

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



**EL USO DE LAS SITUACIONES DE INCERTIDUMBRE DE LA VIDA
COTIDIANA PARA VERIFICAR EL USO DE LA NOCIÓN SUCESO
ALEATORIO DESDE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS**

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas
que presenta

ELVA CARMEN PAUCAR CHURA

Dirigido por

AUGUSTA ROSA OSORIO GONZALES

San Miguel, 2015



Dedico este trabajo a mis padres Micaela Chura y Pepe Paucar, por su ejemplo de superación y por su aliento a seguir mi desarrollo profesional; a mi querido esposo Anselmo, por su aliento constante en concluir satisfactoriamente esta aventura académica y a mi pequeña Mayiri que es mi inspiración.

AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Educación del Perú, a través del PRONABEC por la que accedimos a la Beca Presidente de la República denominada “Beca docente para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú” (2014-II), que nos dio la oportunidad de estudiar en esta prestigiosa universidad.

A la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por las enseñanzas brindadas en Didáctica de las matemáticas.

A la Mg. Augusta Osorio, mi asesora de tesis, por su permanente asesoramiento que ha contribuido en la realización de esta investigación.

A los miembros del jurado, la Dra. Katia Vigo y el Dr. Francisco Ugarte, por sus correcciones, observaciones y comentarios pertinentes que me ayudaron a mejorar la presente investigación.

A mis amigas y compañeras de esta aventura académica Milagros, Verónica y Catherina, quienes me brindaron su amistad, su ayuda desinteresada y su ejemplo de altas cualidades personales.

A todos los compañeros que concluimos esta gran tarea y que comienza otra con nuevos retos e ilusiones.

A todos nuestros profesores por la calidad académica recibida, por la exigencia y aliento constante.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo validar una secuencia didáctica que utiliza situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana y permite desarrollar la noción de suceso aleatorio como suceso posible, suceso imposible, suceso seguro y suceso como más probable. Cabe resaltar que este tema está presente en los lineamientos del Ministerio de Educación y es muy importante en la vida cotidiana de los estudiantes, pues las situaciones de incertidumbre están presentes en la realidad y, ante ellas, tenemos que saber tomar las mejores decisiones. Además, la enseñanza de la probabilidad en temas cotidianos es una fuente de desarrollo de una habilidad necesaria en nuestra vida: el saber argumentar.

Para el diseño de una secuencia didáctica que desarrolle la noción de suceso aleatorio, ha sido fundamental la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau. Asimismo, el proceso metodológico para concretar el desarrollo de esta secuencia didáctica se apoya en la Ingeniería Didáctica de Artigue.

Finalmente, analizamos los resultados obtenidos en la experimentación de la secuencia didáctica y la confrontamos con el análisis a priori. Esta comparación nos permitió observar los logros y dificultades que presentaron los estudiantes. A partir de ello podemos afirmar que los estudiantes lograron responder satisfactoriamente sus tareas y, por el proceso de construcción de sus hallazgos, podemos concluir que los alumnos desarrollaron nociones de suceso aleatorio, tema que planteamos en nuestro objetivo de investigación. Por otro lado, un aspecto muy importante de este trabajo es la secuencia didáctica generadora de argumentaciones que utilizaron los estudiantes en la fase de validación, porque la argumentación es una competencia muy importante para otras áreas de las matemáticas y para otros contextos de la vida de un estudiante.

Palabras claves: TSD, Ingeniería Didáctica, suceso aleatorio, situaciones de incertidumbre.

ABSTRACT

This research aims to validate an educational sequence using uncertain situations of everyday life and builds the notion of random event as a possible event, impossible event, certain event and event as more likely. It should be noted that this item is present in the guidelines of the Ministry of Education is very important in the daily lives of the students, because the uncertainties are present in reality and , before them , we need to know to make the best decisions. In addition, the teaching of probability in everyday issues is a source of development of a necessary skill in our life: the knowledge argument.

For the design of a didactic sequence to develop the notion of random event, it has been fundamental theory of didactic situations Brousseau. Also, the methodological development to realize this sequence process is supported by the Teaching Engineering Artigue.

Finally, we analyze the results of the experimentation of the teaching sequence and confronted with a priori analysis. This comparison allowed us to observe the achievements and difficulties presented students. From this, we can say that students respond satisfactorily achieved their tasks and, through the process of building their findings, we conclude that the students developed notions of random event, an issue we raised in our research objective. On the other hand, a very important aspect of this work is the teaching sequence generating arguments used by the students in the validation phase because the competition argument is that students should develop.

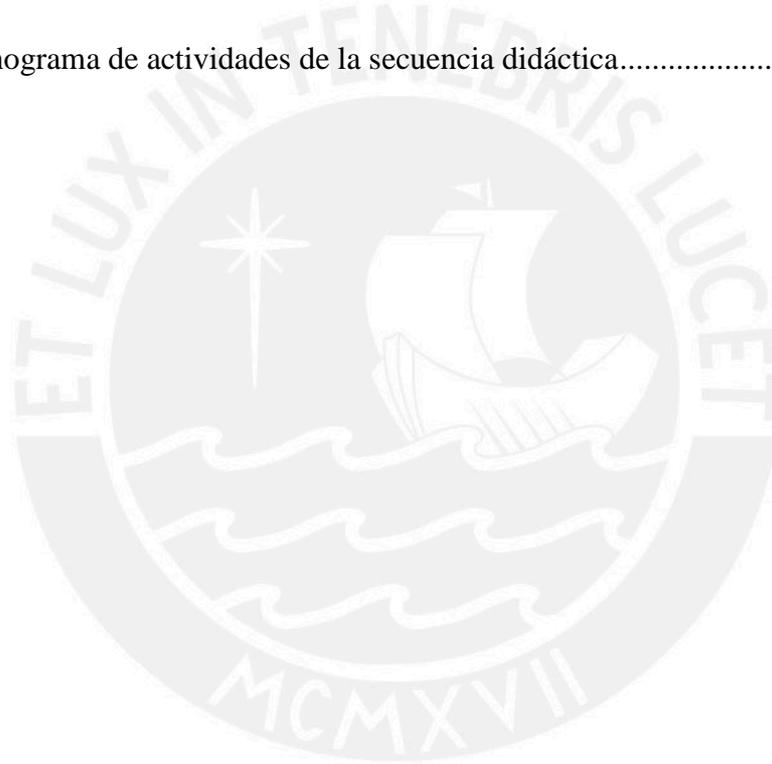
Keywords:TSD, Teaching Engineering, random event, situations of uncertainty.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Descomposición de la realidad según el tipo de situación a analizar	24
Figura 2. Calculando la probabilidad con el enfoque clásico.....	28
Figura 3. Situación de acción	38
Figura 4. Situación de formulación	38
Figura 5. Situación de validación	39
Figura 6. Dibujo de la dupla A.	58
Figura 7. Dibujo de la dupla B	59
Figura 8. Respuesta de la dupla A	60
Figura 9. Respuesta de la dupla B	61
Figura 10. Respuesta de la dupla A	62
Figura 11. Respuesta de la dupla B	63
Figura 12. Respuesta de la Dupla A	64
Figura 13. Respuesta de la Dupla B	65
Figura 14. Respuesta de la Dupla C	66
Figura 15. Respuesta de la Dupla A	67
Figura 16. Respuesta de la Dupla B	68
Figura 17. Respuesta de la Dupla A	70
Figura 18. Respuesta de la Dupla B	72
Figura 19. Respuesta de la Dupla A	73
Figura 20. Respuesta de la Dupla A	74
Figura 21. Respuesta de la dupla A	76
Figura 22. Respuesta de la Dupla B	78
Figura 23. Respuesta de la Dupla A	79
Figura 24. Respuesta de la Dupla A	80

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Contenidos de probabilidad en DCN.....	18
Tabla 2. Contenidos de probabilidad en los Mapas de Progreso.....	19
Tabla 3. La probabilidad en el cuarto grado del nivel primario	20
Tabla 4. Variables didácticas de la actividad 1	48
Tabla 5. Variables didácticas de la Actividad 2	52
Tabla 6. Variables didácticas de la Actividad 3	54
Tabla 7. Cronograma de actividades de la secuencia didáctica.....	57



ÍNDICE

INTRODUCCION.....	9
CAPITULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	10
1.1. Antecedentes.....	12
1.2. Justificación del tema.....	17
1.3. Problema de investigación.....	21
1.4. Objetivos de investigación.....	22
CAPÍTULO 2: ESTUDIO DEL OBJETO MATEMATICO.....	23
2.1. Aleatoriedad.....	23
2.2. Situación aleatoria.....	23
2.2.1. Enfoques de la probabilidad.....	27
2.3. Suceso aleatorio desde el punto de vista didáctico.....	30
2.3.1. Errores en la aleatoriedad y probabilidad.....	30
2.3.2. Intuiciones de Fischbein.....	31
CAPÍTULO 3: ASPECTOS DE LA TEORIA DE LAS SITUACIONES DIDACTICAS Y METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓN.....	34
3.1 Teoría de las Situaciones Didácticas.....	34
3.1.1 Conceptos básicos.....	35
3.1.2 Fases de las situaciones didácticas.....	38
3.1.3 Las dialécticas.....	40
3.1.4 La noción de obstáculo.....	41
3.2 Metodología.....	41
3.2.1 Aspectos de la Ingeniería Didáctica.....	41
3.2.2 Fases de la Ingeniería Didáctica.....	42
CAPÍTULO 4: CONCEPCIÓN Y ANALISIS A PRIORI.....	46
4.1 Consideraciones generales de la secuencia didáctica.....	46
4.2 Secuencia didáctica a través de las fases de la TSD.....	47

4.2.1 Descripción de objetivos y análisis a priori de la actividad 1	48
4.2.2 Descripción de objetivos y análisis a priori de la actividad 2	52
4.2.3 Descripción de objetivos y análisis a priori actividad 3	54
CAPÍTULO 5: EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS A POSTERIORI	57
5.1 Caracterización y selección de los sujetos de la investigación.....	57
5.2 Experimentación y análisis a posteriori.....	57
5.2.1 Descripción y fases asociadas a la TSD de la actividad 1	58
5.2.2 Descripción y fases asociadas a la TSD de cada ítem de la actividad 2.....	69
5.2.3 Descripción y fases asociadas a la TSD de cada ítem de la actividad 3.....	76
5.3 Análisis global de secuencia didáctica	82
CONSIDERACIONES FINALES	84
PERSPECTIVAS FUTURAS	87
REFERENCIAS	88
ANEXOS.....	92

INTRODUCCION

En la sociedad de hoy nos encontramos frente a una gran cantidad de información que debe ser evaluada críticamente para formarnos una opinión fundamentada y poder tomar decisiones. Estas pueden afectar positiva o negativamente nuestra vida personal: los emprendimientos en negocios, las decisiones en el campo médico o científico, en el campo de la ingeniería civil, la gestión de un Estado o ciudad y en muchos otros campos. A ello responde el gran interés que, últimamente, ha despertado el tratamiento del tema de la probabilidad, lo que ha llevado a la elaboración de investigaciones sobre su pertinencia en la educación de profesores en formación, a nivel universitario, y, todavía, en menor medida, en el nivel de la educación primaria.

Freudenthal (1973 citado en Ávila, 2001), se cuestionaba: ¿por qué enseñar probabilidad, cuando hay tantos campos interesantes en las matemáticas? Respondiéndose con los siguientes argumentos: (a) En probabilidad, la demanda de matemáticas técnicamente formalizadas es muy baja y, una vez dominadas las fracciones, se puede ir muy lejos. (b) Se puede aplicar a la realidad tan directamente como la aritmética elemental. (c) Suministra la mejor oportunidad de mostrar a los estudiantes como matematizar, es decir, como aplicar las matemáticas. (d) Los primeros conceptos importantes de la probabilidad son la dependencia e independencia estocástica y la probabilidad condicional, y, de acuerdo a la experiencia, su implementación es una empresa fácil. Freudenthal rechazaba abiertamente la aproximación axiomática en la enseñanza de la probabilidad.

Es así que se hace necesario investigar el contenido de suceso aleatorio y darle la importancia debida en la educación primaria. En nuestro trabajo de investigación proponemos una secuencia didáctica con el propósito de contribuir al mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas, propuesta que se enmarca dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas. La TSD nos permite plantear una secuencia didáctica en la que las interacciones entre el alumno, el conocimiento matemático, y el maestro, permitan que los estudiantes construyan su saber que, en este caso, es el desarrollo de la noción de suceso aleatorio.

Así, el presente trabajo está estructurado de la siguiente manera:

En el primer capítulo, presentamos la problemática en torno a las dificultades que se presentan en la enseñanza de la probabilidad. Damos a conocer investigaciones que nos dan aproximaciones a las limitaciones que presentan los profesores en formación en cuanto al

tratamiento del tema de la probabilidad. Por otro lado, presentamos investigaciones que nos dan a conocer las dificultades de su enseñanza, así como propuestas de cómo tratar el contenido de probabilidad en la enseñanza. De igual manera, hacemos una revisión de los principales documentos que respaldan nuestra investigación.

En el segundo capítulo, estudiamos el objeto de estudio, que es el suceso aleatorio. Presentamos las definiciones principales como situación aleatoria, experimento aleatorio, suceso seguro, suceso imposible y suceso posible. Así mismo, damos a conocer cómo interpretar la aleatoriedad y sus errores al interpretarla.

En el tercer capítulo, detallamos algunos aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (TSD) que tomaremos en cuenta para diseñar una secuencia didáctica. De esta manera, presentamos los conceptos y términos básicos de la TSD, así como el proceso que se produce en el contrato didáctico y la devolución, como vías para hacer evolucionar el aprendizaje de los alumnos. Por otro lado, nuestra metodología de investigación se basa en la Ingeniería Didáctica, para ello escogimos ciertos aspectos que nos van permite elaborar los análisis previos; construir un escenario de realizaciones didácticas, que será puesta en experimentación, para, luego, analizar los resultados obtenidos (análisis a posteriori); y, finalmente, contrastar con el análisis a priori, que es formulado antes de la experimentación de la secuencia didáctica.

En el cuarto capítulo, detallamos las consideraciones generales de la secuencia didáctica, a través de las fases de la TSD, la descripción de las variables didácticas presentes en cada actividad, así como el análisis a priori, es decir, lo que esperamos que responda el alumno y las fases por la que pretendemos que atraviese este.

En el último capítulo, describimos las características de los estudiantes que participaron en la experimentación y cómo se desarrollaron los aspectos de la TSD en la aplicación de la secuencia didáctica. Así mismo presentamos el análisis a posteriori, que consiste en un análisis de los resultados para luego contrastarlos con el análisis a priori.

Culminamos la nuestro trabajo con un análisis global de la secuencia didáctica, las consideraciones finales con respecto a la TSD, el objeto matemático, la Ingeniería Didáctica, la pregunta y el objetivo de investigación, y las perspectivas futuras que nacen de las conclusiones obtenidas de la presente investigación.

CAPITULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En esta sección, detallaremos algunas investigaciones que se han realizado en torno al aprendizaje de la probabilidad que justifican el objeto de nuestra investigación. Finalmente, plantaremos el problema de investigación en el que se basará nuestra investigación.

1.1. Antecedentes

Iniciamos con la presentación de los fundamentos y argumentos para el desarrollo de una secuencia didáctica para la enseñanza de la noción de suceso aleatorio. Para ello, acudimos a fuentes que presenten resultados relacionados con este tema.

La investigación realizada por Mohamed (2013) es un estudio cualitativo y exploratorio cuya finalidad es determinar el conocimiento sobre probabilidad de los futuros profesores de educación primaria. El estudio se realizó a través de un cuestionario de problemas sobre probabilidad y se consideró que existe diferencia entre conocimiento del contenido matemático y el conocimiento del contenido pedagógico. Shulman (1989, citado por Mohamed, 2013) define el conocimiento del contenido pedagógico como la forma particular o especial en la que el maestro amalgama el contenido y la pedagogía, mientras que el conocimiento del contenido matemático se define como la cantidad y organización del conocimiento presente en la mente del profesor.

La investigación se centró en el conocimiento común del contenido, que es la capacidad de cualquier persona instruida para resolver problemas; también reportó el conocimiento especializado del contenido, que es la capacidad de identificar las ideas matemáticas trabajadas en un problema y elegir una secuencia de enseñanza. Ahora bien, las actividades habituales que realiza el maestro en clases dependen, en gran medida, de su nivel de conocimientos matemáticos, los cuales implican un dominio del tema de probabilidad.

En una de sus conclusiones Mohamed (2013), señala que los futuros profesores de educación primaria de dicha investigación presentan un insuficiente conocimiento matemático del contenido de probabilidad a la hora de resolver los problemas. Por ello, este investigador concluye que es urgente mejorar la formación de los futuros profesores, tanto en el conocimiento específico del contenido de probabilidad como en el conocimiento pedagógico matemático. En ese sentido, Mohamed cita a Cañizares (1997), afirmando que muchas estrategias utilizadas por los futuros maestros son muy similares a las empleadas por los estudiantes de la investigación de este, y que resulta preocupante la similitud de errores

presentados, por el hecho de que dichos estudiantes de pedagogía son los formadores de estudiantes.

De acuerdo con el análisis, los resultados señalaron que los participantes mostraron un conocimiento común insuficiente del contenido de probabilidad. Otros resultados encontrados son los siguientes: (a) algunos errores de los profesores están relacionados con la confusión entre suceso seguro y posible; (b) un alto porcentaje de profesores manifiesta que en los problemas y experimentos planteados no se pueden determinar las respuestas, pues esta depende del azar, la suerte o el destino; (c) en cuanto al conocimiento del contenido pedagógico de probabilidad, los futuros maestros tuvieron dificultades en reconocer los contenidos matemáticos y, por lo tanto, se les hizo difícil plantear soluciones a los problemas correctamente.

A partir de la investigación realizada, Mohamed (2013) plantea continuar el análisis del conocimiento de profesores en formación de educación primaria sobre probabilidad, así como extender estos estudios a profesores de educación primaria en actividad y elaborar propuestas de enseñanza que mejoren su conocimiento para la enseñanza.

Siguiendo en la línea del conocimiento del profesor, Hill, Ball, y Schilling (2008, citado en Godino, 2009) definen el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) como el “conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular” (p. 375). Asimismo, incluye el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático. Adicionalmente, señala que el conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido, lo que incluye saber construir, a partir del razonamiento de estrategias utilizadas por los estudiantes, procesos para intentar corregir errores y concepciones erróneas.

Otro trabajo importante es el de Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998), quienes realizaron un estudio de un grupo de futuros profesores sobre las concepciones de la noción de aleatoriedad. Dicho estudio mostró como resultado que los profesores presentan una forma de razonamiento basado en un conocimiento intuitivo y no formalizado; por lo que señaló que tal conocimiento está basado en la experiencia y en el sentido común, y no en un desarrollo formal. Los autores concluyeron que esta información servirá para diseñar procesos de

formación que favorezcan la construcción evolutiva de las nociones de aleatoriedad más elaboradas.

Por otro lado, pensamos que, si bien los maestros no están bien preparados, esto se debe principalmente a que no han recibido instrucción al respecto en su formación académica. Al respecto, puede constatarse, en Greer y Ritson (1994, citado en Mohamed, 2012), que casi todos los profesores de primaria y la mitad de los profesores de secundaria manifestaron no haber estudiado la probabilidad en su formación inicial como docentes.

Este documento es importante para nuestra investigación, porque presenta un importante argumento que justifica su realización: el maestro necesita planificar y aplicar adecuadamente sus clases con situaciones de incertidumbre y tener la capacidad para recoger información de los experimentos que realicen sus estudiantes. Por ello, el maestro deberá consolidar sus conocimientos para la enseñanza de la probabilidad y requerirá de estrategias para la enseñanza, por lo que el aprendizaje de una secuencia sobre la aplicación de la noción de suceso contribuirá en su trabajo y será un material de apoyo vital para su labor pedagógica.

Hasta ahora hemos revisado investigaciones que nos muestran el conocimiento de los profesores con respecto al conocimiento de aleatoriedad; en las líneas siguientes, describiremos el tratamiento de la aleatoriedad respecto del contenido, su complejidad y otros aspectos adicionales que tendremos en cuenta para nuestra propuesta didáctica.

Con respecto a la aleatoriedad Konold (1991), citado en Azcárate et al. (1998), afirma que el “nivel de comprensión de la aleatoriedad influye sustancialmente en la comprensión del conocimiento probabilístico”. Azcárate et al. (1998) añade que la capacidad de reconocimiento y tratamiento de los sucesos aleatorios depende, a su vez, del nivel de reconocimiento de la incertidumbre y la complejidad presentes en los fenómenos. Estas ideas resultan importantes porque nos sugieren construir posibles escenarios didácticos para desarrollar las nociones de aleatoriedad. Los autores afirman que la incertidumbre y la aleatoriedad son nociones fundamentales y previas para comprender la probabilidad. Por ello, consideramos que es necesario que estas nociones se desarrollen convenientemente en la etapa de la educación primaria. En la presente investigación, se analizarán estas nociones en su aplicación al cuarto grado.

Por otro lado, Serradó, Cardeñoso y Azcárate (2005) dan a conocer la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje del conocimiento probabilístico. Los autores afirman que esta complejidad se debe a las siguientes causas: (1) el conocimiento matemático de carácter

probabilístico se sustenta en la noción de incertidumbre, antagónica a la noción de certeza, que caracteriza el conocimiento escolar matemático; (2) en el proceso de construcción y formalización del conocimiento probabilístico, se han perdido las intuiciones sobre nociones como azar, aleatoriedad o incertidumbre, en el sentido que en el sistema escolar se privilegia solo el cálculo de la probabilidad desde el enfoque clásico laplaciano; (3) el conocimiento probabilístico se construye a partir de intuiciones primarias que aparecen en edades tempranas, pero que no evolucionan paralelamente al desarrollo del niño (Fischbein, 1990). Los investigadores hacen referencia a Brousseau (1983), para quien esta noción se relaciona con aquel conocimiento que ha sido, en general, satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas y que, por esta razón, se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente resulta inadecuado y de difícil adaptación cuando el alumno se enfrenta a problemas nuevos. Además, los autores plantean la importancia de identificar los obstáculos didácticos que se presentan en la construcción del conocimiento probabilístico en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos obstáculos están asociados con el uso del lenguaje probabilístico, y con contextos de experimentación y ejemplificación en la construcción del conocimiento probabilístico. En el NCTM (2000), se especifica que los maestros deben ayudar a los estudiantes a construir los conceptos progresivamente a partir del desarrollo del vocabulario del niño. Serra (2004), citado por Serradó et al. (2005), afirma que, el expresar los conceptos con las propias palabras y el escucharse a sí mismo, favorece la estructuración de esos conceptos en la mente. Las investigaciones de Truran (1994) citado en Serradó et al (2005) sugieren que muchos estudiantes confunden términos como “imposible” y “muy poco probable”. Serradó plantea que se pueden encontrar tres tipos diferentes de palabras en la enseñanza de las matemáticas: (1) las palabras técnicas como “suceso”, “serie”, “aleatoriedad” (la comprensión de estas palabras necesita de una enseñanza intencionada); (2) las palabras que se usan en las clases de matemáticas que se desarrollan con una mezcla de lenguaje ordinario y lenguaje matemático; (3) y en tercer lugar, las palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos como “azar” o la idea de suceso seguro.

Por otro lado, Kahneman, Slovic y Tversky (1983), (citados por Batanero, 2003) encuentran dos tipos de errores en el razonamiento de la aleatoriedad: el de representatividad y el de la disponibilidad. En el error de representatividad, las personas asignan mayor probabilidad de ocurrencia de un suceso a aquello que consideran más representativo, sin evaluar la información, y economizando la tarea de estimación de probabilidades a formas simples e

intuitivas. Estas acciones sesgan sistemáticamente sus juicios de probabilidad. Uno de los dilemas es cómo determinar la pertenencia de un elemento a una categoría, es decir, ¿qué probabilidad hay de que el elemento A pertenezca a la clase B? Para resolverlo confiamos en la heurística de representatividad que es “la evaluación del grado de correspondencia o similitud entre una muestra y una población, un ejemplar y una categoría, un acto y un actor o, más generalmente, un resultado y un modelo” (Tversky y Kahneman, 1983, p. 295, citados en Godino, 2003, p. 3). En el caso del error de disponibilidad, las personas tienden a asignar una mayor probabilidad de ocurrencia a aquello que evalúan como más representativo y prescinden de cualquier otra información. Cabe añadir que el error de disponibilidad ocurre cuando una persona da como probable que ocurra un suceso, considerando la facilidad con la que recuerda sucesos similares. “Generalmente se evocan con más facilidad ejemplos de clases grandes que ejemplos de categorías menos frecuentes” (Tversky y Kahneman, 1974). Un ejemplo que presentan los autores es la de presentación de listas en proporción de 19 y 20 personas. En una lista, había 19 nombres de hombres famosos y 20 nombres de mujeres desconocidas. En la otra lista, había 20 nombres de mujeres famosas y 19 nombres de hombres desconocidos. Al evaluarse donde había más mujeres o más hombres, las personas supusieron que había más mujeres en la lista cuando estaba la condición de “mujeres famosas” y más hombres en el caso del grupo de “hombres famosos”. La facilidad de acceso a la información (en este caso el recuerdo facilitado de personas conocidas) generó un sesgo en la estimación de la información presentada.

Estas son consideraciones importantes porque serán un insumo para proponer nuestras secuencias de actividades y se tendrá en cuenta en el uso del lenguaje en las situaciones didácticas propuestas. Además, dado que nuestro trabajo se inserta en la Teoría de las Situaciones Didácticas, las intuiciones que poseen los estudiantes serán trabajadas en la situación didáctica en la que el alumno se guía por la lógica de la situación y no por la lógica del maestro.

Cabe añadir que, para desarrollar el pensamiento estadístico, Garfield et al. (2010), citado en Zapata (2011), plantea el uso del modelo GAISE, en el cual se nos presentan las siguientes recomendaciones:

(a) Enfatizar cultura estadística y desarrollar el pensamiento estadístico. (b) Uso de datos reales. (c) Enfatizar la comprensión conceptual, más que el mero conocimiento de los procedimientos. (d) Fomentar el aprendizaje activo en el aula. (e) Usar la tecnología para el

desarrollo de la comprensión conceptual y datos de análisis. (f) Utilizar evaluaciones para mejorar y evaluar el aprendizaje del estudiante

En este caso entendemos que enfatizar la comprensión conceptual antes que los procedimientos, se refiere, a no enseñar a través de procedimientos mecánicos la solución de los problemas matemáticos. La dificultad que se presenta, es que dichos procedimientos no se aplican para la solución de todos los problemas.

En ese sentido, en nuestra investigación se busca que el estudiante desarrolle la noción de suceso aleatorio.

Las recomendaciones del modelo GAISE las tomaremos en cuenta, porque deseamos que nuestra secuencia didáctica sea innovadora en la forma del tratamiento del concepto conducente a la noción de suceso aleatorio, dejando de alguna manera, atrás el clásico tratamiento a través de juegos mediante ruletas y dados, y vamos a proponer el desarrollo de esta habilidad en situaciones reales cercanas a las vivencias del estudiante.

Por otro lado, en la investigación de Osorio (2012), se diseñó un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad mediante el estudio de la situación aleatoria. La investigación buscaba la valoración de idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad bajo el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). Se consideraron dos facetas: la epistémica y la cognitiva. La investigación concluye afirmando que se ha logrado que los estudiantes manejen los conceptos relacionados con la situación aleatoria y estén listos para entender lo que es una probabilidad. Esta investigación es nuestro principal referente porque nos proporciona las pautas para trabajar las situaciones aleatorias, de las cuales emergen los sucesos aleatorios. Por ello, utilizaremos de este trabajo conceptos que nos van a ayudar a crear las situaciones aleatorias en nuestras secuencias didácticas. Estos se refieren a los componentes de una situación aleatoria: el contexto, las restricciones, el espacio muestral y el suceso.

Las investigaciones presentadas nos muestran experiencias del tratamiento del suceso aleatorio y los errores que se presentan al enseñarlos. Estas ideas son fundamentales para el objetivo que nos hemos propuesto: diseñar las secuencias didácticas.

1.2. Justificación del tema

Consideramos que la presente investigación es relevante por muchas razones que a continuación detallaremos:

Actualmente, en la mayoría de nuestras escuelas no se enseñan los conocimientos que lleven a aprender el concepto de probabilidad en la primaria. Esto se debe a que los docentes no han sido formados en esta temática cabalmente. En nuestro caso personal, por ejemplo, no se tuvo una formación en dichos contenidos. Esto se ve reforzado por Mohamed (2012) al señalar que los futuros maestros demuestran un insuficiente conocimiento común de la probabilidad. Estos resultados pueden deberse -como lo indica Watson (2001) citado en Mohamed (2012)- a que los futuros profesores de primaria no se sienten cómodos usando conceptos probabilísticos, ya que estos contienen un mayor grado de incertidumbre. Sin embargo, nuestros estudiantes transitan en un mundo donde acontecen situaciones de este tipo, en las que tienen que evaluar alternativas de acción para su vida cotidiana; por ello, se hace necesario que los que enseñan a los estudiantes estos conocimientos estén convenientemente preparados en el tema. Por esta razón, proponemos una secuencia didáctica como un material de apoyo en el tratamiento del suceso aleatorio en el aula. Sobre esta, hablaremos al final de la presente justificación.

En el Diseño Curricular Nacional (2009), el contenido de suceso aleatorio en la educación básica se plantea desde el segundo grado hasta quinto de secundaria, y el organizador se denomina Estadística. Cabe destacar que está ausente en la denominación el contenido de la probabilidad y la competencia a lograr solo se refiere a la Estadística. Como a continuación se detalla la competencia del IV Ciclo: “Resuelve problemas con datos estadísticos, de su entorno y comunica con precisión la información obtenida mediante tablas y gráficos” (p.189).

Tabla 1. Contenidos de probabilidad en DCN

CICLO	GRADO	CONTENIDO	CAPACIDAD
I	SEGUNDO	Ocurrencia de sucesos: “siempre”, “nunca”, “a veces”.	Identifica en situaciones concretas la ocurrencia de sucesos.
II	TERCERO	Identifica y relaciona la ocurrencia de sucesos numéricos y no numéricos.	Identifica y relaciona la ocurrencia de sucesos numéricos y no numéricos: seguros, probables e improbables.
	CUARTO	Sucesos numéricos y no numéricos: seguros, probables e improbables.	Formula y argumenta la posibilidad de ocurrencia de sucesos numéricos y no numéricos: seguros, probables e
IV	QUINTO	Sucesos deterministas.	Identifica e interpreta sucesos deterministas
	SEXTO	Probabilidad de un evento en un experimento aleatorio.	Identifica e interpreta sucesos de azar.

Fuente:Perú (2009, p.192)

Por otro lado, resulta importante agregar que el documento referente a nivel mundial en enseñanza de las matemáticas, el Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics NCTM (2000) expresa que trabajar con el análisis de datos y con la probabilidad es una forma natural de relacionar las matemáticas con otras asignaturas y con las experiencias de la vida diaria.

En este documento, se muestra cómo se plantea la adquisición de capacidades en progresiva complejidad a través de las distintas etapas de la escolaridad. Este texto constituye un material en el que se insertó por primera vez el contenido de probabilidad desde el kindergarten y ha sido un referente para muchos países. En particular, el Mapa de Progreso de Estadística y Probabilidad (2013) ha acogido los aportes de este documento y ha considerado el tema de la probabilidad denominando al organizador como Estadística y Probabilidad. Asimismo, este documento oficial complementa y aclara la perspectiva para plantear nuestras actividades para la secuencia didáctica: en este caso, partiremos de experiencias directas.

Respecto a los logros que deben alcanzar los estudiantes, se tiene que, en el Mapa de Progreso del Aprendizaje (2013) de Estadística y Probabilidad, se incluyen niveles de progreso desde el nivel inicial, al que se denomina como nivel previo. En dicho documento, se gradúan, con mayor precisión, los niveles que deben alcanzar los estudiantes a lo largo de la educación básica regular.

Tabla 2. Estándares Nacionales del Perú de Estadística y Probabilidad por ciclos

Ciclo	Niveles de progreso
Previo	Describe a partir de su experiencia directa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando expresiones coloquiales.
III 1° - 2°	Identifica y compara la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de sucesos cotidianos, y describe algunos posibles resultados de una situación aleatoria, por experiencia directa.
IV 3° - 4°	Clasifica a partir de la experiencia directa o experimentos concretos la ocurrencia de sucesos como posible o imposible y explica si la ocurrencia de un suceso es <i>más probable</i> o <i>menos probable</i> que la de otro suceso proveniente de la misma situación aleatoria.

V 5° - 6°	Determina y representa todos los posibles resultados de una situación aleatoria propuesta usando distintas estrategias. Interpreta la probabilidad de un evento como el cociente entre el número de casos favorables y el total de casos posibles, lo representa mediante una fracción y explica.
--------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fuente: Perú (2013, p.9)

En cuanto a cuarto grado de educación primaria, los Mapas de progreso de Estadística y probabilidad (2013) plantean niveles de progreso que deben alcanzar los estudiantes de dicho grado. Al desglosar el nivel de progreso, tenemos que los estudiantes deben clasificar, a partir de la experiencia directa o experimentos concretos, la ocurrencia de sucesos como posibles o imposibles; para ello, se plantean algunos desempeños con los que podríamos medir si alcanzó dicho nivel de progreso, como el que sigue: “Determina si un suceso de su entorno cotidiano es posible o imposible” (p.16). Proponiendo para ello un ejemplo: “Es un suceso imposible que una misma profesora se encuentre en tres aulas al mismo tiempo o que es un suceso posible que se dé una interrupción dentro de la clase de matemáticas” (p. 16). Otro nivel de progreso es que el estudiante explique si la ocurrencia de un suceso es más probable o menos probable que la de otro suceso proveniente de la misma situación aleatoria. Un posible desempeño que nos proporcionan como ejemplo los Mapas de Progreso de Estadística y Probabilidad (2013) es: “Determina, entre dos sucesos, cuál tiene más probabilidad de ocurrir” (p.16). Dando como ejemplo: “Si en una urna tengo 6 canicas verdes y 4 canicas azules, los estudiantes dicen que es más probable que saque una canica verde porque en la urna hay más canicas verdes” (p.16).

Observamos que este diseño se encuentra más acorde con lo que sugieren los académicos estadísticos, que proponen que se debe exponer al niño desde temprana edad a las nociones de probabilidad; por ello, se plantean desempeños que los estudiantes deben desarrollar desde el nivel inicial y están propuestos en un nivel de dificultad creciente. Consideramos que el tema escogido, suceso aleatorio, debe ser investigado y estudiado porque es requisito para desarrollar otras capacidades para los siguientes niveles o ciclos. Cabe añadir, que, en los Mapas de Progreso de Estadística y Probabilidad (2013), el nivel previo tiene desempeños que son requisitos que deben lograr los estudiantes del III ciclo de educación primaria.

Otro documento que analizamos es el que contiene los resultados de la Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004 de la Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC), en el que se concluye que los estudiantes de quinto grado presentan dificultades en el manejo

de la gestión y administración de la información al resolver problemas que involucran el uso o el cálculo de probabilidades de eventos sencillos, ya que no tienen incorporadas las nociones previas de probabilidad y no identifican ni experimentos aleatorios ni espacios muestrales.

En cuanto a nuestro trabajo de investigación, nos interesa trabajar con el cuarto grado de educación primaria para el abordaje de los conceptos de suceso seguro, suceso imposible, suceso posible y más probable.

Tabla 3. La probabilidad en el cuarto grado del nivel primario

Diseño Curricular Nacional	Mapas de Progreso
Sucesos numéricos y no numéricos: seguros , probables e improbables.	Suceso posible o imposible y suceso <i>más probable</i> o <i>menos probable</i> .

Fuente: Perú (2009, p. 192) y Perú (2013, p.9)

Para el diseño de nuestra actividad, hemos considerado conveniente contar con los contenidos de los Mapas de Progreso de Estadística y Probabilidad (2013) del cuarto grado de educación primaria, que son suceso posible, imposible y más probable porque creemos que son contenidos importantes que se debe trabajar en cuarto grado, para que, luego, en quinto grado, se pueda ingresar a cuantificar la probabilidad de sucesos. Nos hemos propuesto trabajar en nuestra secuencia didáctica los siguientes objetivos de aprendizaje:

- ❖ Representa los posibles resultados de una situación aleatoria cotidiana
- ❖ Clasifica y justifica un suceso como imposible o posible
- ❖ Clasifica y justifica un suceso como seguro
- ❖ De una situación aleatoria, reconoce y explica un suceso como más probable.

La presentación de estos documentos oficiales son importantes porque nos muestran la importancia que ha cobrado, en estos últimos tiempos, el tema de probabilidad, en el cual se incluye los sucesos aleatorios. Dado que este contenido será estudiado en la secundaria y, según los resultados que presentamos, los estudiantes de ese nivel tienen dificultad para trabajar la probabilidad, es necesario darle la importancia debida en los grados de educación primaria para que no se presenten problemas en los grados superiores. A su vez, su importancia es reconocida porque la ocurrencia de sucesos es una actividad cotidiana del ser humano, y el estudio de la probabilidad le ayuda a reconocerlos, a analizarlos y a tomar las decisiones más convenientes sobre la base de las opciones que se le presentan cotidianamente.

Por esta razón, teniendo en cuenta los estudios previos, pretendemos diseñar una secuencia didáctica que permita desarrollar nociones de suceso aleatorio en el contexto de situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana y cercana a los estudiantes de cuarto grado de educación primaria. Creemos que es importante para nuestra investigación que nuestra secuencia didáctica se desarrolle dentro de los aspectos de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

1.3. Problema de investigación

Considerando las investigaciones descritas en la sección anterior, se planteará una secuencia didáctica que reúna ciertas características enmarcadas en la teoría de las Situaciones Didácticas para que ellos puedan adquirir la noción de suceso aleatorio. En ese sentido, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿La secuencia didáctica basada en situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana desarrolla la noción de suceso aleatorio posible, imposible, seguro y más probable en estudiantes del cuarto grado de educación primaria?

1.4. Objetivos de investigación

Objetivo General:

Validar si una secuencia didáctica que utiliza situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana permite desarrollar las nociones de suceso aleatorio posible, imposible, seguro y “más probable” en estudiantes del cuarto grado de educación primaria.

Objetivos Específicos:

1. Identificar las dificultades y heurísticos que presentan los estudiantes en relación al desarrollo del objeto matemática suceso aleatorio.
2. Diseñar e implementar una secuencia didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas para desarrollar la noción de suceso aleatorio posible, imposible, seguro y “más probable”.

CAPÍTULO 2: ESTUDIO DEL OBJETO MATEMATICO

En este capítulo, trataremos sobre el suceso aleatorio desde el punto de vista teórico y desde el punto de vista didáctico. Asimismo, mostraremos las dificultades que se presentan en su enseñanza.

2.1. Aleatoriedad

Konold y colaboradores (1991, citados en Azcárate, 1998), afirman que la noción de aleatoriedad es ambigua y compleja, sin embargo, la consideran el corazón del pensamiento probabilístico y estadístico. Los autores fundamentan que es preferible ver el término aleatorio como una etiqueta que puede ser aplicada a muchas situaciones y que, con ella, van asociados muchos otros conceptos como los de suceso, espacio muestral, probabilidad, etc.

Por otro lado, Kyburg (1974, citado en Batanero, 1995) nos propone cómo interpretar la aleatoriedad a partir de cuatro términos, que son los siguientes:

- ❖ El objeto que se supone es miembro aleatorio de una clase,
- ❖ El conjunto del cual el objeto es un miembro aleatorio (población o colectivo),
- ❖ La propiedad con respecto a la cual el objeto es un miembro aleatorio de la clase dada,
- ❖ El conocimiento de la persona que emite el juicio de aleatoriedad.

Basados en lo expuesto anteriormente, podemos afirmar que el hecho de que un objeto sea considerado miembro aleatorio de una clase depende de nuestro conocimiento e información sobre el mismo.

2.2. Situación aleatoria

Un medio para determinar situaciones aleatorias consiste en utilizar el concepto de incertidumbre.

Podemos definir a la situación aleatoria como aquella en la que existe incertidumbre sobre el resultado, es decir, no se puede conocer el resultado de antemano, pero sí se puede estar en la capacidad de dar un conjunto de posibles resultados de la misma. En Batanero y Godino (2001), refiriéndose a la situación aleatoria, se dice: “con el término "aleatorio" se indica la posibilidad de que en idénticas condiciones puedan producirse resultados diferentes, que no son, por tanto, previstos de antemano”. Esto sucede, por ejemplo, al contar el número de semillas que se encuentra dentro de una vaina de arvejas, o al observar la duración de un televisor, o el tiempo transcurrido entre dos llamadas a una central telefónica, etc.

Ocurre que la mayoría de las situaciones de la vida cotidiana son situaciones en las que no podemos predecir los resultados, por ejemplo: a qué hora llegaré a mi escuela, cuántas personas suben en un paradero, el menú que me ofrecen hoy en el restaurante A, etc. También existen situaciones en las que sí puedo saber el resultado de antemano, por ejemplo: la cantidad de dinero que pagaré para la pensión de mi hijo, el número de teléfono de mi mamá, que día será mañana, etc.

Las situaciones en las que no hay incertidumbre, es decir, aquellas en las que se sabe el resultado antes de que se ejecuten se denominan situaciones determinadas. Osorio (2012) divide la realidad en dos tipos de situaciones básicas:

(1) Las situaciones determinadas son aquellas en las que se conoce el resultado antes de que se ejecuten. Para comprender mejor esta definición acudimos a lo que plantean Batanero y Godino (2001) que denominan al fenómeno determinista como aquel que siempre se produce en igual forma cuando se dan las mismas condiciones.

(2) Las situaciones de incertidumbre son aquellas en las que no se conoce el resultado exacto antes de que se realicen, pero sí se tiene una idea de todos los posibles resultados.

Según Osorio (2012), las situaciones de incertidumbre se dividen a su vez, (a) en reproducibles bajo las mismas condiciones y (b) las no reproducibles bajo las mismas condiciones. Esto es lo que se representa en la figura 1.

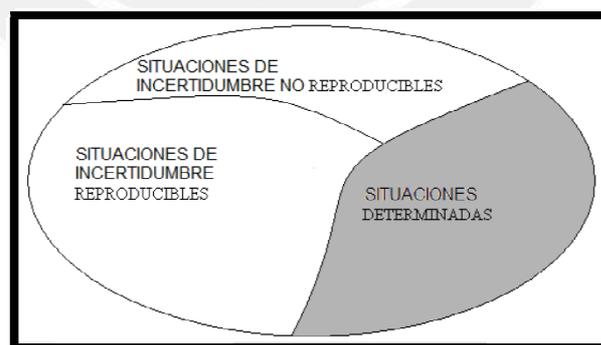


Figura 1. Descomposición de la realidad según el tipo de situación a analizar
Fuente: Osorio (2012, p.26)

Para comprender mejor estas definiciones daremos algunos ejemplos.

Ejemplos de situaciones determinísticas son:

- El resultado al enfriar agua hasta cero grados centígrados bajo presión atmosférica normal solo tiene un posible resultado; la formación de hielo.
- El resultado de mezclar en proporciones adecuadas moléculas de hidrógeno y oxígeno da como resultado moléculas de agua.
- El resultado de la unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales es un triángulo.

Ejemplos de situaciones de incertidumbre no reproducibles:

- El resultado del parto del primer hijo de Juana López (varón o mujer). No es reproducible porque no le es posible tener otro primer hijo.
- El resultado de la cantidad de asistentes a la fiesta del primer matrimonio de Ricardo Gonzales. El matrimonio de una persona X, no se va a volver a repetir, porque hay circunstancias que van necesariamente a cambiar: la pareja, el lugar, las amistades, etc.

Ejemplos de situaciones de incertidumbre reproducibles:

- El resultado de subir al bus al ir al trabajo y buscar un asiento.
- El resultado obtenido al lanzar al aire una moneda (cara o cruz).
- El grupo de contactos en Facebook que hacen comentarios después de agregar una foto.

En Osorio (2012), se propone una forma de trabajar la situación aleatoria a través de sus componentes y de cómo estos van a interactuar entre sí. Esto implica analizar mejor la situación aleatoria y poder aprovechar estas situaciones desde distintas miradas.

Componentes de la situación aleatoria

- a. El contexto: se refiere a las circunstancias en las que se expresa la situación aleatoria.
- b. Las restricciones: son características de una situación que vienen declaradas con el contexto.
- c. Las condiciones: son características de una situación no declaradas con el contexto, pero sí conocidas por la persona que analiza la situación y que permiten crear nuevas restricciones.
- d. El espacio muestral: es el conjunto de todos los posibles resultados de la ejecución de la situación aleatoria que cumple todas las restricciones y condiciones incluidas en el contexto.

- e. El suceso o evento simple: es cada uno de los posibles resultados de la situación de incertidumbre, es decir, los elementos que conforman el espacio muestral. Se les denomina también “posibilidad”.

Experimento aleatorio

Un experimento aleatorio es todo proceso que consiste en la ejecución de un acto una o más veces, cuyo resultado en cada prueba depende del azar y en consecuencia no se puede predecir con certeza.

La situación de incertidumbre reproducible bajo las mismas condiciones constituye un experimento aleatorio.

Son experimentos aleatorios por ejemplo:

- ❖ el lanzamiento de una moneda, cuyos resultados puede ser cara o sello.
- ❖ el lanzamiento de un dado, cuyo resultado puede ser un número del 1 al 6.
- ❖ la extracción de una bola de bingo, cuyo resultado es un número del 1 al 80.
- ❖ el sembrar una semilla, cuyo resultado puede ser la germinación de una planta o no.
- ❖ el nacimiento de un gato, cuyo resultado puede ser macho o hembra.
- ❖ el atender una llamada de celular, cuyo resultado puede ser que provenga de una persona conocida, para publicidad o una llamada equivocada.

A continuación consideraremos algunas definiciones que nos ayudarán a diseñar las actividades que podemos incluir en la secuenciadidáctica.

- a) Suceso seguro: es el conjunto que está formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Es el suceso que ocurre siempre y coincide con el espacio muestral.
- b) Suceso imposible: es un evento simple que no se pueden incluir en el espacio muestral de un determinado experimento aleatorio, es decir, no ocurre al realizar el experimento aleatorio.
- c) Suceso posible: Es cualquier evento simple que forma parte del espacio muestral de un experimento aleatorio.
- d) Un suceso es probable, si es posible para el experimento aleatorio y existe alguna probabilidad de que suceda.

Podemos distinguir tres niveles de comparación de probabilidades: más probable, igual de probable y menos probable.

Por ejemplo, si en una bolsa hubiera 6 bolas rojas y 2 bolas negras, el suceso “la bola que saque es roja” sería más probable que el suceso “la bola que saque es negra”; y el suceso “la bola que saque es negra” sería menos probable que el suceso “la bola que saque es roja”. Si en la bolsa hubiera 5 bolas rojas y 5 bolas negras, los sucesos “la bola que saque es roja” y “la bola que saque es negra” serían igualmente probables.

2.2.1. Enfoques de la probabilidad

Si bien nuestra presente investigación trata el objeto matemático suceso aleatorio, no se puede dejar de considerar a la probabilidad asociada al suceso. Esta nos muestra cual es la factibilidad de ocurrencia de dicho suceso.

Concepto de probabilidad

La probabilidad relacionada con un suceso es un número comprendido entre 0 y 1. Una probabilidad de cero ($P=0$) significa que el suceso es imposible; si $P=0.50$, significa que el hecho de que suceso ocurra es tan probable como que no ocurra; si $P=1$, es seguro que suceso ocurra. El valor de P no puede ser negativo ni mayor que uno. (Spurr y Bonini, 1986, p. 11)

Finetti (1931), en Mateos y Morales (2006), propone las leyes que ha de seguir la probabilidad, y comienza estableciendo cuatro postulados para la relación comparativa “más probable que”, presentaremos tres de esos postulados que son:

1. Un suceso aleatorio puede ser igualmente probable, más probable o menos probable que otro.
2. Un suceso aleatorio siempre será más probable que un suceso imposible y menos probable que un suceso seguro.
3. Si un suceso E' es más probable que otro E y este último es más probable que otro suceso E'' , entonces E' será más probable que E'' (propiedad transitiva).

a) El planteamiento clásico de Laplace:

Este enfoque se basa en el principio de indiferencia utilizado por el matemático Jacobo Bernouilli. Este principio señala: “que cuando no hay fundamentos para preferir uno de los posibles resultados o sucesos a cualquier otro, todos deben considerarse que tienen la misma probabilidad de ocurrir.

En Campos (1814), el matemático Laplace expresa: “La teoría del azar consiste en reducir todos los acontecimientos del mismo tipo a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, tales que estemos igual de indecisos respecto a su existencia, y en determinar el número de casos favorables al acontecimiento cuya probabilidad se busca. La proporción entre este número y el de todos los casos posibles es la medida de esta probabilidad, que no es, pues, más que una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el de todos los posibles”. Se añade la suposición de que “si se hace crecer en la misma proporción el número de casos favorables y el de todos los casos posibles, la probabilidad se mantiene idéntica” (p. 165). Se establece esta explicación a través de una operación o fórmula. Dado un evento E, la medida de la probabilidad del evento E se denota como:

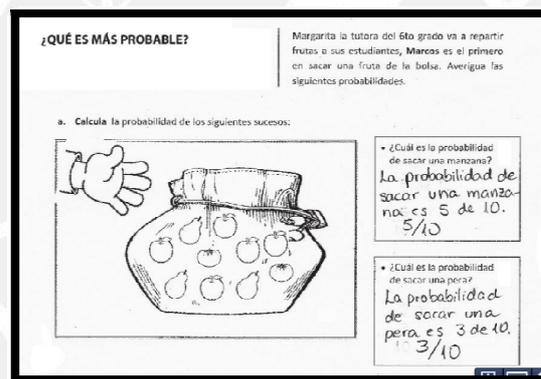


Figura 2. Calculando la probabilidad con el enfoque clásico
Fuente: Perú (2013, p.26)

b) **El planteamiento subjetivo:** es la medida de confianza que una persona razonable asigna a un evento. Es decir, mide la fuerza de la creencia personal, por ejemplo, un meteorólogo puede pronosticar que, según su opinión, la probabilidad de que llueva mañana es del 10%; otro pronosticador, basándose en los mismos datos y mapas meteorológicos, podría opinar que la probabilidad es de 20 %. (Mason, 1973).

c) **El planteamiento de frecuencia relativa:** en este enfoque, si tenemos un evento E de un experimento, se observa que, a medida que el número de ensayos del experimento va en aumento, es decir, se repite un número de veces suficientemente grande, la frecuencia relativa del suceso o evento E puede ocurrir con un alto grado de seguridad. Esto se puede explicar en la experiencia de sucesos similares, la que sirve para cuantificar la ocurrencia de un hecho.

La probabilidad del evento E se estima mediante la frecuencia relativa de E. Por ejemplo, si queremos emplear una vacuna para nuestra mascota, y sabemos que la zona es endémica a una determinada enfermedad, se puede probar aplicar 100 vacunas en mascotas en condiciones óptimas de vacunación. Si de las 100 mascotas, 80 muestran signos de mejora, al aplicar esta experiencia en otro tiempo o lugar, podemos afirmar con bastante certeza que la probabilidad de que una mascota quede inmunizada al aplicar la vacuna es del 80 %. (Romaina, 2010).

Los conceptos vistos hasta el momento son importantes porque nos ayudarán a construir las situaciones didácticas de nuestra secuencia. Si bien algunos de estos conceptos se trabajarán con los alumnos, no se usarán sus definiciones en el aula por ser muy formales para el nivel educativo en las que se utilizarían.

Las situaciones de incertidumbre que plantearemos en la secuencia de actividades serán principalmente de la realidad cercana del alumno, por ejemplo:

Planteando un ejemplo:

Se acerca el cumpleaños de Margot y le han propuesto que escoja un regalo entre:

Una fiesta - Una bicicleta

Determina para cada suceso la categoría correspondiente sabiendo que Margot es una niña tímida que no se siente bien siendo el centro de atención.

	Margot escoge una bicicleta	Posible - imposible
	Margot escoge un libro de cuentos	Posible - imposible
	Margot escoge una fiesta de cumpleaños.	Probable - improbable

En esta situación se está recurriendo a varios conceptos:

- ❖ Situación de incertidumbre: la elección del regalo por parte de Margot.
- ❖ Espacio muestral: se va a dar por lo que proponen a Margot, que en este caso va a ser pronosticado por el que resuelve esta situación.
- ❖ Restricciones: claramente se ha expresado que Margot es tímida.
- ❖ Contexto: el cumpleaños de Margot.
- ❖ Los sucesos: posible e imposible, que van a ser determinado al final de la situación aleatoria.

- ❖ El suceso probable o improbable, va a servir para determinarlo basándose en las restricciones.

2.3. Suceso aleatorio desde el punto de vista didáctico

2.3.1. Errores en la aleatoriedad y probabilidad

En la aleatoriedad, existen errores que se presentan al observar o recoger los resultados de una situación aleatoria; ellos son el error de equiprobabilidad, de representatividad y de disponibilidad.

a. Error de equiprobabilidad:

Ocurre cuando se considera los sucesos aleatorios son equiprobables, por naturaleza, aunque sus probabilidades no sean iguales. (Leucotre, 1992).

Leucotre (1992) había realizado experimentos y encontró errores en identificar la probabilidad a los cuales denominó “sesgo de equiprobabilidad”. En esta investigación, encuentra que el sesgo permanece en un 50% en las respuestas de los sujetos investigados. Esto apoya la idea de Fischbein (citado por Leucotre, 1992) que plantea que las intuiciones, correctas o incorrectas, a menudo están profundamente enraizadas en la mente de la persona. Por ejemplo, si soy el observador de un pasajero que quiere tomar un bus de Pueblo Libre a Chorrillos y sé que hay dos buses disponibles para hacer este recorrido y veo que se acercan los dos buses, casi vacío, al paradero, puedo pensar que la probabilidad de que el pasajero prefiera embarcarse en uno de ellos es de 50%. Pero estoy dejando de lado el hecho de que posiblemente los dos buses no tengan el mismo recorrido y, posiblemente, la probabilidad de que elegir el de recorrido menor es mayor para el pasajero; o el hecho de que uno de los buses tenga más disponibilidad para sentarse hace que sea preferido por el pasajero. Entonces la elección de los buses para embarcarse no es equiprobable, porque uno tiene más probabilidad de ser elegido por el pasajero.

b. Error de representatividad

Los investigadores Kahnemann, Slovic y Tversky (1982, citados por Godino, Batanero y Cañizares, 1996) han hallado en sus investigaciones sesgos en las respuestas o decisiones que los sujetos presentan al enfrentarse a un problema de incertidumbre. A continuación explicamos el sesgo de representatividad y el sesgo de disponibilidad estudiados por los autores.

Según el investigador Kahneman et al. (1982, citado en Batanero 2003) la heurística de representatividad consiste en evaluar la probabilidad de un suceso sobre la base de la

representatividad que este tiene respecto de la población de la que proviene. Esta representatividad suele usarse para indicar el suceso más probable: los menos representativos serán los menos probables. Hay un uso inapropiado de la representatividad que da lugar a errores; por ejemplo:

- ❖ Cuando decimos: “Carlos habla del PBI y del incremento del dólar, tiene que ser economista”. Este razonamiento puede llevar a un error, porque Carlos puede ser un profesor, pero muy interesado en los asuntos económicos del país o puede poseer una vocación de economista no desarrollada.
- ❖ Pedro tiene la costumbre de coger las cosas. Se pierde un objeto en el salón, y un niño dice: “Profesora, seguro que ha sido Pedro”. En este caso, la causa de pérdida puede deberse a muchos eventos; que efectivamente Pedro cogió el objeto, que el objeto este ahí y no se ha buscado con exhaustividad o pudo haberlo cogido otro niño.

c. Error de disponibilidad

Kahneman & Tversky (1974) afirman que una persona ha empleado la heurística de disponibilidad cuando estima la probabilidad de un suceso basada en la facilidad en que las asociaciones que hace llegan a la mente. Esto puede llevar a evaluar erróneamente un suceso, por ejemplo, cuando se expresa que Estados Unidos es uno de los países donde se presentan más casos de obesidad en las personas. Esta afirmación puede ser considerada falsa por otra persona, quien asocia rápidamente la afirmación con lo que se observa en las pantallas de televisión, en la que se muestran a actores y modelos estadounidenses con figura muy delgada.

2.3.2. Intuiciones de Fischbein

Fischbein (1994) formula una teoría en la cual define la noción de intuición y analiza el rol esencial que esta juega en los procesos matemáticos y científicos de los estudiantes. En su obra, considera el término “intuición” como equivalente a conocimiento intuitivo.

Para Fischbein (1987, citado por Zamora, 2014) las intuiciones son procesos cognitivos que tienen las características de inmediatez, globalidad, capacidad extrapolatoria, estructurabilidad y auto-evidencia.

- ❖ La inmediatez es un proceso espontáneo, no reflexivo.
- ❖ La intuición, además proporciona una visión global que se opone al pensamiento analítico o descomposición en partes.

- ❖ La intuición tiene en cierta manera una información que es incompleta, pero junto a la certeza intrínseca le es suficiente para extrapolar o hacer predicciones.
- ❖ El carácter de autoevidente es la característica fundamental de las intuiciones. Al relacionarse las intuiciones entre si forman estructuras de razonamiento.
- ❖ Perseverancia: Una vez establecidas, las intuiciones son muy resistentes al cambio. Al contrario la cantidad de teoremas y propiedades que hemos estudiado, formalmente son olvidados. (Fischbein citado en Cañizares, 1997).

Asimismo, el autor clasifica las intuiciones en primarias y secundarias. Las intuiciones primarias son aquellas que se derivan directamente de la experiencia, sin que hayan recibido instrucción sistemática, mientras que las intuiciones secundarias se forman en el contexto educativo, específicamente en la escuela.

El armonizar la intuición natural y las nociones matemáticas constituye un asunto importante para la educación, sino estas concepciones constituirían un obstáculo de aprendizaje (Mariotti, 1998).

Aprovechar las intuiciones primarias de los estudiantes y saber integrarlas con el conocimiento matemático son aspectos importantes para nuestro trabajo porque nos ayudará a diseñar nuestra secuencia de actividades para lograr el aprendizaje esperado. Específicamente, utilizaremos las intuiciones de los estudiantes en las situaciones didácticas de acción, en las que enfrentaremos al alumno con el problema. Para resolver el problema, el niño debe recurrir a sus saberes previos, a las intuiciones que ha ido desarrollando en su contacto con la escuela y aquellas innatas.

Al respecto, Fischbein (1979) señala lo siguiente:

But, returning to the constructive process, it seems interesting--both from a psychological and a didactical point of view--that, for the intuitionist doctrine in mathematics, an intuition is equivalent to the result of a constructive mental process. An idea is intuitively clear, it is intuitively acceptable, only if it can be effectively constructed by a mental process. (p. 53)

El autor nos dice que la intuición es equivalente al resultado de un proceso constructivo mental. Una idea es clara e intuitivamente aceptable solo si se puede construir de forma efectiva por un proceso mental.

En ese sentido, Fischbein (1979) nos plantea que la intuición,

Being a derived form of knowledge like analytical thinking, intuition can organize information, synthesize previously acquired experiences, select efficient attitudes, generalize

verified reactions, and guess, by extrapolation, beyond the facts at hand. The greatest part of the whole process is unconscious and the product is a crystallized form of knowledge which, like perception, appears to be self-evident, internally structured, and ready to guide action. (p. 37)

De acuerdo con la traducción, el autor expresa que la intuición;

Siendo una forma derivada del conocimiento como el pensamiento analítico, la intuición puede organizar la información, sintetizar las experiencias **previamente** adquiridas, seleccionar actitudes eficientes, generalizar reacciones verificadas, y, supongo que, por extrapolación, más allá de los hechos a mano. La mayor parte de todo el proceso es inconsciente y el producto es una forma cristalizada de conocimiento que, al igual que la percepción, parece ser evidente por sí mismo, estructurado internamente y listo para guiar la acción. (p. 37).

El autor nos dice que las intuiciones son moldeadas en la experiencia práctica, entonces para crear intuiciones probabilísticas en los estudiantes, nos dice que no hay otro camino que ayudándoles en la experiencia de la probabilidad. Por ello, se debe iniciar al estudiante desde los primeros años en el proceso de indagación e investigación en la creación de intuiciones y esta toma gran importancia en la enseñanza de probabilidades. Para ello hay una variedad de situaciones experimentales como tirar dados, lanzar monedas, extracción de monedas. Teniendo estas situaciones el alumno tiene que analizar una situación dada, hacer predicciones, organizar experimentos, registrarlos, clasificar los resultados y comparar los resultados. (Fischbein, 1979)

CAPÍTULO 3: ASPECTOS DE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación, vamos a tratar los elementos epistemológicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, que es el marco teórico en el que se diseñarán nuestras secuencias didácticas. Nuestra principal fuente de información será Brousseau (2007); sin embargo, también consideraremos a los siguientes autores: D'Amore (2006), Chevallard; Bosch y Gascon (2005) y Fregona y Báguena (2011) para afianzar nuestro marco teórico.

3.1 Teoría de las Situaciones Didácticas

La teoría de situaciones didácticas nace con la pretensión de Brousseau (2007) de unificar e integrar los aportes de otras disciplinas para una mejor comprensión de las posibilidades de mejoramiento y regulación de la enseñanza de las matemáticas.

Brousseau (2004) narra cómo nace su motivación para crear la Teoría de las Situaciones Didácticas:

El deseo de ofrecer aprender, de comprender, poseer y, recíprocamente, excitarse con la idea de compartir este placer] este placer me llevó a imaginar situaciones específicas, provocaciones didácticas que pudieran ser implementadas hábilmente si las disfrutaban. Y siempre tuve curiosidad por saber qué iban a decir sobre ello o hacer con ellas sus estudiantes. Estas tres claves me llevaron a: - considerar el aprendizaje matemático y las condiciones de enseñanza – incluso las aparentemente modestas – como sistemas, que yo denomino situaciones, e intentar anticipar su evolución, - determinar las condiciones de observación científica de las actividades didácticas, ya sean espontáneas o sugeridas, mientras se respeta no sólo a las personas sino también a sus funciones, - ser cauto con los efectos que un uso directo y casi mágico del conocimiento generado a partir de otros dominios científicos puede tener en la enseñanza.

Brousseau nos dice que es necesario modelizar las interacciones del estudiante con el medio como un dispositivo que “responde” al sujeto para orientar sus elecciones y comprometer un conocimiento que se quiere lograr. Considera este medio “autónomo y antagonista del sujeto”.

Sobre esta modelización Brousseau afirma (2007, p. 16):

Hemos llamado *situación* a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas *situaciones* requieren la adquisición "anterior" de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que le ofrecen al sujeto la posibilidad de construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso de génesis artificial.

En ese sentido, para comprometer un aprendizaje o conocimiento, es necesario plantear actividades en las que el maestro prepare el medio para que el alumno interactúe con él y con sus saberes previos y tenga la posibilidad de construir por sí mismo un conocimiento nuevo.

3.1.1 Conceptos básicos

a. Medio

La Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007) propone el concepto de situación adidáctica como un modelo de interacción entre un sujeto y un medio, en la cual se construye un conocimiento como estrategia óptima de solución de un problema. El medio se concibe como un antagonista del sujeto, que impone restricciones a sus acciones, y también ofrece posibilidades de acción.

b. Situación adidáctica

Es una situación organizada para el aprendizaje de un conocimiento en la que el alumno se enfrenta solo al problema planteado sin la intervención o mediación del profesor.

Brousseau (1986) afirma:

La concepción moderna de la enseñanza va por tanto pedir al maestro [...] una elección acertada de los problemas que le propone. Estos problemas, elegidos para que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerle actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por sí mismo. [...] El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas. (p. 14)

De otro lado respecto a la situación adidáctica, Fregona y Báguena (2011) afirman:

...se busca que el conocimiento al que recurra o produzca el alumno se justifique por su interacción con el medio, sin la indicación implícita o explícita del docente. Se las llama *situaciones a didácticas*, y constituyen de alguna manera un sistema ideal". (p. 9)

c. Situación didáctica

Es una situación modelizada intencionalmente por el maestro para que el alumno adquiera un conocimiento. La situación didáctica puede contener varias situaciones adidácticas y comprende las relaciones explícitas e implícitas entre los estudiantes, un cierto medio y al profesor, con el objetivo de que los estudiantes aprendan el conocimiento matemático. El profesor actúa sobre el par alumno-medio para hacer funcionar las situaciones adidácticas. La situación didáctica es mucho más amplia y compleja. (Chevallard, 1997); por ello, para que evolucione una situación didáctica que, involucra situaciones adidácticas se requiere la intervención constante, la acción mantenida y la vigilancia del profesor.

De otro lado, Brousseau (1998), nos dice: “Pero, ¿si el alumno rehúsa o evita el problema, o no lo resuelve? El maestro tiene la obligación social de ayudarlo e incluso a veces de justificarse por haber planteado una cuestión demasiado difícil” (p. 15).

d. Variables

Brousseau (2007) denomina variable cognitiva, a aquella a la que se le da valores diferentes para provocar cambios en el conocimiento óptimo. Siendo una de las variables cognitivas, las variables didácticas.

En ese sentido Chevallard (1997) nos plantea:

Una variable de situación adidáctica se llama variable didáctica si sus valores pueden ser manipulados (fijados o cambiados) por el profesor. Partiendo de un conocimiento concreto y de una situación adidáctica específica de dicho conocimiento, resulta que la modificación de los valores de las variables didácticas de esta situación adidáctica permite engendrar un tipo de problemas a los que corresponden diferentes técnicas o estrategias de resolución.(p. 230)

Un ejemplo de variable didáctica presente en una situación adidáctica, es la variable cantidad por color. Es así que en nuestra investigación planteamos tres ítems donde se observa el cambio de valores de la variable: (a) En un corral hay 6 conejos negros y 3 conejos blancos. Si tuviera que sacarse un conejo sin verlo, ¿qué es más probable que saque? En este caso, el estudiante, hará una comparación de casos favorables, de aquel conejo cuyo color que tenga más cantidad con respecto a otro.

(c) En un corral hay 4 conejos negros y 9 conejos blancos. Si tuviera que sacarse un conejo sin verlo, ¿qué es menos probable que saque? En este caso, estudiante, evaluará el número de casos desfavorables, es decir, se fijará que gatos de cierto color tienen menor cantidad con respecto a otro.

e. Devolución de una situación adidáctica: el contrato didáctico

En una situación didáctica se modeliza un medio para que el alumno alcance un aprendizaje; en dicho proceso, se encuentran dos jugadores: uno que busca que el alumno aprenda y el otro que busca que el profesor le enseñe. El profesor busca que el alumno se haga responsable de una situación adidáctica concreta, para ello ha creado las condiciones en una situación didáctica para que el alumno por sí mismo pueda aprender al hacer funcionar y evolucionar sus conocimientos. Esto constituye un proceso de devolución de una situación didáctica.

En palabras de Brousseau (2007): “La devolución es un acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctico) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia.” (p. 87).

En tanto, hablamos de que el alumno acepte ser responsable de su aprendizaje y el maestro acepte las consecuencias de esa transferencia; por ello, estamos frente a una negociación que se denomina contrato didáctico. En palabras de Brousseau (1986):

Así pues, en todas las situaciones didácticas el profesor intenta hacer saber al alumno lo que quiera que haga. Teóricamente el paso de la información y de la consigna del profesor a la respuesta esperada, debería exigir por parte del alumno la puesta en acción del conocimiento buscado, ya sea éste conocido o en vías de aprendizaje. Sabemos que el único medio de hacer matemáticas es buscar y resolver problemas específicos y, a este respecto, plantear nuevas cuestiones. El maestro debe por tanto efectuar no la comunicación de un conocimiento, sino la devolución de un buen problema. Si esta devolución se lleva a cabo, el alumno entra en el juego y si acaba por ganar, el aprendizaje se ha realizado. Pero, ¿y si el alumno rehúsa o evita el problema, o no lo resuelve? El maestro tiene entonces la obligación social de ayudarlo e incluso a veces de justificarse por haber planteado una cuestión demasiado difícil. Entonces se establece una relación que determina –explícitamente en parte pero sobre todo implícitamente– lo que cada protagonista el enseñante y el enseñado, tiene la responsabilidad de administrar y de lo que será responsable delante del otro de una forma u otra. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato. Lo que nos interesa aquí es el contrato didáctico, es decir, la parte de este contrato que es específica del contenido: el conocimiento matemático buscado. (p. 15)

Al hacer responsable al alumno de su aprendizaje, surge una paradoja. Según Brousseau (2007), el maestro desea que el alumno elabore la respuesta con sus propios medios, pero, al mismo tiempo, el maestro tiene el deber de querer que el alumno dé con la respuesta correcta. En ese sentido, Brousseau nos dice: “Debe pues, comunicar ese saber sin tener que develarlo, lo cual es incompatible con una relación contractual”. (p. 87).

En ese sentido, el maestro se encuentra en la paradoja de cumplir el contrato didáctico de que el alumno logre el aprendizaje. En este caso, puede ceder en revelar la respuesta del problema, pero arriesga “la oportunidad de obtener y constatar objetivamente el logro del aprendizaje, en realidad al cual debe mirar”, (Brousseau, citado en D’Amore, 1995). Por el lado del alumno, aprender implica aceptar la relación didáctica pero debe considerarla provisional y debe esforzarse por rechazarla.

Un efecto del contrato didáctico, según Brousseau, que pueden afectar los desempeños de los alumnos, es el efecto topaze, en el cual el estudiante llega a la solución de un problema, pero no por sus propios medios, sino porque el profesor asume la resolución del problema al dar la respuesta en forma disimulada o al hacerle cada vez más evidente la respuesta.

Un ejemplo lo constituye siguiente problema: Carla tiene 6 conejos negros y 3 conejos blancos. Si tuviera que sacar un gato sin ver, ¿qué es más probable que saque? Los alumnos pueden no entender y preguntar al profesor: ¿saldrá el conejo negro? El profesor puede contestar: sí, muy bien. En este caso, se develó la respuesta al alumno, porque esta no fue producto de las indagaciones, de hacer funcionar y evolucionar sus conocimientos.

A continuación, se presenta las fases de las situaciones didácticas:

3.1.2 Fases de las situaciones didácticas

Situación de acción

Es una situación didáctica en la que el niño interactúa solo frente al problema y pone en juego sus estrategias rechazándolas y aceptándolas según les sean útiles o eficaces. La consecución de resultados frente a esta manera de abordar las estrategias va a constituir su metodología de resolución de problemas, que es una manera de aprender a resolverlos.

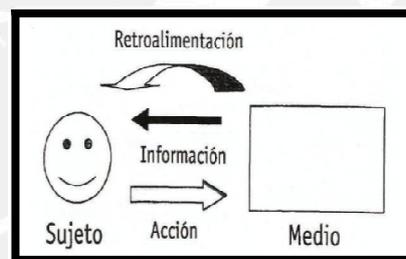


Figura 3. Situación de acción

Fuente: Brousseau (2007, p 25)

Situación de formulación

Es una situación en la que se comunica e intercambia información. Este proceso de comunicación se produce en términos de reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico. La formulación del conocimiento está regulada por dos tipos de retroacciones: por otro compañero y por el medio. Brousseau (2007).

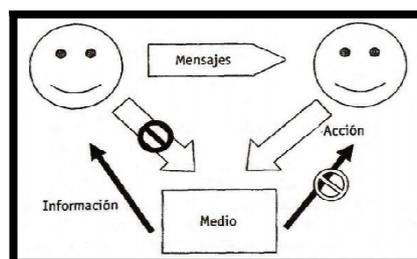


Figura 4. Situación de formulación

Fuente: Brousseau (2007, p 26)

Chevallard y otros (1997) afirman que “es necesario que pueda utilizar dicha formulación para obtener él mismo o hacer obtener a alguien un resultado” (p. 237).

Esta situación es muy importante ser desarrollada en nuestra propuesta, y va implicar también que generemos actividades interesantes que incentiven el interés de comunicar.

Situación de validación

Es una situación donde el alumno debe demostrar que el modelo de solución que ha hallado es válido. El niño que emite la información es un proponente y debe probar la exactitud y el receptor un oponente que pide explicaciones. En esta etapa las conclusiones planteadas en acción y formulación ya han sufrido las correcciones. Por lo tanto, todos poseen informaciones para tratar el tema. Argumentan en búsqueda de la verdad de relacionar o vincular correctamente los conocimientos, pero enfrentándose a dudas. Sin embargo, para realizar la situación de validación no es requisito haber trabajado la situación de acción y formulación. Brousseau (2007).

La situación de validación permite al alumno poner en marcha los saberes y los conocimientos matemáticos como medios de convencer y convencerse llevándole a rechazar los medios retóricos o de autoridad, pero deben recibir con respeto, el punto de vista del oponente y defender el suyo. Caso contrario si les parece que están equivocados, deben aprender a cambiar de posición. En palabras Brousseau (1998): “Estas situaciones muestran el anclaje profundo de la actividad matemática en el pensamiento racional y la importancia educativa de lo que ponen en juego, que sobrepasa el simple dominio del aprendizaje de conocimientos” (p. 55).

De otro lado, Chevallard, Bosch y Gascón(1997), una dialéctica de validación puede incluir diversas dialécticas particulares de la acción, o de la formulación. Entonces, una dialéctica de validación es en sí misma una dialéctica de formulación y, en consecuencia, una dialéctica de la acción.

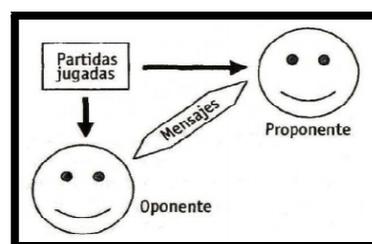


Figura 5.Situación de validación
Fuente: Brousseau (2007, p 25)

Situación de institucionalización

El proceso de institucionalización es una tarea fundamental en la que el maestro ayuda a los estudiantes a relacionar lo que han producido en las situaciones adidácticas con el conocimiento formal que se ha pretendido como objetivo de aprendizaje, esto se realiza para asegurar la consistencia de los saberes.

Brousseau (2007) nos señala la necesidad que tienen los maestros de institucionalizar:

Debían dar cuenta de lo que habían hecho los alumnos, describir lo que había sucedido y lo que estaba vinculado con el conocimiento en cuestión, brindarles un estado a los eventos de la clase en cuanto a resultados de los alumnos y resultados de la enseñanza, asumir un objeto de enseñanza, identificarlo, acercar las producciones de los conocimientos a otras creaciones, (...) mostraron la necesidad de tener en cuenta fases de institucionalización que dieran a determinados conocimientos el estado cultural indispensable de saberes. (p.28)

Asimismo, D'Amore, (2007) afirma: “La institucionalización de los conocimientos entra en juego, por ejemplo, en la verificación de la resolución de los problemas, en el transcurso de un balance de las actividades desarrolladas en clase”. (p. 97)

En ese sentido, nosotros haremos una institucionalización local para formalizar los conocimientos después de cada actividad, lo haremos en el sentido dialéctico de Brousseau de conjugar las fases de acción, formulación y validación, no en el sentido de una situación clásica: “las situaciones clásicas de enseñanza son escenarios de institucionalización sin que el docente sea responsable de la creación de sentido: se dice lo que se quiere que el alumno sepa, se le explica y se verifica si lo aprendió”. (Brousseau, 2007, p. 98-99).

3.1.3 Las dialécticas

El aprendizaje en la teoría de las situaciones didácticas tiene un carácter dialéctico en el sentido de hacer evolucionar los conocimientos según procesos complejos que desarrollan los estudiantes al enfrentarse a los problemas. En ese sentido, Brousseau (2007) plantea:

Cada situación puede hacer que el sujeto evolucione, y por ello también puede evolucionar a su vez de modo tal que la génesis de un conocimiento puede ser el fruto de una sucesión espontánea o no) de nuevas preguntas y respuestas en un proceso que he calificado como “dialéctica”. En tales procesos, las sucesiones de situaciones de acción, formulación y validación pueden conjugarse para acelerar los aprendizajes (tanto si se presentan espontáneamente como si se provocan voluntariamente). (p. 29)

En ese sentido, presentaremos una secuencia didáctica en un contexto real y de interés del alumno, que le permita entrar en un juego de planteamientos, preguntas y repreguntas, esto se verá generado y favorecido por el trabajo en duplas, y se planteará en una secuencia didáctica. Como expresa Brousseau (1986): “el dialogo con un oponente interior es ciertamente menos vivificante que un verdadero dialogo, pero es un dialogo”. (p. 46).

3.1.4 La noción de obstáculo

Según Brousseau (2007) nos dice: “Un obstáculo es un conocimiento en el sentido que le hemos dado de manera regular de tratar un conjunto de situaciones”. (p. 45).

Respecto a la noción de obstáculo Chevallard, Bosch y Gascón (1997) nos dicen:

En resumen, tenemos que un obstáculo siempre va asociado a un cambio de estrategia necesario y, por tanto, al desarrollo del conocimiento matemático. Si lo miramos desde el punto de vista del profesor (o en general, del director de estudio), podría decirse que el obstáculo es el conocimiento de la primera estrategia que dificulta la aparición de la nueva. Pero desde la óptica del conocimiento matemático mismo, lo que caracteriza un obstáculo concreto no es la antigua ni la nueva estrategia, es el cambio de estrategia y su necesidad en el proceso de adaptación a la situación adidáctica. (p.240)

Por eso Brousseau (2007) plantea que el obstáculo opone resistencia a la adquisición de un nuevo conocimiento, a su comprensión y que reaparece de forma imprevista. Brousseau nos dice que hay que rechazarlo explícitamente y negarlo en el aprendizaje del nuevo conocimiento.

En el tratamiento de los conocimientos de nuestra secuencia didáctica es posible que aparezcan obstáculos, entonces será necesario tomar observación de ello y rechazarlo explícitamente.

3.2 Metodología

La metodología que emplearemos en la presente investigación es cualitativa. Como dice Martínez (2006), de cualidades de un todo integrado que constituye una unidad de análisis, que puede ser: una persona, una entidad étnica, social, empresarial, etc. Así pues, se trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades que se explican y dar razón plena de su comportamiento y manifestaciones.

En este caso, nuestro trabajo de investigación es un todo integrado conformado por el diseño y experimentación de una secuencia didáctica, en la que, propiamente, nuestra unidad de análisis son todos los hechos y acontecimiento que ocurren al ponerse en experimentación la secuencia didáctica.

En ese sentido, una metodología de investigación cualitativa dentro de la didáctica de las matemáticas es la Ingeniería Didáctica, basada en un esquema experimental que se encarga de la complejidad de los fenómenos que se realizan en el aula. De ahí que algunos aspectos de la

Ingeniería Didáctica nos van a servir como metodología para el desarrollo de la noción de suceso, posible, suceso imposible, suceso seguro y suceso más probable.

3.2.1 Aspectos de la Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica se basa en las realizaciones didácticas en clase, y comprende la concepción, que es el diseño de la secuencia de enseñanza; la realización, que es la producción de la secuencia de enseñanza; la observación de las secuencias didácticas; y el análisis de la secuencia de enseñanza.

Con respecto al papel de la Ingeniería Didáctica en un proyecto de aprendizaje en clase, Douady (1995) afirma: la Ingeniería Didáctica nos ayuda a organizar y a estructurar coherentemente nuestro proyecto de aprendizaje, que es la puesta en acción de una secuencia didáctica para el aprendizaje de un contenido concreto.

Respecto de la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, Artigue (1995) plantea que esta se caracteriza por:

- a. tener un esquema experimental basado en las **realizaciones didácticas en clase**, referidas a la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.
- b. ubicarse en el registro de estudio de casos y una validación, en esencia, interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

En la primera característica se distinguen dos niveles que dependen de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación, que son el nivel micro y la macroingeniería. Las investigaciones al nivel de micro ingeniería tienen por objeto el estudio de un conocimiento matemático, que se produce de manera local y atiende a la **complejidad de los fenómenos de clase**.

El presente trabajo se centrará en las realizaciones didácticas en clase en el nivel de la micro ingeniería, porque experimentaremos y analizaremos la puesta en acción de una secuencia didáctica para el desarrollo de la noción de suceso aleatorio y para el análisis de los fenómenos que se produzcan en clase. La validación será de tipo interno porque confrontaremos el análisis a priori y a posteriori.

3.2.2 Fases de la Ingeniería Didáctica

En esta parte vamos a detallar las fases aplicadas en esta tesis.

Fase 1: Análisis Preliminar

En esta fase, analizamos investigaciones sobre las dificultades que tienen los futuros maestros para solucionar problemas de sucesos aleatorios y de probabilidad. También se rescata la evaluación realizada en estudiantes de secundaria, en la cual se mostraba que los estudiantes tenían dificultades para resolver ejercicios sencillos de probabilidad; y documentos oficiales y currículos de otros países que abordan el tema de suceso aleatorio y otros aspectos, los cuales nos han permitido plantear nuestra pregunta de investigación y los objetivos que se pretende conseguir al finalizar este trabajo. Todos estos aspectos están tratados en el capítulo I como antecedentes y justificación del problema.

Considerando la realización de una secuencia didáctica, se hace necesario la presentación de tres dimensiones:

❖ **En cuanto a la dimensión epistemológica:**

En la presente investigación se analizaron los aspectos teóricos del objeto matemático “suceso aleatorio”, así como las investigaciones que consideramos importantes para nuestro trabajo. Estos aspectos están detallados en el capítulo II.

❖ **En la dimensión didáctica:** presentamos los contenidos referentes al suceso aleatorio en el DCN y los Mapas de Progreso de Estadística y Probabilidad. Hemos considerados estos aspectos en el primer capítulo, en el apartado justificación de la investigación.

❖ **En la dimensión cognitiva:** en este ámbito, presentamos los principales errores que se presentan al momento de trabajar el suceso aleatorio como plantea Leucotre (1992) y los investigadores Kahnemann, Slovic y Tversky (citados por Godino, Batanero y Cañizares, 1996) que están detallados en el capítulo II.

❖ **Análisis de restricciones:**

El lugar donde se aplicará la secuencia didáctica fue el distrito de Ciudad Nueva, de la provincia de Tacna, en la región Tacna. La población de Ciudad Nueva está dedicada básicamente al comercio, a trabajos eventuales de empresas y a trabajos en la municipalidad de dicho distrito.

La institución educativa está ubicada en la zona circundante a la ciudad de Tacna, es una institución de educación mixta con una población de 600 estudiantes en el nivel primario. Las aulas de esta institución educativa están dotadas de pizarras interactivas y de mesas bipersonales, condiciones aceptables para llevar a cabo la experimentación.

Los estudiantes con los que trabajamos la experimentación cursan el cuarto grado “C” de educación primaria, y fueron doce estudiantes cuyas edades fluctúan entre los 9 y los 10 años

Fase 2: La concepción y el análisis a priori

En esta fase, se definieron las variables comando pertinentes, el investigador las modificará para generar aprendizajes.

Artigue (1995) considera dos tipos de variables: (1) Las variables macro didácticas o globales, que son las variables asociadas con la organización y la gestión del medio; y (2) las variables micro didácticas que son las que conciernen a la organización local, es decir, a la organización de una secuencia didáctica en nuestro caso.

Según el efecto y cambios en las estrategias que generen las variables didácticas, el investigador planteó hipótesis de lo que harían y responderían los estudiantes. En este punto, dice Artigue (1995), empieza la Ingeniería Didáctica por medio del Análisis a priori que se confrontará con el análisis a posteriori. En el análisis a priori se va a determinar de qué modo las elecciones que realiza el investigador permiten controlar el comportamiento de los estudiantes y los significados que fueron construyendo con respecto al conocimiento pretendido.

Nosotros pretendemos en esta investigación que el alumno desarrollara la noción de suceso posible, suceso imposible y suceso más probable a partir de una secuencia didáctica y para ello variamos y controlamos ciertas condiciones que permitieron desarrollar las nociones que pretendimos. Estas condiciones que modificamos y controlamos fueron nuestras variables didácticas, las cuales detallamos a continuación.

Variables micro-didácticas

Son las variables referidas a la organización local de la ingeniería y son modificaciones intencionadas en las condiciones de la situación, las cuales crean un conflicto cognitivo o perturban el conocimiento que se tiene. Luego, se produce una acomodación y adaptación a estos cambios que van a generar la construcción del conocimiento. Para ello, hemos considerado las siguientes variables en nuestro trabajo de investigación: (a) Tipo de animal, (b) Forma del cuerpo de la cría, (c) Color, (d) Espacio muestral y (e) Cantidad por color. Estas variables didácticas serán explicadas en el capítulo de concepción y análisis a priori.

Fase 3: Experimentación

Es la fase en la que se desarrolla el proceso de enseñanza aprendizaje planificado y previsto con la población de estudiantes. Como afirma Faria (2006), esta fase se inicia en el momento en que se produce el contacto investigador/profesor/observador con la población de estudiantes, objeto de la investigación. La secuencia de actividades es implementada mediante el manejo de las variables didácticas que van a ser controladas por el investigador.

En esta fase se hace importante recoger información, por ello Valero (1997) propone observar el proceso didáctico en lo que se refiere a:

- (1) La actuación del profesor: cómo estableció y manejó el contrato didáctico, cómo realizó la devolución del problema, cómo hizo la institucionalización.
- (2) La actuación del estudiante: cómo se involucró en el juego didáctico, cómo reaccionó frente a las variables didácticas.
- (3) El funcionamiento del problema mismo: cómo su formulación permitió (o no) la devolución, si era un problema o no.

El investigador puede hacer uso de herramientas como las video-grabaciones, audio-grabaciones, observación directa del trabajo de los estudiantes, observación de un colega externo a la clase, entrevistas con los estudiantes, etc. En nuestra investigación contamos con grabaciones en audio y video.

Fase 4: Análisis a posteriori y validación

En esta fase, se hace el análisis de los datos, según la Teoría de las Situaciones Didácticas, de la problemática de investigación. De esta manera, se pudo conectar el problema de la investigación con los objetivos generales y específicos. Asimismo, se hace una confrontación de los resultados esperados, que es el análisis a priori y las producciones de los estudiantes obtenidos en la experimentación que se describen en el análisis a posteriori, en el que se fundamentó la validación de las hipótesis planteadas.

En ese sentido, revisaremos las fichas de aplicación sobre suceso aleatorio que trabajarán los estudiantes para determinar qué lograron responder, y lo confrontaremos con los aprendizajes esperados planteados en el análisis a priori. En este punto, se realiza el enlace y relación con nuestra pregunta de investigación y objetivos.

CAPÍTULO 4: CONCEPCIÓN Y ANALISIS A PRIORI

En este capítulo, presentamos los aspectos generales de una secuencia didáctica con sus objetivos, los materiales a utilizar, el tiempo empleado, la caracterización de los sujetos de la investigación; asimismo, presentamos los resultados esperados.

4.1 Consideraciones generales de la secuencia didáctica

Nuestro trabajo de investigación propone diseñar una secuencia de actividades en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), la cual constará de tres actividades. La primera actividad contuvo ítems en los que el estudiante tuvo que determinar un grupo de sucesos aleatorios posibles desde una situación presentada y clasificar un suceso aleatorio propuesto en posible o imposible; en la segunda actividad, se trabajó con la clasificación de un suceso como seguro; y en la tercera actividad, el alumno tuvo que decir que un suceso es más probable que otro dentro de una situación concreta.

La actividad 1, se trabajará en una sesión de aprendizaje de cincuenta minutos y constará de 5 ítems. En el primer ítem se plantea una pregunta donde los estudiantes dibujarán posibles resultados para una situación de incertidumbre, y cuatro ítems donde tendrán que clasificar un suceso aleatorio según sea posible o imposible.

En la actividad 2 y 3 se han considerado 2 ítems para cada una, en las cuales los estudiantes tendrán que justificar sus respuestas. En estas preguntas, los problemas tienen variables en la que cambian los valores. Dichas actividades las aplicaremos en una sola sesión de aprendizaje de cincuenta minutos.

Pretendemos que la fase de acción se alcance, al relacionar la situación de incertidumbre propuesta y las condiciones específicas de la tarea que se le pide. Al hacer la relación se movilizarán los razonamientos y esquemas mentales internos, tendientes a proponer una estrategia de solución. Pretendemos alcanzar la fase de formulación cuando, al estar en duplas de trabajo, se creará una necesidad de informar sus conjeturas a su par, provocando un ir y venir que le permitirá a cada alumno afinar sus propuestas, tal como plantea Brousseau (2007) la génesis del conocimiento puede ser el fruto de una sucesión de nuevas preguntas y respuestas en un proceso que le denominó “dialéctica”.

Por ello, pensamos que en las actividades los estudiantes pasarán por las fases de acción y formulación, e inclusive en algunos casos por la fase de validación, porque en ese escenario

de dudas y certezas tratan de justificar con sus formulaciones la solución que más le conviene a la situación, como dice Brousseau (2007).

El contrato didáctico será explicitado al inicio de la secuencia didáctica: los alumnos trabajarán en duplas planteando sus justificaciones y llegando a conclusiones para solucionar el problema. Adicionalmente, se indicará que las actividades fueron diseñadas para que ellos puedan solucionarlas con el apoyo del compañero. El proceso de devolución estará presente en la medida en que el maestro devolverá cuando sea necesario o a solicitud del alumno la pregunta en términos de otra pregunta que genere la apropiación mental de esa idea y ayude a los estudiantes a construir su estrategia de solución. Este proceso de devolución cumple dos roles en el sentido de que el alumno tiene que aprender y el maestro tiene que enseñar, al realizar este proceso estamos cumpliendo también con el contrato didáctico.

Para la fase de institucionalización, vamos a usar como recurso láminas grandes con algunas preguntas de la secuencia didáctica para que informen de las respuestas a las que han llegado, de esa manera vinculamos las ideas y trabajos, al hacerlo el profesor repregunta, aclara y concluye los conocimientos formales.

Esta secuencia didáctica se caracterizará por usar situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana para que el alumno pueda relacionar los contenidos con el contexto real, como lo recomienda el modelo GAISE y el NCTM (2000). En este caso se trabaja con el tema de mascotas, específicamente de perros y gatos. Lo planteamos así porque el NCTM (2000) nos recomienda que la probabilidad es una forma natural de relacionar las matemáticas, en este caso, el suceso aleatorio con otras asignaturas, experiencias, e intereses de la vida diaria de los estudiantes.

A continuación, presentaremos la secuencia didáctica con sus objetivos, las fases de la TSD que guían las actividades de la secuencia didáctica, asimismo los comportamientos esperados para cada pregunta o ítem.

4.2 Secuencia didáctica a través de las fases de la TSD

La secuencia didáctica tiene objetivos de aprendizaje planteados dentro del marco curricular nacional y están en relación con las capacidades que plantearemos para el cuarto grado de educación primaria:

- ❖ Representa algunos posibles resultados de una situación aleatoria cotidiana.
- ❖ Clasifica y justifica un suceso como imposible o posible.
- ❖ Clasifica y justifica un suceso como seguro.

- ❖ De una situación aleatoria reconoce y explica un suceso como más probable.

Las hojas impresas con la secuencia didáctica serán entregadas una por una en forma secuencial y conforme terminen las duplas de estudiantes. Se otorgará un promedio de cinco minutos por ítem.

4.2.1 Descripción de objetivos y análisis a priori de la actividad 1

En esta secuencia trabajaremos con las variables que presentamos en la tabla n° 4. Lo que se pretende es evaluar distintas posibilidades de cada suceso aleatorio teniendo en cuenta los valores de la variable didáctica.

Tabla 4. Variables didácticas de la actividad 1

Variable didáctica	Valores
<input type="checkbox"/> Color	{Colores de la madre, colores del padre, colores de ambos, colores de ninguno}
<input type="checkbox"/> Tipo de animal	{Perro, gato}
<input type="checkbox"/> Forma del cuerpo de la cría	{Parecido a la madre, parecido al padre, parecido a ambos, sin parecerse a ninguno}

a. Color

Se presentarán situaciones aleatorias donde se presenta posibles crías con diferentes colores. El alumno creemos que evaluará el suceso como posible si tiene los colores del padre o a la madre, o si tiene colores de ambos. Pensamos que hará corresponder cada color a uno de los padres o la combinación de ellos. Se plantearán situaciones aleatorias en las que se presentó posibles crías con diferentes colores. Nuestra hipótesis será que el alumno evaluará el suceso como posible si tenían los colores del padre o de la madre, o si tenían colores de ambos. Pensamos que harían corresponder cada color con las características de uno de los padres o la combinación de las particularidades de los dos.

b. Tipo de animal

Esta variable didáctica la vamos a explicar con respecto a los valores que puede tomar. Planteamos, en esta actividad, un ítem donde se presenta la figura de un gato con los mismos colores que los perros indicados en el enunciado, con ello pretendemos que los estudiantes lleguen a la conclusión de que es imposible que nazca un gato teniendo como padres a perros.

Los estudiantes evaluarán en el ítem (c), si el suceso aleatorio tiene la correspondencia del tipo de animal de quien procede.

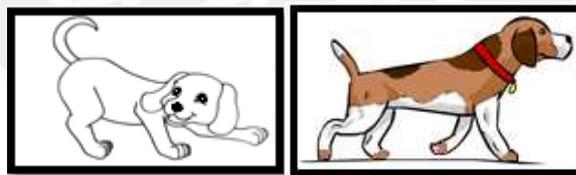
c. Forma del cuerpo de la cría

En este punto, presentamos la variable forma del cuerpo de la cría. Proporcionamos los valores de parecido al padre, parecido a la madre, parecido a ambos y sin parecerse a ninguno. Los estudiantes, al observar las formas de las manchas de colores, la cola, el pelaje y las orejas plantearán, por ejemplo, que como la cría posee diferente pelaje, forma de las orejas y de la cola, no se parece a los padres por lo que es imposible que sea descendiente de ellos.

Para evaluar la ocurrencia de sucesos de los ítems de la actividad 1 esperamos que los estudiantes hagan uso de correcto del razonamiento o heurístico de representatividad como plantea Tversky y Kahneman, (1983, p. 295, citado en Godino, 2003, p. 3), porque estarán evaluando correctamente el grado de similitud del suceso ocurrido que es la cría, con la categoría que representan sus padres; como también dice Kyburg (1974, citado en Batanero, 1995) debemos analizar la propiedad del suceso de ocurrencia para que se considere miembro aleatorio de una clase dada.

Análisis a priori del ítem (a)

Valeria tiene una perrita que está preñada. Ella está muy emocionada por el nacimiento de las crías. Su perrita es de color blanco y el papá de los futuros cachorritos, es de un matiz chocolate, chocolate claro y blanco.



❖ Dibuja tres posibles crías.

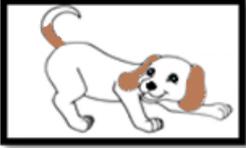
El objetivo que queremos lograr es que dada una situación aleatoria el alumno plantee sucesos posibles, que viene a constituir una parte del espacio muestral.

Esperamos que los estudiantes lean silenciosamente y puedan plantear mentalmente las características que puedan tener las crías, aquí estarían entrando en la fase de formulación. Luego, de ello esperamos que intercambien sus formulaciones de cómo deberían ser las crías. Se espera, que como parte de sus acciones, dibujen cachorros con características de los padres. En esta respuesta también esperamos que el niño dibuje alguna o algunas características no presentes en perros padres, haciendo una retrospección al pasado de los

padres, esto dado que la aleatoriedad es subjetiva a la persona que analiza. Al hacerlo los estudiantes estarán pasando por la fase de acción y formulación.

Análisis a priori de los ítems (b), (c), (d) y (e)

b. ¿Es posible que nazca una cría con los colores como se aprecia en la figura?



POSIBLE

IMPOSIBLE

¿Por qué?
.....

c. ¿Será posible que este animalito sea una cría?



POSIBLE

IMPOSIBLE

¿Por qué?
.....
.....

d. ¿Será posible que nazca una cría como la figura?



POSIBLE

IMPOSIBLE

¿Por qué?
.....
.....

e. ¿Será posible que nazca un perrito de la figura? Marca la respuesta



POSIBLE

IMPOSIBLE

¿Por qué?
.....
.....

El objetivo que se busca en estos ítems es que dada una situación de incertidumbre o aleatoria clasifique un suceso como posible e imposible, y que luego justifiquen dicha clasificación.

Lo que esperamos en la solución del ítem (b), (c), (d) y (e) es que el niño relacione las características que tienen las crías con las de los padres y conozca que aquellos sucesos que

pueden ocurrir se los identifiquen como suceso posible, y los sucesos que no puedan ocurrir, como suceso imposible.

Para evaluar la ocurrencia de sucesos de los ítems (b) y de (d) esperamos que los estudiantes hagan uso correcto del razonamiento o heurístico de representatividad como plantea Tversky y Kahneman, (1983, p. 295, citado en Godino, 2003, p. 3), y como también dice Kyburg (1974, citado en Batanero, 1995). De esta manera se espera que formulen entre los integrantes de la dupla en el sentido que la cría tiene la forma del cuerpo y colores del padre, además posee el mismo tipo de sus padres. Los estudiantes estarían pasando por la fase de validación cuando justifiquen que es porque la cría ha heredado las características de los padres, evaluando forma, tipo y color. Dos ejemplos de respuestas esperadas para el ítem (b) son: (i) Posible, porque tiene los colores de ambos padres y tiene la forma de la madre. (ii) Posible, porque de padres que se juntan los hijos nacen combinados en su forma y color. Para el ítem (d) las respuestas esperadas son: (i) Posible, porque combina los colores de los padres. (ii) Posible, porque tiene los colores de los padres, pero también tiene manchas grandes de color blanco, que son de la madre.

Con respecto al ítem (c) y (e) esperamos que evalúen el tipo de animal y sus respectivos valores: si hablamos del mismo tipo de animal, si es parecido a los padres en el cuerpo y si tiene los colores; debiendo concluir que es imposible que nazca una cría con esas características. En el ítem (c) los estudiantes formularán que los colores corresponden a los padres, pero ni la forma ni el tipo corresponden. Sin embargo, producto de sus justificaciones y de estar convencidos, deberán concluir que es imposible que de un perro pueda nacer un gato (Validación). Sin embargo, la relación del color de la posible cría con los padres, pueda llevar a confusión, en ese caso esperamos que los alumnos producto de sus formulaciones y justificaciones puedan construir la solución. En el ítem (e) esperamos que evalúen si corresponde el tipo, en este caso la raza de la cría no corresponde, por lo que deberán concluir que es imposible, pues la cría es de una raza distinta a la de los padres, que no tiene relación en cuanto a forma, color y tipo. Dos ejemplos de respuestas esperadas para el ítem (c) son: (i) Porque es imposible que nazca un animal diferente al de sus padres. (ii) Imposible porque el gato es otro tipo de animal distinto al de sus padres. Para el ítem (e) las respuestas esperadas son: (i) Es imposible porque este perrito es de otra raza. (ii) Imposible porque esa raza es siberiano y no es igual a los perros de los que estamos hablando.

Pretenderemos que los estudiantes pasen por una fase de acción, porque se enfrentan solos frente al problema haciendo uso de sus intuiciones y evaluando posibles características de los

crías. También estarán pasando por una fase de formulación y validación, al plantear sus hallazgos y argumentar para llegar a la solución.

4.2.2 Descripción de objetivos y análisis a priori de la actividad 2

El objetivo de aprendizaje en esta actividad es que los estudiantes clasifiquen y justifiquen un suceso como seguro.

Tabla 5. Variables didácticas de la Actividad 2

Variable didáctica	Valores
Espacio muestral	{Gato plomo, gato pardo} {Otorongo, tigre, león, guepardo, puma}

Espacio muestral

En esta actividad hay espacios muestrales diferentes trabajados en los ítems. En el ítem (b) hay dos sucesos posibles en el espacio muestral y en el ítem (b) hay 5 posibles resultados en el espacio muestral. En el primer ítem, el alumno va a evaluar qué es seguro que saque, teniendo el mismo tipo de animal distinguiendo solo los colores pardos y plomos. En el segundo ítem deberá evaluar entre distintos tipos de animales, el suceso seguro. En el primer caso el alumno evaluará dentro de una misma clase de animal teniendo como diferencia el color. Mientras en el segundo caso evalúa distintas clases de animales. Luego, representará en forma comprensiva el espacio muestral presentado, no lo determinará el espacio muestral mostrando todos los casos posibles sino dar una palabra que encierre o represente todos esos casos posibles para cada caso.

Análisis a priori Ítem (a)

Lo que se pretende lograr con este ítem es que el alumno reconozca un suceso seguro, o sea identificar el espacio muestral en forma comprensiva, es decir el suceso que siempre va a ocurrir. En este ítem los estudiantes podrán manipular siluetas de gatos pardos y plomos para que ellos puedan ejecutar el experimento aleatorio para determinar los resultados.

- ❖ Si en una jaula hubiera gatos pardos y gatos plomos.



- a) Y el dueño tuviera que sacar un gato sin verlo. ¿qué es seguro que saque? ¿Por qué?

Un gato plomo

Un gato pardo

Un gato

Esperamos que respondan que la única posibilidad de sacar con seguridad algo de la caja es sacar un gato, porque está tratando de describir espacio muestral en una palabra, es decir, de forma comprensiva para convertirla en un suceso seguro. Estarán en la fase de formulación cuando hagan conjeturas como que “puede sacar gato pardo” y “puede sacar gato plomo” y luego regresen continuamente a la pregunta. Estas aceptaciones, rechazos de sus conjeturas que se produce producto de leer la pregunta y de interactuar con el compañero, estamos pasando por la fase de validación y esto va a permitir que lleguen a la conclusión que pretendemos. Por ejemplo, un estudiante propondrá que va salir gato y el otro compañero le dirá: ¿por qué? Algunas de las respuestas esperadas para este ítem podrían ser: (i) Un gato, porque puede salir un gato pardo o plomo, pero seguro sale un gato. (ii) Un gato porque todos son gatos.

Estarán en la fase de acción y formulación de una situación a didáctica, porque los estudiantes intercambian conjeturas para resolver la situación planteada sin que intervenga el profesor. Además planteamos, que llegarán a la fase de validación, porque un alumno podrá tendrá que estar convencido para plantear su justificación y deberá convencer al otro compañero y el otro alumno podrá pedir explicaciones, luego aceptar o rechazar con una propuesta.

Análisis a priori del ítem (b)

En este ítem no se proporciona el material de siluetas, porque creemos que con la experimentación en el ítem anterior podrá aplicar correctamente el suceso.

❖ Si la jaula de cada uno de estos animales se abriera.



b) ¿Qué es SEGURO que salga de la jaula? ¿Por qué?

Un otorongo	Un tigre	Un león
Un guepardo	Un felino	Un puma

Este ítem es distinto al ítem (a), porque el contexto y el espacio muestral son diferentes. Esperamos que utilicen su intuición y creemos que validarán emitiendo justificaciones y producto de ello, deduzcan que los animales que se les presenta son felinos y por lo tanto es seguro que salga un felino. Puede también que no conozcan el significado de felino, pero el contexto le ayudará a relacionar el significado. También se podrá esperar que los estudiantes justifiquen que puede salir el puma o el guepardo porque son los más veloces. Al hacer estas justificaciones los estudiantes estarán pasando por la situación de formulación y validación.

4.2.3 Descripción de objetivos y análisis a priori actividad 3

El objetivo que se va a trabajar es que de una situación aleatoria el alumno deberá reconocer un suceso como más probable y deberá explicar por qué es más probable. Aquí volvemos a trabajar con gatos de los mismos colores, pero para evaluar cuando un suceso aleatorio es más probable.

Tabla 6. Variables didácticas de la Actividad 3

Variable didáctica	Valores
Cantidad por color	Cantidad: 4,5, 6, 7 Color: pardo y plomo

Cantidad por color

El estudiante deberá cuantificar el número de gatos, pero con respecto al color. Este valor tiene que ser evaluado comparando la cantidad de gatos pardos versus la cantidad de gatos plomos. Esto le permitirá determinar cuándo es más probable que ocurra el suceso.

En estos ítems trabajamos con valores color y cantidad. En el primer ítem (a) presentamos (6) gatos pardos y (4) gatos plomos. Luego, en el ítem (b) cambiamos las cantidades, asignándoles más cantidad a los gatos plomos.

- ❖ Pedro lleva en una caja seis (6) gatos pardos y cuatro (4) gatos plomos a la veterinaria para desparasitarlos.



- a. Si el veterinario le pide que saque uno de los gatos de la caja y Pedro lo hace sin verlo, ¿qué es **más probable** que saque? ¿Por qué?

Un gato plomo

Un gato pardo

- ❖ Pedro tiene en una caja (7) gatos plomos y cinco (5) gatos pardos.



- b. Él debe alimentarlos así que saca uno de ellos sin verlo, ¿qué es **más probable** que saque? ¿Por qué?

Un gato plomo

Un gato pardo

Análisis a priori ítem (a) y (b)

El objetivo que pretendemos lograr es que planteada una situación de incertidumbre el niño tendrá que reconocer y justificar cuando es más probable que suceda un suceso.

Los estudiantes pasarán por una fase de acción cuando lean el problema y de formulación cuando comunican a su compañero, por ejemplo: hay seis gatos pardos. Los estudiantes al interactuar con la pregunta planteada, las siluetas y su compañero, les proporcionaron información, y, en ese constante interactuar con el medio, también, les permitirá retroalimentar sus decisiones. Pasarán por una fase de validación, cuando al hacer sus informaciones las vinculan, o las rechazan. Por ejemplo podrán decir: “podría salir los gatos

pardos, porque son más limpios”, el otro niño podrá responder: “no, el dueño al sacar no los ve y no podrá saber si están limpio o no”. De esta manera, van validando sus justificaciones. Pretendemos que en el ítem (a) al observar que hay más gatos de color pardo concluya que es más probable que Pedro saque un gato pardo. En el ítem (b) pretendemos que respondan que Pedro sacará el gato plomo, porque hay mayor cantidad de ellos. Al hacerlo estarían evaluando correctamente y estarían usando el razonamiento de representatividad, caerían en el sesgo de representatividad si por ejemplo, asumen que como es más tranquilo “el gato pardo” Pedro sacará tal gato. Algunas de las respuestas esperadas para este ítem podrían ser: (i) Felino, porque todos son felinos. (ii) Un felino, porque seguro todos pueden salir de la jaula y todos son felinos



CAPÍTULO 5: EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS A POSTERIORI

En este capítulo, describimos las características de los estudiantes que participaron en la experimentación y relatamos su desempeño en toda la secuencia didáctica. Asimismo, cómo se desarrollaron los aspectos de la Teoría de las Situaciones Didácticas en la aplicación de la secuencia didáctica.

5.1 Caracterización y selección de los sujetos de la investigación

La secuencia didáctica se aplicó a 12 estudiantes de la institución educativa “Mariscal Cáceres” de la ciudad de Tacna, del cuarto grado de primaria entre edades de nueve y diez años. Los estudiantes no tenían conocimientos previos sobre el tema. Así la profesora manifestó no haber impartido el conocimiento de suceso aleatorio. Sin embargo, el contenido está propuesto en el DCN para trabajarlo en el segundo grado, como ocurrencia de sucesos “siempre”, “nunca” y “a veces”, que es el suceso seguro, imposible y posible, respectivamente. En tanto no han recibido instrucción formal, es interesante plantearlo al alumno, porque asumimos que con el diseño de la secuencia didáctica va a permitir que el alumno ponga a prueba e intercambie con su par sus conocimientos previos y puedan construir la solución al problema que se les plantea, en ese sentido decimos que podrán enfrentarse con éxito al problema, sustentado esto en los estudios de Fischbein (citado en Cañizares, 1997) que nos dice que los estudiantes traen intuiciones primarias, y que ello es una forma de razonamiento.

5.2 Experimentación y análisis a posteriori

La experimentación se realizó en un aula de la institución educativa en el turno de la mañana, que es el horario habitual en que asisten los estudiantes. La secuencia didáctica consta de tres actividades con sus respectivos ítems, el cual se desarrolló en dos sesiones, la primera sesión de 45 minutos y la segunda sesión de 50 minutos, como se muestra a continuación.

Tabla 7. Cronograma de actividades de la secuencia didáctica

Situación	Fecha	Hora
Actividad 1	Miércoles, 12 de agosto del 2015	9:50 a.m. – 10: 50 a.m.
Actividad 2 y 3	Viernes, 14 de agosto del 2015	8:10a.m – 9:00 a.m.

Esta secuencia didáctica está diseñada teniendo en cuenta el objeto matemático suceso aleatorio para que los estudiantes clasifiquen en una situación de incertidumbre los sucesos posible e imposible y expliquen cuando un suceso es “más probable”.

A continuación, detallaremos cómo se llevó a cabo la experimentación explicando ítem por ítem, las fases que alcanzaron, los razonamientos que desarrollaron y los problemas que se presentaron.

El trabajo de los estudiantes se desarrollará en duplas, así a los integrantes de la dupla A, los denominaremos A1 y A2; a los integrantes de la dupla B, serán denominados B1 y B2.

5.2.1 Descripción y fases asociadas a la TSD de la actividad 1

Empezamos la secuencia didáctica dando explicaciones como parte del contrato didáctico que propone la TSD sobre la participación de los estudiantes. Se les informó que tenían que resolver tareas entre dos compañeros, y que para responder las preguntas tenían que dialogar. Se explicó que en la medida de lo posible tenían que responder por si solos sin la ayuda de la maestra, pero para cualquier duda llamaran al profesor.

Luego, se entregó la primera hoja de la situación 1

Análisis a posteriori de la actividad 1

Ítem (a) Dupla A

Se entregó la primera hora de la Situación 1 con el ítem (a). En ella los estudiantes debían dibujar tres posibles crías.

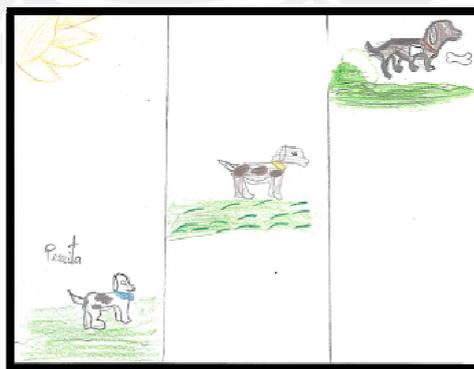


Figura 6. Dibujo de la dupla A

La respuesta dada por la dupla A fue esperada según nuestro análisis a priori, como se ve en los dibujos de los estudiantes, se ha considerado las características de los padres de color, tipo y forma. Transcribimos algunas partes del diálogo de la pareja conformada por estudiantes que denominaremos A1 y A2.

A1: Acá uno acá otro. Primero hay que copiar a este de aquí.

Dibuja tres posibles crías

A2: Sí va a ser una A2 (Se refiere a hembra y escribe perrita)

A1: Yo voy a dibujar el varón.

A2: Hay que ponerles manchitas hay que mezclarlo.

A1: El varón puede ser...

A2: Tuyo puede ser con manchitas...

Un perro sin manchitas que sea. Que sea más o menos igual de ella, que su mamá.

A1: Aquí puede ser otro. Abajo podemos poner macho, hembra

Pero su colita puede ser blanca, hasta aquí no más.

A2: Vamos a dibujarla como su papa y las orejas...

En este diálogo suscitado entre los integrantes de la dupla, se puede comprobar que los estudiantes cumplen con el contrato didáctico al concertar opiniones y trabajar en colaboración. Como habíamos previsto, los estudiantes pasaron por la fase de acción, al proponer posibles crías. Pasaron, también por la fase de formulación, porque comunicaron sus propuestas sin esperar ser contradichos, o sometidos a prueba dichas afirmaciones, caso contrario estarían en la fase de validación, a la que no llegaron los estudiantes.

Ítem (a) Dupla B

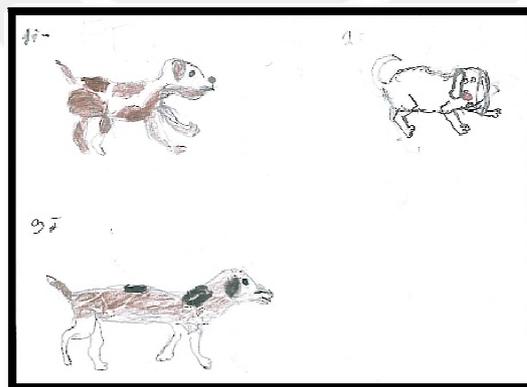


Figura 7. Dibujo de la dupla B

Los estudiantes pasan por la fase de acción al leer el enunciado individualmente y luego, dibujar una cría completamente de chocolate claro sin moteados, pero pintando las orejas de chocolate oscuro. Los estudiantes no han tenido problema en plantear las posibles crías. Según TSD para que un verdadero problema tenga que ser considerado como tal tiene que

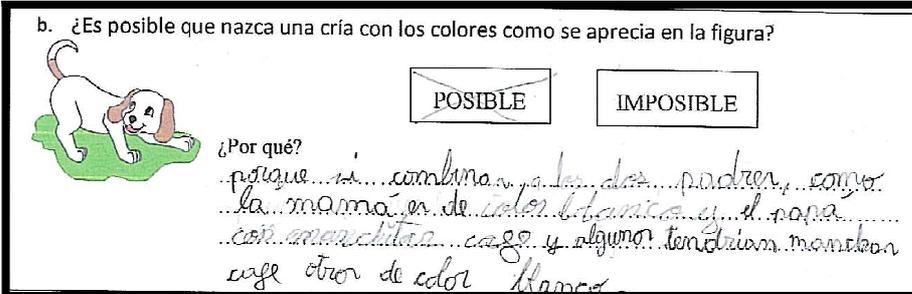
permitir la movilización de conflictos mentales internos, y de intercambio de formulaciones lógicas entre los estudiantes, pero nos parece que este ítem no ha constituido problema, en todo caso como planteamos al principio es un conocimiento previo ya adquirido.

Después de la evaluación de este ítem surge la idea de mejorar este ítem, en el cual se hubiera planteado una nueva pregunta que consistiría en agregar un padre a la perrita preñada con características diferentes a ambos. El conocimiento movilizado en este ítem es el espacio muestral conformado por las posibles crías de situación de incertidumbre planteada.

Debemos decir que está dupla los alumnos pasaron por la fase de acción y no por la fase de formulación. Porque no hubo la intención de comunicar sino de actuar para hacer los dibujos. Entonces, no se cumplió con todo lo esperado, porque habíamos planteado que pasarían por la fase de acción y formulación. En el a priori habíamos previsto que algún alumno considerará una característica de un antepasado de la perra y el perro distinto a ellos y que plasmaran en los dibujos, habíamos explicado en el sentido que la aleatoriedad tiene subjetividades, que en este caso no sucedió.

Ítem (b) Dupla A

Después de haber resuelto el ítem (a) se les entrega la hoja con los ítem (b) hasta el ítem (e) y fue entregado conforme terminan las duplas



b. ¿Es posible que nazca una cría con los colores como se aprecia en la figura?

POSIBLE IMPOSIBLE

¿Por qué?
 porque si combinamos a los dos padres, como la mamá es de color blanca y el papa con manchitas caga y alguno tendrían manchitas caga otro de color blanco

Figura 8. Respuesta de la dupla A

La respuesta de la dupla A es la respuesta esperada, los estudiantes están pasando por la fase de validación, porque como leemos en el diálogo los niños están justificando sus formulaciones. Además se enfrentaron dudas que le planteó el medio para luego fundamentar que es posible porque la cría combina las características de los padres.

A2: Porque los perros podemos combinar a los perritos hasta sacarles las manchas del papá y la carita de la mamá

Porque podemos combinar los dos perritos y podemos combinar la carita de la mamá.

A1: El color del papá. La mamá blanca y el papá chocolate

A2: cafecita

A1: porque, porque la perrita y el perro pueden ser... La madre blanca y el perro negro.

Vuelven a leer.

A1: porque...

A2: porque si combinas a los dos perritos puede nacer con esos colores

En el diálogo se muestra que los estudiantes aceptan que es posible, pero no pueden justificar convenientemente el por qué. Sin embargo, entran en un juego de planteamientos para ordenar sus ideas y que surja un argumento en forma certera y convincente para ellos. Al final surge la respuesta que en términos de estudiantes de su edad, nos parece conveniente, de que es posible si combinas a los dos padres. Esta respuesta si estaba prevista en el análisis a priori. Los estudiantes en esa interacción con el medio, en este caso con el compañero y con el problema han pasado por las fases de acción, formulación y validación.

Ítem (b) Dupla B

b. ¿Es posible que nazca una cría con los colores como se aprecia en la figura?



¿Por qué?

POSIBLE IMPOSIBLE

Por que no tiene el color chocolate del padre.

Figura 1. Respuesta de la dupla B

La respuesta de esta dupla no estaba esperada en nuestro análisis a priori. En la tarea del ítem (a) ellos dibujaron una cría completamente blanca como la mamá. A lo mejor conciben como cría a los que heredan todas las características del papá o mamá, pero no de ambos. No conciben que una cría pueda heredar características de ambos. Sin embargo en el diálogo no se expresan así.

A1: Posible

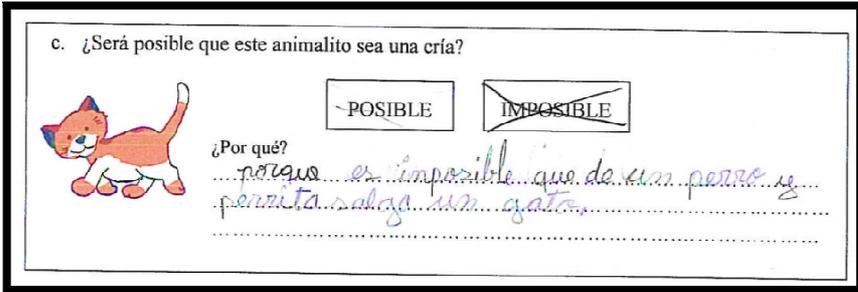
A2: Sí posible o imposible

A1: ¡Posible!

A2: Imposible
 A1: ¡Posible!
 A2: Imposible.
 A1: imposible ¿por qué?
 A2: Imposible porque no tiene el chocolate del padre

Los estudiantes expresan la posibilidad e imposibilidad de este suceso. El estudiante A1 responde con vehemencia que es posible, pero finalmente se deja convencer y se pone a escribir la respuesta. Sin embargo, al terminar de escribir vuelve a preguntar ¿por qué imposible? Se deja convencer, porque si bien deduce que es posible, no tiene un argumento con que refutar la idea del compañero. Debemos decir que esta dupla no formula en términos de explicar, sino emite su información con una sola palabra.

Ítem (c) Dupla A



c. ¿Será posible que este animalito sea una cría?

¿Por qué?

POSIBLE IMPOSIBLE

porque es imposible que de un perro y perrita salga un gato.

Figura 10. Respuesta de la dupla A

Los estudiantes de la dupla A leen la pregunta dos veces (fase de acción). Están entrando en la fase de validación cuando entre cada pregunta observan la figura detalladamente y se prestan a dar conjeturas y no se les hace fácil argumentar.

A2 vuelve a leer.
 A2: Porque, porque nace del vientre de la madre,...porque nacen del vientre de las madre y es... Porque es mamífero como mi mamá.
 A1: ¡Es gato!
 A2: Los perros y los gatos son lo mismo.
 A1: no
 A2: Tú mamá es mamífero, la perra es mamífero, el gato es mamífero. Es posible.
 A1: No es posible, porque...
 A2: porque algunas cualidades del gato
 A1: el...

A2: ¡Imposible porque no puede salir un gato!

A1: ya

En las argumentaciones A2 hace un razonamiento equivocado, pero el niño no es capaz de refutarlo con argumentos, pero tiene la idea de que no es posible. El estudiante A2 acomoda su respuesta porque recibe desaprobaciones de parte del niño. Finalmente, se da cuenta de que si es posible y da el argumento correcto porqué no es posible. Estos estudiantes han construido su respuesta producto de las contracciones y conflictos que le ha generado el medio. El proceso para llegar a la respuesta ha pasado por las fases de acción, formulación y validación.

Ítem (c) Dupla B

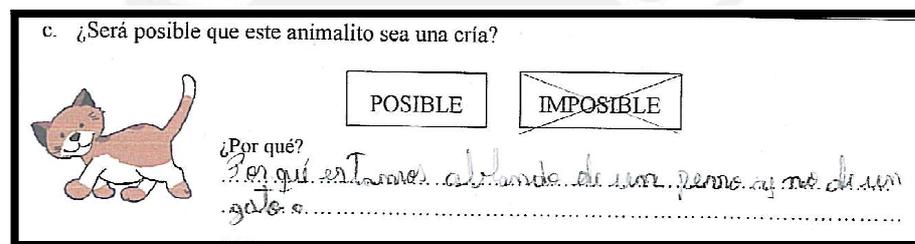


Figura 2 Respuesta de la dupla B

Los estudiantes de la dupla B empezaron a leer el problema, pero no encontraron una respuesta inmediata y segura, por ello leen varias veces como se lee en el dialogo.

B1: (Lee) Sí,... ah ¡no pue! No es un perro. Sí, no es un perro. No es una cría
 B2: Entonces sería...
 B1: No, Es un gato
 B2: Entonces no es una cría. Es un perro.
 Vuelve a leer la pregunta
 B1: Sí, esta es una cría
 B2: ¿Por qué?
 B1: Porque es un gato
 B2: ¡Ya sé! ¡Ya sé! Imposible, ¿sabes por qué? si puede existir, pero ¿cría?
 B1: ¡ya sé! ¡Ya sé!
 B2: ¿Posible o imposible? Primero hacemos esto. (Se adelantan a la pregunta del ítem d)
 Luego de contestar el ítem (d), los estudiantes vuelven a leer la pregunta.
 B1: Oye, esto es imposible (y quiere marcar)
 B2: ¡Nooo! Y vuelve a leer la pregunta.
 B1: No es un perro, pe.
 B2: A ver le preguntamos a la profesora.
 Así, que llaman a la profesora.
 La profesora expresa: ¿qué dice la pregunta?
 Los estudiantes vuelven a leer.
 B2: ¿Será una cría?
 Profesora: ¿De quién?

Estudiantes: De un gato.
 Profesora: ¿De quién?
 Estudiantes: Del perro.
 Profesora ¿De quién estamos hablando? La profesora voltea la hoja para que no olviden quienes son los padres. Y les hace volver a leer la pregunta, e indicando que luego tienen que fundamentar su respuesta.
 B1: ¡Aaah!
 B2: Imposible pe. Porque no es una cría. Es que no nos habíamos dado cuenta.
 B1: Te dije
 B2: Um
 B1: Porque estamos hablando de un perro y no de un gato. Ahí está pue. (Da con la respuesta)

Los estudiantes están en la fase de validación, cuando observamos en el diálogo: que el trabajo en la dupla es muy activo, vemos que hacen formulaciones continuas, que proponen ideas, pero también ponen en duda su planteamiento, como cuando el niño dice: Imposible, ¿sabes por qué? si puede existir, pero ¿cría? El alumno juzga su acción, su propuesta, al hacerlo deja abierto para que el compañero le ayude a completar, a construir su argumento. Los estudiantes claramente han establecido una dialéctica, en la que cada de sus argumentos pasan por una secuencia de preguntas y respuestas, en ese ir y venir va evolucionando su conocimiento. Al intervenir la profesora está cumpliendo con el proceso de devolución lo hace para aclarar de quienes estamos hablando, pero no lo hace explícitamente, sino hace preguntas para que ellos mismos recuerden de que animales estamos hablando. También, creemos que han llegado a una fase de validación, porque se han convencido y sus argumentaciones han sido sometidas a prueba por el medio.

Ítem (d) Dupla A

d. ¿Será posible que nazca una cría como la figura?



¿Por qué? *porque combina los colores de los padres.*

POSIBLE IMPOSIBLE

Figura 3. Respuesta de la Dupla A

Transcribimos la respuesta de los estudiantes de la dupla A:

Porque combina los colores de los padres.

Los estudiantes hacen formulaciones en forma alternada, el medio que se ha creado permite este mutuo involucramiento en el problema.

A2: Porque se parece al papá y a la mamá
 A1: Porque combina los colores de los padres
 A2: Porque, porque,...
 A1: Porque...
 A2: Porque combina con los padres
 A2: Porque combina los colores de los padres

La respuesta de esta dupla es la esperada, sin embargo demoraron en argumentar. Si bien dieron con el argumento correcto seguían tratando de encontrar una respuesta convincente para ellos. Pero, finalmente llegan a la conclusión que era la misma que habían emitido al inicio del dialogo, que era posible que naciera esa cría porque combinaba los colores de los padres. Sus continuas formulaciones de ida y vuelta le han servido para convercerse y construir su argumento correcto. Están en una fase de validación, si bien no se contradicen pero confluyen, cooperan en hacer evolucionar, construir la respuesta.

Ítem (d) Dupla B

d. ¿Será posible que nazca una cría como la figura?



¿Por qué? *Si porque parece al padre.*

POSSIBLE IMPOSIBLE

Figura 4. Respuesta de la Dupla B

La dupla B también llegó a la respuesta que esperábamos en el análisis a priori evaluando la variable forma del cuerpo y color con respecto a los padres, como los colores del padre y la forma de la nariz de la madre. Cada uno toma esos valores para hacer un pretexto y defensa de su argumento.

B1: Es posible
 B2: Entonces, este es posible. (Refiriéndose al ítem b)
 B1: No, porque no tiene el chocolate del padre.
 ...

B1: Porque se parece al padre.
 B2: Y de la madre. ... y la nariz ¿qué?
 B1: De la madre, de la madre.
 Se parece al padre.

En el diálogo de la dupla B vemos que el estudiante B2 se da cuenta que es posible y lo expresa así, pero el B1 contradice con seguridad su opinión, y no puede argumentar y se deja convencer con el argumento de B1. La evaluación que hace B1 es básicamente con respecto a la variable color para establecer que es posible que sea una cría. B2 plantea que también tiene un parecido con la nariz de la madre. A

Ítem (d) Dupla C

d. ¿Será posible que nazca una cría como la figura?



¿Por qué? *Por que el padre es igual que el y sus mismos colores.*

POSIBLE IMPOSIBLE

Figura 5. Respuesta de la Dupla C

Transcribimos la respuesta de la dupla C:

Porque el padre es igual que él y sus mismos colores.

Presentamos el diálogo de esta dupla, donde podemos leer que los estudiantes llegan a validar su respuesta cuando vemos que quien participa y argumenta es C1, pero C2 cumple el papel de oponente, en el sentido que pide explicaciones. Pero no devuelve con otro argumento, porque se ha convencido de que es correcto el enunciado del compañero.

C1: Ah si yo tengo
 C1: Mira, también igualito, mancha negra, mancha negra; café, café, blanco, blanco.
 C2: ¿Por qué?
 C1: Se parece ¡mucho! A su padre
 Posible porque...el padre de él y la cría es también igual que el cachorrito
 C2: Ya

Consideramos que este ítem si ha constituido un problema para los estudiantes, pues se valen de una estrategia; si no fuera un problema hubiera hallado rápidamente la solución. El alumno A1 adopta una estrategia de correspondencia uno a uno de los colores del padre, al hacerlo hace uso correcto del razonamiento de representatividad. Esta dupla ha llegado a una fase de validación, por lo tanto también ha pasado por las fases de acción y formulación, estas fases previas han servido para afinar y hacer correcciones en sus argumentos, como lo esperábamos.

Ítem (e) Dupla A

e. ¿Será posible que nazca un perrito de la figura? Marca la respuesta



¿Por qué?

..... porque la raza de los padres no es la misma que del dibujo.

POSIBLE

~~IMPOSIBLE~~

Figura 15. Respuesta de la Dupla A

Transcribimos la respuesta de la dupla A:

Porque la raza de los padres no es la misma que del dibujo.

La dupla A evalúa y argumenta correctamente su respuesta. Utilizan la variable tipo de animal que en este caso es la raza de la figura presentada, argumentando que es diferente al de los padres, que no es la misma de los padres.

A2: Porque la raza de los padres son diferentes.
 A1: No es la raza
 ...
 A2: Las crías pueden salir como la mamá y como el papá
 A1: ¿Qué?
 A2: Que es posible
 A1: ¿Cuándo es posible?
 A2: Cuando algo es real. Porque no puede nacer otro animal, que no sea un perro (señalando al papa).

En la dupla vemos que A2 ha emitido el argumento correcto, pero el estudiante A1 lo contradice. El estudiante A1 le pregunta al estudiante A2 ¿cuándo es posible? El estudiante A2 responde que es “cuando algo es real”. Debemos entender esta respuesta de A2 como que “algo es real”, cuando es representante valido de algo, para A2 es “real”, porque tiene características “reales” de quien proviene. Esta forma de razonar es la heurística de

representatividad, de que ese “real” es representante de la población de donde proviene. Pensamos que A2 ha llegado a visualizar un concepto de la aleatoriedad interpretándolo como el objeto que se supone es miembro aleatorio de una clase (Kyburg, 1974, citado en Batanero, 1995). Luego, aclara para dar a entender que en este caso no es posible, que no puede nacer, que no sea un perro como el papá (al señalar). Es importante decir que los dos estudiantes ya estén usando los términos de la aleatoriedad.

Ítem ¿Qué Dupla B

e. ¿Será posible que nazca un perrito de la figura? Marca la respuesta



¿Por qué?
Porque es otro tipo de perro

.....

.....

POSIBLE

~~IMPOSIBLE~~

Figura 6. Respuesta de la Dupla B

Los estudiantes de esta dupla llegan rápidamente al argumento correcto. Evalúan para ello el criterio tipo de raza que es diferente al de los padres. Es la respuesta esperada en nuestro análisis a priori. El diálogo se ve que concuerdan en el argumento, pero A2 dice “yo escribo así”, que es “porque es otro tipo de perro” que también concuerda con el argumento del alumno A1.

A2: Sí, porque se parece al padre.
A1: Imposible porque es otra raza
A2: Yo escribo así.

Institucionalización

Terminando la primera situación, recopilamos las respuestas de los estudiantes. En esta parte la dupla B se da cuenta que han errado en el ítem (b). Preguntamos ¿cuándo un resultado es posible? Los estudiantes responden con los argumentos de su actividad.

Profesora: ¿Qué es imposible?
Estudiante 1: Que no puedes hacer algo
Estudiante 2: Que no puedes revivir a un muerto
Estudiante 3: Por ejemplo es imposible que los fantasmas sean reales

La profesora fija la idea de lo posible e imposible. Cuando hablamos de posible estamos diciendo que algo puede ocurrir o también no puede ocurrir. Y lo imposible de un resultado que no puede ocurrir, que nunca va a ocurrir dentro de una determinada situación.

Observaciones generales de la actividad 1

Luego de observado la experimentación y de realizar los análisis a priori y a posteriori, y compararlos por cada ítem, concluimos lo siguiente:

- ❖ Los ítems planteados constituyeron problemas, porque su solución no fue inmediata. Para ello cada uno de los integrantes de las duplas han tenido diferentes estrategias para abordar el problema y han ido modificando las decisiones de uno mismo y del otro compañero. Aclaremos esto, porque puede ser que para estudiantes de cuarto grado podrían no haber constituido problema, pero esto no ha sido así, como se puede leer en los diálogos.
- ❖ Los estudiantes alcanzaron la fase de validación, porque a través de procesos de corrección, como al aceptar o cambiar sus argumentos o razones ellos han sido debatidos y convenidos para llegar a una solución.
- ❖ La forma de trabajar en duplas permitió que los alumnos construyeran sus respuestas y se pudo observar y analizar las diferentes fases de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau por la que pasaron los estudiantes al resolver sus tareas.
- ❖ Los estudiantes pudieron entender la noción de suceso posible e imposible, facilitado esto por las tareas presentes en los ítems y por las retroacciones que le ha generado las razones de su par.

5.2.2 Descripción y fases asociadas a la TSD de cada ítem de la actividad 2

La realización de esta actividad se hace en otra fecha, dos días después de la actividad anterior. Se hace una introducción con la participación de los estudiantes recogiendo los conocimientos previos que han adquirido en la clase anterior, que es el conocimiento de suceso posible y suceso imposible. Se le entrega las hojas y los estudiantes se disponen a trabajar.

Análisis a priori actividad 2

Ítem (a) Dupla A



Figura 17. Respuesta de la Dupla A

Transcribimos la respuesta de la dupla A:

Un gato porque no se sabe si va a sacar un gato pardo o plomo porque todos (son) gatos.

La dupla A responde adecuadamente y emite un argumento aceptable como se había previsto. El diálogo e intercambio de informaciones ha servido para llegar al argumento correcto.

A2: Un gato pardo, porque
 A1: Un gato cualquiera, gato puede ser
 A2: ¿qué?
 A1: No se sabe si puede sacar el primero o el segundo
 A2: Un gato pardo
 A1: Un gato

En esta primera parte el A1 enuncia su planteamiento que es correcto. Por otro lado, el estudiante A2 expresa que saldrá gatos pardos podríamos entender que es porque ella observa que hay más gatos pardos. Los estudiantes están confrontando su planteamiento, toman posición, que es opuesto el uno del otro, cada uno rechaza el planteamiento del otro. Están pasando por una fase de formulación, dicha comunicación está sometida en este caso al rechazo (retroacciones) de sus comunicaciones.

A1 y A2: ¿cuál puede ser?
 A2: Puede sacar un gatito pardo, porque está primero.
 A1: Sin ver puede sacar a cualquiera. Puede sacar un gatito pardo. Supongamos acá está el veterinario. Y aquí hay una fila de gatitos. Sin ver puede sacar a cualquiera. Gato no más podría sacar

En este diálogo el estudiante A2 expresa que puede sacar el gato pardo porque está primero, él está usando un razonamiento fácil, su razonamiento está presentando sesgo de disponibilidad,

no está aplicando adecuadamente la característica de la situación aleatoria, que es la incertidumbre. En cambio, el estudiante A1 según expresa está haciendo uso de la idea de experimento aleatorio.

A2: Un gato

A1: Porque la mayoría son gatos pardos así que pardos

A2: Vez yo te he dicho

A1: La mayoría son gatos pardos

La dupla A termina de responder este ítem que no es lo que se esperaba. El A1 había planteado el argumento correcto varias veces, finalmente cambia, y acepta el argumento de A2. Luego, ellos pasan a evaluar y discutir el ítem (b) que lo hacen correctamente. La profesora observa recién que el ítem (a) no está correcto y el ítem (b) sí, entonces propone que los estudiantes vuelvan a trabajar el ítem (a) con siluetas, sin decirles que está mal. Sin duda intuyen que no está bien su respuesta.

Los estudiantes van sacando y observan que sacan más pardos.

Profesora: ¿Qué es seguro que van a sacar sin ver?

A1: Seguro que solo va a sacar un gato pardo, porque la mayoría son gatos pardos

Profesora: Pero, ¿puedes sacar un plomo?

A1: Puede ser

Profesora: Entonces ¿es seguro?

Los estudiantes van sacando las siluetas que están volteadas.

...

La A2: Entonces son gatos. Además, tú dijiste es un gato, entonces un gato.

A1: Porque sin verlo puede sacar cualquiera plomo o pardo porque este de aquí todos son gatos

Profesora: ¿estás seguro?

A1: Porque este de aquí, todos son gatos.

Los estudiantes se dan cuenta que ya habían respondido de esa manera y se cuestionan el haber respondido distinto

A1: ya entendimos

Ítem (a) Dupla B

a. Y el dueño tuviera que sacar un gato sin verlo. ¿qué es seguro que saque?

Un gato plomo Un gato pardo ~~Un gato~~

..... porque *todos son gatos y puede sacar*
un gato.....

Figura 7. Respuesta de la Dupla B

Los estudiantes leen 2 veces el enunciado y expresan la dificultad.

B1: ¿Cómo es esto no entiendo?
 B2: Es difícil pues
 Vuelven a leer una vez más
 B1 y B2: Estos son plomos, estos y estos.
 B1: Ya sé mira tengo una idea. Esto como si fuera una jaula 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.
 B2: Y el dueño tuviera que sacar sin verlo (lee otra vez).
 B1: Un gato pardo, un gato plomo, un gato
 Vuelven a leer

Los estudiantes marcan gato pardo.

Llaman a la profesora y ella les plantea que trabajen con siluetas que les proporciona.

Los estudiantes hacen experimentos y expresan que siempre sacan pardo, no más plomo.

La profesora pregunta ¿qué es seguro que saque?
 B1: vamos a intentar
 B2: Sin verlo.
 Los estudiantes van sacando la silueta y siempre va saliendo gato pardo.
 B1: Pardo, pardo, pardo, pardo,... (Observando las siluetas que están en la mesa)
 B2: Ya estamos seguros, pardos ya
 B1: Si, si es verdad
 B2: Oye no, pero son gatos
 Otra vez deciden sacar las siluetas.
 ...
 B2: Pero son gatos deberían ser gatos.
 B1: Pardos, pardos, pardos, estamos seguros
 B2: Tenemos que responder. Estamos seguros
 B1: Hay que hacer otra vez.
 Viene la profesora.
 Profesora: ¿Terminaron?
 B1 y B2 responden que salen gatos pardos
 Profesora: ¿Es seguro que salga pardo?

B1: Plomo también puede ser.
 Profesora: ¿Entonces es seguro?
 Se deja conversando a los estudiantes
 Viene la profesora nuevamente ¿entendieron?
 B1: Entendimos que si sacamos, siempre va a salir gato.
 B2: Todos son gatos.
 La profesora asienta Claro ¿por supuesto que te van a salir más gatos plomos
 A1: Si me van a salir más gatos pardos y también gatos plomos.
 B1: Profesora eso es posible.
 B1: Entendimos que si sacamos, siempre va a salir gato.
 B2: Todos son gatos.

Los estudiantes de la dupla B contestan correctamente como se esperaba. Intuimos que asumen que puede salir plomo o pardo indistintamente, pero es seguro que sale un gato. También juegan con el material de las siluetas.

Ítem (b) Dupla A

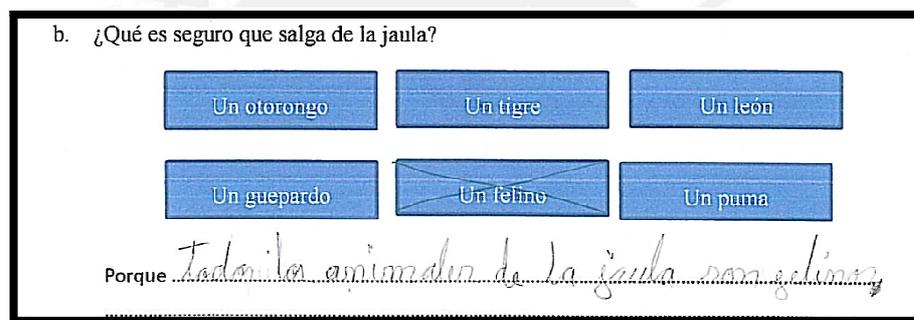


Figura 8. Respuesta de la Dupla A

Los estudiantes de esta dupla demuestran mucha sorpresa por la idea de que estos animales salgan de la jaula. Dialogan bastante y no saben que es felino, pero entre analizar y visualizar a cada animal llegan a la conclusión de que todos son felinos, y por lo tanto solo puede salir de la jaula un felino.

A2: Estos son todas razas de gatos ¿no? Son tigres, esta es la familia del gato.
 A1: Son parecidos a los gatos
 A2: Pero es la familia del gato
 A1: No es familia
 A2: Sí es familia
 A1: Es parecido a los gatos. No es familia, es pariente. Sabes ¿qué es pariente?
 ...
 A2 ¿qué es seguro que salga?
 A1: Un felino ¿Cuál es felino? Otorongo
 A2: No, este es otorongo
 A1: ah
 A2: Este es puma
 A1: Este es jaguar

A2: Jaguar, este es tigre, este es león, este no sé qué cosa es
 A1: ¿qué es seguro que salga?
 A2: Ya te he dicho que son parientes de los gatos.
 A1: Todos estos animales son felinos.
 A2: ajá
 Profesora: Ustedes tienen que justificar porque dicen que son felinos.
 A1: Yo sí sé por qué. Porque puede salir un felino, porque todos son felinos.
 A2: Ya ahora, tú díctame
 A1: Porque si todos son felinos que más puede salir.
 A2. Porque todos de las jaulas son felinos.

A1: Profesora ya terminamos.
 A2: Dos cabezas piensan más que uno.
 A1: Nos complicamos un poquito, nada más un poquito.

Los estudiantes llegaron convenientemente a la respuesta, la A2 tenía la idea de que todos ellos pertenecían a una sola clase, sin embargo no lo relacionaba con la palabra felino. Además, relacionaron cada animal con su nombre y el A1 intuyó que felinos integraba a todos esos animales, ayudado por la propuesta de su compañera, que decía que eran familia o parientes. Han hecho uso del razonamiento de representación, porque han evaluado una característica común a todos los animales, que son parecidos a los gatos, llegando a la conclusión que son felinos y que se tiene la seguridad que van a salir solo felinos.

El medio ha permitido que los estudiantes construyan y argumenten correctamente. Los estudiantes han pasado por las fases de acción, formulación y validación en este ítem.

Ítem (b) Dupla B

b. ¿Qué es seguro que salga de la jaula?

Un otorongo	Un tigre	Un león
Un guepardo	Un felino	Un puma

Porque *todos son felinos*

Figura 9 Respuesta de la Dupla A

B2: Un otorongo, un león
 B1: El animal que no es agresivo, un animal que no es tan malo. ¿Cuál será? El león ese mata personas, come también. Es este, el puma.
 B2: No el puma.
 B1: El tigre, el jaguar, ese jaguar más bien se corre
 B2: El jaguar, no
 B1: Entonces el guepardo, el guepardo solo corre.

B2: ¿Por qué?
 B1: Porque el guepardo corre y se escapa. (Marcan guepardo)
 Va escribiendo B2.
 B1: Porque el tigre ataca y el león también mata. No, no
 Luego, llaman a la profesora. Ve la respuesta de los estudiantes y les agrega

En sus diálogos iniciales el estudiante B1 hace uso incorrecto de la heurística de disponibilidad, al decir que saldrá el guepardo “porque corre y se escapa”. Sin embargo, construyen sus repuestas evaluando correctamente y concluyen que es seguro que salga de la jaula un felino porque todos son felinos. Es la respuesta que esperábamos.

Institucionalización

En esta fase como en la actividad 1 se reúne a los estudiantes en círculo para favorecer la interacción entre todos. Aquí tratamos el suceso seguro y presentamos el diálogo. En el diálogo están los doce estudiantes.

Profesora: ¿qué es seguro?
 Estudiante 1: Que va pasar, que estás seguro que va a pasar
 Estudiante 2: Algo que tú estás seguro que si va a pasar
 Estudiante 3: Que tú sabes que va a pasar
En el ítem (a) de los gatos ¿qué sacaría?
 Estudiante 4: Un gato, cualquier gato
 Estudiante 3: Porque es un gato
En el ítem (b) ¿qué es seguro que salga de la jaula?
 Estudiante 1 y 2 : Felinos, porque todos son felinos

Al final institucionalizamos que un “suceso seguro” es cuando el suceso siempre va a ocurrir cada vez que se dé la situación presentada, que de todas maneras va a ocurrir.

Observaciones generales de la actividad 2

- ❖ Los ítems planteados tuvo cierta complejidad como lo han manifestado algunos estudiantes, por tener que recurrir a un término a una palabra que representara el seguro que siempre va a ocurrir.
- ❖ Se corroboró que algunos estudiantes inmediatamente al leer el enunciado, dan con la respuesta y persisten en ese argumento, pero esta es contradecida continuamente con otro argumento y se dejan convencer. Entonces, el argumento inicial no estaba totalmente elaborado, necesitaba ser sometido a prueba y si esta resistía los escrutinios del compañero.

- ❖ Se corroboró que uno de los integrantes de la dupla B hace uso incorrecto de la heurística de disponibilidad, al decir que saldrá el guepardo “porque corre y se escapa”, pues corre más rápido.
- ❖ Se observó que el proceso de devolución del profesor fue necesaria, pero esto para que interiorizaran el enunciado; para guiar, ayudar al alumno a través de repreguntas.
- ❖ Se corroboró que los estudiantes alcanzaron la fase de validación, a través de procesos de corrección de sus argumentos ellos han sido debatidos y convenidos para llegar a una solución y por el proceso de devolución por parte del profesor.
- ❖ Se corroboró que los estudiantes entendieron la noción de seguro en el sentido que siempre va a ocurrir, dentro de una clase o categoría de todos los sucesos posibles (espacio muestral), “que más puede salir” (solo gatos para ítem (a) y solo felinos para ítem (b)).
- ❖ La forma de trabajar en duplas permitió que los alumnos construyeran sus respuestas y se pudo observar y analizar las diferentes fases de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau.

5.2.3 Descripción y fases asociadas a la TSD de cada ítem de la actividad 3

Análisis a priori de la actividad 3

Ítem (a) Dupla A

a. Y el dueño tuviera que sacar un gato sin verlo. ¿Qué es **más probable** que saque?

Un gato plomo

Un gato pardo

Porque... puede... sacar... mas... gatos... pardos... que... plomos

Figura 10. Respuesta de la dupla A

Transcribimos la respuesta de la dupla A:

Porque puede sacar más gatos pardos que plomos

Después de leer los estudiantes de la dupla A, procedieron a contar el número de gatos por colores. Produciéndose un intercambio de informaciones a base de preguntas. La A2 toma la iniciativa de experimentar con las siluetas.

Vamos transcribir el diálogo que se produce entre la dupla de compañeros:

A1: (Coge las siluetas.)
Cuenta las siluetas del problema. Siempre está leyendo la pregunta.
A2: Aquí hay diez. ¿Cuántos plomos hay?
A1: Cuatro ...
A2: Vamos a sacar. Te toca. Saca. Cierra los ojos.

Los estudiantes van sacando las siluetas. En un momento A1 vuelve a leer la pregunta, haciendo el esfuerzo mental, de representarlo mentalmente, a la vez mirando los resultados de la situación aleatoria.

A la par A2 extrae las siluetas con observación retenida, dice: “como entonces la mayoría es pardo, por la mayoría”. Luego de ello llama y expresa a la profesora: “Ya sabemos que saldría: los gatos pardos”.

En esta primera, experimentación A2 hace uso del razonamiento de representatividad correctamente. El alumno A2 está atravesando por una fase de formulación, porque emite una conclusión, pero sin todavía probarla.

¿Por qué?- expresa la profesora.
A2: Creo que... Señala el gato pardo. Profesora es difícil.

Antes de llamar a la profesora A2 había emitido correctamente y además había expresado “como la mayoría es pardo, por la mayoría”, sin embargo ante la pregunta de la profesora ¿por qué? no sabe responder. Este argumento no está sólido, no está convencido y no tiene sentido su fundamento.

La profesora propone hacer el experimento otra vez. Los estudiantes nuevamente hacen el experimento aleatorio. Este momento es de gran concentración y tiempo pausado.

En el siguiente momento podemos concluir que la dupla atravesó una fase de validación.

Mientras extraen las siluetas observan fijamente.

A2: Pardos estamos seguros.
-¿Por qué? – Pregunta la profesora y se retira.
A2: ¿Por qué puede ser?
A1: Porque es más probable que salgan los pardos.
A2: Pero, ¿por qué?
A1 mira nuevamente las siluetas y expresa: “Porque puede sacar más gatos pardos que plomos”.

Podemos concluir que la dupla evaluó correctamente el razonamiento de representatividad, al haber mayor número de gatos pardos es más probable que se extraiga gatos pardos.

Podemos decir que en este ítem se cumplieron todas las fases de la TSD. La profesora hizo la devolución al interrogar: ¿Por qué? Esto hacía que los estudiantes se concentren más e interactúen entre ellos para hallar una respuesta. Los estudiantes asumen con gran responsabilidad esta tarea. Como evidencian las grabaciones que hicimos. Por lo tanto, el niño al sentirse responsable matemáticamente, ha cumplido con sus obligaciones, es decir que se ha cumplido el contrato didáctico por parte del niño. Así también la profesora ha cumplido con el contrato didáctico al facilitar el aprendizaje.

Ítem (a) Dupla B

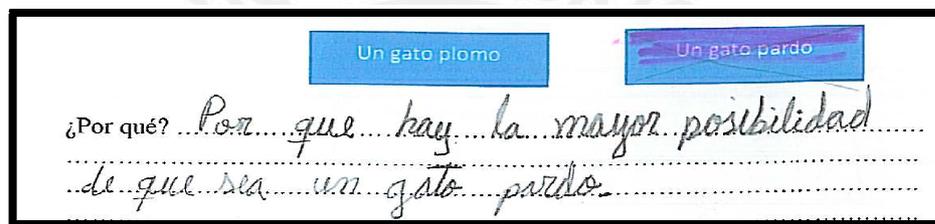


Figura 11. Respuesta de la Dupla B

La dupla B evalúa correctamente, de alguna manera, dentro del diálogo sí llegan a decir que es porque hay mayor cantidad de gatos pardos.

B1: Pero ahora la mayor posibilidad, es gato
 B2: Hay mayor cantidad. Es que ahí había la opción un gato pardo.
 B1: Pero a veces la mayor cantidad no importa.
 Vamos a sacar. Sacan por turno sin mirar.

El estudiante B1 se confunde y quiere traer la idea de seguro que habíamos tratado en la clase anterior, pero luego de experimentar corrige esa idea. Por otro lado B2 da con la respuesta que esperábamos porque dice hay mayor cantidad de gatos pardos.

Sacan gato pardo y luego pardo
 B1: De nuevo a ver (experimentan)
 B1: Otra vez gato pardo
 Cada vez que escogemos sale gato pardo
 La mayor posibilidad es que salga gato pardo. Entonces la posibilidad de que salga el gato pardo es mayor. Gato pardo es un animal. Da más frecuencia, porque cada vez sale gato pardo
 B2: ¿Estás segura? Sería un gato. No hay perros, por ejemplo.

Podemos decir que estos diálogos los estudiantes están pasando por una fase de validación, cuando los estudiantes van proponiendo sus justificaciones, pero no hay rechazo a las justificaciones, al parecer los niños van llegando juntos a encontrar la solución. El estudiante B1 justifica muy bien y se convence, pero es ahora el estudiante B2 trae la idea seguro de la clase anterior. Vuelven a leer. Se observa que ellos entienden que los dos tienen que estar convencidos con la respuesta. Se entiende la idea de validar la solución del problema estando de acuerdo. Hacen la simulación nuevamente.

B2: Un gato pardo, porque hubiera sido la alternativa gato y no está.
 B1: Creo que es un gato pardo, porque cada vez que sacamos sale pardo.
 B2: ¿Por qué no llamamos a la miss?
 B1: Intentemos
 Explican a la profesora:
 B1: Sin mirar hemos tocado y 8 veces le ha tocado gato pardo. Yo le he tapado a mi compañera se ha tapado los ojos Y nos ha salido gato pardo.
 Profesora: Y ¿a qué conclusión han llegado? Gato pardo
 Escriben la respuesta: Porque hay más posibilidad de que sea gato pardo.

Esta dupla finalmente evaluó correctamente, pero no sustentó en la hoja como esperábamos con la expresión “porque hay más cantidad de gatos pardos”. Sin embargo, escuchando el diálogo vemos que sí han llegado a la respuesta que habíamos planteado en el análisis a priori. También hemos visto que superaron convenientemente la forma de razonar de suceso seguro de la clase anterior, que se había constituido en un obstáculo.

Ítem (b) Dupla A

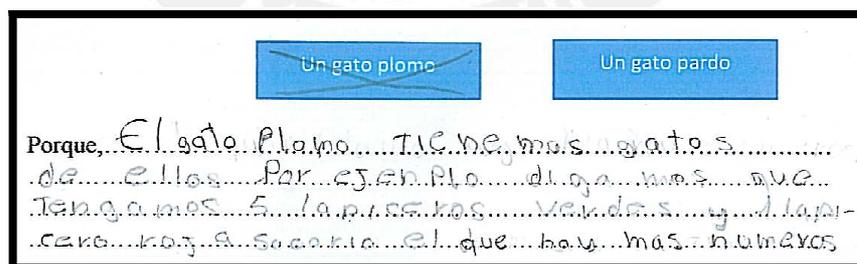


Figura 12. Respuesta de la Dupla A

Al reconocimiento de que es más probable de que saque un gato plomo, porque hay más de ellos, agregan a su respuesta un ejemplo sobre lapiceros verdes y rojos. La dupla ha llegado a la fase de validación.

Ítem (b) Dupla B

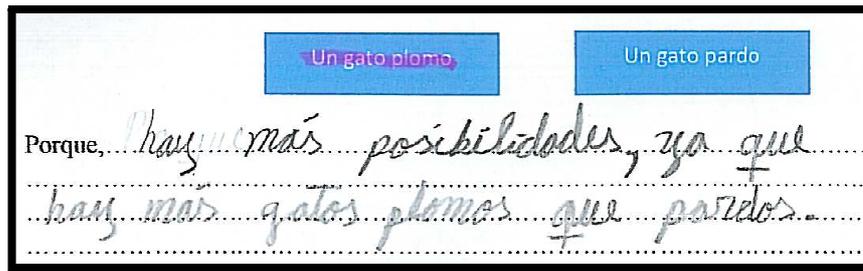


Figura 13. Respuesta de la Dupla A

Los estudiantes leyeron la pregunta, señalaron varias veces con sus lápices las figuras de los gatos de cada color e intercambiaron informaciones de esta manera:

B1: Un gato plomo
 B2: Gato plomo
 B1: Entonces un gato plomo
 B1: Marca gato plomo y dice son la misma cantidad ¿no?
 Pero vuelven a experimentar. Y llaman a la profesora para comunicarle:
 B1: Porque los gatos que escogemos cada vez nos están saliendo empate y si lo intentamos otra vez así es.
 Profesora: y ¿tú qué opinas?
 A2: Lo mismo
 Las A2s vuelven a leer y la profesora interrumpe.
 Profesora: ¿Cuántos gatos plomos dices?
 B1 y B2: Siete
 Profesora: ¿Cuántos gatos pardos?
 A2s: Cinco
 Profesora: Y ¿qué dice después? (Las A2 siguen leyendo)
 B1 y B2: ¿Qué es más probable que salga?
 B2: La vez pasada usted nos dijo que es seguro que salga gato
 Profesora: Si, es verdad. Es seguro que saque gato. Pero, la pregunta es otra
 ¿Qué es más probable que saque?
 B1: Mi compañera y yo hemos sacado la conclusión que es empate. Pero, yo cierto rato, un rato nada más he podido ver que la mayor posibilidad un poco nada más, es siete gatos plomos, ¿Sabes por qué? porque es la mayor cantidad.
 Profesora: ¿Cómo dijiste?
 B1: Como hay siete gatos plomos y el otro es cinco gatos pardos.
 La mayor cantidad que nos sale, porque hay más posibilidades, siete gatos plomos, porque es más probable que saque. La mayor cantidad es más harta.

Profesora: ¿Tú qué opinas Maricielo?

B2: Lo mismo porque son más gatos: Siete gatos plomos es la mayor posibilidad

Profesora: Antes pensaban que era empate, pero ¿qué les parece más razonable ahora? ¿Lo de antes o lo que están pensando ahora?

B1: Lo que estamos pensando ahora. Pero luego leímos todo. Nos dimos a la conclusión de que podía sacar más gatos plomos.

B2: Lo hemos estado debatiendo mucho rato.

Creemos que esta dupla consiguió construir su saber cuando finalmente justifican: hay más posibilidades, siete gatos plomos, porque es más probable que saque. Leyendo las justificaciones podemos decir que los estudiantes han pasado por la fase de formulación. Han pasado por elaborar proceso lógicos para llegar a su respuesta. También, se presentó como obstáculo la idea de “seguro”, porque esta fue adquirida como conocimiento en la clase anterior y emergió en esta tarea del ítem (a); pero este problema fue solucionado con la devolución que realizó la profesora. En la TSD también se permite la participación de la profesora para ayudar a que los estudiantes encuentren la solución como una forma de guía a través de preguntas convenientes.

Institucionalización

Para realizar la institucionalización se sentó a los estudiantes en la parte posterior del aula y se dispusieron las sillas en forma circular. Se utilizaron láminas grandes con las preguntas de la situación 3 y se empezó a rescatar las respuestas de los estudiantes. Participaron activamente y se extrajeron conclusiones generales con todos ellos. Un niño, espontáneamente, para explicar el suceso como más probable, hizo una pequeña experimentación con lapiceros de colores rojo y azul. Concluimos que un suceso es más probable de ocurrir cuando hay un mayor número de posibilidades que los conforman frente a otro suceso.

Observaciones generales de la actividad 3

- ❖ Se corroboró que los estudiantes adquirieron la noción de un suceso como más probable como aquel en el que existe mayor cantidad de posibilidades y, por tanto, mayor probabilidad, es decir, se realiza un uso correcto de la heurística de representatividad.
- ❖ Se corroboró que algunos estudiantes están usando los términos propios de la aleatoriedad como: más probable, más posibilidades, más frecuencia
- ❖ Se corroboró que los estudiantes hacen uso espontáneamente de la idea de experimento aleatorio y para ello cogen siluetas o lapiceros.

- ❖ Se corroboró en el trabajo de un integrante de las duplas la aparición de la idea de obstáculo planteada por Brousseau (2007). La estrategia empleada en la actividad 2 ha emergido en esta actividad en la que se trabajaba el suceso como más probable. Por ejemplo, en el ítem (a) se trató de resolver con la estrategia de recurrir a un término o a una palabra que representara el “suceso que siempre va a ocurrir” que se había trabajado en la actividad 2. Esta estrategia también la usaron para resolver el ítem (b,) pero esto fue aclarado explícitamente por la profesora.
- ❖ Los estudiantes han participado responsablemente al colaborar en la construcción de la solución, es decir, el proceso de devolución ha sido efectivo. Por ello, afirmamos también que el contrato didáctico se ha cumplido.
- ❖ El proceso de devolución ha estado presente por requerimientos de los estudiantes y ha contribuido parcialmente como guía para que ellos encuentren sus repuestas, casi siempre mediante repreguntas. Decimos parcialmente, porque el medio modelizado por el profesor ha contribuido a llegar a lo esperado.
- ❖ Se corroboró que los estudiantes alcanzaron la fase de validación a través de procesos de corrección de sus argumentos. Estos últimos han sido debatidos y convenidos para llegar a una solución, y por el proceso de devolución por parte del profesor.

5.3 Análisis global de secuencia didáctica

Teniendo en cuenta los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica y del contraste del análisis a priori y a posteriori, podemos decir:

- ❖ La actividad 1 fue desarrollada por los estudiantes como se esperaba, evaluaron si los sucesos que se les presentaron eran posibles o imposibles teniendo en cuenta las variables didácticas consideradas. Usando argumentos, llegaron a respuestas esperadas. Sin embargo, hubo un caso en el ítem (c), en el cual un estudiante de la dupla A propuso que un gato que presentaba colores de los perros (padres), podría ser la cría de estos, pero este caso se superó por el juego de la dialéctica de formulación y validación.

En la actividad 2, se observó que los algunos estudiantes mostraron dificultad en reconocer el suceso seguro, pues debían formular una palabra que designará a todos esos sucesos posibles, sin embargo, llegaron a concluir, como esperábamos, con la devolución pertinente del profesor.

En la actividad 3, en la que se debía reconocer un suceso como más probable, uno de los integrantes de la dupla recurrió a la misma estrategia de la actividad 2 para evaluar un

suceso como más probable y ello constituyó una dificultad para llegar a la respuesta esperada; sin embargo, debemos decir que las retroacciones del medio que ayudaron a entender que esa estrategia no era la conveniente, provinieron no solo del profesor, mediante el proceso de devolución, sino de un papel importante que desempeñó el otro compañero. Con respecto, a esa dificultad que presentaron los estudiantes para evaluar la podemos decir que estamos frente a un obstáculo como lo denomina Brousseau (2007).

- ❖ Concluimos que la forma de trabajar en duplas ha permitido la argumentación y que esta ha evolucionado hacia una construcción de las soluciones, no sin posiciones contradictorias y con abordajes equivalentes y construcción cooperativa.
- ❖ Podemos decir además que esta secuencia de actividades ha procurado que los estudiantes desarrollen la argumentación, que es una competencia muy importante en la vida de un ciudadano. El tema cercano a los alumnos y real, en este caso de animales, ha permitido el interés en participar, formular hipótesis, experimentar, verificar y explicar sus resultados.
- ❖ Desarrollada nuestra secuencia didáctica concluimos que el objetivo general de la presente investigación, que era validar una secuencia didáctica que utiliza situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana, desarrolla la noción de suceso aleatorio posible, imposible, seguro, más probable si se cumplió.
- ❖ Se corroboró que los objetivos de aprendizaje se cumplieron, pero con cierta dificultad en justificar el suceso seguro en algunos estudiantes.
- ❖ Se corroboró que los valores de las variables permitieron que adopten otra estrategia y esto permitió que interiorizaran el conocimiento.

CONSIDERACIONES FINALES

A partir del análisis de documentos de investigación, documentos oficiales y el estudio del marco teórico, se ha diseñado y aplicado una secuencia didáctica en la que la presente investigación llega a conclusiones referentes al marco teórico, la metodología, los objetivos planteados y nuevas perspectivas de investigación.

Con relación al marco teórico:

Consideramos que la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) propuesta por Brousseau (1986) nos permitió estructurar y modelizar una secuencia didáctica pertinente, podemos decir que el carácter dialéctico de esta teoría, ha permitido hacer evolucionar y construir sus conocimientos, en un continuo afinamiento y correcciones de sus argumentos. Además, debemos resaltar que las retroacciones (rechazos y aceptaciones) del medio que ayudaron a superar dificultades y a sancionar estrategias que no eran convenientes, provino no solo del profesor, mediante el proceso de devolución sino de un papel importante que desempeñó el otro compañero.

En cuanto a la fase de acción, los estudiantes crearon su propia estrategia de solución, que se evidenció en la fase de formulación, donde los integrantes de la dupla planteaban su propuesta en forma espontánea, notándose gran involucramiento en manifestar sus enunciados. En los planteamientos enunciados se evidenciaron la espontaneidad e involucramiento en comunicar sus enunciados. En cuanto, a la fase de validación se evidenció que los estudiantes justificaron y productos de sus aceptaciones y rechazos de las formulaciones de los compañeros podemos decir que construyeron su saber.

Es una situación a-didáctica donde el niño interactúa solo frente al problema y pone en juego sus estrategias rechazando y aceptando según le sea útil o eficaz. La consecución de resultados frente a esta manera de abordar las estrategias va a constituir su metodología de resolución de problemas, que es una manera de aprender a resolverlos.

Podemos concluir, que entendiendo que una consecuencia clara de ella es que el contrato didáctico. Decimos que el contrato se ha cumplido en el sentido que los estudiantes se han sentido responsables por ello el involucramiento como se lee en los diálogos.

Con relación a la metodología

La metodología de investigación empleada es la Ingeniería Didáctica de Artigue et al (1995), que es una metodología de tipo cualitativa experimental, la cual nos permitió dar un enfoque general de la estructura de la investigación y direccionar la búsqueda y análisis de insumos exhaustivos para construir un escenario didáctico (a priori) pertinente para el aprendizaje y a las características de los sujetos de investigación, que luego de su aplicación sería confrontado en sus resultados (a posteriori). Hemos incluido investigaciones referentes a nuestro objeto matemático, documentos oficiales que apoyan el tratamiento del suceso aleatorio, además de los sustentos teóricos importantes de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Con relación a la pregunta de investigación

La pregunta de nuestra investigación fue la siguiente: *¿La secuencia didáctica basada en situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana desarrolla la noción de suceso aleatorio posible, imposible, seguro y más probable en estudiantes del cuarto grado de educación primaria?*

Se puede concluir que nuestra investigación respondió a la pregunta, porque los alumnos desarrollaron esa noción, lo que se puede comprobar al analizar sus respuestas y argumentos en los diálogos escuchados. Asimismo, los estudiantes usaron términos propios de las situaciones de incertidumbre o aleatoriedad como “más probable”, “más posibilidad”, “mayor posibilidad”, “más frecuencia”, “mayor cantidad”. Por otro lado, el diseño de la secuencia didáctica basada en la TSD ha contribuido en la construcción de los saberes; más específicamente, la forma de trabajar en duplas ha permitido la argumentación, y esta ha evolucionado a una construcción de las soluciones, no sin posiciones contradictorias, pero también con abordajes equivalentes y construcción cooperativa. También otro aspecto es que las situaciones de incertidumbre propuestas que son cercanas y reales a los estudiantes, en este caso de mascotas, ha permitido el interés de todos los alumnos en participar, formular hipótesis, experimentar, verificar y explicar sus resultados.

Con relación al objetivo general de la investigación

El objetivo de nuestra investigación fue *validar que una secuencia didáctica que utiliza situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana permite desarrollar la noción de suceso aleatorio posible, imposible, seguro y “más probable” en estudiantes del cuarto grado de educación primaria*. Debemos decir, que la validación interna propia de la Ingeniería

Didáctica, permitió alcanzar el objetivo general al comparar los resultados esperados con los resultados a posteriori: se comprobó que los alumnos alcanzaron a desarrollar dichas nociones de suceso aleatorio. Se corroboró que los estudiantes entendieron la noción de “seguro” en el sentido que siempre va a ocurrir dentro de una clase o categoría de todos los sucesos posibles (espacio muestral), y, en cuanto a la noción de suceso como más probable, se corroboró que los estudiantes adquirieron dicha noción, como aquel donde hay mayor cantidad, por lo tanto mayor posibilidad de ocurrir.

Con respecto a los objetivos específicos, se identificaron dificultades al enfrentarse al problema. Estas dificultades se presentaron, en algunos casos, al utilizar el heurístico de disponibilidad, por ejemplo, se consideró que, porque un gato está primero dentro de una caja del cual se va a extraer sin verlo, este se extraerá primero. Otra dificultad presentada fue en el ítem (c) de la actividad 1 de un gato que presentaba colores de los perros (padres): el estudiante, integrante de la dupla A, se resistió, al inicio, a cambiar de opinión, pero, luego, comprendió la imposibilidad de que el gato fuera cría de los perros. En la actividad 2, se observó que algunos estudiantes mostraron dificultad en reconocer el suceso seguro, pues debían formular una palabra que designara a todos esos sucesos posibles, sin embargo, ellos llegaron al objetivo. El objetivo específico de diseñar e implementar una secuencia didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas se cumplió porque este se diseñó e implementó considerando el marco de la TSD y sus fases didácticas. La implementación ha propiciado una participación activa y responsable en colaborar en la construcción de la solución.

PERSPECTIVAS FUTURAS

Consideramos que el presente trabajo se complementará y enriquecerá con otras investigaciones. Seguidamente sugerimos algunas ideas:

- ❖ A los resultados obtenidos, se puede considerar una nueva teoría que nos dé fundamentos de cómo desarrollar la argumentación, debido a que esta se evidenció que tratando el contenido de suceso aleatorio, podemos desarrollar esta capacidad, que es importante en la matemática.
- ❖ Continuar haciendo investigaciones que consideren las actividades de la vida cotidiana, o de conocimientos previos adquiridos por el estudiante en su etapa escolar; esa es la manera de integrar áreas, como Ciencia y Ambiente con la probabilidad.



REFERENCIAS

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gomez, P. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Segunda edición. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana. Recuperado de: <http://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf>
- Batanero, Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. Revista UNO, 5, 15-28. Recuperado de: <http://www.ugr.es/~Batanero/pages/ARTICULOS/aleatoriedad.pdf>
- Batanero, C. (2000). El desarrollo de la estadística en el siglo XX y perspectivas futuras. Recuperado de: <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo44.pdf>
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los estudiantes. ¿Qué podemos aprender de la investigación? Atas do III Encontro
- Batanero, C. y Godino, J. D. (2001). Análisis de datos y su didáctica. <http://www.pucrs.br/famat/viali/graduacao/matematica/material/referencias/Apuntes.pdf>
- Batanero, L., Serrano L., Ortiz, J.J. y Cañizares, Jesús. (2001). Concepciones de los estudiantes de Secundaria sobre modelo probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. Universidad de Granada. Recuperado de: <http://www.fespm.es/sites/revi>
- Brousseau, Guy (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Recuperado de: <http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5CFundamentosBrousseau.pdf>
- Brousseau, Guy (2007). Iniciación al estudio de las teorías de las situaciones. Buenos Aires. Recuperado de: <http://es.slideshare.net/diegoizqui/teora-de-las-situaciones-didcticas>
- Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Universidad de GRANADA. Recuperado de: <http://www.ugr.es/~Batanero/pages/ARTICULOS/CANIZARE.pdf>
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona: Editorial Horsori.

- Chile, Ministerio de Educación. (2012). Educación Básica Matemática: Bases curriculares. Santiago de Chile. Recuperado de:
http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/curriculum_al_dia/bases_matematica_2012.pdf
- D`Amore, Bruno (2006). Didáctica de la Matemática. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., Scheaffer, R. (2005). Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report A Pre-K–12 Curriculum Framework. Recuperado de:
http://www.amstat.org/education/gaise/GAISEPreK-12_Full.pdf
- Fregona, D., Báguena, P. (2011). La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas: Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática. Recuperado de:
https://www.google.com.pe/?gfe_rd=cr&ei=eTojVMdVzt3yB67dgaAB&gws_rd=ssl#q=Dilma+fregona+google+academico&start=0
- Fischbein, E. (1979). Intuition and Mathematical Education. Some Theoretical Issues in Mathematics Educations: Papers from a Research Pre-session (p. 37-54). Columbus: Eric Information Analysis Center for Science, Mathematics, and Environmental Education. Recuperado de:
https://archive.org/stream/ERIC_ED180815/ERIC_ED180815_djvu.txt
- Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001. Recuperado en:
<http://www.uv.es/puigl/intronota.pdf>
- Garfield, J., Aliaga, M., Cobb, G., Cuff, C., Gould, R., Lock, R., Moore, T., Rossman, A., Sthepenson, B., Utts, J., Velleman, P. & Wittmer, P. (2012). Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education. College Report. Recuperado de:
http://www.amstat.org/education/gaise/GaiseCollege_Full.pdf
- Godino, J.D., Batanero C. y Cañizares (1996). Azar y probabilidad. Editorial Síntesis. Madrid.

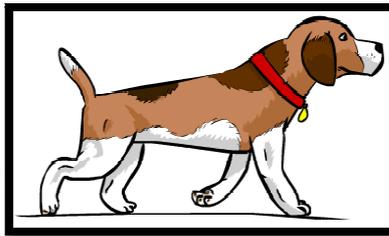
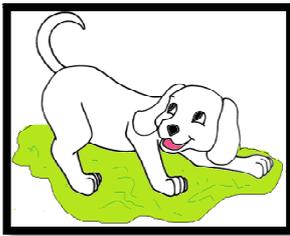
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana educación matemática*. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf
- Gravemeijer, K y Teruel, J. (2000). Hans Freudental, un matemático en didáctica y teoría. Recuperado de: <http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/hansfreudenthal.pdf>
- Leucotre, M. P. (1992). Cognitive models and problema spaces in purely random situations. <http://link.springer.com/article/10.1007/BF00540060#page-1>
- Mariotti, Alessandra. (1998). La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein. Departamento de Matemática Universidad de Pisa. Italia. Recuperado de: <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/981112Theme/981112The meES.html>
- Martinez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista IIPSI Facultad de Psicología: Vol. 9- N°1* Recuperado de: <http://www.meipe.org/propedeutico/07%20La%20investigacion%20cualitativa.pdf>
- Mason, R. D. (1973). *Estadística comercial y económica*. Learning System Company. Illinois, USA. Pág. 212.
- Mohamed, N. (2012). Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad. (Tesis doctoral en Didáctica de la Matemática). Universidad de Granada. España.
- National Council of Teacher of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Trad. Castellana, Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).
- Romana, J. C. (2010). *Estadística, herramientas para el desarrollo de las organizaciones*. UPT. Tacna Perú.
- Osorio, A. R. (2012). Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la Enseñanza Superior. (Tesis de Maestría en Educación matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.
Recuperado de: URI: <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4658>

- Perú, Ministerio de Educación. UMC (2004). Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. Informe pedagógico de resultados. Lima, Perú. Recuperado de:
http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/en2004/MatematicaS3_5.pdf
- Perú, Ministerio de Educación- IPEBA (2013). Mapas de Progreso Aprendizaje. Matemática: Estadística y probabilidad. Recuperado de:
http://www.ipeba.gob.pe/estandares/MapasProgreso_Matematica_EstadisticaProbabilidad.pdf
- Perú, Ministerio de Educación. (2009). Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular. San Borja.
- Puig, J. (1996). Investigación y didáctica de las matemáticas
- Serradó, A. Cardeñoso, J. y Azcarate, P. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal*, 4(2), 59-81 Recuperado de: http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ4%282%29_serrado_etal.pdf
- Spurr, W. y Bonini, C (1986). *Toma de decisiones en administración*. México: Editorial LIMUSA.
- Torazos, F. (1962). *Estadística*. Buenos Aires: Editorial Kapeluz.
- Valero, P. (1997). Una visión de la didáctica de las matemáticas desde Francia. Algunos conceptos y métodos. Seminario de formación de profesores sobre la didáctica de las matemáticas francesa. Universidad de los Andes. Bogota. Recuperado de:
http://www.fing.edu.uy/imerl/didactica_matematica/Documentos_2008/Una_vision_de_la_didactica_1_.pdf

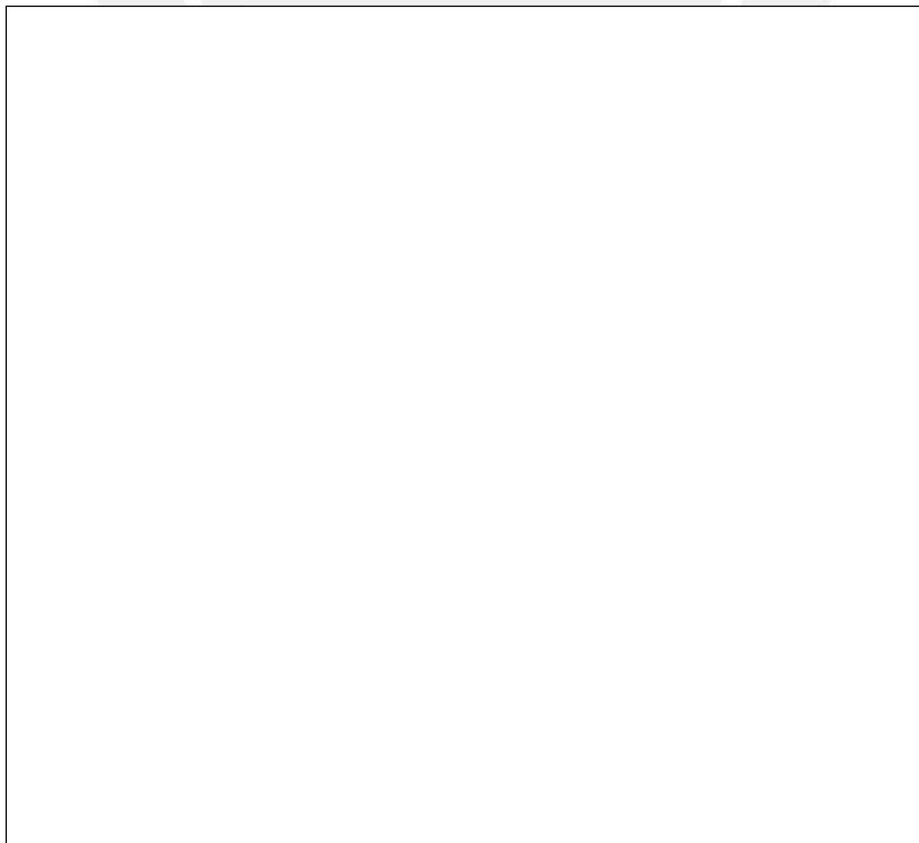
ANEXOS

Actividad 1

Valeria tiene una perrita que está preñada. Ella está muy emocionada por el nacimiento de las crías. Su perrita es de color blanco y el papá de los futuros cachorritos, es de un matiz chocolate, chocolate claro y blanco.

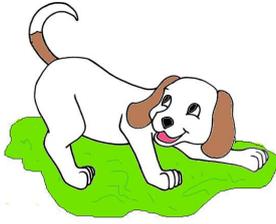


Dibuja tres posibles crías.



Lee atentamente las indicaciones y resuelve.

B. ¿Es posible que nazca una cría con los colores como se aprecia en la figura? Marca la respuesta



POSIBLE

IMPOSIBLE

¿Por qué?

.....
.....
.....

C. ¿Será posible que este animalito sea una cría? Marca la respuesta



POSIBLE

IMPOSIBLE

¿Por qué?

.....
.....
.....

D. ¿Será posible que nazca una cría como la figura? Marca la respuesta



POSIBLE

IMPOSIBLE

¿Por qué?

.....
.....
.....

E. ¿Será posible que nazca un perrito de la figura? Marca la respuesta



POSIBLE

IMPOSIBLE

¿Por qué?

.....
.....
.....

Actividad 2

Si en una jaula hubiera gatos pardos (6) y gatos plomos (4).



Y el dueño tuviera que sacar un gato sin verlo. ¿qué es seguro que saque?

- Un gato plomo
- Un gato pardo
- Un gato

.....porque.....
.....

Si la jaula de cada uno de estos animales se abriera.



¿QUÉ ES SEGURO QUE SALGA DE LA JAULA? ¿POR QUE?

- Un otorongo
- Un tigre
- Un león
- Un guepardo
- Un felino
- Un puma

.....
.....
.....

Actividad 3

El niño Pedro lleva en una caja seis (6) gatos pardos y cuatro (4) gatos plomos a la veterinaria para desparasitarlos.



Si el veterinario le pide que saque uno de los gatos de la caja y Pedro lo hace sin verlo, ¿qué es **más probable** que saque? ¿Por qué?

Un gato plomo

Un gato pardo

.....

Pedro tiene en una caja siete (7) gatos plomos y cinco (5) gatos pardos.



Él debe alimentarlos así que saca uno de ellos sin verlo, ¿qué es **más probable** que saque? ¿Por qué?

Un gato plomo

Un gato pardo

Porque,.....

