

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



**ERRORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
EN EL DESARROLLO DE TAREAS QUE DEMANDAN CONOCIMIENTOS SOBRE
EL ENUNCIADO CONDICIONAL**

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que
presenta

LUIS MIGUEL MARAVÍ ZAVALETA

Dirigido por

ESTELA AURORA VALLEJO VARGAS

San Miguel, 2015



A la memoria de Don Miguel Quirino Zavaleta Vélez.

A mi querida madre, Doña Eddy Ruth Zavaleta Amoroto.

A mi Alma Mater, Universidad Nacional de Trujillo.

A mis alumnos de la I. E. N° 80915 “Miguel Grau Seminario” de El Pallar – Huamachuco.

Al Príncipe colectivo peruano.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer, en primer lugar, a Dios, por sustentar mi permanencia en esta Gran Marcha.

Al Ministerio de Educación del Perú, quien por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominada “Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014”.

A la Maestría en Enseñanza de la Matemática, por la exigente organización curricular y administrativa que permitió despertar nuestras habilidades ocultas.

A mi asesora, la Mg. Estela Vallejo Vargas. La exigencia, tiempo, conocimientos y oportunidades brindados con generosidad a quien recién comienza en la investigación, como es mi caso, constituyen valores inestimables que nunca serán olvidados.

A los Maestros Norma Rubio Goycochea y Saddo Ag Almoloud, quienes tuvieron a bien evaluar el presente trabajo para asegurar su calidad académica.

A los Maestros César Carranza Saravia, Uldarico Malaspina Jurado, Nélica Medina y Mariano González Ulloa, quienes siempre tuvieron una palabra de aliento e interés por nuestra investigación y estudios.

A mis profesoras de inglés, Mg. Giuliana Astorne Guillén y Mg. Dalila Trinidad Flores, quienes lograron un verdadero milagro con mis conocimientos de dicha lengua extranjera.

A la hospitalidad de la familia Albitres Ahumada, que permitió una estancia tranquila y confortable para mis estudios en la Ciudad de los Reyes.

A los amigos que siempre me impulsaron a continuar aprendiendo. Amigos como Carlos Torres Ninahuanca quien, desde hace muchos años me animó a profundizar mis conocimientos. Amigos (y camaradas) como todos aquellos que me enviaban viento próspero desde Lima, Trujillo y desde una soleada y valerosa tierra del Caribe. Gracias por su invaluable ayuda, Profesores Paul Torres Fernández y Adania Guanche Martínez.

A los trabajadores del Sistema de Bibliotecas de la Universidad. Gracias a su incansable labor diaria pudimos tener acceso a palacios que, sin duda alguna, extrañaré. Gracias, también, a todos aquellos trabajadores que permitieron que nuestra permanencia en la Universidad sea confortable y fructífera: de no existir personas que limpien el baño, cocinen el almuerzo, barran el piso o brinden seguridad, los pensamientos difícilmente hubiesen transitado del cerebro al papel. En realidad, el mundo es mundo gracias a las manos de los trabajadores. En sus manos está mejorarlo o perderlo.

RESUMEN

El presente trabajo tiene por objetivo analizar los errores de profesores de matemática del nivel secundario con respecto al empleo y conocimientos vinculados al enunciado condicional. Para ello, se emplean elementos teóricos provenientes de la lógica y de la Educación Matemática, relacionados con el estudio de los errores. Mediante el empleo de determinados procedimientos metodológicos provenientes del análisis de contenidos y aplicados a las justificaciones de las respuestas emitidas por los participantes, se ha llegado a determinar una relación de errores que corrobora los resultados de investigaciones antecedentes. Así mismo, a partir del análisis efectuado, se han advertido nuevos tipos de errores sobre los que se precisa un mayor estudio. En ese sentido, los errores observados en las justificaciones brindadas por profesores de matemática en activo y en nuestro medio constituyen el aporte fundamental de nuestro estudio. Finalmente, se brindan algunas sugerencias y recomendaciones para propuestas e investigaciones ulteriores.

Palabras clave: Errores, profesores, justificaciones, condicional.

ABSTRACT

This paper aims to analyze the mistakes of mathematics teachers at the secondary education in reference of application and knowledge related to the conditional statement. To do this, it take theoretical elements from logic and mathematics education related with the study errors. By using certain methodological procedures from content analysis and applied to the justifications of the answers given by the participants, it has been determined a list of errors that corroborates the results of background investigations. Also, in this research have found new types of errors, it needs deepen in studying them. In that regard, the errors found in the justifications offered by mathematics teachers constitute the main contribution of our study. Finally, this research gives some suggestions, proposals, and recommendations for further research.

Keywords: Errors, teachers, justifications, conditional.

Lista de Figuras

Figura 1. Línea de tiempo relacionada con la historia de la Lógica y el enunciado condicional	30
Figura 2. Diseños de Euler para representar a las proposiciones categóricas	36
Figura 3. Diagramas de Venn para representar proposiciones categóricas	43
Figura 4. Inclusión del conjunto A en el conjunto B.....	54
Figura 5. Inclusión del conjunto V en el conjunto W.....	55
Figura 6. Diagrama de Venn para representar modus ponens.....	56
Figura 7. Diagrama de Venn para representar modus tollens	56
Figura 8. Diagrama de Venn para representar silogismo hipotético	57
Figura 9. Diagrama de Venn para representar afirmación del consecuente	58
Figura 10. Diagrama de Venn para representar negación de antecedente.....	58
Figura 11. Datos brindados para el error de salto injustificado en inferencia lógica	64
Figura 12. Relación entre instrumentos propuestos y objetivos de nuestro estudio.....	74
Figura 13. Problema 1, los caramelos de la maestra	76
Figura 14. Problema 2, números primos – ítems a, b y c.	77
Figura 15. Diagrama de Venn para el enunciado condicional verdadero, problema 4	78
Figura 16. Diagrama de Venn para ítem a, problema 4.....	78
Figura 17. Diagrama de Venn para ítem b, problema 4	79
Figura 18. Diagrama de Venn para ítem c, problema 4.....	79
Figura 19. Problema 2, números primos, ítems d, e y f.....	80
Figura 20. Diagrama de Venn para ítem d, problema 4	81
Figura 21. Problema 3, fichas, parte (a)	82
Figura 22. Problema 2, fichas, parte (b)	83

Figura 23. Diagrama de Venn para representar la relación entre las premisas de (a) – Problema 3.....	84
Figura 24. Diagrama de Venn para la información particular (i), ítem (a), problema 3	84
Figura 25. Diagrama de Venn para la información particular (ii), ítem (a), problema 3	85
Figura 26. Diagrama de Venn para la información particular (iii), ítem (a), problema 3	85
Figura 27. Diagrama de Venn para la información particular (iv) ítem (a), problema 3	85
Figura 28. Diagrama de Venn para representar la relación entre las premisas de (b) – Problema 3.....	86
Figura 29. Diagrama de Venn para la información particular (i), ítem (b), problema 3	86
Figura 30. Diagrama de Venn para la información particular (ii), ítem (b), problema 3	87
Figura 31. Diagrama de Venn para la información particular (iii), ítem (b), problema 3	87
Figura 32. Diagrama de Venn para la información particular (iv) – b, problema 3.....	88
Figura 33. Aspecto de las tarjetas empleadas en la TSW.....	89
Figura 34. Problema 4, tarea modificada de Wason.....	91
Figura 35. Respuesta del participante 12 – análisis de problema 1.....	114
Figura 36. Respuesta de 03 – análisis de problema 1.....	114
Figura 37. Respuesta del participante 11 – análisis de problema 1.....	115
Figura 38. Respuesta del participante 08 – análisis de problema 1.....	116
Figura 39. Respuesta del participante 06 – análisis de problema 2a).....	118
Figura 40. Respuesta del participante 08 - análisis de problema 2a)	118
Figura 41. Respuesta del participante 10 – análisis de problema 2a).....	119
Figura 42. Respuesta del participante 05 – análisis de problema 2a).....	119
Figura 43. Respuesta del participante 03 - análisis de problema 2a)	120
Figura 44. Respuesta del participante 12 – análisis de problema 2b)	120
Figura 45. Respuesta del participante 09 - análisis del problema 2b).....	121
Figura 46. Respuesta del participante 05 – análisis de problema 2c).....	122

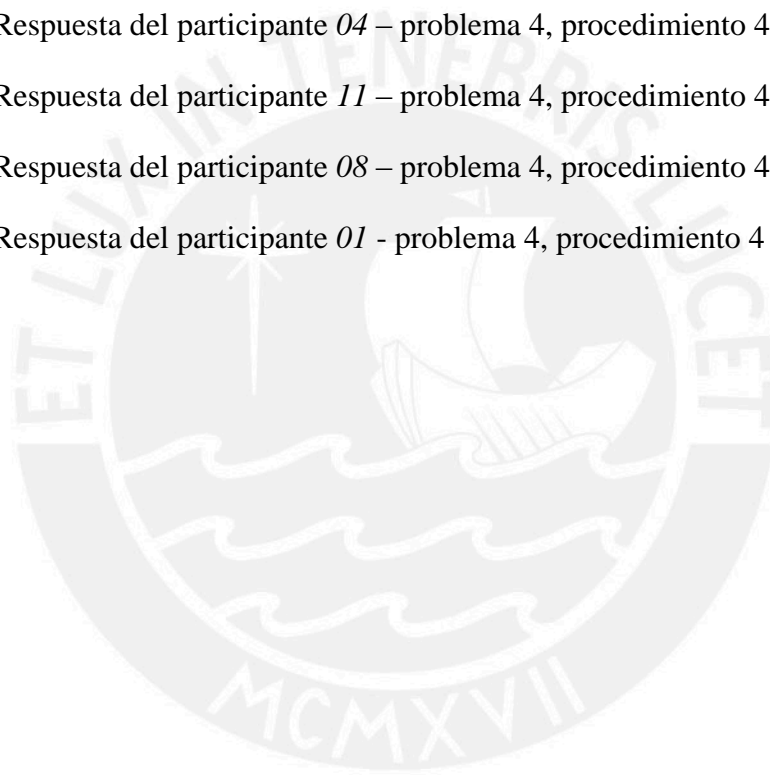
Figura 47. Respuesta del participante 08 - análisis del problema 2c)	122
Figura 48. Respuesta de 10 – análisis de problema 2d)	123
Figura 49. Respuesta del participante 09 – análisis de problema 2d)	123
Figura 50. Respuesta del participante 07 – análisis de problema 2d)	124
Figura 51. Respuesta del participante 01 – análisis del problema 2e)	125
Figura 52. Respuesta del participante 03 - análisis del problema 2e)	125
Figura 53. Respuesta del participante 12 – análisis de problema 2e).....	126
Figura 54. Respuesta del participante 08 - análisis del problema 2e)	126
Figura 55. Respuesta del participante 05 - análisis del problema 2e)	127
Figura 56. Respuesta del participante 04 - análisis del problema 2f).....	127
Figura 57. Respuesta del participante 10 – análisis del problema 3a) – i	130
Figura 58. Respuesta del participante 07 – análisis del problema 3a) – i	130
Figura 59. Respuesta del participante 03 – análisis del problema 3a) – i	131
Figura 60. Respuesta del participante 06 – análisis del problema 3a) – ii	132
Figura 61. Respuesta del participante 03 – análisis del problema 3a) – ii	132
Figura 62. Respuesta del participante 11 – análisis del problema 3a) – iii	133
Figura 63. Respuesta del participante 01 - análisis del problema 3a) - iii.....	133
Figura 64. Respuesta del participante 12 – análisis del problema 3a) – iii	134
Figura 65. Respuesta del participante 03 - análisis del problema 3a) - iii.....	134
Figura 66. Respuesta del participante 04 - análisis del problema 3a) – iii.....	135
Figura 67. Respuesta de 10 – análisis del problema 3a) – iv	135
Figura 68. Respuesta del participante 06 - análisis del problema 3a) – iv	136
Figura 69. Respuesta del participante 03 – análisis del problema 3a) – iv	136
Figura 70. Respuesta de 09 – análisis del problema 3b) – i	137
Figura 71. Respuesta del participante 03 – análisis del problema 3b) – i	137
Figura 72. Respuesta del participante 11 - análisis del problema 3b) - i.....	138

Figura 73. Respuesta del participante 11 - análisis del problema 3b) – i.....	138
Figura 74. Respuesta del participante 10 – análisis del problema 3b) – ii.....	139
Figura 75. Respuesta del participante 01 – análisis del problema 3b) – ii.....	139
Figura 76. Respuesta del participante 05 – análisis del problema 3b) – iii.....	140
Figura 77. Respuesta del participante 01 – análisis del problema 3b) – iii.....	140
Figura 78. Respuesta del participante 10 - análisis del problema 3b) - iii.....	140
Figura 79. Respuesta del participante 11, análisis del problema 4 - 1.....	144
Figura 80. Respuesta del participante 10, análisis del problema 4 – 1.....	145
Figura 81. Respuesta del participante 06, análisis del problema 4 - 1.....	145
Figura 82. Respuesta del participante 05, análisis del problema 4 - 1.....	146
Figura 83. Respuesta del participante 04, análisis del problema 4 - 2.....	146
Figura 84. Respuesta del participante 08, análisis del problema 4 - 2.....	147
Figura 85. Respuesta del participante 10, análisis del problema 4 - 2.....	148
Figura 86. Respuesta del participante 12, análisis del problema 4 - 2.....	148
Figura 87. Respuesta del participante 09, análisis del problema 4 - 2.....	149
Figura 88. Respuesta del participante 04, análisis del problema 4 - 3.....	150
Figura 89. Respuesta del participante 01, análisis del problema 4 - 3.....	150
Figura 90. Respuesta del participante 07, análisis del problema 4 - 3.....	151
Figura 91. Respuesta del participante 01, análisis del problema 4 - 4.....	152
Figura 92. Respuesta de 04, análisis del problema 4 - 4.....	152
Figura 93. Respuesta del participante 12, análisis del problema 4 - 4.....	153
Figura 94. Respuesta del participante 06, análisis del problema 4 - 4.....	154
Figura 95. Respuesta del participante 02 – problema 1.....	180
Figura 96. Respuesta del participante 10 – problema 1.....	180
Figura 97. Respuesta del participante 01 – problema 1.....	181
Figura 98. Respuesta del participante 07 - problema 1.....	181

Figura 99. Respuesta del participante 02 - problema 2a)	182
Figura 100. Respuesta del participante 08 – problema 2a)	182
Figura 101. Respuesta del participante 12 – problema 2a)	183
Figura 102. Respuesta del participante 06 – problema 2b)	183
Figura 103. Respuesta del participante 09 - problema 2b).....	183
Figura 104. Respuesta del participante 10 – problema 2b)	184
Figura 105. Respuesta del participante 03 – problema 2b)	184
Figura 106. Respuesta del participante 01 – problema 2c)	185
Figura 107. Respuesta del participante 05 – problema 2c)	185
Figura 108. Respuesta del participante 03 – problema 2c)	185
Figura 109. Respuesta del participante 01 - problema 2d).....	186
Figura 110. Respuesta del participante 07 – problema 2d)	186
Figura 111. Respuesta del participante 09 – problema 2d)	187
Figura 112. Respuesta del participante 08 - problema 2d).....	187
Figura 113. Respuesta del participante 02 – problema 2e)	188
Figura 114. Respuesta del participante 06 – problema 2e)	188
Figura 115. Respuesta del participante 12 – problema 2e)	188
Figura 116. Respuesta del participante 09 – problema 2e)	189
Figura 117. Respuesta del participante 06 – problema 2f).....	189
Figura 118. Respuesta del participante 12 - problema 2f).....	189
Figura 119. Respuesta del participante 12 - problema 2f).....	190
Figura 120. Respuesta del participante 11 – problema 3a) – i	191
Figura 121. Respuesta del participante 03 – problema 3a) – i	191
Figura 122. Respuesta del participante 02 – problema 3, ítem a – i.....	191
Figura 123. Respuesta del participante 06 - problema 3a) - i.....	192
Figura 124. Respuesta del participante 08 – problema 3a) – ii	192

Figura 125. Respuesta del participante 01 – problema 3a) – ii	192
Figura 126. Respuesta del participante 03 – problema 3a) – ii	193
Figura 127. Respuesta del participante 10 – problema 3a) – iii	193
Figura 128. Respuesta del participante 03 – problema 3a) – iii	194
Figura 129. Respuesta del participante 04 – problema 3a) – iii	194
Figura 130. Respuesta del participante 05 – problema 3a) – iii	194
Figura 131. Respuesta del participante 02 – problema 3a) – iv	195
Figura 132. Respuesta del participante 06 – problema 3a) – iv	195
Figura 133. Respuesta del participante 03 - problema 3a) - iv.....	195
Figura 134. Respuesta del participante 12 – problema 3b) – i	196
Figura 135. Respuesta del participante 03 – problema 3b) – i	196
Figura 136. Respuesta del participante 01 - problema 3b) - i	196
Figura 137. Respuesta del participante 04 – problema 3b) – i	197
Figura 138. Respuesta del participante 02 – problema 3b) – ii	197
Figura 139. Respuesta del participante 01 – problema 3b) – ii	197
Figura 140. Respuesta del participante 10 – problema 3b) – ii	198
Figura 141. Respuesta del participante 08 – problema 3b) – iii	198
Figura 142. Respuesta del participante 01 – problema 3b) – iii	198
Figura 143. Respuesta del participante 11 – problema 3b) – iii	199
Figura 144. Respuesta del participante 12 – problema 3b) – iv	199
Figura 145. Respuesta del participante 04 – problema 4, procedimiento 1	200
Figura 146. Respuesta del participante 05 – problema 4, procedimiento 1	200
Figura 147. Respuesta del participante 07 – problema 4, procedimiento 1	201
Figura 148. Respuesta del participante 03 - problema 4, procedimiento 1	201
Figura 149. Respuesta del participante 02 – problema 4, procedimiento 2	202
Figura 150. Respuesta del participante 08 - problema 4, procedimiento 2	202

Figura 151. Respuesta del participante 11 – problema 4, procedimiento 2	203
Figura 152. Respuesta del participante 01 - problema 4, procedimiento 2	203
Figura 153. Respuesta del participante 03 – problema 4, procedimiento 2	204
Figura 154. Respuesta del participante 09 – problema 4, procedimiento 3	204
Figura 155. Respuesta del participante 01 - problema 4, procedimiento 3	205
Figura 156. Respuesta del participante 07 – problema 4, procedimiento 3	205
Figura 157. Respuesta del participante 02 – problema 4, procedimiento 4	206
Figura 158. Respuesta del participante 04 – problema 4, procedimiento 4	206
Figura 159. Respuesta del participante 11 – problema 4, procedimiento 4	206
Figura 160. Respuesta del participante 08 – problema 4, procedimiento 4	207
Figura 161. Respuesta del participante 01 - problema 4, procedimiento 4	207



Lista de Tablas

Tabla 1. Propositiones categóricas.....	43
Tabla 2. Ejemplos típicos de propositiones categóricas	44
Tabla 3. Ejemplos típicos de propositiones categóricas	45
Tabla 4. Propositiones categóricas expresadas mediante cuantificadores	46
Tabla 5. Ejemplos de empleo de <i>modus ponens</i> y <i>modus tollens</i>	50
Tabla 6. Formas inválidas de razonamiento	52
Tabla 7. Matriz de análisis para el problema 1	96
Tabla 8. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 1 ..	97
Tabla 9. Matriz de análisis para el problema 2.....	98
Tabla 10. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2a)	99
Tabla 11. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2b)	100
Tabla 12. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2c)	100
Tabla 13. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2d)	101
Tabla 14. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2e)	101
Tabla 15. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2f)	102
Tabla 16. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2	102
Tabla 17. Matriz de análisis para el problema 3	103
Tabla 18. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3a) - i	104

Tabla 19. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3a)	
- ii.....	105
Tabla 20. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3a)	
- iii	105
Tabla 21. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3a)	
- iv.....	106
Tabla 22. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3b)	
- i.....	106
Tabla 23. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3b)	
- ii.....	107
Tabla 24. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3b)	
- iii	107
Tabla 25. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3b)	
- iv.....	108
Tabla 26. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3	
.....	108
Tabla 27. Matriz de análisis para el problema 4.....	109
Tabla 28. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 4,	
ítem 1	110
Tabla 29. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 4,	
ítem 2.....	111
Tabla 30. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 4,	
ítem 3.....	111
Tabla 31. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 4,	
ítem 4.....	111
Tabla 32. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 4	
.....	112
Tabla 33. Tipos de errores cometidos frente al problema 1	117
Tabla 34. Tipos de errores cometidos frente al problema 2	128

Tabla 35. Tipos de errores cometidos frente al problema 3 141

Tabla 36. Tipos de errores cometidos frente al problema 4 154



Índice

RESUMEN

ABSTRACT

INTRODUCCIÓN 16

Capítulo 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN 18

1.1. Planteamiento y justificación del problema 18

1.2. Pregunta de investigación y objetivos 23

1.2.1. General 23

1.2.2. Específicos 23

1.3. Antecedentes de la investigación 24

Capítulo 2

ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS FUNDAMENTALES 28

2.1. Elementos teóricos acerca de la lógica y el enunciado condicional 28

2.1.1. Breve estudio histórico relacionado al condicional 28

2.1.2. Definiciones importantes 37

2.1.3. Clasificación de la proposición condicional 40

2.1.4. Proposiciones categóricas 42

2.1.5. Relación lógica de contradictoriedad entre proposiciones categóricas 46

2.1.6. Reglas de inferencia deductiva 47

2.1.7. Conexión entre condicional, inferencia y conjuntos 54

2.2. Elementos teóricos acerca de los errores vinculados a la lógica 59

2.2.1. Negación del antecedente y afirmación del consecuente 60

2.2.2. Conclusión de la conversa 61

2.2.3. Concepción causal de la implicación 62

2.2.4. Adición de información extraña 62

2.2.5. Asignación de significado inconsistente a un sector del texto	63
2.2.6. Salto injustificado en la inferencia	63
2.2.7. Imposición de un requisito discordante con la información dada	64
2.2.8. Afirmación de un requerimiento que el problema no requirió	65
2.3. Elementos metodológicos	66
2.3.1. Precisión de lo que se investiga	67
2.3.2. Elaboración de la monografía	67
2.3.3. Diagnóstico del objeto de estudio	67
2.3.4. Elaboración del reporte de investigación	71
Capítulo 3	
ELEMENTOS PARA EL DIAGNÓSTICO	72
3.1. Las líneas de análisis de errores y la función de diagnóstico	72
3.2. Descripción de problemas y respuestas esperadas	75
3.2.1. Problema 1. Los caramelos de la maestra	75
3.2.2. Problema 2. Números primos	77
3.2.3. Problema 3. Fichas	81
3.2.4. Problema 4. Tarea modificada de Wason	88
Capítulo 4	
RECOLECCIÓN Y ORGANIZACIÓN DE DATOS	94
4.1. Descripción de los participantes del estudio	94
4.2. Condiciones de recolección de la información	94
4.3. Tratamiento de las respuestas de los participantes	95
4.3.1. Codificación de las respuestas frente al problema 1	96
4.3.2. Codificación de las respuestas frente al problema 2	97
4.3.3. Codificación de las respuestas frente al problema 3	102
4.3.4. Codificación de las respuestas frente al problema 4	109

Capítulo 5**ANÁLISIS DE LOS DATOS 113**

5.1. Análisis de los errores cometidos en el desarrollo del problema 1.....	113
5.1.1. Errores detectados y ejemplos ilustrativos	113
5.1.2. Consideraciones finales del análisis realizado sobre las respuestas frente al problema 1	116
5.2. Análisis de los errores cometidos en el desarrollo del problema 2.....	117
5.2.1. Errores detectados y ejemplos ilustrativos	117
5.2.2. Consideraciones finales del análisis realizado sobre las respuestas frente al problema 2	128
5.3. Análisis de los errores cometidos en el desarrollo del problema 3.....	129
5.3.1. Errores detectados y ejemplos ilustrativos	129
5.3.2. Consideraciones finales del análisis realizado sobre las respuestas frente al problema 3	141
5.4. Análisis de los errores cometidos en el desarrollo del problema 4.....	143
5.4.1. Errores detectados y ejemplos ilustrativos	143
5.4.2. Consideraciones finales del análisis realizado sobre las respuestas frente al problema 4	154

Capítulo 6**CONSIDERACIONES FINALES 157**

6.1. Conclusiones.....	157
6.2. Sugerencias y recomendaciones	161

REFERENCIAS 163**ANEXOS 170**

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, no son pocas las iniciativas destinadas a la formación en servicio de los docentes de matemática. Sin embargo, nos parece que, dentro de aquellas, son pocas las que tienen como propósito el fortalecimiento de las capacidades y conocimientos lógicos de los docentes. Así mismo, creemos que aún son menos los programas enfocados en diagnosticar el estado de dichos requisitos en los maestros.

Debido a las consideraciones anteriores, creemos que es necesario determinar cómo y qué conocen los maestros de matemática del nivel secundario acerca de la lógica, bajo el supuesto que una propuesta seria en la formación de dichos profesionales no debe olvidar definir el estado en que sus conocimientos y habilidades de índole lógica (entre muchas otras) se encuentran. Sin embargo, al ser la lógica un campo bastante amplio, debemos conceder primacía a un elemento importante en la ligazón de aquella disciplina con la matemática: el enunciado o proposición condicional. Por ello, nuestro trabajo se plantea como objetivo principal determinar los errores que cometen los profesores de matemática del nivel secundario en el uso de dicho tipo de proposición. Con ese propósito, hemos desarrollado nuestro estudio tras haber aplicado a nuestra realidad determinados instrumentos provenientes de la literatura científica internacional y tras haber analizado las justificaciones brindadas por profesores de matemática en servicio para fundamentar sus respuestas frente a los problemas planteados en los instrumentos. Para efectuar dicho análisis se contó con la poderosa ayuda de conceptos teóricos provenientes de la Educación Matemática (vinculados a investigaciones acerca de los errores), así como de elementos metodológicos aportados por el análisis de contenido.

Nuestro trabajo se desarrolla en seis capítulos:

En el capítulo 1 presentamos los antecedentes del presente estudio y los elementos rectores de este, como son la pregunta de investigación y los objetivos.

En el capítulo 2 exponemos los elementos teóricos y metodológicos necesarios para el desarrollo del estudio. Los primeros provienen de la lógica y las investigaciones en Educación Matemática; los segundos, de la metodología de análisis de contenido.

En el capítulo 3 presentamos los instrumentos (provenientes de investigaciones internacionales y adaptados a nuestro medio) que nos permitirán cumplir los objetivos trazados para nuestra investigación. También mostramos las respuestas correctas esperadas frente a cada uno de aquellos.

En el capítulo 4 describimos los pasos mediante los cuales recogimos y organizamos los datos para el estudio, en relación con los procedimientos del análisis de contenido que nos permitieron distinguir las respuestas erróneas de las correctas, así como la relación que poseían las justificaciones con todas estas.

En el capítulo 5 desarrollamos el procedimiento metodológico de análisis principal de las respuestas incorrectas para identificar y clasificar los errores cometidos en el empleo del enunciado condicional, bajo la guía de los elementos teóricos considerados en nuestra investigación.

En el capítulo 6 enunciamos las conclusiones de nuestro estudio respecto a los objetivos planteados en el capítulo 1. Así mismo, señalamos algunas sugerencias y recomendaciones para futuras investigaciones relacionadas con nuestro estudio.

Finalmente, en los anexos presentamos los instrumentos que nos permitieron concretizar nuestra investigación, así como ejemplos de la codificación (realizada por nosotros) de las respuestas y justificaciones brindadas por los participantes frente a cada problema. Dichos ejemplos constituyen evidencias de la exposición llevada a cabo durante el capítulo 4.



Capítulo 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el primer capítulo de nuestro trabajo presentamos los argumentos que justifican la realización de nuestra investigación y los trabajos antecedentes a ella. Así también mostramos la pregunta de estudio que deseamos responder, los objetivos que la orientan y el método con el que desarrollaremos nuestro trabajo.

1.1. Planteamiento y justificación del problema

Entre los 21 propósitos de la Educación Básica Regular al 2021 se cuenta el “(...) desarrollo del pensamiento matemático y de la cultura científica y tecnológica para comprender y actuar en el mundo” (Perú, Ministerio de Educación, 2008, p. 21). Hemos podido observar que este es uno de los fundamentos del diseño de áreas curriculares, competencias de ciclo y otros elementos del currículo básico peruano. Por ejemplo, el área de Matemática manifiesta entre sus propósitos que “(...) el trabajo matemático debe permitir al estudiante desarrollar su habilidad para elaborar y comprobar conjeturas, formular contraejemplos, seguir argumentos lógicos, juzgar la validez de un argumento, construir argumentos sencillos y válidos (...)” (Perú, Ministerio de Educación, 2010, p. 9). Para ello se han definido tres capacidades de área: Razonamiento y demostración, Comunicación matemática y Resolución de problemas. En el nivel secundario, la primera capacidad se ha establecido

(...) para formular e investigar conjeturas matemáticas, desarrollar y evaluar argumentos y comprobar demostraciones geométricas, elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración para que el estudiante pueda reconocer estos procesos como aspectos fundamentales de las matemáticas (Perú, Ministerio de Educación, 2008, p. 317).

Las finalidades indicadas en la cita permiten perfilar la siguiente cuestión: si, como se infiere a partir del abundante material fáctico mostrado por investigadores como Stylianou, Blanton & Knuth (2011), el aprendizaje de la demostración se genera a partir de la necesidad de establecer certezas en la contradicción de lo percibido y lo inferido, ¿se han perfeccionado las capacidades metodológicas *ad hoc* de maestras y maestros para materializar los propósitos curriculares anteriormente descritos? Tal parece que, con relación a estos, se necesita mayor cualificación de los modos de actuación docente. De hecho, la última es escasamente visible en las orientaciones técnico – pedagógicas (Perú, Ministerio de Educación, 2010) y en el fascículo sobre aprendizaje de la Lógica –

Matemática dirigido a maestros (Perú, Ministerio de Educación, 2007). De existir una metodología para la enseñanza – aprendizaje de la demostración, ¿cuál es el aspecto central que ella debería cubrir para orientar a los profesores del nivel secundario, en particular? Al respecto, recogemos la llamada de atención de Durand-Guerrier (1998 – 1999), quien indica:

Dans ses travaux, Duval insiste sur l'importance du pas de démonstration lié à un énoncé conditionnel de la forme *si p, alors q*, L'attention portée à cette acquisition peut s'expliquer sans doute par les résultats obtenus en psychologie cognitive (...), lesquels mettent en évidence les difficultés pour la plupart des sujets humains, y compris des étudiants scientifiques, à utiliser correctement un énoncé de ce type pour faire des déductions (pp. 57 – 58)

[En sus trabajos, Duval insiste sobre la importancia del paso de la demostración ligada a un enunciado condicional de la forma *si p, entonces q*. La atención brindada a esta adquisición quizá se explique, sin duda, por los resultados obtenidos en psicología cognitiva (...), los que ponen en evidencia las dificultades que la mayor parte de seres humanos (comprendidos los estudiantes de ciencias) tienen para emplear correctamente un enunciado de este tipo y realizar deducciones] (**traducción nuestra**).

De acuerdo con la cita, es la lógica, entonces, el eslabón principal en la enseñanza – aprendizaje de la demostración, en general. Como indica la misma autora en un trabajo posterior

(...) it seems rather clear that logic is closely intertwined with mathematical activity in two main aspects: the first one concerns mathematical language, and the second one concerns mathematical proof, argumentation and reasoning (Durand-Guerrier, 2014, p. 361)

[(...) parece más que claro que la lógica es cercanamente enlazada con la actividad matemática en dos aspectos principales: el primero concierne al lenguaje matemático, mientras que el segundo concierne a la demostración matemática, la argumentación y el razonamiento] (**traducción nuestra**)

Podemos observar, de esta manera, el carácter transversal que posee la lógica en la actividad matemática. Esta disciplina se muestra en el Diseño Curricular Nacional (Perú, Ministerio de Educación, 2008), donde elementos suyos se han planificado en el 1° grado de secundaria, bajo el subtítulo de relaciones lógicas y conjuntos, pertenecientes al componente de Número, relaciones y funciones. Bajo el mismo apartado se le encuentra en el plan curricular de 2° grado de secundaria, así como en los planes curriculares de 3°, 4° (donde se incluyen los cuantificadores) y 5° grado de secundaria (donde se planifica argumentación). De esta forma, el dominio y desarrollo de habilidades por parte de los estudiantes exige a los maestros, en primer lugar, conocer de lógica y, en segundo término, considerar su enseñanza en relación con los diferentes aspectos considerados en el currículo.

Con respecto a lo anterior, Kneller (1969) señala algunos beneficios que trae el conocimiento de la lógica a la actividad de enseñanza:

(...) los maestros se hallarían en mejores condiciones de mejorar la capacidad del alumno para pensar de manera lógica, al saber cuáles son las operaciones de ese pensamiento y cómo se puede guiar a los estudiantes a fin de realizarlas de una manera más efectiva.

Esta estructura lógica ideal también ofrece una base teórica para la investigación experimental de los siguientes problemas: (...) La capacidad del maestro para manejar y explorar la materia de estudio de una manera lógica, ¿no eliminaría en parte su dependencia respecto de los libros de texto? Si las respuestas a todas estas preguntas fueran afirmativas, ¿no debiéramos instituir cursos especiales, en el programa de capacitación de los maestros, sobre la naturaleza de las operaciones lógicas y las formas de efectuarlas? (...) (p. 109)

Consideramos que la propuesta de Kneller (1969) es muy necesaria, pues la lógica es “el estudio de los métodos y principios usados para distinguir el buen (correcto) razonamiento del malo (incorrecto)” (Copi, 1981, p. 3). De esta manera, se comprende la importancia de su conocimiento y dominio por parte de todos los ciudadanos, amén de profesores, pero muy en especial de los profesores de matemática, por encontrarse esta ciencia fundamentada en la lógica para la expresión de su contenido. El proceso de demostración matemática constituye un preclaro ejemplo ilustrativo de dicho fundamento. Pero, sin comprender qué es lo que se pretende demostrar, difícilmente se lleva a cabo dicho proceso.

Uno de los factores que ilustra el rol que la lógica juega en el aula (y más allá de ella) se refiere a la presencia de una relación problemática entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático. Al respecto, Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp & Tanguay (2012) indican:

The problem of the relationship between natural and mathematical language is crucial in mathematics education, in particular because it is matter of fact that natural language is commonly used in mathematical classes, both orally, in writing, as well as in textbooks. Nevertheless, the language of everyday conversation differs significantly from that of mathematical discourse. Some of these differences concern the meanings of the words used to define mathematical objects (p. 375).

[El problema de la relación entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático es importante en educación matemática, en especial porque es un hecho que el primero es comúnmente empleado en clases de matemáticas en forma oral, en la escritura, o en textos escolares. No obstante, el lenguaje de la conversación cotidiana difiere significativamente del utilizado en el discurso matemático. Algunas de estas diferencias conciernen a los significados de las palabras empleadas para definir a los objetos matemáticos] (**traducción nuestra**).

Es debido al último factor indicado en la cita que trabajar con lógica en contexto de lenguaje cotidiano puede resultar muy difícil, sin considerar ya lo delicado de su enseñanza. Tanto más si, como indican Durand-Guerrier *et al.* (2012):

With just a few exceptions, one can find examples in everyday language where words important for determining a sentence's logic have the same meaning as in mathematics. For instance, "There is a lid for every pot" is typically understood to mean the same as "For every pot, there is a lid"; that is, different pots typically have different lids. In everyday language, statements where the words "there is" precede the words "for every" are almost always interpreted as if the words "for every" preceded the words "there is". In mathematics, however, the phrases "there is" and "for every" are interpreted from left to right. Thus, "For every positive real number x , there is a positive real number y such that $y < x$ " is true, whereas "There is a positive real number y such that for every positive real number x , $y < x$ " is false. Because of their experience with ordinary language, many students do not see a difference between these two statements (p. 376).

[Con unas pocas excepciones, uno puede encontrar ejemplos en el lenguaje cotidiano donde las palabras importan para determinar que una proposición tiene el mismo significado que en matemáticas (...) Por ejemplo, "Hay una tapa para cada olla" es típicamente entendido de la misma forma que "Para cada olla, hay una tapa"; esto es, diferentes ollas tienen diferentes tapas. En el lenguaje cotidiano, enunciados donde la palabra "hay" precede a las palabras "para todo" son casi siempre interpretadas como si las palabras "para todo" precediesen a la palabra "hay". En matemáticas, sin embargo, las frases "hay" y "para todo" son interpretadas de izquierda a derecha. De este modo, "Para todo número positivo real x , hay un número real positivo y , tal que $y < x$ " es verdadero, mientras que "Hay un número real positivo y tal que para cada número real positivo x , $y < x$ " es falso. Debido a su experiencia con el lenguaje ordinario, muchos estudiantes no observan diferencias entre estos dos enunciados] **(traducción nuestra)**

Si, como indican los autores, tal es la problemática de los estudiantes, creemos que se encuentra totalmente justificado el trabajo exploratorio con los docentes pues, quizás, ellos no sean ajenos a los fenómenos indicados en las citas anteriores. De hecho, un antiguo estudio acerca de la relación entre los errores de razonamiento en los niños y su nivel de maduración, abordaba una interrogante parecida y planteaba una interrogante abierta: "(...) if elementary school teachers make the same types of error in logical reasoning as elementary school children, then how can one expect to achieve in the schools the goal of critical thinking?" ["(...) si los maestros de escuela elemental cometen los mismos tipos de error en razonamiento lógico que los alumnos de dicho nivel escolar, ¿puede uno esperar que se logre el objetivo del pensamiento crítico en las escuelas?"] **(traducción nuestra)** (Eisenberg & McGinty, 1974, p. 226).

En el caso particular de las relaciones entre la lógica y la enseñanza de la geometría, la situación posiblemente no difiera de la diagnosticada cuarenta años atrás, cuando Fehr & Glaymann (1973) observaban que la enseñanza de la primera se limitaba al ámbito de la segunda. Tal vez fue que, frente a un escenario similar, Dorofeev, Potápov & Rozov (1973) subrayaron, para la matemática escolar:

(...) Está muy difundida la opinión de que la Geometría exige razonamientos estrictos, que contiene teoremas de demostración minuciosa con definiciones requeridas, y que

en Algebra existe un solo teorema, que es el de Viete, y todo lo demás son palabras y fórmulas. Esto es un error grave. Hasta la fórmula del cuadrado de suma es un teorema (...) (p. 7).

Esta cita nos motiva a pensar que la lógica necesita ser estudiada en determinado aspecto fundamental de la matemática, más allá de los campos en que esta última ciencia se desarrolle. De acuerdo con Durand-Guerrier (1998 – 1999), podemos observar que el aspecto más importante del empleo de la lógica en la actividad matemática corresponde al enunciado condicional.

En concordancia con esta afirmación, se puede señalar que los teoremas, proposiciones empleadas en diversos campos de la matemática, se expresan en términos de proposiciones condicionales o bicondicionales (Curtis, Daus & Walker, 1961). Constituye un ejemplo de enunciado condicional “si el número m es un divisor de los números n_1 y n_2 [respectivamente], entonces m será (...) divisor de la suma $n_1 + n_2$ ” (Potápov, Alexándrov & Pasichenko, 1986, p. 9). De forma análoga, constituye un ejemplo de enunciado bicondicional “para que un número natural $p = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ se divida por dos, es necesario y suficiente que la última cifra a_0 del número citado se divida entre 2” (Potápov, Alexándrov & Pasichenko, 1986, p. 11). Considerando el uso de tales proposiciones así como el hecho que la ciencia constituye una de las fuentes de los contenidos curriculares, el empleo adecuado del enunciado condicional durante el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática es vital. Estas razones, así como las referidas a los errores mencionados en la relación entre lógica y actividad matemática o entre lógica y enseñanza de la matemática, fundamentan la necesidad de investigar los errores más comunes que los profesores de matemática pueden cometer durante el desarrollo de tareas que involucran al tipo de enunciado mencionado.

El programa planteado por Kneller (1969) en una cita anterior, nos plantearía la tarea del diseño de una metodología que apoye la labor docente en su trabajo con el enunciado condicional. Empero, en el momento actual, ello no es pertinente por dos motivos fundamentales:

a) Desde el punto de vista curricular y de acuerdo con el principio de enseñanza propuesto por el influyente NCTM (2000), los profesores necesitan conocer matemáticas para enseñar. De hecho, dentro de los estándares relativos a los procesos de Prueba y razonamiento y de Comunicación, el rol del docente es importante para promover la elaboración e investigación de conjeturas por parte de los estudiantes y para usar el lenguaje matemático con precisión, sin hablar ya del dominio numérico que debe poseer

(NCTM, 2000). Ante ello, es necesario determinar primero los conocimientos y deficiencias que los profesores de educación secundaria poseen antes de brindarles la ayuda metodológica correspondiente. Por ello, como indica Jansson (1975, citado en Damarin, 1977), “(...) improvement of the preparation of elementary teachers for dealing with logical inference can be accomplished only with the aid of research” (p. 131) [“(...) la mejoría en la preparación de los maestros de nivel elemental para tratar con la inferencia lógica puede ser conseguida solo con la ayuda de la investigación”] (**traducción nuestra**). Esta afirmación es justa no solo para los maestros de nivel elemental.

b) Desde el punto de vista didáctico, aunque estamos de acuerdo con Davýdov (s.f.) en la necesidad de investigar los problemas del surgimiento de las formas lógicas en el pensamiento de los estudiantes (y –agregamos- de quienes les enseñan), consideramos importante abstraer a los fenómenos de su curso para analizarlos, como pretendemos hacer con el objeto de nuestra investigación.

1.2. Pregunta de investigación y objetivos

En línea con los argumentos formulados con anterioridad, se ha planteado la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son los errores cometidos por profesores de Matemática del nivel secundario en el desarrollo de tareas que demandan conocimientos sobre el enunciado condicional?

Los objetivos que nos permitirán dar respuesta a la cuestión son los siguientes:

1.2.1. General

Analizar los errores de profesores de Matemática de secundaria en el desarrollo de tareas que involucran conocimientos sobre el enunciado condicional

1.2.2. Específicos

a) Identificar los errores de profesores de Matemática de secundaria en el desarrollo de tareas que demandan conocimientos y empleo del enunciado condicional, así como sus posibles causas.

b) Clasificar y describir los tipos de errores generados en el desarrollo de dichas tareas, de acuerdo con los elementos teóricos considerados en la presente investigación.

1.3. Antecedentes de la investigación

En Matemática, el enunciado compuesto de tipo condicional o implicación (Copi, 1962) es muy utilizado para formular teoremas y demostrarlos, aunque esto no sea tan aparente en el desarrollo de la matemática escolar (Dorofeev, Potápoov & Rozov, 1973). A continuación, se presentan algunos trabajos que contribuyen al estudio del tema.

a) *En la investigación del proceso deductivo general* se destaca el trabajo de Luria (1974), quien estudió los procesos del pensamiento lógico en poblaciones inmersas en un complicado proceso de cambio social, como los campesinos del Asia Central soviética entre la tercera y cuarta década del siglo XX. La investigación determinó las características que limitaban el pensamiento teórico de los sujetos, las mismas que se encontraban vinculadas a dificultades en la generalización. En el estudio, se estableció que “las relaciones de la experiencia práctica inmediata prevalecían sobre las relaciones lógico – verbales que fundamentan la abstracción y la generalización” (Luria, 1974, p. 150). El amplio programa de la investigación no profundizó más en las formas en que los sujetos de la investigación empleaban el enunciado condicional. Sin embargo, los problemas planteados consideraban dicho aspecto de forma implícita.

b) *Próxima al objeto de nuestro trabajo* tenemos la investigación llevada a cabo por Wason (1966; citado en Alvarado & González, 2009) en relación con el tratamiento de las implicaciones en estudiantes del nivel superior, quien “mostró que la mayoría usa en las demostraciones el *modus ponens* (...), muy pocos utilizan el *modus tollens* (...) y gran parte de ellos cometen errores de afirmación del consecuente y negación del antecedente” (p. 75). Las investigaciones reseñadas en este apartado han abordado aquel aspecto que despuntaba en Luria (1974): los diferentes tipos de condicional, el grado de dificultad que estos aparejaban para los sujetos en estudio y los errores que se podían cometer con dicho tipo de proposición.

En este apartado también debemos destacar el trabajo de Movshovitz–Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987), quienes investigaron los errores matemáticos de estudiantes israelíes el desarrollo de los exámenes de graduación del nivel secundario. Los investigadores produjeron un sistema de seis categorías de errores: datos mal empleados, lenguaje mal interpretado, inferencia lógicamente inválida, teorema o definición distorsionada, solución no verificada y error técnico. Los errores que los estudiantes cometieron en el empleo de reglas de inferencia (donde se encuentran aquellos que involucran al enunciado condicional) se encuentran agrupados en la tercera categoría mencionada y

mantiene puntos de contacto con los errores observados por otros investigadores reseñados en este apartado. Tales errores de inferencia nos brindan el criterio basal para analizar los datos obtenidos en nuestro trabajo.

No queremos terminar el apartado sin mencionar el importante aporte teórico de Deloustal–Jorrand (2002; 2004). En el primer trabajo, dicha investigadora considera el error atribuido a la concepción causal de la implicación; en la segunda referencia, así como en otros muchos artículos suyos, la investigadora sostiene la necesidad de vincular los marcos deductivo, lógico–formal y conjuntista para comprender al enunciado condicional, donde el último marco, considera, es el fundamental. Este es un punto de vista didáctico acerca de la relación matemática existente entre el enunciado condicional y los conjuntos que ha sido considerada en Lages, Pinto, Wagner & Morgado (2000).

c) Directamente hacia nuestro objeto de estudio apuntan los trabajos de Rogalski & Rogalski (2004), Durand–Guerrier *et al.* (2012) y Echeverry, Molina, Samper, Perry & Camargo (2012). Así mismo, Inglis & Simpson (2008) mencionan varias investigaciones vinculadas al condicional, entre las que cabe mencionar a la realizada por Damarin (1977). Empezaremos, en orden cronológico, por mencionar el último estudio.

Damarin (1977) concentra su atención en el desempeño de los profesores en formación (para el nivel elemental) durante el desarrollo de tareas relacionadas con el proceso de inferencia, las mismas que fueron diseñadas por la autora. La investigación encontró que la mayoría de los participantes tendían a considerar las proposiciones conjuntiva, condicional y bicondicional de un mismo modo, declarándolas verdaderas si las proposiciones simples que las componían lo eran. La no distinción entre condicional y bicondicional nos brinda un acercamiento a los errores que otros estudios mencionan, así como a aquellos que podríamos encontrar en nuestro trabajo.

La investigación de Rogalski & Rogalski (2004), dirigida a estudiar la forma en que comprenden a la implicación los futuros profesores de matemática, es importante para nuestro trabajo porque clasifica los problemas–instrumentos que se plantean a los participantes, de acuerdo a cómo se plantea el enunciado condicional en el contenido de cada uno de ellos. De esta forma se distinguen los problemas con implicación “calculable”, sobre definición de una regla, de “contrato social” y de implicación “factual” (con contexto no matemático). Tal esquema de clasificación nos proporciona elementos para la selección, adaptación o elaboración de los correspondientes problemas de nuestra investigación.

Durand–Guerrier *et al.* (2012) indican que:

In ordinary classroom settings, except when they are themselves writing careful mathematic proofs, teachers often use natural language that typically contains implicit assumptions, hidden quantification, and unstated reasoning rules rather than explicit references to logical principles (...) This lack of rigour in teachers' discourse may impede students' ability to write precise proofs (...) (pp. 376 – 377)

[En escenarios cotidianos de aula, excepto cuando ellos mismos redactan cuidadosas demostraciones matemáticas, los profesores emplean frecuentemente el lenguaje natural que, típicamente, contiene suposiciones implícitas, cuantificadores ocultos y reglas no enunciadas de razonamiento, más que referencias explícitas a principios lógicos (...) Esta falta de rigor del discurso docente puede trabar la habilidad de los estudiantes para elaborar pruebas precisas (...)] (**traducción nuestra**).

En la última cita, la autora señala aquellos factores concernientes a la enseñanza del profesor que pueden dificultar el desarrollo de la demostración en los estudiantes. En la investigación desarrollada por Echeverry *et al.* (2012) se profundiza en el tema, pues los autores estudiaron los problemas en el uso del enunciado condicional por profesores en formación, estudiantes del curso de Geometría Plana de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Las situaciones problemáticas identificadas por Echeverry *et al.* (2012) en su estudio fueron:

(...) no identificar en forma completa la hipótesis o la tesis de un teorema; aplicar un postulado, teorema o definición sin tener las condiciones que conforman la respectiva hipótesis; concebir de manera restringida la condicional, considerando que el antecedente siempre es verdadero; y considerar que la afirmación y la recíproca o la inversa son equivalentes (p. 75).

Las tres últimas líneas de la cita refieren a un error detectado en otros estudios como el ya citado de Wason (1966, citado en Alvarado & González, 2009) o Epp (2003, citado en Alvarado & González, 2009), quien señala como causa del equívoco

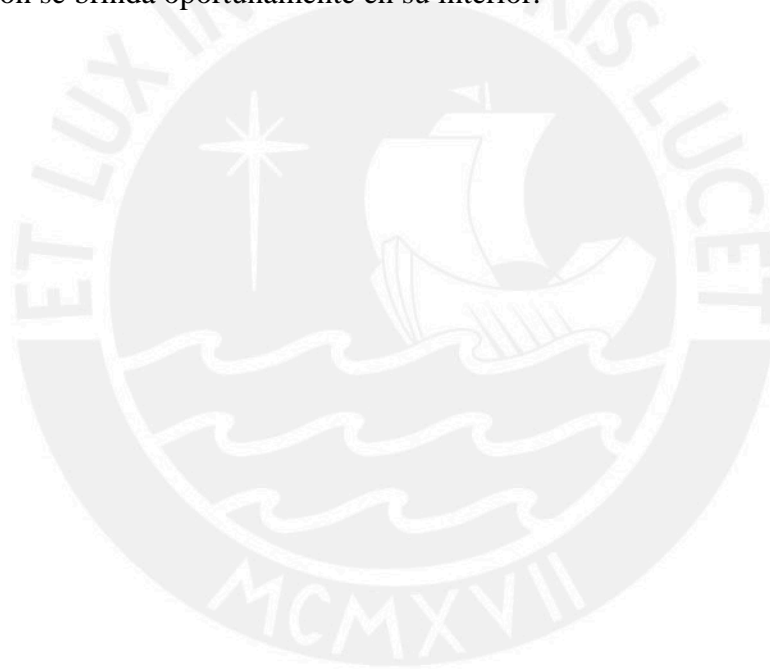
(...) la diferencia existente entre el lenguaje cotidiano y el matemático, así como la interpretación que tienen las proposiciones en el ámbito exclusivamente matemático; así, por ejemplo, menciona: “el error de la recíproca” (de si p entonces q y q , deducen p), la dificultad para aceptar que p sólo si q es lógicamente equivalente a si p entonces q , la dificultad en la interpretación de proposiciones cuantificadas, los errores al tratar de negar afirmaciones del tipo *si – entonces* (p. 75).

Esta dificultad en la interpretación del condicional es un asunto no menor sobre el que también se ha investigado. Por ejemplo, Laudien (1999, citado en Samper, Perry, Camargo, Molina & Echeverry, 2010) también menciona los errores de negación del antecedente y afirmación del consecuente en su trabajo.

In the first case, having a conditional and the negation of its antecedent as true statements, students conclude that the negation of the consequent is true; in the second one, if both a conditional and its consequent are considered as true, students believe that the antecedent of the conditional must be true (pp. 129 – 130).

[En el primer caso, con un condicional y la negación de su antecedente como enunciados verdaderos, los estudiantes concluyen que la negación del consecuente es verdadera; en el segundo caso, si ambos (el condicional y su consecuente) son considerados como verdaderos, los estudiantes creen que el antecedente del condicional debe ser verdadero] (**traducción nuestra**).

Los errores durante el empleo del enunciado condicional, así como otros conceptos importantes que se mencionan en los estudios anteriores, nos permitirán organizar el marco teórico y metodológico de esta investigación. Así mismo, debemos indicar que, en nuestro trabajo, la mayoría de los problemas que planteamos a los participantes no contemplan algún contenido matemático específico, para que los resultados en torno al enunciado condicional no sean influenciados por el desconocimiento de aquel. Solo uno de los problemas planteados emplea un contenido matemático determinado, cuya explicación se brinda oportunamente en su interior.



Capítulo 2

ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS FUNDAMENTALES

En este capítulo mostramos aquellos elementos teóricos y metodológicos que permiten realizar nuestra investigación.

2.1. Elementos teóricos acerca de la lógica y el enunciado condicional

Antes de estudiar los errores que se pueden cometer con el enunciado condicional, se necesita abordar su fundamento lógico. Una razón para hacerlo es que, como ya se manifestó anteriormente, las proposiciones matemáticas se expresan en términos del enunciado condicional y este constituye objeto de estudio de la lógica. En este apartado presentaremos en forma sucinta los principales fundamentos histórico-conceptuales de esta disciplina.

2.1.1. Breve estudio histórico relacionado al condicional

Adaptaremos la propuesta de Bochenski (1968) para esbozar las siguientes etapas de la historia de la lógica, pero cuyo contenido, en nuestro trabajo, se encontrará vinculado directamente con el condicional: período antiguo, período medieval y período moderno. Enfatizaremos el primer período por cuanto muchos conceptos relacionados con dicho tipo de proposición tuvieron su origen allí. Así mismo, en la página 30 presentamos una línea de tiempo (Figura 1) que permitirá mostrar el panorama de nuestro breve estudio histórico y los nombres de los estudiosos que hemos considerado en este.

a) Período antiguo

Entre las principales características del desarrollo de la Lógica durante este período se resalta, según Bochenski (1968) que “las fórmulas lógicas constan de palabras del lenguaje corriente con la adición de variables (...) De él abstraen los Lógicos antiguos sus leyes y reglas formales” (p. 22). Nosotros también hemos incluido en este período, por su relativa cercanía cronológica, a la forma hindú de la lógica, caracterizada por su formalismo menos desarrollado, si bien con grandes avances independientes a los alcanzados en otras latitudes (Bochenski, 1968).

González (2012) indica que “(...) el surgimiento de la Lógica como ciencia (...) se ubica en la Grecia Antigua” (p. 9). Tal surgimiento se realizó debido al trabajo de filósofos en los ámbitos de la teoría del conocimiento y el lenguaje, muy en especial en “...el arte del

buen decir, de no ser contradictorio en el curso del razonamiento que se exponga, de ser coherente en el uso de la palabra” (González, 2012, p. 9). Al respecto, Gorski & Tavants (1960) indican:

Como quiera que en el proceso del pensamiento, concepto y palabra, juicio y oración, lógica y gramática guardan muy estrechos vínculos y se condicionan mutuamente, en los primeros tiempos del desarrollo de la Lógica como ciencia, sus problemas y los de la gramática se hallan entrelazados, constituyendo una esfera indiferenciada de conocimientos (p. 31).

Los hechos mencionados en la cita son los que originaron que, por ejemplo, hasta el día de hoy se continúen empleando los conceptos de enunciado o de juicio para referirse a una proposición. Se advierten importantes conceptos de Lógica en las obras o discursos de los filósofos presocráticos, así como en las de Sócrates, Platón y Aristóteles (De Gortari, 1965). Imposible, por cierto, dejar de mencionar *Organon*, obra del último de los sabios mencionados, donde se encuentran importantes tratados acerca de la demostración (Analíticos Primeros y Segundos Analíticos) y sobre la argumentación (Hermeneia, Tópicos). Kneale & Kneale (1980) sostienen, sin embargo, que Aristóteles no desarrolló teoría lógica acerca del condicional, si bien se indica (en los Analíticos Primeros) un principio similar a la contraposición: “si dado que – P es necesario que – Q, entonces dado que – no – Q es necesario que – no – P” (p. 91). Esta afirmación constituye el preámbulo para abordar los tópicos históricos relacionados al condicional que acontecieron durante este período de la historia de la Lógica.

Según Deaño (1983), el valor de verdad de la proposición condicional ha causado problemas durante, aproximadamente, veintidós siglos. Así pues, no parecían faltarle motivos a Calímaco, poeta alejandrino del siglo II a. C., para afirmar que “hasta los cuervos grazna[ba]n en los tejados sobre cuál es la implicación correcta” (Bochenski, 1968, p. 127).

Fue la escuela megárico-estoica (siglo III a.C.) la comunidad de pensadores que emprendió el estudio del condicional. Indiquemos que su trabajo en este y otros aspectos de la Lógica fue tan amplio que, según Miró Quesada (1962), muchas de las cuestiones investigadas por los filósofos megárico-estoicos fueron retomadas y profundizadas en períodos históricas posteriores. En realidad, la escuela tuvo dos etapas: la megárica y la estoica. En la primera época destacan Euclides de Megara (ca. 400 a. C.), Diodoro Crono (307 a. C.) y Filón de Megara (¿siglo III a. C.?) (Kneale & Kneale, 1980; Bochenski, 1968; De Gortari, 1965). Euclides de Megara fue maestro de Estilpón (ca. 320 a. C.), quien a su vez lo fue de Zenón de Citio (334 – 362 a. C.), fundador de la escuela estoica,

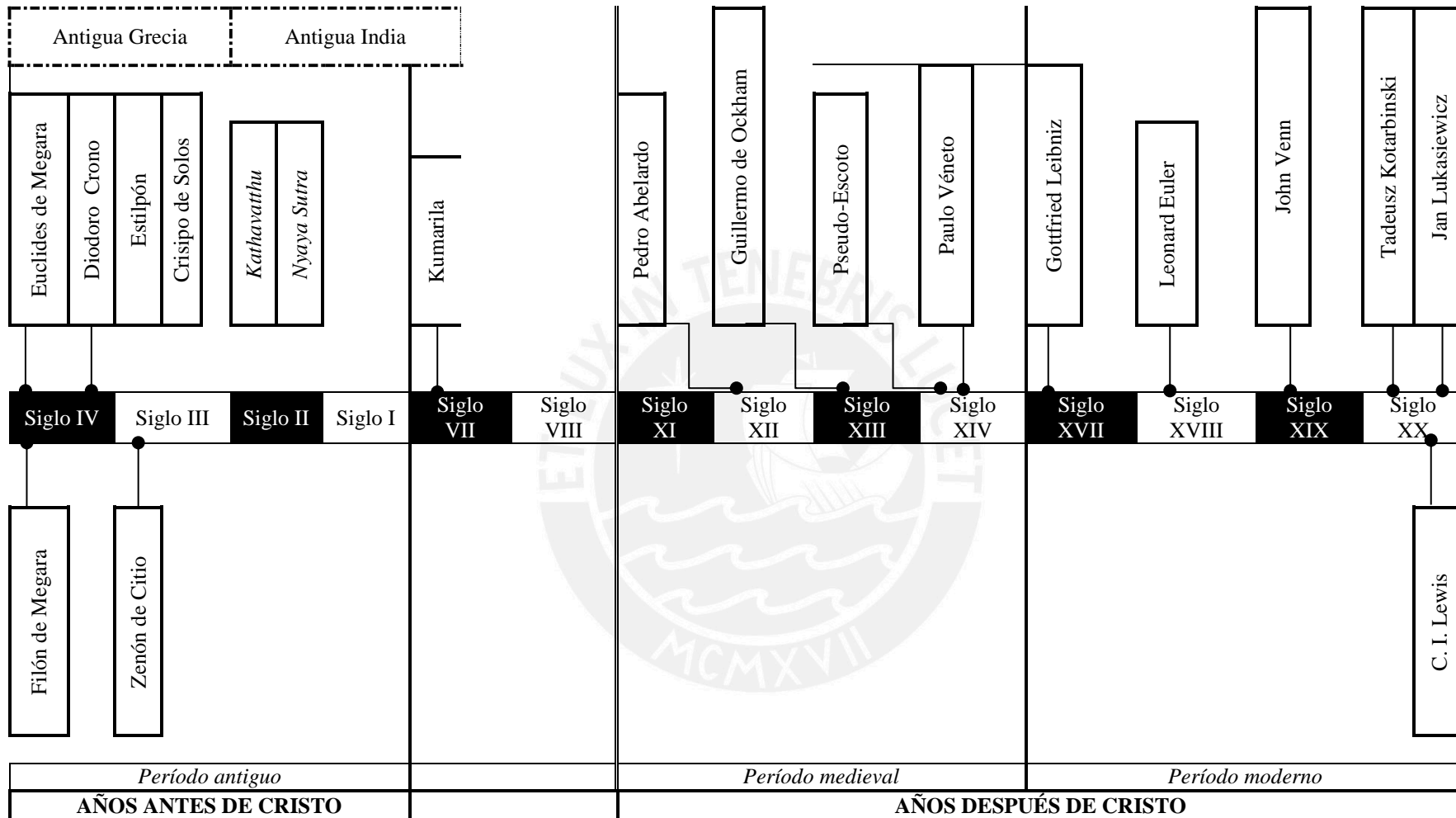


Figura 1. Línea de tiempo relacionada con la historia de la Lógica y el enunciado condicional

Fuente: Elaboración propia

continuadora de la etapa megárica (Kneale & Kneale, 1980). Estos y otros datos históricos de la Antigua Grecia han llegado a nuestros días gracias al historiador Diógenes Laercio y al filósofo Sexto Empírico, adversario de los megáricos, pero buen conocedor de lo que adversaba (Kneale & Kneale, 1980; Bochenski, 1968). Entre paréntesis, hay que precisar que han perdurado a través del tiempo varias anécdotas referidas a los megárico-estoicos y la importancia asignada en su época a la argumentación, actividad donde manifestaban el dominio de la lógica. Así pues, se refiere que, en la etapa megárica, Diodoro Cronos “se suicidó por no haber podido resolver en el acto un enredo lógico con que Estilpón le desafiara en presencia de Ptolomeo Soter” (Kneale & Kneale, 1980, p. 107). También se afirma que Zenón (ya en la etapa estoica) recomendaba el estudio de la dialéctica pues “adiestraba a los escolares en la resolución de paradojas” (Kneale & Kneale, 1980, p. 109). Por otra parte, de Crisipo, segundo sucesor de Zenón al frente de la escuela, la gente decía que “si los dioses se ocuparan de Dialéctica, la suya no sería distinta de la de Crisipo” (Bochenski, 1968, p. 117).

Para los megárico-estoicos, proposición “es lo que es verdadero o falso” (Bochenski, 1968, p. 123). Luego de clasificar a las proposiciones en simples y no-simples, la proposición condicional era caracterizada de la siguiente forma:

Entre las proposiciones no simples está la condicional [...] aquella que se halla estructurada mediante la conjunción implicativa “si (-entonces)”: esta conjunción indica que lo segundo se sigue de lo primero, p. e., “si es de día, hay luz” (Bochenski, 1968, p. 123).

Esta caracterización, así como otros tópicos antiguos sobre la proposición condicional, han perdurado hasta la fecha, tal como tendremos oportunidad de apreciar. A propósito de dicho tipo de proposición parece haber surgido el debate que provocó el epigrama de Calímaco anotado al inicio de este apartado. Sexto Empírico menciona que, entre Diodoro Cronos y su discípulo Filón de Megara, se llevó a cabo una discusión acerca de la naturaleza de los condicionales:

Filón decía que la (proposición) “implicativa” es verdadera cuando no comienza con (proposición) verdadera y acaba con falsa. Por tanto, según él, originase (proposición) implicativa verdadera de tres formas, en cambio falsa (solo) de una. En efecto, (1) si empieza con verdadera y acaba con verdadera, es verdadera, p. e.: “si es de día, hay luz”; (2) si comienza con falsa y acaba con falsa, es verdadera, p. e., “si la tierra vuela, es que tiene alas”; (3) y lo mismo también la que empieza con falsa y acaba con verdadera, p. e., “si la tierra vuela, es que existe”. Falsa (por el contrario), será solo cuando, comenzando con verdadera, termina con falsa, p. e., “si es de día, es de noche”; en efecto, siendo de día, la (proposición) “es de día” –que era el antecedente- es verdadera; y “es de noche” – lo que constituye el consecuente – es (entonces) falsa (Bochenski, 1968, pp. 127-128).

Podemos observar que es el sentido filónico del condicional (o implicación filónica) el que ha prevalecido hasta nuestra época y que se muestra, por ejemplo, en las tablas de verdad contemporáneas. Al respecto, Kneale & Kneale (1980) manifiestan que no es posible conocer cuáles fueron las razones que llevaron a Filón a definir la veracidad de un enunciado condicional de la manera en que lo hizo. Mientras tanto, el sentido diodórico del condicional (o implicación diodórica), contrario al primero, consiste en lo siguiente:

En efecto, la (proposición) implicativa “si es de día, yo discuto” es, según Filón, verdadera, caso de que sea ahora de día y yo esté discutiendo, toda vez que comienza por la (proposición) verdadera “es de día” y acaba por la (proposición) verdadera “estoy discutiendo”. Pero, según Diodoro, es falsa. En efecto, hasta un cierto tiempo puede comenzar por la (proposición) verdadera “es de día” y acabar por la falsa “estoy discutiendo”, caso de que yo (más tarde) haya de callarme... (y) antes de haber comenzado yo a discutir, comenzaba con una (proposición) verdadera y terminaba con una falsa “estoy discutiendo”. Más: la (proposición) “si es de noche, yo discuto” es verdadera, según Filón, caso de que sea de día y yo esté callado, pues (entonces) comienza con falsa y acaba con falsa, caso de que haya pasado la noche y de que yo (tampoco) discuta (ya), sino que esté callado. Y también la (proposición) “si es de noche, es de día” es verdadera, según Filón, caso de que sea de día, (y precisamente) porque, comenzando con la (proposición) falsa “es de noche”, acaba con la verdadera “es de día”. Mas, según Diodoro, es falsa precisamente porque, cuando venga la noche, comenzando con la (proposición) verdadera “es de noche”, puede acabar con la falsa “es de día” (Bochenski, 1968, pp. 128 – 129).

La implicación diodórica considera al tiempo como elemento importante para definir la veracidad o la falsedad de un condicional. De esta forma, Bochenski (1968) sintetiza los argumentos de Diodoro de la siguiente forma: “si p , entonces q , si y solo si para cualquier tiempo t no se da el caso de que p en t sea verdadera y q en t falsa” (p. 129). Tal concepción de la implicación no ha perdido actualidad, pues constituye el antecedente más lejano de la implicación estricta, adoptada en tiempos más recientes por C. I. Lewis (Robles, 1995) y que más adelante abordaremos brevemente.

Otros importantes aportes conceptuales de la escuela megárico-estoica son los que se relacionan con los esquemas de inferencia y los argumentos indemostrables. Dado que, según Bochenski (1968), los esquemas servían de tal para los indemostrables, explicaremos a los últimos. Los argumentos indemostrables son, de acuerdo con Diógenes Laercio, de “[...] aquellos de los que dicen (los estoicos) que no necesitan demostración para mantenerse...Sueñan con numerosos indemostrables, pero fundamentalmente establecen cinco de los que parecen derivarse todos los restantes” (Bochenski, 1968, p. 137). ¿Tal vez – como es el parecer de Bochenski (1968) – se trata de axiomas de la lógica?

De entre los ejemplos de argumentos indemostrables apuntados por Sexto Empírico, resaltamos dos, muy familiares a nosotros, por su gran parecido a las reglas de inferencia contenidas en *modus ponens* y *modus tollens*, respectivamente:

[...] el primero, el que de (una proposición) implicativa y (su) antecedente deduce el consecuente, p. e.: “Si es de día, hay luz; ahora bien, es de día; luego hay luz”;

[...] el segundo, aquel que de una (proposición) implicativa y del opuesto contradictorio [...] de su consecuente concluye el opuesto contradictorio de (su) antecedente, p. e.: “Si es de día, hay luz; no hay luz; luego no es de día” [...] (Bochenski, 1968, p. 137).

Obsérvese que, hasta el momento, los principales aportes de la escuela megárico-estoica se encuentran en el terreno de la definición de veracidad del enunciado condicional, así como en las reglas de inferencia que norman su empleo. De esta forma se configuran dos ámbitos lógicos de empleo del condicional. El contenido de ambos, así como su relación, serán temas que podrán apreciarse más adelante en el presente estudio.

Mientras tanto, todavía en el período antiguo, son destacables los conceptos aportados por la Antigua India, no menos importantes que los brindados por la Antigua Grecia. No deja de sorprender como, ante problemas similares, la fuerza del pensamiento humano fue capaz de teorizar, análogamente, sobre ellos. Reluce entre las principales joyas de la lógica hindú el *Nyaya – Sutra*. Bochenski (1968) sitúa su redacción definitiva hacia el siglo II d. C., pero asegura que hay trabajos más antiguos donde se puede apreciar formas aproximadas a lo que hoy conocemos como enunciado condicional. Por ejemplo, en el *Kathavatthu* (ca. Siglo III a. C.), caracterizado por mostrar el desarrollo de las discusiones bajo determinadas reglas, se puede apreciar la aplicación de un procedimiento parecido al *modus tollens* (Bochenski, 1968). Empero, algunos estudiosos tienen reparos por la pretensión de enfocar con mirada lógica occidental a una teoría independiente de esta (Ganeri, 2004).

Un importante concepto relacionado con la historia de la proposición condicional es el de la teoría del *vyapti*. En esta se vislumbra un arribo a la lógica de las clases (y, por ende, a una conexión con los conjuntos), en el sentido de relación entre ellas o entre una clase y su elemento, “o bien de una relación entre dos propiedades [...]” (Bochenski, 1968, p. 455). Así por ejemplo, en el siguiente texto, atribuido a Kumarila (s. VII d. C.):

Implicado (*vyapya*), es lo que tiene igual o menor extensión en el espacio y en el tiempo; implicante (*vyapaka*) es lo que tiene igual o mayor extensión (que lo implicado). Esto quiere decir, que si se capta la cosa implicada, se capta (también) su implicante; pues de otra forma no podría existir la relación de implicado e implicante entre ambos. (Bochenski, 1960, p. 455).

Con fundamento en la cita, podríamos señalar la aparición de un tercer ámbito de acción de la lógica, junto a los referidos a la formalidad de la proposición condicional y a las reglas de inferencia que lo emplean: el conjuntista. Más adelante veremos hasta qué punto se desarrolla, en la actualidad, el nexo de la lógica con los conjuntos, sugerida por los antiguos textos hindúes.

b) Período medieval

Bochenski (1968) indica que al inicio de este período se adopta y desarrolla el legado proveniente de la Antigua Grecia, pero luego (alrededor del siglo XII, según el autor citado) se desarrollan aportes originales. Entre estos, se señala el empleo de fórmulas para abarcar las leyes lógico-formales expresadas en latín.

El enunciado condicional fue abordado durante la época medieval, en el marco de la *teoría de la consecuencia*. Se mantienen y comentan los trabajos realizados por los megáricos. En ese sentido, destacan los trabajos del Pseudo-Escoto (*ca.* 1350) entre otros.

Para él, por ejemplo:

Consecuencia es una sentencia hipotética compuesta de antecedente y consecuente por medio de una conjunción condicional o racional que significa que, en caso de que ellos, e. d., antecedente y consecuente, se formen simultáneamente, es imposible que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso (Bochenski, 1968, p. 203).

Bochenski (1968) aclara sobre esta cita:

Como se ve, la consecuencia se define aquí como una sentencia (propositio), casi coincidiendo literalmente con la definición estoica [...Sin embargo] La implicación misma se define a la manera de Diodoro [...] [y era] fundamental para los Escolásticos (p. 203).

Recuérdese que, para Diodoro Crono, no se da el caso de que, dada la proposición “si p , entonces q ”, p sea verdadera y q sea falsa, en determinado tiempo t . Por otra parte, si de la escuela megárico-estoica se conocen hasta cuatro concepciones de la implicación, un autor medieval como Paulo Véneto (*ca.* siglo XIV) proponía diez, con dificultades para su comprensión en la actualidad (Bochenski, 1968).

Kneale & Kneale (1980) sostienen, así mismo, que es muy posible que en el período medieval se originasen los debates acerca de las *paradojas de la implicación*. Una de ellas consiste en lo siguiente: “una proposición falsa implica cualquier proposición y una proposición verdadera es implicada por cualquier otra” (Bobenrieth, 1996, p. 86). De esta paradoja podría obtenerse que, en una cadena de razonamientos, de una proposición falsa se concluya en un enunciado verdadero. Así mismo, a la paradoja mencionada se encuentra asociado el concepto de implicación estricta que abordaremos en el siguiente período histórico.

c) Período moderno

Este período corresponde, aproximadamente, al lapso comprendido entre el siglo XVII y nuestros días. Podemos indicar, entre los rasgos característicos de esta etapa, el empleo de la lógica matemática (Bochenski, 1968). Esto implica la presencia de variables, dentro de un lenguaje artificial.

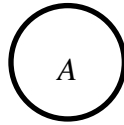
En este período, los problemas lógicos de antigua data son retomados por Leibniz, Boole y De Morgan (Bochenski, 1968). Tiene lugar la simbolización y sistematización de la lógica (siglo XIX y XX) mediante las tablas de verdad, por ejemplo. De esta forma, la implicación (entre otros tipos de proposición lógica) en el sentido propuesto por Filón de Megara tuvo una expresión simbólico-gráfica. La presentación de las tablas de verdad que hoy conocemos, fue desarrollada, entre otros, por Schröder y Post (Bochenski, 1968). El manual de Kotarbinski (publicado en 1929), dice, al respecto, lo siguiente:

Vamos a presentar ahora un método de verificación del cálculo sentencial muy simple, que nos permite verificar la rectitud de cualquier fórmula en este campo [a saber, el método de verificación del cero – uno]. Para ello vamos a convenir que puede ponerse cero, p. e., en lugar de una sentencia falsa, y uno en lugar de una verdadera [...] Recordemos a propósito de esto: [...] 4) que la implicación es falsa, solo en el caso de que su antecedente sea verdadero y su consecuente falso [...] (Bochenski, 1968, p. 348).

Dentro de los rasgos típicos del período histórico moderno, la evolución en los símbolos empleados para representar a la proposición condicional es interesante: el manual de Kotarbinski, por ejemplo, emplea $p < q$ para el condicional (Bochenski, 1968). Lukasiewicz empleaba la notación Cpq ; Peano – Russell, $p \supset q$ y Hilbert, $p \rightarrow q$ (Kneale & Kneale, 1980). En el presente trabajo, nosotros adoptamos el último símbolo mostrado. Mención aparte merecen los *diagramas lógicos* desarrollados durante el período histórico moderno. Por la importancia que tales diagramas tendrán en nuestro estudio, sentimos la necesidad de presentar el trabajo desarrollado por Leonard Euler (1707 – 1783). Este gran sabio fue quien introdujo los esquemas circulares para representar las proposiciones categóricas (Moktefi & Shin, 2012). En sus *Letters to a German Princess*, el sabio alemán indica (Euler, 1833, citado en Moktefi & Shin, 2012):

These four species of propositions may likewise be represented by figures, so as to exhibit their nature to the eye. This must be a great assistance towards comprehending more distinctly wherein the accuracy of a chain of reasoning consists.

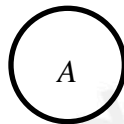
As a general notion contains an infinite number of individual objects, we may consider it as a space in which they are all contained. Thus, for the notion of man we form a space [...]



in which we conceive all men to be comprehended (...) (p. 616).

[Estas cuatro clases de proposiciones pueden, así mismo, ser representadas mediante figuras, para exhibir su naturaleza al ojo. Esto debe ser una gran ayuda con relación a la mejor e inequívoca comprensión acerca de en qué consiste la precisión de una cadena de razonamiento.

Como una noción general contiene un número infinito de objetos individuales, podemos considerarla como un espacio en el cual ellos son todos contenidos. Así, para la noción de hombre, formamos un espacio [...]



en el cuál concebimos que todos los hombres son comprendidos (...)] (**traducción nuestra**)

De acuerdo con los razonamientos de Euler, para representar que “Todos los A son B ”, colocaba un círculo A completamente dentro de otro círculo B ; dos círculos disjuntos para representar la proposición “Ningún A es B ”; dos círculos intersecados para las proposiciones “Algunos A son B ” (particular afirmativa) y “Algunos A no son B ” (particular negativa), pero con el debido cuidado en la ubicación de A para cada caso: A en la intersección de ambos círculos (para la particular afirmativa) y A en un espacio fuera del círculo B (para la particular negativa), respectivamente. Los diseños eulerianos son mostrados en la siguiente figura (Figura 2):

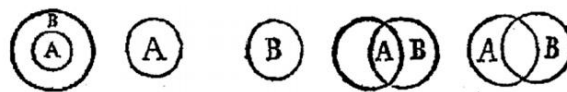


Figura 2. Diseños de Euler para representar a las proposiciones categóricas

Fuente: Euler (1833, citado en Moktefi & Shin, 2012, p. 617)

Posteriormente, fue John Venn (1884 – 1923) quien empleó círculos para representar, no las clases como lo hizo Euler, sino todas las proposiciones que se podían obtener a partir de si las subclases formadas estaban vacías o llenas (Moktefi & Shin, 2012) tras la intersección de las clases. Así mismo, Charles Peirce (1839 – 1914) también deseó mejorar los diagramas de Euler y Venn mediante el desarrollo de sus propios gráficos.

Llegado este punto, es necesario mencionar que la paradoja de la implicación material, posiblemente observada durante el medioevo, originó que C. I. Lewis y C. H. Langford formulen el concepto de *implicación estricta*, que debe ser entendido como “es falso que sea posible que p pueda ser verdadera y q falsa” (Lewis & Langford, 1932, citados por Bobenrieth, 1996, p. 86). Obsérvese en dicho concepto el empleo de la antigua implicación diodórica.

Con la implicación estricta, C. Lewis crea la *lógica modal*, gran campo de la lógica que no constituye objeto de estudio del presente trabajo, pero que muestra el potencial generador del condicional y de antiguas cuestiones relacionadas con él.

2.1.2. Definiciones importantes

a) Lógica

Deaño (1983), sostiene que la lógica es una ciencia deductiva, “[...] teoría formal del razonamiento, estudio de la argumentación formalmente válida, la ciencia de la inferencia deductiva” (pp. 42 – 43). Copi (1981) es todavía más preciso: indica que la lógica “es el estudio de los métodos y principios usados para distinguir el buen (correcto) razonamiento del malo (incorrecto)” (p. 3). Nuestra investigación otorga una gran importancia al último punto de vista indicado.

b) Proposición

Es necesario indicar cuáles son las relaciones entre juicio, proposición y enunciado, términos “sinónimos” que se emplearán constantemente a lo largo del trabajo para referirnos a una de las formas del pensamiento. Dado que existen puntos de contacto entre la lógica y la gramática, desde el surgimiento de los primeros estudios sistemáticos en ambas disciplinas, Ajmánov (1961) indica lo siguiente:

Quizás esto explica la circunstancia de que, en lógica, para denominar lo que hemos descrito como juicio se emplea tanto el término “juicio” (*judicium*), como el término “proposición” (*propositio*), con la particularidad de que la tradición del término “proposición” es más antigua, sobre todo si se toma en consideración la terminología de Aristóteles, que denominaba a toda expresión de un pensamiento acabado discurso [...], y la expresión del juicio, “enunciación” [...]. En la historia de la lógica, la segunda tradición ha resultado más firme, pues el término “juicio” a menudo aportaba un aspecto psicológico a los problemas de la lógica, mientras que el término “proposición” obligaba a limitarse a la parte conceptual objetivamente dada del discurso (p. 183).

Dado que, sobre este mismo campo de estudio, Copi (1981) señala que “los términos “proposición” y “enunciado” no son sinónimos exactos, pero en el contexto de la investigación lógica se los usa aproximadamente con el mismo sentido” (p. 7),

consideramos en nuestro trabajo que, cuando consultemos cierta bibliografía que nos obligue a utilizar “juicio”, nos estaremos refiriendo al enunciado o a la proposición, sin analizar las diferencias sutiles.

c) Clasificación de proposiciones

Gorski & Tavants (1960) definen al juicio (proposición, en Copi (1981)) como aquella forma del pensamiento “en el [la] que se afirma o se niega algo de algo” (p. 84). Los mismos autores indican que el juicio es verdadero o falso; presenta sujeto, cópula y predicado, y se divide en simple y compuesto. Sobre esta división adoptaremos el criterio de Salazar & Miró Quesada (1978), por su claridad: “(...) una proposición que no tiene conjunciones entre sus términos integrantes es simple, mientras que una proposición que tiene por lo menos una conjunción es compuesta” (p. 151). Por conjunción comprenden los autores a aquellas palabras tales como “si...entonces”, “y”, “o”, etc., que cumplen el rol de unir dos proposiciones. De esta forma, constituyen ejemplos de proposiciones simples, “5 es múltiplo de 10” (proposición falsa), “Huamachuco es capital de la provincia de Sánchez Carrión en la región La Libertad” (proposición verdadera), “Trujillo se encuentra ubicado al norte del Perú” (proposición verdadera), etc.

Mientras tanto, proposiciones compuestas son, verbigracia, “si 9 es divisor de 81, entonces este número es par” (proposición falsa), “Lima o Iquitos son ciudades peruanas” (proposición verdadera), etc. Cabe indicar que el grado de complejidad de un enunciado compuesto puede llegar a ser muy alto.

d) Razonamiento

Como ya se indicó anteriormente, ni las proposiciones ni los conceptos se presentan en su forma “pura”, sino casi siempre desempeñando algún rol dentro del razonamiento (o raciocinio). El razonamiento es una forma del pensamiento que constituye aquella “operación discursiva en cuyo transcurso, de uno o varios juicios, denominados premisas del razonamiento, se infiere un nuevo juicio (denominado conclusión o consecuencia) que se desprende lógicamente de las premisas” (Rosental & Iudin, 1973, p. 390). Por ejemplo: “Todos los delfines son mamíferos. ‘Yaku’ es un delfín. Luego ‘Yaku’ es mamífero”; o “Si el número 15A es divisible por seis, A es divisible por dos, pues 15 es divisible por 3” (Fomin, Genkin & Itenberg, 2012).

Es necesario indicar que las reglas lógicas no constituyen otra cosa que el resultado de la actividad práctica del hombre repetida miles o millones de veces, tantas que, en la mayoría de los casos, utilizamos dichas reglas sin percatarnos de lo realizado. Se pueden

cometer errores en la formación de conceptos o de juicios como resultado de la manera en que el cerebro refleja los objetos en el pensamiento. Sin embargo, dado que los razonamientos formulan enunciados en base al conocimiento inferido, la obtención de los primeros constituye terreno mucho más propicio para los errores, por lo que se justifica la añeja preocupación de los lógicos (y todos los científicos) ante este problema. Copi & Cohen (2007) nos muestran un ejemplo (entre muchísimos otros) de razonamiento erróneo, más común de emplear de lo que uno creería: el escritor Jonathan Swift afirmaba que “ninguna persona acepta consejos, pero todos aceptan dinero. Por lo tanto, el dinero es mejor que los consejos” (p. 162). El error estriba en la confusión de dos conceptos distintos sobre los que se ha trazado equivalencia: aceptación (de consejos o dinero) y cualidad (de peor o de mejor, respectivamente). De esta forma, tal razonamiento erróneo (denominado falacia), hunde sus raíces en la ambigüedad de los conceptos empleados, ya accidental o ya intencionalmente (Copi & Cohen, 2007). La lógica es la disciplina que nos ayuda a no caer en dicho error.

e) La proposición condicional

Como se ha podido apreciar en el panorama histórico, el enunciado condicional jugó y juega un rol importante en el proceso de inferencia. Es muy acertada la profunda observación de Miró Quesada (1962) acerca del valor del enunciado condicional para la Humanidad:

Las proposiciones implicativas, condicionales o hipotéticas son [...] de extraordinaria importancia. No solo se emplean con gran frecuencia en el lenguaje de todos los días, sino también en el lenguaje científico. Todas las leyes científicas, tanto de la física como de las demás ciencias, y los teoremas de las matemáticas, se enuncian mediante este tipo de proposiciones [...] (pp. 72 – 73).

Tal importancia nos debe invitar a conocerlo con mayor detalle. Copi (1981), conceptualiza al enunciado condicional de la siguiente forma:

Si se combinan dos enunciados colocando la palabra ‘si’ antes del primero e insertando entre ellos la palabra ‘entonces’, el enunciado compuesto resultante es un enunciado hipotético (también llamado un condicional, una implicación o un enunciado implicativo). En un enunciado hipotético, el componente que se halla entre el ‘si’ y el ‘entonces’ es llamado el antecedente (...) y el componente que sigue a la palabra ‘entonces’ es el consecuente (p. 292).

Constituyen ejemplos de enunciado condicional los siguientes: “Si 100 es divisible entre 2 entonces es número par”, “Si Huamachuco se encuentra a 3500 metros sobre el nivel del mar, se encuentra ubicada en la sierra”, etc. Nótese en el último ejemplo que la coma reemplaza a la palabra “entonces”. Es más: no es el “si – entonces” la única forma en la que se puede plantear una proposición de dicho tipo. Observemos, por ejemplo, las otras

maneras en que se puede escribir la proposición “Si un número es mayor que 10, entonces es mayor que 8” de acuerdo a la guía proporcionada por Curtis, Daus & Walker (1961):

- Un número mayor que 10 *implica que* es mayor que 8.
- Un número es mayor que 8 *si* es mayor que 10.
- Un número es mayor que 10 *solamente si* es mayor que 8.

A partir de lo indicado por Piscoya (2007) también podríamos escribir la proposición anterior de las otras dos formas siguientes:

- Un número es mayor que 8 *porque* es mayor que 10
- Un número es mayor que 8 *siempre que* sea mayor que 10.

Adviértase que, “cuando se usan las partículas ‘...si...’, ‘...porque...’ y ‘...siempre que...’ el orden de las proposiciones se invierte (...)” (Piscoya, 2007, p. 70). Es decir, el antecedente y el consecuente de la proposición condicional “Si un número es mayor que 10, entonces es mayor que 8” intercambian posiciones.

Cabe señalar que en la bibliografía consultada se menciona “consiguiente” en vez de “consecuente”. En lo sucesivo, los entenderemos como sinónimos.

2.1.3. Clasificación de la proposición condicional

La proposición condicional comprende varios tipos, los mismos que se mencionan a continuación.

a) Por el carácter de la relación entre antecedente y consecuente

Las proposiciones condicionales se dividen en no exclusivas y exclusivas. En los primeros (llamados, propiamente, condicionales),

“(...) se afirma que la existencia de aquello de que se trata en el antecedente es condición suficiente, aunque no necesaria, para la existencia de aquello que se trata en el consiguiente, y la existencia de aquello de que se trata en el consiguiente es condición necesaria, aunque no suficiente, para la existencia de aquello de que se trata en el antecedente (Gorski & Tavants, 1960, p. 136).

Mientras que, en las proposiciones condicionales exclusivas (también conocidos como bicondicionales)

(...) aquello de que se habla en el antecedente es suficiente y necesario para la existencia de aquello de que se trata en el consiguiente, y aquello de que en este se trata, es necesario y suficiente para la existencia de aquello de que se trata en el antecedente (Gorski & Tavants, 1960, p. 136).

Por ejemplo, “dado que 4 es par, esto *es suficiente* para que todos sus múltiplos también lo sean” constituye un ejemplo de condicional no exclusivo. Mientras tanto, en la

proposición “para que un número natural $p = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ se divida [exactamente] por 4 es necesario y suficiente que el número $\overline{a_1 a_0}$ se divida [exactamente] por 4” (Potáпов, Alexándrov & Pasichenko, 1986, p. 12), se advierten con claridad las condiciones de necesidad y suficiencia que aparecen en el condicional exclusivo. Aunque nuestro trabajo concentrará esfuerzos en la primera clase de condicional, recientemente mencionada, todavía habrá ocasiones en que recurriremos al enunciado bicondicional. Baste indicar que “cuando un bicondicional es lógicamente verdadero, se puede decir que su antecedente equivale a su consecuente” (Deaño, 1983, p. 115). Los enunciados bicondicionales son fácilmente reconocibles por el empleo de “si y solo si” en su estructura. Así pues, el último ejemplo mostrado podría escribirse de la siguiente forma: “un número natural $p = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ [se divide exactamente] por 4 si y solo si el número $\overline{a_1 a_0}$ [se divide exactamente] por 4”. Sin embargo, el empleo de “si y solo si” no constituye la única forma con la que puede expresarse un enunciado bicondicional. Si representamos por p al antecedente y por q al consecuente, el enunciado condicional “si p , entonces q ” queda simbolizado como $p \rightarrow q$ (Deaño, 1983), mientras que el enunciado bicondicional “si y solo si p , entonces q ” se representa como $p \leftrightarrow q$. El enunciado condicional es falso solo si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso (Deaño, 1983), regla derivada de la implicación en sentido filónico de la que, como se indicó en la sección 2.1.1., no se tienen disponibles los argumentos que permitieron su formulación. En casos diferentes al indicado, el enunciado condicional es verdadero y nos encontramos ante una implicación. Mientras tanto, el enunciado bicondicional es verdadero si las proposiciones que lo conforman son, o bien ambas verdaderas o bien ambas falsas.

b) Nociones útiles del condicional en la actividad matemática

Durand-Guerrier (2003) sigue a Quine (1950, citado en Durand-Guerrier, 2003) para considerar, por lo menos, cuatro clases de enunciado condicional:

1. *The common understanding* in which the case of false antecedent is almost never considered (...)
2. *The propositional connective*: “if p then q ”, where p and q are propositional variables, whose truth-value depends only on the truth-value of the two components (...) often named ‘material implication’ (...).
3. *The logically valid conditional* (...) We say that the formal sentence S implies the sentence T if the conditional $S \Rightarrow T$ is logically valid; i. e., never admits of the truth – value of ‘false’. For example, ‘ $p \wedge (p \Rightarrow q)$ ’ implies ‘ q ’ (...) Similarly ‘ $\neg q \wedge (p \Rightarrow q)$ ’ implies ‘ $\neg p$ ’ (...)

4. *The generalized conditional* (...) $\forall x (Px \Rightarrow Qx)$, where p and q are predicates, asserts that every propositional conditional of a certain class is true (...) (pp. 9 – 10)

[1. *El sentido común* en cuyo caso el falso antecedente casi nunca es considerado (...)]

2. *El conector proposicional*: “si p , entonces q ”, donde p y q son variables proposicionales, cuyo valor de verdad depende solamente del valor de verdad de los dos componentes (...) a menudo denominado ‘implicación material’ (...).

3. *El condicional lógicamente válido* (...) Decimos que la proposición formal S implica la proposición T si el condicional $S \Rightarrow T$ es lógicamente válido; i. e., nunca admite el valor de verdad ‘falso’. Por ejemplo, ‘ $p \wedge (p \Rightarrow q)$ ’ implica ‘ q ’ (...) Similarmente ‘ $\neg q \wedge (p \Rightarrow q)$ ’ implica ‘ $\neg p$ ’ (...)

4. *El condicional generalizado* (...) $\forall x (Px \Rightarrow Qx)$, donde p y q son predicados, afirma que toda proposición condicional de cierta clase, es verdadera (...) [**traducción nuestra**].

Un ejemplo que ilustra la primera clase de condicional es dado mediante la proposición “Si tengo tiempo, entonces te visito”. Con relación a la implicación material (segunda de las clases mencionadas), Copi (1981) indica que no muestra conexión real entre antecedente y consecuente, “todo lo que se afirma es que de hecho no se da el caso de que el antecedente sea verdadero cuando el consecuente sea falso” (p. 297), e ilustra su afirmación con el ejemplo “Si Hitler era un genio militar, entonces yo soy el tío de un mono” (Copi, 1981, p. 297). En efecto: según el autor, un condicional material se emplea para negar la veracidad del antecedente y, de esta forma, cualquiera sea el valor de verdad que asuma el consecuente, se asegura la veracidad de toda la proposición. De otro lado, constituyen ejemplos ilustrativos de las demás clases mencionadas por Durand-Guerrier (2003), “Si todos los sacerdotes son hombres y Juan es un sacerdote, entonces Juan es un hombre” (tercera clase) y “Todos los números primos son naturales” (cuarta clase).

En nuestro trabajo consideramos los tres últimos sentidos del enunciado condicional: el segundo, como conector proposicional; el tercero, relacionado a las reglas de inferencia (sobre las que nos referiremos más adelante) y el cuarto, el condicional generalizado, la forma en que se expresa la mayor parte de teoremas matemáticos (Miró Quesada, 1962).

2.1.4. Proposiciones categóricas

Para los fines concernientes a nuestro trabajo, es necesario considerar, en primer lugar, a las proposiciones categóricas. Estas se refieren a la afirmación o negación que una clase S está contenida en una clase P , total o parcialmente, donde una clase es “la colección de todos los objetos que tienen alguna propiedad en común [...]” (Copi & Cohen, 2007, p. 210). En ese sentido, las proposiciones categóricas poseen dos atributos importantes: **cantidad** y **calidad**. El primero se refiere a si la proposición “se refiere a todos o

solamente a algunos de los miembros de la clase designada por el término sujeto” (Copi, 1981, p. 172). De acuerdo a ello, una proposición categórica puede tener cantidad universal o particular. El segundo atributo, calidad, se establece “según que la inclusión de clases (completa o parcial) sea afirmada o negada por la proposición” (Copi, 1981, p. 172). De esta forma, una proposición categórica puede tener calidad afirmativa o negativa. Las cuatro proposiciones categóricas que a continuación trataremos se originan, precisamente, del cruce de los tipos de cantidad y calidad existente (Tabla 1):

Tabla 1. Proposiciones categóricas

Proposición categórica	Esquema
Universal afirmativa	Todo S es P
Particular afirmativa	Algún S es P
Universal negativa	Ningún S es P (o también Todo S no es P)
Particular negativa	Algún S no es P

Fuente: Adaptado de Copi (1981)

Mostraremos, a continuación, cómo se emplean los diagramas de Euler para la representación de las proposiciones anteriores, tal como se indicó en el apartado dedicado a la historia (Euler, 1833, citado en Moktefi & Shin, 2012). En nuestro país, hemos ubicado los orígenes del empleo de dicha forma de representar en Miró Quesada (1962), pero hemos observado un interesante desarrollo de aquella en Vallejo (2014), basada en una atenta lectura de Copi (1981). La forma de empleo de los diagramas de Venn para representar las proposiciones categóricas, según las dos últimas referencias, se realiza de la siguiente forma (Figura 3):

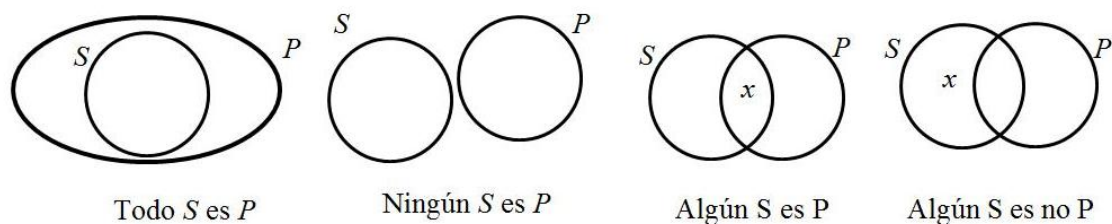


Figura 3. Diagramas de Venn para representar proposiciones categóricas

Fuente: Vallejo (2014)

Así es como se manifiestan las proposiciones categóricas: afirman o niegan la inclusión total o parcial de una clase en otra.

En la Tabla 2 mostramos algunos ejemplos de proposiciones categóricas.

Tabla 2. Ejemplos típicos de proposiciones categóricas

Proposiciones categóricas	Ejemplos
Universal afirmativa	Todos los hombres son mentirosos Todos los números naturales son enteros
Particular afirmativa	Algunos restaurantes son sucios Algunos múltiplos de tres son pares
Universal negativa	Ninguna mujer madura es bella Ningún número racional es natural
Particular negativa	Algunos niños no son traviosos Algunos números pares no son divisibles por 10

Al enfatizar en la función generalizadora que cumple la lógica con relación al lenguaje, Deaño (1983) indica:

Hay, en el lenguaje ordinario, muy variadas maneras de indicar la universalidad, de mostrar el carácter general de un enunciado: a veces lo hacemos anteponiendo la palabra ‘todos’ al sujeto; en otras ocasiones, la palabra no es ‘todos’, sino ‘cada’ (“cada hombre es un mundo”), o ‘quien’ (“quien mal anda mal acaba”), o ‘el que’ (“el que calla, otorga”), etc.; hay casos en los que basta con poner la partícula ‘siempre’ en el lugar oportuno (“un perro es siempre un enemigo”); otras veces el simple artículo determinado cumple una función generalizadora (“los duelos con pan son menos”). Etc.

Del cuantificador particular cabe decir otro tanto [...] Su significado sería el mismo si todos comenzaran [...] con la partícula ‘algunos’ [...] (pp. 186 – 187).

De acuerdo con la cita, entonces, de entre las variadas formas de expresar una cantidad en Lógica, se obtienen dos cuantificadores: universal y existencial. Para el último cuantificador, además del empleo de la palabra “algunos” también se puede emplear “existen”, “hay”, “al menos un”, “por lo menos un”, etc. A continuación, mostramos el proceso de representación simbólica del cuantificador universal, bajo la guía y ejemplos proporcionados por Copi & Cohen (2007, p. 410):

- a) Sea el enunciado “Todas las cosas son mortales”.
- b) Dicho enunciado puede expresarse como “dada una cosa individual cualquiera, ella es mortal”.
- c) Con x como variable que representa a “cosa”, se puede decir “dada cualquier x , x es mortal”. Más general todavía es “dada cualquier x , Mx ”, donde Mx recibe el nombre de función proposicional.
- d) La representación simbólica final, de acuerdo con la notación generalizada, es: $\forall x, Mx$. \forall es el símbolo que representa al cuantificador universal.

El proceso de representación simbólica del cuantificador existencial (o particular) es análogo: a partir de una proposición como “Algo es bello” (Copi & Cohen, 2007, p. 411), que también se puede expresar como “Existe por lo menos una cosa que es bella” (Copi & Cohen, 2007, p. 411), se arriba a la notación generalizada $\exists x, Bx$. \exists es el símbolo que representa al cuantificador existencial.

Recordemos la estructura de las proposiciones categóricas y coloquemos más ejemplos ilustrativos en relación con la representación simbólica (Copi & Cohen, 2007) en la Tabla 3:

Tabla 3. Ejemplos típicos de proposiciones categóricas

Proposición categórica	Esquema	Abreviatura	Ejemplos
Universal afirmativa	Todo S es P	A	Todos los hombres son mortales
Particular afirmativa	Algún S es P	I	Algunos hombres son mortales
Universal negativa	Ningún S es P	E	Ningún hombre es mortal
Particular negativa	Algún S es no P	O	Algunos hombres no son mortales

Fuente: Adaptado de Copi & Cohen (2007, pp. 213 – 216)

Mostremos cómo se simboliza la proposición universal afirmativa mediante cuantificadores, de acuerdo con los ejemplos brindados por Copi & Cohen (2007, p. 414):

- a) El ejemplo mostrado puede ser expresado como “Dado cualquier individuo, si es humano entonces es mortal”.
- b) Al utilizar x como variable que representa a “individuo”, se tiene “Dado cualquier x , si x es humano entonces x es mortal”. Este enunciado condicional todavía puede representarse como “Dado cualquier x , si x es humano $\rightarrow x$ es mortal”.
- c) En lenguaje de cuantificadores y funciones proposicionales, obtenemos $\forall x, Hx \rightarrow Mx$.

Mediante proceso análogo, la proposición universal negativa se representa mediante $\forall x, Hx \rightarrow \sim Mx$.

Como ha podido apreciarse, la proposición universal afirmativa fue representada mediante un enunciado condicional generalizado, como el mencionado por Quine (1950, citado en Durand – Guerrier, 2003). El enunciado condicional deviene así en núcleo del cuantificador universal.

La proposición particular afirmativa, mostrada en la Tabla 3, se simboliza mediante cuantificadores de la siguiente manera:

- a) “Algunos hombres son mortales” se parafrasea como “Existe por lo menos una cosa que es humana y mortal” (Copi & Cohen, 2007, p. 415).

b) Con x representando a “cosa”, se tiene la expresión “Existe por lo menos un x , tal que x es humano y x es mortal” (Copi & Cohen, 2007, p. 415). Como se trata de un enunciado conjuntivo, la representación simbólica también puede escribirse como “Existe por lo menos un x , tal que x es humano $\wedge x$ es mortal”.

c) Finalmente, mediante cuantificadores y funciones proposicionales, obtenemos $\exists x, Hx \wedge Mx$.

Mediante proceso análogo, la proposición particular negativa, mostrada en la Tabla 3, se representa como $\exists x, Hx \wedge \neg Mx$. En la Tabla 4 se resumen los resultados obtenidos, con funciones Sx y Px .

Tabla 4. Proposiciones categóricas expresadas mediante cuantificadores

Proposición categórica	Esquema	Abreviatura	En cuantificadores
Universal afirmativa	Todo S es P	A	$\forall x, Sx \rightarrow Px$
Particular afirmativa	Algún S es P	I	$\exists x, Sx \wedge Px$
Universal negativa	Ningún S es P	E	$\forall x, Sx \rightarrow \neg Px$
Particular negativa	Algún S es no P	O	$\exists x, Sx \wedge \neg Px$

Fuente: Adaptado de Copi & Cohen, 2007.

2.1.5. Relación lógica de contradictoriedad entre proposiciones categóricas

Entre las proposiciones categóricas se producen importantes relaciones, una de las cuales es la de *contradictoriedad* (tradicionalmente conocida como relación de oposición). “Dos proposiciones son contradictorias si una de ellas es la negación de la otra, esto es, si no pueden ser las dos a la vez verdaderas ni ser ambas, a la vez, falsas” (Copi & Cohen, 2007, p. 217). En ambas proposiciones, el sujeto y el predicado se mantienen, pero aquellas son opuestas en calidad y cantidad. A continuación, mostramos ejemplos de obtención de proposiciones contradictorias, donde la veracidad o falsedad de enunciados no es cuestión que analizaremos.

(a) La proposición contradictoria a “**Todos** los números naturales **son** primos” (proposición **universal afirmativa**) es “**Algún** número natural **no es** primo” (proposición **particular negativa**) y viceversa, según se puede ver en Copi & Cohen (2007). Como se puede observar, han cambiado calidad (de afirmación a negación) y cantidad (de universal a particular) pero se mantienen sujeto (números naturales) y predicado

(números primos). De aquí que, al afirmar que “**No todo S es P**” se obtiene “**Algún S no es P**”.

(b) La proposición contradictoria a “**Ningún número par es primo**” (proposición **universal negativa**) es “**Existe un número par que es primo**” (proposición **particular afirmativa**) y viceversa, según puede verse en Copi & Cohen (2007). Como se puede observar, han cambiado calidad (de negación a afirmación) y cantidad (de universal a particular) pero sujeto (números pares) y predicado (números primos) se han mantenido. De aquí que, al enunciar “**No es verdad que ningún S es P**”, se obtiene “**Existe un S que es P**”

(c) La proposición contradictoria a “**Algunos números naturales no son enteros**” (proposición **particular negativa**) es “**Todos los números naturales son enteros**” (proposición **universal afirmativa**) y viceversa, según puede verse en Copi & Cohen (2007). Puede observarse el cambio de cantidad y calidad, así como la permanencia de sujeto y predicado. Se concluye que, al afirmar “**No es cierto que algunos S no son P**”, se obtiene “**Todos los S son P**”.

(d) La proposición contradictoria a “**Hay circunferencias que son polígonos**” (proposición **particular afirmativa**) es “**Ninguna circunferencia es un polígono**” (proposición **universal negativa**) y viceversa, según puede verse en Copi & Cohen (2007). Cambian cantidad y calidad, así como se mantienen sujeto y predicado. De esta forma se concluye que, tras enunciar “**No es verdad que hay S que son P**”, se concluye que “**Ningún S es P**”.

En todos los casos observamos que la proposición contradictoria a una universal afirmativa no es una universal negativa, como tal vez pudo haberse pensado (“todos” – “ninguno”), sino una particular negativa. La misma relación se observa entre una universal negativa y una particular afirmativa.

2.1.6. Reglas de inferencia deductiva

Habíamos indicado que, en la práctica, las formas del pensamiento no se encuentran aisladas unas de otras, sino que interactúan entre sí mientras dicho proceso se lleva a cabo. La vía en la que discurre el pensamiento es la inferencia. Durante mucho tiempo esta fue vinculada con el silogismo, que no es sino una forma de razonamiento deductivo “compuesto de dos premisas y una conclusión” (Copi, 1981, p. 263). Acerca de la relación entre silogismo y enunciado condicional, Miró Quesada (1962) indica:

El silogismo es una proposición implicativa, en la cual la primera proposición componente es, a su vez, una proposición compuesta (...) y la segunda proposición es simple. Se caracteriza, además, porque todas las proposiciones simples que lo integran, son siempre predicativas. Pueden darse ejemplos de inferencia mucho más complicados que los presentes. Pueden estos tener muchas formas, muchas variaciones, pero su estructura fundamental es siempre implicativa. Toda inferencia, toda deducción, sea cual sea, puede expresarse siempre por medio de una proposición implicativa (p. 74).

La inferencia es, según Copi & Cohen (2007), “el proceso por el cual se llega a una proposición y se afirma sobre la base de una o más proposiciones aceptadas como punto inicial del proceso” (p. 19). Relacionada con cada inferencia hay un argumento, cuya estructura consta de las premisas y la conclusión. Aquellas constituyen las razones para aceptar a esta. Por ejemplo, cuando escribimos “debido al carácter estimulante del café y a la abundancia en su oferta, muchas personas lo toman para combatir el sueño” o “de acuerdo a la definición de número par, el 5 no lo es” estamos llevando a cabo procesos de inferencia que se muestran mediante la tercera forma del pensamiento, el razonamiento. En nuestro trabajo, y en atención a Miró Quesada (1946), consideramos indistintamente al razonamiento y la inferencia pues, de separar ambos conceptos, podríamos abarcar el campo de la Psicología.

Es necesario indicar que el razonamiento se clasifica, por el número de premisas, en *inmediato* y *mediato*, donde del primero se concluye algo a partir de una premisa y del segundo, a partir de varias premisas (Gorski & Tavants, 1960). Una segunda forma de clasificar los razonamientos atiende al carácter del conocimiento inferido: este puede ser *probable* (que origina un razonamiento de probabilidad) o *cierto* (que origina un razonamiento de certidumbre) (Gorski & Tavants, 1960).

Dentro de los razonamientos directamente vinculados al enunciado condicional y de certidumbre mediata consideramos dos tipos. El primero es el *razonamiento categórico - condicional*, también denominado *razonamiento constructivo lematóico*. Este posee un enunciado condicional verdadero en una de sus premisas, con juicios simples en la otra premisa y en la conclusión (Gorski & Tavants, 1960). El segundo es el *razonamiento condicional*, donde premisas y conclusión son implicaciones, es decir, enunciados condicionales verdaderos (Gorski & Tavants, 1960). Veamos, a continuación, las reglas de inferencia que rigen los dos últimos tipos de razonamiento, así como las formas en que estos son inválidos:

a) Formas válidas de razonamiento

Una importante inferencia inmediata es la de *conversión*. En su primera acepción (Cook, 2009), consiste en que, dada una proposición, sujeto y predicado de esta se intercambian (Copi, 1981). La conclusión de esta inferencia es denominada *conversa* (Copi & Cohen, 2007). Tal intercambio es plenamente válido en el caso que las proposiciones sean de tipo universal negativo o particular afirmativo. La legitimidad de la conversión se basa en que toda proposición “contiene un conocimiento no solo relativo a los objetos enunciados en el sujeto, sino también a los que se enuncian en el predicado” (Gorski & Tavants, 1960, p. 152). Por ejemplo, en “ningún número negativo es natural” (proposición universal negativa) la conversión es válida: “ningún número natural es negativo” (también proposición universal negativa). De igual forma sucede con la proposición “algunos médicos son maestros” (proposición particular afirmativa) y su conversa “algunos maestros son médicos” (proposición particular afirmativa también). Un poco más adelante indicaremos por qué la conversión no siempre puede realizarse en el caso de las proposiciones universales afirmativas y particulares negativas.

Una segunda acepción de la conversión corresponde a que, dado un enunciado condicional, se intercambian las posiciones de antecedente y consecuente en la conclusión o conversa (Cook, 2009) (Curtis, Daus & Walker, 1961). De este modo, a partir de la proposición “Si un número es mayor que 10, entonces es mayor que 8” se podría concluir su conversa “Si un número es mayor que 8, entonces es mayor que 10”. Tal conclusión, sin embargo, no es correcta, como veremos en la sección b) del presente apartado 2.1.6.

En cuanto a los razonamientos mediatos (categórico-condicionales), su corrección se manifiesta en modo afirmativo (*modus ponens*) y negativo (*modus tollens*). En el primero, la conclusión “se infiere pasando de la afirmación del antecedente a la afirmación del consiguiente” (Gorski & Tavants, 1960, p. 183). En el segundo, la conclusión “se infiere pasando de la negación del consiguiente a la negación del antecedente” (Gorski & Tavants, 1960, p. 184).

Los *moda* se pueden representar simbólicamente así:

Modus Ponens	Modus Tollens
$p \rightarrow q$ p <hr style="width: 50%; margin: auto;"/> $\therefore q$	$p \rightarrow q$ $\neg q$ <hr style="width: 50%; margin: auto;"/> $\therefore \neg p$

Como casos que ejemplifican el empleo del modus ponens y del modus tollens, presentamos los siguientes, respectivamente (Tabla 5):

Tabla 5. Ejemplos de empleo de *modus ponens* y *modus tollens*

Moda	Ejemplos
<i>Modus ponens</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Si un número es primo, entonces no tiene más divisores que el 1 y el mismo número. 11 es un número primo; por lo tanto, 11 solamente tiene a 1 y 11 como divisores. • Si un número es mayor que 10, entonces es mayor que 8. x es mayor que 10; por lo tanto, x es mayor que 8.
<i>Modus tollens</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$, para todos los números reales a, b, c. $x + 4$ no es menor ni igual que $y + 4$; por lo tanto x no es menor ni igual que y. • Si $\sphericalangle ABC$ es un ángulo interior de un rectángulo, entonces $\sphericalangle ABC$ es recto. $\sphericalangle PQR$ no es un ángulo recto; por lo tanto, $\sphericalangle PQR$ no puede ser uno de los ángulos interiores de un rectángulo.

El tercer sentido del enunciado condicional, indicado por Quine (1962, citado por Durand – Guerrier, 2003), se refiere precisamente al empleo de estas dos reglas de inferencia deductiva. De hecho, el empleo de estas reglas de inferencia es más frecuente de lo que se piensa. V. Durand-Guerrier nos brinda, además, un ejemplo acerca de cómo el *modus*

tollens puede ser empleado en el proceso de investigación criminal, para esclarecer la esencia de una coartada (alibi): “*If Pierre is the murderer, he was in Paris Monday at noon; Pierre can prove that he was not in Paris at that time; so Pierre is not the murderer*” [“*Si Pierre es el asesino, él estuvo en París el lunes por la noche; Pierre puede probar que él no estuvo en París en ese momento; por lo que Pierre no es el asesino*”] (Durand – Guerrier, 2003, p. 10) (**traducción nuestra**).

No se puede dejar de mencionar que, en aquellas inferencias mediatas cuyas premisas son enunciados condicionales, existe la siguiente particularidad:

[...] aquello que se trata en el consiguiente del primer enunciado condicional, sirve de contenido al antecedente del segundo juicio condicional y de ello depende la existencia de aquello de que se trata en el consiguiente de dicho segundo juicio. Esto nos permite afirmar, en la conclusión, que aquello de que se trata en el antecedente del primer juicio condicional, condiciona la existencia de aquello que se trata en el consiguiente del segundo (Gorski & Tavants, 1960, p. 189).

Esta regla válida de inferencia recibe el nombre de silogismo hipotético y puede representarse simbólicamente así:

Silogismo hipotético	
$p \rightarrow q$	
$q \rightarrow r$	
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	
$\therefore p \rightarrow r$	

Gorski & Tavants (1960) consideran el siguiente ejemplo:

Si la Luna no tiene atmósfera, la luz no se refracta cerca de su superficie.

Si la luz no se refracta cerca de la superficie de la Luna, no puede haber en ella crepúsculos.

Luego si la Luna no tiene atmósfera, no puede haber en ella crepúsculos (p. 189).

Otro ejemplo, en el contexto de la matemática, es el siguiente:

Si x es mayor que 100, entonces x es mayor que 90.

Si x es mayor que 90, entonces x es mayor que 70.

Por lo tanto, si x es mayor que 100, entonces x es mayor que 70.

b) Formas inválidas de razonamiento

Con relación a la inferencia por conversión en su primera acepción, es inválido, por ejemplo, que a partir de la proposición universal afirmativa “Todos los jureles son peces” se concluya que “Todos los peces son jureles”, pues de la primera proposición (que es verdadera) no puede inferirse una proposición falsa. Así podemos observar que el intercambio de sujeto y predicado en una proposición no siempre permite arribar a una

conclusión válida. Tampoco es posible obtener la conversa de la proposición particular negativa “Algunos números no son pares”, pues de la veracidad de esta proposición no es posible concluir “Algunos pares no son números”, que constituye una proposición falsa. Como un ejemplo ilustrativo de inferencia inválida, correspondiente a la segunda acepción de conversión, consideramos que, del enunciado “Si x es un triángulo, entonces x es un polígono”, no es posible obtener la conversa “Si x es un polígono, entonces x es un triángulo”. Así mismo, tampoco es posible obtener de manera inmediata la proposición dada en la forma siguiente: “Si x **no** es un triángulo, entonces x **no** es un polígono”.

Dado cierto enunciado condicional, se señalan como inválidas las siguientes inferencias: de la negación del antecedente pasar a la negación del consecuente, de la afirmación del consecuente pasar a la afirmación del antecedente (Gorski & Tavants, 1960). Cuando un razonamiento registra este tipo de inferencia incurre en las falacias de “negación del antecedente” y “afirmación del consecuente”, respectivamente. En la Tabla 6 mostramos algunos ejemplos de dichas formas inválidas de razonamiento, así como la estructura lógica de ellas en el lado derecho de la tabla. La “conclusión” se escribe entre signos de interrogación por el carácter indeterminado que esta posee y para que el lector no piense que dicha conclusión es correcta.

Tabla 6. Formas inválidas de razonamiento

Formas inválidas de razonamiento	Ejemplos	Estructura lógica
<p><i>Afirmación del consecuente</i></p>	<p>Si un número es mayor que 10, es mayor que 8.</p> <p style="text-align: right;">x es mayor que 8</p> <hr style="width: 20%; margin-left: auto; margin-right: 0;"/> <p>Por lo tanto, ¿x es mayor que 10?</p> <p>Si consideramos $x = 9$, la conclusión es falsa, pues este número no es mayor que 10. Pero, si $x = 13$, la conclusión es verdadera. Precisamente, este tipo de inferencia nos lleva a la indeterminación.</p>	<p style="text-align: center;">$p \rightarrow q$</p> <p style="text-align: center;">q</p> <hr style="width: 20%; margin-left: auto; margin-right: 0;"/> <p style="text-align: center;">¿$\therefore p$?</p>

<p style="text-align: center;"><i>Negación del antecedente</i></p>	<p>Si $\sphericalangle ABC$ es un ángulo interior a un rectángulo, entonces $\sphericalangle ABC$ es recto.</p> <p>$\sphericalangle PQR$ no es ángulo interior a un rectángulo</p> <hr/> <p>Por lo tanto, ¿$\sphericalangle PQR$ no es recto?</p> <p>Supongamos que $\sphericalangle PQR$ es un ángulo perteneciente a un triángulo equilátero. En ese caso, la conclusión es verdadera. Pero si $\sphericalangle PQR$ es el ángulo recto de un triángulo rectángulo, se concluye en falso. Nuevamente, como en el caso de la anterior inferencia lógicamente inválida, se presenta la indeterminación.</p>	$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ \neg p \\ \hline \therefore \neg q? \end{array}$
--	---	---

Las razones que no permiten las inferencias mostradas en la Tabla 6 son, por oposición, aquellas que fundamentan a los *moda*: no se debe olvidar que, en el enunciado condicional no exclusivo, “(...) aquello que se trata en el antecedente es condición suficiente, pero no necesaria para la existencia de aquello que se trata en el consecuente, y aquello de que se trata en este es condición necesaria, pero no suficiente para aquello de que se trata en el antecedente” (Gorski & Tavants, 1960, p. 185). Mientras tanto, en el razonamiento con premisa condicional exclusiva (asociada a enunciados bicondicionales), las inferencias recientemente abordadas son válidas debido al carácter de condición necesaria y suficiente tanto del antecedente en relación al consecuente y viceversa. Como ejemplos de proposiciones bicondicionales donde dichas inferencias sí son válidas, tenemos las definiciones matemáticas: “llámese raíz cúbica de un número a el número cuyo cubo es igual a a ” (Dorofeev, Potapov & Rozov, 1973, p. 6). Veamos:

- a) La *afirmación del consecuente* muestra su validez cuando razonamos de la siguiente forma: “si x es un número cuyo cubo es igual a a , entonces x es la raíz cúbica de a ”.
- b) Es válida la *negación del antecedente* cuando razonamos así: “si x no es un número cuyo cubo es a , entonces x no es la raíz cúbica de a ”.

Las inferencias lógicamente inválidas con el enunciado condicional no exclusivo originan, como se ha visto, indeterminación en la conclusión. El empleo de este tipo de inferencias es más común de lo que se cree y constituye la característica esencial de los errores en el empleo del condicional como veremos posteriormente.

2.1.7. Conexión entre condicional, inferencia y conjuntos

Lages, Pinto, Wagner & Morgado (2000) precisan:

Sean P y Q propiedades referentes a un elemento genérico de un conjunto U . Esas propiedades definen los conjuntos A , formados por los elementos de U que gozan de P , y B , conjunto formado por los elementos de U que tienen la propiedad Q . Se dice entonces que la propiedad P *implica* (o *acarrea*) la propiedad Q , y se escribe $P \Rightarrow Q$, para significar que $A \subset B$ (p. 5).

Para ilustrar esta relación, los autores brindan el siguiente ejemplo:

(...) sea U el conjunto de los cuadriláteros convexos del plano. Designemos por P a la propiedad de un cuadrilátero tener cuatro ángulos rectos y por Q a la propiedad de un cuadrilátero tener sus lados opuestos paralelos. Entonces podemos escribir $P \Rightarrow Q$. En efecto, en este caso, A es el conjunto de los rectángulos y B es el conjunto de los paralelogramos, luego $A \subset B$ (Lages *et al.*, 2000, p. 5)

La relación entre A y B se puede representar de la siguiente forma (Figura 4):

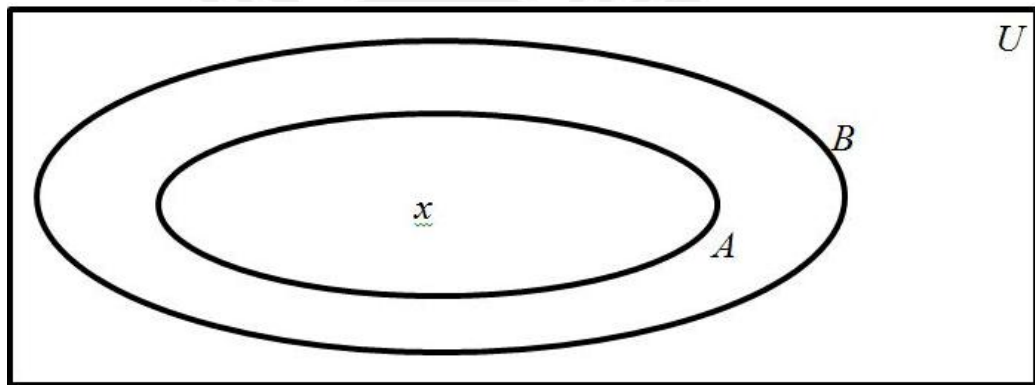


Figura 4. Inclusión del conjunto A en el conjunto B

A partir de lo afirmado, los investigadores pueden establecer que “Si x es un rectángulo entonces x es un paralelogramo”, “Todo rectángulo es un paralelogramo”, etc. (Lages *et al.*, 2000, p. 5).

De forma análoga, si S es la propiedad que caracteriza a los enteros múltiplos de 6 y D es la propiedad que define a los enteros múltiplos de 2, podemos escribir $S \Rightarrow D$. Si denominamos V al conjunto de los números que tienen la propiedad S , así como W al conjunto de los números que poseen la propiedad D , podemos decir $V \subset W$. Esto significa que “Si x es múltiplo de 6, entonces x es múltiplo de 2” es una proposición verdadera o que “ser múltiplo de 6 es condición suficiente para ser múltiplo de 2”.

La relación descrita se puede observar en la siguiente figura (Figura 5):

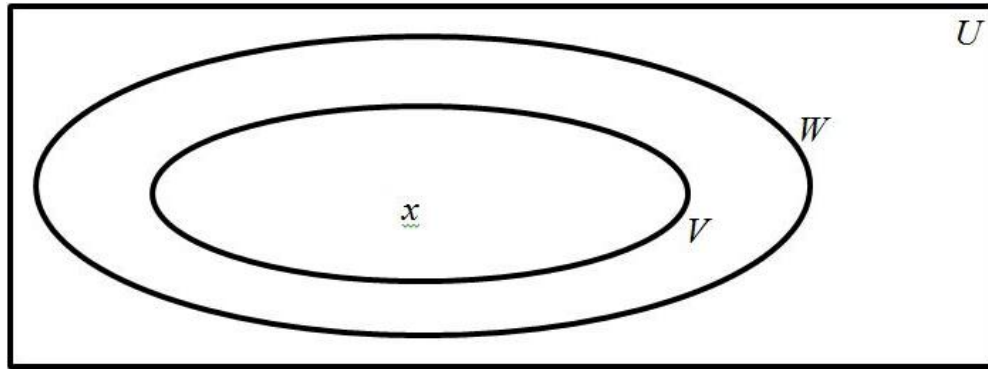


Figura 5. Inclusión del conjunto V en el conjunto W

Se podría pensar que todas las proposiciones universales afirmativas son representables mediante la inclusión de un conjunto en otro, no obstante Deloustal-Jorrand (2004) indica que ello no siempre es posible, como en el siguiente caso “ $\forall k \in \mathbb{N}, k$ pair implique $k + 1$ impair” (p. 45) [$\forall k \in \mathbb{N}, k$ par implica $k + 1$ impar] (**traducción nuestra**).

Las reglas de inferencia mediata, las inferencias lógicamente inválidas y la relación de contradictoriedad entre proposiciones categóricas también pueden ser expresadas mediante diagramas de conjunto. Dicha forma de representación, inclusive, nos ayuda a determinar si un razonamiento es válido o no, hecho sobre el que no hemos encontrado aún trabajos antecedentes. Mostremos dicha utilidad en orden:

a) Empecemos con mostrar la relación entre las reglas de inferencia mediata y los conjuntos.

En el caso del *modus ponens*, sea el razonamiento siguiente:

Si un número es mayor que 10 entonces es mayor que 8

x es mayor que 10

Por lo tanto, x es mayor que 8.

Denotemos adecuadamente a los conjuntos mencionados en las premisas, de la siguiente forma:

- Sea A el conjunto de los números mayores que 10
- Sea B el conjunto de los números mayores que 8

Observamos que el antecedente de la primera premisa determina la propiedad P que tienen los elementos del conjunto A (es decir, *ser números mayores que 10*), mientras que el consecuente de dicha premisa define la propiedad Q que tienen los elementos del conjunto B (*ser números mayores que 8*). La relación entre A y B , así como el lugar que ocupa x ($x \in A \rightarrow x \in B$), se pueden representar de la siguiente forma (Figura 6):

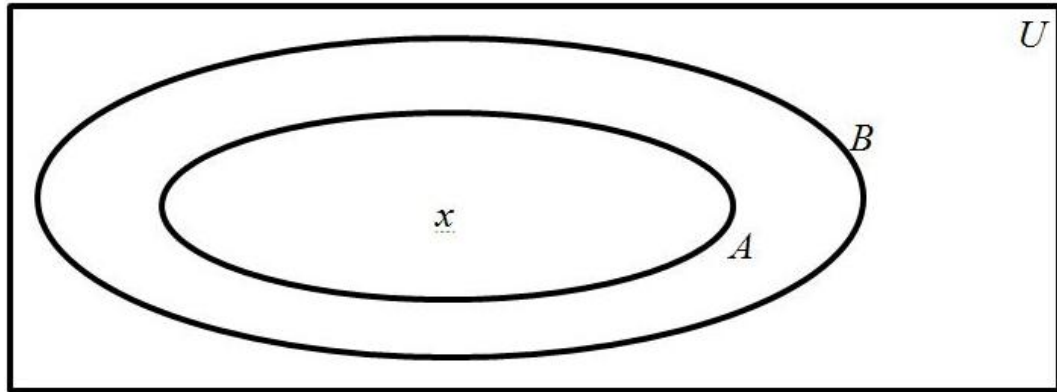


Figura 6. Diagrama de Venn para representar *modus ponens*

En el caso del *modus tollens*, sea el razonamiento siguiente:

Si un número es mayor que 10 entonces es mayor que 8
 x no es mayor que 8

Por lo tanto, x no es mayor que 10.

Denotemos a los conjuntos mencionados en las premisas de la siguiente manera:

- Sea M el conjunto de los números mayores que 10.
- Sea N el conjunto de los números mayores que 8.

Notemos que el antecedente de la primera premisa determina la propiedad R que cumplen los elementos del conjunto M (es decir, *ser números mayores que 10*), mientras que el consecuente de dicha premisa define la propiedad S (*ser números mayores que 8*) que cumplen los elementos del conjunto N . La relación entre M y N , así como el lugar que ocupa x ($x \notin N \rightarrow x \notin M$), se puede representar de la siguiente forma (Figura 7):

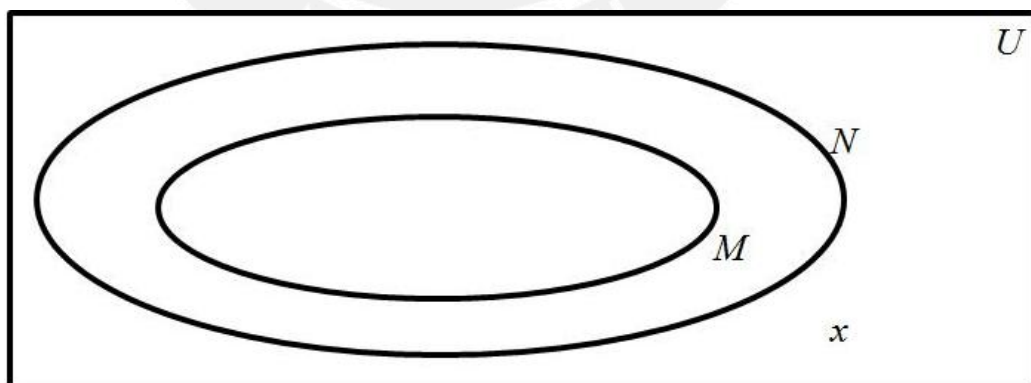


Figura 7. Diagrama de Venn para representar *modus tollens*

Para el caso del silogismo hipotético:

Si x es mayor que 100, entonces x es mayor que 90

Si x es mayor que 90, entonces x es mayor que 70

Por lo tanto, si x es mayor que 100, entonces x es mayor que 70.

Denotemos convenientemente a los conjuntos indicados en las premisas, como:

- Sea A el conjunto de los números mayores que 100.
- Sea C el conjunto de los números mayores que 90.
- Sea D el conjunto de los números mayores que 70.

De este modo, la relación entre los conjuntos mencionados nos indica que, si x es un elemento del conjunto A (es decir, si x es mayor que 100) se puede ver claramente que x también es elemento del conjunto D (es decir, x es mayor que 70). Lo dicho, se puede representar de la siguiente forma (Figura 8):

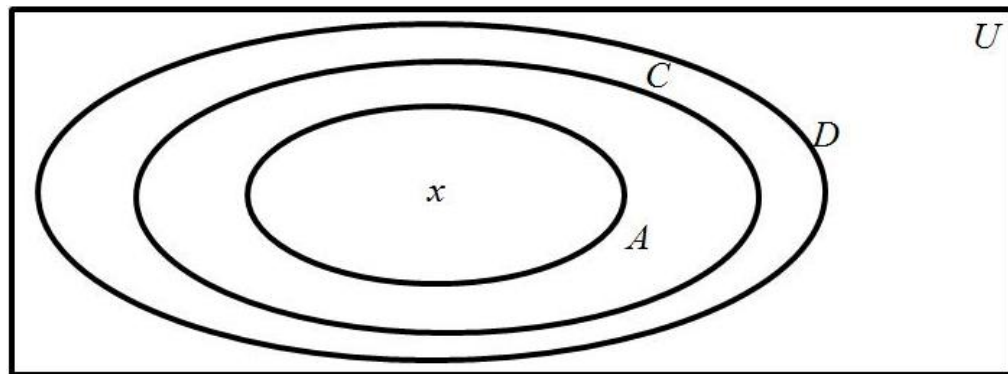


Figura 8. Diagrama de Venn para representar silogismo hipotético

b) Mostramos la relación existente entre las inferencias lógicamente inválidas y los conjuntos.

Como ilustración de la *afirmación del consecuente*, tenemos el siguiente razonamiento:

Si un número es mayor que 10, entonces es mayor que 8
 x es mayor que 8

 ¿Podemos concluir que x es mayor que 10?

Sea F el conjunto de los números mayores que 10 y sea G el conjunto de los números mayores que 8. De aquí que, por la implicación dada (condicional verdadero), tenemos que $F \subset G$. La afirmación del consecuente se ilustra mediante el empleo de los signos de interrogación que acompañan a x para indicar su ubicación indeterminada en el diagrama que relaciona a F y a G (Figura 9).

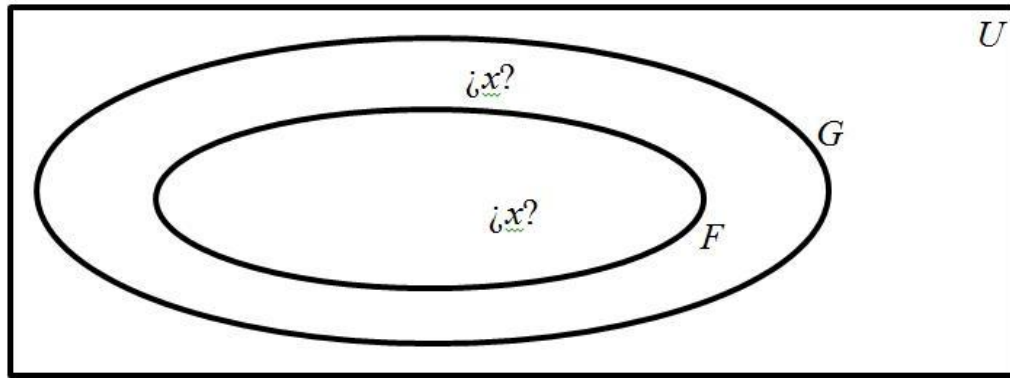


Figura 9. Diagrama de Venn para representar *afirmación del consecuente*

Como se puede apreciar, no podemos garantizar con precisión el conjunto al que pertenece x : si a F o a $G - F$.

Ahora analicemos el caso de la *negación del antecedente*. Sea el siguiente razonamiento:

Si un número es mayor que 10, entonces es mayor que 8
 x no es mayor que 10,

¿Podemos concluir que x no es mayor que 8?

Sea E el conjunto de los números mayores que 10 y sea V el conjunto de los números mayores que 8. De aquí que, por la implicación dada (condicional verdadero), tenemos que $E \subset V$. La negación del antecedente se ilustra mediante el empleo de los signos de interrogación que acompañan a x para indicar su ubicación indeterminada en el diagrama que relaciona a E y a V (Figura 10).

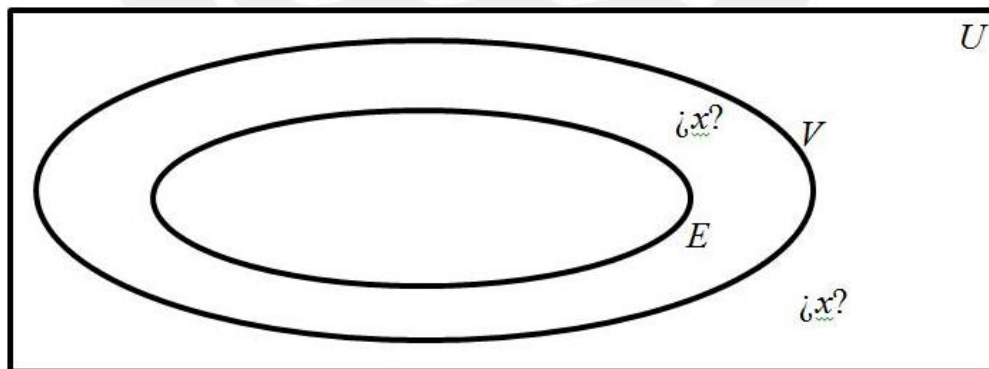


Figura 10. Diagrama de Venn para representar *negación de antecedente*

Como se puede apreciar, no podemos garantizar con exactitud el conjunto al que pertenece x : si a $V - E$ o a V^c .

Precisamente, acerca de la relación existente entre el condicional, las reglas de inferencia y las representaciones conjuntistas, Deloustal-Jorrand (2007) postula la siguiente tesis:

Il est nécessaire de connaître et d'établir un jeu dialectique entre les trois cadres, logique formelle, ensembliste, et raisonnement déductif, pour une bonne appréhension et une bonne utilisation de l'implication.

En particulier:

Sans un point de vue ensembliste sur l'implication, il n'est pas possible d'accéder à l'utilisation correcte et à la compréhension "complete" de ce concept mathématique. La thèse que nous soutenons est que cette condition sur le jeu de cadres est suffisante. (Deloustal – Jorrand, 2007, p. 92)

[Es necesario conocer y establecer un juego dialéctico entre los tres marcos, lógico-formal, conjuntista y de razonamiento deductivo, para una buena aprehensión y un buen empleo de la implicación.

En particulier:

Sin un punto de vista conjuntista sobre la implicación, no es posible acceder al empleo correcto y a la comprensión "completa" de este concepto matemático. La tesis que sostenemos es que esta condición, en el juego de marcos, es suficiente] (**traducción nuestra**)

Estas valiosas ideas nos permiten sintetizar y fundamentar, desde el punto de vista de la Educación Matemática, todo lo expresado hasta el momento acerca del enunciado condicional.

2.2. Elementos teóricos acerca de los errores vinculados a la lógica

Hasta el momento se han advertido diferentes tipos de errores durante el proceso de inferencia, como los de afirmación del consecuente, negación del antecedente y conversión (para el caso de las proposiciones universales afirmativas y las proposiciones particulares negativas), pero todavía no hemos indicado en qué consiste lo erróneo.

Según Jarraud, Ramón, Ramón & Ramón (2008) por error se entiende una "idea o expresión no conforme a la verdad" (s. p.). Desde el punto de vista de la Lógica, Rosental & Iudin (1973) indican lo siguiente:

[Los] errores [son] debidos a un equivocado curso del pensar en el razonamiento [...] Los errores pueden derivar de una interpretación incorrecta o de un uso desacertado – como premisas de un determinado razonamiento- de determinadas aseveraciones [...]; pueden cometerse por infracción de las leyes de la lógica en el curso del razonamiento [...]; por tomar equivocadamente como inferencia de la aseveración una que, en realidad, no es la conclusión del razonamiento dado [...] (p. 144).

La relación indicada entre el error y la verdad, siempre desde el punto de vista lógico, es muy importante. En efecto, las leyes de la lógica no son sino el resultado de actividades teórico-prácticas que la Humanidad ha repetido millones de veces hasta elevarlas a tal rango, en el marco del proceso del conocimiento. Ante ello, la verdad constituye un proceso de "reflejo fiel, acertado, de la realidad en el pensamiento, reflejo comprobado, en última instancia, mediante el criterio de la práctica" (Rosental & Iudin, 1973, p. 479). Es por esta razón (el conocimiento como proceso), que el error solo puede ser

comprendido en su relación con el razonamiento. Una definición muy precisa que contempla tal nexo es brindada por Woods (2013):

E is an error of reasoning if and only if there exists a truth-preserving prescription *R* for right reasoning or a probabilistically clinching prescription *R'* for right reasoning, and *E* violates *R* and *R'* (p. 4).

[*E* es un error de razonamiento si, y solo si, existe una prescripción *R* que conserva la veracidad para el razonamiento correcto o una prescripción probabilísticamente irrefutable *R'* para el razonamiento correcto, y *E* viola *R* y *R'*] (**traducción nuestra**)

De esta forma, podemos establecer el nexo entre el error y el razonamiento incorrecto. Precisamente, en el capítulo anterior (sección 2.1.6., b), habíamos adelantado temas relacionados a las formas inválidas de razonamiento desde el punto de vista lógico. Ahora, corresponde mostrar cómo es que dichos razonamientos incorrectos son abordados desde la Educación Matemática.

2.2.1. Negación del antecedente y afirmación del consecuente

La negación del antecedente constituye un error abordado, en particular, en el estudio de Movshovitz–Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987), quienes la ubican como *elemento característico B dentro de las inferencias lógicamente inválidas*. Esta categoría consiste, según los autores, en lo siguiente:

In general, this category includes those errors that deal with fallacious reasoning and not with specific content; that is, new information invalidly drawn from a given piece of information or from a previously inferred one (...)

B: Concluding from a conditional statement (if *p*, then *q*) and its consequent *q* that the antecedent *p* is valid; or concluding from a conditional statement and the negation of its antecedent (not *p*) that the negation of its consequent (not *q*) is valid (pp. 10 – 11).

[En general, esta categoría incluye aquellos errores que tratan con razonamientos falaces y no con su contenido específico; esto es, nueva información inválidamente obtenida de una parte de la información brindada o de una previamente inferida (...)]

B: Concluir de un enunciado condicional (si *p* entonces *q*) y de su consecuente *q*, que el antecedente *p* es válido; o concluir de un enunciado condicional y de la negación de su antecedente (no *p*) que la negación de su consecuente (no *q*) es válida] (**traducción nuestra**)

Como se puede apreciar, dentro del mismo tipo se incluye la otra forma de razonamiento inválida: afirmación del consecuente. La presencia y estudio acerca de estos dos tipos de error (y, en algunos casos, acerca de sus causas) puede ser apreciada en distintos grupos de sujetos, de acuerdo con los estudios de Wason (1966, citado en Alvarado & González, 2010), Stabler (1970, citado en Ferreri & Spagnolo, 1994, p. 16), Laudien (1999), Inglis & Simpson (2008) y Durand-Guerrier (2014). Por otra parte, es interesante anotar la

forma en que Laudien (1999), considera a los dos errores ya mencionados (NA representa a la negación del antecedente y AC, a la afirmación del consecuente):

NA is: “If A then B, and Not A”. It may be also stated as: “All the A’s are (or do) B, and X is C.” It is not possible to state whether B is true or false (or whether X is, or does B) (...) The argument form AC is: “If A then B, and B” or “All the A’s are (or do) B, and X is (or does) B. It is not possible to state whether A is true or false (or whether X is an A) (Laudien, 1999, p. 226).

[NA es: “Si A entonces B y no-A”. Esto también podría ser afirmado como: “Todos los A son (o hacen) B y X es C”. No es posible afirmar si B es verdadero o falso (o si X es, o hace B) (...) La forma del argumento AC es: “Si A entonces B y B” o “Todos los A son (o hacen) B y X es (o hace) B. No es posible afirmar si A es verdadero o falso (o si X es un A)] **(traducción nuestra)**

Nótese en la cita que Laudien (1999) relaciona los errores de razonamiento con la forma generalizada del condicional, la misma que permite la representación de aquellos mediante los diagramas de Venn empleados para representar las proposiciones categóricas universales afirmativas o negativas (tal como se mostró en la sección 2.1.4.), así como las reglas de inferencia mediata y las inferencias lógicamente inválidas (sección 2.1.7.)

2.2.2. Conclusión de la conversa

Inglis & Simpson (2007) indican que los errores de afirmación del consecuente y negación del antecedente no son los únicos relacionados con inferencia inválida. Este punto de vista fue considerado por nosotros en la sección 2.1.6, b. En efecto: también se puede indicar el error de conclusión de la conversa. Movshovitz–Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987) lo consideran como el elemento característico A de la categoría de inferencias lógicamente inválidas:

A: Concluding from a conditional statement (if p , then q) its converse either in its positive form (if q , then p) or in its contrapositive form (if not p , then not q) (pp. 10 – 11).

[A: Concluir de un enunciado condicional (si p , entonces q) su conversa, sea en su forma positiva (si q , entonces p) o en su forma contrapositiva (si no p , entonces no q .)] **(traducción nuestra)**

Como podemos observar, el error indicado en la cita corresponde a la conversa en su segunda acepción, de acuerdo con Cook (2009). Este error, así como el de la forma contrapositiva de la conversa también es abordado en los trabajos de Epp (2003) y Durand-Guerrier (2014). Dichas autoras presumen que el error se comete al asumir el condicional como un bicondicional, por lo que cabe distinguir al primero de su conversa.

2.2.3. Concepción causal de la implicación

En base a la definición de *concepción* planteada por Brousseau (1997, citado en Deloustal–Jorrand, 2002), se indica que la *concepción causal de la implicación* (es decir, de un condicional verdadero) constituye causa de errores con este tipo de proposición lógica. Tal concepción consiste en lo siguiente:

We understand by “causal conception of the implication” all the rules, practices and knowledges related to the interpretation of the sentence “A implies B” by “A is the cause of B” (...) Indeed, from this interpretation, one can easily derive the interpretation “A is the cause of B and only A” then the interpretation “A is the cause of B, A thus precedes B” which we will call “temporal conception of the implication” (Deloustal – Jorrand, 2002, s. p.)

[Entendemos por “concepción causal de la implicación” a todas las reglas, prácticas y conocimientos relacionados a la interpretación de la proposición “A implica B” como “A es la causa de B” (...) De hecho, a partir de esta interpretación, uno puede fácilmente obtener que “A es la causa de B y únicamente A”, “A es la causa de B, A de este modo antecede a B”, que es lo que denominamos “concepción temporal de la implicación”] (**traducción nuestra**)

Esta cita nos remite a aquellas características referentes a las relaciones existentes entre los dos elementos del condicional: el antecedente es condición suficiente para el consecuente, mientras que este último constituye la condición necesaria para el primero. El tipo de error aquí tratado lleva hacia una paradoja: si el antecedente origina al consecuente, ¿cómo este puede llegar a ser condición necesaria para aquel? (Deloustal-Jorrand, 2002).

2.2.4. Adición de información extraña

Para Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987) este tipo de error consiste en lo siguiente:

A: Designating as “given” a piece of information that neither is stated nor follows immediately from the given information. The student has added extraneous data (p. 9)

[A: Designar como dada cierta información que en ningún caso es enunciada o seguida a partir de la información dada. El estudiante ha añadido información extraña.] (**traducción nuestra**)

Como se puede apreciar, el error de adición de información extraña corresponde al *elemento característico A de la categoría de datos mal utilizados*, formulada por los autores anteriormente mencionados. Esta categoría “(...) includes those errors that can be related to some discrepancy between the data as given in the item and how the examinee treated them (...)” (Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar, 1987, p. 9) [“(...) incluye aquellos errores que pueden ser relacionados con alguna discrepancia entre los datos tal y como son brindados en el ítem y la forma en que el examinando los trató (...)”]

(traducción nuestra). Los autores colocan el siguiente ejemplo para ilustrar este tipo de error:

Example: Given the series 1, 5, 7, which number should be added to each of the three elements to turn the series into a geometric one?

Incorrect solution:

$$"7 = 1 + (3 - 1) d$$

$$6 = 2d$$

$$d = 3" \text{ (Movshovitz-Hadar, Zaslavsky \& Inbar, 1987, p. 9)}$$

[Dada la secuencia 1, 5, 7, ¿cuál es el número que debe ser agregado a cada uno de los tres elementos para convertir la secuencia en una progresión geométrica?

Solución incorrecta:

$$"7 = 1 + (3 - 1) d$$

$$6 = 2d$$

$$d = 3" \text{ (traducción nuestra)}$$

Los investigadores ubican el error de adición de información extraña en el empleo de una propiedad de las progresiones aritméticas sin verificar su cumplimiento para el término central de la secuencia.

2.2.5. Asignación de significado inconsistente a un sector del texto

Para Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987) este tipo de error consiste en “assigning to a given piece of information a meaning inconsistent with the text (...)” (p. 9) [“asignar a determinada parte de la información un significado inconsistente con el texto (...)”] (traducción nuestra). Dicho error corresponde al *elemento característico D de la categoría de datos mal utilizados*, formulada por los autores de la investigación. Los autores colocan como un ejemplo ilustrativo de este tipo de error al empleo de las alturas de un triángulo en la solución de un problema que requería trabajar con las medianas de aquel. Otro ejemplo, obtenido a partir de nuestras aplicaciones piloto, consiste en que, dado determinado dato del problema que comienza como “Ninguno cumplió...”, el participante lo comprendió como “No todos cumplieron...”

2.2.6. Salto injustificado en la inferencia

Para Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987) este tipo de error consiste en “making an unjustified jump in a logical inference; that is, stating that q follows from p without providing the necessary sequence of arguments leading from p to q , or providing erroneous arguments” (pp. 10 – 11) [“realizar un salto injustificado en una inferencia lógica; es decir, enunciar que q sigue de p sin proporcionar la secuencia necesaria de

argumentos que conducen de p a q , o proporcionar argumentos erróneos] (**traducción nuestra**). El error indicado corresponde al elemento característico E de la categoría de inferencias lógicamente inválidas. Para ilustrar este tipo de error, los autores brindan el siguiente ejemplo (Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar, 1987) y la siguiente figura (Figura 11):

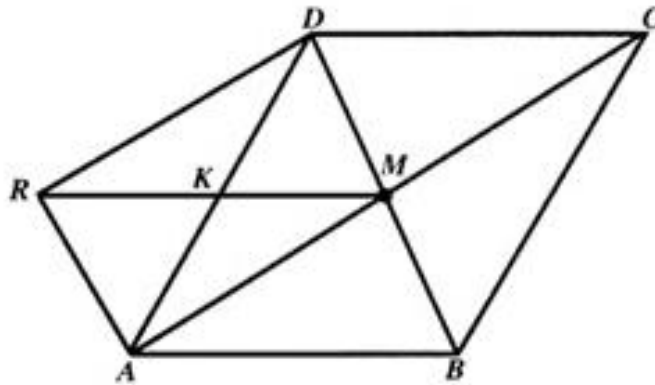


Figura 11. Datos brindados para el error de salto injustificado en inferencia lógica

Fuente: Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987, p. 11)

$ABCD$ in the figure is a rhombus. Given that $\overline{AR} \parallel \overline{BD}$, $\overline{RD} \parallel \overline{AC}$, and K is the intersection of \overline{RM} and \overline{RD} , prove that $AMDR$ is a rectangle.

Incorrect solution:

“ $\sphericalangle MAD \cong \sphericalangle RDA$ (because $\overline{RD} \parallel \overline{AC}$);

$\sphericalangle DAR \cong \sphericalangle ADM$ (because $\overline{AR} \parallel \overline{BD}$); therefore $\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$

$AMDR$ is a rectangle because in a rectangle any two opposite angles are congruent and equal 90° .” (p. 11).

[$ABCD$ en la figura es un rombo. Sabiendo que $\overline{AR} \parallel \overline{BD}$, $\overline{RD} \parallel \overline{AC}$, y K es la intersección de \overline{RM} y \overline{RD} , pruebe que $AMDR$ es un rectángulo.

Solución incorrecta:

“ $\sphericalangle MAD \cong \sphericalangle RDA$ (porque $\overline{RD} \parallel \overline{AC}$);

$\sphericalangle DAR \cong \sphericalangle ADM$ (porque $\overline{AR} \parallel \overline{BD}$); por lo tanto $\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$

$AMDR$ es un rectángulo porque en un rectángulo cualquiera, dos ángulos opuestos son congruentes e iguales a 90° .”] (**traducción nuestra**)

El error detectado por los investigadores consistió en que, de la congruencia de $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle D$, se obtuvo, sin afirmaciones mediante, que $AMDR$ era un rectángulo.

2.2.7. Imposición de un requisito discordante con la información dada

Este tipo de error, según Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987) consiste en “imposing a requirement that disagrees with the given information” (p. 9) [“imponer un requisito en desacuerdo con la información proporcionada”] (**traducción nuestra**). Este

error constituye la característica E de la categoría de datos mal utilizados, dentro del sistema elaborado por los autores anteriormente mencionados. Como un ejemplo que ilustra este tipo de error, los autores indican el caso en que “se obliga” a tener las propiedades de la bisectriz de un ángulo a cierta línea que pasa por el vértice de este (Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar, 1987).

Dado que el tipo de error aquí mencionado pertenece, como el descrito en 2.2.5. a la categoría de datos mal utilizados y que, además, como indican Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987), “the characteristic elements are not necessarily independent” (p. 9) [“los elementos característicos no son necesariamente independientes”] (**traducción nuestra**), podría parecer que los tipos de errores indicados no se pueden distinguir. Para evitar este inconveniente, consideramos en nuestro trabajo que la imposición de un requisito discordante consiste en afirmar un dato que está en desacuerdo o contradicción con lo planteado en determinado problema. Mientras, para el tipo de error indicado en 2.2.5., la contradicción no es distintiva, sino la “sustitución” del significado de un concepto por otro.

2.2.8. **Afirmación de un requerimiento que el problema no requirió**

Para Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987), este tipo de error consiste en “stating explicitly as a requirement (...) something that was not required in the problem” (p. 9) [“afirmar explícitamente (...) algo que no fue requerido en el problema”] (**traducción nuestra**). Como ejemplo ilustrativo de este tipo de error, los autores indican, para la respuesta incorrecta mostrada en el punto 2.2.4., el cálculo del valor de d , algo que no fue pedido en el enunciado del problema.

De este modo, podemos observar que los errores de tipos adición de información extraña, asignación de significado inconsistente a un sector del texto, imposición de un requisito discordante con la información dada y afirmación de un requerimiento que el problema no requirió pertenecen, de acuerdo con Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987) a la *categoría de datos mal utilizados*. Mientras, los errores de negación del antecedente, afirmación del consecuente, conclusión de la conversa, salto injustificado en la inferencia y concepción causal de la implicación poseen un *origen mucho más vinculado con la lógica*, donde los cuatro primeros corresponden a la categoría de *inferencias lógicamente inválidas*, según Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987). Creemos que el sistema elaborado por los investigadores ya mencionados brinda una amplia variedad de errores que, a priori, podrían encontrarse en los análisis que efectuaremos sobre las respuestas

emitidas por los participantes de nuestro estudio. Sin embargo, hemos de indicar que, para evitar los errores de tipo matemático (también identificados por los investigadores y oportunamente mencionados en los antecedentes de nuestra investigación) y así concentrarnos en los errores que surgen en el uso del enunciado condicional, elegimos tareas que, en su mayoría, se encuentran planteadas en un contexto extramatemático.

2.3. Elementos metodológicos

Por metodología comprendemos, con Alvarez de Zayas & Sierra (2001), a la ciencia que “nos ofrece la lógica de construcción del conocimiento científico” (p. 8). Es decir, de acuerdo con los mismos autores, es el proceso caracterizado por introducir conocimientos científicos, innovarlos o crearlos. La Metodología es más amplia que el método, en tanto que este constituye componente del proceso de investigación científica. El método muestra “la estructura, el orden de los pasos que desarrolla el sujeto, en su interacción con el objeto, a lo largo del proceso” (Alvarez de Zayas & Sierra, 2001, p. 14).

Planteadas así las definiciones metodológicas generales, debemos indicar que nuestro estudio se desarrolla dentro de la investigación cualitativa pues, de acuerdo con Hernández, Fernández & Baptista (2010)

(...) se busca (...) profundizar en sus experiencias, perspectivas, opiniones y significados [de los participantes], es decir, la forma en que (...) perciben subjetivamente su realidad. También es recomendable seleccionar el enfoque cualitativo cuando el tema de estudio ha sido poco explorado, o no se ha hecho al respecto en algún grupo social específico (p. 364).

De esta forma, la adopción del enfoque cualitativo en nuestro estudio se encuentra plenamente justificada por ser una de las primeras que aborda el objeto de estudio mencionado (los errores en el empleo del enunciado condicional) en nuestro medio y porque no solo registrará las respuestas de los participantes, sino también profundizará en las justificaciones de aquellas. Estos propósitos coinciden con las características descritas por Araújo & Borba (2004) para la investigación cualitativa:

Assim, quando decidimos desenvolver uma pesquisa, partimos de uma inquietação inicial e, com algum planejamento, não muito rígido, desencadeamos um processo de busca. Devemos estar abertos para encontrar o inesperado; o plano deve ser frouxo o suficiente para não “sufocarmos” a realidade, e, em um processo gradativo e não organizado rigidamente, nossas inquietações vão se entrelaçando com a revisão da literatura e com as primeiras impressões da realidade que pesquisamos para, suavemente, delinear o foco e o *design* da pesquisa (pp. 42 – 43).

[Así, cuando decidimos desarrollar una investigación, partimos de una inquietud inicial y, con alguna planificación, no muy rígida, desencadenamos un proceso de búsqueda. Debemos estar abiertos al encuentro de lo inesperado; el plan debe ser lo suficientemente holgado para no “ahogarnos” en la realidad, y, en un proceso gradual

y no organizado rígidamente, nuestras inquietudes se van entrelazando con la revisión de la literatura y con las primeras impresiones de la realidad que investigamos para, suavemente, delinear el foco y el diseño de nuestra investigación] (**traducción nuestra**)

Es, precisamente, nuestra actitud abierta ante las respuestas de los participantes, el requisito metodológico que fundamenta todo nuestro trabajo. No obstante, en el espíritu de la cita, es preciso el trazado de un plan que guíe nuestro trabajo con el objeto de estudio (“foco” como también se le denomina). Por esta razón consideramos las siguientes fases y actividades para el desarrollo de nuestro trabajo, de acuerdo con la propuesta de Alvarez de Zayas & Sierra (2001):

2.3.1. Precisión de lo que se investiga

En esta fase delimitamos el problema de la investigación, así como los objetivos, el objeto, el marco contextual y el campo de acción del estudio. Para ello, nos basamos en las investigaciones antecedentes, así como en la problemática conexas con el Diseño Curricular Nacional del Perú. El cumplimiento de la fase mencionada, en el caso del presente estudio, se realizó en el capítulo 1.

2.3.2. Elaboración de la monografía

Aquí se precisan sistemáticamente aquellos elementos teóricos que contribuyen a comprender y explicar los aspectos histórico, lógico y didáctico del problema que investigamos. De consignar dichos elementos trata el presente capítulo, mientras que la descripción de los instrumentos con los que se llevará a cabo el estudio se realizará en el capítulo 3.

2.3.3. Diagnóstico del objeto de estudio

En esta fase se determina “la situación que manifiesta el objeto de investigación” (Alvarez de Zayas & Sierra, 2001, p. 53) y constituye la más importante de nuestro trabajo. Para ello, se han considerado los siguientes procedimientos:

a) Recolección de datos

Se contará con un grupo de profesores de Matemática de Educación Secundaria, cuya participación será voluntaria. Sus datos personales no serán divulgados y no serán utilizados con fines distintos a los de esta investigación. Los problemas que se plantearán serán desarrollados por los profesores en un lapso aproximado de 2 horas y durante una sola sesión.

b) Análisis de datos

Las respuestas brindadas por los participantes, frente a los cuatro problemas planteados, serán sometidas a dos niveles de análisis. En el primer nivel, dividiremos las respuestas en correctas e incorrectas, de acuerdo a lo esperado para nuestro estudio. En el segundo nivel, nos concentraremos en las justificaciones brindadas a las respuestas erróneas (así como en las respuestas correctas con “justificación” incorrecta) y analizaremos los tipos de error cometido con fundamento en las investigaciones de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987), Deloustal-Jorrand (2002) y otras contenidas en nuestro marco teórico.

Para ejecutar el segundo tipo de análisis, nuestro trabajo incorporará algunos elementos del análisis de contenidos. Este, según Schreier (2014) es

(...) a method for systematically describing the meaning of qualitative data (...) This is done by assigning successive parts of the material to the categories of a coding frame. This frame is at the heart of the method, and it contains all those aspects that feature in the description and interpretation (...) of the material. Three features characterize the method: qualitative content analysis reduces data, it is systematic, and it is flexible (p. 170).

[(...) un método para la descripción sistemática del significado de datos cualitativos (...) Esto es realizado mediante la asignación de partes sucesivas del material en las categorías pertenecientes a un marco de codificación. Dicho marco se encuentra en el corazón del método y contiene todos aquellos aspectos que aparecen en la descripción e interpretación (...) del material. Tres rasgos caracterizan al método: el análisis de contenido reduce datos, es sistemático y es flexible] **(traducción nuestra)**

La razón fundamental para emplear el análisis de contenido en nuestro trabajo se encuentra en la dirección planteada para él por los objetivos de investigación. Debido a ello, consideramos que la forma del análisis de contenido coincide, en su mayor parte, con lo indicado por Mayring (2015):

The object of the analysis is to filter out particular aspects of the material, to give a cross-section through the material according to pre-determined ordering criteria, or to assess the material according to certain criteria (...) (p. 373).

[El objeto de análisis es filtrar determinados aspectos del material, brindar una sección representativa de todo el material de acuerdo con criterios predeterminados de orden o valorar el material de acuerdo con ciertos criterios (...)] **(traducción nuestra)**

Nuestra investigación, precisamente, tomará la forma descrita, mediante la valoración del material de acuerdo a determinados criterios, tras la selección de aquellas secciones cuyas que permitan observar los errores cometidos con el enunciado condicional. Dichos criterios consistirán en las clases de errores que han sido investigados en la literatura antecedente ya mencionada.

Enunciada la razón fundamental de nuestra elección metodológica, indicamos la relación presente entre las características del análisis de contenido (*reducción de datos*, *sistematicidad* y *flexibilidad*) descritas por Schreier (2014) y nuestro estudio:

- La reducción de datos se llevará a cabo mediante la abstracción ordenada de los elementos esenciales para nuestro trabajo (los errores en la condicional) a partir del material recolectado (las respuestas y justificaciones emitidas por los profesores).
- Lo sistemático se revelará a partir del análisis de todo el material significativo para nuestro estudio. La sistematicidad se manifestará, también, en que seguirá una secuencia de pasos y empleará determinados códigos que no deben mostrar ambigüedad.
- La flexibilidad se muestra en que el marco de codificación deberá siempre encontrarse acorde con el material colectado. Luego, ello supone la modificación de aquel durante el proceso de análisis.

Los procedimientos del análisis de contenidos contemplados por nosotros para llevar adelante nuestro trabajo son, de entre los propuestos por Schreier (2014), los siguientes:

- Construcción del marco de codificación

El marco de codificación “(...) consists of at least one main category and at least two subcategories” (Schreier, 2014, p. 174) [“(...) consta de, al menos, una categoría principal y, por lo menos, de dos subcategorías”] (**traducción nuestra**). En nuestro estudio elaboraremos un marco que considere las respuestas de los profesores, así como las justificaciones emitidas. Cada una de las categorías diseñadas poseerá sus respectivas subcategorías, de forma tal que todas ellas cumplan con los tres requisitos exigidos para su constitución: unidimensionalidad (cobertura del material en una sola dimensión), exclusión mutua y exhaustividad (Schreier, 2014).

El sistema de códigos será organizado en una matriz analítica por cada problema aplicado. Cada uno de ellos poseerá, además del nombre que lo identifica, la descripción de las características que involucra (descriptores o indicadores) y ejemplos ilustrativos (Schreier, 2014).

- Prueba de la codificación. Evaluación y modificación

Bajo este procedimiento consideramos la aplicación del sistema generado al material colectado. Schreier (2014) indica: “This can be done by two coders working independently of each other (...)” (p. 179) [“Este puede ser realizado por dos

codificadores que trabajen independientemente uno de otro (...)”] (**traducción nuestra**). Esta será la forma que emplearemos en nuestro estudio. Dado que, tras la discusión respectiva de los códigos asignados por los dos investigadores (asesora y autor, en nuestro caso), podrían existir desacuerdos en dicha acción, será necesaria la presencia de un tercer investigador cuyo parecer no solo permita arribar a consenso, sino que posibilite el procedimiento de triangulación de analistas o investigadores (Patton, 1990). Esto significa que, al final de esta fase del método empleado, los códigos creados en la fase anterior son evaluados y pueden ser modificados (Schreier, 2014). El resultado será un marco reformado de códigos que será empleado en la siguiente fase de aplicación del análisis de contenido, si bien se indica al respecto: “If only few changes are made to the frame following the trial coding, the frame can now be used for the main analysis” (Schreier, 2014, p. 179) [“Si solo unos pocos cambios son realizados en el marco, durante su puesta a prueba, este puede ser utilizado para el análisis principal”] (**traducción nuestra**).

Acerca del procedimiento de triangulación de analistas, debemos indicar que, precisamente, “(...) refers to interpretations and analysis of collected data to be carried out in groups, evaluation teams or by several investigators to check for subjective views and to balance out individual teams” (Mok & Clarke, 2015, p. 407). [“(...) se refiere a las interpretaciones y análisis de datos recogidos, los que se llevan a cabo en grupos, equipos de evaluación o por varios investigadores que comprueban las visiones subjetivas y equilibran el trabajo individual”] (**traducción nuestra**). Tal estrategia se justifica en nuestro trabajo, para incrementar la credibilidad de las conclusiones que obtendremos (Maxwell, 2005), dado que, se asume junto con Mathison (1988, citado en Mok & Clarke, 2015), que:

“(...) the bias inherent in any particular data source, investigator, and particularly method will be cancelled out when used in conjunction with other data sources, investigators, and methods” (pp. 407 – 408).

[“(...) el sesgo intrínseco a cualquier fuente de datos, investigador y, particularmente en el método, será anulado cuando se conjuga con otras fuentes de datos, investigadores y métodos”] (**traducción nuestra**)

Esta forma de trabajo, en circunstancias análogas a las de nuestra investigación, nos fue sugerida estudios reconocidos como el de Stylianides, Stylianides & Shilling – Traina (2013).

- Análisis principal

En esta fase de la aplicación del método, además de codificar todo el material bajo el marco perfeccionado, realizaremos la conexión de los códigos elaborados con el marco teórico que fundamenta nuestra investigación. Para ello, nos concentraremos en determinar las clases de errores encontrados dentro del grupo de las respuestas incorrectas, de acuerdo con Movshovitz – Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987) y Deloustal – Jorrand (2002). De ser necesario, según indica Schreier (2014) se puede emplear la triangulación de analistas, en una forma similar a la considerada en la etapa anterior: “If an inconsistency cannot be resolved, it can be useful to bring in a third person who is also familiar with the research” (p. 180). [“Si una inconsistencia no puede ser resuelta, puede resultar útil invitar a una tercera persona quien también se encuentre familiarizada con el estudio”] (**traducción nuestra**). Al finalizar esta etapa, los análisis elaborados nos permitirán responder a la pregunta de investigación y vencer los objetivos propuestos del estudio.

2.3.4. Elaboración del reporte de investigación

Como resultado del empleo de los procedimientos ya descritos, Schreier (2014) sugiere que el sistema de códigos generado puede ser considerado como el principal resultado y puede servir como punto de inicio para posteriores estudios, relacionados con el análisis de patrones o de ocurrencias coincidentes. La misma autora indica que los resultados también pueden ser presentados en forma cuantitativa, mediante las frecuencias de los códigos registrados.

En nuestro trabajo, contemplamos la presentación de los errores diagnosticados, así como breves cuadros estadísticos que indiquen su frecuencia de aparición.

Capítulo 3

ELEMENTOS PARA EL DIAGNÓSTICO

En el tercer capítulo de nuestro trabajo presentamos las líneas de análisis de errores, los instrumentos de la investigación y las respuestas esperadas para cada uno de ellos.

3.1. Las líneas de análisis de errores y la función de diagnóstico

Como se indicó en los apartados anteriores, existen investigaciones acerca de errores que los estudiantes universitarios (o de nivel secundario) cometen en el proceso de aprendizaje de la matemática. En ese sentido, sería pertinente preguntarnos si es posible caracterizar errores de profesores en dicho ámbito. Rico (2008) cree que sí pues, sostiene, refiriéndose a los profesores en formación, que siempre hay situaciones en las que ellos cometen errores, por lo que es importante mostrárselos para la corrección pertinente. Nosotros sostenemos que, así como para el futuro maestro en formación es muy importante tal apoyo, para el maestro en ejercicio lo es mucho más: a diferencia del primero, quien todavía no tiene la suficiente práctica que enriquezca su teoría, el segundo tiene la obligación de ejercer su condición de intelectual en contacto con la realidad. De hecho, consideramos vigente la hipótesis sostenida por Eisenberg & McGinty (1974) que indicamos en páginas anteriores. Es por ello que, en la investigación de errores, valoramos las siguientes líneas de análisis (Mulhern, 1989, citado en Rico, 2008):

- 1) Contar simplemente el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas [...]
- 2) Análisis de tipos de errores cometidos. Esta técnica implica usualmente clasificar diferentes tipos de error, examinar cómo se desvían de la solución correcta y hacer inferencias sobre qué factores pueden haber conducido al error.
- 3) Análisis de patrones de error [...]
- 4) Construir problemas de tal modo que puedan provocar errores en los individuos [...] (pp. 99 – 100).

Nuestro estudio posee elementos de las cuatro líneas de análisis. De esta forma, nuestro trabajo no solamente identifica los errores cometidos por los maestros, sino que busca analizar las respuestas vinculadas con aquellos mediante la adaptación de problemas elaborados por destacados investigadores sobre el tema. Así pues, nuestra investigación, posee finalidad diagnóstica.

La función de diagnóstico es propuesta por Alvarez de Zayas & Sierra (2001) como un componente general del proceso de investigación científica. Nosotros, sin dejar de concordar con lo afirmado, creemos que existen estudios que, al enfatizar dicho

componente, asignan a lo diagnóstico un carácter esencial en su curso. Por ello, al adaptar la definición brindada por Álvarez de Zayas & Sierra (2001), sostenemos que el diagnóstico en una investigación (como la nuestra) se caracteriza por determinar la situación (o el estado) que manifiesta el objeto de investigación al momento en que esta se realiza. Para ello, empleamos métodos empíricos de diagnosis. Estos son, de acuerdo con Álvarez de Zayas & Sierra (2001), aquellos que “[...] implican toda una serie de procedimientos prácticos con el objeto y los medios de investigación que permiten revelar las características fundamentales y relaciones esenciales del objeto que son accesibles a la contemplación sensorial” (p. 53). Tales procedimientos prácticos – agregamos – se operacionalizan mediante los instrumentos de investigación y fueron referidos, en forma general, cuando tratamos acerca de la metodología del presente estudio.

De acuerdo con lo afirmado por Álvarez de Zayas & Sierra (2001) y con Mulhern (1989, citado en Rico, 2008) en la cuarta línea de análisis de errores, concebimos al instrumento de investigación “problema” (o tarea) como aquel recurso diseñado por el investigador (o adaptado de trabajos de otros investigadores) para que el participante manifieste su grado de saber o poder sobre los elementos constitutivos de dicho instrumento. Mientras tanto, los criterios de clasificación de errores constituyen las categorías que nos permitirán analizar las respuestas de los participantes. Con ese objetivo, en nuestro trabajo, emplearemos la clasificación de errores propuesta por Movshovitz – Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987).

Dado que los problemas son organizados mediante cuestionarios con preguntas cerradas y abiertas, muchas de las cuales exigen justificación, se espera que las respuestas a las cuestiones del último tipo muestren los errores en forma “no pura” (Echeverry *et al.*, 2012). Ello significa incidir en el análisis de las respuestas brindadas por los participantes para determinar otros posibles errores que aparezcan, así como, por ejemplo, identificar los rasgos característicos de las respuestas correctas e incorrectas. De esta forma, la justificación realizada constituye buena fuente para la identificación de los factores más profundos que generan los errores (Laudien, 1999).

Nuestros instrumentos de investigación comprenden cuatro problemas. La cantidad y el tipo de cada uno de ellos no son casuales pues, en cierto modo, han seguido la tipología de la implicación presente en los problemas planteados por Rogalski & Rogalski (2004) en su investigación:

Les implications “calculables”, (...) (et donc à contenu mathématique) (...)

Les implications “*arbitraires*”, correspondant à la définition d’une “règle” (en général non mathématique) (...)

Les implications de “*contrat social*” (...)

Les implications “*factuelles*”, *non calculables*, où les assertions P et Q (hypothèse et conclusion) sont des données immédiatement saisissables par le sujet, pratiquement sensibles (...) (p. 179)

[Las implicaciones “*calculables*”, (...) (y, por tanto, con contenido matemático) (...)]

Las implicaciones “*arbitrarias*”, correspondientes a la definición de una regla (en general no matemática) (...)

Las implicaciones de “*contrato social*” (...)

Las implicaciones “*factuales*”, no calculables, donde las proposiciones P y Q (hipótesis y conclusión) son datos inmediatamente perceptibles por el sujeto, prácticamente sensibles (...) **(traducción nuestra)**

En el siguiente esquema se muestra la visión general de los instrumentos propuestos para el empleo y su relación con los objetivos de nuestro trabajo (Figura 12):

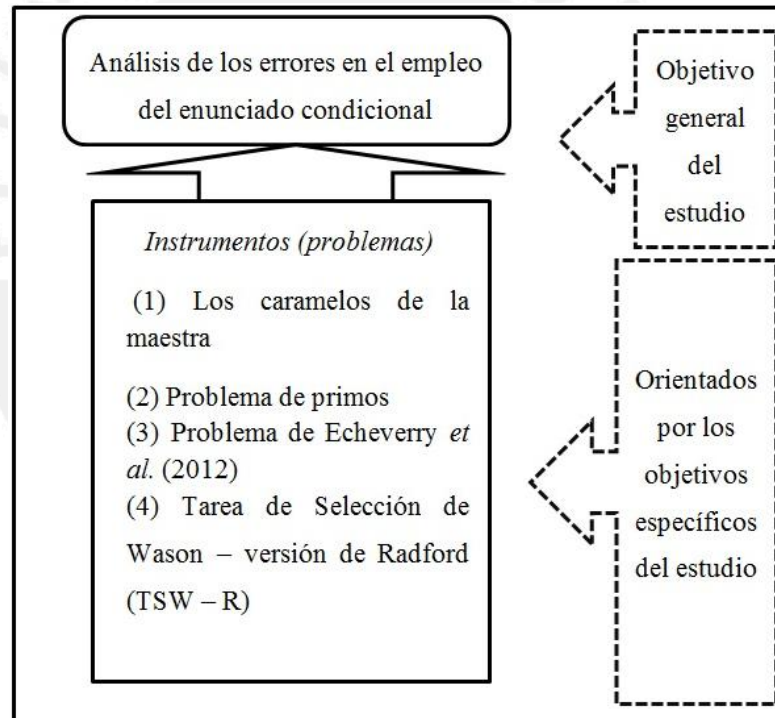


Figura 12. Relación entre instrumentos propuestos y objetivos de nuestro estudio

Para describir la Figura 12, es necesario indicar que, según la clasificación de Rogalski & Rogalski (2004), el primer problema corresponde a la implicación “de contrato social”; el segundo, bien podría encontrarse en el dominio de los problemas con implicación “calculable” (con contenido matemático), el tercero, podría ser considerado dentro de aquellos problemas que muestran el empleo de la implicación “factual” y el cuarto, está relacionado con la definición de una regla. El gráfico muestra, así mismo, la relación entre los problemas planteados y el objetivo general de nuestro estudio. En este, al que se orienta el análisis de las respuestas brindadas en los problemas, se considera la clasificación de errores propuesta por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar (1987).

3.2. Descripción de problemas y respuestas esperadas

3.2.1. Problema 1. Los caramelos de la maestra

Así como TSW – R, Rogalski & Rogalski (2004) presentan otros problemas, destinados a identificar en los estudiantes que participaron de su investigación, aquellos “(...) kinds of organisation in the use of logic in theirs evaluating the truth value of implications” (p. 175) [“(...) tipos de organización en el uso de la lógica, durante la evaluación del valor de verdad de las implicaciones”] (**traducción nuestra**). Con ese objetivo presentan el siguiente problema, fundamentado en una idea de “contrato social”.

Dans une école primaire, la maitresse donne un jour un problème aux élèves, et leur dit: "cherchez ce problème chez vous; demain, si quelqu'un a su le résoudre, je vous donnerai des bonbons".

Le lendemain, aucun élève n'a su faire le problème. La maitresse sort un paquet de bonbons et les distribue aux enfants. Ceux-ci protestent: "Ce n'est pas juste, on n'a pas su faire le problème, on n'a pas droit aux bonbons!". Goguenarde, la maitresse leur répond qu'elle a parfaitement respecté le contrat?

Quels commentaires vous inspire ce récit? (p. 202)

[En una escuela primaria, la maestra da a sus alumnos un problema y les hace una promesa: “resuelvan el problema en casa; mañana, si muestran cómo se ha resuelto, les daré caramelos”.

Al día siguiente, ningún alumno sabía cómo resolver el problema. La maestra sacó un paquete de caramelos y se los dio a los niños. Ellos protestaron: “¡Esto no es justo, nadie ha resuelto el problema, nadie tiene derecho a los caramelos!” Bromeando, la maestra les responde que ella ha respetado fielmente su promesa.

¿Qué comentarios le inspira este relato?] (**traducción nuestra**).

La versión modificada de este problema, se puede apreciar a continuación en la Figura 13 y, más adelante, en el anexo 3A.

Anexo N° 1. Problema 1¹

Apellidos y nombres: _____

Lea el siguiente problema con atención. Luego, responda la pregunta planteada:

En una escuela primaria, la maestra da a sus alumnos un problema (que tenía solución) y les hace una promesa: “resuelvan el problema en casa; mañana, si alguno consigue resolverlo entonces les daré caramelos”.

Al día siguiente, ningún alumno había conseguido resolver el problema. La maestra sacó un paquete de caramelos y se los dio a los niños. Ellos protestaron: “¡Esto no es justo, nadie ha resuelto el problema, por lo tanto nadie tiene derecho a los caramelos!” Sonriendo, la maestra les responde que ella ha respetado fielmente su promesa.

¿La maestra mantuvo realmente su promesa? Justifique su respuesta.**Figura 13.** Problema 1, los caramelos de la maestra**Fuente:** Adaptado de Rogalski & Rogalski (2014)

Como se puede observar en la Figura 13, se han realizado algunos cambios en la redacción y en las condiciones de la tarea, los mismos que fueron originados a partir de una experiencia piloto. Por ejemplo, se ha agregado al texto que el problema planteado por la maestra a sus alumnos tenía solución, para evitar posibles respuestas fuera de contexto por parte de los participantes. Así mismo, para precisar la exigencia a estos, la hemos reescrito de la siguiente forma: “¿La maestra mantuvo realmente su promesa? Justifique su respuesta.”

La respuesta correcta esperada consiste en identificar que la maestra cumplió su promesa, pues ella no indicó cuál iba a ser su acción si es que los niños no resolvían el problema (a diferencia de lo que ellos habían comprendido: *si no hay problema resuelto, entonces no hay caramelos*).

Se obtendrá mayor información acerca de los errores cometidos por los participantes al analizar las justificaciones producidas por ellos.

3.2.2. Problema 2. Números primos

Vallejo (2014) propone el problema sobre divisibilidad, cuyos ítems a, b y c se muestran en la Figura 14, así como en el anexo 3B.

Apellidos y nombres: _____

Para desarrollar el siguiente problema usted debe recordar que un *número primo* es aquel número que únicamente tiene dos divisores diferentes (mayores que cero). Ejemplos de números primos: 2, 3, 5, 7, 11, etc.

Ahora, usted debe confiar en que la siguiente proposición es verdadera:

“Si x es un elemento del conjunto T entonces x es un número primo.”

A partir de esta información, responda cada una de las interrogantes:

a) Sabemos que 3 es un número primo, entonces ¿puede usted asegurar que 3 es un elemento del conjunto T ? ¿Por qué?

b) Si el número $\overline{c1b\bar{a}}$ es un elemento del conjunto T , ¿puede usted asegurar que $\overline{c1b\bar{a}}$ es un número primo? ¿Por qué?

c) ¿Es verdad que 6 no pertenecerá al conjunto T ? ¿Por qué?
(Nota: Observe que 6 no es un número primo)

Figura 14. Problema 2, números primos – ítems a, b y c.

Fuente: Vallejo (2014)

Se puede advertir en la Figura 14 que, para evitar confusiones relacionadas al concepto de número primo, se ha colocado su definición. Así mismo, podemos observar con claridad el marco conjuntista en el que el problema ha sido redactado y en el que se exige las respuestas.

El enunciado condicional verdadero, planteado al inicio del problema juega el rol de una premisa. Dicha proposición puede ser representada de la siguiente forma (Figura 15), donde P denota al conjunto de los números primos.

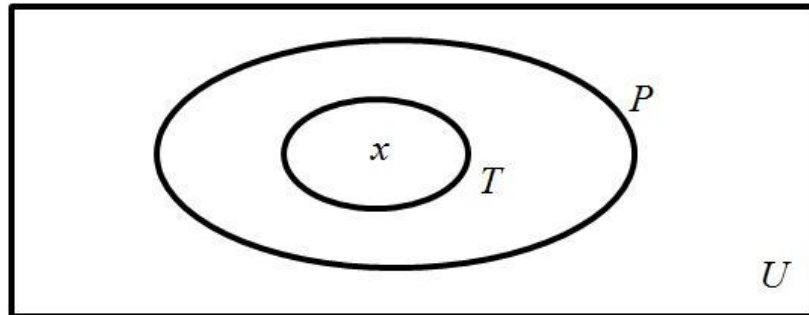


Figura 15. Diagrama de Venn para el enunciado condicional verdadero, problema 4

El dato que se brinda en cada ítem constituye la segunda premisa y la pregunta formulada se refiere a la conclusión del razonamiento. Establecidas dichas condiciones, las respuestas esperadas para cada uno de los ítems presentados en la Figura 14 son las siguientes:

a) No se puede asegurar que 3 es un elemento del conjunto T . Al ser 3 un número primo, puede pertenecer o no a T . Ello puede apreciarse en el siguiente gráfico (Figura 16):

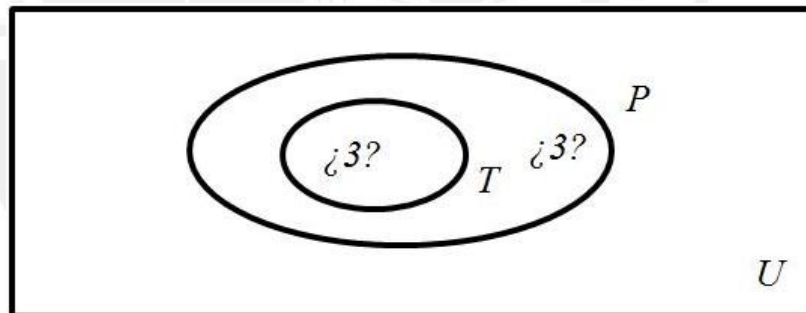


Figura 16. Diagrama de Venn para ítem a, problema 4

b) Sí podemos asegurar que $\overline{c1ba}$ es número primo, pues es elemento de T . La razón fundamental se encuentra en que cumple con lo indicado con la primera premisa. Su ubicación en el diagrama de Venn no es problemática, tal como puede apreciarse en el siguiente gráfico (Figura 17):

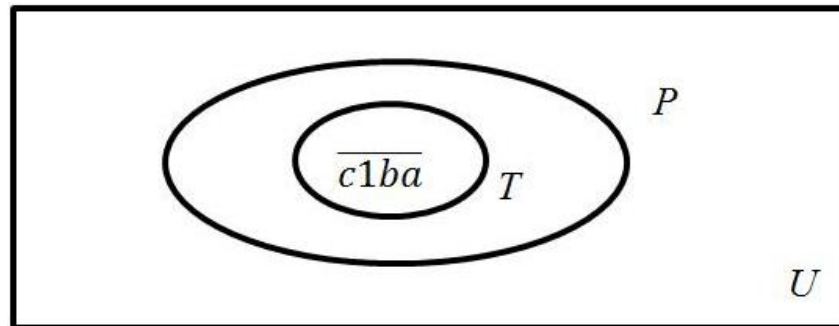


Figura 17. Diagrama de Venn para ítem b, problema 4

c) Es verdad que 6 no pertenece al conjunto T , dado que ni siquiera pertenece al conjunto P que incluye a aquel. Su ubicación en la región correspondiente a P^c así lo muestra (Figura 18):

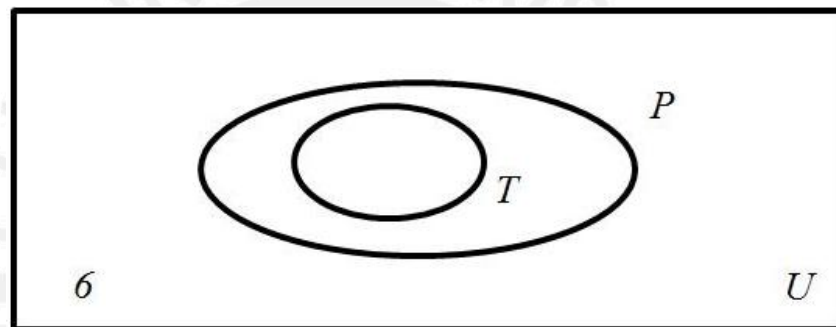


Figura 18. Diagrama de Venn para ítem c, problema 4

A continuación, mostramos en la siguiente página a la Figura 19 (y también en el anexo 3B), los ítems d, e y f del problema 2.

Apellidos y nombres: _____

- d) Si m no es un elemento del conjunto T , ¿usted puede asegurar entonces que m no es un número primo? ¿Por qué?

- e) En base a la proposición dada, ¿es verdad que se puede concluir que el conjunto T está formado por todos los números primos? ¿Por qué?

- f) ¿Es verdad que el conjunto T podría tener también elementos que no son números primos? ¿Por qué?

Figura 19. Problema 2, números primos, ítems d, e y f

Fuente: Vallejo (2014)

Con referencia a los ítems d, e y f, mostrados en la Figura 19, presentamos las respuestas esperadas frente a ellos.

- d) No se puede asegurar que m no sea primo, dado que no pertenece a T . La definición del conjunto al que pertenece dicho elemento es problemática: m podría pertenecer a P (si m pertenece a $P - T$) o puede no pertenecer a P (si m pertenece a P^C), tal como se aprecia en la siguiente figura (Figura 20):

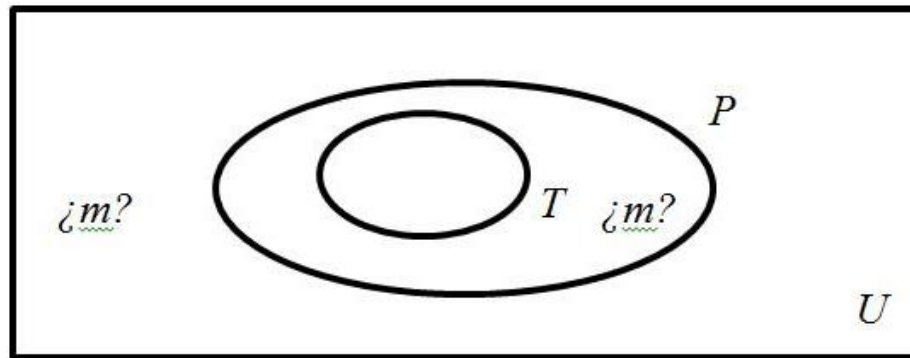


Figura 20. Diagrama de Venn para ítem d, problema 4

e) No se puede concluir que el conjunto T está necesariamente formado por todos los números primos. De hecho, lo que afirma la primera premisa es que todo elemento de T es número primo (elemento de P). El enunciado recíproco (“todo número primo es elemento de T ”) no es necesariamente verdadero.

Si la premisa y el enunciado recíproco fuesen verdaderos, podríamos asegurar que $P = T$. Ello solo ocurriría si tuviésemos la seguridad que no existen elementos en la región correspondiente a $P - T$.

f) El cuantificador universal implícito en la primera premisa (“todo elemento de T es elemento de P ”) excluye la presencia en T de elementos que no son primos.

La inclusión de T en P indica que la diferencia $T - P$ es vacía. Solo en caso de no serlo podríamos indicar la existencia de elementos no primos en T .

3.2.3. Problema 3. Fichas

Echeverry *et al.* (2012) presentan dos cuestionarios desarrollados en el marco de una investigación realizada con estudiantes del curso de Geometría Plana de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, durante el segundo semestre de 2006. Dicha investigación tenía el objetivo de determinar la interpretación del condicional por parte de los estudiantes. Para clasificar la información contenida en cada ítem, los investigadores adaptaron las categorías brindadas por Laudien (1999) en la caracterización de errores obtenidos a partir de una inferencia. Aquellas fueron las siguientes:

Específicamente, llamamos *formato afirmación del consecuente* al conjunto de proposiciones que conforman la información dada en el problema si éstas son una condicional ($p \rightarrow q$) y la proposición q ; *formato negación del antecedente* cuando la información proporcionada consiste en una condicional ($p \rightarrow q$) y una proposición particular que es negación implícita o explícita del antecedente de la premisa general dada, a la que notamos ($\neg p$); el *formato afirmación del antecedente* se refiere al caso

cuando se provee una condicional ($p \rightarrow q$) y la proposición simple es el antecedente p , y el *formato negación del consecuente* se usa para dar cuenta del caso en que la información consiste en una condicional ($p \rightarrow q$) y la negación del consecuente de la premisa general, sea explícita o implícita, representada por ($\neg q$) (Echeverry *et al.*, 2009, p. 78).

De acuerdo con los autores, el análisis de las respuestas ha enfatizado el marco conjuntista, aunque no descuidan los marcos lógico formal y deductivo (en línea con Deloustal-Jorrand, 2004). Los investigadores diseñaron dos cuestionarios. El primer cuestionario fue aplicado antes de la implementación de estrategias didácticas destinadas a superar la problemática detectada con relación al enunciado condicional en un grupo de profesores de Matemática en formación. Precisamente fue el primer cuestionario el seleccionado y adaptado para nuestro estudio. La parte (a) de dicho cuestionario se presenta a continuación en la Figura 21, así como en el anexo 3C.

Apellidos y nombres: _____

Hay dos bolsas diferentes con fichas en las que es posible reconocer tres atributos: color (verde, azul, rojo), forma (redonda, rectangular, triangular) y material con el que está hecha (cartón, plástico). Además, cada ficha de cada bolsa tiene una etiqueta que la identifica (F1, F2, F3, etc.).

A continuación se establecen unas afirmaciones verdaderas respecto a los atributos de las fichas; a partir de ellas, responda las preguntas, anotando también una explicación para su respuesta. Cada situación se refiere a las fichas de una de las bolsas. Las situaciones (a) y (b) son independientes.

a) Las fichas verdes son triangulares.

Todas las fichas triangulares son del mismo material

INFORMACIÓN SOBRE FICHAS PARTICULARES		PREGUNTA	SI	NO	NO SE SABE	EXPLICACIÓN
i)	F1 es una ficha azul	¿Es F1 triangular?				
ii)	F3 y F4 son del mismo material	¿Son F3 y F4 triangulares?				
iii)	F5 es redonda	¿Es F5 verde?				
iv)	F7 y F8 son fichas verdes	¿Son F7 y F8 del mismo material?				

Figura 21. Problema 3, fichas, parte (a)

Fuente: Adaptado de Echeverry, Molina, Samper, Perry & Camargo (2012)

Para determinar las respuestas esperadas sobre este instrumento, sostenemos que, en la tabla, la información sobre las fichas particulares es a la pregunta planteada como el antecedente del enunciado condicional es al consecuente. El texto de la pregunta cumple el rol de conclusión del razonamiento realizado en base a las dos premisas planteadas en las situaciones a) y b), respectivamente. Es necesario indicar, además, que las partes (a) y (b) son independientes en el primer cuestionario, condición que se ha agregado al texto de este debido a que, en las aplicaciones piloto, algunos participantes creyeron que una de las situaciones planteadas tenía relación con la otra. Presentamos, en la Figura 2 (y también en el anexo 3C), la parte (b) del problema 2.

Apellidos y nombres: _____

b) Si una ficha es de cartón entonces es rectangular.

Si una ficha es de cartón entonces es verde.

INFORMACIÓN SOBRE FICHAS PARTICULARES		PREGUNTA	SI	NO	NO SE SABE	EXPLICACIÓN
i)	F1 es azul	¿Es F1 de plástico?				
ii)	F2 es una ficha de plástico	¿Es F2 rectangular?				
iii)	F3 es rectangular	¿Es F3 una ficha de cartón?				
iv)	F5 es de cartón	¿Es F5 triangular?				

Figura 22. Problema 2, fichas, parte (b)

Fuente: Adaptado de Echeverry, Molina, Samper, Perry & Camargo (2012)

Al indicar las respuestas esperadas para cada ítem (que incluyen marcado y explicación) podemos emplear la representación mediante conjuntos, tal como a continuación se detalla.

Para la situación (a):

El diagrama correspondiente a las premisas de (a) es el indicado en la Figura 23:

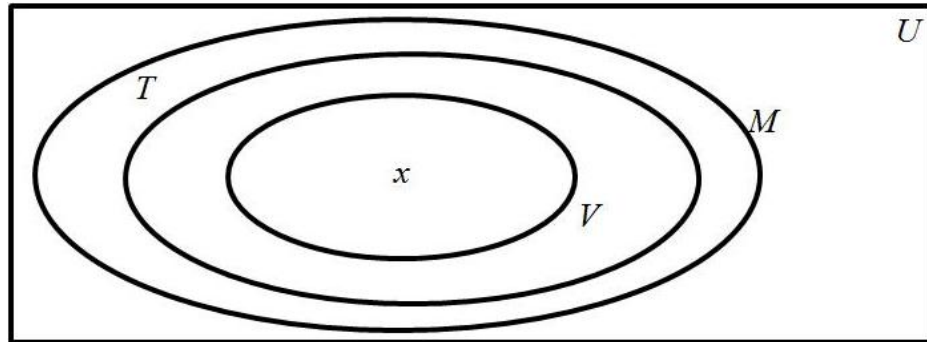


Figura 23. Diagrama de Venn para representar la relación entre las premisas de (a) – Problema 3

En la Figura 23, V denota el conjunto de las fichas verdes; T , el de las fichas triangulares y M , el de las fichas del mismo material. Así mismo, observamos que, si x es un elemento del conjunto V (es decir, si x es una ficha verde) también es elemento del conjunto M (es decir, x tiene el mismo material que todas las otras fichas pertenecientes a M). Con la información de las premisas, expresada en el marco conjuntista, podemos esperar las siguientes respuestas para cada una de las informaciones particulares planteadas en el instrumento:

Para (i) la respuesta esperada es “NO SE SABE”, pues las premisas no mencionan información acerca de las fichas azules. En efecto, si las fichas no son verdes, ¿son triangulares?, ¿qué son en realidad?, pues podrían ubicarse en diferentes regiones fuera de V , denotadas mediante la diferencia de conjuntos: $T - V$, $M - T$, M^C . En ese sentido $F1$ podría ser triangular, rectangular o redonda. La indeterminación del lugar que ocupa $F1$, de la que se sabe que no es verde, podemos representarla de la siguiente forma (Figura 24):

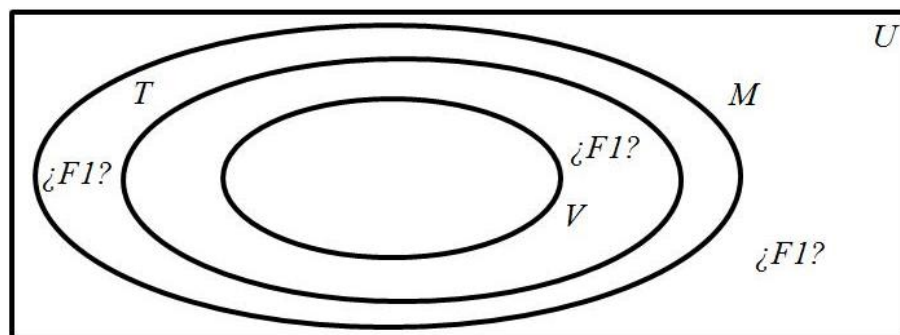


Figura 24. Diagrama de Venn para la información particular (i), ítem (a), problema 3

Para (ii) la respuesta esperada es “NO SE SABE”, pues aunque las fichas sean del mismo material, no podemos saber si son triangulares. La indeterminación del lugar que ocupan

$F3$ y $F4$, de las que se sabe que son del mismo material, podemos representarla de la siguiente forma (Figura 25):

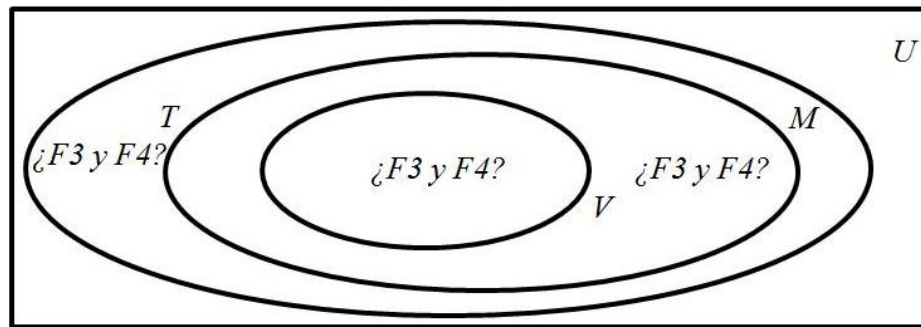


Figura 25. Diagrama de Venn para la información particular (ii), ítem (a), problema 3
Como podemos apreciar en la Figura 25, no sabemos si $F3$ y $F4$ pertenecen a T o a $M - T$. Es decir, $F3$ y $F4$ pueden ser triangulares o no.

Para (iii) la respuesta esperada es “NO”, pues si eso fuera cierto tendríamos una ficha verde redonda, precisamente lo contrario a lo que sostiene una de las premisas. En el siguiente diagrama (Figura 26) se puede observar que la ficha redonda (no triangular) $F5$, no pertenece al conjunto T . Lo único que se puede garantizar es que $F5$ no es verde.

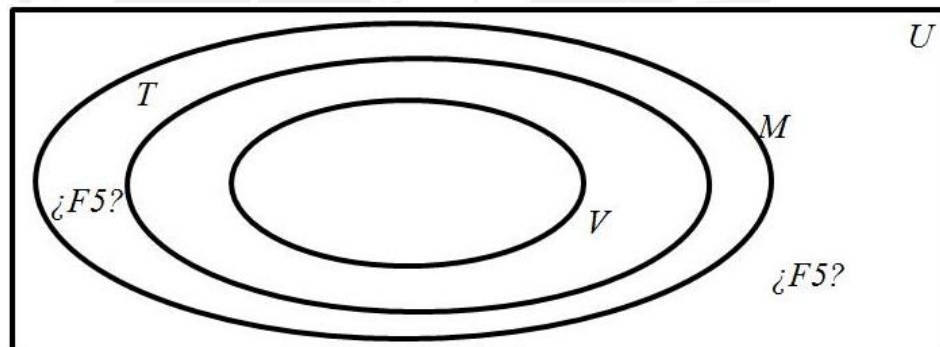


Figura 26. Diagrama de Venn para la información particular (iii), ítem (a), problema 3
Para (iv) la respuesta esperada es “SÍ”, porque de las premisas se concluye que las fichas verdes (elementos de V) son del mismo material (elementos de M). Ello se ilustra en la Figura 27.

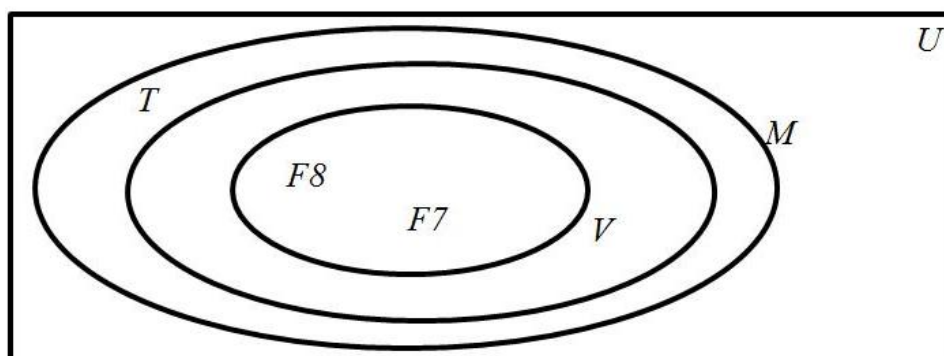


Figura 27. Diagrama de Venn para la información particular (iv) ítem (a), problema 3

Para la situación (b)

El diagrama correspondiente a las premisas de la situación (b) es el indicado en la Figura 28:

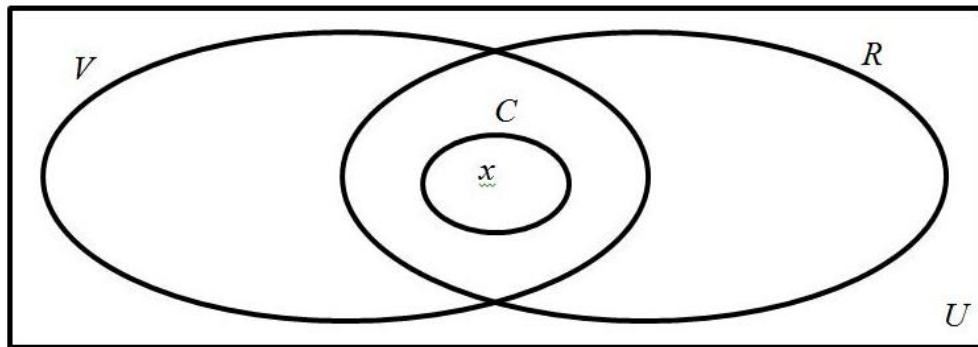


Figura 28. Diagrama de Venn para representar la relación entre las premisas de (b) – Problema 3

En la Figura 28 el conjunto V denota al conjunto de las fichas verdes; R , al de las fichas rectangulares y C , al de las fichas de cartón. De acuerdo con las premisas de la situación (b), si x es un elemento del conjunto C (es decir, si x es una ficha de cartón) también es elemento del conjunto R (es decir, x es también una ficha rectangular). Así mismo, si x es un elemento del conjunto C (es decir, si x es una ficha de cartón) también es elemento del conjunto V (es decir, x es una ficha de color verde). No puedo afirmar que existan fichas rectangulares de color verde que no sean de cartón, por lo que la región correspondiente a $(V \cap R) - C$ es de indeterminación.

Con la información de las premisas, expresada en el marco conjuntista, podemos esperar las siguientes respuestas para cada una de las informaciones particulares planteadas en la situación (b) del instrumento:

Para (i) la respuesta esperada es SÍ, pues si la ficha $F1$ es azul, no es verde y si no es una ficha verde, no puede ser de cartón. Si $F1$ no es de cartón, entonces es de plástico, ya que solo hay fichas de dos materiales (de cartón o de plástico). La ubicación de $F1$ la representamos en el siguiente diagrama de Venn (Figura 29):

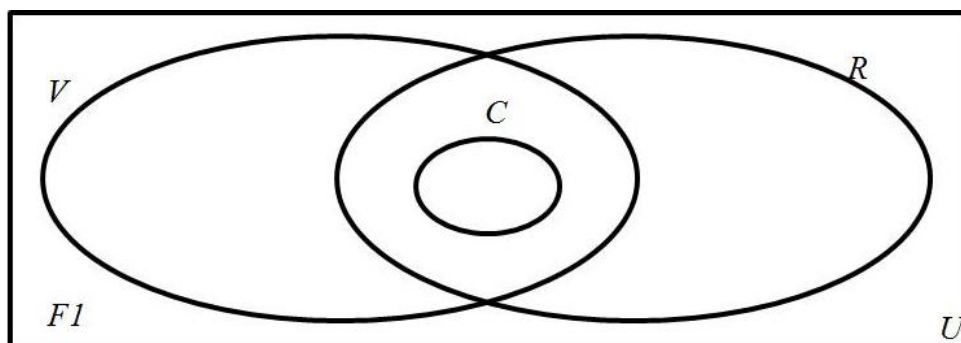


Figura 29. Diagrama de Venn para la información particular (i), ítem (b), problema 3

Para (ii) la respuesta esperada es NO SE SABE, pues no se brinda información acerca de las fichas de plástico. Ello se puede representar mediante el siguiente diagrama de Venn (Figura 30):

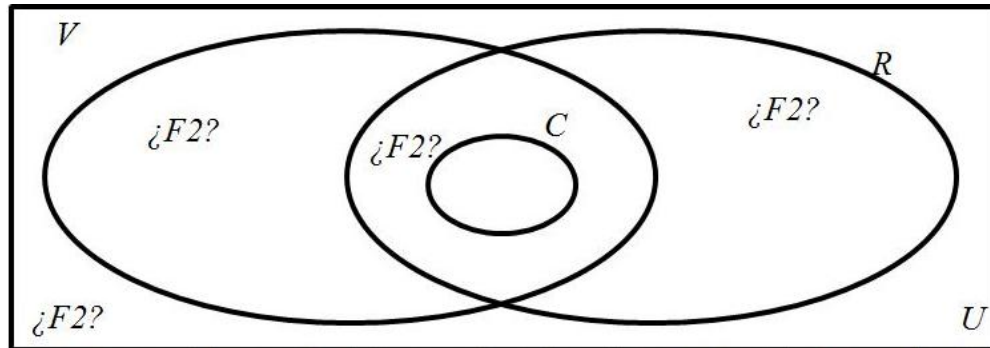


Figura 30. Diagrama de Venn para la información particular (ii), ítem (b), problema 3
 Como se puede apreciar en el diagrama, la ubicación de $F2$ es indeterminada: podría ser rectangular o no. Esto significa que podría pertenecer a $R - V$, a $(R \cap V) - C$, a $V - R$ o a $(R \cup V)^c$.

Para (iii) la respuesta esperada es NO SE SABE, pues no conocemos si todas las fichas rectangulares son de cartón. Esto se explicará mediante el siguiente diagrama de Venn (Figura 31):

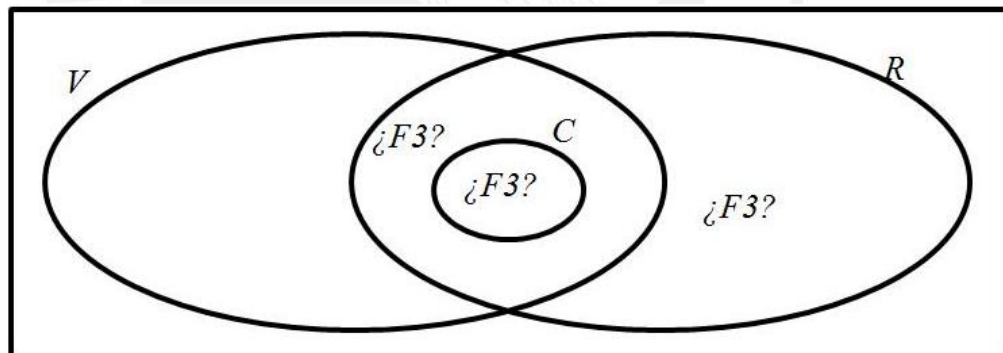


Figura 31. Diagrama de Venn para la información particular (iii), ítem (b), problema 3
 No podemos determinar la región donde se ubica $F3$ pues, si es rectangular, ella puede ser de cartón como no serlo. Esto significa que $F3$ podría pertenecer a C , a $(R \cap V) - C$ o a $R - V$; es decir, $F3$ podría ser rectangular (no verde) y no de cartón, o puede ser rectangular y verde pero no de cartón, así como también podría estar hecha de cartón.

Para (iv) la respuesta esperada es NO, porque se indica que las fichas de cartón son rectangulares. Lo afirmado se puede representar mediante el siguiente diagrama de Venn (Figura 32):

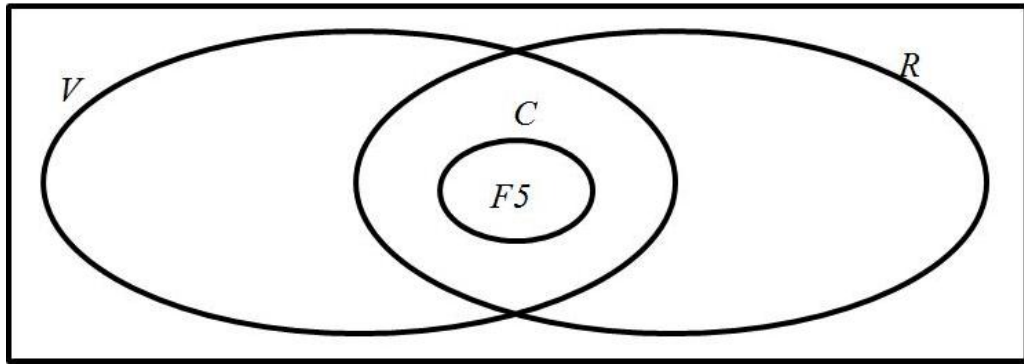


Figura 32. Diagrama de Venn para la información particular (iv) – b, problema 3

Como se puede apreciar, *F5* tiene una ubicación determinada: pertenece al conjunto *C*, es decir, se trata de una ficha confeccionada de cartón y es rectangular. Por lo tanto, no puede ser triangular.

Aunque Echeverry et al. (2012) desarrollaron un sistema de categorías apropiado para los fines de su estudio, nosotros solo analizaremos las respuestas brindadas frente al cuestionario mediante la clasificación de errores brindada por Movshovitz, Zaslavsky & Inbar (1987).

3.2.4. Problema 4. Tarea modificada de Wason

Esta tarea posee gran importancia en la historia de la ciencia. Inglis (en Inglis & Reid, 2005) indica que, no obstante los significativos trabajos de Boole (acerca de “las leyes del pensamiento”) y de Piaget (acerca del estadio de las operaciones formales)

Since the sixties, however, psychologists led by Wason have fairly conclusively demonstrated that Boole’s and Piaget’s beliefs are wrong. The so – called deduction paradigm has used a bewildering array of ingenious logical tasks that have demonstrated that people make many logical errors on such problems, and that they are significantly influenced by apparently irrelevant content and context (p. 24).

[Desde la década de los años sesenta, sin embargo, los psicólogos liderados por Wason han demostrado con justeza que las creencias de Boole y Piaget son equivocadas. El presunto paradigma deductivo ha usado una desconcertante selección de tareas lógicas ingeniosas que han probado que la gente comete muchos errores lógicos en ese tipo de problemas, y que ellos son significativamente influenciados por el contenido y el contexto, aparentemente irrelevantes] (**traducción nuestra**)

La tarea fue creada por P. Wason “para estudiar la manera cómo la gente evaluaba las hipótesis” (Garnham & Oakhill, 1994, p. 151). A lo que se agrega:

Wason estaba influido por la idea de Popper [...] de que las hipótesis deberían comprobarse mediante el método hipotético – deductivo, y por tanto la investigación sobre la comprobación de hipótesis [...] también concierne a cuestiones sobre el razonamiento deductivo (Garnham y Oakhill, 1994, p. 151).

Dada la importancia del problema, consideramos una variante suya en nuestro trabajo.

- Forma clásica (TSW – C)

Wason (1966, citado en Durand – Guerrier *et al.*, 2012) formula la tarea de la siguiente forma:

Subjects are shown a set of four cards placed on a table, each of which has a number on one side and a letter on the other. The visible faces of the cards show 4, 7, A and D. Subjects are asked to “decide which cards [you] would *need* to turn over in order to determine whether the experimenter was lying in the following statement: If a card has a vowel on one side, then it has an even number on the other side” (p. 370).

[A los sujetos se les muestra, sobre la mesa, un grupo de cuatro cartas, cada una de las cuales tiene, por un lado, un número, y por el otro, una letra. Las caras visibles de las cartas muestran 4, 7, A y D. A los sujetos se les pide lo siguiente: “decida cuáles son las cartas que Ud. *necesitaría* voltear para determinar si el experimentador mintió en el siguiente enunciado: si una carta tiene una vocal en un lado, entonces tiene un número par del otro lado”] (**traducción nuestra**).

Con relación a lo indicado en la cita, a continuación mostramos la disposición de las tarjetas que los participantes observarían (Figura 33):

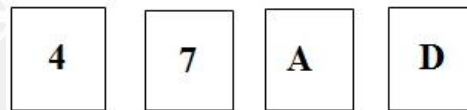


Figura 33. Aspecto de las tarjetas empleadas en la TSW

Es claro que la afirmación del experimentador constituye un enunciado condicional y la tarea consiste en determinar cuáles son las cartas que deben ser volteadas para concluir que lo propuesto por el investigador es falso. La mayoría de personas (estudiantes también, como se ha reseñado en este trabajo) que responde a esta tarea, según Garnham & Oakhill (1994), seleccionan solamente las tarjetas A, o A y 4. Unos pocos seleccionan la tarjeta 7, mientras que la respuesta correcta consiste en la elección de las tarjetas A y 7. El fundamento lógico de esta respuesta se encuentra relacionado con el análisis popperiano “de la confirmación de una hipótesis mediante ejemplos específicos que se adecuan a ella (lo que no es posible) y su falsación mediante ejemplos que no se adecuan (lo que es el caso)” (Garnham & Oakhill, 1994, p. 152).

- Adaptaciones

No obstante todo el potencial teórico que TSW – C contiene, Delval (1984) indica que numerosos investigadores coinciden en la gran dificultad que entraña. Creemos que, debido a esos motivos, Rogalski & Rogalski (2004) presentan la siguiente versión de la TSW, creada por Radford [TSW – R] y que fue administrada (entre otras pruebas) en un estudio donde participaron dos grupos de estudiantes de matemática en preparación para

el concurso de reclutamiento de profesores de matemática de educación secundaria (CAPES) en la Universidad de Lille (Francia), durante los años 1999 y 2001:

Dans une urne, on dispose d'un certain nombre de boules numérotées. Les boules sont soit blanches soit noires. On s'intéresse à la question suivante: "est-ce que, dans l'urne, toutes les boules blanches ont un numéro pair?"

On envisage 4 procédures pour répondre à la question:

procédure 1: on sort de l'urne les boules de numéro pair, puis on regarde leurs couleurs;

procédure 2: on sort de l'urne les boules de numéro impair, puis on regarde leurs couleurs;

procédure 3: on sort de l'urne les boules blanches, puis on regarde leurs numéros;

procédure 4: on sort de l'urne les boules noires, puis on regarde leurs numéros.

Pour chacune des 4 procédures, choisissez parmi les deux options:

- (a) la procédure me permettra sûrement de répondre à la question;
- (b) la procédure risque de ne pas me permettre de conclure (pp. 200 – 201).

[En una urna, se tiene un cierto número de bolas numeradas, de color blanco o negro. Nos interesa la siguiente cuestión: "¿es verdad que, en la urna, todas las bolas blancas tienen número par?".

Se prevén cuatro procedimientos para responder a la pregunta:

Procedimiento 1: se sacan de la urna las bolas con número par, luego se mira su color;

Procedimiento 2: se sacan de la urna las bolas con número impar, luego se mira su color;

Procedimiento 3: se sacan de la urna las bolas blancas, luego se mira los números;

Procedimiento 4: se sacan de la urna las bolas negras, luego se mira los números.

Para cada una de los 4 procedimientos, elija entre las dos opciones:

- (a) el procedimiento me permite responder con seguridad a la pregunta;
- (b) el procedimiento no me permite concluir algo] (**traducción nuestra**).

La versión adaptada para el presente trabajo se puede apreciar en la siguiente página, en la Figura 34, así como en el anexo 3D.

Apellidos y nombres: _____

En una urna, se tiene un cierto número de bolas numeradas, de color blanco o negro. Nos interesa la siguiente cuestión:

¿Será cierto que todas las bolas blancas de la urna tienen un número par?

Se prevén cuatro procedimientos para responder a la pregunta anterior:

Procedimiento 1: se sacan de la urna las bolas con número par, luego se mira su color.

Procedimiento 2: se sacan de la urna las bolas con número impar, luego se mira su color.

Procedimiento 3: se sacan de la urna las bolas blancas, luego se mira los números.

Procedimiento 4: se sacan de la urna las bolas negras, luego se mira los números.

Para cada uno de los 4 procedimientos dados previamente, elija entre las dos opciones siguientes:

(a) El procedimiento me permite responder con seguridad a la pregunta;

(b) El procedimiento no me permite concluir algo.

No olvide justificar su respuesta.

Para el Procedimiento 1:	Para el Procedimiento 2:
Marque una de las siguientes opciones: (a) (b) Justificación:	Marque una de las siguientes opciones: (a) (b) Justificación:
Para el Procedimiento 3:	Para el Procedimiento 4:
Marque una de las siguientes opciones: (a) (b) Justificación:	Marque una de las siguientes opciones: (a) (b) Justificación:

Figura 34. Problema 4, tarea modificada de Wason.

Fuente: Adaptado de Rogalski & Rogalski (2004)

Como se puede apreciar en la Figura 34, además de redactar la exigencia de una forma más precisa que en el original (“para cada uno de los 4 procedimientos dados previamente, elija entre las dos opciones siguientes”), se precisa de una justificación para la selección de (a) o (b) (elemento que se introduce a continuación de cada procedimiento). Sostenemos que, al introducir esta exigencia adicional, conoceremos más acerca de la forma en que el participante emplea el enunciado condicional. Las adaptaciones realizadas provienen de experiencias piloto donde comprobamos la necesidad de su incorporación

Los investigadores no brindan detalles específicos acerca de la aplicación de este instrumento. Creemos que la cuestión central del problema debe ser entendida como “si sacamos una bola blanca, ¿esta tiene un número par?”. Así mismo, para brindar un ejemplo, el planteo del procedimiento N° 1 bajo la expresión “si sacamos una bola con número par, ¿cuál es su color?”, permitirá elegir entre las opciones a) y b). La selección realizada permitirá responder a la cuestión central del problema, es decir, podremos afirmar con seguridad que aquella es cierta o no, o, tal vez, que no se puede afirmar con seguridad algo.

Entre los resultados esperados por nosotros para TSW- R, tenemos los siguientes:

- a) El procedimiento 1 no nos permite concluir algo específico (opción b). La elección de esta opción para el procedimiento indicado se fundamenta en el análisis de los siguientes casos:
 - i) *Todas las bolas extraídas son pares y todas son blancas.* Lo observado constituye un enunciado diferente al planteado en la cuestión central y no permite afirmar algo específico sobre esta.
 - ii) *Todas las bolas extraídas son pares y todas son negras.* Esta extracción tampoco permite afirmar algo específico sobre la cuestión central pues constituye un enunciado distinto a esta.
 - iii) *Todas las bolas extraídas son pares y, por lo menos, hay una blanca.* La extracción tampoco permite afirmar algo específico por razones similares a las brindadas para las anteriores extracciones.
 - iv) *Todas las bolas extraídas son pares y, por lo menos, hay una negra.* La extracción no permite afirmar algo específico por razones similares a las brindadas para las anteriores extraccionesElegir la opción (a) significa que la exigencia planteada es equivalente al procedimiento sugerido, lo que no es correcto.
- b) El procedimiento 2 permite concluir algo específico (opción a). La elección de esta opción para el procedimiento indicado se fundamenta en el análisis de los siguientes casos:
 - i) *Todas las bolas extraídas son impares y todas son blancas.* Lo observado permite afirmar que el resto de bolas (pares), son negras. Ante ello, la cuestión central del problema es respondida en forma negativa.
 - ii) *Todas las bolas extraídas son impares y, por lo menos, una es blanca.* Esta extracción, que deja en la urna a las bolas pares, permite responder en forma negativa a la cuestión central del problema.

Seleccionar la opción (b) constituye respuesta incorrecta, pues no considera adecuado el “procedimiento indirecto” descrito.

- c) El procedimiento 3 permite concluir algo específico (opción a), pues, luego de la extracción de las bolas blancas, se verifica el número que ellas tienen. La elección de dicha opción para el procedimiento indicado se fundamenta en el análisis de los siguientes casos:

i) *Todas las bolas extraídas son blancas y todas son pares.* Es evidente que, con esta extracción, se responde afirmativamente a la cuestión central del problema.

ii) *Todas las bolas extraídas son blancas y, por lo menos, una es par.* Con esta extracción se responde negativamente a la cuestión central planteada.

iii) *Todas las bolas extraídas son blancas y, por lo menos, una es impar.* La cuestión central es respondida en forma negativa.

iv) *Todas las bolas extraídas son blancas y todas son impares.* Esta extracción permite responder en forma negativa a la cuestión central del problema.

Elegir la opción (b) constituye respuesta incorrecta pues no se tiene en cuenta lo que la pregunta plantea.

- d) El procedimiento 4 no nos permite concluir algo específico (opción b) pues, aunque todas tengan número par o impar, no es sobre esto que el problema exige respuesta.

Seleccionar la opción (a) significa sustituir la cuestión planteada por otra diferente.

Se obtendrá mayor información acerca de los errores cometidos por los participantes al analizar las justificaciones producidas por ellos.

Capítulo 4

RECOLECCIÓN Y ORGANIZACIÓN DE DATOS

En el presente capítulo describimos a los participantes del estudio, el proceso de recolección de datos y sus circunstancias, así como la forma en que se codificaron las respuestas emitidas. Finalmente, mostramos breves cuadros estadísticos que nos permiten mejores apreciación y organización de los datos recogidos.

4.1. Descripción de los participantes del estudio

Recordemos que, tras la precisión de nuestro objeto y objetivos de investigación, así como de los elementos teóricos que iban a fundamentarla (aspectos 2.3.1. y 2.3.2., abordados en los tres primeros capítulos de nuestra investigación), se planteó la recolección de los datos (apartado 2.3.3. – a, p. 67) como etapa inicial de la diagnosis del objeto de estudio.

Para concretizar la etapa mencionada, contamos con 12 participantes, quienes eran profesores de Matemática en instituciones educativas de nivel secundario de la ciudad de Lima. Su participación se produjo en atención a la convocatoria de un taller sobre lógica para profesores del nivel indicado, dirigido por el investigador y organizado por una universidad particular de Lima. Con el fin de salvaguardar la identidad de los profesores participantes, empleamos un número (ID) distinto para cada uno de ellos. La información fue recogida mediante una ficha que se muestra en el anexo 4A. Así mismo, un cuadro resumen de aquella puede apreciarse en el anexo 4B.

4.2. Condiciones de recolección de los datos

Las condiciones en que se desarrolló la recolección de los datos, como ya se indicó, fueron propias de un taller dirigido a profesores de Matemática del nivel secundario. Dicho taller fue organizado por una universidad particular limeña, la misma que divulgó ampliamente la convocatoria. Durante esta, así como durante las sesiones del taller, los participantes fueron debidamente informados de los propósitos de la actividad (vinculados a nuestra investigación), así como sobre la confidencialidad en el manejo de sus respuestas. Cabe indicar, así mismo, que en las tres sesiones del taller, el investigador no solo recogió la información necesaria para el presente estudio, sino que, además, brindó a los participantes los conocimientos teóricos en los que se fundamentaban los

problemas planteados, así como la retroalimentación correspondiente sobre sus soluciones.

Como ya se mencionó, el taller fue organizado en tres sesiones, con tres horas de duración cada una. La información fue recolectada durante las dos primeras horas de la sesión N° 1. Para ello, los participantes se ubicaron en carpetas, dentro de un aula, en forma tal que el trabajo individual y silencioso con los cuatro problemas se encontraba asegurado. El investigador alcanzaba a cada profesor un problema y solo cuando este indicaba que había culminado con su resolución, aquel le alcanzaba el siguiente. Ocasionalmente surgieron algunas preguntas de los participantes que fueron absueltas por el dirigente del taller con apego a las instrucciones brindadas en el planteamiento del problema. La claridad en las respuestas brindadas era un factor de cuidado, pues ellas constituían la materia prima de nuestros análisis.

4.3. Tratamiento de las respuestas de los participantes

De acuerdo con el apartado 2.3.3. – b (p. 68), la siguiente fase de la diagnosis del objeto de estudio consiste en el análisis de los datos recogidos en la etapa anterior. Para ello, tras registrar la corrección o incorrección de las respuestas brindadas (primer nivel de análisis), nos concentramos en las justificaciones escritas por cada uno de los participantes en cada una de aquellas (segundo nivel de análisis), pues aquí es donde se observó con mayor claridad el empleo, erróneo o no, del enunciado condicional, en línea con lo sugerido por investigaciones antecedentes como, por ejemplo, la de Echeverry, Molina, Samper, Perry & Camargo (2012). Cabe señalar que, sin distinguir con certeza cuáles de las respuestas de los participantes eran incorrectas, no podríamos haber arribado al análisis de las justificaciones y, por ende, al cumplimiento de los objetivos de nuestro estudio.

Para llevar a cabo el primer nivel de análisis se procedió a *construir el marco de codificación* de las respuestas y justificaciones escritas ante los ítems correspondientes a cada problema, con categorías que cumplan las categorías requeridas de unidimensionalidad, exclusión mutua y exhaustividad (Schreier, 2014). Dichas categorías fueron organizadas en matrices analíticas de las respuestas brindadas frente a cada uno de los problemas planteados. Finalmente, luego de la aplicación de dichas matrices (correspondiente al procedimiento de *prueba de la codificación*), determinamos la frecuencia de aparición de los errores observados.

Durante la aplicación de las matrices analíticas, consideramos como respuesta errónea a toda aquella respuesta que, o no se encontraba de acuerdo con la respuesta correcta esperada, o cuyo argumento justificatorio no guardaba relación directa con la cuestión planteada en el problema. Cabe indicar así mismo que, luego de la conformación de los códigos, sometimos los desacuerdos generados en dicho proceso a la consideración de otro investigador, distinto a nosotros, para su discusión y perfeccionamiento. Con ello no solo se evaluó y modificó el sistema generado (procedimientos que acompañan a la puesta a prueba de la codificación), sino que también se puso de manifiesto el procedimiento de triangulación de analistas.

A continuación, mostramos las matrices de análisis, así como los resultados de su aplicación a las respuestas colectadas frente a cada problema planteado. Todo esto corresponde al primer nivel de análisis. El segundo nivel de análisis (o *análisis principal* como le hemos denominado en la metodología de nuestro estudio) será presentado en el siguiente capítulo.

4.3.1. Codificación de las respuestas frente al problema 1

Se consideró la siguiente matriz de análisis (Tabla 7):

Tabla 7. Matriz de análisis para el problema 1

RESPUESTA	CORRECTA (C)		INCORRECTA (I)		NO RESPONDIÓ (NR)	
	Si escribió la respuesta esperada (sí, o verdadero, o sí cumplió, o algo similar)		Si escribió lo opuesto a la respuesta esperada (no, falso, no cumplió, o algo similar)		No colocó “sí” (sí cumplió su promesa) o “no” (no cumplió su promesa), en relación a la pregunta planteada.	
JUSTIFICACIÓN	CR	CNR	IE	INE	SJ	NJ
Descriptor	Si la respuesta es correcta y la justificación presentada es compatible con lo esperado. Hace referencia al problema	Si la respuesta es correcta pero la justificación dada cuenta con elementos erróneos, agrega información no presente en el enunciado del problema, o su justificación no es lo suficientemente	Si la respuesta es incorrecta y la justificación presentada pone de manifiesto el error esperado	Si la respuesta es incorrecta y la justificación presentada pone de manifiesto otra “razón” que no tiene que ver directamente con la justificación	No respondió de manera concreta, pero sí “justificó”, y con su “justificación” no queda clara cuál es su respuesta.	No respondió y no justificó

	abordado	clara o solo repite la pregunta en su forma afirmativa.		esperada.		
--	----------	---	--	-----------	--	--

El error esperado para este problema consistía en que el participante responda, por ejemplo, “No, porque como ninguno resolvió el problema que dejó la profesora entonces ninguno merece caramelos”, o algo similar. Este error corresponde a la negación del antecedente (ubicable en el segundo capítulo, con el apartado 2.2.1.)

En el anexo 4C, bajo la guía de la matriz de análisis, mostramos ejemplos de codificación de respuestas y justificaciones relacionadas con el problema 1, en compañía de los comentarios correspondientes. Tales ejemplos han sido elaborados de acuerdo con lo establecido en nuestra metodología para los procedimientos de *construcción, prueba de la codificación y evaluación* de la misma.

En seguida presentamos en la Tabla 8 la distribución de las respuestas emitidas por los participantes del estudio frente al problema 1:

Tabla 8. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 1

		JUSTIFICACIÓN						TOTAL
		CR	CNR	IE	INE	SJ	NJ	
RESPUESTAS	CORRECTAS	2						
	INCORRECTAS		7	2	0			
NO RESPONDIÓ						1	0	
TOTAL		2	7	2	0	1	0	12

Observamos que el 9 de los 12 participantes respondieron en forma incorrecta frente al problema 1. Así mismo, solo un participante no respondió, aunque “justificó” algo, mientras que dos participantes respondieron correctamente. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al problema 1, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 01, 03, 05, 06, 08, 09, 10, 11 y 12.

4.3.2. Codificación de las respuestas frente al problema 2

Se consideró la siguiente matriz de análisis (Tabla 9):

Tabla 9. Matriz de análisis para el problema 2

RESPUESTA	CORRECTA (C)		INCORRECTA (I)		NO RESPONDIÓ (NR)	
	Si escribió la respuesta esperada en cada caso: Para a), d), e) y f), escribe “No” o algo similar. Para b) y c), escribe “Sí” o algo similar.		Si escribió lo opuesto a la respuesta esperada en cada uno de los ítems indicados o se “insinúan” estas respuestas		No colocó ni la respuesta esperada ni lo opuesto en cada uno de los ítems indicados	
JUSTIFICACIÓN	CR	CNR	IE	INE	SJ	NJ
Descriptores	Si la respuesta es correcta y la justificación presentada es compatible con lo esperado. Hace referencia al problema abordado.	Si la respuesta es correcta pero la justificación dada cuenta con elementos erróneos, agrega información no presente en el enunciado del problema, o su justificación no es lo suficientemente clara o solo repite la pregunta en su forma afirmativa.	Si la respuesta es incorrecta y la justificación presentada pone de manifiesto el error esperado.	Si la respuesta es incorrecta y la justificación presentada pone de manifiesto otra “razón” que no tiene que ver directamente con la justificación esperada.	No respondió de manera concreta, pero sí “justificó”, y con su “justificación” no queda clara cuál es su respuesta.	No respondió y no justificó

Los errores esperados para este problema fueron los siguientes:

- Para el ítem a: escriben que sí, sí se puede concluir que 3 es un elemento del conjunto T .
- Para el ítem d: se puede afirmar que, si x no es un elemento del conjunto T , entonces x no es número primo.
- Para el ítem e: se puede concluir que el conjunto T está formado por todos los números primos (“si x es primo, entonces x es elemento de T ”).

Los errores indicados, de acuerdo con los elementos teóricos reseñados por nosotros, corresponden a la afirmación del consecuente (apartado 2.2.1. del segundo capítulo),

negación del antecedente (apartado 2.2.1.) y conclusión de la conversa (apartado 2.2.2.), respectivamente.

En el anexo 4D, bajo la guía de la matriz de análisis, mostramos ejemplos de codificación de respuestas y justificaciones relacionadas con el problema 2, en compañía de los comentarios correspondientes. Tales ejemplos han sido elaborados de acuerdo con lo establecido en nuestra metodología para los procedimientos de *construcción, prueba de la codificación y evaluación* de la misma.

A continuación, presentamos las tablas 10, 11, 12, 13, 14 y 15, correspondientes a la distribución de las respuestas emitidas por los participantes del estudio frente a los ítems a, b, c, d, e y f del problema 2, respectivamente.

Tabla 10. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2a)

		RESPUESTAS	
		N° correctas	N° incorrectas
JUSTIFICACIÓN	CR	3	
	CNR		3
	IE		6
	INE		0
	SJ		
	NJ		
TOTAL		3	9

Observamos en la Tabla 10 que 9 de los 12 participantes respondieron en forma incorrecta frente al ítem a del problema 2. Así mismo, solo la cuarta parte de ellos (3) respondieron en forma correcta frente al mismo ítem. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem a del problema 2, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 03, 05, 06, 08, 07, 09, 10, 11 y 12.

Tabla 11. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2b)

		RESPUESTAS		No respondieron
		N° correctas	N° incorrectas	
JUSTIFICACIÓN	CR	8		
	CNR		1	
	IE		0	
	INE		2	
	SJ			1
	NJ			0
TOTAL		8	3	1

De acuerdo con la Tabla 11, solo 3 de los 12 participantes respondieron en forma errónea frente al ítem b del problema 2. También se puede apreciar que más de la mitad de ellos (8) respondieron correctamente frente al mismo ítem. Finalmente, solo uno de los participantes no respondió, aunque sí “justificó”. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem b del problema 2, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 09, 10 y 12.

Tabla 12. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2c)

		RESPUESTAS		No respondieron
		N° correctas	N° incorrectas	
JUSTIFICACIÓN	CR	9		
	CNR		2	
	IE		0	
	INE		0	
	SJ			1
	NJ			0
TOTAL		9	2	1

La Tabla 12 nos muestra que solo el 2 de los 12 participantes cometieron errores en su respuesta frente al ítem indicado. En cambio, 9 de ellos respondieron correctamente y solo uno de los participantes no respondió, aunque sí “justificó”. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem c del problema 2, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 05 y 08.

Tabla 13. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2d)

		RESPUESTAS		No respondieron
		N° correctas	N° incorrectas	
JUSTIFICACIÓN	CR	4		
	CNR		1	
	IE		6	
	INE		0	
	SJ			0
	NJ			1
TOTAL		4	7	1

Observamos en la Tabla 13 que 7 de los 12 participantes cometieron errores en su respuesta frente al ítem d del problema 2. También se puede apreciar que 4 de aquellos respondieron en forma correcta, mientras que solo un participante ni respondió ni justificó. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem d del problema 2, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 03, 05, 06, 07, 09 y 10.

Tabla 14. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2e)

		RESPUESTAS		No respondieron
		N° correctas	N° incorrectas	
JUSTIFICACIÓN	CR	3		
	CNR		3	
	IE		3	
	INE		2	
	SJ			1
	NJ			0
TOTAL		3	8	1

Se puede observar en la Tabla 14 que 8 de los 12 participantes cometieron errores en su respuesta frente al ítem e de la pregunta 2. Mientras tanto, solo tres de los participantes emitieron respuesta correcta y un solo participante no respondió, aunque “justificó”. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem e del problema 2, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 01, 03, 05, 06, 08, 07, 09, 10 y 12.

Tabla 15. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2f)

		RESPUESTAS	
		N° correctas	N° incorrectas
JUSTIFICACIÓN	CR	10	
	CNR		1
	IE		1
	INE		0
	SJ		
	NJ		
TOTAL		10	2

Se puede apreciar en la Tabla 15 que solo 2 de los 12 participantes cometieron errores frente al ítem f de la pregunta 2. Respondieron correctamente 10 participantes. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem f del problema 2, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 04 y 12.

La siguiente tabla (Tabla 16) sintetiza los resultados obtenidos en las respuestas frente al problema 2:

Tabla 16. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 2

ÍTEM	TIPO DE RESPUESTA			TOTAL
	N° correctas	N° incorrectas	Sin Respuesta	
a	3	9	0	12
b	8	3	1	12
c	9	2	1	12
d	4	7	1	12
e	3	8	1	12
f	10	2	0	12

Como se puede apreciar en la Tabla 16, la cantidad más alta de errores fue cometida durante la respuesta al ítem a (9 de 12), mientras que la más baja (2 de 12) corresponde a los ítems c y f.

4.3.3. Codificación de las respuestas frente al problema 3

Se consideró la siguiente matriz de análisis (Tabla 17):

Tabla 17. Matriz de análisis para el problema 3

RESPUESTA	CORRECTA (C)		INCORRECTA (I)		NO RESPONDIÓ (NR)	
	Si escribió la respuesta esperada (para i – a, ii – a, ii – b y iii – b, <i>no se sabe</i> y expresiones similares; para iii – a y iv – b, <i>no</i> y expresiones similares; para iv – b y i – b, <i>sí</i> y expresiones similares)			Si escribió lo opuesto a la respuesta esperada en cada uno de los ítems esperados		No colocó ni la respuesta esperada ni lo opuesto en cada uno de los ítems indicados
JUSTIFICACIÓN	CR	CNR	IE	INE	SJ	NJ
Descriptores	Si la respuesta es correcta y la justificación presentada es compatible con lo esperado. Hace referencia al problema abordado.	Si la respuesta es correcta pero la justificación dada cuenta con elementos erróneos, agrega información no presente en el enunciado del problema, o su justificación no es lo suficientemente clara o solo repite la pregunta en su forma afirmativa.	Si la respuesta es incorrecta y la justificación presentada pone de manifiesto el error esperado.	Si la respuesta es incorrecta y la justificación presentada pone de manifiesto otra “razón” que no tiene que ver directamente con la justificación esperada	No respondió, pero sí “justificó”, y con su “justificación” no queda clara cuál es su respuesta.	No respondió y no justificó

Los errores esperados para este problema son los siguientes:

- Para el ítem a – i: si la ficha es azul (es decir, no es verde), entonces no es triangular.

El participante marca NO.

- Para el a – ii: si $F3$ y $F4$ son del mismo material, entonces $F3$ y $F4$ son triangulares.

El participante marca SI.

Para el ítem b – i: el participante responde “no se sabe”.

- Para el ítem b – ii: si $F2$ es una ficha de plástico (es decir, no es de cartón), entonces no es rectangular. El participante marca NO. Otro error esperado consiste en que el participante responde, ante los datos planteados “no se sabe”.

- Para el ítem b – iii: si $F3$ es rectangular, entonces $F3$ es de cartón. El participante marca SI.

Los errores indicados, corresponden a la afirmación del consecuente y a la negación del antecedente (reconocible en el capítulo 2 bajo el apartado 2.2.1.). En cuanto a los errores del tipo “no se sabe” o “no se menciona nada acerca de lo planteado”, corresponden al error de indeterminación por supuesta insuficiencia de datos (apartado 2.2.9.). Es necesario indicar que, para los ítems del problema 3 (en especial para aquellos que fueron planteados a partir de la situación b) se esperaba la ocurrencia del error vinculado a la concepción causal de la implicación (apartado 2.2.3.). Esto indica que se esperaban respuestas incorrectas del tipo “**solo si p , entonces q** ” o “**necesariamente debe cumplirse p para que ocurra q** ”, etc.

En el anexo 4E, bajo la guía de la matriz de análisis, mostramos ejemplos de codificación de respuestas y justificaciones relacionadas con el problema 3, en compañía de los comentarios correspondientes. Tales ejemplos han sido elaborados de acuerdo con lo establecido en nuestra metodología para los procedimientos de *construcción, prueba de la codificación y evaluación* de la misma.

A continuación, presentamos las tablas 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 y 25 correspondientes a la distribución de las respuestas emitidas por los participantes del estudio frente a los ítems a - i, a - ii, a - iii, a - iv, b - i, b - ii, b - iii y b - iv, respectivamente.

Tabla 18. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3a) – i

		RESPUESTAS	
		N° correctas	N° incorrectas
JUSTIFICACIÓN	CR	5	
	CNR		1
	IE		5
	INE		0
	SJ		
	NJ	1	
TOTAL		6	6

Podemos observar en la Tabla 18, que 6 de los 12 participantes cometieron errores frente al ítem a - i del problema 3. Mientras, los otros 6 participantes respondieron correctamente frente al mismo ítem. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem a-i del problema 3, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 02, 03, 07, 09, 10 y 12.

Tabla 19. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3a) - ii

		RESPUESTAS	
		N° correctas	N° incorrectas
JUSTIFICACIÓN	CR	5	
	CNR		0
	IE		6
	INE		1
	SJ		
	NJ		
TOTAL		5	7

Se puede apreciar en la Tabla 19 que 7 de los 12 participantes cometieron errores frente al ítem a - ii. Así mismo, 5 participantes respondieron en forma correcta frente al mismo ítem. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem a-ii del problema 3, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes *01, 03, 05, 06, 10, 11 y 12*.

Tabla 20. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3a) - iii

		RESPUESTAS	
		N° correctas	N° incorrectas
JUSTIFICACIÓN	CR	5	
	CNR		2
	IE		3
	INE		0
	SJ		
	NJ		2
TOTAL		5	7

Se puede apreciar en la Tabla 20 que 7 de los 12 participantes respondieron en forma incorrecta frente al ítem a - iii del problema 3. Así mismo, 5 participantes respondieron en forma correcta frente al mismo ítem. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem a-iii del problema 3, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes *01, 03, 04, 05, 11 y 12*.

Tabla 21. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3a) - iv

		RESPUESTAS	
		N° correctas	N° incorrectas
JUSTIFICACIÓN	CR	9	
	CNR		0
	IE		2
	INE		1
	SJ		
	NJ		
TOTAL		9	3

A partir de lo mostrado en la Tabla 21, se puede indicar que solo 3 de los 12 participantes cometieron errores en su respuesta frente al ítem a – iv del problema 3. Por otra parte, 9 participantes respondieron correctamente frente al mismo ítem. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem a-iv del problema 3, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 03, 06, y 10.

Tabla 22. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3b) - i

		RESPUESTAS	
		N° correctas	N° incorrectas
JUSTIFICACIÓN	CR	4	
	CNR		1
	IE		6
	INE		0
	SJ		
	NJ		1
TOTAL		4	8

En la Tabla 22 podemos observar que 8 de los 12 participantes cometieron errores frente al ítem b - i del problema 3. Mientras, solo 4 de 12 respondieron en forma correcta frente al mismo ítem. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem b-i del problema 3, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 01, 02, 03, 04, 06, 08, 09, 11.

Tabla 23. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3b) - ii

		RESPUESTAS	
		Nº correctas	Nº incorrectas
JUSTIFICACIÓN	CR	4	
	CNR		1
	IE		7
	INE		0
	SJ		
	NJ		
TOTAL		4	8

En la Tabla 23 se puede apreciar que 8 de los 12 participantes emitieron respuesta incorrecta frente al ítem b - ii del problema 3. Así mismo, 4 de los 12 respondieron en forma correcta frente al mismo ítem. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem b-ii del problema 3, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 01, 03, 04, 05, 09, 10, 11 y 12.

Tabla 24. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3b) - iii

		RESPUESTAS	
		Nº correctas	Nº incorrectas
JUSTIFICACIÓN	CR	6	
	CNR		1
	IE		5
	INE		0
	SJ		
	NJ		
TOTAL		6	6

Podemos observar en la Tabla 24 que 6 de los 12 participantes respondieron en forma incorrecta frente al ítem b - iii del problema 3, mientras que los otros 6 participantes lo hicieron en forma correcta. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem b-iii del problema 3, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 01, 03, 05, 10, 11 y 12.

Tabla 25. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3b) - iv

		RESPUESTAS	
		Nº correctas	Nº incorrectas
JUSTIFICACIÓN	CR	12	
	CNR		0
	IE		0
	INE		0
	SJ		
	NJ		
TOTAL		12	0

Como podemos observar en la Tabla 25, frente al ítem b - iv ningún participante cometió error. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem b-iv del problema 3, se determinó que ninguna respuesta iba a ser analizada.

La siguiente tabla (Tabla 26) sintetiza los resultados obtenidos durante el desarrollo de este problema.

Tabla 26. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 3

ÍTEM	TIPO DE RESPUESTA		TOTAL
	Correcta	Errónea	Nº
i - a	6	6	12
ii - a	5	7	12
iii - a	5	7	12
iv - a	9	3	12
i - b	4	8	12
ii - b	4	8	12
iii - b	6	6	12
iv - b	12	0	12

Como se puede apreciar en la Tabla 26, la cantidad más alta de errores dentro de la situación-a se registró durante la solución de los ítems ii-a y iii-a (7 de 12 participantes). Así mismo, el número más alto de errores durante la solución de los ítems relacionados con la situación-b fue observado en las respuestas frente a los ítems b - i y b - ii (8 de 12 participantes).

4.3.4. Codificación de las respuestas frente al problema 4

Se consideró la siguiente matriz de análisis (Tabla 27):

Tabla 27. Matriz de análisis para el problema 4

RESPUESTA	CORRECTA (C)		INCORRECTA (I)		NO RESPONDIÓ (NR)	
	Si escribió la respuesta esperada (para 1 y 4, opción b; para 2 y 3, opción a)		Si escribió lo opuesto a la respuesta esperada en cada uno de los ítems esperados		No colocó ni la respuesta esperada ni lo opuesto en cada uno de los ítems indicados	
JUSTIFICACIÓN	CR	CNR	IE	INE	SJ	NJ
Descriptores	Si la respuesta es correcta y la justificación presentada es compatible con lo esperado. Hace referencia al problema abordado.	Si la respuesta es correcta pero la justificación dada cuenta con elementos erróneos, agrega información no presente en el enunciado del problema, o su justificación no es lo suficientemente clara o solo repite la pregunta en su forma afirmativa.	Si la respuesta es incorrecta y la justificación presentada pone de manifiesto el error esperado.	Si la respuesta es incorrecta y la justificación presentada pone de manifiesto otra “razón” que no tiene que ver directamente con la justificación esperada.	No respondió de manera concreta, pero sí “justificó”, y con su “justificación” no queda clara cuál es su respuesta.	No respondió y no justificó

Los errores esperados para este problema son los siguientes:

- Para el procedimiento 1: elección de la opción (a). De esta forma, se podría afirmar que, si se extraen las bolas con número par, de las que todas son blancas, se responde afirmativamente a la pregunta planteada. Ello podría equivaler a que esta (“¿Será cierto que todas las bolas blancas de la urna tienen número par?”) ha sido comprendida en la forma conversata “¿Será cierto que todas las bolas con número par tienen color blanco?”. Bajo esta misma concepción, si por lo menos se obtiene una bola con número par y color negro, también se podría responder (en forma negativa) frente a la pregunta planteada. Tal forma conversata se encuentra ligada al error de conclusión de la conversata (presente en los elementos teóricos bajo el apartado 2.2.2.)

- Para el procedimiento 4: elección de la opción (a). Se puede afirmar, entonces, que si se extraen las bolas de color negro se responde con seguridad frente a la pregunta planteada. Pero, para ello, se debería conocer el número que tienen las bolas negras. Por ejemplo, si las bolas negras tienen número impar, podría pensarse que las bolas blancas tienen número par. Así mismo, si las bolas negras tienen número par, las bolas blancas tendrían número impar. Nótese que detrás de todos estos supuestos se encontrarían dos tipos de error: se asume que todas las bolas de color negro tienen un tipo de número, así como que todas las bolas de color blanco tienen otro tipo de número, opuesto, al primero (error de adición de información extraña, apartado 2.2.4.). También parecería tratarse de la forma conversa “¿Será cierto que todas las bolas con número par son blancas?” (error de conclusión de la conversa, apartado 2.2.2.).

En el anexo 4F, bajo la guía de la matriz de análisis, mostramos ejemplos de codificación de respuestas y justificaciones relacionadas con el problema 4, en compañía de los comentarios correspondientes. Tales ejemplos han sido elaborados de acuerdo con lo establecido en nuestra metodología para los procedimientos de *construcción, prueba de la codificación y evaluación* de la misma.

A continuación, presentamos las tablas 28, 29, 30 y 31 correspondientes a la distribución de las respuestas emitidas por los participantes del estudio frente a los ítems 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

Tabla 28. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 4, ítem 1

ITEM	RESPUESTAS	JUSTIFICACIÓN						TOTAL
		CR	CNR	IE	INE	SJ	NJ	Nº
1	CORRECTAS	3						3
	INCORRECTAS		1	4	4			9

Como se puede observar en la Tabla 28, 9 de 12 participantes respondieron en forma incorrecta frente al ítem 1 del problema 4, mientras que 3 lo hicieron en forma correcta. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem 1 del problema 4, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 03, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11 y 12.

Tabla 29. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 4, ítem 2

ITEM	RESPUESTAS	JUSTIFICACIÓN						TOTAL
		CR	CNR	IE	INE	SJ	NJ	N°
2	CORRECTAS	1					2	3
	INCORRECTAS		3	3	3			9

A partir de la Tabla 29 se puede apreciar que 9 de los 12 participantes respondieron en forma incorrecta frente al ítem 2 del problema 4, mientras que 3 de 12 lo hicieron en forma correcta. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem 2 del problema 4, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 01, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11 y 12.

Tabla 30. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 4, ítem 3

ITEM	RESPUESTAS	JUSTIFICACIÓN						TOTAL
		CR	CNR	IE	INE	SJ	NJ	N°
1	CORRECTAS	8						8
	INCORRECTAS		1	0	3			4

Como se puede observar en la Tabla 30, 4 de los 12 participantes respondieron erróneamente. Así mismo, 8 de 12 participantes lo hicieron en forma correcta. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem 3 del problema 4, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 01, 04, 07 y 10.

Tabla 31. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 4, ítem 4

ITEM	RESPUESTAS	JUSTIFICACIÓN						TOTAL
		CR	CNR	IE	INE	SJ	NJ	N°
1	CORRECTAS	3				2		5
	INCORRECTAS		3	0	3		1	7

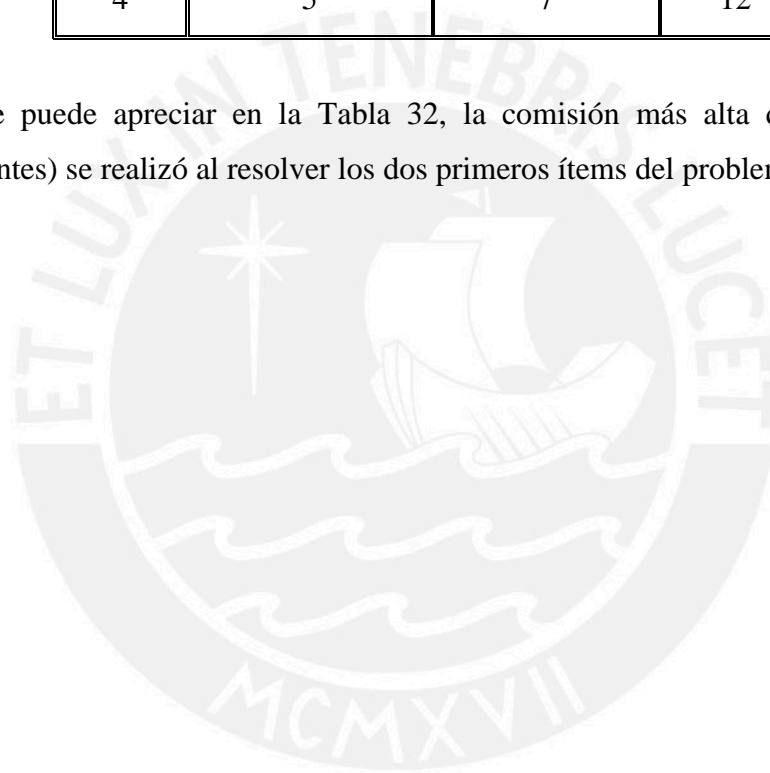
Como se muestra en la Tabla 31, 7 de los 12 participantes respondió en forma incorrecta frente al ítem 4 del problema 4. Así mismo, 5 de 12 participantes lo hizo en forma correcta. De este modo, tras la aplicación de la matriz analítica correspondiente al ítem 4 del problema 4, se determinó que las respuestas que iban a ser analizadas correspondían a las de los participantes 01, 03, 04, 05, 06, 08 y 12.

La siguiente tabla (Tabla 32) sintetiza los resultados obtenidos durante el desarrollo de este problema.

Tabla 32. Distribución de las respuestas emitidas por los participantes frente al problema 4

ITEM	TIPO DE RESPUESTA		TOTAL
	Nº correctas	Nº incorrectas	Nº
1	3	9	12
2	3	9	12
3	8	4	12
4	5	7	12

Como se puede apreciar en la Tabla 32, la comisión más alta de errores (9 de 12 participantes) se realizó al resolver los dos primeros ítems del problema 4.



Capítulo 5

ANÁLISIS DE LOS DATOS

En el presente capítulo se realiza el análisis principal de los datos recogidos y organizados en el capítulo anterior. Tal análisis se realizará mediante el marco teórico que guía a la presente investigación.

En el capítulo anterior, habíamos arribado a los procedimientos de *prueba, evaluación y modificación de la codificación elaborada*, pertenecientes a la metodología de análisis de contenido, adoptada por nosotros. De hecho, tales procedimientos correspondían al primer nivel de análisis propuesto por nosotros. Superado este, llevaremos a cabo el segundo nivel de análisis (denominado en nuestra metodología como *análisis principal* – apartado 2.3.3., p. 71) al fijar nuestra atención en aquellas justificaciones codificadas en el capítulo anterior con CNR, IE e INE frente a cada uno de los problemas planteados. Dicho análisis principal se llevará a cabo con el fundamento de los elementos teóricos abordados en el capítulo 2 y nos permitirá arribar a los objetivos planificados para el presente estudio: identificar los errores cometidos y clasificarlos. Por ello, al costado derecho de cada error analizado, se colocará entre paréntesis el apartado del capítulo 2 donde se le abordó teóricamente. Así mismo, se colocará también la página del presente trabajo para su rápida ubicación.

Cabe indicar, como última consideración antes del análisis, que, en varios casos, para fines de conteo, se ha observado el primer error cometido en las respuestas. Empero, no dejarán de comentarse otros posibles errores que aparezcan en estas.

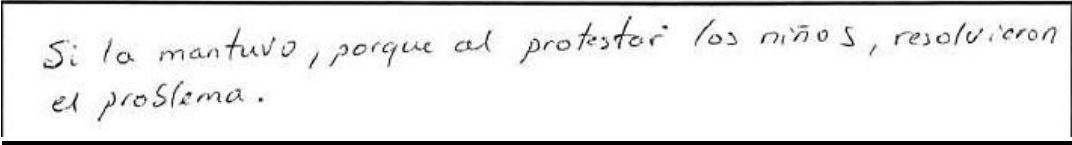
5.1. Análisis de los errores cometidos en el desarrollo del problema 1

5.1.1. Errores detectados y ejemplos ilustrativos

Presentamos, en seguida, cada uno de los tipos de errores detectados, así como ejemplos concretos que los ilustran.

a) Error de adición de información extraña

Aquellos que cometieron este error fueron los participantes 09, 06, 03, 12 y 05. En la siguiente figura (Figura N° 35) presentamos la respuesta del participante 12, cuyo análisis nos permitirá observar en qué consiste el error señalado:

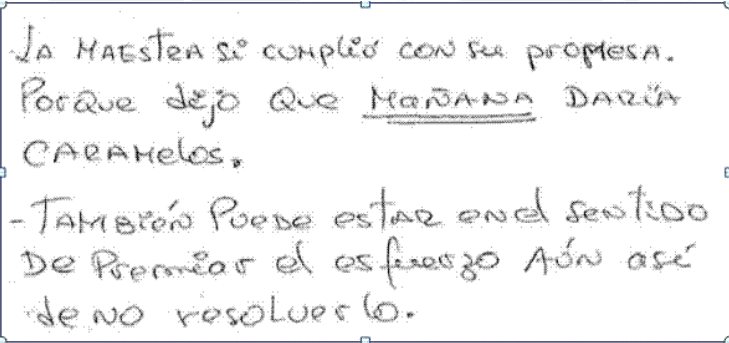


Si la mantuvo, porque al protestar los niños, resolvieron el problema.

Figura 35. Respuesta del participante 12 – análisis de problema 1

El error cometido en la respuesta del participante 12 fue el de adición de información extraña (apartado 2.2.4., p. 62) pues agregó información que no se encontraba en el enunciado del problema. Aunque el participante empezó a responder en forma correcta con respecto a la promesa de la maestra (“Si la mantuvo”), la justificación incorporó la frase “porque al protestar los niños, resolvieron el problema”, hecho no mencionado en el enunciado del problema. De este modo, se agregaron datos extraños a la intervención de los niños.

También hemos observado el mismo tipo de error, pero consistente en la adición de información extraña a la actuación de la maestra, como en la respuesta del participante 03 (Figura N° 36).



LA MAESTRA SE CUMPLIO CON SU PROMESA.
PORQUE DEJO QUE MANANA DARIA
CARAMELOS.
- TAMBIEN PUEDE ESTAR EN EL SENTIDO
DE PREMIAR EL ESFUERZO AUN ASI
DE NO RESOLVERLO.

Figura 36. Respuesta de 03 – análisis de problema 1

Como se puede observar en la figura anterior, el participante 03 comenzó a responder acertadamente, pero la justificación agregó elementos extraños tales como que la repartición de caramelos por parte de la maestra “también puede estar en el sentido de premiar el esfuerzo aún así de no resolverlo”. Nótese que el factor de premio no ha sido enunciado (ni se podía inferir) del planteamiento del problema.

b) Error de negación del antecedente

Quienes cometieron este error fueron los participantes 01 y 11. A continuación, presentamos la respuesta del último participante aquí mencionado (Figura 37):

* Si lo tomamos literalmente no. Pues no hubo el mismo uno que lo resolvió.

* Si se trata de ver el esfuerzo y responsabilidad de sus alumnos puede ser que sí. Mas aún si tenemos en cuenta que ellos reconocen que no les corresponde el premio, eso significa que hubo una educación formativa.

Figura 37. Respuesta del participante 11 – análisis de problema 1

Parece ser que, en las dos primeras líneas de su respuesta, el participante 11 formuló el siguiente razonamiento:

Si algún alumno consiguiera resolverlo, entonces les daré caramelos

Ninguno consiguió resolverlo

Por lo tanto, no les daré caramelos

Esta conclusión es errónea, pues la maestra no indicó que sucedería si ningún estudiante resolvía el problema. De esta manera, la respuesta emitida “no” (es decir, “la maestra no cumplió su promesa”) correspondería al error de negación del antecedente (apartado 2.2.1., p. 60).

En la segunda parte de la respuesta del participante 11, también se puede apreciar el error de adición de información extraña. En efecto: el citado participante agregó que podía decirse que la maestra sí cumplió su promesa “si se trataba de ver el esfuerzo y responsabilidad de sus alumnos”. Acto seguido, incorporó más elementos extraños, como que “hubo una educación formativa” al reconocer los alumnos “que no les corresponde el premio”. Ninguna de estas frases corresponde a información enunciada en el texto del problema.

d) Error de imposición de requisito discordante con la información dada

Incurrieron en este tipo de error el participante 08 y el participante 10. En la siguiente figura (Figura 38) presentamos la respuesta del primer participante aquí indicado:

• Cumplió su promesa.
 Ya que la maestra no especifica que los que resolvían fueran los alumnos dijo:
 Si alguno consigue resolverlo \Rightarrow les daré caramelos, y como los alumnos no lo hicieron pero ya estaba resuelto, la profesora tenía que cumplir la promesa de repartir los caramelos.

Figura 38. Respuesta del participante 08 – análisis de problema 1

Aunque inició con una respuesta correcta, el participante 08 incurrió, durante su justificación, en el error de imposición de requisito discordante con la información dada (apartado 2.2.7., p. 64) pues con la afirmación “la maestra no especificó que los que resolvían fueron los alumnos” contradijo un dato mencionado en el problema. Dicho dato consistía en que, en efecto, la maestra pidió a los alumnos la solución del problema mediante la instrucción “resuelvan el problema en casa; mañana, si alguno consigue resolverlo entonces les daré caramelos”.

Además del primer error contabilizado, también hay que indicar que el participante 08 incurrió en el error de adición de información extraña, pues en su respuesta consideró que “[el problema] ya estaba resuelto” y que, por ello, “la profesora tenía que cumplir la promesa de repartir los caramelos”. El enunciado del problema no muestra tal dato añadido, pues solo indica que aquel tenía solución.

5.1.2. Consideraciones finales del análisis realizado sobre las respuestas frente al problema 1

En la siguiente tabla (Tabla 33) mostramos un breve resumen cuantitativo acerca de los tipos de errores cometidos en el desarrollo del problema 1. Así mismo, en una de las columnas se indica las ID de los participantes que incurrieron en los tipos de errores mencionados.

Tabla 33. Tipos de errores cometidos frente al problema 1

Tipo de error	Apartado del capítulo 2	Nº	ID de los participantes
Adición de información extraña	2.2.4.	5	03, 05, 06, 09, 12
Negación del antecedente	2.2.1.	2	01, 11
Imposición de un requisito discordante con la información dada	2.2.7.	2	08, 10
TOTAL			9

A partir de la Tabla 33 podemos observar que 5 de los 9 participantes cometieron el error de adición de información extraña frente al problema 1. Por ello, se considera que este es el tipo de error más frecuente en que se incurrió durante la resolución de dicho problema. Así mismo, a partir de los análisis efectuados, podemos apreciar que dicho error se registró mediante la adición de datos al enunciado del problema. También se pudo observar la presencia de la adición de información extraña en la comisión de los otros dos tipos de error (negación de antecedente e imposición de requisito discordante con la información dada) lo que indica una relación que futuros estudios podrían esclarecer.

5.2. Análisis de los errores cometidos en el desarrollo del problema 2

5.2.1. Errores detectados y ejemplos ilustrativos

Presentamos, en seguida, cada uno de los tipos de errores detectados, así como ejemplos concretos que los ilustran.

- *Para el ítem a*

- a) Error de adición de información extraña

Quienes cometieron este error fueron el participante 06, el participante 08 y el participante 11. A continuación, presentamos el análisis de la respuesta correspondiente al participante 06 (Figura 39).

- a) Sabemos que 3 es un número primo, entonces ¿puede usted asegurar que 3 es un elemento del conjunto T ? ¿Por qué?

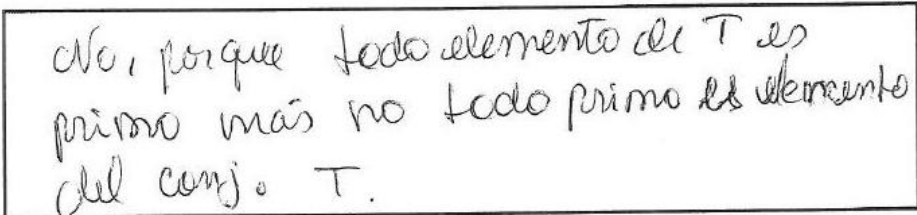


Figura 39. Respuesta del participante 06 – análisis de problema 2a)

Se puede observar que la respuesta de 06, pese a empezar correctamente, no fue justificada en forma acertada. Su justificación presentó el error de adición de información extraña (apartado 2.2.4., p. 62) pues, aunque mencionó un dato proporcionado en el enunciado del problema (“todo elemento de T es primo”) consideró una proposición que no fue considerada en él ni podía ser inferida a partir de él, tal como “no todo primo es elemento del conjunto T ”. La veracidad de esta proposición añadida no puede ser garantizada.

Otra información extraña que fue añadida al enunciado del problema y se registró dentro de las respuestas de los participantes, la podemos visualizar en la respuesta del participante 08 (Figura 40):

- a) Sabemos que 3 es un número primo, entonces ¿puede usted asegurar que 3 es un elemento del conjunto T ? ¿Por qué?

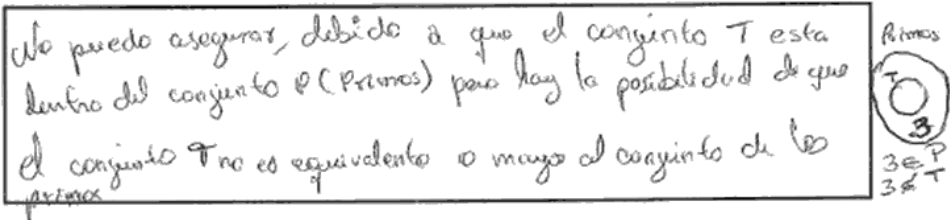


Figura 40. Respuesta del participante 08 - análisis de problema 2a)

Como se puede observar en la Figura 40, el participante 08 añadió información extraña cuando consideró “la posibilidad de que el conjunto T no es equivalente o mayor al conjunto de los primos”. Al indicar que el conjunto T no es equivalente al conjunto de los primos ya está agregando la misma información que se indicó en la respuesta del participante 06, es decir, no todo primo es elemento del conjunto T . Pero, al afirmar la posibilidad de que el conjunto T sea “mayor” al conjunto de los primos (lo que posiblemente se refiera a que T podría incluir al conjunto de los números primos), el participante 08 está agregando una información que de ninguna manera se podía inferir a partir de la proposición verdadera “si x es elemento del conjunto T entonces x es un número primo”. Es más: este hecho podría encontrarse en relación con el error de

imposición de requisito discordante sobre la información dada pues lo justificado por el participante 08 en la última línea contradice lo planteado en la proposición verdadera ya mencionada.

b) Error de afirmación del consecuente

Aquellos que cometieron este error fueron el participante 10 y el participante 12. En la siguiente figura (Figura 41) presentamos la respuesta del participante 10, cuyo análisis nos permitirá observar en qué consiste el error señalado:

- a) Sabemos que 3 es un número primo, entonces ¿puede usted asegurar que 3 es un elemento del conjunto T ? ¿Por qué?

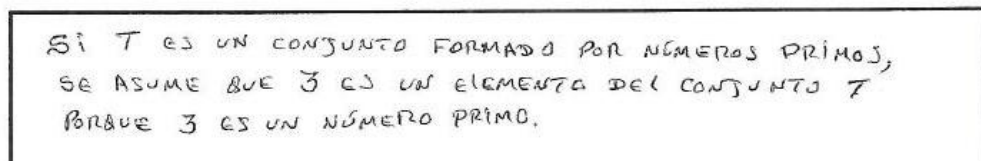


Figura 41. Respuesta del participante 10 – análisis de problema 2a)

Al parecer, durante la emisión de su respuesta, el participante 10 formuló el siguiente razonamiento:

Si x es un elemento del conjunto T entonces x es un número primo

3 es un número primo

Por lo tanto, 3 es un elemento del conjunto T

Esta conclusión es errónea pues podrían existir números primos que no pertenecen a T . De esta forma, el participante 10, en su respuesta, habría incurrido en el error de afirmación del consecuente (apartado 2.2.1., p. 60).

c) Error de concepción causal de la implicación

En este error incurrieron el participante 05 y el participante 07. Veamos la respuesta del primer participante mencionado (Figura 42):

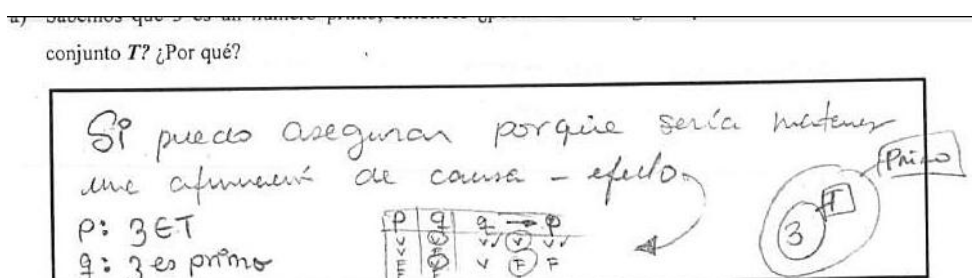


Figura 42. Respuesta del participante 05 – análisis de problema 2a)

La justificación que acompaña la respuesta del participante 10 incurrió en el error adscrito a la concepción causal de la implicación (apartado 2.2.3., p. 61), pues él indica que es “una afirmación de causa – efecto” la condicional “Si 3 es un número primo, entonces 3 es un elemento del conjunto T ”. En otras palabras, el participante 10 considera que si 3 es un número primo *debe ser* elemento del conjunto T .

d) Error de conclusión de la conversa

Quienes cometieron este error fueron el participante 03 y el participante 09. A continuación, mostramos la figura correspondiente a la respuesta del primero de los participantes mencionados (Figura 43):

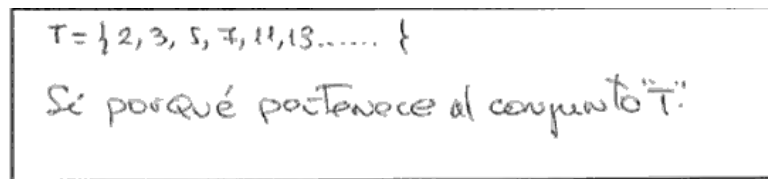


Figura 43. Respuesta del participante 03 - análisis de problema 2a)

Como se puede apreciar en la Figura 43, el participante 03 incurrió en el error de conclusión de la conversa (apartado 2.2.2., p. 61). Veamos algunas evidencias: el citado participante indicó que “sí porque [3] pertenece al conjunto T ”. Además, el participante 03 denotó a T como un conjunto cuyos elementos son todos los números primos. Los tres puntos suspensivos que el participante 03 colocó dentro de las llaves brindan evidencia adicional a nuestra caracterización. De esta forma, concluimos que dicho participante concluyó, a partir de la proposición verdadera “Si x es un elemento del conjunto T entonces x es un número primo” que “Si x es un número primo entonces x es un elemento de T ” (conversa de la proposición dada).

- **Para el ítem b**

a) Error de adición de información extraña

Cometieron este error los participantes 09, 10 y 12. Mostramos, a continuación, la respuesta del último participante mencionado (Figura 44).

b) Si el número $\overline{c1ba}$ es un elemento del conjunto T , ¿puede usted asegurar que $\overline{c1ba}$ es un número primo? ¿Por qué?

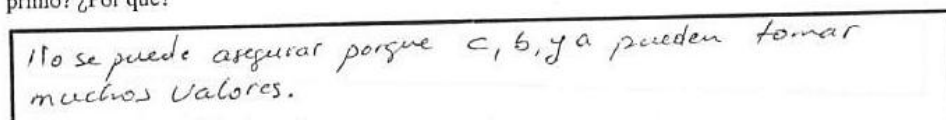


Figura 44. Respuesta del participante 12 – análisis de problema 2b)

A partir de la Figura 105 podemos afirmar que el participante 12 incurrió en el error de adición de información extraña (apartado 2.2.4., p. 62), pues consideró que las cifras

representadas mediante las letras c , b y a “pueden tomar muchos valores”. Este constituye un dato que no fue incluido dentro del enunciado del problema.

También es importante mostrar la respuesta brindada por el participante 09, quien incurrió en el mismo error que el participante 12, pero lo hizo de un modo diferente (Figura 45).

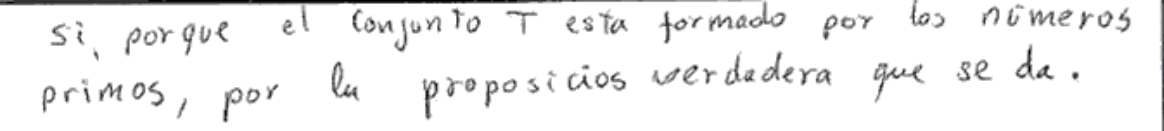


Figura 45. Respuesta del participante 09 - análisis del problema 2b)

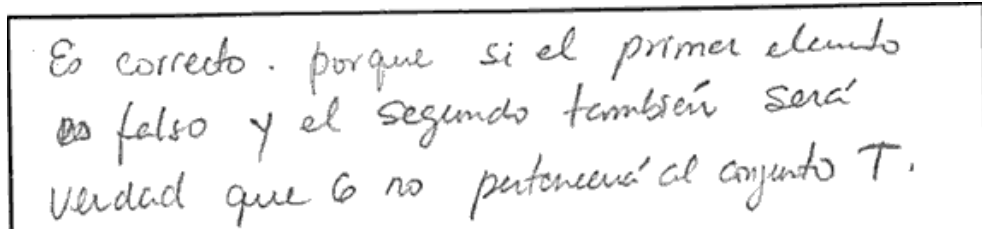
Como se puede observar en la Figura 45, el participante 09 cometió el error de adición de información extraña cuando consideró que “el conjunto T está conformado por los números primos”. El uso del artículo “los” nos remite al empleo del cuantificador universal para indicar, equivalentemente, que “el conjunto T está conformado por todos los números primos”. De esta manera, aunque la respuesta empezó con corrección, la justificación se asentó en elementos incorrectos. Pero, hay más: al argumento anterior, el participante 09 agregó que se fundamentaba “por la proposición verdadera que se da”. De esta forma, el error de adición de información extraña se relaciona con el error de conclusión de la conversa, pues el citado participante parece haber comprendido a la proposición planteada “Si x es un elemento del conjunto T entonces x es un número primo” como “Si x es un número primo entonces x es un elemento del conjunto T ”.

- **Para el ítem c**

- a) Error de imprecisión en la respuesta dada

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el presente trabajo, consideramos que este error ocurre cuando el participante no emplea en forma adecuada el lenguaje (natural o matemático) durante la redacción de su respuesta. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se emplea en forma inexacta un concepto matemático o cuando la redacción manifiesta ambigüedad.

Con relación al ítem c del problema 2, solo el participante 05 cometió el error de imprecisión en la respuesta dada, como se podrá observar en la siguiente figura (Figura 46):



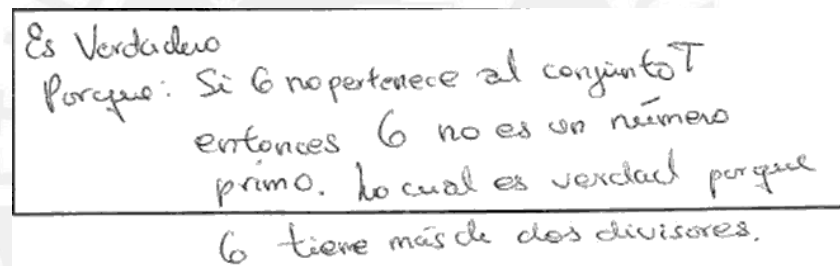
Es correcto. porque si el primer elemento es falso y el segundo también será verdad que 6 no pertenecerá al conjunto T .

Figura 46. Respuesta del participante 05 – análisis de problema 2c)

El participante 05 cometió el error de imprecisión en la respuesta dada, pues en la expresión “si el primer elemento es falso y el segundo también será verdad que 6 no pertenecerá al conjunto T ” no se comprende a qué se refiere con “primer elemento” ni con “segundo elemento”.

b) Error de conclusión de la conversa

Solo el participante 08 incurrió en este error, como podrá apreciarse en la siguiente figura (Figura 47):



Es Verdadero
Porque: Si 6 no pertenece al conjunto T
entonces 6 no es un número
primo. lo cual es verdad porque
6 tiene más de dos divisores.

Figura 47. Respuesta del participante 08 - análisis del problema 2c)

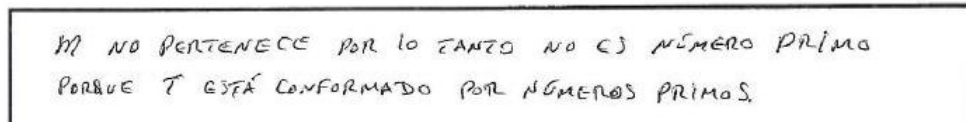
El participante 08 cometió el error de conclusión de la conversa (apartado 2.2.2., p. 61) para justificar su respuesta, que empezó siendo correcta. En aquella, el participante mencionado empleó la forma contrapositiva de la conversa para respaldar el que 6 no sea primo. Esto significa que, de la proposición verdadera “Si x es un elemento del conjunto T entonces x es un número primo”, el participante 08 parece haber concluido erróneamente que “Si x no es un elemento del conjunto T entonces x no es un número primo”. Finalmente, podría haber sustituido x por 6 para afirmar que “Si 6 no pertenece al conjunto T entonces 6 no es un número primo”.

- *Para el ítem d*

a) Error de negación del antecedente

Quienes cometieron este tipo de error fueron el participante 10, el participante 06, el participante 05 y el participante 03. Mostramos, a continuación, el análisis de la respuesta del participante 10 (Figura 48).

- d) Si m no es un elemento del conjunto T , ¿usted puede asegurar entonces que m no es un número primo? ¿Por qué?



m NO PERTENECE POR LO TANTO NO ES NÚMERO PRIMO
PORQUE T ESTÁ CONFORMADO POR NÚMEROS PRIMOS.

Figura 48. Respuesta de 10 – análisis de problema 2d)

A partir de lo observado en la Figura 48, podríamos indicar que el participante 10 formuló el siguiente razonamiento:

Si x es un elemento del conjunto T entonces x es un número primo

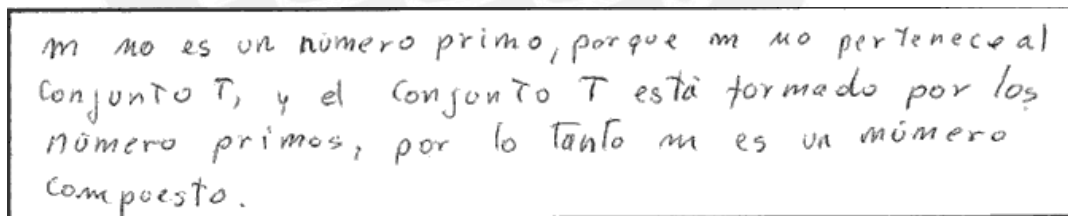
m no es un elemento del conjunto T

Por lo tanto, m no es un número primo

La conclusión a la que arribó el participante 10 fue errónea, pues podría haber números que no pertenezcan a T que sean primos. De esta manera, dicho participante estaría cometiendo el error de negación del antecedente (apartado 2.2.1., p. 60).

b) Error de conclusión de la conversa

Este error fue cometido por el participante 09 y el participante 12. Mostramos, a continuación, la respuesta emitida por el primero de los participantes mencionados (Figura 49).



m no es un número primo, porque m no pertenece al conjunto T , y el conjunto T está formado por los número primos, por lo tanto m es un número compuesto.

Figura 49. Respuesta del participante 09 – análisis de problema 2d)

Como se puede apreciar en la figura anterior, el participante 09 indicó en su respuesta que “el conjunto T está formado por los números primos”, por lo que parece ser que el participante mencionado asume que T está conformado por todos los números primos (debido al uso del artículo “los”). Por ello, consideramos que la respuesta del participante 09 manifiesta el error de conclusión de la conversa (apartado 2.2.2., p. 61). Esto significa que, de la proposición verdadera “Si x es un elemento de T entonces x es un número primo” parece haber concluido “Si x es un número primo entonces x es un elemento de T ”.

Sin embargo, hay que señalar también que la primera frase de su respuesta “ m no es un número primo, porque m no pertenece al conjunto T ” nos permitiría afirmar que se trata del error de negación del antecedente. Sino, véase el posible razonamiento efectuado en dicha línea:

Si x es un elemento del conjunto T entonces x es un número primo

m no es un elemento del conjunto T

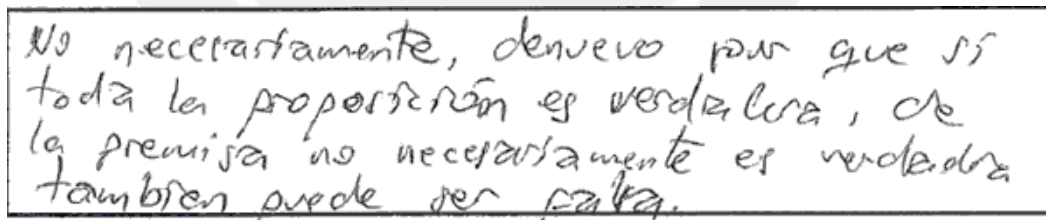
Por lo tanto, m no es un número primo

En realidad, parece ser que ambos errores (el de conclusión de la conversa y el de negación del antecedente) se encuentran relacionados de una forma que no podemos precisar solamente a partir de la respuesta escrita del participante 09.

c) No codificable

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error advertido no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el presente trabajo, consideramos que esta categoría se presenta cuando el argumento que el participante brinda en su justificación, no muestra la ilación necesaria para permitir el análisis.

En la categoría no codificable colocamos la respuesta del participante 07, la misma que se muestra a continuación (Figura 50).



No necesariamente, denuevo por que si toda la proposición es verdadera, de la premisa no necesariamente es verdadera tambien puede ser falsa.

Figura 50. Respuesta del participante 07 – análisis de problema 2d)

La respuesta emitida por el participante 07 inicia con una respuesta correcta, pero la justificación no permite comprender a qué se refiere el participante con la expresión “de la premisa no necesariamente es verdadera también puede ser falsa”. Es por ello que, ante tal falta de claridad, que no permite el análisis, se ha optado por incluir la respuesta del participante 07 dentro de la categoría de no codificable.

- *Para el ítem e*

- a) Error de adición de información extraña

Quienes incurrieron en este error fueron el participante 01, el participante 03, el participante 06 y el participante 09. Mostraremos, a continuación, el análisis de la respuesta del participante 01 (Figura 51).

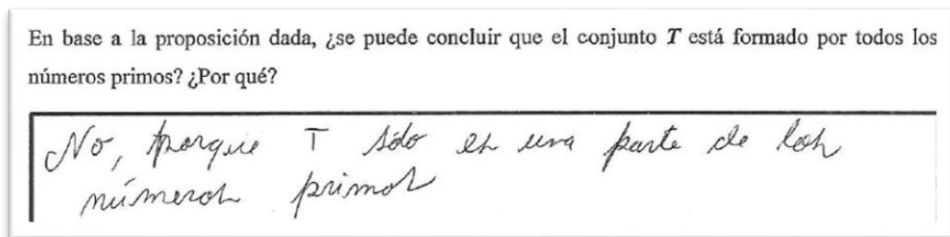


Figura 51. Respuesta del participante 01 – análisis del problema 2e)

La respuesta del participante 01 empezó por ser correcta, pero en su justificación indicó que “ T solo es una parte de los números primos”. Con ello, el mencionado participante habría considerado que no es verdadera la proposición “Si x es un número primo entonces x es un elemento del conjunto T ” que, junto a la proposición planteada en el problema, originarían que el conjunto T y el conjunto de los números primos tengan los mismos elementos. Sin embargo, los datos iniciales del problema no aseguraban la veracidad ni la falsedad de proposición añadida por el participante. Por todas las razones expuestas, consideramos que la respuesta del participante 01 incurrió en el error de adición de información extraña (apartado 2.2.4., p. 62)

Así como una respuesta añadió datos que consideraron la inclusión propia del conjunto T dentro del conjunto de los números primos, también hubo una respuesta que consideró que todos los primos pertenecían a T . Eso fue lo manifestado por el participante 03, que se presenta a continuación (Figura 52):

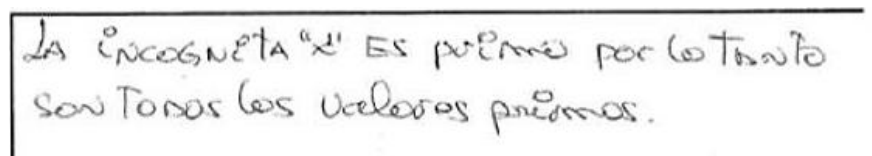


Figura 52. Respuesta del participante 03 - análisis del problema 2e)

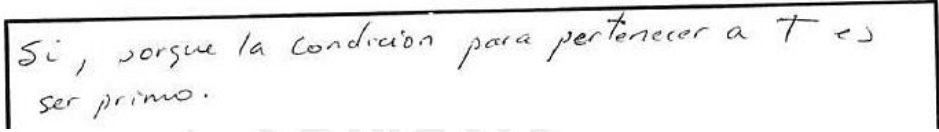
La respuesta del participante 03 presentó el error de adición de información extraña pues, al parecer, consideró que x podía ser una variable que representaba a cualquier número primo. Ese, tal vez, fue el fundamento para afirmar que “ x es primo por lo tanto son todos los valores primos”. De este modo, habría terminado por concluir que “Si x es un número

primero entonces x es un elemento de T . Con ello, habría incurrido en otro error más: el de conclusión de la conversa.

b) Error de conclusión de la conversa

Aquellos que cometieron este error fueron el participante 12 y el participante 07. A continuación, presentamos la respuesta del primero de los participantes aquí mencionados (Figura 53):

- e) En base a la proposición dada, ¿se puede concluir que el conjunto T está formado por todos los números primos? ¿Por qué?



Si, porque la condición para pertenecer a T es ser primo.

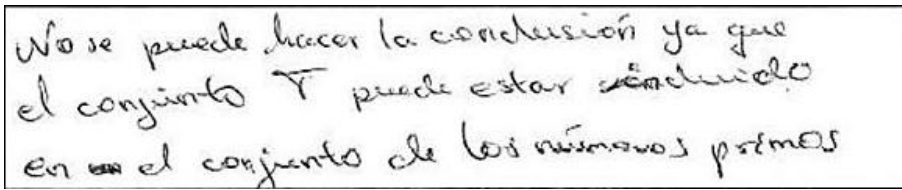
Figura 53. Respuesta del participante 12 – análisis de problema 2e)

Se puede observar en la figura anterior que el participante 12 cometió el error de conclusión de la conversa (apartado 2.2.2., p. 61) pues, a partir de la proposición verdadera planteada en el enunciado del problema, parece haber concluido que “Si x es un número primo entonces x es un elemento del conjunto T ”. Es de esta forma que podría entenderse la justificación del participante mencionado cuando indicó que “la condición para pertenecer a T es ser primo”.

c) Imprecisión en la respuesta dada

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el presente trabajo, consideramos que este error tiene lugar cuando el participante no emplea en forma adecuada el lenguaje (natural o matemático) durante la redacción de su respuesta. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se emplea en forma inexacta un concepto matemático o cuando su redacción manifiesta ambigüedad.

Quien cometió el error de imprecisión en la respuesta dada fue el participante 08. A continuación, presentamos su respuesta (Figura 54):



No se puede hacer la conclusión ya que el conjunto T puede estar incluido en el conjunto de los números primos.

Figura 54. Respuesta del participante 08 - análisis del problema 2e)

A partir de la Figura 54, podemos indicar que el participante 08 incurrió en el error de imprecisión en la respuesta dada porque afirmó que “el conjunto T puede estar incluido en el conjunto de los números primos”. En realidad, la proposición verdadera enunciada

en el problema indicaría que T está *propriadamente incluido* en el conjunto de los números primos, y no lo mencionado por el participante 08. Con lo enunciado por él, mas bien, estaría dando a entender que T *podría o no* estar incluido dentro del conjunto de los números primos.

d) No codificable

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el presente trabajo, consideramos que esta categoría se presenta cuando el argumento que el participante brinda en su justificación, no muestra la ilación necesaria para permitir el análisis.

Colocamos en la categoría de no codificable a las respuestas del participante 05 y del participante 10. Mostramos, a continuación, la correspondiente al primer participante aquí mencionado (Figura 55):

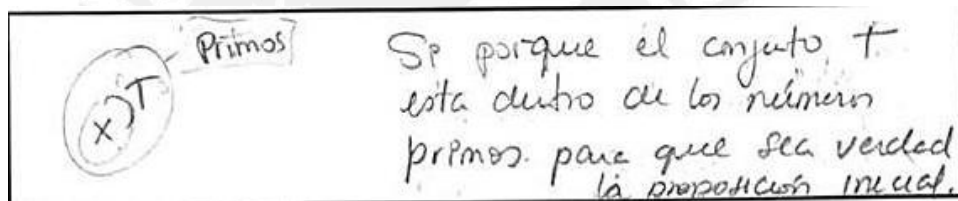


Figura 55. Respuesta del participante 05 - análisis del problema 2e)

A partir de la respuesta presentada en la Figura 55, podemos afirmar que el participante 05 respondió en forma incorrecta, pero la justificación emitida no muestra la redacción adecuada que permita analizar el error cometido. Así pues, no se puede comprender lo que significa que el participante mencionado busque una razón “para que sea verdad la proposición inicial” si, precisamente, ese es un dato.

- *Para el ítem f*

a) Conclusión de la conversa

Fueron el participante 04 y el participante 12 quienes cometieron este error. Presentamos, a continuación, la respuesta del primero de los participantes aquí mencionados:

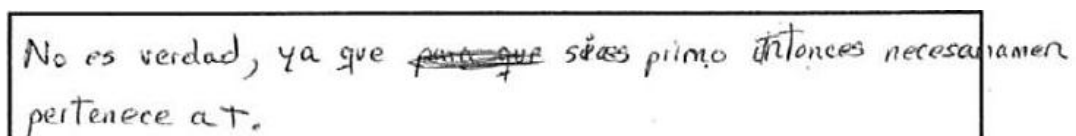


Figura 56. Respuesta del participante 04 - análisis del problema 2f)

A partir de la Figura 56 podemos observar que la respuesta del participante 04 comenzó siendo correcta, pero su justificación incurrió en el error de conclusión de la conversa

(apartado 2.2.2., p. 61), pues consideró que “si [el número] es primo entonces necesariamente pertenece a T ”. Esta proposición corresponde a la conversa de la proposición verdadera brindada en el enunciado del problema: “Si x es un elemento del conjunto T entonces x es un número primo”.

5.2.2. Consideraciones finales del análisis realizado sobre las respuestas frente al problema 2

En la siguiente tabla (Tabla 34) mostramos un breve resumen cuantitativo acerca de los tipos de errores cometidos en el desarrollo del problema 2. Así mismo, en una de las columnas se indican las ID de los participantes que incurrieron en el tipo de error mencionado.

Tabla 34. Tipos de errores cometidos frente al problema 2

Ítem	Tipo de error	Apartado del capítulo 2	Nº	ID de los participantes	TOTAL
a	Adición de información extraña	2.2.4.	3	06, 08, 11	9
	Afirmación del consecuente	2.2.1.	2	10, 12	
	Concepción causal de la implicación	2.2.3.	2	05, 07	
	Conclusión de la conversa	2.2.2.	2	03, 09	
b	Adición de información extraña	2.2.4.	3	09, 10, 12	3
c	Imprecisión en la respuesta dada	-	1	05	2
	Conclusión de la conversa	2.2.2.	1	08	
d	Negación del antecedente	2.2.1.	4	03, 05, 06, 10	7
	Conclusión de la conversa	2.2.2.	2	09, 12	
	No codificable	-	1	07	
e	Adición de información	2.2.4.	4	01, 03, 06, 09	9

	extraña				
	Conclusión de la conversa	2.2.2.	2	07, 12	
	No codificable	-	2	05, 10	
	Imprecisión en la respuesta dada	-	1	08	
f	Conclusión de la conversa	2.2.2.	2	04, 12	2

Observamos en la Tabla 34 que los errores más frecuentes cometidos frente a los ítems a, d y e, fueron la adición de información extraña (3 de 9 participantes), la negación del antecedente (4 de 7 participantes) y la adición de información extraña (4 de 9 participantes), respectivamente. Así mismo, frente a los ítems b y f, el único error cometido fue, en cada uno de ellos, la adición de información extraña y la conclusión de la conversa, respectivamente. Hay que señalar que, relacionado al ítem c, se registró igual cantidad de participantes (1 de 2) para cada uno de los tipos de errores cometidos: imprecisión en la respuesta dada y conclusión de la conversa. Finalmente, los ítems a y c fueron aquellos donde más errores se cometieron.

A partir de los análisis efectuados, podemos apreciar que el error de adición de información extraña aparece en diferentes formas: ya sea mediante la consideración de una condición que no se brindó en el enunciado del problema (como frente a los ítems a y e), ya sea mediante el empleo de una palabra relacionada al cuantificador universal (como frente al ítem b), etc. Así mismo, durante la solución de este problema se advirtió el surgimiento de determinados errores que no pertenecían a las categorías descritas en el capítulo 2. Tales fueron el error de imprecisión en la respuesta dada (frente a los ítems c y e), así como el no codificable (frente a los ítems d y e). En el caso de la última categoría, el empleo de una técnica investigativa (como la entrevista) podría aclarar con precisión acerca del tipo de error presente en la respuesta del participante.

5.3. Análisis de los errores cometidos en el desarrollo del problema 3

5.3.1. Errores detectados y ejemplos ilustrativos

Presentamos, en seguida, la explicación correspondiente a cada uno de los tipos de errores detectados:

- *Para el ítem a – i*

a) Error de conclusión de la conversa

Aquellos que cometieron este error fueron el participante 2, el participante 10 y el participante 12. Mostramos el análisis correspondiente de la respuesta del participante 10 (Figura 57):

a) *Las fichas verdes son triangulares.*

Todas las fichas triangulares son del mismo material

INFORMACIÓN SOBRE FICHAS PARTICULARES		PREGUNTA	SI	NO	NO SE SABE	EXPLICACIÓN
i)	F1 es una ficha azul	¿Es F1 triangular?		X		los de forma triangular son verdes.

Figura 57. Respuesta del participante 10 – análisis del problema 3a) – i

Como se puede observar en la Figura 57, la respuesta del participante 10 comenzó siendo correcta, pero incurrió en el error de conclusión de la conversa (apartado 2.2.2., p. 61). En efecto, dada la premisa “Las fichas verdes son triangulares”, su conversa se expresa como “las fichas triangulares son verdes”. Dicha conversión se puede apreciar en la explicación brindada por el participante 10: “las [fichas] de forma triangular son verdes”.

La respuesta del participante 10 también podría relacionarse con el error de negación del antecedente, pues la posible estructura del razonamiento seguido por el participante mencionado (y que podría haberle indicado la opción a seleccionar) parece haber sido la siguiente:

Las fichas verdes son triangulares

F1 no es verde

Por lo tanto, F1 no es triangular

b) Error de negación del antecedente

Los participantes que cometieron este error fueron 07 e 09. Mostramos, a continuación, la respuesta del participante 07 (Figura 58):

INFORMACIÓN SOBRE FICHAS PARTICULARES		PREGUNTA	SI	NO	NO SE SABE	EXPLICACIÓN
i)	F1 es una ficha azul	¿Es F1 triangular?		X		Por que las verdes son triangulares.

Figura 58. Respuesta del participante 07 – análisis del problema 3a) – i

A partir de la Figura 58, podemos observar que el participante 07 cometió el error de negación del antecedente (apartado 2.2.1., p. 60). La estructura del razonamiento que este participante parece haber seguido es la siguiente:

Las fichas verdes son triangulares

F1 no es verde

Por lo tanto, *F1* no es triangular

Esta conclusión es errónea, pues no se puede garantizar el que *F1* sea triangular. Obsérvese que la elección realizada por el participante 07 ha sido explicada por él mediante la primera premisa de la situación a: “las [fichas] verdes son triangulares”. Al parecer, el participante mencionado comprendió al enunciado condicional “Las fichas verdes son triangulares” como un bicondicional, pues solo bajo esa característica la inferencia anteriormente señalada es correcta.

c) Error de adición de información extraña

Solo el participante 03 incurrió en este tipo de error. A continuación, mostramos su respuesta (Figura 59):

a) *Las fichas verdes son triangulares.*

Todas las fichas triangulares son del mismo material

INFORMACIÓN SOBRE FICHAS PARTICULARES	PREGUNTA	SI	NO	NO SE SABE	EXPLICACIÓN
i) F1 es una ficha azul	¿Es F1 triangular?			X	Porque es AL AZAR

Figura 59. Respuesta del participante 03 – análisis del problema 3a) – i

A partir de lo observado en la Figura 59, podemos indicar que el participante 03 incurrió en el error de adición de información extraña (apartado 2.2.4., p. 62), pues su elección correcta la explicó mediante una razón o dato que no figuraba en el planteamiento del problema: “porque es al azar”.

- **Para el ítem a – ii**

a) Error de afirmación del consecuente

Este error fue cometido por los participantes 01, 10, 06, 12, 05 y 11. Mostramos, a continuación, el análisis de la respuesta del participante 06 (Figura 60):

ii)	F3 y F4 son del mismo material	¿Son F3 y F4 triangulares?	X		Por que todas las fichas triangulares son del mismo material.
-----	--------------------------------	----------------------------	---	--	---

Figura 60. Respuesta del participante 06 – análisis del problema 3a) – ii

A partir de la Figura 60, podemos observar que el participante 06 parece haber seguido el siguiente razonamiento:

Todas las fichas triangulares son del mismo material

F3 y F4 son del mismo material

Por lo tanto, F3 y F4 son triangulares

La conclusión es errónea, pues aunque dos fichas tengan el mismo material, ello no indica que las fichas sean triangulares. De esta forma, el participante 06 habría incurrido en el error de afirmación del antecedente (apartado 2.2.1., p. 60).

Sin embargo, el hecho de haber considerado literalmente a la segunda premisa planteada en el problema (“Todas las fichas triangulares son del mismo material”) para explicar la elección del mencionado participante podría indicarnos que dicha premisa (que constituye un enunciado condicional) fue comprendida como un enunciado bicondicional. Solo en una proposición de este tipo se puede efectuar un razonamiento como el anteriormente señalado.

b) No codificable

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el presente trabajo, consideramos que esta categoría se presenta cuando el argumento que el participante brinda en su justificación, no muestra la ilación necesaria para permitir el análisis.

Presentamos la respuesta brindada por el participante 03 (Figura 61), que es errónea, pero con características peculiares que ocasionan que se la considere bajo la categoría ya indicada.

ii)	F3 y F4 son del mismo material	¿Son F3 y F4 triangulares?	X		Porque a cada uno le corresponde una etiqueta. Pero se puede ser el mismo material.
-----	--------------------------------	----------------------------	---	--	---

Figura 61. Respuesta del participante 03 – análisis del problema 3a) – ii

Podemos observar en la Figura 61 que la respuesta del participante 03 presenta elementos que, ya parecen repetir datos proporcionados en el problema (“a cada uno le corresponde una etiqueta”), ya parecen encontrarse en contradicción con aquellos (“puede ser del mismo material”). Por estos rasgos, consideramos que la respuesta del participante 03 fue errónea (pues su selección lo es), pero la justificación, al no permitir su análisis, fue considerada por nosotros como no codificable.

- **Para el ítem a – iii**

a) Error por indeterminación por supuesta insuficiencia de datos

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el presente trabajo, consideramos que este error ocurre cuando, en un problema donde se ha planteado una cuestión a examinar, el participante indica que los datos planteados no son suficientes para responder frente a aquella, aun cuando aquellos sí le brindan información para hacerlo. De esta forma, por ejemplo, algunos participantes podrían responder “No existe la condición para responder frente a...” o “El problema no lo indica...”

Los participantes que cometieron este error fueron 01, 11 y 05. A continuación, mostramos la respuesta del participante 11 (Figura 62).

iii)	F5 es redonda	¿Es F5 verde?		X	No Hay Condición
------	---------------	---------------	--	---	------------------

Figura 62. Respuesta del participante 11 – análisis del problema 3a) – iii

El error cometido por el participante 11 correspondió a la indeterminación por supuesta insuficiencia de datos ya que, tras elegir la opción incorrecta en su respuesta, explicó esta con la frase “no hay condición”. Con ella, posiblemente quiso indicar que los datos presentados en las premisas y en el ítem no le brindaban información acerca del color de las fichas redondas. De esta manera, desconoció que, con todos los datos presentados ante él, sí podía concluir en una respuesta negativa.

Otra forma en que se manifiesta este tipo de error se presenta en la respuesta del participante 01, que mostramos a continuación (Figura 63):

iii)	F5 es redonda	¿Es F5 verde?		X	Porque pueden ser de los 2 colores
------	---------------	---------------	--	---	------------------------------------

Figura 63. Respuesta del participante 01 - análisis del problema 3a) - iii

Como se puede apreciar, el participante 01 cometió el mismo error de indeterminación por supuesta insuficiencia de datos pues, además de seleccionar la opción de respuesta incorrecta (“No se sabe”), la justificación se desvió hacia un aspecto sobre el que no se le pidió responder. Es cierto que “pueden ser [las fichas] de otros 2 colores” como indicó el participante 01, pero ese dato evade la cuestión planteada en el ítem: dado que F5 es redonda, ¿es F5 verde?

b) Error de conclusión de la conversa

El único participante que cometió este tipo de error fue 12, cuya respuesta presentamos a continuación (Figura 64):

iii)	F5 es redonda	¿Es F5 verde?	X	todas las fichas triangulares son verdes
------	---------------	---------------	---	--

Figura 64. Respuesta del participante 12 – análisis del problema 3a) – iii

A partir de lo observado en la Figura 64, podemos indicar que el participante 12 incurrió en el error de conclusión de la conversa (apartado 2.2.2., p. 61) pues, aunque su elección fue correcta, la justificación brindada (“todas las fichas triangulares son verdes”) constituye la proposición conversa de la premisa “Las fichas verdes son triangulares”. También podríamos indicar que la justificación escrita por el participante 12 parece encontrarse relacionada con el error de concepción causal de la implicación, pues la elección correcta de la opción “No” nos brinda un indicio. Tal vez el citado participante creyó que el color verde de las fichas fue causa para su forma triangular. Esto se concretaría en la expresión “si las fichas son verdes *deben ser* triangulares”. Al seguir este posible hilo de pensamiento, la justificación del participante 12 (“todas las fichas triangulares son verdes”) podría brindar el asidero para indicar que F5 (ficha redonda) no es verde.

c) Error de imposición de requisito discordante con la información dada

El único participante que cometió este tipo de error fue 03, cuya respuesta presentamos a continuación (Figura 65):

iii)	F5 es redonda	¿Es F5 verde?	X	* NO HAY F5 * EN TODO CASO SERIA AZUL.
------	---------------	---------------	---	---

Figura 65. Respuesta del participante 03 - análisis del problema 3a) - iii

Como podemos observar en la Figura 65, el participante 03 ha incurrido en el error de imposición de requisito discordante con la información dada (apartado 2.2.7., p. 64), pues

ha indicado, en contra del dato proporcionado que “no hay F5”. Así mismo, parece haber agregado información extraña cuando indica que F5 “sería azul”. Ello no es correcto, al no haberse establecido cuáles de las fichas poseían este color.

d) No codificable

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el presente trabajo, consideramos que esta categoría se presenta cuando el argumento que el participante da en su justificación, no muestra la ilación necesaria para permitir el análisis.

Debido a sus características, la respuesta del participante 04 ha sido colocada dentro de la categoría no codificable. La mostramos a continuación (Figura 66):

iii)	F5 es redonda	¿Es F5 verde?			X	
------	---------------	---------------	--	--	---	--

Figura 66. Respuesta del participante 04 - análisis del problema 3a) – iii

Podemos observar en la Figura 66 que, aunque la elección del participante 04 fue incorrecta, el hecho de no explicar las razones que le llevaron a aquella no permite realizar el análisis. Por ello, hemos considerado la respuesta del mencionado participante en la categoría de no codificable.

- **Para el ítem a – iv**

a) Error de adición de información extraña

Este tipo de error fue cometido por los participantes 10 y 06. Presentamos, a continuación, la respuesta del participante 10 (Figura 67).

iv)	F7 y F8 son fichas verdes	¿Son F7 y F8 del mismo material?			X	ES POSIBLE, PERO SI TIENEN FORMA TRIANGULAR.
-----	---------------------------	----------------------------------	--	--	---	--

Figura 67. Respuesta de 10 – análisis del problema 3a) – iv

A partir de la Figura 67, podemos indicar que el participante 10 cometió el error de adición de información extraña (apartado 2.2.4., p. 62) pues, además de elegir una opción incorrecta en su respuesta, explicó la misma con la frase “es posible, pero sí tienen forma triangular”. Con dicha expresión, agregó incertidumbre a la primera premisa del problema, es decir, parece que la comprendió en la forma “*Es posible* que las fichas

verdes sean triangulares”. De esta forma, introdujo un elemento extraño al enunciado de la premisa, lo que no le permitió arribar a la conclusión correcta.

De manera similar, pero mediante la adición de información extraña a la segunda premisa planteada en el problema, se registró la respuesta del participante 06, la misma que presentamos a continuación (Figura 68):

iv)	F7 y F8 son fichas verdes	¿Son F7 y F8 del mismo material?		X	Podrían ser del mismo material como puede que no
-----	---------------------------	----------------------------------	--	---	--

Figura 68. Respuesta del participante 06 - análisis del problema 3a) – iv

En el caso mostrado en la Figura 68, el participante 06 respondió en forma correcta y explicó su elección afirmando que F7 y F8 “podrían ser del mismo material como puede que no”. De esta forma, el participante agregó incertidumbre a la segunda premisa, comprendiéndola, al parecer, como “Es posible que todas las fichas triangulares son del mismo material”. Tal elemento extraño no le permitió concluir en forma correcta.

b) Imposición de requisito discordante con la información dada

Solo el participante 03 incurrió en este tipo de error, como se puede apreciar en el análisis de su respuesta (Figura 69).

iv)	F7 y F8 son fichas verdes	¿Son F7 y F8 del mismo material?		X	- No son verdes - Pero sí del mismo material.
-----	---------------------------	----------------------------------	--	---	--

Figura 69. Respuesta del participante 03 – análisis del problema 3a) – iv

Tras observar la Figura 69, podemos indicar que el participante 03 cometió el error de imposición de requisito discordante con la información dada (apartado 2.2.7., p. 64) al explicar su elección incorrecta mediante una frase que entraba en contradicción con el dato presentado para este ítem: F7 y F8 “no son verdes”.

- **Para el ítem b – i**

a) Error de adición de información extraña

Los participantes que cometieron este error fueron 08, 09, 02, 01 y 06. A continuación, mostramos el análisis de la respuesta del participante 09 (Figura 70).

b) Si una ficha es de cartón entonces es rectangular.
Si una ficha es de cartón entonces es verde.

INFORMACIÓN SOBRE FICHAS PARTICULARES		PREGUNTA	SI	NO	NO SE SABE	EXPLICACIÓN
i)	F1 es azul	¿Es F1 de plástico?			X	Porque pueda que sea de plástico como de cartón.

Figura 70. Respuesta de 09 – análisis del problema 3b) – i

En la Figura 70 se puede observar que el participante 09 incurrió en el error de adición de información extraña (apartado 2.2.4., p. 62) pues en la explicación brindada agregó una información que no podía ser inferida a partir de los datos presentados en el ítem. Al afirmar que F1 “puede que sea de plástico como de cartón”, el participante 09 pareció no considerar que, a partir de la segunda premisa indicada (“Si una ficha de cartón entonces es verde”) no podía inferirse que una ficha azul (no – verde) sea de cartón, sino de plástico (no – cartón).

También podría señalarse una relación entre el tipo de error cometido por el participante 09 y el error de indeterminación por supuesta insuficiencia de información. En efecto, el participante mencionado podría haber considerado que, como no se presentó información acerca de lo preguntado ni en el ítem ni en las premisas, seleccionó la opción “No se sabe”.

b) Error de afirmación de un requerimiento que no fue requerido

Solo el participante 03 incurrió en este tipo de error, como se mostrará a continuación (Figura 71).

b) Si una ficha es de cartón entonces es rectangular.
Si una ficha es de cartón entonces es verde.

INFORMACIÓN SOBRE FICHAS PARTICULARES		PREGUNTA	SI	NO	NO SE SABE	EXPLICACIÓN
i)	F1 es azul	¿Es F1 de plástico?	X			Porque puede ser Redonda.

Figura 71. Respuesta del participante 03 – análisis del problema 3b) – i

La respuesta del participante 03 (Figura 71) registró el error de afirmar un requerimiento que no fue requerido (apartado 2.2.8., p. 65), pues en la explicación de su respuesta (que fue correcta), indicó que F1 “puede ser redonda”. Con ello, el participante 03 señaló información acerca de la forma de la ficha, información que el ítem no le había exigido.

c) Indeterminación por supuesta insuficiencia de datos

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el presente trabajo, consideramos que este error ocurre cuando, en un problema donde se ha planteado una cuestión a examinar, el participante indica que los datos planteados no son suficientes para responder frente a aquella, aun cuando aquellos sí le brindan información para hacerlo. De esta forma, por ejemplo, algunos participantes podrían responder “No existe la condición para responder frente a...” o “El problema no lo indica...”

En la categoría mencionada ubicamos la respuesta emitida por el participante 11, la misma que presentamos a continuación (Figura 72):

d)	F1 es azul	¿Es F1 de plástico?								No hay Condición
						X				

Figura 72. Respuesta del participante 11 - análisis del problema 3b) - i

El error cometido por el participante 11 correspondió a la indeterminación por supuesta insuficiencia de datos ya que, tras elegir la opción incorrecta en su respuesta, explicó esta mediante la frase “no hay condición”. Con ello, posiblemente, quiso indicar que los datos presentados en las premisas y en el ítem no le brindaban información acerca del material del que estuvo hecha F1. De esta manera, desconoció que, con todos los datos presentados ante él, sí podía concluir en una respuesta negativa.

d) No codificable

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el presente trabajo, consideramos que este error se presenta cuando el argumento que el participante brinda en su justificación, no muestra la ilación necesaria para permitir el análisis.

Insertamos en esta categoría la respuesta del participante 04, que presentamos a continuación (Figura 73):

d)	F1 es azul	¿Es F1 de plástico?								
						X				

Figura 73. Respuesta del participante 11 - análisis del problema 3b) – i

Como se puede apreciar, el participante *11* realizó su selección (errónea), pero no indicó explicación alguna que la respalde y que pueda ser analizada. Por ello, consideramos la respuesta como no codificable.

- **Para el ítem b – ii**

a) Error de concepción causal de la implicación

Los participantes que cometieron este error fueron *03, 04, 05, 09, 10, 11* y *12*. Se muestra, a continuación el análisis de la respuesta del participante *10* (Figura 74).

ii)	F2 es una ficha de plástico	¿Es F2 rectangular?	X	NO, PORQUE SI ES RECTANGULAR TIENE QUE SER DE MATERIAL CARTÓN.
-----	-----------------------------	---------------------	---	--

Figura 74. Respuesta del participante *10* – análisis del problema 3b) – ii

Como observamos en la Figura 74, el participante *10* incurrió en el error de concepción causal de la implicación (apartado 2.2.3., p. 61) pues parece haber comprendido a la segunda premisa planteada en el problema (“Si una ficha es de cartón entonces es rectangular”) como un enunciado que indica causa y efecto: el que la ficha sea de cartón *es factor precedente* para que la ficha tenga forma rectangular. De esta forma, podría haber comprendido el ítem en el sentido que, si *F1* es de plástico, entonces *no podía* ser rectangular. Un indicio para ello sería la explicación aportada por el participante *10* para su elección incorrecta: “si [la ficha] es rectangular tiene que ser de material cartón”.

b) Imposición de un requisito discordante con la información dada

Solo el participante *01* incurrió en error de este tipo (Figura 75).

ii)	F2 es una ficha de plástico	¿Es F2 rectangular?	X	Es posible que sea de cartón y a la vez sea redonda & tri angular
-----	-----------------------------	---------------------	---	---

Figura 75. Respuesta del participante *01* – análisis del problema 3b) – ii

La respuesta del participante *01* registró el error de imposición de un requisito discordante con la información dada (apartado 2.2.7., p. 64) pues, ante el ítem que brindaba datos acerca del material de *F2* (“*F2* es una ficha de plástico”), la explicación del participante mencionado consideró datos contradictorios al indicar “es posible que [*F2*] sea de cartón”.

- **Para el ítem b – iii**

a) Concepción causal de la implicación

Los participantes que incurrieron en este tipo de error fueron 03, 05, 11 y 12. Mostraremos, a continuación, la respuesta del participante 05 (Figura 76).

iii)	F3 es rectangular	¿Es F3 una ficha de cartón?	X		Si porque si son de cartón son rectangulares.
------	-------------------	-----------------------------	---	--	---

Figura 76. Respuesta del participante 05 – análisis del problema 3b) – iii

La respuesta del participante 05 registró el error de concepción causal de la implicación (apartado 2.2.3., p.61) pues parece haber comprendido a la primera premisa planteada en el problema (“Si una ficha es de cartón entonces es rectangular”) como un enunciado que indica causa y efecto: el que la ficha sea de cartón *es factor precedente* para que la ficha tenga forma rectangular. De esta forma, podría haber comprendido el ítem en el sentido que, si F3 es rectangular, entonces *debía ser* de cartón. Un indicio para ello sería la explicación aportada por el participante 05 para su elección incorrecta: “si porque si [las fichas] son de cartón son rectangulares”.

b) Error de imposición de un requisito discordante con la información dada

Solo el participante 01 incurrió en este error (Figura 77).

iii)	F3 es rectangular	¿Es F3 una ficha de cartón?		X	no todas las fichas de cartón son rectangulares
------	-------------------	-----------------------------	--	---	---

Figura 77. Respuesta del participante 01 – análisis del problema 3b) – iii

Como se puede observar en la Figura 77, el participante 01 cometió el error de imponer un requisito discordante con la información dada (apartado 2.2.7., p. 64), pues él manifestó durante su explicación que “no todas las fichas de cartón son rectangulares”, lo que contradijo la información brindada en la primera premisa (“Si una ficha es de cartón entonces es rectangular”).

c) Error de afirmación del consecuente

Solo el participante 10 cometió este tipo de error, tal como se muestra en la Figura 78.

iii)	F3 es rectangular	¿Es F3 una ficha de cartón?	X		correcto si es de forma rectangular es de cartón.
------	-------------------	-----------------------------	---	--	---

Figura 78. Respuesta del participante 10 - análisis del problema 3b) - iii

La respuesta del participante 10 incurrió en el error de afirmación del consecuente (apartado 2.2.1., p. 60). Dicho participante pareció haber elaborado el siguiente razonamiento:

Si una ficha es de cartón entonces es rectangular

F3 es rectangular

Por lo tanto, *F3* es de cartón

La conclusión de este razonamiento es errónea, pues no se tiene la seguridad que todas las fichas rectangulares sean de cartón. Precisamente ese fue el argumento expresado por el participante 10 durante su explicación: “si [la ficha] es de forma rectangular es de cartón”. Así mismo, podríamos indicar que el tipo de error señalado por nosotros mantiene relación con el error de conclusión de la conversa, pues el argumento proporcionado por el participante es, exactamente, la conversa de una de las premisas planteadas como dato (“Si una ficha es de cartón entonces es rectangular”).

5.3.2. Consideraciones finales del análisis realizado sobre las respuestas frente al problema 3

En la siguiente tabla (Tabla 35) mostramos los tipos de errores cometidos durante el desarrollo del problema 3. Así mismo, consideramos las ID de los participantes que incurrieron en los errores consignados en la tabla.

Tabla 35. Tipos de errores cometidos frente al problema 3

Ítem	Tipo de error	Apartado del capítulo 2	Nº	ID de los participantes	TOTAL
a – i	Conclusión de la conversa	2.2.2.	3	02, 10, 12	6
	Negación del antecedente	2.2.1.	2	07, 09	
	Adición de información extraña	2.2.4.	1	03	
a – ii	Afirmación del consecuente	2.2.1.	6	01, 05, 06, 10, 11, 12	7
	No codificable	-	1	03	
a – iii	Indeterminación por supuesta insuficiencia de	-	3	01, 05, 11	6

	datos				
	Conclusión de la conversa	2.2.2.	1	12	
	Imposición de requisito discordante con la información dada	2.2.7.	1	03	
	No codificable	-	1	04	
a – iv	Adición de información extraña	2.2.4.	2	06, 10	3
	Imposición de requisito discordante con la información dada	2.2.7.	1	03	
b – i	Adición de información extraña	2.2.4.	5	01, 02, 06, 08, 09	8
	Afirmación de un requerimiento que no fue requerido	2.2.8.	1	03	
	Indeterminación por supuesta insuficiencia de datos	-	1	11	
	No codificable	-	1	04	
b – ii	Concepción causal de la implicación	2.2.3.	7	03, 04, 05, 09, 10, 11, 12	8
	Imposición de un requisito discordante con la información dada	2.2.7.	1	01	
b – iii	Concepción causal de la implicación	2.2.3.	4	03, 05, 11, 12	6
	Imposición de un requisito discordante con la información dada	2.2.7.	1	01	
	Afirmación del consecuente	2.2.1.	1	10	

Observamos en la Tabla 35 que los errores más frecuentes cometidos frente a los ítems a – i, a – ii, a – iii y a – iv, fueron los de conclusión de la conversa (3 de 6 participantes), afirmación del consecuente (6 de 7 participantes), indeterminación por supuesta insuficiencia de datos (3 de 6 participantes) y adición de información extraña (2 de 3 participantes), respectivamente. Por otra parte, los errores más frecuentes que se cometieron frente a los ítems b – i, b – ii y b – iii fueron los de adición de información extraña (5 de 8 participantes), concepción causal de la implicación (7 de 8 participantes) y el mismo tipo de error para el último ítem mencionado (4 de 6 participantes), respectivamente. Cabe indicar, así mismo, que fueron los ítems b – i y b – ii aquellos donde se cometieron más errores, mientras que durante la solución del ítem b – iv no se cometieron errores.

De acuerdo con los análisis efectuados en torno a las respuestas presentadas frente al problema 3, podríamos indicar cierta relación existente entre los errores de conclusión de la conversa, negación del antecedente y afirmación del consecuente, a juzgar por ciertas particularidades observadas en las respuestas (frente a los ítems a-i y a-ii, por ejemplo). Un vínculo similar podría establecerse, a partir de las respuestas analizadas, entre los errores de conclusión de la conversa y concepción causal de la implicación (frente al ítem a-iii, por ejemplo). Así mismo, durante la solución de este problema se advirtió el surgimiento de determinados errores que no pertenecían a las categorías descritas en el capítulo 2. Tales fueron el error de indeterminación por supuesta insuficiencia de datos (frente a los ítems a-iii y b-i), así como la categoría no codificable (frente a los ítems a-ii, a-iii y b-i). Mientras que el primero parece relacionarse con la adición de información extraña (como en una de las respuestas brindadas frente al ítem b-i, por ejemplo), en la última categoría, el empleo de una técnica investigativa (como la entrevista) podría aclarar con precisión acerca del tipo de error presente en la respuesta del participante. La técnica ya indicada también podría mostrarnos las razones para la no comisión de errores en las respuestas dadas frente al ítem b-iv.

5.4. Análisis de los errores cometidos en el desarrollo del problema 4

5.4.1. Errores detectados y ejemplos ilustrativos

Hay que indicar que, en el problema 4, el error de conclusión de la conversa se relaciona y expresa con la forma conversa de la cuestión planteada en dicho problema, cuyas particularidades se mostrarán durante los análisis respectivos. Así mismo, debemos

señalar que los errores observados en las respuestas emitidas frente el mismo problema no se presentan en forma terminante debido a que, en muchos casos, el manuscrito no permitió identificar con claridad cuál fue el tipo de error cometido durante la emisión de la respuesta.

Presentamos, en seguida, la explicación correspondiente a cada uno de los tipos de errores detectados.

- **Para el procedimiento 1**

- a) Error de conclusión de la conversa

Los participantes que cometieron este error fueron 09, 07, 12, 08 y 11. En la siguiente figura (Figura 79) presentamos la respuesta del participante 11, cuyo análisis nos permitirá observar en qué consiste el error señalado.

Para el Procedimiento 1:

Marque una de las siguientes opciones:

(a)

(b)

Justificación:

*Si saco 4 y es Negro, entonces
Eso No Cumple.*

Figura 79. Respuesta del participante 11, análisis del problema 4 - 1

A partir de la Figura 79 se puede señalar que el participante 11 pareció incurrir en el error de conclusión de la conversa (apartado 2.2.2., p. 61), manifestado en la forma de pregunta conversa. Esto significa que, a partir de la pregunta planteada en el problema (“¿Será cierto que todas las bolas blancas de la urna tienen un número par?”) el participante pudo haberla comprendido en la forma “¿Será cierto que todas las bolas con número par son blancas?”. Solo desde este punto de vista pueden entenderse la respuesta y la justificación erróneas del participante 11, pues al marcar la opción (a) y afirmar “si saco 4 y es negro, entonces no cumple”, estaría indicando un caso en el que podría responder con seguridad (en forma negativa) frente a la pregunta conversa.

- b) Error de adición de información extraña

Los participantes que cometieron este error fueron 10, 06 y 03. En la siguiente figura (Figura 80) presentamos la respuesta del participante 10, cuyo análisis nos permitirá observar en qué consiste el error señalado.

Para el Procedimiento 1:

Marque una de las siguientes opciones:

(a) (b)

Justificación:

SI PORQUE SI SALE UN NUMERO PAR
ES DE COLOR BLANCO.

Figura 80. Respuesta del participante 10, análisis del problema 4 – 1

La justificación del participante 10 para su elección incorrecta registró el error de adición de información extraña (apartado 2.2.4., p. 62), pues agregó un dato no mencionado en el texto del problema: “si sale un número par es de color blanco”. Al mismo tiempo, parece que el mencionado participante comprendió a la pregunta planteada en el problema (“¿Será cierto que todas las bolas blancas de la urna tienen un número par?”) en su forma conversa, es decir, “¿Será cierto que todas las bolas con número par son blancas?”. Ello podría explicar su elección incorrecta por la opción (a) en este procedimiento.

Otra manera de agregar información extraña se muestra a continuación (Figura 81) en la respuesta del participante 06.

Marque una de las siguientes opciones:

(a) (b)

Justificación:

Me permite responder
con seguridad puesto
que observaré los números
de las bolas de la bolsa y podré responder

Figura 81. Respuesta del participante 06, análisis del problema 4 - 1

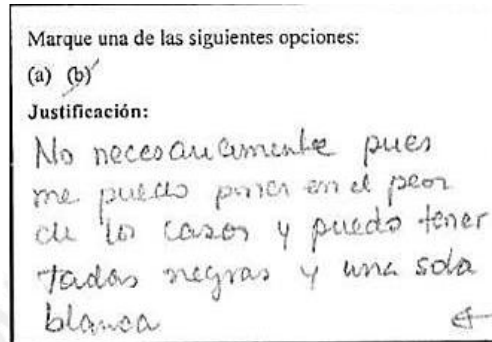
En la Figura 81 podemos observar que la justificación emitida por el participante 06 también agregó información extraña, pues indicó “observaré los números de las bolas de la bolsa y podré responder”. Nada se dice en las condiciones del problema acerca de la observación de las bolas que aún quedan dentro de la urna y la afirmación del participante 06 añadió ese elemento. Sin embargo, tal adición lleva a otra interrogante pues, aunque supiera el número de cada una de las bolas contenidas dentro de la urna (que es impar), ¿cómo le permitiría dicha información responder a la pregunta planteada?

c) No codificable

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el

presente trabajo, consideramos que este error se presenta cuando el argumento que el participante da en su justificación, no muestra la ilación necesaria para permitir el análisis.

Incluimos dentro de esta categoría a la respuesta emitida por el participante 05, que mostramos a continuación (Figura 82):



Marque una de las siguientes opciones:
(a) (b)
Justificación:
No necesariamente pues
me puedo poner en el peor
de los casos y puedo tener
todas negras y una sola
blanca

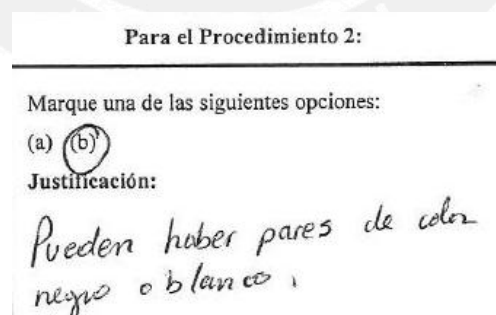
Figura 82. Respuesta del participante 05, análisis del problema 4 - 1

La respuesta del participante 05 ha sido incluida dentro de la categoría no codificable debido a que no se puede comprender a qué se refiere con la expresión “el peor de los casos”.

- **Para el procedimiento 2**

- a) Error de conclusión de la conversa

Los participantes que cometieron este error fueron 08, 07, 01 y 04. En la siguiente figura (Figura 83) presentamos la respuesta de 04, cuyo análisis nos permitirá observar el error señalado.



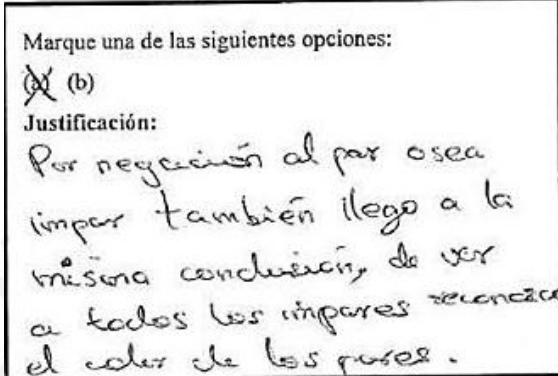
Para el Procedimiento 2:
Marque una de las siguientes opciones:
(a) (b)
Justificación:
Pueden haber pares de color
negro o blanco

Figura 83. Respuesta del participante 04, análisis del problema 4 - 2

Como se puede apreciar en la Figura 83, el participante 04 pareció incurrir en el error de conclusión de la conversa (apartado 2.2.3., p. 61), manifestado en la forma conversa de la pregunta planteada en el problema. En efecto: la pregunta “¿Será cierto que todas las bolas blancas de la urna tienen número par?” pudo haber sido comprendida por el mencionado participante en la forma conversa “¿Será cierto que todas las bolas con número par son blancas?”. Solo así podría explicarse que el participante 04, tras detenerse

a analizar las bolas que quedaban al interior de la urna (bolas con número par) indique “pueden haber pares de color negro o blanco”. De esta forma, dada la forma conversada de la pregunta planteada, la situación descrita por el participante dentro de la urna, no le permita concluir con seguridad.

Otra forma de comisión del mismo error puede observarse en la respuesta brindada por el participante 08, que a continuación mostramos (Figura 84):



Marque una de las siguientes opciones:
 (b)
 Justificación:
 Por negación al par o sea impar también llego a la misma conclusión, de ver a todos los impares reconozco el color de los pares.

Figura 84. Respuesta del participante 08, análisis del problema 4 - 2

A partir de la Figura 84, se podría indicar que el participante 08 comprendió a la pregunta planteada en el problema en su forma conversada, es decir, “¿Será cierto que todas las bolas con número par son blancas?”. Ello es lo que podría obtenerse a partir de su justificación, realizada, al parecer, tras enfocar su atención en las bolas que quedaron dentro de la urna: “de [¿tras?] ver a todos los impares reconozco el color de los pares”. Sin embargo, las frases anteriores de la justificación emitida por el participante 08 también merecen análisis: “por negación al par o sea impar también llego a la misma conclusión”. Posiblemente, el mencionado participante se refiera a que, si las bolas con número impar tienen determinado color (supongamos que sea negro), entonces las bolas con número par tienen el color opuesto (en el caso supuesto, blanco). De ser esta la interpretación correcta, el participante 08 no solo estaría cometiendo el error de conclusión de la conversada, sino que, además, estaría agregando información extraña. Ella consistiría en asignar un color determinado a todas las bolas con número impar, así como un único color a todas las bolas con número par.

b) Error de adición de información extraña

Los participantes que cometieron este error fueron 06 y 10. En la Figura 85 presentamos la respuesta de 10, cuyo análisis nos permitirá observar el error señalado.

Para el Procedimiento 2:

Marque una de las siguientes opciones:

(b)

Justificación:

SI SE PUEDE PORQUE LOS IMPARES
SON DE COLOR NEGRO.

Figura 85. Respuesta del participante 10, análisis del problema 4 - 2

Se puede apreciar en la Figura 85 que el participante 10 cometió el error de adición de información extraña (apartado 2.2.4., p. 62) pues indicó, refiriéndose a las bolas, que “las impares son de color negro”. Esta información no fue proporcionada en el enunciado del problema 4 ni podía inferirse a partir del procedimiento 2.

c) Error de indeterminación por supuesta insuficiencia de datos

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el presente trabajo, consideramos que este error ocurre cuando, en un problema donde se ha planteado una cuestión a examinar, el participante indica que los datos planteados no son suficientes para responder frente a aquella, aun cuando aquellos sí le brindan información para hacerlo. De esta forma, por ejemplo, algunos participantes podrían responder “No existe la condición para responder frente a...” o “El problema no lo indica...”

El único participante que incurrió en este error fue el participante 12. En la siguiente figura (Figura 86) presentamos su respuesta, cuyo análisis nos permitirá observar el error señalado.

Para el Procedimiento 2:

Marque una de las siguientes opciones:

(a)

Justificación:

porque se requiere saber sobre
si las bolas blancas tienen
número par.

Figura 86. Respuesta del participante 12, análisis del problema 4 - 2

En la Figura 86, puede observarse que el participante 12 parece haber cometido el error de indeterminación por supuesta insuficiencia de datos, pues su justificación “se requiere saber sobre si las bolas blancas tienen número par” indicaría que el procedimiento 2 (consistente en sacar las bolas con número impar) no le brinda elementos suficientes o, tal vez a su entender, no tendría relación con la pregunta planteada en el problema. Ello, sin

embargo, es incorrecto, pues si se puede concluir en algo seguro a partir de la aplicación del procedimiento 2.

d) No codificable

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el presente trabajo, consideramos que este error ocurre cuando el argumento que el participante presenta en su justificación no muestra la ilación necesaria para permitir el análisis.

Insertamos en esta categoría a las respuestas emitidas por el participante 03, el participante 05, el participante 09 y el participante 11. Mostramos, a continuación, la respuesta del participante 09 (Figura 87).

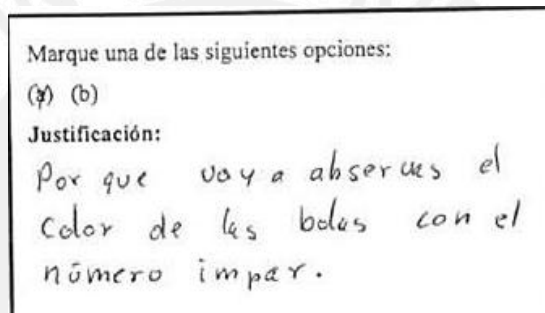


Figura 87. Respuesta del participante 09, análisis del problema 4 - 2

Como puede observarse en la Figura 87, la justificación emitida por el participante 09 “copió” el procedimiento 2: “voy a observar el color de las bolas con el número impar”. Con ello, no justificó en modo alguno su respuesta y, ante la carencia de justificación para analizar, colocamos lo emitido por el mencionado participante dentro de la categoría no codificable.

- **Para el procedimiento 3**

a) Error por inadecuado empleo de condiciones para refutar una proposición general

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el presente trabajo, consideramos que este error sucede cuando el participante parece no conocer (o no comprender) que una proposición general o universal puede ser refutada con un solo caso particular insatisfactorio para aquella, denominado *contraejemplo*. Ello se puede observar, por ejemplo, cuando se le pide al participante que indique en qué circunstancias una proposición general no es verdadera y, en su respuesta, él indica que

todos (y no uno solo) los casos relacionados con tal proposición deben ser insatisfactorios.

Aquellos que incurrieron en este error fueron el participante 04 y el participante 10. En la siguiente figura (Figura 88) presentamos la respuesta del primero de los participantes mencionados.

Para el Procedimiento 3:

Marque una de las siguientes opciones:

(a) (b)

Justificación:

*Pueden ser las bolas blancas
pares o impares*

Figura 88. Respuesta del participante 04, análisis del problema 4 - 3

Consideramos que la respuesta del participante 04 registró error posiblemente debido a inadecuado empleo de condiciones para refutar una proposición general. Tras indicar en forma errónea que el procedimiento 3 (“se sacan de la urna las bolas blancas, luego se mira los números”) no permitía concluir en algo, su justificación (“pueden ser las bolas blancas pares o impares”) podría referirse a que, para concluir con seguridad, debía suceder, o que todas las bolas blancas debían tener número par o que todas las bolas blancas debían tener número impar. De ser correcta esta presunción, el participante 04 manifestaría no comprender que es suficiente que una bola blanca tenga número impar para responder con seguridad frente a la pregunta “¿Será cierto que todas las bolas blancas de la urna tienen número par?”. Así, por ende, estaría indicando que no comprende el rol del contraejemplo en la refutación de una proposición general.

b) Adición de información extraña

Solo el participante 01 cometió este tipo de error, como mostramos a continuación (Figura 89):

Marque una de las siguientes opciones:

(a) (b)

Justificación:

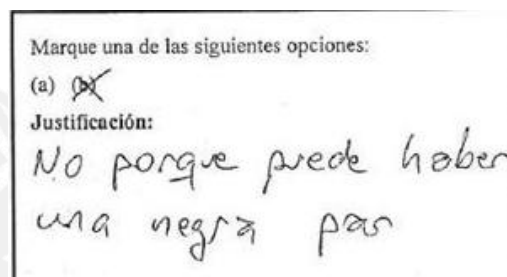
*Al sacar todas las bolas blancas
puedo saber el color y los
números de las que quedan
en la urna*

Figura 89. Respuesta del participante 01, análisis del problema 4 - 3

A partir de la Figura 89 podemos observar que el participante 01 incurrió en el error de adición de información extraña (apartado 2.2.4., p. 62), pues consideró en la justificación de su respuesta (correcta) un elemento no mencionado en las condiciones del problema: “al sacar todas las bolas blancas puedo saber [...] los números de las que quedan en la urna”. De acuerdo con las condiciones del problema y del procedimiento 3, no se puede conocer cuál es el número que poseen las bolas que quedan dentro de la urna.

c) Conclusión de la conversa

Solo el participante 07 incurrió en este tipo de error, como indicamos a continuación (Figura 90):



Marque una de las siguientes opciones:
(a)
Justificación:
No porque puede haber una negra par

Figura 90. Respuesta del participante 07, análisis del problema 4 - 3

A partir de la Figura 90, podemos observar que el participante 07 parece haber incurrido en el error de conclusión de la conversa (apartado 2.2.2., p. 61), ligado a la forma conversa de la pregunta planteada en el problema. Dado que la pregunta del problema es “¿Será cierto que todas las bolas blancas de la urna tienen número par?” y su forma conversa es “¿Será cierto que todas las bolas con número par son blancas?”, la respuesta del participante 07 pareció responder a esta última. Así pues, al justificar “no porque puede haber una negra par”, además de concentrar su atención en las bolas negras que quedaban en la urna, pareció no ser suficiente para el participante en mención, sacar las bolas de color blanco y que ellas tuviesen número par.

- **Para el procedimiento 4**

a) Error de adición de información extraña

Los participantes que incurrieron en este error fueron 05, 03 y 01. En la siguiente figura (Figura 91) presentamos la respuesta de 01.

Para el Procedimiento 4:

Marque una de las siguientes opciones:

(a) (b)

Justificación:

Al sacar todas las bolas negras puedo saber el color y los números de las que quedan en la urna

Figura 91. Respuesta del participante 01, análisis del problema 4 - 4

La Figura 91 permite observar que el participante 01 cometió el error de adición de información extraña (apartado 2.2.4., p. 62), pues él indicó que “al sacar todas las bolas negras puedo saber [...] los números de las [bolas] que quedan en la urna”. Con el procedimiento 4 (“se sacan de la urna las bolas negras, luego se mira los números”) se puede asegurar el color de las bolas que quedan dentro de la urna, pero no se puede inferir el número de estas, como erróneamente añadió el participante en mención.

b) Error de imposición de un requisito discordante con la información dada

La única participante que incurrió en este error fue 04. En la Figura 92 presentamos su respuesta.

Para el Procedimiento 4:

Marque una de las siguientes opciones:

(a) (b)

Justificación:

En la urnas pueden haber negras que son pares o impares.

Figura 92. Respuesta de 04, análisis del problema 4 - 4

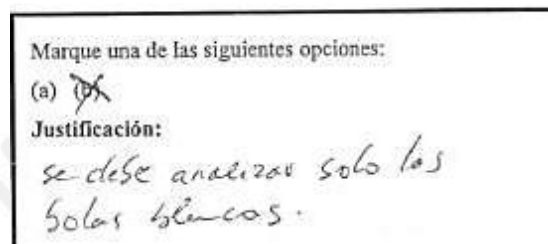
A partir de lo observado en la Figura 92 podemos indicar que el participante 04 cometió el error de imponer un requisito discordante con la información dada (apartado 2.2.7., p. 64) pues al justificar que “en las urnas pueden haber [bolas] negras que son pares o impares” ingresó en contradicción con lo indicado en el procedimiento 4 (“se sacan de la urna las bolas negras, luego se mira los números”).

c) Error debido a indeterminación por supuesta insuficiencia de datos

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el

presente trabajo, consideramos que este error ocurre cuando, en un problema donde se ha planteado una cuestión a examinar, el participante indica que los datos planteados no son suficientes para responder frente a aquella, aun cuando aquellos sí le brindan información para hacerlo. De esta forma, por ejemplo, algunos participantes podrían responder “No existe la condición para responder frente a...” o “El problema no lo indica...” Solo cometió este error el participante 12. En la siguiente figura (Figura 93) presentamos su respuesta.

Para el Procedimiento 4:



Marque una de las siguientes opciones:

(a)

Justificación:

se debe analizar solo las
bolas blancas.

Figura 93. Respuesta del participante 12, análisis del problema 4 - 4

A partir de lo observado en la Figura 93, podemos indicar que el participante 12 incurrió en el error de indeterminación por supuesta insuficiencia de datos pues, al parecer, consideró con su expresión “se debe analizar solo las bolas blancas” que el procedimiento indicado no le brindaba elementos suficientes (o, más aún, que le proporcionaba elementos ajenos) para responder con seguridad frente a la pregunta planteada en el problema, es decir, “¿Será cierto que todas las bolas blancas de la urna tienen un número par?”.

d) No codificable

Durante el análisis principal se advirtió que este tipo de error no correspondía a los descritos en el capítulo 2. Como parte del aporte metodológico desarrollado para el presente trabajo, consideramos que esta categoría se presenta cuando el argumento que el participante brinda en su justificación, no muestra la ilación necesaria para permitir el análisis.

Las respuestas aportadas por los participantes 06 y 08 han sido colocadas por nosotros dentro de esta categoría. A continuación, mostramos la respuesta emitida por el participante 06 (Figura 94):

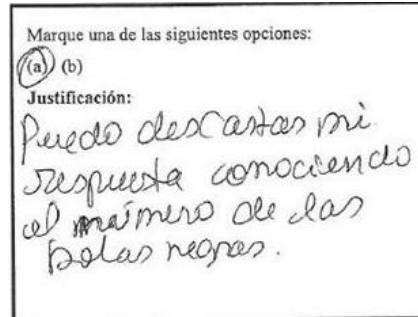


Figura 94. Respuesta del participante 06, análisis del problema 4 - 4

A partir de la Figura 94 podemos indicar que la respuesta del participante 06 no es clara, pues no se sabe a qué se refirió cuando escribió “puedo descartar mi respuesta”. Por ello, esta respuesta es considerada no codificable.

5.4.2. Consideraciones finales del análisis realizado sobre las respuestas frente al problema 4

En la siguiente tabla (Tabla 36) mostramos un breve resumen cuantitativo sobre los tipos de errores cometidos durante el desarrollo del problema 4. Así mismo, consideramos la ID de los participantes que incurrieron en los errores consignados en la tabla.

Tabla 36. Tipos de errores cometidos frente al problema 4

Procedimiento	Tipo de error	Apartado del capítulo 2	Nº	ID de los participantes	TOTAL
1	Conclusión de la conversa (pregunta conversa)	2.2.2.	5	07, 08, 09, 11, 12	9
	Adición de información extraña	2.2.4.	3	03, 06, 10	
	No codificable	-	1	05	
2	Conclusión de la conversa (pregunta conversa)	2.2.2.	4	01, 04, 07, 08	11
	Adición de información	2.2.4.	2	06, 10	

	extraña				
	Indeterminación por supuesta insuficiencia de datos	-	1	12	
	No codificable	-	4	03, 05, 09, 11	
3	Inadecuado empleo de condiciones para refutar una proposición general	-	2	04, 10	4
	Adición de información extraña	2.2.4.	1	01	
	Conclusión de la conversa (pregunta conversa)	2.2.2.	1	07	
4	Adición de información extraña	2.2.4.	3	01, 03, 05	7
	Imposición de un requisito discordante con la información dada	2.2.7.	1	04	
	Indeterminación por supuesta insuficiencia de datos	-	1	12	
	No codificable	-	2	06, 08	

Observamos en la Tabla 36 que los errores más frecuentes cometidos frente a los ítems 1, 2, 3 y 4, fueron el de conclusión de la conversa (en los dos primeros ítems), inadecuado empleo de las condiciones para refutar una proposición general (2 de 4 participantes) y adición de información extraña (3 de 8 participantes), respectivamente. Así mismo, fue en el segundo ítem donde se cometieron más errores.

De acuerdo con los análisis efectuados en torno a las respuestas presentadas frente al problema 4, podríamos indicar cierta relación existente entre los errores de conclusión de la conversa (pregunta conversa) y adición de información extraña (frente a los procedimientos 1 y 2, por ejemplo). Así mismo, durante la solución de este problema se advirtió el surgimiento de determinados errores que no pertenecían a las categorías descritas en el capítulo 2. Tales fueron los errores de indeterminación por supuesta insuficiencia de datos (frente a los procedimientos 2 y 4), inadecuado empleo de condiciones para refutar una proposición general (frente al procedimiento 3), así como la categoría no codificable (frente a los procedimientos 1, 2 y 4). Para dicha categoría, el empleo de una técnica investigativa (como la entrevista) podría aclarar con precisión acerca del tipo de error presente en la respuesta del participante.

Capítulo 6

CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo presentamos las conclusiones obtenidas respecto a los objetivos planteados en el Capítulo 1. También mostramos algunas sugerencias para continuar investigando cuestiones relacionadas con el presente trabajo.

6.1. Conclusiones

Durante nuestro estudio realizamos una revisión teórica acerca de la proposición condicional, así como de su empleo en reglas de inferencia deductiva y la conexión existente entre ambos aspectos y los conjuntos. También abordamos la forma en que tal conexión nos permitía ilustrar las inferencias lógicamente inválidas, categorías sobre las que se producían errores, conceptos que fueron examinados desde la Educación Matemática. A partir de investigaciones provenientes de dicho campo y directamente vinculadas con nuestro objeto de estudio, adaptamos los instrumentos correspondientes para obtener la información necesaria. Bajo la guía de los elementos metodológicos provenientes del análisis de contenido (como son la construcción del marco de codificación, la puesta a prueba de este y la realización del análisis principal) nuestro trabajo arribó a las siguientes conclusiones:

6.1.1. Respecto al primer objetivo específico

“Identificar los errores de profesores de Matemática de secundaria en el desarrollo de tareas que demandan conocimientos y empleo del enunciado condicional, así como sus posibles causas”

Tras la puesta a prueba del marco de codificación (que no solamente permitió distinguir las respuestas correctas de las que no lo eran, sino que, además, ayudó a distinguir el carácter de la justificación efectuada para cada una de las respuestas emitidas), así como de la realización del análisis principal y con el fundamento de los elementos teóricos abordados en el capítulo 2, podemos afirmar lo siguiente:

1. Nuestro énfasis en las justificaciones como fuente de análisis se apoyó en investigaciones antecedentes que las consideraron como “explicaciones”, “argumentos”, etc. Sin embargo, el aporte brindado por nuestro trabajo reside en que hemos estudiado los errores cometidos en un grupo de participantes con características

diferentes a las indicadas en estudios anteriores, como es el caso de profesores de Matemática en servicio de nuestro país.

2. En las justificaciones emitidas por los participantes se han registrado los siguientes errores: adición de información extraña, imposición de requisito discordante con la información dada, afirmación de requerimiento que no se requirió, conclusión de la conversa, negación del antecedente, afirmación del consecuente y concepción causal de la implicación. El hallazgo de dichos errores, en especial de los cuatro últimos tipos, corrobora lo afirmado en investigaciones antecedentes acerca de su presencia en problemas relacionados con el enunciado condicional.
2. Así mismo, durante los análisis practicados a las justificaciones, se han identificado errores que parecen encontrarse relacionados con los anteriores, si bien no se encuentran mencionados en la literatura consultada para nuestro trabajo o, quizás, no han sido denominados en la forma en que nosotros lo hemos hecho. El hallazgo de dichos errores constituye un aporte metodológico de nuestra investigación. Ellos han sido nombrados como: imprecisión en la respuesta dada, indeterminación por supuesta insuficiencia de datos e inadecuado empleo de condiciones para refutar una proposición general.
3. Dentro de los errores obtenidos a partir de nuestro análisis cabe señalar a la categoría no codificable. En esta categoría agrupamos todas aquellas justificaciones que apoyan a una respuesta errónea, pero cuya redacción no es comprensible. También consideramos bajo dicha categoría a aquella respuesta del participante donde este no ha emitido justificación.
4. En el problema 1, caracterizado por poner de manifiesto el enunciado condicional en una situación de contrato social, el error más frecuente fue el de adición de información extraña. En el problema 2, de contenido matemático, los errores en que más se incurrió, por cada uno de los ítems resueltos, fueron los de adición de información extraña, imprecisión en la respuesta dada, negación del antecedente y conclusión de la conversa. En el problema 3, relacionado con una situación “factual”, los errores más frecuentes, por cada uno de los ítems analizados, fueron los de conclusión de la conversa, afirmación del consecuente, indeterminación por supuesta insuficiencia de datos, adición de información extraña y concepción causal de la implicación. Por último, en el problema 3, cuyo carácter era el de definición de una regla, los errores que se advirtieron con mayor frecuencia fueron los de conclusión de

la conversa, inadecuado empleo de condiciones para refutar una proposición general y adición de información extraña. Todos los errores indicados, a excepción de aquellos que se detectaron a partir de nuestro análisis, se encuentran relacionados con las investigaciones antecedentes a nuestro estudio.

6.1.2. Respetto al segundo objetivo específico

“Clasificar y describir los tipos de los errores generados en el desarrollo de dichas tareas, de acuerdo con los elementos teóricos considerados en la presente investigación”

Tras la identificación de los errores cometidos por los participantes del estudio, procedimos a ubicarlos en determinadas clases, según los elementos teóricos abordados en el capítulo 2. Este procedimiento también es parte del análisis principal considerado dentro de la metodología de nuestra investigación. Los resultados obtenidos nos han permitido concluir en lo siguiente:

1. Al parecer, y de acuerdo a los elementos teóricos estudiados, los errores cometidos con el enunciado condicional podrían ser ubicados en dos categorías principales: errores debido a datos mal utilizados y errores vinculados con la lógica.
2. Los errores de adición de información extraña, imposición de requisito discordante con la información dada y afirmación de requerimiento no requerido corresponden a la categoría de datos mal utilizados.
3. Los errores de conclusión de la conversa, negación del antecedente, afirmación del consecuente, salto injustificado en la inferencia y concepción causal de la implicación se encuentran estrechamente vinculados con la lógica. Los cuatro primeros, en especial, corresponden a la categoría de inferencias lógicamente inválidas, que fue elaborada por una investigación antecedente.
4. El error de indeterminación por supuesta insuficiencia de datos, obtenido a partir de los análisis efectuados, podría ser colocado dentro de la categoría de datos mal utilizados. Análogamente, el error debido al inadecuado empleo de condiciones para refutar una proposición general podría ser considerado dentro de la categoría de errores vinculados con la lógica. Sin embargo, tal clasificación de los errores hallados por nosotros durante nuestro análisis aún necesitaría de mayor investigación.
5. Como categorías aparte, también obtenidas a partir del proceso de análisis, consideramos la no codificable y la imprecisión en la respuesta dada. Para su correcta clasificación serían necesarias técnicas investigativas auxiliares, en especial para la

primera de ellas, debido a que la justificación no muestra la ilación necesaria para llevar a cabo el análisis.

6.1.3. Respetto al objetivo general de la investigación

El objetivo general de esta tesis fue: *Analizar los errores de profesores de Matemática de secundaria en el desarrollo de tareas que involucran conocimientos sobre el enunciado condicional*. Con el fundamento otorgado por las respuestas a los dos objetivos específicos podemos concluir que:

1. Se ha observado que los participantes cometieron los errores lógicos que se mencionaron en las investigaciones antecedentes. Es decir, hemos constatado que los errores de afirmación del consecuente, negación del antecedente, conclusión de la conversa y concepción causal de la implicación no son extraños a los conocimientos de los profesores de matemática de educación secundaria que participaron de nuestra investigación. Así mismo, también se advirtieron errores de tipo diferente al lógico ya mencionados en investigaciones antecedentes, como por ejemplo el error de adición de información extraña, entre otros.
2. Existen indicios acerca de las relaciones existentes entre los errores de afirmación del consecuente, negación del antecedente y conclusión de la conversa, así como con errores de tipo diferente al lógico. Cabe indicar que, dado el hallazgo de errores durante el proceso de análisis (como el error de indeterminación por supuesta insuficiencia de datos, entre otros) parecen existir fuertes relaciones entre estos y el anterior grupo de errores mencionados. Sin embargo, aclarar el estado de tales nexos constituye una cuestión pendiente.
3. Creemos que la adaptación de los problemas planteados como instrumentos de nuestra investigación, pese a limitarse a la relación con cuatro tipos del condicional y a no enfatizar en el contenido matemático para evitar la generación de obstáculos en los participantes, ha permitido detectar la gran mayoría de errores descritos en la literatura revisada.
4. La atención brindada en las justificaciones de los participantes permitió ampliar la fuente de información para el análisis de errores. De hecho, algunas investigaciones antecedentes contemplaron a las justificaciones (como explicaciones, argumentos, etc.) en su diseño. Sin embargo, nuestro estudio se diferenció de aquellas por enfocarse en un grupo con características distintas (profesores en servicio) y en nuestro medio.

6.2. Sugerencias y recomendaciones

La presente investigación ha permitido reflexionar sobre aspectos teórico-prácticos muy importantes para la Enseñanza de la Matemática, en especial sobre aquellos aspectos relacionados con el rol de la lógica dentro de dicha disciplina. Creemos que un aporte de nuestro trabajo ha consistido, precisamente, en levantar un diagnóstico que posibilite la elaboración de una futura propuesta metodológica que aborde los errores que hemos detectado. Elementos vitales de tal propuesta serían las justificaciones, por cuanto ponen de manifiesto, en forma más vívida, los conocimientos y habilidades de los profesores de Matemática. Así mismo, consideramos que la propuesta metodológica debería explotar al máximo la conexión entre condicional, inferencia y conjuntos por el gran potencial didáctico que dicha conexión encierra.

Las futuras investigaciones sobre nuestro tema objeto de estudio podrían concentrarse en los siguientes aspectos:

1. *Metodológico.* A partir de nuestro estudio, se pueden realizar variantes en las condiciones de los problemas planteados. De esta manera, se averiguaría si los problemas detectados en nuestra investigación son invariantes o no. Por ejemplo, en el problema 1, ¿se cometerían los mismos errores detectados por nosotros si se indicara, explícitamente, que no se debe agregar más condiciones de las formuladas en el problema? O, en el problema 4, ¿se incurriría en los mismos errores que nosotros hemos detectado si se indicara claramente que no se puede visualizar el contenido de cada urna? Así mismo, ante las dificultades que tuvimos para analizar respuestas que no estaban suficientemente completas o claras, planteamos la necesidad de realizar entrevistas que permitan determinar, de propia fuente, las razones que los participantes consideraron para responder de una u otra forma.
2. *Objeto de estudio.* Se podrían estudiar las concepciones de los participantes acerca del enunciado condicional y sus relaciones con el enunciado bicondicional pues, como ya se mencionó en el capítulo 1, existe literatura que ubica en el segundo tipo de proposición el fundamento de los errores en el manejo del primero. Otra cuestión importante de estudio podría ser la indagación de las relaciones existentes entre los diferentes tipos de error encontrados en nuestro estudio. Por ejemplo, ¿cómo se relaciona el error de afirmación del consecuente con la conclusión de la conversa? Hemos encontrado indicios que mostrarían que el último error mencionado genera al primero, pero sería necesaria mayores evidencias sobre este hecho. También sería

importante estudiar las características de los errores que nosotros hemos encontrado durante nuestro análisis para clasificarlos con precisión.

3. *Participantes de la investigación.* Nuestro estudio se concentró en profesores que se encontraban en servicio. ¿Cuáles serían los errores cometidos, en torno a los mismos problemas formulados en nuestro estudio, por parte de futuros profesores que se encuentran en formación? Así mismo, sería importante determinar cuál es la relación de los errores cometidos por los profesores en servicio con los errores cometidos por sus estudiantes frente a los problemas vinculados al enunciado condicional. Finalmente, dado que en nuestro estudio se registró que tres participantes respondieron y justificaron con corrección ante casi todos los ítems de los problemas planteados, ¿cuáles podrían ser las razones que ayudarían a explicar tal fenómeno?



REFERENCIAS

- Ajmánov, A. (1961). Las formas lógicas y su expresión en el lenguaje. *Pensamiento y lenguaje*, pp. 149 – 190. México D. F.: Grijalbo.
- Alcock, L. (2009). Teaching proof to undergraduates semantic and syntactic approaches. *Proceedings of the ICMI Study 19th Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, 1, pp. 29 – 34. Recuperado de: http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_1.pdf.
- Alvarado, A. & González, M. (2009). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), pp. 73 – 84. Recuperado de: <http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/189097/353376>
- Alvarez de Zayas, C. & Sierra, V. (2001). *Metodología de la investigación científica*. Cochabamba: Kipus.
- Araújo, J. & Borba, M. (2004). Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*, pp. 27 – 47. Belo Horizonte: Autêntica.
- Bobenrieth, A. (1996). *Inconsistencias, ¿por qué no?: un estudio filosófico sobre la lógica paraconsistente*. Bogotá: Colcultura.
- Bochenski, I. (1968). *Historia de la lógica formal*. Madrid: Gredós.
- Carretero, M. & García, J. (1984). *Lecturas de psicología del pensamiento. Razonamiento, solución de problemas y desarrollo cognitivo*. Madrid: Alianza.
- Cook, R. (2009). *A Dictionary of Philosophical Logic*. Edinburgh: University Press.
- Copi, I. (1981). *Introducción a la Lógica*. Buenos Aires: Universitaria de Buenos Aires.
- Copi, I. & Cohen, K. (2007). *Introducción a la Lógica*. México D. F. LIMUSA.
- Curtis, C., Daus, P. & Walker, R. (1961). *Studies in Mathematics: Euclidean Geometry based on ruler and protractor axioms*. Yale: Yale University.
- Damarin, S. (1977). The Interpretation of Statements in Standard Logical Form by Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2, pp. 123 – 131. Recuperado de: <http://www.jstor.org/stable/748541>

- Davýdov, V. (s. f.). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Deaño, A. (1983). *Introducción a la lógica formal*. Madrid: Alianza.
- De Gortari, E. (1965). *Lógica General*. México D. F.: Grijalbo.
- Deloustal – Jorrand, V. (2000 – 2001). L’implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d’élèves – professeurs. *Petit x*, 55, pp. 35 – 70. Recuperado de: http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/55/55x3.pdf
- Deloustal – Jorrand, V. (2002). Implication and mathematical reasoning. *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 281 – 288. Norwich: University of East Anglia.
- Deloustal – Jorrand, V. (2004). *L’implication mathématique: Etude épistémologique et didactique* (Tesis para obtener el grado de doctor en Matemáticas e Informática). Universidad Joseph Fourier, Grenoble, Francia. Recuperado de: http://virginie.jorrand.com/pdf/Deloustal_these.pdf
- Deloustal – Jorrand, V. (2007). Etude épistémologique et didactique de l’implication mathématique sous trois points de vue: raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, pp. 66 – 102. Recuperado de: <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR08001.pdf>
- Delval, J. (1984). Sobre el fracaso en el problema de las cuatro tarjetas. *Lecturas de psicología del pensamiento. Razonamiento, solución de problemas y desarrollo cognitivo*, pp. 85 – 98. Madrid: Alianza.
- Dorofeev, G., Potapov, M. & Rozov, N. (1973). *Temas selectos de matemáticas elementales*. Moscú: Mir.
- Durand–Guerrier, V. (1998 – 1999). L’élève, le professeur, et le labyrinthe. *Petit x*, 50, pp. 57 – 79. Recuperado de: http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/50/50x7.pdf.
- Durand–Guerrier, V. (2003). Which notion of implications is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational studies in Mathematics*, 53, pp. 5 – 34. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/3483181?origin=JSTOR-pdf&seq=1#page_scan_tab_contents

- Durand–Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. & Tanguay, D. (2012). Examining the role of Logic in teaching proof. *Proof and Proving in Mathematics Education: the 19th ICMI Study*, pp. 369 – 389. DOI: 10.1007/978-94-007-2129-6.
- Durand-Guerrier, V. (2014). Logic in Mathematics Education. En Lerman S. (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp. 361 – 364. [Versión de Springer]. DOI: 10.1007/978-94-007-4978-8.
- Echeverry, A., Molina, O., Samper, C., Perry, P. & Camargo, L. (2012). Proposición condicional: interpretación y uso por parte de profesores de Matemáticas en formación. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (1), pp. 73 – 88. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/2055/1/2012-Echeverry%26Proposicion.pdf>
- Eisenberg, T. & McGinty, R. (1974). On Comparing Error Patterns and the Effect of Maturation in a Unit on Sentential Logic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4 (5), pp. 225 – 237. Recuperado de: <http://www.jstor.org/stable/748848>
- Epp, S. (2003). The role of Logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly*, 110 (10), pp. 886 – 899. Recuperado de: <http://www.jstor.org/stable/3647960>
- Epp, S. (2009). Proof issues with existential quantification. *Proceedings of the ICMI Study 19th Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, 1, pp. 154 – 159. Recuperado de: http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_1.pdf.
- Fehr, H. & Glaymann, M. (1973). *Nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática*. París: UNESCO.
- Ferreri, M. & Spagnolo, F. (1994). L'apprendimento tra emozioni ed ostacolo: l'errore nella comunicazioni delle matematiche intersezione tra problemi dell'apprendimento, insegnamento e la neurofisiología. *Quaderni di ricerca in didattica*, 4. Recuperado de: <http://math.unipa.it/~grim/ostacemoz.pdf>
- Fomin, D., Genkin, S. & Itenberg, I. (2012). *Círculos matemáticos*. Madrid: SM.
- Ganeri, J. (2004). Indian Logic. *Handbook of the History of Logic, volume 1: Greek, Indian and Arabian Logic*, pp. 309 – 395. Amsterdam: Elsevier.
- Garnham, A. & Oakhill, J. (1996). *Manual de psicología del pensamiento: pensar y razonar*. Barcelona: Paidós.

- González, M. (2012). *Enseñar lógica y aprender con lógica: reflexiones desde la práctica*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Gorski, D. & Tavants, P. (1960). *Lógica*. México D. F.: Grijalbo.
- Inglis, M. & Simpson, A. (2008). Conditional inference and advanced mathematical study. *Educational Studies in Mathematics*, 67, pp. 187 – 204. DOI: 10.1007/s10649-007-9098-9
- Jarraud, A, Ramón, S., Ramón, F. & Ramón, H. (2008). *Diccionario de uso del español MARIA MOLINER*. Madrid: Gredós.
- Kneale, W. & Kneale, M. (1980). *El desarrollo de la Lógica*. Madrid: Tecnós.
- Kneller, G. (1969). *La lógica y el lenguaje en la educación*. Buenos Aires: El Ateneo.
- Lages, E., Pinto, P., Wagner, E. & Morgado, C. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media*, volumen 1. Lima: Instituto de Matemática y Ciencias Afines.
- Laudien, R. (1999). Misunderstandings of if – then as if and only if. *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, pp. 225 – 231. Recuperado de: <http://er.uqam.ca/nobel/r21245/varia/prels%20vol%201.pdf>
- Luria, A. (1974). *Los procesos cognitivos: análisis socio – histórico*. Barcelona: Fontanella.
- Miró Quesada, F. (1946). *Lógica*. Lima: Biblioteca de la Sociedad Peruana de Filosofía.
- Miró Quesada, F. (1962). *Lógica*. Lima: Santa Rosa.
- Maxwell, J. (2005). *Qualitative research design: An interactive approach*. California: Sage.
- Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis. En Bikner – Ahsbahs, A., Knipping, C. & Presmeg, N. (Eds.). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*, pp. 365 – 380. [Versión de Springer]. DOI 10.1007/978-94-017-9181-6_13
- Mok, I. & Clarke, D. (2015). The Contemporary Importance of Triangulation in a Post – Positivist World: Examples from the Learner’s Perspective Study. En Bikner – Ahsbahs, A., Knipping, C. & Presmeg, N. (Eds.). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*, pp. 403 – 425. [Versión de Springer]. DOI 10.1007/978-94-017-9181-6_15

- Moktefi, A. & Shin, S. (2012). A History of Logic Diagrams. En Gabbay, D., Pelletier, F. & Woods, J. (Eds.). *Handbook of a History of Logic, Volume 11, Logic: A History of its Central Concepts*, pp. 611 – 682. Amsterdam: Elsevier.
- Movshovitz – Hadar, N., Zaslavsky, O. & Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, pp. 3 – 14. Recuperado de: <http://www.jstor.org/stable/749532>
- NCTM (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.
- Patton, M. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods*. California: SAGE.
- Perú, Ministerio de Educación (2003). *Ley General de Educación*. Lima: Autor. Recuperado de: <http://www1.umn.edu/humanrts/research/peru-Ley%2028044%20Ley%20General%20de%20Educacion.pdf>
- Perú, Ministerio de Educación (2007). *Aspectos metodológicos en el aprendizaje de la Lógica Matemática en secundaria*. Lima: Autor.
- Perú, Ministerio de Educación (2008). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Lima: Autor. Recuperado de: <http://www.minedu.gob.pe/normatividad/reglamentos/DisenoCurricularNacional.pdf>
- Perú, Ministerio de Educación (2010). *Orientaciones para el Trabajo Pedagógico del Área de Matemática*. Lima: Autor. Recuperado de: <http://ebr.minedu.gob.pe/des/pdfs/otpmatematica2010.pdf>
- Petrovski, A. (1985). *Psicología general. Manual didáctico para los Institutos de pedagogía*. Moscú: Progreso.
- Piscoya, L. (2007). *Lógica general*. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- Potáпов, M., Alexándrov, V. & Pasichenko, P. (1986). *Algebra y análisis de funciones elementales*. Moscú: Mir.
- Reid, D. & Inglis, M. (2005). Talking about Logic. *For the Learning of Mathematics*, 25, pp. 24 – 25. Recuperado de: <http://flm-journal.org/Articles/712E2E4C096B0491684858554A2EDE.pdf>

- Rico, L. (2008). *Errores en el aprendizaje de las matemáticas*. Recuperado de: http://disciplinas.stoa.usp.br/pluginfile.php/235537/mod_resource/content/2/TEXT0%201-Kilpatrick,%20J.pdf
- Riley, K. (2004). Prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proof and its logical underpinnings. En McDougall, D. & Ross, J. (Eds.) *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp.729 – 735. Recuperado de: http://www.allacademic.com/meta/p117650_index.html
- Robles, J. (1995). Historia de la Lógica. En Alchourrón, C. (Ed.) (1995). *Lógica*, pp. 49 – 69. Madrid: Trotta.
- Rogalski, J. & Rogalski, M. (2004). Contribution a l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 9, pp. 175 – 203. Recuperado de: http://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_09/adsc9-2004_010.pdf
- Rosental, M. & Iudin, P. (1973). *Diccionario filosófico*. Buenos Aires: Universo.
- Salazar, A. & Miró Quesada, F. (1978). *Introducción a la Filosofía y Lógica*. Lima: Universo.
- Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Molina, O. & Echeverry, A. (2010). Conditional propositions: problematic performances and didactic strategies. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 129 – 136. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/4981/1/2010Pr-Samper%26Conditional.pdf>
- Schreier, M. (2014). Qualitative Content Analysis. En Flick, U. (Ed.) *The SAGE Handbook of Qualitative Data Analysis*, pp. 170 – 183. London: SAGE.
- Stylianides, G., Stylianides, A. & Shilling – Traina, L. (2013). Prospective Teachers' Challenges in Teaching Reasoning – and – Proving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11, pp. 1463 – 1490. [Versión de Springer]. DOI 10.1007/s10763-013-9409-9
- Stylianou, D., Blanton, M. & Knuth, E. (2009). *Teaching and learning proof across the grades. A K – 16 perspective*. New York: Routledge.

Vallejo, E. (2014). *Lógica básica*. Manuscrito inédito.

Woods, J. (2013). *Errors of Reasoning: Naturalizing the Logic of Inference*. Londres: College.





Anexo 3A. Problema 1¹

Apellidos y nombres: _____

Lea el siguiente problema con atención. Luego, responda la pregunta planteada:

En una escuela primaria, la maestra da a sus alumnos un problema (que tenía solución) y les hace una promesa: “resuelvan el problema en casa; mañana, si alguno consigue resolverlo entonces les daré caramelos”.

Al día siguiente, ningún alumno había conseguido resolver el problema. La maestra sacó un paquete de caramelos y se los dio a los niños. Ellos protestaron: “¡Esto no es justo, nadie ha resuelto el problema, por lo tanto nadie tiene derecho a los caramelos!” Sonriendo, la maestra les responde que ella ha respetado fielmente su promesa.

¿La maestra mantuvo realmente su promesa? Justifique su respuesta.



¹ *Problemas 1 y 4 tomados y modificados de Rogalski, J. & Rogalski, M. (2004). Contribution a l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. Annales de didactique et de sciences cognitives, 9, pp. 175 – 203. Recuperado de: http://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_09/adsc9-2004_010.pdf*

Anexo 3B. Problema N° 2

Apellidos y nombres: _____

Para desarrollar el siguiente problema usted debe recordar que un *número primo* es aquel número que únicamente tiene dos divisores diferentes (mayores que cero). Ejemplos de números primos: 2, 3, 5, 7, 11, etc.

Ahora, usted debe confiar en que la siguiente proposición es verdadera:

“Si x es un elemento del conjunto T entonces x es un número primo.”

A partir de esta información, responda cada una de las interrogantes:

- a) Sabemos que 3 es un número primo, entonces ¿puede usted asegurar que 3 es un elemento del conjunto T ? ¿Por qué?



- b) Si el número $\overline{c1ba}$ es un elemento del conjunto T , ¿puede usted asegurar que $\overline{c1ba}$ es un número primo? ¿Por qué?



- c) ¿Es verdad que 6 no pertenecerá al conjunto T ? ¿Por qué?
(Nota: Observe que 6 no es un número primo)



Apellidos y nombres: _____

- d) Si m no es un elemento del conjunto T , ¿usted puede asegurar entonces que m no es un número primo? ¿Por qué?

- e) En base a la proposición dada, ¿es verdad que se puede concluir que el conjunto T está formado por todos los números primos? ¿Por qué?

- f) ¿Es verdad que el conjunto T podría tener también elementos que no son números primos? ¿Por qué?

Anexo 3C. Problema N° 3²

Apellidos y nombres: _____

Hay dos bolsas diferentes con fichas en las que es posible reconocer tres atributos: color (verde, azul, rojo), forma (redonda, rectangular, triangular) y material con el que está hecha (cartón, plástico). Además, cada ficha de cada bolsa tiene una etiqueta que la identifica (F1, F2, F3, etc.).

A continuación se establecen unas afirmaciones verdaderas respecto a los atributos de las fichas; a partir de ellas, responda las preguntas, anotando también una explicación para su respuesta. Cada situación se refiere a las fichas de una de las bolsas. Las situaciones (a) y (b) son independientes.

a) Las fichas verdes son triangulares.

Todas las fichas triangulares son del mismo material

INFORMACIÓN SOBRE FICHAS PARTICULARES		PREGUNTA	SI	NO	NO SE SABE	EXPLICACIÓN
i)	F1 es una ficha azul	¿Es F1 triangular?				
ii)	F3 y F4 son del mismo material	¿Son F3 y F4 triangulares?				
iii)	F5 es redonda	¿Es F5 verde?				
iv)	F7 y F8 son fichas verdes	¿Son F7 y F8 del mismo material?				

² **Problema 3 tomado y modificado de Echeverry, A., Molina, O., Samper, C., Perry, P. & Camargo, L. (2012).**

Proposición condicional: interpretación y uso por parte de profesores de Matemáticas en formación. Enseñanza de las Ciencias, 30 (1), pp. 73 – 88. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/2055/1/2012-Echeverry%26Proposicion.pdf>

Apellidos y nombres: _____

b) Si una ficha es de cartón entonces es rectangular.

Si una ficha es de cartón entonces es verde.

INFORMACIÓN SOBRE FICHAS PARTICULARES		PREGUNTA	SI	NO	NO SE SABE	EXPLICACIÓN
i)	F1 es azul	¿Es F1 de plástico?				
ii)	F2 es una ficha de plástico	¿Es F2 rectangular?				
iii)	F3 es rectangular	¿Es F3 una ficha de cartón?				
iv)	F5 es de cartón	¿Es F5 triangular?				

Anexo 3D. Problema 4

Apellidos y nombres: _____

En una urna, se tiene un cierto número de bolas numeradas, de color blanco o negro. Nos interesa la siguiente cuestión:

¿Será cierto que todas las bolas blancas de la urna tienen un número par?

Se prevén cuatro procedimientos para responder a la pregunta anterior:

Procedimiento 1: se sacan de la urna las bolas con número par, luego se mira su color.

Procedimiento 2: se sacan de la urna las bolas con número impar, luego se mira su color.

Procedimiento 3: se sacan de la urna las bolas blancas, luego se mira los números.

Procedimiento 4: se sacan de la urna las bolas negras, luego se mira los números.

Para cada uno de los 4 procedimientos dados previamente, elija entre las dos opciones siguientes:

- (a) El procedimiento me permite responder con seguridad a la pregunta;
- (b) El procedimiento no me permite concluir algo.

No olvide justificar su respuesta.

Para el Procedimiento 1:

Marque una de las siguientes opciones:
(a) (b)

Justificación:

Para el Procedimiento 2:

Marque una de las siguientes opciones:
(a) (b)

Justificación:

Para el Procedimiento 3:

Marque una de las siguientes opciones:
(a) (b)

Justificación:

Para el Procedimiento 4:

Marque una de las siguientes opciones:
(a) (b)

Justificación:

Anexo 4A. Ficha de Información Personal

Estimado participante:

Por favor, complete este breve cuestionario que nos permitirá complementar los datos para nuestra investigación. **Estos deben llenarse de forma personal y se mantendrán en absoluta reserva.**

¡Muchas gracias por su participación!

1. Apellidos y nombres: _____

A continuación, marque con una X en los recuadros apropiados o, si es el caso, complete la información que debe ser especificada:

2. Sexo.

Masculino

Femenino

3. Edad.

Menos de 25 años

25 – 29 años

30 – 39 años

40 – 49 años

50 – 59 años

Más de 60 años

4. Niveles educativos en los que ha enseñado.

Primaria

Nº de años: _____

Secundaria

Nº de años: _____

Otros

5. Nivel en el que enseña actualmente.

Primaria

Secundaria

Otro: _____

6. ¿Cuántos años de experiencia tiene en la enseñanza? _____

7. Nivel de responsabilidad en la Institución Educativa.

Profesor

Coordinador

Otro: _____

8. Institución de Formación Docente.Universidad Instituto Pedagógico No tiene formación docente

Otro: _____

9. Nivel académico alcanzado.Bachiller Licenciado Posgrado (culminado) (Indicar en qué) _____Segunda especialidad (Indicar en qué) _____

Otro: _____

10. Programas de Formación Continua a los que ha asistido en los últimos tres años (indicar todos los vinculados con la Enseñanza de la Matemática):

Anexo 4B. Datos informativos de los participantes del estudio

ID	Nº de años de experiencia	Institución de Formación Docente	Grado académico alcanzado
01	8	Universidad	Licenciatura
02	16	Universidad	- Doctorado en Ciencias de la Educación - Especialista en Didáctica de la enseñanza de la Matemática
03	12	Instituto Pedagógico y Complementación	Licenciatura
04	1	Universidad	Bachillerato
05	1,5	Universidad	Bachillerato
06	13	Universidad	Especialista en Educación Artística
07	12	Universidad	Bachillerato
08	8	Universidad	Licenciado
09	27	Universidad	Posgrado en Didáctica de la Matemática
10	8	Instituto Pedagógico y Complementación Universitaria	Licenciatura
11	20	Universidad	- Posgrado en Gestión y Administración - Especialista en Didáctica de la Matemática
12	23	Universidad	Posgrado en Docencia y Gestión Educativa

Anexo 4C. Ejemplos de codificación de respuestas y justificaciones para el problema 1

1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

A modo de ilustración, insertamos, en seguida, la respuesta del participante 02 (Figura 95):

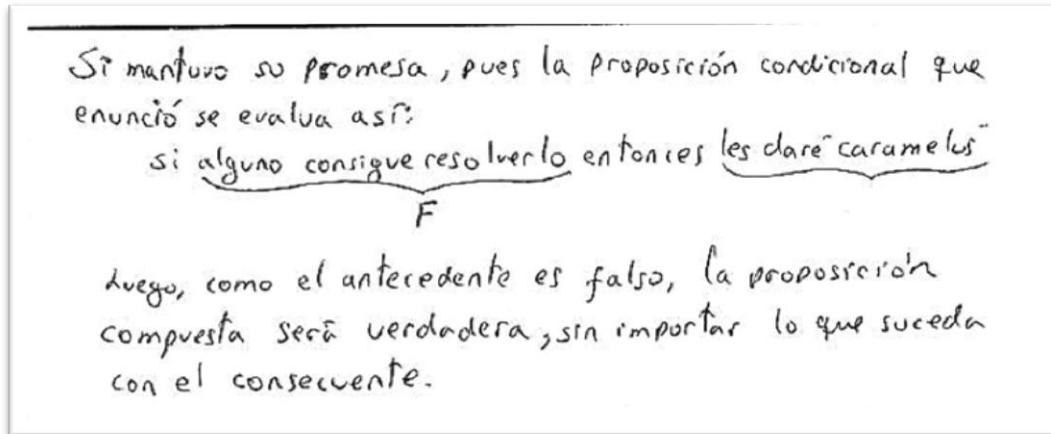


Figura 95. Respuesta del participante 02 – problema 1

Como puede apreciarse en la Figura 95, el participante 02 respondió correctamente (“Si mantuvo su respuesta”) y justificó su respuesta mediante elementos obtenidos a partir de la tabla de verdad del condicional, proposición en que expresó la indicación brindada por la maestra a los alumnos: si el antecedente es falso (“si alguno consigue resolverlo”), no importa el valor de verdad del consecuente (“les daré caramelos”) para que todo el enunciado condicional sea verdadero.

2. Respuesta correcta (C) con justificación no compatible (CNR)

Para apreciar mejor lo que significa esta categoría, mostraremos la respuesta del participante 10 (Figura 96).

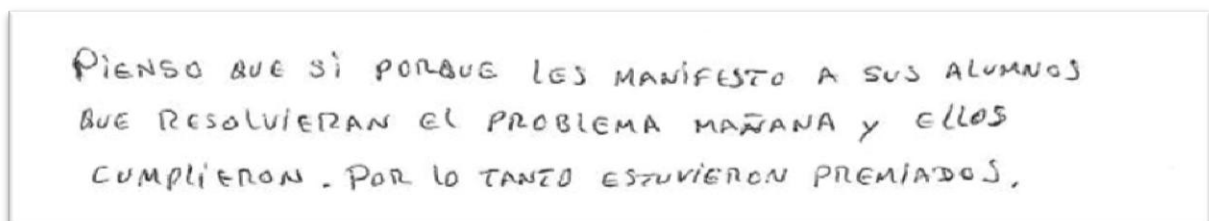


Figura 96. Respuesta del participante 10 – problema 1

Se aprecia en la Figura 96 que, a pesar que el participante 10 comenzó con una respuesta correcta, al escribir “Pienso que sí porque les manifestó a sus alumnos que resolvieran el problema mañana (...)”, su justificación empleó un hecho que se encontraba en

desacuerdo con uno de los requisitos planteados en el problema: el participante indicó que los alumnos *cumplieron* con resolver el problema.

3. Respuesta incorrecta (I) con justificación incorrecta esperada (IE)

Mostraremos, en seguida, la respuesta brindada por el participante 01 (Figura 97):

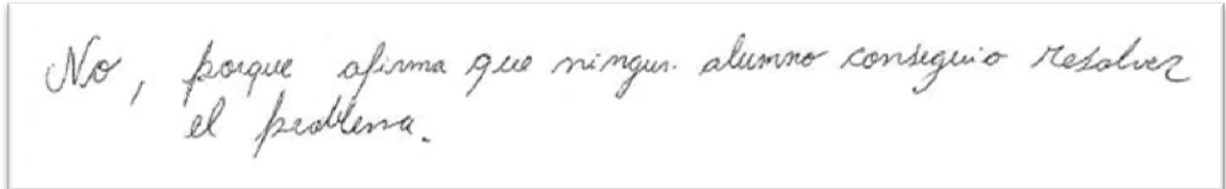


Figura 97. Respuesta del participante 01 – problema 1

Se puede apreciar en la Figura 97 que el participante 01 incurrió en el error esperado de negación de antecedente, con respecto a la condición planteada por la maestra a los alumnos. En efecto, al parecer, el participante siguió el siguiente razonamiento:

Si algún alumno consigue resolverlo, entonces les daré caramelos

Ninguno consiguió resolverlo

Por lo tanto, no les daré caramelos

Esta conclusión es incorrecta

4. No respondió (NR) pero si justificó (SJ)

A continuación, presentamos la respuesta del participante 07 (Figura 98):

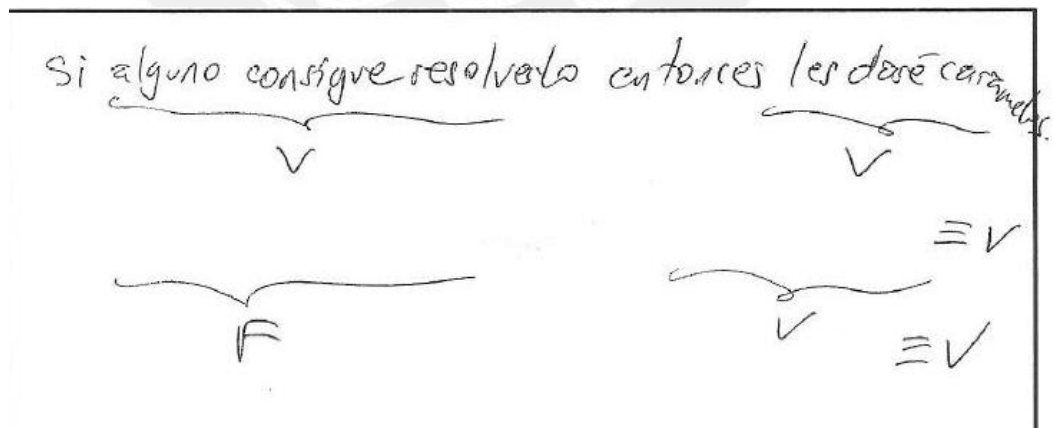


Figura 98. Respuesta del participante 07 - problema 1

En la figura anterior se puede apreciar que el participante 07 no respondió en forma concreta a la pregunta planteada en el problema, pero sí “justificó” algo mediante, creemos, el valor de verdad del condicional obtenido a partir de los valores de verdad de antecedente y consecuente.

Anexo 4D. Ejemplos de codificación de respuestas y justificaciones para el problema 2

1. En el ítem a

1.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

Presentamos la respuesta del participante 02 (Figura 99):

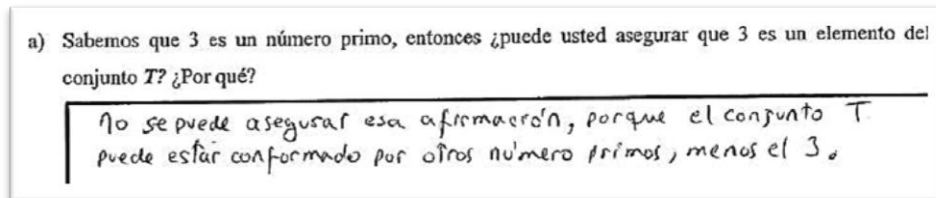


Figura 99. Respuesta del participante 02 - problema 2a)

Como se puede apreciar en la figura anterior, el participante 02 empleó correctamente los datos presentados en el problema para indicar “el conjunto T puede estar conformado por otros números primos, menos el 3” y así concluir que, en efecto, no se puede asegurar que 3 sea elemento del conjunto T .

1.2. Respuesta correcta (C) con justificación no compatible (CNR)

A modo de ilustración, insertamos, en seguida, la respuesta del participante 08 (Figura 100):

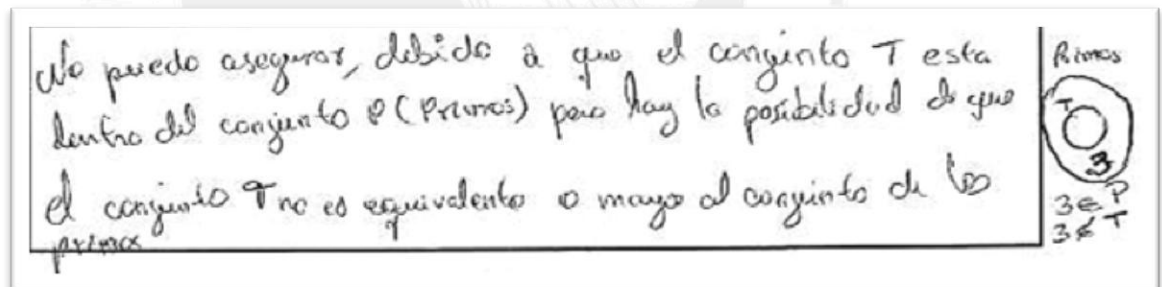
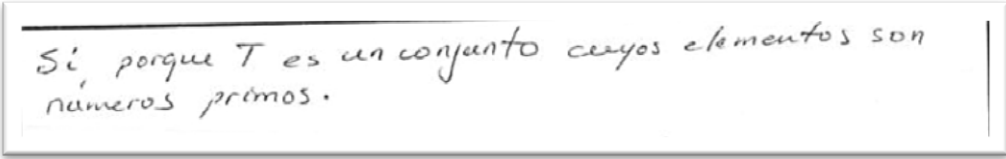


Figura 100. Respuesta del participante 08 – problema 2a)

Como se observa en la Figura 100, el participante 08 comenzó a responder correctamente (“no puedo asegurar”), pero agregó una información que no se encontraba presente en el enunciado del ítem: “hay la posibilidad de que el conjunto T [es] mayor al conjunto de los [números] primos”. Posiblemente quiso indicar que el conjunto T podía incluir al conjunto de los primos, pero eso no fue indicado en ninguna parte del enunciado del problema.

1.3. Respuesta incorrecta (I) con justificación incorrecta esperada (IE)

Mostramos, en seguida, la respuesta proporcionada por el participante 12 (Figura 101):



Si, porque T es un conjunto cuyos elementos son números primos.

Figura 101. Respuesta del participante 12 – problema 2a)

Como puede apreciarse en la Figura 101, el participante 12 pareció incurrir en el error lógico de afirmación del consecuente porque, frente al ítem planteado, el participante indicó “ T es un conjunto cuyos elementos son números primos”. Tal vez, siguió el siguiente razonamiento:

Si x es un elemento del conjunto T entonces x es un número primo

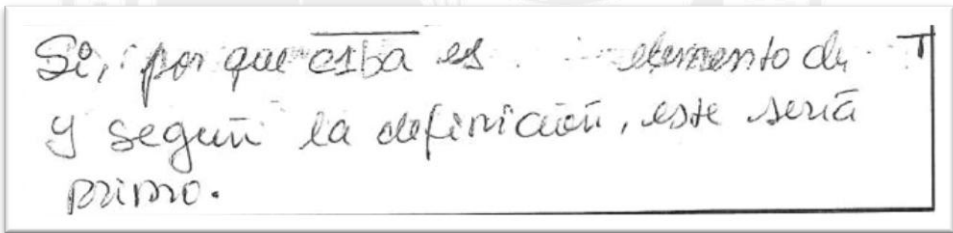
3 es un número primo

3 pertenece a T

2. En el ítem b

2.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

Insertamos, a continuación, la respuesta del participante 06 (Figura 102):



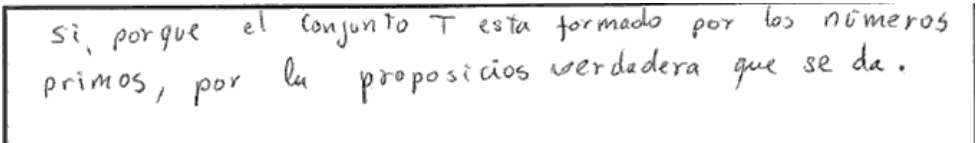
Si, porque esta es un elemento de T y según la definición, este sería primo.

Figura 102. Respuesta del participante 06 – problema 2b)

Observamos en la Figura 102 que el participante 06 empleó correctamente la condicional dada en el problema (“Si x es un elemento del conjunto T entonces x es un número primo”) para arribar a la respuesta correcta. Es decir, dado que el número $\overline{c1ba}$ es elemento del conjunto T , por la proposición dada, dicho número es primo.

2.2. Respuesta correcta (C) con justificación incompatible (CNR)

Mostramos, en seguida, la respuesta del participante 09 (Figura 103):



Si, porque el conjunto T está formado por los números primos, por la proposición verdadera que se da.

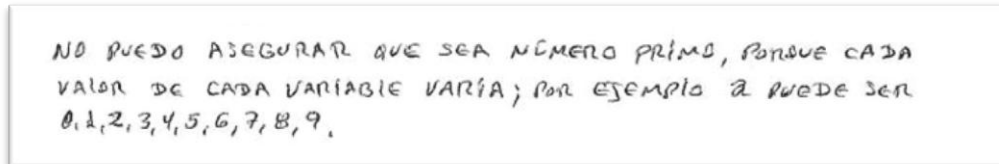
Figura 103. Respuesta del participante 09 - problema 2b)

Observamos en la figura anterior que el participante 09 añadió información sobre lo planteado en el problema, pues consideró “el conjunto T está formado por los números

primos”. El empleo del artículo “los” remite al empleo del cuantificador universal. Con ello, posiblemente quiso indicar que “el conjunto T está formado por todos los números primos”.

2.3. Respuesta incorrecta (I) con justificación incorrecta no esperada (INE)

Colocamos como muestra, en seguida, la respuesta del participante 10 (Figura 104):



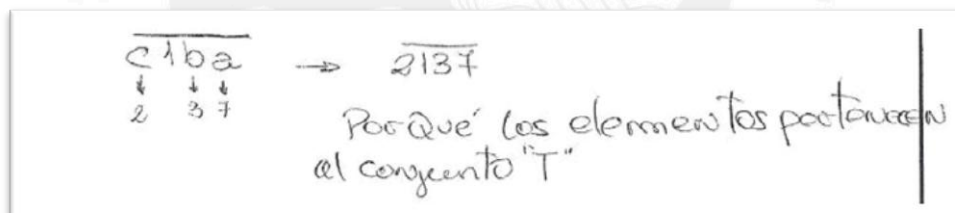
NO PUEDO ASEGURAR QUE SEA NUMERO PRIMO, PORQUE CADA VALOR DE CADA VARIABLE VARIA; POR EJEMPLO 2 PUEDE SER 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Figura 104. Respuesta del participante 10 – problema 2b)

En la Figura 104 podemos observar que el participante 10 agregó condiciones al enunciado del problema. Dichas condiciones estaban referidas a los valores que podían tomar cada una de las cifras del número $\overline{c1ba}$. Sin embargo, nada menciona el problema al respecto.

2.4. No respondió (NR) pero si justificó (SJ)

En la siguiente figura mostramos, como caso típico, la respuesta del participante 03 (Figura 105):



$\overline{c1ba} \rightarrow \overline{2137}$
 ↓ ↓ ↓
 2 3 7
 Porque los elementos pertenecen al conjunto "T"

Figura 105. Respuesta del participante 03 – problema 2b)

Como se puede apreciar en la figura anterior, el participante 03 no emitió respuesta ante la pregunta planteada pero, al parecer, brindó un ejemplo de número (sobre el que no se sabe si es primo) que, aparentemente, sí pertenecía a T para “justificar” su respuesta.

3. En el ítem c.

3.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

La respuesta del participante 01 nos ilustra mejor esta categoría (Figura 106):

¿Usted puede estar seguro de que 6 no pertenece al conjunto T ? ¿Por qué?

(Nota: Observe que 6 no es un número primo)

Si, porque los números primos incluyen a T

Figura 106. Respuesta del participante 01 – problema 2c)

Como se puede observar en la figura anterior, el participante 01 empleó la condición brindada en el problema (y expresada por él como “los números primos incluyen a T ”), para concluir que 6 no pertenecía al conjunto T .

3.2. Respuesta correcta (C) con justificación no compatible (CNR)

En la siguiente figura, observamos la respuesta del participante 05 (Figura 107):

Es correcto. porque si el primer elemento es falso y el segundo también será verdad que 6 no pertenecerá al conjunto T .

Figura 107. Respuesta del participante 05 – problema 2c)

En la Figura 107 podemos apreciar que la respuesta del participante 05 empezó por ser correcta, pero en su justificación se advierten problemas en el empleo del lenguaje pues, dentro de su afirmación “si el primer elemento es falso y el segundo también será verdad 6 no pertenecerá al conjunto T ”, no conocemos con precisión a qué se refiere con “primer elemento” o “segundo elemento”

3.3. No responde (NR) pero si justificó (SJ)

A continuación, mostramos la respuesta del participante 03, que ilustra esta categoría (Figura 108):

Porque Tiene más de 2 divisores.

$$6 \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ 3 \\ 6 \end{array}$$

Figura 108. Respuesta del participante 03 – problema 2c)

Como puede apreciarse en la figura anterior, el participante 03 no emitió respuesta clara frente al ítem planteado, aunque insertó una “justificación” para ella: “porque tienen más de 2 divisores”.

4. En el ítem d

4.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

Se muestra, a continuación, la respuesta del participante 01, que ejemplifica esta categoría (Figura 109):

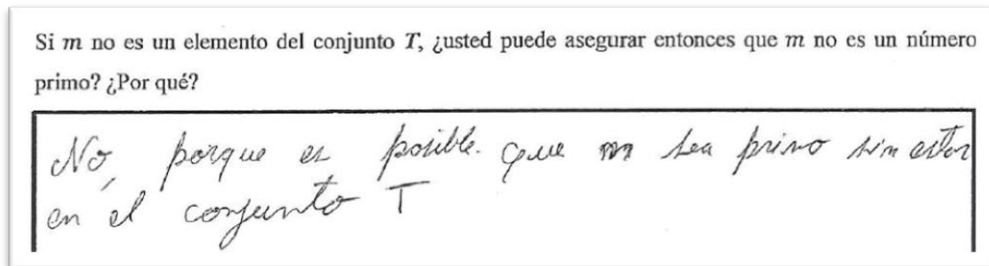


Figura 109. Respuesta del participante 01 - problema 2d)

Como se puede observar en la figura anterior, el participante 01 empleó las condiciones planteadas en el problema para concluir que, en efecto, no se puede asegurar que el elemento m no sea número primo pues, como indicó el participante, “es posible que m sea primo sin estar en el conjunto T ”.

4.2. Respuesta correcta (C) con justificación incompatible (CNR)

La respuesta del participante 07 (Figura 110), nos ilustra esta categoría:

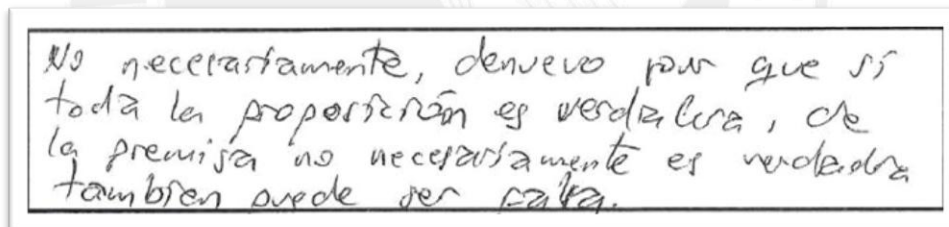
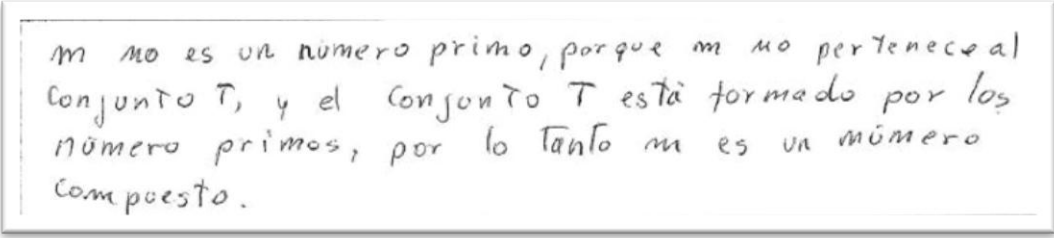


Figura 110. Respuesta del participante 07 – problema 2d)

Se puede observar en la Figura 110 que el participante 07 empezó a responder correctamente (“No necesariamente”). Sin embargo, su justificación, al considerar que “de la premisa no necesariamente es verdadera también puede ser falsa”, presentó elementos que no eran lo suficientemente claros como para clasificarla de correcta.

4.3. Respuesta incorrecta (I) con justificación incorrecta esperada (IE)

En la Figura 111 mostramos la respuesta del participante 09, correspondiente a esta categoría:



m no es un número primo, porque m no pertenece al conjunto T, y el conjunto T está formado por los números primos, por lo tanto m es un número compuesto.

Figura 111. Respuesta del participante 09 – problema 2d)

Como se puede observar en la Figura 111, se advierte en la respuesta del participante 09 un error lógico, inferido a partir de la premisa planteada en el problema: si m no es un número primo, entonces m no es elemento de T . En las propias palabras del participante, “ m no es un número primo, porque m no pertenece al conjunto T ”. Al parecer, el mencionado participante realizó el siguiente razonamiento:

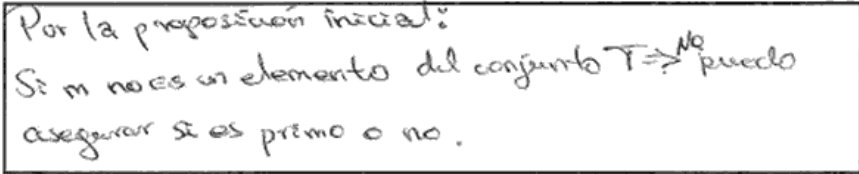
Si x es un elemento del conjunto T entonces x es un número primo

m no es un elemento del conjunto T

m no es un número

4.4. No respondió (NR) y no justificó (NJ)

En la Figura 112 mostramos la respuesta del participante 08, correspondiente a esta categoría:



*Por la proposición inicial:
Si m no es un elemento del conjunto $T \Rightarrow$ No puedo asegurar si es primo o no.*

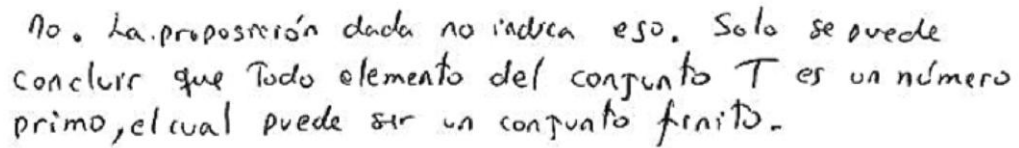
Figura 112. Respuesta del participante 08 - problema 2d)

Como se puede apreciar en la figura anterior, el participante no respondió y, aunque anotó “si m no es un elemento del conjunto T (entonces) no puedo asegurar si es primo o no”, con ello no hizo sino repetir lo indicado en los datos del ítem. Debido a esto, consideramos que el participante 08 no justificó su respuesta.

5. En el ítem e

5.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

En la Figura 113 mostramos la respuesta del participante 02, que corresponde a esta categoría.



No. La proposición dada no indica eso. Solo se puede concluir que todo elemento del conjunto T es un número primo, el cual puede ser un conjunto finito.

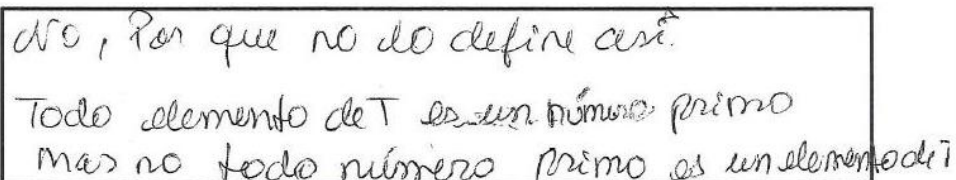
Figura 113. Respuesta del participante 02 – problema 2e)

Se observa en la figura anterior que el participante 02 empleó las condiciones del problema (“la proposición dada no indica eso”) para responder y justificar en forma correcta que “todo elemento del conjunto T es un número primo, el cual puede ser un conjunto finito”.

5.2. Respuesta correcta (C) con justificación incompatible (CNR)

A continuación, mostramos la respuesta del participante 06 que corresponde a esta categoría (Figura 114):

- e) En base a la proposición dada, ¿es verdad que se puede concluir que el conjunto T está formado por todos los números primos? ¿Por qué?



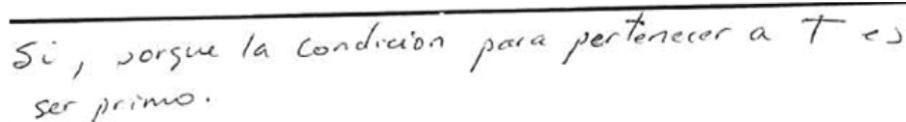
No, Por que no lo define así.
Todo elemento de T es un número primo
mas no todo número primo es un elemento de T

Figura 114. Respuesta del participante 06 – problema 2e)

Puede apreciarse en la respuesta del participante 06 que, aunque empezó correcta, agregó una proposición que no fue brindada en el enunciado del problema (“no todo número primo es un elemento de T ”).

5.3. Respuesta incorrecta (I) con justificación incorrecta esperada (IE)

Para ilustrar esta categoría, mostramos la respuesta del participante 12 (Figura 115):



Si, porque la condición para pertenecer a T es ser primo.

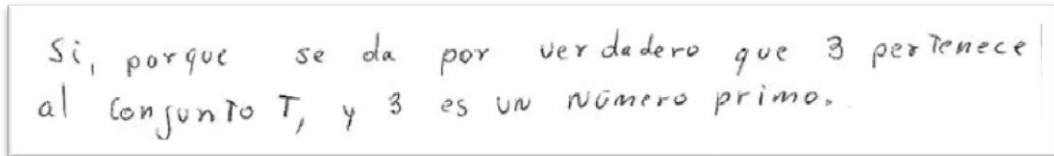
Figura 115. Respuesta del participante 12 – problema 2e)

Puede observarse que la respuesta del participante 12 fue incorrecta, pues al escribir que “la condición para pertenecer a T es ser primo” parece haberse fundamentado en la deducción errónea de la conversa a partir del condicional planteado en el problema. Esto significa que la proposición verdadera “Si x es un elemento del conjunto T entonces x es

un número primo” parece haberse asumido en la forma “Si x es un número primo entonces x es un elemento del conjunto T ”.

5.4. Respuesta incorrecta (I) con justificación incorrecta inesperada (INE)

Ilustramos esta categoría con la respuesta emitida por el participante 09 (Figura 116):



Si, porque se da por verdadero que 3 pertenece al conjunto T , y 3 es un número primo.

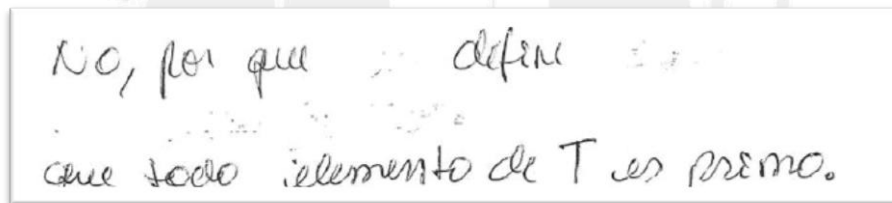
Figura 116. Respuesta del participante 09 – problema 2e)

La respuesta emitida por el participante 09 fue incorrecta pues, en su justificación, el participante 09 añadió información que el enunciado del problema no le proporcionó (“3 pertenece al conjunto T ”).

6. En el ítem f)

6.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

Presentamos la respuesta del participante 06 para ilustrar esta categoría (Figura 117):



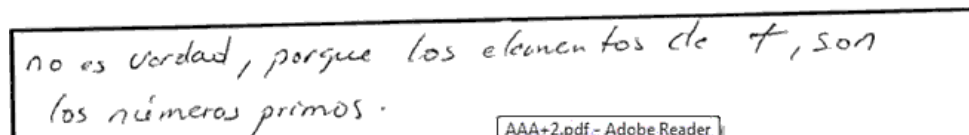
No, por que ... defeni ... que todo elemento de T es primo.

Figura 117. Respuesta del participante 06 – problema 2f)

Como puede observarse, la respuesta del participante 06 fue correcta y su justificación, al indicar que “todo elemento de T es primo”, incluyó los datos proporcionados en el problema.

6.2. Respuesta correcta (C) con justificación no compatible (CNR)

Presentamos la respuesta del participante 12 para ilustrar esta categoría (Figura 118):



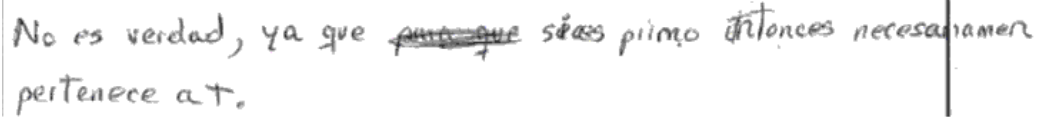
no es verdad, porque los elementos de T , son los números primos.

Figura 118. Respuesta del participante 12 - problema 2f)

Podemos observar en la figura anterior que el participante respondió correctamente, pero en su justificación, al expresar “los elementos de T son los números primos” consideró que todos los números primos eran elementos del conjunto T , por el empleo del artículo “los”.

6.3. Respuesta incorrecta (I) con justificación incorrecta esperada (IE)

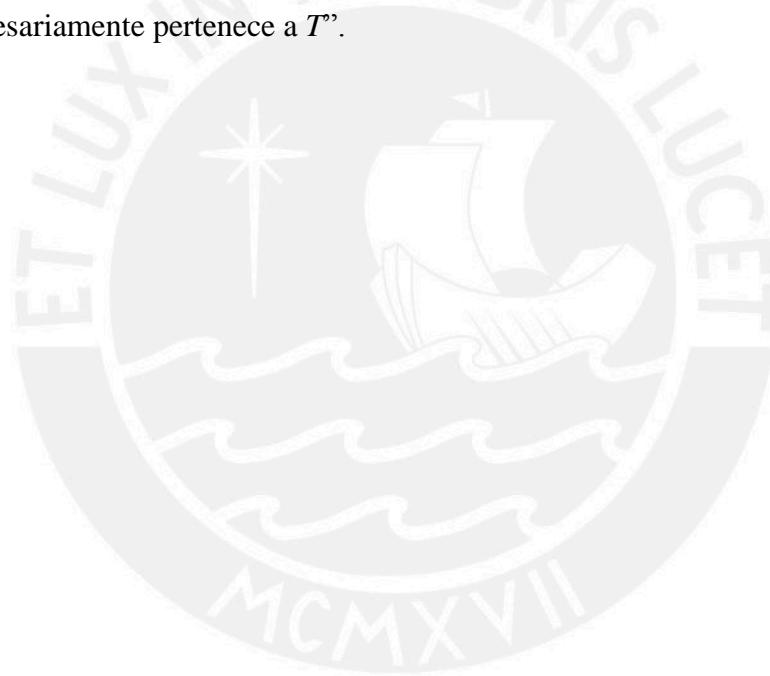
Presentamos la respuesta del participante 04 para ilustrar esta categoría (Figura 119):



No es verdad, ya que ~~para~~ que seas primo entonces necesariamente pertenece a T .

Figura 119. Respuesta del participante I2 - problema 2f)

A partir de lo mostrado en la figura anterior, podemos afirmar que el participante respondió en forma errónea. Además, su justificación consideró el error lógico de conversión de la premisa planteada en el problema. Recordemos que ella se enuncia “Si x es un elemento de T entonces x es un número primo”, mientras que el participante escribió “si es primo entonces necesariamente pertenece a T ”.



Anexo 4E. Ejemplos de codificación de respuestas y justificaciones para el problema 3

1. En el ítem a – i

1.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

A modo de ilustración, insertamos, en seguida, la respuesta del participante 11 (Figura 120):

i)	F1 es una ficha azul	¿Es F1 triangular?	*	X	No Condición Para ficha Azul.
----	----------------------	--------------------	--------------	---	-------------------------------

Figura 120. Respuesta del participante 11 – problema 3a) – i

Observamos en la figura anterior que la elección fue correcta y que la justificación (“no condición para ficha azul”) parece sugerir que no se puede asegurar la forma que tendrán las fichas azules. De esta forma, el participante 11 utilizó las condiciones planteadas en el ítem.

1.2. Respuesta correcta (C) con justificación no compatible (CNR)

Mostramos en qué consiste esta categoría mediante la respuesta emitida por el participante 03 (Figura 121):

i)	F1 es una ficha azul	¿Es F1 triangular?		X	Porque es ALAZAR
----	----------------------	--------------------	--	---	------------------

Figura 121. Respuesta del participante 03 – problema 3a) – i

Podemos apreciar que el participante 03 agregó, incorrectamente, el azar a las condiciones planteadas por el problema. De esta forma, aunque su elección fue correcta, la justificación no.

1.3. Respuesta incorrecta (I) con justificación incorrecta esperada (IE)

En la Figura 122, podemos apreciar la respuesta del participante 02, perteneciente a esta categoría.

i)	F1 es una ficha azul	¿Es F1 triangular?		X	Las fichas triangulares son verdes y F1 es azul, por lo tanto F1 no es triangular.
----	----------------------	--------------------	--	---	--

Figura 122. Respuesta del participante 02 – problema 3, ítem a – i

Observamos que el participante 02 respondió de forma incorrecta. En su explicación, al escribir “las fichas triangulares son verdes” no hizo sino consignar la conversión de la primera premisa planteada en el problema, es decir, “Las fichas verdes son triangulares”.

1.4. Respuesta correcta (C) con ausencia de justificación (NJ)

Mostramos en qué consiste esta categoría mediante la respuesta emitida por el participante 06 (Figura 123):

INFORMACIÓN SOBRE FICHAS PARTICULARES		PREGUNTA	SI	NO	NO SE SABE	EXPLICACIÓN
i)	F1 es una ficha azul	¿Es F1 triangular?			X	Podría ser

Figura 123. Respuesta del participante 06 - problema 3a) - i

Como se puede observar en la figura anterior, la elección del participante fue correcta, pero la expresión “podría ser” no la justificó.

2. En el ítem a – ii

2.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

A continuación, mostramos en la Figura 124 la respuesta del participante 08, representativa de esta categoría.

ii)	F3 y F4 son del mismo material	¿Son F3 y F4 triangulares?			✓	Porque solo sabemos que el triangular es del mismo material, más no a la inversa
-----	--------------------------------	----------------------------	--	--	---	--

Figura 124. Respuesta del participante 08 – problema 3a) – ii

Podemos apreciar que el participante 08 respondió y justificó en forma correcta, al afirmar “solo sabemos que el triangular es del mismo material más no a la inversa”.

2.2. Respuesta incorrecta (I) con justificación incorrecta esperada (IE)

Para caracterizar esta categoría, en la Figura 125 presentamos la respuesta correspondiente al participante 01.

ii)	F3 y F4 son del mismo material	¿Son F3 y F4 triangulares?	X			Porque todos los fichos Triángulos son del mismo material
-----	--------------------------------	----------------------------	---	--	--	---

Figura 125. Respuesta del participante 01 – problema 3a) – ii

Como se puede observar en la figura anterior, el participante 01 contestó en forma incorrecta y justificó su respuesta mediante, al parecer, el error lógico de la afirmación

del consecuente. De este modo, el posible razonamiento seguido por el participante mencionado pudo haber sido el siguiente:

Todas las fichas triangulares son del mismo material

F3 y F4 son del mismo material

F3 y F4 son triangulares

Esta conclusión es incorrecta.

2.3. Respuesta incorrecta (I) con justificación incorrecta inesperada (INE)

Presentamos en seguida la respuesta del participante 03, representativa de esta categoría (Figura 126):

ii)	F3 y F4 son del mismo material	¿Son F3 y F4 triangulares?	X	Porque a cada uno le corresponde una etiqueta, pero se puede ser el mismo material
-----	--------------------------------	----------------------------	---	--

Figura 126. Respuesta del participante 03 – problema 3a) – ii

Se puede apreciar en la figura anterior que el participante 03 contestó incorrectamente a la pregunta planteada. Mientras tanto, su justificación, al considerar “porque a cada uno le corresponde una etiqueta, pero si puede ser el mismo material”, presenta una redacción tal que originó que no se pueda codificar el error presente.

3. En el ítem a – iii

3.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

La respuesta del participante 10 (Figura 127) nos permitirá ilustrar esta categoría:

iii)	F5 es redonda	¿Es F5 verde?	X	Porque todos los de color verde son triangulares.
------	---------------	---------------	---	---

Figura 127. Respuesta del participante 10 – problema 3a) – iii

Se puede observar que el participante 10 respondió y justificó correctamente (“todas [las fichas] de color verde son triangulares”) a partir de una de las premisas planteadas en el problema.

3.2. Respuesta correcta (C) con justificación no compatible (CNR)

En la siguiente figura (Figura 128), mostramos la respuesta del participante 03, correspondiente a esta categoría:

iii)	F5 es redonda	¿Es F5 verde?	X	* No Hay F5 * EN TODO CASO SERIA AZUL
------	---------------	---------------	---	--

Figura 128. Respuesta del participante 03 – problema 3a) – iii

Observamos que, aunque el participante 03 contestó correctamente, su justificación se basó en que la ficha F5 no existe, lo que no puede afirmarse de acuerdo a las condiciones planteadas en el problema.

3.3. Respuesta incorrecta (I) sin justificación (NJ)

En la siguiente figura (Figura 129) colocamos la respuesta del participante 04, adscrita a esta categoría:

iii)	F5 es redonda	¿Es F5 verde?	X	
------	---------------	---------------	---	--

Figura 129. Respuesta del participante 04 – problema 3a) – iii

Como se puede apreciar, el participante 04 respondió correctamente al ítem planteado, pero no justificó su respuesta.

3.4. Respuesta incorrecta (I) con justificación errónea esperada (IE)

A continuación (Figura 130), colocamos la respuesta del participante 05, perteneciente a esta categoría:

iii)	F5 es redonda	¿Es F5 verde?	X	Porque pueden haber fichas redondas de otros colores.
------	---------------	---------------	---	---

Figura 130. Respuesta del participante 05 – problema 3a) – iii

Se puede observar en la Figura 130 que el participante 05 respondió incorrectamente, pero al indicar que “pueden haber fichas redondas de otros colores”, evidenció una justificación tal que no enfrentaba la cuestión que se le planteaba.

4. En el ítem a – iv

4.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

Mostramos, en la Figura 131, la respuesta del participante 02, que permitirá ilustrar esta categoría:

iv)	F7 y F8 son fichas verdes	¿Son F7 y F8 del mismo material?	X		Las fichas verdes son Triangulares y estas a su vez son del mismo material luego F7 y F8 al ser verdes, son triangulares y del mismo material.
-----	---------------------------	----------------------------------	---	--	--

Figura 131. Respuesta del participante 02 – problema 3a) – iv

Observamos en la figura anterior que el participante 02 respondió correctamente a la pregunta y empleó satisfactoriamente los datos planteados en el problema, pues redactó y parafraseó las premisas planteadas como condiciones del problema.

4.2. Respuesta incorrecta (I) con justificación errónea no esperada (IE)

A continuación, presentamos en la Figura 132, la respuesta del participante 06, adscrita a esta categoría:

iv)	F7 y F8 son fichas verdes	¿Son F7 y F8 del mismo material?	X		Podrían ser del mismo material como puede que no
-----	---------------------------	----------------------------------	---	--	--

Figura 132. Respuesta del participante 06 – problema 3a) – iv

Como se puede observar en la figura anterior, el participante 06 no respondió correctamente a la pregunta planteada y, mas bien, introdujo información extraña relacionada con el material de las fichas verdes: “podrían ser del mismo material como puede que no”. Ello no constituye una justificación correcta, de acuerdo con las premisas proporcionadas.

4.3. Respuesta incorrecta (I) con justificación errónea inesperada (INE)

Presentamos en seguida la respuesta del participante 03, perteneciente a esta categoría (Figura 133):

iv)	F7 y F8 son fichas verdes	¿Son F7 y F8 del mismo material?	X		- No son verdes - Pero sí del mismo material.
-----	---------------------------	----------------------------------	---	--	--

Figura 133. Respuesta del participante 03 - problema 3a) - iv

Como se observa en la figura anterior, el participante 03 contestó incorrectamente y justificó incorrectamente frente al ítem planteado mediante la negación de una de las condiciones presentadas (las fichas “no son verdes”).

5. En el ítem b – i

5.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

Observamos a continuación, en la Figura 134, la respuesta del participante 12, perteneciente a esta categoría:

i)	F1 es azul	¿Es F1 de plástico?	X		los fichas de carton son verdes
----	------------	---------------------	---	--	---------------------------------

Figura 134. Respuesta del participante 12 – problema 3b) – i

Como podemos observar, la respuesta y la justificación del participante 12 se basaron en los datos brindados en el problema, pues emplearon una de las premisas de este: “las fichas de cartón son verdes”.

5.2. Respuesta correcta (C) con justificación incompatible (CNR)

En la Figura 135 mostramos la respuesta del participante 03, adscrita a esta categoría:

i)	F1 es azul	¿Es F1 de plástico?	X		Porque puede ser Redonda.
----	------------	---------------------	---	--	---------------------------

Figura 135. Respuesta del participante 03 – problema 3b) – i

Se puede observar en la figura anterior que el participante 03 empezó a responder correctamente, pero su justificación (“puede ser redonda”) abordó la forma de la ficha, cuestión sobre la que no se le exigió responder.

5.3. Respuesta incorrecta (I) con respuesta incorrecta esperada (IE)

En la Figura 136 presentamos la respuesta del participante 01, perteneciente a esta categoría:

i)	F1 es azul	¿Es F1 de plástico?	X		Es posible que siendo azul sea de carton
----	------------	---------------------	---	--	--

Figura 136. Respuesta del participante 01 - problema 3b) - i

Como se puede apreciar en la figura anterior, el participante 01 respondió en forma incorrecta al ítem planteado. Además, en su justificación, agregó un elemento extraño al considerar que la ficha azul podía ser de cartón (“Es posible que siendo azul sea de cartón”).

5.4. Respuesta incorrecta (I) sin justificación (NJ)

A continuación presentamos la respuesta del participante 04 (Figura 137), que ilustra esta categoría.

i)	F1 es azul	¿Es F1 de plástico?			X	
----	------------	---------------------	--	--	---	--

Figura 137. Respuesta del participante 04 – problema 3b) – i

Como se puede ver en la Figura 137, el participante 04 emitió respuesta, pero no la justificó.

6. En el ítem b – ii

6.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

Presentamos en seguida la respuesta del participante 02 (Figura 138) que ilustra la categoría identificada):

ii)	F2 es una ficha de plástico	¿Es F2 rectangular?			X	La ficha puede ser de plástico y a la vez rectangular. En situaciones no contradice esto.
-----	-----------------------------	---------------------	--	--	---	---

Figura 138. Respuesta del participante 02 – problema 3b) – ii

Como se puede apreciar, el participante 02 empleó las condiciones del problema para emitir respuesta y justificarla en forma correcta. La explicación del participante considera que “la ficha puede ser de plástico y a la vez rectangular”.

6.2. Respuesta correcta (C) con justificación incompatible (CNR)

A continuación se muestra la respuesta del participante 01 (Figura 139) que pertenece a esta categoría:

ii)	F2 es una ficha de plástico	¿Es F2 rectangular?			X	Es posible que sea de cartón y a la vez sea redonda o triangular.
-----	-----------------------------	---------------------	--	--	---	---

Figura 139. Respuesta del participante 01 – problema 3b) – ii

La respuesta del participante 01 fue correcta. Sin embargo, su justificación (“es posible que sea de cartón”) contradujo la información presentada en este ítem.

6.3. Respuesta incorrecta (I) con justificación incorrecta esperada (IE)

La respuesta del participante 10 (Figura 140) nos permite ilustrar esta categoría:

ii)	F2 es una ficha de plástico	¿Es F2 rectangular?	X	NO, PORQUE SI ES RECTANGULAR TIENE QUE SER DE MATERIAL CARTÓN.
-----	-----------------------------	---------------------	---	--

Figura 140. Respuesta del participante 10 – problema 3b) – ii

Como podemos observar, la respuesta del participante 10 fue incorrecta. Su justificación fue incorrecta porque se fundamentó en la expresión “si es rectangular *tiene que ser de material cartón*”.

7. En el ítem b – iii

7.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

En la siguiente figura (Figura 141), mostramos la respuesta del participante 08, perteneciente a esta categoría:

iii)	F3 es rectangular	¿Es F3 una ficha de cartón?	✓	También puede ser plástico
------	-------------------	-----------------------------	---	----------------------------

Figura 141. Respuesta del participante 08 – problema 3b) – iii

Como podemos observar, el participante 08 respondió correctamente y se fundamentó en las condiciones brindadas por el problema para justificar su elección, pues no se puede asegurar el material del que se encuentran hechas las fichas rectangulares.

7.2. Respuesta correcta (C) con justificación no compatible (CNR)

A continuación mostramos la respuesta del participante 01 (Figura 142), adscrita a esta categoría:

iii)	F3 es rectangular	¿Es F3 una ficha de cartón?	X	no todas las fichas de cartón son rectangulares
------	-------------------	-----------------------------	---	---

Figura 142. Respuesta del participante 01 – problema 3b) – iii

La respuesta del participante 01 fue correcta, pero la justificación incorporó un requisito desacorde con una de las premisas del problema. En efecto, una de ellas indica “Si una ficha es de cartón entonces es rectangular”, pero el participante mencionado indica “no todas las fichas de cartón son rectangulares”.

7.3. Respuesta incorrecta (I) con justificación incorrecta esperada (IE)

Mostramos en seguida la respuesta del participante 11 (Figura 143), la misma que es perteneciente a esta categoría:

iii)	F3 es rectangular	¿Es F3 una ficha de cartón?	X		Por condición
------	-------------------	-----------------------------	---	--	---------------

Figura 143. Respuesta del participante 11 – problema 3b) – iii

Observamos que el participante 11, realizó una elección incorrecta y justificó su respuesta a partir de creer, posiblemente, que el hecho de que la ficha sea rectangular es causa para ser de cartón (“por condición”).

8. En el ítem b – iv

8.1. Respuesta correcta (C) con justificación correcta (CR)

Cualquiera de las respuestas emitidas por los 12 participantes del estudio nos puede ilustrar esta categoría. Tomemos, por ejemplo, la del participante 12 (Figura 144):

iv)	F5 es de cartón	¿Es F5 triangular?	X		las fichas de cartón son rectangulares.
-----	-----------------	--------------------	---	--	---

Figura 144. Respuesta del participante 12 – problema 3b) – iv

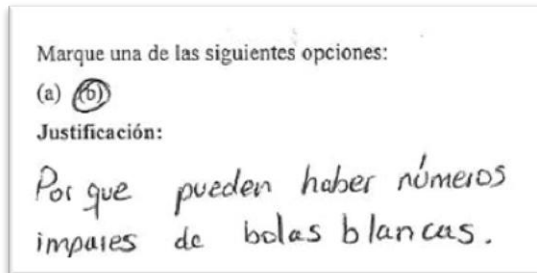
Se puede observar que el participante 12 empleó las condiciones del problema para responder correctamente y para justificar su respuesta. En efecto, el participante consideró el enunciado de la primera premisa (“Si una ficha es de cartón entonces es rectangular”) para fundamentar su elección.

Anexo 4F. Ejemplos de codificación de respuestas y justificaciones para el problema 4

1. Para el procedimiento 1

1.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

A continuación, presentamos la respuesta del participante 04, perteneciente a esta categoría (Figura 145):



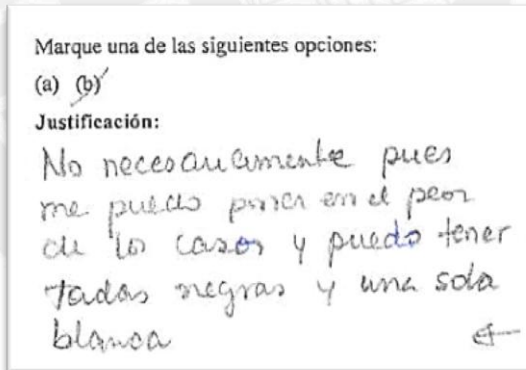
Marque una de las siguientes opciones:
 (a) (b)
 Justificación:
 Por que pueden haber números
 impares de bolas blancas.

Figura 145. Respuesta del participante 04 – problema 4, procedimiento 1

La respuesta del participante 04 fue correcta. Su justificación se fundamentó en uno de los casos previstos en caso de aplicación del procedimiento 1.

1.2. Respuesta correcta (C) con justificación no compatible (CNR)

La respuesta del participante 05 (Figura 146) se encuentra adscrita a la categoría indicada:



Marque una de las siguientes opciones:
 (a) (b)
 Justificación:
 No necesariamente pues
 me puedo poner en el peor
 de los casos y puedo tener
 todas negras y una sola
 blanca

Figura 146. Respuesta del participante 05 – problema 4, procedimiento 1

Como puede observarse, la respuesta del participante 05 fue correcta. Sin embargo, al concentrarse en el color de las bolas, parecería que el participante consideró equivalentes las preguntas “¿será cierto que todas las bolas blancas de la urna tienen número par?” y “¿será cierto que todas las bolas con número par son blancas?” (forma converso).

1.3. Respuesta incorrecta (I) con justificación errónea esperada (IE)

A continuación mostramos la respuesta del participante 07 (Figura 147), perteneciente a esta categoría:

Marque una de las siguientes opciones:

(a) (b)

Justificación:

Pues si veo todas las pares
estare viendo su color.

Figura 147. Respuesta del participante 07 – problema 4, procedimiento 1

Podemos observar que, al parecer y a juzgar por la justificación emitida (“si veo todas las pares estaré viendo su color”), el participante 07 consideró equivalente la pregunta “¿será cierto que todas las bolas blancas tienen número par?” con su forma converso “¿será cierto que todas las bolas con número par son blancas?”.

1.4. Respuesta incorrecta (I) con justificación errónea inesperada (INE)

A continuación mostramos la respuesta del participante 03 (Figura 148), perteneciente a esta categoría:

Para el Procedimiento 1:

Marque una de las siguientes opciones:

(a) (b)

Justificación:

Por que si son PARES
Entonces son blancas

Figura 148. Respuesta del participante 03 - problema 4, procedimiento 1

Podemos apreciar que el participante 03 agregó información al contenido del problema planteado. El participante 03 indicó “si [las bolas] son pares entonces son blancas”, dato que no se encuentra escrito en el enunciado del problema ni se puede deducir a partir de él.

2. Para el procedimiento 2

2.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

En seguida presentamos la respuesta del participante 02 (Figura 149), adscrita a esta categoría:

Para el Procedimiento 2:

Marque una de las siguientes opciones:

(b)

Justificación:

Si al sacar todas las impares, hay alguna blanca o ninguna blanca; me permitirá responder a la pregunta. Pues no me es relevante saber la numeración de las negras.

Figura 149. Respuesta del participante 02 – problema 4, procedimiento 2

Como se puede observar, la respuesta del participante 02 fue correcta y su justificación también lo fue, pues mostró, precisamente, el caso en el que se podía responder con seguridad (en forma negativa) frente a la pregunta planteada en el problema: “si al sacar todas las impares hay alguna blanca o ninguna blanca me permitirá responder a la pregunta”.

2.2. Respuesta correcta (C) con justificación no compatible (CNR)

La respuesta del participante 08 (Figura 150) nos permite ilustrar esta categoría:

Marque una de las siguientes opciones:

(b)

Justificación:

Por negación al par o sea impar también llego a la misma conclusión de ver a todos los impares reconocen el color de los pares.

Figura 150. Respuesta del participante 08 - problema 4, procedimiento 2

Como se puede observar, el participante 08 marcó la opción correcta, pero su justificación parece considerar que todas las bolas con número impar tenían un solo color y que este era opuesto al color que (tal vez, erróneamente creyó) tenían todas las bolas con número par.

2.3. Respuesta correcta (C) no justificada (NJ)

La respuesta del participante 11 (Figura 151) nos permite ilustrar esta categoría:

Marque una de las siguientes opciones:

(a)

Justificación:

No se Puede Concluir
Con Seguridad

Figura 151. Respuesta del participante 11 – problema 4, procedimiento 2

Como se puede observar, el participante 11 (Figura 85) realizó la selección correcta, pero no justificó su respuesta.

2.4. Respuesta incorrecta (I) con justificación incorrecta (IE)

La respuesta del participante 01 (Figura 152) nos permite ilustrar esta categoría:

Para el Procedimiento 2:

Marque una de las siguientes opciones:

(a) (b)

Justificación:

Es posible que las bolas, con
número par sean negras

Figura 152. Respuesta del participante 01 - problema 4, procedimiento 2

De acuerdo a la figura anterior, el participante 01 respondió en forma incorrecta y justificó en forma análoga. Posiblemente el participante tenía en mente la forma conversa de pregunta planteada en el problema, es decir, “¿será cierto que todas las bolas con número par son blancas?”. Así, se comprende la indeterminación que le genera el hecho que, dentro de la urna, las bolas con número par puedan ser negras.

2.5. Respuesta incorrecta (I) con justificación errónea no esperada (INE)

A continuación, mostramos la respuesta del participante 03 (Figura 153), que pertenece a esta categoría:

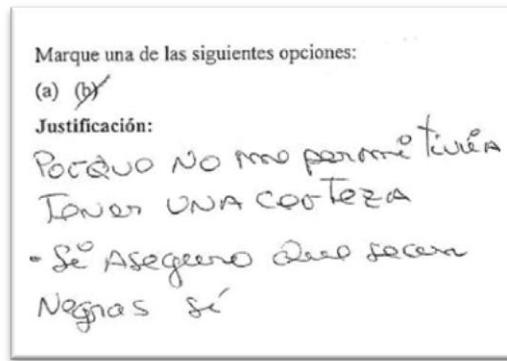


Figura 153. Respuesta del participante 03 – problema 4, procedimiento 2

De acuerdo con la Figura 153, el participante 03 respondió de forma incorrecta. Al parecer, tenía en mente la forma inversa de la pregunta planteada en el problema, es decir, “¿será cierto que todas las bolas con número par son blancas?”. Además, pudo haber pensado (a juzgar por su afirmación “si aseguro que sean negras [las bolas con número impar] sí [¿puedo asegurar una conclusión?]”) que todas las bolas con número impar debían tener un solo color, de tal modo que las bolas con número par que quedaban en la urna debían tener, también, un solo color.

3. Para el procedimiento 3

3.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

La respuesta del participante 09 (Figura 154) nos ilustra esta categoría:

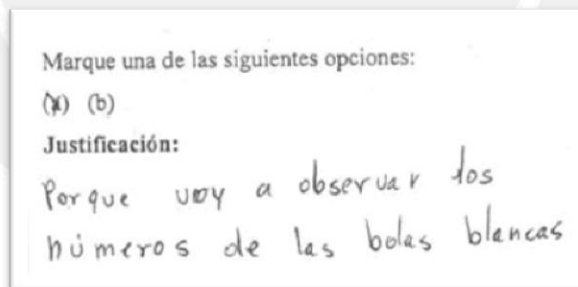


Figura 154. Respuesta del participante 09 – problema 4, procedimiento 3

Se puede observar, con toda claridad, que el participante 09 empleó las condiciones del problema para responder directamente a la pregunta planteada en el problema “¿Será cierto que todas las bolas blancas de la urna tienen número par?”.

3.2. Respuesta correcta (C) con justificación no compatible (CNR)

La respuesta del participante 01 (Figura 155) nos ilustra una respuesta perteneciente a esta categoría:

Para el Procedimiento 3:

Marque una de las siguientes opciones:

(a) (b)

Justificación:

*de sacar todas las bolas blancas
puedo saber el color y los
números de las que quedan
en la urna*

Figura 155. Respuesta del participante 01 - problema 4, procedimiento 3

Como se puede apreciar en la figura anterior, el participante 01 eligió la opción correcta, pero su justificación incluyó elementos erróneos: él manifestó que podía conocer el número de las bolas que quedaban en la urna. A todas luces, este es un dato extraño que no fue enunciado dentro de las condiciones del problema.

3.3. Respuesta incorrecta (I) con justificación errónea no esperada (INE)

Mostramos a continuación la respuesta del participante 07 (Figura 156), adscrita a esta categoría:

Marque una de las siguientes opciones:

(a) (b)

Justificación:

*No porque puede haber
una negra par*

Figura 156. Respuesta del participante 07 – problema 4, procedimiento 3

Como se puede observar en la figura, el participante 07 eligió la alternativa incorrecta pero la justificó, tal vez, luego de haber comprendido a la pregunta planteada en el problema en su forma conversa: ¿Será cierto que todas las bolas con número par de la urna son blancas?. Solo así podría explicarse la indeterminación causada en el participante ante la posibilidad de que haya alguna bola negra con número par dentro de la urna.

4. Para el procedimiento 4

4.1. Respuesta correcta (C) con justificación compatible (CR)

Ilustramos esta categoría con la respuesta brindada por el participante 02 (Figura 157):

Marque una de las siguientes opciones:

(a)

Justificación:

Dentro de la urna quedan las bolas blancas y no sabré si hay algún impar o todos son pares.

Figura 157. Respuesta del participante 02 – problema 4, procedimiento 4

Como podemos observar, la respuesta del participante 02 fue correcta. Su justificación consideró todos los casos posibles relacionados con las bolas blancas (por ende, con la pregunta planteada en el problema) que le llevaban a no concluir en algo específico.

4.2. Respuesta correcta (C) con justificación incompatible (CNR)

La respuesta brindada por el participante 04 (Figura 158) nos permitirá ilustrar esta categoría:

Marque una de las siguientes opciones:

(a)

Justificación:

En la urnas pueden haber negras que son pares o impares.

Figura 158. Respuesta del participante 04 – problema 4, procedimiento 4

Se puede apreciar que el participante 04 marcó la alternativa correcta, pero su justificación consideró un elemento discordante con los datos del problema, pues indicó que podían quedar bolas negras dentro de la urna.

4.3. Respuesta correcta (C) sin justificación (NJ)

En la respuesta brindada por el participante 11 (Figura 159) se puede apreciar que marcó la alternativa correcta, pero no justificó su elección:

Marque una de las siguientes opciones:

(a)

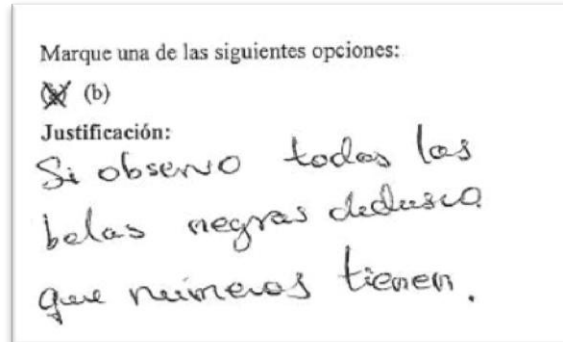
Justificación:

No se tiene una certeza.

Figura 159. Respuesta del participante 11 – problema 4, procedimiento 4

4.4. Respuesta incorrecta (I) sin justificación (NJ)

A continuación, mostramos la respuesta del participante 08 (Figura 160), perteneciente a esta categoría:



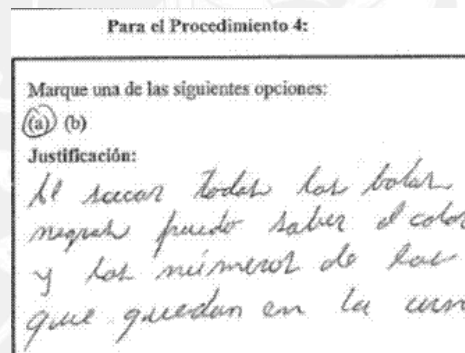
Marque una de las siguientes opciones:
 (b)
 Justificación:
 Si observo todas las
 bolas negras deduzco
 que números tienen.

Figura 160. Respuesta del participante 08 – problema 4, procedimiento 4

Observamos que el participante 08 marcó la alternativa incorrecta pero no justificó la elección realizada. Mas bien, pareció repetir lo que le indicaba el procedimiento 4.

4.5. Respuesta incorrecta (I) no esperada (INE)

A continuación, mostramos la respuesta del participante 01 (Figura 161), perteneciente a esta categoría:



Para el Procedimiento 4:
 Marque una de las siguientes opciones:
 (a) (b)
 Justificación:
 Al sacar todas las bolas
 negras puedo saber el color
 y los números de las
 que quedan en la urna

Figura 161. Respuesta del participante 01 - problema 4, procedimiento 4

Como se puede apreciar en la figura anterior, el participante respondió en forma incorrecta. Justificó dicha respuesta mediante la adición de un elemento como el conocimiento acerca del número que tenían las bolas que quedaron dentro de la urna.