PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA CONTRIBUIR EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA COMO MAGNITUD CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

VERONICA MILAGROS CASTILLO PÉREZ

Dirigido por

FRANCISCO UGARTE GUERRA

San Miguel, 2015

A mis tres amores

AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Educación del Perú, quien por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominada "Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014". La preocupación que tienen por la formación de los docentes se verá reflejada con efectividad cuando compartamos con nuestras alumnas esta profundización en nuestra formación docente y nos proyectemos a trabajar juntos por una educación de calidad.

Asimismo, a la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú; en especial a los docentes que compartieron con nosotros su saber y experiencia en el mundo de las Matemáticas; su entrega y preparación nos dejó como mejor enseñanza que la vocación va más allá de las aulas.

De manera especial, al profesor Francisco, por el asesoramiento dedicado y entusiasta en todo el proceso de la investigación; sobre todo, por alentarme constantemente, así como por su exigencia, enseñanzas, muestras de respeto y de escucha.

A los miembros del jurado, por sus valiosos aportes en la realización de esta investigación y su compromiso con la vocación en la enseñanza de la Matemática.

A los miembros de la comunidad educativa Virgo Potens que colaboraron con optimismo en el desarrollo de esta investigación; sus deseos de aprender más en cada encuentro, su apertura y confianza, nos animan a seguir en esta línea de investigación.

A mis padres, por compartir mis sueños y apoyarme en las decisiones que van marcando nuestro camino. Sin ellos, mi historia hubiese sido otra, seguramente no tan fascinante como la que vivo.

A mi apoyo incondicional, por las tardes que dejamos de estar juntos para seguir nuestra meta profesional; su confianza y palabras de aliento constantes me permiten vivir día a día con la esperanza de un mañana mejor, siendo siempre, en donde estemos, ciudadanos del mundo que construimos tomados de la mano de Dios.

A los amigos encontrados en el camino de la investigación; sin ellos esta travesía no hubiese sido tan enriquecedora. Por las largas conversaciones, la complicidad, la lealtad y cada u de los momentos compartidos que se quedan en nuestra memoria y en nuestro corazón. Desde ahora y para siempre seremos un solo corazón PUCP.

RESUMEN

Este trabajo de investigación tiene como objetivo analizar los efectos de una secuencia didáctica desarrollada con cuatro estudiantes del sexto grado de educación primaria, de 11 años de edad, de una Institución Educativa Estatal ubicada en Lima. La problemática que suscita este estudio se basa en el tratamiento que se le da al objeto matemático área a lo largo de la educación primaria, en la cual se deja de lado el proceso de construcción del concepto que les permita, a las estudiantes, reconocer que el área es una magnitud y su medida corresponde a la unidad de medida elegida. En ese sentido, se plantean dos secuencias de actividades que busquen contribuir en la construcción del concepto de área como magnitud, basándose en aspectos propios de la Teoría de Situaciones Didácticas. La metodología usada para su análisis fue en base a aspectos de la Ingeniería Didáctica. Como resultado de nuestra investigación se tuvo que las estudiantes movilizaron los conceptos asociados al área de figuras geométricas simples y compuestas diferenciándola de su medida, a partir de procedimientos como el conteo de unidades, uso de cuadrícula, descomposición y composición, los mismos que les permitieron reconocer que el área es una magnitud y su medida depende de la unidad de medida escogida. Por lo tanto, la validación nos permite concluir que la secuencia didáctica contribuyó en la construcción del concepto de área como magnitud.

PALABRAS CLAVE: área como magnitud, unidades de medida, medida de área

ABSTRACT

This research have as objective to analyze the effects of one didactic sequence develop with four students of six grade in primary school, 11 years old, State Educational Institutional located in Lima. The main problem of this study is based in the treatment that it gives to the mathematical object along primary education, in which it is put aside the process of construction of the concept that allows to the students recognize that the measure and area are different

In that sense, it is propose a didactic sequence seek contribute to the construction of the concept area as magnitude. The methodology used for its analysis was based in Didactic Engineer's aspects. As a result of our research we got that the students stablish the concepts associates to the geometric figures' areas simples and complex, from procedures as the cont of measure´s units, decomposition of figures and the same which allow recognize them.

Keywords: area as magnitude, units of measure, measure area

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación aborda la problemática que se suscita en el aprendizaje de los estudiantes del sexto de primaria en relación a la construcción del concepto de área como magnitud. Es así que diseñamos, implementamos y analizamos una secuencia didáctica a la luz de la Teoría de Situaciones.

La investigación está organizada en cuatro capítulos:

En el capítulo I, presentamos los antecedentes que marcan los lineamientos de nuestra investigación, en los que resaltan investigaciones referidas a la enseñanza del objeto matemático área como magnitud, los procedimientos que permiten a los estudiantes construir el concepto de área y la pertinencia de la Teoría de Situaciones Didácticas.

En el capítulo II, abordamos los aspectos que proporciona la Teoría de Situaciones Didácticas, propuesta por Brousseau (1986), así como los aspectos de la Ingeniería Didáctica como soporte metodológico desarrollada por Michéle Artigue (1995).

En el capítulo III, hacemos un estudio del objeto matemático área como magnitud, para lo cual requiere de la utilización de diversos procedimientos como comparación y medida a partir de diversas unidades, propuestas por Freudenthal (1983) y Doaudy & Perrin-Glorian (1983).

En el capítulo IV, describimos la secuencia didáctica conformada por las actividades propuestas. A partir de ello, desarrollamos el análisis a priori y el análisis a posteriori, además del análisis global de la misma.

Finalmente, presentamos las conclusiones y las recomendaciones para futuras investigaciones que surgirán a raíz de nuestra investigación.

CAPÍTULO I: LA PROBLEMÁTICA

El propósito de este capítulo es dar a conocer algunos de los aportes que dan luces al desarrollo de nuestra investigación y nos permiten delimitar nuestra línea de investigación. Iniciaremos dando una mirada a los antecedentes, los cuales están organizados según los ejes temáticos de la investigación: Teoría de Situaciones Didácticas, área como magnitud y utilización de diversas herramientas para la enseñanza de procedimientos para medir áreas.

Luego, daremos una mirada general a los documentos oficiales utilizados por los docentes y los alumnos de primaria, a modo de dar cuenta de cuándo se incorporan y cómo son movilizados los conceptos de área, medida de área y polígonos en el nivel de educación primaria; de modo que, en sintonía con los antecedentes, quede justificada la pertinencia de nuestra investigación y la delimitación del problema de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos.

1.1.Antecedentes

Los trabajos de investigación que presentaremos a continuación marcan la pauta principal para la realización de nuestro estudio. No obstante, consideramos relevante hacer una breve explicación del uso que daremos a algunos de los términos que surgirán a lo largo de nuestro trabajo. El término portugués *grandeza* observado en los trabajos de Facco (2003) y Silva (2010), así como el término francés *grandeur,* referido en los trabajos de Douady, Baltar entre otros, son entendidos como magnitud; tal como observamos a continuación:

- Según Douady (1987) es importante distinguir entre tres cuadros: el cuadro geométrico constituido por las figuras planas; el cuadro numérico, por la medida del área de las figuras planas, a la que corresponden los números reales positivos (IR+); y, el cuadro de las *grandezas,* constituido por las clases de equivalencia de las figuras de igual área; es decir que comparten las misma cualidades como longitud y área.

- Según Baltar (1996) el área es una especie de *grandeur* en relación a los cuadros geométricos propuestos por Douady, los cuales tienen un valor numérico particular obtenido por una unidad de medida de área.

- Para Corberán (1996), el término *magnitud* puede ser definido como una clase de equivalencia a partir de la función medida.

En ese sentido, en nuestra investigación, haremos uso del término en español *magnitud*, con el fin de uniformizar los conceptos, los cuales serán explicados con mayor detalle en el capítulo III, referido al estudio del objeto matemático.

A continuación, presentaremos los antecedentes considerados relevantes para nuestra investigación, los mismos que serán organizados según los ejes temáticos: (1) el área como magnitud, a partir de las investigaciones de Douady & Perrin Glorian (1983, 1987), seguidas por Baltar (1969), Facco (2003) y Silva (2010); (2) el concepto de área y su medida a partir de las investigaciones de Freudenthal (1983), seguidas por Del Olmo, Moreno & Gil (1993) y Corberán (1996); y, (3) la organización de una propuesta didáctica para la incorporación del software GeoGebra como recurso para medir áreas, propuesta por Iranzo y Fortuny (2009).

En seguida daremos a conocer en qué consisten las investigaciones mencionadas anteriormente:

(1) El área como magnitud

Uno de los antecedentes principales es la investigación realizada por Facco (2003), quien para desarrollar los conceptos de área en relación a las creencias que tenían los profesores, realizó una aplicación de actividades con niños de quinto grado de educación primaria. Su investigación se llevó a cabo, principalmente, por la problemática observada por Bellemain y Lima (2002, citado en Facco, 2003), la cual se refiere a que la enseñanza de la Geometría en las aulas de matemáticas genera confusiones en la enseñanza de las medidas de áreas; por ello, se requiere del estudio tanto de las magnitudes geométricas como de actividades que precisen de procedimientos de composición y descomposición, uso de cuadrículas, y otros que permitan la comprensión de las fórmulas para medir áreas. Así se evidencia en su investigación:

> El PCN (Parámetros Curriculares Nacionales) afirma que la enseñanza de la Geometría ha tenido poca atención en la clase de Matemáticas y se ha confundido con la enseñanza de medidas. Se entiende, por lo tanto, un esfuerzo para mostrar el estudio de las cantidades geométricas.
>
> Cabe señalar que las actividades que implican composición y descomposición de figuras, el uso de cuadrículas, *tangram* y *poliminós*, propuestos en el estudio de la geometría, que permiten la comprensión de las fórmulas del área. (Bellemain e Lima, 2002, pp.70-71 en Facco, 2003, p.31). [Traducción propia]

A partir de esta investigación, Facco (2003) presenta una secuencia de actividades como propuesta de enseñanza-aprendizaje para la adquisición del concepto de área como magnitud, de modo que los estudiantes puedan establecer las relaciones necesarias entre el cuadro geométrico y el numérico. Es importante precisar que el término “cuadro”, es propuesto por Douady & Perrin Glorian (1986, citado en Facco, 2003), quien resalta el rol que estos aportan al desarrollo de las matemáticas. Para Douady & Perrin Glorian, el Juego de Cuadros es un recurso que permite relacionar objetos, así como sus formulaciones diferentes según las imágenes mentales que se tengan de ellos.

En ese sentido, las actividades propuestas en la secuencia didáctica elaborada por Facco apoyan el proceso de enseñanza –aprendizaje trabajando con tres ejes: superficie, área y medida de área. Entendiéndose que la superficie está definida como un conjunto de puntos, el área es una magnitud y la medida del área corresponde a un número real positivo.

Dado que los estudios hechos por Facco, siguen la línea de investigación de Baltar (1996), surge la explicación de la construcción del término área desde la enseñanza en el nivel de educación primaria; por ello, es necesario resaltar que, en la misma línea de Douady & Perrin-Glorian, Facco (2003) adopta el término área como magnitud para explicar la necesidad de conocer que el área puede ser definida como una clase de equivalencia a partir de una función medida en la que los procedimientos de composición y descomposición de figuras planas permite la movilización de juegos de cuadros geométricos y numéricos para el reconocimiento de un área como magnitud autónoma..

La investigación toma aspectos de la ingeniería didáctica en tanto considera aspectos propios del análisis preliminar: aspectos epistemológicos a través de la aproximación histórica; aspectos didácticos, por medio del análisis del libro didáctico de quinto grado de enseñanza; y, aspectos cognitivos, al aplicar un test piloto a los estudiantes. Luego, hace un análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori que le permitieron validar los resultados de su investigación.

En el mismo sentido, el estudio de Silva (2010) se desarrolló con cien estudiantes de cinco escuelas diferentes en Brasil que cursaban el sexto año de enseñanza fundamental, el cual corresponde al sexto grado de primaria en el Perú. La investigación se basó en la propuesta y análisis de actividades sobre el cálculo de área de figuras planas usando una malla cuadriculada (en nuestra investigación la llamaremos cuadrícula). Para lograr su propósito, Silva (2010) orientó su investigación bajo la perspectiva de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y usó como marco metodológico la Ingeniería Didáctica. Es importante precisar que el estudio se centró en la enseñanza de la noción de área como magnitud, siguiendo la línea de investigación realizada por Douady & Perrin-Glorian (1989), Bellemain & Lima (2002, citado en Silva, 2010), y Facco (2003), entre otros.

En la línea de investigación de Bellemain & Lima (citado en Silva, 2010), se destacan situaciones que dan sentido al concepto de área como magnitud; estas son: situaciones de comparación, situaciones de medida y situaciones de producción. En la investigación realizada, observaron también la dificultad que perciben los niños para aceptar que existen figuras diferentes que pueden tener la misma área y que el área de una figura puede ser representada por números diferentes de acuerdo a las unidades de medida elegidas.

Apoyados en el estudio realizado por Douady & Perrin-Glorian (1989, citado en Silva, 2010) se resalta la importancia de desarrollar, en la enseñanza, el concepto de área como magnitud, para permitirle al alumno establecer las relaciones necesarias entre los cuadros geométricos y numéricos; además de posibilitarle la identificación rápida del área como un concepto independiente de la unidad de medida escogida.

Como se ha mencionado, la investigación de Silva (2010) se sustenta principalmente en la Teoría de Situaciones Didácticas, puesto que tiene por objetivo conducir o adquirir el conocimiento de los conceptos de áreas como magnitud. En ese sentido, formula variables micro didácticas, las cuales, al alterarse, propician modificaciones en las decisiones de los estudiantes para aplicar diversos procedimientos y estrategias que les permitan dar respuesta a las actividades planteadas. Las estrategias de resolución variaron según la ubicación de las figuras en relación a la malla, de modo que algunos alumnos descompusieron la figura de modo tal que la malla les permitió reconocer su área. Por ello, en la investigación tuvieron en cuenta los procedimientos que permitieron a los estudiantes observar de qué manera la comprensión del área como magnitud les facilita calcular adecuadamente el área de figuras planas.

Entre las variables propuestas en su investigación tenemos:

- **Posición de figura en relación a la malla**:

Se refiere a figuras que tienen áreas de diferentes medidas y están dispuestas en una malla. Como observamos, los lados de la figura A se encuentran apoyados en las líneas de la malla, la figura B tiene solo algunos lados apoyados en la malla y la figura C no tiene ningún lado apoyado en las líneas de la malla.

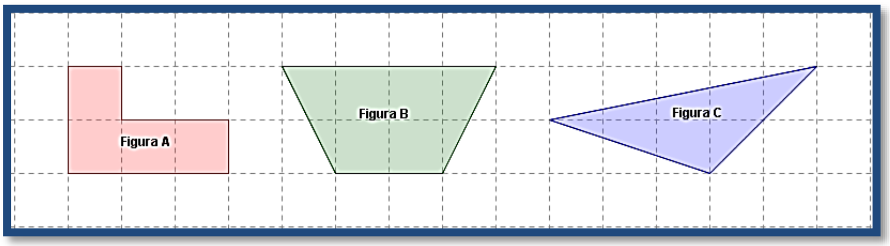


Figura 1. Variable didáctica: posición de figura con relación a la malla
Fuente: Silva (2010, p. 36)

- **Tipos de mallas triangulares y cuadriculadas**:

Utilizadas para que los alumnos efectúen una correspondencia de mallas, con esta herramienta se buscó identificar las cantidades de unidades de medida de área de las figuras dadas; de ese modo, los alumnos estarían efectuando un raciocinio matemático identificando el número de unidades triangulares que componen el área de figuras.

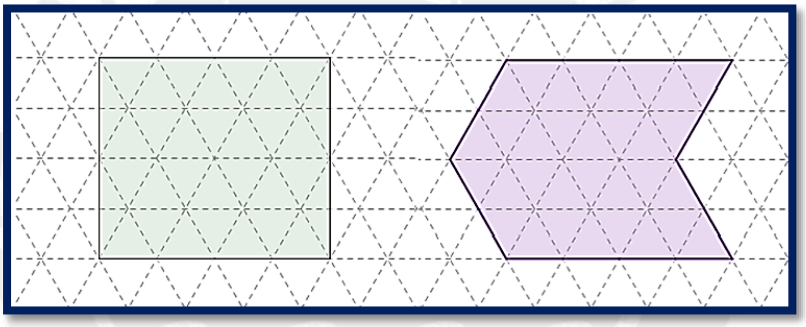


Figura 2. Variable didáctica: tipo de malla triangular
Fuente: Adaptado de Silva (2010, p.39)

Del mismo modo, se utilizaron diferentes formas para representar las unidades de medida como un cuadrado o cuatro cuadrados. Estas modificaciones de los valores de las variables permitieron al alumno realizar procedimientos básicos de conteo, composición y descomposición de figuras, tal como presentamos en la figura 3.

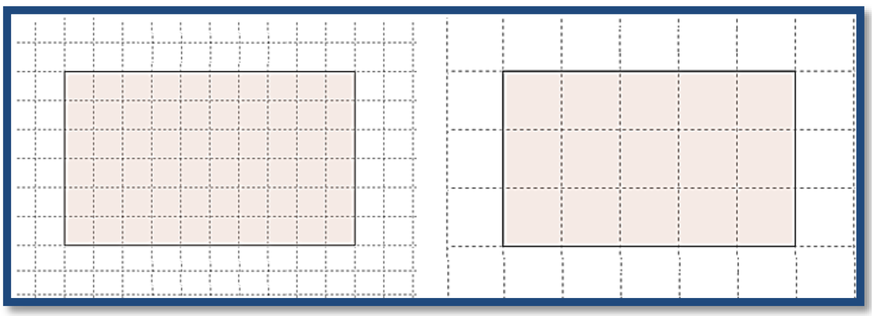


Figura 3. Variable didáctica: tipo de malla cuadriculada
Fuente: Adaptado de Silva (2010, p.38)

A partir de su estudio, Silva (2010) concluyó que el procedimiento en la resolución de actividades de medida de área depende de diversas variables, tales como los valores numéricos que se asignan a las unidades de medida de una figura, pues se observó que el procedimiento que siguen los alumnos es satisfactorio cuando los valores numéricos de las variables permiten la resolución de las actividades propuestas de reconocimiento de áreas, a partir del conteo de los cuadrados equivalentes a la unidad de medida; por otro lado, si las figuras son mostradas sin malla cuadriculada, los procedimientos de conteo de cuadrados para hallar el área se presentan con mayor dificultad para los niños.

Por ello, la autora resalta la importancia de introducir conceptos como composición, descomposición y complementación de partes de superficies unitarias. Es importante considerar que la investigación desarrollada por la investigadora sigue con los lineamientos de la investigación propuesta por Facco (2003), quien es para nuestra investigación otro antecedente pertinente que aporta tanto al referencial teórico del objeto matemático área como al referencial procedimental.

Además, Silva (2010) resalta que las actividades de composición y descomposición de figuras, el uso de cuadrículas o mallas, de recursos como el tangram son propuestas que permiten a los estudiantes lograr la comprensión de fórmulas de áreas. Para verificar esa problemática, analizaron los libros correspondientes al quinto grado de primaria y observaron la escasa cantidad de actividades relacionadas al estudio del concepto de área de figuras planas, mientras que, paralelamente se ofrece una profundización del conocimiento que induce a los estudiantes a la aplicación de fórmulas para el cálculo de áreas. Por ello, la autora vio por conveniente generar una secuencia de actividades que les permita a los alumnos aprehender el concepto de área como magnitud. **(Ver anexo1)**

Tanto las investigaciones de Facco (2003) como Silva (2010) se basan en los estudios de Douady & Perrin Glorian (1989) y Baltar (1996), por lo que tienen en común la necesidad particular de dar sentido a la noción de área independiente de la unidad de área escogida. Además, como hemos observado, se utiliza constantemente el término magnitud (en los términos de Doaudy, *grandeur*), el cual se refiere a la clase de equivalencia a partir de la función medida, este punto será abordado con más detalle en el capítulo III, referido al objeto matemático.

(2) El concepto de área y su medida

Por su parte, estudios desarrollados por Freudenthal (1983) determinan la naturaleza del concepto área entendida como una magnitud en la que se tiene en cuenta que una relación de equivalencia, una relación de orden y una operación de composición son obligatorios. En ese sentido, de las investigaciones realizadas por Freudenthal (1983), tomamos los aportes referidos al concepto de área, el cual será explicado con mayor detalle en el capítulo III, además de la importancia de acercar a los estudiantes desde los primeros grados de educación primaria a construir el concepto de área a partir de diversos procedimientos como agotamiento con una unidad de área con subunidades aún más finas, por conversión de transformaciones de deshacer y componer, por aproximaciones desde el interior y exterior con rejillas con figuras adaptadas, por fórmulas generales. (Freudenthal, 1983, pp. 380 -381)

Freudenthal critica que, en la enseñanza del área, se reduce a la expresión “longitud por anchura”. Ante esta situación sugiere realizar comparaciones entre áreas, lo que es necesario para la construcción del concepto *área* como magnitud en objeto mental. A su vez sugiere que los estudiantes se aproximen a actividades en las que tengan ejemplos de figuras que tengan la misma área y ejemplos de figuras tienen áreas diferentes (Freudenthal, 1983, pp. 380 -381).

En esta misma línea de investigación, surge el aporte Del Olmo, M.; Moreno, M. y Gil, F. (1993) quienes se centran en la comprensión del área como magnitud, siguiendo la línea propuesta por Freudenthal. En su estudio se refiere al proceso de medición, entendiéndola como que a una magnitud se le asigna un número atendiendo a cuatro etapas: elección de una unidad de medida, reiteración de la unidad de medida sobre el objeto que se desea medir, conteo del número de veces de la iteración y, finalmente, asignación de un número real positivo.

Posteriormente, surge el aporte de Corberán (1996), en el que se analiza el concepto de área como magnitud autónoma de superficies planas. Esta investigación surge a razón de que los estudiantes presentan dificultades al resolver problemas que implican la utilización del concepto área; además, observa que en los libros de educación básica regular se tiende a plantear la enseñanza de área limitándose al uso de la unidad cuadrada y la presentación de fórmulas para el cálculo de su medida. Es por ello que su investigación tiene como unos de sus objetivos el realizar un análisis didáctico del concepto de área de superficies planas, el grado de comprensión al que llegan los estudiantes al terminar la primaria. Si bien la experiencia se realizó con estudiantes de secundaria, se inicia el trabajo de investigación con entrevistas a niños de 11 a 15 años (en nuestra investigación trabajaremos con estudiantes de 11 años). Su aporte es pertinente para nuestra investigación, en tanto sigue la misma línea de los estudios teóricos de Perrin-Glorian. Además, presenta los conceptos "área como magnitud", en tanto es "una clase de equivalencia a partir de una aplicación medida" (Corberán, 1996. p.20), además de "superficie y medida"; los cuales serán utilizados a lo largo de nuestra investigación y serán explicados con mayor detalle en el capítulo III; a su vez, presenta la importancia de procedimientos de descomposición y composición de los polígonos para medir su área.

Luego de hacer un estudio teórico respecto al área, la autora presenta dos hipótesis didácticas con las cuales desarrolla su ingeniería didáctica. Para nuestra investigación tomaremos como referente la primera hipótesis: "El desarrollo de la enseñanza del concepto de área como magnitud, permite a los alumnos establecer las relaciones necesarias entre los dos cuadros: geométrico y numérico". (Corberán, 1996. p.21)

En ese sentido, la autora observó con detalle el comportamiento de la hipótesis, la cual le permitió determinar el objetivo del proceso de aprendizaje enfocado a la construcción del área como magnitud autónoma que permite a los estudiantes diferenciar el área de la forma, el área de la superficie, y el área del número; es decir, dos superficies pueden tener formas distintas y medidas de área iguales (Figura 4), o a una superficie le puede corresponder números diferentes debido a la elección de unidades escogidas y conservar su área (Figura 5a y b).

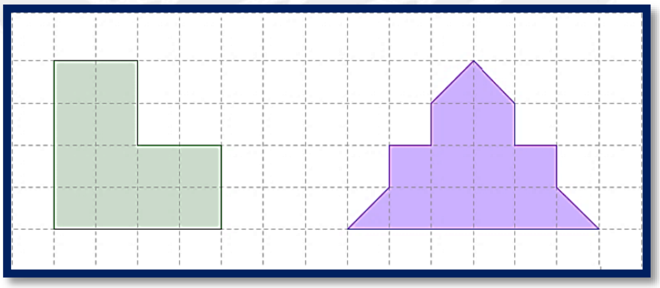


Figura 4. Superficies con diferente forma e igual medida de área
Fuente: Silva (2010)

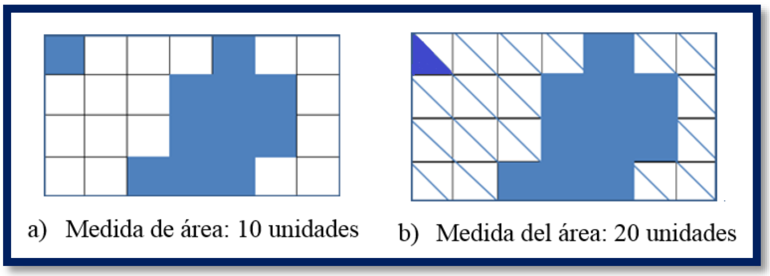


Figura 5a y b. Superficie con la misma área y diferentes medidas de área

Tomamos en cuenta también los objetivos de enseñanza propuestos por Perrin-Glorian (1986, citado en Corberán, 1996, p.21) el cual consiste en “extender la aplicación medida a superficies S no recubiertas con la unidad A mediante: el recorte y pegado, para fabricar una superficie S’ de igual área que S y recubierta con A. Para lograrlo, considera tres etapas fundamentales: (a) etapa geométrica, al aproximar al concepto de área independientemente de su medida; (b) etapa geométrica – numérica, a través del recubrimiento con baldosas; y, (c) etapa numérica, en la que se mide el área de una superficie usando una unidad de medida dada.

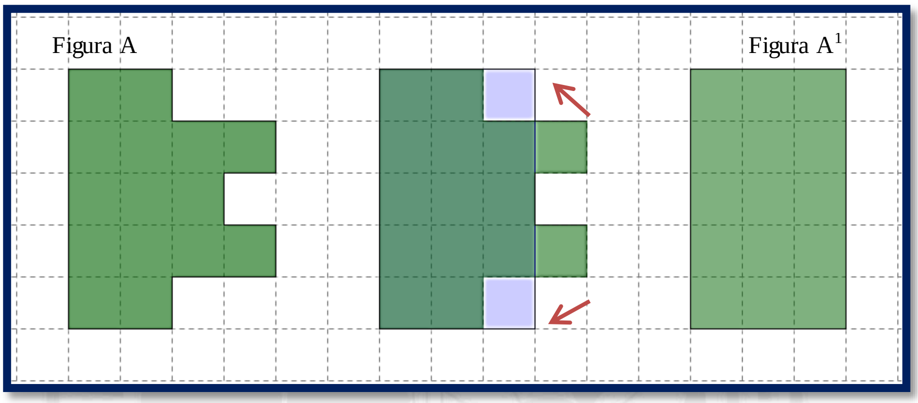


Figura 6. Ejemplificación de la propuesta

Tal como se observa en la figura 6, las etapas fundamentales son:

(a) Etapa geométrica: área de la figura A

(b) etapa geométrica – numérica: a través del recubrimiento con los cuadrados de la cuadrícula; y,

(c) etapa numérica: la medida del área de la figura A, usando como unidad de medida al cuadrado de la cuadrícula, es 15 cuadrados.

Con su investigación, Corberán (1996) concluye que a partir de las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de área se hace hincapié en la incomprensión de este concepto debido a “la inadecuada instrucción de la enseñanza del área” (Corberán, 1996. p.9). En ese sentido, para la enseñanza de los procesos adecuados del concepto área como magnitud, se requiere profundizar en interpretaciones como:

> El área como parte (cantidad) del plano ocupado por la superficie. El área como magnitud autónoma. El área como número de unidades que recubren la superficie. El área como aplicación que asocia a cada región del plano un número real positivo. El conjunto de todas ellas constituye en definitiva el concepto de área. (Corberán, 1996. p.350)

(3) La incorporación del software GeoGebra como recurso para medir áreas

En cuanto a las herramientas que podrían utilizar los estudiantes en la secuencia de actividades planteadas, consideramos importante hacer mención al trabajo realizado por Iranzo & Fortuny (2009) para calcular la medida del área. Los autores proponen la utilización del GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas por ser un software intuitivo que permitirá a los estudiantes utilizar estrategias diferentes a las que utilizaba para resolver problemas de geometría con lápiz y papel. En este sentido, el estudiante podrá construir objetos y desplazar parte de estos, de forma que se verifique una correcta construcción que vaya de acorde con las propiedades geométricas.

El aporte de Iranzo & Fortuny nos permite tener una idea clara de las actividades que podemos considerar en la propuesta de la secuencia didáctica como un referente en la aplicación del recurso. Tal como señalamos a continuación:

- En la primera sesión de su investigación, introduce el uso de GeoGebra en el trabajo grupal con ayuda del docente, quien va construyendo con ellos las primeras actividades con el fin de familiarizarlos con el software.

- En la segunda sesión inicia el proceso de experimentación de manera grupal y luego individual, a partir de la resolución de problemas, utilizando solo el lápiz y el papel (Secuencia de actividades 1).

- En la tercera sesión propone que, de manera individual, los alumnos resuelvan los problemas elaborados antes con lápiz y papel, además, añade otro problema, en el que los alumnos acompañan su construcción con comentarios acerca de su actividad (Secuencia de actividades 2), lo que para Iranzo & Fortuny es fundamental, dado que le permite al docente tener una noción clara del desarrollo de habilidades matemáticas. En nuestra investigación tendremos en cuenta cómo los autores presentan el desarrollo de sesiones.

En nuestra propuesta didáctica, tendremos en cuenta los procedimientos seguidos por los investigadores; de modo que:

- En nuestra primera sesión las estudiantes participarán de un taller de implementación que permita, a los estudiantes, el acercamiento y familiarización con algunas de las herramientas que ofrece el software, como puntos, rectas, polígonos, texto, entre otras.

- En la segunda, desarrollarán actividades propias de la secuencia didáctica, en la que los estudiantes podrán utilizar diversos recursos como material concreto (cartulinas, hojas cuadriculadas, lápiz y papel).

- En la tercera sesión, los estudiantes de manera individual resolverán las situaciones planteadas utilizando el software y comentando los procedimientos seguidos.

Si bien es cierto existen variados recursos informáticos para desarrollar las capacidades de los estudiantes, el GeoGebra tiene la ventaja de ser un software de libre acceso y sencillo manejo para los estudiantes.

En conclusión, los antecedentes presentados nos dan cuenta de la importancia de promover en los estudiantes del sexto grado de educación primaria la necesidad de utilizar procedimientos de recorte, pegado, conteo de unidades, elección pertinente de unidades arbitrarias de medida, para la consecución del acercamiento al objeto área y su medida, diferenciándolo de superficie.

1.2. Justificación

Nuestra investigación es relevante porque en el nivel primaria es cuando los docentes presentan a los estudiantes los conceptos área, superficie, medida de área, y polígonos, dando directrices acerca de cómo seguir procedimientos para la obtención de medidas. Por ello, consideramos dar una visión de qué aspectos se consideran en el área de aprendizaje de las Matemática durante la educación primaria, con el fin de considerar la continuidad en la enseñanza de los conceptos mencionados; y por ende, reconocer la pertinencia de nuestra investigación. Para lograrlo, haremos una revisión general de los contenidos que nos presentan los documentos normativos que apoyan la enseñanza de la educación en Perú, estos son: el Diseño Curricular Nacional (DCN), (Perú, 2009), el cual explica de una manera más detallada la importancia de reconocer que la Geometría está presente en nuestro entorno, lo que demanda mayor necesidad de poner en práctica habilidades geométricas que permitan el reconocimiento de área como magnitud; asimismo, contamos con los Mapas de Progresos de Matemática (Perú, 2013), documento normativo que permite al docente tener directrices para saber cómo abordar la Geometría. Tal como se muestra a continuación:

> El Mapa de Progreso de Geometría describe el desarrollo progresivo de la competencia para describir objetos, sus atributos medibles y su posición en el espacio utilizando un lenguaje geométrico; comparar, y clasificar formas y magnitudes; graficar el desplazamiento de un objeto en sistemas de referencia; componer y

> descomponer formas; estimar medidas y utilizar instrumentos de medición; y resolver situaciones problemáticas mediante diversas estrategias. (Perú, 2013. p.8)

A continuación haremos una reflexión acerca de cómo los documentos oficiales como el DCN (Perú, 2009) y los Mapas de Progresos (Perú, 2013) van incorporando los conceptos involucrados en nuestra investigación, tales como áreas, medidas de áreas y polígonos, a lo largo de la educación primaria y que están presentes en los libros de trabajo de los estudiantes. En ese sentido, podemos apreciar que desde el primer, segundo y tercer grado de educación primaria se van incorporando conceptos como superficie, medición de atributos medibles con unidades arbitrarias de medida, reconocimiento de formas geométricas y objetos de su entorno; lo que no se percibe es si hay una diferencia entre formas geométricas y figuras geométricas (Ver anexo 2).

A partir del cuarto grado de educación primaria se incorpora el tema referido a polígonos, lados y ángulos, superficies. Entendiendo que el polígono es una figura de lados rectos (Perú, 2011a); luego, se incorpora el tema referido a la superficie de figuras geométricas: cuadrado, rectángulo, triángulo. (Perú, 2011b) (Ver anexo 2).

Asimismo, a lo largo de la presentación de las capacidades propuestas en el DCN, observamos el tratamiento que se le dan a los términos: área y superficie, dándolos a entender como sinónimos, y, lo mismo para los términos: formas geométricas y polígonos. Esta observación nos permitirá hacer hincapié en los estudios realizados por investigadores como Freudenthal (1983) y Doaudy (1983), con lo cual, pretendemos que nuestra investigación ofrezca los algunos insumos para proponer una secuencia didáctica que permita el aprendizaje pertinente de los estudiantes.

Observamos también que ni en los documentos oficiales, ni en los libros del ministerio de educación, aparece el término magnitud, esto coincide con lo que refiere Chamorro (2010):

> El concepto de magnitud está ausente de los currículos, sin que preocupen los problemas de decantación y apreciación de cada magnitud en particular y sin que haya un trabajo sistemático sobre los métodos de comparación, lo que es ciertamente complejo en magnitudes como la superficie. (p.225)

En ese mismo sentido, Chamorro (2010) hace referencia a las confusiones que surgen como consecuencia de una enseñanza dedicada al cálculo de resultados y mediciones que ponen en práctica la aritmética sin el cuidado debido de no caer en errores.

> Es muy fácil caer en las trampas de los índices figurales, como en el caso en el que asocia […] una mayor área a una superficie de mayor perímetro; el alumno carece de

> experiencias de referencias que pueden ayudar a crear un conflicto, y por tanto, la ruptura, entre las imágenes intuitivas y las deducciones lógicas de ciertas propiedades de las que gozan la superficie y la longitud. (p.231)

Por otro lado, en cuanto a la práctica pedagógica en el nivel de educación primaria, observamos que el DCN, en el cual se fundamenta la enseñanza del componente Geometría y Medición para este nivel, busca que cada estudiante sea capaz de examinar y analizar las formas y figuras bidimensionales, con sus respectivas características, comprensión de atributos mensurables de objetos, unidades, sistemas y procesos de medida, aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas para la obtención de medidas. En ese sentido, y para cumplir su propósito, se contempla la competencia: "Resuelve y formula problemas cuya solución requiera de la transformación de figuras geométricas en el plano, argumentando con seguridad, los procesos empleados y comunicándolos en lenguaje matemático." Esta competencia, a su vez, será alcanzada en la medida que los estudiantes desarrollen las siguientes capacidades: "Interpreta y mide la superficie de polígonos" y "Resuelve problemas sobre polígonos" (Perú, 2009, p.204). Estas capacidades serán desarrolladas a partir de la enseñanza de los conceptos asociados al área de polígonos regulares simples y compuestos.

A su vez, creemos que es pertinente tomar en cuenta las capacidades relacionadas al estudio de Geometría y Medición que están contempladas para el quinto grado de primaria, las cuales mencionaremos a continuación: "Identifica y caracteriza polígonos regulares", "Interpreta y mide la superficie de polígonos", "Resuelve y formula problemas de cálculo de áreas y perímetros de figuras geométricas" (Perú, 2009, p. 201); las mismas que giran torno a los objetos matemáticos área, medida de área y polígonos. Esto nos permitirá que a lo largo de nuestra investigación, demos una mirada crítica a cómo se tratan los conocimientos básicos en el libro de texto que utilizan los alumnos del sexto grado para apoyar la consecución de sus saberes.

Para lograr la competencia en los estudiantes del sexto grado de primaria, el Mapa de progreso de Geometría (Perú, 2013), considera que se debe describir y representar formas bidimensionales de acuerdo a las propiedades de sus elementos básicos, así como comparar, calcular y estimar medidas de superficies. Estas consideraciones nos permitirán validar la importancia de los procesos que se desarrollarán a través de nuestra propuesta, en cuanto a la representación de figuras, la identificación de sus propiedades y sus atributos medibles (en nuestra investigación solo abordaremos el área).

Por otro lado, si bien es cierto, la labor pedagógica desde la perspectiva del desarrollo de competencias, capacidades y actitudes, demanda dedicación para contribuir al logro de conocimientos que permita a los niños actuar dentro y fuera de su contexto escolar, también es necesario reconocer la importancia de la medición de sus logros desde una mirada cualitativa; es decir, nuestra investigación centra su atención en los procedimientos que siguen los estudiantes a partir de las actividades propuestas en las secuencias de actividades; por ello, las actividades que se proponen en la actualidad local son más de índole vivencial de corte constructivista, en donde el alumno es protagonista de sus saberes a partir de su intervención con el entorno que los rodea y sus saberes propios.

En ese sentido, consideramos relevante para nuestra investigación, considerar la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), propuesta por Guy Brousseau, la cual caracteriza a la Didáctica de la Matemática como área de investigación enfocada a tratar los fenómenos de comunicación de los saberes matemáticos y sus transformaciones. A lo largo del tiempo, investigadores, docentes y alumnos de distintos niveles del sistema educativo estudian los objetos matemáticos y abordan diferentes problemáticas de manera permanente con profundidad, revisión y crecimiento (Fregona, 2011). Esta teoría nos ayuda porque permite que haya una relación pertinente entre el objeto de estudio, en nuestro caso, el concepto de área como magnitud y medida de área, y el alumno. Además, esta relación debe favorecer la organización de las condiciones en que se dan las interacciones del alumno con los materiales que se le propongan (recortes de cartulina), uso del software u otros para resolver los problemas que se les planteen, logrando, además un conflicto cognitivo en el que el alumno se "resista" a sus primeras interacciones, por ejemplo, el uso de diversas unidades de medida y procedimientos para medir el área de un polígono. Así, "las características de las situaciones de enseñanza, permiten que el alumno pueda relacionarse directamente con el medio y esa interacción "pasa" por las indicaciones o expectativas, explícitas o no, que el profesor se ocupa de instalar permanentemente" (Fregona, 2011, p.7).

En sí, como veremos en el capítulo II, la TSD nos ofrece una forma más productiva respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, el cual se propicia por la interacción entre los estudiantes, los profesores y los saberes matemáticos que confluyen en una clase con la finalidad de condicionar el qué y el cómo aprenden. (Brousseau, 2007).

1.3. Problema de investigación

Ante la importancia de la construcción de los conceptos asociados al objeto matemático área en la educación primaria, consideramos relevante contribuir en la construcción del concepto de área como magnitud, de modo que podamos acercar al estudiante en la utilización de diversos procedimientos como conteo, descomposición, composición y utilización de diversas herramientas como unidades de medida, cuadrículas, lápiz y papel entre otros que a su vez le permitan darse cuenta que el área no cambia; tal como nos refieren las investigaciones realizadas por Freudenthal (1983), Douady & Perrin Glorian (1983, 1987), Corberán (1996), Baltar (1996, 1999), Facco (2003), Silva (2010), Chamorro (2010), así como los documentos normativos que orientan la enseñanza de la Geometría en el nivel de educación primaria, tales como el DCN (Perú, 2009) y los Mapas de Progreso (Perú, 2013). En este sentido, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: La secuencia didáctica planteada desde la TSD, con alumnos del sexto grado de primaria, ¿contribuirá en su construcción del concepto de área como magnitud?

1.4. Objetivos

Objetivo general:

Analizar los efectos del desarrollo de una secuencia didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas que favorezca a la construcción del concepto de área como magnitud, para que los niños del sexto grado de primaria puedan diferenciar entre área y de medida de área.

Objetivos específicos:

1. Reconocer que los procedimientos de conteo, descomposición y composición favorecen el aprendizaje del concepto de área como magnitud.
2. Identificar la utilización de diversas unidades de medida que permiten, a las estudiantes del sexto grado de primaria, medir el área de polígonos.

En el siguiente capítulo presentaremos el marco teórico y metodológico que sustentarán los lineamientos del desarrollo de nuestra investigación.

CAPÍTULO II: ASPECTOS DEL MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Luego de presentar la problemática que orienta esta investigación, es importante reconocer las características principales propias de una teoría que sustente su desarrollo y nos permita responder a la pregunta de investigación. En ese sentido, nos basaremos en los aspectos proporcionados por la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), los cuales permitirán la interrelación de los estudiantes con sus compañeros, con los conocimientos que trae consigo y con los que aprenderá, de modo que orienten su trabajo hacia el desarrollo autónomo de capacidades que les faciliten la comprensión de nuevos conocimientos, desde la comprensión de propiedades matemáticas que se asumen como adquiridos a lo largo de su educación escolar.

A continuación, daremos una mirada global de lo que la TSD ofrece a la Didáctica de las Matemáticas y por ende a nuestra investigación.

2.1. La Teoría de Situaciones Didácticas

Respecto a esta teoría, diremos que el gran aporte de Brousseau fue la propuesta de un enfoque más enriquecedor respecto a la forma como se da el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, de modo que se puedan comprender las interacciones entre alumnos, docentes y saberes matemáticos en un determinado medio, desde una perspectiva que tiene como foco central poder comunicar saberes matemáticos y sus transformaciones basándose en la dialéctica de acción, formulación y validación que favorezca a la aceleración de los aprendizajes (Brousseau, 2007).

A continuación, presentaremos la concepción de la enseñanza propuesta por el autor, en la cual el docente propone la organización del saber que debe ser enseñado al alumno de modo que este sea quien tome aquello que debe adquirir como conocimiento. Tal como se puede observar en la figura 7.

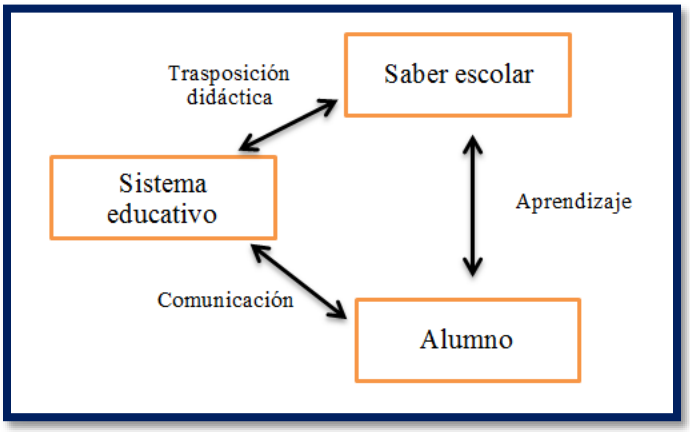


Figura 7. Concepción de la enseñanza
Fuente: Brousseau (2007, p.12)

Si bien es cierto, observamos la relación existente entre lo que el profesor establece como saber que debe ser transmitido a los alumnos y lo que estos adquieren, de modo que se establece una interacción entre el saber escolar, el alumno y el docente; a esta interacción, Brousseau (2007) la denomina *triángulo didáctico*, la misma que se da a través de los elementos comunicativos presentes en diversas áreas afines. También es posible considerar que el esquema permite determinar: los objetos a estudiar, el rol del docente y alumnos, y la asignación del estudio de la enseñanza, la cual involucra diversas disciplinas como la Psicología, Pedagogía, Ciencias de la Comunicación, entre otras que favorezcan la enculturación del estudiante.

Así, con respecto a la TSD, Brousseau (1986) afirma:

> El estudiante aprende adaptándose a un ambiente que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta con las nuevas respuestas que son la prueba del aprendizaje. (…). La concepción moderna de la enseñanza va por tanto a pedir al maestro que provoque en el alumno las adaptaciones deseadas, con una elección acertada de los "problemas" que le propone. Estos problemas, elegidos para que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerle actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por sí mismo. Entre el momento que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en el que produce su respuesta, el maestro rehúsa intervenir proponiendo los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un nuevo conocimiento pero debe saber también que este conocimiento se halla enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construir sin invocar razones didácticas. (p.14)

En cuanto a la TSD en el aspecto de las matemáticas, Perrin-Glorian (2009), comenta que esta es un medio para estudiar este tipo de saberes y producir los conocimientos correspondientes. Además, es esencial comprender bien el objetivo de la teoría, su carácter científico: incluir y explicar los fenómenos vinculados a la enseñanza de matemáticas y no confundirlos con las condiciones para la enseñanza en las clases. La comprensión y la explicación de los fenómenos contemplan el mejoramiento de la enseñanza, pero no se trata de decir directamente a los profesores cómo hacer la clase.

Asimismo, Perrin-Glorian (2009), muestra la relación biunívoca entre el sujeto y el medio, propia de una situación a-didáctica que forma parte de la situación didáctica en la que interviene el docente para dar paso al contrato didáctico. Como se puede apreciar en la figura 8.

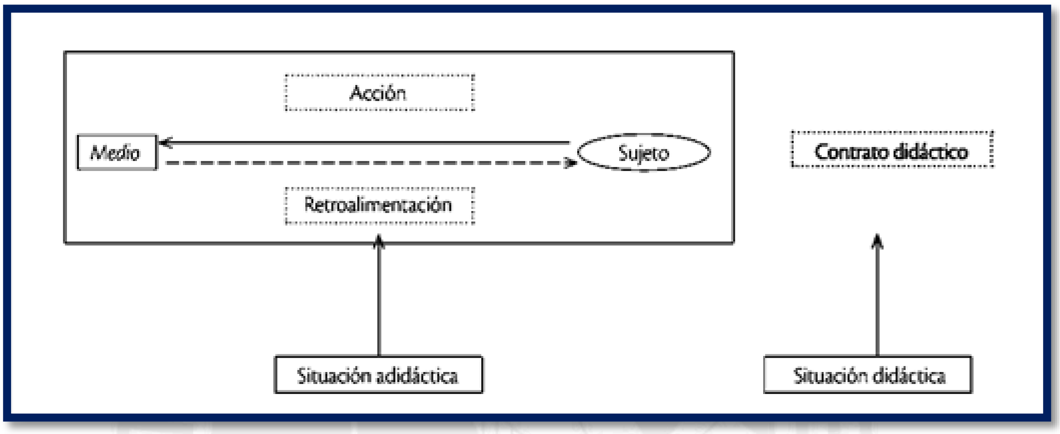


Figura 8. Relación sujeto y medio
Fuente: Perrin-Glorian (2009, p.14)

Hasta el momento se han mencionado diversos conceptos propios de la Teoría de Situaciones Didácticas, tales como situación didáctica y a didáctica, medio, entre otros, los cuales consideramos importante detallar en el siguiente apartado.

2.2. Aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas

A continuación haremos una breve explicación de los principales aspectos del marco teórico la teoría de situaciones didácticas: las denominadas situación didáctica y situación a didáctica.

2.2.1. Situación didáctica y a didáctica

En lo que respecta a las situaciones, creemos conveniente explicar que Brousseau (2007) llama situación al modelo de interacción del sujeto con el medio que determina el conocimiento, como un recurso con el que cuenta el sujeto para lograr o conservar el aprendizaje; estas interacciones necesitan de situaciones anteriores, de modo que sea capaz de construir sus propios conocimientos. En palabras del mismo autor, tenemos que:

> La “situación” es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado. El recurso de que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable es una gama de decisiones que dependen de un conocimiento preciso. (Brousseau, 2007, p.17).

En la figura 9, observamos que se da la intervención del profesor, quien evoca el saber a enseñar sin dejar de lado que posiblemente surjan circunstancias diferentes a las situaciones de uso didáctico como los ejercicios que plantea a sus alumnos. Esto genera la aparición de otro medio en el que el alumno actúa de manera autónoma.

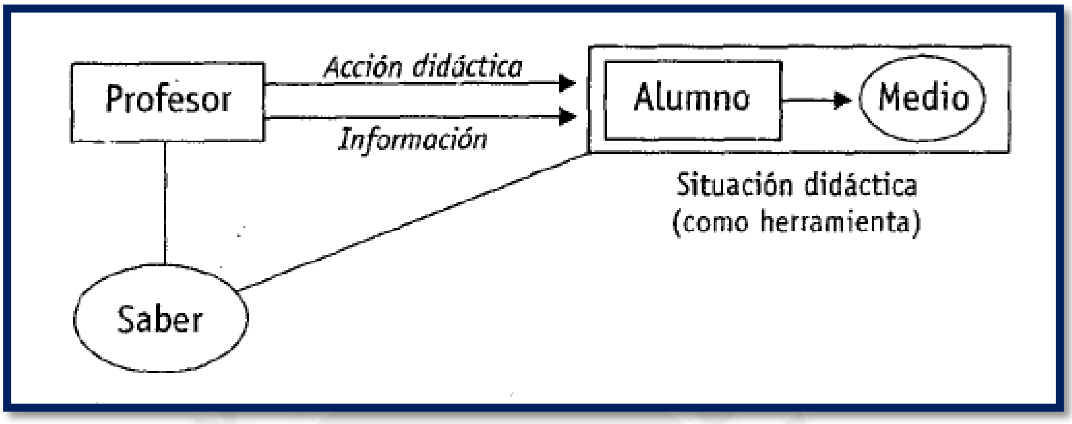


Figura 9. Intervención del docente
Fuente: Brousseau (2007, p.50)

Para Brousseau (2007), la situación es el entorno de aprendizaje diseñado y manipulado por el docente; la situación matemática es aquella que favorece la actividad de los alumnos sin que el profesor intervenga de manera directa; y, la situación didáctica es el modelo que describe la actividad del profesor y de los alumnos.

Entonces, tenemos que los alumnos aprenden siempre que se adapten al medio que genera en ellos contradicciones, dificultades, desequilibrios para llegar a apropiarse del conocimiento, el cual debe permitirle responder, de manera efectiva, a nuevas situaciones (Brousseau, 1986).

En nuestra investigación, pretendemos que las situaciones planteadas acerquen a los estudiantes al concepto de área como magnitud a partir de actividades que generen en ellos un encuentro con sus saberes previos, su pensamiento matemático, y su capacidad para resolverlas de manera individual y grupal.

Ahora bien, dado que anteriormente hemos hecho referencia a las llamadas situaciones didácticas y las situaciones a-didácticas, pasaremos a explicar brevemente en qué consisten.

Las situaciones didácticas son los modelos que describen la actividad del profesor y del estudiante en un determinado sistema educativo. Son consideradas herramientas usadas por el docente, las cuales sirven para enseñar sin considerar su intervención directa; lo que se pretende es involucrar al alumno en un entorno diseñado por el docente.

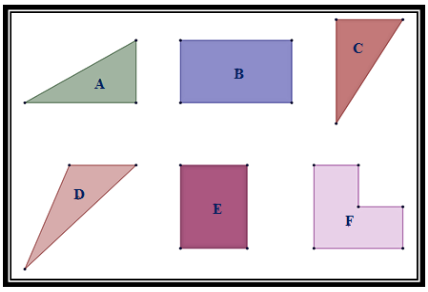
Brousseau (2007) afirma, respecto a las situaciones didácticas:

> Si consideramos la enseñanza como el proyecto y acción social de que un alumno se apropie de un saber constituido o en vías de constitución, la didáctica de la matemática se convierte en "la ciencia de las condiciones de difusión y apropiación de los conocimientos matemáticos útiles a los hombres y a las instituciones". La modelización de esta difusión conduce a utilizar el término "situación didáctica" en el sentido de "entorno del alumno, que incluye todo lo que coopera específicamente en la componente matemática de su formación" (p.49).

Entonces, mientras se desarrolle un tema determinado, se puede dar la situación didáctica, en la que se genera la comunicación de consignas en las que se provee a los estudiantes de los materiales que va a utilizar y cómo se va a desarrollar la actividad, el puntaje que corresponda, etc.

A modo de ejemplo, para iniciar nuestra secuencia de actividades, daremos la siguiente consigna:

Recibirán recortes de cartulina, tales como se muestran en las imágenes. Luego, en grupo, escriban cómo podrían medir el área de cada una.



Por otro lado, tenemos la situación a-didáctica en la que permite ver tránsito por los distintos momentos correspondientes a la interacción del alumno con el medio. Así, el momento de la manipulación de los recortes de cartulina, permite al estudiante generar estrategias y propiedades requeridas para medir su área. Hasta esta parte de la situación, tanto el docente como los alumnos tienen roles propios y pertinentes al contrato didáctico establecido implícitamente entre ellos. Por ejemplo, para desarrollar la actividad, el profesor habrá creado una secuencia que responda a objetivos específicos de aprendizaje, además habrá hecho una predicción de las posibles respuestas de sus alumnos, la organización de sus tiempos y será el responsable de la calidad de la propuesta.

Cuando el alumno reconoce que el problema o ejercicio fue propuesto para generar un nuevo aprendizaje que le permite trabajar con autonomía, es decir, sin recurrir a razones didácticas, diremos que es capaz de utilizar sus saberes en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en donde no participe el docente. Es allí cuando el estudiante transitará por la situación a-didáctica.

En nuestra investigación, la situación a-didáctica se podrá dar cuando las estudiantes transiten por la fase de acción, formulación y validación, con el objetivo de reconocer los procedimientos que pueden aplicar para medir el área de diversos polígonos. En la primera actividad, el conocimiento movilizado será el concepto de medida de área y se espera que los estudiantes recurran al uso de instrumentos como la regla, la hoja cuadriculada como malla o cuadrícula, unidades arbitrarias de medida que le permitan recubrir toda la superficie del polígono y uso de fórmulas geométricas aprendidas años anteriores.

El desplazarse por ambas situaciones permitirá tanto a los estudiantes como al docente, tomar iniciativas y decisiones previstas en el contrato didáctico establecido, el cual tiene en cuenta el medio. Este término se ha usado recurrentemente por ser un eje fundamental en la TSD, del cual haremos una breve explicación en el siguiente apartado.

2.2.2. Medio

Para Brousseau (2007), el medio constituye un subsistema autónomo, antagonista del sujeto; es decir, implica todo aquello que permite la apropiación del saber: interacción de los alumnos con el docente, con sus pares, con sus conocimientos, recursos, objeto de estudio, con el problema planteado.

> "En esta perspectiva, son los comportamientos de los alumnos los que revelan el funcionamiento del medio, considerado como un sistema. Lo que se necesita modelizar, pues, es el medio. Así, un problema o un ejercicio no pueden considerarse como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, como un medio que "responde al sujeto" siguiendo algunas reglas. ¿Qué juego debe jugar el sujeto para necesitar un conocimiento determinado? ¿Qué aventura (sucesión de juegos) puede llevarlo a concebirlo o a adoptarlo? ... ¿Qué información, qué sanción pertinente debe recibir el sujeto por parte del medio para orientar sus elecciones y comprometer tal conocimiento en lugar de tal otro? Estas preguntas conducen, pues, a considerar el medio como un sistema autónomo, antagonista del sujeto, y es de este del que conviene hacer un modelo, en cuanto especie de autómata". (Brousseau, 2007, p. 15)

Es importante resaltar que la acción del docente permite regular los procesos de adquisición del aprendizaje de los estudiantes; es así que, ellos aprenden por regulaciones de sus relaciones con su medio. Brousseau explica que las regulaciones cognitivas están referidas al medio a-didáctico, en el que la estructura es determinada por el docente. Además, añade que las posiciones del profesor y del alumno frente a un medio pueden ser diferentes porque dependen de cómo se estructure el medio; es decir, cómo se den las interacciones respecto a la toma de decisiones, actuación frente a la comunicación de los mensajes que recibe e interpreta (Brousseau, 2007).

En nuestro trabajo de investigación, el medio corresponderá a la ficha de actividades, los materiales que podrán usar los estudiantes tales como los recortes de cartulina, las hojas cuadriculadas que pueden servir como cuadrículas, la implementación previa para conocer las utilidades del software GeoGebra, etc., las cuales nos permitirán reconocer, en la experimentación, si son utilizados para responder al medio objetivo efectivo (medir el área de las figuras) o ficticio (resolver problemas que les exijan imaginar la situación dada).

Otro de los aspectos principales en la TSD es la presencia de variables didácticas, las cuales presentaremos a continuación.

2.2.3. Variables didácticas

Brousseau (2007) llama variable cognitiva a aquella que se encuentra en una situación que permita escoger valores diferentes y pueda propiciar un conocimiento óptimo. De ahí, surge la idea de variables didácticas, las cuales son determinadas por el profesor. Es decir, son los elementos del problema planteado a los alumnos, los cuales son modificados por el docente, de tal forma que se requiera un cambio en las estrategias de resolución de una situación planteada. Estas modificaciones permitirán a los alumnos resolver diversos problemas que requieran la utilización de un mismo conocimiento.

A continuación mostraremos ejemplos tomados de nuestros antecedentes para explicar lo que consideramos una variable. Por ejemplo, como se observa en la figura 10, Silva (2010) determina como una variable el **conteo de cuadrados** a partir del uso de una cuadrícula; en este caso, las tres figuras mostradas tienen la misma medida de área.

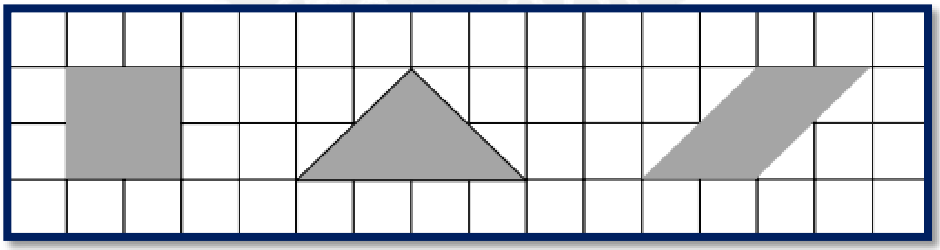


Figura 10. Figuras con la misma medida de área
Fuente: Silva (2010, p.17)

Otra de las variables que está presente es la **unidad de medida**; de modo que al estudiante se le ofrezca la posibilidad de medir el área de un polígono utilizando una unidad de medida que sea más pertinente para los efectos de medición del área. Esto permitirá que el estudiante reconozca que el área de una figura tendrá diferentes medidas si las unidades escogidas son diferentes. En la investigación de Silva (2010) se observa el uso de esta variable, tal como se observa en la figura 11.

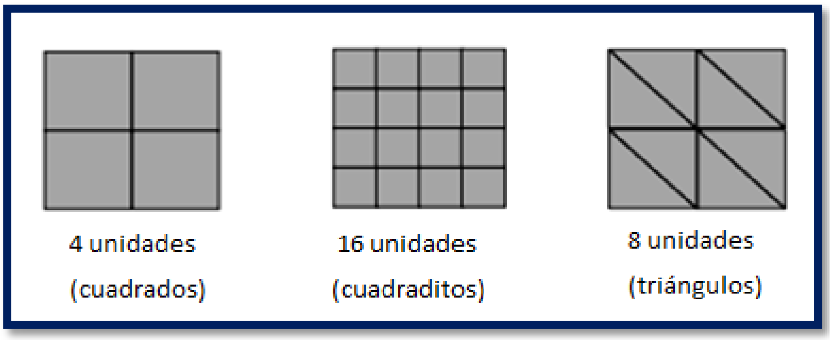


Figura 11. Figuras con diferente unidad de medida de área
Fuente: Silva (2010, p.17)

En nuestra investigación tendremos en cuenta el polígono presentado en la figura 12, para que las estudiantes elijan la unidad arbitraria de medida que pueden utilizar para recubrir su superficie y así poder determinar la medida de su área. En este ejemplo, las medidas asignadas serán 12 cuadrados, 24 triángulos o 6 rectángulos. En el capítulo IV, observaremos con más detalle el uso de estas variables presentes en la secuencia de actividades.

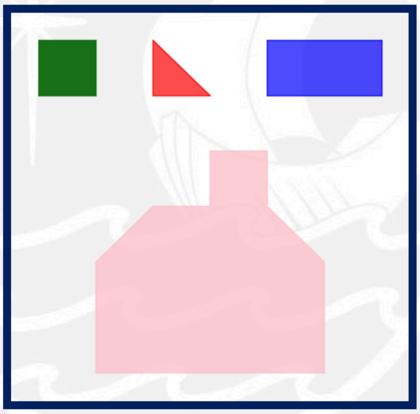


Figura 12. Ejemplo de unidades arbitrarias de medida

Otra de las variables que presenta Silva (2010) es la utilización o no utilización de la *malla* cuadriculada o cuadrícula, así lo observamos en la figura 13.

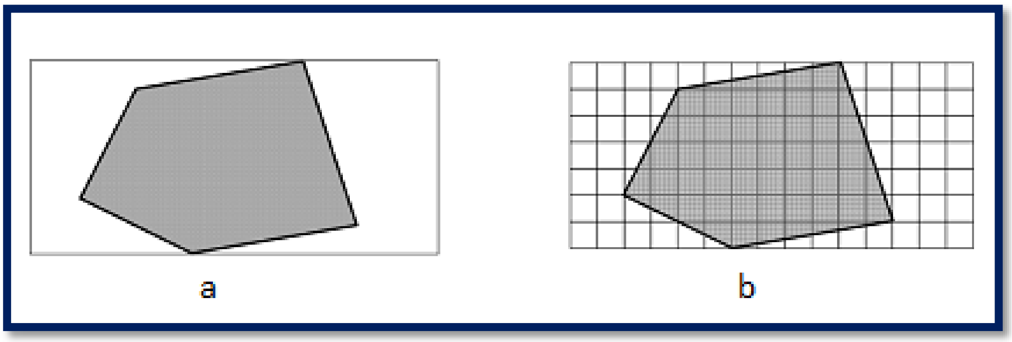


Figura 13. Figuras con la misma magnitud
Fuente: Silva (2010, p.18)

Respecto a las variables diremos su importancia radica en que permiten tomar decisiones respecto al desarrollo de las secuencias propias de la situación didáctica y favorecen a los cambios de estrategias en los procedimientos seguidos.

Otro de los aspectos fundamentales en la TSD es la pertinencia de las fases propias de la situación a-didáctica, en la que los estudiantes se movilizarán indistintamente a lo largo de la secuencia didáctica. Tal como se detalla a continuación.

2.2.4. Fases de la TSD

Brousseau (2007) establece que la TSD presenta las fases acción, formulación, validación e institucionalización por las cuales transitan los estudiantes. Con el fin de hacer una explicación de cada una de ellas, creemos conveniente ilustrar con ejemplos que nos ayuden a comprenderlas; de modo que observaremos cómo las alumnas participantes en nuestra investigación desarrollan actividades que les permitan descubrir y demostrar propiedades del área como magnitud, de una forma autónoma.

Por ejemplo, las secuencias didácticas que proponemos se realizan en parejas, de forma individual y grupal. Se trata de que las participantes manipulen recortes de cartulina que representan polígonos y propongan determinados procedimientos que les permitan medir su área.

Se entiende que las estudiantes transitan por cada una de las fases de una manera integral; es decir, irán transitando por cada una de ellas según se den las interacciones propias de las estudiantes con el medio y los procesos de devolución, el cual consiste en hacer que el alumno sea responsable de un saber.

a) Fase de acción

En esta fase, los alumnos toman decisiones que les permitirán generar estrategias para resolver un determinado problema. Estas estrategias son adoptadas por la intuición a partir de un modelo implícito; es decir, por un conjunto de reglas que lleva a tomar decisiones sin tomar conciencia de ellas. En esta fase se da la experimentación y el descubrimiento. Tal como se observa en la figura 14.

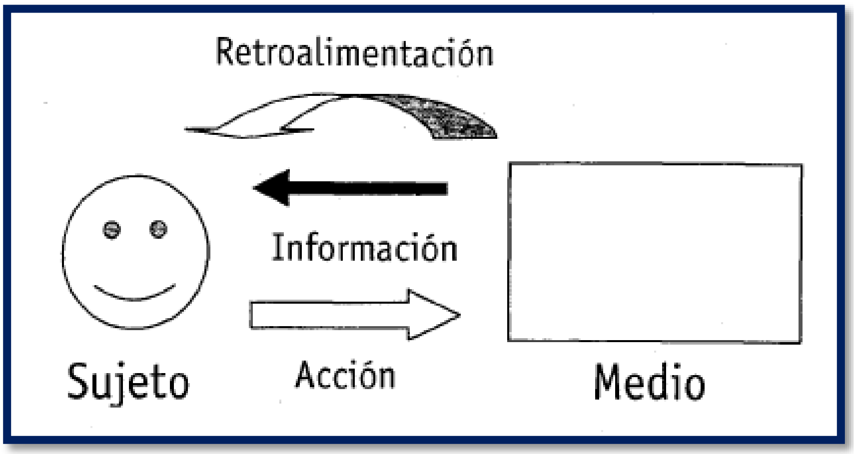


Figura 14. Elementos de la fase de acción
Fuente: Brousseau, G. (2007, p.25)

Si el medio responde, el sujeto puede relacionar las informaciones que recibe con sus propias decisiones, de modo que anticipe sus reacciones y esté listo para intervenciones venideras. "En esta fase de acción, el aprendizaje es el proceso por el cual se modifican los conocimientos" (Brousseau, 2007, p.24).

En nuestra investigación, esta fase se dará durante la elección de la unidad arbitraria de medida o los diversos procedimientos que deberán seguir para medir el área de diversos polígonos. Conforme vayan encontrando procedimientos efectivos para responder a las preguntas dadas, irán modificando sus conocimientos respecto a la pertinencia de la elección de sus unidades de medida.

b) Fase de formulación

Se propicia la comunicación de los resultados de las estrategias adoptadas para generar el aprendizaje. En esta fase, la formulación de un conocimiento corresponde a la capacidad de retomarlo, es decir, recuperar, identificar, descomponer y reconstruir la información. En esta fase se requiere de al menos dos sujetos quienes podrán interactuar a partir del desarrollo de la capacidad de comunicar los procedimientos seguidos de modo que uno obtenga de la formulación del otro. (Brousseau, 2007).

De acuerdo a nuestra investigación, se pretende que los estudiantes comuniquen la elección de sus unidades de medida, los procedimientos seguidos para medir el área de los polígonos propuestos, así como el uso de instrumentos pertinentes para conseguir las respuestas.

c) Fase de validación

Esta fase constituye el momento en el que los alumnos construyen teorías y demostraciones que le permiten convencerse de que la apropiación de saberes es la correcta. Aquí el alumno explicita un saber a partir de hipótesis que han sido demostradas como verdaderas. Los esquemas seguidos en las fases previas permiten corregir las estrategias, de modo que se pueda asegurar que es pertinente, adecuada, adaptada y conveniente respecto a los conocimientos que se pretenden movilizar.

En esta fase, el alumno que antes informaba sus conocimientos movilizados, ahora propone una demostración y el oponente puede estar de acuerdo o exigir que se haga una demostración de las proposiciones.

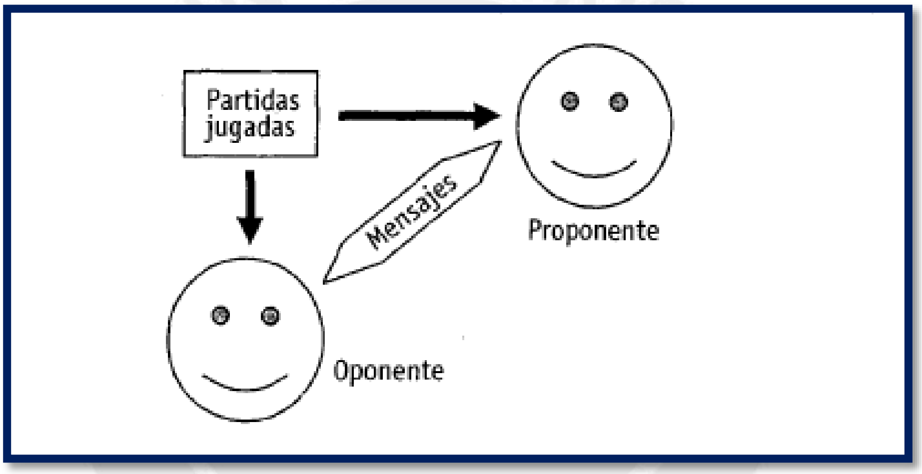


Figura 15. Elementos de la fase de validación
Fuente: Brousseau, G. (2007, p.27)

En nuestra investigación, las alumnas mencionan las estrategias que les han permitido desarrollar las actividades de la secuencia didáctica y demuestran su validez a través de propiedades. Aquí entrarán en juego el uso de las variables como la unidad de medida (cuadrado, rectángulo, triángulo), el uso de cuadrícula, el tipo de figura: polígono simple o complejo. Pues las estudiantes deberán explicar la pertinencia de la elección de una unidad de medida determinada o la efectividad de los procedimientos que emplea.

d) Fase de institucionalización

Esta fase corresponde al docente, y surge por la necesidad de institucionalizar los conocimientos construidos. También porque con las tres fases anteriores "teníamos situaciones de aprendizaje – en el sentido de los psicólogos- y se podía pensar que habíamos reducido la enseñanza a sucesiones de aprendizaje" (Brousseau, 2007, p. 27). Además, porque los maestros siempre se resisten a reducir el aprendizaje a procedimientos, ellos necesitan repasar lo aprendido. En esta fase, el docente es quien da a conocer a los alumnos las representaciones simbólicas, definiciones de lo que han hecho y la posibilidad de asumir objetos de enseñanza.

En nuestra investigación se observará esta fase, entendiéndola en palabras de Brousseau (2007):

> Debían dar cuenta de lo que habían hecho los alumnos, describir lo que había sucedido y lo que estaba vinculado con el conocimiento en cuestión, brindarles un estado a los eventos de la clase en cuanto a resultados de los alumnos y resultados de la enseñanza, asumir un objeto de enseñanza, identificarlo, acercar las producciones de los conocimientos a otras creaciones, (…) dar a determinados conocimientos el estado cultural indispensable de saberes (p.28)

En ese sentido, el docente formalizará los procedimientos seguidos por los estudiantes, revisará con ellos los resultados obtenidos, de modo que puedan aplicar sus saberes a nuevas situaciones.

2.3. El contrato didáctico

Respecto al contrato didáctico, Brousseau (1986) sostiene que es el elemento por el cual el docente intenta hacer saber al alumno lo que solicita en la actividad planteada, de modo que se observe la siguiente afirmación:

> Así, en todas las situaciones didácticas, el profesor intenta hacer saber al alumno lo que él quiere que haga. Teóricamente, el paso de la información y de la consigna del profesor a la respuesta esperada, debería exigir por parte del alumno el poner en acción el conocimiento considerado, ya esté en proceso de aprendizaje o sea ya conocido. Sabemos que el único medio de “hacer” matemáticas, es buscar y resolver ciertos problemas específicos y, a ese respecto, plantear nuevas interrogantes. El maestro debe pues, efectuar no la comunicación de un conocimiento, sino la transmisión del problema correcto. Si esta transmisión se opera, el alumno entra al juego y se termina por ganar, el aprendizaje se logra. (Brousseau, 1986. p.12)

En el contrato didáctico el estudiante no ha sido informado explícitamente lo que se quiere que aprenda, pues el descubrirle el aprendizaje conllevará a que no logre el aprendizaje; en sí, el profesor no puede asegurar lo que el estudiante aprenderá y pondrá en práctica en situaciones futuras.

Por su parte, Perrin-Glorian (2009), destaca el aporte de Brousseau (1998, p. 57-78), al mostrar las paradojas que implica el hecho de interpretarlo como un verdadero contrato: por ejemplo, el alumno y el profesor deben aceptar la responsabilidad de realizar tareas que no están en absoluto muy seguros de saber y poder llevar a cabo, o también el profesor debe lograr que al alumno haga por sí mismo lo que por definición es necesario que él enseñe (y que el alumno no sabe).

En nuestra investigación consideramos que el contrato didáctico nos lleva a plantear también que no todas las respuestas esperadas serán como las quiere el docente, será entonces cuando tenga que ayudar al estudiante y posiblemente replantear la situación, realizando una institucionalización local; pero, evitando darle las respuestas, pues esto los llevaría a caer en lo que el autor denomina "efecto Topaze", el cual se produce cuando, ante una respuesta errada del alumno, el docente ofrece de manera indirecta, lo que Brousseau (2007, p.76) denomina como la acción de "sugerir la respuesta disimulándola con códigos didácticos cada vez más transparentes". Por otro lado, se puede dar lugar al "efecto Jourdaín", el cual consiste en un malentendido fundamental; es decir, el docente inserta el conocimiento a través de la sustitución de una problemática real por una metáfora que no tiene significado para los alumnos, lo que conlleva a dar un sentido incorrecto de la situación.

Para nuestra investigación tomaremos en cuenta los criterios para la organización de dos secuencias de actividades, las variables que permitirán al estudiante modificar sus procedimientos y la dialéctica que interviene en las fases de acción, formulación y validación.

2.4.Aspectos del marco metodológico

En este apartado presentaremos la metodología que emplearemos en nuestra investigación, la cual es cualitativa, pues responde a determinadas características, tales como las que señalan Pérez (1998) y Latorre, Arnal y Del Rincón (1996):

- Tanto la recogida como el análisis de datos se dan de manera conjunta, este proceso de naturaleza interactiva.
- El proceso de análisis es sistemático y obedece a un plan; por lo tanto, el muestreo es intencional, aunque no pretende generalizar los resultados.
- Su proceso es esencialmente interactivo y cíclico; es decir, permite, en ocasiones, volver a los datos para analizarlos y replantear el proceso si es necesario. En este sentido, podemos decir que es emergente.
- Su objetivo buscar tendencias, tipologías, regularidades o patrones emergentes; por lo tanto, el análisis de datos será inductivo.
- Los datos recogidos requieren de comparaciones y contrastes.

- El análisis de los datos se caracteriza por la utilización de procedimientos que permiten asegurar la fiabilidad y validez de los resultados.
- Finalmente, el análisis de datos busca, de manera no sistemática, técnicas y procedimientos válidos que permitan al investigador conocer si han logrado los objetivos propuestos en su investigación.

Al respecto de la metodología cualitativa Ruiz (2012) menciona que “se identifica la técnica cualitativa como una investigación en contexto de descubrimiento que sirve de puente para la verdadera investigación, en contexto de comprobación rigurosa y precisa”.

La autora considera pertinente presentar el modelo de proceso que debe seguirse en el análisis de datos de la metodología cualitativa, desarrollado por Tesh (1987, citado en Pérez, 1998. p.105) el cual está basado en tres momentos interdependientes: (a) el análisis exploratorio, (b) la descripción, y (c) la interpretación.

(a) El análisis exploratorio implica la investigación del marco teórico con el fin de pasar a la exploración posterior indicando los elementos que hacen falta, con ello se pretende recoger los datos que se necesiten para la investigación a partir del conocimiento pleno de lo que se busca con la investigación.

(b) La descripción permite establecer orden en los datos, tomando aquello que es útil a la investigación por su aporte a los objetivos de la misma.

(c) La interpretación tiende a ser el momento en que se integra, relaciona y establece las conexiones y comparaciones otorgadas por los datos. Para Pérez, este momento es el más arriesgado, pues al comprometerse con un punto de vista existe la posibilidad de error, por ello es fundamental el diálogo entre los miembros del equipo investigador.

Es necesario reconocer que la investigación no termina en la fase de interpretación de datos, pues, como se ha mencionado anteriormente, la investigación cualitativa es cíclica y permite la replanificación continua.

Ahora bien, uno de los tipos de investigación cualitativa que se emplean actualmente en las investigaciones propias de la Didáctica de la Enseñanza de las Matemáticas es la Ingeniería Didáctica, la cual permite construir una génesis artificial en la que la metodología más la teoría nos lleva a la construcción de un conocimiento determinado. Para nuestra investigación tendremos en cuenta la pertinencia de la TSD para que los estudiantes del sexto grado de primaria comprendan el concepto de área como magnitud.

Respecto de la Ingeniería Didáctica, diremos que surgió en la década de los años ochenta a raíz de las investigaciones de Michéle Artigue, quien denominó a esta metodología con el término Ingeniería para hacer una comparación entre el trabajo didáctico y el del ingeniero, pues para desarrollar una construcción requiere de bases sólidas que aporta el conocimiento científico de su ámbito de acción, además del compromiso de aceptar el control científico.

Esta metodología surge con la finalidad de responder a dos cuestionamientos, por un lado se pretende establecer las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema educativo, y por otro, dar realce al papel que deben tener las "realizaciones didácticas" dentro de la metodología de investigación en didáctica (Artigue, 1995).

A continuación presentaremos los aspectos de la Ingeniería didáctica que consideraremos en nuestra investigación.

2.4.1. Aspectos de la Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica está basada, fundamentalmente, en un esquema experimental propio de "las "realizaciones didácticas" en clase; es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (Artigue, 1995. p. 44). A continuación presentaremos las fases de la Ingeniería Didáctica en relación a los aspectos tomados en cuenta en nuestra investigación.

2.4.2. Fases de la ingeniería didáctica

La Ingeniería Didáctica presenta un proceso experimental a partir de cuatro fases: (1) el análisis preliminar, (2) la concepción y análisis a priori de las secuencias didácticas, (3) la experimentación y (4) el análisis a posteriori y validación.

(1) Análisis preliminar

En el análisis preliminar se contemplan las concepciones que se tienen respecto al área como magnitud y cómo es tratado en la institución educativa, su incorporación en los documentos normativos, las dificultades observadas en diversas investigaciones a las que hemos hecho referencia en el capítulo I, como las de Freudenthal (1983), Doaudy y Perrin-Glorian (1987), Del Olmo, Moreno & Gil (1993) Corberán (1996), Facco (2003) y Silva (2010).

En esta fase tendremos en cuenta: "El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes que determinan su evolución y el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva" (Artigue, 1995. p.38)

En relación al análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos; es decir el análisis didáctico, hemos presentado una visión panorámica de cómo se incorpora el concepto de área restringiéndose al uso de fórmulas y con aparentes vacíos en los procedimientos para calcular las medidas de las áreas, además de la ausencia del sentido de área como magnitud.

Estos vacíos a los que hacemos mención se ven reflejados también en las investigaciones desarrolladas por Chamorro (2010), Corberán (1996), entre otros. Este sería el segundo aspecto denominado análisis de las concepciones de los estudiantes.

En cuanto al análisis del campo de las restricciones, trabajaremos con 4 alumnas del sexto grado de primaria en la Institución Educativa Estatal "Virgo Potens", quienes forman parte de una sección conformada por 30 estudiantes y están organizadas en el aula en grupos de cuatro. Nosotros observaremos el desarrollo de las secuencias de uno de los equipos, determinados por el docente de aula, quien ha hecho una organización por bimestre de acuerdo a las necesidades, actitudes y aptitudes de las estudiantes y de la predisposición para el trabajo en la fase de implementación del taller de GeoGebra. Además, cabe mencionar que respecto al objeto matemático área, las estudiantes han desarrollado actividades desde el cuarto grado de primaria, en las que se tiene en cuenta que el área solo puede hallarse a partir de fórmulas.

(2) La concepción y análisis a priori

En esta fase, Artigue (1995) señala que el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables, ya sean macro-didácticas (es decir globales) o micro didácticas (es decir locales), las cuales no han sido fijadas en las restricciones. A efectos de nuestros objetivos específicos, la presente investigación se centrará en las variables micro didácticas que permitan la construcción del aprendizaje de la noción de área como magnitud.

Como variables micro didácticas tenemos la utilización de diversas herramientas para reconocer la importancia de los procedimientos de medida de área, tales como las unidades de medida (cuadrado, triángulo recto, rectángulo) que recubren la superficie de figuras simples o complejas, el uso de cuadrículas, la descomposición y composición de polígonos complejos. En cuanto al procedimiento de conteo, los estudiantes podrán hacer uso de un cuadrado más pequeño que le sirva como unidad de medida y que le permita recubrir la superficie del polígono, luego se hará un cambio en la unidad de medida, pues se entregará a los estudiantes un triángulo y posteriormente un rectángulo que hagan las veces de unidades de medida. Una herramienta similar será el uso de mallas o cuadrículas, las cuales pueden ser cuadriculadas o triangulares con el fin de reflexionar acerca del concepto de área como magnitud. De este modo, se logrará la identificación de los conocimientos que pretendemos que adquieran los estudiantes; es decir, que logren reconocer que diversos procedimientos como el conteo de unidades, la descomposición y la composición de polígonos permiten medir el área de polígonos, tal como lo muestran las investigaciones referidas anteriormente, y a su vez les permiten construir el concepto de área como magnitud, independientemente de la unidad de medida que elijan para medirla.

En el siguiente capítulo describiremos la secuencia de actividades propuesta y los elementos de la TSD considerados, los mismos que permitirán, a los estudiantes, transitar por las fases de acción, formulación, validación e institucionalización, constituyendo la situación a-didáctica. En esta situación, podremos notar cómo las estudiantes movilizan sus conocimientos a la vez que manipulan el material, dialogan con sus compañeros, escriben y revisan las actividades planteadas en la secuencia.

El análisis a priori consiste en tener en cuenta los aprendizajes esperados por parte de los estudiantes, busca analizar si los cambios de procedimientos durante el desarrollo de las actividades permiten darle sentido. Para Artigue (1995):

> El objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado, Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego de confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. (p.45)

En nuestra investigación realizaremos el análisis a priori para cada uno de los ítems que constituyen las actividades propias de la secuencia didáctica.

(3) La experimentación

En esta fase se pone en marcha la secuencia de actividades, la misma que está estructurada en actividades compuesta por ítems y cada uno de ellos en sub ítems. En la primera parte de la secuencia, el docente modificará las variables según sea pertinente, a la vez que el investigador y el equipo de apoyo, observarán las intervenciones tanto del docente como de los alumnos, para luego registrarlos y describirlos. Estas observaciones serán sistematizadas a partir de un registro de indicadores de aprendizaje de los conocimientos, de modo que se formalice los saberes estudiados y se propongan, si es necesario, otras actividades a fin de reforzar los conocimientos adquiridos. Es decir, se pone en marcha el funcionamiento de la herramienta construida en el momento en el que se reúnen los estudiantes, el docente, el investigador y los observadores para llevar a cabo la secuencia didáctica.

(4) Análisis a posteriori y validación

En esta fase se organiza los datos obtenidos en el desarrollo de la secuencia didáctica a la luz de las respuestas esperadas, es decir, del análisis a priori. Luego se hace el contraste entre las respuestas esperadas, descritas en el análisis a priori y las obtenidas en la experimentación, las que son descritas en el análisis a posteriori. Finalmente, se analiza según el referencial teórico y la problemática de la investigación; es decir se conecta el problema de investigación con el objetivo general y los específicos; lo que nos permite hacer la validación.

En esta fase de nuestra investigación, recogeremos las hojas de aplicación de las actividades con las respuestas de las estudiantes, las grabaciones realizadas por la investigadora y las observadoras de las conversaciones entre las estudiantes en el momento de desarrollar las secuencias.

Posteriormente, validaremos las hipótesis formuladas en el análisis a priori y el producto de la experimentación.

En el siguiente capítulo presentaremos algunos aspectos del objeto matemático a tener en cuenta para el desarrollo de nuestra investigación.

CAPÍTULO III: ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO

En el presente capítulo mostraremos aspectos de las investigaciones correspondientes a los conceptos fundamentales relacionados al objeto matemático que trataremos en nuestra investigación, tales como la concepción del área como magnitud, unidad de medida y procedimientos para la construcción del concepto área.

3.1. Aproximación a los conceptos superficie y área

Consideramos que es importante para nuestra investigación iniciar este apartado haciendo hincapié en la diferencia entre los conceptos *superficie* y *área*, pues la literatura que hemos revisado nos hace dar cuenta que se trata de términos diferentes que se presentan asociados, tal vez por el uso en la vida cotidiana (Corberán, 1996).

En ese sentido, tanto Freudenthal (1983) como Doaudy (1983, 1987) coinciden en hacer la diferenciación entre ambos términos y en la necesidad de enfatizar en los procedimientos para construir el objeto mental del área para formar el concepto de área.

Respecto a superficie, Douady (1983) señala que: "Por superficies planas entendemos las partes bordeadas de un plano con interior no vacío y limitadas por una o más curvas de longitud finita" (p.23). A su vez, señala que "la noción de área tiene como objetivo medir la ocupación del plano, independientemente de la forma" (p.24).

Por su parte, Freudenthal (1983), señala que: "las áreas están constituidas y son aceptadas como objetos mentales, y a posteriori si es preciso, analizadas con el fin de llegar al logro gradual de un concepto" (p.389).

Posteriormente, tenemos en términos de Douady (1987) que: "en lo que sigue entendemos por superficie una parte del plano. La noción de área es una forma de dar cuenta del lugar ocupado por una superficie en el plano" (p.3). [Traducción propia]

En esa misma línea, Corberán (1996) señala que el concepto área parece haber sido tratado de manera intuitiva, pues sus investigaciones le permiten considerar que reconocidos matemáticos a lo largo de la historia "admitieron que toda superficie limitada tiene un área y se centraron en su cálculo" (p.36). También señala que aun cuando utilizaron propiedades del área, no les causó contrariedades el no tener una demostración de lo que se entiende por área.

> Lo que Euclides y cientos de los mejores matemáticos de las generaciones posteriores hicieron fue emplear propiedades que las figuras sugerían como evidentes, o

> intuitivamente tan evidentes que no podían darse cuenta de que las estaban utilizando. (Klein, 1992, p.126 citado en Corberán, 1996, p.36)

A su vez, para Heraud (1989, citado en Corberán, 1996), las superficies planas son objetos del cuadro geométrico, las cuales están asociadas a la noción de extensión, de porción de espacio ocupado; mientras que el área es considerada desde su aspecto cuantificable; es decir, numérico. Esto implica que la medida de la superficie es llamada área.

En nuestra investigación seguiremos la línea de Douady & Perrin-Glorian (1983), en tanto consideraremos área como magnitud, y de Freudenthal (1983), en cuanto a la necesidad de construir el concepto área y los enfoques que proponen los métodos para su medida. Tal como pasaremos a explicar a continuación.

3.2. Área como magnitud

Antes de hacer precisiones respecto al área como magnitud, consideramos importante tener presente a qué nos referimos con el término "magnitud", el cual es precisado por Godino, Batanero & Roa (2002) como:

> Cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente, como la longitud, el peso, la velocidad o la luminosidad"; además se tiene que "cantidad es el aspecto por el que se diferencian entre sí las porciones de la misma cosa o los conjuntos de misma clase de cosas, por el cual esas porciones o esos conjuntos se pueden medir o contar. (p. 615)

Siguiendo esa línea, Gonzáles (2014) llama magnitud a toda propiedad susceptible de ser cuantificada. Es decir, a las características físicas o atributos susceptibles de variaciones en un mismo objeto o de un objeto a otro. En ese sentido, la investigadora precisa que:

> El concepto de cantidad está referido al resultado de la medida; es decir al par (medida, unidad) donde la medida es un número real positivo y la unidad viene dada por el sistema de unidades elegido. (p.45)

Como ejemplos tendremos que, al decir que la medida del perímetro de un polígono es 6 cm, tenemos que 6 cm es una cantidad de longitud, donde 6 es la medida de longitud y cm es la unidad de medida; del mismo modo, cuando decimos que la medida de un área es 20 cm^2, 20 es la medida del área y cm^2 es la unidad de medida. En nuestro trabajo, usaremos procedimientos de conteo de cuadrados, rectángulos o triángulos más pequeños que la superficie que se pretende medir, a modo de recubrirla. En ese caso, nuestra medida corresponderá al número de veces que se repite la unidad de medida elegida, es decir, el cuadrado, rectángulo o triángulo utilizado. Así tendremos que el área de un polígono puede corresponder a 12 cuadrados, donde 12 es la medida del área y cuadrados es la unidad de medida.

Habiendo presentado lo que significa para nosotros el término magnitud, procedemos a presentar la terminología “área como magnitud”, la cual es utilizada Douady & Perrin-Glorian (1983) considerando que se refiere a un concepto primitivo que no buscan definir, pues creen que es suficiente saber que está relacionado al área.

Respecto al área como magnitud, Baltar (1999) se sustenta en las investigaciones hechas por Douady & Perrin-Glorian (1989), quienes presentaron un estudio en el cual se construye el aprendizaje del concepto de área de superficies planas utilizando el marco teórico denominado Dialéctica herramienta –objeto y Juego de cuadros propuesto por Douady (1984, citado en Balacheff, 2004. P.184).

> Como un medio para hacer evolucionar las concepciones de los estudiantes en matemáticas. […] Escogemos para introducir y suscitar el funcionamiento de los conocimientos, unos problemas en los cuales estos conocimientos intervienen en al menos dos cuadros. Privilegiamos los cuadros (en realidad los problemas) en los cuales el error en la correspondencia es creador de desequilibrios que deben ser compensados”. (p.18)

A modo de precisar las ideas presentadas anteriormente, presentamos el siguiente esquema:

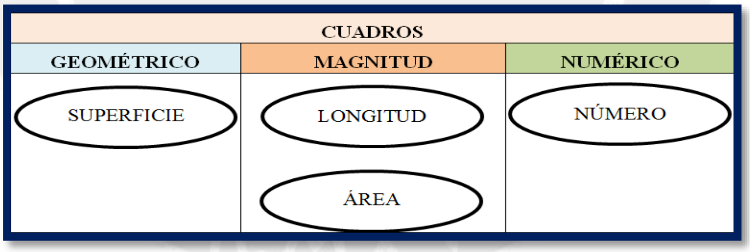


Figura 16. Esquema 2
Fuente: Adaptado de Baltar (1999)

Al respecto de las relaciones entre los juegos de cuadros, Baltar (1999) tienen como hipótesis de sus investigaciones que:

> El desarrollo de la enseñanza del concepto de área como magnitud permite a los estudiantes establecer las relaciones necesarias entre los cuadros geométrico y numérico; el cuadro geométrico, referido a la superficie; el cuadro magnitud, al área; y, el cuadro numérico, a la medida. Este enfoque que da al estudio de área como magnitud permite considerar que el área de una superficie tiene una propiedad invariante por un cierto número de operaciones (por ejemplo, las superficies que se pueden descomponer tienen la misma área y una unidad de medida elegida las superficies que tienen la misma medida tiene la misma área). (Baltar, 1999, p.48) [Traducción nuestra]

Ahora bien, desde el punto de vista matemático, existe la relación de equivalencia expresada en la frase "tener la misma área", lo que permite considerar al área como una magnitud, la cual se define por la elección de una unidad de medida de la superficie. En otras palabras, la relación de equivalencia se entiende que diversas superficies tienen atributos comunes; por ejemplo, el tener la misma área permite el paso entre el cuadro geométrico y el cuadro magnitud. Por lo tanto, cuando decimos que dos superficies que tienen una misma área, entendemos que ambas pertenecen a una misma clase de equivalencia.

Por su parte, Facco (2003) señala que Baltar (1996) resalta la importancia del concepto área como magnitud, explicando que con el aporte de la investigación de Douady & Perrin-Glorian, referido en los antecedentes de esta investigación, se pretende mostrar la comparación de dos superficies desde el punto de vista puramente matemático con el uso de la aplicación medida, la cual presentaremos en el siguiente apartado.

3.3. Medida del área de una superficie

Es importante iniciar este apartado haciendo referencia al término "medida" el mismo que permite dar cuenta de una comparación de dos cantidades homogéneas que comparten una misma naturaleza. Según Gonzáles (2014) tenemos que:

> Hablamos de medir cuando comparamos dos cantidades homogéneas de la misma naturaleza, una de las cuales se toma como patrón, es decir, determinar cuál es la cantidad de una magnitud por comparación con otra que se toma como unidad de la magnitud. El resultado de una medida es un número que debe ir acompañado de la unidad empleada. (pp. 46-47).

A su vez, González (2011) considera que le proceso de medir magnitudes no está limitada a la asignación de valores, sino que implica tareas de identificación de la magnitud de los objetos a medir, comparar entre dos cantidades, compararlas con un mismo patrón elegido, llamado también unidad de medida y luego asignar un número. Esto requiere que se elija una unidad conveniente que permita simplificar el proceso de medición para estimar la cantidad de magnitud que posee el objeto que se mide.

Por lo tanto, en relación al proceso de medición se tiene que es necesario: escoger una unidad de medida, reiterarla tantas veces como sea necesario sobre la superficie que desea medirse, contar las veces que se ha iterado, y, finalmente, asignar el número que le corresponde, respecto a la unidad de medida elegida.

Ahora bien, es relevante precisar que "el área como magnitud" define el área como una clase de equivalencia a partir de una aplicación medida", (Perrin Glorian, 1989, citado en Corberán, 1996, p.20); es decir, que al área de cada superficie le corresponde un único número. Esta precisión permite desligar el área de la forma, diferenciando área y superficie; es decir, dos formas diferentes pueden tener áreas iguales; además, de distinguir el área del número; es decir, una misma superficie puede tener números diferentes y mantener su área, según la unidad de medida que se haya elegido.

En esa línea, según Douady (1987), se resalta que la aplicación medida, debe presentar las siguientes propiedades:

> Si S_1 y S_2 son superficies disjuntas que no tienen en común ningún punto de sus bordes, entonces, f (S_1 U S_2) = f (S_1) + f (S_2).
> Si S ∈ a S y su interior no es vacío, entonces f (S) > 0. Es decir, si una superficie (S) pertenece a un conjunto de superficies (S) y su interior no es vacío, tenemos que la aplicación medida que le corresponde es un número mayor a cero.
> Por tanto, se tiene que para todo A que pertenece a una superficie con interior no vacío, existen una y solo una aplicación fA: S → IR+ verificando las propiedades anteriores como fA (A) = 1. En donde A es el área de la unidad para la medida (de superficie) fA y fA (S) es la medida de S tomando a A como la unidad. La medida de una superficie es un número real positivo o cero. (Douady, 1987, p. 3) [Traducción nuestra]

3.4. Procedimientos para la construcción del concepto área como magnitud

Respecto a los procedimientos para iniciar la construcción del concepto área como magnitud, es importante señalar que Freudenthal (1983) considera que existen diversos enfoques relacionados a la construcción del objeto mental área y su diferencia con el concepto matemático, los cuales son presentados a continuación, acompañados de ejemplos dados en las investigaciones de Del Olmo, Moreno & Gil (1993):

a) Reparto justo: el cual se da por el aprovechamiento de regularidades, estimación y medición.

Este procedimiento se refiere al reparto equitativo; esto se ve en situaciones cotidianas en las que se pueden aprovechar las regularidades, por ejemplo una torta circular puede partirse mediante un trazado de diámetros imaginarios; a su vez se pueden estimar cuando se quiere partir una hoja en partes iguales y se requiere de la superposición para conseguir la igualdad. Finalmente, se miden cuando se divide entre un cierto número de partes y luego de mide cada una de las partes.

b) Comparación y reproducción: dadas por inclusión, transformación por la acción de deshacer y rehacer, por estimación, por medición y por transformación.

Se da cuando nos enfrentamos a situaciones en las que se comparan dos superficies o cuando se pretende reproducir una superficie de forma diferente a otra. Por ejemplo, trazar un rectángulo que tenga la misma medida de área de un cuadrado.

c) Medición: por el agotamiento con unidades de medida que corresponden a unidades más finas, por aproximaciones desde el interior y exterior utilizando rejillas fijas con figuras adoptadas, por conversión, por relaciones geométricas generales, por fórmulas, por principios y por transformaciones.

Este procedimiento implica rellenar el interior de una superficie con unidades colocadas sin que se superpongan. Además se puede recurrir a la acotación entre un valor superior e inferior para obtener aproximaciones a la medida. En cuanto a relaciones geométricas se miden sus dimensiones lineales y usando las fórmulas se llega a la medida. Finalmente, se tiene que las transformaciones hacen referencia a la acción de romper y rehacer, las cuales llevan a la deducción de fórmulas.

Por su parte, Perrin-Glorian (1989, citado en Corberán, 1996) considera extender la aplicación medida a superficies S recubriéndolas con la unidad A, a través de procedimientos como recorte y pegado y aproximaciones desde el interior y exterior de la superficie, utilizando tanto la unidad A o subdivisiones de A que posibiliten estimar la medida del área de la superficie S.

Ahora bien, dado que en nuestra investigación consideraremos el área como magnitud de polígonos, nos parece pertinente hacer referencia a la noción de polígono, dado que corresponde a las representaciones geométricas que pretendemos que midan las estudiantes. Es así que, consideramos importante precisar que en adelante llamaremos polígono, al referirnos al interior del polígono; pues, cuando se pretende medir el área como magnitud de un polígono no solo consideramos los segmentos de rectas no colineales que lo conforman, sino que consideramos principalmente que:

Sea ABC un polígono del plano E.

Un punto P que pertenece a E es un punto interior del polígono ABC, si y solo si:

a) P y A están en el mismo lado del segmento BC
b) P y B están en el mismo lado del segmento AC
a) P y C están en el mismo lado del segmento AB

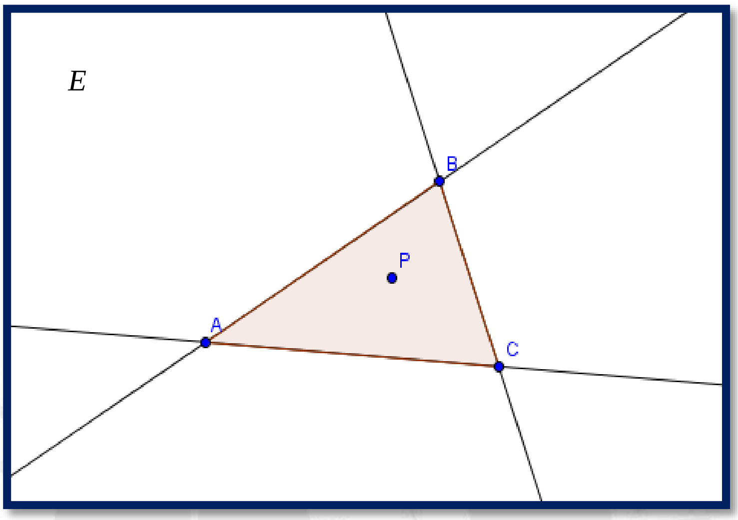


Figura 17. Ejemplo de un punto en el interior de un polígono

CAPÍTULO IV: EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS

En el presente capítulo describiremos las características de los sujetos de investigación, cómo fueron seleccionados y el papel que cumplen en la investigación. Luego, daremos cuenta de la situación didáctica, la organización de la secuencia de actividades que la componen, sus objetivos de aprendizaje, el tiempo de duración, las fases por las que podrán transitar los estudiantes y las variables con sus respectivos valores. Enseguida, describiremos el análisis a priori, la experimentación, el análisis posteriori y, finalmente, la validación.

4.1. Características de los sujetos de la investigación

Participan de la investigación el docente de Matemática, cuatro niñas de 11 años, estudiantes del sexto grado de la Institución Educativa Estatal “Virgo Potens”; además, contamos con la presencia de la investigadora observadora participante y dos observadoras, estudiantes de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

A continuación detallamos el rol que tendrá cada uno de los participantes anteriormente mencionados:

El docente responsable de la enseñanza del área Matemáticas en el sexto grado de educación primaria en la institución educativa será el encargado de hacer que fluyan las interacciones entre alumnos el docente y saberes matemáticos en un medio que posibilite la comunicación de saberes, respecto al área como magnitud y el uso de las diferentes unidades arbitrarias de medida.

Antes de ejecutarse la secuencia de actividades, la investigadora se reunió tres veces con el docente con la finalidad de lograr un acercamiento a los aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas, la postura que se tomaría respecto al objeto matemático en nuestra investigación y presentarle el software GeoGebra de modo que las estudiantes puedan utilizarlo, de ser preciso, en el desarrollo de algunas de las actividades propias de la secuencia didáctica.

Las estudiantes fueron elegidas por el docente de Matemáticas. Si bien los resultados de la investigación se refieren al trabajo realizado con cuatro estudiantes, es importante mencionar que ellas son parte de un grupo de treinta y dos y están divididas en grupos de cuatro. Además, dado que las estudiantes ya habían tenido un acercamiento al software GeoGebra en un taller de implementación, el profesor optó por elegir al grupo que mostró mayor disposición en el manejo de las herramientas ofrecidas por el software, además de ser las estudiantes más participativas en el área Matemática.

Para nuestra investigación, el grupo elegido estuvo organizado en dos subgrupos; es decir, contamos con dos grupos de dos estudiantes para desarrollar la actividad; de modo que el grupo I estuvo conformado por A1 y A2; y, el grupo II por B1 y B2. La conformación de los grupos se mantiene durante la experimentación.

Es importante resaltar que las estudiantes, respecto al objeto de estudio, han desarrollado actividades de medida de áreas a partir de fórmulas desde los grados anteriores, tal como se señala en el DCN (ver anexo 2); asimismo, en sexto grado han desarrollado una revisión del concepto de polígono y sus características o atributos medibles, durante el primer bimestre (abril y mayo).

Por otro lado, el papel que cumplió la investigadora observadora fue el de diseñar la secuencias didáctica. Luego, orientó a las observadoras respecto de los objetivos de aprendizaje, de ese modo, tomarían nota de sus impresiones respecto a cómo las estudiantes se relacionaron con el medio; es decir, cómo interactuaron con sus saberes, su compañera de grupo y finalmente entre grupos; de modo que los datos recolectados sean efectivos para el análisis.

4.2. Descripción de las secuencias de actividades

La secuencia didáctica está organizada en actividades constituidas en ítems y estos en sub ítems que promueven que las estudiantes desarrollen la construcción del concepto de área como magnitud a partir de la utilización de diferentes unidades arbitrarias de medida y procedimientos de conteo de unidades, descomposición y composición de polígonos. A continuación mostramos la organización de la situación didáctica:

Tabla 1. Organización de la secuencia didáctica

<table>
<tr><td rowspan="4">Secuencia didáctica</td><td rowspan="3">Actividad
N° 1</td><td>ítem1</td><td>Sub ítems a, b, c, d, e</td></tr>
<tr><td>Ítem 2</td><td>Sub ítem a</td></tr>
<tr><td>ítem 3</td><td>Sub ítems a, b</td></tr>
<tr><td>Actividad
N° 2</td><td>Ítem 1</td><td>Sub ítems a, b</td></tr>
</table>

La secuencia didáctica tiene el objetivo de aprendizaje:

Reconocer que el área como magnitud no varía, independientemente de las unidades de medida elegidas para los diferentes procedimientos de medida de área de polígonos.

En el siguiente apartado presentaremos el análisis de la secuencia didáctica, el cual consiste en dar cuenta de las actividades propuestas, su propósito, duración, presencia de las variables y el tránsito de las estudiantes por las distintas fases propias de la TSD, las cuales son propuestas con la finalidad de fortalecer los aprendizajes respecto al concepto del área como magnitud y la medida de la misma a partir de diversos procedimientos.

Es así que se considerará la descripción, el análisis a priori y el análisis a posteriori de la secuencia de actividades. Asimismo, presentaremos las reflexiones que surgen a partir del desarrollo de las mismas.

4.2.1. Descripción de la actividad N°1

El propósito de esta actividad es que las estudiantes utilicen diferentes unidades arbitrarias de medida para los procedimientos de medida de área de polígonos; de modo que puedan aplicar diversas estrategias como el conteo de unidades por iteración, utilización de la cuadrícula, y descomposición y composición de polígonos para construir el concepto de área como magnitud.

Las variables didácticas que tendremos en cuenta las variables con sus respectivos valores son los mostrados en la tabla 2:

Tabla 2.Tabla de variables y valores

Variables	**Valores**	**Actividad/Ítems**
Unidad de medida	Cuadrado Triángulo Rectángulo 1 (2 cuadrados) Rectángulo 2 (mitad del cuadrado)	1a, b, c, d, e, 2 3
Tipo de figura	Simple Compleja	1a, b, c, d, e, 2 y 3
Herramienta	Blanco Cuadrícula Malla triangular	1a, b, c, d, e 2 y 3b
Tipo de cuadrícula	Cuadriculada Triangular	1a, b, c, d, e 2 y 3b
Medida de área según el cuadrado de la cuadrícula	Entera Fraccionaria	1a, b, c, d, e

Fuente: Adaptado de Silva (2010, p.54)

La duración prevista para el desarrollo de esta primera actividad es de 70 minutos, correspondientes a los minutos efectivos de dos horas pedagógicas de 40 minutos cada una. Consideramos 10 minutos para la organización de las alumnas y de los docentes; es decir, este tiempo lo emplean para el desplazamiento de los docentes hacia las aulas, pues en la institución ejercen la polidocencia; es decir, cada profesor tiene a cargo la enseñanza de un área específica a las cinco secciones del grado. Además, se tiene en cuenta que al inicio de la sesión el docente recuerda a las estudiantes las normas de convivencia (normas establecidas en la institución educativa para mantener la disciplina en el aula).

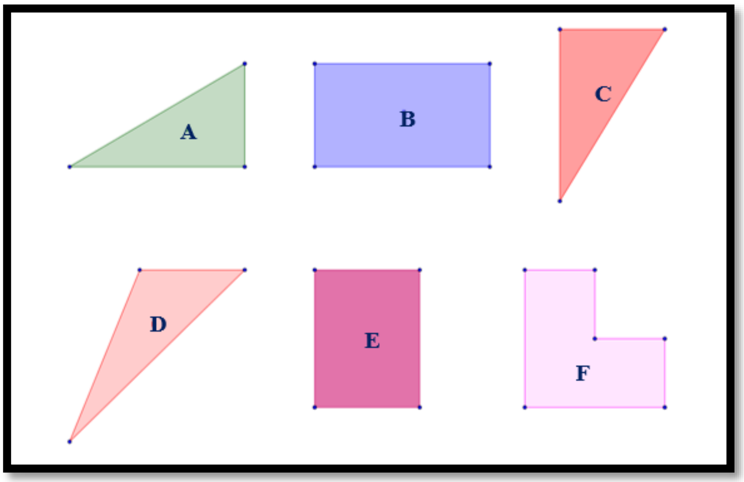
Al iniciar la clase, el docente dará instrucciones precisas para el desarrollo de la actividad; es decir la organización de los grupos de trabajo: dos por grupo, reparto de la ficha de aplicación y el material con el que las estudiantes podrían desarrollar las actividades: sobre con doce recortes de cartulina que representan los polígonos también diseñados en la ficha de aplicación.

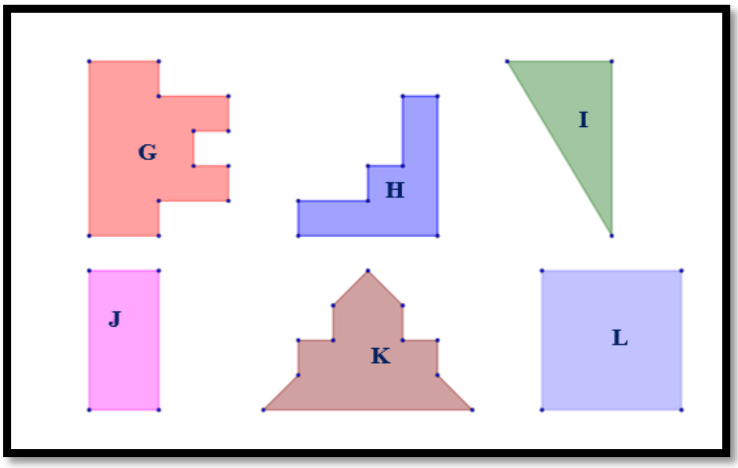
Además, el grupo I y II recibirán, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo pequeño, respecto de los recortes de cartulina; el mismo que les servirá como unidad de medida para medir el área de la superficie de cada uno de los recortes recibidos. Se les hace la indicación para que puedan utilizar cualquier instrumento que consideren necesario para medir el área de los recortes de cartulina.

Luego, entregará a las estudiantes la ficha de aplicación que presentamos a continuación:

Actividad N° 1

Recibirán recortes de cartulina, tales como se muestran en las imágenes. Luego, en grupo, escriban cómo podrían medir las áreas. Después de conversar con sus compañeras de grupo, escriban la medida del área que han asignado a cada uno de los recortes de cartulina que han recibido.





a) Podríamos medirlas de las siguientes formas:

b) ¿Con qué otro nombre conoces a los recortes recibidos?

c) ¿Todos los polígonos tendrán la misma medida de área? ¿Por qué lo creen así?

d) Describan cómo hallaron el área de los polígonos A, C y D.

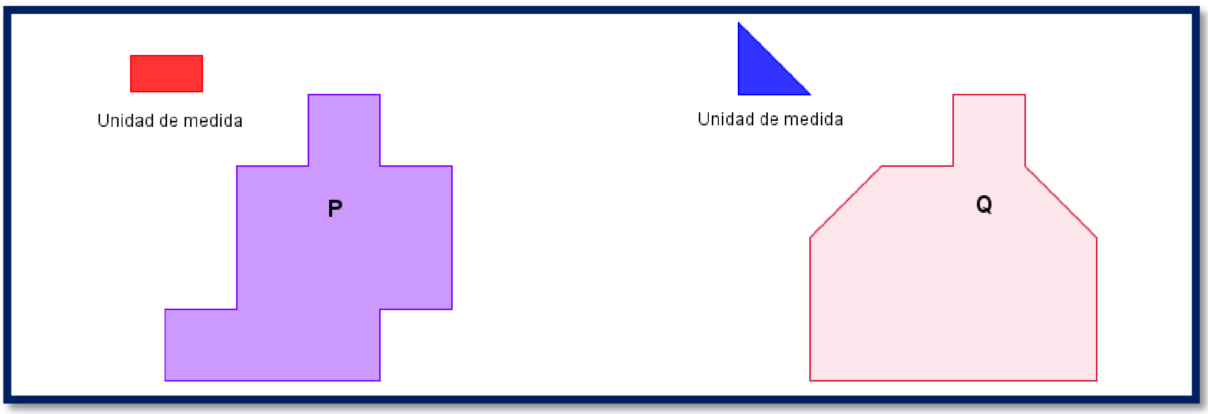
e) ¿La unidad de medida que han utilizado les ayudó a asignar la medida al área de todos los polígonos observados? ¿Cómo la utilizaron?

2. Observen las medidas de las áreas que tienen los polígonos. ¿Qué creen que pasará si cambiamos la unidad de medida?

Luego de haber realizado la experiencia, conversen con los compañeros de grupo y respondan: ¿Las medidas de las áreas de los polígonos son las mismas o han variado? ¿Qué creen que ha pasado? ¿Por qué?

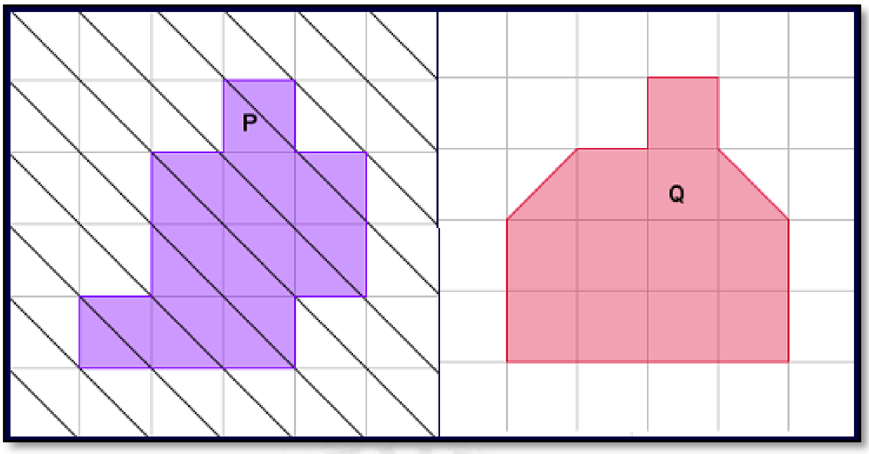
3. Ahora, observen los siguientes polígonos

a) Escriban la medida del área de cada polígono representado en las siguientes figuras.



a) Medida del área:______ b) Medida del área:______

b) ¿Cuál sería la medida del área de cada uno de los polígonos si utilizamos diferentes mallas?



a) Medida del área:______ b) Medida del área:_____

Como hemos mencionado, con esta secuencia didáctica se pretende que las estudiantes transiten por las fases de acción, formulación y validación, y si es necesario llevar a cabo institucionalizaciones locales; entendiendo que todas ellas confluyen en la interacción constante para el logro del aprendizaje.

4.2.2. Descripción de la actividad N° 2

El propósito de esta actividad es que, luego de una semana de haberse aplicado la actividad N°1, podamos reconocer los procedimientos que utilizan las estudiantes para medir el área de polígonos en situaciones diversas.

Su duración está prevista para 40 minutos, correspondientes a una hora pedagógica; la misma que se llevará a cabo en el laboratorio de Informática, de modo que cada estudiante utilice el software Geogebra, si lo requiere.

La variable que se considerará es el uso de diferentes unidades de medida. En tanto las estudiantes deberán reconocer que en la situación presentada se utiliza diferentes unidades de medida como el triángulo, rectángulo o cuadrado.

Al iniciar la actividad, el docente dará unos minutos para que las estudiantes lean las situaciones planteadas, las mismas que serán abordadas de manera individual, para luego proceder a comunicar a sus compañeras de grupo sus respuestas.

A continuación presentamos la actividad N° 2.

Actividad N° 2

De manera individual, lee y halla la solución a las siguientes situaciones. Luego socializa con tus compañeras acerca de las respuestas obtenidas:

a) Situación 1

Marisol ha recibido una hoja de papel y ha indicado que la medida de su área es 16 unidades, luego vino Paola y la midió, determinando que su área mide 8 unidades. Ahora ambas discuten porque creen tener la razón ¿Qué creen que ha pasado? ¿Quién creen que tiene razón? ¿Cómo les explicarían lo sucedido?

b) Situación 2

Camila y Yamilec han recibido una hoja bond de color amarilla y celeste, respectivamente. Su profesor les ha pedido que midan sus hojas y apunten las medidas que han hallado. Seguidamente, deberán intercambiarse las hojas y medir la que reciben.

Sayuri, una amiga de ambas, también pidió medir ambas hojas. Al terminar, cada niña dijo:

Camila: "la hoja amarilla mide 81 unidades y la hoja celeste, 36 unidades"

Yamilec: "la hoja amarilla mide 40,5 unidades y la hoja celeste 18"

Sayuri: "La hoja celeste mide 6 unidades y la amarilla mide 9 unidades".

¿Qué creen que ha pasado? ¿Será posible que las niñas se hayan equivocado?

4.3. Experimentación y análisis de la secuencia de actividades

El desarrollo de esta secuencia didáctica la llevamos a cabo en dos fechas distintas, las cuales fueron coordinadas con el docente responsable del curso, la subdirección académica y dirección de la institución. Dado que la situación fue diseñada para ser desarrollada en forma grupal e individual, las estudiantes respondieron con entusiasmo; así, en la actividad N°1, las parejas dialogaron acerca de cómo podrían medir el área de cada uno de los polígonos si no tenían medidas establecidas por el docente, tal como se les presentan las actividades en los libros otorgados por el ministerio o las fichas que prepara el docente, con respecto a medición de áreas. Mientras que en la actividad N°2, cada estudiante resolvió la actividad de manera individual.

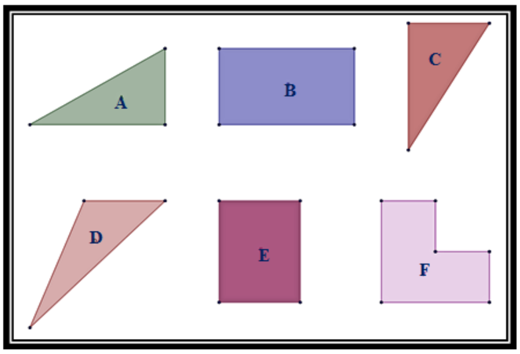
A continuación, presentaremos el análisis de las actividades, de modo que podamos observar con mayor detalle cómo se movilizan los conocimientos de las estudiantes, y el tránsito por las distintas fases propuestas por la TSD, de una manera integral. A su vez, indicaremos el propósito la actividad, el conocimiento movilizado y el análisis a priori.

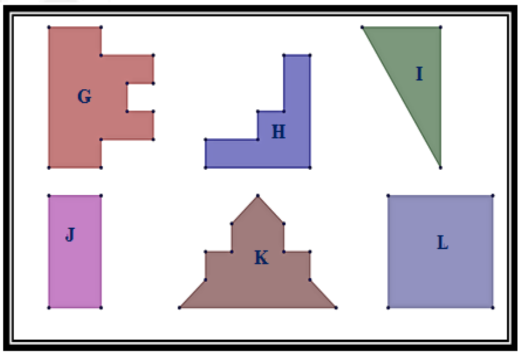
Actividad N°1

Descripción y análisis a priori del ítem 1

- Como manifestamos anteriormente, la actividad N° 1 está conformada por 3 ítems. A continuación describiremos el ítem 1.

Recibirán recortes de cartulina, tales como se muestran en las imágenes. Luego, en grupo, escriban cómo podrían medir el área de cada una de ellas.





Tal como lo mencionamos en la descripción de esta actividad, pretendemos que, con este ítem, las estudiantes logren identificar los procedimientos que puedan ayudarlas a reconocer que el área es una magnitud; es decir, que puedan darse cuenta que las unidades de medida que utilizan les permitirán tener medidas diferentes para un mismo polígono y, a su vez, estos conservan su misma área.

Los conocimientos movilizados para lograr este objetivo serán: área, medida de área, unidad de medida.

Esperamos que las estudiantes planteen que pueden medir los recortes de cartulina utilizando unidades como un cuadrado o triángulo más pequeño que el recorte. Cada grupo tendrá una unidad de medida diferente. Es posible que algunas obvien las unidades y utilicen una regla y apliquen las fórmulas aprendidas en los años anteriores. También prevemos que algunas estudiantes puedan preferir la edición de las hojas de aplicación utilizando la hoja cuadriculada, obviando el material que tienen a disposición.

A su vez, esperamos que recurran a la regla para medir la base y la altura de los polígonos, que apliquen fórmulas aprendidas los años anteriores, tales como:

- La fórmula del triángulo para las figuras A, C, D e I: $A = \frac{b.h}{2}$
- La fórmula del rectángulo para las figuras B, E y J: $A = b.h$

Para las figuras F, G, H, K podrían separarlas en partes de modo que puedan medir el área de figuras conocidas y luego sumarlas. También esperamos que las alumnas puedan descomponer las figuras para construir unas ya conocidas como cuadrados o rectángulos.

También consideramos la posibilidad de que las estudiantes utilicen las unidades arbitrarias dadas para recubrir la superficie de los polígonos, es decir utilizarían el procedimiento de iteración propuesto por Freudenthal (1983) o trazar en la cartulina usando como referente la unidad de medida elegida (cuadrado, rectángulo o triángulo) en el recorte de cartulina que representa el polígono.

También podrían utilizar la hoja cuadriculada que se les entrega como apoyo para la resolución de la actividad, usándolo a modo de cuadrícula.

Otra forma que podrían considerar las estudiantes sería el completar las figuras en cuadrados u otras figuras conocidas por ellas.

Experimentación y análisis a posteriori

Al inicio de la sesión el profesor da las indicaciones tanto para el uso del material que tendrán a su disposición como las pautas para el desarrollo de la secuencia de actividades y muestra el material con el que trabajarán las estudiantes. Les muestra diversos recortes de cartulina, los cuales servirán para desarrollar la actividad de medir polígonos. A continuación les muestra un cuadrado más pequeño respecto a los polígonos mostrados, el cual será utilizado como unidad de medida. Del mismo modo, el docente pregunta qué es y las alumnas responden que es un cuadradito. El docente, nuevamente, aclara que estamos en Matemáticas: "… ¿en matemática podremos hablar "cuadradito"?" Las estudiantes ahora responden que es un cuadrilátero. El docente asiente que es un cuadrilátero, el cual podrá servir para… "para contar", "para las figuras", "para completar una figura"

Luego, el profesor indica: "… entonces vamos a hallar el área con esta medida, ¿de acuerdo? Tú te las ingenias, en grupo conversan, dialogan, y tratan de hacer la demostración". Con esta indicación el profesor muestra el cuadrado que servirá como unidad de medida, el cual es más pequeño que los recortes de cartulina, por eso indica "hallar el área con esta medida".

Aquí podemos considerar que el docente orienta en la resolución de la actividad planteada, lo que podría derivarse en el efecto Topaze que puede surgir en el contrato didáctico; sin embargo, las estudiantes no tomaron en cuenta esta indicación.

Luego, cuando señala que deben hacer la demostración, esta se refiere a la explicación que deberán dar las estudiantes para justificar sus respuestas.

Tal como lo esperábamos para esta actividad, las alumnas manipulan y observan los recortes que representan los polígonos, en adelante, solo diremos polígonos para referirnos a los recortes de cartulina.

Las respuestas obtenidas nos permitieron observar que las estudiantes manipulan los polígonos, comentan entre ellas cómo podrían medir su área, toman la regla, miden el perímetro, apuntan en la hoja las medidas de cada uno de los lados, sin embargo, luego se detienen porque no recuerdan qué se hace con esas medidas, B1, una de las estudiantes del grupo II, precisa que hay que sumarlas mientras que B2 cree que todas las medidas de los lados se multiplican. Este resultado de la experimentación se vio también reflejado en las investigaciones referidas por Douady (1983), Baltar (1996) y Facco (2003) en lo que refiere la relación entre área y perímetro. Por su parte, el grupo I, A1 y A2 recuerdan que aprendieron en la clase anterior a medir ángulos, con lo cual solicitan un transportador, pues consideran que de ese modo podrán medir el área de los recortes de cartulina, esto se da porque es el tema más cercano que han estudiado.

Ante esta situación nos dimos cuenta que el docente va observando los procedimientos seguidos por cada uno de los grupos, pregunta a la investigadora - observadora si puede intervenir porque no están haciendo lo que se les pide, a lo que se le responde que es decisión del docente; pues, creemos que su decisión puede dar a nuestra investigación un aporte valioso con respecto a la participación del docente, el cual podría generar un efecto Topaze o Jourdaín, los cuales fueron precisados en el capítulo II, o si solo hace una institucionalización. Lo que observamos fue que el docente vio por conveniente hacer que las estudiantes lean nuevamente la pregunta, luego les pide que revisen sus procedimientos y puedan avanzar hacia la respuesta esperada. Por separado, la interacción entre los grupos y el docente fue como sigue:

- Al grupo I le pregunta si les piden que midan los ángulos y si es necesario para realizar la actividad solicitada. Las alumnas se miran y comentan que están equivocadas, pero no saben explicar por qué. Esto se da porque las estudiantes han relacionado el tema estudiado en la clase anterior (medida de ángulos).

- En tanto al grupo II, el docente les pregunta si les piden medir el perímetro de los polígonos y si es necesario para hallar el área. Les pregunta a las estudiantes qué es lo que deben medir, a lo que la estudiante B1 responde, señalando el interior del polígono.

Entre las respuestas que dan las estudiantes a la pregunta de cómo podrán medir el área de los polígonos, las estudiantes dan alternativas como medir los lados con la regla, usar fórmulas del cuadrado, del triángulo, del rectángulo, contar cuadraditos (uso de cuadrícula), medir con un cuadrado chiquito el cuadrado grande (noción de la unidad de medida).

Para iniciar con la medición, el grupo I, A1 y A2, ha determinado que la forma más fácil de medir el área de los polígonos es copiar las figuras de la hoja de aplicación sobre la hoja cuadriculada, luego A1 considera contar los cuadrados y para luego escribir la medida del área de cada uno de los polígonos.

El grupo II, B2 y B1, también propone la utilización de la hoja cuadriculada, a diferencia del grupo I, este grupo decide colocar los polígonos sobre la hoja cuadriculada, traza los lados y luego, cuentan cuántos cuadrados corresponden al interior del polígono trazado. En esta actividad, las alumnas utilizan la cuadrícula para medir el área de los recortes de cartulina, tal como se solicitó en la actividad. A su vez, B2 ve que el grupo avanza más rápido, porque están midiendo polígonos más pequeños y ellas cuentan muchos cuadrados. Ante esta situación, la estudiante B1 sugiere utilizar el cuadrado de cartulina más pequeño para dibujarlo en el interior del polígono, luego trazará, tantas veces sea necesario, el borde del cuadrado que le sirve como unidad de medida.

A continuación, mostraremos cómo las niñas del grupo II van dialogando mientras realizan la fase de acción para medir el área de los polígonos. Como observaremos, una de las estudiantes dibuja en las hojas cuadriculadas los polígonos que van a medir, luego cuentan los cuadrados del interior del polígono.

Grupo II

B1: (señalando la figura B) Empezamos por esta, mejor la dibujamos en la hoja ¿ya?

B2: yo lo dibujo.

B1: ya, ahora cuenta cuántos hay

B2: 1,2,3….21 arriba, 1,2,3..12 en este lado…entonces 21 x 12 es (realiza la multiplicación) 252. B1: es 252 cuadraditos

Grupo I A2: Ahora, vemos la figura B A1: igual como la figura A A2: vamos a sobreponer la hoja para poder dibujar la figura (dibujan) A1: ahora vamos a contar cuántos cuadraditos hay para hallar el área: 1,2,…15. Igual que la figura anterior, en cambio la figura B no la vamos a dividir entre 2 porque sí está completa, entonces la figura B sí se puede medir.

Como observamos, ambos grupos han utilizado procedimientos similares, pues han utilizado la cuadrícula, lo que varía en ambos grupos es que mientras el grupo I decide colocar la hoja cuadriculada sobre la ficha de aplicación; mientras que, el grupo II opta por colocar el polígono sobre la hoja cuadriculada para luego contar los cuadrados que están en el interior del polígono.

En el caso del grupo II, las niñas han utilizado el procedimiento de **medición** propuesto por Freundenthal, el cual fue explicado en el capítulo III; es decir, por aproximaciones desde el interior y exterior utilizando rejillas fijas con figuras adoptadas.

A modo de reflexión con respecto a que en un primer momento, el grupo I opte por medir los lados de los polígonos y el grupo II opte por medir ángulos, haciendo referencia a una clase anterior al desarrollo de la situación planteada; pero, ninguno recuerde qué hacer después, diremos que es una situación que nos llamó la atención, pues las estudiantes desarrollan actividades relacionadas a la medición de áreas desde los dos grados anteriores; es decir, 4to. y 5to. Grado de Educación Primaria. Creemos, que esto puede deberse a que el desarrollo del currículo de cada grado es a corto plazo; en otras palabras, las estudiantes son preparadas para responder a situaciones planteadas que las lleva a seguir procedimientos sin haberlos comprendido, lo que podría generar que lo olviden y no puedan utilizar sus conocimientos en situaciones similares, al paso del tiempo.

Descripción y análisis a priori del ítem 1: sub ítem c

¿Todos los polígonos tienen la misma medida de área? ¿Por qué lo creen así?

Pretendemos que las estudiantes transiten por la fase de formulación, en la que se propicia la comunicación de los procedimientos que pueden realizar para medir el área de los polígonos.

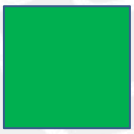
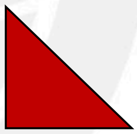
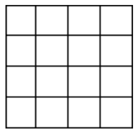
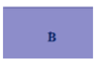
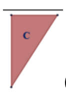
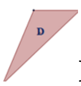
El propósito de este ítem es que las estudiantes reconozcan y movilicen la noción de medida de área; además, podrán darse cuenta que al tener diferentes unidades de medida, las medidas que le asigne un grupo también serán diferentes con respecto a un mismo polígono.

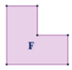
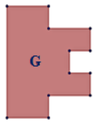
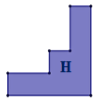
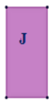
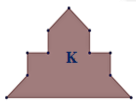
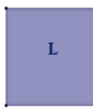
Se espera que respondan que los polígonos no tienen la misma medida de área porque son diferentes entre sí, además cada grupo de estudiantes tiene una unidad de medida diferente, con lo cual, las medidas correspondientes a un mismo polígono pueden variar, tal como se observa en la tabla 2.

En este ítem se está priorizando el uso de la variable *unidad de medida*. También creemos que las estudiantes podrán utilizar la cuadrícula, reconociendo que cada cuadrado de la misma corresponde a una unidad de medida.

A continuación mostraremos la tabla 2, en la que se consideran las respuestas ideales que esperamos para asignar la medida del área de cada polígono, según la elección de la unidad de medida de cada grupo de estudiantes.

Tabla 3. Respuestas esperadas por los grupos A y B

	GRUPO A	**GRUPO B**	Cambio de unidad de medida	Uso de cuadrícula
Polígono				
 **A**	7,5 unidades	3,75 unidades	15 unidades	120 cuadrados
 **B**	15 unidades	7,5 unidades	30 unidades	240 cuadrados
 **C**	9 unidades	4,5 unidades	18 unidades	144 cuadrados
 **D**	7,5 unidades	3,75 unidades	15 unidades	120 cuadrados
 **E**	12 unidades	6 unidades	24 unidades	192 cuadrados

 **F**	12 unidades	6 unidades	24 unidades	192 cuadrados
 **G**	15 unidades	7,5 unidades	30 unidades	240 cuadrados
 **H**	8 unidades	4 unidades	16 unidades	128 cuadrados
 **I**	7,5 unidades	3,75 unidades	15 unidades	120 cuadrados
 **J**	8 unidades	4 unidades	16 unidades	128 cuadrados
 **K**	12 unidades	6 unidades	24 unidades	192 cuadrados
 **L**	16 unidades	8 unidades	32 unidades	256 cuadrados

Se prevé que las estudiantes tengan dificultad para medir los polígonos A, C, D, I, especialmente el polígono D. Podría generarse mayor dificultad porque las unidades de medida con las que están trabajando hasta el momento son un cuadrado o un rectángulo; además, porque, en el caso del polígono D tenemos que no tiene sus tres lados apoyados en la rejilla de la cuadrícula. Consideramos que las estudiantes podrían recurrir a completar estos polígonos para obtener rectángulos, así sería más sencillo contar los cuadraditos y luego dividirlos entre dos.

Al igual que estos cuatro polígonos mencionados (A, C, D, I), otro polígono que podría ser generar mayor reflexión para encontrar el procedimiento adecuado sería el polígono K; dado que no es un polígono conocido; por lo cual, se espera que el estudiante requiera de un cambio de unidad; en este sentido estaríamos observando la pertinencia de la elección de la unidad de medida. También es posible que las estudiantes recurran a la descomposición del polígono para componerlos en polígonos conocidos, tal como observamos en la figura 22.

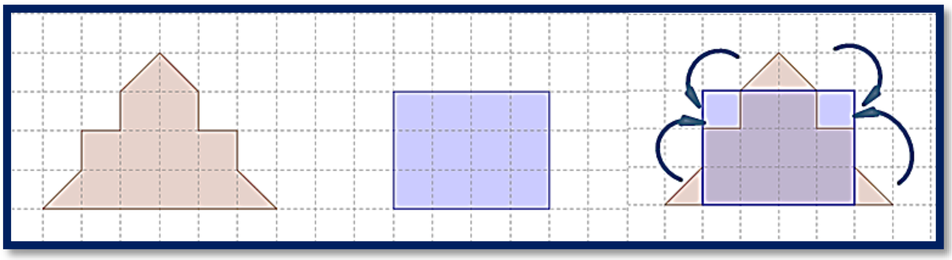


Figura 18. Procedimiento de descomposición y composición

Experimentación y análisis a posteriori

En este ítem, las estudiantes refieren que no todas las figuras de los polígonos tienen la misma medida de área. El grupo I establece que solo algunas figuras tienen la misma medida; mientras que el grupo II manifiesta que son diferentes medidas, pero no lo explica.

En este caso, el grupo I no ha utilizado el rectángulo más pequeño que representa la unidad de medida, pues considera más sencillo de resolver el ejercicio copiando la figura en la hoja cuadriculada. El grupo II ha trazado en la cuadrícula y luego ha contado cuántos cuadrados corresponden a la medida de los polígonos propuestos representados en los recortes de cartulina.

En el caso de las figuras I, el grupo I afirma que tienen la misma medida de área, pues ambas tienen 10 unidades. Sin embargo, podemos apreciar que las estudiantes no han usado debidamente la cuadrícula, como observamos en la figura 23, lo que ocasiona que la respuesta sea incorrecta; pues lo correcto es 7,5 unidades. A continuación presentamos un extracto de su conversación y el procedimiento desarrollado en la hoja cuadriculada:

A1: La figura I es un triángulo, humm…
A2: lo completamos y hacemos un rectángulo, luego lo dividimos entre 2.
A1: ya, …contamos y tiene 20 cuadraditos, lo dividimos entre 2, sale 10. La figura I tiene 10 cuadraditos.

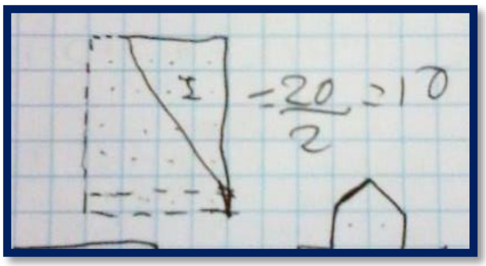


Figura 19. Medición del área de la figura I

Por su parte, el grupo II, al igual que con los otros polígonos, los dibuja en la cuadrícula y determina que los polígonos C e I tienen la misma medida, basándose en su visualización de los polígonos, de modo que ya no procede a medir.

B1: mira, la C y la I son iguales.
B2: Entonces tienen 120 cuadraditos también.

En cuanto a las figuras B y G, también tienen la misma medida de área, pues a ambas les corresponde 15 unidades. Así, en el polígono B, las alumnas del grupo I trazaron el polígono y contaron los cuadrados, según la cuadrícula, obteniendo como respuesta que el polígono B y el G tienen un área que mide 15 unidades. Tal como lo esperábamos, las estudiantes descompusieron el polígono G para componer un rectángulo, el cual es igual al polígono B.

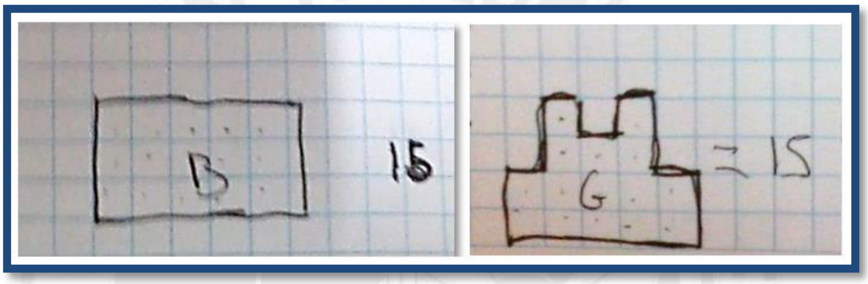


Figura 20. Medición del área de los polígonos B y G

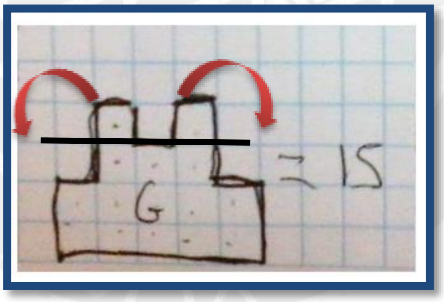


Figura 21. Descomposición del polígonos G

Las estudiantes siguen el mismo procedimiento para medir el área de los polígonos E, F, K, J y H. Teniendo así que a las figuras E, F y K les corresponden 12 unidades de medida, y a las figuras H y J, 8 unidades.

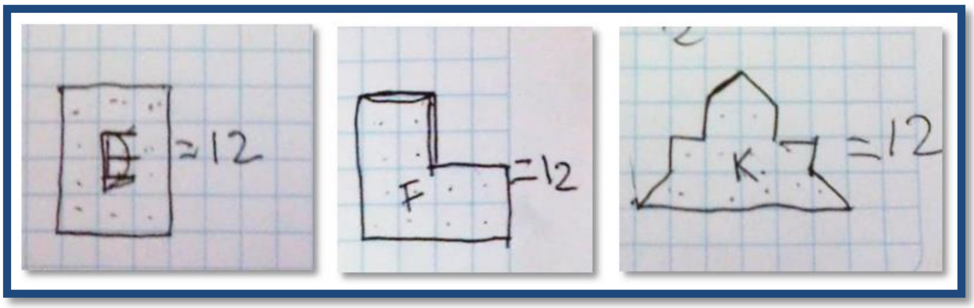


Figura 22. Medición del área de los polígonos E, F y K

A diferencia de lo que referimos en el análisis a priori, los polígonos F y K no causaron mayor complicación al ser polígonos no comunes a sus actividades escolares, pues ambos grupos contaron las unidades de medida utilizando la cuadrícula. Aunque al grupo II, les pareció más difícil al inicio del proceso de medición. A continuación presentamos cómo lo desarrollaron:

A1: la figura k es un castillo…hummm está difícil
A2: no, mira… a ver…lo dibujamos en nuestra hoja cuadriculada. Ya está.
A1: son 10 cuadraditos
A2: no, porque dos triángulos hacen un cuadrado. Entonces, son 12 cuadraditos… mira…1,2,..10, estos dos triángulos hacen un cuadrilátero, 11, y estos dos…12. La figura K tiene 12 cuadraditos.

Por su parte, el grupo II midió el área utilizando la cuadrícula y luego descompuso el polígono K para formar otro al componerlo, tal como se muestra en la figura 23.

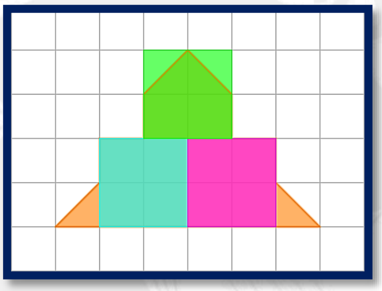


Figura 23. Medición del área del polígono K

En este sub ítem nos damos cuenta que las estudiantes empiezan a aproximarse en la utilización de procedimientos con diversas unidades de medida, lo hacen de manera voluntaria, lo que genera expectativa, cobre todo en el grupo II, para medir el área de los demás polígonos.

Respecto al polígono L, las estudiantes de ambos grupos dieron la respuesta correcta; es decir, 16 unidades. El grupo I lo hizo utilizando la cuadrícula (figura 24) y el grupo II, iterando la superficie del polígono dibujando las unidades de medida sobre ella, sin uso de cuadrícula.

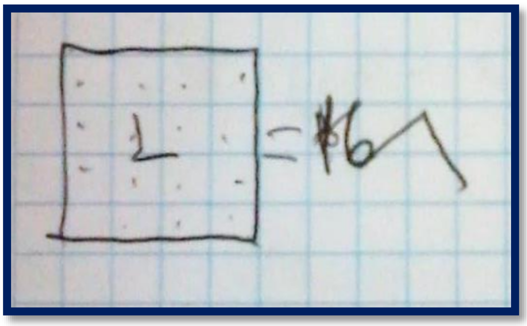


Figura 24. Medición del área del polígono L

En la resolución de este sub ítem observamos que el grupo I procede a contar cada uno de los cuadrados de la cuadrícula, mientras que el grupo II, como ya mencionamos, itera la unidad sobre el polígono solo en dos lados y luego multiplica. Creemos que los conocimientos que tienen las estudiantes sobre la forma de medir el área de un cuadrado están implícitos, aun cuando no refieran el término "fórmula". En este momento de la actividad evidenciamos la fase de validación.

Descripción y análisis a priori del ítem 1: sub ítem d

Describan cómo midieron el área de los polígonos A, C y D

En este ítem, las estudiantes transitarán por las distintas fases propias de la dialéctica, en tanto tienen que comunicar a sus compañeras del otro grupo y docente los procedimientos que siguieron para medir el área de los polígonos asignados.

El objetivo de este ítem es que las alumnas logren identificar el proceder de las estudiantes para determinar la medida del área de un polígono. De modo que los conocimientos movilizados sean área, medida de área, unidad de medida. Las variables serán unidad de medida y uso de la cuadrícula.

Se espera que las estudiantes identifiquen los procedimientos utilizando la cuadrícula superpuesta en la ficha de aplicación, para realizar el conteo de cuadrados que corresponden al polígono o usen la pizarra cuadriculada al dibujar cada uno de las representaciones de los polígonos propuestos.

Como mencionamos anteriormente, creemos que podrían causarle alguna dificultad pueden ser los triángulos A, C y D. Por lo tanto, podrían recurrir a completarlos para formar rectángulos; luego, contar los cuadrados correspondientes según la cuadrícula para luego dividirlo entre dos. En este grado las estudiantes ya han desarrollado actividades en los grados anteriores que le permitirían reconocer que dos triángulos rectos pueden formar un rectángulo, pues ya lo han trabajado en años anteriores.

Además, con respecto al polígono D, consideramos que requiere de una mayor reflexión respecto de cómo resolver lo solicitado, pues no solo es un triángulo, sino que dos de sus lados no están fijos en la cuadrícula.

Entonces, pensamos que podrían completar el polígono para formar un cuadrado, luego por descomposición y utilizando la cuadrícula podrían contar unidades de polígonos conocidos, sumarlos y luego restarlo del total. Así como se muestra en la figura 25.

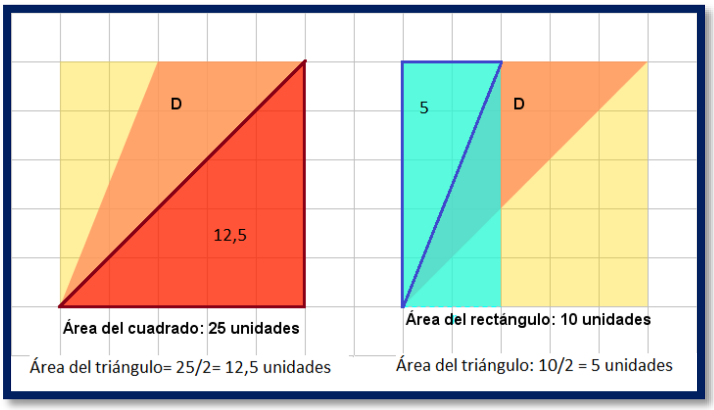


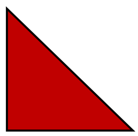
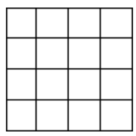
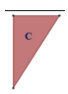
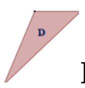
Figura 25. Medición del área del polígono L

Luego tendríamos que 12,5 + 5 = 17,5 unidades correspondientes a la medida del área de cada polígono conocido. Luego, para saber cuándo mide el área del polígono D tendría que restar 25 – 17,5 = 7,5 unidades.

También esperamos que requieran usar el software GeoGebra al dibujar el polígono D y completarlo, así puede resultarle mejor la visualización del área que deben medir. Es importante recordar que las estudiantes han tenido un taller de implementación en el que se familiarizaron con las herramientas del software; además, el docente ha venido trabajando con el software de manera esporádica, a partir del taller.

Para los polígonos A, C y D, esperamos que las estudiantes respondan que les corresponden las siguientes medidas de área:

Tabla 4. Respuestas esperadas para los polígonos A, C, D

	GRUPO A	**GRUPO B**	Cambio de unidad de medida	Uso de cuadrícula
Polígono				
 **A**	7,5 unidades	3,75 unidades	15 unidades	120 cuadrados
 **C**	9 unidades	4,5 unidades	18 unidades	144 cuadrados
 **D**	7,5 unidades	3,75 unidades	15 unidades	120 cuadrados

Como podemos observar, aquí también se puede observar el uso de las variables: unidad de medida, medida de área con sus valores entero o fraccionario, pues al cambiar la unidad de medida también cambiará la medida correspondiente.

Experimentación y análisis a posteriori

Tal como lo esperamos, las estudiantes del grupo I y II utilizaron la hoja cuadriculada como cuadrícula superpuesta en la ficha de aplicación, para realizar el conteo de cuadrados que corresponden al polígono.

El grupo I utilizó el cuadrado más pequeño que los polígonos dados para que sean medidos, de modo que utilizaron el procedimiento de comparación de áreas y recubrimiento de los mismos al graficarlos en la hoja cuadriculada; es decir, iteración.

En un primer momento, los grupos utilizaron la pizarra cuadriculada para dibujar algunas de las representaciones de los polígonos propuestos; sin embargo, no pudieron realizar la actividad porque en las fichas no contaban con cuadrícula, con lo cual, no podían saber a cuántos cuadrados le correspondían las figuras. Así, dejaron de usar esta herramienta para centrarse en el uso de la cuadrícula proporcionada por la hoja cuadriculada. A continuación presentamos un extracto de la conversación grabada en audio entre las participantes del grupo I.

A2: Ahora **la figura C**, la siguiente figura la vamos a dibujar como las demás y vamos a medir… contamos cuadraditos y completamos. A1: ahora vamos a contar los cuadraditos, 1, 2… 20. A2: 20 A1: 20 es todo completando la figura, ahora lo vamos a dividir entre 2 porque hemos completado la figura. A2: 20 entre 2 es **10**. La figura C, sí se puede medir.

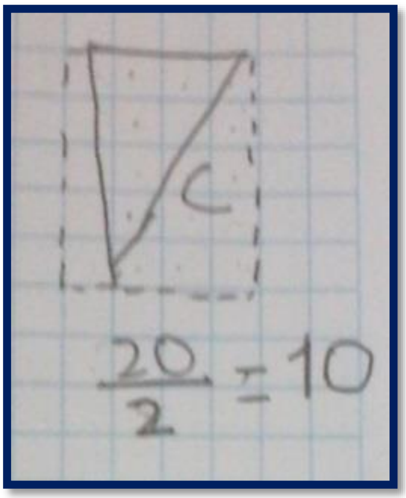


Figura 26. Medición del área del polígono C

Luego, las estudiantes midieron el área del polígono A. Para ello, utilizaremos el mismo procedimiento: completar el triángulo para hacer un rectángulo en la cuadrícula, seguidamente, contaron los cuadrados del interior del rectángulo y dividieron entre 2. Tal como se observa en el siguiente extracto de su conversación y en la figura 27.

A1: vamos a contar cuántos cuadraditos hay en la hoja cuadriculada: 1,2,… 15…aquí hay 15 cuadraditos pero como estamos completando con la mitad, estamos completando esta mitad, vamos a dividirlo entre 2; entonces, 15: 2 sale en decimales: **7,50**.
A2: Entonces la **figura A** sí se puede medir, se puede medir sobreponiendo la hoja para dibujarlo derecho y contando los cuadraditos.

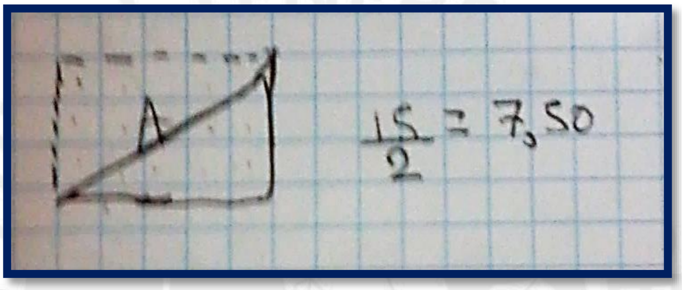


Figura 27. Medición del área del polígono A

Finalmente, midieron el área polígono D utilizando el mismo procedimiento de completar, en este caso un cuadrado, luego contaron 25 cuadrados del interior del nuevo polígono formado (cuadrado) para luego dividirlo entre 2. Tal como observamos a continuación:

A2: Ahora la figura D. ahora estamos dibujando la figura D para poderla medir. Ahora completamos
A1: Ahora contamos de nuevo los cuadrados. 1,2,3….25 cuadraditos toda la figura completa sobre 2, porque hemos completado la figura.
A2: ya, 25:2 es a…
A1: 12, 50. La figura D también se puede pero completando.
A2: Con decimales sale la respuesta.

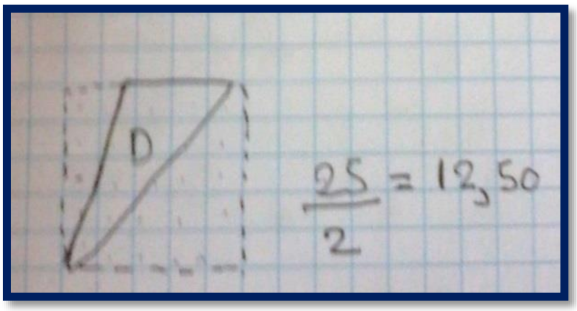


Figura 28. Medición del área del polígono D

En este caso, las estudiantes no dieron la respuesta correcta (7,5 unidades), pues si bien las alumnas lograron completar el cuadrado, no se dieron cuenta que el polígono que debían medir no era la mitad de un cuadrado; además, este polígono tiene fijado solo un lado en la cuadrícula. Esto equivale a decir que la fase de validación se dio de manera parcial, pues si bien utilizaron sus conocimientos reconociendo que un cuadrado está compuesto por dos triángulos (rectos), no tuvieron en cuenta que existe una región de uno de los triángulos que no corresponde al polígono D; por lo tanto, esto no les permite llegar a la respuesta correcta. Es decir, el conocimiento utilizado no fue adecuado, y el error en la respuesta no fue percibido por ellas.

En cuanto a la utilización del software, ninguno de los grupos lo consideró para desarrollar este ítem, pues al tener en cuenta que dos triángulos forman un cuadrado, no era necesario recurrir a otra herramienta. Por ello, el grupo I, recurre a completar el triángulo usando la cuadrícula y luego lo divide entre dos. Por su parte el grupo II, midió el polígono D intentando recubrirlo con el triángulo que les servía como unidad de medida, luego lo dejaron de lado al no hallar la respuesta.

Descripción y análisis a priori del ítem 1: sub ítem e

¿La unidad de medida que han utilizado les ayudó a asignar la medida al área de todos los polígonos observados? ¿Cómo la utilizaron?

Se espera que las estudiantes formulen sus reflexiones de modo que comuniquen a sus compañeras la importancia de la elección adecuada de la unidad de medida.

El propósito de este sub ítem es que las estudiantes puedan reconocer la importancia de la unidad arbitraria de medida, y la pertinencia de su elección para poder medir el área de los polígonos con los que están desarrollando la actividad.

Se espera que las estudiantes respondan que es sencillo utilizar la cuadrícula, pues les permite contar los cuadrados que sirven como unidad de medida. Otro de los procedimientos que se espera es que recubran el polígono (recorte de cartulina) con la unidad de medida asignada como el triángulo, rectángulo o cuadrado. En este sentido, las estudiantes comentarán si la unidad de medida que utilizaron fue pertinente o no para medir el área de los polígonos. En este caso, se espera que los conocimientos que constituirán un medio para las alumnas sean resultados de los aprendizajes desarrollados en los ítems anteriores.

Experimentación y análisis a posteriori

Tal como lo esperamos, el grupo I decidió utilizar la cuadrícula expresando que era más sencillo dibujar los polígonos en la hoja para luego contar los cuadrados que estaban en el interior de cada uno de los polígonos; de ese modo observamos que se utilizó la variable uso de herramientas como la cuadrícula.

Grupo I: A1: Mira A2, (lee las instrucciones) Ahora, una hoja cuadriculada vamos a sobreponer para poder dibujar bien la figura y después completar… dibuja A2.

Grupo II: B1: empezamos por esta (señalando la figura B), mejor la dibujamos en la hoja ¿ya? B2: yo lo dibujo. B1: ya, ahora cuenta cuántos (cuadrados) hay.

Se observó que las estudiantes discutieron acerca de la pertinencia del procedimiento seguido para medir el área de los polígonos. Por otro lado, el grupo II decidió utilizar la cuadrícula y luego el cuadrado más pequeño que le servía como unidad de medida. Así, la estudiante B1 dibujó las esquinas de cada unidad de medida y luego contó cuántos cuadrados de la cuadrícula y cuántos cuadrados pequeños estaban contenidos en el polígono, tal como habíamos previsto para este ítem.

El ítem 2 consta de un solo sub ítem, el cual detallamos a continuación.

Descripción y análisis a priori del ítem 2

Observen las medidas de las áreas que tienen los polígonos. ¿Qué creen que pasará si cambiamos la unidad de medida?

En este ítem las estudiantes comentan sus inferencias acerca de lo que pasará si cambian de la unidad de medida que recibieron al inicio de la sesión.

El objetivo de este ítem es reconocer la variable unidad de medida de área y la pertinencia de su elección. Aquí movilizan los saberes referentes a la unidad de medida.

Respecto a la medida del área de cada polígono, creemos que las estudiantes harán conjeturas respecto de que la medida del área de cada uno de los polígonos cambiará, pues suponemos que los aprendizajes previos están muy afianzados en ellas; es decir, durante el cuarto, quinto, e inclusive, sexto grado las alumnas han aprendido que el área es un número que se asignan a los polígonos a partir de las dimensiones de sus lados. Por lo observado en los libros correspondientes a esos grados (ver el anexo 2) no encontramos un acercamiento al objeto matemático área a partir de conteo de unidades para su medición.

Experimentación y análisis a posteriori

Tal como supusimos al realizar los procedimientos de conteo de unidades y luego, escribir la medida del área de cada uno de los polígonos, las estudiantes comentaron que los triángulos medían igual, además era más sencillo "completar los triángulos para formar un cuadrilátero" así podrían saber cuánto medía el área de cada triángulo y dividir entre dos. Tal como lo observamos en las figuras 26, 27 y 28.

En el grupo I, A2 dijo que "No, había perímetro exacto porque de ahí multiplicamos para que nos salga el área"; mientras que, en el grupo II, B2 expresó que "Sí, cambiará el área"

En este ítem las estudiantes interactúan con el profesor, pues se pretende prevalecer el uso de la variable unidad de medida. A continuación presentaremos el diálogo correspondiente al desarrollo de este ítem:

Profesor: Y si yo les cambiara la unidad de medida, en vez del cuadradito este, mejor midan con esto.

A1: Sí, lo medimos así de esta forma, dibujamos un triángulo, la misma medida, acá saldría uno y la mitad lo completamos con otra mitad para que salga un cuadrado.

Profesor: A ver, mide la figura L usando el triángulo. ¿Saldría igual? ¿Se podrá?

A1: Sí

Profesor: A ver, puedes rayar acá también (sobre la figura L) la alumna dibuja un triángulo.

A2: La mitad de un cuadrado más la mitad de un cuadrado sería 2, entre mitades sería 1…1,2,3,..será 5…1, 2, 2 y 1. Sería igual a 8 cuadrados, porque la mitad más otra mitad saldría un cuadrado

A1: En total, la figura L…tendría…(completa un cuadrado usando dos triángulos)

Profesor: Entonces ¿cuánto mide este cuadrado?

A1: Mide 8 de área, 8 cuadrados de área

Profesor: ¿Toda la figura L?

A1: No, en total mediría 119 cuadraditos. Toda la figura L tiene 8 cuadrados (de16 cuadraditos cada uno) y 16 + 16 + 16… sale 119 cuadraditos.

Por su parte, el grupo II también se da cuenta que si cambia la unidad de medida, las medidas asignadas anteriormente cambian. A continuación presentamos la interacción entre las alumnas, respecto al cambio de unidad de medida, a partir de la intervención del docente:

Profesor: (refiriéndose al trabajo de las estudiantes) Muy bien. ¿Y si usan este cuadrado más grande?
B1: ya profesor
B2: ¿cómo hacemos?
B1: ya sé, dibujamos el cuadrado que nos dio el profesor en la hoja (dibuja). Es un polígono de 16 unidades
B2: dibujamos el cuadrado (figura L) y 17 cuadraditos y…16, 17 x 16 es 119 cuadraditos
B1: pero el profesor nos dijo que usemos este cuadrado pequeño.
B2: ya, verdad…cómo hacemos
B1: dibújalos.
B2: ya está
B1: este polígono tiene 1, 2, 3…16 cuadrados. Toda esta fila hace un nuevo cuadrado, mira…tiene 16 cuadraditos. Entonces mide 16 cuadrados.

Observamos que hubo dos errores, el primero al dibujar el polígono L en la cuadrícula, a la que debió corresponderle 16 cuadrados en la fila y 16 en la columna, luego en la multiplicación de 17 x 16. La respuesta correcta en este ítem debió ser 256 cuadrados usando la cuadrícula, 16 cuadrados utilizando el cuadrado pequeño respecto de la superficie del polígono L, el cual servía como la unidad de medida.

Más adelante, nos dimos cuenta que la estudiante B1 fue la única que relacionó que las unidades de medida les permiten dar medidas diferentes para una misma área, además que esta no cambia. Por ejemplo, para medir la figura E la estudiante explica a su compañera el procedimiento que se debe seguir.

B2: ahora la E (dibujan) Este tiene 192 cuadraditos.
B1: Acá está la mitad de un cuadrado, necesitamos cambiar los cuadrados (señaló los triángulos de las esquinas de la figura) para poder sacarlo bien.
B2: Ya
B1: Y aquí lo completamos el triángulo con la otra mitad
B2: Con este cuadrado mide 16 cuadraditos, lo vamos a medir
(mide con una unidad cuadrada, va marcando en la hoja).

B1: Como ya lo medimos ahora solo falta contar. 12 cuadrados de 16, sería 12 x 16.
B2: 12 x 16 (hace la multiplicación…explica el proceso de multiplicación)
B1: el área contada, según nosotras sería 192
Profesor: ¿192…qué?
B1: ¡Cuadrados!
Profesor: ¿qué cuadrados?
B1: serían cuadrados…1 cuadrado por 16; 192 cuadrados chiquitos o 12 cuadrados grandes. Si fueran triángulos sería…como son la mitad de un cuadrado, podemos ver acá que si lo completamos, sería la misma mitad de este cuadradito. Esto significaría que el de acá lo tenemos que multiplicar por 2, como son la mitad, sería 24 triángulos.

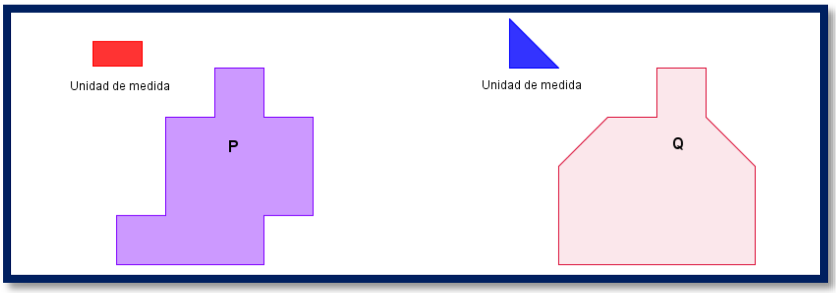
Es importante resaltar que las estudiantes van participando activamente a lo largo de toda la actividad; sin embargo, A1 y B1 son las que precisan con mayor precisión los conceptos movilizados. En ese sentido, es posible expresar que este ítem está muy relacionado con el ítem 2b, en el cual se pide a las estudiantes que conversen con las compañeras de grupo y respondan si las medidas de las áreas de los polígonos son las mismas o han variado y por qué.

Consideramos, entonces que las estudiantes B1 y A1 lograron comunicar a sus compañeras sus impresiones acerca de cómo la medida asignada en un primer momento, con una unidad de medida distinta, varía. Es decir, el número asignado cambia al igual que la unidad de medida; sin embargo, el área del polígono permanece invariante. Así se logra el objetivo de comunicar los procedimientos seguidos para calcular la medida de las áreas a partir de la movilización de los conceptos referidos a área, medida de área y unidades de medida.

El ítem 3 consta de dos sub ítems, los cuales serán descritos de forma global.

Descripción y análisis a priori del ítem 3

a) Escriban la medida del área de cada polígono representado en las siguientes figuras.



a) Medida del área:______ b) Medida del área:______

El objetivo es que las estudiantes sigan procedimientos para medir el área de los polígonos presentados a partir de la movilización de sus conocimientos respecto a la medida de área que se ha venido trabajando hasta el momento. En este ítem, las estudiantes escriben la medida del área de cada polígono mostrado en la ficha de aplicación. Aquí ya usan sus conocimientos acerca de la unidad de medida (rectángulo para el ejercicio a y triángulo para el ejercicio b). En este ítem se puede observar la incorporación de las variables: tipo de figuras (complejas), unidad de medida (rectángulo 2), herramienta (uso de cuadrícula y de malla triangular)

Es posible que algunas de las estudiantes recurran a trazar una cuadrícula sobre la figura del polígono propuesto en la ficha de aplicación. Además, esperamos que para la figura a, le asignen 20 unidades (rectángulos) y para la figura b, 25 unidades (triángulos). Si fuera una malla cuadriculada, la figura a tendría 10 unidades (cuadrados) y la figura b tendría 12,5 unidades (cuadrados).

Del mismo modo, se espera que las estudiantes cuenten las unidades de medida generadas por la cuadrícula presentada, es decir que para la figura a, le corresponde 20 unidades (triángulos) y para la figura b, 12 unidades (cuadrados).

Experimentación y análisis a posteriori

En el ítem 3, las estudiantes hicieron dos trazos verticales que les ayudarían a generar una cuadrícula a la vez que identificaron que la unidad de medida asignada es la mitad de un cuadrado; luego, contaron cuántos rectángulo (rectángulo 2) correspondían a cada parte separada por el trazo hecho. Tal como se observa en la figura 29.

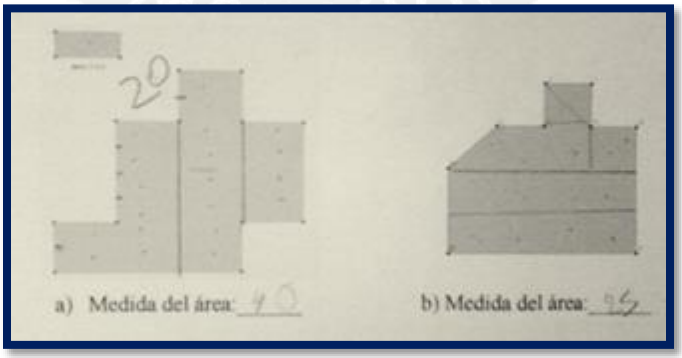
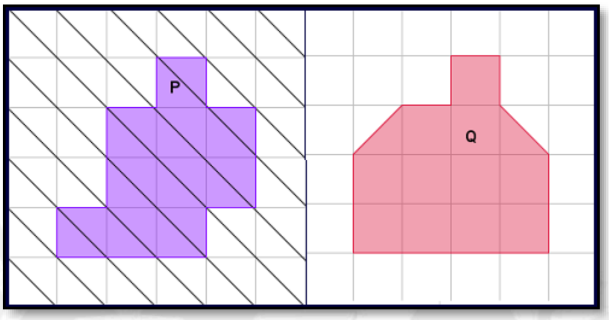


Figura 29. Medición del área

Como se observa, en el primer polígono, el grupo II ha dibujado las unidades de medida (rectángulo 2) y han contado, dando como resultado 20 rectángulos, a su vez han aplicado, sin trazar, la cuadrícula, teniendo como resultado, 10 cuadrados, pues, como mencionamos, han considerado que la unidad de medida dada (rectángulo 2) corresponde a la mitad de un cuadrado en relación a la cuadrícula utilizada a lo largo de la secuencia de actividades. Respecto al segundo polígono presentado, no han visto por conveniente usar la cuadrícula, pues solo han trazado líneas por donde calzarían las unidades de medida dadas (triángulo rectángulo), luego, en ambos casos, procedieron a contar las unidades. Así establecieron que el área del segundo polígono mide 25 triángulos.

Ahora bien, respecto al uso de cuadrículas, las alumnas reconocieron rápidamente que la medida del área de cada uno de los polígonos, depende de la forma de la malla.



a) Medida del área: 20 triángulos b) Medida del área: 12 cuadrados

Tanto el grupo I, como el II, argumentaron que el uso de la cuadrícula permite contar rápidamente las unidades, sin necesidad de descomponer el polígono. Además, B1 se dio cuenta que el primer polígono del primer cuadro de figuras es igual al primero del segundo cuadro: "es la misma figura que antes, solo ha cambiado la cuadrícula. Entonces, ahora podemos contar los triangulitos"

A continuación presentaremos la experimentación y análisis de la actividad N°2.

Descripción y análisis a priori de la secuencia de actividades N°2

Esta actividad tiene dos ítems, ambas tienen el propósito de dar cuenta de la validación de los conocimientos de las estudiantes a partir de la actividad N°1, la misma que se desarrolló una semana antes. Por otro lado, el ambiente en donde se desarrolla es distinto al de nuestro primer encuentro; en esta ocasión solo están las cuatro estudiantes participantes, el docente y la observadora investigadora. Tendrá una duración de 20 minutos.

Esperamos que las estudiantes reconozcan diversas unidades arbitrarias de medida útiles para los procedimientos de medida de área de polígonos en situaciones diversas. En esta actividad consideramos la variable unidad de medida, de modo que las estudiantes reconozcan la utilización de diferentes unidades de medida como el triángulo, rectángulo o cuadrado.

Por lo tanto, el desarrollo de esta actividad nos permitirá darnos cuenta si las estudiantes ponen en práctica la utilización de diversos procedimientos para dar cuenta que el área es una magnitud, la cual puede tener diferentes medidas de área las cuales corresponden a la unidad de medida elegida y a su vez se dan cuenta que el área de la superficie es la misma.

Los ítems de esta actividad presentada son los que se muestran a continuación:

De manera individual, lee y halla la solución a las siguientes situaciones. Luego socializa con tus compañeras acerca de las respuestas obtenidas:

Situación 1:

Marisol ha recibido una hoja de papel y ha indicado que la medida de su área es 16 unidades, luego vino Paola y la midió, determinando que su área mide 8 unidades. Ahora ambas discuten porque creen tener la razón ¿Qué creen que ha pasado? ¿Quién creen que tiene razón? ¿Cómo les explicarían lo sucedido?

Se espera que las estudiantes grafiquen la hoja de papel que ha recibido Marisol teniendo en cuenta las unidades de medida que tienen en su interior (16 unidades), luego se pretende que hagan otro gráfico indicando que está cubierto por unidades diferentes a la usada en el primer gráfico de modo que solo sean 8 unidades. Como ejemplo, podríamos considerar la resolución de la figura 30.

Figura 30. Posible solución para el problema 1

Del mismo modo, se espera que en la situación 2, las estudiantes grafiquen las hojas de papel amarillo y celeste de cada niña, para luego identificar qué unidades de medida utilizaron para medir su área. En ese sentido, las respuestas probables serían tal como se presenta en la figura 31.

Situación 2:

Camila y Yamilec han recibido una hoja bond de color amarilla y celeste, respectivamente. Su profesor les ha pedido que midan sus hojas y apunten las medidas que han hallado. Seguidamente, deberán intercambiarse las hojas y medir la que reciben.

Sayuri, una amiga de ambas, también pidió medir ambas hojas. Al terminar, cada niña dijo:

Camila: "la hoja amarilla mide 81 unidades y la hoja celeste, 36 unidades"

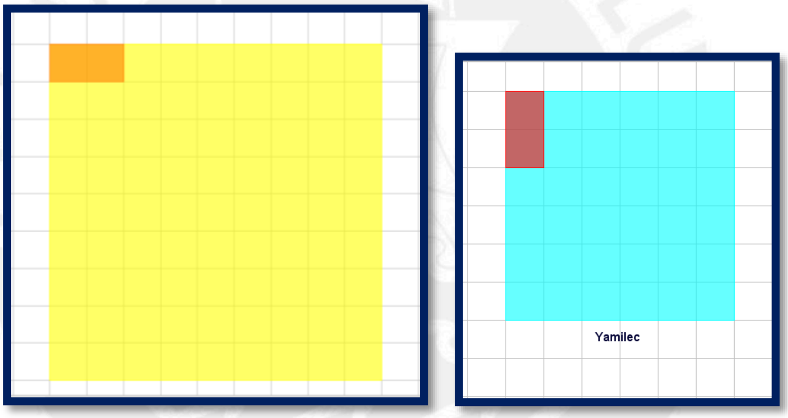
Yamilec: "la hoja amarilla mide 40,5 unidades y la hoja celeste 18"

Sayuri: "La hoja celeste mide 6 unidades y la amarilla mide 9 unidades".

¿Qué creen que ha pasado? ¿Será posible que las niñas se hayan equivocado?

Respuesta de Camila: Cuadrados que tiene la cuadrícula

Respuesta de Yamilec:



Respuesta de Sayuri:

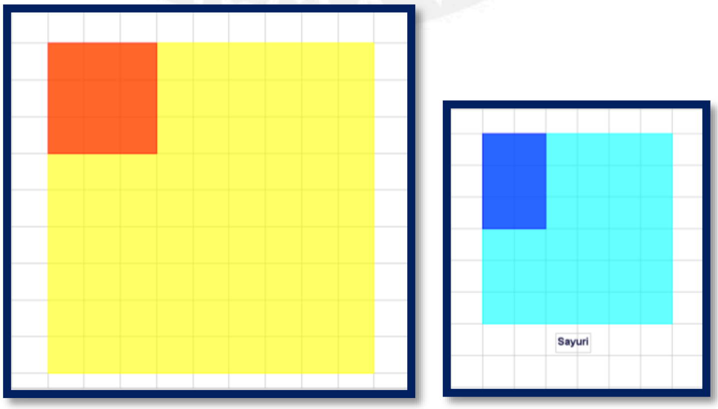


Figura 31. Posible solución para el problema 2

Experimentación y análisis a posteriori de la actividad

Al inicar la actividad, el docente dio 10 minutos para que las estudiantes lean las situaciones planteadas, de manera individual. Se les dio 20 minutos efectivos para desarrollarlas, para luego proceder a compartir en 10 minutos, con sus compañeras de aula sus respuestas.

Las alumnas leyeron las situaciones planteadas y empezaron a graficar a manera de ensayo cómo serían las hojas de papel entregada a Marisol y que luego midió Paola. Lo primero que hicieron tres de las estudiantes fue dibujar dos rectángulos: uno de 16 cuadrados y otro de 8. La estudiante A1 dibujó dos cuadrados de 16 cuadrados de la cuadrícula, pues consideró que las dos medidas dadas pertenecen a una misma hoja. La estudiante B1, en cambio dibujó dos rectángulos de 8 cuadrados. Tanto A2 como B2 dibujaron hojas con distintas medidas

Al terminar de graficar se les preguntó a las estudiantes ¿qué creen que ha pasado? A1 y B1contestaron que las medidas dadas fueron diferentes porque cada una midió con lo que tenía. De modo que para A1, Marisol midió con cuadrados de su cuadrícula y Paola con rectángulos que tenían el doble de tamaño del cuadrado. Para B1, Marisol midió con triángulos (triángulos rectos) y Paola con cuadrados de la cuadrícula.

Respecto a la situación 2, esta les pareció más difícil dado que las medidas eran con decimales y el tiempo no les alcanzaba. Solo A1 dijo que esta situación era igual a la anterior, por lo tanto Camila, Yamilec, Sayuri medían con rectángulos, cuadrados y triángulos.

4.4.Análisis global de la situación didáctica

A partir de los resultados obtenidos de la experimentación de la secuencia didáctica, presentamos el siguiente análisis:

- La secuencia de actividades tuvo como propósito que las estudiantes del sexto grado de primaria utilicen diferentes unidades arbitrarias de medida para los procedimientos de medida de área de polígonos; así como la aplicación de estrategias de conteo de unidades por iteración, utilización de la cuadrícula así como descomposición y composición de polígonos que permita la construcción del concepto de área como magnitud.
- La actividad N°1 se dividió en tres ítems, y cada uno de ellos en sub ítems que le permitieron a las estudiantes involucrarse con el medio a partir de la situación a-didáctica. Por ejemplo, en un primer momento se les solicitó que expresen cómo podían medir el área de diversos polígonos si estos no presentaban datos, como por

ejemplo, las medidas de sus lados; además, sin darle indicaciones de cómo usar diversas unidades de medida.

- La actividad N° 2 tuvo como propósito corroborar el aprendizaje obtenido por las estudiantes en la primera secuencia de actividades, a partir del planteamiento de dos situaciones en las que debían utilizar como herramientas de medición de áreas: la cuadrícula, las unidades de medida arbitrarias como un cuadrado, un rectángulo o un triángulo de superficies más pequeñas que los polígonos a medir con la finalidad de seguir procedimientos de medición, comparación o iteración, además había la posibilidad de utilizar el software GeoGebra para el desarrollo de las actividades que las estudiantes requieran.
- Una vez desarrollada la secuencia didáctica, consideramos que el objetivo general de nuestra investigación, el cual se enfoca a analizar los efectos de una secuencia didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas, que contribuya a que los niños del sexto grado de primaria construyan el concepto de área como magnitud, de modo que puedan medir el área de polígonos utilizando diversas unidades de medida, herramientas como la cuadrícula, además de procedimientos de conteo de unidades, descomposición y composición, se cumplió de forma parcial, pues no todas las estudiantes participantes pudieron utilizar sus aprendizajes en la segunda secuencia de actividades, con respecto a la utilización de diversas unidades de medida y procedimientos de descomposición y composición de polígonos. Esto nos permite evidenciar la necesidad de seguir desarrollando actividades que generen el uso de unidades de medida de áreas diferentes, utilizando polígonos simples y complejos antes de llegar a la enseñanza de fórmulas establecidas.
- Concluimos que las formas de trabajo en parejas y luego individual, nos permitió analizar el desenvolvimiento de las estudiantes al transitar por las fases propias de la Teoría de Situaciones Didácticas. Pudimos observar que las discusiones en pareja motivó a las alumnas a explicar a las compañeras del otro grupo los procedimientos seguidos, saliendo a la pizarra de manera voluntaria y sin indicación del profesor. A esto se añade que el trabajar sin la intervención constante del docente, como están acostumbradas en el nivel de educación primaria, causó cierta inquietud tanto al docente como a las estudiantes.
- A partir de esta investigación notamos que se pueden hacer ciertas modificaciones a la secuencia didáctica y luego analizar si estos contribuyen a un mejor desenvolvimiento

en el desarrollo de las actividades planteadas. Por ejemplo, sería propicio desarrollar más actividades utilizando el software GeoGebra, además de incluir ítems que requieran de su uso, de modo que la actividad sea más dinámica. Respecto al uso del software, observamos que las estudiantes necesitan mayor ejercicio en las destrezas para el uso de las herramientas que ofrece. Podríamos considerar incluir actividades específicas en las que el software surja como una necesidad que les permita descomponer y componer polígonos.

- A modo de reflexión, consideramos que los conceptos de área como magnitud y su medida, deberían ser trabajados desde los primeros grados de educación primaria, de modo que los estudiantes puedan desarrollar diversos procedimientos que les permita reconocer términos como área, superficie y unidades de medida. Así, el estudiante podría empezar a construir la noción de área recubriendo diversas superficies con superficies más finas y de diversas características, de modo que surja en él la necesidad de unificar dichas superficies para que inicie el conteo, con ello estaría construyendo el concepto de unidades de medida, luego conforme va avanzando en la adquisición de estas destrezas irá comprendiendo la diferencia entre área, superficie y cómo medir el área.
- Es necesario trabajar en el enfoque de comparación y medición con los alumnos de la Educación Básica Regular, pues los textos revisados y las respuestas obtenidas de la situación propuesta, evidencian una falta de comprensión de este enfoque.

CONCLUSIONES

Una vez realizada la secuencia didáctica y habiendo recogido la información de cada una de las actividades que nos permitió su análisis, hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- Confrontados los análisis a priori y a posteriori de las actividades planteadas, afirmamos que se validó que los procedimientos de conteo de unidades, descomposición y composición, así como el uso de herramientas como la cuadrícula permiten a los estudiantes medir el área de polígonos diversos, considerando que el área como magnitud se mantiene independientemente de la unidad de medida elegida, de modo que dos polígonos pueden tener la misma área aun cuando tengan medidas diferentes respecto a las unidades de medida elegidas para su proceso de medición.
- El uso de la cuadrícula contribuyó eficazmente al conteo de unidades que cubren la superficie de polígonos y fue el más utilizado por las estudiantes.
- La secuencia didáctica contribuyó a que las estudiantes transiten por las fases de acción, formulación y validación de forma integral, de modo que fue pertinente para contribuir en el aprendizaje de las estudiantes respecto a la construcción del concepto área como magnitud.

CONSIDERACIONES FINALES

- Los conceptos de área como magnitud y su medida, deberían ser trabajados desde los primeros grados de educación primaria, de modo que los estudiantes puedan desarrollar diversos procedimientos que les permita reconocer términos como área, superficie y unidades de medida. Por ejemplo, como sugiere Freundenthal (1983), el estudiante debe empezar a construir la noción de área recubriendo diversas superficies con superficies más finas y de diversas características, de modo que surja en él la necesidad de unificar dichas superficies para que inicie el conteo, con ello estaría construyendo el concepto de unidades de medida, luego conforme va avanzando en la adquisición de estas destrezas irá comprendiendo la diferencia entre área, superficie y cómo medir el área. En ese sentido, posterior a nuestra investigación, se podría adaptar las secuencias didácticas a los primeros grados de primaria, tratando de proporcionar herramientas que vayan de acorde a la edad de los estudiantes.
- Como trabajos pendientes tenemos una mayor implementación para el uso del software GeoGebra, de modo que las estudiantes puedan manejar mejor las herramientas que este ofrece, así se podría optimizar el tiempo de ejecución de las actividades, lo que nos permitiría desarrollar otras situaciones que afiancen el concepto de área como magnitud. Así el estudiante podrá construir polígonos, medir su área, sus lados, recubrirlo con otras superficies más finas.
- Retomar las secuencias didácticas propuestas, considerando otras variables didácticas como posición del polígono en la cuadrícula, unidades de medida que requieran ser descompuestas y regiones sombreadas en polígonos; con la finalidad de avanzar en la construcción de la situación didáctica fundamental.
- Establecer niveles de comprensión del concepto área como magnitud a lo largo de toda la educación primaria; y, a continuación, elaborar situaciones didácticas para los diferentes grados, con la finalidad de que tenga una comprensión completa del concepto.

REFERENCIAS

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed). (1995). Ingeniería Didáctica en educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica. Recuperado de: http://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf

Balacheff, N. (2004). Marco, registro y concepción. *Revista EMA*. 9(3), pp. 181-204. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1498/1/116_Balacheff2005CUADRO_RevEMA.pdf

Baltar, P. (1996). Á propos de l'apprentissage du concept d'aire. *Petit X* 43, 43-68. Recuperado de http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/43/43x6.pdf

Baltar, P. (1999). Une etude de situactions et d'invariantes: outil pour l'analyse de la constrution du concept d'aire au college. *Petit x*. 49, 45-78. Recuperado de: http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/49/49x5.pdf

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7 (2): 33-115. [Traducción de Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo].

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? *Enseñanza de las Ciencias. 8*(3), 259 -267. (Versión castellana de Luis Puig). Recuperado de: http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/51335/93083

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal. (Traducción de Dilma Fregona). Recuperado de: http://es.slideshare.net/diegoizqui/teora-de-las-situaciones-didcticas

Chamorro, M., Belmonte, J., Llinares, S. (2010). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria.* Madrid: Pearson Educación

Corberán, R. (1996). Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes de primaria a la universidad. (Tesis doctoral, Universidad de Valencia). Recuperado de: http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Corberan96.pdf

Del Olmo, M.; Moreno, M. y Gil, F. (1993). *Superficie y volumen: ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.

Douady, R. y Perrin-Glorian, M.J. (1983). Mesures des longueurs et des aires. *Cahier de didactique des mathematiques.48*. IREM Université Paris 7. Recuperado de: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97022.pdf

Douady, R. y Perrin-Glorian, M.J. (1987).Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Cahier de didactique des mathematiques.37*. IREM Université Paris 7. Recuperado de: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/les_cahiers_de_didactique/

Facco, S. (2003). *Concepto de área. Una propuesta de enseñanza aprendizaje.* (Tesis de Maestría en Educación Matemática: Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo). Recuperado de: http://www.pucsp.br/pensamentomatematico/dissertacao_sonia_facco.pdf

Fregona, D. y Orús, P. (2011).La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática. *Serie Formación Docente: Matemática*. Editorial Libros del Zorzal. Recuperado de: http://dgenam.sepdf.gob.mx:8080/archivos/DFI/reforma/2_Adecuacion/Materiales/14_La%20nocion.doc.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Recuperado de: http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/Freudenthal_Didactical_Phenomenology_of_Mathematical_Structures1983.pdf

Godino, J., Batanero, C. y Roa, R. (2002). Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. Granada: Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Gonzáles, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción. En un texto universitario.*(Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú)

González, J. (2011). *La enseñanza de la medición de áreas. Un largo y complejo proceso.* (Tesis de Maestría, Universidad Nacional del Nordeste)

Iranzo, N. y Fortuny, J. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*. 27(3), 433-446. Recuperado de: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/142075/332857

Latorre, A., Arnal, J. y Del Rincón, D. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Barcelona: Gràfiques 92

Pérez, G. (1998). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. Vol. II. Madrid: Editorial La Muralla.

Perrin-Glorian, M.J. (2009). Utilidad de la teoría de las situaciones didácticas para incluir los fenómenos vinculados a la enseñanza de las matemáticas en las clases normales. *Revista Internacional Magisterio Educación y Pedagogía*, *7* (39), 10-16

Perú, Ministerio de Educación del Perú (2009). *Diseño Curricular Nacional*. Lima. Recuperado de: http://ebr.minedu.gob.pe/pdfs/dcn2009final.pdf

Perú, Ministerio de Educación del Perú (2011a). *Matemática 4*. Lima: Asociación editorial Bruño.

Perú, Ministerio de Educación del Perú (2011b). *Matemática 5*. Lima: Asociación editorial Bruño.

Perú, Ministerio de Educación del Perú (2013). *Mapa de progreso de Geometría*. Lima. Recuperado de:http://www.minedu.gob.pe/minedu/archivos/a/002/03-bibliografia-para-ebr/49-mapasprogreso_matematica_geometria.pdf

Ruiz, J. (2012). *Metodología de la investigación cualitativa*. 5ta edición. Bilbao: Universidad de Deusto. Recuperado de: https://books.google.com.pe/books?id=WdaAt6ogAykC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

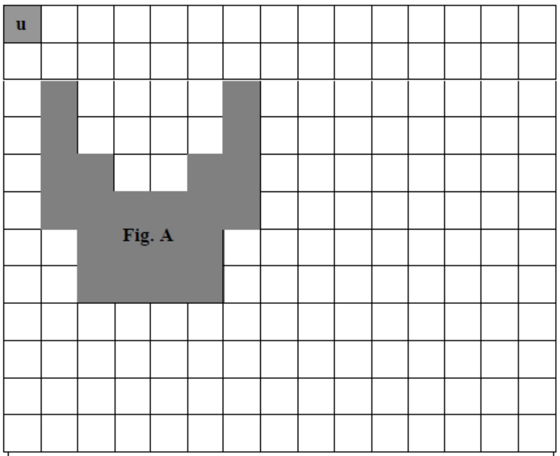
Silva, G. (2010). *Un estudio diagnóstico sobre el cálculo de áreas de figuras planas en una malla cuadriculada. Influencia de algunas variables.* (Tesis de maestría: Universidad Federal de Pernambuco, Recife)

ANEXOS

Anexo 1: Actividades propuestas por Silva (2010)

Em cada item a seguir calcule a área da figura na malha quadriculada considerando o quadradinho **u** como unidade de medida de área.

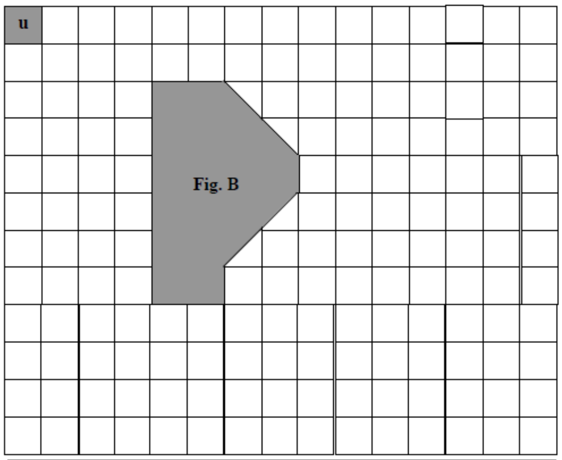
1°. ITEM



Resposta: ______________________

Justifique sua resposta.

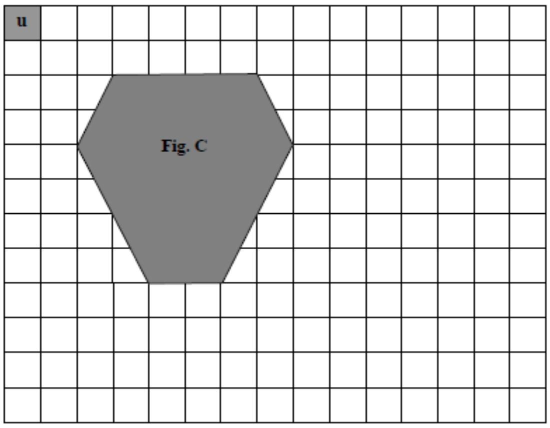
2°. ITEM



Resposta: ______________________

Justifique sua resposta.

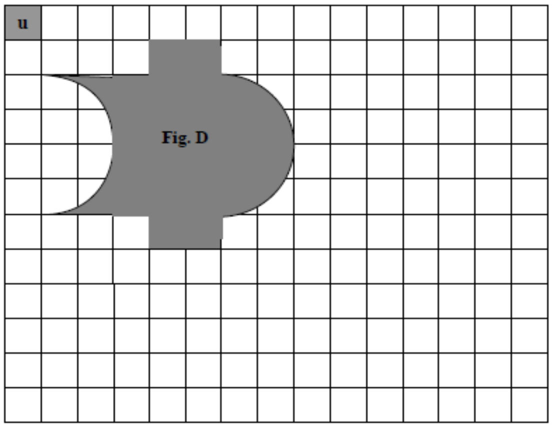
3°. ITEM



Resposta: ______________________

Justifique sua resposta.

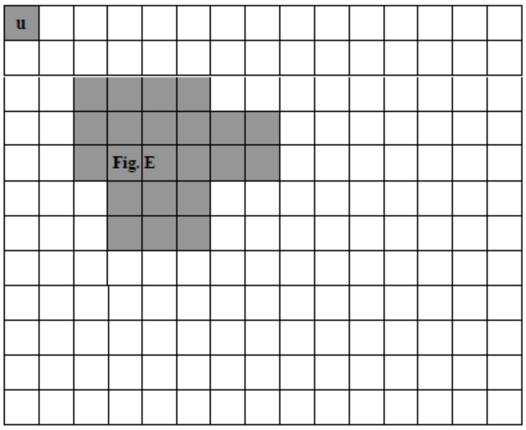
4°. ITEM



Resposta: ______________________

Justifique sua resposta.

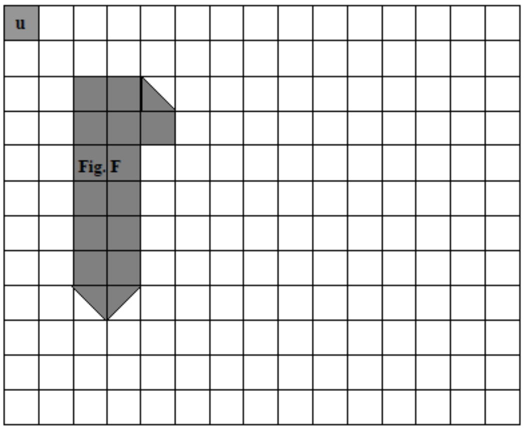
5°. ITEM



Resposta: ______________________

Justifique sua resposta.

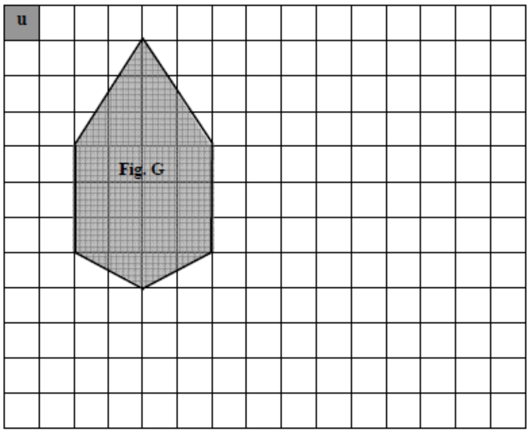
6°. ITEM



Resposta: ______________________

Justifique sua resposta.

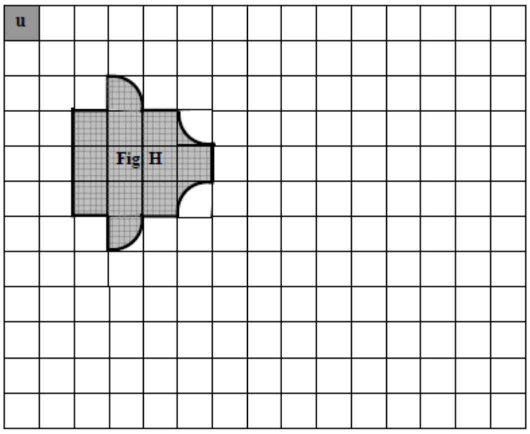
7°. ITEM



Resposta: ______________________

Justifique sua resposta.

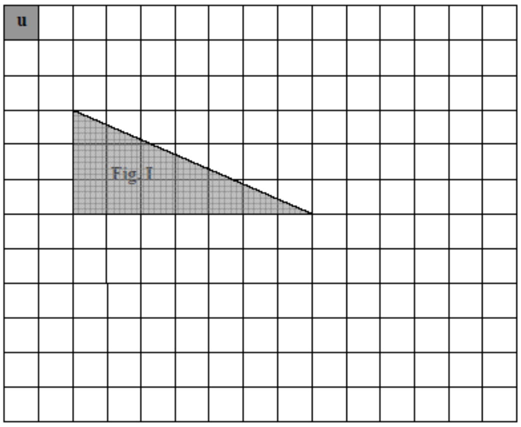
8°. ITEM



Resposta: ______________________

Justifique sua resposta.

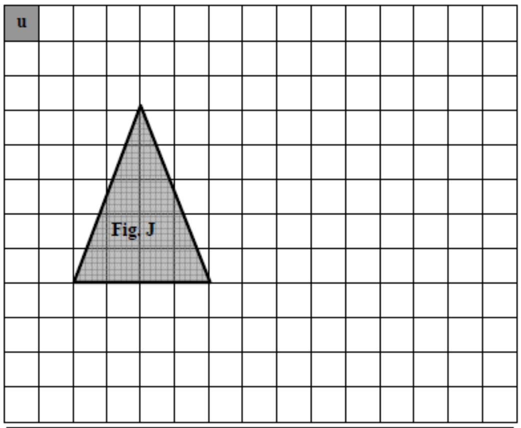
9°. ITEM



Resposta: ____________________

Justifique sua resposta.

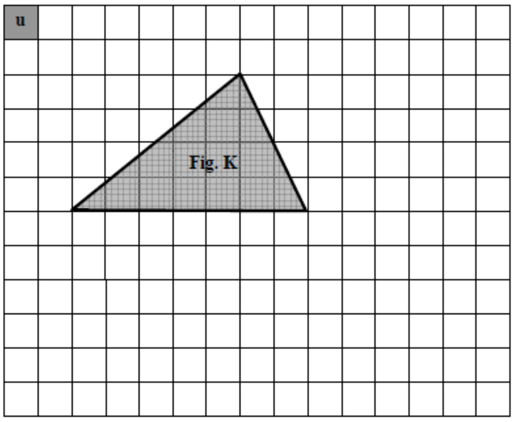
10°. ITEM



Resposta: ____________________

Justifique sua resposta.

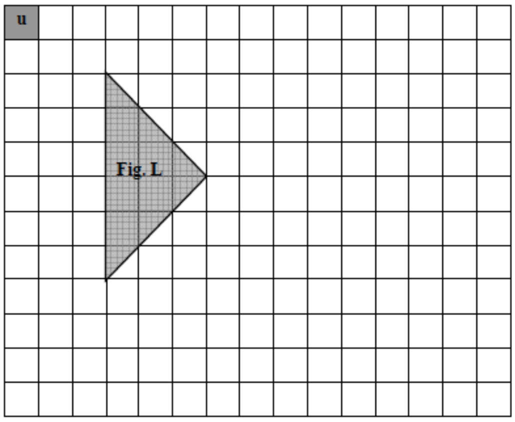
11°. ITEM



Resposta: ____________________

Justifique sua resposta.

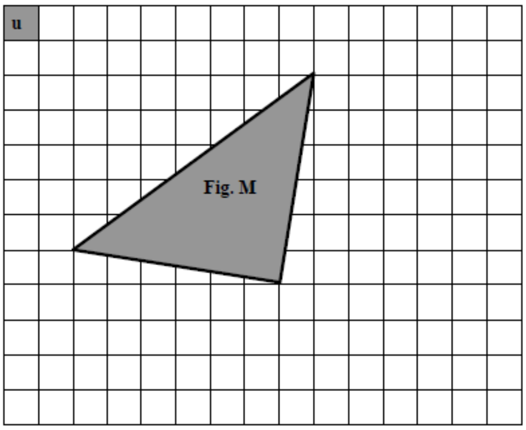
12°. ITEM



Resposta: ____________________

Justifique sua resposta.

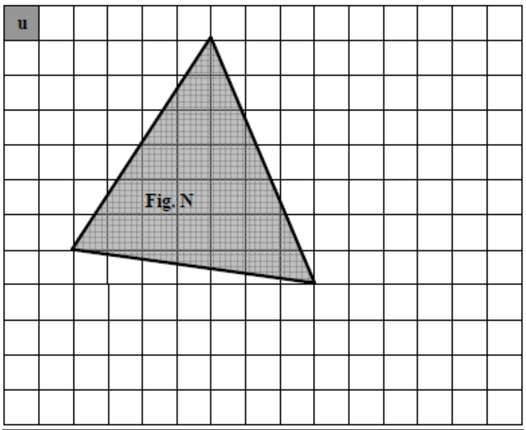
13°. ITEM



Resposta: ______________________

Justifique sua resposta.

14°. ITEM



Resposta: ______________________

Justifique sua resposta.

Anexo 2:

Comparación de capacidades según documentos normativos

Grado	Mapas de Progreso	Diseño Curricular Nacional	Contenidos
1°	Interpreta e identifica la longitud, superficie y capacidad como atributos medibles diferentes. Mide, compara y estima longitudes, superficies y capacidades de objetos seleccionando el instrumento y la unidad arbitraria pertinente al atributo, explicando sus resultados.	Establece relaciones entre objetos de su entorno y formas geométricas.	*Formas geométricas básicas
2°		*Representa gráficamente y compara figuras geométricas planas, a partir de sus elementos. *Identifica, diferencia y relaciona las figuras planas que puede conformar. *Mide objetos y superficies, haciendo uso de diferentes unidades de medida. *Resuelve problemas que involucran medida y comparación de longitudes y superficies.	*Composición de figuras geométricas. *Área en unidades arbitrarias
3°	Mide, compara y estima y estima la longitud, perímetro, superficie y capacidad de objetos, seleccionando el instrumento y la unidad arbitraria pertinente al atributo que se quiere medir, explicando sus resultados.	*Mide superficies y perímetros, comparando los resultados haciendo uso de diferentes unidades de medida.	*Áreas de figuras geométricas en unidades arbitrarias.
4°	Mide, compara y estima y estima la longitud, perímetro, superficie y capacidad de objetos, seleccionando el instrumento y la unidad arbitraria pertinente al atributo que se quiere medir, explicando sus resultados.	*Resuelve problemas que impliquen cálculo de áreas de rectángulos, cuadrados y figuras compuestas.	*Polígonos: lados y ángulos. *Superficie de figuras geométricas: cuadrado, rectángulo, triángulo. *Área y perímetro de polígonos.
5°	Interpreta y explica la relación entre perímetro y área de formas bidimensionales y entre áreas de cuadriláteros y triángulos. Compara, calcula y estima la medida de ángulos, perímetros y superficies, seleccionando el instrumento y la unidad de medida convencional pertinentes y explica los procedimientos empleados.	*Interpreta y mide superficie de polígonos. * Resuelve áreas y perímetros de figuras geométricas.	*Superficie de polígonos: trapecio, pentágono y hexágono. *Superficie de figuras geométricas: cuadrado, rectángulo y triángulo. *Área y perímetro de un polígono.
6°		*Interpreta y mide la superficie de polígonos. *Resuelve problemas sobre polígonos.	*Área de polígonos regulares simples y compuestos.

Anexo3: Secuencia Didáctica - Actividad 1

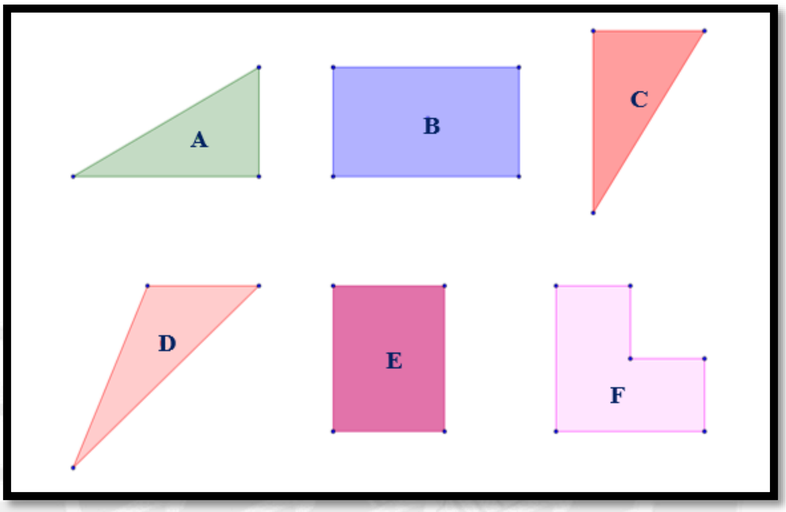
Nombre de las participantes:

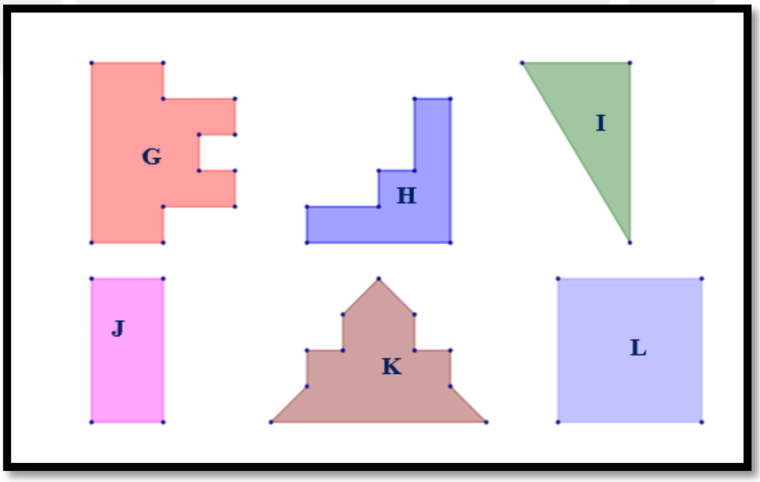
____

____

Recibirán recortes de cartulina, tales como se muestran en las imágenes. Luego, en grupo, escriban cómo podrían medirlas.

Después de conversar con tus compañeras de grupo, midan y escriban la medida del área que han asignado a cada uno de los recortes de cartulina que han recibido.





a) Podríamos medirlas de las siguientes formas:

____

____

b) ¿Con qué otro nombre conoces a los recortes recibidos? _________________________

c) ¿Todos los polígonos tienen la misma medida de área? ¿Por qué lo creen así?

____

____

____

____

d) Describan cómo midieron el área de los polígonos A, C y D.

____

____

____

____

e) ¿La unidad de medida que han utilizado les ayudó a asignar la medida al área de todos los polígonos observados? ¿Cómo la utilizaron?

____

____

____

____

2. Observen las medidas de las áreas que tienen los polígonos. ¿Qué creen que pasará si cambiamos la unidad de medida?

____

____

____

____

Luego de haber realizado la experiencia, conversen con los compañeros de grupo y respondan: ¿Las medidas de las áreas de los polígonos son las mismas o han variado? ¿Qué creen que ha pasado? ¿Por qué?

____

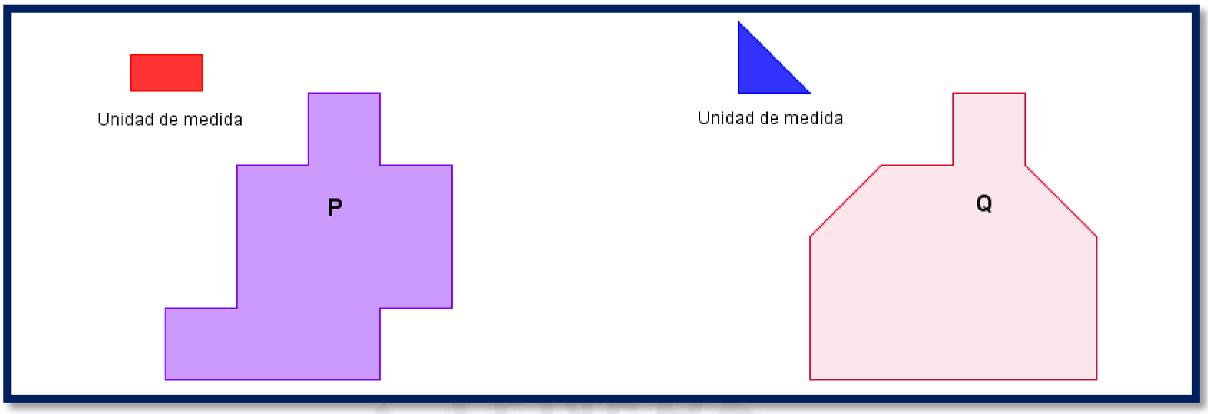
____

____

____

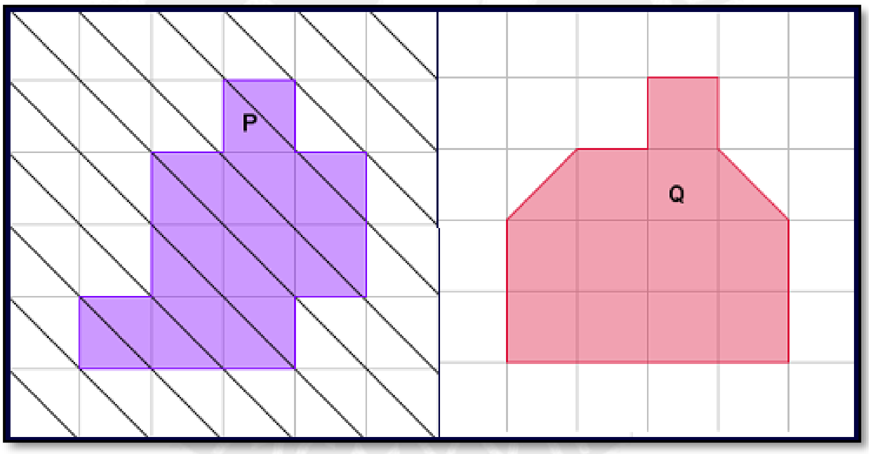
3. Ahora, observen los siguientes polígonos

a) Escriban la medida del área de cada polígono representado en las siguientes figuras.



Medida del área:______ b) Medida del área:______

b) ¿Cuál sería la medida del área de cada uno de los polígonos si utilizamos diferentes mallas?

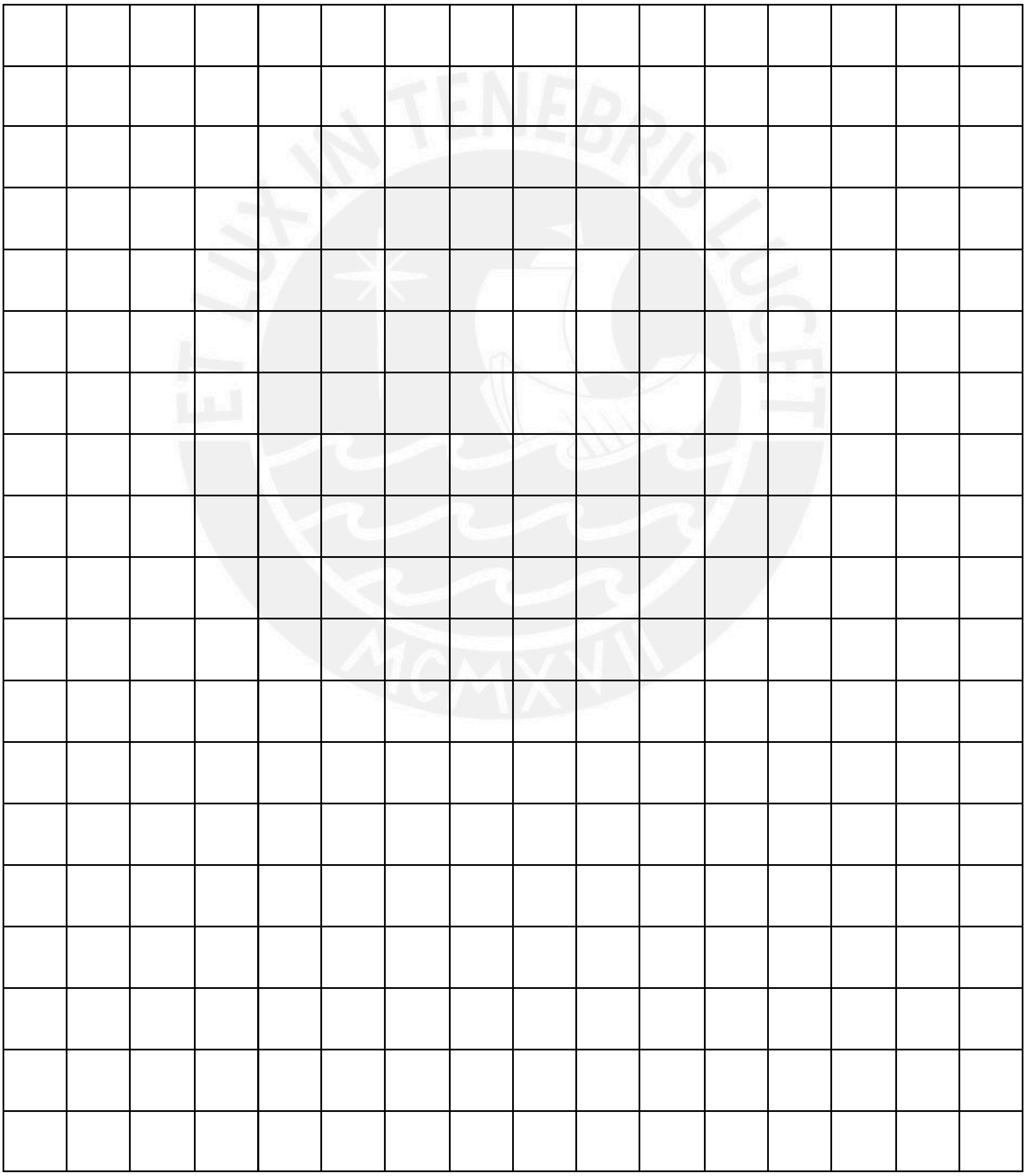


a) Medida del área:______ b) Medida del área:_____

Anexo 4: Actividad N°2

Situación 1

Marisol ha recibido una hoja de papel y ha indicado que la medida de su área es 16 unidades, luego vino Paola y la midió, determinando que su área medía 8 unidades. Ahora ambas discuten porque creen tener la razón ¿Qué creen que ha pasado? ¿Quién creen que tiene razón? ¿Cómo les explicarían lo sucedido?



Situación 2

Camila y Yamilec han recibido una hoja bond de color amarilla y celeste, respectivamente. Su profesor les ha pedido que midan sus hojas y apunten las medidas que han hallado. Seguidamente, deberán intercambiarse las hojas y medir la que reciben.

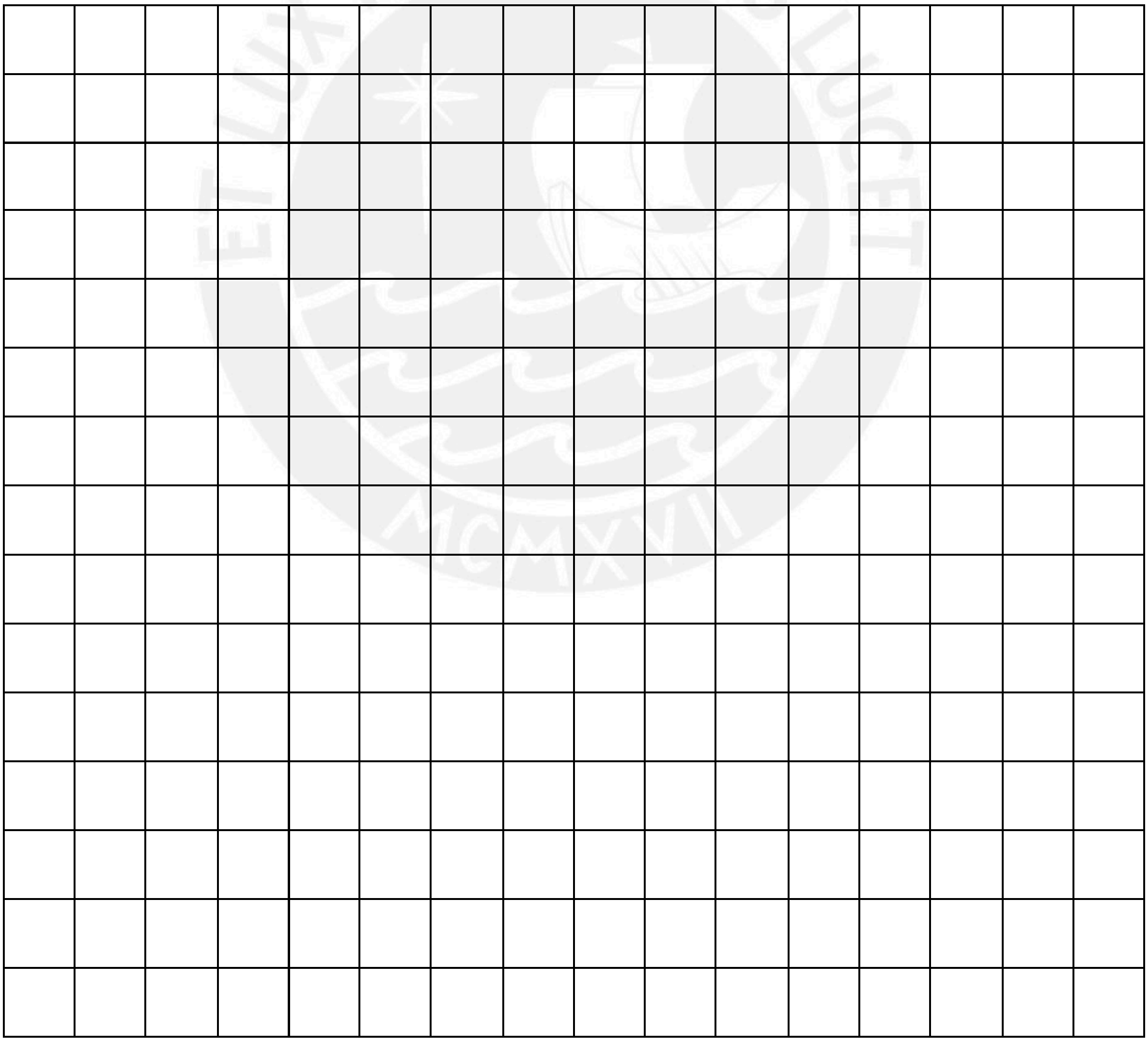
Sayuri, una amiga de ambas, también pidió medir ambas hojas. Al terminar, cada niña dijo:

Camila: “la hoja amarilla mide 81 unidades y la hoja celeste, 36 unidades”

Yamilec: “la hoja amarilla mide 40,5 unidades y la hoja celeste 18”

Sayuri: “La hoja celeste mide 6 unidades y la amarilla mide 9 unidades”.

¿Qué creen que ha pasado? ¿Será posible que las niñas se hayan equivocado?



Anexo 5: Transcripción

Transcripción 1: Grupo A (A1 y A2)

Profesor: (el profesor da las indicaciones para el uso del material)…Se trabaja solamente las indicaciones, no hacemos otra cosa hasta que el profesor o la profesora indique lo contrario, ¿de acuerdo?

Alumnas: ¡Sí!

Profesor: ¿Estamos de acuerdo hasta ahí?

Alumnas: Sí, profesor.

Profesor: A cada pareja o de tres en tres o de cuatro en cuatro, de acuerdo a la cantidad de material con el que disponemos, se les va a entregar una figura, puede ser… (muestra un rectángulo de cartulina) ¿un qué?

Alumnas: (varias respuestas) un cuadrado, un rectángulo

Profesor:¿un qué?

Alumnas: un rectángulo

Profesor: ¿un rectángulo? (ahora muestra otra figura (polígono k) ¿y esto qué es?

Alumnas: un castillo

Profesor: ¿un castillo? jajajaja

Alumnas: una iglesia

Profesor: Díganme, a ver, estamos en matemática, geometría

Alumnas: un cuadrilátero, polígono

Profesor:¿Ya, frente a qué estamos?

Alumnas: polígonos

Profesor: polígono. ¿por qué es un polígono?

Alumnas en coro: ¡porque tiene lados!

Alumna: parece la casa de Barbie

Profesor: entonces, cuando les señalo… y aquí tengo figura ¿Qué cosa es?

Alumnas: polígono

(Profesor muestra las figuras H e I, mientras las alumnas indican que son polígonos)

Profesor: Ya muy bien, entonces acá, a cada grupo se les va a entregar un modelo de estos polígonos y una unidad, otra figura más pequeña, que puede ser esta, por ejemplo (muestra un cuadrado pequeño) ¿Qué es?

Alumnas: un cuadradito

Profesor: ya, pero ¿en matemática podremos hablar "cuadradito"?

Alumnas: no, cuadrilátero

Profesor: un cuadrilátero pequeño que va a servirnos para… ¿para qué?

(Las alumnas infieren): para contar, para las figuras, para completar una figura

Profesor: muy bien, entonces vamos a hallar el área con esta medida, ¿de acuerdo? Tú te las ingenias, en grupo conversan, dialogan, y tratan de hacer la demostración. Luego, pasamos al trabajo con las máquinas, previamente trabajamos con este trabajo, hacemos este trabajo (muestra los recortes de cartulina) ¿de acuerdo?

Alumnas: sí

Profesor: muy bien, entonces debe haber de su parte… a ver… entre las tres o cuatro niñas, compartan el material, manipulen, digan a ver qué se puede hacer, susurren, y cunado la profesora les entreviste deben elevar el tono de voz… (da pautas para la grabación de sus voces)

(Explican sus procedimientos)

A2 y A1

A1: (mide el **polígono E)** Para medir el cuadrado lo hemos marcado y estamos contando los cuadrados para encontrar el área. Yo he encontrado acá 17 y en total todos es 16 y lo hemos multiplicado 17 x 16 y me sale 119

Profesora: y según la ficha ¿a qué corresponde esa figura?

A1: corresponde a la figura E… ahora vamos a completar la **figura L**

Profesora: ¿y tú qué figura has encontrado?

A2: Yo el rectángulo, he dibujado el rectángulo y he contado los cuadraditos y me salió todo esto, 25-. Yo lo multipliqué 25 x 13 y me salió 325 el área.

Profesora: ¿325 qué?

A2: El área

Profesor: ¿325 qué?

A2: cuadrados

Profesor ¿cuadrados?, ¿qué cuadrados?

A1: Del cuaderno cuadriculado porque de la hoja estamos haciendo con los cuadrado para contar el área

Profesor: Y si yo les cambiara la unidad de medida, en vez del cuadradito este, mejor midan con esto.

Sí, lo medimos así de esta forma, dibujamos un triángulo, la misma medida, acá saldría uno y la mitad lo completamos con otra mitad para que salga un cuadrado.

Profesor: Mide la figura L usando el triángulo

¿Saldría igual?

¿Se podrá?

A1: Sí

Profesor: A ver, puedes rayar acá también (en la figura) la alumna dibuja un triángulo

La mitad de un cuadrado más la mitad de un cuadrado más la mitad de un cuadrado sería 2, entre mitades sería 1…1,2,3,..será 5…1, 2, 2 y 1. Sería igual a 8 cuadrados, porque la mitad más otra mitad saldría un cuadrado

A1: En total, la figura L…tendría…

(la alumna completa un cuadrado (Dos triángulos)

Profesor: Entonces ¿cuánto mide este cuadrado?

A1: Mide 8 de área, 8 cuadrados de área

Profesor: ¿Toda la figura L?

A1: No, en total mediría 119 cuadraditos.

A1.Toda **la figura L** tiene 8 cuadrados (de16 cuadraditos cada uno) y 16 + 16 + 16… sale 119

La alumna cuenta los cuadrados que formó y los cuadraditos de la hoja cuadriculada.

A1: Mira A2, (lee las instrucciones)

Ahora vamos a …con una hoja bond, una hoja cuadriculada vamos a sobreponer para poder dibujar bien la figura y después completar… dibuja A2

A2: esta corresponde a la figura E

Ya está

Ahora vamos a completar la figura con unas rayitas…completamos

Vamos a completar la figura para poder encontrar el área, entonces vamos a contar los cuadraditos…vamos a hallar con la cuadricula de los cuadraditos…

A1: Es muy grande, no se puede (mirando las cartulinas)

A2: Entonces vamos a contar cuántos cuadraditos hay en la hoja cuadriculada: 1,2, … 15…aquí hay 15 cuadraditos pero como estamos completando con la mitad, estamos completando esta mitad, vamos a dividirlo entre 2; entonces, 15: 2 sale en decimales: **7,50**. Entonces la **figura A** sí se puede medir, se puede medir sobreponiendo la hoja para dibujarlo derecho y contando los cuadraditos

A1: la figura A sí se puede medir.

A2: Ahora, vemos la **figura B**

A1: igual como la figura A

A2: vamos a sobreponer la hoja para poder dibujar la figura (dibujan)

A1: ahora vamos a contar cuántos cuadraditos hay para hallar el área: 1,2,…**15**. Igual que la figura anterior, en cambio la figura B no la vamos a dividir entre 2 porque sí está completa, entonces la figura B sí se puede medir.

A2: Ahora **la figura C**, la siguiente figura la vamos a dibujar como las demás y vamos a medir… contamos cuadraditos y completamos.

A1: ahora vamos a contar los cuadraditos, 1, 2… 20.

A2: 20

A1: 20 es todo completando la figura, ahora lo vamos a dividir entre 2 porque hemos completado la figura.

A2: 20 :2 es **10**. La figura C, sí se puede medir.

(aquí observamos un error en el procedimiento, pues la alumna ha completado el un rectángulo añadiendo más cuadraditos de la rejilla. La respuesta debió ser 7,5 cuadrados.)

A2: Ahora la figura D. ahora estamos dibujando **la figura D** para poderla medir. Ahora completamos

A1. Ahora contamos de nuevo los cuadrados. 1,2,3….25 cuadraditos toda la figura completa sobre 2, porque hemos completado la figura.

A2: ya, 25:2 es a…

A1: 12, 50

A1: La figura D también se puede pero completando.

A2: Con decimales sale la respuesta.

A1: Ahora vamos a hacer lo mismo con la E.

A2: ¿Sobreponiendo la hoja?

A1: en este caso… **la figura E**

A2: no se completa

A1: en este caso la figura E no se completa porque es un cuadrilátero, tiene 4 lados.

A2: contamos cuadraditos…

A1: 1,2,…12 sale exacto **su área es 12.**

A2: entonces la figura E también se puede medir.

A1: ahora la **figura F**

A2: ¿lo completamos?

A1: eh, no, porque…no porque tiene un ángulo recto.Toda la figura F está formada por 8 cuadrados

A2: ahora vamos a contar, en este caso la figura F tiene 12 salió 12. Entonces la figura F sí se puede medir.

A1: Ahora vamos a la figura G. Hacemos lo mismo como todas las figuras.

A2: Ahora la **figura G**…

(10m)

A1: hacemos de la misma forma con las demás figuras, ponemos la hoja cuadriculada encima y dibujamos.

A2: ahora contamos los cuadraditos, 1,2,…15. La figura G tiene 15 cuadraditos de área.

A1: ya, ahora la **figura H…**

A2: es una escalera, entonces hacemos lo mismo,…tiene 8 cuadraditos.

A1: La figura I es un triángulo, humm…

A2: lo completamos y hacemos un rectángulo, luego lo dividimos entre 2.

A1: ya, …contamos y tiene 20 cuadraditos, lo dividimos entre 2, sale 10. La **figura I** tiene 10 cuadraditos.

(aquí observamos un error en el procedimiento, pues la alumna ha completado el un rectángulo añadiendo más cuadraditos de la rejilla. La respuesta debió ser 7,5 cuadrados.)

A2: nos toca la figura J, dibujamos… ya, tiene 8 cuadraditos.

A1: la figura k es un castillo…hummm está difícil

A2: no, mira… a ver…lo dibujamos en nuestra hoja cuadriculada. Ya está.

A1: son 10 cuadraditos

A2: no, porque dos triángulos hacen un cuadrado. Entonces, son 12 cuadraditos… mira…1,2,..10, estos dos triángulos hacen un cuadrilátero, 11, y estos dos…12. La figura K tiene 12 cuadraditos.

A1: ya, la última. La figura L tiene… (va dibujando y contando) 4x4, 16 cuadraditos.

- Transcripción 2: grupo B (Dayana y B2)

Usan las cartulinas y la unidad de medida asignada: un cuadrado pequeño

Las niñas dibujan en las hojas cuadriculadas los polígonos que van a medir, luego cuentan los cuadraditos de la hoja.

Empiezan por la figura B.

B1: empezamos por esta (señalando la **figura B**), mejor la dibujamos en la hoja ¿ya?

B2: yo lo dibujo.

B1: ya, ahora cuenta cuántos hay

B2: 1,2,3….21 arriba, 1,2,3..12 en este lado…entonces 21 x 12 es (realiza la multiplicación) 252.

B1: es 252 cuadraditos

B2: sí, ahora la **E**. hacemos igualito… (dibuja) 1,2,3…12 y 1,2,3,…16, 12 x 16 es … **192 cuadraditos**.

Profesor: cómo están midiendo?

B1: dibujamos en la hoja las cartulinas, y estamos contando los cuadraditos.

B2: ¡los cuadriláteros!

B1: sí.

Profesor: muy bien. ¿ Y si usan este cuadrado más grande?

B1: ya profesor

(el profesor se retira y las deja seguir)

B2: ¿cómo hacemos?

B1: ya sé, dibujamos el cuadrado que nos dio el profesor en la hoja. (dibuja) Es un polígono de 16 unidades

B2: dibujamos el cuadrado (***figura L***) y 17 cuadraditos y…16, 17 x 16 es 119 cuadraditos

(encontramos un error en la multiplicación, lo correcto sería 256 cuadraditos para 16 x 16)

B1: pero el profesor nos dijo que usemos este.

B2: ya, verdad…cómo hacemos

B1: dibújalos.

B2: ya está

B1: este polígono tiene 1,2,3…**16 cuadrados**

B1: toda esta fila hace un nuevo cuadrado, mira…tiene 16 cuadraditos. Entonces mide 17 cuadrados.

(las estudiantes habían dibujado el cuadrado pasándose una columna más)

B2: ahora **la G.**

B1:lo dibujamos y para medirlo ¿si lo partimos?

B2: hay un rectángulo y una "C"

B1: la C tiene 5 cuadrados. El rectángulo tiene 10, mira 1,2,3,…10.

B1: ahora hacemos **el triángulo A**. creo que mejor lo completamos. (dibujan en su hoja, cuentan y dividen entre 2). **Sale 120 cuadraditos**.

B2: ahora los otros

B1: mira, la C y la I son iguales. Entonces tienen 120 cuadraditos también.

B2: ahora la E (dibujan) Este tiene 192 cuadraditos.

B1: Acá está la mitad de un cuadrado, necesitamos cambiar los cuadrados(señaló los triángulos de las esquinas de la figura) para poder sacarlo bien.

B2: Ya

B1: Y aquí lo completamos el triángulo con la otra mitad

B1: Con este cuadrado mide 16 cuadraditos, lo vamos a medir

(mide con una unidad cuadrada, va marcando en la hoja).

B1: Como ya lo medimos ahora solo falta contar. 12 cuadrados de 16, sería 12 x 16.

B2: 12 x 16 (hace la multiplicación…explica el proceso de)

B1: el área contada, según nosotras sería 192

Profesor:¿ 192…qué?

B1: ¡Cuadrados!

Profesor: ¿qué cuadrados?

B1: sería cuadrados…1 cuadrado por 16

B1: 192 cuadrados chiquitos o 12 cuadrados grandes. Si fueran triángulos sería…como son la mitad de un cuadrado, podemos ver acá que si lo completamos, sería la misma mitad de este cuadradito. Esto significaría que el de acá lo tenemos que multiplicar por 2, como son la mitad, sería 24 triángulos.

Institucionalización

El profesor hace el gesto de recubrir los polígonos y pregunta ¿para? (3.04)

Alumna1 (A1): para contar

Profesor: para contar, pero ¿al contar qué estás haciendo?

Alumnas: contar cuadraditos

A1: hallando el área

Alumnas: hallando el perímetro, los vértices,

Profesor: ¿qué estaría haciendo? A ver…

A2: contar cuántos cuadraditos tiene el área

Profesor ¿y qué significa eso? Hallar…

A2: el área (3.31)

Profesor: muy bien.