

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

**Análisis estático lineal de pórticos de concreto armado mediante el
método de los elementos de contorno**

**Tesis para optar el Grado de Magíster, que presenta el Ingeniero
Civil**

GILMER CHALLCO MAMANI

ASESOR: Mag. DANIEL ROBERTO QUIUN WONG

Lima, noviembre de 2015

INDICE

RESUMEN

INTRODUCCIÓN

CAPITULO 1. ASPECTOS PRELIMINARES 1

| | | |
|--------|--|---|
| 1.1. | INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1.2. | OBJETIVOS Y JUSTIFICACIÓN | 1 |
| 1.3. | ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO | 1 |
| 1.4. | ESTADO DEL ARTE | 2 |
| 1.4.1. | <i>Antecedentes</i> | 2 |
| 1.4.2. | <i>Método de los elementos de contorno (MEC)</i> | 3 |
| 1.4.3. | <i>Solución fundamental</i> | 4 |
| 1.4.4. | <i>Ecuación integral</i> | 4 |

CAPITULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE VIGAS Y ECUACIONES INTEGRALES DE VIGAS 5

| | | |
|--------|--|----|
| 2.1. | INTRODUCCIÓN | 5 |
| 2.2. | PRELIMINARES DE MATEMÁTICAS | 5 |
| 2.2.1. | <i>Operador adjunto y adjunto propio</i> | 5 |
| 2.2.2. | <i>La función delta de Dirac</i> | 7 |
| 2.2.3. | <i>La función delta de Dirac y la función Heaviside</i> | 7 |
| 2.2.4. | <i>La función Green para problemas con valores en la frontera</i> | 9 |
| 2.2.5. | <i>Solución fundamental de ecuaciones diferenciales ordinarias</i> | 9 |
| 2.3. | FUNDAMENTOS DE VIGAS SUJETAS A TENSIÓN | 11 |
| 2.3.1. | <i>Descripción cinemática</i> | 11 |
| 2.3.2. | <i>Campo de deformaciones</i> | 12 |
| 2.3.3. | <i>Campo de esfuerzos</i> | 12 |
| 2.3.4. | <i>Ley constitutiva</i> | 12 |
| 2.3.5. | <i>Ecuación de equilibrio</i> | 13 |
| 2.3.6. | <i>Ecuación gobernante</i> | 13 |
| 2.3.7. | <i>Ecuación integral para vigas sujetas a tensión</i> | 13 |
| 2.4. | FUNDAMENTOS DE VIGAS SOMETIDAS A TORSIÓN | 15 |
| 2.4.1. | <i>Descripción cinemática</i> | 16 |
| 2.4.2. | <i>El campo de deformaciones</i> | 17 |
| 2.4.3. | <i>El campo de esfuerzos</i> | 18 |
| 2.4.4. | <i>Ley constitutiva</i> | 19 |
| 2.4.5. | <i>Ecuación de equilibrio</i> | 20 |
| 2.4.6. | <i>Ecuación gobernante</i> | 20 |
| 2.4.7. | <i>Ecuación integral para vigas sometidas a torsión</i> | 20 |
| 2.5. | FUNDAMENTOS DE VIGAS SOMETIDAS A FLEXIÓN | 22 |
| 2.5.1. | <i>Descripción cinemática</i> | 22 |
| 2.5.2. | <i>El campo de deformaciones</i> | 23 |
| 2.5.3. | <i>El campo de esfuerzos</i> | 23 |
| 2.5.4. | <i>Ley constitutiva</i> | 24 |
| 2.5.5. | <i>Ecuación de equilibrio</i> | 24 |

| | | |
|--|--|-----------|
| 2.5.6. | <i>Ecuación gobernante</i> | 25 |
| 2.5.7. | <i>Ecuaciones integrales de vigas</i> | 25 |
| CAPITULO 3. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LOSAS Y ECUACIONES INTEGRALES DE LOSAS | | 32 |
| 3.1. | INTRODUCCIÓN | 32 |
| 3.2. | FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA TEORÍA DE LOSAS | 32 |
| 3.2.1. | <i>Ley constitutiva</i> | 36 |
| 3.2.2. | <i>Relación deformación-desplazamiento para losas y suposiciones cinemáticas</i> | 38 |
| 3.2.3. | <i>Esfuerzos resultantes y pares de deformación</i> | 41 |
| 3.2.4. | <i>Ecuación gobernante</i> | 44 |
| 3.3. | ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA LOSAS | 47 |
| 3.4. | LAS CONDICIONES DE CONTORNO | 50 |
| 3.5. | FORMULACIÓN DIRECTA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA LOSAS | 53 |
| 3.5.1. | <i>Identidad de Rayleigh-Green</i> | 53 |
| 3.5.2. | <i>La solución fundamental</i> | 55 |
| 3.5.3. | <i>La representación integral de la solución</i> | 58 |
| 3.5.4. | <i>Ecuaciones integrales de contorno</i> | 60 |
| 3.5.5. | <i>Esfuerzos resultantes</i> | 68 |
| 3.6. | SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DE CONTORNO | 70 |
| 3.6.1. | <i>Método de los elementos de contorno con elementos constantes</i> | 70 |
| 3.6.2. | <i>Evaluación de las integrales de línea</i> | 73 |
| 3.6.3. | <i>Evaluación de las integrales de superficie</i> | 73 |
| CAPITULO 4. METODOLOGÍA PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN LA INGENIERÍA ESTRUCTURAL | | 75 |
| 4.1. | INTRODUCCIÓN | 75 |
| 4.2. | FASES | 75 |
| 4.2.1. | <i>Preprocesamiento</i> | 75 |
| 4.2.2. | <i>Procesamiento</i> | 76 |
| 4.2.3. | <i>Postprocesamiento</i> | 76 |
| CAPITULO 5. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO | | 79 |
| 5.1. | INTRODUCCIÓN | 79 |
| 5.2. | APLICACIÓN EN PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES | 79 |
| 5.2.1. | <i>Viga simple empotrada</i> | 79 |
| 5.2.2. | <i>Viga continua</i> | 81 |
| 5.2.3. | <i>Pórtico simple</i> | 84 |
| 5.2.4. | <i>Parrilla empotrada en los extremos</i> | 87 |
| 5.1. | APLICACIÓN EN PROBLEMAS BIDIMENSIONALES | 91 |
| 5.2.1. | <i>Losa cuadrada empotrada en sus bordes</i> | 91 |
| CAPITULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES | | 95 |
| 6.1. | CONCLUSIONES | 95 |
| 6.2. | RECOMENDACIONES | 95 |

| | |
|---|-----------|
| ANEXO A: DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA MBEM EN MATLAB | 98 |
| ANEXO B: CÓDIGO DE PROGRAMA MBEM PARA EL ANÁLISIS DE LOSAS | 99 |



RESUMEN

El método de elementos de contorno (MEC) es una herramienta numérica para la resolución de problemas de ingeniería, y en particular para la solución de problemas de análisis estático lineal de pórticos sometidos a diferentes configuraciones de cargas y condiciones de borde; el pórtico es una estructura conformada por vigas, columnas y losas.

La formulación del MEC para el análisis del comportamiento de vigas y losas se inicia con la aplicación de la teoría de elasticidad y resistencia de materiales, para obtener las ecuaciones gobernantes, seguidamente se obtiene las ecuaciones integrales y finalmente se resuelve numéricamente las ecuaciones integrales.

La implementación de un código computacional facilita los cálculos numéricos, por lo que se desarrolla el código de programa denominado MBEM en el lenguaje de programación Matlab, en base a las expresiones mostradas a lo largo del presente trabajo, el cual sirve para el análisis estático lineal de losas.

El MEC es una herramienta robusta para el análisis de losas porque reduce el número de elementos durante la descomposición de la estructura; además, reduce recursos computacionales y tiempo de análisis. Por otra parte, el análisis de vigas mediante el método prescrito es una alternativa frente los métodos clásicos.

INTRODUCCIÓN

El pórtico es una estructura conformada por vigas y columnas, que son simplificados por modelos unidimensionales. Las vigas son estudiadas considerando la teoría de Euler-Bernoulli. Por otra parte, la losa es muy empleada en la ingeniería estructural, la cual se analiza en base a la teoría de Kirchhoff-Love.

Primeramente, se obtiene las ecuaciones diferenciales que relacionan las propiedades mecánicas del material, las fuerzas y los desplazamientos, las cuales son denominadas ecuaciones gobernantes; además, es necesario comprender lo siguiente: (1) la descripción cinemática representa la configuración del cuerpo mediante rotaciones y traslaciones, (2) el campo de deformaciones es la configuración de cambio de forma, (3) el campo de esfuerzos es la configuración de la distribución de los esfuerzos internos y (4) la ley constitutiva establece la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones.

Seguidamente, se obtiene las ecuaciones integrales a partir de las ecuaciones diferenciales, en base al empleo de la identidad de Rayleigh-Green que es la expresión matemática del teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti; la cual relaciona dos sistemas, el primero representa las condiciones reales de carga y el segundo representa la solución fundamental, este último es el comportamiento de una estructura sometida a una carga unitaria.

Asimismo, el análisis estructural mediante el MEC consiste en descomponer el contorno de la estructura en elementos y luego se forma un sistema de ecuaciones que se organiza en forma matricial y se soluciona numéricamente. Luego, se obtienen los desplazamientos en los grados de libertad mediante ecuaciones integrales de contorno. Por último, se obtienen los desplazamientos y las fuerzas internas en los puntos de interés del dominio.

Finalmente, se implementa un código computacional para aplicar el MEC al estudio del comportamiento de elementos estructurales tipo losas. Se emplea el entorno Matlab conjuntamente con el lenguaje de programación M para la implementación del código señalado.

CAPITULO 1. ASPECTOS PRELIMINARES

1.1. Introducción

El método de los elementos de contorno viene siendo aplicado en diversas áreas de la ingeniería, siempre que brinda bondades al realizar la descomposición de la estructura, lo cual conlleva al empleo de menor memoria computacional; y ofrece buenos resultados especialmente para el análisis de losas.

En ese contexto, se desarrolla la formulación del método de los elementos de contorno para la resolución de elementos estructurales unidimensionales (vigas y columnas) y bidimensionales (losas), para posteriormente interpretar el comportamiento en términos de desplazamientos y fuerzas.

1.2. Objetivos y justificación

Objetivo general:

Analizar el comportamiento estático lineal de elementos estructurales de pórticos de concreto armado mediante el método de los elementos de contorno.

Objetivos específicos:

- A) Formular e implementar un código computacional del método de los elementos de contorno para barras y losas.
- B) Aplicar el método de los elementos de contorno para el análisis estructural estático lineal de un pórtico compuesto por losas, vigas y columnas.
- C) Interpretar y comparar los resultados obtenidos mediante el método de los elementos de contorno con los obtenidos mediante soluciones exactas.

Justificación:

El presente trabajo pretende difundir la metodología del método de los elementos de contorno para el análisis estático lineal de estructuras de concreto armado tipo pórtico, el cual está conformado principalmente por tres elementos estructurales: vigas, columnas y losas. A fin de tener mayor conocimiento de las bondades que tiene el método numérico en mención.

1.3. Organización del trabajo

En el capítulo 1 se exponen el estado de arte y antecedentes del método de los elementos de contorno; además, se describe definiciones relacionados con el método numérico en mención.

En el capítulo 2 se describen los aspectos preliminares de matemáticas y la teoría clásica de la viga de Bernoulli; asimismo, se revisa la descripción cinemática, ley

constitutiva, ecuación de equilibrio y la ecuación gobernante de las vigas sometidas a fuerzas axiales, torsión y flexión. Posteriormente, se determina las ecuaciones integrales para vigas a partir de la ecuación gobernante empleando el método de integración por partes y el teorema de funciones de residuos ponderados (solución fundamental de la ecuación gobernante de la viga). Finalmente, se emplea el método de los elementos de contorno para determinar los desplazamientos y las fuerzas internas en el dominio de la viga.

En el capítulo 3 se describe la teoría de losas, considerando el comportamiento elástico conforme a las hipótesis de Kirchhoff-Love; asimismo, se revisa la descripción cinemática, ley constitutiva, ecuación de equilibrio y la ecuación gobernante de las losas. Seguidamente, se determina la ecuación integral a partir del teorema de Betti y la solución fundamental de la ecuación gobernante. Finalmente, se emplea el método de los elementos de contorno para determinar los desplazamientos y fuerzas internas en el dominio de la losa.

En el capítulo 4 se expone la metodología del método de los elementos de contorno para la resolución de problemas en la ingeniería estructural.

En el capítulo 5 se aplica el método de los elementos de contornos a problemas de vigas sometidas a fuerzas axiales, torsión y flexión; además, se expone la aplicación del método para el análisis estructural de losas.

Finalmente, en el capítulo 6 se exponen las conclusiones y recomendaciones recogidas de la elaboración del presente trabajo.

1.4. Estado del arte

En los últimos años la mecánica teórica y aplicada ha experimentado un gran desarrollo, principalmente debido al perfeccionamiento de las computadoras y la disponibilidad de nuevos métodos de cálculo, dando paso a la denominada mecánica computacional, esta nueva disciplina combina la mecánica teórica y aplicada con los métodos numéricos y la informática.

Los métodos numéricos se emplean para resolver problemas de ingeniería que son formulados en base a ecuaciones diferenciales o ecuaciones integrales. Los métodos numéricos con mayor alcance en las diferentes áreas de la ingeniería se detallan en la fig. 1.1.

1.4.1. Antecedentes

En el desarrollo del denominado método de “elementos de contorno” tenemos como precursores a Somigliana (1885), Fredholm (1903), Kupradze (1956); igualmente, Jaswon y Symm (1967) desarrollaron el método de ecuaciones integrales de contorno para problemas de potencial eléctrico usando la tercera identidad de Green (Jaswon y Symm, 1977).

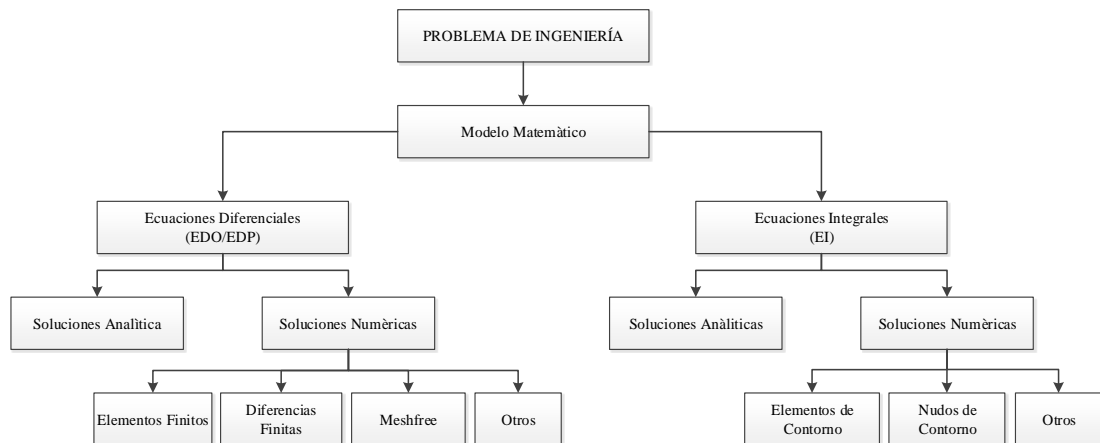


Fig. 1.1 Dos rutas diferentes en la mecánica computacional (Liu, 2009)

A partir de los trabajos mencionados precedentemente, Rizzo (1967) y Cruse (1969) desarrollaron técnicas para la solución de ecuaciones integrales de contorno de problemas dimensionales y tridimensionales de elastostática usando la identidad de Somigliana, y presentaron una formulación para elastodinámica empleando la transformada de Laplace (Gaul et. al, 2003).

El término “método de los elementos de contorno” se utilizó por primera vez en 1977 en publicaciones de Banerjee y Butterfield (1977) y Brebbia y Dominguez (1977). Al año siguiente, Brebbia publicó el primer libro sobre el método de los elementos de contorno (Cheng et. al, 2005).

Seguidamente, en 1980 surgieron varias actividades de investigación sobre el método de los elementos de contorno, las principales aplicaciones fueron en la mecánica de sólidos, elasticidad, acústica y electromagnetismo. Fue ampliamente aplicado porque posee ciertas ventajas, las cuales son: simplicidad, menor empleo de mallas, menor recurso computacional y mayor exactitud para modelar problemas bidimensionales y tridimensionales (Boresi et. al, 2011).

Se puede destacar diversas investigaciones realizadas hasta la actualidad, como las de Venturini (1983) que empleó el método de los elementos de contorno en geomecánica, Kichimoto et. al (1983) realizaron el análisis de mecánica de fractura mediante combinación de elementos de contorno y elementos finitos, Tanaka (1985) empleó el método para estructuras de placa sujetas a cargas arbitrarias y Ciskowski (1991) realizó avances en acústica (Brebbia, 1998). Más recientemente, Pereira et. al (2012) desarrollaron una formulación del método en mención para el análisis dinámico de losas gruesas.

1.4.2. Método de los elementos de contorno (MEC)

El método de los elementos de contorno (MEC) es una técnica numérica para resolver ecuaciones lineales en derivadas parciales que son formuladas como ecuaciones

integrales. Para el estudio de problemas de ingeniería el método mencionado considera el contorno para la descomposición; pero, no el dominio. Por tanto, se puede convertir problemas bidimensionales en unidimensionales (Wolf, 2003).

1.4.3. Solución fundamental

La solución fundamental para un operador diferencial con derivadas parciales L es una formulación en el lenguaje de la teoría de distribuciones proveniente de la antigua idea de la función de Green (Kytke, 1966). En términos de la función delta de Dirac $\delta(x)$, una solución fundamental F es la solución de la ecuación no homogénea.

$$LF = \delta(x)$$

Donde F es la distribución de Schwartz.

Este concepto fue ampliamente conocido para el Laplaciano en dos y tres dimensiones, fue investigado por Marcel Riesz. La existencia de la solución fundamental para cualquier operador de coeficientes constantes fue demostrada por Malgrange y Ehrenpreis.

1.4.4. Ecuación integral

En matemática, una ecuación integral es una ecuación en la cual la función incógnita aparece dentro de una integral. Existe una conexión estrecha entre las ecuaciones integrales y las ecuaciones diferenciales. Asimismo, algunos problemas de ingeniería pueden formularse con ecuaciones diferenciales o equivalentemente como ecuaciones integrales.

CAPITULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE VIGAS Y ECUACIONES INTEGRALES DE VIGAS

2.1. Introducción

Una viga es definida como una estructura que tiene una de las dimensiones mucho más larga que las otras dos. El eje de la viga está definida en la dirección más larga, y una sección transversal normal a este eje es asumido para resolver variaciones a lo largo de la luz o longitud de la viga. Las estructuras en ingeniería civil son un ensamblaje o red de vigas con variadas secciones transversales.

La mecánica de sólidos comúnmente referido a “teoría de vigas”, juega un papel importante en el análisis estructural porque ayuda al diseñador analizar numerosas estructuras. Los modelos de viga son generalmente empleados para realizar prediseños, porque proveen resultados significativos del comportamiento de la estructura. El modelo es útil cuando se necesita validar soluciones puramente computacionales.

Se desarrollaron varias teorías basadas en hipótesis y niveles de exactitud. Una de las teorías comúnmente empleadas es la teoría descrita por Euler y Bernoulli. La principal hipótesis de la teoría señala que la sección transversal de la viga es infinitamente rígida en su propio plano y no existe deformaciones en el plano de la sección transversal. Consecuentemente, el desplazamiento en el plano puede ser representado simplemente por dos cuerpos rígidos en traslación y un cuerpo rígido en rotación. Además, la sección transversal permanece plana y perpendicular al eje de la viga deformada.

2.2. Preliminares de matemáticas

2.2.1. Operador adjunto y adjunto propio

El operador diferencial k -ésimo está definido por la ecuación (2.2.1). Donde R^n denota el espacio Euclidiano de espacio n y el grado $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ son números enteros no negativos múltiplos de los índices de dimensión n ; además, $|k| = k_1 + \dots + k_n$.

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \quad (2.2.1)$$

Además, si una componente de k es cero, la derivada parcial con respecto a esa variable es omitida, entonces se obtiene la ecuación (2.2.2).

$$D^k u(x) = \frac{\partial^{|k|} u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \quad (2.2.2)$$

El operador diferencial lineal L de orden p en n variables independientes x_1, \dots, x_n se denota por la ecuación (2.2.3).

$$L \equiv L(D) = \sum_{|k| \leq p} a_k(x) D^k \quad (2.2.3)$$

Donde los coeficientes $a_k(x) = a_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ son funciones arbitrarias.

Para el operador diferencial lineal L (2.2.3), se designa el operador adjunto L^* , que se define por la ecuación (2.2.4).

$$L^*v = \sum_{|k| \leq p} (-1)^k D^k (a_k v) \quad (2.2.4)$$

Si $a_k(x) = a_k$ son constantes, luego $L^*(D) = L(D)$. El operador se denomina adjunto propio sí $L = L^*$.

Considerar las ecuaciones (2.2.5) y (2.2.6), las cuales representan un problema con valores en la frontera:

$$L(D)u(x) = f(x) \quad \text{en } \Omega \subset R^n \quad (2.2.5)$$

$$B(u) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega = \Gamma \quad (2.2.6)$$

Donde la ecuación (2.2.6) representa las condiciones de frontera.

La ecuación (2.2.7) representa el producto interno de dos funciones f_1 y f_2 en el espacio Euclidiano $\Omega \subset R^n$.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} f_1(x) f_2(x) d\Omega \quad (2.2.7)$$

Seguidamente, mediante la integración por partes, se cambia todas las diferenciales actuantes en el dominio Ω en función u a la función w , se obtiene (2.2.8).

$$\langle Lu, w \rangle = \langle u, L^*w \rangle + \int_{\Gamma} [E(w)N(u) - N(u)E(w)] d\Gamma \quad (2.2.8)$$

La ecuación (2.2.7) representa la formulación de variaciones de la ecuación (2.2.5), donde $E(u)$ genera las condiciones de frontera esenciales, mientras $N(u)$ genera las condiciones de frontera no esenciales.

Después, la solución fundamental $u^*(x, \xi)$ es el resultado de (2.2.5) para el caso especial cuando $f(x)$ es reemplazado por $\delta(x, \xi)$, denominada la función delta de Dirac.

$$L(D)u^*(x, \xi) = \delta(x, \xi) \quad (2.2.9)$$

La función $u^*(x, \xi)$ es única solamente para una función $w^*(x, \xi)$ que es la solución de la ecuación homogénea $L(D)w^* = 0$, la función $u^* + w^*$ es también una solución fundamental para el operador $L(D)$:

$$L(D)(u^*(x, \xi) + w^*(x, \xi)) = L(D)u^*(x, \xi) + L(D)w^*(x, \xi) = \delta(x, \xi) \quad (2.2.10)$$

2.2.2. La función delta de Dirac

Esta función simbólica o distribución tiene las siguientes propiedades básicas:

$$\delta(x, \xi) = 0 \quad \text{para } x \neq \xi \quad (2.2.11)$$

En general esta función de las distancias entre dos puntos x y ξ :

$$\delta(x, \xi) = \delta(x - \xi) = \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \dots \delta(x_3 - \xi_3) \quad (2.2.12)$$

$$\int_{\Omega} \Phi(x) \delta(x, \xi) = \Phi(\xi) \quad \text{para } \xi \in \Omega \quad (2.2.13)$$

Para una función continua $\Phi(x)$. La ecuación (2.2.13) es la propiedad de selección que significa que la función δ cuando participa en un proceso de integración con otra función, selecciona el valor de la otra función en el punto donde $\delta(x - \xi)$ tiene argumento cero. Para el caso especial $\Phi(x) \equiv 1$, la ecuación (2.2.13) resulta:

$$\int_{\Omega} \delta(x, \xi) d\Omega = \int_{\Omega} \delta(x - \xi) = 1 \quad \text{para } \xi \in \Omega \quad (2.2.14)$$

2.2.3. La función delta de Dirac y la función Heaviside

La función delta de Dirac en R^1 puede ser manejable algebraicamente como si fuera una función ordinaria; pero, siempre debe interpretarse toda ecuación que contenga $\delta(x)$ como si la función es multiplicada por una función continua $f(x)$. La integral de la función en un intervalo $[a, b]$ es:

$$\int_a^b \delta(x - \xi) f(x) dx = \begin{cases} f(\xi) & \text{para } \xi \in [a, b] \\ 0 & \text{para } \xi \notin [a, b] \end{cases} \quad (2.2.15)$$

Esto es válido solo para funciones ordinarias, si se considera $g(x) = (x - \xi)f(x)$, se obtiene:

$$\int_a^b \delta(x - \xi) g(x) dx = g(\xi) = 0 \quad \text{para } \xi \in [a, b] \quad (2.2.16)$$

Similarmente se tiene:

$$w(x)\delta(x-\xi)=0 \quad \text{si} \quad w(x=\xi)=0 \quad (2.2.17)$$

Además, las técnicas familiares de integración tal como integración por partes y sustitución, pueden ser aplicadas a integrales con la función delta. Considerar:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(g(x))f(x)dx \quad (2.2.18)$$

Donde $f(x)$ es una función arbitraria continua y $g(x)$ es una función monótonica. Escribir $y = g(x)$ entonces tomando la derivada $dy = g'(x)dx$. Reemplazar en la integral (2.2.18), se tiene:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(g(x))f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)\psi(y)dy = \psi(0) = \frac{f(\xi)}{|g'(\xi)|} \quad (2.2.19)$$

Consecuentemente, si se tiene $g(x=\xi)=0$:

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x-\xi)}{|g'(\xi)|} \quad (2.2.20)$$

Como un caso especial de la ecuación (2.2.20) se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax-b)f(x)dx = \frac{f\left(\frac{b}{a}\right)}{|a|} \quad (2.2.21)$$

Por integración por partes se obtiene:

$$\int_a^b \frac{\partial \delta(x-\xi)}{\partial x} f(x)dx = -\int_a^b \delta(x-\xi)f'(x)dx = -f'(\xi) \quad \text{para} \quad \xi \in [a,b] \quad (2.2.22)$$

Al lado de la función de delta de Dirac puede ser derivado la función unitaria de Heaviside H , definido como:

$$H(x-\xi) = \begin{cases} 1, & x > \xi \\ 0, & x < \xi \end{cases} \quad (2.2.23)$$

Aplicar integración por partes ($a < \xi < b$) para obtener:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial H(x-\xi)}{\partial x} f(x)dx &= [H(x-\xi)f(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b H(x-\xi)f'(x)dx \\ &= f(b) - \int_{\xi}^b f'(x)dx \\ &= f(b) - (f(b) - f(\xi)) = f(\xi) \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

La ecuación (2.2.24) comparamos con la ecuación (2.2.15), se obtiene:

$$\frac{\partial H(x-\xi)}{\partial x} = \delta(x-\xi) \quad (2.2.25)$$

2.2.4. La función Green para problemas con valores en la frontera

Un problema con valores en la frontera se describe por una ecuación diferencial:

$$L(D)u(x) = f(x) \quad \text{en } \Omega \subset R^n \quad (2.2.26)$$

Asociado a condiciones de frontera, en $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$\begin{aligned} E(u(x)) &= \bar{u}(x) \quad \text{para } x \in \Gamma_1 \\ N(u(x)) &= \bar{q}(x) \quad \text{para } x \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Denominamos función de Green a $G^*(x, \xi)$ de un problema con valores en la frontera está definido como una solución fundamental:

$$L(D)G^*(x, \xi) = \delta(x, \xi) \quad (2.2.28)$$

La cual satisface la condición de la frontera que son prescritos en el problema actual:

$$\begin{aligned} E(G^*(x, \xi)) &= 0 \quad \text{para } x \in \Gamma_1 \\ E(G^*(x, \xi)) &= 0 \quad \text{para } x \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

2.2.5. Solución fundamental de ecuaciones diferenciales ordinarias

Consideremos una solución fundamental de una ecuación diferencial ordinaria de orden n con coeficientes constantes:

$$L(D)u^*(x, \xi) = \frac{d^n u^*}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u^*}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{du^*}{dx} + a_n u^* = \delta(x, \xi) \quad (2.2.30)$$

Y u^* está dado por:

$$u^*(x, \xi) = H(x-\xi)w(x, \xi) \quad (2.2.31)$$

Donde $w(x, \xi) \in C^n(R^1)$ satisface la ecuación diferencial homogénea $L(D)w(x, \xi) = 0$ con las siguientes condiciones:

$$w(x = \xi) = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=\xi} = \dots = \frac{d^{n-2} w}{dx^{n-2}} \Big|_{x=\xi} = 0, \quad \frac{d^{n-1} w}{dx^{n-1}} \Big|_{x=\xi} = 1 \quad (2.2.32)$$

Mediante las ecuaciones (2.2.25) y (2.2.16) se obtiene:

$$\frac{du^*(x, \xi)}{dx} = H(x - \xi)w'(x, \xi), \dots, \frac{d^{n-1}u^*(x, \xi)}{dx^{n-1}} = H(x - \xi)w^{(n-1)}(x, \xi) \quad (2.2.33)$$

Y

$$\frac{d^n u^*(x, \xi)}{dx^n} = \delta(x - \xi) + H(x - \xi)w^{(n)}(x, \xi) \quad (2.2.34)$$

De las reglas de las ecuaciones (2.2.20) y las condiciones (2.2.21), las soluciones fundamentales de los operadores $L_1 = \frac{d}{dx} + a$, $L_2 = \frac{d^2}{dx^2} + a^2$ y $L_3 = \frac{d^3}{dx^3} + a^3$ están dadas por:

$$u_1^*(x, \xi) = H(x - \xi)e^{-a(x - \xi)} \quad (2.2.35)$$

Donde para $n = 1$, $w_1 = e^{-a(x - \xi)}$ que satisface la ecuación diferencial homogénea $\frac{dw}{dx} + aw = 0$ y las condiciones $\left. \frac{d^0 w}{dx^0} \right|_{x=\xi} = w(x = \xi) = 1$, mientras que para $n = 2$ y $n = 3$ las soluciones fundamentales son las ecuaciones (2.2.36) y (2.2.37), respectivamente.

$$u_2^*(x, \xi) = H(x - \xi) \frac{\sin a(x - \xi)}{a} \quad (2.2.36)$$

$$u_3^*(x, \xi) = H(x - \xi) \frac{\sinh a(x - \xi)}{a} \quad (2.2.37)$$

Cuando la constante α , de los operadores L_2 y L_3 , tiende a cero se obtiene el operador L_{bar} de la barra de constante de rigidez EA :

$$L_{bar}u(x) = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \frac{p(x)}{EA} = f(x) \quad (2.2.38)$$

La solución fundamental para la solución de $f(x) = \delta(x - \xi)$ se estima considerando el límite:

$$u^*(x, \xi) = H(x - \xi) \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a(x - \xi)}{a} = (x - \xi)H(x - \xi) \quad (2.2.39)$$

La solución fundamental del operador L_{bar} , considerando la ecuación (2.2.38):

$$\begin{aligned} u_{bar}^*(x, \xi) &= (x - \xi)H(x - \xi) - \frac{1}{2}(x - \xi) = \frac{1}{2}(x - \xi)[2H(x - \xi) - 1] \\ &= \frac{1}{2}(x - \xi) \operatorname{sgn}(x - \xi) = \frac{|x - \xi|}{2} = \frac{r}{2} \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

Donde $\text{sgn}(x-\xi)=1$ para $x > \xi$ y $\text{sgn}(x-\xi)=-1$ para $x < \xi$. Por lo tanto $(x-\xi)\delta(x-\xi)=0$ y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u_{bar}^*(x, \xi) &= \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial x} = H(x-\xi) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-\xi)[2\delta(x-\xi)] \\ &= H(x-\xi) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{sgn}(x-\xi) \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{bar}^* = \delta(x-\xi) \quad (2.2.42)$$

La solución fundamental de la ecuación diferencial de una viga con constante de rigidez a flexión EI .

$$L_{viga} u(x) = \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} \quad (2.2.43)$$

Es:

$$u_{viga}^*(x, \xi) = \frac{r^3}{12} \quad (2.2.44)$$

2.3. Fundamentos de vigas sujetas a tensión

Considerar una viga sujeta a carga distribuida axial $p_1(x_1)$, y una carga axial concentrada P_1 , aplicada en el extremo de la viga, por ejemplo en la fig. 2.3.1. La viga se deforma, resultando el desplazamiento igual a $\bar{u}(x_1)$. Cuando solamente se aplican fuerzas axiales a las vigas, la estructura es llamada barra en vez de viga.

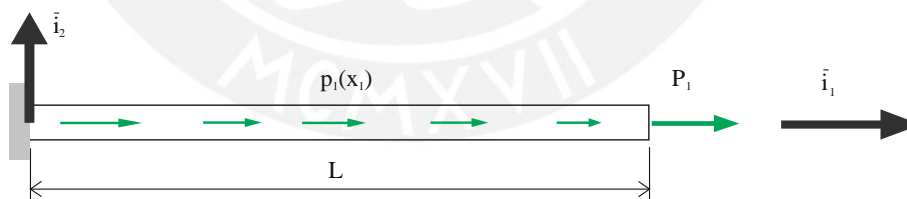


Fig. 2.3.1 Viga sujeta a carga axial

2.3.1. Descripción cinemática

Según la hipótesis de Euler-Bernoulli es razonable asumir que la carga axial cause desplazamiento axial de la sección. Los desplazamientos descritos en la fig. 2.3.2 se reducen a la ecuación (2.3.1).

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= \bar{u}_1(x_1) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

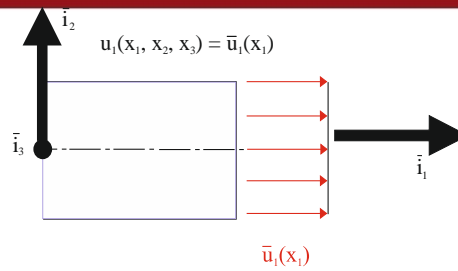


Fig. 2.3.2 Desplazamiento distribuido axial

2.3.2. Campo de deformaciones

Y la correspondiente deformación axial es:

$$\varepsilon_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{\varepsilon}_1(x_1) \quad (2.3.2)$$

La deformación axial es uniforme sobre el área de la viga, tal como se muestra en la fig. 2.3.2.

2.3.3. Campo de esfuerzos

El esfuerzo que actúa en un elemento diferencial es de tipo axial. La convención de signos se muestra en la fig. 2.3.3.

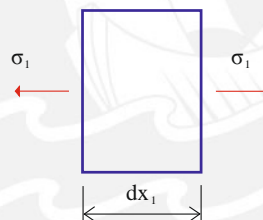


Fig. 2.3.3 Esfuerzos actuantes en un elemento diferencial a cargas axiales

2.3.4. Ley constitutiva

En este punto, se asume un comportamiento linealmente elástico, material isotrópico que obedece la ley de Hooke. Los esfuerzos actuante en el plano de la sección transversal, σ_2 y σ_3 , son pequeños tal que el esfuerzo axial $\sigma_2, \sigma_3 \ll \sigma_1$. Consecuentemente, los esfuerzos de la componente transversal son pequeños $\sigma_2 \approx 0$ y $\sigma_3 \approx 0$. Para el estado de esfuerzos expuesto, la ley generalizada de Hooke se reduce a:

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = E \bar{\varepsilon}_1(x_1) \quad (2.3.3)$$

La fuerza axial en la viga puede ser obtenida por introducción el esfuerzo distribuido axial.

$$N_1(x_1) = \int_A \sigma_1(x_1, x_2, x_3) dA = \left[\int_A E dA \right] \bar{\varepsilon}_1(x_1) = S \bar{\varepsilon}_1(x_1) \quad (2.3.4)$$

La rigidez axial de la viga es definida como:

$$S = \int_A EdA \tag{2.3.5}$$

Si la sección es de material homogéneo de módulo de elasticidad E , la rigidez de la sección viene a ser $S = EA$.

La relación (2.3.3) es la ley constitutiva de la viga a comportamiento axial. Esto expresa la proporcionalidad entre la fuerza axial y la deformación axial, con una constante de proporcionalidad llamada rigidez axial.

2.3.5. Ecuación de equilibrio

Para completar la formulación es necesario la ecuación de equilibrio. Se considera un elemento infinitesimal de la viga de longitud dx_1 , ver la fig. 2.3.4. En esta figura la fuerza axial $N_1(x_1)$ actúa en la sección transversal y en la dirección x_1 . Empleando una expansión de la serie de Taylor, la fuerza actuante en la sección transversal de ubicación $x_1 + dx_1$ se obtiene $N_1 + (dN_1 / dx_1)dx$, los términos restantes de la expansión son de orden superior.

Aplicando la primera condición de equilibrio de las fuerzas axiales, que se representan en la fig. 2.4.3, se tiene:

$$\frac{dN_1}{dx_1} = -p_1 \tag{2.3.6}$$

2.3.6. Ecuación gobernante

Finalmente, la ecuación gobernante del problema es obtenido reemplazando la ecuación (2.3.4) en la ecuación de equilibrio (2.3.6), se obtiene:

$$\frac{d}{dx_1} \left[S \frac{d\bar{u}_1(x_1)}{dx_1} \right] = -p_1(x_1) \tag{2.3.7}$$

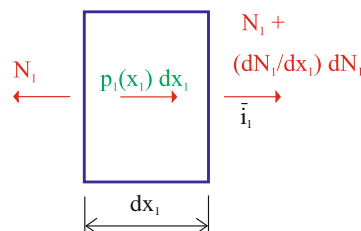


Fig. 2.3.4 Fuerza axial actuante en un elemento infinitesimal de la viga

2.3.7. Ecuación integral para vigas sujetas a tensión

Convertir la ecuación diferencial (2.3.7) a una ecuación integral para determinar las reacciones de la ecuación (2.3.7) para el desplazamiento axial $\bar{u}_1(x_1)$ de una barra

elástica con comportamiento elástico de longitud l y sección transversal A , sometida a una carga axial prescrita $p_1(x_1)$. Asimismo, la fuerza resultante $N_1(x_1)$ es linealmente relacionada al desplazamiento axial $\bar{u}_1(x_1)$, mediante la relación

$$N_1(x_1) = EA \frac{d\bar{u}_1(x_1)}{dx_1}.$$

La ecuación (2.3.7) es multiplicada por la solución fundamental $\bar{u}_1^*(x_1, \xi) = \frac{r}{2}$, considerada como una función de ponderación, y luego integrando en el dominio de la viga de $x_1 = a$ a $x_1 = b$, se obtiene:

$$\int_a^b \left(\frac{d^2 \bar{u}_1(x_1)}{dx_1^2} + \frac{p_1(x_1)}{EA} \right) \bar{u}_1^*(x_1, \xi) dx_1 = 0 \quad (2.3.8)$$

O

$$\int_a^b \frac{d^2 \bar{u}_1(x_1)}{dx_1^2} \bar{u}_1^*(x_1, \xi) dx_1 = - \int_a^b \frac{p_1(x_1)}{EA} \bar{u}_1^*(x_1, \xi) dx_1 \quad (2.3.9)$$

Ahora, el lado izquierdo de la ecuación (2.3.9) es integrado por partes, dos veces:

$$\int_a^b \frac{d^2 \bar{u}_1(x_1)}{dx_1^2} \bar{u}_1^*(x_1, \xi) dx_1 = \left[\frac{d\bar{u}_1(x_1)}{dx_1} \bar{u}_1^*(x_1, \xi) - \bar{u}_1(x_1) \frac{\partial \bar{u}_1^*(x_1, \xi)}{\partial x_1} \right]_a^b + \int_a^b \bar{u}_1(x_1) \frac{\partial^2 \bar{u}_1^*(x_1, \xi)}{\partial^2 x_1} dx_1 \quad (2.3.10)$$

Donde la segunda derivada de la solución fundamental es la función de Dirac $\delta(x_1, \xi)$ y la integral en dominio de $\xi \in [a, b]$ es:

$$\int_a^b \bar{u}_1(x_1) \frac{\partial^2 \bar{u}_1^*(x_1, \xi)}{\partial^2 x_1} dx_1 = \int_a^b \bar{u}_1(x_1) \delta(x_1, \xi) dx_1 = \bar{u}_1(\xi) \quad (2.3.11)$$

Por lo que a partir de las ecuaciones (2.3.11) y (2.3.10), la ecuación (2.3.9) se transforma en una ecuación integral:

$$- \int_a^b \frac{p_1(x_1)}{EA} \bar{u}_1^*(x_1, \xi) dx_1 = \left[\frac{d\bar{u}_1(x_1)}{dx_1} \bar{u}_1^*(x_1, \xi) - \bar{u}_1(x_1) \frac{\partial \bar{u}_1^*(x_1, \xi)}{\partial x_1} \right]_a^b + \bar{u}_1(\xi)$$

$$\bar{u}_1(\xi) = - \int_a^b \frac{p_1(x_1)}{EA} \bar{u}_1^*(x_1, \xi) dx_1 - \left[\frac{d\bar{u}_1(x_1)}{dx_1} \bar{u}_1^*(x_1, \xi) - \bar{u}_1(x_1) \frac{\partial \bar{u}_1^*(x_1, \xi)}{\partial x_1} \right]_a^b \quad (2.3.12)$$

La primera derivada de la solución fundamental está dada por:

$$\frac{\partial \bar{u}_1^*(x_1, \xi)}{\partial x_1} = H(x_1 - \xi) - \frac{1}{2} \quad (2.3.13)$$

Emplear (2.3.13) y $N_1(x_1) = EA \frac{d\bar{u}_1(x_1)}{dx_1}$, y se obtiene:

$$\bar{u}_1(\xi) = - \left[\frac{N_1(x_1)}{EA} \bar{u}_1^*(x_1, \xi) - \bar{u}_1(x_1) \frac{N_1^*(x_1, \xi)}{EA} \right]_a^b - \int_a^b \frac{p_1(x_1)}{EA} \frac{|x_1 - \xi|}{2} dx_1 \quad (2.3.14)$$

Reemplazar $\xi = a$ y $\xi = b$ en (2.3.14), obteniéndose:

$$\bar{u}_1(a) = - \frac{N_1(b)}{EA} \frac{|b-a|}{2} + \frac{\bar{u}_1(b)}{2} + \frac{\bar{u}_1(a)}{2} - \int_a^b \frac{p_1(x_1)}{2EA} |x_1 - a| dx_1 \quad (2.3.15)$$

$$\bar{u}_1(b) = \frac{N_1(a)}{EA} \frac{|a-b|}{2} + \frac{\bar{u}_1(b)}{2} + \frac{\bar{u}_1(a)}{2} - \int_a^b \frac{p_1(x_1)}{2EA} |x_1 - b| dx_1 \quad (2.3.16)$$

Las expresiones (2.3.15) y (2.3.16) se pueden ensamblar en forma matricial, y se obtiene (2.3.17).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{l}{S} \\ -1 & -\frac{l}{S} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(a) \\ N_1(a) \\ u_1(b) \\ N_1(b) \end{bmatrix} = - \frac{1}{EA} \int_a^b \begin{bmatrix} (x_1 - a) p_1(x_1) \\ (b - x_1) p_1(x_1) \end{bmatrix} dx_1 \quad (2.3.17)$$

2.4. Fundamentos de vigas sometidas a torsión

Considerar una viga de longitud l , homogénea, sólida o cilindro hueco sujeto a torsión en su extremo Q_1 , de igual magnitud y dirección opuesta, como se representa en la fig.

2.4.1. La sección transversal del cilindro puede ser un círculo de radio R , o un círculo anular de radio interno y externo R_i y R_o , respectivamente.

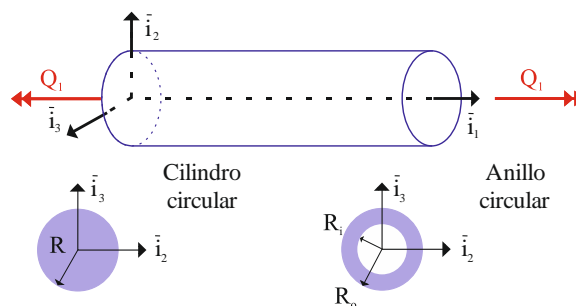


Fig. 2.4.1 Viga circular sujeta a torsión en sus extremos

Este problema es caracterizado por dos tipos de simetría. Primero, la simetría respecto al eje \bar{i}_1 , una rotación del cilindro o tubo alrededor del eje \bar{i}_1 no cambia la estructura ni la carga; por tanto, la solución debe permanecer sin cambios. Segundo, como se ilustra

en la fig. 2.4.2, la estructura cilíndrica es simétrica con respecto a un plano, la cual atraviesa el eje \bar{i}_1 . Se representa en esta figura dos puntos A y B , ambos ubicados en el círculo de radio $r < R$. El plano de simetría seleccionado para es perpendicular al segmento medio de estos dos puntos. Por la simetría del sistema, el esfuerzo de corte debe ser de magnitud constante a lo largo del círculo, mientras que la estructura es simétrica al plano, las cargas son antisimétricas con respecto al plano en mención; consecuentemente, la solución debe ser antisimétrica con respecto al plano.

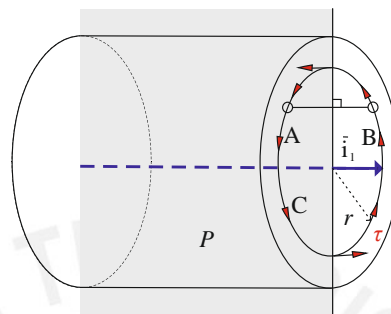


Fig. 2.4.2 El plano de simetría del cilindro circular

Primeramente, considerar un desplazamiento axial en los puntos A y B , denotado por u_1^A y u_1^B , respectivamente. Por la simetría del cilindro el problema implica que $u_1^A = u_1^B$. Por otro lado, la antisimetría del problema con respecto al plano implica que $u_1^A = -u_1^B$. Para que exista una única solución es requisito que $u_1^A = u_1^B = 0$; tal que los desplazamiento axiales tiendan a ser nulos en toda la sección transversal.

Seguidamente, se considera los desplazamientos en la sección transversal de los mismos puntos. El desplazamiento debe ser compatible con la simetría cilíndrica del problema, tal como una rotación de un cuerpo rígido de la sección transversal alrededor de su propio centro. Esto es fácil para mostrar que esta rotación también presenta el requerimiento antisimétrico en un plano que pasa a través del eje \bar{i}_1 .

En resumen, para un cilindro circular, cada sección transversal rota en su propio centro como un cuerpo rígido; esto es solamente la deformación compatible con la simetría del problema.

2.4.1. Descripción cinemática

La deformación inducida por la torsión en un cilindro circular consiste en la rotación de un cuerpo rígido de cada sección transversal, su movimiento es totalmente descrito por un ángulo de rotación Φ_1 , como se muestra en la fig. 2.4.3. La rotación provoca que un punto arbitrario A de la configuración referencial se traslade al punto A' de la configuración deformada. La fig. 2.4.3 también muestra la coordenada polar r y α que define la posición del punto A .

Como siempre, los desplazamientos y rotaciones son asumidos como pequeños; por tanto, la distancia de A a A' puede ser aproximada como $r d\Phi_1$, mostrada en la figura 2.4.3. Los desplazamientos de la sección transversal pueden ser escritos como

la proyección del vector desplazamiento a lo largo de la dirección \vec{i}_2 y \vec{i}_3 , respectivamente, para encontrar:

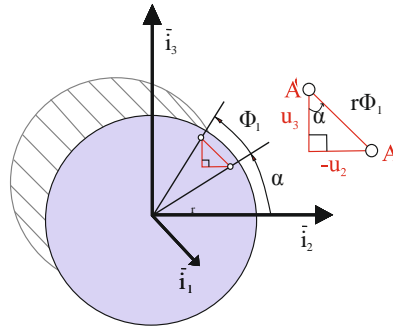


Fig. 2.4.3 Desplazamiento en la sección transversal para un cilindro circular

$$u_2(x_1, r, \alpha) = -r\Phi_1(x_1)\sin \alpha, \quad u_3(x_1, r, \alpha) = r\Phi_1(x_1)\cos \alpha \quad (2.4.1)$$

Porque la sección transversal no se deforma fuera de su plano, el desplazamiento axial debe desaparecer. El desplazamiento fuera del plano descrito por la deformación torsional del cilindro circular viene a ser:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (2.4.2)$$

Donde los desplazamientos en la sección transversal están dadas por:

$$\begin{aligned} u_2(x_1, x_2, x_3) &= -x_3\Phi_1(x_1) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= x_2\Phi_1(x_1) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

2.4.2. El campo de deformaciones

De la relación desplazamiento-deformación, las correspondientes deformaciones son obtenidas como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -x_3\kappa_1(x_1), \quad \gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = x_2\kappa_1(x_1) \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Donde la razón de giro de la sección es definida como:

$$\kappa_1(x_1) = \frac{d\Phi_1}{dx_1} \quad (2.4.5)$$

La razón de giro de la sección κ_1 , mide la deformación del cilindro circular. Se tiene que la razón de un ángulo constante implica una rotación de un cuerpo rígido del cilindro en su eje.

Las deformaciones no son fáciles de visualizar en coordenadas rectangulares porque las componentes cartesianas γ_{12} y γ_{13} actúan en los planos $\bar{i}_1 - \bar{i}_2$ y $\bar{i}_1 - \bar{i}_3$, respectivamente. En vista de la simetría cilíndrica del problema en mano, es más natural describir sus deformaciones en coordenadas polares (r, α) . En este sistema, las componentes de deformación son γ_{r1} y $\gamma_{\alpha 1}$, donde el segundo subíndice se refiere al eje \bar{i}_1 . Por simplicidad, estos componentes pueden ser denotados como γ_α y γ_r .

La relación entre las componentes de deformación en coordenadas cartesianas y polares puede ser expresada, para una rotación α respecto al eje \bar{i}_1 , empleando los cosenos directores, se obtiene:

$$\gamma_r = \gamma_{12} \cos \alpha + \gamma_{13} \sin \alpha, \quad \gamma_\alpha = -\gamma_{12} \sin \alpha + \gamma_{13} \cos \alpha \quad (2.4.6)$$

Introduciendo los componentes de deformación por corte en coordenadas cartesianas, ecuación (2.4.4), conduce a:

$$\gamma_r(x_1, r, \alpha) = 0, \quad \gamma_\alpha(x_1, r, \alpha) = r\kappa_1(x_1) \quad (2.4.7)$$

El componente de la deformación circunferencial por corte γ_α es pequeña, la cual es proporcional a la razón de rotación κ_1 , y varía linealmente desde cero, siendo en el centro de la sección el valor máximo $R\kappa_1$. Por supuesto, ello es independiente de la variable α , la deformación se representa en la fig. 2.4.4. Cada sección transversal experimenta una pequeña rotación $d\Phi_1$, dando lugar a la deformación por corte circunferencial γ_α . Como se ilustra en la fig. 2.4.4, la deformación por corte se obtiene como $\gamma_\alpha = rd\Phi_1 / dx_1 = r\kappa_1$.

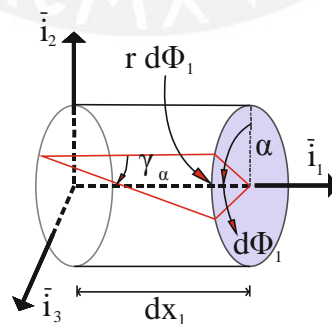


Fig. 2.4.4 Visualización de la deformación de corte fuera del plano en coordenadas polares

2.4.3. El campo de esfuerzos

Considerar la viga de un material linealmente elástico que obedece la ley de Hooke. En vista del campo de deformaciones, ecuación (2.4.4), los componentes importantes son los siguientes:

$$\tau_{12} = -Gx_3\kappa_1(x_1), \quad \tau_{13} = Gx_2\kappa_1(x_1) \quad (2.4.8)$$

Donde G es el módulo de corte del material. Una vez más, las coordenadas polares son más convenientes para la visualización de los esfuerzos, los cuales son obtenidos de la ley de Hooke como:

$$\tau_r(x_1, r, \alpha) = 0, \quad \tau_\alpha(x_1, r, \alpha) = Gr\kappa_1(x_1) \quad (2.4.9)$$

Donde τ_r y τ_α son los esfuerzos cortantes radial y circunferencial, respectivamente.

La distribución del esfuerzo de corte circunferencial sobre la sección transversal se muestra en la fig. 2.4.5. Dos características son notables en la distribución; primero, en todos los puntos los esfuerzos de corte actuante en la dirección circunferencial y la componente radial son pequeños. Segundo, la magnitud del esfuerzo varía linealmente con respecto a la dirección radial, tal como se muestra en la fig. 2.4.5.

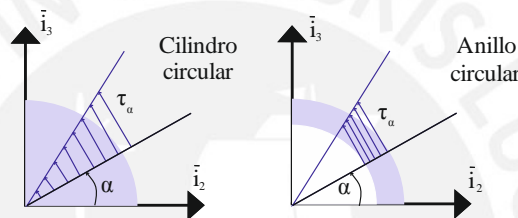


Fig. 2.4.5 Distribución del esfuerzo cortante circunferencial sobre la sección transversal

2.4.4. Ley constitutiva

La torsión actuante en la sección transversal en un punto dado es fácilmente obtenida por integración del esfuerzo cortante circunferencial τ_α , multiplicado por el brazo de momento r , se obtiene:

$$M_1(x_1) = \int_A \tau_\alpha r dA \quad (2.4.10)$$

Introduciendo el esfuerzo cortante circunferencial, se obtiene:

$$M_1(x_1) = \int_A Gr^2\kappa_1(x_1)dA = \left[\int_A Gr^2 dA \right] \kappa_1(x_1) = H_{11}\kappa_1(x_1) \quad (2.4.11)$$

Donde la rigidez torsional de la sección es definida como:

$$H_{11} = \int_A Gr^2 dA \quad (2.4.12)$$

Si la sección es de un material homogéneo de módulo de corte G , la rigidez torsional será $H_{11} = GJ$, donde $J = \int_A r^2 dA$ es conocido como momento polar.

2.4.5. Ecuación de equilibrio

La ecuación de equilibrio asociado con el comportamiento torsional puede ser obtenido considerando un elemento diferencial del cilindro de longitud dx_1 como se representa en la fig. 2.4.6. Empleando la expansión de la serie de Taylor, el momento actuante en la cara del lado derecho es $M_1(x_1 + dx_1) = M_1(x_1) + (dM_1 / dx_1)dx_1$, donde las diferenciales de orden superior son obviados. Aplicando la ecuación de equilibrio en el eje \bar{i}_1 se obtiene:

$$\frac{dM_1}{dx_1} = -q_1 \quad (2.4.13)$$

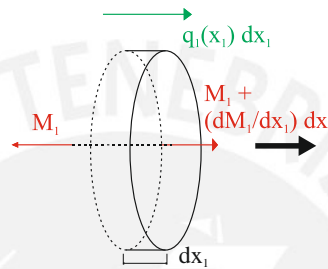


Fig. 2.4.6 Cargas de torsión actuantes en un elemento infinitesimal

2.4.6. Ecuación gobernante

Finalmente, la ecuación gobernante del comportamiento torsional se obtiene al reemplazar la ecuación (2.4.11) en la ecuación de equilibrio (2.4.13), de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx_1} \left[H_{11} \frac{d\Phi_1}{dx_1} \right] = -q_1 \quad (2.4.14)$$

2.4.7. Ecuación integral para vigas sometidas a torsión

Convertir la ecuación diferencial (2.4.14) en una ecuación integral para determinar las reacciones del sistema para el giro axial Φ_1 de una barra elástica con comportamiento elástico de longitud l y sección transversal A , sometida a una torsión $q_1(x_1)$. Asimismo, la fuerza resultante $M_1(x_1)$ es linealmente relacionada al giro axial Φ_1 , mediante la relación $M_1(x_1) = GJ \frac{d\Phi_1(x_1)}{dx_1}$.

La ecuación (2.4.14) es multiplicada por la solución fundamental $\Phi_1^*(x_1, \xi) = \frac{r}{2}$, considerada como una función de ponderación, y luego integrando en el dominio de la viga de $x_1 = a$ a $x_1 = b$, se obtiene:

$$\int_a^b \left(\frac{d^2 \Phi_1(x_1)}{dx_1^2} + \frac{q_1(x_1)}{GJ} \right) \Phi_1^*(x_1, \xi) dx_1 = 0 \quad (2.4.15)$$

O

$$\int_a^b \frac{d^2 \Phi_1(x_1)}{dx_1^2} \Phi_1^*(x_1, \xi) dx_1 = \int_a^b \frac{q_1(x_1)}{GJ} \Phi_1^*(x_1, \xi) dx_1 \quad (2.4.16)$$

Ahora, el lado izquierdo de la ecuación (2.4.16) es integrado por partes, dos veces:

$$\int_a^b \frac{d^2 \Phi_1(x_1)}{dx_1^2} \Phi_1^*(x_1, \xi) dx_1 = \left[\frac{d\Phi_1(x_1)}{dx_1} \Phi_1^*(x_1, \xi) - \Phi_1(x_1) \frac{\partial \Phi_1^*(x_1, \xi)}{\partial x_1} \right]_a^b + \int_a^b \Phi_1(x_1) \frac{\partial^2 \Phi_1^*(x_1, \xi)}{\partial^2 x_1} dx_1 \quad (2.4.17)$$

Donde la segunda derivada de la solución fundamental es la función de Dirac $\delta(x_1, \xi)$ y la integral en dominio de $\xi \in [a, b]$, es:

$$\int_a^b \Phi_1(x_1) \frac{\partial^2 \Phi_1^*(x_1, \xi)}{\partial^2 x_1} dx_1 = \int_a^b \Phi_1(x_1) \delta(x_1, \xi) dx_1 = \Phi_1(\xi) \quad (2.4.18)$$

Por lo que a partir de (2.4.17) y (2.4.18), la ecuación (2.4.16) se transforma en una ecuación integral:

$$\begin{aligned} - \int_a^b \frac{q_1(x_1)}{EA} \Phi_1^*(x_1, \xi) dx_1 &= \left[\frac{d\Phi_1(x_1)}{dx_1} \Phi_1^*(x_1, \xi) - \Phi_1(x_1) \frac{\partial \Phi_1^*(x_1, \xi)}{\partial x_1} \right]_a^b + \Phi_1(\xi) \\ \Phi_1(\xi) &= - \int_a^b \frac{p_1(x_1)}{EA} \Phi_1^*(x_1, \xi) dx_1 - \left[\frac{d\Phi_1(x_1)}{dx_1} \Phi_1^*(x_1, \xi) - \Phi_1(x_1) \frac{\partial \Phi_1^*(x_1, \xi)}{\partial x_1} \right]_a^b \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

La primera derivada de la solución fundamental está dada por:

$$\frac{\partial \Phi_1^*(x_1, \xi)}{\partial x_1} = H(x_1 - \xi) - \frac{1}{2} \quad (2.4.20)$$

Emplear la ecuación (2.4.20) y $M_1(x_1) = GJ \frac{d\Phi_1(x_1)}{dx_1}$, y se obtiene:

$$\Phi_1(\xi) = - \left[\frac{M_1(x_1)}{GJ} \Phi_1^*(x_1, \xi) - \Phi_1(x_1) \frac{M_1^*(x_1, \xi)}{GJ} \right]_a^b - \int_a^b \frac{q_1(x_1)}{GJ} \frac{|x_1 - \xi|}{2} dx_1 \quad (2.4.21)$$

Reemplazar $\xi = a$ y $\xi = b$ en la ecuación (2.4.21), obteniéndose:

$$\Phi_1(a) = - \frac{M_1(b)}{GJ} \frac{|b-a|}{2} + \frac{\Phi_1(b)}{2} + \frac{\Phi_1(a)}{2} - \int_a^b \frac{q_1(x_1)}{2GJ} |x_1 - a| dx_1 \quad (2.4.22)$$

$$\Phi_1(b) = \frac{M_1(a)|a-b|}{GJ} + \frac{\Phi_1(b)}{2} + \frac{\Phi_1(a)}{2} - \int_a^b \frac{q_1(x_1)}{2GJ} |x_1 - b| dx_1 \quad (2.4.23)$$

Las expresiones (2.4.22) y (2.4.23) en forma matricial se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & l \\ -1 & -l & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(a) \\ M_1(a) \\ \Phi_1(b) \\ M_1(b) \\ H_{11} \end{bmatrix} = -\frac{1}{H_{11}} \int_a^b \begin{bmatrix} (x_1 - a)q_1(x_1) \\ (b - x_1)q_1(x_1) \end{bmatrix} dx_1 \quad (2.4.24)$$

2.5. Fundamentos de vigas sometidas a flexión

2.5.1. Descripción cinemática

La Fig. 2.5.1 representa la idealización de una viga con propiedades constantes a lo largo de la luz, la cual está sujeta a dos momentos flectores, ambos de magnitud M , aplicados en los extremos. Este tipo de carga es denominada como “momento flector puro”. La sección transversal de la viga es simétrica respecto al plano de la figura, y los momentos están aplicados en ese plano de simetría.

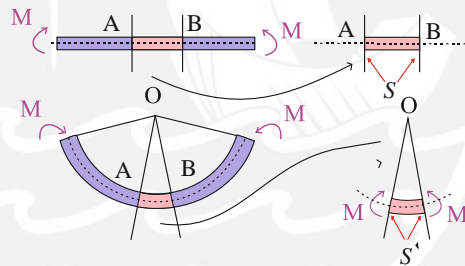


Fig. 2.5.1. Viga infinitamente larga sometido a momento flector en los extremos

El momento flector y las propiedades físicas son constantes a lo largo de la luz de la viga. Por tanto, la deformación de la viga debe ser idéntico en todos los puntos a lo largo de su eje con una curvatura constante. Sin embargo, se considera las hipótesis siguientes:

- La sección transversal es infinitamente rígido en su propio plano.
- La sección transversal permanece plano después de la deformación.
- La sección transversal después de la deformación es perpendicular al eje de la viga deformada.

Estas suposiciones son conocidas como las hipótesis de Euler-Bernoulli para vigas. Resultados experimentales muestran que tales hipótesis son válidas para vigas esbeltas de material isotrópico con sección transversal sólida.

Las tres hipótesis discutidas en la sección previa son aplicables y además son razonables para asegurar que la carga transversal solamente cause desplazamiento

transversal y curvatura de la sección. El campo de desplazamientos se reduce a la ecuación (2.5.1).

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= -x_2 \frac{d\bar{u}_2(x_1)}{dx_1} \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= \bar{u}_2(x_1) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

2.5.2. El campo de deformaciones

Las deformaciones pueden ser evaluadas en términos de desplazamientos definidos por la ecuación 2.5.1:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0, \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0, \quad \gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{d\bar{u}_1(x_1)}{dx_1} - x_3 \frac{d^2\bar{u}_3(x_1)}{dx_1^2} - x_2 \frac{d^2\bar{u}_2(x_1)}{dx_1^2} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

En este punto es conveniente introducir la siguiente notación para las deformaciones, las cuales dependen solamente de la variable x_1 :

$$\bar{\varepsilon}_1(x_1) = \frac{d\bar{u}_1(x_1)}{dx_1}, \quad \kappa_2(x_1) = -\frac{d^2\bar{u}_3(x_1)}{dx_1^2}, \quad \kappa_3(x_1) = \frac{d^2\bar{u}_2(x_1)}{dx_1^2} \quad (2.5.3)$$

Reemplazando la ecuación (2.5.3) en la ecuación (2.5.2) se tiene:

$$\varepsilon_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{\varepsilon}_1(x_1) + x_3\kappa_2(x_1) - x_2\kappa_3(x_1) \quad (2.5.4)$$

2.5.3. El campo de esfuerzos

La meta de la teoría de vigas es desarrollar un modelo unidimensional de la viga tridimensional de la estructura, empleando solamente propiedades de la sección, dependiente de la variable x_1 .

Para lo cual se definen las fuerzas cortantes $V_2(x_1)$ de la siguiente forma:

$$V_2(x_1) = \int_A \tau_{12}(x_1, x_2, x_3) dA \quad (2.5.5)$$

Asimismo, se define también dos momentos resultantes como:

$$M_3(x_1) = -\int_A x_2 \sigma_1(x_1, x_2, x_3) dA \quad (2.5.6)$$

El signo menos en la definición de $M_3(x_1)$ es necesario para obtener un momento flector equivalente positivo. La convención de signos de fuerzas y momentos son mostrados en la Fig. 2.5.2.

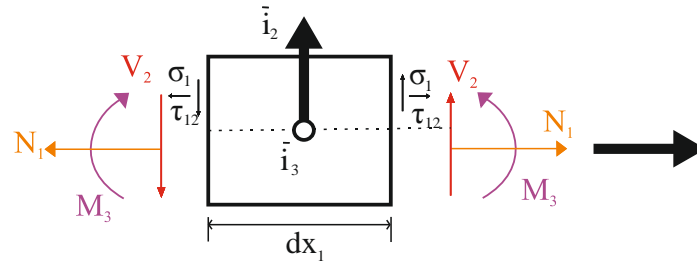


Fig. 2.5.2. Convención de signos para los esfuerzos resultantes

Los momentos flectores son determinados con respecto al origen de los ejes. En algunas situaciones es ventajoso determinar el momento flector con respecto a ejes paralelos. El momento determinado en un punto P de coordenadas (x_{2P}, x_{3P}) en la sección transversal, se definen como:

$$M_3^P(x_1) = \int_A (x_2 - x_{2P}) \sigma_1(x_1, x_2, x_3) dA \quad (2.5.7)$$

2.5.4. Ley constitutiva

Se asume que la viga está hecha de un material linealmente elástico. Consecuentemente la ecuación 2.5.4 queda de la forma $\epsilon_1(x_1, x_2, x_3) = -x_2 \kappa_3(x_1)$ y al emplear la ley de Hooke, la distribución de esfuerzos viene a ser:

$$\sigma_1(x_1, x_2, x_3) = -E x_2 \kappa_3(x_1) \quad (2.5.8)$$

2.5.5. Ecuación de equilibrio

La ecuación de equilibrio es empleada para completar la formulación, se considera un elemento infinitesimal de la viga de longitud dx_1 como se representa en la fig. 2.5.4. El momento flector $M_3(x_1)$ y la fuerza cortante $V_2(x_1)$ están actuando en la sección transversal, a una distancia x_1 . Las correspondientes fuerzas actuantes en la sección ubicada a $x_1 + dx_1$, han sido evaluadas usando la serie de Taylor, donde los términos de orden superior son ignorados.

Del diagrama de cuerpo libre de un elemento infinitesimal (fig. 2.5.3) de la viga, se obtiene las siguientes dos ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dx_1} &= -p_2(x_1) \\ \frac{dM_3}{dx_1} + V_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

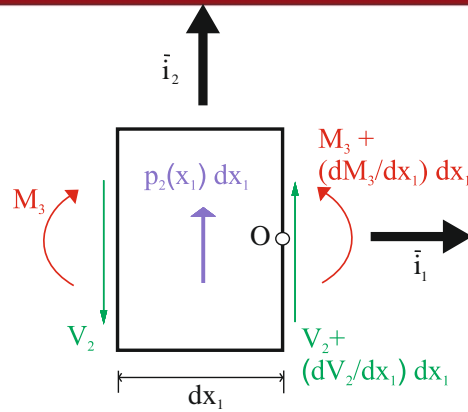


Fig. 2.5.3. Equilibrio de elemento infinitesimal de la viga.

Donde la primera ecuación expresa el equilibrio en la dirección vertical y la segunda expresa el equilibrio de momentos con respecto al punto O.

La fuerza cortante V_2 es eliminada de estas dos ecuaciones de equilibrio para obtener la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 M_3}{dx_1^2} = p_2(x_1) \quad (2.5.10)$$

2.5.6. Ecuación gobernante

La ecuación gobernante para la deflexión transversal de la viga es determinada al reemplazar la relación momento-curvatura, ecuación (2.5.7), a la ecuación de equilibrio (2.5.10), se obtiene:

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \left[H_{33}^C \frac{d^2 \bar{u}_2}{dx_1^2} \right] = p_2(x_1) \quad (2.5.11)$$

Son necesarias cuatro condiciones de contorno para resolver la ecuación (2.5.11), dos en cada extremo de la barra.

2.5.7. Ecuaciones integrales de vigas

La deflexión \bar{u}_2 de una viga elástica bajo una distribución de momentos $M_3(x_1)$, tienen que satisfacer la ecuación diferencial no homogénea de segundo orden, ecuación (2.5.7):

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \bar{u}_2 = -\frac{M_3(x_1)}{EI} \quad \Omega = \{x_1/x_1 \in [a, b] | a - b = l\} \quad (2.5.12)$$

Esta ecuación es multiplicada por la solución fundamental $\bar{u}_2^*(x_1, \xi) = \frac{r}{2}$ como una adecuada función de ponderación, luego integramos sobre el dominio de la longitud de la viga para $x_1 = a$ a $x_1 = b$, y el resultado será igual a cero:

$$\int_a^b \left[\frac{d^2 \bar{u}_2(x)}{dx_1^2} + \frac{M_3(x_1)}{EI} \right] \bar{u}_2^*(x_1, \xi) dx_1 = 0 \quad (2.5.13)$$

O

$$\int_a^b \frac{d^2 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^2} \bar{u}_2^*(x_1, \xi) dx_1 = - \int_a^b \frac{M(x_1)}{EI} \bar{u}_2^*(x_1, \xi) dx_1 \quad (2.5.14)$$

Ahora, el lado izquierdo de la ecuación (2.5.14) se integra dos veces por partes para expresar las dos ecuaciones diferenciales en función de la solución fundamental conocida $\bar{u}_2^*(x_1, \xi)$:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d^2 \bar{u}_2}{dx_1^2} \bar{u}_2^*(x_1, \xi) dx_1 &= \left[\frac{d\bar{u}_2(x_1)}{dx_1} \bar{u}_2^*(x_1, \xi) \right]_a^b - \int_a^b \frac{d\bar{u}_2(x_1)}{dx_1} \frac{\partial \bar{u}_2^*(x, \xi)}{\partial x_1} dx_1 \\ &= \left[\frac{d\bar{u}_2(x_1)}{dx_1} \bar{u}_2^*(x_1, \xi) - \bar{u}_2(x_1) \frac{\partial \bar{u}_2^*(x_1, \xi)}{\partial x_1^2} \right]_a^b + \int_a^b \bar{u}_2(x_1) \frac{\partial^2 \bar{u}_2^*(x, \xi)}{\partial x_1^2} dx_1 \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

En la segunda integral de la ecuación (2.5.15) la solución fundamental está dado por la ecuación (2.2.40) $\bar{u}_2^*(x, \xi) = \frac{r}{2}$, y el resultado de la integral para $\xi \in [a, b]$, es simplemente el valor de \bar{u}_2 en función de ξ :

$$\int_a^b \bar{u}_2(x_1) \frac{\partial^2 \bar{u}_2^*(x_1, \xi)}{\partial x_1^2} dx_1 = \int_a^b \bar{u}_2(x_1) \delta(x_1, \xi) dx_1 = \bar{u}_2(\xi) \quad (2.5.16)$$

Por tanto, al reemplazar las ecuaciones (2.5.16) y (2.5.15) en la ecuación (2.5.14) se transforma en una ecuación integral de contorno:

$$\bar{u}_2(\xi) = - \left[\frac{d\bar{u}_2(x_1)}{dx_1} \bar{u}_2^*(x_1, \xi) - \bar{u}_2(x_1) \frac{\partial \bar{u}_2^*(x_1, \xi)}{\partial x_1} \right]_a^b - \int_a^b \frac{M_3(x_1)}{EI} \bar{u}_2^*(x_1, \xi) dx_1 \quad (2.5.17)$$

Explícitamente, con la ecuación (2.2.41), $\frac{\partial \bar{u}_2^*}{\partial x_1} = H(x - \xi) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{sgn}(x - \xi)$, y al evaluar la integral (2.5.15), se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{d^2 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^2} \bar{u}_2^*(x, \xi) dx_1 &= \bar{u}_2'(b) \frac{|b - \xi|}{2} - \bar{u}_2(b) \frac{1}{2} \text{sign}(b - \xi) - \bar{u}_2'(a) \frac{|a - \xi|}{2} + \bar{u}_2(a) \frac{1}{2} \text{sgn}(a - \xi) + \bar{u}_2(\xi) \\ &= w'(b) \frac{b - \xi}{2} - w(b) \frac{1}{2} - w'(a) \frac{\xi - a}{2} - w(a) \frac{1}{2} + w(\xi) \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Reemplazar $\xi = a$ y $\xi = b$ en la ecuación (2.5.18) para obtener lo siguiente:

$$\bar{u}_2(\xi) = \frac{1}{2}\bar{u}_2(a) + \frac{\xi - a}{2}\bar{u}'_2(a) + \frac{1}{2}\bar{u}_2(b) - \frac{b - \xi}{2}\bar{u}'_2(b) - \int_0^l \frac{M_3(x_1)}{EI} \frac{1}{2} |x - \xi| dx_1 \quad (2.4.19)$$

La ecuación (2.5.19) es válida para todos los puntos interiores cuando $\xi \in [a, b]$ y todas las combinaciones de frontera; pero, es posible evaluar la expresión para todas las reacciones de frontera.

Para este propósito, el punto ξ ha sido reemplazado en la frontera, en las dos fronteras $\xi = a$ y $\xi = b$, para obtener dos ecuaciones para los dos valores de frontera conocidos. Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones ($b - a = l$):

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & l \\ -1 & -l & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2(a) \\ \bar{u}'_2(a) \\ \bar{u}_2(b) \\ \bar{u}'_2(b) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2EI} \int_a^b \begin{bmatrix} (x_1 - a)M_3(x_1) \\ (b - x_1)M_3(x_1) \end{bmatrix} dx_1 \quad (2.5.20)$$

De acuerdo a la teoría de Euler-Bernoulli, la deflexión \bar{u}_2 de una viga elástica esta descrito por una ecuación diferencial de cuarto orden, como muestra la ecuación (2.5.21):

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \left[H_{33}^C \frac{d^2 \bar{u}_2}{dx_1^2} \right] = p_2(x_1) \quad (2.5.21)$$

Para una viga de sección constante, la ecuación (2.5.21) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{d^4 \bar{u}_2}{dx_1^4} = \frac{p_2(x_1)}{H_{33}^C} \quad (2.5.22)$$

La ecuación integral para la viga mediante el método de residuos ponderados, se expresa en la ecuación (2.5.23):

$$\int_0^l H_{33}^C \frac{d^4 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^4} \bar{u}_2^*(x_1, \xi) dx_1 = \int_0^l p_2(x_1) \bar{u}_2^*(x_1, \xi) dx_1 \quad (2.5.23)$$

Donde la función de residuos ponderados $\bar{u}_2^*(x_1, \xi)$ tiene que ser la solución fundamental de la ecuación diferencial (2.5.21), y está dada por la ecuación (2.5.24).

$$\bar{u}_2^*(x_1, \xi) = \frac{r^3}{12H_{33}^C} \quad (2.5.24)$$

Para obtener la integral de contorno se aplica la integración cuatro veces por partes en la ecuación (2.5.23), mediante la primera integración por partes se obtiene la ecuación (2.5.25):

$$\int_0^l H_{33}^C \frac{d^4 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^4} \bar{u}_2^*(x_1, \xi) dx_1 = \left[H_{33}^C \frac{d^3 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^3} \bar{u}_2^*(x_1, \xi) \right]_0^l - \int_0^l H_{33}^C \frac{d^3 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^3} \frac{\partial \bar{u}_2^*(x_1, \xi)}{\partial x_1} dx_1 \quad (2.5.25)$$

Aplicar por segunda vez la integración por partes para obtener la ecuación (2.5.26):

$$\int_0^l H_{33}^C \frac{d^4 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^4} \bar{u}_2^*(x_1, \xi) dx_1 = \left[-V_2(x_1) \bar{u}_2^*(x_1, \xi) - H_{33}^C \frac{d^2 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^2} \frac{\partial \bar{u}_2^*(x_1, \xi)}{\partial x_1} \right]_0^l \quad (2.5.26)$$

$$+ \int_0^l H_{33}^C \frac{d^2 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_2^*(x_1, \xi)}{dx_1^2} dx_1$$

Aplicar por tercera vez integración por partes para obtener la ecuación (2.5.27):

$$\int_0^l H_{33}^C \frac{d^4 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^4} \bar{u}_2^*(x_1, \xi) dx_1 = \left[-V_2(x_1) \bar{u}_2^*(x_1, \xi) + M_3(x_1) \bar{u}_2^{*'}(x_1, \xi) - \bar{u}_2'(x_1) M_3^*(x_1, \xi) \right]_0^l$$

$$- \int_0^l H_{33}^C \frac{d \bar{u}_2(x_1)}{dx_1} \frac{\partial^3 \bar{u}_2^*(x_1, \xi)}{\partial x_1^3} dx_1 \quad (2.5.27)$$

Finalmente la cuarta integración por partes para obtener la ecuación (2.5.28)

$$\int_0^l H_{33}^C \frac{d^4 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^4} \bar{u}_2^*(x_1, \xi) dx_1 = \left[-V_2(x_1) \bar{u}_2^*(x_1, \xi) + M_3(x_1) \bar{u}_2^{*'}(x_1, \xi) - \bar{u}_2'(x_1) M_3^*(x_1, \xi) \right]_0^l$$

$$- \left[H_{33}^C \bar{u}_2(x_1) \frac{\partial^3 \bar{u}_2^*(x_1, \xi)}{\partial x_1^3} \right]_0^l + \int_0^l H_{33}^C \bar{u}_2 \frac{\partial^4 \bar{u}_2^*(x_1, \xi)}{\partial x_1^4} dx_1$$

$$= \left[-V_2(x_1) \bar{u}_2^*(x_1, \xi) + M_3(x_1) \bar{u}_2^{*'}(x_1, \xi) \right]_0^l$$

$$\left[-\bar{u}_2'(x_1) M_3^*(x_1, \xi) + \bar{u}_2(x_1) V_2^*(x_1, \xi) \right]_0^l$$

$$+ \int_0^l H_{33}^C \bar{u}_2(x_1) \frac{\delta(x - \xi)}{H_{33}^C} dx_1 \quad (2.5.28)$$

Por lo tanto, tomando el efecto filtro de la función delta de Dirac, se llega a la ecuación (2.5.29):

$$\bar{u}_2(\xi) = \left[V_2(x_1) \bar{u}_2^*(x_1, \xi) - M_3(x_1) \bar{u}_2^{*'}(x_1, \xi) + \bar{u}_2'(x_1) M_3^*(x_1, \xi) - \bar{u}_2(x_1) V_2^*(x_1, \xi) \right]_0^l$$

$$+ \int_0^l p_2(x_1) \bar{u}_2^*(x_1, \xi) dx_1 \quad (2.5.29)$$

Explícitamente la ecuación (2.5.29) se puede expresar como la ecuación (2.5.30):

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi) = & V_2(l)\bar{u}_2^*(l, \xi) - V_2(0)\bar{u}_2^*(0, \xi) - \bar{u}_2(l)V_2^*(l, \xi) + \bar{u}_2(0)V_2^*(0, \xi) \\ & - M_3(l)\bar{u}_2^*(l, \xi) + M_3(0)\bar{u}_2^*(0, \xi) + \bar{u}_2'(l)M_3^*(l, \xi) - \bar{u}_2'(0)M_3^*(0, \xi) \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

En esta última ecuación, cuatro de las ocho condiciones de contorno son conocidas y las cuatro son las reacciones no conocidas. Evaluando las ecuaciones en dos puntos de contorno, específicamente para $\xi = 0 + \varepsilon$ y $\xi = l - \varepsilon$, se obtiene las dos ecuaciones integrales de contorno (2.5.31) y (2.5.32):

$$\frac{1}{2}\bar{u}(0) - \frac{1}{2}\bar{u}(l) - V_2(l)\frac{l^3}{12H_{33}^C} + M_3(l)\frac{l^2}{4H_{33}^C} + \bar{u}'(l)\frac{l}{2} = \int_0^l p_2(x_1)\frac{x^3}{12H_{33}^C} dx_1 \quad (2.5.31)$$

$$-\frac{1}{2}\bar{u}(0) + \frac{1}{2}\bar{u}(l) + V_2(0)\frac{l^3}{12H_{33}^C} + M_3(0)\frac{l^2}{4H_{33}^C} - \bar{u}'(0)\frac{l}{2} = -\int_0^l p_2(x_1)\frac{(x-l)^3}{12H_{33}^C} dx_1 \quad (2.5.32)$$

La ecuación integral para la pendiente de la viga, se consigue mediante la ecuación (2.5.22) donde la función residuo se deriva respecto a ξ , directamente mediante el método de residuos ponderados, se tiene la ecuación (2.5.33):

$$\int_0^l H_{33}^C \frac{d^4 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^4} \frac{\partial \bar{u}_2^*(x_1, \xi)}{\partial \xi} dx = \int_0^l p_2(x_1) \frac{\partial \bar{u}_2^*(x_1, \xi)}{\partial \xi} dx \quad (2.5.33)$$

Considerando la solución fundamental (2.5.24), podemos determinar la derivada de la solución fundamental con respecto a ξ , como se muestra en la ecuación (2.5.34):

$$\bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi) = \frac{\partial \bar{u}_2^*(x_1, \xi)}{\partial \xi} = -\frac{\partial \bar{u}_2^*(x_1, \xi)}{\partial x_1} = -\frac{1}{4H_{33}^C}(x - \xi)^2 \operatorname{sgn}(x - \xi) \quad (2.5.34)$$

Realizando integración por partes en la ecuación (2.5.33), para la primera integración por partes se obtiene la ecuación (2.5.35):

$$\begin{aligned} \int_0^l H_{33}^C \frac{d^4 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^4} \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi) &= \left[H_{33}^C \frac{d^3 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^3} \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi) \right]_0^l - \int_0^l H_{33}^C \frac{d^3 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^3} \frac{\partial \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi)}{\partial x_1} dx_1 \\ &= \left[-V_2(x_1) \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi) \right]_0^l - \int_0^l H_{33}^C \frac{d^3 \bar{u}_2(x_1)}{dx_1^3} \frac{\partial \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi)}{\partial x_1} dx_1 \end{aligned} \quad (2.5.35)$$

Realizar la segunda integración por partes para obtener la ecuación (2.5.36):

$$\begin{aligned}
 \int_0^l H_{33}^C \frac{d^4 \bar{u}(x_1)}{dx_1^4} \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi) &= \left[-V_2(x_1) \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi) - H_{33}^C \frac{d^2 \bar{u}(x_1)}{dx_1^2} \frac{\partial \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi)}{\partial x_1} \right]_0^l \\
 &+ \int_0^l H_{33}^C \frac{d^2 \bar{u}(x_1)}{dx_1^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi)}{\partial x_1^2} dx_1 \\
 &= \left[-V_2(x_1) \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi) - M_3(x_1) \frac{\partial \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi)}{\partial x_1} \right]_0^l + \int_0^l H_{33}^C \frac{d^2 \bar{u}(x_1)}{dx_1^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi)}{\partial x_1^2} dx_1
 \end{aligned} \tag{2.5.36}$$

Finalmente, la tercera integración por partes, se obtiene la ecuación (2.5.37):

$$\begin{aligned}
 \int_0^l H_{33}^C \frac{d^4 \bar{u}(x_1)}{dx_1^4} \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi) &= \left[-V_2(x_1) \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi) - M_3(x_1) \frac{\partial \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi)}{\partial x_1} + H_{33}^C \frac{d\bar{u}_2(x_1)}{dx_1} \frac{\partial^2 \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi)}{\partial x_1^2} \right]_0^l \\
 &- \int_0^l H_{33}^C \frac{d\bar{u}_2(x_1)}{dx_1} \frac{\partial^3 \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi)}{\partial x_1^3} dx_1 \\
 &= \left[-V_2(x_1) \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi) - M_3(x_1) \frac{\partial \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi)}{\partial x_1} + \frac{d\bar{u}_2(x_1)}{dx_1} M_3^{*2}(x_1, \xi) \right]_0^l \\
 &+ \int_0^l \frac{d\bar{u}_2(x_1)}{dx_1} \delta(x_1, \xi) dx_1 \\
 &= \left[-V_2(x_1) \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi) - M_3(x_1) \frac{\partial \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi)}{\partial x_1} + \frac{d\bar{u}_2(x_1)}{dx_1} M_3^{*2}(x_1, \xi) \right]_0^l \\
 &+ \left. \frac{d\bar{u}_2(x_1)}{dx_1} \right|_{x=\xi}
 \end{aligned} \tag{2.5.37}$$

Consecuentemente, la ecuación integral para $\bar{u}_2'(\xi)$ en un punto interior $\xi \in [0, l]$, entonces de (2.5.37) reemplazando en (2.5.33), resulta la ecuación (2.5.38):

$$\bar{u}_2(\xi) = \left[V_2(x_1) \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi) + M_3(x_1) \frac{\partial \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi)}{\partial x_1} - \frac{d\bar{u}_2(x_1)}{dx_1} M_3^{*2}(x_1, \xi) \right]_0^l + \int_0^l p_2(x_1) \bar{u}_2^{*2}(x_1, \xi) dx_1 \tag{2.5.38}$$

La evaluación de la ecuación (2.5.38) en dos puntos del contorno sirve para obtener dos ecuaciones para determinar las cuatro condiciones de contorno no conocidas:

Para $\xi = 0 + \varepsilon (\varepsilon \rightarrow 0)$:

$$\frac{1}{2} [\bar{u}_2'(0) - \bar{u}_2'(l)] + V_2(l) \frac{l^2}{4H_{33}^C} - M_3(l) \frac{l}{2H_{33}^C} = - \int_0^l p_2(x_1) \frac{x_1^2}{4H_{33}^C} dx_1 \tag{2.5.39}$$

Para $\xi = l - \varepsilon (\varepsilon \rightarrow 0)$:

$$\frac{1}{2}[\bar{u}_2'(l) - \bar{u}_2'(0)] + V_2(0) \frac{l^2}{4H_{33}^C} + M_3(0) \frac{l}{2H_{33}^C} = \int_0^l p_2(x_1) \frac{(x_1 - l)^2}{4H_{33}^C} dx_1 \quad (2.5.40)$$

Acoplando el sistema completo de las ecuaciones integral para las deflexiones y pendientes determinadas en (2.5.31), (2.5.32), (2.5.39) y (2.5.40), se obtiene la ecuación (2.5.41):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{4H_{33}^C} & \frac{-l^3}{12H_{33}^C} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{4H_{33}^C} & \frac{l^3}{12H_{33}^C} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-l}{2H_{33}^C} & \frac{l^2}{4H_{33}^C} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{l}{2H_{33}^C} & \frac{l^2}{4H_{33}^C} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2(0) \\ \bar{u}_2'(0) \\ M_3(0) \\ V_2(0) \\ \bar{u}_2(l) \\ \bar{u}_2'(l) \\ M_3(l) \\ V_2(l) \end{bmatrix} = \int_0^l \begin{bmatrix} p_2(x_1) \frac{x_1^3}{12H_{33}^C} \\ -p_2(x_1) \frac{(x_1 - l)^3}{12H_{33}^C} \\ -p_2(x_1) \frac{x_1^2}{4H_{33}^C} \\ p_2(x_1) \frac{(x_1 - l)^2}{4H_{33}^C} \end{bmatrix} dx_1 \quad (2.5.41)$$

CAPITULO 3. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LOSAS Y ECUACIONES INTEGRALES DE LOSAS

3.1. Introducción

Este capítulo muestra una colección de conceptos y formulaciones matemáticas que son empleadas para el desarrollo de la teoría de losas. Además, está dedicada a deducir formulas y presentar conceptos concernientes con la mecánica de sólidos y la teoría de elasticidad.

Existe dos teorías ampliamente utilizadas para el estudio de losas, la primera fue desarrollada por Kirchhoff y la otra fue desarrollada por Reissner. La teoría de Kirchhoff es adecuada para el análisis de muchas aplicaciones en ingeniería; sin embargo, para problemas que presentan concentración de esfuerzos y agrietamiento, no dio buenos resultados (Aliabadi y Wen, 2011).

3.2. Fundamentos teóricos de la teoría de losas

La teoría de losas incluye cuatro clases de ecuaciones según el modelo de mecánica de sólidos, la ecuación de movimiento, ley constitutiva, ecuación de deformación unitaria y desplazamiento y compatibilidad de desplazamiento.

Empezamos con el bien conocido concepto de tensor de esfuerzo, deformación unitaria y el vector de desplazamientos. Estos tensores y vectores caracterizan el estado de esfuerzo y deformación dentro de un elemento infinitesimal en un punto de interés dentro del cuerpo.

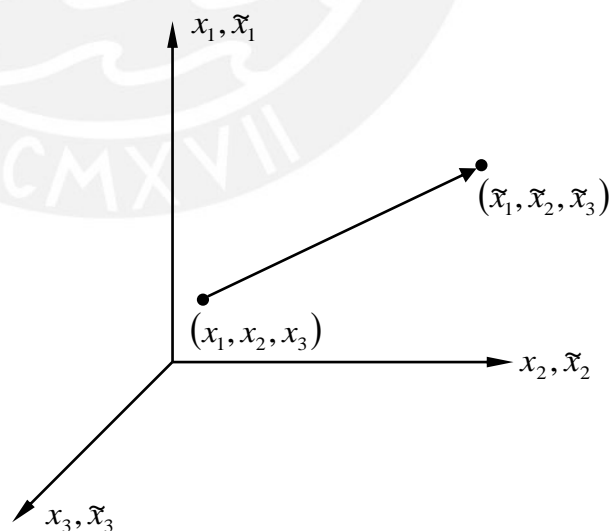


Fig. 3.1 Desplazamiento de un punto en el sistema cartesiano

Se considera una partícula en un sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones. Dos tipos de coordenadas pueden ser usadas para caracterizar la posición de la partícula. La coordenada de la partícula en la posición no deformada (original) del cuerpo es (x_1, x_2, x_3) , mientras la coordenada desplazada con la partícula a una

nueva localización del cuerpo deformado y referido a una coordenada deformada es $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$. En consecuencia, uno puede referirse a dos sistemas de coordenadas no deformadas (x_1, x_2, x_3) y deformadas $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$, la forma de definir la posición de la partícula antes de la deformación y la segunda referida a la posición de la misma partícula después de la deformación. El desplazamiento del punto producido por una carga externa se expresa en la ecuación (3.1).

$$u = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{x}_1(x_1, x_2, x_3) - x_1 \\ \tilde{x}_2(x_1, x_2, x_3) - x_2 \\ \tilde{x}_3(x_1, x_2, x_3) - x_3 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Donde u_i identifica un desplazamiento en el eje x_i .

Mientras (3.1) especifica el desplazamiento en el sistema de coordenada no deformada, esto también es posible definir usando la coordenada deformada:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \\ u_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \\ u_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{x}_1 - x_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \\ \tilde{x}_2 - x_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \\ \tilde{x}_3 - x_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Las ecuaciones (3.1) y (3.2) implican que el vector desplazamiento puede ser determinado si la transformación de la posición deformada y no deformada o viceversa son conocidas, i.e.

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(x_j), \quad x_i = x_i(\tilde{x}_j), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

La deformación unitaria en el punto representa el alargamiento y la contracción relativa a lo largo de la dirección correspondiente y el cizallamiento en el plano formado por un par de ejes coordenados.

Mientras que el concepto de deformación unitaria lineal es bien conocido, es útil indicar que la deformación unitaria de corte es simplemente el cambio del ángulo entre las coordenadas que son mutuamente perpendiculares en el estado no deformado; pero, cambia su orientación como un resultado de deformación.

La deformación unitaria es derivada de acuerdo a la aproximación de Lagrange o Euler. El tensor Lagrangiano de deformación unitaria en el sistema de coordenada no deformada (este tensor es también llamado tensor Green).

Por otro lado, el tensor Euleriano de deformación unitaria es introducido en el sistema de coordenadas del cuerpo deformado (este tensor es algunas veces llamado tensor Cauchy). En términos de desplazamiento el tensor Green y Cauchy está dado por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ii} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right)^2 \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\gamma_{ij}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right) \right] \quad n = 1,2,3\end{aligned}\tag{3.4}$$

Y

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{ii} &= \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial u_n}{\partial \tilde{x}_i} \right)^2 \\ \tilde{\varepsilon}_{ij} &= \frac{\gamma_{ij}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{x}_j} + \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial u_n}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial u_n}{\partial \tilde{x}_j} \right) \right] \quad n = 1,2,3\end{aligned}\tag{3.5}$$

Notar que en el caso de una formulación geoméricamente lineal la diferencial en el tensor Lagrangiano y Euleriano desaparecen y las deformaciones unitarias son definidas como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ii} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\gamma_{ij}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)\end{aligned}\tag{3.6}$$

En caso de efectos ambientales, tal como la temperatura o humedad están presentes, la relación deformación unitaria y desplazamiento es modificada para reflejar la contribución correspondiente.

Mientras existen seis componentes del tensor de deformaciones, ellos dependen en tres desplazamientos solamente. Además, las restricciones adicionales deben ser impuestas para asegurar que el proceso de integración conlleve a soluciones únicas de desplazamientos. Por ejemplo, en el caso de deformación infinitesimal, las 81 ecuaciones de compatibilidad en un sistema de coordenados cartesianos son:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad i, j, k, l = 1,2,3\tag{3.7}$$

Como un resultado de simetría de las deformaciones, solamente seis ecuaciones de la ecuación (3.7) son independientes. Los cuales son:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

La ecuación de compatibilidad de deformaciones es remplazada por esfuerzos a través de la relación constitutiva lineal la cual es llamada ecuación de Beltrami-Mitchell.

El análisis de esfuerzo dentro del dominio ocupado por un cuerpo requiere la formulación de la ecuación de movimiento (o ecuación de equilibrio, en el problema estático). Comenzamos por el estado de esfuerzos en un punto. Naturalmente, matemáticamente es imposible identificar el esfuerzo en un punto, entonces dibujamos un elemento paralelepípedo representativo al punto en cuestión. Los esfuerzos actuantes en la cara de este elemento reemplazan al denominado diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la Fig. 3.2, existe tres componentes aplicados a cada cara, incluyendo un componente perpendicular a la cara y dos componentes de corte perpendiculares mutuamente.

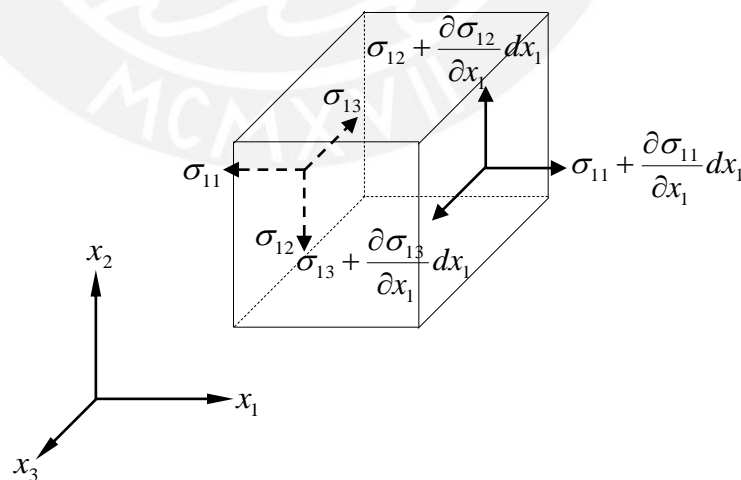


Fig. 3.2 Esfuerzos actuantes en un elemento infinitesimal con dimensiones dx_1 , dx_2 , dx_3 .

La ecuación de movimiento puede ser derivado del principio de conservación de momento lineal del cuerpo denominada segunda ley de Newton. De acuerdo a la ley,

la razón de cambio del momento lineal del cuerpo es igual a la fuerza aplicada. Matemáticamente, esta ley puede ser expresada en el sistema tridimensional de coordenadas (x_1, x_2, x_3) como sigue:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (3.9)$$

Donde X_i son las proyecciones de las fuerzas de cuerpo en los ejes coordenados x_i , ρ es la densidad de masa, v_i es el componente del vector velocidad, t es el tiempo, y $\frac{Dv_i}{Dt}$ es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. En la formulación Lagrangiana, si el movimiento es analizado usando el sistema no deformado de coordenadas; se tiene:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3.10)$$

En la descripción Euleriana se considera que la velocidad es heterogénea y la expresión para la aceleración incluye términos adicionales, introduciendo la componente convectiva.

El principio de conservación del momento angular del cuerpo es igual a la suma de momentos externos aplicados. El resultado del principio es que el tensor de esfuerzos es simétrico, entonces se tiene:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.11)$$

El principio de conservación de masa implica que la masa permanece dentro de un cierto dominio ocupado por el material, y el cambio de este dominio es transformado a una nueva posición como resultado del movimiento del cuerpo. La ecuación de continuidad puede ser derivada a partir de este principio.

3.2.1. Ley constitutiva

La relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria es la relación constitutiva que describe el comportamiento del material que pueden ser isotrópico o anisotrópico, físicamente lineal o no lineal, etc.

La relación esfuerzo-deformación de un material anisotrópico excluyendo los efectos de humedad y temperatura, puede ser escrito como:

$$\{\sigma_{ij}\} = [C_{ijkl}] \{\varepsilon_{kl}\}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (3.12)$$

Como resultado del principio de conservación del momento angular, los elementos del tensor de esfuerzo y deformación son simétricos. De acuerdo a, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ y

el número de elementos independientes del tensor de esfuerzo y deformación es reducido a 6. El orden de la matriz de rigidez de un material isotrópico es también reducido a 6. Además, la simétrica que se observa con respecto a los dos primeros y dos últimos subíndices se tiene que $C_{ijkl} = C_{jikl}$, $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ que también sigue la condición de conservación de energía.

Una convencional notación reducida para el esfuerzo, deformación y rigidez es:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} & \sigma_2 &= \sigma_{22} & \sigma_3 &= \sigma_{33} \\ \sigma_4 &= \tau_{23} = \sigma_{23} & \sigma_5 &= \tau_{13} = \sigma_{13} & \sigma_6 &= \tau_{12} = \sigma_{12} \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22} & \varepsilon_3 &= \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_4 &= \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} & \varepsilon_5 &= \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} & \varepsilon_6 &= \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Los elementos de la matriz de rigidez se reducen como sigue:

$$C_{ijkl} \rightarrow C_{\alpha\beta} : 11 \rightarrow 1, \quad 22 \rightarrow 2, \quad 33 \rightarrow 3, \quad 23 \rightarrow 4, \quad 13 \rightarrow 5, \quad 12 \rightarrow 6 \quad (3.14)$$

Por tanto la ley constitutiva es la ecuación (3.15).

$$\{\sigma_\alpha\} = [C_{\alpha\beta}] \{\varepsilon_\beta\} \quad (3.15)$$

Un material isotrópico tiene las mismas propiedades en todas las direcciones y posee un infinito número de planos de simetría. Tal que, tiene solo dos constantes elásticas independientes.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Para un material isotrópico las constantes elásticas son inmediatamente disponibles en términos de las constantes de Lamé λ y G el segundo es el módulo de corte del material, alternativamente se puede expresar en términos del módulo de elasticidad E y coeficiente de Poisson ν :

$$C_{11} = \lambda + 2G \quad C_{12} = \lambda \quad C = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \quad \lambda = \frac{G(2G - E)}{E - 3G} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.17)$$

3.2.2. Relación deformación-desplazamiento para losas y suposiciones cinemáticas

Se considera un sistema de coordenadas rectangulares, mostrado en la Fig. 3.3, donde x e y son coplanares al plano medio de la losa. Los desplazamientos correspondientes a lo largo de los ejes son denotados por u y v respectivamente. La coordenada z es contado desde el plano medio y la deflexión de la losa en la dirección z es denotado por w .

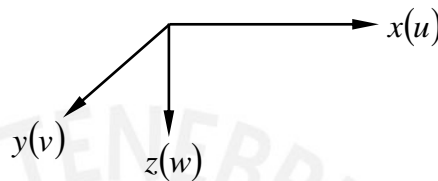


Fig. 3.3 Sistema de coordenadas rectangulares

La cinemática y la relación deformación-desplazamiento no restringen explícitamente la elección del material de la losa, pero refleja las características geométricas y un espesor relativamente pequeño. Sin embargo, la elección de estas relaciones puede ser influenciada por las propiedades del material, tal como bajo módulo de corte transversal. Estas relaciones son parámetros para desarrollar la teoría de losas especificando el rango de validez de una teoría en particular.

Las consideraciones cinemáticas de la teoría de losas determina la exactitud adoptada para describir sus deformaciones en todo su espesor. La teoría clásica es la más simple, asume que los desplazamientos están representados por una función lineal de la coordenada del espesor. Adicionalmente, el espesor de la losa no es afectada por la deformación. Tal consideración se refiere a las suposiciones de Kirchhoff-Love que representa una extensión de la teoría de viga de Euler-Bernoulli a losas, también se llama teoría de primer orden.

El análisis de losas delgadas fue desarrollado por Kirchhoff-Love, que supone que la sección de la losa perpendicular al plano medio permanece plana después de la deformación (Fig. 3.4). Por supuesto, esto implica que en el desplazamiento en el plano es una función lineal de curvatura y espesor. Además, el espesor de la losa es constante, la deformación normal en la dirección perpendicular al plano medio es igual a cero.

De acuerdo a las hipótesis de Kirchhoff-Love, los desplazamientos en un punto arbitrario de la losa se describen de acuerdo a la ecuación (3.18).

Donde $u_0(x, y)$ y $v_0(x, y)$ son desplazamientos en el plano medio. La primera ecuación (3.18) inmediatamente sigue las consideraciones de la Fig. 3.4.

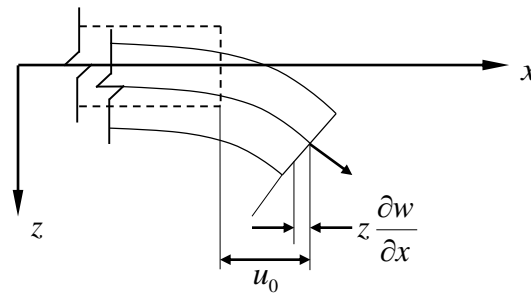


Fig. 3.4 Deformación en plano xz de acuerdo a la hipótesis de Kirchhoff-Love.

$$\left\{ \begin{matrix} u(x_1, x_2, x_3) \\ v(x_1, x_2, x_3) \\ w(x_1, x_2, x_3) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ v_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y) \end{matrix} \right\} \quad (3.18)$$

Las deformaciones en el plano medio pueden ser obtenidos como función lineal de los desplazamientos de (3.6) o como función no lineal siguiendo las definiciones de Lagrange o Euler, las definiciones (3.4) y (3.5), respectivamente. En particular, combinando (3.4) con (3.18) se obtiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Las expresiones no lineales para la deformación pueden ser simplificadas, entonces las ecuaciones de geometría no lineal que son adoptados para la teoría de losas delgadas son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Las deformaciones dadas por la ecuación (3.20); además, pueden ser separados en dos componentes; estos ocurren en el plano medio de la losa y dependen de la distancia z

entre el punto donde son evaluados y el plano medio, las deformaciones en el plano medio son:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \varepsilon_{xy}^0 &= \frac{\gamma_{xy}^0}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{3.21}$$

Los componentes de la deformación dependientes de la coordenada z están dadas por:

$$\varepsilon_x(z) = z\kappa_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y(z) = z\kappa_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{z\kappa_{xy}}{2} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\tag{3.22}$$

Físicamente κ_x , κ_y y κ_{xy} son los cambios de curvatura en el plano xz e yz ambos en el plano medio. Se considera un elemento del plano medio de la losa en el plano xz (Fig. 3.5). Previa a la deformación, la longitud del elemento es igual dx . Como resultado de la deformación, la losa adquiere una deformación $w(x, y)$, entonces en el plano xz ($y = const$) esta deflexión es simplemente $w(x)$. Se puede caracterizar la posición deformada del elemento por $w(x)$ y por la curvatura local dada en el plano medio. El radio de curvatura local en el plano xz esta denotado por ρ_x . El radio es determinado usando la definición de curvatura de una curva $w = w(x)$:

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{-\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{d^2 w}{dx^2}\tag{3.23}$$

Conocidas las deformaciones en un punto de la losa, las tensiones correspondientes pueden ser determinadas a partir de la Ley de Hooke, expresada por la ecuación (3.24).

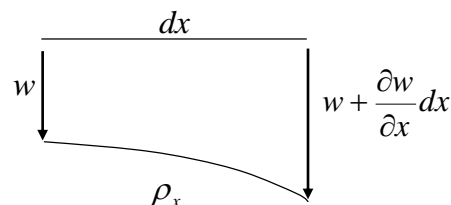


Fig. 3.5 Elemento del plano medio en el plano xz antes y después de la deformación

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}\end{aligned}\quad (3.24)$$

Sustituyendo las expresiones (3.22), se obtiene:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z \\ \tau_{xy} &= -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z\end{aligned}\quad (3.25)$$

3.2.3. Esfuerzos resultantes y pares de deformación

El estado tridimensional de esfuerzos en una estructura puede ser analizado resolviendo la ecuación de equilibrio (o ecuación de movimiento) en cada punto. Sin embargo, en la teoría de losas es conveniente analizar el equilibrio, reemplazando la distribución de esfuerzos en una estructura delgada que dependan solamente de su plano medio.

Se considera que el dominio ocupado por una losa, donde el vector de esfuerzos en el plano para cada punto en el sistema cartesiano está dado por:

$$\sigma \equiv \{\sigma_i\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix}\quad (3.26)$$

Considere que la siguiente notación típica de la teoría de losas para el sistema de coordenadas 1-2-3 referidas anteriormente es reemplazada con el sistema $x-y-z$ (Fig. 3.3).

Como un resultado de la simetría, en el plano de esfuerzos de corte $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Los esfuerzos referidos en la ecuación (3.24) y se aplica un elemento infinitesimal de la losa, como se muestra en la Fig. 3.6.

Se reemplaza el sistema actual de esfuerzos con las llamadas fuerzas resultantes y momentos que se representan por integrales de los esfuerzos con respecto al plano medio. Estas integrales son tomadas a través del espesor de la losa. De acuerdo a lo anterior, las fuerzas resultantes en el plano se representan en la (3.27).

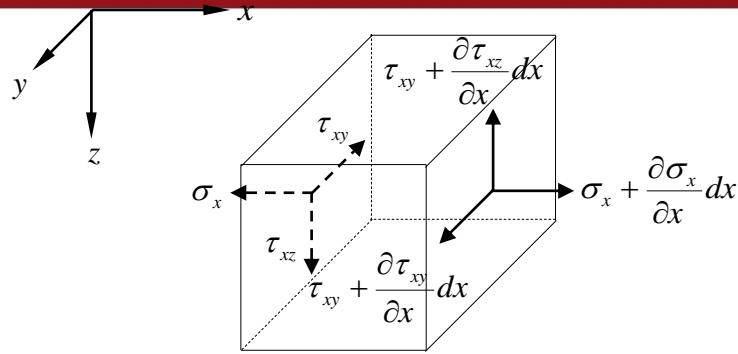


Fig. 3.6 Esfuerzos actuantes en un elemento infinitesimal con dimensiones dx , dy , dz .

$$\{N\} \equiv \{N_i\} = \begin{Bmatrix} N_x(x, y) \\ N_y(x, y) \\ N_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix} dz \quad (3.27)$$

El vector de par de esfuerzos es:

$$\{M\} \equiv \{M_i\} = \begin{Bmatrix} M_x(x, y) \\ M_y(x, y) \\ M_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix} z dz \quad (3.28)$$

Notar que el esfuerzo de corte en el plano τ_{xy} y τ_{yx} produce esfuerzos resultantes y pares de esfuerzo.

El esfuerzo de corte transversal τ_{xz} , τ_{yz} puede ser reemplazado por el vector de esfuerzo de corte transversal:

$$\{Q\} \equiv \{Q_i\} = \begin{Bmatrix} Q_x(x, y) \\ Q_y(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz}(x, y, z) \\ \tau_{yz}(x, y, z) \end{Bmatrix} dz \quad (3.29)$$

El momento del esfuerzo de corte transversal con respecto al plano medio es igual a cero. El esfuerzo normal σ_z es usualmente pequeño comparado con el esfuerzo de corte transversal.

Las fuerzas resultantes y momentos en el sistema rectangular son mostrados en la Fig. 3.7. Es claro que las fuerzas resultantes N_x , N_{xy} , Q_x y los momentos M_x , M_{xy} son aplicados a la sección transversal.

Se considera una losa delgada cuando el vector de esfuerzos es relacionado con el vector de deformaciones por el sistema de ecuaciones similares a (3.15) y (3.18). Este sistema es reducido a tres ecuaciones en el plano, que son de la forma:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (3.30)$$

Donde $[C]$ es la matriz de coeficientes de rigidez.

De acuerdo a discusión previa, las fuerzas resultantes y momentos son:

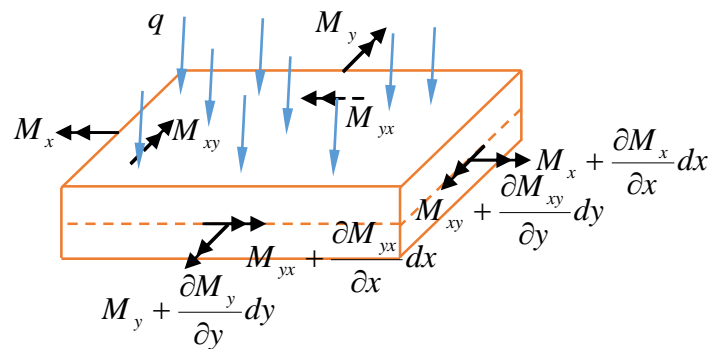
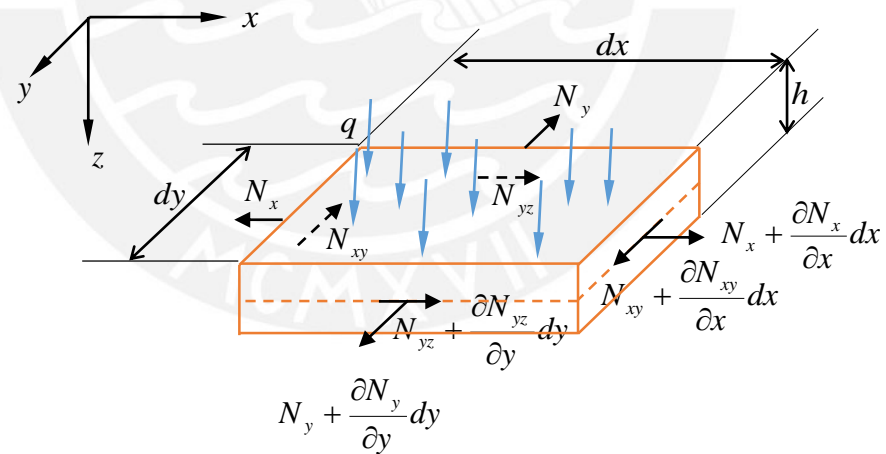
$$\{N\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C]\{\varepsilon\}dz \quad \{M\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C]\{\varepsilon\}zdz \quad (3.31)$$

De acuerdo a la teoría de losas delgadas y de primer orden, las deformaciones por corte están representadas por una función lineal a lo largo de su espesor, entonces se puede representar por:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{\kappa\} \quad (3.32)$$

Reemplazar la ecuación (3.30) en (3.29), se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C]dz & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C]zdz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C]zdz & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [C]z^2dz \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$



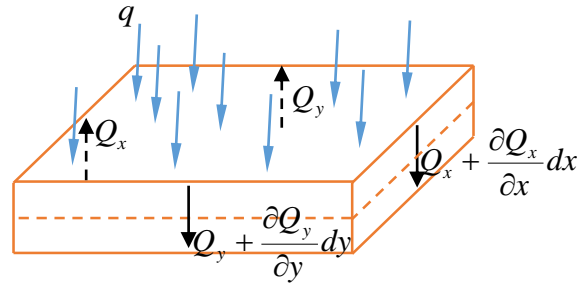


Fig. 3.7 Fuerzas resultantes y momentos actuantes en la losa

Para el caso de una losa delgada isotrópica, reemplazar las ecuaciones (3.14), (3.13), (3.21) y (3.22) en (3.30) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \\
 N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \\
 N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Donde: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, en S.I. su unidad es N.m.

3.2.4. Ecuación gobernante

Se asume que la carga que actúa sobre la losa es normal a su superficie y las flechas son pequeñas en comparación con el espesor. Respecto al contorno, se asume que los bordes tienen libertad para moverse en el plano de la losa; en estas condiciones las reacciones en los bordes son normales a la losa. Con estas hipótesis se pueden despreciar las deformaciones en el plano medio de la losa durante la flexión.

Además de los momentos flectores M_x y M_y los momentos torsores M_{xy} que se consideran en la flexión pura, hay fuerzas cortantes verticales que actúan en las caras del elemento (Fig. 3.7). Los valores de estos esfuerzos cortantes por unidad de longitud paralela a los ejes x e y se denominan Q_x y Q_y .

Debe considerarse también una carga distribuida sobre la cara superior de la losa. Se denomina q la intensidad de esta carga, de modo que la carga que actúa sobre el elemento es $qdx dy$.

Proyectando sobre el eje z las fuerzas que actúan sobre el elemento (Fig. 3.7) se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy + q dx dy = 0$$

De donde:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (3.35)$$

Tomando momentos con respecto al eje x de todos los esfuerzos que actúan sobre el elemento se obtiene la ecuación de equilibrio:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (3.36)$$

Del mismo modo tomando momentos respecto al eje y se tiene:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (3.37)$$

Puesto que no hay fuerzas en las direcciones x e y ni momentos con respecto al eje z , las tres ecuaciones (3.33), (3.34) y (3.35) determinan totalmente el equilibrio del elemento. Al eliminar las fuerzas cortantes Q_x y Q_y de estas ecuaciones, despejar las ecuaciones (3.34) y (3.35) y sustituyéndolos en la ecuación (3.33), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad (3.38)$$

Para escribir esta ecuación en función de los desplazamientos w de la losa, se acepta aquí que las ecuaciones de (3.32), desarrolladas para el caso de flexión pura, puedan usarse también para el caso de cargas transversales.

Sustituyendo las expresiones (3.32) en (3.36) se obtiene:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (3.39)$$

Esta última ecuación puede escribirse en forma simbólica:

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \quad (3.40)$$

Donde el Laplaciano $\nabla^4(\dots) = \frac{\partial^4(\dots)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4(\dots)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4(\dots)}{\partial y^4}$ en coordenadas cartesianas.

Para determinar los esfuerzos cortantes se emplea las ecuaciones (3.34) y (3.35), de las cuales:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

O usando la forma simbólica:

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Los esfuerzos resultantes con respecto a un sistema ortogonal de coordenadas $n-t$, y la rotación de un ángulo α con respecto al eje x , pueden ser manejables por la transformación de esfuerzos. Así, considerando las condiciones de equilibrio se obtiene:

$$M_n = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha - 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.43a)$$

$$M_t = M_x \sin^2 \alpha + M_y \cos^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.43b)$$

$$M_{nt} = M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (M_x - M_y) \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.43c)$$

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha \quad (3.43d)$$

$$Q_t = -Q_x \sin \alpha + Q_y \cos \alpha \quad (3.43e)$$

Reemplazar las ecuaciones (3.34) y (3.42) en (3.43) para obtener los esfuerzos resultantes en la sección inclinada:

$$M_n = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (3.44a)$$

$$M_t = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right) \quad (3.44b)$$

$$M_{nt} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \quad (3.44c)$$

$$Q_n = -D \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w \quad (3.44d)$$

$$Q_t = -D \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w \quad (3.44e)$$

La convención de signos se detalla en la fig. 3.8.

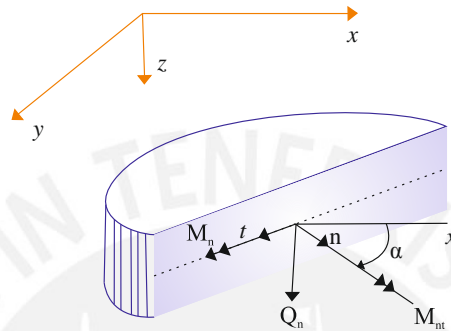


Fig. 3.8 Esfuerzos resultantes en la sección transversal inclinada

3.3. Ecuación diferencial para losas

La ecuación gobernante para losas puede ser fácilmente obtenida considerando las condiciones de equilibrio de un elemento infinitesimal de la losa en la dirección z . Sin embargo, en esta sección se deriva la ecuación gobernante mediante el principio de la energía potencial mínima y empleando la herramienta matemática del cálculo de variaciones.

Una losa con un contorno arbitrario y esquinas sujetas a cargas transversales de densidad $f(x, y)$ y cargas laterales M_n^* y V_n^* . Además, una carga transversal concentrada R_k^* ($k = 1, 2, \dots, k$) puede ser aplicada en las esquinas.

El contorno de la losa puede ser un soporte elástico con rigidez traslacional $k_T(s)$ y rigidez rotacional $k_R(s)$. Las esquinas pueden estar sobre un soporte elástico con rigidez $k_c^{(k)}$.

La energía potencial total Π de una losa es la suma de la energía de deformación U_b obtenido por la flexión, la energía elástica del soporte elástico U_s y la energía potencial V de las cargas externas.

$$\Pi = U_b + U_s + V \quad (3.45)$$

Considerar la teoría de losas delgadas, la energía de deformación debida a la flexión está dada por la integral de volumen:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (3.46)$$

Reemplazar las ecuaciones (3.24) y (3.25) e integrando a través del espesor de la losa la ecuación (3.46):

$$U_b = \frac{D}{2} \int_{\Omega} [w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2\nu w_{,xx} w_{,yy} + 2(1-\nu)w_{,xy}^2] d\Omega \quad (3.47)$$

Por ser conveniente, las derivadas son denotadas por subíndices precedidos por una coma.

La energía elástica debido a los apoyos flexibles de los soportes es expresado como:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (k_T w^2 + k_R w_n^2) ds + \frac{1}{2} \sum_k k_c^{(k)} w_k^2 \quad (3.48)$$

Mientras que la energía potencial debido a las cargas externas está dada como:

$$V = - \int_{\Omega} f w d\Omega - \int_{\Gamma} (V_n^* w - M_n^* w_n) ds - \sum_k R_k^* w_k \quad (3.49)$$

La ecuación (3.45) se escribe de la forma siguiente:

$$\Pi = \int_{\Omega} F(w, w_{,xx}, w_{,yy}, w_{,xy}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (k_T w^2 + k_R w_n^2) ds + \frac{1}{2} \sum_k k_c^{(k)} w_k^2 - \int_{\Gamma} (V_n^* w - M_n^* w_n) ds - \sum_k R_k^* w_k \quad (3.50)$$

Donde: $F = \frac{D}{2} [w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2\nu w_{,xx} w_{,yy} + 2(1-\nu)w_{,xy}^2] - f w$

El equilibrio de la losa requiere que la primera variación del potencial $\delta\Pi$ sea nulo. Aplicar el operador δ en la ecuación (3.50):

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial w} \delta w + \frac{\partial F}{\partial w_{,xx}} \delta w_{,xx} + \frac{\partial F}{\partial w_{,yy}} \delta w_{,yy} + \frac{\partial F}{\partial w_{,xy}} \delta w_{,xy} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} (k_T w \delta w + k_R w_n \delta w_n) ds \\ & - \int_{\Gamma} (V_n^* \delta w - M_n^* \delta w_n) ds + \sum_k [k_c^{(k)} w_k - R_k^*] \delta w_k = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Considerar lo siguiente:

$$\frac{\partial F}{\partial w} = -f \quad (3.52a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{,xx}} = D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) = -M_x \quad (3.53b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{,yy}} = D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) = -M_y \quad (3.53c)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{,xy}} = 2D(1-\nu)w_{,xy} = 2M_{xy} \quad (3.53d)$$

La ecuación (3.52) puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\Omega} (-M_x \delta w_{,xx} + 2M_{xy} \delta w_{,xy} - M_y \delta w_{,yy}) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} (k_T w \delta w + k_R w_n \delta w_n) ds - \int_{\Omega} f \delta w d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} (V_n^* \delta w - M_n^* \delta w_n) ds + \sum_k [k_c^{(k)} w_k - R_k^*] \delta w_k = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

La ecuación (3.54) expresa el principio de trabajo virtual para una losa sometida a flexión. Las integrales de dominio en la ecuación pueden ser integradas por partes, dos veces, empleando el teorema de Gauss-Green para eliminar las derivadas de la variación $\delta w_{,xx}$, $\delta w_{,xy}$ y $\delta w_{,yy}$. Luego empleando las ecuaciones (3.43d, e) y tomando en cuenta lo siguiente:

$$w_{,x} = w_n \cos \alpha - w_t \sin \alpha \quad (3.55a)$$

$$w_{,y} = w_n \sin \alpha + w_t \cos \alpha \quad (3.55b)$$

La ecuación (3.54) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\Omega} (-M_{x'xx} + 2M_{xy'xy} - M_{y'yy} - f) \delta w d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} [(-M_n + k_R w_n + M_n^*) \delta w_n + M_{nt} \delta w_t] ds \\ & + \int_{\Gamma} (Q_n + k_T w - V_n^*) \delta w ds + \sum_k [k_c^{(k)} w_k - R_k^*] \delta w_k = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Además, señalando que $w_t = w_s$ y M_{nt} es discontinuo en las esquinas, la integración por partes del último término en la integral de línea de la ecuación (3.56) será:

$$\int_{\Gamma} M_{nt} \delta w_s ds = - \int_{\Gamma} M_{nt's} \delta w ds - \sum_k \|M_{nt}\|_k \delta w \quad (3.57)$$

Donde $\|M_{nt}\|_k = M_{nt}^{(+)} - M_{nt}^{(-)}$ representa el salto de discontinuidad del momento torsor en las esquinas. Así, la ecuación (3.56) será:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\Omega} (-M_{x'xx} + 2M_{xy'xy} - M_{y'yy} - f) \delta w d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} [(-M_n + k_R w_n + M_n^*) \delta w_n + (Q_n - M_{n's} + k_T w - V_n^*) dw] ds \\ & + \sum_k [k_c^{(k)} w_k - \|M_{nt}\|_k - R_k^*] \delta w_k = 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Las cantidades δw , δw_n y δw_k son arbitrarias, y a partir de la ecuación (3.58) se obtiene la ecuación diferencial de Euler-Lagrange:

$$M_{x'xx} - 2M_{xy'xy} + M_{y'yy} = -f \quad (3.59)$$

Y las condiciones de contorno son los siguientes:

$$Q_n - M_{n's} + k_T w = V_n^* \text{ o } w = w^* \text{ en } \Gamma \quad (3.59a)$$

$$M_n - k_R w_n = M_n^* \text{ o } w_n = w_n^* \text{ en } \Gamma \quad (3.59b)$$

$$k_c^{(k)} w - \|M_{nt}\|_k = R_k^* \text{ o } w_k = w_k^* \text{ en la esquina } k \quad (3.59c)$$

Físicamente, la cantidad $\|M_{nt}\|$ representa una fuerza concentrada ficticia, que se expresa en la ecuación (3.59c). En base a la fig. 3.9, Kirchhoff dio una interpretación heurística de esta fuerza ficticia. La dirección de las fuerzas ficticias es opuesta al eje z . La fuerza concentrada puede también crecer en puntos donde generalmente el momento de torsor a lo largo del contorno es discontinuo.

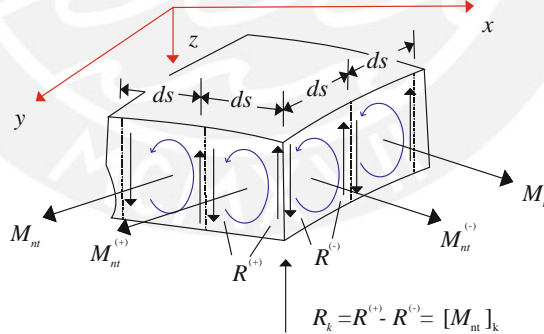


Fig. 3.9 Dispositivo de Kirchhoff para interpretar la fuerza ficticia

La cantidad:

$$V_n = Q_n - M_{n's} \quad (3.60)$$

3.4. Las condiciones de contorno

La condición de contorno (3.59a, b) para la teoría de losas delgadas puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\alpha_1 w + \alpha_2 V w = \alpha_3 \text{ en } \Gamma \quad (3.61a)$$

$$\beta_1 \frac{\partial w}{\partial n} + \beta_2 M w = \beta_3 \text{ en } \Gamma \quad (3.61b)$$

Donde $\alpha_i = \alpha_i(s)$, $\beta_i = \beta_i(s)$ ($i = 1, 2, 3$) son funciones específicas en el contorno Γ y M , V son operadores diferenciales definidos como:

$$M = -D \left[\nabla^2 + (\nu - 1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \quad (3.62)$$

$$V = -D \left[\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 - (\nu - 1) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2}{\partial n \partial t} \right) \right] \quad (3.63)$$

Las cantidades $M w$ y $V w$ representan el momento flector M_n y la fuerza cortante equivalente V_n , respectivamente. Las condiciones de contorno (3.61a, b) son condiciones para las losas con un comportamiento lineal. Las condiciones convencionales son obtenidas de las condiciones de soporte.

Las funciones α_i y β_i son discontinuos en los puntos con cambios. Entonces, para que exista solo una solución en la ecuación de losas, las condiciones de contorno (3.61a, b) deben ser suplementadas por las condiciones de esquina.

$$c_{1k} w + c_{2k} \|T w\| = c_{3k} \quad (3.64)$$

Donde c_{ik} ($i = 1, 2, 3$) son constantes específicas en las esquinas k y T es un operador diferencial definido como:

$$T = D(1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial n \partial t} \quad (3.65)$$

Por lo tanto, $T w$ es el momento torsor, M_n es el momento en el contorno y $\|T w\|_k$ representa los saltos de discontinuidad en las esquinas.

Para los contornos curvos es conveniente emplear la coordenada intrínseca s y n , la longitud de arco s y la coordenada n que es normal al contorno, ver fig. 3.10.

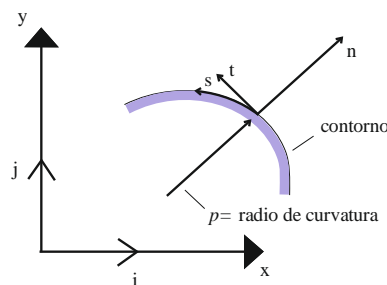


Fig. 3.10 Coordenada intrínseca

Las coordenadas curvilíneas y las derivadas en el contorno son expresadas por la siguiente relación:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial s} \quad (3.66a)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \kappa \frac{\partial w}{\partial n} \quad (3.66b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} - \kappa \frac{\partial w}{\partial s} \quad (3.66c)$$

Donde $\kappa = \kappa(s)$ es la curvatura en el punto s , la cual es evaluada mediante la siguiente relación:

$$\kappa = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi/dp}{ds/dp} = \frac{\begin{matrix} \dots & \dots \\ x & y - y & x \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x & + & y \end{matrix}}{\left(\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ x & + & y \end{matrix} \right)^{1/2}} \quad (3.67)$$

Donde $x(p)$ y $y(p)$ son las ecuaciones paramétricas del contorno. Aquí los puntos representan la derivada con respecto al parámetro p . Si el contorno se expresa por la ecuación $y = y(x)$, la ecuación (3.67) se expresa de la siguiente forma:

$$\kappa = -\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (3.68a)$$

La ecuación tiene el signo menos porque el vector n está en dirección opuesta al vector normal principal de la curva. Además, si el contorno es definido en coordenadas polares, la ecuación (3.67) será:

$$\kappa = \frac{r^2 + 2r_\theta^2 - rr_{\theta\theta}}{(r^2 + r_\theta^2)^{3/2}} \quad (3.68b)$$

Emplear la ecuación (3.66) para obtener los esfuerzos resultantes en el contorno:

$$M_n = -D \left[\nabla^2 w + (\nu - 1) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \kappa \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] \quad (3.69a)$$

$$V_n = -D \left[\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - (\nu - 1) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} - \kappa \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] \quad (3.69b)$$

$$M_{nt} = -D(\nu - 1) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} + \kappa \frac{\partial w}{\partial s} \right) \quad (3.69c)$$

$$M_t = -D \left[\nu \nabla^2 w - (\nu - 1) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \kappa \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right] \quad (3.69d)$$

3.5. Formulación directa del método de los elementos de contorno para losas

3.5.1. Identidad de Rayleigh-Green

Considerar el dominio Ω en el plano xy ocupado por una losa. El dominio es delimitado por $K + 1$ curvas sin intersecciones $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ que forman el contorno $\Gamma = \bigcup_{k=0}^K \Gamma_k$ de la losa, las cuales pueden formar losas con esquinas.

La obtención de la representación integral de la solución para la ecuación de la losa requiere el establecimiento de una identidad reciproca para el operador biarmónico. Por ello se empleará la identidad de reciprocidad de Green, considerando las siguientes funciones $u = u(x, y)$ y $\bar{u} = \bar{u}(x, y)$.

$$\int_{\Omega} (\bar{u} \nabla^2 u - u \nabla^2 \bar{u}) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) ds \quad (3.70)$$

Emplear la ecuación (3.70) para $u = \nabla^2 w$ y $\bar{u} = \nabla^2 v$:

$$\int_{\Omega} (v \nabla^4 w - \nabla^2 w \nabla^2 v) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - \nabla^2 w \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad (3.71)$$

Similarmente, reemplazar $u = w$ y $\bar{u} = \nabla^2 v$:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 v \nabla^2 w - w \nabla^4 v) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\nabla^2 v \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v \right) ds \quad (3.72)$$

Sumar las ecuaciones (3.71) y (3.72), para obtener:

$$\int_{\Omega} (u \nabla^4 w - w \nabla^4 v) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - w \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v - \frac{\partial v}{\partial n} \nabla^2 w + \frac{\partial w}{\partial n} \nabla^2 v \right) ds \quad (3.73)$$

La ecuación (3.73) es la identidad de reciprocidad de Green para un operador biarmónico. La cual es conocida como la identidad de Rayleigh-Green, que también puede ser derivada integrando por partes la integral $\int_{\Omega} v \nabla^4 w d\Omega$ empleando el teorema de Gauss-Green.

La ecuación (3.74) representa las funciones v y w , las cuales son cuatro veces diferenciables en el dominio Ω y tres veces en el contorno Γ . La integral de la mano derecha incluye las cantidades $w, \partial w / \partial n, \nabla^2 w$ y $\partial \nabla^2 w / \partial n$. Donde la función w representa la deflexión de la superficie media de la losa, $\partial w / \partial n$ es la pendiente en la

dirección normal al contorno. Las cantidades $\nabla^2 w$ y $\partial \nabla^2 w / \partial n$ representan el momento flector y la fuerza cortante, respectivamente.

La ecuación integral de contorno (3.73) se puede convertir en la siguiente forma, empleando los términos de contorno Mw , Mv , Vw y Vv en la integral de contorno:

$$\int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - w \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v - \frac{\partial v}{\partial n} \nabla^2 w + \frac{\partial w}{\partial n} \nabla^2 v \right) ds = \quad (3.74)$$

$$- \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left(v Vw - w Vv - \frac{\partial v}{\partial n} Mw + \frac{\partial w}{\partial n} Mv \right) + I_{\Gamma}$$

Donde:

$$I_{\Gamma} = (\nu - 1) \int_{\Gamma} \left(\nu \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} - w \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2 v}{\partial n \partial t} + \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) ds \quad (3.75)$$

Seguidamente, integrar la ecuación (3.75) por partes, emplear la ecuación (3.65), y señalar que $\frac{\partial w}{\partial n}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ y $\frac{\partial^2 v}{\partial n \partial t}$ son discontinuos en las esquinas:

$$I_{\Gamma} = \frac{1}{D} \sum_k (v \|Tw\|_k - w \|Tv\|_k) + (1 - \nu) \sum_k \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_k \quad (3.76)$$

La ecuación (3.76) puede ser reducida debido a que los términos de la segunda sumatoria son nulos. Así, considerar la fig. 3.11 para obtener:

$$\frac{\partial w}{\partial n^{(+)}} = \frac{\partial w}{\partial n^{(-)}} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial t^{(-)}} \sin \alpha \quad (3.77a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t^{(+)}} = - \frac{\partial w}{\partial n^{(-)}} \sin \alpha + \frac{\partial w}{\partial t^{(-)}} \cos \alpha \quad (3.77b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n^{(+)}} = \frac{\partial v}{\partial n^{(-)}} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial t^{(-)}} \sin \alpha \quad (3.77c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t^{(+)}} = - \frac{\partial v}{\partial n^{(-)}} \sin \alpha + \frac{\partial v}{\partial t^{(-)}} \cos \alpha \quad (3.77d)$$

Al emplear las ecuaciones (3.77a, b, c, d), la segunda sumatoria de la ecuación (3.76) se escribe de la forma:

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_k = \quad (3.78)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n^{(+)}} \frac{\partial w}{\partial t^{(+)}} - \frac{\partial v}{\partial t^{(+)}} \frac{\partial w}{\partial n^{(+)}} \right)_k - \left(\frac{\partial v}{\partial n^{(-)}} \frac{\partial w}{\partial t^{(-)}} - \frac{\partial v}{\partial t^{(-)}} \frac{\partial w}{\partial n^{(-)}} \right)_k = 0$$

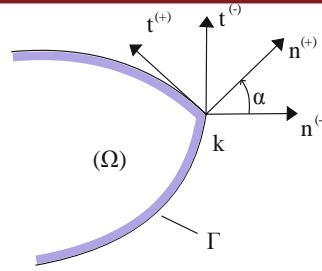


Fig. 3.11 Las esquinas k en el dominio Γ

En base a las ecuaciones (3.76) y (3.78), la ecuación (3.74) se convierte en:

$$D \int_{\Omega} (v \nabla^4 w - w \nabla^4 v) d\Omega = - \int_{\Gamma} \left(v V w - w V v - \frac{\partial v}{\partial n} M w + \frac{\partial w}{\partial n} M v \right) ds + \sum_k (v \|T w\|_k - w \|T v\|_k) \quad (3.79)$$

La identidad de reciprocidad (3.79) es conocida como la identidad generalizada de Rayleigh-Green. La integral de contorno contiene las variables de deflexiones, rotaciones, momentos flectores y fuerzas cortantes. Después de reorganizar los términos, la ecuación (3.79) puede ser escrito como:

$$\int_{\Omega} v (D \nabla^4 w) d\Omega + \int_{\Gamma} \left(v V w - \frac{\partial v}{\partial n} M w \right) ds - \sum_k v \|T w\|_k = \int_{\Omega} w (D \nabla^4 v) d\Omega + \int_{\Gamma} \left(w V v - \frac{\partial w}{\partial n} M v \right) ds - \sum_k w \|T v\|_k \quad (3.80)$$

3.5.2. La solución fundamental

La solución fundamental de la ecuación gobernante de losas es una solución particular singular a la ecuación siguiente:

$$D \nabla^4 v = \delta(Q - P) \quad (3.81)$$

Donde $\delta(Q - P)$ es la función delta de Dirac que representa la densidad de carga de un punto $Q: \{\xi, \eta\}$ debido a una fuerza unitaria concentrada en un punto $P: \{x, y\}$. Físicamente, la solución de la ecuación (4.81) es una función $v = v(Q, P)$ que representa la deflexión en el punto Q debido a la fuerza concentrada en el punto P en una losa infinita de rigidez a la flexión D . La solución fundamental de $v(Q, P)$ es simétrica con respecto al punto P y puede ser establecida empleando un procedimiento análogo; el que consiste en transformar la ecuación (3.81) en coordenadas polares con origen en el punto P :

$$\nabla^2 (\nabla^2 v) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \right] = 0, r \neq 0 \quad (3.82)$$

Donde $r = |Q - P| = \left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \right]^{1/2}$ es la distancia entre los puntos P y Q .
Integrando reiteradamente la ecuación (3.82); se obtiene:

$$v(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 \quad (3.83)$$

Donde $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$ son constantes que pueden ser determinados empleando las consideraciones físicas siguientes:

- i) $v(r)$ debe ser finito en $r = 0$.
- ii) $v(r)$ debe ser delimitada en el infinito.
- iii) La fuerza transversal en un elemento infinitesimal de la losa, incluido la fuerza unitaria concentrada debe estar en equilibrio.

Buscamos una solución particular que se puede establecer cómo $C_4 = 0$. Además, las condiciones (i) y (ii) requieren que C_2 y C_3 sean nulos. Así, la solución (3.83) será:

$$v(r) = C_1 r^2 \ln r \quad (3.84)$$

Si Γ_0 denota el contorno de un pequeño dominio Ω_0 que incluye el punto Q luego la condición (iii) requiere que:

$$\int_{\Gamma_0} V v ds - \sum_k \|T v\|_k + 1 = 0 \quad (3.85)$$

En base a la ecuación (3.63) y (3.65), se obtiene:

$$V v = -D \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v - \frac{\partial}{\partial s} T v \quad (3.86)$$

Y la ecuación (3.85) queda de la siguiente forma:

$$-D \int_{\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial s} \nabla^2 v ds - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial s} T v ds - \sum_k \|T v\|_k + 1 = 0$$

Tomar en consideración lo siguiente:

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial s} T v ds = - \sum_k \|T v\|_k$$

Se obtiene:

$$-D \int_{\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v ds + 1 = 0 \quad (3.87)$$

Entonces, la ecuación (3.87) para algún punto en el contorno Γ_0 , con forma llana o curva. Se determina el momento flector y la fuerza cortante a partir de la ecuación (3.84):

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 4C_1(1 + \ln r)$$

Y

$$\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v = 4C_1 \frac{1}{r} r_n$$

Por conveniencia r_n denota la derivada de r_n . La derivada normal se considera con respecto al punto (ξ, η) . La fuerza cortante puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v = C_1 \frac{4}{r} \cos \phi, \quad \phi = \angle(r, n)$$

Para generalizar, se considera un dominio Ω_0 de un círculo pequeño en $P(r=0)$ con un radio ρ (ver la fig. 3.12). Considerar $\phi = 0$, por consiguiente la ecuación (3.87) es descrito como:

$$-DC_1 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{4}{\rho} \rho d\theta + 1 = 0$$

De donde se obtiene:

$$C_1 = \frac{1}{8\pi D} \tag{3.88}$$

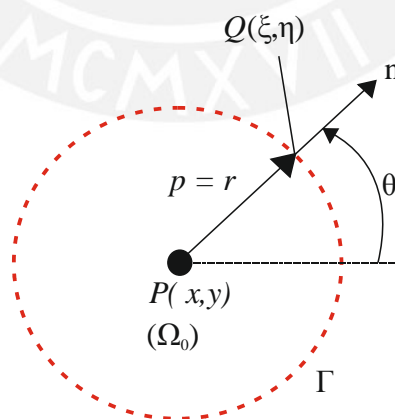


Fig. 3.12 Dominio circular Ω_0 de radio ρ con centro P

Con el valor de C_1 la solución fundamental (3.84) se obtiene:

$$v = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \tag{3.89}$$

La solución fundamental (3.89) es simétrica con respecto a los puntos P y Q , se cumple que $v(P, Q) = v(Q, P)$.

3.5.3. La representación integral de la solución

Se emplea a representación integral de la solución de losas (3.39) y las ecuaciones (3.62), (3.63) y (3.65), para obtener las funciones de núcleo a partir de la ecuación (3.79):

$$v = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (3.90a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{8\pi D} r r_n (1 + 2 \ln r) \quad (3.90b)$$

$$Mv = -\frac{1}{8\pi} [2(1 + \nu) \ln r + (3 + \nu)r_n^2 + (1 + 3\nu)r_t^2] \quad (3.90c)$$

$$Vv = -\frac{1}{4\pi r} [2r_n + (1 - \nu)(r_n - \kappa r)(r_n^2 - r_t^2)] \quad (3.90d)$$

$$Tv = \frac{1}{4\pi} (1 - \nu) r_n r_t \quad (3.90e)$$

Donde:

$$r_n = \frac{\partial r}{\partial n_q} = \cos \phi \quad (3.91a)$$

$$r_t = \frac{\partial r}{\partial t_q} = -\sin \phi \quad (3.91b)$$

$$r = |q - P|, \quad q : \{\xi, \eta\} \in \Gamma, \quad P : \{x, y\} \in \Omega \quad (3.91c)$$

Considerar un punto P en el interior del dominio Ω . Las funciones de núcleo son continuos en todo el dominio, excepto en P donde $r = 0$. Entonces se considera un dominio reducido Ω^* que es el resultado de restar al dominio Ω un dominio pequeño en forma de círculo Ω_ρ con un radio ρ con centro en P . El radio escogido pertenece al dominio $\Omega_\rho \in \Omega$ (fig. 3.13). Aplicar la ecuación (3.79) para el dominio $\Omega^* = \Omega - \Omega_\rho$ se obtiene:

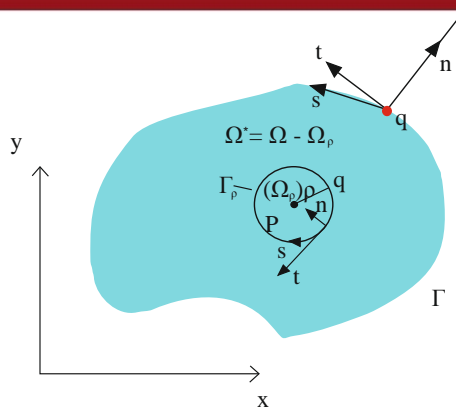


Fig. 3.13 Dominios Ω^* y Ω_ρ y notaciones.

$$\int_{\Omega^*} v f d\Omega + \int_{\Gamma} \left(v V w - w V v - \frac{\partial v}{\partial n} M w + \frac{\partial w}{\partial n} M v \right) ds - \sum_k (v \|T w\|_k - w \|T v\|_k) + I_{\Gamma_\rho} = 0 \quad (3.92)$$

Donde:

$$I_{\Gamma_\rho} = \int_{\Gamma_\rho} \left(v V w - w V v - \frac{\partial v}{\partial n} M w + \frac{\partial w}{\partial n} M v \right) ds \quad (3.93)$$

Para puntos q correspondientes al dominio Γ_ρ con las siguientes características $r = \rho$, $\phi = \pi$, $r_n = -1$, $r_t = 0$ y $\kappa = -1/\rho$. Por tanto, las ecuaciones (3.90a, b, c, d, e) se convierten en:

$$v = \frac{1}{8\pi D} \rho^2 \ln \rho \quad (3.94a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{1}{8\pi D} \rho (1 + 2 \ln \rho) \quad (3.94b)$$

$$M v = -\frac{1}{8\pi} [2(1 + \nu) \ln \rho + (3 + \nu)] \quad (3.94c)$$

$$V v = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho} \quad (3.94d)$$

$$T v = 0 \quad (3.94e)$$

Evaluar el límite de la ecuación (3.93) para $\rho \rightarrow 0$. En este caso, el dominio Ω_ρ se reducirá a un punto y $\Omega^* \rightarrow \Omega$. Después de aplicar el límite en la ecuación (3.93), los términos de la integral son evaluados empleando el teorema del valor medio. Así, denotar por w_0 , $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_0$, $(M w)_0$, $(V w)_0$ los respectivos valores en un punto $q_0 \in \Gamma_\rho$ y observar que $\lim_{\rho \rightarrow 0} q_0 = P$ y $ds = \rho d\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, se obtiene:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} v V w ds = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[(Vw)_0 \int_0^{2\pi} \frac{1}{8\pi D} \rho^2 \ln \rho d\theta \right] = 0 \quad (3.95a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} w V v ds = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[w_0 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho} \rho d\theta \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} w(q_0) = w(P) \quad (3.95b)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\partial v}{\partial n} M w ds = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[(Mw)_0 \int_0^{2\pi} \frac{-1}{8\pi D} \rho (1 + 2 \ln \rho) \rho d\theta \right] = 0 \quad (3.95c)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\partial w}{\partial n} M v ds = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_0 \int_0^{2\pi} \frac{-1}{8\pi} [(2 + \nu) \ln \rho + (3 + \nu)] \rho d\theta \right] = 0 \quad (3.95d)$$

Sustituir las ecuaciones (3.95) en la ecuación (3.93), y se obtiene como resultado lo siguiente:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} I_{\Gamma_\rho} = -w(P) \quad (3.96)$$

Y la ecuación (3.92) es la representación integral de la solución en el dominio Ω de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w(P) = & \int_{\Omega} v(P, Q) f(Q) d\Omega_Q \\ & + \int_{\Gamma} \left[v(P, q) V w(q) - w(q) V_q v(P, q) - \frac{\partial v(P, q)}{\partial n_q} M v(q) + \frac{\partial w(q)}{\partial n_q} M_q v(P, q) \right] ds_q \\ & - \sum_k \left(v(P, q_k) \|T_q w(q_k)\| - w(q_k) \|T_q v(P, q_k)\| \right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Donde $P, Q \in \Omega, q \in \Gamma$. Los subíndices en las diferenciales $d\Omega$, ds y en los operadores $\frac{\partial}{\partial n}$, M , V , T indica los puntos con respecto al cual se integran o diferencian. Los argumentos de las funciones y subíndices de la ecuación (3.97) pueden ser omitidos. Entonces la ecuación (3.97) se escribe de la forma:

$$w(P) = \iint_{\Omega} v f d\Omega + \int_{\Gamma} \left[v V w - w V v - \frac{\partial v}{\partial n} M w + \frac{\partial w}{\partial n} M v \right] ds - \sum_k \left(v \|T w\|_k - w \|T v\|_k \right) \quad (3.98)$$

3.5.4. Ecuaciones integrales de contorno

La ecuación (3.98) permite la evaluación de las deflexiones $w(P)$ en el punto P en el interior de la losa sí; los valores de la deflexión w , la pendiente normal $\partial w / \partial n$, el momento flector Mw y la fuerza cortante Vw en el contorno Γ , y las fuerzas en las esquinas $\|T w\|_k$ son conocidos. Sin embargo, en problemas de losas solo se conocen

dos de las cuatro condiciones. Consecuentemente, es necesario determinar las dos condiciones desconocidas, esto se logra mediante la formulación de dos ecuaciones integrales de contorno acopladas que permite determinar las condiciones desconocidas.

3.5.4.1. Primera ecuación integral de contorno

La primera ecuación integral de contorno se obtiene por la formulación de la ecuación (3.79) en términos de las funciones w y v , y considera el punto P en un punto p ubicado en el contorno Γ . Para generalizar, suponer que el punto p está en una esquina con un ángulo interno igual a $\alpha\pi$, para puntos donde el contorno es liso el valor de $\alpha = 1$.

Cuando el punto p se ubica en el dominio Γ , la distancia r es nulo cuando q coincide con p . De las ecuaciones (3.94a, b) se concluye que los núcleos v y $\partial v/\partial n$ son nulos para $r=0$. Por lo tanto, las integrales de contorno son regulares. Además, para $\phi \rightarrow \pm\pi/2$ como $r \rightarrow 0$, debido a la ecuación (3.94e) da $Tv=0$. Asimismo, los núcleos Mv y Vv son singulares cuando $r \rightarrow 0$. Como se trabajó anteriormente se considera un dominio reducido Ω^* es el resultado de la diferencia del dominio Ω y Ω_ρ , el cual incluye todos los puntos de Ω dentro de la distancia $d < \rho$ (fig. 3.14).

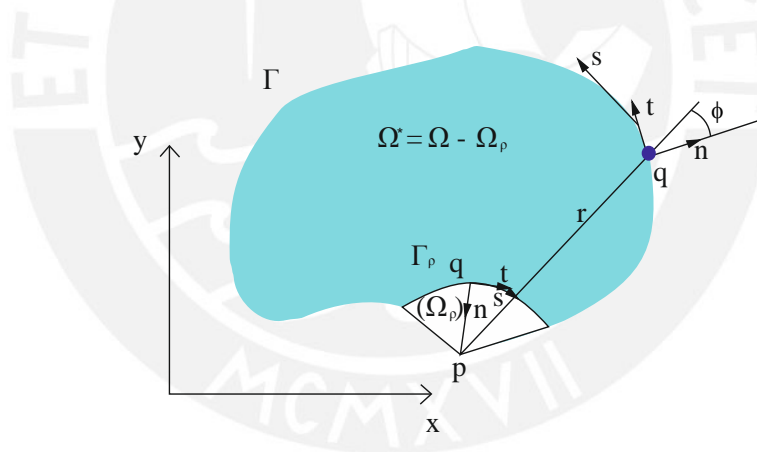


Fig. 3.14 Dominios Ω^* , Ω_ρ para un punto p en el contorno y notaciones

Aplicar la identidad de reciprocidad (3.79) para el dominio Ω^* . El punto p se ubica fuera del dominio Ω^* , y se obtiene:

$$0 = \int_{\Omega^*} v f d\Omega + \int_{\Gamma - \Gamma_\rho} \left(v Vw - w Vv - \frac{\partial v}{\partial n} Mw + \frac{\partial w}{\partial n} Mv \right) ds + I_{\Gamma_\rho} - \sum_{k^*} \left(v \|Tw\|_{k^*} - w \|Tv\|_{k^*} \right) - \| \|_p \tag{3.99}$$

Donde:

$$I_{\Gamma_\rho} = \int_{\Gamma_\rho} \left(vVw - wVv - \frac{\partial v}{\partial n} Mw + \frac{\partial w}{\partial n} Mv \right) ds \quad (3.100)$$

$$\| \|_p = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\| \|_{k^{(-)}} + \| \|_{k^{(+)}} \right) \quad (3.101)$$

$\| \|_{k^{(\pm)}}$ representa los términos adicionales en las nuevas esquinas $k^{(-)}$ y $k^{(+)}$ (fig. 3.15) y \sum_{k^*} denota la suma de los términos de las esquinas sin la contribución del punto p .

En el límite cuando $\rho \rightarrow 0$ se cumple lo siguiente:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\rho} (\cdot) ds = \int_{\Gamma} (\cdot) ds \quad (3.102a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Omega^*} (\cdot) ds = \int_{\Omega} (\cdot) ds \quad (3.102b)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\theta_1 - \theta_2) = \alpha\pi \quad (3.102c)$$

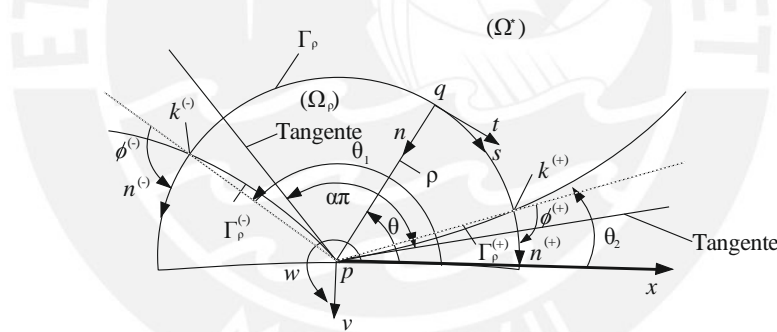


Fig. 3.15 Dominios Ω_ρ para esquinas y notaciones

En base a las ecuaciones (3.94), se obtiene:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} vVw ds = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[(Vw)_0 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{8\pi D} \rho^2 \ln \rho d(-\theta) \right] = 0 \quad (3.103a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} wVv ds = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[w_0 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho} \rho d(-\theta) \right] = \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow 0} [(\theta_1 - \theta_2)w(q_0)] = \frac{\alpha}{2} w(p) \quad (3.103b)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\partial v}{\partial n} Mw ds = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[(Mw)_0 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-1}{8\pi D} \rho(1 + 2 \ln \rho) \rho d(-\theta) \right] = 0 \quad (3.103c)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\partial w}{\partial n} M v ds = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^1 \frac{-1}{8\pi} [(2+\nu)\ln \rho + (3+\nu)] \rho d(-\theta) \right] \quad (3.103d)$$

Sustituir (3.103) en la ecuación (3.100):

$$I_{\Gamma_\rho} = -\frac{\alpha}{2} w(p) \quad (3.104a)$$

Además, de las ecuaciones (3.94a, e) se observa que $\lim_{\rho \rightarrow 0} v = 0$ y $\lim_{\rho \rightarrow 0} T v = 0$. Entonces la ecuación (3.101) vale cero.

$$\| \|_p = 0 \quad (3.104b)$$

Tomar en consideración las ecuaciones (3.104a, b) y la ecuación (3.99) para obtener lo siguiente:

$$\frac{\alpha}{2} w(p) = \int_{\Omega} v f d\Omega + \int_{\Gamma} \left(v V w - w V v - \frac{\partial v}{\partial n} M w + \frac{\partial w}{\partial n} M v \right) ds - \sum_k (v \| T w \|_k - w \| T v \|_k) \quad (3.105)$$

Las ecuaciones (3.98) y (3.105) puede ser combinado para obtener lo siguiente:

$$\varepsilon(P) w(P) = \int_{\Omega} v f d\Omega + \int_{\Gamma} \left(v V w - w V v - \frac{\partial v}{\partial n} M w + \frac{\partial w}{\partial n} M v \right) ds - \sum_k (v \| T w \|_k - w \| T v \|_k) \quad (3.106a)$$

Donde $\varepsilon(P)$ es un término libre definido como:

$$\varepsilon(P) = \begin{cases} 1 & P \text{ dentro } \Omega \\ \frac{\alpha}{2} & P = p \text{ en } \Gamma \\ 0 & P \text{ fuera } \Omega \end{cases} \quad (3.106b)$$

3.5.4.2. Segunda ecuación integral de contorno

La obtención de la segunda ecuación integral de contorno, requiere mayor atención porque la derivada direccional de la deflexión expresada en la ecuación (3.98) es considerada con respecto a un punto P en una dirección fija $m(m_x, m_y)$. Seguidamente, el punto P se aproxima al punto p en Γ y la dirección m que coincide con la normal al contorno $v(v_x, v_y)$. Por ello se formula la identidad de reciprocidad (3.79) en términos de la función $\hat{w} = w - w(p)$ y v . Debido al comportamiento singular de las funciones de núcleo en el contorno, se considera un dominio Ω^* como se define en la fig. 3.14.

$$0 = \int_{\Omega^*} v f d\Omega + \int_{\Gamma^*} \left\{ v V w - [w - w(p)] V v - \frac{\partial v}{\partial n} M w + \frac{\partial w}{\partial n} M v \right\} ds + I_{\Gamma^*} - \sum_{k^*} \left(v \|T w\|_{k^*} - [w - w(p)] \|T v\|_{k^*} \right) - \| \cdot \|_p \quad (3.107)$$

Notar que en la relación (3.107) se considera lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial n} \hat{w} = \frac{\partial}{\partial n} [w - w(p)] = \frac{\partial w}{\partial n} \quad (3.108a)$$

$$M \hat{w} = M [w - w(p)] = M w \quad (3.108b)$$

$$V \hat{w} = V [w - w(p)] = V w \quad (3.108c)$$

Al derivar la ecuación (3.107) con respecto a la dirección v , se obtiene lo siguiente:

$$0 = \int_{\Omega^*} v_1 f d\Omega + \int_{\Gamma^*} \left\{ v_1 V w - [w - w(p)] V v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial n} M w + \frac{\partial w}{\partial n} M v_1 \right\} ds + I_{\Gamma^*} - \sum_{k^*} \left(v_1 \|T w\|_{k^*} - [w - w(p)] \|T v_1\|_{k^*} \right) - \| \cdot \|_p \quad (3.109)$$

Las funciones del núcleo considerados en la ecuación (3.109), se obtienen derivando las ecuaciones (3.94a, b, c, d) con respecto a la dirección v .

$$v_1 = \frac{1}{8\pi D} r r_v (1 + 2 \ln r) \quad (3.110a)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial n} = \frac{1}{8\pi D} [2(r_n r_v + r_t r_\tau) \ln r + 3r_n r_v + r_t r_\tau] \quad (3.110b)$$

$$M v_1 = -\frac{1}{4\pi r} [(1 + \nu) r_v + 2(1 - \nu) r_n r_t r_\tau] \quad (3.110c)$$

$$V v_1 = -\frac{1}{4\pi r^2} \left\{ (-3 + \nu) + 2(1 - \nu) r_t^2 \right\} [r_n r_v - r_t r_\tau] + 4(1 - \nu) (r_n - \kappa r) r_n r_t r_\tau \quad (3.110d)$$

$$T v_1 = \frac{1 - \nu}{4\pi r} (r_t^2 - r_n^2) r_\tau \quad (3.110e)$$

Seguidamente, evaluar el límite de la ecuación (3.109) cuando $\rho \rightarrow 0$. Asimismo, asumir que p es un punto ubicado en la esquina, fig. 3.15. Se considera $\phi = \pi$, $r_n = -1$, $r_t = 0$, $\kappa = -1/\rho$ para el punto q que pertenece al dominio Γ . Por tanto, las ecuaciones (3.110a, b, c, d, e) se convierten en las siguientes ecuaciones:

$$v_1 = \frac{1}{8\pi D} \rho (1 + 2 \ln \rho) r_v \quad (3.111a)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial n} = -\frac{1}{8\pi D}(3 + 2 \ln \rho)r_v \quad (3.111b)$$

$$Mv_1 = -\frac{1 + \nu}{4\pi} \frac{r_v}{\rho} \quad (3.111c)$$

$$Vv_1 = \frac{-3 + \nu}{4\pi} \frac{r_v}{\rho^2} \quad (3.111d)$$

$$Tv_1 = -\frac{1 - \nu}{4\pi} \frac{r_r}{\rho} \quad (3.111e)$$

De acuerdo a la fig. 3.15 se tiene la ecuación:

$$\frac{\partial w}{\partial n_q} = -[w_x(q)\cos \theta + w_y(q)\sin \theta] \quad (3.112)$$

Expandir la expresión \hat{w} en series de Taylor en el punto p :

$$\hat{w} = w - w(p) = [w_x(p)\cos \theta + w_y(p)\sin \theta]\rho + O(\rho^2) \quad (3.113)$$

Y

$$v_x = \cos \omega \text{ y } v_y = \sin \omega \quad (3.114)$$

Los cosenos directores de un vector v en el punto p :

$$r_v = r_x v_x + r_y v_y = -(v_x \cos \theta + v_y \sin \theta) \quad (3.115)$$

Además, escoger $\omega = 0$ por lo que $r_v = r_x = -\cos \theta$ y evaluar el siguiente límite:

$$\begin{aligned} A_x &= -\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} [w - w(p)]Vv_1 ds \\ &= -\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(w_x(p)\cos \theta + w_y(p)\sin \theta)\rho + O(\rho^2)] \frac{-3 + \nu}{4\pi} \frac{1}{\rho^2} (-\cos \theta) \rho d(-\theta) \\ &= \frac{3 - \nu}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (w_x(p)\cos^2 \theta + w_y(p)\sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{3 - \nu}{4\pi} \left\{ w_x(p) \left(\frac{1}{2} [\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} + \frac{1}{4} [\sin 2\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} \right) + w_y(p) \left(-\frac{1}{4} [\cos 2\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.116)$$

Y

$$\begin{aligned}
 B_x &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\partial W}{\partial n} M v_1 ds \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[- (w_x(q) \cos \theta + w_y \sin \theta) \right] - \frac{(1+\nu)}{4\pi} \frac{1}{\rho} (-\cos \theta) \rho d(-\theta) \\
 &= \frac{1+\nu}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (w_x(q) \cos^2 \theta + w_y(q) \sin \theta \cos \theta) d\theta \\
 &= \frac{1+\nu}{4\pi} \left\{ w_x(p) \left(\frac{1}{2} [\theta]_1^2 + \frac{1}{4} [\sin 2\theta]_1^2 \right) + w_y \left(-\frac{1}{4} [\cos 2\theta]_1^2 \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.117}$$

En la obtención de la última expresión se establece como:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} w_x(q) = w_x(p) \text{ y } \lim_{\rho \rightarrow 0} w_y(q) = w_y(p)$$

Sumado las ecuaciones (3.116) y (3.117), el resultado es el siguiente:

$$\left(I_{\Gamma_\rho} \right)_x = A_x + B_x = \frac{1}{\pi} \left\{ w_x(p) \left(\frac{1}{2} [\theta]_1^2 + \frac{1}{4} [\sin 2\theta]_1^2 \right) + w_y(p) \left(-\frac{1}{4} [\cos 2\theta]_1^2 \right) \right\} \tag{3.118}$$

Considerar $\omega = \pi/2$, por lo que $r_v = -\sin \theta$ y realizar los procedimientos anteriores, se obtiene:

$$\left(I_{\Gamma_\rho} \right)_y = \frac{1}{\pi} \left\{ w_x(p) \left(-\frac{1}{4} [\cos 2\theta]_1^2 \right) + w_y(p) \left(\frac{1}{2} [\theta]_1^2 - \frac{1}{4} [\sin 2\theta]_1^2 \right) \right\} \tag{3.119}$$

Si el vector v tiene una dirección arbitraria (v_x, v_y) , por lo tanto I_{Γ_ρ} se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 I_{\Gamma_\rho} &= \left(I_{\Gamma_\rho} \right)_x v_x + \left(I_{\Gamma_\rho} \right)_y v_y \\
 &= \frac{1}{2\pi} w_x(p) \left\{ \left([\theta]_1^2 + \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_1^2 \right) v_x - \frac{1}{2} [\cos 2\theta]_1^2 v_y \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} w_y(p) \left\{ -\frac{1}{2} [\cos 2\theta]_1^2 v_x + [\theta]_1^2 - \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_1^2 v_y \right\}
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

Evaluar la contribución distinta de cero de los términos de esquina $k^{(-)}$ y $k^{(+)}$:

$$\begin{aligned}
 (w - w_p) \| T v_1 \|_{k^{(-)}} &= [w_x(p) \cos \theta_1 + w_y(p) \sin \theta_1] \rho \left[-\frac{1-\nu}{4\pi\rho} \frac{r_\tau}{\rho} - \frac{1-\nu}{4\pi\rho} (r_i^2 - r_n^2) r_\tau \right] \\
 &= -\frac{1-\nu}{4\pi} [w_x(p) \cos \theta_1 + w_y(p) \sin \theta_1] [1 + (r_i^2 - r_n^2)] r_\tau
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

$$\begin{aligned} (w - w_p) \| I_{\Gamma_p} v_{1 \| k^{(+)}} &= [w_x(p) \cos \theta_2 + w_y(p) \sin \theta_2] \rho \left[\frac{1-\nu}{4\pi\rho} (r_t^2 - r_n^2) r_\tau + \frac{1-\nu}{4\pi\rho} \frac{r_\tau}{\rho} \right] \\ &= \frac{1-\nu}{4\pi} [w_x(p) \cos \theta_2 + w_y(p) \sin \theta_2] [(r_t^2 - r_n^2) + 1] r_\tau \end{aligned} \quad (3.122)$$

De acuerdo a la fig. 3.15:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [r_t^2 - r_n^2] = -\lim_{\rho \rightarrow 0} \cos 2\phi = 1 \quad (3.123)$$

Y

$$r_\tau = r_x(-\sin \omega) + r_y \cos \omega = v_y \cos \theta - v_x \sin \theta$$

Emplear las ecuaciones (3.121) y (3.122):

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \| \|_{k^{(-)}} = -\frac{1-\nu}{2\pi} [w_x(p) (\cos^2 \theta_1 v_y - \cos \theta_1 \sin \theta_1 v_x) + w_y(p) (\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sin^2 \theta_1 v_x)]$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \| \|_{k^{(+)}} = \frac{1-\nu}{2\pi} [w_x(p) (\cos^2 \theta_2 v_y - \cos \theta_2 \sin \theta_2 v_x) + w_y(p) (\sin \theta_2 \cos \theta_2 - \sin^2 \theta_2 v_x)]$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \| \|_p &= \lim_{\rho \rightarrow 0} (\| \|_{k^{(-)}} + \| \|_{k^{(+)}}) \\ &= \frac{1-\nu}{2\pi} \left[w_x(p) \left([\cos^2 \theta]_I^2 v_y - \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_I^2 v_x \right) + w_y(p) \left(\frac{1}{2} [\sin 2\theta]_I^2 v_y - [\sin^2 \theta]_I^2 v_x \right) \right] \end{aligned} \quad (3.124)$$

Considerar que:

$$[\theta]_I^2 = \theta_2 - \theta_1 = -\alpha\pi \quad (3.125a)$$

$$[\cos 2\theta]_I^2 = [1 - 2 \sin^2 \theta]_I^2 = -2[\sin^2 \theta]_I^2 \quad (3.125b)$$

$$[\cos^2 \theta]_I^2 = -[\sin^2 \theta]_I^2 \quad (3.125c)$$

Asimismo, emplear las ecuaciones (3.120) y (3.124):

$$I_{\Gamma_p} - \| \|_p = -[\alpha_x w_x(p) + \alpha_y w_y(p)] \quad (3.126)$$

Donde:

$$\alpha_x = \frac{\alpha}{2} v_x - \frac{\nu}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta v_x + \sin^2 \theta v_y \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (3.127)$$

$$\alpha_y = \frac{\alpha}{2} v_y - \frac{\nu}{2\pi} \left[\sin^2 \theta v_x - \frac{1}{2} \sin 2\theta v_y \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (3.128)$$

Finalmente, considerar la ecuación (3.102a) y emplear las ecuaciones (3.126) y (3.109) para obtener:

$$\begin{aligned} \alpha_x w_x(p) + \alpha_y w_y(p) = & \int_{\Omega} v_1 f d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} \left(v_1 V w - [w - w(p)] V v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial n} M w + \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds \quad (3.129) \\ & - \sum_k [v_1 \|T w\|_k - [w - w(p)] \|T v_{1k}\|] \end{aligned}$$

3.5.5. Esfuerzos resultantes

Una vez determinada las ecuaciones integrales de contorno se realiza la solución de la ecuación mencionada, los desplazamientos en cualquier punto de la losa $P(x, y)$ es evaluado con la ecuación (3.98) y los momentos flectores M_x , M_y y M_{xy} y las fuerzas cortantes Q_x y Q_y en el punto P son evaluados mediante las ecuaciones (3.34) y (3.41), respectivamente.

Primeramente se emplea la representación integral (3.98), y por conveniencia se escribe de la forma:

$$w(P) = \int_{\Omega} v f d\Omega - D \int_{\Gamma} (v \nabla^2 w_n - w \nabla^2 v_n - v_n \nabla^2 w + w_n \nabla^2 v) ds \quad (3.130)$$

En la ecuación (3.130) las variables de contorno w y w_n son conocidos, en base a la solución de la ecuación integral de contorno, mientras $\nabla^2 w$ y $\nabla^2 w_n$ no son conocidos, los cuales pueden ser determinados de la siguiente forma.

Tomar el Laplaciano de la ecuación (3.130) y considerar que $\nabla^4 v = 0$, $\nabla^4 w_n = 0$:

$$\nabla^2 w(P) = \int_{\Omega} \nabla^2 v f d\Omega - D \int_{\Gamma} (\nabla^2 v \nabla^2 w_n - \nabla^2 v_n \nabla^2 w) ds \quad (3.131)$$

Considerar que $P \rightarrow p \in \Gamma$ en las ecuaciones (3.130) y (3.131):

$$\frac{1}{2} w(P) = \int_{\Omega} v f d\Omega - D \int_{\Gamma} (v \nabla^2 w_n - w \nabla^2 v_n - v_n \nabla^2 w + w_n \nabla^2 v) ds \quad (3.132)$$

$$\frac{1}{2} \nabla^2 w(P) = \int_{\Omega} \nabla^2 v f d\Omega - D \int_{\Gamma} (\nabla^2 v \nabla^2 w_n - \nabla^2 v_n \nabla^2 w) ds \quad (3.133)$$

Donde v y v_n están dadas por las ecuaciones (3.90a, b):

$$\nabla^2 v = \frac{1}{2\pi D} (\ln r + 1) \quad (3.134)$$

$$\nabla^2 v_n = \frac{1}{2\pi D} \frac{r_n}{r} \quad (3.135)$$

Las ecuaciones (3.132) y (3.133) son dos ecuaciones integrales de contorno, las cuales resuelven las cantidades de $\nabla^2 w$ y $\nabla^2 w_n$. Entonces la segunda y tercera derivada es obtenida mediante la derivada directa de la ecuación (3.130). Entonces se obtiene lo siguiente:

$$w_{,xx}(P) = \int_{\Omega} v_{,xx} f d\Omega - D \int_{\Gamma} (v_{,xx} \nabla^2 w_n - w \nabla^2 v_{,nxx} + w_n \nabla^2 v_{,xx}) ds \quad (3.136a)$$

$$w_{,yy}(P) = \int_{\Omega} v_{,yy} f d\Omega - D \int_{\Gamma} (v_{,yy} \nabla^2 w_n - w \nabla^2 v_{,nyy} + w_n \nabla^2 v_{,yy}) ds \quad (3.136b)$$

$$w_{,xy}(P) = \int_{\Omega} v_{,xy} f d\Omega - D \int_{\Gamma} (v_{,xy} \nabla^2 w_n - w \nabla^2 v_{,nxy} + w_n \nabla^2 v_{,xy}) ds \quad (3.136c)$$

$$\nabla^2 w_{,x}(P) = \int_{\Omega} \nabla^2 v_{,x} f d\Omega - D \int_{\Gamma} (\nabla^2 v_{,x} \nabla^2 w_n - \nabla^2 v_{,nx} \nabla^2 w) ds \quad (3.136d)$$

$$\nabla^2 w_{,y}(P) = \int_{\Omega} \nabla^2 v_{,y} f d\Omega - D \int_{\Gamma} (\nabla^2 v_{,y} \nabla^2 w_n - \nabla^2 v_{,ny} \nabla^2 w) ds \quad (3.136e)$$

Donde las funciones núcleo de la representación integral están dadas por:

$$v_{,xx} = \frac{1}{8\pi D} (2 \ln r + 2r_x^2 + 1) \quad (3.137a)$$

$$v_{,yy} = \frac{1}{8\pi D} (2 \ln r + 2r_y^2 + 1) \quad (3.137b)$$

$$v_{,xy} = \frac{1}{4\pi D} r_x r_y \quad (3.137c)$$

$$v_{,nxx} = \frac{1}{4\pi D} \frac{1}{r} (r_n + 2r_x r_y r_t) \quad (3.137d)$$

$$v_{,nyy} = \frac{1}{4\pi D} \frac{1}{r} (r_n - 2r_x r_y r_t) \quad (3.137e)$$

$$v_{,nxy} = \frac{1}{4\pi D} \frac{1}{r} (r_y^2 - r_x^2) r_t \quad (3.137f)$$

$$\nabla^2 v_{,x} = \frac{1}{2\pi D} \frac{r_x}{r} \quad (3.137g)$$

$$\nabla^2 v_{i,y} = \frac{1}{2\pi D} \frac{r_y}{r} \quad (3.137h)$$

$$\nabla^2 v_{,xx} = \frac{1}{2\pi D} \frac{r_y^2 - r_x^2}{r^2} \quad (3.137i)$$

$$\nabla^2 v_{,yy} = \frac{1}{2\pi D} \frac{r_x^2 - r_y^2}{r^2} \quad (3.137j)$$

$$\nabla^2 v_{,xy} = -\frac{1}{\pi D} \frac{r_x r_y}{r^2} \quad (3.137k)$$

$$\nabla^2 v_{,nx} = \frac{r_t r_y - r_n r_x}{2\pi D r^2} \quad (3.137l)$$

$$\nabla^2 v_{,ny} = \frac{r_t r_x - r_n r_y}{2\pi D r^2} \quad (3.137m)$$

$$\nabla^2 v_{,nxx} = \frac{1}{\pi D r^3} [r_n (r_x^2 - r_y^2) - 2r_x r_y r_t] \quad (3.137n)$$

$$\nabla^2 v_{,nyy} = \frac{1}{\pi D r^3} [r_n (r_y^2 - r_x^2) + 2r_x r_y r_t] \quad (3.137o)$$

$$\nabla^2 v_{,nxy} = \frac{1}{\pi D r^3} [r_t (r_x^2 - r_y^2) + 2r_x r_y r_n] \quad (3.137p)$$

3.6. Solución numérica de la ecuación integral de contorno

3.6.1. Método de los elementos de contorno con elementos constantes

Las ecuaciones integrales de contorno (3.105) y (3.129) son resueltas empleando el método de los elementos de contorno. Y el contorno es dividido en N elementos de contorno, los cuales pueden ser constantes, lineal o parabólico.

El contorno es dividido en N elementos, la distribución de las cantidades w , w_n , Mw y Vw son considerados como constantes en cada elemento e igual al valor en puntos nodales, los cuales son diferentes en el punto medio del elemento. Se asigna valores de estas cantidades en los nodos i -enésimo como w^i , w_n^i , M_n^i , V_n^i ($i=1,2,\dots,N$) y w_c^k , R^k ($k=1,2,\dots,N_c$), que representan los desplazamientos y fuerzas concentradas en las esquinas, respectivamente.

(i) Considerar N ecuaciones para la ecuación (3.105) cuando se aplica para N puntos nodales.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w^i + \sum_{j=1}^N [Vv]^{ij} w^j - \sum_{j=1}^N [Mv]^{ij} w_n^j - \sum_{k=1}^{N_c} \|Tv\|^{ik} w_c^k = \\ \sum_{j=1}^N [v]^{ij} Vw^j - \sum_{j=1}^N [v_n]^{ij} Mw^j - \sum_{k=1}^{N_c} [v]^{ik} R^k + F_1^i \end{aligned} \quad (3.138)$$

(ii) Considerar N_c ecuaciones para la ecuación (3.105) cuando se aplica N_c puntos de esquina.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2\pi} w_c^l + \sum_{j=1}^N [Vv]^{lj} w^j - \sum_{j=1}^N [Mv]^{lj} w_n^j - \sum_{k=1}^{N_c} \|Tv\|^{lk} w_c^k = \\ \sum_{j=1}^N [v]^{lj} Vw^j - \sum_{j=1}^N [v_n]^{lj} Mw^j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{N_c} [v]^{lk} R^k + F_2^l \end{aligned} \quad (3.139)$$

(iii) Emplear N ecuaciones para la ecuación (3.129) cuando se aplica N puntos nodales.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w_n^i + \sum_{j=1}^N [Vv_1]^{ij} w^j - \sum_{j=1}^N [Mv_1]^{ij} w_n^j - \sum_{k=1}^{N_c} \|Tv_1\|^{ik} w_c^k = \\ \sum_{j=1}^N [v_1]^{ij} Vw^j - \sum_{j=1}^N [v_{1n}]^{ij} Mw^j - \sum_{k=1}^{N_c} [v_1]^{ik} R^k + F_3^i \end{aligned} \quad (3.140)$$

Anteriormente se demostraron las siguientes expresiones:

$$[v]^{ij} = \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) ds_q, \quad [v_n]^{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n_q} ds_q \quad (3.141a, b)$$

$$[Mv]^{ij} = \int_{\Gamma_j} Mv(p_i, q) ds_q, \quad [Vv]^{ij} = \int_{\Gamma_j} Vv(p_i, q) ds_q \quad (3.141c, d)$$

$$[v_1]^{ij} = \int_{\Gamma_j} v_1(p_i, q) ds_q, \quad [v_{1n}]^{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial v_1(p_i, q)}{\partial n_q} ds_q \quad (3.141e, f)$$

$$[Mv_1]^{ij} = \int_{\Gamma_j} Mv_1(p_i, q) ds_q, \quad [Vv_1]^{ij} = \int_{\Gamma_j} Vv_1(p_i, q) ds_q \quad (3.141g, h)$$

$$\|Tv\|^{ik} = \|Tv(p_i, q_k)\|, \quad \|Tv_1\|^{ik} = \|Tv_1(p_i, q_k)\| \quad (3.141i, j)$$

$$F_1^i = \int_{\Omega} f v(p_i, Q) d\Omega_Q \quad (3.141k)$$

$$F_2^l = \int_{\Omega} f v(p_l, Q) d\Omega_Q \quad (3.141l)$$

$$F_3^i = \int_{\Omega} f v_1(p_i, Q) d\Omega_Q \quad (3.141m)$$

Las ecuaciones (3.138), (1.39) y (1.40) puede ser ensamblada en forma matricial:

$$\mathbf{H} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{w}_c \\ \mathbf{w}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} + \mathbf{F} \quad (3.142)$$

Donde:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} [V_v]^{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} & -\|T_v\|^{ik} & -[M_v]^{ij} \\ [V_v]^{ij} + \frac{\alpha}{2\pi} \delta_{ij} & -\|T_v\|^{ik} & -[M_v]^{ij} \\ [V_{v_1}]^{ij} & -\|T_{v_1}\|^{ik} & -[M_{v_1}]^{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \end{bmatrix}_{(2N+N_c) \times (2N+N_c)} \quad (3.143)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} [v]^{ij} & -[v]^{ik} & -[v_n]^{ij} \\ [v]^{ij} & -[v]^{ik} & -[v_n]^{ij} \\ [v_1]^{ij} & -[v_1]^{ik} & -[v_{1n}]^{ij} \end{bmatrix}_{(2N+N_c) \times (2N+N_c)} \quad (3.144)$$

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.145)$$

$$\mathbf{F}_1 = \{F_1^i\}_{N \times 1}, \mathbf{F}_2 = \{F_2^i\}_{N_c \times 1}, \mathbf{F}_3 = \{F_3^i\}_{N \times 1} \quad (3.146a, b, c)$$

$$\mathbf{w} = \{w^i\}_{N \times 1}, \mathbf{w}_c = \{w_c^i\}_{N_c \times 1}, \mathbf{w}_n = \{w_n^i\}_{N \times 1} \quad (3.146d, e, f)$$

$$\mathbf{V} = \{V w^i\}_{N \times 1}, \mathbf{R} = \{R^k\}_{N_c \times 1}, \mathbf{M} = \{M w^i\}_{N \times 1} \quad (3.146g, h, i)$$

Asimismo, aplicar la ecuación (3.61) para los N puntos nodales y la ecuación (3.64) para los N_c puntos de esquina.

$$\bar{\mathbf{H}} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{w}_c \\ \mathbf{w}_n \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{G}} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{F}} \quad (3.147)$$

Donde:

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ c_3 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \quad (3.148a, b, c)$$

$\alpha_i, \beta_i (i=1,2)$ Son matrices diagonales de $N \times N$ y c_i es una matriz diagonal de $N_c \times N_c$.

Las ecuaciones (3.142) y (3.147) son combinados para resolver las variables de contorno W , W_c , W_n , V , R y M , los cuales son empleados en la ecuación (3.98) para obtener las deflexiones en algún punto $P(x, y)$ en el dominio Ω . Emplear los mismos elementos divididos, y la ecuación (3.98) se convierte:

$$w(P) = F_i + \sum_{j=1}^N \left([V]_P^j V w^j - [V_V]_P^j w^j - [V_n]_P^j M w^j + [M_V]_P^j w_n^j \right) - \sum_{k=1}^{N_c} \left(v_P^k R^k - \|T_V\|_P^k w^k \right) \quad (3.149)$$

3.6.2. Evaluación de las integrales de línea

La formulación de las matrices G y H que fueron definidos en las ecuaciones (3.143) y (3.144) requieren la evaluación de las integrales de línea (3.141a-h). Se distingue dos casos:

(i) Los elementos que no corresponden a la diagonal de la matriz, $i \neq j$

En el presente caso el punto $p_i(x_i, y_i)$ se ubica alejado al elemento j -enesimo (ver fig. 3.16), el cual tiene una distancia $r = |q - p_i|$; seguidamente, la integral es regular.

(ii) Los elementos corresponden a la diagonal de la matriz $i = j$

En este caso los nodos p_i coinciden con el nodo p_j y la distancia es nula. Consecuentemente, la integral puede ser singular o hipersingular. Por tanto, su evaluación requiere un especial cuidado.

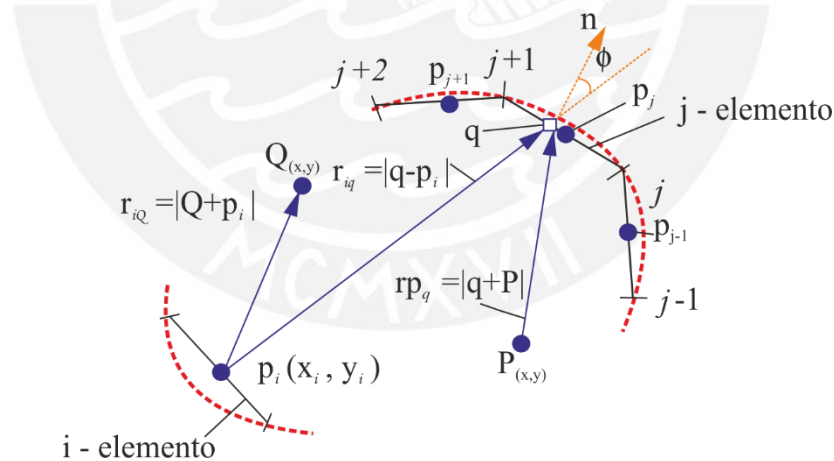


Fig. 3.16 Localización de puntos nodales y notación de los elementos de la descomposición

3.6.3. Evaluación de las integrales de superficie

Las integrales de dominio (3.141k, l, m) pueden distinguirse por los siguientes casos:

(i) La losa está sujeta a cargas concentradas F en un punto Q_0 , en este caso las cargas pueden ser representadas por:

$$f(Q) = F\delta(Q - Q_0) \quad (3.150)$$

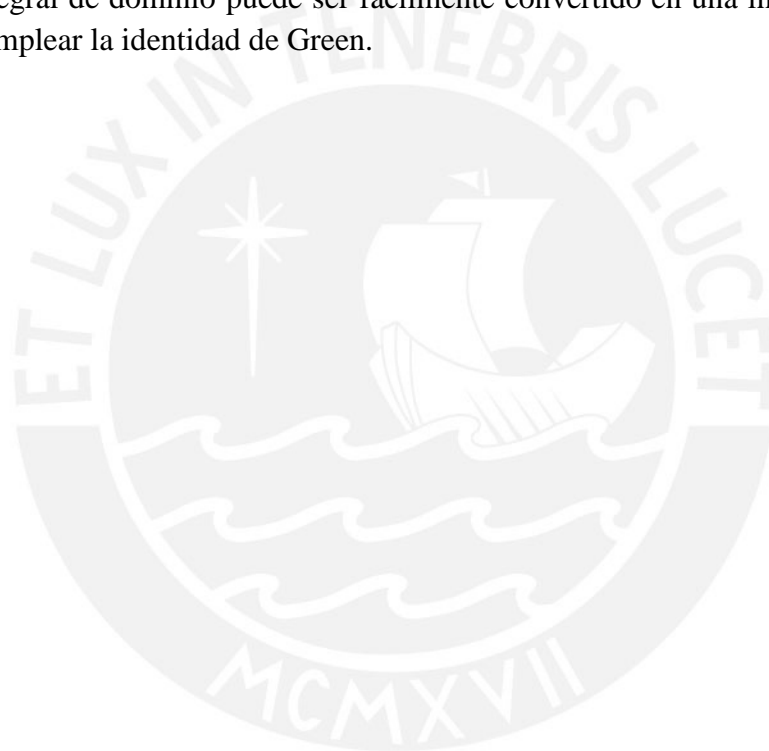
(ii) La losa está sujeta a momentos concentrados M_m en un punto Q_0 , el cual actúa en la dirección normal del vector $\mathbf{m}(m_x, m_y)$.

(iii) La losa está sujeta a una carga lineal $f^*(s)$ que actúa en la línea L^* . En este caso las integrales de dominio se convierten en integrales de línea de la siguiente forma:

$$\int_{\Omega} v f d\Omega = \int_{L^*} v f^*(s) ds \quad (3.151a)$$

$$\int_{\Omega} v_1 f d\Omega = \int_{L^*} v_1 f^*(s) ds \quad (3.151b)$$

(iv) La losa está sujeta a cargas distribuidas uniformemente y con variación lineal en un área $\Omega^* \subseteq \Omega$ de la losa. En el caso más práctico, se considera la relación $\nabla^2 f = 0$ y la integral de dominio puede ser fácilmente convertido en una integral de línea en Γ^* al emplear la identidad de Green.



CAPITULO 4. METODOLOGÍA PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN LA INGENIERÍA ESTRUCTURAL

4.1. Introducción

El método de los elementos de contorno está comprendido por las siguientes fases: preprocesamiento, procesamiento y posprocesamiento. Las metas del preprocesamiento son: desarrollar una apropiada división de mallas, asignar las propiedades del material y aplicar las condiciones de frontera como son las restricciones y cargas. Asimismo, en el procesamiento a menudo se requiere recursos computacionales. Por último, el posprocesamiento consiste en el estudio de los resultados del análisis.

4.2. Fases

4.2.1. Preprocesamiento

En el preprocesamiento, el objetivo es obtener una apropiada malla de elementos, lo cual se obtiene al dividir la estructura en elementos, sobre el cual se encuentran los nodos. Asimismo, las propiedades de los materiales requeridos varían con el tipo de solución, un análisis estático lineal, por ejemplo, requiere del módulo de elasticidad, el coeficiente de Poisson y la densidad del material.

En la presente fase es necesario conocer lo siguiente:

- (1) La descomposición de la estructura (discretization o meshing) consiste en dividir la estructura en partes denominados elementos, por ejemplo, para el análisis de pórticos y losas se emplea elementos lineales.
- (2) Las propiedades de los materiales son: el módulo de elasticidad, módulo de corte, módulo de Poisson y coeficiente de dilatación.
- (3) Las secciones transversales más empleadas son: rectangulares, te (T), circular y otros.
- (4) La geometría del modelo en los pórticos pueden definirse de acuerdo a las distancias entre vanos y las alturas de las columnas.
- (5) Las condiciones de apoyo, las más empleadas son: empotrado, apoyo simple, apoyo restringido y apoyo elástico.
- (6) Las condiciones de carga pueden ser de tipo distribuida o puntual.

4.2.2. Procesamiento

En esta fase a menudo se emplea un proceso por partes y es necesario el empleo de recursos computacionales. Las ecuaciones que rigen se ensamblan en forma de matriz y se resuelven numéricamente. Para el caso de un análisis estructural estático lineal, la ecuación de ensamblado es de la forma $GU = H$, donde G es la matriz de las condiciones de dominio, U es la matriz de las condiciones de contorno y G es la matriz de las condiciones de carga.

En la presente fase es necesario realizar lo siguiente:

(1) En el método de los elementos de contorno se necesita realizar lo siguiente:

- Modelo matemático: se emplea la teoría de la elasticidad y la resistencia de materiales para obtener relaciones entre el comportamiento de la estructura y las condiciones de la estructura (tipo de materiales, condición de apoyo y condición de carga).

- Ecuaciones diferenciales: son las ecuaciones que relacionan variables dependientes e independientes y sus derivadas.

- Solución fundamental: es la solución de la ecuación diferencial no homogénea, en la cual la función particular es una función delta de Dirac.

- Ecuaciones integrales: son las ecuaciones que relacionan variables dependientes e independientes, la solución fundamental y sus integrales.

- Solución numérica: las ecuaciones integrales formuladas necesitan ser resueltas, sujetas a las condiciones obtenidas del problema para determinar las incógnitas involucradas.

(2) En la solución del sistema lineal, las ecuaciones formuladas en la etapa anterior necesitan ser resueltas y para elaborar los cálculos numéricos se recurre frecuentemente al uso del computador.

(3) El cálculo de las reacciones y deformaciones son las primeras incógnitas a determinar, las cuales se obtienen de la solución del sistema de ecuaciones.

(4) El cálculo de las fuerzas y los momentos, en el dominio de la estructura, se obtienen al reemplazar las incógnitas determinadas en la fase anterior en la matriz inicial.

4.2.3. Posprocesamiento

Después, de la preparación del modelo se ha aplicado las condiciones de contorno y el modelo se ha resuelto, ahora es el momento para investigar los resultados del análisis. Esta actividad se conoce como la fase de posprocesamiento. En esta fase se inicia con un control minucioso de los problemas que pueden haber ocurrido durante la solución. La mayoría de los solucionadores proporcionan un archivo de registro, en el cual se debe buscar advertencias o errores.

En esta fase es necesario realizar lo siguiente:

- (1) Desplazamientos y rotaciones: es la representación de la estructura deformada.
- (2) Diagrama de momentos flectores: (3) diagrama de fuerzas cortantes, (4) diagrama de fuerzas axiales, para elementos unidimensionales el momento flector se define como una función a lo largo del eje neutro del elemento y para elementos bidimensionales se representa por curvas de nivel.

En la fig. 4.1 se detalla los procedimientos anteriormente mencionados, los cuales son aplicables para la solución de problemas de ingeniería estructural.



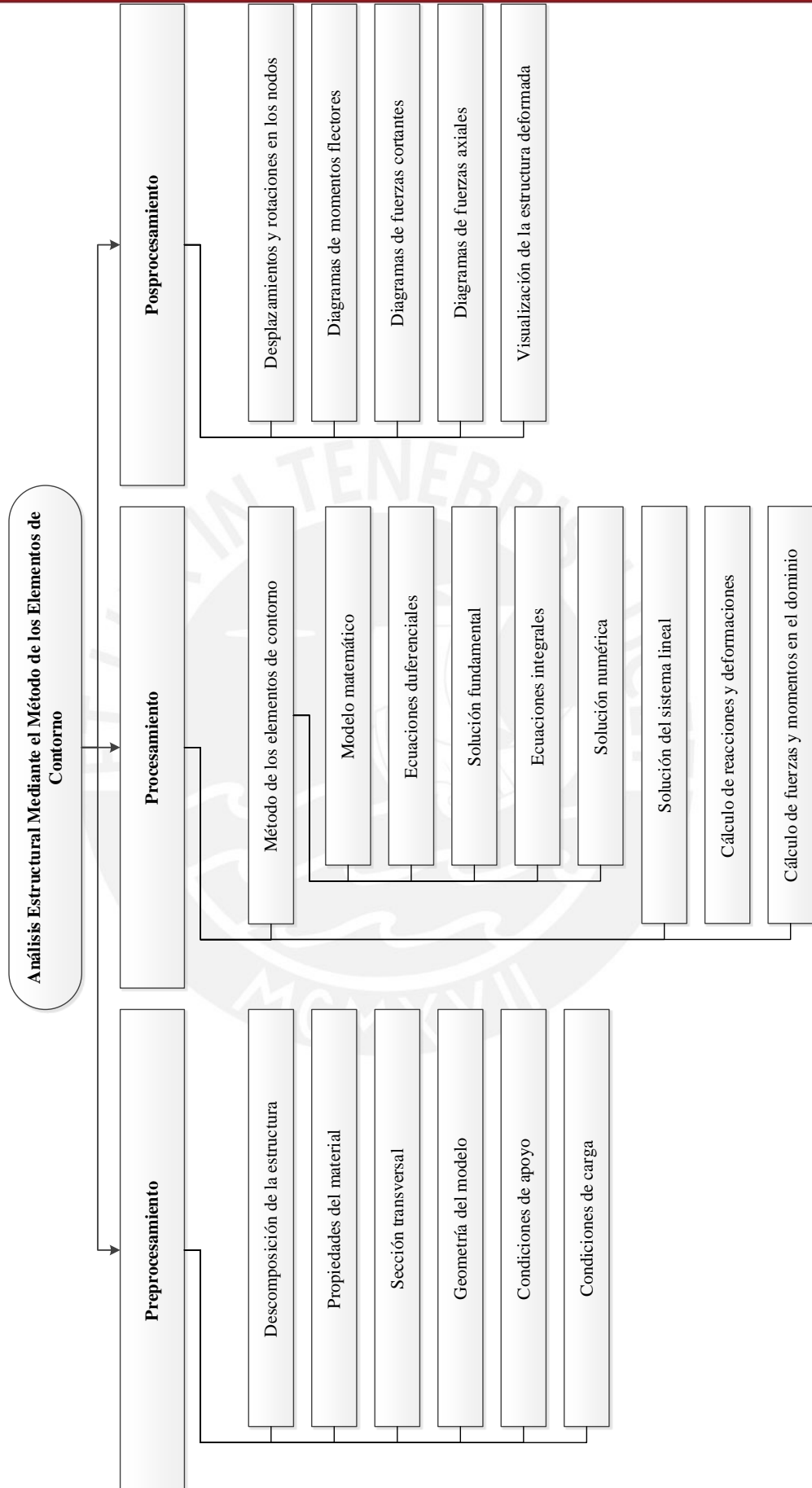


Fig. 4.1 Metodología del método de los elementos de contorno para el análisis estructural

CAPITULO 5. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

5.1. Introducción

En la actualidad, no es común el empleo de los métodos de los elementos de contorno en los programas comerciales para el análisis estructural. En esa situación, se pretende difundir el análisis de estructuras mediante el método en mención; el cual se aplicará a vigas, pórtico simple, emparrillado y losas.

Las estructuras que se analizaran fueron estudiadas mediante métodos analíticos durante los siglos XIX y XX, y permitieron el establecimiento de las infraestructuras necesarias para el desarrollo industrial y social que se produjo en esos siglos.

5.2. Aplicación en problemas unidimensionales

5.2.1. Viga simple empotrada

En la fig. 5.1 se muestra un modelo de la estructura, denominada viga simple con los extremos empotrados; asimismo, los datos geométricos, carga y propiedades del material se muestran en la tabla 5.1.

Tabla 5.1 Datos geométricos, carga y propiedades del material

| Geometría | | Cargas | | Propiedades del material | |
|--------------------------------|-----------|--------------|-----------|-----------------------------------|-----------|
| Sección A (m ²): | 0.25x0.50 | p_2 (N/m): | 10,791.00 | Módulo de elasticidad E_c (MPa) | 23,000.00 |
| Longitud l (m): | 6.00 | | | Módulo de Poisson ν | 0.15 |

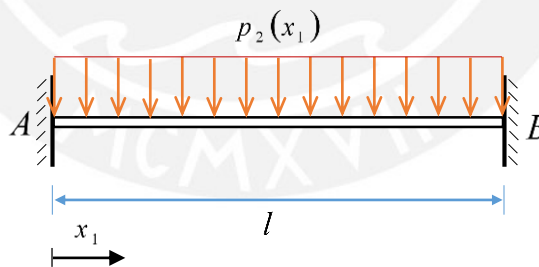


Fig. 5.1. Viga simple empotrada en sus dos extremos

Definición de grados de libertad:



Primeramente al emplear la ecuación (2.4.51), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 3 & 1.50E-7 & -3.00E-7 \\ -0.5 & -3 & 1.50E-7 & 3.00E-7 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -5.01E-7 & 1.50E-7 \\ 0 & -0.5 & 5.01E-7 & 1.50E-7 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2(0) \\ \bar{u}_2'(0) \\ M_3(0) \\ V_2(0) \\ \bar{u}_2(l) \\ \bar{u}_2'(l) \\ M_3(l) \\ V_2(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00486 \\ 0.00486 \\ -0.00324 \\ 0.00324 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Las condiciones de frontera para una viga empotrada en los extremos, son los siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(0) &= 0 \\ \bar{u}_2'(0) &= 0 \\ \bar{u}_2(l) &= 0 \\ \bar{u}_2'(l) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Reemplazar (5.2) en (5.1) y resolver el sistema de ecuaciones para determinar las variables desconocidas:

$$\begin{aligned} M_3(0) &= -32,373.00N.m \\ V_2(0) &= 32,373.00N \\ M_3(l) &= -32,373.00N.m \\ V_2(l) &= -32,373.00N \end{aligned} \quad (5.3)$$

Para determinar los momentos flectores, fuerzas cortantes, giros y desplazamiento en el dominio de la viga reemplazar (5.3) en la ecuación (2.4.51), de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & \frac{x}{2} & 4.17E-9x^2 & -1.39E-9x^3 \\ -0.5 & -\frac{x}{2} & 4.17E-9x^2 & 1.39E-9x^3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -8.35E-9x & 4.17E-9x^2 \\ 0 & -0.5 & 8.35E-9x & 4.17E-9x^2 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -32,373.00 \\ 32,373.00 \\ \bar{u}_2(x) \\ \bar{u}_2'(x) \\ M_3(x) \\ V_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00486 \\ 0.00486 \\ -0.00324 \\ 0.00324 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Resolver el sistema de ecuaciones (5.4) para obtener las expresiones (5.5), con las cuales se procede a plantear los diagramas de fuerzas internas y deformaciones, fig. 5.2.

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(x) &= 0.00027x^2 - 0.00009x^3 + 7.51E - 6x^4 \\ \bar{u}_2'(x) &= 0.00054x - 0.00027x^2 + 0.00003x^3 \\ M_3(x) &= -32,373.00 + 32,373.00x - 5,395.50x^2 \\ V_2(x) &= 32,373.00 - 10,791.00x \end{aligned} \quad (5.5)$$

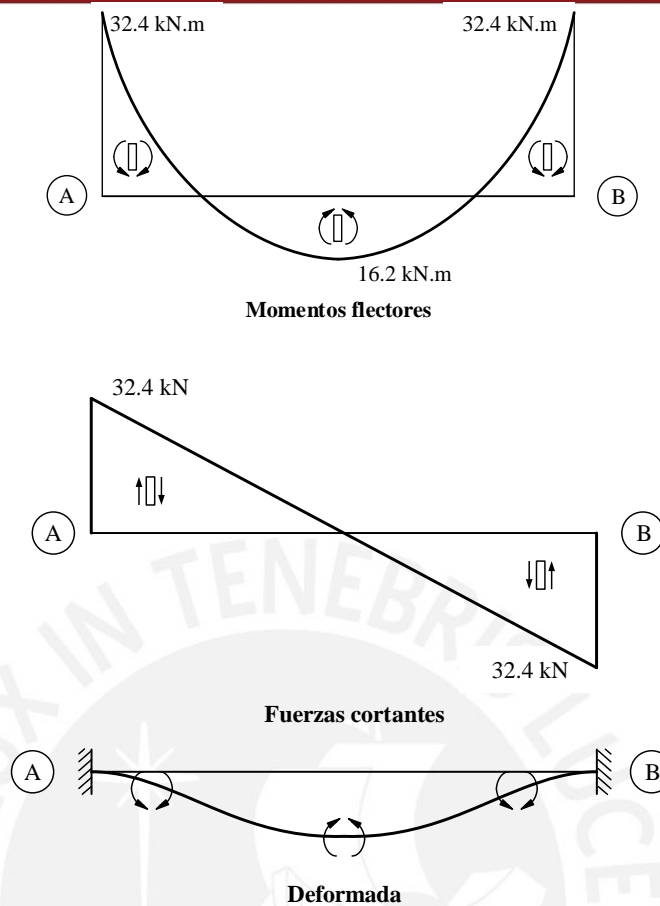


Fig. 5.2. Leyes de fuerzas internas y deformación de la viga simple empotrada

En la Tabla 5.2 se muestra una comparación de las fuerzas internas y los desplazamientos en el extremo de la viga y el centro de la luz, obtenidos con el MEC y el software SAP 2000 para el análisis de la viga simple empleando elementos tipo frame.

Tabla 5.2 Comparación de resultados

| Punto | Método de los elementos de contorno | | SAP 2000 | |
|-------------|-------------------------------------|----------------|---------------|----------------|
| | Deflexión (m) | Momento (kN.m) | Deflexión (m) | Momento (kN.m) |
| Extremo A-B | 0.00 | 32.40 | 0.00 | 32.40 |
| Medio A-B | 0.002 | 16.20 | 0.002 | 16.20 |

5.2.2. Viga continua

En la fig. 5.3 se muestra un modelo de la estructura denominada viga continua, los datos geométricos, carga y propiedades del material se detallan en la tabla 5.3.

Tabla 5.3 Datos geométricos, carga y propiedades del material

| Geometría | | Cargas | | Propiedades del material | |
|--------------------------------|-----------|--------------|-----------|-----------------------------------|-----------|
| Sección A (m ²): | 0.25x0.50 | p_2 (N/m): | 10,791.00 | Módulo de elasticidad E_c (MPa) | 23,000.00 |
| Longitud l_1 (m): | 6.00 | | | Módulo de Poisson ν | 0.15 |
| Longitud l_2 (m): | 5.00 | | | | |

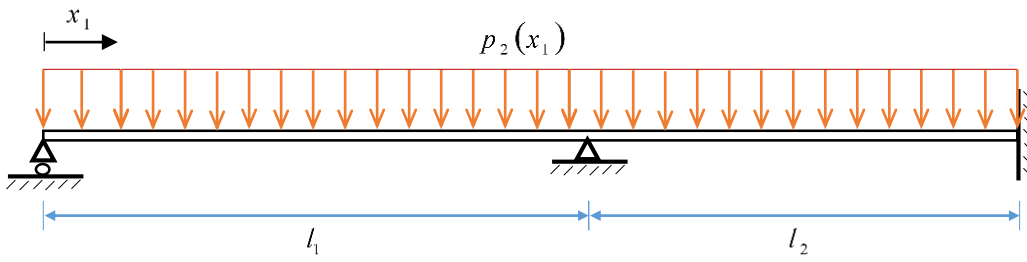


Fig. 5.3. Viga de dos vanos

Definición de grados de libertad de las barras:

Barra 1



Barra 2



Primeramente, empleamos la ecuación (2.4.51) para las dos barras y se obtienen las ecuaciones (5.9) y (5.10):

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 3 & 1.50E-7 & -3.00E-7 \\ -0.5 & -3 & 1.50E-7 & 3.00E-7 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -5.01E-7 & 1.50E-7 \\ 0 & -0.5 & 5.01E-7 & 1.50E-7 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2(0) \\ \bar{u}_2'(0) \\ M_3(0) \\ V_2(0) \\ \bar{u}_2(l_1) \\ \bar{u}_2'(l_1) \\ M_3(l_1) \\ V_2(l_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00486 \\ 0.00486 \\ -0.00324 \\ 0.00324 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2.5 & 1.04E-7 & -1.74E-7 \\ -0.5 & -2.5 & 1.04E-7 & 1.74E-7 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -4.17E-8 & 1.04E-7 \\ 0 & -0.5 & 4.17E-8 & 1.04E-7 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2(l_1) \\ \bar{u}_2'(l_1) \\ M_3(l_1) \\ V_2(l_1) \\ \bar{u}_2(l_1+l_2) \\ \bar{u}_2'(l_1+l_2) \\ M_3(l_1+l_2) \\ V_2(l_1+l_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00234 \\ 0.00234 \\ -0.00188 \\ 0.00188 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

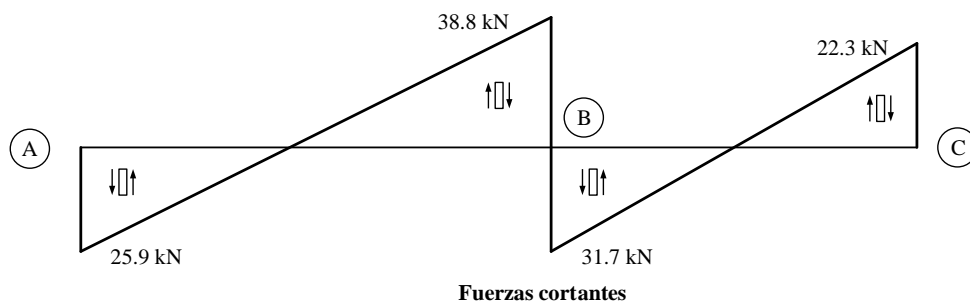
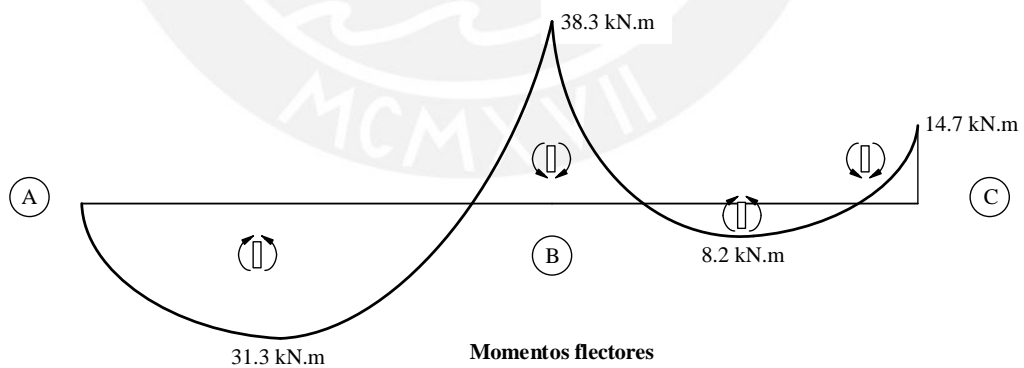
Las condiciones de frontera para la viga continua de dos vanos propuesta, son los siguientes:

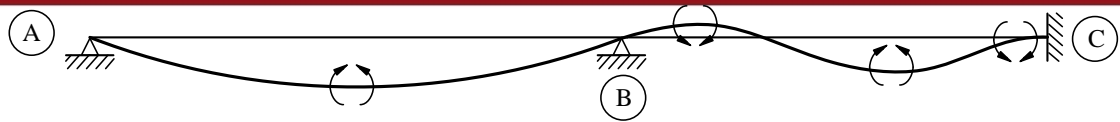
$$\begin{aligned}
 \bar{u}_2(0) &= 0 \\
 \bar{u}_2(l_1) &= 0 \\
 \bar{u}_2(l_1 + l_2) &= 0 \\
 \bar{u}_2'(l_1 + l_2) &= 0 \\
 M_3(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

Reemplazar las condiciones de frontera (5.11) en (5.10) y (5.9), seguidamente resolver el sistema de ecuaciones para determinar las variables desconocidas:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_2'(0) &= 0.00098rad \\
 V_2(0) &= 25,951.43N \\
 \bar{u}_2'(l_1) &= -0.00033rad \\
 M_3(l_1) &= -38,528.40N.m \\
 V_2(l_1)^- &= -38,794.56N \\
 V_2(l_1)^+ &= -31,791.95N \\
 M_3(l_1 + l_2) &= -14,457.17N.m \\
 V_2(l_1 + l_2) &= -22,163.05N
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

Para determinar los momentos flectores, fuerzas cortantes, giros y desplazamientos en el dominio de la viga continua, reemplazar (5.12) en la ecuación (2.4.51). Los diagramas de fuerzas internas y desplazamientos de la viga continua se muestran en la fig. 5.4.





Deformada

Fig. 5.4. Leyes de fuerzas internas y deformación de la viga continua

En la Tabla 5.4 se muestra una comparación de las fuerzas internas y los desplazamientos en los apoyos y los centros de luz de la viga continua, obtenidos con el MEC y el software SAP 2000 para el análisis de viga se continua empleando elementos tipo frame.

Tabla 5.4 Comparación de resultados

| Punto | Método de los elementos de contorno | | SAP 2000 | |
|-----------|-------------------------------------|----------------|---------------|----------------|
| | Deflexión (m) | Momento (kN.m) | Deflexión (m) | Momento (kN.m) |
| Extremo A | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Extremo B | 0.00 | 38.30 | 0.00 | 38.30 |
| Extremo C | 0.00 | 14.70 | 0.00 | 14.70 |
| Medio A-B | 0.0030 | 31.30 | 0.0030 | 31.30 |
| Medio B-C | 0.0008 | 8.20 | 0.0008 | 8.20 |

5.2.3. Pórtico simple

En la fig. 5.5 se muestra un modelo de la estructura, denominada pórtico simple con las bases empotradas; asimismo, en la tabla 5.5 se detalla las características del pórtico.

Tabla 5.5 Datos geométricos, carga y propiedades del material

| Geometría | | Cargas | | Propiedades del material | |
|----------------------------------|-----------|--------------|-----------|-----------------------------------|-----------|
| Sección A_v (m ²): | 0.25x0.50 | p_2 (N/m): | 21,582.00 | Módulo de elasticidad E_c (MPa) | 23,000.00 |
| Sección A_c (m ²): | 0.50x0.50 | | | Módulo de Poisson ν | 0.15 |
| Longitud l (m): | 6.00 | | | | |
| Longitud h (m): | 4.20 | | | | |

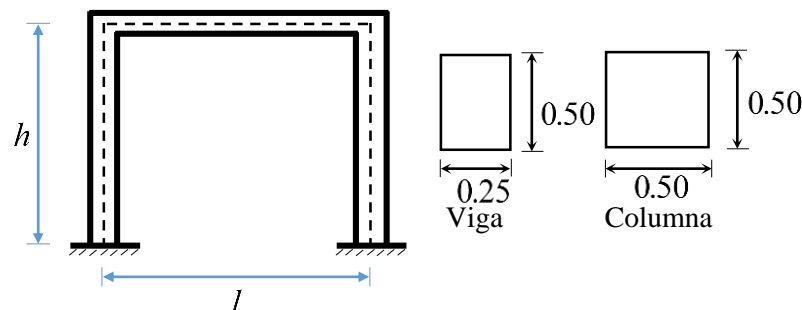


Fig. 5.5. Pórtico simple de un vano

Los pórticos simples son simétricos respecto al eje vertical. Por tanto, las reacciones como leyes de esfuerzo deben ser simétricas respecto al eje de simetría; esto reduce el grado de hiperestatismo del problema. La fig. 5.6 muestra la simplificación de la estructura con carga simétrica:

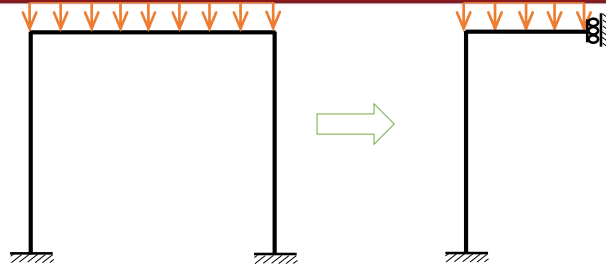
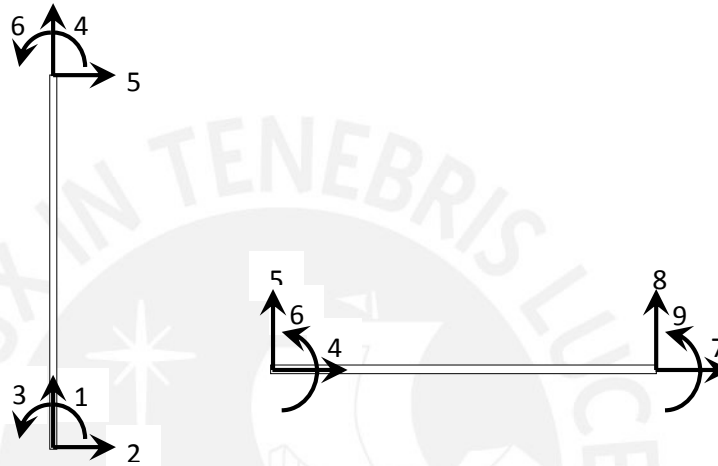


Fig. 5.6. Simplificación del pórtico por simetría

Definición de los grados de libertad de las barras:



Primeramente, emplear las ecuaciones (2.3.17) y (2.5.51) para la columna y la viga, se obtiene el sistema de ecuaciones (5.13) y (5.14):

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7.30E-10 & 0 & 0 \\
 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2.1 & 0 & -5.15E-8 & 3.68E-8 \\
 0 & -0.5 & -2.1 & 0 & 5.15E-8 & 3.68E-8 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & -7.30E-10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 3.75E-8 & -2.50E-8 \\
 0 & 0 & -0.5 & 0 & 3.75E-8 & 2.50E-8 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \bar{u}_1(0) \\
 \bar{u}_2(0) \\
 \bar{u}'_2(0) \\
 N_1(0) \\
 V_2(0) \\
 M_3(0) \\
 \bar{u}_1(h) \\
 \bar{u}_2(h) \\
 \bar{u}'_2(h) \\
 N_2(h) \\
 V_2(h) \\
 M_3(h)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \tag{5.13}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1.04E-10 & 0 & 0 \\
 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1.5 & 0 & -3.76E-8 & 3.76E-8 \\
 0 & -0.5 & -1.5 & 0 & 3.76E-8 & 3.76E-8 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & -1.04E-10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 3.76E-8 & -2.50E-8 \\
 0 & 0 & -0.5 & 0 & 3.76E-8 & 2.50E-8 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \bar{u}_1(0) \\
 \bar{u}_2(0) \\
 \bar{u}'_2(0) \\
 N_1(0) \\
 V_2(0) \\
 M_3(0) \\
 \bar{u}_1(l/2) \\
 \bar{u}_2(l/2) \\
 \bar{u}'_2(l/2) \\
 N_2(l/2) \\
 V_2(l/2) \\
 M_3(l/2)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0.00061 \\
 0.00061 \\
 0 \\
 -0.00081 \\
 0.00081 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \tag{5.14}$$

Las condiciones de frontera para el pórtico simple, son los siguientes:

En la columna:

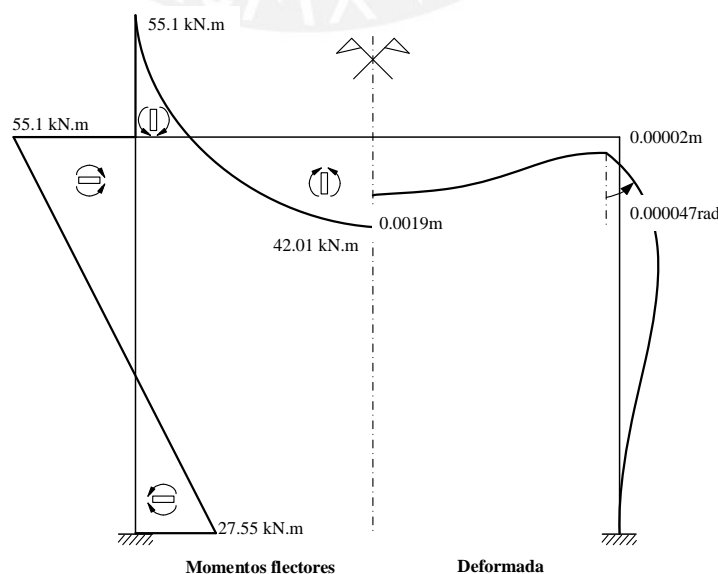
En la viga:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(0) &= 0 & \bar{u}_2'(h) &= \bar{u}_2'(0) \\ \bar{u}_2(0) &= 0 & \bar{u}_2'(l/2) &= 0 \\ \bar{u}_2'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Reemplazar (5.15) en (5.13) y (5.14) y resolver el sistema de ecuaciones para determinar las variables desconocidas:

$$\begin{aligned} N_1(0) &= -64,746.00N \\ V_2(0) &= -19,679.60N \\ M_3(0) &= 27,551.50N.m \\ N_1(h) &= -64,746.00N \\ V_2(h) &= -19,679.60N \\ M_3(h) &= 55,103.00N.m \\ \bar{u}_1(h) &= 0.00002m \\ \bar{u}_2'(h) &= -0.000047rad \\ \bar{u}_2'(h) &= -0.000047rad \\ N_1(l/2) &= -19,679.60N \\ V_2(l/2) &= 0.00N \\ M_3(l/2) &= 42,016.00N.m \\ \bar{u}_1(l/2) &= 0.0019m \end{aligned} \tag{5.16}$$

Para determinar los momentos flectores, fuerzas cortantes, fuerzas axiales, giros y desplazamientos en el dominio del pórtico se emplea los resultados (5.16) y las ecuaciones (2.3.17) y (2.5.51):



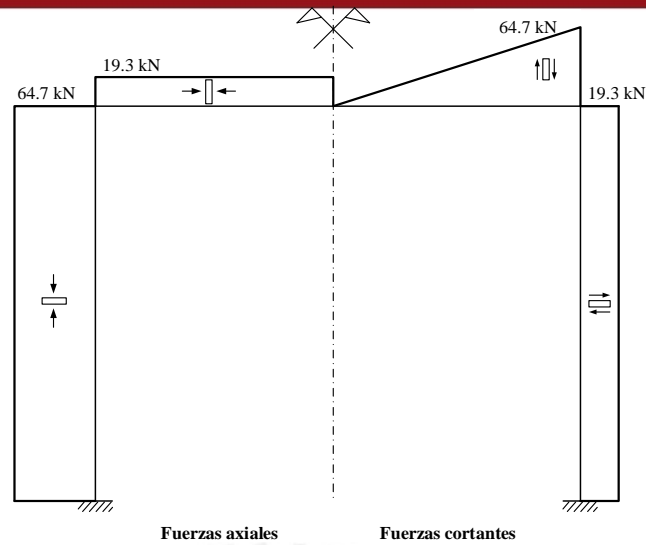


Fig. 5.7. Leyes de fuerzas internas y deformación del pórtico simple

En la Tabla 5.6 se muestra una comparación de las fuerzas internas y deflexiones en la viga y la columna del pórtico simple, obtenidas con el MEF y el software SAP 2000 para el análisis estructural del pórtico, empleando elementos tipo frame.

Tabla 5.6 Comparación de resultados

| Punto | Método de los elementos de contorno | | SAP 2000 | |
|-----------|-------------------------------------|----------------|---------------|----------------|
| | Deflexión (m) | Momento (kN.m) | Deflexión (m) | Momento (kN.m) |
| Extremo A | 0.00 | 27.55 | 0.00 | 26.20 |
| Extremo B | 0.00002 | 55.10 | 0.000021 | 54.70 |
| Extremo C | 0.0019 | 42.01 | 0.0019 | 42.40 |

5.2.4. Parrilla empotrada en los extremos

En la fig. 5.8 se muestra un modelo de la estructura, la cual es denominada viga V con los extremos empotrados; asimismo, en la tabla 5.7 se detallan los datos geométricos, cargas y propiedades del material.

Tabla 5.7 Datos geométricos, carga y propiedades del material

| Geometría | | Cargas | | Propiedades del material | |
|----------------------------------|-----------|--------------|-----------|-----------------------------------|-----------|
| Sección A_v (m ²): | 0.25x0.50 | p_2 (N/m): | 21,582.00 | Módulo de elasticidad E_c (MPa) | 23,000.00 |
| Longitud l_1 (m): | 6.00 | | | Módulo de elasticidad G_c (MPa) | 10,000.00 |
| Longitud l_2 (m): | 4.20 | | | Módulo de Poisson ν | 0.15 |

Para calcular el momento polar de la sección rectangular se emplea la siguiente relación:

$$J_v = kh^3b$$

$$\text{Donde: } k = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{h}{b} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh\left(\frac{n\pi b}{2h}\right) \right]$$

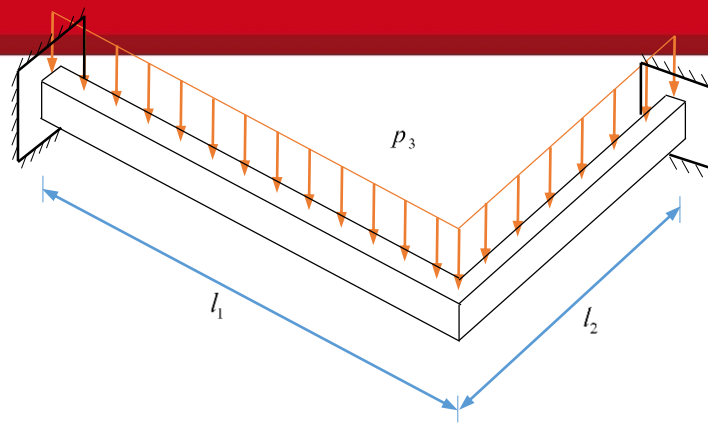


Fig. 5.8. Parrilla empotrada en los extremos

h : Peralte de la sección

b : Base de la sección

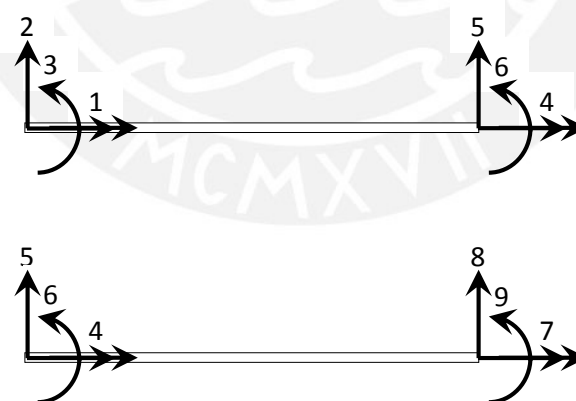
Determinar el valor de k para una sección de $0.25 \times 0.50 \text{ m}^2$:

$$k = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{0.50}{0.25} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh\left(\frac{0.25n\pi}{1.00}\right) \right] = 0.22868$$

Determinar el momento polar:

$$J_v = 0.22868 (0.50)^3 (0.25) = 0.00179$$

Definición de grados de libertad de las barras:



Primeramente empleamos las ecuaciones (2.4.24) y (2.5.51) y para los dos tramos se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3.35E-7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 3 & 0 & -3.01E-7 & 1.50E-7 \\ 0 & -0.5 & -3 & 0 & 3.01E-7 & 1.50E-7 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3.36E-7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 1.50E-7 & -5.01E-8 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 1.50E-7 & 5.01E-8 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(0) \\ \bar{u}_2(0) \\ \bar{u}_2'(0) \\ M_1(0) \\ V_2(0) \\ M_3(0) \\ \Phi_1(l_1) \\ \bar{u}_2(l_1) \\ \bar{u}_2'(l_1) \\ M_1(l_1) \\ V_2(l_1) \\ M_3(l_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00973 \\ 0.00973 \\ 0.00 \\ -0.00648 \\ 0.00648 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2.35E-7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2.1 & 0 & -1.03E-7 & 7.36E-8 \\ 0 & -0.5 & -2.1 & 0 & 1.03E-7 & 7.36E-8 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2.35E-7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 7.36E-8 & -3.51E-8 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 7.36E-8 & 3.51E-8 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(0) \\ \bar{u}_2(0) \\ \bar{u}_2'(0) \\ M_1(0) \\ V_2(0) \\ M_3(0) \\ \Phi_1(l_2) \\ \bar{u}_2(l_2) \\ \bar{u}_2'(l_2) \\ M_1(l_2) \\ V_2(l_2) \\ M_3(l_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00233 \\ 0.00233 \\ 0.00 \\ -0.00222 \\ 0.00222 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Las condiciones de frontera para una parrilla empotrada en los extremos son los siguientes:

Viga de longitud l_1 :

$$\begin{aligned} \Phi_1(0) &= 0 \\ \bar{u}_2 &= 0 \\ \bar{u}_2' &= 0 \end{aligned}$$

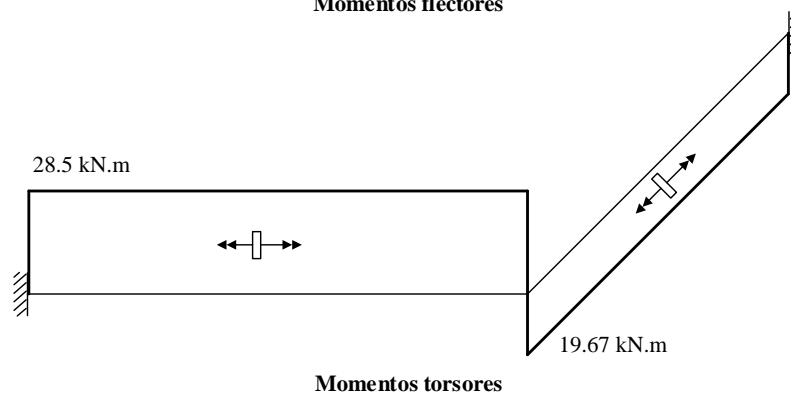
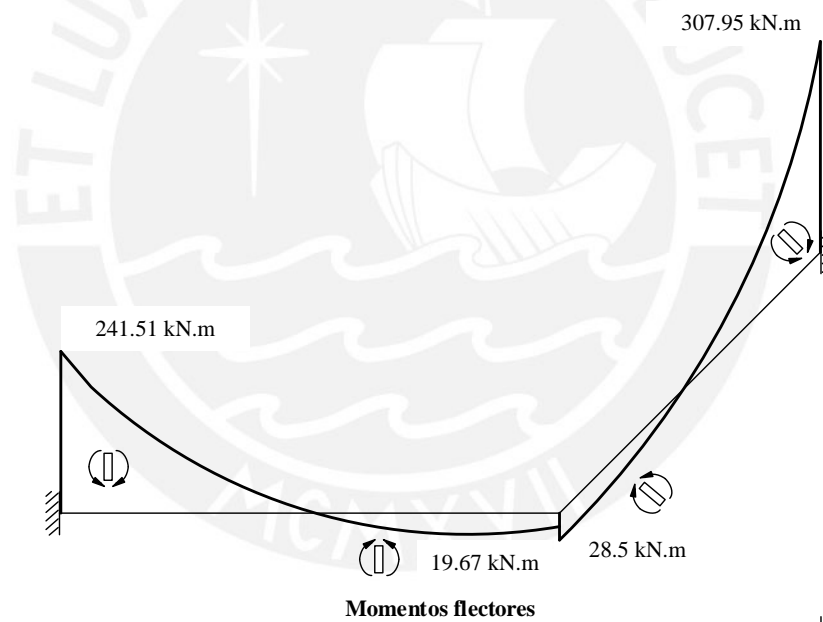
Viga de longitud l_2 :

$$\begin{aligned} \Phi_1(l_2) &= 0 \\ \bar{u}_2(l_2) &= 0 \\ \bar{u}_2'(l_2) &= 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Reemplazar (5.11) en (5.10) y (5.9) y resolver el sistema de ecuaciones para determinar las variables desconocidas:

$$\begin{aligned}
 M_1(0) &= -28,500.90 N.m \\
 V_2(0) &= 108,278.00 N \\
 M_3(0) &= -241,518.00 N.m \\
 M_1(l_1) &= -28,500.90 N.m \\
 V_2(l_1) &= -21,213.70 N \\
 M_3(l_1) &= 19,675.80 N.m \\
 \Phi_1(l_1) &= -0.00957 rad \\
 \bar{u}_2(l_1) &= 0.027 m \\
 \bar{u}_2'(l_1) &= 0.00463 rad \\
 M_1(l_2) &= -19,675.80 N.m \\
 V_2(l_2) &= 111,857.00 N \\
 M_3(l_2) &= -307,952.00 N.m
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

Para determinar los momentos flectores, fuerzas cortantes, giros y desplazamientos en el dominio de la parrilla se emplea (5.12) y la ecuación (2.3.33):



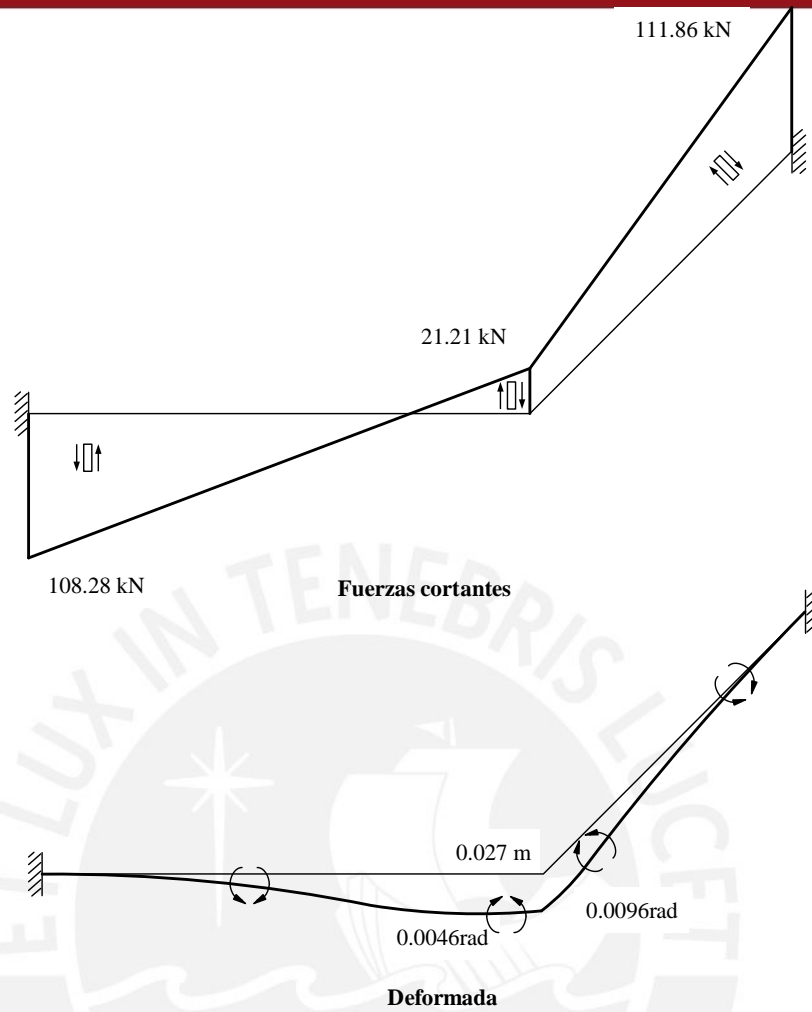


Fig. 5.9. Leyes de fuerzas internas y deformación de la parrilla

5.1. Aplicación en problemas bidimensionales

5.2.1. Losa cuadrada empotrada en sus bordes

En la fig. 5.10 se muestra un modelo de la estructura denominada losa delgada con los extremos empotrados; además, en la tabla se presentan los datos geométricos, cargas y propiedades del material.

Tabla 5.8 Datos geométricos, carga y propiedades del material

| Geometría | | Cargas | | Propiedades del material | |
|------------------|-----------|--------------------------|----------|-----------------------------------|-----------|
| Lado a (m): | 0.25x0.50 | q (N/m ²): | 5,000.00 | Módulo de elasticidad E_c (MPa) | 23,000.00 |
| Espesor h (m): | 0.25 | | | Módulo de Poisson ν | 0.15 |

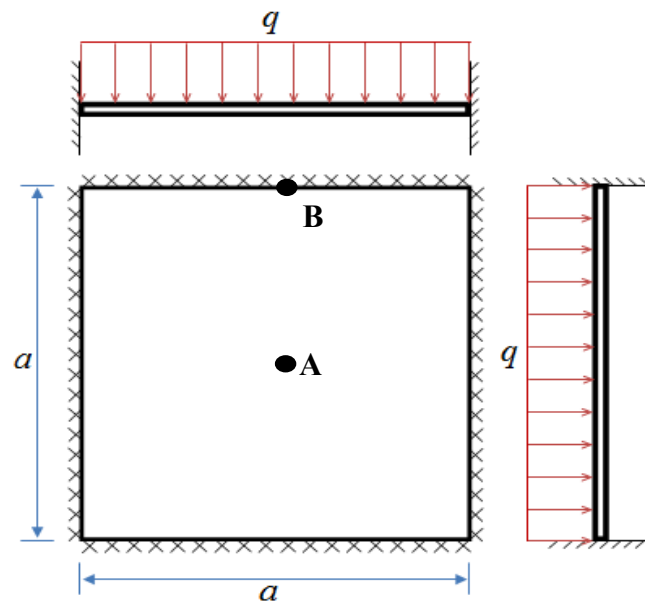


Fig. 5.10 Losa cuadrada

Primeramente, el programa MBEM desarrollado en el Matlab (revisar el anexo B), solicita los datos geométricos, cargas y propiedades del material. De la misma forma, solicita el número de elementos para la división del contorno de la losa, la descomposición de la losa se muestra en la fig. 5.11.

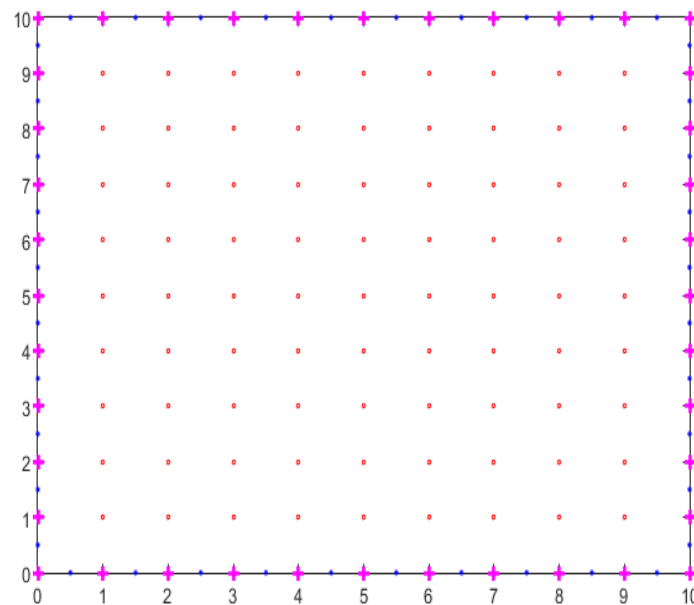


Fig. 5.11 Descomposición de la losa cuadrada por 40 elementos línea

Asimismo, el programa MBEM desarrolla la metodología del método de los elementos de contorno para el análisis estructural de las losas, la cual fue descrito en el capítulo 3, obteniendo como resultados las fuerzas internas y las deflexiones en el dominio de la losa, en las figuras 5.12 y 5.13 se muestra el diagrama de desplazamiento y el diagrama de momentos flectores, respectivamente.

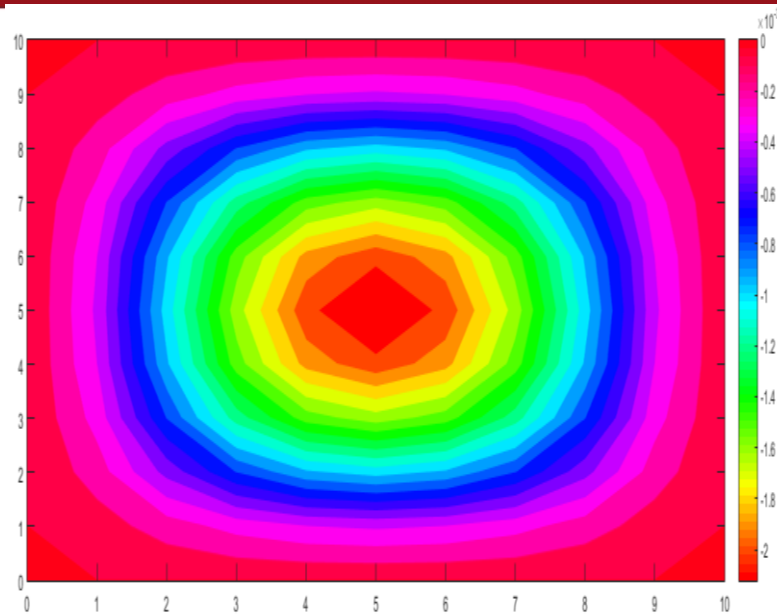


Fig. 5.12 Diagrama de los desplazamientos w (m)

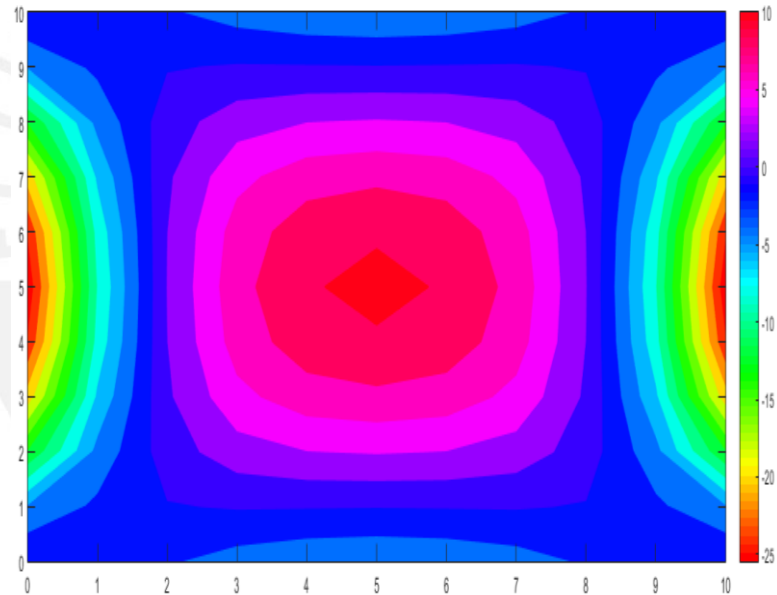


Fig. 5.13 Diagrama de los momentos flectores M_x (kN.m)

En las tablas 5.9 y 5.10 se muestran una comparación de los desplazamientos, momentos flectores y fuerzas cortantes obtenidas con el MEC y el software SAP 2000 para el análisis de la losa, empleando elementos tipo plate.

Tabla 5.9 Comparación de resultados

| Punto | Método de los elementos de contorno | | SAP 2000 | |
|-------|-------------------------------------|----------------------|---------------|----------------------|
| | Deflexión (m) | Momento M_x (kN.m) | Deflexión (m) | Momento M_x (kN.m) |
| A | 0.0021 | 11.45 | 0.0022 | 11.55 |
| B | 0.00 | -7.75 | 0.00 | -7.70 |

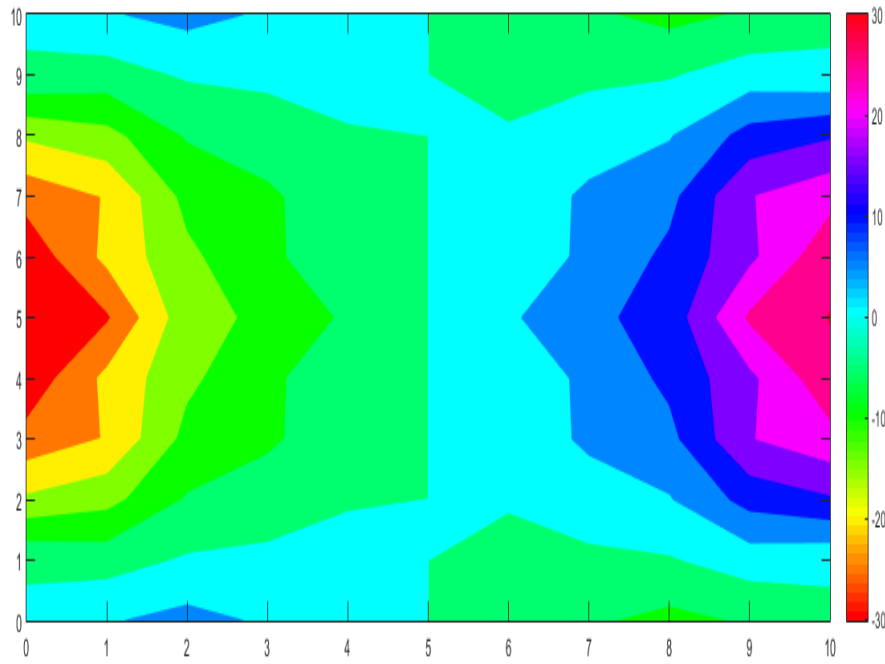


Fig. 5.14 Diagrama de las fuerzas cortantes Q_x (kN)

Tabla 5.10 Comparación de resultados

| Punto | Método de los elementos de contorno | | SAP 2000 | |
|-------|-------------------------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
| | Momento M_y (kN.m) | Cortante Q_y (kN) | Momento M_y (kN.m) | Cortante Q_y (kN) |
| A | 11.45 | 0.00 | 11.55 | 0.00 |
| B | -25.90 | 30.16 | -25.65 | 31.10 |

CAPITULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. Conclusiones

Del presente trabajo se desprenden las siguientes conclusiones:

1. El método de los elementos de contorno desarrollado para el análisis estructural de elementos estructurales unidimensionales y bidimensionales es eficiente porque los desplazamientos y las fuerzas internas son similares a los obtenidos mediante métodos analíticos.
2. El método de los elementos de contorno para el estudio de elementos estructurales unidimensionales no presenta ventajas con respecto a los métodos clásicos de análisis de vigas.
3. El método de los elementos de contorno es robusto para el estudio de losas porque reduce el número de elementos en la descomposición de la estructura, la cantidad de la capacidad de memoria computacional y el tiempo de análisis.

6.2. Recomendaciones

A partir de las conclusiones obtenidas, se recomienda las siguientes líneas de desarrollo futuro:

1. El método desarrollado es recomendado para el desarrollo de análisis de losas con espesor variable.
2. Implementación del programa MBEM para el análisis de losas con formas circulares, elípticas y de formas arbitrarias mediante la teoría de NURBS (NonUniform Rational B-Spline).
3. Implementación del método de los elementos de contorno mediante la filosofía de la programación paralela.

BIBLIOGRAFÍA

- Aliabadi, M. H. y Wen, P. H. (2011). "Boundary element methods in engineering and sciences". Imperial College Press, London.
- Balaš, J., Sládek, J. y Sládek, V. (1989). "Stress analysis by boundary element methods". Elsevier, Czechoslovakia.
- Banerjee, P. K. (1981). "The boundary element methods in engineering". McGraw Hill, England.
- Beer, G., Smith, I. y Duenser, C. (2008). "The boundary element method with programming". Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany.
- Beskos, D. E. (1991). "Boundary element analysis of plates and shells". Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- Bhaskar, K. y Varadan, T. K. (2014). "Plates theories and applications". John Wiley & Sons, England.
- Brebia, C. A. (1984). "Boundary element techniques in computer-aided engineering". Kluwer Academic Publisher, England.
- Brebbia, C. A. y Dominguez, J. (1998). "Boundary element an introductory course". WitPress: Computational Mechanics, Great Britain.
- Brebbia, C. A. y Katsikadelis, J. T. (2006). "Boundary element and other mesh reduction methods XXVIII". WitPress, Boston.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. y Wrobel, L. C. (1984). "Boundary element techniques theory and applications in engineering". Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- Boresi, A., Chong, K.P. y Lee, J.D. (2011). "Elasticity in Engineering Mechanics". John Wiley & Sons, Inc, 3rd Edition, United States of America.
- Chen, A.H.-D., Cheng, D.T. (2005). "Heritage and early history of the boundary element method". Engineering Analysis with Boundary Element 29(2005) pp. 268-302. Elsevier.
- Cruse, T.A. (1988). "Boundary element analysis in computational fracture mechanic". Kluwer Academic Publisher, 1st Edition, Netherlands.
- Gaul, L., Kogl, M. y Wagner, M. (2003). "Boundary element methods for engineers and scientists". Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1st Edition, Germany.
- Gould, P. L. (1988). "Analysis of shell and plate". Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1st Edition, New York.
- Hall, W. S. (1994). "The boundary element method". Kluwer Academic Publisher, 1st Edition, Netherlands.
- Hartmann, F. (1995). "Introduction to boundary elements". Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.

- Jaswon, M. A. y Symm, G. T. (1977). "Integral equation methods in potential theory and elastostatics". Academic Press, 1st Edition, Great Britain.
- Katsikadelis, J. T. (2014). "The boundary element method for plate analysis". Elsevier Inc., 1st Edition, United States of America.
- Katsikadelis, J. T. (2002). "Boundary elements: theory and applications". Elsevier Inc., 1st Edition, The Netherlands.
- Kythe, P. K. (1996). "Fundamental Solutions for differential operators and applications". Birkhäuser, New York.
- Liu, Y. (2009). "Fast Multipole Boundary Element Method Theory and Application in Engineering". Cambridge University Press, New York.
- Mukherjee, S. y Mukherjee, Y. X. (2005). "Boundary methods elements, contours, and nodes". Taylor & Francis, Florida.
- Negrutiu, R. (1987). "Elastic analysis of slab structures". Editura Academice, Romania.
- Pozrikidis, C. (2002). "A practical guide to boundary element methods with the software library BEMLIB". Chapman & Hall/CRC, Florida.
- Rjasonow, S. y Steinbach, O. (2007). "The fast solution of boundary integral equations". Springer, Germany.
- Sauter, S. A. y Schwab, C. (2011). "Boundary element methods". Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- Schanz, M. y Steinbach, O. (2007). "Boundary element analysis". Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany.
- Timoshenko, S. P., Goodier J. N. (1985). "Theory of elasticity". McGraw Hill, 3rd Edition, 21th Printing, Singapore.
- Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger S. (1985). "Theory of plates and shells". McGraw Hill, 2nd Edition, 26th Printing, Singapore.
- Wolf, J. P. (2003). "The scaled boundary finite element method". John Wiley & Sons, England.