54, en la cual se observa que han organizado los datos según las variables y la relación entre ellas en cuatro columnas. Luego, han realizado un ejemplo particular considerando si pasan 0 días, el número de kilos es 40-0 y el precio que va asumiendo la naranjilla es

[4+(0,2)0];de ese modo, han obteniendo como ingreso (40-0)(4+0,2*x*) = 160. Después, han generalizado si pasan *x* días, el número de kilos 40-x, el precio como 4+0,2*x*, y el ingreso como (40-0,2*x*)(4+0,2*x*). Además, observamos que han realizado en forma correcta el tratamiento de tipo algorítmico y han encontrado la representación algebraica de la función cuadrática*f*(*x*)= $-\frac{1}{5}x^2+4x+160$.



a. Ahora retomaremos el problema y modificaremos algunos datos como la cantidad de kilos y el precio. Si el comerciante solo tiene 40 kilos de naranjilla y vende cada kilo a 4 soles, ¿cómo sería la representación algebraica de la función de la función *f*, considerando estas modificaciones?

n° de días que pasan	n° de kilos	precio	ingreso
0	40 - 0	4 + (0,2)(0)	S/160
x	40-x	4 + 0,2x	(40-x)(4+0,2x)

$\rightarrow f(x) = (40-x)(4+0{,}2x)$

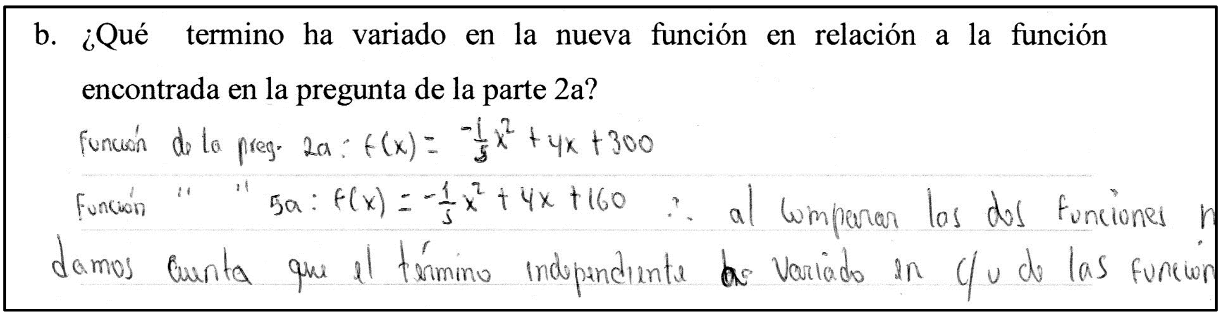
$f(x) = 160 + 8x - 4x - \frac{1}{5}x^2$

$\boxed{f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 4x + 160}$

Figura 54: Respuesta del estudiante 5 – Actividad 1, parte 5

A partir de la respuesta de estos estudiantes creemos que es importante utilizar el registro de representación tabular, porque sirve como un vínculo entre el registro en lengua natural y el registro algebraico, ya que observamos que este registro ha permitido organizar y ordenar los datos, para realizar algunos ejemplos particulares y poder generalizar los datos en la representación algebraica de la función cuadrática.

Por otra parte, en relación a la pregunta del ítem (b) cuatro estudiantes han respondido en forma similar a lo que habíamos previsto en el análisis, pues han identificado que ha variado el término independiente, pero les ha faltadomencionar cual ha sido la variación (ver figura 55).



b. ¿Qué termino ha variado en la nueva función en relación a la función encontrada en la pregunta de la parte 2a?

Función de la preg. 2a : $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 4x + 300$

Función " " 5a : $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 4x + 160$ ∴ al comparar las dos funciones n

damos cuenta que el término independiente ha variado en c/u de las funcion

Figura 55: Respuesta del estudiante 1 – Actividad 1, parte 5

En el sentido de Duval(1999), diremos que los estudiantes a partir de las variaciones en el enunciado, han establecido relaciones entre el registro de representación en lengua natural y el registro de representación algebraica, al darse cuenta que al variar el número de kilos de 50 a 40 y también al variar el precio de S/. 6 a S/. 4, ha producido una variación en el término independiente de la representación algebraica de la función cuadrática.

Por otro lado, con relación a la pregunta del ítem (a), observamos que tres estudiantes presentaron errores al realizar la conversión entre el registro de representación en lengua natural al registro de representación algebraico. Se observa en la figura 56 que uno de estos alumnos ha cometido errores al establecer la relación entre el número de días que pasan en la carretera con el número de kilos que van quedando en buen estado para el consumo. Se observa que han generalizado, pero en forma errónea, al asumir que al comerciante le van quedando (40+*x*) kilos de naranjilla en vez de (40-*x*).

a. Ahora retomaremos el problema y modificaremos algunos datos como la cantidad de kilos y el precio. Si el comerciante solo tiene 40 kilos de naranjilla y vende cada kilo a 4 soles, ¿cómo sería la representación algebraica de la función de la función *f*, considerando estas modificaciones?

# de día q' pasa	# de Kilos	Precio	Ingreso
0	40	4	160
⋮			
x	(40+x)	(4+0,2)(x)	

Figura 56: Respuesta del estudiante 2 – Actividad 1, parte 5

Pensamos que los errores de conversión entre el registro en lengua natural y el registro algebraico en que han incurrido algunos alumnos, se debe a que no han establecido en forma correcta la regla que relaciona las variables que intervienen en la situación. Además, estos estudiantes, al no poder hallar la representación algebraica de la función cuadrática, no respondieron a la pregunta del ítem (b).

Pregunta 2

A partir del análisis, hemos observado que dos de los siete estudiantes han respondido tal como habíamos previsto en el análisis a priori tal como se observa en la figura 57, es decir, han realizado la conversión del registro de representación algebraico al gráfico, identificando que, al modificar el término independiente, la gráfica se ha desplazado del punto (0; 300) al punto (0; 160) en el eje *y*, no obstante, observamos que, en la representación gráfica, les ha faltado mencionar tanto el eje *x* como el eje *y*. Además, también presentan la representación gráfica en forma incompleta porque solo asumen que toma valores positivos. Pensamos que esto se debe a que los estudiantes creen que la parábola siempre va estar ubicada en el I y II cuadrante del sistema de coordenadas cartesianas y no la línea curva no la prolongan para que también asuma valores negativos.

a. ¿Al variar el termino independiente de la función ingreso *f*, cómo se modificó la representación gráfica?. Para esto realiza la representación gráfica y compárala con la representación gráfica realizada en la pregunta 3a.

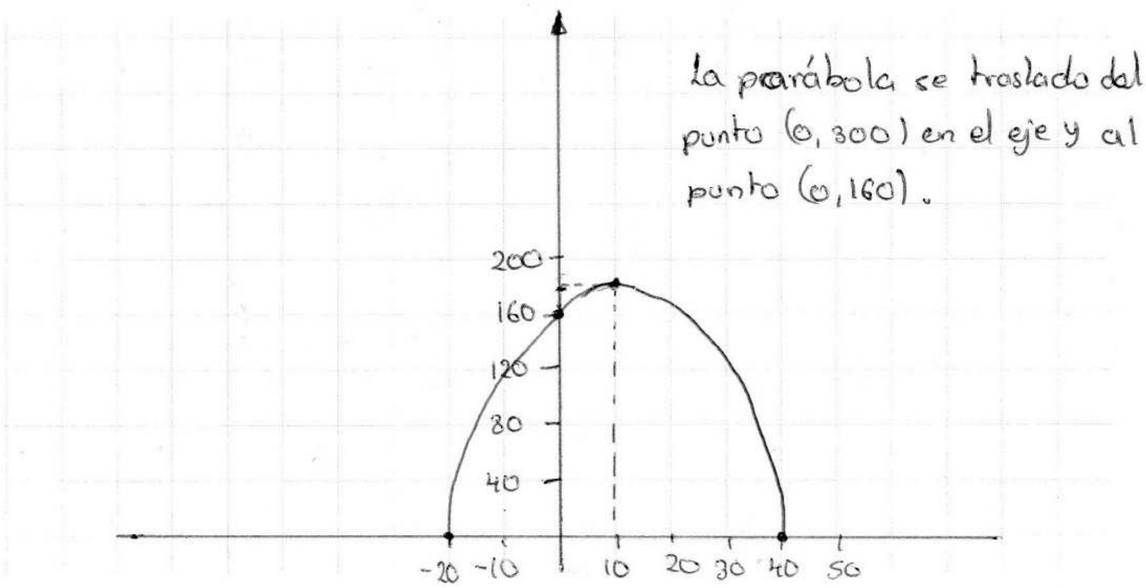


Figura 57: Respuesta del estudiante 4 – Actividad 1, parte 5

En base aDuval(1999), pensamos que a partir de las variaciones en la representación algebraica, los estudiantes han comparadola gráfica que construyeron con la gráfica del ítem (3a), y se han dado cuenta que el término independiente de la representación algebraica se relaciona con el punto de intersección de la parábola con el eje *y*.

Respecto al mismo problema, hemos constatado que tres estudiantes no han contestado como habíamos previsto en el análisis a priori.

Respecto del mismo problema, hemos constatado que tres estudiantes no han contestado como habíamos previsto en el análisis a priori. En ese sentido, se observa en la figura 58 que un estudiante, además de haber visualizado que, a partir de la variación del término independiente, la parábola se trasladó en el eje *y* del punto (0; 300) al punto (0;160), también contestó que se ha modificado los puntos de paso de la parábola con respecto al eje *x* de (50; 0), (-30; 0) a los puntos (40; 0) y (-30; 0). Sin embargo, se observa que el estudiante no prolonga la presentación, puesto que el valor del rango también asume valores negativos.

Pensamos que esto se debe a que piensan que las gráficas solo están ubicadas en la I y II cuadrante.

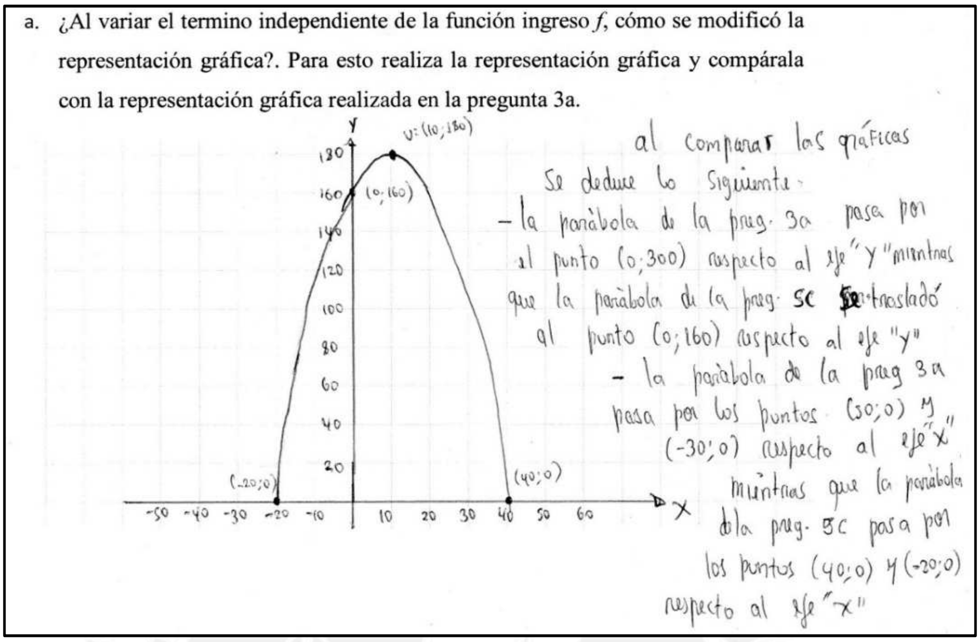


Figura 58: Respuesta del estudiante 1 – Actividad 1, parte 5

Pensamos que estos estudiantes han dado estas repuestas, porque han realizado una interpretación global de las dos representaciones gráficas: la del ítem (3a) y la que han elaborado para esta pregunta. Es decir, que, a través de tratamientos de visualización, han percibido todas las modificaciones que se han producido en las dos representaciones gráficas. Además, en este proceso han utilizado sus saberes previos sobre los elementos y propiedades de la función cuadrática tanto en su representación gráfica como algebraica.

A partir del análisis de estas respuestas dadas por los estudiantes creemos que es importante realizar variaciones en los enunciados en los problemas, que nos permitan establecer relaciones entre los diferentes registros de representación semiótica de la noción función cuadrática.

Análisis de la actividad 2

Esta actividad empieza con preguntas, que obligan al estudiante a realizar tratamientos en el registro de representación gráfica para realizar la conversión al registro de representación algebraica.

Análisis de la actividad 2, parte 1

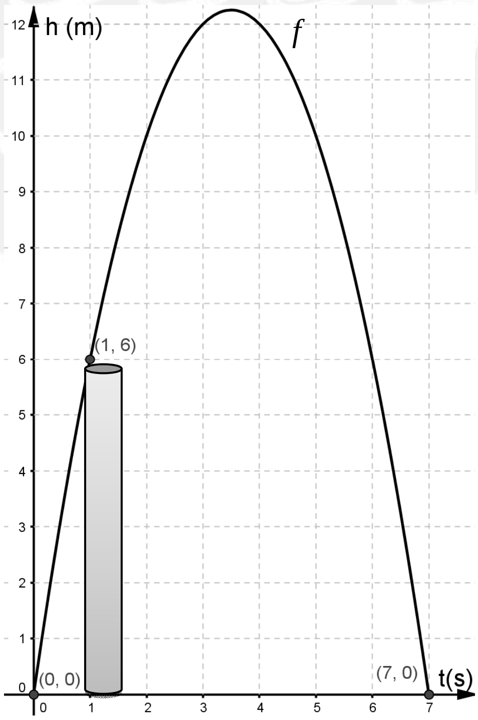
Actividad 02

Propósito de la actividad

Esperamos que los estudiantes, movilicen la noción de función cuadrática como regla de correspondencia para interpretar y modelar el dato gráfico, realizando así tratamientos y conversiones del registro de representación gráfica (registro de partida) al registro de representación algebraico (registro de llegada), luego al registro de representación en lengua natural de la función cuadrática *f*.

Problema contextualizado

Un niño está acostado, jugando con una pelota de yas al pie de un poste de 6m de altura. El niño arroja la pelota al aire y controla con su cronómetro que al completar el primer segundo, la pelota pasa por el borde superior del poste, y también verifica que la pelota tarda 7 segundos en llegar al suelo. La situación está representada por el gráfico donde *t* se da en segundos (s) y h es la altura en metro (m). Halla la función cuadrática *f* que modela la situación y encuentra la altura máxima que alcanza la pelota.



Parte 1: Trabajando con la representación gráfica de la función cuadrática

Pregunta 1

a. ¿Qué pide hallar el problema?

b. ¿Qué significados tienen los puntos (0; 0), (1; 6) y (7; 0) en el contexto del problema?

Pregunta 2

a. ¿Es posible hallar la expresión algebraica de f conociendo tres puntos de paso de su representación gráfica?
b. Hallar la expresión algebraica que modela la situación propuesta

Análisis a priori

Pregunta 1

En esta pregunta, esperamos que los estudiantes realicen una lectura comprensiva del problema identificando los datos y las respuestas a los problemas planteados. Además, se les solicita que realicen tratamientos mediante el punteo: esta vía la menciona Duval (1999) como una vía asociativa, que se limita a los valores particulares y a los puntos marcados en el plano de referencia. A través de ella, los estudiantes van a interpretar el dato gráfico acompañado del enunciado verbal y van dar el significado de los puntos (0; 0), (1; 6) y (7; 0) en el contexto del problema, relacionando así la variable independiente que es el tiempo con la variable dependiente que es la altura.

Pregunta 1

a. ¿Qué pide hallar el problema?

Respuesta esperada

La función cuadrática *f* que modela la situación y la altura máxima que alcanza la pelota.

b. ¿Qué significados tienen los puntos (0;0), (1;6) y (7;0) en el contexto del problema?

   Respuesta esperada

   El punto (0; 0) representa el momento en que la pelota es lanzada desde el piso.

   El punto (1; 6) significa que en un segundo la pelota de yas ha alcanzado una altura de 6m.

   El punto (7; 0) significa que al transcurrir 7 segundos la pelota de yas, ha regresado al piso.

Pregunta 2

Esperamos que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos sobre sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas y función cuadrática para que afirmen si es posible hallar la expresión algebraica de la función cuadrática conociendo tres puntos de paso de la representación gráfica. Además, esperamos que los estudiantes realicen tratamientos de tipo algorítmico para resolver el sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas y hallen la representación algebraica de la función cuadrática. A continuación, mostramos las respuestas esperadas para estas preguntas.

Pregunta 02

a. ¿Es posible hallar la expresión algebraica de *f* conociendo tres puntos de paso de su gráfica?

Respuesta esperada

Si es posible hallar la expresión algebraica conociendo tres puntos de paso de su gráfica. Con los tres puntos se forma un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

b. Hallar la expresión algebraica que modela la situación propuesta.

Respuesta esperada

Planteamos y desarrollamos el sistema de ecuaciones lineales.

Utilizando el punto (0; 0).

$f(t) = at^2 + bt + c,$ donde $f(t) = 0$ y $t = 0$

Reemplezando el punto (0; 0) tenemos la ecuación

$0 = a(0)+b(0)+c$

$0 = 0 + 0 + c$

$0 = c$

Para el punto (1; 6)

$f(t) = at^2 + bt + c,$ donde $f(t) = 6$, para $t = 1$

Reemplezando el punto (1; 6) tenemos en la ecuación.

$6 = a(1)^2+b(1)+c$

$6 = a + b + c$

$6 = a + b$ porque c = 0

6 = a+b ....(I)

Para el punto (7; 0)

$f(t) = at^2 + bt + c,$ donde $f(t) = 0$, para $t = 7$

Reemplezando el punto (7; 0) tenemos en la ecuación.

$0 = a(7)^2+b(7)+c$

$0 = 49a + 7b + c$

$0 = 49a + 7b$ porque c = 0

-49a=7b

-7a = b ....(II)

Reemplazamos (II) en (I)

$6 = a+b$

$6 = a + (-7a)$ porque b = -7a

$6 = a - 7a$ porque c = 0

6=-6a

-1 = a, entonces b = -7(-1)=7

Concluimos que a = -1, b = 7 y c = 0

Reemplazando a, b y c en la función cuadrática expresada en la forma general se tiene:

$f(t) = a\,\mathrm{t}^2 + bt + c$

$f(\mathrm{t}) = -1t^2 + 7t + 0$

$f(\mathrm{t}) = -t^2 + 7t$

Análisis a posteriori de la producción de los estudiantes

Pregunta 1

Con relación a la pregunta del ítem (a), todos los estudiantes han contestado tal como lo habíamos previsto en análisis a priori, pues han leído el enunciado problema y han identificado que lo que se pide hallar es la función cuadrática *f* que modela la situación y la altura máxima que alcanza la pelota: han comprendido la situación

En la misma línea, con relación a la pregunta del ítem (b) tres de los siete estudiantes han contestado en forma similar a como habíamos previsto en el análisis a priori). Se observa en la figura 59, que un estudiante ha realizado en forma adecuada este tratamiento de la via del punteo, interpretando así la relación que hay entre las dos variables (que son el tiempo y la altura) en el contexto del problema. Sin embargo, ha tenido dificultades para explicar en lenguaje natural sus interpretaciones, pues en relación a la interpretación del punto (1; 6), ha redactado que el niño controló 1 segundo y luego lanzó la pelota, en vez de que primero lanzó la pelota, luego controlo 1 segundo. Pensamos que esta dificultad se debe a que poco están acostumbrados a emplear el lenguaje natural para realizar la lectura de gráficos cartesianos, porque tal como afirma Guzmán (1988) los estudiantes están poco familiarizados en las funciones de coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro determinado.

b. ¿Qué significados tienen los puntos (0;0), (1;6) y (7;0) en el contexto del problema?

(0;0) → significa que el niño está acostado y no ha tirado ni controlado la pelota es decir no hizo nada
(1;6) → significa que el niño controló 1 segundo de tiempo y lanzó su pelota al aire y se dió cuenta que en ese segundo alcanzo una h. de 6m.
(7;0) → significa que el niño al controlar 7 segundos de tiempo y lanzar su pelota al aire se dió cuenta que en este tiempo el balón ya cayó al suelo y no alcanzó ninguna altura

Figura 59: Respuesta del estudiante 1 – Actividad 2, parte 1

Por otra parte, con relación a la pregunta del ítem(b), se observa tres estudiantes no han contestado como habíamos previsto en el análisis a priori. En este sentido, se observaen la figura 60 que un estudiante solo se ha limitado mencionar que los puntos, son puntos de paso de la parábola, no han interpretado lo que representan estos puntos en el contexto del problema, tampoco han relacionado estos puntos la variable independiente y la variable dependiente.

b. ¿Qué significados tienen los puntos (0;0), (1;6) y (7;0) en el contexto del problema?

Los punto (0,0), (1,6) y (7,0) significan que son los punto donde la parábola va a pasar.

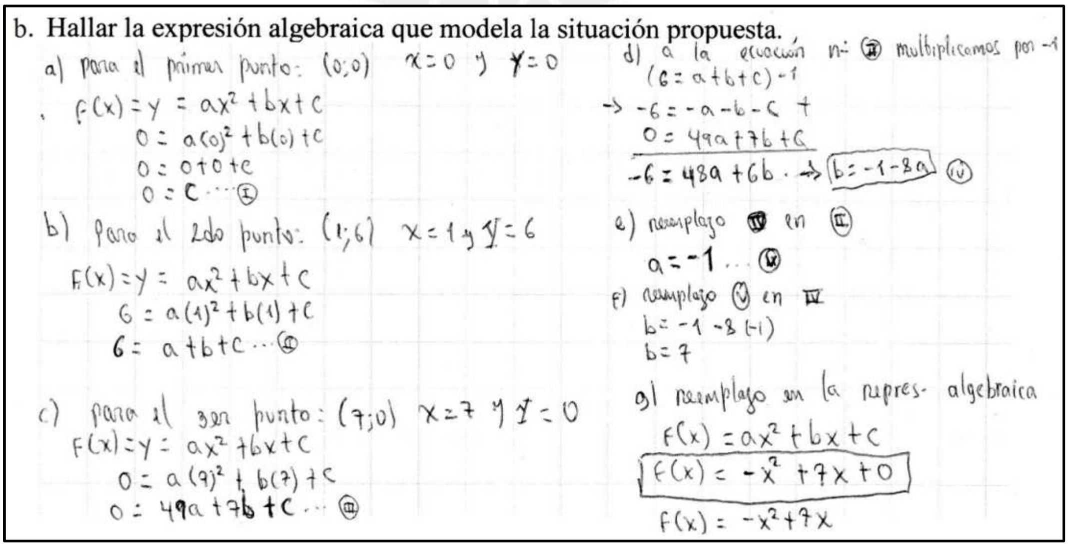
Figura 60: Respuesta del estudiante 1 – Actividad 2, parte 1

Pensamos que la respuesta de estos estudiantes se debe a que no han comprendido la pregunta del problema,probablemente la pregunta planteada no estuvo clara para los estudiantes, teniendo en cuenta la respuesta esperada para esta pregunta.También cabe la posibilidad que les faltócomprender lo que representanlas coordenadas de un punto en el plano cartesiano, y les fue difícil contextualizar y explicar en lenguaje natural las propiedades de función cuadrática.

Problema 2

Con relación al ítem (a), solo dos de los siete estudiantes han contestado como habíamos planificado en el análisis a priori, es decir, han mencionado que a partir de los tres puntos se puede plantear un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas. Los otros cinco estudiantes han contestado que si se puede formar la expresión algebraica a partir de los tres puntos de paso de la parábola, pero no han justificado qué procedimiento o noción van a utilizar.Creemos que esto ocurrió porque la pregunta no pide en forma explícita que los estudiantes justifiquen sus resultados.

En relación a las respuestas del ítem (b),solo uno de los siete estudiantes ha realizado este tratamiento tipo algorítmico como lo habíamos planificado en el análisis a priori. Se observa en la figura 61que el estudiante ha movilizado sus conocimientos previos sobre función cuadrática y sistemas de ecuaciones lineales. En ese sentido a partir de la forma general de la función cuadrática$f(x)$ = ax^2+bx+c, ha reemplazado en los puntos (0; 0), (1; 6), (7; 0) formando así un sistema de ecuacionesde ecuaciones lineales con tres incógnitas, además, haaplicado los métodos de reducción y sustitución para resolver este sistema de ecuaciones lineales.


b. Hallar la expresión algebraica que modela la situación propuesta.

a) para el primer punto: (0;0) $x=0$ y $y=0$
$f(x)=y=ax^2+bx+c$
$0=a(0)^2+b(0)+c$
$0=0+0+c$
$0=c \dots$ I

b) para el 2do punto: (1;6) $x=1$ y $y=6$
$f(x)=y=ax^2+bx+c$
$6=a(1)^2+b(1)+c$
$6=a+b+c \dots$ II

c) para el 3er punto: (7;0) $x=7$ y $y=0$
$f(x)=y=ax^2+bx+c$
$0=a(7)^2+b(7)+c$
$0=49a+7b+c \dots$ III

d) a la ecuación n° II multiplicamos por −1
$(6=a+b+c)\cdot -1$
$\rightarrow -6=-a-b-c$ +
$0=49a+7b+c$
$-6=48a+6b \rightarrow \boxed{b=-1-8a}$ IV

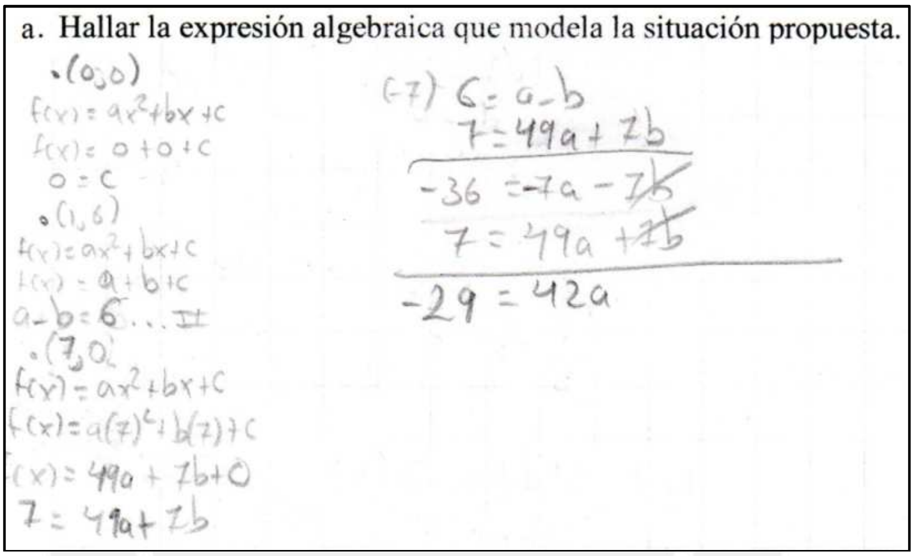
e) reemplazo IV en III
$a=-1 \dots$ V

f) reemplazo V en IV
$b=-1-8(-1)$
$b=7$

g) reemplazo en la expres. algebraica
$f(x)=ax^2+bx+c$
$\boxed{f(x)=-x^2+7x+0}$
$f(x)=-x^2+7x$

Figura 61: Respuesta del estudiante 3 – Actividad 2, parte 1

Se observa en la figura 62 que otro estudiante si tuvo la idea como llegar a la representación algebraica de la función cuadrática, pero cometió errores al realizar este tratamiento de tipo algorítmico, pues ha cometido errores al resolver al reemplazar las coordenadas del punto (1; 6) en la forma general de la función cuadrática $f(x)= ax^2+bx+c$, pues llegaron a establecer la igualdad en forma incorrecta como a-b = 6. Desde la perspectiva de Duval (2004), que estos errores se dan, porque los estudiantes no tienen conocimiento de las reglas de formación en este registró, en este caso estas reglas se traducenen el dominio de los métodos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales.


a. Hallar la expresión algebraica que modela la situación propuesta.

•(0;0)
f(x) = ax²+bx+c
f(x) = 0+0+c
0 = c
•(1;6)
f(x) = ax²+bx+c
f(x) = a+b+c
a-b = 6 ... II
•(7;0)
f(x) = ax²+bx+c
f(x) = a(7)²+b(7)+c
f(x) = 49a+7b+0
7 = 49a+7b

(-7) 6 = a-b
7 = 49a+7b
-36 = -7a-~~7b~~
7 = 49a+~~7b~~
-29 = 42a

Figura 62: Respuesta del estudiante 2 – Actividad 2, parte 1

Por otro lado, observamos que cinco de los siete estudiantes nosupieron cómo realizar este tratamiento para hallar la expresión algebraica que modelaba la situación. Creemos que esto se debe, a la poca frecuencia con que se realiza este tipo de tareas en clase, en particular la conversión del registro de representación gráfico al algebraico. Además, presentaron dificultes en el dominio de las propiedades y elementos de la función cuadrática en el registro de representación gráfica, así como dominio de algoritmos y los métodos para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

Análisis de la actividad 2, parte 2

Parte 2: Trabajando con la representación algebraica de la función cuadrática

Pregunta 1

a. ¿Es posible que la pelota alcance una altura de 13 metros?

b. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

Pregunta 2

a. ¿Hallar el dominio (t) y el rango $f(t)$ de la función cuadrática?

Análisis a priori

Pregunta 1

En relación al ítem (a) esperamos que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos sobre función cuadrática y ecuación cuadrática y reemplacen el valor de $f(t) = 13$ en la función $f(t) = -t^2+7t$, y formen una ecuacióncuadrática, hallando los valores de t a partir de la evaluación del discriminante, donde concluyen que por propiedad del discriminante de la ecuación cuadrática $\Delta< 0$ no tiene solución real.

En relación al ítem (b) esperamos que los estudiantes realicen el tratamiento de tipo algoritmo en el registro de representación algebraico y encuentren que la altura máxima que puede alcanzar la pelota es de 12, 25m.A continuación mostramos las respuestas esperadas para esta pregunta.

a. ¿Es posible que la pelota alcance una altura de 13 metros?

Respuesta esperada

Para saber si la pelota puede alcanzar una altura de 13 metros, reemplazamos $f(t) = 13$ y vemos si la ecuación resultante tiene solución.

$$13 = -t^2 + 7t$$
$$t^2 - 7t + 13 = 0,$$
$$\Delta = (-7)^2 - 4(1)(13)$$
$$\Delta = 49 - 52 = -3$$
$$\Delta < 0, \text{ entonces la ecuación no tiene solución real.}$$

En conclusión la pelota no puede alcanzar una altura máxima de 13 m

b. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

Respuesta esperada

Para saber la altura máxima hallamos el vértice que alcanza la pelota

$$f(t) = -t^2 + 7t$$
$$f(t) = -t^2 + 7t$$
$$f(t) = -\left(t^2 - 7t\right)$$
$$f(t) = -\left(t^2 - 7t + \frac{49}{4} - \frac{49}{4}\right)$$
$$f(t) = -\left(t^2 - 7t + \frac{49}{4}\right) + \frac{49}{4}$$
$$f(t) = -\left(t - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$$
$$f(t) = -\left(t - \frac{7}{2}\right)^2 + 12{,}25$$

Observamos que el vértice es (3,5; 12,25). El vértice significa que después de 3,5 segundos la pelota alcanza una altura máxima de 12.25m.

Análisis a posteriori de la producción de los estudiantes

Pregunta 1

En relación al ítem (a), se observa que ningún estudiante ha contestado como habíamos previsto en el análisis a priori. En ese sentido, dos estudiantes han contestado en forma correcta esta pregunta, pero diferente a lo que habíamos previsto en el análisis a priori, pues han recurrido a la forma estándar de la expresión algebraica para contestar esta pregunta. Como se evidencia en la figura 63, pues un estudiante ha identificado que el vértice es (3,5; 12,25), asumiendo que 12,25 sería la máxima altura que tomaría la altura alcanzada por la pelota de yas.

a. ¿Es posible que la pelota alcance una altura de 13 metros?

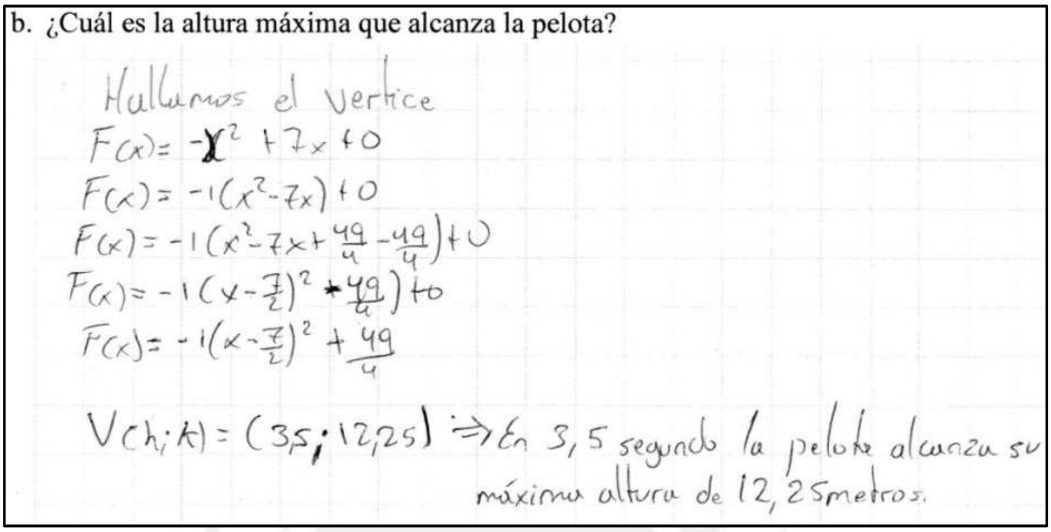
no; porque la máxima altura que puede alcanzar es de 12,25 m debido a que su vértice es (3,5; 12,25) ó $\left(\frac{7}{2}; \frac{49}{4}\right)$

Figura 63: Respuesta del estudiante 1 – Actividad 2, parte 2

Pensamos que estos estudiantes recurrieron a la noción de vértice para responder esta pregunta, pues están habituados a hallar el vértice a partir de la forma estándar de la representación algebraica. Estos estudiantes no se inclinaron por resolver la pregunta a partir deestablecer una correspondencia, de (*t*; 13) como punto del sistema cartesiano por el cual pasa la parábola y al remplazar estos puntos en la representación algebraica de la función cuadrática se forma una ecuación cuadrática y se evidencia si t asume valor real.

Por otro lado, también hubo cuatro estudiantes que no desarrollaron esta pregunta porque no han encontrado la representación algebraica de la función cuadrática. Desde esta perspectiva es importante que los estudiantes se apropien de las reglas de funcionamiento de cada registro ya sea como el dominio de operaciones o propiedades de la función cuadrática porque depende el tránsito entre los diferentes registros de representación semiótica

En relación al ítem (b),solo dos de los siete estudiantes lograron este tratamiento tipo algorítmico para hallar la altura máxima que puede alcanzar la pelota, pues aplicaron en forma correcta el procedimiento de completar cuadrados para hallar el vértice de la función cuadrática a partir de la forma estándar de la función cuadrática. En este sentido, se observa en la figura 64 que un estudiantehan comprendido que en el vértice la función alcanza su máximo valor, asumiendo que en 3,5 segundos la pelota alcanza su altura máxima de 12, 25 m.


b. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

Hallamos el vertice

$F(x)= -x^2 + 7x + 0$

$F(x)= -1(x^2-7x)+0$

$F(x)= -1(x^2-7x+\frac{49}{4}-\frac{49}{4})+0$

$F(x)= -1(x-\frac{7}{2})^2 + \frac{49}{4}) + 0$

$F(x)= -1(x-\frac{7}{2})^2 + \frac{49}{4}$

$V(h;k) = (3,5;12,25) \Rightarrow$ En 3,5 segundo la pelota alcanza su máxima altura de 12,25 metros.

Figura 64: Respuesta del estudiante 5 – Actividad 2, parte 2

Creemos que estos estudiantes han comprendido la noción de vértice, al relacionar la representación algebraica con la representación gráfica de la función cuadrática, relacionando que cuando el signo del término cuadrático es negativo de la representación gráfica, la función alcanza su máximo y esto lo visualizaron en la representación gráfica, cuando resolvieron la actividad 1 en la parte 4.

Por otra parte, los otros cinco de los siete estudiantes no lograron realizar este tratamiento porque no habían hallado la representación algebraica de la función cuadrática. Como lo afirmamos en la pregunta anterior es fundamental que los estudiantes conozcan las reglas de funcionamiento de todos los registros de representación de la función cuadrática, porque si no los estudiantes van a tener dificultades para realizar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que permitirán transitar por los diferentes registros de representación de la noción de función cuadrática.

CONCLUSIONES

En relación con el primer objetivo específico de este trabajo de investigación, que es *Identificar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que permiten movilizar los elementos y las propiedades de la función cuadrática en sus diferentes registros de representación semiótica (lengua natural, tabular, algebraico y gráfico),* concluimos que:

- En la conversióndel registro de representación en lengua natural al registro de representación tabular, los estudiantes han realizado el tratamiento del parafraseo de los enunciados. Esto los ayudó a asociar e identificar las variables que intervienen en la situación, identificar las magnitudes que cambian y las que permanecen constantes. Este tratamiento con las otras preguntas propuesta, les han permitido aplicar sus conocimientos sobre variable independiente, variable dependiente y la relación de correspondencia entre dos variables(Como se evidencia en la figura 18).
- En la conversión del registro de representación tabular al registro de representación algebraico, los estudiantes desarrollaron el siguiente tratamiento en el registro tabular: hallaron los valores de la variable dependiente en función de la variable independiente. Para ello, los estudiantes aplicaron sus conocimientos sobre la regla de correspondencia entre dos variables(Como se evidencia en la figura 22).
- En la conversión del registro de representación algebraico al registro de representación gráfico, los estudiantes realizaron los siguientes tratamientos en el registro de representación algebraico:representaron la función cuadrática en su forma general y estándar para hallar el vértice, hallaron las raíces de la ecuación cuadrática para hallar la intersección de la gráfica con el eje x y hallaron el valor de $f(x)$ cuando $x = 0$. En la realización de estos tratamientos, aplicaron las nociones sobre raíces de la ecuación cuadrática y el procedimiento para completar cuadrados.
- La mayoría de estudiantes realizaron los siguientes tratamientos en el registro de representación gráfica: ubicaron e interpretaron en el contexto del problema los puntos de intersección de la gráfica con los ejes x y eje y, interpretaron el significado del vértice, y hallaron el dominio y rango de la función cuadrática. Para desarrollar estos tratamientos, aplicaron las nociones referidas a dominio, rango y vértice de la función cuadrática.

En relación con el segundo objetivo específico de este trabajo de investigación: Describir, *interpretar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que realizan los* *estudiantes al transitar los registros lengua natural, tabular, algebraico y gráfico, concluimos que:*

- La conversión del registro de representación de lengua natural al tabular se produjo a partir del parafraseo de los enunciados del problema. Pensamos que los estudiantes que mostraron dificultades en esta conversión no establecieron en forma apropiada la relación entre las variables que intervinieron en la situación.
- La conversión del registro de representación tabular al registro de representación algebraico se produjo bajo la forma de una codificación en la que los estudiantes, a partir de la representación tabular, generalizaron los resultados y establecieron la regla que asocia tanto la variable dependiente como la variable independiente. Creemos que los estudiantes que mostraron dificultades realizaron en forma incompleta los tratamientos en el registro de representación en lengua natural.
- En relación a la conversión del registro de representación algebraico al registro de representación gráfico, este se produjo como una codificación a partir de tratamientos de tipo algorítmico. Pensamos que los estudiantes que mostraron dificultades presentaron errores en los tratamientos de tipo algorítmico por el desconocimiento de las reglas de funcionamiento propias de ese registro. Con relación a las dificultades en los tratamientos del registro de representación gráfico, los estudiantes presentaron dificultades para hallar el dominio y el rango de la función cuadrática, para explicar y justificar en lenguaje natural el significado del vértice de la función cuadrática y para interpretar algunos puntos de paso de la parábola.
- En relación con el trabajo con la variable didáctica signo del término cuadrático, hemos constatado que la mayoría de estudiantes, a partir de las variaciones que se hicieron en el registro de representación en lengua natural, lograron establecer relaciones entre el registro de representación algebraico y gráfico, es decir, establecieron relaciones entre la unidad significante (signo del término cuadrático) con los valores visuales de la representación gráfica (la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo)(Como se evidencia en la figura 52).
- En relación con la variable didáctica término independiente, hemos constatado que la mayoría de estudiantes logró establecer relaciones entre el registro de representación algebraico con el registro de representación gráfico. Esto se evidenció al relacionar la unidad significante (término independiente) con los valores visuales (la gráfica se desplaza verticalmente) de la representación(Como se evidencia en la figura 56).

- En relación al proceso de la conversión del registro de representación gráfico al registro de representación algebraico, la mayoría de estudiantes presentó dificultades en esta conversión. Concluimos que esto se debe a que los estudiantes desconocían que, a partir de tres puntos de paso de la parábola, se puede formar un sistema de ecuaciones lineales y hallar la representación algebraica de la función cuadrática. Creemos que estas dificultades se debieron a la poca frecuencia con la que se realiza este tipo de conversiones(Como se evidencia en la figura 61).
- Con respecto a nuestro objetivo general de la investigación, *analizar cómo el tránsito de distintos registros de representación semiótica favorece la comprensión de la noción de función cuadrática en estudiantes de quinto año de educación secundaria*, podemos concluir lo siguiente:

- La mayoría de estudiantes logró transitar por los siguientes registros de representación: semiótica: lengua natural, tabular, algebraico y gráfico; lo cual permitió movilizar sus conocimientos previos referidos a elementos y propiedades de la función cuadrática en sus diferentes representaciones, y, de esta manera, contribuir a que no confundieran el objeto matemático con sus representaciones.
- A partir del análisis de los tratamientos y conversiones en todos los registros de representación, hemos constatado que los tratamientos en el registro en lengua natural son fundamentales para que los estudiantes realicen la conversión a los registros de representación tabular, algebraico y gráfico, puesto que permiten que los estudiantes comprendan el problema y discriminen la utilización de valores pertinentes para asociar las variables que intervienen en la situación.
- A partir del análisis, hemos constatado que es fundamental que los estudiantes conozcan las reglas de funcionamiento del registro algebraico, porque les van a permitir realizar las actividades cognitivas de tratamiento y la conversión al registro de representación gráfico.
- Hemos constatado que la mayoría de estudiantes, al transitar por los distintos registros de representación de la función cuadrática (lengua natural, tabular, algebraico y gráfico), mostraron dificultades para explicar y justificar las nociones de dicha función en lenguaje natural.

SUGERENCIAS

Consideramos que el presente trabajo se complementará y enriquecerá con otros trabajos de investigación. A continuación sugerimos algunas ideas.

Investigar sobre la coordinación de los diversos registros de representación de la noción de la función cuadrática considerando las unidades significantes en cada uno de sus registros de representación semiótica (registros de representación en lengua natural, tabular, algebraico y gráfico).

Investigar el proceso de conversión inverso de la función cuadrática desde el registro de representación gráfico, al algebraico y finalmente al de lengua natural.

Investigar sobre el análisis de los errores que los estudiantes presentan al resolver problemas de función cuadrática en la cual tienen que coordinar los siguientes registros de representación semiótica: registros de representación en lengua natural, tabular, algebraico y gráfico.

REFERENCIAS

Amore, B´. (2005). *Bases Filosóficas, pedagógicas y conceptuales de la didáctica de la matemática. España:* Reverte, S.A.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L.&Gomez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

Díaz, M., Haye, E., Montenegro, F., Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas.*I Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe, pp. 1 – 13*. Recuperado de http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/373-401-2-DR-C.pdf

Duval, R. (1999*). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Cali – Colombia: Editorial Merlín I.D

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Revista la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. 9(1),* pp. 143-168. Recuperado de http://www.usc.es/dmle/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf

Duval, R. (2012). *Lo esencial de los proceso cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica*. Lima, Perú: VI Coloquio Internaciones Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Catolica del Perú.

Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de las gráficas. El caso de la parábola. *Revista de innovación en educación matemática (EMA).* 6(2), pp. 180 – 200. Recuperado de http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/%2804%29RD.pdf

García, G. (2005). *La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales sus características y el uso que hace de ellas en el aula.* (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Facultad de ciencias de la Educación. Universidad de Granada. España. Recuperado de http://hera.ugr.es/tesisugr/15518620.pdf

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME, 1(1),* pp.5-21. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/335/33510102.pdf

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México, D.F. McGraw. Hill Interamericana.

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria*. (Tesis de Maestría con mención en Enseñanza de la Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/1571

Lima, E., Pinto, P., Wagner, E., Morgado, A. (2000). *La matemática de la enseñanza media*. Vol 1. Instituto de matemática y ciencias afines IMCA. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima – Perú.

Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal*. (Tesis de Maestría con mención en Enseñanza de la Matemática). Universidad autónoma de Manizales. Colombia. Recuperado de http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/245/1/Tesis_Las%20representaciones%20semi%C3%B3ticas%20en%20el%20aprendizaje%20del%20concepto%20de%20funci%C3%B3n%20lineal.pdf

Planchart, O. (2000). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función*. (Tesis doctoral). Universidad autónoma del estado de Morelos. Morelos, México. Recuperado de http://ponce.inter.edu/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2005). *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004.* Unidad de Medición de la Calidad Educativa. Informe pedagógico de resultados. Formación matemática: Tercer grado y Quinto de secundaria. Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/en2004/MatematicaS3_5.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional*. Recuperado de http://destp.minedu.gob.pe/secundaria/nwdes/discurna1.htm

Perú, Ministerio de Educación (2012). *Matemática Tercero de Secundaria*. Lima - Grupo editorial Norma S.A.C

Perú, Ministerio de Educación (2015). *Rutas de aprendizaje, versión 2015.* Lima. Recuperado de http://recursos.perueduca.pe/rutas/secundaria.php

Perú, Ministerio de Educación (2012). Unidad de Medición de la Calidad. *PISA 2012. Primeros resultados.* Informe Nacional del Perú. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2013/12/reporte_pisa_2012.pdf

Rivera, J. (2009). *Interpretación de significados de la función cuadrática en un ambiente computacional, desarrollada por estudiantes de II de Bachillerato de la Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio"*. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica "Francisco Morazán". Tegucigalpa, Honduras. Recuperado de http://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmc698z8

ANEXOS

SECUENCIA DE ACTIVIDADES

Problema contextualizado

El señor Roberto, comerciante de la provincia de San Ignacio transporta a la ciudad de Chiclayo 50 kilos de naranjilla para la venta a S/. 6 el kilo, en el trayecto a la ciudad Chiclayo, el camión se quedó parado por el distrito de Pucará, debido a las constantes lluvias que causaron derrumbes e interrumpieron la carretera en varios tramos. Por esta razón, se presume que tardará varios días en llegar a Chiclayo. El señor Roberto deduce que por cada día que pasa en la carretera se malogra un kilo de naranjilla, por lo que decide aumentar el precio de cada kilo en 0,20 soles por cada kilo que se malogra. ¿Cuántos días tienen que pasar para que el comerciante al vender todas las naranjillas en buen estado obtenga un máximo ingreso?

Parte 1: Trabajando con la representación en enunciado verbal de la función cuadrática para comprender el problema.

Pregunta 01

a. Escribe con tus propias palabras los dos enunciados verbales, pero sin cambiar el sentido (puedes agregar nombres de personas, lugares y acontecimientos).

El señor Roberto, comerciante de la provincia de San Ignacio transporta a la ciudad de Chiclayo 50 kilos de naranjilla para la venta a S/. 6 el kilo.

El señor Roberto deduce que por cada día que pasa en la carretera, se malogra un kilo de naranjilla, por lo que decide aumentar el precio en 0,20 soles por cada kilo que se malogra.

b. ¿Cuáles son los datos? ¿Qué pide el problema?

Pregunta 02

a. ¿Cuál sería el ingreso si pasa 1 día en la carretera?

b. ¿Cuál sería el ingreso si pasan 2 días en la carretera?

c. ¿Cuál sería el ingreso si pasan 18 días en la carretera?

Pregunta 03

a. A partir de las variables definidas organiza la información en una tabla donde te permita calcular el ingreso del comerciante según los días que pasan en la carretera.

Pregunta 04

a. ¿Cuál sería el ingreso *f* si pasan x días? Encuentra la función ingreso en términos de los días transcurridos (x).

Pregunta 05

a. ¿Qué significado tiene que el ingreso *f* depende de *x*?.

Parte 2: Trabajando con la representación algebraica de la función cuadrática

Pregunta 1

a. Expresa la función encontrada en la forma $f(x)= ax^2+bx+c$, donde $a\neq 0$

b. ¿Qué tipo de función es *f*? Justifique su respuesta.

Pregunta 2

c. Expresa la función cuadrática hallada en la forma $f(\mathrm{x})=\mathrm{a}(x-\mathrm{h})^2+\mathrm{k}$ y halla el vértice h, k.

Pregunta 3

a. Halla los interceptos de la gráfica de la función cuadrática con el eje x y con el eje y

Parte 3: Trabajando con la representación gráfica de la función cuadrática

Pregunta 1

a. Teniendo en cuenta el vértice y los interceptos hallados, realiza la representación gráfica de la función. (sin considerar el contexto del problema).

Pregunta 2

a. Analiza los valores que puede asumir *x* (dominio de la función) y *f* (rango de la función), gráfica nuevamente la función cuadrática considerando estos valores en el contexto del problema.

Pregunta 3

a. ¿Podrá el comerciante alcanzar un ingreso mayor a S/.320?

b. Expresa con tus propias palabras el significado de h y k en el contexto del problema.

Pregunta 4

a. ¿Un intercepto puede tener abscisa negativa?, y ¿En el contexto del problema el intercepto (-30,0), (50,0) y (0,300) qué significan?.

Pregunta 5

a. Si pasan 15 días, ¿cuánto será el ingreso? Ubica el punto en la representación gráfica y explica con tus propias palabras el significado de este punto en términos del problema.

b. Si pasan 45 días, ¿cuánto será el ingreso? Ubica el punto en la representación gráfica y explica con tus propias palabras el significado de este punto en términos del problema.

Parte 4: Trabajando con la variable didáctica signo del coeficiente del término cuadrático

a. ¿Cómo sería la representación algebraica de la función ingreso f, si en vez de que el precio aumente, este disminuiría en 0,20 al día para incentivar la venta de las naranjillas que quedan?Realiza la modificación al problema de la actividad 1.

b. ¿La modificación realizada en el enunciado, qué variaciones originó en la función encontrada en la parte 2a? Escribir las dos funciones y señalar la variación. (sin considerar el contexto del problema)

c. ¿Qué término ha variado solo su signo en la nueva función en relación a la función encontrada en la pregunta de la parte 2a? Escribir las dos funciones y señalar la variación.

d. ¿Al variar el signo del término cuadrático de la función ingreso *f*, cómo se modificó la representación gráfica?¿la función alcanza un mínimo o máximo valor? Para eso realiza la representación gráfica.

Parte 5: Trabajando con la variable didáctica término independiente

a. Ahora retomaremos el problema y modificaremos algunos datos como la cantidad de kilos y el precio. Si el comerciante solo tiene 40 kilos de naranjilla y vende cada kilo a 4 soles, ¿cómo sería la representación algebraica de la función de la función f, considerando estas modificaciones?

b. ¿Qué termino ha variado en la nueva función en relación a la función encontrada en la pregunta de la parte 2a?

c. ¿Al variar el termino independiente de la función ingreso *f*, cómo se modificó la representación gráfica? Para esto realiza la representación gráfica y compárala con la representación gráfica realizada en la pregunta 3a.

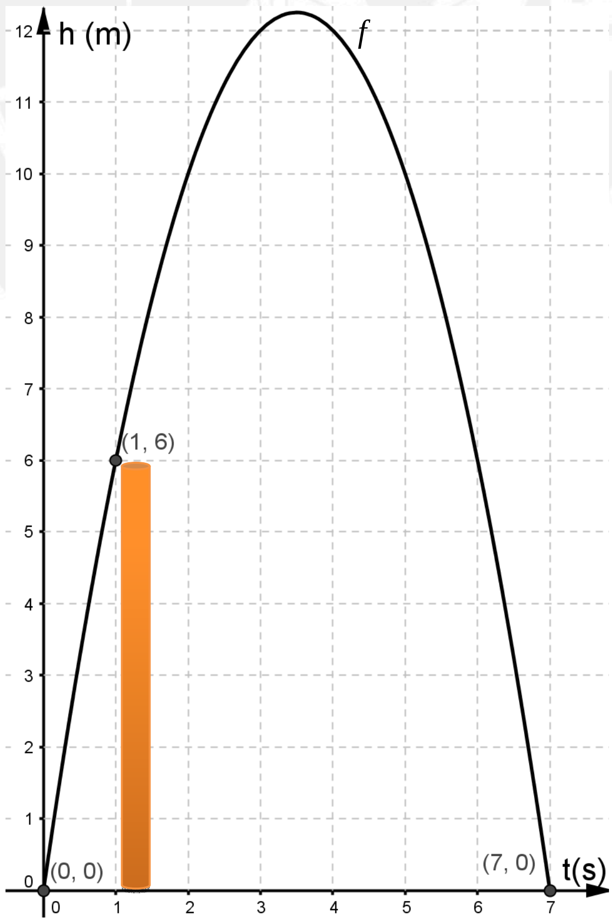
Actividad 02

Propósito de la actividad

Se espera que los estudiantes utilicen la noción de función cuadrática como regla de correspondencia para interpretar y modelar un problema contextualizado, realizando así tratamientos y conversiones del registro de representación gráfica al registro de representación algebraico, luego al registro de representación en lengua natural de la función cuadrática *f*.

Problema contextualiza0do

Un niño está acostado, jugando con una pelota de yas al pie de un poste de 6m de altura. El niño arroja la pelota al aire y controla con su cronómetro que al completar el primer segundo, la pelota pasa por el borde superior del poste, y también verifica que la pelota tarda 7 segundos en llegar al suelo. La situación está representada por el gráfico donde t se da en segundos (s) y h es la altura en metro (m). Halla la función cuadrática *f* que modela la situación y encuentra la altura máxima que alcanza la pelota.



A continuación, resuelve las siguientes preguntas.

Parte 01: Trabajando con la representación gráfica de la función cuadrática

a. ¿Qué pide hallar el problema?

b. ¿Qué significados tienen los puntos (0; 0), (1; 6) y (7; 0) en el contexto del problema?

c. ¿Es posible hallar la expresión algebraica de f conociendo tres puntos de paso de su representación gráfica?

d. Hallar la expresión algebraica que modela la situación propuesta

Parte 02: Trabajando con la representación algebraica de la función cuadrática

a. ¿Es posible que la pelota alcance una altura de 13 metros?

b. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?