PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

RECONFIGURACIÓN DEL TRAPECIO PARA DETERMINAR LA MEDIDA DEL ÁREA DE DICHO OBJETO MATEMÁTICO CON ESTUDIANTES DEL SEGUNDO GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

que presenta

ISELA PATRICIA BORJA RUEDA

Dirigido por

VERÓNICA NEIRA FERNÁNDEZ

San Miguel, 2015

A la memoria de mis padres Carmen y Jorge.

A mis hermanos Carlos, Luis y Jorge.

AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Educación del Perú, quien por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominada “Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014”.

A la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por su acogida para nuestro desarrollo profesional en el campo educativo en beneficio del progreso de nuestro país.

A mi estimada asesora, la Mg. Verónica Neira Fernández, por su constante apoyo, paciencia, colaboración y comprensión durante toda la elaboración de esta investigación.

A la Dra. Jesús Flores Salazar de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus valiosas contribuciones para el desarrollo de la tesis.

A la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por su apoyo en el desarrollo de la tesis.

A mis profesores y profesoras de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por contribuir en mi formación académica y personal.

A la Dra. María José Ferreira y al Dr. Saddo Ag Almouloud, por sus valiosos aportes a mi investigación.

A mis compañeros de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, que compartimos este gran esfuerzo en la investigación en la educación matemática en favor de nuestros estudiantes, la comunidad y nuestro país.

Al Mg. Felipe Silva Eneque, director de la Institución Educativa Andahuasi, por su apoyo al permitirme aplicar en esta casa de estudios las actividades propuestas.

Al Lic. Antonio Eduardo Aguirre Montoro, Jefe de Relaciones Públicas y a la asistente Srta. Jenny Torres Toribio de la Empresa Agraria Azucarera Andahuasi por su apoyo con las filmaciones.

A mis estudiantes y padres de familia de la Institución Educativa Andahuasi por su cariño y aprecio a mi persona.

La autora.

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo analizar, a partir de la reconfiguración del trapecio, cómo los estudiantes de educación secundaria hallan la medida del área del mismo. Por ello, nos centramos en el registro figural y en la aprehensión operatoria de reconfiguración, que consiste en realizar modificaciones mereológicas de fraccionamiento o división del trapecio para obtener una nueva figura de contorno global diferente al trapecio y a partir de ello determinar la medida del área de este objeto matemático. En esta investigación trabajamos con estudiantes del segundo grado de educación secundaria de una institución educativa pública, cuyas edades están comprendidas entre los 12 y 15 años. Utilizamos como referencial teórico aspectos de la Teoría de Registro de Representación Semiótica de Duval y en cuanto a la metodología, nos apoyamos en aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue. Con respecto a la parte experimental de la investigación, realizamos una secuencia de tres actividades las cuales fueron elaboradas para que los estudiantes desarrollen la operación de reconfiguración del trapecio en el registro figural por medio del uso de la malla cuadriculada y el software Geogebra, en las dos primeras actividades. Asimismo, identificamos la aprehensión perceptiva, discursiva, secuencial y operatoria, que realizan los estudiantes en el desarrollo de la secuencia de actividades. También, observamos que los estudiantes movilizan sus conocimientos previos acerca de la medida del área del trapecio cuando emplean la fórmula para hallar la medida del área del trapecio. Finalmente, consideramos que los estudiantes del segundo grado de educación secundaria lograron hallar la medida del área del trapecio a partir de la reconfiguración de este objeto matemático.

Palabras claves: Registro Figural. Reconfiguración, Trapecio, Medida de área.

ABSTRACT

This research aims to analyze, from the reconfiguration of the trapezoid, how high school students are able to find the measure the same area. Therefore, we focus on figural registration and operative apprehension of reconfiguration, which involves making mereologic changes fractionation or division of the trapezoid for a new figure of overall contour different to trapezoid and it can determine the extent of the area this mathematical object. In this research work with students in the second year of secondary education in a public school, whose ages are between 12 and 15 years. We use as theoretical framework aspects of Theory of Semiotics Representation Registration from Duval and in terms of methodology, we rely on aspects of Teaching Engineering Artigue. Regarding the experimental part of the research, we carried out a sequence of three activities which were developed for students to develop the operation of reconfiguration of the trapezoid in the figural register through the use of the grid mesh and the Geogebra software in the first two activities. We also identify the perceptual apprehension, discursive, sequential and operations, done by students in the development of the sequence of activities. We also observed that students mobilize their previous knowledge about the extent of the area of the trapezoid when they use the formula for measuring the area of the trapezoid. Finally, we consider the second grade students of secondary schools were able to find the extent of the area of the trapezoid from the reconfiguration of this mathematical object.

Keywords: Figural Registration. Reconfiguration, Trapezoid, Measure of area.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES

La presente investigación trata de la reconfiguración del trapecio para determinar la medida del área de este objeto matemático con estudiantes del segundo grado de educación secundaria de la Educación Básica Regular del Perú, desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval.

A continuación presentaremos la estructura de nuestra investigación, compuesta de cinco capítulos:

En el capítulo I, presentamos el problema de investigación en el que analizamos investigaciones que tienen relación con el estudio del aprendizaje de la noción de medida del trapecio y otros polígonos, a través de la descomposición y composición, la reconfiguración con diversos medios, presentamos el software Geogebra, justificamos el problema de investigación, formulamos la pregunta de investigación y los objetivos.

En el capítulo II, presentamos aspectos del marco teórico de nuestra investigación referido a la Teoría de Registros de Representaciones propuesta por Duval en 1995, en relación al Registro figural y las maneras de aprehenderlo que son la aprehensión perceptiva, la aprehensión discursiva, la aprehensión secuencial y la aprehensión operatoria. Además, se estudian las modificaciones que se dan en la aprehensión operatoria y especialmente la operación de reconfiguración ligada a las modificaciones mereológicas.

En el capítulo III, presentamos brevemente aspectos históricos de la medida del área, el área como magnitud, el trapecio y el tratamiento didáctico del área del trapecio que presenta el libro de Matemática 2 Secundaria, otorgado a los estudiantes de segundo grado de educación secundaria de las instituciones públicas de manera gratuita.

En el capítulo IV, presentamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) como base metodológica de nuestra investigación.

En el capítulo V, presentamos el experimento, que comprende: la descripción de los sujetos de investigación, la descripción de la secuencia de tres actividades, instrumentos, recursos; el análisis de las actividades, con sus respectivos análisis a priori y a posteriori de las acciones de los estudiantes.

Finalmente, presentamos las consideraciones finales del estudio, en relación al marco teórico y metodológico, a la pregunta de investigación, al objetivo general y a las perspectivas futuras.

Debemos resaltar que la presente tesis de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, forma parte del proyecto internacional desarrollado entre los grupos de investigación *DIMAT* de la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP/PERÚ y *PEA-MAT* de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo, PUC-SP/ BRASIL, titulado: *"Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT"* y aprobado por la *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo* (FAPESP) proceso 2013/23228-7 y por PI0272 (PUCP).

CAPÍTULO I: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo empezamos con la descripción de investigaciones que tuvieron como foco de estudio el aprendizaje de la noción de medida de área de figuras planas como cuadrados, triángulos, rectángulos, paralelogramos, rombos y trapecios, a través de la descomposición y composición o la reconfiguración de figuras planas, por medio de la malla cuadriculada, el tangram y software de geometría como el Cabri y el Geogebra.

1.1 Antecedentes

En primer lugar, consideramos el trabajo de Secco (2007) en el que se plantea como uno de sus objetivos el analizar si la reconfiguración de las figuras planas contribuye a la apropiación de la noción de área de un polígono en estudiantes brasileños, de la 8va serie de educación básica con 14 años de edad. Para ello, el investigador parte de que los estudiantes no se han apropiado de la noción de área en sus aprendizajes anteriores, por lo cual realiza una propuesta de enseñanza aprendizaje sobre la noción de área. Emplea como parte de su marco teórico aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y como metodología, aspectos de la Ingeniería Didáctica. La investigación se lleva a cabo con el desarrollo de una secuencia de actividades en tres bloques.

En el primer bloque, los estudiantes determinan el área a través de la reconfiguración, es decir, descomponen el polígono original para luego componerlo, con las partes obtenidas en un nuevo polígono y para ello trabajan con material concreto, que les permite realizar observaciones y conjeturas validadas por la percepción bidimensional de la figura, al obtener figuras equivalentes del cuadrado, triángulo, rectángulo, paralelogramo, rombo y trapecio. En el segundo bloque, se emplea el software Cabri para que los estudiantes puedan manipular y observar las propiedades matemáticas como segmento perpendicular, punto medio, recta paralela que permiten realizar construcciones de figuras equivalentes al paralelogramo, al triángulo y al rombo, a través también del proceso de reconfiguración. Cabe resaltar que con la geometría estática, es decir, con regla y compás, estas manipulaciones no serían posibles, además esta actividad permite que los estudiantes puedan experimentar, interpretar, visualizar, inducir, conjeturar, abstraer, generalizar y en fin demostrar. En el tercer bloque, los estudiantes calculan el área de las figuras mencionadas tanto en forma numérica como algebraica. Para su solución, aplican lo aprendido con el material concreto y el software Cabri, pero se presentó inconvenientes para el área del trapecio que fueron superados por los estudiantes con la intervención del profesor investigador en el desarrollo de este bloque de actividades. Esto se debió a que los estudiantes no habían trabajado el área del trapecio con el software Cabri. La investigación concluye que los resultados de los dos primeros bloques, evidencian que el proceso de reconfiguración de figuras poligonales planas contribuye a que los estudiantes se apropien mejor de la noción de área de un polígono y además permite el pase de lo empírico a lo deductivo. Por ello, adecuaremos actividades del Cabri propuestas en esta investigación para que los estudiantes encuentren la medida del área del trapecio, a través de la construcción de una figura geométrica equivalente obtenida por la operación de reconfiguración, según la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

También, se considerará el trabajo de Silva (2010) en el que se realiza un estudio diagnóstico de los procedimientos movilizados, en la resolución de actividades con respecto al cálculo de áreas de figuras planas en mallas cuadriculadas, por estudiantes brasileños del 6° año de enseñanza básica de 11 años de edad. Este estudio emplea como marco teórico a la Teoría de Situaciones Didácticas y el trabajo desarrollado por Douady & Perrin-Glorian (1987) acerca del área como magnitud.

El cálculo de la medida del área con el uso de la malla cuadriculada consistió en emplear tres estrategias como son: el conteo de los cuadrados de la malla cuando todos los lados de la figura están apoyados en las líneas de la cuadrícula, la descomposición y recomposición de partes de la figura para obtener una nueva composición de la figura y después, utilizar el conteo cuando no todos los lados de la figura están apoyados en las líneas de la cuadrícula, y encuadrar, es decir, encerrar la figura en un rectángulo o cuadrado cuando ningún lado de la figura está apoyado en la líneas de la cuadrícula, para calcular su área total y luego restar las áreas que no son parte de la figura.

El investigador concluye que el uso de la malla cuadriculada favorece la operación de la medida del área como magnitud. Esto se da a través del conteo de los cuadrados de la malla cuadriculada, es decir, cuando se determina cuantas veces el cuadrado cabe dentro de la figura y en este proceso se realizan dos operaciones distintas una geométrica y otra numérica. Donde la geométrica se realiza al cubrir la figura con la unidad de superficie unitaria, en este caso el cuadrado de la malla cuadriculada y numérica al contar la cantidad de unidades de superficie unitarias que cubrieron la figura. En nuestro trabajo incluiremos el uso de la malla cuadriculada para figuras donde algunos lados estén apoyados en las líneas de las mallas, para que los estudiantes además de contar los cuadrados, también realicen la descomposición y composición de la figura.

Luego, consideraremos el estudio de Arenas (2012) cuyo objetivo es diseñar e implementar una estrategia didáctica a través de la construcción y la manipulación del tangram de siete piezas, para la enseñanza del área y el perímetro de figuras planas. Esta investigación está basada en la Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel y fue descriptiva-cualitativa, la cual se realizó con estudiantes del sexto grado de la educación básica secundaria de una institución educativa colombiana, con edades que oscila entre los 12 a 15 años. Se constató a través de las entrevistas que las respuestas dadas por los estudiantes, en la prueba inicial con respecto al área, fueron al azar ya que las nociones de área no eran claras para ellos. Se plantearon actividades para que los estudiantes utilizaran material manipulable, en particular el tangram, de modo que pudieran determinar el área de algunas figuras planas como el rectángulo. Para ello, contaron la cantidad de cuadrados que tenía la figura, asumiéndose que cada cuadrado era una unidad de área ya que cada lado tenía un centímetro, es decir, compararon las figuras hechas con el tangram con una malla cuadriculada. Además, verificaron sus resultados al reemplazar sus datos en la fórmula del área correspondiente a la figura. Es así que, en la prueba de contraste, es decir, al desarrollar de nuevo la prueba inicial se evidenció que los estudiantes luego de la aplicación de la estrategia pudieron relacionar la equivalencia del área de la figura con el conteo de unidades de área y fortalecer la relación espacial de una figura, es decir, que el cambio de la forma de una figura no implica el cambio en el tamaño de su área. Por este motivo se incluirá el uso del conteo de unidades de área en una de nuestras actividades.

Asimismo, Rodríguez (2011) presenta una investigación acerca de una estrategia de enseñanza basada en el uso del software de geometría dinámica Geogebra, desarrollada con estudiantes del séptimo grado con un promedio de edad de 12 años, en una institución educativa colombiana. Cuyo objetivo es describir el impacto de la implementación de este software en los procesos de enseñanza y aprendizaje en la construcción de figuras geométricas y el concepto de área, en base a criterios de la Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel y la metodología investigación-acción-reflexión. Se empezó con la observación de los procesos de los estudiantes en el área de matemática de manera general, luego la clasificación de los cuadriláteros y los procedimientos para encontrar el área de una figura compuesta formada por cuatro triángulos y un rectángulo, en la cual casi todos los estudiantes respondieron de manera incorrecta al indicar las siguientes soluciones: “Se suman y se miden los lados (…) Hallar el área de los triángulos y luego sumarlos” (Rodríguez, p. 48). Por ello, se aplican estrategias de enseñanza en la construcción de aprendizajes significativos para los siguientes conceptos: punto, recta, segmento, polígono, triángulo, circunferencia, cuadrado, perímetro, representación de un punto como pareja ordenada, punto intersección, líneas y puntos notables del triángulo con el uso del Geogebra por parte de los estudiantes, a través de guías.

Finalmente, en la evaluación uno de los ítems consistió en encontrar el área de partes sombreadas, para lo cual en un caso, tenían que hallar el área de dos cuadriláteros para sumarlos y en otro caso hallar el área de dos circunferencias concéntricas para restar el área menor de la mayor, así encontrar el área sombreada solicitada. En general, la investigadora manifiesta que los estudiantes entendieron el proceso de composición y descomposición de las figuras, ya que mostraron claridad al realizar este proceso, es decir demostraron entender que en la figura compuesta por cuadriláteros se debía hallar por separado cada área y luego sumarlas y que en la figura de las circunferencias concéntricas se debían restar las áreas correspondientes. En nuestra investigación haremos uso de este software de geometría para que los estudiantes determinen la medida del área del trapecio, a través de la construcción de una figura equivalente como el triángulo.

Por otro lado, Souza (2006) realiza una investigación cualitativa con estudiantes de la 8^{va} serie de la educación básica de una escuela pública brasileña, con edades entre los 13 y 15 años, con mayor presencia los de 14 años, sobre el aprendizaje de conceptos de álgebra y geometría. El objetivo era desarrollar un estudio sobre la escritura y la manipulación algebraica de las expresiones simbólicas del perímetro y del área de polígonos convexos como del triángulo, rectángulo, trapecio, hexágono regular inscrito en una circunferencia y círculo, es decir, el uso de propiedades como la conmutativa, asociativa, distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, de la igualdad a través de un módulo de actividades de enseñanza en base al constructivismo matemático y a la teoría de Skemp sobre la comprensión de los conceptos matemáticos. El investigador evidenció que los estudiantes no tenían comprensión sobre la manipulación de la fórmula que determina el área del trapecio porque no podían encontrar además del área otras variables como la altura o una de las bases del trapecio. Por ello, se propone determinar la fórmula del área del trapecio a través de la descomposición y composición de figuras conocidas, por ejemplo para determinar el área de un trapecio isósceles se puede descomponer esta figura en dos triángulos y un rectángulo, luego sumar las áreas de los polígonos que la componen para encontrar el área del trapecio.

Vistos los antecedentes, podemos afirmar que estos estudios son relevantes para nuestra investigación. Primero, porque nos muestran la preocupación de los investigadores con relación a los inconvenientes que presentan los estudiantes cuyas edades están entre los 11 y 15 años para apropiarse de la noción de medida del área de figuras planas como el trapecio, el cual muchas veces es mecánico y sin sentido, según lo manifiesta Souza (2006). Segundo, porque se proponen una serie de estrategias como la composición y descomposición de la figura a través de la malla cuadriculada (Silva, 2010), metodológica con el uso del software Geogebra (Rodríguez, 2011), didáctica con el uso del tangram (Arenas, 2012) y la operación de reconfiguración con el uso de material concreto como el software Cabri (Secco, 2007).

Además, como en nuestra investigación utilizaremos el software Geogebra, a continuación presentaremos aspectos de este programa.

1.2 El Geogebra

El Geogebra es un programa que reúne la geometría, el álgebra, la hoja de cálculo, los gráficos, la estadística y el cálculo en un solo programa, fácil de usar y de libre acceso para los estudiantes por ser gratuito, el cual se puede utilizar tanto en el aula de clase o laboratorio como en casa. Según Rodríguez (2011), es ideal para la enseñanza de la geometría, el álgebra y el cálculo, el cual fue elaborado por Markus Hohenwarter con un equipo internacional de desarrolladores. Es así que, permite realizar construcciones geométricas a partir de puntos, rectas, segmentos, etc. a través del uso directo de herramientas operadas con el mouse o la anotación de comandos en la barra de entrada como la manipulación de estas construcciones geométricas.

En esta oportunidad trabajaremos con la última versión del Geogebra 5.0, según Gómez (2015) en esta versión "(…) se conjugan la geometría interactiva de dos y tres dimensiones (2D y 3D respectivamente), álgebra, análisis y estadísticas, donde incorpora el Álgebra Simbólica Computacional (CAS en inglés) que permite trabajar con fracciones, ecuaciones y fórmulas que incluyen variables indefinidas." (p. 14) según Figura 1.

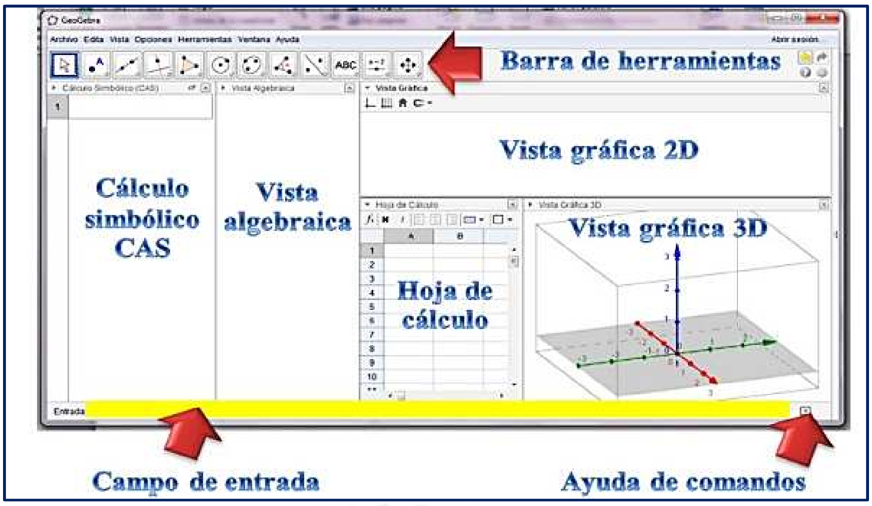


Figura 1. Ventanas de la nueva versión del Geogebra 5.0
Fuente: Gómez (2015, p. 14)

Al ingresar al Geogebra 5.0 nos presenta inmediatamente una ventana predeterminada, según Figura 2.

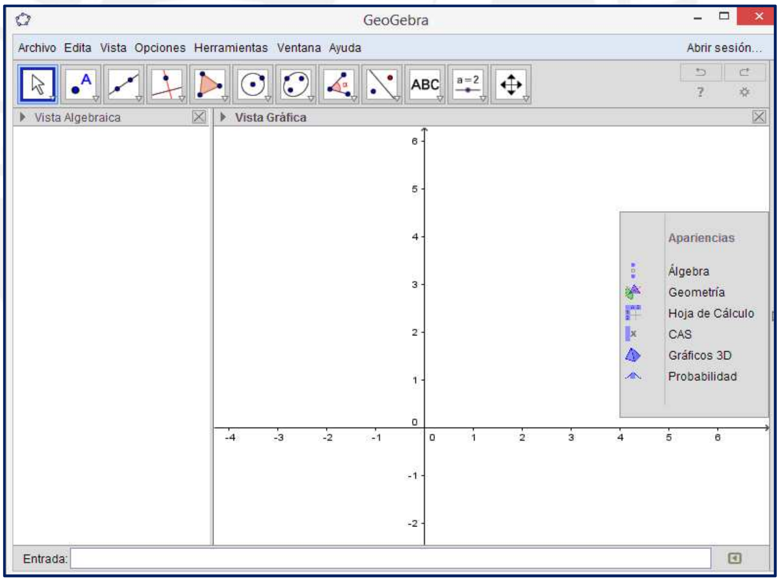


Figura 2. Ventanas de la nueva versión del Geogebra 5.0
Fuente: Gómez (2015, p. 15)

Sin embargo, en nuestro estudio trabajaremos con la Vista gráfica 2D, que se accede al ingresar a Geometría desde el menú Apariencias (ver Figura 3).

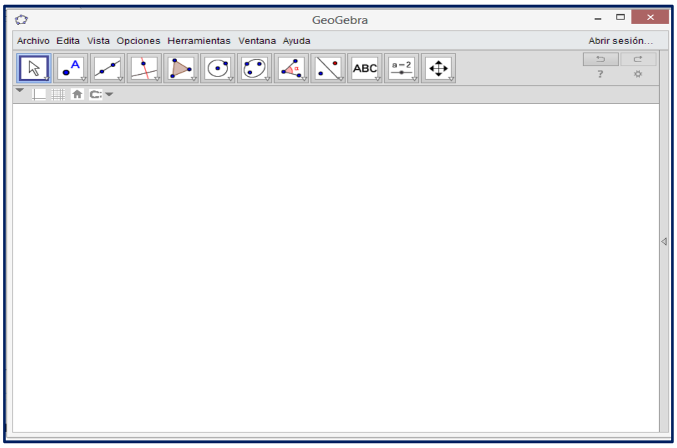


Figura 3. Vista Geometría del Geogebra 5.0
Fuente: Gómez (2015, p. 15)

Con respecto a las construcciones que se realizarán en nuestra investigación, hemos considerado que se seleccionarán las siguientes herramientas: (ver Tabla 1).

Tabla 1. Algunas herramientas de la Vista Gráfica del Geogebra 5.0

Herramienta	Ícono	Construcción
Segmento		Selecciona dos puntos y queda definido un segmento que pasa por ambos puntos.
Recta		Selecciona dos puntos y queda definida una recta que pasa por ambos puntos.
Paralela		Selecciona un segmento y un punto, queda definida la paralela a la recta que pasa por el punto.
Intersección		Se selecciona dos objetos para crear todos los puntos de intersección.
Polígono		Permite trazar un polígono con crear o seleccionar tres puntos que constituirán los vértices y para cerrarlo hacer un clic en el vértice de inicio.
Área	cm²	Establece el área de un polígono cuyo valor se expone como texto dinámico.
Texto	ABC	Permite añadir comentarios, etiquetas y símbolos.
Elige y mueve		Selecciona la herramienta Elige y Mueve y arrastra un vértice de la figura geométrica y se observa las modificaciones que sufre la construcción y el rastro que deja el vértice.

Fuente: Adaptado de Gómez (2015, p. 16)

Estas herramientas como la función arrastre facilitarán la movilización de conocimientos matemáticos y el desenvolvimiento de estrategias, de los estudiantes del segundo grado de secundaria, en el desarrollo de una de las actividades diseñadas en esta investigación.

Ahora, pasamos a la justificación de nuestra investigación de acuerdo a documentos oficiales en el sector de educación y a los antecedentes presentados en esta investigación.

1.3 Justificación

Observamos que en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular en el área de Matemática, para el segundo grado de secundaria se considera el conocimiento, según Perú (2009), "Perímetro y área de figuras geométricas planas" y la capacidad "Resuelve problemas que implican el cálculo sistemático o con fórmulas del perímetro o del área de figuras geométricas planas" (p. 326) en nuestra investigación se analizará el área del trapecio. Asimismo, a través de los antecedentes presentados podemos indicar que la noción de medida del área del trapecio presenta inconvenientes para su apropiación como lo expresan Souza (2006) y Secco (2007).

Por todo ello, en nuestra investigación trataremos acerca de la reconfiguración del trapecio para determinar la medida del área de dicho objeto matemático con estudiantes del segundo grado de secundaria, ya que pensamos que no es suficiente que el estudiante de segundo grado conozca y utilice la fórmula para hallar la medida del área del trapecio, sino también realice modificaciones mereológicas en la figura del trapecio como la operación de reconfiguración según la Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 2004), tanto con lápiz y papel a través de la malla cuadriculada, así como en un ambiente de geometría dinámico como el Geogebra.

Es por estas razones que, nuestro trabajo de investigación lo consideramos que es relevante.

A continuación, presentamos nuestro problema de investigación en relación a nuestro trabajo de investigación.

1.4 Problema de investigación

Nuestra investigación se centra en la operación de reconfiguración del trapecio para la determinación de la medida de área de este objeto matemático, en estudiantes del segundo grado de educación secundaria, con edades comprendidas entre los 12 a 14 años de edad.

Por lo expuesto anteriormente, planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo los estudiantes del segundo grado de educación secundaria, por medio de la reconfiguración del trapecio, determinan la medida del área del mismo?

1.5 Objetivos de la investigación

El objetivo general de la investigación es:

Analizar a partir de la reconfiguración del trapecio, cómo los estudiantes del segundo grado de educación secundaria determinan la medida del área del mismo.

Los objetivos específicos son:

- Identificar las aprehensiones que realizan los estudiantes del segundo grado de educación secundaria en una secuencia de actividades.
- Describir la aprehensión operatoria de reconfiguración que realizan los estudiantes de segundo grado de educación secundaria en una secuencia de actividades.

A continuación presentamos el marco teórico de nuestra investigación.

CAPÍTULO II: ELEMENTOS DEL MARCO TEÓRICO

En este capítulo presentaremos los aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesta por Duval en 1995, que se emplearán en la presente investigación.

2.1 Teoría de Registros de Representación Semiótica

Duval (2004) presenta la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesta en 1995. Según el autor, no es posible aprender las matemáticas sin recurrir a las representaciones porque en las matemáticas no se pueden percibir los objetos matemáticos de manera real, como sí ocurre con otras ciencias. Es así que se debe distinguir tres grandes tipos de representaciones, según se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Tipos de representaciones

MENTALES	SEMIÓTICAS	COMPUTACIONALES
No solo son imágenes mentales, también son nociones e ideas que se tiene de algo.	Son las que produce el sujeto para expresar sus representaciones mentales.	Son representaciones internas que no son representaciones conscientes del sujeto.

Según Duval (2001, p. 43), "(…) un sistema semiótico comporta reglas, más o menos explícitas, que permiten combinar los signos entre sí de tal manera que la asociación formada tenga también un sentido.". El sistema semiótico para que sea un registro de representación semiótica, debe poseer tres actividades cognitivas fundamentales que son: la formación, el tratamiento y la conversión. Además, indica que los registros que movilizan las matemáticas son de cuatro tipos, los cuales se definen en registros de representación discursiva y no discursiva. Donde los registros de representación discursivos son el registro de lengua natural y el registro algebraico porque utilizan una lengua y en ellos se puede formular proposiciones o transformar expresiones, que se caracterizan por ser verdaderas o falsas y permiten describir, inferir, razonar como calcular. En tanto, los registros de representación no discursivos son el registro figural y el registro gráfico porque nos muestran formas o configuraciones de forma, como organizaciones, que nos permiten visualizar unidades figurales. A continuación presentamos un resumen de lo manifestado en la Tabla 3.

Tabla 3. Clasificación de las representaciones discursivas y no discursivas

Representación discursiva	Representación no discursiva
Lengua natural Asociaciones verbales (conceptuales) Descripción, definición, explicación Razonamiento: -argumentación a partir de observaciones, de creencias. -deducción válida a partir de definición o de teoremas.	Figuras geométricas planas o en perspectivas (configuraciones de formas en 0,1, 2, 3 D). Aprehensión operatoria y no solamente perceptiva Construcción con instrumentos, Modelización de estructuras físicas (ejemplos: cristales, moléculas,…)
Sistemas de escritura: -numéricas (binaria, decimal, fraccionaria,…) -algebraicas -simbólicas (lenguas formales) Cálculo literal, algebraico, formal,…	Grafos cartesianos (Visualización de variaciones) Cambio de sistema de coordenadas, Interpolación y extrapolación

Fuente: Adaptado de Duval (2001, p. 52)

Duval (2001), considera que existe dos grandes tipos de transformaciones en una representación semiótica, como son: el tratamiento y la conversión. El tratamiento es una transformación de representación dentro de un mismo registro por ejemplo, en el registro figural también podemos realizar tratamientos como la reconfiguración que consiste en dividir una figura en sub-figuras, para formar una nueva figura y dar solución a una cuestión. En tanto, la conversión es una transformación que se da de un registro a otro registro, conservando la totalidad o una parte del contenido de la representación inicial, la cual es una transformación externa.

Como en nuestra investigación trabajaremos la noción de la medida del área del trapecio entonces consideramos pertinente trabajar la operación de reconfiguración en el registro figural. A continuación detallaremos los aspectos que utilizaremos en nuestra investigación.

2.2 Registro figural

Para Duval (2004), "(…) las figuras forman un importante soporte intuitivo para las actividades en geometría: dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen, permiten explorar, anticipar" (p. 161), por ello la importancia del registro figural en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Además, toda figura combina dos tipos de variaciones visuales: la dimensional y la cualitativa. La dimensional está referida al número de dimensiones que conforma una figura geométrica, por ejemplo, un punto tiene dimensión cero, una línea tiene dimensión uno, un área tiene dimensión dos. Mientras que la dimensión cualitativa corresponde a la forma de la figura, por ejemplo, una línea recta o una línea curva, el contorno abierto o cerrado de una superficie. Aunque, el color no es una variable semióticamente importante puede utilizarse para la lectura de una figura. Luego, "(…) el cruce de los valores de esta variable visual cualitativa con la variable de dimensión, nos permite definir las unidades figurales elementales" (Duval, 2004, p. 158). La figura geométrica está constituida por lo menos de dos unidades figurales elementales. La Figura 4, muestra la clasificación de las unidades figurales elementales.

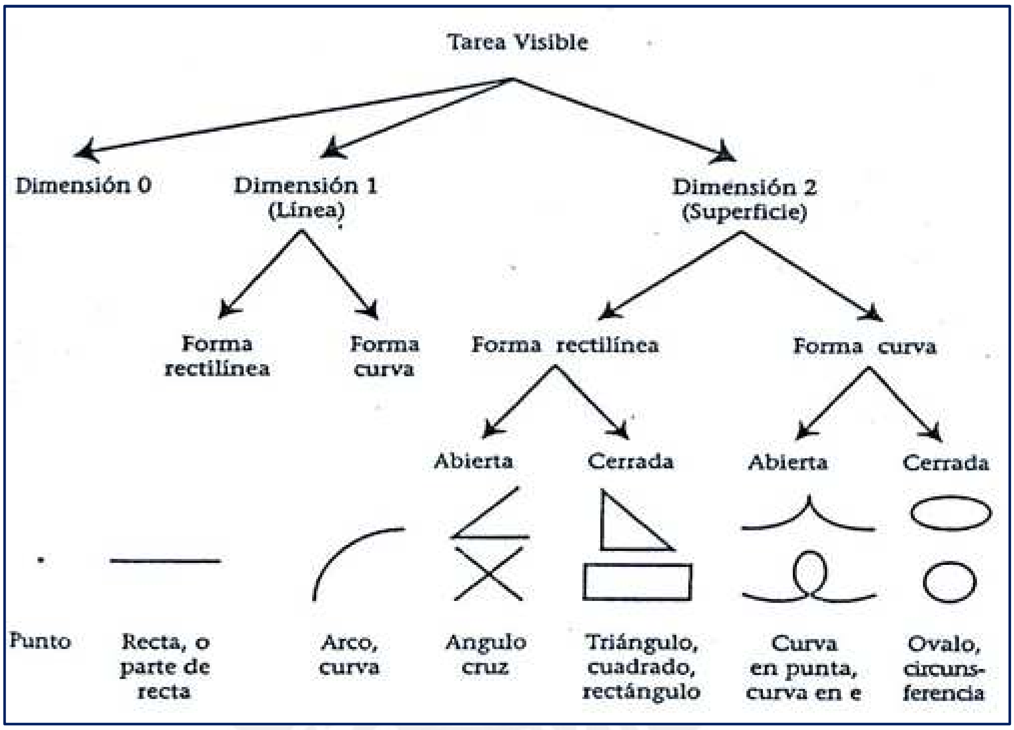


Figura 4. Clasificación de las unidades figurales elementales
Fuente: Duval (2004, p. 159)

Asimismo, Duval (1994) menciona cuatro maneras de aprehender el registro figural en geometría que son: la aprehensión perceptiva, la aprehensión discursiva, la aprehensión secuencial y la aprehensión operatoria.

La aprehensión perceptiva permite identificar o reconocer inmediatamente una forma o un objeto matemático. Es también la identificación simple de una configuración en 2D o en 3D, es decir, de sus unidades figurales elementales que la constituyen. La Figura 5, puede ser vista como la representación geométrica del trapecio, pero también como la base de una mesa, el respaldar de una cama, etc. Donde cada una de estas afirmaciones son el resultado de una aprehensión perceptiva.

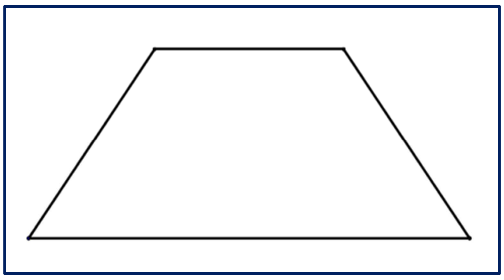
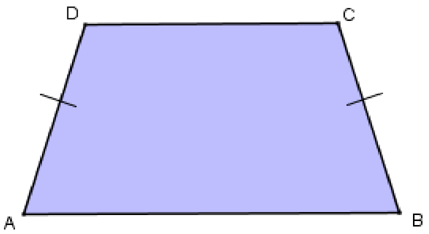


Figura 5. Aprehensión perceptiva

Esta figura presenta diferentes representaciones según nuestras aprehensiones perceptivas.

Para Duval (1994) “La aprehensión discursiva de una figura corresponde a una explicación desde otras propiedades matemáticas de la figura a las indicadas por la leyenda o por las hipótesis” (p. 124, traducción nuestra), como se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4. Aprehensión discursiva del trapecio isósceles

REPRESENTACIÓN	DISCURSO
El cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isósceles. 	Los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son congruentes en el trapecio isósceles $ABCD$. Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son paralelos en el trapecio isósceles $ABCD$. La suma de los ángulos internos en el trapecio isósceles $ABCD$ es 360°.

Mientras que la aprehensión secuencial, para el autor, “Se refiere al orden de la construcción de la figura. Este orden no sólo depende de las propiedades matemáticas de la figura, sino también de las herramientas utilizadas para su construcción (como los comandos de menús del software, la regla y compás)” Duval (1994, p. 126, traducción nuestra). Esta aprehensión se requiere cuando se quiere construir una figura o describir su construcción. Por ejemplo, la aprehensión secuencial de un trapecio rectángulo, sería la secuencia de pasos que realiza un estudiante para la construcción de este trapecio y en este caso con las herramientas del software Geogebra (ver Figura 6).

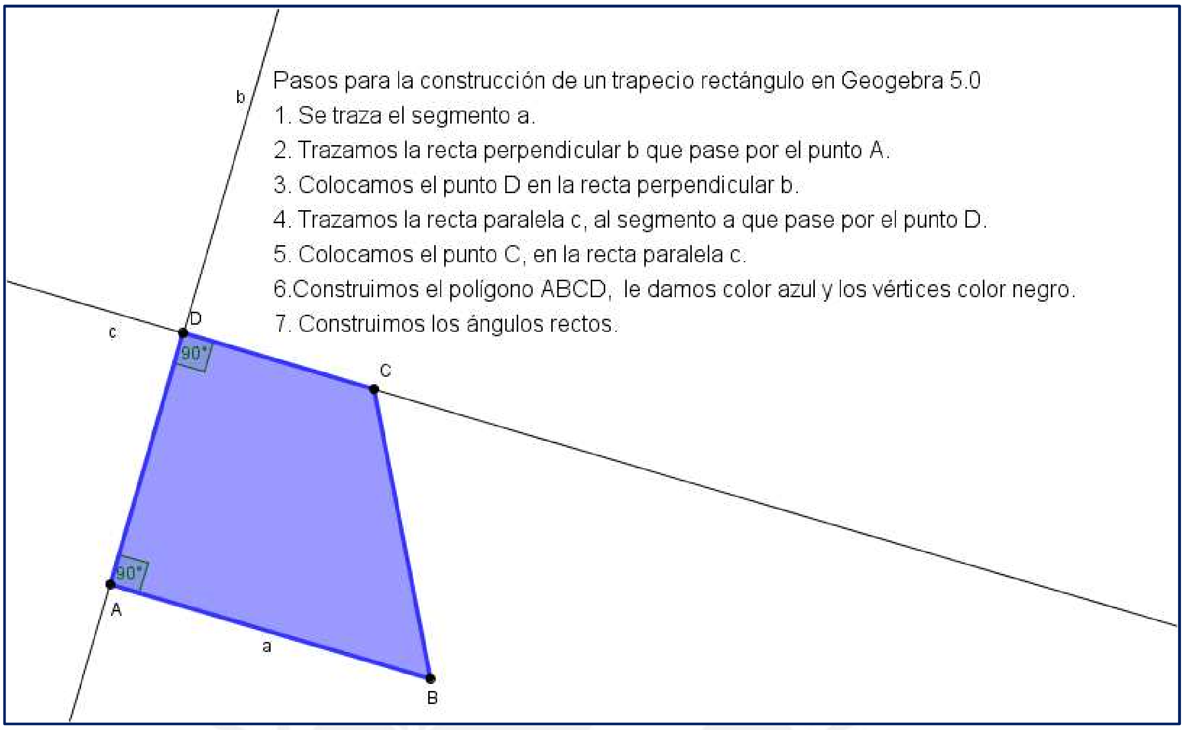


Figura 6. Aprehensión secuencial para construir un trapecio rectángulo

La aprehensión operatoria, según Duval (1994), es cuando podemos realizar modificaciones a una figura inicial para transformarla o modificarla en otras figuras posibles para mostrar la idea de una solución de una determinada cuestión. Por ello, se distinguen tres grandes tipos de modificaciones, tanto de manera física como mental, que no son de la misma naturaleza:

- La modificación mereológica: Según el investigador, es cuando la figura se divide o fracciona en varias sub-figuras y se reagrupan, es decir, hay una relación de parte y todo. En Duval (1988) se menciona que la reconfiguración es una de las operaciones ligada a las modificaciones mereológicas. La reconfiguración "es una operación que consiste en reorganizar una o varias sub-figuras diferentes de una figura dada en otra figura" (Duval, 2004, p. 165). La Figura 7, nos muestra un tratamiento en el registro figural, donde se realiza una modificación mereológica al trapecio ABCD que se encuentra en dimensión dos, para transformarlo en el triángulo ABG que también se encuentra en dimensión dos y hallar el área del trapecio al hallar el área del triángulo por ser una figura geométrica con la misma medida de área que el trapecio dado.

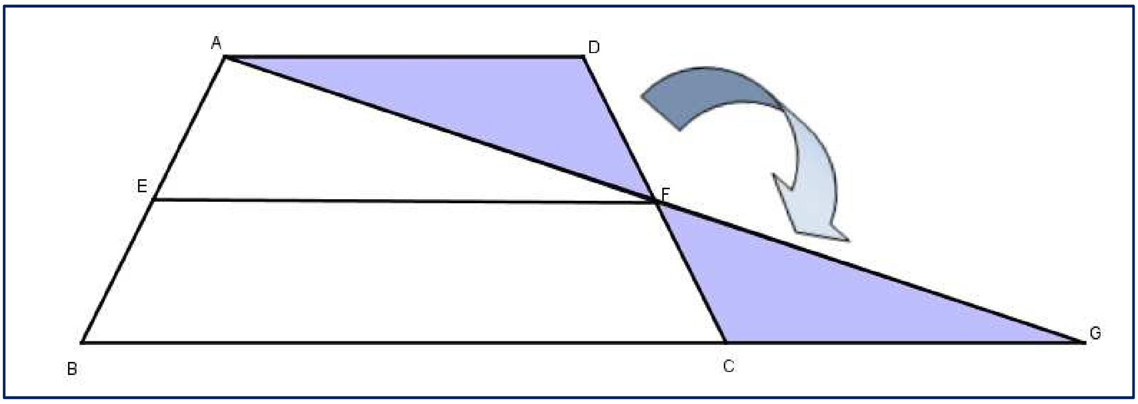


Figura 7. Tratamiento en el registro figural por reconfiguración del área del trapecio

Como afirma Duval (1988, p. 64, traducción nuestra), “Esta operación permite iniciar, de inmediato, tratamientos, tales como, la medida de área a través de la suma de las partes elementales o del reconocimiento de la equivalencia de dos reagrupamientos intermedios”.

- La modificación óptica: Consiste en aumentar, disminuir o deformar la figura inicial, es entonces la transformación de una figura en otra llamada imagen. La puesta en perspectiva es la operación ligada a este tipo de modificación “que consiste en ver “(…) en profundidad” dos unidades figurales de la misma forma con la misma orientación, pero sus tamaños pueden variar.” (Duval, 2004, p.165).

La Figura 8, nos muestra al trapecio ABCD (figura inicial) que se le aplica la transformación geométrica homotecia, en el punto O, con factor de conversión 2.

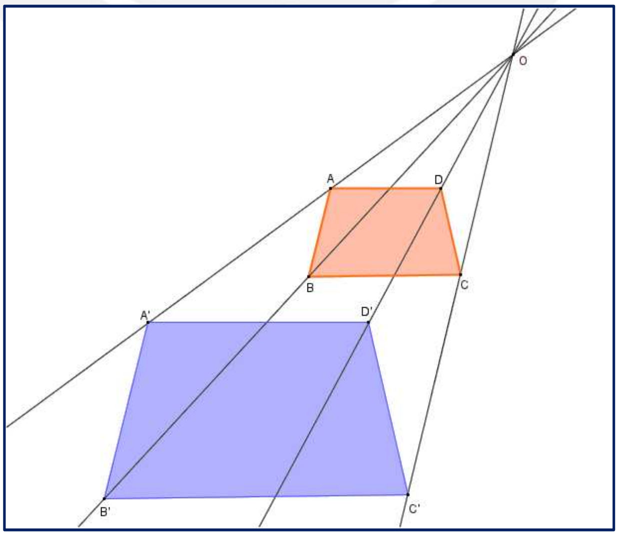


Figura 8. Modificación óptica de un trapecio por ampliación
Fuente: Adaptado de Duval (2004, p. 167)

- La modificación posicional: Según Duval (2004) es cuando hay desplazamiento en relación a un referencial, es decir, corresponde a movimientos por rotación, traslación y simetría. En la Figura 9, al trapecio rectangular ABCD se le aplica la transformación de rotación, en el vértice D y ángulo de 45° en sentido antihorario.

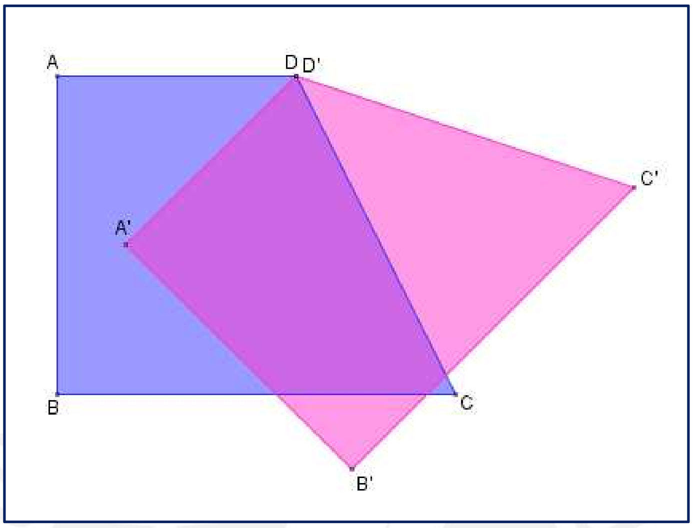


Figura 9: Modificación posicional de un trapecio rectángulo por rotación
Fuente: Adaptado de Duval (2004, p. 167)

En la operación de reconfiguración, según el investigador, la separación en partes puede darse por fraccionamientos o por dobleces, donde la descomposición de la figura inicial se realiza en unidades figurales de la misma dimensión que la configuración inicial la cual, según Duval (2005), puede ser:

- Estrictamente homogénea que es cuando la descomposición se ha dado en unidades figurales con la misma forma de la figura inicial. Por ejemplo, si tenemos un paralelogramo como figura inicial y al descomponerlo tenemos cuatro paralelogramos, entonces obtenemos un fraccionamiento estrictamente homogéneo (ver Figura 10).

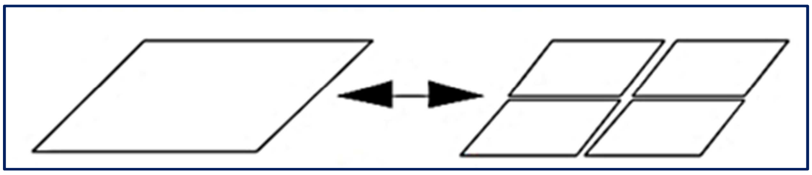


Figura 10. Descomposición estrictamente homogénea
Fuente: Duval (2005, p. 21)

- Homogénea que es cuando la descomposición se realiza en unidades figurales diferentes de la forma de la figura inicial, pero todas con las mismas formas. Por ejemplo, si tenemos un paralelogramo como figura inicial y lo descomponemos en dos triángulos, estas figuras no tienen la forma de la figura inicial, pero sí una misma forma, entonces tenemos una descomposición homogénea (ver Figura 11).

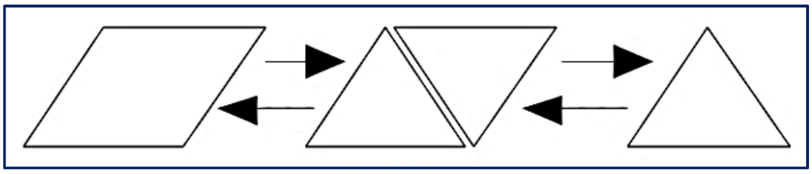


Figura 11. Descomposición homogénea
Fuente: Duval (2005, p. 21)

- Heterogénea que es cuando la descomposición se realiza en unidades figurales de formas diferentes entre ellas. Por ejemplo, el dividir un triángulo en dos partes para formar un paralelogramo implica una descomposición de este tipo (ver Figura 12).

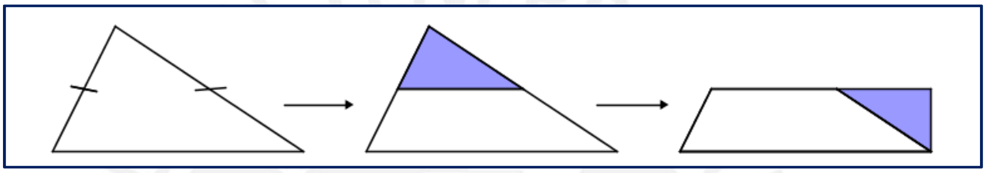


Figura 12. Descomposición heterogénea
Fuente: Duval (2005, p. 22)

En nuestra investigación consideraremos este tipo de descomposición, ya que los estudiantes tendrán que realizar modificaciones mereológicas en el trapecio y reconfigurarlo en una nueva figura para encontrar la medida de su área.

Además, la reconfiguración puede tener un soporte perceptivo el cual "(…) puede estar constituido por la cuadrícula del fondo sobre el que se destaca la figura, o por una división en bandas de ese fondo. Cuando el fondo es homogéneo, la operación de reconfiguración solo tiene como índices perceptibles los contornos de la figura". (Duval, 2004, p. 174). El soporte perceptivo se presentará cuando trabajemos con la malla cuadriculada en nuestra investigación.

Según el investigador, las operaciones que se realizan para modificar una figura, como la reconfiguración es una operación que está lejos de ser espontánea y evidente, porque para cada una de estas operaciones existen factores que hacen más o menos visible el poder efectuarlas. "Es esta diversidad de operaciones para una misma figura lo que constituye la riqueza y la complejidad del registro de las figuras geométricas desde el punto de vista de los procedimientos heurísticos." (Duval, 2004, p. 182). Estudio poco explorado, pero importante si se quiere comprender las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Ya que, la aprehensión operatoria permite a las figuras cumplir su función de soporte intuitivo para el desarrollo de actividades geométricas.

Nuestra investigación será acerca de la operación de reconfiguración que realizarán los estudiantes en el trapecio para obtener otras figuras geométricas con la misma medida de área del trapecio dado, por lo que a continuación se hará un estudio formal de esta figura geométrica.

CAPÍTULO III: ESTUDIO DEL TRAPECIO

En este capítulo trataremos del estudio del área y del trapecio desde el punto de vista matemático y didáctico.

3.1 Aspectos históricos

Según Fandiño y D´Amore (2009), el área la encontramos desde la antigüedad, como se evidencia en las tablas sumerias, de 3000 años a.C. como en los papiros egipcios de 2000 y 1800 años a.C. En dichos documentos se encuentran reglas para hallar el área de una determinada figura, por ejemplo, el área de un cuadrado a partir de la medida de su diagonal, o el área de un hexágono regular dado el lado, hallada en tablas sumerias. Entre los griegos que destacaron por su aporte para la demostración de fórmulas de cálculo de área y volúmenes, fueron Tales de Mileto, Pitágoras de Samos, Demócrito de Abdera, Eudoxio de Cnido, Euclides de Alejandría y Herón de Alejandría.

Boyer (1968), con respecto al área del trapecio menciona al papiro de Ahmes en el cual se encuentra el problema 52, que es el cálculo de la medida del área de un trapecio isósceles cuya base mayor es 6, la base menor es 4 y la distancia entre las bases es 20. Para su solución, se obtiene la semisuma de las bases, para formar un rectángulo (Figura 13) y multiplicarlo por la altura. Es así que, la operación de reconfiguración del trapecio isósceles en un rectángulo fue conocida por el hombre desde la edad antigua.

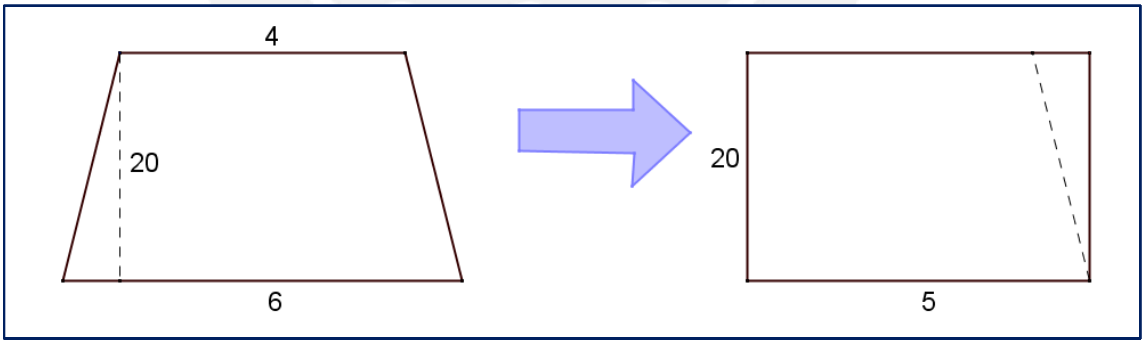


Figura 13. Trapecio isósceles transformado en rectángulo para calcular su área

Asimismo, Micelli (2010) menciona que en la India Bhaskara I realizó manuscritos acerca de problemas de la medida de áreas de figuras geométricas como el triángulo, el trapecio y el círculo. En donde las figuras están representadas con gran falta de precisión, es probable que solo sirvieran de análisis para la interpretación del problema planteado y no se pretendió hallar una solución geométrica. Así se muestra en el verso 8, lo siguiente sobre el área del trapecio: “Treinta aumentado de tres es la base [mayor], es mencionado que los otros son diecisiete. ¿Cuál es la cantidad del campo (área) y de las dos líneas que encalen por sí (altura)? (Traducción hecha de Lagarto, 2008).” (p. 61) según Figura 14.

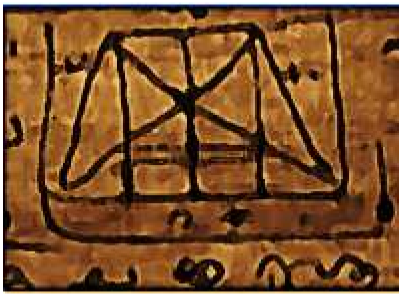


Figura 14. Representación de Bhaskara I: Problema del área del trapecio
Fuente: Micelli (2010, p.60)

3.2 La medida de área de superficies planas

Al respecto, Douady & Perrín-Glorian (1987), manifiestan que las dificultades observadas en torno al concepto medida de área está relacionada con la introducción prematura de un acercamiento la medida del área mediante el uso de fórmulas, sin tener en cuenta el enfoque cualitativo. Enfoque que tomaremos en cuenta al realizar la secuencia de actividades

Por ello, los investigadores tienen como una de sus hipótesis de investigación la necesidad de construir el área como magnitud autónoma, donde se distinga el área de la superficie y el área del número.

El área de una superficie es el lugar ocupado por dicha superficie en el plano (Douady & Perrin-Glorian, 1987). Una unidad de área se puede asociar a un número y a una gran familia de superficies en el plano. Si se cambia de unidad de área, los números cambian pero las nuevas medidas son proporcionales a las antiguas. Por ello, Silva (2010) nos presenta un cuadrado con área 4 (se considera el cuadrado como unidad de área), también puede ser 16 (se considera el cuadrado pequeño como unidad de área) y finalmente puede ser 8 (se considera como unidad de área un triángulo). Se puede percibir que lo que cambia en cada uno de los cuadrados no es el área, pero sí la unidad utilizada para medir esta área. Los valores atribuidos en cada caso son proporcionales a la unidad de medida considerada (ver Figura 15).

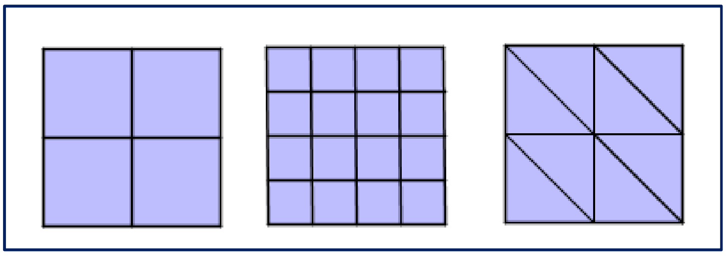


Figura 15. La medida del área de un cuadrado con diferentes unidades de área
Fuente: Silva (2010, p. 18)

Luego, los valores atribuidos a la medida del área del cuadrado cambian al modificar la unidad de área.

Es así que, Douady & Perrin-Glorian (1987) proponen el estudio del área como magnitud. En la cual, organizan la noción de área en tres cuadros: el geométrico, el numérico y el de las magnitudes (ver Figura 16).

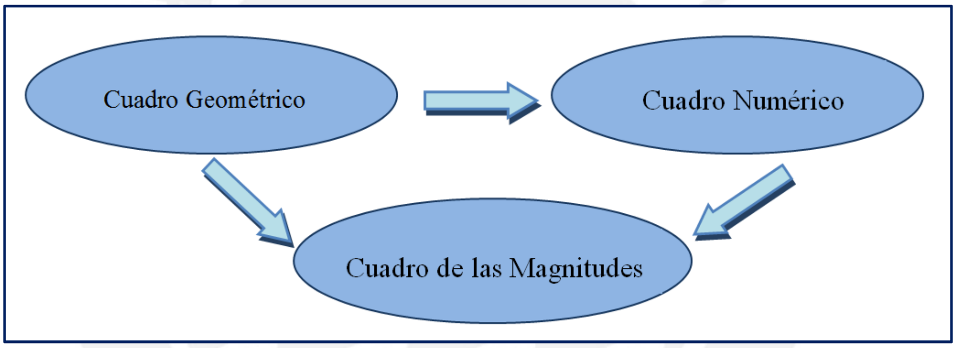


Figura 16. Área como magnitud
Fuente: Adaptado de Silva (2010, p. 19)

Donde el cuadro geométrico está conformado por las superficies planas, el cuadro numérico lo constituyen las medidas de las superficies planas y el cuadro de las magnitudes está compuesto por las clases de equivalencia de superficies de la misma área.

La definición de trapecio que utilizaremos en nuestra investigación será la de Hemmerling (1971) la cual tiene relación con el Diseño Curricular Nacional (DCN) (Perú, 2009).D

3.3 Trapecio

Un cuadrilátero es un trapecio si, y sólo si, tiene uno y sólo un, par de lados paralelos. Los lados paralelos son las bases del trapecio y los lados no paralelos son los lados. La altura del trapecio es un segmento, como $\overline{DE}$, que es perpendicular a una de las bases del trapecio y se usa para indicar la distancia entre las bases. Mientras, la mediana es el segmento rectilíneo que une los puntos medios de los lados no paralelos (ver Figura 17).

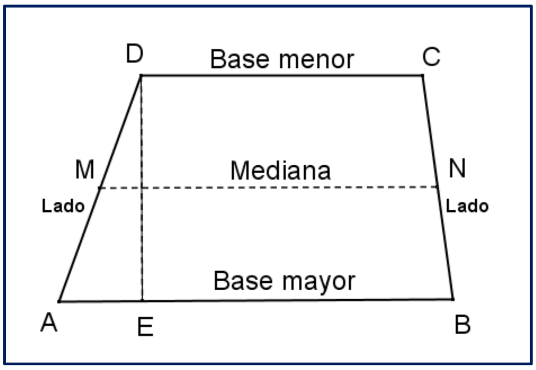


Figura 17. El Trapecio
Fuente: Adaptado de Hemmerling (1971, p. 207)

También, el autor manifiesta que un trapecio es isósceles cuando los lados no adyacentes son congruentes (ver Figura 18).

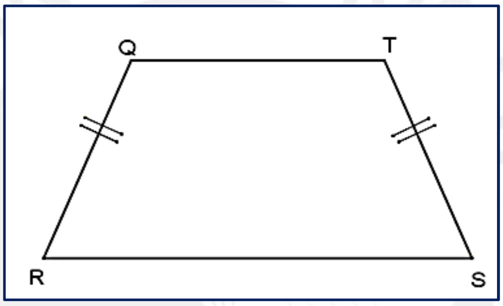


Figura 18. Trapecio Isósceles
Fuente: Hemmerling (1971, p. 207)

Por otro lado, existen algunos trapecios particulares (Alva, 2015). El trapecios escaleno que es aquel cuyos lados no paralelos tienen diferente longitud (ver Figura 19).

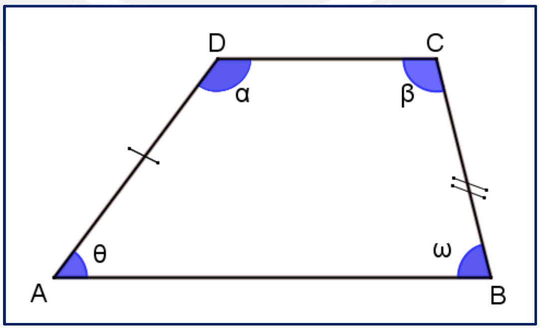


Figura 19. Trapecio Escaleno
Fuente: Adaptado de Alva (2015, p. 119)

Sus ángulos también son de medidas diferentes.

Y el trapecio rectángulo que es aquel en el que uno de sus lados es perpendicular a las bases (ver Figura 20).

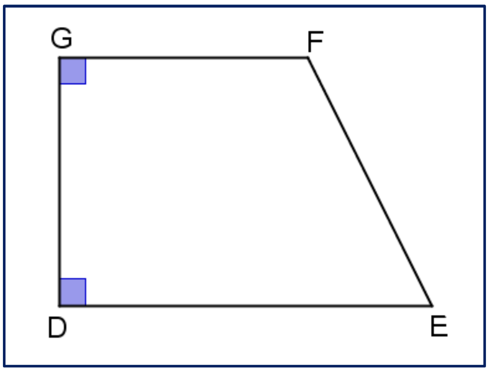


Figura 20. Trapecio Rectángulo
Fuente: Adaptado de Alva (2015, p. 119)

Luego de describir brevemente el trapecio y su clasificación pasaremos a ver la medida del área del trapecio.

3.4 Medida del área del trapecio

Hemmerling (1971), se refiere a la medida del área del trapecio a través del siguiente teorema:

> "El área de un trapecio es igual a la mitad del producto de su altura y la suma de sus bases. *Hipótesis:* El trapecio $ABCD$ con la altura $CE = h$; la base $AB = b_1$ y la base $DC = b_2$. *Conclusión:* Area del trapecio $ABCD = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$". Ver figura 21.

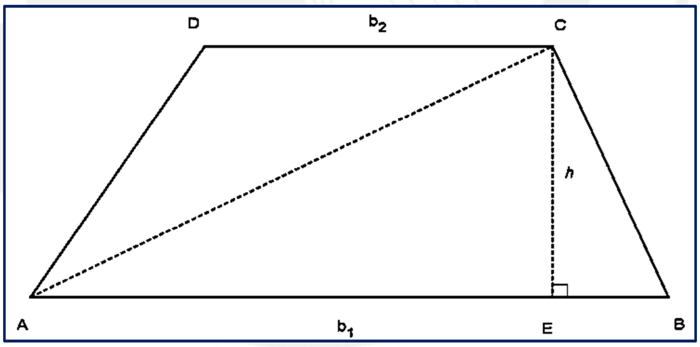


Figura 21. Medida del área del trapecio
Fuente: Hemmerling (1971, p. 380)

Cuya demostración de este teorema lo presentamos en la Tabla 5, la cual nos permitirá comprender que a través de la descomposición del trapecio en dos triángulos y la suma de sus áreas podemos demostrar la medida del área del trapecio.

Tabla 5. Demostración del teorema de la medida del área del trapecio

Proposiciones	Razones
1. Trazar la diagonal AC que divida al trapecio en Δ ABC y Δ ACD.	Postulado2. Por cada dos puntos distintos, existe una y sólo una reta que contiene ambos puntos.
2. Área del $\Delta\,\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{b}_1\mathrm{h}$.	Teorema 12.2. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base y su altura.
3. Área del $\Delta\,\mathrm{DAC} = \frac{1}{2}\mathrm{b}_2\mathrm{h}$.	Teorema 12.2. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base y su altura.
4. Área de Δ ABC + área de Δ DAC $= \frac{1}{2}\mathrm{b}_1\mathrm{h} + \frac{1}{2}\mathrm{b}_2\mathrm{h} = \frac{1}{2}\mathrm{h}(\mathrm{b}_1 + \mathrm{b}_2)$.	I-4. Propiedad de la adición $(a = b) \wedge (c = d) \rightarrow (a + c) = (b + d)$.
5. Área de Δ ABC + área de Δ DAC =área del trapecio ABCD.	Postulado 22. El área de una región poligonal es la suma de las medidas del área de cualquier conjunto de regiones componentes en el cual puede dividirse.
6. Por lo tanto, el área del trapecio ABCD $= \frac{1}{2}\mathrm{h}(\mathrm{b}_1 + \mathrm{b}_2)$.	Teorema 3.5. Para cualquier número real a, b y c, si $c = a, c = b$, entonces $a = b$.

Fuente: Adaptado de Hemmerling (1971, p. 380)

Ahora, veremos el trapecio desde el aspecto didáctico.

3.5 Aspectos didácticos relacionados con el trapecio

En cuanto al aspecto didáctico, analizaremos el libro de Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012), de la editorial Santillana, otorgado gratuitamente por el Ministerio de Educación del Perú a todos los estudiantes del segundo grado de secundaria de las instituciones públicas del país en relación a la medida del área como magnitud teniendo en cuenta los elementos teóricos considerados en este trabajo.

El libro presenta la siguiente definición para la medida de área de un polígono: (Figura 22).

- El área (A) de un polígono es la medida de la superficie encerrada por los lados de dicho polígono. El área se mide en unidades como el milímetro cuadrado (mm^2), el metro cuadrado (m^2), el kilómetro cuadrado (km^2), etc.

Figura 22. Definición de área de un polígono
Fuente: Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012, p.146)

Podemos apreciar que esta definición corresponde al cuadro numérico que nos habla Doaudy & Perrin-Glorian (1987) el cual está constituido por las medidas de las superficies planas. Por lo cual no podemos afirmar que, la noción de medida de área de un polígono está referida al área como magnitud. Por otro lado, este enunciado está expresado en el registro de lengua natural según la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004).

En cuanto, a la noción de medida de área del trapecio, el libro Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012), lo presenta de la siguiente manera (ver Figura 23).

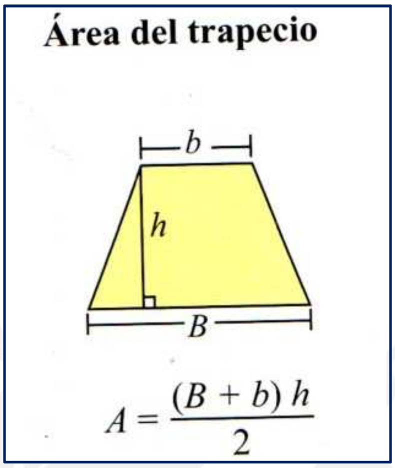
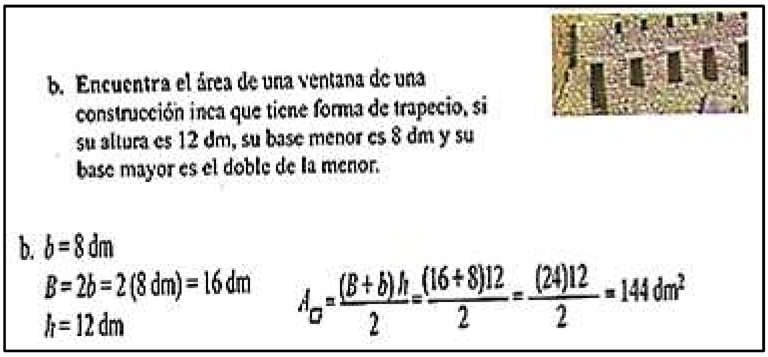


Figura 23. Área del trapecio
Fuente: Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012, p.147)

Observamos que el área del trapecio es presentada, según la Teoría de Registros de Representación Semiótica a través de una figura geométrica de dimensión 2, de forma de un trapecio en posición horizontal y de color amarillo. Además, se muestran los lados paralelos que son las bases del trapecio con *B* y *b*, y la altura con *h*. Acompañado de la fórmula para la medida del área del trapecio.

Luego, el libro presenta un ejercicio resuelto en donde se puede encontrar la medida del área de un trapecio. La solución se presenta a través de la fórmula con sus respectivos tratamientos matemáticos para obtener la respuesta. Mientras que la figura es solo una imagen referencial, en la cual, ninguna de las ventanas tiene la forma de un trapecio, ya que no se observa que tengan uno y sólo un, par de lados paralelos (ver Figura 24).



b. Encuentra el área de una ventana de una construcción inca que tiene forma de trapecio, si su altura es 12 dm, su base menor es 8 dm y su base mayor es el doble de la menor.

b. $b = 8$ dm

$B = 2b = 2(8 \text{ dm}) = 16$ dm

$h = 12$ dm

$$A_{\square} = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(16+8)12}{2} = \frac{(24)12}{2} = 144 \text{ dm}^2$$

Figura 24. Medida del área del trapecio por fórmula
Fuente: Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012, p.147)

El libro presenta solo este ejercicio resuelto acerca de la medida del área del trapecio.

A continuación, el libro Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012), presenta al estudiante actividades acerca del cálculo de la medida del área de figuras poligonales, de las cuales analizaremos las referidas al trapecio.

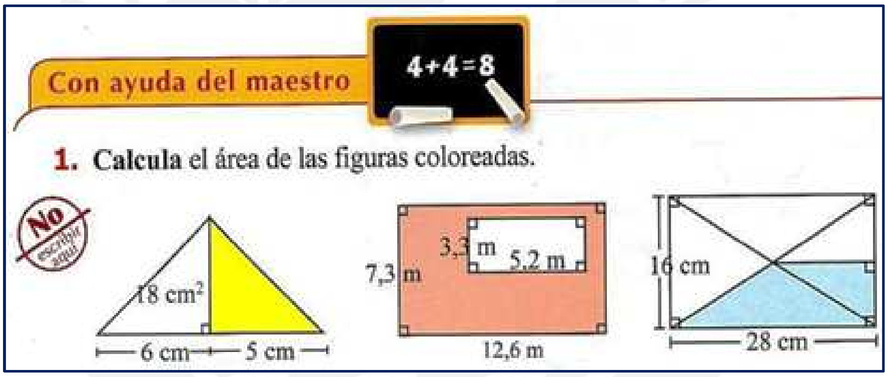


Figura 25. Medida del área del trapecio rectángulo
Fuente: Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012, p.149)

Así tenemos, en la Figura 25 que el rectángulo que se encuentra a la derecha presenta una descomposición heterogénea al estar fraccionado en cinco triángulos no todos con la misma forma, al haberse trazado sus diagonales y la altura en uno de los triángulos. Además, que el estudiante a través de su aprehensión perceptiva reconozca que en el rectángulo hay un trapecio rectángulo coloreado de color celeste, en posición horizontal y compuesto por dos triángulos, cuya base mayor mide 28 cm. Luego, para determinar el área, el estudiante deberá identificar el valor de la base menor del trapecio como la mitad de la base mayor y la altura como la mitad de 16 cm. Con estos valores identificados el estudiante hará uso de la fórmula para determinar la medida del área del trapecio coloreado.

De la misma manera, en la siguiente Figura 26, tenemos una actividad por resolver cuyo enunciado está en el registro de lengua natural y el hexágono irregular en el registro figural y esperamos que el estudiante por aprehensión perceptiva de la figura observe lo siguiente:

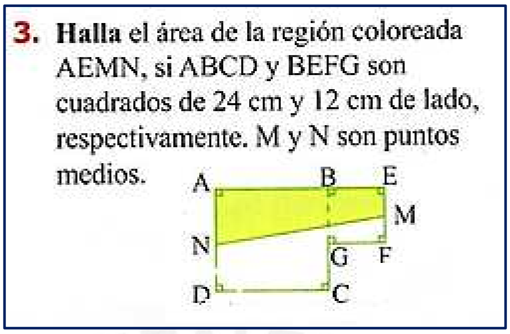


Figura 26. Medida del área del trapecio rectángulo vertical
Fuente: Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012, p.149)

Que en la figura AEFGCD, el cuadrilátero coloreado ANME es un trapecio rectángulo en posición vertical. También, que la base mayor es el lado $\overline{AN}$, la base menor $\overline{EM}$ y la altura del trapecio es el lado $\overline{AE}$ del hexágono irregular. Además, por el enunciado de la actividad si N y M son puntos medios de los cuadrados de 24 cm y 12 cm de lado, respectivamente, entonces el estudiante puede saber que el valor de las bases del trapecio son 12 cm y 6 cm, y la altura será la suma de los lados de los cuadrados, es decir, 36 cm. Luego, la medida del área del trapecio se puede obtener por medio de la fórmula mencionada en el libro del estudiante.

La siguiente figura presentada en el libro Matemática 2 Secundaria (Peru, 2012), trata acerca de calcular la medida del área de la región sombreada en el rectángulo (ver Figura 27).

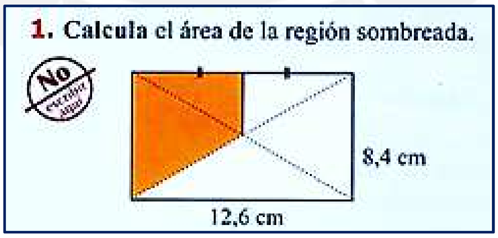


Figura 27. Medida del área del trapecio rectángulo anaranjado
Fuente: Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012, p.150)

Esperamos, que el estudiante por aprehensión perceptiva identifique que la región sombreada está conformada por dos triángulos diferentes que forman un trapecio rectángulo en posición vertical. Además, observamos que la figura presenta una descomposición heterogénea, es decir, está fraccionado en cinco triángulos no todos de la misma forma. También, observamos dos triángulos congruentes, ya que por dato de la figura tienen dos lados iguales, comparten la misma altura (base menor del trapecio) y tienen el mismo ángulo de 90°, es decir, cumple el caso lado, ángulo y lado (LAL). Esto, permite al estudiante hallar la medida de la altura del trapecio que será la mitad de 12,6 cm, de la base mayor que según la figura mide 8,4 cm y la base menor que es la mitad de 8,4 cm. Luego, para encontrar el área de la región sombreada, el estudiante hará uso de la fórmula del área del trapecio.

Asimismo, el libro Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012), presenta la siguiente actividad para calcular la medida del área del trapecio sombreado (ver Figura 28).

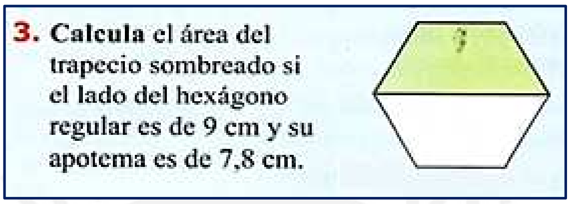


Figura 28. Medida del área del trapecio sombreado
Fuente: Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012, p.150)

Esta actividad está presentada en el registro de lengua natural como en el registro figural, en la cual podemos mencionar por la aprehensión perceptiva que la figura presenta una descomposición homogénea, es decir, dos sub-figuras con la misma forma (trapecios) que se han obtenido al trazar una de las diagonales del hexágono. Además, el trapecio sombreado es isósceles por medir los lados no paralelos 9 cm cada uno. Para calcular el área del trapecio sombreado, esperamos que el estudiante divida el hexágono regular en seis triángulos, es decir, realice una modificación mereológica de descomposición homogénea. Luego, halle el área de uno de los triángulos, si sabemos que su base mide 9 cm y su altura 7,8 cm y finalmente el resultado obtenido lo multiplique por tres, por ser la cantidad de triángulos que forman el trapecio sombreado.

La siguiente actividad del libro Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012) está presentada en el registro de lengua natural y en el registro figural (ver Figura 29).

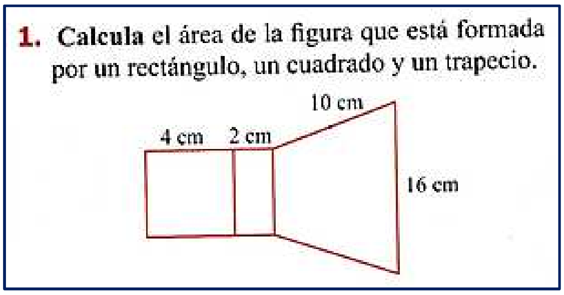


Figura 29. Medida del área de una figura irregular
Fuente: Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012, p.151)

En esta actividad, observamos una figura compuesta por un cuadrado, un rectángulo y un trapecio y que el estudiante deberá encontrar el área de cada una de estas figuras y sumarlas para encontrar el área total de la figura. La dificultad que tendrá el estudiante para encontrar el área del trapecio será encontrar primero el valor de su altura, por lo que se espera que el estudiante realice una modificación mereológica en el trapecio, es decir, divida el trapecio en tres sub-figuras: un rectángulo y dos triángulos. Luego, a partir de uno de los triángulos obtenidos, el estudiante encuentre su altura que a su vez es la altura del trapecio, a través del procedimiento explicado en el libro (ver Figura 30).

Figura 30. Cálculo de la altura de un triángulo
Fuente: Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012, p.149)

Luego de terminar, con el análisis del libro de Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012), podemos concluir que las actividades están presentadas en el registro de lengua natural y el registro figural. Aunque, el color no es una variable visual semióticamente importante es utilizado en el libro y permite identificar las unidades figurales. Generalmente, las figuras están fraccionadas o divididas, por lo que es un soporte perceptivo para identificar el trapecio y sus elementos (bases y altura). Solo encontramos dos actividades que sugieren realizar tratamientos en la figura. Todas las actividades han sido diseñadas para encontrar la medida del área a través del uso de fórmulas. Se sugiere la presencia de actividades acerca de la comparación de áreas, referidas al trapecio con rectángulos o triángulos.

A continuación presentamos aspectos de la Ingeniería Didáctica que corresponde a la metodología de nuestra investigación.

CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo explicaremos el fundamento del porque nuestra investigación es cualitativa y además aspectos de la metodología de la Ingeniería Didáctica.

4.1 La Investigación Cualitativa

Según Hernández, Fernández & Baptista (2010), en una investigación cualitativa el investigador o investigadora se va de lo particular a lo general, es decir, primero explora y describe para luego generar perspectivas teóricas; no prueban hipótesis ya que van surgiendo durante el proceso; no se cuantifican resultados, razón por la cual el análisis no es estadístico. La recolección de los datos consiste en obtener las perspectivas y puntos de vista de los sujetos participantes de la investigación, a través de aspectos subjetivos como sus emociones, experiencias, prioridades, etc. El investigador o investigadora recaba información a través del lenguaje escrito, verbal y no verbal, también del visual, los cuales describe y analiza. Para ello, el investigador o investigadora emplea técnicas para la recolección de datos como son: la observación no estructurada, las entrevistas abiertas, la revisión de documentos, la discusión en grupo, la evaluación de experiencias personales, entre otras. Evalúa el desarrollo natural de los sucesos y no hay manipulación ni estimulación con respecto a la realidad.

Según Bogdan & Biklen (1994), una investigación cualitativa se caracteriza porque la fuente de los datos se dan en un ambiente natural y estos datos recogidos son a través de las palabras y las imágenes y no con números, se interesa más por el proceso que por los resultados o productos obtenidos, analiza sus datos de manera inductiva donde planea utilizar parte del estudio para percibir cuales son las cuestiones más importantes. En el caso del investigador en educación es quien está siempre interesado de sus sujetos de investigación, de saber aquello que experimentan, como interpretan sus experiencias y como ellos estructuran su propio mundo social donde viven.

Por todo lo manifestado es que consideramos que nuestra investigación es cualitativa.

4.2 La Ingeniería Didáctica

En nuestra investigación utilizaremos como metodología aspectos de la Ingeniería Didáctica definida por Artigue (1995). La Ingeniería Didáctica, como metodología de investigación, se caracteriza por ser experimental, así se basa en secuencias didácticas desarrolladas en clase, las cuales debieron ser planificadas, implementadas, observadas y analizadas. La validación interna se obtiene por la confrontación de los análisis a priori y a posteriori de los conocimientos puestos en juego y de las variables de control de la situación experimental diseñada. Se ocupa por entender y presentar los problemas ligados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el sistema educativo. Por ello, la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación se aplica a los productos de enseñanza basados o derivados de ella.

El proceso de esta metodología es delimitada por las siguientes cuatro fases:

- Primera fase: Análisis preliminares.
- Segunda fase: Concepción y el análisis a priori.
- Tercera fase: Experimentación.
- Cuarta fase: Análisis a posteriori y la validación.

Los análisis preliminares

En esta fase se realizan los siguientes análisis:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, que en nuestra investigación el análisis epistemológico está referido al objeto de estudio en este caso el trapecio, que se realiza con una breve reseña histórica en base a estudios realizados principalmente por Boyer (1968) y Micelli (2010), la cual se encuentra desarrollada en el capítulo III acerca del estudio del Trapecio.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos en el aprendizaje, en nuestra investigación analizaremos el libro de Matemática 2 (Perú, 2012) del estudiante del segundo grado de secundaria, con respecto a la noción de medida de área del trapecio, también desarrollado en el capítulo III.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución. Con respecto al análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos hacemos referencia a algunas investigaciones que tuvieron como foco de estudio la enseñanza y aprendizaje de la noción de área de figuras planas como cuadrados, triángulos, rectángulos, paralelogramos, rombos y trapecios, a través de la descomposición y composición de figuras planas y la reconfiguración especialmente, desarrollada en el capítulo I referido al problema de investigación.
- El análisis de campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva. En el análisis de campo de las restricciones consideramos que nuestro estudio se va a

desarrollar en una institución educativa pública del nivel secundario y con estudiantes del segundo grado de secundaria.

La concepción y el análisis a priori

En esta fase según Artigue (1995) se distingue dos tipos de variables macro y micro didácticas. También se refiere al análisis de los comportamientos matemáticos y cognitivos que esperamos de los estudiantes, también se analizan las estrategias que emplearán, así como las dificultades y errores que puedan cometer.

En nuestra investigación, utilizamos variables microdidácticas, ya que elaboramos una secuencia de tres de actividades que se desarrollará en aula. Además, proponemos posibles resultados esperados antes de la presentación de la propuesta didáctica que mencionaremos en la experimentación.

En la Tabla 6 se muestra las variables microdidácticas de cada una de las actividades propuestas:

Tabla 6. Secuencia de actividades con variables

N°	Actividades	Variables
1	Trabajemos con la malla cuadriculada	Conteo de cuadrados.
2	Trabajemos con el Geogebra	Diagonal del trapecio.
3	Hallemos la medida del área	Procedimientos para determinar la medida del área del trapecio isósceles.

La experimentación

El desarrollo de la investigación se centra en esta fase, con la participación principal de los estudiantes, acompañados de la investigadora. En esta fase el estudiante desarrolla de manera individual las actividades diseñadas por la investigadora.

En nuestro trabajo, a esta fase le corresponde la aplicación de nuestros instrumentos de investigación que consta de una secuencia de tres actividades: Trabajemos con la malla cuadriculada, Trabajemos con el Geogebra y Hallemos la medida del área, las cuales fueron diseñadas por la investigadora. La parte experimental la desarrollaremos con diez estudiantes del segundo grado de educación secundaria de una institución educativa pública de manera individual.

El análisis a posteriori y la validación

El análisis a posteriori es el conjunto de los datos recogidos durante la experimentación, las observaciones realizadas y las producciones de los estudiantes durante la ejecución de las actividades como también fuera de ellas.

En la validación se describen los comportamientos matemáticos y cognitivos esperados que se da en la secuencia didáctica. Luego, se confronta los comportamientos esperados elaborados en el análisis a priori y el análisis de los resultados de la fase experimental o análisis a posteriori.

En nuestra investigación, el análisis a posteriori se evidenciará en el momento que confrontemos los comportamientos esperados, planteados en el análisis a priori, con los obtenidos en la parte experimental fruto de la aplicación de nuestra secuencia de actividades, anteriormente mencionadas.

Para recolectar la información para nuestra investigación, utilizamos las grabaciones en video y los archivos de las actividades hechas por cada estudiante.

CAPÍTULO V: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo presentamos los sujetos de investigación, la descripción de la parte experimental, los análisis a priori y a posteriori.

5.1 Descripción de la investigación

Consideraremos la descripción de los sujetos de la investigación como del experimento, los instrumentos y recursos.

Descripción de los sujetos

En la investigación participaron, de manera voluntaria, diez estudiantes del segundo grado de educación secundaria, con conocimientos del software Geogebra y cuyas edades están comprendidas entre los 12 y 15 años de la Institución Educativa Andahuasi, del distrito de Sayán, provincia de Huaura, departamento de Lima, Perú. Para el análisis se eligió la secuencia de actividades de dos estudiantes por los siguientes criterios: presentaron mayor interés en el desarrollo de la secuencia de las actividades y contestaron todas las preguntas de las fichas de la secuencia de actividades. Asimismo, mi persona fue ser observadora en esta investigación.

Descripción del experimento

La parte experimental consistió en la aplicación de tres actividades, dichas actividades fueron desarrolladas por los estudiantes de manera individual. Esto se realizó en el horario de clases en tres sesiones, con la autorización de la Dirección, apoyo de la comunidad educativa y de la Empresa Andahuasi con la filmación de las dos primeras actividades. La primera y tercera actividad se realizó en el aula de clase y la segunda actividad se realizó en el laboratorio de computación.

Elaboramos tres actividades, según se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7. Secuencia de actividades

N° actividades	Nombre	Descripción	Número de sesiones	Horas pedagógicas (45 minutos)
1	Trabajemos con la malla cuadriculada	Realizar la operación de reconfiguración a seis figuras geométricas ubicadas en una malla cuadriculada, es decir, realizar fraccionamientos para transformar las figuras en rectángulos. Luego, contar la cantidad de cuadrados (considerados como la unidad de medida) que tiene cada figura para determinar su área e identifiquen las figuras geométricas equivalentes. Movilizar los conocimientos de tipos de triángulos y trapecios.	1	1
2	Trabajemos con el Geogebra	Realizar las aprehensiones: secuencial y operatoria de reconfiguración para obtener figuras geométricas equivalentes al transformar trapecios (isósceles, rectángulo y escaleno) en triángulos. Con el software Geogebra. Movilizar los conocimientos de diagonal, recta paralela, punto de intersección, herramienta área y función arrastre del Geogebra.	1	1
3	Hallemos la medida del área	Determinar la medida del área de un trapecio isósceles de dos maneras diferentes. Movilizar los conocimientos de medida del área del trapecio, la operación de reconfiguración, figuras geométricas equivalentes y la fórmula para determinar la medida del área del trapecio.	1	1

La primera actividad duró 60 minutos, ya que se tomó 15 minutos para entregar a los estudiantes además de la ficha de la actividad 1 denominada Trabajemos con la malla cuadriculada, los siguientes recursos: lápiz 2B, borrador, lapicero y regla de 30 cm, cabe resaltar que en esta primera actividad se trabajó con veintiún estudiantes. La actividad 2 se realizó en el laboratorio de computación de la institución educativa Andahuasi, la cual duró 45 minutos, ya que se empleó la última hora de la jornada escolar, pero en esta actividad solo participaron trece estudiantes ya que por motivo de monitoreo del Ministerio de Educación fueron solicitadas dos estudiantes para una encuesta y seis no pudieron trabajar porque el laboratorio solo contaba con trece computadoras operativas en ese momento. En esta actividad los estudiantes abrieron los archivos según indicaba su ficha denominada Trabajemos con el Geogebra (trapecio1.ggb, trapecio2.ggb y trapecio3.ggb) hicieron uso de sus conocimientos acerca de las herramientas del Geogebra indicadas en la página 19 del capítulo I, las cuales fueron registradas con el software aTube Catcher. Y la actividad de cierre Hallemos la medida del área se realizó en otro día a la segunda hora de la jornada escolar y duró 45 minutos, en la cual participaron diez estudiantes que habían desarrollado las dos actividades anteriores. Los estudiantes recibieron la ficha de la actividad y un lápiz bicolor (rojo y azul).

Los instrumentos utilizados fueron:

- **Fichas de actividades:** se elaboraron tres actividades, cada una con un objetivo específico, la solución de las actividades fueron desarrolladas en la fichas.
- **Archivos:** trapecio1.ggb, trapecio2.ggb y trapecio3.ggb. en cada archivo se presenta un tipo de trapecio, isósceles, rectángulo y escaleno.

Los recursos utilizados fueron: lápiz 2B, lápiz bicolor (rojo y azul), borrador, lapicero, regla de 30 cm., computadoras, software Geogebra versión 5.0, software aTube Catcher.

5.2 Análisis a priori y a posteriori de las actividades

A continuación presentamos el análisis a priori y a posteriori de cada una de las actividades.

Actividad 1: Trabajemos con la malla cuadriculada

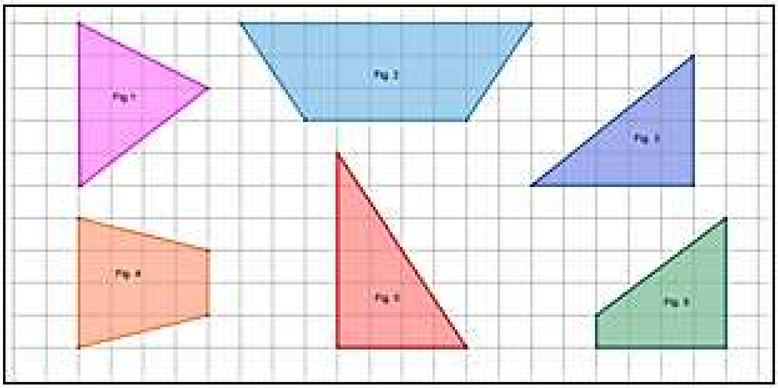
Esta actividad tiene como objetivo reconfigurar seis figuras geométricas, que están en una malla cuadriculada, en rectángulos para determinar la medida de sus áreas e identificar las que tienen la misma medida de área.

ACTIVIDAD 1: TRABAJEMOS CON UNIDADES DE ÁREA

ESTUDIANTE: ____

GRADO Y SECCION: ________ EDAD: ________ AÑOS FECHA: ____________

Se sabe que cada cuadrado ☐ de la cuadrícula de abajo tiene una unidad de área (1 u.a.).



Contesta:

a) ¿Cuántos cuadrados caben en cada figura de la cuadrícula?

Fig. 1		Fig. 4	
Fig. 2		Fig. 5	
Fig. 3		Fig. 6	

b) Entonces ¿cuántas unidades de área (u.a.) tiene cada figura?

Fig. 1		Fig. 4	
Fig. 2		Fig. 5	
Fig. 3		Fig. 6	

c) ¿Cuáles de las figuras de la cuadrícula tienen la misma medida de área? ¿Por qué?

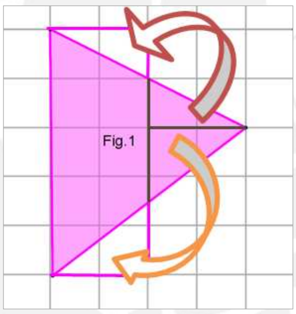
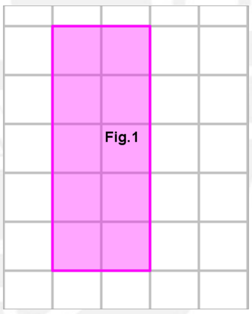
Figura 31. Actividad 1: Trabajemos con la malla cuadriculada

Ahora veamos el análisis a priori de la actividad 1, cabe resaltar que se analizarán las figuras geométricas que corresponden a **Fig. 1**, **Fig. 3**, **Fig. 4**, **Fig. 5** y **Fig. 6**, ya que estas figuras presentan figuras geométricas con la misma medida de área.

Análisis a priori

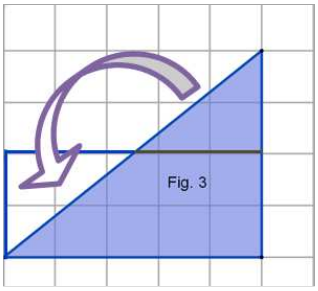
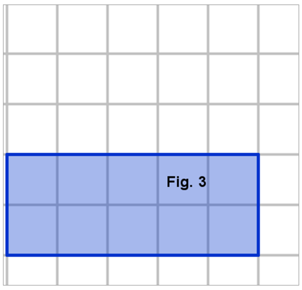
Para que los estudiantes puedan contestar los ítems a), b) y c) de esta primera actividad esperamos primero que ellos realicen la aprehensión operatoria de modificaciones mereológicas, en cada una de las figuras geométricas que se encuentran en la malla cuadriculada, de manera física a través de trazos hechos a lápiz y que coincidan con las líneas de la malla cuadriculada. De esta manera, obtendrían sub-figuras de formas diferentes entre ellas, es decir, harían una descomposición heterogénea Luego, esperamos que movilicen sus conocimientos sobre *tipos de triángulos y trapecios* para identificarlos en una o varias de estas sub-figuras y formen rectángulos, al trasladarlas al exterior del contorno de la figura inicial, es decir, realicen la modificación posicional por traslación ya que necesitarán completar los cuadrados de la malla cuadriculada para hallar la medida del área de cada figura geométrica por *conteo de cuadrados* considerados como variable ya que determinarán que figuras geométricas tienen la misma medida de área. También, pensamos que los estudiantes podrían solo contar los cuadrados enteros de cada figura geométrica para indicar que es su medida de área. A continuación presentamos una posible reconfiguración para cada una de estas cinco figuras geométricas:

Tabla 8. Posible solución a la Fig. 1

Reconfiguración Inicial	Reconfiguración Final
	

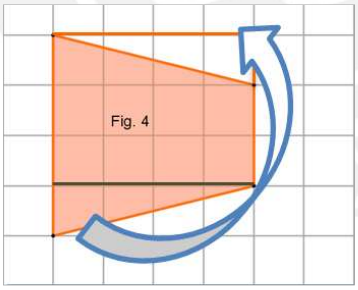
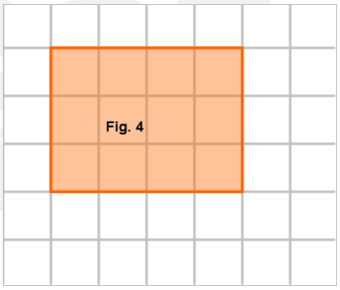
Es así que, esperamos que los estudiantes realicen dos trazos en el interior del triángulo escaleno como se observa en la reconfiguración inicial (Tabla 8), para descomponer la figura geométrica en tres sub-figuras heterogéneas: dos triángulos rectángulos y un trapecio escaleno. Luego, trasladarán los triángulos rectángulos, como indican las flechas, hacia los lados no paralelos del trapecio escaleno donde los cuadrados de la malla cuadriculada, considerados como unidad de área, serán completados y formarán un rectángulo de diez cuadrados de unidad de área, es decir, lograrán reconfigurar la figura geométrica inicial en un rectángulo, según se observa en la reconfiguración final.

Tabla 9. Posible solución a la Fig. 3

Reconfiguración Inicial	**Reconfiguración Final**
	

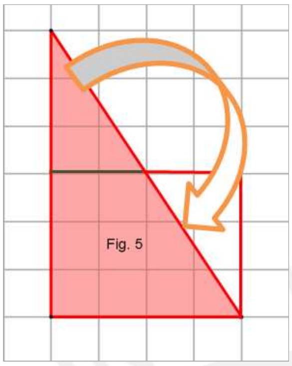
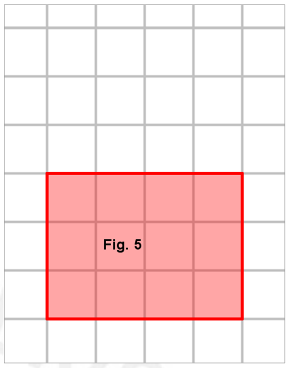
Asimismo, esperamos que los estudiantes realicen un trazo en el interior del triángulo rectángulo azul como se observa en la reconfiguración inicial (Tabla 9), para descomponer la figura geométrica en dos sub-figuras heterogéneas: un triángulo rectángulo y un trapecio rectángulo. Luego, trasladarán el triángulo rectángulo, como indica la flecha, hacia el lado que no es paralelo ni perpendicular del trapecio rectángulo donde los cuadrados de la malla cuadriculada, considerados como unidad de área, serán completados y formarán un rectángulo de diez cuadrados de unidad de área, es decir, lograrán reconfigurar la configuración inicial en un rectángulo, según se observa en la reconfiguración final.

Tabla 10. Posible solución a la Fig. 4

Reconfiguración Inicial	**Reconfiguración Final**
	

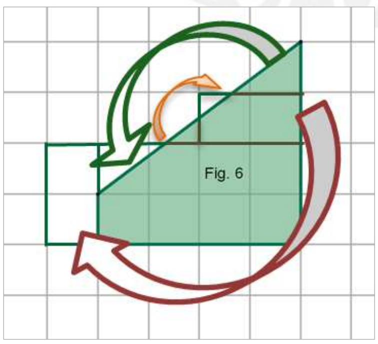
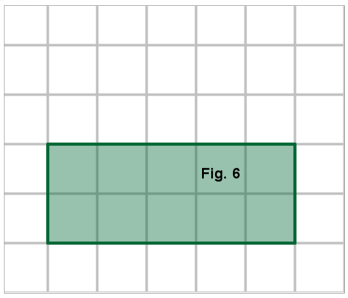
Esperamos que los estudiantes realicen un trazo en el interior de este trapecio isósceles como observamos en la reconfiguración inicial (Tabla 10), para descomponer la figura geométrica en dos sub-figuras heterogéneas: un triángulo rectángulo y un trapecio rectángulo. Luego, trasladarán el triángulo rectángulo, como indica la flecha, hacia el lado no paralelo ni perpendicular del trapecio rectángulo donde los cuadrados de la malla cuadriculada, considerados como unidad de área, serán completados y formarán un rectángulo de doce cuadrados de unidad de área, es decir, lograrán reconfigurar la configuración inicial en un rectángulo, según se observa en la reconfiguración final.

Tabla 11. Posible solución a la Fig. 5

Reconfiguración Inicial	**Reconfiguración Final**
	

También, esperamos que los estudiantes realicen un trazo en el interior del triángulo rectángulo rojo como se observa en la reconfiguración inicial (Tabla 11), para descomponer la figura geométrica en dos sub-figuras heterogéneas: un triángulo rectángulo y un trapecio rectángulo. Luego, trasladarán el triángulo rectángulo, como indica la flecha, hacia el lado no paralelo ni perpendicular del trapecio rectángulo donde los cuadrados de la malla cuadriculada, considerados como unidad de área, serán completados y formarán un rectángulo de doce cuadrados de unidad de área, es decir, lograrán reconfigurar la configuración inicial en un rectángulo, según se observa en la reconfiguración final.

Tabla 12. Posible solución a la Fig. 6

Reconfiguración Inicial	**Reconfiguración Final**
	

Después, esperamos que los estudiantes realicen dos trazos en el trapecio rectángulo para obtener un triángulo pequeño, luego lo trasladen según indica la flecha pequeña anaranjada y formen un rectángulo pequeño. Después, por aprehensión perceptiva identifiquen que en la parte superior del rectángulo pequeño hay un triángulo rectángulo que se puede trasladar para formar un rectángulo con ocho cuadrados de unidad de área, según indica la flecha verde. Por último, trasladarán el rectángulo pequeño hacia el lado derecho del rectángulo de ocho cuadrados de unidad de área, para tener un solo rectángulo de diez cuadrados de unidad de área, según indica la flecha roja que se observa en la reconfiguración inicial (ver Tabla 12). Pensamos que, las estudiantes demorarán en realizar esta reconfiguración porque percibir las sub-figuras en que se necesita descomponer el trapecio rectángulo para ser trasladas y formen un rectángulo, no es inmediato.

Después de realizar las reconfiguraciones en las seis figuras geométricas esperamos que los estudiantes contesten los tres ítems dados en esta actividad.

Tabla 13. Respuestas al ítem a) de la actividad 1

Fig. 1	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 6
10	10	12	12	10

En el ítem a) esperamos que los estudiantes cuenten la cantidad de cuadrados de la malla cuadriculada, considerados como unidad de área, que tiene cada rectángulo (ver Tabla 13).

Tabla 14. Respuestas al ítem b) de la actividad 1

Fig. 1	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 6
10 u.a.	10 u.a.	12 u.a.	12 u.a.	10 u.a.

En el ítem b) esperamos que los estudiantes relacionen la cantidad de cuadrados de la malla cuadriculada con su respectiva unidad de área, en este caso u.a, que tiene cada rectángulo (ver Tabla 14).

Y en el ítem c) esperamos que los estudiantes indiquen que el triángulo escaleno, el triángulo rectángulo azul y el trapecio rectángulo, es decir, **Fig. 1**, **Fig. 3** y **Fig. 6** tienen la misma medida de área porque tienen como medida de área 10 u.a., es decir, diez cuadrados de la malla cuadriculada consideradas como unidades de área. De la misma manera, el trapecio isósceles y el triángulo rectángulo rojo, es decir, las **Fig. 4** y la **Fig. 5**, porque tienen como medida de área 12 u.a. Asimismo, esperamos que sus respuestas sean dadas en el registro de lengua natural. Es así que pensamos que, los estudiantes logren identificar las figuras geométricas equivalentes a través de una aprehensión discursiva.

Análisis a posteriori

Análisis de Melissa:

Las reconfiguraciones que la estudiante Melissa realizó son las siguientes: (ver Tabla 15).

Tabla 15. Reconfiguraciones de Melissa en la malla cuadriculada

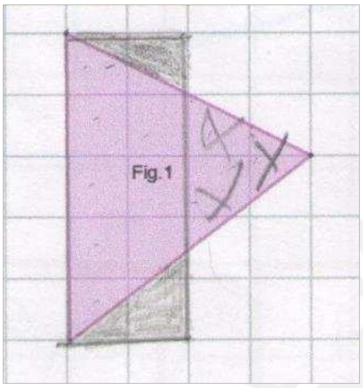
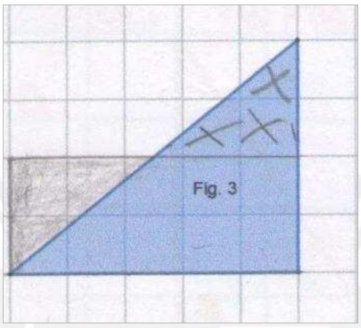
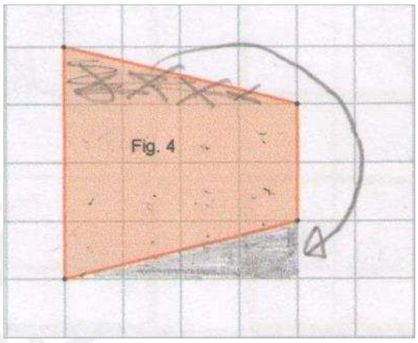
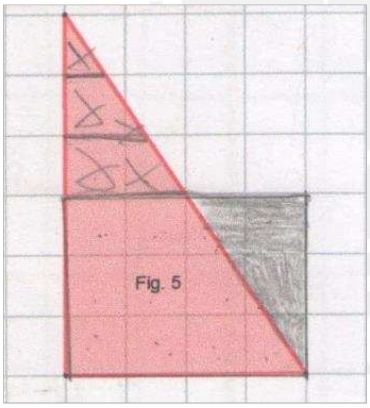
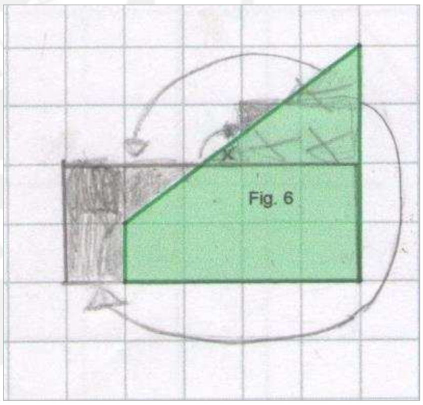
Fig. 1	**Fig. 3**	**Fig. 4**
		

Fig. 5	**Fig. 6**
	

Observamos que la estudiante Melissa realizó la aprehensión operatoria de modificación mereológica de descomposición heterogénea, para transformar cada una de las configuraciones iniciales en un rectángulo, es decir, realizó la operación de reconfiguración y movilizó sus conocimientos acerca de tipos de triángulos y trapecios. Pero, a diferencia de lo previsto en el a priori, ella realizó más descomposiciones en cada una de las figuras geométricas, así en la **Fig. 1** obtuvo cuatro sub-figuras (un triángulo, tres trapecios), en la **Fig. 3** cuatro sub-figuras (un triángulo, un cuadrado, dos trapecios rectángulos), en la **Fig. 4** cinco sub-figuras (cuatro trapecios rectángulos y un triángulo), en la **Fig. 5** seis sub-figuras (dos triángulos, un pentágono, un cuadrado, dos trapecios rectángulos) y en la **Fig. 6** cinco sub-figuras (dos triángulos, un cuadrado, dos pentágonos), según las aspas y trazos que realizó a lápiz (ver Tabla 14). Pensamos que ella realizó más descomposiciones porque su aprehensión perceptiva se apoyó en la cuadrícula de la malla cuadriculada. Luego, también realizó la modificación posicional ya que trasladó cada una de las sub-figuras marcadas con aspa como trazos hacia al exterior del contorno de la figura inicial y completó los cuadrados de la malla cuadriculada considerados como unidad de área, según los trazos al pintar y las flechas que realizó a lápiz. Inclusive, en la **Fig. 1** pensamos que volvió a fraccionar una de las sub-figuras (el triángulo) en dos triángulos rectángulos pequeños, por los trazos diferentes hechos a lápiz y poder "encajarlos" para completar los cuadrados de la malla cuadriculada considerados como unidad de área.

La respuesta de la estudiante Melissa en el ítem a) fue según los previsto en el a priori (ver Tabla 16).

Tabla 16. Respuestas al ítem a) de la actividad 1 de Melissa

Fig. 1	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 6
10	10	12	12	10

Asimismo, la respuesta de Melissa en el ítem b) también fue según lo previsto en el a priori (ver Tabla 17).

Tabla 17. Respuestas al ítem b) de la actividad 1 de Melissa

Fig. 1	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 6
10 u.a.	10 u.a.	12 u.a	12 u.a.	10 u.a.

Con respecto a la respuesta de Melissa del ítem c) a diferencia de lo previsto ella lo realiza en el registro figural ya que, dibuja la **Fig. 1**, la **Fig. 3** y la **Fig. 6** en forma de rectángulos de contorno color rojo, de acuerdo a la figura obtenida al reconfigurar sus figuras geométricas iniciales, con diez cuadrados de la malla cuadriculada consideradas como unidad de área, cada una de las figuras. Asimismo, la **Fig. 4** y la **Fig. 5**, tanto en sus configuraciones iniciales (trapecio y triángulo), como los rectángulos de contorno color azul que obtuvo al realizar las reconfiguraciones de estas figuras geométricas, con doce cuadrados de la malla cuadriculada, consideradas como unidad de área, para cada una de las figuras. En cuanto, su respuesta al por qué, la estudiante Melissa a diferencia de los previsto en el a priori ella emplea el símbolo igual acompañado del siguiente enunciado escrito, = *Porque tienen la misma medida por tanto van ha tener la misma área* (Figura 32).

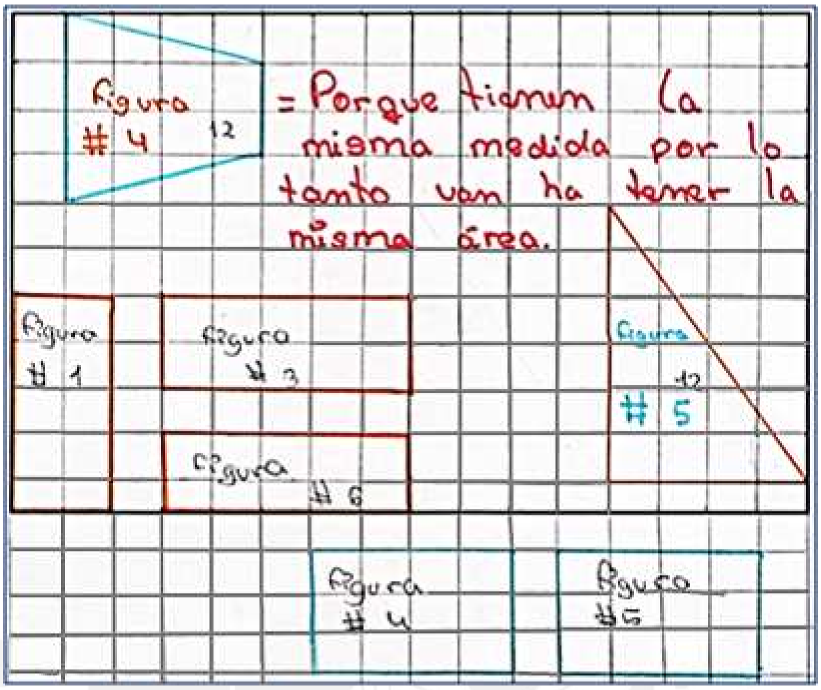


Figura 32. Respuesta de Viviana a la pregunta c) de la actividad 1

Sin embargo, creemos que Melissa logró identificar las figuras geométricas equivalentes como son la **Fig. 1,** la **Fig. 3** y la **Fig. 6** ya que las representa en rectángulos de contorno de color rojo con seis cuadrados de la cuadrícula y la **Fig. 4** y la **Fig. 5** las que representa también en rectángulos de contorno de contorno de color celeste con doce cuadrados de la cuadricula que ella elaboró.

Análisis de Viviana

Las reconfiguraciones que la estudiante Viviana realizó son las siguientes: (ver Tabla 18).

Tabla 18. Reconfiguraciones de Viviana en la malla cuadriculada

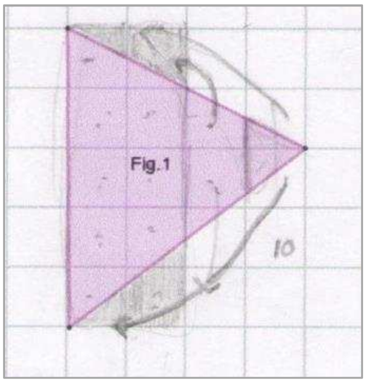
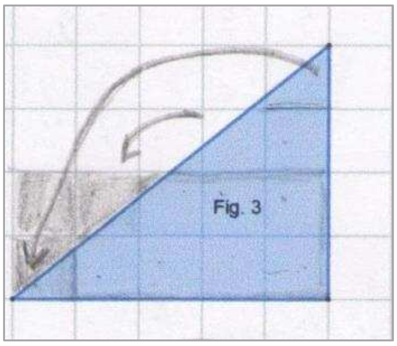
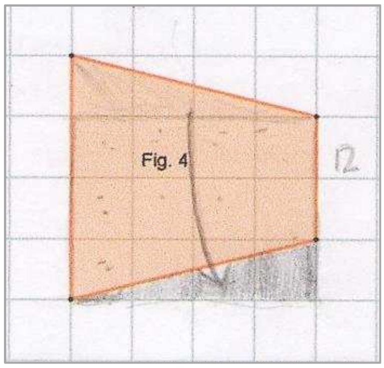
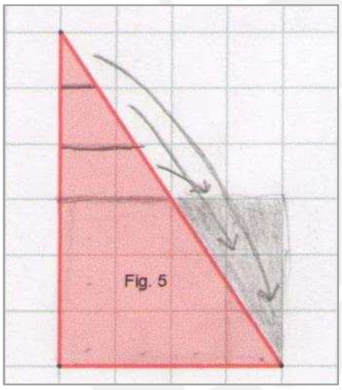
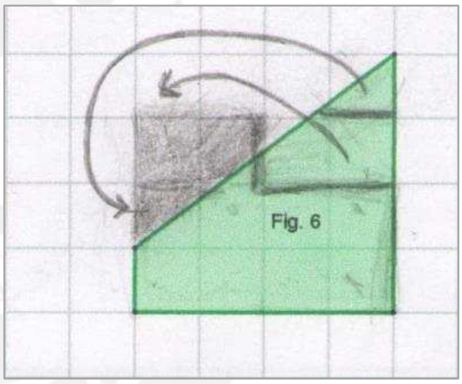
Fig. 1	**Fig. 3**	**Fig. 4**
		

Fig. 5	**Fig. 6**
	

De la misma manera, se observa en la Tabla 18 que la estudiante Viviana realizó la aprehensión operatoria de modificación mereológica de descomposición heterogénea en cada una de las figuras geométricas al realizar trazos hechos a lápiz y transformó estas configuraciones iniciales en otras figuras geométricas de contornos globales diferentes, es decir, realizó la operación de reconfiguración. Pero, la **Fig. 6** a diferencia de lo previsto en el a priori la transformó en un hexágono cóncavo. También, a diferencia de lo previsto realizó diferentes cantidades de descomposiciones en cada una de las figuras geométricas, así en la **Fig. 1** obtuvo cinco sub-figuras (dos triángulos rectángulos y tres trapecios), en la **Fig. 3** tres sub-figuras (un triángulo rectángulo y dos trapecios rectángulos), en la **Fig. 5** cuatro sub-figuras (un triángulo y tres trapecios rectángulos) y en la **Fig. 6** tres sub-figuras (un triángulo, un trapecio rectángulo y un hexágono cóncavo). Pensamos que ella realizó estas descomposiciones porque su aprehensión perceptiva se apoyó en la cuadrícula de la malla cuadriculada. Sin embargo, en la **Fig. 4** se observa que realizó un trazo y obtuvo dos sub-figuras: un triángulo y un trapecio rectángulo como lo habíamos previsto en el a priori, creemos que su aprehensión perceptiva le permitió reconocer un rectángulo el que pintó con trazos leves hechos a lápiz en esta sub-figura. Luego, trasladó cada una de las sub-figuras al exterior del contorno de la figura inicial, es decir realizó la modificación posicional por traslación y completó los cuadrados de la malla cuadriculada considerados como unidad de área, según las flechas que realizó a lápiz.

La respuesta de la estudiante Viviana en el ítem a) fue según los previsto en el a priori (ver Tabla 19).

Tabla 19. Respuestas al ítem a) de la actividad 1 de Viviana

Fig. 1	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 6
10	10	12	12	10

Asimismo, la respuesta de Melissa en el ítem b) también fue según lo previsto en el a priori (ver Tabla 20).

Tabla 20. Respuestas al ítem b) de la actividad 1 de Viviana

Fig. 1	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 6
10 V.a	10 u.a	12 u.a	12 u.a	10 u.a

Con respecto a la respuesta de Viviana del ítem c) a diferencia de lo previsto en el a priori ella usó símbolos y signos para referirse acerca de las figuras geométricas equivalentes para referirse que figuras tienen la misma medida de área (Figura 33).

Figura 33. Respuesta a la primera parte del ítem c) de la actividad 1 de Viviana

En cuanto, a su respuesta al por qué, la estudiante Viviana responde en el registro de lengua natural según lo previsto en el a priori. *Porque estas figuras tienen la misma medida. Tienen áreas iguales.* (Figura 34).

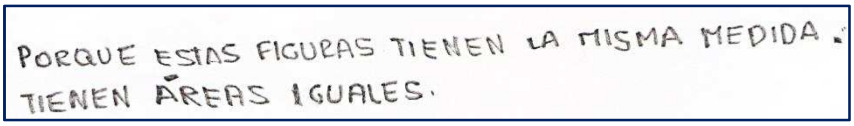


Figura 34. Respuesta a la pregunta c) de la actividad 1 de Viviana

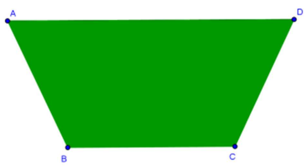
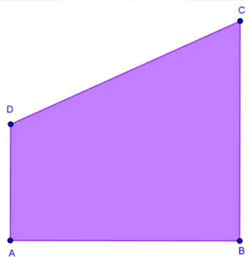
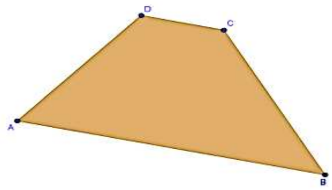
Además, pensamos por su respuesta que ella logró identificar las figuras geométricas equivalentes a través de una aprehensión discursiva identificando una propiedad de estas figuras geométricas al manifestar que tienen la misma medida.

Actividad 2: Trabajemos con el Geogebra

El objetivo de esta actividad es obtener figuras geométricas equivalentes al transformar trapecios en triángulos con la misma medida de área.

Para ello, los estudiantes movilizarán los conocimientos de diagonal, recta paralela, punto de intersección, herramienta área y función arrastre del Geogebra para lo cual trabajarán con tres tipos de trapecios que corresponden a las tres partes que consta esta segunda actividad, es decir, la **Parte A** con el trapecio isósceles (trapecio1.ggb), la **Parte B** con el trapecio escaleno (trapecio2.ggb) y la **Parte C** con el trapecio escaleno (trapecio3.ggb), según se muestra en la Tabla 21.

Tabla 21. Archivos de la actividad 2: Trabajemos con el Geogebra

Parte A	Parte B	Parte C
		

Además, los estudiantes conocen las herramientas necesarias y la función arrastre del software Geogebra, que se encuentran especificadas en la página 19 de esta investigación, que permitirán realizar las tres partes que consta esta actividad. Cabe resaltar que se analizará la **Parte A** (Figura 35) donde se presenta el trapecio isósceles porque es la figura geométrica con que se realizará la actividad de cierre.

Parte A

a) Abra el archivo **trapecio1.ggb** y construya un triángulo con la misma medida de área del trapecio isósceles dado.

b) Utilice la herramienta área para obtener la medida del área del trapecio dado y del triángulo construido.

c) Arrastre el vértice A del trapecio ¿qué sucede con las medidas de las áreas? Explique.

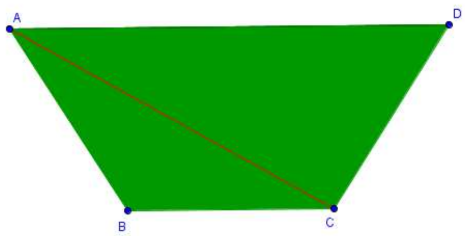
d) Guarde el archivo con **Primer Nombre_Apellido Paterno_A**

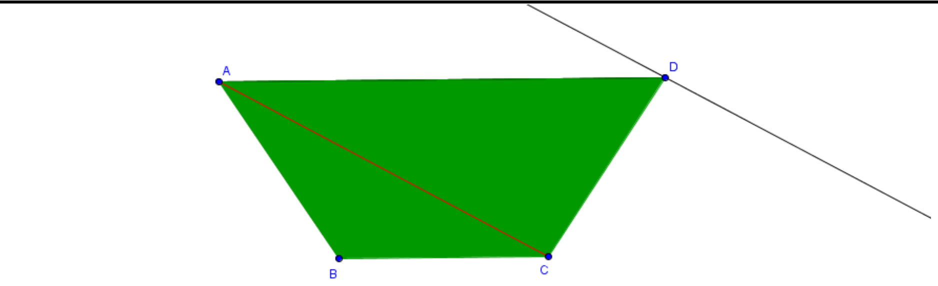
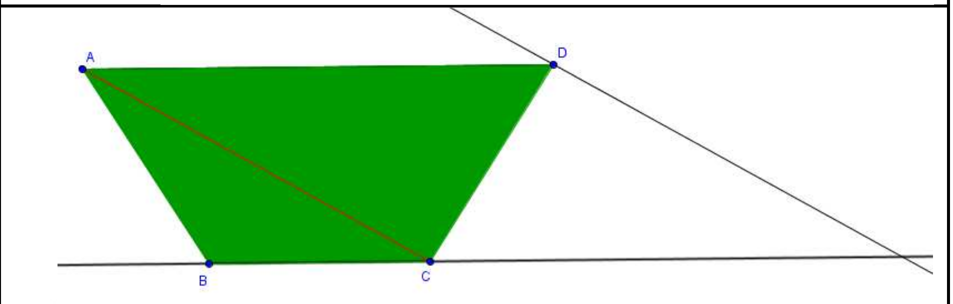
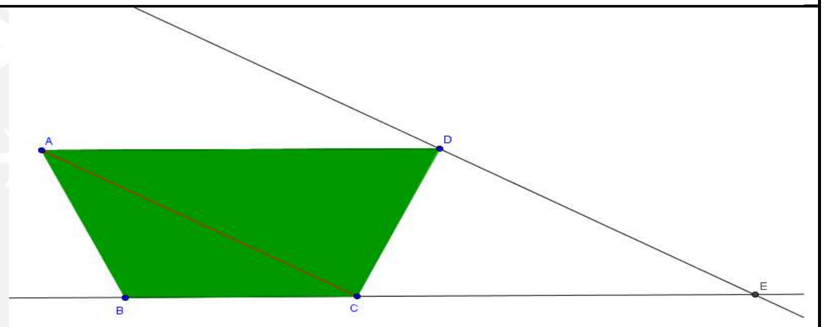
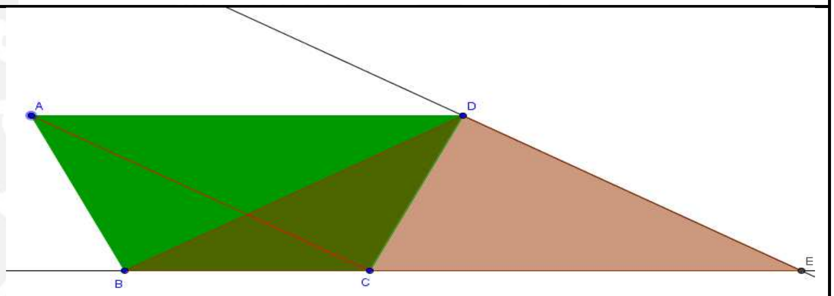
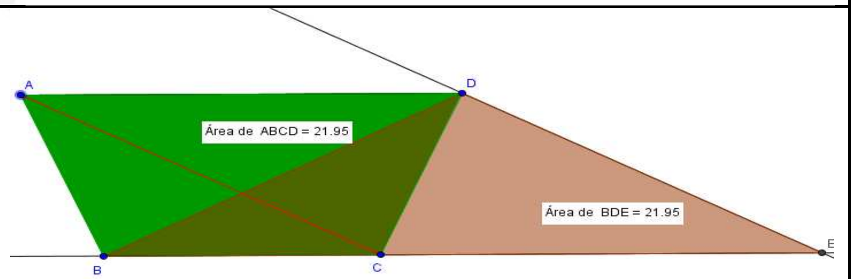
Figura 35. Parte A de la actividad 2: Trabajemos con el Geogebra

Análisis a priori

Pensamos que los estudiantes dividirán el trapecio isósceles $ABCD$ en dos triángulos al trazar una de las diagonales del trapecio, ya sea la diagonal $\overline{AC}$ o $\overline{BD}$, por ello consideramos la diagonal como una variable en esta actividad, al abrir el archivo **trapecio 1.gg** por lo que, empezarán con una modificación mereológica. Para transformar esta figura geométrica en un triángulo con la misma medida de área del trapecio dado, con un contorno global diferente a la figura geométrica inicial, es decir, realizarán la operación de reconfiguración. Una posible construcción geométrica de esta transformación es la que mostramos en la Tabla 22, al trazar la diagonal $\overline{AC}$. De esta manera desarrollarán la aprehensión operatoria de reconfiguración, al realizar modificaciones mereológicas de descomposición heterogénea en el trapecio isósceles $ABCD$ y la aprehensión secuencial al realizar los pasos de manera secuencial para construir el triángulo, con las herramientas ya mencionadas del Geogebra. Es así que, la figura cumpliría su función heurística por la diversidad de operaciones que los estudiantes pueden realizar sobre esta figura geométrica.

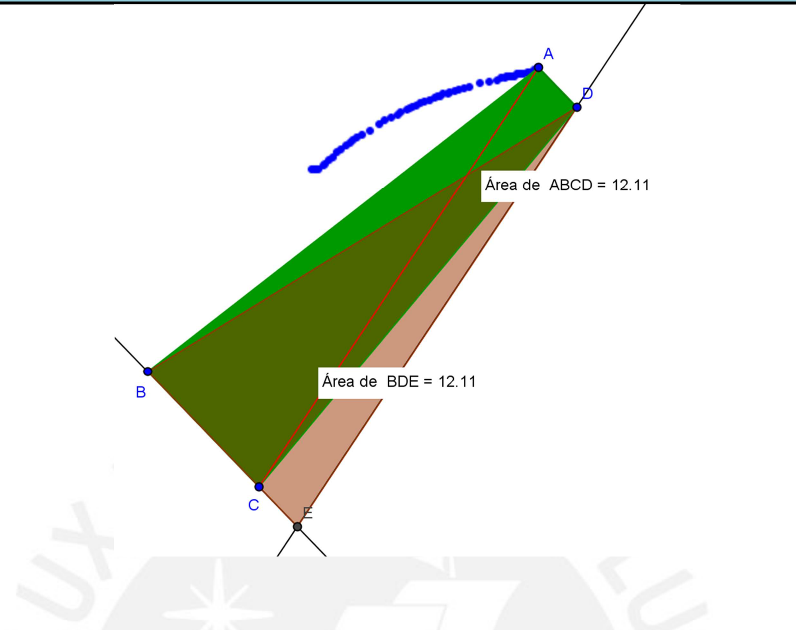
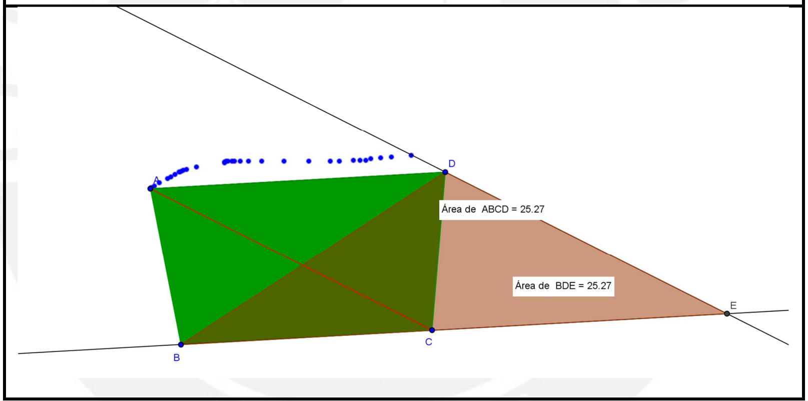
Tabla 22. Aprehensión operatoria y secuencial de la Parte A de la actividad 2

Pasos	Construcción Geométrica
Paso 1: Trace el segmento $\overline{AC}$ y divide el trapecio $ABCD$ en dos triángulos isósceles: ABC y ACD.	

Paso 2: Trace la recta paralela al segmento $\overline{AC}$ que pase por el punto D.	
Paso 3: Prolongue el segmento $\overline{BC}$ hasta interceptar con la recta paralela que pasa por el punto D.	
Paso 4: Ubique el punto intersección E entre las dos rectas.	
Paso 5: Construye el triángulo BDE.	
Paso 6: Halle la medida del área del trapecio $ABCD$ y del triángulo BDE .	

Luego, creemos que con la función arrastre del Geogebra del vértice A del trapecio isósceles $ABCD$, los estudiantes observarán que las formas (superficies) como la posición de las figuras geométricas cambian y las medidas de sus áreas son las mismas, es decir, son figuras geométricas equivalentes. Es así, que desarrollarán las aprehensiones perceptivas y operatorias (ver Tabla 23).

Tabla 23. Arrastre del vértice A del trapecio $ABCD$

Figuras geométricas equivalentes



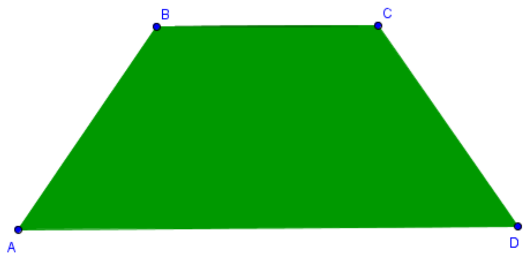
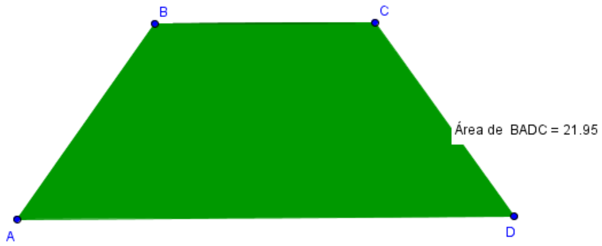
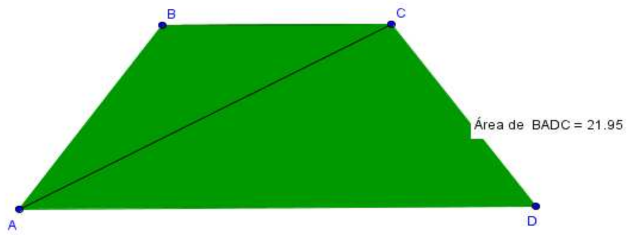
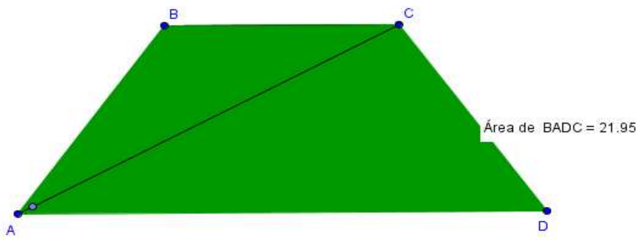
Posteriormente, los estudiantes responderán a la siguiente pregunta: ¿qué sucede con las áreas? Explique. Pensamos que los estudiantes puedan manifestar su respuesta a través del uso del registro de la lengua natural luego de realizar la función arrastre en el vértice A del trapecio, es decir, realicen una aprehensión discursiva de su aprehensión discursiva y operatoria, acerca de que las medidas de las áreas son las mismas aunque varían las formas de las figuras geométricas. Porque ambas figuras geométricas comparten la misma altura y la misma base.

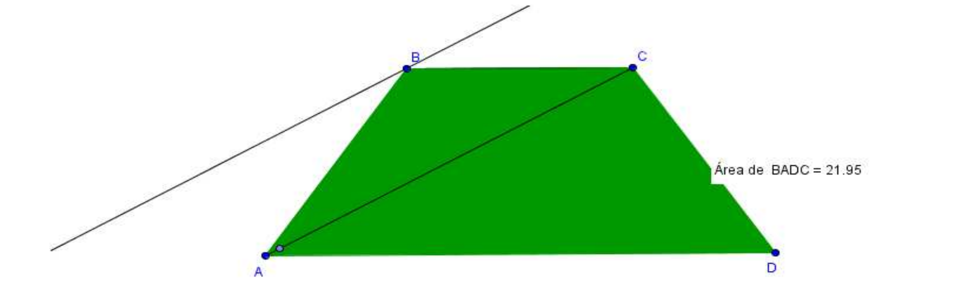
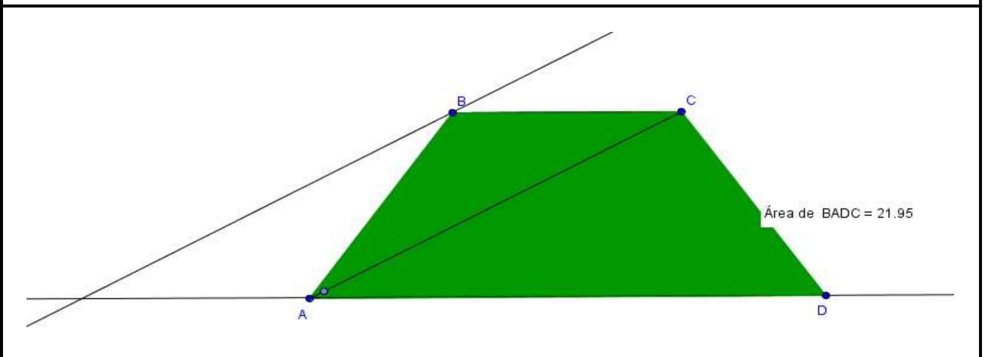
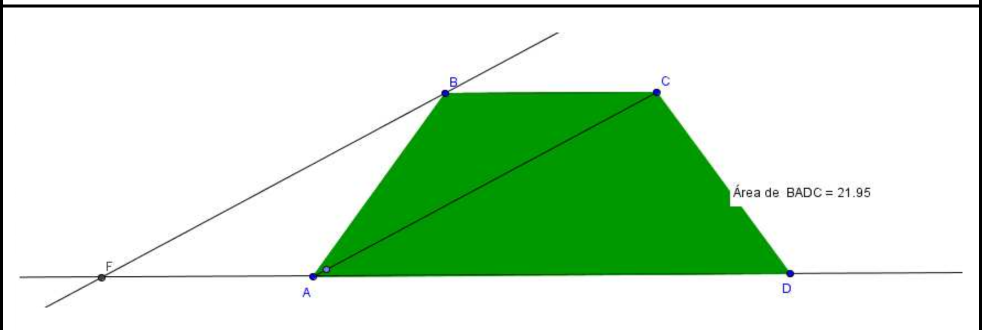
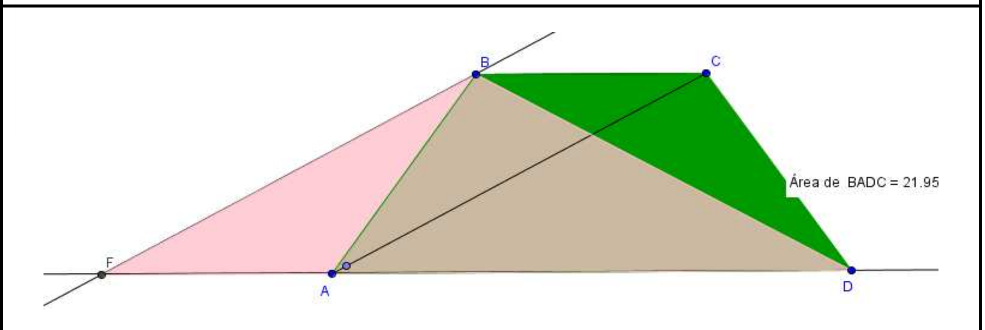
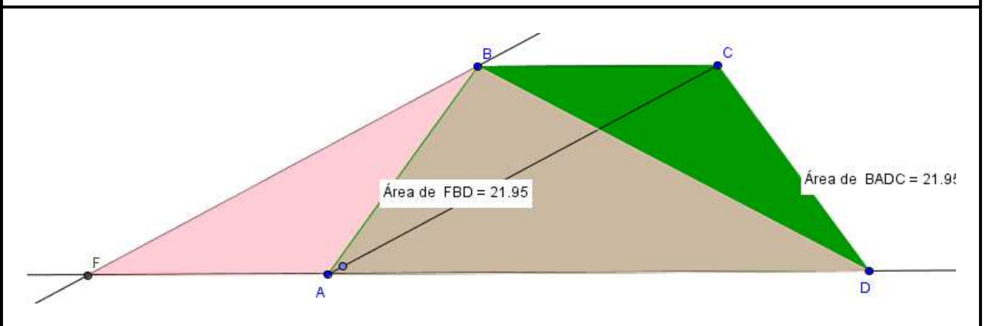
Análisis a posteriori

Análisis de Melissa:

La estudiante Melissa en la **Parte A** de la actividad 2 realizó los siguientes pasos, según se muestra en la revisión del protocolo de construcción del Geogebra (ver Tabla 24).

Tabla 24. Aprehensión operatoria y secuencial de la Parte A de Melissa

Pasos	Construcción Geométrica
Paso 1: Cambió la posición del trapecio inicial $ABCD$, donde la base mayor del trapecio lo ubicó debajo de la base menor del trapecio.	
Paso 2: Halló la medida del área del trapecio $BADC$.	
Paso 3: Trazó el segmento $\overline{AC}$ y dividió al trapecio $BADC$ en dos triángulos: ΔBAC y ΔCAD	
Paso 4: Ubicó un punto en el segmento $\overline{AC}$.	

Paso 5: Trazó la recta paralela al segmento $\overline{AC}$ que pase por el punto B.	
Paso 6: Prolongó el segmento $\overline{AD}$ hasta interceptar con la recta paralela que pasa por el punto B.	
Paso 7: Ubicó el punto intersección F entre las dos rectas.	
Paso 8: Construyó el triángulo FBD.	
Paso 9: Halló la medida del área del triángulo FBD.	

La estudiante Melissa, a diferencia de lo previsto en el análisis a priori, empezó con un cambio posicional del trapecio, es decir, realizó una aprehensión operatoria (posicional).

Invirtió la posición de las bases del trapecio isósceles, pensamos que se debe a su aprehensión perceptiva acerca de este objeto matemático, donde la base mayor debe estar debajo de la base menor del trapecio. Luego, realizó una modificación mereológica al dividir la configuración del trapecio en dos triángulos: ΔABC y ΔACB al trazar la diagonal $\overline{AC}$, para realizar la construcción del triángulo FBD con la misma medida de área del trapecio isósceles dado, es decir, realizó la operación de reconfiguración y la aprehensión secuencial, pero a diferencia de los pasos previstos en el a priori añade un paso que es un punto en la diagonal $\overline{AC}$, creemos que lo obtuvo por su uso del software y que olvidó borrarlo.

Con respecto a la pregunta formulada en esta parte de la actividad, la estudiante Melissa utilizó el registro de lengua natural y explicó lo siguiente: (ver Figura 36).

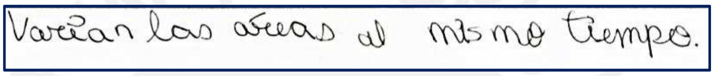


Figura 36. Respuesta de Melissa a la pregunta de la Parte A

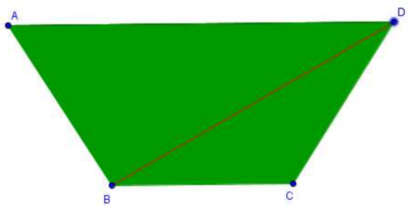
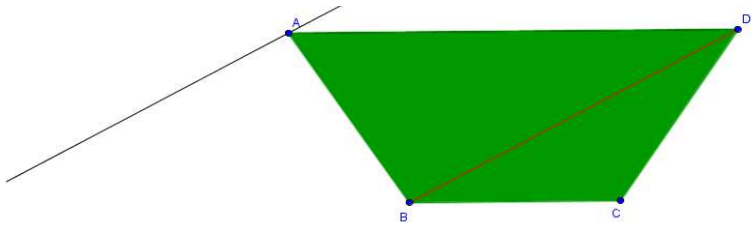
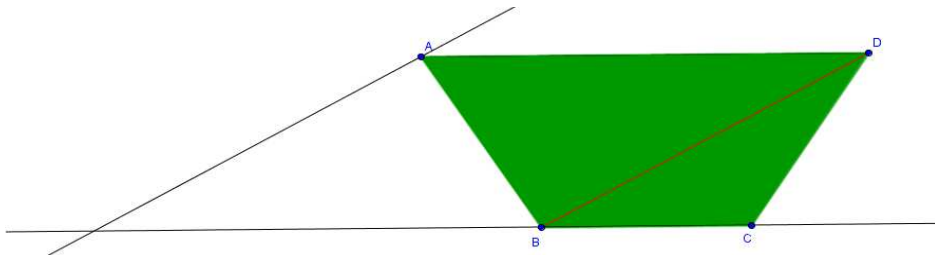
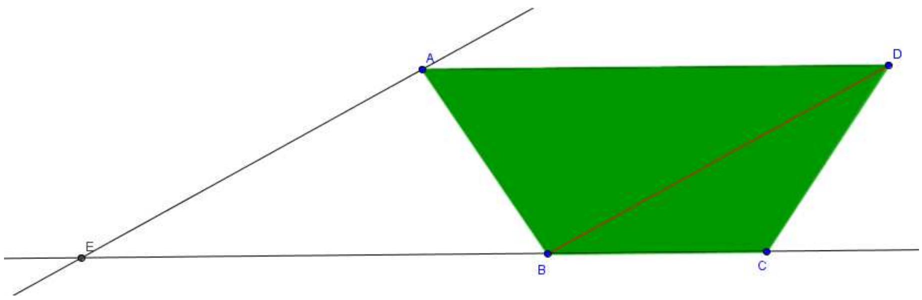
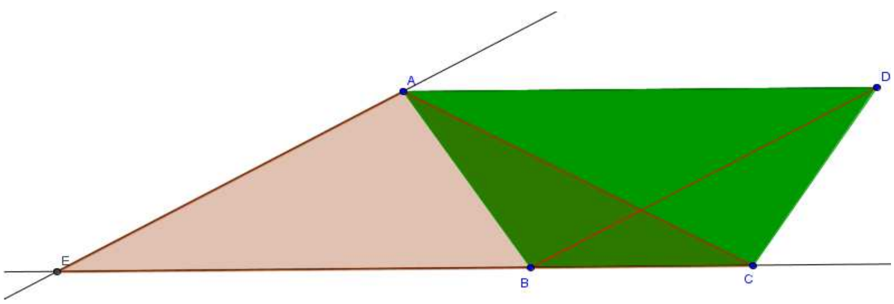
Como observamos en la Figura 36, la estudiante Melissa escribió lo siguiente: *Varian las áreas al mismo tiempo.* Aunque no contamos con evidencia acerca de si utilizó la función arrastre, por lo realizado por la estudiante, pensamos que logró obtener una figura geométrica equivalente al trapecio isósceles ABC como fue el triángulo FBD ya que, ambas figuras geométricas tuvieron la misma medida de área.

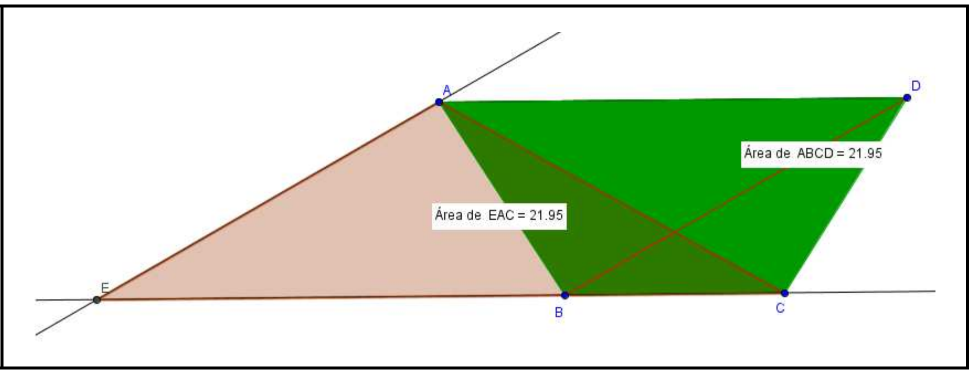
Análisis a posteriori

Análisis de Viviana

Asimismo, la estudiante Melissa en la **Parte A** de la actividad 2, realizó los siguientes pasos, según se muestra en la revisión del protocolo de construcción del Geogebra (ver Tabla25).

Tabla 25. Aprehensión operatoria y secuencial de la Parte A de Viviana

Pasos	Construcción Geométrica
Paso 1: Trazó el segmento $\overline{BD}$.	
Paso 2: Trazó la recta paralela al segmento $\overline{BD}$ que pase por el punto A.	
Paso 3: Prolongó el segmento $\overline{BC}$ hasta interceptar con la recta paralela que pasa por el punto A.	
Paso 4: Ubicó el punto intersección E entre las dos rectas.	
Paso 5: Construyó el triángulo EAC.	

Paso 6: Halló las medidas de las áreas del triángulo EAC y del trapecio $ABCD$.	

La estudiante Viviana empezó con una modificación mereológica al dividir el trapecio isósceles $ABCD$ en dos triángulos: ΔABC y ΔACB al trazar la diagonal $\overline{BD}$, para realizar la construcción del triángulo FBD con la misma medida de área del trapecio isósceles dado, es decir, realizó la operación de reconfiguración como la aprehensión secuencial como lo habíamos previsto en el a priori.

Con respecto a la pregunta formulada en esta parte de la actividad, la estudiante Viviana utilizó el registro de lengua natural y explicó lo siguiente: (ver Figura 37).

Figura 37. Respuesta de Viviana a la pregunta de la Parte A

Como observamos en la Figura 37, la estudiante Viviana escribió lo siguiente: *Las figuras se mueven pero sin cambiar las áreas.* Pensamos que su respuesta se basa en su percepción simple. Ya que, a través del video se observó, que, a diferencia de lo previsto en el a priori, la estudiante utilizó la herramienta Desplaza Vista Gráfica y movilizó toda la construcción geométrica, luego de ubicarse en el vértice A (ver figura 38), en la cual tanto las formas del trapecio isósceles $ABCD$ y del triángulo EAC como las medidas de las áreas se mantuvieron constantes.

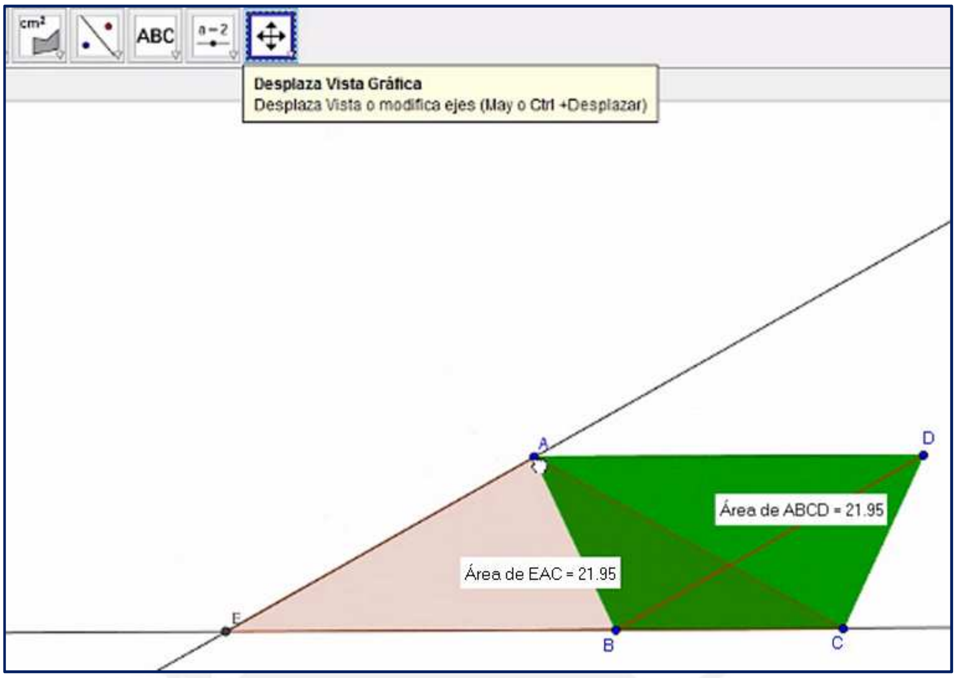


Figura 38. Uso de la herramienta Desplaza Vista Gráfica por Viviana

Sin embargo, con lo realizado por la estudiante Viviana, pensamos que logró reconfigurar el trapecio isósceles $ABCD$ en el triángulo EAC y obtuvo una figura geométrica equivalente al trapecio isósceles dado porque utilizó la herramienta Área y verificó que ambas figuras tenían la misma medida del área. Además, solo realizó una modificación posicional con toda la construcción al utilizar la herramienta Desplaza Vista Gráfica del Geogebra.

Actividad 3: Hallemos la medida del área

El objetivo de esta actividad de cierre es que los estudiantes hallen la medida del área de un trapecio isósceles, a través de dos procedimientos diferentes, para verificar que el estudiante realice algunos de los procedimientos tratados en la secuencia de actividades y sus conocimientos previos de cómo hallar la medida del área del trapecio isósceles. Por ello, los procedimientos lo consideraremos como una variable en esta actividad. (Figura 39)

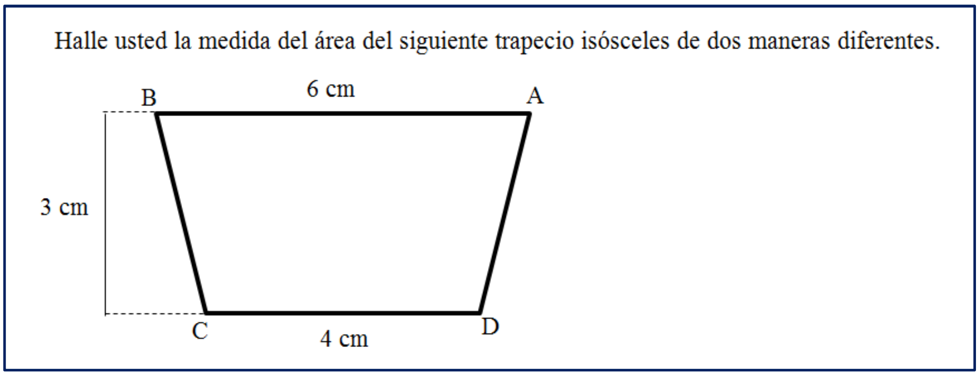


Figura 39. Actividad 3: Hallemos la medida del área

Análisis a priori

Esperamos que los estudiantes movilicen los conocimientos de medida de área del trapecio, la operación de reconfiguración, figuras geométricas equivalentes y la fórmula para determinar la medida del área del trapecio. Además, consideren en los procedimientos la operación de reconfiguración para hallar la medida del área del trapecio isósceles, es decir, transformarán el trapecio isósceles en otra figura geométrica con la misma medida de área del trapecio dado. Por ello, es posible que realicen las siguientes reconfiguraciones:

- Transformarán el trapecio isósceles en un rectángulo, según la Figura 40. Para ello, deberán fraccionar o descomponer el trapecio dado en dos sub-figuras: un triángulo rectángulo y un trapecio rectángulo, para trasladar el triángulo rectángulo y formar un rectángulo. Luego, utilizarán la siguiente fórmula:

$$A = b \times h$$

Para determinar la medida del área del rectángulo y los tratamientos matemáticos respectivos, para encontrar que la medida del área del trapecio isósceles es 15 cm^2.

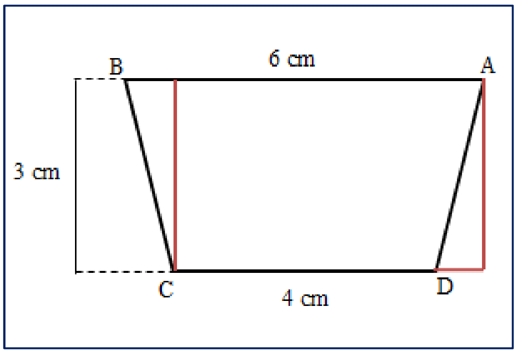
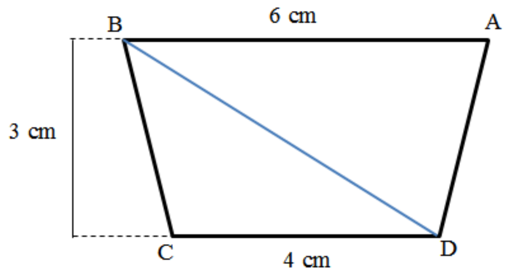
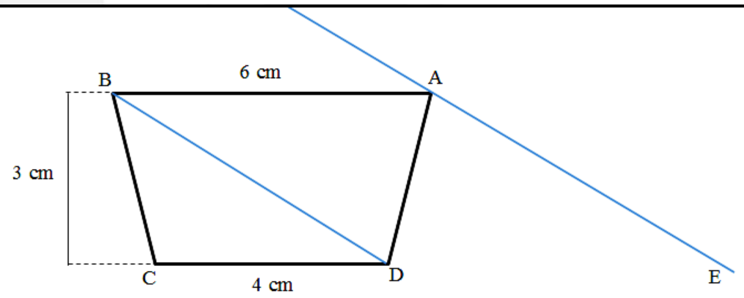
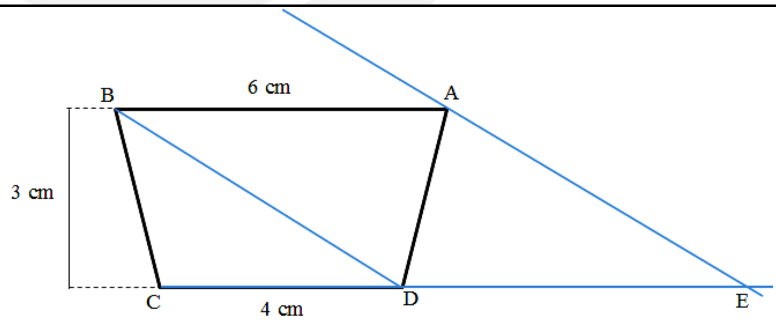
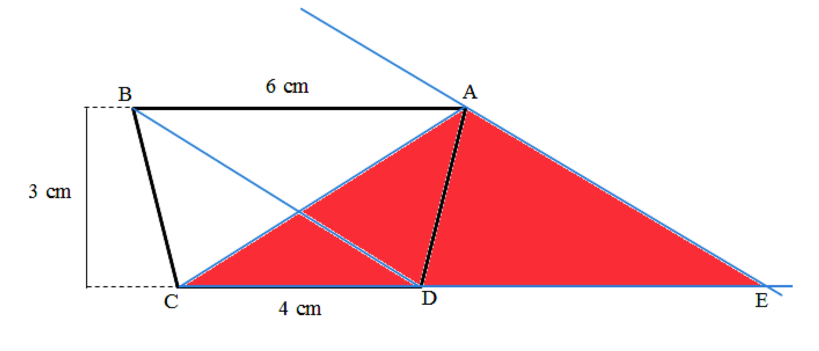


Figura 40. Transformación del trapecio isósceles en rectángulo

Transformarán el trapecio isósceles $ABCD$ en un triángulo. Para ello, deberán realizar las aprehensiones operatorias de modificación mereológica al descomponer el trapecio en este caso isósceles en unidades figurales heterogéneas al trazar la diagonal $\overline{BD}$ para luego transformarlo en un triángulo por la operación de reconfiguración y además la aprehensión secuencial porque el estudiante realiza una secuencia de pasos hasta lograr la reconfiguración del trapecio en otra figura de contorno global diferente con la misma medida de área del trapecio dado como se observa en la siguiente Tabla: (ver Tabla 26).

Tabla 26. Transformaciones del trapecio isósceles en un triángulo

Pasos	Construcción Geométrica
Paso 1: Trace el segmento $\overline{BD}$.	
Paso 2: Trace la recta paralela al segmento $\overline{BD}$ que pase por el vértice A.	
Paso 3: Prolongue el segmento $\overline{CD}$ y ubique el punto de intersección E entre las dos rectas.	

Paso 4: Construye el triángulo ACE.	

Por otro lado, también esperamos que los estudiantes utilicen la siguiente fórmula para determinar la medida del área del trapecio:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

Porque es la fórmula que se encuentra indicada en su libro de Matemática 2 Secundaria (Perú, 2012, p. 147) para hallar el área de un trapecio.

Análisis a posteriori

Análisis de Melissa

La estudiante Melissa realizó los siguientes procedimientos para dar solución a la actividad 3.

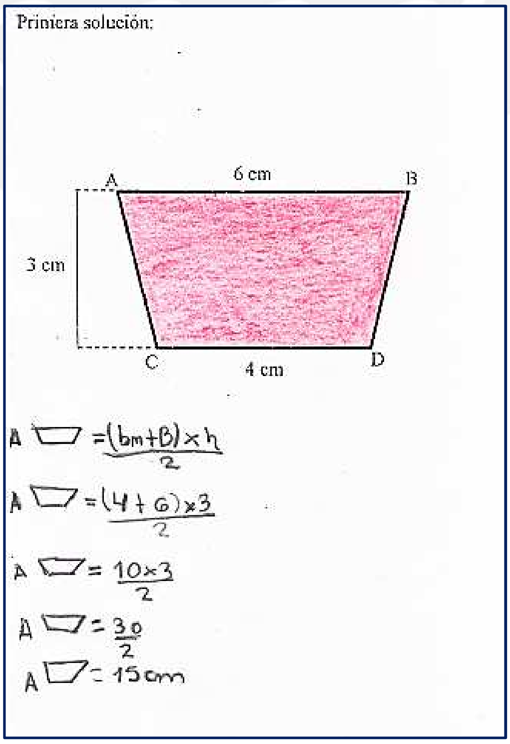


Figura 41. Primera solución de la actividad 3 de Melissa

La estudiante Melissa en la primera solución utilizó la fórmula para determinar la medida del área del trapecio isósceles (ver Figura 41). Esto muestra que relaciona la medida de las áreas de figuras geométricas con las fórmulas. Asimismo, expresa bm, en la fórmula, para referirse a la base menor del trapecio e inicia con esta variable dentro de los paréntesis porque pensamos que ella considera que se escribe primero la base inferior seguida de la base superior y como la base menor es la base inferior, es por ello que expresa esta variable. Luego realiza tratamientos matemáticos para realizar los cálculos, pero a diferencia de lo previsto en el a priori no logró responder correctamente por expresar la unidad de área en unidades lineales.

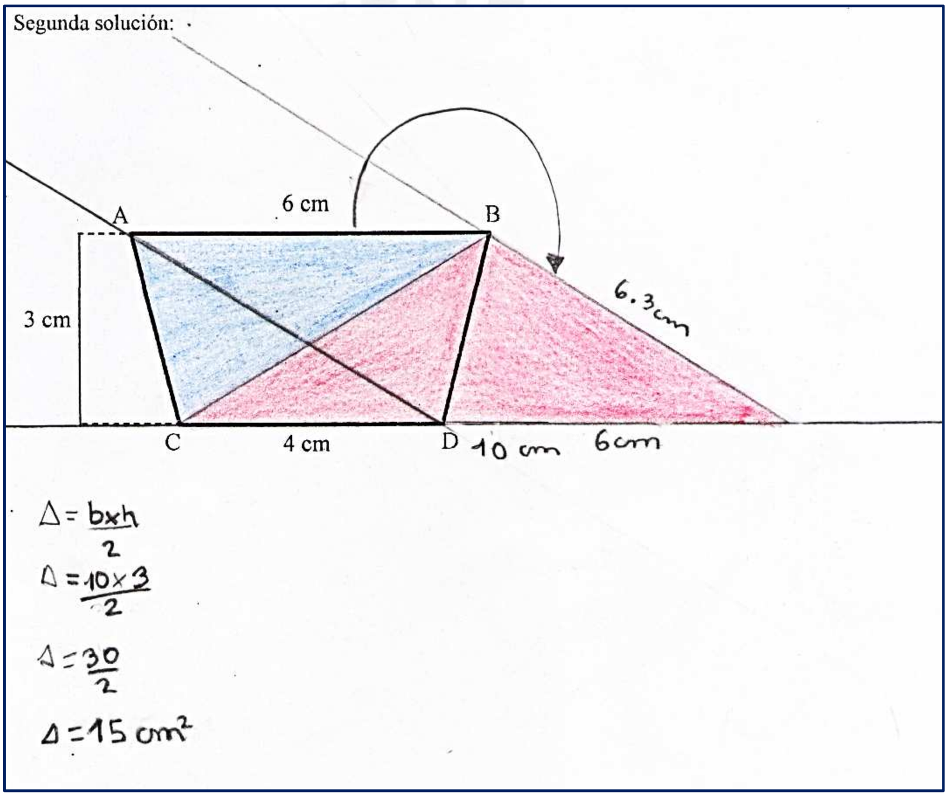


Figura 42. Segunda solución de la actividad 3 de Melissa

Mientras que, en la segunda solución Melissa reconfiguró el trapecio isósceles en un triángulo, para lo cual realizó modificaciones mereológicas en el trapecio isósceles a través de trazos internos y adicionales similares a los pasos realizados en el Geogebra, es decir, realizó la aprehensión secuencial ya que utilizó como instrumento la regla. Luego, halló la medida del área del triángulo con la siguiente fórmula:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Para lo cual reemplazó la base con 10 cm y la altura con 3 cm. Realizó tratamientos matemáticos y determinó que la medida del área del triángulo es 15 cm^2 lo que habíamos previsto en el a priori. Además, ella indicó que el triángulo ABC fue trasladado hacia donde indica la flecha, creemos que lo indicó por su aprehensión perceptiva acerca de que estos dos triángulos tienen la misma medida de área (ver Figura 42).

Análisis de Viviana

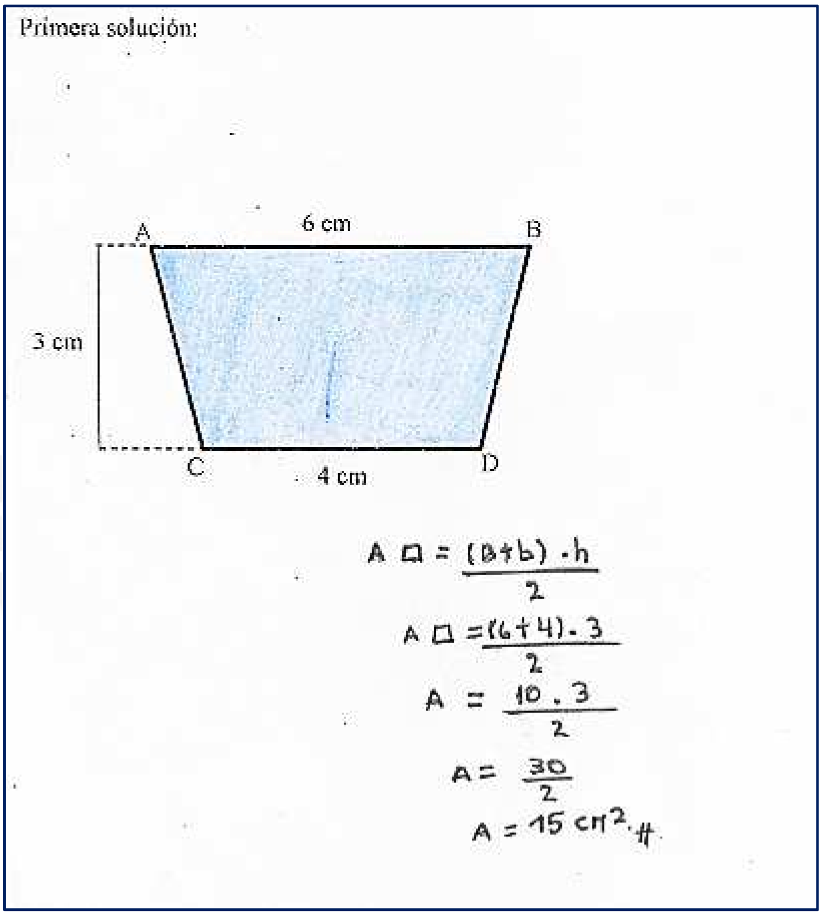


Figura 43. Primera solución de la actividad 3 de Viviana

La estudiante Viviana utilizó la fórmula para hallar la medida del área del trapecio isósceles y determinó que la medida del área es 15 cm^2 lo que habíamos previsto en el a priori, es decir, emplea el registro algebraico y tratamientos matemáticos (ver Figura 43).

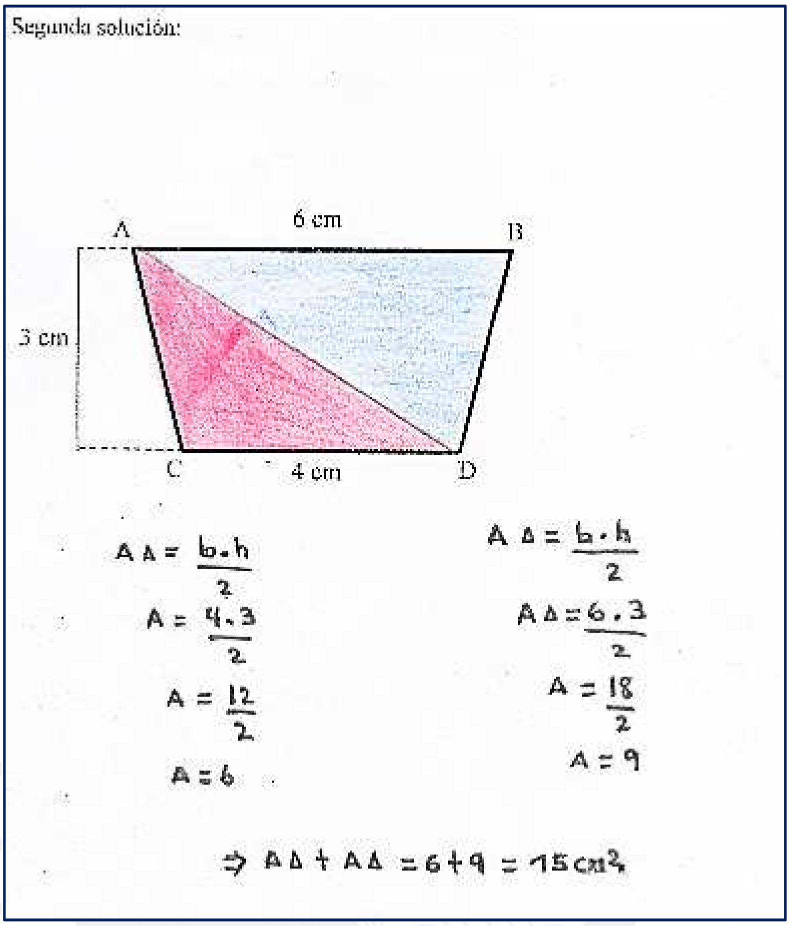


Figura 44. Segunda solución de la actividad 3 de Viviana

La segunda solución que da la estudiante Viviana para hallar la medida del área del trapecio isósceles a diferencia de lo previsto en el a priori, ella realizó modificaciones en la figura al fraccionar o descomponer el trapecio isósceles en dos triángulos que son: el ΔBCD y el ΔABD, según la Figura 44, pero no lo reconfigura. Es decir, realizó tratamientos en el registro figural y halló la medida del área de estos triángulos por fórmulas. Luego, sumó los resultados obtenidos de estas medidas de áreas para hallar la medida del área del trapecio isósceles, el cual fue 15 cm^2 como lo habíamos previsto.

CONSIDERACIONES FINALES

En base a los antecedentes que presentamos, así como el documento oficial en la justificación, podemos afirmar que los estudiantes del segundo grado de educación secundaria muestran dificultades al determinar la medida del área de polígonos como el trapecio, se da mayor importancia al uso de la fórmula la cual no es comprendida y es olvidada por los estudiantes, hay ausencia de otros procedimientos que permiten resolver esta cuestión como la operación de reconfiguración que se da en el registro figural. Esta información es importante porque nos permite conocer la importancia de realizar esta investigación con estudiantes del segundo grado de educación secundaria, es así que, esperamos que nuestra investigación sea un aporte para el aprendizaje de la Geometría especialmente para determinar la medida del área del trapecio a través de la operación de reconfiguración.

Con relación al marco teórico y metodológico

Consideramos que la Teoría de Registros de Representación Semiótica y lo referido al registro figural, permitió obtener la medida del área del trapecio sin usar su fórmula para determinar su medida de área, en cambio se realizó la operación de reconfiguración al transformar el trapecio en otra figura geométrica de contorno diferente, pero con la misma medida de área, es decir, se obtuvo figuras geométricas equivalentes. Además esta operación es fundamental en el registro figural para resolver una cuestión como el determinar la medida del área. Asimismo, empleamos aspectos de la Ingeniería Didáctica como metodología de nuestra investigación y desarrollamos las cuatro fases de esta metodología que son: el análisis preliminar, la concepción, y el análisis a priori, la experimentación y análisis a posteriori y la validación.

Con relación a la pregunta de investigación y al objetivo general

A continuación presentamos los principales resultados de la investigación. Con respecto a la pregunta: ¿Cómo los estudiantes del segundo grado de educación secundaria, por medio de la reconfiguración del trapecio, determinan la medida del área del mismo?

Nuestra investigación respondió a la pregunta, porque los estudiantes en el desarrollo de la secuencia de actividades han evidenciado la reconfiguración del trapecio en otras figuras geométricas con la misma medida de área del trapecio dado. En la actividad 1, los estudiantes luego de reconfigurar las figuras geométricas de la malla cuadriculada comunican acerca de sus medidas de área en base al cuadrado de la malla cuadriculada como unidad de área y de las figuras geométricas equivalentes, a través de una representación semiótica como del registro figural. En la actividad 2, luego de trabajar en el Geogebra, los estudiantes lograron comunicar en el registro de lengua natural acerca de lo que sucede con las medidas de las áreas del trapecio isósceles dado y el triángulo obtenido al reconfigurar el trapecio transformado en un triángulo. Finalmente, en la actividad 3 los estudiantes luego de realizar las actividades anteriores hallaron la medida del área del trapecio isósceles dado para lo cual realizaron como una de sus posibles soluciones modificaciones mereológicas en el trapecio, en la que una de ellas fue de reconfiguración.

Con respecto al cumplimiento de nuestro objetivo general, analizar a partir de la reconfiguración del trapecio, cómo los estudiantes del segundo grado de educación secundaria determinan la medida del área del mismo, podemos decir lo siguiente:

Se logró alcanzar el objetivo general porque en el desarrollo de las actividades, los estudiantes lograron realizar reconfiguraciones en la malla cuadriculada, en la Vista Geométrica del Geogebra y en la actividad de cierre, para luego comunicar a través de representaciones semióticas y el registro figural en la actividad 1, en el registro de lengua natural en la actividad 2 y en el registro algebraico como figural en la actividad 3, sus respuestas.

Finalmente, nuestra investigación nos ayudó a comprender las acciones de los estudiantes al realizar tratamientos en el registro figural como la operación de reconfiguración para determinar la medida del área del trapecio y como desarrollan las aprehensiones perceptivas, operatoria, secuencial y discursiva, así también cómo influye el factor perceptivo visual al trabajar en la malla cuadriculada y el trabajar en un software dinámico de geometría como es el Geogebra. Además, observamos que los estudiantes ahora tienen una nueva manera de determinar la medida del área de un trapecio como de otra figura geométrica convexa que no solo es con el uso de la fórmula, sino también con realizar tratamientos en la figura como la operación de reconfiguración la cual puede ser a través de descomposición heterogénea, homogénea o estrictamente homogénea.

Perspectivas futuras

Consideramos necesario realizar réplicas de esta investigación en otros contextos con estudiantes de la educación básica regular, ya que la reconfiguración permite comprender mejor la medida de área a través de la comparación con otras figuras geométricas equivalentes, es decir, tratar el aspecto cualitativo del área que generalmente no se trabaja en la educación básica regular.

Asimismo, investigar cómo los estudiantes del nivel secundario utilizan el registro figural en el área de Geometría.

REFERENCIAS

Alva, F. (2015). *Geometría. Teoría y práctica*. Lima, Perú: Editorial San Marcos.

Arenas, M. (2012). *Propuesta Didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas.* (Tesis de Maestría en Ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia. Recuperado de www.bdigital.unal.edu.co/9300/1/5654114.2012.pdf

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje del cálculo.* Bogotá, Colombia. Editorial Iberoamérica.

Bogdan & Biklen (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Recuperado de https://www.academia.edu/6674293/Bogdan_Biklen_investigacao_qualitativa_em_educacao

Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics.* New York, United States of America: Wiley International Edition.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M. (1987). Um processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Cahier de didactique des mathématiques-IREM.* (37). Université Paris VII. Recuperado de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS00015.pdf

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *IREM 1*, pp. 57-74. Recuperado de https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_01/adsc1_1988-004.pdf

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM,* (17), pp. 121-138. Recuperado de http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/17_article_119.pdf

Duval, R. (2001). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. (Myriam Vega, trad.). Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. (Obra original publicada en 1999).

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* (Myriam Vega, trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. (Obra original publicada en 1995).

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Repères-IREM 10*, pp. 5-53. Recuperado de https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_10/adsc10-2005_001.pdf

Fandiño, P. y D'Amore, B. (2009). *Área y Perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

Gómez, C. (2015). Proceso de visualización de cuadriláteros: Un estudio con profesores de nivel secundario. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia

Universidad Católica del Perú. Lima, Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/

Hemmerling, E. (1971). *Geometría Elemental*. D.F., México: Editorial Limusa-Willey, S.A.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación.* Recuperado de https://www. academia.edu/6399195/Metodologia_de_la_investigacion_5ta_ Edicion_Sampieri

Micelli, M. (2010). *Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática*. (Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa). Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Distrito Federal, México. Recuperado de http://tesis.ipn.mx:8080/xmlui/handle/123456789/7887

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/

Perú, Ministerio de Educación (2012). *Matemática 2 Secundaria*. Lima, Perú: Editorial Norma.

Rodríguez, C. (2011). *Construcción de polígonos regulares y cálculo de áreas de superficies planas utilizando el programa geogebra: una estrategia metodológica para la construcción de aprendizajes significativos en estudiantes de grado séptimo.* (Tesis de Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia. Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/5849/1/ 8410010.2012.pdf

Secco, A. (2007). *Conceito de área: da composição e decomposição de figuras até as fórmulas.* (Tesis de Maestría profesional en enseñanza de la Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Recuperado de http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4841

Silva, G. (2010). *Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis.* (Tesis de Maestría en Educación Matemática y Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, Brasil. Recuperado de http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/3944/arquivo61_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Souza, C. (2006). *Un estudo sobre a aprendizagem de alguns conceitos algébricos e geométricos.* (Tesis de Doctorado en Educación). Universidade Federal do Rio Grande do Norte de Brasil. Natal, Brasil. Recuperado de http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/handle/123456789/14538?mode=full

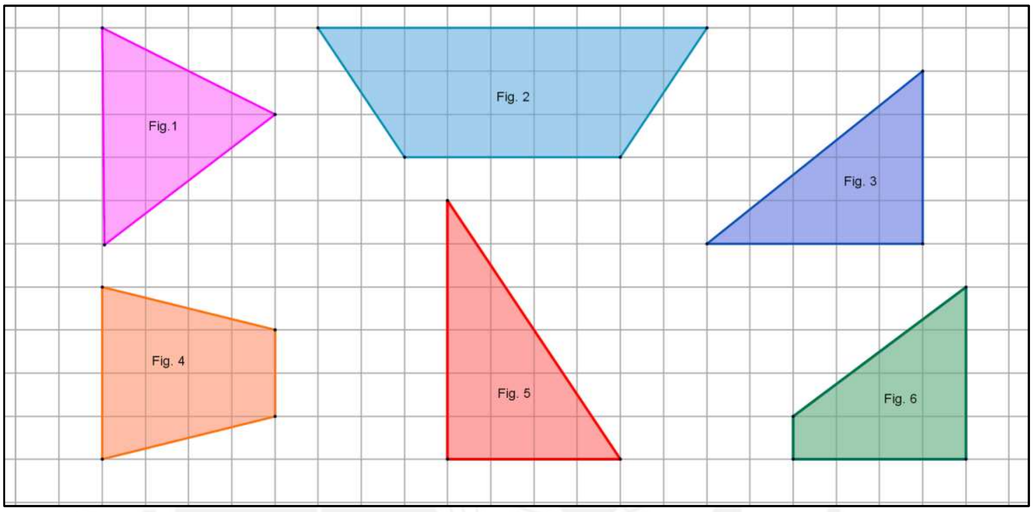
ANEXOS

ACTIVIDAD 1: TRABAJEMOS CON UNIDADES DE ÁREA

ESTUDIANTE: ____

GRADO Y SECCIÓN: _________ **EDAD:** _________ **AÑOS** **FECHA**: _______________

Se sabe que cada cuadrado ☐ de la cuadrícula de abajo tiene una unidad de área (1 u.a.).



Contesta:

a) ¿Cuántos cuadrados caben en cada figura de la cuadrícula?

Fig. 1		Fig. 4	
Fig. 2		Fig. 5	
Fig. 3		Fig. 6	

b) Entonces ¿cuántas unidades de área (u.a.) tiene cada figura?

Fig. 1		Fig. 4	
Fig. 2		Fig. 5	
Fig. 3		Fig. 6	

c) ¿Cuáles de las figuras de la cuadrícula tienen la misma medida de área? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 2: TRABAJEMOS CON EL GEOGEBRA

ESTUDIANTE: ____

GRADO Y SECCIÓN: _________ EDAD: _________ AÑOS FECHA: _______________

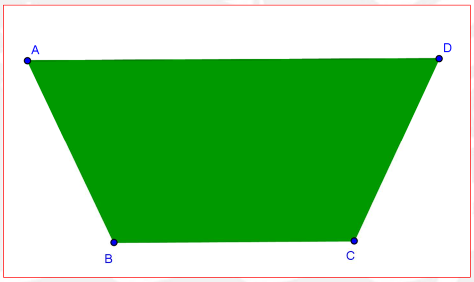
Parte A

a) Abra el archivo **trapecio1.ggb** y construya un triángulo con la misma medida de área del trapecio isósceles dado.

b) Utilice la herramienta área para obtener la medida del área del trapecio dado y del triángulo construido.

c) Arrastre el vértice A del trapecio ¿qué sucede con las medidas de las áreas? Explique.

d) Guarde el archivo con **Primer Nombre_Apellido Paterno_A**



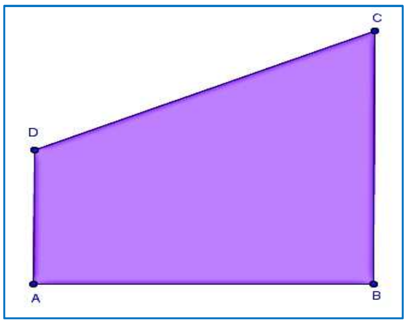
Parte B

a) Abra el archivo **trapecio2.ggb** y construya un triángulo con la misma medida de área del trapecio isósceles dado.

b) Utilice la herramienta área para obtener la medida del área del trapecio dado y del triángulo construido.

c) Arrastre el vértice C del trapecio ¿qué sucede con las medidas de las áreas?. Explique.

d) Guarde el archivo con **Primer Nombre_Apellido Paterno_B**



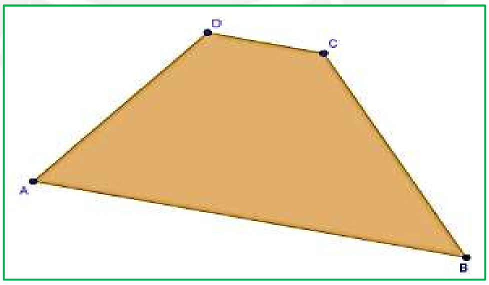
Parte C

a) Abra el archivo **trapecio3.ggb** y construya un triángulo con la misma medida de área del trapecio isósceles dado.

b) Utilice la herramienta área para obtener la medida del área del trapecio dado y del triángulo construido.

c) Arrastre el vértice B del trapecio ¿qué sucede con las medidas de las áreas?. Explique.

d) Guarde el archivo con **Primer Nombre_Apellido Paterno_C**



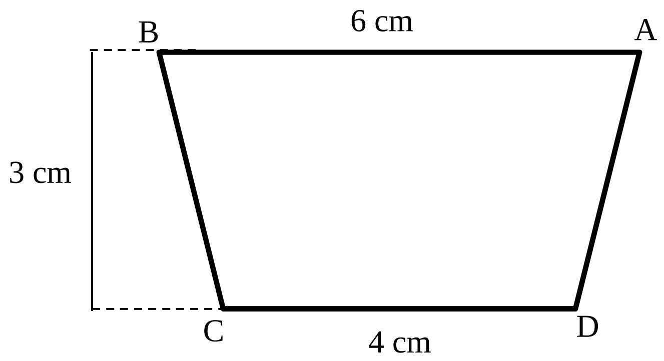
ACTIVIDAD 3: HALLEMOS LA MEDIDA DEL ÁREA

ESTUDIANTE: ____

GRADO Y SECCIÓN: _______ EDAD: _________ AÑOS FECHA: _________

Halle usted la medida del área del siguiente trapecio isósceles de dos maneras diferentes.

Primera solución:



Segunda solución: