PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

CREENCIAS SOBRE DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE DOCENTES DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

que presenta

ANA MARIA CORREA PÉREZ

Dirigido por

ESTELA AURORA VALLEJO VARGAS

San Miguel, 2015

A mi esposo Atilio y a mis hijos Miguel Ángel y Ana Sofía que son la razón de vivir y el motor que nos impulsa a continuar superándonos.

AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Educación del Perú, quien por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominada "Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014".

A la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por acogernos en esta excelente casa de estudios y el excelente desempeño en el trabajo de sus docentes, que es motivo de ejemplo para nuestra labor futura.

A mi asesora, la Mg. Estela Vallejo Vargas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por su comprensión, paciencia, apoyo y colaboración durante la elaboración de esta investigación y porque con su orientación y motivación he asimilado que todavía hay mucho que aprender.

A la Dra. Jesús Flores Salazar de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por su valioso apoyo, motivación, consejos y enseñanza que me permitió seguir adelante en esta maestría.

A la Mg. Augusta Osorio de la Pontificia Universidad Católica del Perú, como miembro del jurado de esta investigación y por compartir su experiencia y conocimientos con los estudiantes de la maestría.

A mi amiga Isela Borja Rueda por su apoyo y amistad incondicional. También, a todos mis compañeros de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por su contribución y ayuda en el desarrollo de esta investigación. Por las experiencias compartidas en el aprendizaje e investigación en favor de los estudiantes y la educación de nuestro país.

A mi madre Lida Pérez y hermana Eulalia Correa Pérez por su tiempo y apoyo constante que me ayuda a seguir adelante en mis proyectos profesionales.

A Miriam Mollo Gómez por ser mi amiga y porque juntas emprendimos este reto de superación.

A todos los estudiantes con los que he compartido y compartiré esta noble labor.

A Dios, por permitirme seguir superándome, por darme salud y bendecirme grandemente.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene por objetivo analizar las creencias sobre demostración matemática que poseen profesores de Educación Secundaria. Para alcanzar este objetivo desarrollamos la investigación con doce profesores de Matemática de colegios de secundaria de distintas ciudades del Perú, que cursan una maestría en una universidad privada. Nos basamos en Reid & Knipping, Godino y Recio, Hersh, Stylianides, de Villiers, Hanna, entro otros como marco teórico y en Martínez, Ponte, Hernández, Fernández & Baptista y Andrade entre otros como marco metodológico. En cuanto a la metodología del estudio de casos, los datos son obtenidos por medio de entrevistas semiestructuradas en dos etapas. En la primera etapa las entrevistas con preguntas abiertas sobre las demostraciones matemáticas, su importancia y roles en la enseñanza en la educación secundaria y la segunda etapa con preguntas cerradas sobre la evaluación de argumentos que demuestran tareas específicas, con el fin de analizar sus coincidencias o contradicciones en ambas etapas. Observamos que los docentes expresan significados sobre la demostración matemática diferentes a los expresados cuando valoran argumentos demostrativos. Finalmente los docentes reconocen algunos de los roles que desempeña la demostración matemática en su trabajo de enseñanza en la escuela.

Palabras clave: Demostración matemática, Creencias de profesores, roles de la demostración matemática.

ABSTRACT

This research aims to analyze beliefs about mathematical proof that middle and high school teachers have. To achieve this objective we develop research with twelve high school mathematics teachers from different cities of Peru who are pursuing a master's degree in a private university. We rely on Reid & Knipping, Godino and Recio, Hersh, Stylianides, de Villiers and Hanna, among others as a theoretical framework and Martinez, Ponte, Hernandez Fernandez & Baptista and Andrade among others as a methodological framework. As for the study of the methodology cases, data is obtained through semi-structured interviews in two stages. In the first stage, the interview consists of open questions about mathematical proofs, its importance and role in middle and high school teaching. The second stage consists of closed questions on the evaluation of arguments that demonstrate specific tasks, in order to analyze their similarities or contradictions in both stages. We also noted that teachers express different meanings about mathematical proof than when they're assessing the demonstrated arguments. Finally teachers recognize some of the roles played by mathematical proof in their teaching job at the school.

Keywords: mathematical proof, Beliefs Teachers', roles of mathematical proof.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES

En esta investigación estamos interesados en analizar las creencias que poseen profesores de matemática de educación secundaria sobre demostración matemática. Dado que, las demostraciones matemáticas son consideradas en las recientes reformas curriculares en diferentes países, pensamos que realizar una investigación sobre este tema es pertinente ya que en el Perú debería ser tomado en cuenta este tema de manera más visible en la Educación Básica Regular.

Para el desarrollo de este estudio presentamos la siguiente estructura que consta de tres capítulos:

En el primer capítulo presentamos el problema de investigación en el cual se evidencian investigaciones relacionadas con nuestro objeto de estudio las demostraciones matemáticas, los cuales nos exponen las concepciones y creencias que tienen los docentes respecto de ellas, además revisamos investigaciones sobre las creencias en investigación matemática; también mostramos la justificación del tema de investigación, que contiene la revisión de los documentos oficiales de la Educación Básica Regular del Perú, la pregunta y los objetivos.

En el segundo capítulo presentamos los elementos teóricos y metodológicos. En cuanto a los aspectos teóricos, presentamos aquellos que se relacionan con nuestro objeto de estudio y nuestros objetivos, las diferentes perspectivas de las concepciones de las demostraciones matemáticas y los roles que éstas cumplen. Sobre la metodología de la investigación, presentamos los aspectos del estudio de casos que utilizamos en la tesis.

En el tercer capítulo presentamos primero la descripción de los sujetos participantes en la investigación, la técnica de recolección de datos, las respuestas esperadas a las argumentaciones evaluadas por los docentes con los respectivos argumentos que demuestran los problemas planteados y finalmente la organización de los datos recogidos y sus respectivos análisis.

Por último, presentamos las consideraciones finales del estudio en concordancia con los elementos teóricos y metodológicos, la pregunta de investigación y los objetivos.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo presentamos la problemática de investigación relacionada con nuestro objeto de estudio. Para ello, presentamos investigaciones sobre concepciones y creencias de la demostración matemática por docentes de educación secundaria realizados previamente y en el contexto de otros países. Además, realizamos una revisión del Diseño Curricular Nacional (DCN) en la parte de la fundamentación del área de matemática y en la organización de las capacidades transversales de razonamiento y demostración, con los contenidos para analizar la relación con nuestro objeto de estudio. Revisamos también, la fundamentación del área y los roles del docente y estudiante en la Guía de Orientaciones para el trabajo Pedagógico (OTP). Además, presentamos un resumen de los resultados de la evaluación efectuada por la Unidad de Medición de la calidad (UMC) del Perú a estudiantes del quinto año de secundaria (estudiantes entre 15 y 16 años de edad). Finalmente, presentamos la pregunta de investigación y sus respectivos objetivos.

1.1 Antecedentes

Exponemos los antecedentes organizados en dos partes: la primera parte, está formada por investigaciones en Educación Matemática que tratan sobre demostración matemática. La segunda parte, contiene definiciones de creencias en investigaciones del área y que tomaremos como base en nuestro estudio.

Investigaciones sobre demostración matemática

La demostración matemática es un tema de interés para la comunidad de educadores matemáticos a nivel internacional tales como Reid & Knipping (2010), Hanna & de Villiers (2012), Stylianides (2007) entre otros. Es así que eventos de alto prestigio como los grupos Theory of Mathematics Education (TME), Psychology of Mathematics Education (PME), Congress of European Research in Mathematics Education (CERME), Interamerican Conference on Mathematics Education (ICME), tiene entre sus grupos de trabajo uno denominado "Topic Study Group" cuyos miembros se encargan de presentar y discutir investigaciones enfocadas en el Razonamiento y la demostración matemática y que son llevadas a cabo por educadores matemáticos de distintas partes del mundo.

Respecto a los docentes, también se ha venido investigando cómo conciben ellos las demostraciones matemáticas para que ello determine en los estudiantes sus propias concepciones de las matemáticas y de su propio aprendizaje, como es el caso de Mingus y Grassl (1999), Knuth (2002), Furinguetti y Morselli (2009), Frasier (2010), entre otros.

Hanna y De Villiers (2012) nos presentan algunos estudios sobre las concepciones y creencias de las demostraciones matemáticas de los docentes en ejercicio y también de los matemáticos, realizados por algunos investigadores. Es el caso de Mingus y Grassl (1999; citado en Hanna y de Villiers, 2012) quienes realizaron un estudio con 30 maestros en pre servicio de la escuela de primaria y 21 estudiantes de la carrera de educación secundaria con especialidad en matemáticas. Los investigadores pidieron a los participantes que expresen lo que constituye una demostración y les preguntaron sobre el rol de la demostración en matemáticas. En sus definiciones de la demostración, los docentes de educación secundaria destacaron el poder explicativo, mientras que los docentes de educación primaria lo centraron en la verificación. La mayoría de los participantes también señalaron la importancia de la demostración para ayudar a los estudiantes a comprender las matemáticas que están haciendo. Por otra parte, los docentes de educación secundaria también consideraron el rol de la demostración para el mantenimiento y la promoción de la estructura de las matemáticas (p. 177). Además, el 69% de los profesores en formación en dicho estudio abogó por la introducción de la demostración antes de clases de geometría del décimo grado. Y el primer grupo de profesores de primaria reconoció que la falta de exposición al razonamiento formal en sus estudios de secundaria y preparatoria afectó su capacidad de aprender a leer y construir demostraciones" (p. 178).

Otro estudio revela diferentes creencias sobre el rol de la demostración. Furinguetti y Morselli (2009) investigaron cómo los profesores de secundaria tratan las demostraciones en el aula, y qué factores (especialmente las creencias) afectan a ese tratamiento. En un estudio cualitativo de diez casos a través de entrevistas individuales, semiestructuradas, los docentes investigados manifiestan como primer punto para entender si la demostración se trata en el aula

> Nueve de los diez maestros declararon que tratan la demostración en el aula. El único maestro que declaró no tener que lidiar con la demostración dijo que la prueba no se trata, porque la geometría euclidiana no está en el programa de su tipo de escuela. También otros docentes se refieren principalmente a la geometría euclidiana, como el dominio más adecuado para la enseñanza de la demostración. Esto pone en evidencia la presencia de creencias sobre la demostración y la geometría: la geometría es el dominio ideal para la enseñanza de la demostración, la enseñanza de la demostración se limita a la geometría. (Furinguetti y Morselli, 2009, p.170)

El siguiente punto a entender es cómo se trata la demostración. Se han identificado dos tendencias: la demostración en la enseñanza de teoremas, frente a la enseñanza de cómo demostrar y enseñar a través de la demostración. En el primer caso, observan la demostración como medio de hechos matemáticos convincentes y sistematizados, mientras que en el segundo caso la demostración es principalmente un medio para promover la comprensión matemática. De acuerdo a su marco teórico, manifiestan que el primer enfoque se centra en la demostración como un producto, mientras que, en el segundo, se centra en el proceso (p. 170)

Furinguetti y Morselli (2009), señalan en su estudio de casos que la enseñanza de la demostración se ve influenciada por las creencias específicas sobre la demostración y por una gama de creencias. Además indican que los maestros que entrevistaron se encuentran sumamente influenciados por sus creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y otros están influenciados por sus creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Los autores, señalan que la investigación sobre las creencias acerca de la demostración no sólo debe centrarse en las creencias de detección, sino también en la comprensión de sus orígenes. Recalcan además que las creencias que afectan a la enseñanza de la demostración no están limitadas a las creencias acerca de la demostración. Como consecuencia al respecto se refieren a los programas de formación del profesorado. Por un lado, parece complejo enseñar a demostrar y por otro, la enseñanza de la demostración debe ser el foco de cualquier programa de formación docente, ya que representa afrontar a la enseñanza de las matemáticas desde un punto de vista eficiente. Por tal razón la investigación sugiere que las demostraciones deben ser tratadas con mayor intensidad en programas de desarrollo profesional del docente.

Por otro lado, Knuth (2002a) realizó una investigación a dieciséis docentes de matemáticas de educación secundaria sobre sus concepciones de la demostración, recogiendo los datos a través entrevistas y de respuestas escritas a ejercicios diseñados por el investigador, enfocados en la demostración matemática.

El autor, halló que los maestros especifican que las demostraciones matemáticas juegan varios roles, como, por ejemplo, para explicar que un enunciado es verdadero, para crear, comunicar y sistematizar las matemáticas, etc. (p. 399). Esto indica, según el investigador, que los docentes sí tenían una poderosa comprensión de los roles de la demostración, la que concluye

> Tal vez si los maestros prestaran atención explícita a estos roles durante su instrucción, proporcionarían a sus estudiantes experiencias en el aula con la demostración que les permitirían ir más allá de las concepciones limitadas de demostración que los estudiantes han desarrollado tradicionalmente. (Knuth, 2002a, p. 399)

Por otro lado, el investigador encontró que los maestros mencionan, quizá algo más importante pedagógicamente, la promoción o desarrollo de la comprensión matemática como una de las funciones de la demostración, la que, entre los roles, está ausente y que tiene que ver con sus experiencias como docentes (p. 399). Estas experiencias deben ser fortalecidas en los docentes desde su formación, como lo manifiesta el investigador

> Los maestros necesitan, como los estudiantes, experimentar la demostración como una herramienta significativa para el estudio y aprendizaje de las matemáticas. Las experiencias de esta naturaleza pueden influir en las concepciones de la demostración que desarrollan como maestros, y estas ideas, a su vez, pueden influir en las experiencias con la demostración que sus estudiantes encontrarán en su aula de matemáticas de la escuela secundaria (Knuth, 2002a, p. 403).

De acuerdo con la cita, las demostraciones matemáticas deben estar incluidas en la formación del profesorado para que sus concepciones cambien en bien posterior del estudiante. Finalmente, el investigador agrega, “La investigación futura debe explorar más a fondo las concepciones de la demostración que los maestros deben tener, ya que ayudan a los estudiantes a aprender a razonar matemáticamente” (Knuth, 2002ª, p. 404).

También, tenemos a Frasier (2010) quien realizó un estudio a 374 profesores de matemática de secundaria en servicio con el propósito de investigar las concepciones de los profesores y de sus prácticas con la demostración matemática. Con la intensión de obtener datos cuantitativos sobre el problema a investigar, con la expectativa de la disponibilidad de los docentes a proporcionar información para generalizar los resultados a una población mayor para lo cual nos indica:

> Existe una necesidad en la comunidad de la educación matemática para desarrollar una medida cuantitativa de la medida en que los problemas identificados y descritos por Knuth son representativos de todos los profesores de matemáticas de secundaria en servicio. Además, se sabe poco acerca de cómo los maestros utilizan la demostración en su enseñanza, con qué frecuencia los maestros usan la demostración en su enseñanza, y qué factores (incluyendo sus concepciones) están relacionados con cómo los profesores utilizan la demostración en su enseñanza (Frasier, 2010, p. 6).

Teniendo como hallazgos en esta investigación cuatro aspectos importantes los cuales nos manifiesta en la siguiente cita

> Los hallazgos de este estudio sugieren que las concepciones de la demostración de los profesores se componen de cuatro componentes principales: (i)la capacidad los docentes de comprender, producir y apreciar el valor de las demostraciones matemáticas, (ii) la importancia de las concepciones de la demostración en los docentes de matemáticas, (iii) las percepciones de los profesores sobre la capacidad de los estudiantes para entender la demostración, (iv) la conciencia intelectual de los maestros sobre la filosofía, la historia y las normas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Prácticas en el aula de los docentes reportados con la demostración parecen variar de acuerdo con el nivel de habilidad académica de los estudiantes, así como la sub-disciplina matemática en particular que se enseña. Estos hallazgos tienen implicaciones para los profesores, formadores de profesores, autores de libros de

> texto, y los que crean las normas de enseñanza y aprendizaje, así como la demostración patrocinada por el gobierno (Frasier, 2010, p.iii).

Frasier (2010) resume sus hallazgos en los siguientes puntos, abordando concepciones de la demostración de los docentes de matemáticas de secundaria en la educación matemática, (a) se encontraron concepciones de los maestros, de la importancia de la demostración en la educación matemática a estar íntimamente relacionado con los profesores, concepciones de la importancia de la demostración en la disciplina de las matemáticas, así como a los concepciones de los profesores de la posibilidad de la demostración como un medio para ayudar a los estudiantes a desarrollar sus habilidades de pensamiento lógico, (b) las concepciones de los profesores sobre la importancia de la demostración en la educación matemática fueron diferentes según los niveles académicos de los estudiantes, (c) los maestros informaron que ellos creían que una porción de la población estudiantil son intelectualmente incapaces de comprender la demostración matemática (d) los maestros creían que hay estudiantes que son intelectualmente capaces de entender la demostración, pero en realidad no la logran comprender, (e) los profesores perciben que sus estudiantes tienen actitudes negativas hacia la demostración en general, (f) las concepciones de la importancia de la demostración varía según el tema matemático particular que los profesores están enseñando, (g) los maestros informaron que fueron convencidos de utilizar la demostración en muchas diferentes maneras, (h) los maestros informaron que en general estaban satisfechos con la forma en que sus libros de texto direccionan la demostración matemática, (i) los maestros informaron que utilizaron la demostración en su enseñanza en una variedad de maneras, (j) el formato de dos columnas se observó que fue el formato dominante para el registro de los argumentos de demostración, (k) alrededor de la mitad de los participantes informaron que utilizan el software de geometría dinámica en sus aulas, (l) los maestros informaron que en general están interesado en aprender más acerca de la demostración matemática, y, finalmente, (m), mientras que los miembros del NCTM eran más propensos que los no miembros estén familiarizados con las recomendaciones del NCTM relativos a la demostración, de que no eran más propensos que los no miembros se pongan de acuerdo con esas recomendaciones (p. 95).

Creencias en investigaciones en Educación Matemática

El término creencia ha sido definido y estudiado por muchos investigadores, entre los cuales vemos coincidencias o diferencias para su significado. A continuación mostramos algunas definiciones de creencias y su relación con el conocimiento que conciernen con nuestro trabajo tomando finalmente una postura sobre ello.

Para Callejo & Vila (2003) Las creencias tienen componentes cognitivos, afectivos y la definen como:

> (…) un tipo de conocimiento subjetivo referido a un contenido concreto sobre el cual versan; tienen un fuerte componente cognitivo, que predomina sobre el afectivo y están ligadas a situaciones. Aunque tienen un alto grado de estabilidad, pueden evolucionar gracias a la confrontación con experiencias que las pueden desestabilizar: las creencias se van construyendo y transformando a lo largo de toda la vida. (p.181)

Como los autores lo manifiestan, las creencias pueden ir progresando cuando un docente está sujeto a nuevas experiencias que harán que éstas se desequilibren. Por lo tanto, las creencias se van edificando y variando a lo largo de toda la vida.

Thompson (1992), subraya que es imposible distinguir las creencias de los conocimientos, ya que "los profesores tratan a sus creencias como conocimiento" (p 127.), Y que es importante tener en cuenta dos tipos de creencias: creencias sobre las matemáticas y las creencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estos dos tipos de creencias están evidentemente vinculadas a conocimiento de los contenidos y el conocimiento didáctico del contenido y, como explica Thompson, puede tener un papel crucial para influir en la práctica docente de los profesores.

Por otro lado, Cabassud, Conner, Iscimen, Furinghetti, Jahnke, & Morselli (2012) En cuanto a las creencias y conocimientos, asumen la posición que es expresada por el siguiente pasaje por Leathan (2006):

> De todas las cosas que creemos, hay algunas cosas que "sólo cree" y otras cosas que "más que crea la conocemos" Esas cosas que "más que creemos" que nos referimos como el conocimiento y esas cosas que "simplemente creemos" nos referimos como creencias. Así creencias y conocimientos de manera rentable pueden ser vistos como subconjuntos complementarios de las cosas que creemos (p. 175).

Según los autores, el conocimiento lo asumen como "cosas que sabemos, son aquellos que se basan en un acuerdo social dentro de una comunidad determinada (para las matemáticas, la comunidad de matemáticos)" (p. 175)

Además, siguen la misma línea de, Philipp quien "describe el conocimiento como "creencia con certeza o creencia verdadera justificada. Lo qué es el conocimiento para una persona puede ser creencia por otra, dependiendo de si uno tiene la concepción como fuera de toda duda" (2007, citado en Cabassud, Conner, Iscimen, Furinghetti, Jahnke, & Morselli (2012) p. 175). Philipp pasa a describir las creencias como:

> Psicológicamente entendimientos mantenidos, premisas o proposiciones sobre lo que es el mundo, aunque sean verdaderas. Las creencias son más cognitiva, se hacen sentir con menos intensidad, y son más difíciles de cambiar que las actitudes. Las creencias pueden ser consideradas como lentes que afectan la visión de uno de algún aspecto del mundo o como disposiciones hacia acciones. Las creencias se diferencian de los conocimientos, podrán celebrarse con mayor o menor convicción y no son consensuales. Las creencias son más cognitiva de las emociones y actitudes (ibíd., p. 175) (Traducción nuestra)

Además los autores examinan creencias sobre la naturaleza y el papel de la demostración en las matemáticas, creencias sobre el papel de la demostración en la escuela, creencias acerca de las dificultades para demostrar, creencias acerca de cómo la demostración se les debe enseñar en la escuela y creencias sobre uno mismo como pensador matemático en el contexto de la demostración.

En la presente investigación tomamos la postura de Callejo & Vila porque consideramos que por los componentes cognitivos y afectivos que poseen las creencias se relaciona con nuestro trabajo de investigación.

1.2 Justificación

En Perú (2008), el Diseño Curricular Nacional (DCN) de la Educación Básica Regular (EBR) es el documento principal el que

> […] Sintetiza las intenciones educativas y contiene los aprendizajes previstos que todo estudiante de Educación Básica Regular debe desarrollar […] Propone competencias a lo largo de cada uno de los ciclos, las cuales se logran en un proceso continuo a través del desarrollo de capacidades, conocimientos, actitudes y valores debidamente articulados, que deben ser trabajados en la institución educativa con el fin de que se evidencien en el saber actuar de los estudiantes (Perú, 2008, p. 16).

En el DCN el área de matemática se organiza en tres componentes Número, relaciones y funciones, Geometría y medición y Estadística y probabilidad. Además de tres capacidades que "[…] involucran los procesos transversales de Razonamiento y demostración, Comunicación matemática y Resolución de problemas, siendo este último el proceso a partir del cual se formulan las competencias del área en los tres niveles" (Perú, 2009, p. 316). Y con respecto a nuestro trabajo en la capacidad de Razonamiento y demostración, el DCN ha establecido "(…)para formular e investigar conjeturas matemáticas, desarrollar y evaluar argumentos y comprobar demostraciones matemáticas, elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración para que el estudiante pueda reconocer estos procesos como aspectos fundamentales de las matemáticas" (Perú, 2009, p. 317).

Por otro lado la Guía denominada Orientaciones para el Trabajo pedagógico (OTP) en el área de Matemática del Perú (2010), distribuido a los docentes de Matemática del nivel secundario, manifiesta en la fundamentación

> Que los futuros ciudadanos tendrán seguridad al resolver situaciones problemáticas, mostrando actitudes como la honestidad y transparencia al comunicar procesos de solución y resultados; perseverancia para lograrlos; rigurosidad para representar relaciones y plantear argumentos; iniciativa, capacidad de trabajo en equipo, curiosidad por los nuevos avances, capacidad para afrontar diferentes problemas y dificultades (Perú, 2010, p. 6).

Es decir, Perú (2010) encontramos que como propósito del área de matemática el estudiante debe aprender a razonar matemáticamente. El trabajo en el área debe admitir que el estudiante desarrolle su habilidad para crear y contrastar conjeturas, exponer contraejemplos, continuar argumentos lógicos, juzgar la validez de un argumento, construir argumentos sencillos. Y en la OTP señala como rol del docente, permitir que los estudiantes aclaren y justifiquen sus ideas oralmente y por escrito. Además como el rol del estudiante que investiguen, realicen conjeturas, validen soluciones y respuestas apoyándose en demostraciones y argumentos matemáticos (Perú, 2010, p. 54)

La Unidad de Medición de la Calidad (UMC) es la instancia técnica del Ministerio de Educación del Perú responsable de diseñar e implementar evaluaciones nacionales de rendimiento. Estas evaluaciones constan de un conjunto de pruebas y cuestionarios, y proporcionan información acerca del nivel de rendimiento académico de los estudiantes de las escuelas del Perú. El último informe fue publicado el año 2005 y las pruebas fueron aplicadas a los estudiantes en el año 2004, En este informe la UMC, clasifica los resultados de la prueba en tres niveles de desempeño: Suficiente, Básico y previo y arrojo que,

> […] solo el 2,9% de los estudiantes de quinto grado de secundaria pertenece al nivel suficiente, nivel considerado como el esperado para todos los estudiantes del grado. Lo preocupante de esta situación es que el resto de estudiantes (97,1%) muestra no haber desarrollado las capacidades matemáticas requeridas para terminar su escolaridad. […] los resultados de la Evaluación Nacional UMC 2004, permiten inferir que la didáctica de la matemática de nuestro país responde a un enfoque centrado en la enseñanza de reglas y algoritmos. Esta afirmación se basa en la constatación de que las preguntas en las que los estudiantes tuvieron mayor éxito fueron, precisamente, aquellas que solo demandaban un aprendizaje reproductivo

> relacionado con la aplicación de algoritmos convencionales o con ejercicios típicos" (Perú, 2005, p. 219).

Además en el informe de la UMC encontramos que solo en dos ejercicios se le solicita al estudiante que justifique, argumente o demuestre ejercicios o problemas matemáticos.

Como lo dice el mismo informe de la UMC, la enseñanza de las matemáticas en nuestro país se está dando de forma tradicional, no se está considerando a las demostraciones matemáticas en ellas sino más bien a la enseñanza de reglas y algoritmos, las que obviamente no llevaran al logro de las capacidades planteadas en el DCN.

En nuestro trabajo realizaremos un estudio de caso con profesores de secundaria en ejercicio porque son ellos los que tienen alguna experiencia en trabajos con demostraciones, según lo contemplado en el DCN, OTP u OMC. Estas experiencias pueden haber formado en los docentes sus creencias sobre la enseñanza aprendizaje de las matemáticas y sobre las mismas demostraciones matemáticas y sus roles.

A nivel internacional tenemos a investigadores como Reid y Knipping (2010) quienes nos manifiestan "Como enseñas la demostración depende de lo que entendamos por "demostración" y lo que piensas para qué son las demostraciones". (p. 211) (traducción nuestra). Y afirman que,

> Más fundamentalmente, la investigación debe abordar la cuestión de lo que los profesores deben saber la demostración con el fin de enseñarla con éxito. ¿Cómo se debe enseñar a los profesores para enseñar la demostración? ¿Los profesores actualmente en la escuela han comprendido suficiente de la demostración para enseñar de otra manera? si no, entonces la comprensión del estudiante de la demostración podría ser ideales para mejorar la comprensión de los profesores que tratan de la demostración primero. (p.222).

Además, Knuth (2002) recalca la importancia de la investigación futura de las concepciones de los profesores porque son los que ayudan a los estudiantes a razonar matemáticamente (p.404).

Por otra parte, El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) como uno de sus estándares de Procesos de Razonamiento y demostración proponen

> El razonamiento matemático y la demostración ofrecen poderosos caminos para desarrollar y expresar comprensiones en un amplio rango de fenómenos. Las personas que piensan y razonan analíticamente tienden a ver patrones, estructuras o regularidades tanto en situaciones matemáticas como en el mundo real. Ellos se hacen preguntas acerca de si los patrones son accidentales o si ocurren por alguna razón. Además, ellos establecen e investigan conjeturas matemáticas; desarrollan y evalúan argumentos y demostraciones matemáticas, que son las maneras formales de expresar tipos particulares de razonamiento y justificación. De tal forma, explorando fenómenos, justificando resultados y utilizando conjeturas matemáticas

> en todas las áreas de contenido—y con diferente complejidad—en todos los niveles y grados, los estudiantes deben ver y sentir que las matemáticas sí tienen sentido. (p. 5)

Por todo lo expuesto anteriormente el rol del docente es importante para promover estas capacidades en los estudiantes, es necesario entonces determinar los conocimientos y sus creencias sobre las demostraciones matemáticas, como lo dice Reid y Knipping dependerá de lo que los profesores piensen y entiendan sobre demostraciones matemáticas para que determine cómo enseñaran las demostraciones matemáticas (p. 211)

Como vemos tanto el DCN (Perú, 2008) como La OTP (Perú, 2010), documentos emanados por el Ministerio de Educación del Perú, posteriores a la última prueba Nacional de la UMC (Perú, 2004), consideran a las demostraciones, argumentaciones, justificaciones, etc. En la formación de estudiantes Críticos, reflexivos, racionales, investigador e informado (Perú, 2008, p. 34). Si está justificado estos logros con los estudiantes, también se justifica el trabajo de investigación con los docentes como lo manifiestan también investigaciones y documentos internacionales.

Por todo lo anteriormente presentado, es decir, las investigaciones que se han desarrollado sobre demostración matemática, específicamente sobre como los docentes la conciben, las definiciones de creencias relacionadas con la investigación en enseñanza de las matemáticas y la justificación en base a documentos oficiales del Perú estamos interesados en responder la siguiente pregunta:

¿Qué creencias sobre demostración matemática poseen profesores de educación secundaria?

Para dar respuesta a la pregunta nos planteamos los siguientes objetivos.

Objetivo general:

Analizar las creencias sobre demostración matemática que poseen profesores de educación secundaria.

Objetivos específicos:

1. Describir los significados, que atribuyen profesores de educación secundaria, a la demostración matemática de acuerdo a las perspectivas incluidos en los elementos teóricos del presente trabajo de investigación.
2. Identificar, de acuerdo a las perspectivas y roles de la demostración matemática, las creencias que poseen profesores de educación secundaria sobre demostración matemática.

En el siguiente capítulo presentamos los elementos teóricos y la metodologia empleados en esta investigación.

CAPÍTULO II: ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLOGÍA EMPLEADOS

En este capítulo presentamos los elementos teóricos que se relacionan con la fundamentación y descripción del problema que es objeto de estudio, así como la metodología de investigación que seguiremos para el desarrollo de este trabajo de investigación.

2.1 Demostración matemática

El significado del verbo demostrar en el diccionario de la Real Academia Española, para el que demostrar es "(m)ostrar, hacer ver que una verdad particular está comprendida en otra universal, de la que se tiene entera certeza.", o "Probar, sirviéndose de cualquier género de demostración". Mientras que por demostración se manifiesta que es una "(p)rueba de algo, partiendo de verdades universales y evidentes." O una "(c)omprobación, por hechos ciertos o experimentos repetidos, de un principio o de una teoría." O el "(f)in y término del procedimiento deductivo".

Reid & Knipping (2010), en su libro, hacen un estudio completo acerca de la demostración matemática y de algunos procesos afines como la argumentación. Como una de las consideraciones que ellos incluyen, centran su atención en el aspecto puramente gramatical de la palabra demostración, para el cual distinguen los siguientes usos:

> 1) El uso del término "demostración" en su forma singular, sin el uso de un artículo para referirse a un concepto. 2) El uso del término "demostración" con el uso de un artículo o en su forma plural para referirse a un objeto. 3) El uso del verbo "demostrar" para referirse a una acción o a un proceso." (p. 28) (traducción nuestra).

La definición de demostración matemática se da de acuerdo al contexto en el que se pretenda utilizar. Matemáticos, profesores de matemáticas y educadores matemáticos podrían llegar a tener diversas opiniones y creencias de lo que constituye una demostración. A continuación comentamos algunas de estas perspectivas, así como las respectivas concepciones de demostración matemática para cada una de ellas.

Perspectiva en el contexto de la vida cotidiana

De acuerdo a Reid & Knipping (2010), la concepción de demostración, desde la perspectiva de la vida cotidiana, tiene como ingrediente principal el convencimiento. Los autores manifiestan que en la vida cotidiana "'demostración' y 'demostrar' pueden referirse a convencer a alguien de algo, o en probar algo para ver si es correcto" (p. 25) (traducción nuestra).

Por otro lado Godino y Recio (2001) manifiestan que en la vida cotidiana “se suele usar una argumentación informal,…, dependiente del contexto e incluso de la propia situación emocional del sujeto.” (p. 410). La concepción de demostración desde esta perspectiva está enfocada en la argumentación como un proceso más general y subjetivo. De esta manera, los argumentos producidos no necesariamente nos conducen a una verdad absoluta.

Perspectiva de la lógica y fundamentos de la matemática

Crespo y Ponteville (2005) definen a la demostración matemática dentro de esta perspectiva como sigue en la cita:

> En matemática, “desde el punto de vista formalista, una demostración en una teoría es una secuencia de proposiciones, cada una de las cuales o bien es un axioma, o bien una proposición que ha sido derivada de los axiomas iniciales por las reglas de inferencia de la teoría. Desde esta óptica, un teorema es una proposición así derivada por una demostración. Esta concepción de las demostraciones, se basa en aspectos sintácticos, haciendo hincapié en la aplicación de reglas de inferencia precisas y a veces sin hacer uso de la intuición. Desde esta perspectiva, la verdad se reduce a la coherencia dentro de un sistema axiomático. (p. 309)

Godino y Recio (2001), desde la perspectiva de la lógica y fundamentos de la matemática, manifiestan que “la noción de *demostración* está íntimamente ligada a las nociones de *deducción* y de *sistema axiomático (o formal)*” (p. 407). En este sentido, podemos ver a la matemática como un *edificio*, el cual se construye a partir de un conjunto de enunciados verdaderos, llamados axiomas, y que vendrían a constituir de acuerdo a nuestra analogía la base de dicho *edificio*. En este proceso el lenguaje formal, simbólico, así como el rigor juega un papel importante. Así mismo, las reglas de inferencia lógica, gracias a las cuales se organiza coherentemente este *edificio*. Observemos que, a diferencia de las “verdades” obtenidas de acuerdo a la perspectiva de la vida cotidiana, desde esta perspectiva, las verdades matemáticas son universales y no dependen del momento en que estas son obtenidas.

Reid & Knipping (2010) refuerzan esta idea diciendo que, desde la perspectiva de los fundamentos de las matemáticas, “las demostraciones dan a los teoremas ‘una validez universal e intemporal’, ‘ellas (las demostraciones) descansan en la validez de las reglas lógicas usadas’, ‘se requiere el uso de lenguajes formales’” (p. 26) (traducción nuestra)

En esta perspectiva la demostración matemática es vista desde una mirada rigurosa, como el resultado de secuencias deductivas para las que se han empleado reglas lógicas bien establecidas y lenguaje formal, de tal manera que su validez es universal y que no depende del tiempo en que se presente.

Perspectiva de las ciencias

En este contexto, Reid & Knipping (2010) mencionan que “cuando los científicos ‘demuestran’ algo ellos ofrecen evidencia convincente, pero esa evidencia debe ser de un tipo especial adecuada a la ciencia”. (p. 26) (traducción nuestra)

Además Godino y Recio (2001) se refieren específicamente al caso de las ciencias experimentales, para las que señalan que la demostración está basada primordialmente en “prácticas argumentativas de tipo sustancial” (p. 409), aludiendo a prácticas de tipo “empírico inductivas” o “analógicas”. De esta manera los autores indican que desde esta perspectiva es posible aceptar como verdadero y de manera general en un determinado “universo” lo que es verdadero para algunos miembros de dicho universo, o que, lo que es verdadero para una situación, también es posible que esto ocurra para una situación similar a la primera. En ambos casos se hace referencia a un valor de verdad basado en situaciones semejantes.
Observemos que desde esta perspectiva la concepción de demostración difiere mucho de la concepción anterior, de la lógica y fundamentos de la matemática, bajo la cual no se aceptarían argumentos de tipo “empíricos” o “analógicos”.

Perspectiva de la comunidad matemática

Para Lakatos (1978, citado en Reid & Knipping, 2010, p. 9) “Los matemáticos que trabajan en los fundamentos de la teoría de la demostración reconocen esta distinción, y el uso de la ‘demostración formal’ para referirse a las demostraciones que estudian, y ‘demostración social’ para referirse a las demostraciones de los matemáticos convencionales”. Lakatos (1978, citado en Reid & Knipping, 2010, p. 9) utiliza “formal” en el mismo sentido que los formalistas: Una secuencia de símbolos que permite ‘decidir mecánicamente de cualquier supuesta demostración dada si realmente era una demostración o no’. Por "preformal" que significa una demostración que es aceptado como tal por los matemáticos, convincente, pero no una prueba formal.

Davis & Hersh (1981, citado en Reid & Knipping, 2010, p. 27) desde esta perspectiva nos describen una demostración matemática coincidiendo con la descripción de ‘demostraciones formales’ tal como lo menciona Lakatos (1978, citado en Reid & Knipping, 2010, p. 9) lo que los matemáticos ‘ideales’ y aquellos que trabajan en fundamentos de las matemáticas realmente no realizan en su trabajo diario. Las demostraciones que ellos realizan son ‘semiformales’ porque son aceptados como tal por matemáticos que conocen el tema, por consiguiente Davis & Hersh aclaran:

> Lo que haces es, anotar los axiomas de tu teoría en un lenguaje formal con una lista dada de símbolos o alfabeto. Luego anotar las hipótesis usando el mismo simbolismo. Finalmente mostrar que puedes transformar las hipótesis paso a paso, utilizando las reglas de la lógica, hasta llegar a la conclusión. Eso es una demostración. ... Oh, por supuesto que nadie realmente hace eso. ¡Tomaría la eternidad! ... [Una demostración es en realidad] un argumento que convence a alguien que conoce el tema. (pp. 39-40)

Hersh (1993), por su lado, menciona que los teoremas no poseen el "carácter de verdades absolutas y necesarias", la forma como se valida una demostración es mediante la evaluación del argumento hecha "por jueces cualificados" (p. 389)

Godino y Recio (2001) señalan que para el caso de la matemática profesional, "las demostraciones son deductivas pero no formales, se expresan mediante el lenguaje ordinario completado con el uso de expresiones simbólicas." (p. 408).

Desde esta perspectiva se observa que las demostraciones matemáticas son principalmente argumentos considerados verdaderos hasta que se demuestre lo contrario, pero lo más importante es que sean aceptados por la comunidad matemática o por jueces cualificados

Perspectiva de la comunidad matemática escolar

Stylianides (2007) define demostración matemática en un contexto de la escuela con el fin de que el 'argumento' que presenta un estudiante cuente como 'demostración'. Para ello realiza un marco teórico desarrollando dos principios: el de 'honestidad' y el de 'continuidad' con los cuales garantiza la conceptualización de demostración en todos los grados de la educación matemática en la escuela. Por lo tanto define demostración matemática como

> (U)n argumento matemático, una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de una afirmación matemática, con las siguientes características:
>
> 1. Usa afirmaciones aceptadas por la comunidad de la clase (conjunto de afirmaciones aceptadas) que son verdaderas y que están disponibles sin mayor justificación;
> 2. Emplea formas de razonamiento (modos de argumentación) que son válidas y conocidas por, o dentro del alcance conceptual de, la comunidad de la clase; y
> 3. Es comunicada con formas de expresión (modos de representación de los argumentos) que son apropiadas y conocidas por, o dentro del alcance conceptual de, la comunidad de la clase (p.291).

El autor además declara que el objetivo de esta definición es promover "un significado coherente de la demostración en todos los grados que conserva algunos elementos fundamentales y, al mismo tiempo, se adapta con flexibilidad a las características de una comunidad de la clase dada "(Stylianides 2007; p. 294). De esta manera se permite diferentes argumentos matemáticos para ser vistos como demostraciones, como es el caso de los argumentos genéricos, por tener un carácter general y explicativo sin embargo los argumentos empíricos no son aceptados como demostraciones.

Como un ejemplo ilustrativo de argumentos que califican, de acuerdo a esta definición, como demostración incluimos los tres siguientes argumentos (tomados de Stylianides y Stylianides, 2008) para la propiedad "La suma de dos números impares es un número par". En este ejemplo se puede observar la demostración de una misma tarea empleando tres formas diferentes de representación de los argumentos.

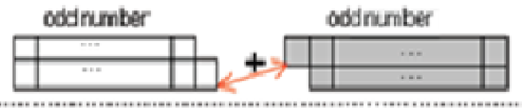
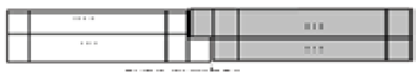
Demostración usando el lenguaje cotidiano:	**Demostración usando álgebra:**	**Demostración usando dibujos:**
Los números impares son los números tales que si los agrupas de dos en dos, hay uno que sobra. Los números pares son los números tales que si los agrupas de dos en dos, sobra nada. Si sumas dos números impares, los dos unos que sobran harán otro grupo de dos. El número resultante puede ser agrupado de dos en dos sin que sobre algo, de este modo, es un número par	Los números impares son aquellos de la forma $2n+1$, donde n es un número natural. Los números pares son aquellos de la forma $2n$, donde n es un número natural. Si sumas dos números impares, obtienes: $(2k+1)+(2m+1)=(2k+2m)+(1+1)=2.(k+m+1)$	Los números impares son de la forma:  Los números pares son de la forma:  Número impar número impar  Número par 

Figura 1. Tres demostraciones para "impar + impar = par"
Fuente: Stylianides y Stylianides (2008, p. 108). (traducción nuestra)

2.2 Roles de la demostración

Las demostración matemática puede cumplir varios roles, aunque tradicionalmente ha sido vista principalmente como medio de verificación de la veracidad de una afirmación matemática (de Villiers, 2001).

Presentamos las siguientes funciones de la demostración, vistas por autores tales como Bell (1976); de Villiers (1990, 1999); Hanna y Jahnke (1996); Hanna (2000), entre otros. Entre estas funciones o roles tenemos: verificación, explicación, falsación, sistematización, descubrimiento o creación, medio de comunicación y transferencia, los cuales describimos a continuación de acuerdo a las diferentes posturas de los autores.

El rol de Verificación/Convicción

Una de las funciones tradicionales de la demostración matemática, que no se ha dejado de mencionar por distintos investigadores, es el de verificación, y es el que "Se da cuando se establece la verdad de una afirmación dada" (Bell, 1976 citado en de Villiers, 1999). Knuth (2002) menciona que son pocos los investigadores que cuestionan este rol como demostrar la exactitud de un resultado o la verdad de una declaración. Dentro de este rol de Villiers (1999) agrega a la convicción como la que proporciona una motivación para una demostración; dado que en investigación matemática no existe la certeza absoluta y la convicción personal depende de una combinación de intuición, verificación cuasi empírica y la existencia de una demostración lógica. Sin embargo estas consideraciones no pueden de ninguna manera quitar importancia a la demostración como método útil de verificación especialmente en el caso de resultados no intuitivos o dudosos. Stylianides (2009) considera que los métodos de demostración directos y las demostraciones por contradicción caben en el propósito de verificación de demostración. (p. 269).

Aquí, de acuerdo con Hanna (1990), un ejemplo de demostración que cumple el rol de verificación para demostrar que la suma de los n primeros enteros positivos, S(n), es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, es el siguiente:

Una prueba que prueba

Demostración por inducción matemática:

Para n = 1 el teorema es cierto

Supongamos que es cierto para un k arbitrario.

Entonces considere:

$$S(k+1) = S(k) + (k+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Por lo tanto, la afirmación es cierta para k + 1, si bien es cierto para k.

Por el teorema de la inducción, la afirmación es cierta para todo n,

Figura 2. Demostración que verifica
Fuente: Hanna (1990, p. 10) (traducción nuestra)

El rol de Explicación

Según de Villiers (1990, 1999) y Hanna (1990, 2000), esta función de la demostración se cumple cuando se muestra porqué es verdadera o falsa una afirmación. Además Steiner (1978, citado en Reid & Knipping, 2010) nos menciona que una demostración explicativa “hace referencia a una propiedad característica de una entidad o estructura mencionada en el teorema, de tal manera que de la demostración es evidente que el resultado depende de la propiedad” (p. 75). de Villiers (1990) afirma que no todas las demostraciones son igualmente explicativas así que es posible diferenciar demostraciones que verifican y demostraciones que explican. Por su parte Hanna (1990) nos manifiesta que una demostración por inducción matemática, por ejemplo, o aquellas que solo se centren en consideraciones sintácticas cumple el rol de verificación, pero una demostración que explica requiere de justificaciones de las propiedades matemáticas involucradas que afirmen que el teorema matemático es cierto. En el contexto educacional, Hanna (2000) indica que “solo es natural ver a las demostraciones primero y principalmente como explicaciones, y en consecuencia valorar mucho más esas demostraciones que ayudan a explicar” (p. 8).

Como ejemplos de demostraciones que cumplen el rol de explicación para demostrar que la suma de la n primera entera positiva, S (n), es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$ (resultado que fue usado para el ejemplo del rol anterior), tenemos los siguientes tres ejemplos dados en Hanna (1990).

Demostración de Gauss es el siguiente

$$S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$$

$$S(n) = n + (n-1) + \ldots + 1$$

$$2S = (1+n) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1)$$

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Figura 3. Demostración que explica
Fuente: Hanna (1990, p. 10) (traducción nuestra)

En la figura

Los puntos son triángulos rectángulos isósceles que contienen

$S(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$ *puntos*

Dos sumas tales como S(n) +S(n) dan un cuadrado que tiene n^2 puntos

y n puntos adicionales debido a la diagonal n se cuenta dos veces. Entonces

$2S(n) = n^2 + n$

$S(n) = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Figura 4. Demostración que explica
Fuente: Hanna (1990, p. 11) (traducción nuestra)

Otra prueba explicativa sería la representación de los primeros

n enteros en forma de escalera. El área de un rectángulo con lados n y n + 1

está dividido por una línea en zigzag

Toda el área es n (n + 1), y

el área en forma de escalera, es:

1 + 2 + 3 +. . . + n solamente la mitad,

por lo tanto, $\frac{n(n+1)}{2}$

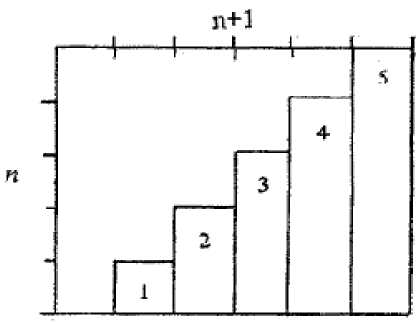


Figura 5. Demostración que explica
Fuente: Hanna (1990, p. 11) (traducción nuestra)

De esta manera Hanna (1990) recalca el valor educativo de las demostraciones explicativas para la enseñanza de la demostración matemática en el salón de clase.

El rol de falsación

Este rol es mencionado en Stylianides (2009) y se da “cuando se establece la falsedad de una afirmación dada” (p. 269). La demostración también puede ser un argumento en contra de una afirmación. Así, de acuerdo con la definición de demostración que asume el autor, y que está de acuerdo con la definición de Stylianides (2007), incluida aquí en el apartado (demostración matemática desde la perspectiva de la Comunidad Matemática escolar. P 25) es posible considerar este rol en forma separada de los roles tradicionalmente considerados en la literatura.

Un ejemplo de demostración que cumple el rol de falsación es la demostración por contraejemplo. Como muestra de ello, presentamos el siguiente caso extraído de Gonzáles (2005):

> En el universo de los números enteros positivos, demostrar la proposición: “la suma de dos cuadrados perfectos es también un cuadrado perfecto.”
>
> Recordemos que un entero positivo x es un cuadrado perfecto si puede encontrarse otro entero positivo y tal que $x = y^2$.
>
> Entonces la proposición escrita en forma simbólica es $\forall m, \forall n\ [(p(m, 0) \wedge p(n, 0)) \rightarrow p(m, n)]$
>
> Y un contraejemplo, $\exists a, \exists b: [p(a, 0) \wedge p(b, 0) \wedge \neg p(a, b)]$
>
> Es decir, “pueden encontrarse dos enteros positivos a y b tales que sean cuadrados perfectos y que, sin embargo, su suma no lo sea”
>
> Pues bien, elijamos dos cuadrados perfectos arbitrariamente, por ejemplo el 25 y el 36.
>
> Entonces, $25 + 36 = 61$ $61 = y^2 \forall y$
>
> Por lo tanto, y de acuerdo con la definición de cuadrado perfecto dada, 61 no es un cuadrado perfecto. Así pues, ya tenemos el contraejemplo “25 y 36 son, ambos, cuadrados perfectos y, sin embargo, su suma, 25 + 36, no lo es”
>
> Consecuentemente, la proposición propuesta es falsa. (p. 79)

El rol de sistematización:

La demostración sirve para la organización de los resultados en un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas de Villiers (1990), Hanna (2000). de Villiers (1990) además señala algunas de las más importantes funciones de una sistematización deductiva de resultados conocidos. Entre ellas: “ayuda a la identificación de inconsistencias,…; unifica y simplifica teorías matemáticas; proporciona una perspectiva global útil de un tópico…; es útil para las aplicaciones tanto dentro como fuera de las matemáticas…” (p. 20-21) Por otro lado, Herbst, Miyakawa y Chazan (2002) indican que el rol de sistematización de la demostración puede servir a un docente como justificación del tiempo invertido en demostrar tomando diferentes afirmaciones como postulados y con ello demostrar diferentes teoremas. Por ejemplo mencionan que “en la historia de ‘Postulados y teoremas sobre líneas paralelas’ se ilustra un tipo de trabajo que podría explicarse o justificarse recurriendo a esta función de sistematización de la prueba” (p.23). En esta historia el docente solicita a sus estudiantes dándoles como postulado la afirmación de que una transversal que interseca dos líneas paralelas crea ángulos correspondientes congruentes para demostrar el teorema de la congruencia de ángulos alternos internos determinados por una línea transversal que cruza líneas paralelas. Posteriormente en la misma sesión de clases el docente solicita a sus estudiantes no tomar en cuenta el ejercicio anterior y ahora tomar como postulado que los ángulos alternos internos determinados por una línea transversal que interseca a dos líneas paralelas son congruentes para demostrar el teorema de las líneas paralelas intersecadas por una transversal determina ángulos correspondientes congruentes. Observamos aquí que el docente propone a sus estudiantes que tomen como postulado un teorema y viceversa. De este modo esta historia muestra que la demostración establece una relación lógica de deducibilidad entre postulado y teorema, agregando conocimientos sobre la organización de la teoría matemática en la que la probabilidad de los enunciados depende de la verdad de otras afirmaciones.

El rol de descubrimiento o creación:

La historia de las matemáticas se sustenta con numerosos ejemplos que los nuevos resultados fueron descubiertos o inventados de forma puramente deductiva, para de Villiers (2001) los matemáticos profesionales encuentran en las demostraciones un medio de verificación a posteriori además de análisis, descubrimiento e invención (p. 21)

Reid (2011) aclara “El papel de la prueba en el descubrimiento de las geometrías no euclidianas es un ejemplo de importancia histórica de la prueba como medio de descubrimiento” (p. 17) y presenta un ejemplo más sencillo:

En la demostración de la suma de ‘dos números impares consecutivos es par’ se podría verificar utilizando la inducción matemática, la cual no explica, se puede usar un ejemplo genérico: 7 + 9 = 7 + 7 + 2, que debe ser aún porque 7 + 7 debe ser uniforme y 2 es par. Puede utilizarse el álgebra: 2n - 1 + 2n + 1 = 2 (2n), ambas verifican y explican la demostración, pero esta demostración final no solo demostró que el resultado es par (múltiplo de 2) sino que se descubrió que también es múltiplo se 4.

Hay muchas maneras de demostrar que la suma de dos números impares consecutivos es par. El más simple es tener en cuenta que la suma de dos números impares (consecutivos o no) es par. Esto verifica la declaración y lo explica. También es posible verificar la afirmación con una prueba usando inducción matemática, si usted cree en ella, produciendo una prueba que verifica pero no explica. Se puede usar un ejemplo genérico: 7 + 9 = 7 + 7 + 2, que debe ser aún porque 7 + 7 debe ser uniforme y 2 es par. Esta prueba de ambos verifica y explica. O usted podría hacer un poco de álgebra: 2n - 1 + 2n + 1 = 2 (2n), que es par. La prueba final le permite descubrir algo más que usted estaba tratando de probar. 2 (2n) es 4n, por lo que la suma de dos números impares consecutivos es no sólo incluso, es un múltiplo de cuatro. (p.17).

Knuth (2002b) también es uno de los investigadores que hace referencia a este rol y explica que "A través de sus exploraciones, los estudiantes generan conjeturas y luego tratan de verificar la verdad de las conjeturas al producir pruebas deductivas. En este caso, los estudiantes están utilizando la prueba como un medio para crear nuevos resultados". (p. 65). Añade además, que los estudiantes son independientes siempre y cuando tienen la capacidad de construir su propio conocimiento cuando validan sus propias afirmaciones y la de sus compañeros. Por lo tanto, este rol de la demostración concede a los estudiantes a ser productores de conocimiento y no consumidores de los conocimientos de otros.

Vemos la importancia de este rol de la demostración matemática pues conduce a que se obtengan nuevos resultados, logrando así que los estudiantes, docentes o matemáticos adquieran autonomía al pensar y trabajar las matemáticas.

El rol de comunicación:

Este rol es considerado por investigadores como de Villiers (1990), Hanna (2000), Reid y Knipping (2010), entre otros. De acuerdo a este rol, la demostración matemática es una manera de transmitir conocimientos matemáticos. La demostración es una forma de interacción social en la que se involucra los significados de los conceptos concernidos y los criterios para una argumentación aceptable.

Herbst, Miyakawa y Chazan (2002) mencionan que las demostraciones para ser publicadas en alguna revista incluyen ciertas negociaciones, por ejemplo la historia reciente sobre el teorema de Fermat reclamado por Andrew Wiles en una conferencia en 1993 fue aceptada finalmente al publicarla en un artículo por Richard Taylor y Andrew Wiles en 1995, llenando un vacío en la demostración original

El rol de Transferencia:

Hemmi, Lepik y Viholainen (2011) incluyeron la función de ***transferencia*** en su investigación, el que "se refiere a la idea de que las demostraciones pueden introducir nuevas técnicas útiles en otros problemas en matemática u ofrecer comprensión de algo diferente del contexto original dentro o fuera de las matemáticas." (p. 3)

Hanna (2010) dentro del contexto de la clase de matemática afirma siguiendo la tesis de Rav (1999) que las demostraciones tienen la capacidad de transmitir a los estudiantes, métodos, estrategias, herramientas y conceptos para la resolución de problemas, y esto es lo que la hace valiosa porque son de vasta aplicabilidad en las matemáticas y permite extender nuevas direcciones matemáticas.

2.3 Metodología de investigación

Nuestro trabajo se enmarca dentro del enfoque cualitativo de investigación porque busca explorar las creencias de un grupo de docentes respecto a las demostraciones matemáticas y además porque cumple con las características de este enfoque según los investigadores.

Según Hernández, Fernández & Baptista (2010) la investigación cualitativa es exploratoria y descriptiva, es decir el investigador extrae datos de un investigado, describe analiza y luego concluye, entrevista a otro y realiza el mismo proceso, es decir va de lo particular a lo general. Busca el entender o interpretar las acciones de las personas o instituciones, además agrega:

> El enfoque cualitativo se selecciona cuando se busca comprender la perspectiva de los participantes (individuos o grupos pequeños de personas a los que se investigará) acerca de los fenómenos que los rodean, profundizar en sus experiencias, perspectivas, opiniones y significados, es decir, la forma en que los participantes perciben subjetivamente su realidad. También es recomendable seleccionar el enfoque cualitativo cuando el tema del estudio ha sido poco explorado, o no se ha hecho investigación al respecto en algún grupo social específico. (p. 364)

Por otro lado Martínez (2006) nos manifiesta que "la investigación cualitativa trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón plena de su comportamiento y manifestaciones." (p.128). Agrega además que estudia cualidades integradas constituyendo una unidad de análisis de una persona o una entidad aunque también puede estudiar una cualidad especifica siempre que se tengan en cuenta que es la parte de un todo, los cuales le dan significación propia. (p.128)

Estudio de caso

Un método cualitativo es el estudio de casos. Nosotros adoptaremos esta metodología porque presentada la oportunidad de explorar un conjunto de casos buscaremos un caso representativo en donde aprenderemos de ello.

Martínez (2006) nos manifiesta que “el método de estudio de caso es una herramienta valiosa de investigación, y su mayor fortaleza radica en que a través del mismo se mide y registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado” (p.167). Además, agrega que se pueden obtener los datos de fuentes, tanto cualitativas como cuantitativas; esto es, documentos, registros de archivos, entrevistas directas, observación directa, observación de los participantes e instalaciones u objetos físicos.

El autor agrega que el método de estudio de caso tiene un propósito descriptivo, si lo que se pretende es identificar y detallar los distintos factores que influyen en el fenómeno estudiado, y exploratorio, si con ellas se pretende conseguir un acercamiento entre las teorías inscritas en el marco teórico y la realidad objeto de estudio.

Ponte (2006) nos manifiesta, “En la educación matemática, estudios de casos se han utilizado para investigar los problemas de aprendizaje de los estudiantes, así como conocimientos y prácticas profesionales de los maestros, programas de formación inicial y continua de los maestros, proyectos de innovación curricular, nuevos planes de estudio, etc.” (p. 4)

Según Hernández, Fernández & Baptista (2010) el investigador o investigadora emplea técnicas para la recolección de datos como son: la observación no estructurada, las entrevistas abiertas, la revisión de documentos, la discusión en grupo, la evaluación de experiencias personales, entre otras. Evalúa el desarrollo natural de los sucesos y no hay manipulación ni estimulación con respecto a la realidad.

Andrade (2008) nos manifiesta que “Antes de iniciar la construcción de un instrumento para la recolección de datos, es interesante evaluar la posibilidad del uso de un instrumento ya desarrollado ya aplicado, que se adapte a la necesidad del estudio” (p. 22). En nuestro caso concreto, emplearemos instrumentos adaptados que han sido utilizados en diferentes investigaciones, incluyendo la investigación de Knuth (2002).

Para esta parte, tomamos la postura de Ponte (2006) sobre estudio de casos porque estamos interesados en investigar las creencias de profesores de secundaria sobre demostración matemática. En la entrevista que realizamos como parte de la metodología de investigación, escogimos la entrevista semiestructurada que explicamos a continuación.

Entrevista Semiestructurada

La entrevista semiestructurada cumple con las características de acuerdo con nuestros objetivos de investigación.

En ese sentido, Martínez (2006) señala que las entrevistas semiestructuradas, cuentan con una amplia gama de contextos verbales que permiten aclarar los términos, descubrir las ambigüedades. El contexto verbal permite, asimismo, motivar al interlocutor, elevar su nivel de interés y colaboración, reconocer sus logros, estimular su memoria, aminorar la confusión o ayudarle a explorar, reconocer y aceptar sus propias experiencias vivenciales. Y en cada una de estas posibles interacciones también es posible decidir la amplitud o estrechez con que debe plantearse el problema, permitir que las preguntas se cierren o se amplíen.

Para Peláez, Rodríguez, Ramírez, Pérez, Vásquez & Gonzales (2013) la entrevista semiestructurada no es considerada una conversación normal, sino una conversación formal, con una intencionalidad, que lleva implícitos objetivos englobados en una investigación.

> Se determina de antemano cual es la información relevante que se quiere conseguir. Se hacen preguntas abiertas dando oportunidad a recibir más matices de la respuesta, permite ir entrelazando temas, pero requiere de una gran atención por parte del investigador para poder encauzar y estirar los temas. (Actitud de escucha) (p. 3).

Según Hernández, Fernández & Baptista (2010), en las entrevistas semiestructuradas, el entrevistador tiene una guía de preguntas o asuntos preparados pero tiene la libertad introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información sobre los temas deseados (es decir, no todas las preguntas están predeterminadas). Por ello, el orden de las preguntas depende de los participantes y el tiempo de la entrevista es flexible, no tiene un tiempo definido.

En el siguiente capítulo presentamos el experimento y el análisis del presente trabajo de investigación.

CAPÍTULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo presentamos una descripción de los sujetos participantes del estudio, el análisis de los datos y finalmente, mostramos el resumen sobre la exploración de las creencias de profesores de matemáticas sobre la demostración matemática, su importancia y roles.

3.1 Descripción de los participantes del estudio

Los participantes de este estudio son doce profesores de Matemática de colegios de secundaria de distintas ciudades del País. Los maestros fueron seleccionados por su disposición en la participación en el estudio, son participantes de un programa de becas denominado Maestría en Ciencias de la educación otorgado por un organismo del Estado del Perú llamado Programa Nacional de Becas PRONABEC en la mención Enseñanza de las Matemáticas de Secundaria en una Universidad Privada. Vale la pena señalar que dichos docentes han sido evaluados rigurosamente para acceder a estos estudios siendo elegidos a nivel nacional de un número considerable de postulantes. En la tabla mostramos algunos de sus datos generales Identificando a los docentes participantes por números.

Tabla 1. Información Personal

Nº	Nº de años de experiencia	Grados que enseñó	Tema de la Última capacitación	Institución de Formación Docente	Grado Académico
1	17	4º	Tecnología Educativa	Universidad	Licenciada
2	20	1º y 2º	Didáctica de la Matemática	Universidad	Maestría
3	28	1º, 2º y 3º	Estrategias Metodológicas	Universidad	Licenciada
4	20	3º y 4º	Talleres de experiencias Matemáticas	Universidad	Maestría
5	13	1º y2º	Pronafcap	Universidad	Licenciada
6	27	1º a 5º y pre-universitaria	Análisis de funciones en el plano	Universidad	Maestría
7	18	1º a 5º y pre-universitaria	Inclusión de niños con discapacidad	Universidad	Maestría
8	13	Secundaria y pre-universitaria	Gestión	Universidad	Maestría
9	18	1º a5º	Materiales educativos	Universidad	Licenciado
10	7	1º a 5º	Pronafcap	Pedagógico	Licenciado
11	11	1º a 5º	Estrategias para	Pedagógico	Bachiller

			la enseñanza de resolución de problemas		
12	20	3º, 4º y 5º	Rutas del aprendizaje	Universidad	Maestría

3.2 Recolección de datos

Teniendo en cuenta que deseamos obtener información sobre los significados y creencias que poseen los docentes de educación secundaria sobre la demostración matemática, su importancia y roles, la fuente de obtención de datos es la entrevista semiestructurada, la que consta de un cuestionario con preguntas abiertas que permitirá obtener respuestas de los docentes. Las entrevistas serán grabadas en audio y posteriormente transcritas textualmente. Los datos en esta investigación son las respuestas dadas por los docentes, participantes del estudio los que serán descritos y analizados.

La entrevista semiestructurada se realizó en dos etapas:

Primera etapa

la primera etapa consiste en preguntas abiertas, empezando con información personal de los sujetos de estudio, para generar un ambiente de confianza, y luego con preguntas cuyo objetivo era averiguar si las demostraciones matemáticas eran trabajadas en el aula y qué significado tiene para ellos las demostraciones matemáticas y los roles que cumplen, éstas preguntas permitieron guiar las preguntas posteriores. Las preguntas son las siguientes:

Preguntas de Información Personal: Los docentes fueron informados del objetivo de la investigación y que sus respuestas solo servirán para esos fines y su identificación se mantendrán en absoluta reserva

1. ¿Cuál es su nombre?
2. ¿Cuantos años de experiencia tienen en la enseñanza de la matemática?
3. ¿Qué niveles educativos ha enseñado? ¿En qué nivel educativo enseña actualmente?
4. ¿En qué Institución ha sido formado: Universidad, Instituto pedagógico (algún otro)?
5. ¿Con que nivel académico cuenta?
6. ¿Cuándo fue la última vez que ha recibido capacitación y en qué temas?

Preguntas de Investigación: (Desde su punto de vista, no el punto de vista de sus alumnos)

1. ¿Alguna vez ha trabajado demostraciones matemáticas en su educación?
2. ¿Qué es para Ud. una demostración matemática?

3. ¿Qué caracteriza una demostración matemática?
4. Según su apreciación, ¿desde qué nivel es posible trabajar demostraciones en clases de matemáticas?
5. ¿Qué campo de las matemáticas favorecen el trabajo con demostraciones en el aula? ¿Cuál? ¿Alguno? ¿Ninguno?
6. Desde su perspectiva, ¿Qué rol /función /papel juegan las demostraciones en las clases de matemáticas?
7. Ud. ¿Trabaja demostraciones en sus clases de matemáticas?
8. ¿Qué resultados / propiedades ha demostrado con sus estudiantes por ejemplo? ¿Por qué esos y no otros? ¿Con qué propósito /fin?
9. Ud. ¿Cree que es importante enseñar demostraciones matemáticas en la escuela secundaria? ¿Por qué?

Segunda etapa

La segunda etapa consiste en la evaluación de argumentos de demostración de tres problemas matemáticos, *argumentos* que variaban en cuanto a su validez como demostración, los maestros encuestados no debían entretenerse en realizar las demostraciones, sino se solicitó a los entrevistados una evaluación de los argumentos ya elaborados, en una escala del 1 al 4 el que especificamos líneas abajo. Posteriormente a este análisis deberían elegir un argumento de cada tarea que le convenza y otro de su preferencia. De esta manera la valoración de los argumentos realizados por los profesores, proporcionan información sobre sus creencias de la demostración matemática, lo que los docentes encuentran convincente y si son conscientes de los roles de la demostración.

Entendemos por *argumento* a una secuencia conectada de afirmaciones por medio de reglas correctas de inferencia (modus ponens, modus tollens, etc.) y entendidas en el contexto de las matemáticas actuales (Stylianides, 2009 p. 265)

Evaluación de los Argumentos para cada Problema:

La siguiente tabla contiene la escala de valoración con la cual los docentes evaluaron los argumentos presentados

Tabla 2. Escala de valoración para los Argumentos

Escala	**Criterio**
1	Significa que el argumento no califica como una demostración matemática para el docente entrevistado.

2	Significa que al argumento le faltan muchos ingredientes para calificar como demostración matemática.
3	Significa que al argumento le falta algún ingrediente para calificar como demostración matemática
4	Significa que el argumento sí califica como una demostración matemática para el docente entrevistado.

La evaluación de los argumentos serán realizados por los docentes entrevistados, los cuales va a depender de la noción de demostración que posea, comparándola con las perspectivas presentadas en nuestro marco teórico e identificadas en la primera etapa de la entrevista.

Presentamos los problemas y sus respectivos argumentos:

Problema 1: "Demostrar que la suma de los n primeros enteros positivos es $\frac{n(n+1)}{2}$"

Para la demostración de este problema se presentan 6 argumentos:

Argumento 1.1

Para $n = 1$ es cierto, ya que $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Supongamos que esto es cierto para algún k arbitrario, esto es, $S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$

Luego:

$$S(k+1) = S(k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Por lo tanto la afirmación es verdadera para $k+1$ en el caso que sea cierta para k.

Figura 6. Demostración para la suma de los "n" primeros enteros positivos
Fuente: Hanna (1990, p. 10) (traducción nuestra)

Argumento 1.2

Considera la suma $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

Ahora escribo esta suma, y la "inversa", y sumamos:

$$\begin{array}{r} 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \\ \underline{10+9+8+7+6+5+4+3+2+1} \\ 11+11+11+11+11+11+11+11+11+11 = 10\times 11 \end{array}$$

Ya que la suma se hace dos veces, dividimos 10×11 por 2 para obtener la suma.

Figura 7. Demostración para la suma de los "n" primeros enteros positivos
Fuente: Reid & Knipping (2010, p. 134) (traducción nuestra)

Argumento 1.3

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$S(n) = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1$$

Tomando la suma de estas dos filas

$$2\,S(n) = (1+n) + [2+(n-1)] + [3+(n-2)] + \cdots + (n+1)$$

$$2\,S(n) = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)$$

$$2\,S(n) = n(n+1$$

Por lo tanto, $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Figura 8. Demostración para la suma de los "n" primeros enteros positivos
Fuente: Knuth (2002a, p. 384) (traducción nuestra)

Argumento 1.4

n es o bien par o bien impar.

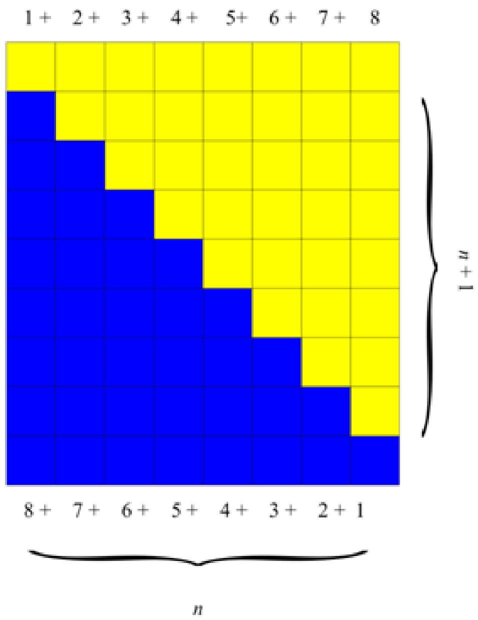
Primero, considero que n es impar, por ejemplo 7. Entonces la suma es $1+2+3+4+5+6+7$. Observa que puedes reorganizar los sumandos en 3 parejas: $1+7$, $2+6$, $3+5$, todas las parejas suman8, con el 4 en el medio que quedó fuera. Así que la suma es $3\times 8+4$, o en general $\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)(n+1)+\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]$, que se simplifica como $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$.

Luego considero que n es par, por ejemplo 8. De aquí que la suma es $1+2+3+4+5+6+7+8$. Observa que puedes reorganizar los sumandos en 4 parejas: $1+8$, $2+7$, $3+6$, $4+5$, todas las parejas suman 9. Así que la suma es 4×9, o en general $\left[\left(\frac{n}{2}\right)(n+1)\right]$, que se simplifica como $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$.

Figura 9. Demostración para la suma de los "n" primeros enteros positivos
Fuente: Reid (Documentos inéditos) (traducción nuestra)

Argumento 1.5

Si me pidiesen calcular la suma $1+2+3+4+5+6+7+8$, yo dibujaría una pirámide, y cada número para mí es un número de cuadraditos puestos uno sobre el otro, como la pirámide amarilla que he dibujado abajo.



Dibujo otra pirámide igual, pero la pinto de azul y la coloco como en la figura, formando un rectángulo con mi pirámide amarilla.

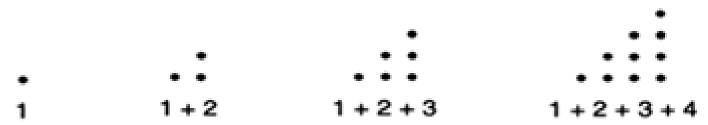
En el rectángulo hay 8x9 cuadraditos, entonces en mi pirámide amarilla hay $\frac{8x9}{2}=36$ cuadraditos.

Así se puede hacer en todos los casos. Mi rectángulo tendría $n(n+1)$ cuadraditos, y mi pirámide tendría $\frac{n(n+1)}{2}$ cuadraditos.

Figura 10. Demostración para la suma de los "n" primeros enteros positivos
Fuente: Reid (2011 p.16) (traducción nuestra)

Argumento 1.6

Podemos representar la suma de los n primeros enteros positivos como números "triangulares".

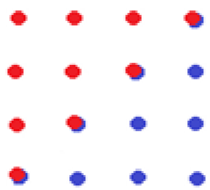


n =1 n =2 n =3 n =4

Los puntos forman triángulos rectángulos e isósceles con el n-ésimo triángulo conteniendo:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n \quad \text{puntos.}$$

Al superponer un segundo triángulo rectángulo e isósceles del mismo tamaño de tal manera que las diagonales coincidan produce un cuadrado que contiene n^2 puntos, más n puntos adicionales, por las diagonales que se superponen. Para ilustrar esto, la figura de abajo representa el cuarto triángulo rectángulo e isósceles y otro triángulo del mismo tamaño superpuesto de tal manera que las diagonales coinciden. En este caso, se produce un cuadrado que contiene 4^2 puntos, más 4 puntos adicionales, debido a la superposición de las diagonales:



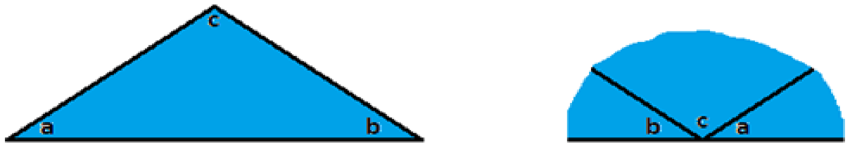
Por lo tanto, en el caso general (utilizando el n-ésimo triángulo), el número de puntos producidos por los dos triángulos superpuestos es: $2\,S(n) = n^2 + n$, por lo que $S(n) = \frac{(n^2+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Figura 11. Demostración para la suma de los "n" primeros enteros positivos
Fuente: Hanna (1990, p. 10) (traducción nuestra)

Problema 2: "Demostrar que la suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180º

Argumento 2.1

Corté los ángulos del triángulo obtuso y los puse juntos (como se muestra a continuación)



Los ángulos se unieron como una línea recta, que hace 180°. Hice también lo mismo con un triángulo agudo, así como con un triángulo rectángulo y sucedió lo mismo. Por lo tanto, la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

Figura 12. Demostración para la suma de los ángulos interiores de un triángulo
Fuente: Knuth (2002b, p. 69) (traducción nuestra)

Argumento 2.2

Imagina que rotas los lados AB y AC de un triángulo ABC en direcciones opuestas alrededor de los vértices B y C, respectivamente, hasta que los ángulos con el segmento BC sean 90°. Mira mis dibujos a y b. Esta acción transforma al triángulo ABC en la figura A'BCA'', donde A'B y A''C son perpendiculares al segmento BC. Para recrear el triángulo original, los segmentos A'B y A''C son inclinados el uno hacia el otro de tal manera que los puntos A' y A'' se unen de nuevo en el punto A. Mira mi dibujo c. Observa que cuando hice esto perdí dos pedazos de los ángulos B y C iguales a 90° (perdí los ángulos A'BA y A''CA) pero al mismo tiempo yo gané estos pedazos al crear el ángulo A. Esto se puede ver mejor si dibujamos AO perpendicular a BC: el ángulo A'BA es congruente a BAO, y el ángulo A''CA es congruente a OAC. Mira mi dibujo d. Por eso es que la suma de los ángulos del triángulo ABC es 180°.

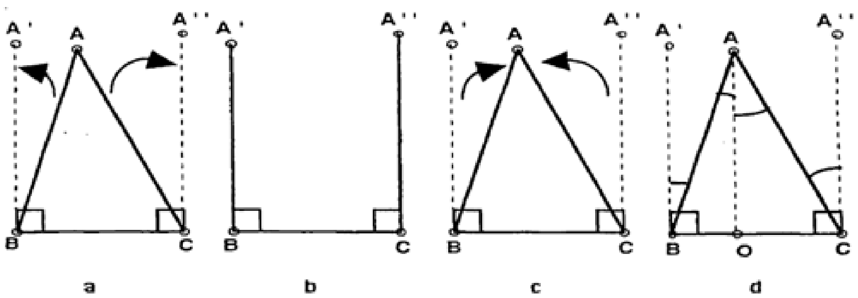
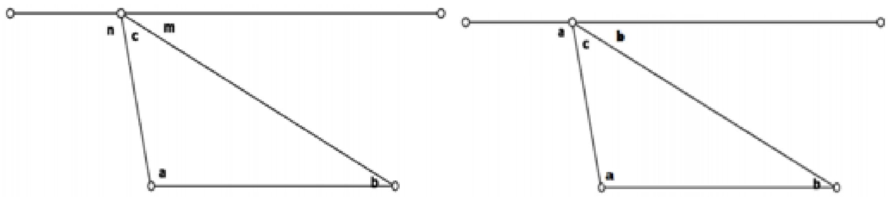


Figura 13. Demostración para la suma de los ángulos interiores de un triángulo
Fuente: Harel & Sowder (1998, p. 259) (traducción nuestra)

Argumento 2.3

Dibujé una línea paralela a la base del triángulo



Sé que $n = a$ por ser ángulos alternos entre dos líneas paralelas y son congruentes. Por la misma razón, también sé que $m = b$.

Dado que la medida de un ángulo llano es 180°, sé que $n + c + m = 180°$. Sustituyendo n para a, y b para m, tenemos que $a + b + c = 180°$.

Por lo tanto, la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

Figura 14. Demostración para la suma de los ángulos interiores de un triángulo
Fuente: Reid & Knipping (2010, p. 139) (traducción nuestra)

Argumento 2.4

Si caminas todo el camino alrededor del borde de un triángulo, terminas donde y tal como comenzaste. Debes haber girado entonces un total de 360°.

Puedes ver que cada ángulo exterior cuando se suma al ángulo interior debe dar 180°, ya que hacen una línea recta. Esto hace un total de 540° y que $540° - 360° = 180°$

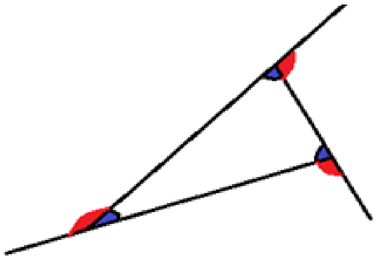
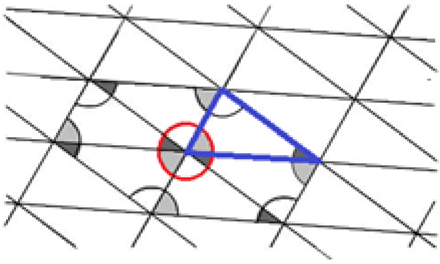


Figura 15. Demostración para la suma de los ángulos interiores de un triángulo
Fuente: Reid & Knipping (2010, p. 44) (traducción nuestra)

Argumento 2.5

Dibujé un teselado de triángulos y marqué todos los ángulos iguales.



Sé que los ángulos alrededor de un punto suman 360°.

Figura 16. Demostración para la suma de los ángulos interiores de un triángulo
Fuente: Reid (2011, p. 21) (traducción nuestra)

Problema 3: "La suma de dos números naturales pares es un número par"

Argumento 3.1

Sí tenemos un número par, entonces tendrá la forma: $2a$ con a un número natural.

Y si lo sumo con otro número que también es par, tendré: $2a + 2a = 4a$, que también es un numero par.

Figura 17. Demostración para la suma de dos números naturales pares es par
Fuente: Reid (Documentos inéditos) (traducción nuestra)

Argumento 3.2

Dados dos números pares A y B, sé que:

$A = 2a$, para algún natural a

$B = 2b$, para algún natural b.

Si sumo A y B, obtendré:

$A + B = 2a + 2b = 2(a + b)$

que es un número par también.

Figura 18. Demostración para la suma de dos números naturales pares es par
Fuente: Reid (Documentos inéditos) (traducción nuestra)

Argumento 3.3

Los números pares terminan en 0, 2, 4, 6 u 8.

Cuando sumas cualquiera de estos números, la respuesta terminará también en 0, 2, 4, 6 u 8.

Figura 19. Demostración para la suma de dos números naturales pares es par
Fuente: Reid (Documentos inéditos) (traducción nuestra)

Argumento 3.4

Sé que siempre será par porque cada vez que sumo dos números pares, el resultado me da un número par.

$4 + 6 = 10$

$8 + 8 = 16$

$36 + 400 = 436$

Así puedo seguir dando parejas de números pares, y seguiré obteniendo un número par como resultado.

Figura 20. Demostración para la suma de dos números naturales pares es par
Fuente: Reid (Documentos inéditos) (traducción nuestra)

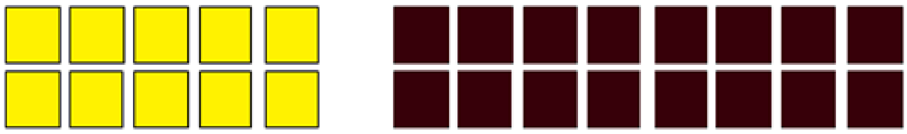
Argumento 3.5

Los números pares son números que pueden ser divididos (exactamente) por 2. Cuando sumas números con un factor común, 2 en este caso, la respuesta tendrá el mismo factor común.

Figura 21. Demostración para la suma de dos números naturales pares es par
Fuente: Reid (Documentos inéditos) (traducción nuestra)

Argumento 3.6

Su respuesta será aún un número par porque estamos utilizando números pares, que son números que se pueden agrupar en parejas. Por ejemplo, mira mi dibujo de los números 10 y 16:



A 10 lo pude agrupar en parejas (señalando los cubos amarillos), y este otro número (16) también lo pude agrupar en parejas (señalando los cubos de color negro), y cuando los junto, el resultado también se seguirá agrupando en parejas. Así se podrá hacer esto siempre que tome dos números pares.

Figura 22. Demostración para la suma de dos números naturales pares es par
Fuente: Reid (Documentos inéditos) (traducción nuestra)

Argumento 3.7

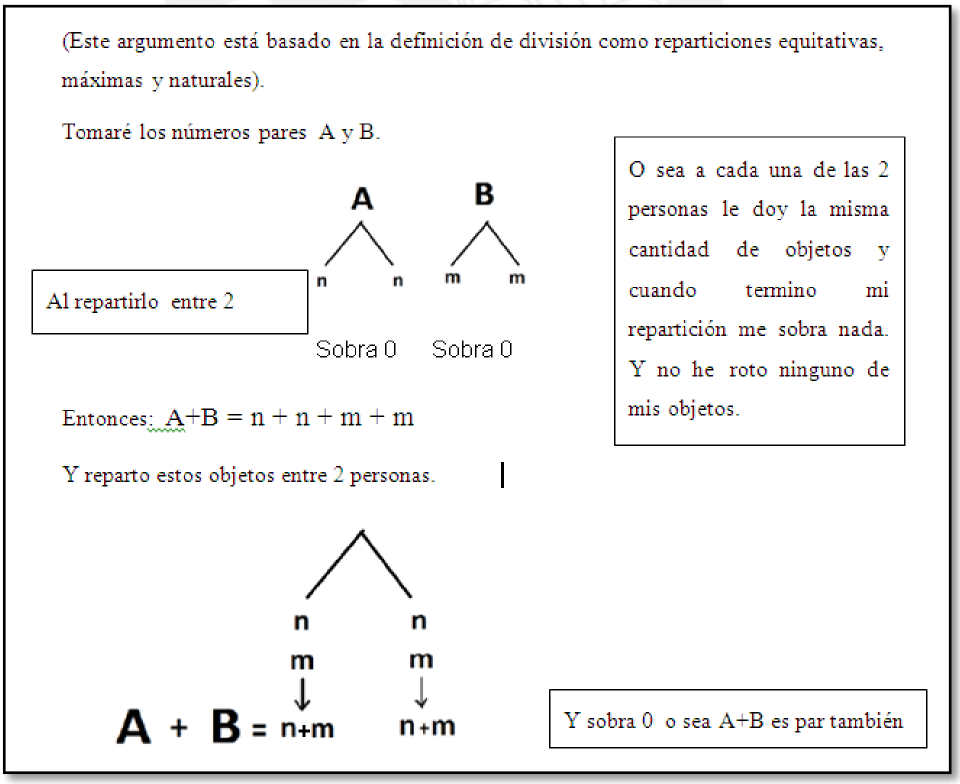


Figura 23. Demostración para la suma de dos números naturales pares es par
Fuente: Vallejo (Documentos inéditos) (traducción nuestra)

Problema 4: "¿Es verdad que cualquier número es divisible por 1?"

Argumento 4.1

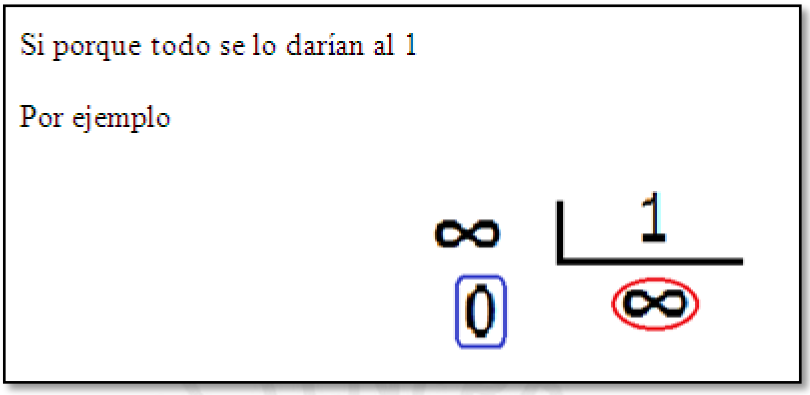


Figura 24. Respuesta de Orlando a la segunda pregunta.
Fuente: Ordoñez (2014, p. 320)

3.3. Análisis de los datos

Desarrollamos nuestro análisis de la siguiente manera: (3.3.1.) Análisis de las respuestas de los doce participantes, para el cual nos enfocamos únicamente en las respuestas de los doce participantes para la primera etapa de la recolección de datos: las nueve preguntas abiertas. No se realiza el análisis de las respuestas de la segunda etapa para los doce participantes, pues algunos no justificaron sus respuestas y solo optaron por darle un calificativo; y (3.3.2.) Análisis completo de las respuestas de dos de los participantes, En este caso se analizara las respuestas de dos de los participantes seleccionados por presentar respuestas más completas a las dos etapas de la recolección de datos, descritas en el apartado anterior (3.2). Nos referimos a un análisis completo porque abarca el análisis de las dos etapas de recolección de datos. Con este fin nos concentramos únicamente en las respuestas dadas por dos de los doce participantes. Aquí se incluirán las respuestas completas de ambos participantes (en esto también se diferencia con lo realizado en 3.3.1)

Para cada uno de los dos análisis diferenciados descritos previamente, seleccionamos fragmentos de las respuestas textuales ilustrativas, que nos ayudan a agrupar mejor las respuestas de los participantes para a su vez identificar, particularmente en el caso de los dos participantes seleccionados, sus creencias acerca de la demostración matemática.

A continuación presentamos el desarrollo de nuestros análisis.

3.3.1. Análisis de las respuestas de los doce participantes

Presentamos los resultados de la investigación organizado por 9 preguntas abiertas de la primera etapa de la entrevista a los docentes. Los datos se obtuvieron de cada maestro, pero informaremos los resultados en forma grupal en cuadros de frecuencia para los 12 encuestados así como fragmentos 'representativos' de las entrevistas de los docentes identificados por un número.

Primera pregunta: ¿Alguna vez ha trabajado demostraciones matemáticas en su educación?

Teniendo en cuenta que los sujetos de nuestra investigación son docentes que están cursando una maestría en enseñanza de la matemática y que en una de las asignaturas se han trabajado demostraciones matemáticas, se les ha solicitado que su respuesta sea respecto a su formación académica anterior.

Tabla 3. Respuesta a la primera pregunta

¿Alguna vez ha trabajado demostraciones matemáticas en su educación?	**Respondió Si**
En la escuela	4
En pregrado	7
En alguna capacitación	1
Total	12

De acuerdo a los datos recolectados observamos que efectivamente los doce docentes encuestados han trabajado demostraciones matemáticas, uno de ellos las ha trabajado recién en un curso de capacitación, cuatro en la secundaria y siete en su formación como docentes en pregrado.

Entre algunas respuestas mostramos la del docente Nº 1: "En mi formación docente (pre grado), si me han hecho hacer bastante demostraciones y he padecido bastante. Pero no lo realizo con mis alumnos". Y la del docente Nº 9: "En secundaria en lo que es algebra en lo que es productos notables", es representativa para las respuestas de la categoría escuela.

Por lo manifestado por ocho de los docentes encuestados, vemos que en la escuela no se le da mucho énfasis al trabajo con demostraciones matemáticas. Resaltamos la respuesta del docente que declaró trabajarlo en la secundaria, en lo que respecta al área de las matemáticas, afirmando que lo trabajo en álgebra.

Segunda pregunta: ¿Qué es para Ud. una demostración matemática?

Mostramos las respuestas del docente Nº 1:

“Una secuencia de pasos lógicos basados en axiomas, teoremas que sirven para demostrar. Es la verificación de un teorema matemático”.

Y la del docente Nº 8:

“Usa axiomas para poder demostrar matemáticamente un determinado teorema o proposición. Una demostración se inicia en los axiomas para llegar a demostrar alguna propiedad o algún teorema cumple la función de comprobar y demostrar”.

Estos docentes expresaron una visión de la demostración desde la perspectiva de la lógica y fundamentos de la matemática (ver Capítulo II p. 23) en la que las demostraciones organizan las matemáticas a partir de verdades llamadas axiomas. Esto lo vemos cuando manifiestan ‘Una secuencia de pasos lógicos basados en axiomas, teoremas…’ o ‘Usar axiomas…un determinado teorema o proposición… una demostración se inicia en los axiomas’. Por lo expuesto, pensamos que dichos docentes tienen una noción de la demostración matemática similar a la mencionada en la perspectiva de la lógica y fundamentos de la matemática.

Así mismo, esta visión está relacionada con los roles de sistematización y el de verificación de la demostración, cuando expresan “Una secuencia de pasos lógicos basados en axiomas, teoremas…” en caso del otro docente citado ‘Una secuencia de pasos lógicos basados en axiomas, teoremas…’ y además cuando manifiestan “es la verificación de un teorema matemático” y “cumplen la función de comprobar…”, (ver Capítulo II p. 23).

Tabla 4. Respuesta a la segunda pregunta

¿Qué es para Ud. una demostración matemática?	Número de profesores
Relacionada con las perspectiva de nuestro marco teórico:	
- Pasos lógicos basados en axiomas, postulados, propiedades	**4**
- Formalismo	**1**
- Uso de reglas lógicas	**2**
- Deducción (argumentos deductivos)	**1**
- Validación de teoremas	**4**
Relacionada a los roles de la demostración	
- Verificación	**7**
- Sistematización	**5**

En la tabla 4 se muestra un resumen de las diferentes categorías en las que se han agrupado las respuestas de los doce docentes preguntados acerca de las demostraciones matemáticas.

Tercera pregunta: ¿Qué caracteriza una demostración matemática?

Para esta pregunta mostramos la respuesta del docente Nº 6:

"Lo que la caracteriza es que se hace (...) válida de modo general y también lo que uno puede destacar es que en una demostración implica la utilización de muchos procedimientos: sea ecuaciones, simplificación, factorización, para llegar a lo que se quiere demostrar".

En la tabla 4 de resumen de las respuestas, la categoría para esta respuesta es 'validez' y 'lenguaje simbólico'

En este caso, por lo que el docente manifiesta creemos que tiene una noción de la demostración matemática desde la perspectiva de la lógica y fundamentos de la matemática (ver Capítulo II p. 23)

Esta respuesta es la del docente Nº 7

"Creo que seguir un método. Respetar un método ir de algo general a algo particular o al revés de algo particular a algo general".

En la tabla de resumen de las respuestas la categoría para esta respuesta es deducción e inducción

Por lo expresado por el docente pensamos que la noción de demostración que posee es desde una perspectiva de las ciencias experimentales, pues el docente acepta el método inductivo, (ver Capítulo II p. 22). Pero además observamos que el docente también considera a las demostraciones como el seguimiento del método deductivo, en este caso la perspectiva en la pensamos se encuentre no está muy clara pues, la comunidad matemática, la comunidad matemática escolar y la lógica y fundamentos de la matemática definen a las demostraciones como deductivas (ver Capítulo II p. 23).

Tabla 5. Respuesta a la tercera pregunta

¿Qué caracteriza una demostración matemática?	Número de profesores
Rigor	**2**
Formalismo, lenguaje formal, simbólico	**1**
Uso de reglas lógicas	**3**
Deducción	**2**
Inducción	**1**
Verificación de teoremas, propiedades	**3**
Argumentos verdaderos. Validez	**4**

La tabla 4 muestra un resumen de las diferentes categorías en las que se han agrupado las respuestas de los docentes acerca de las características de las demostraciones matemáticas. Para este caso se cuentan más de doce profesores porque en algunas respuestas los entrevistados mencionaron más de una característica.

Las características de la demostración matemática expresadas por los docentes son muy variadas, vemos que son pocos los que coinciden en sus respuestas, pero pensamos que de alguna manera se observa que los docentes son conscientes de lo que caracteriza una demostración matemática y que se requiere conocimientos de axiomas, postulados, propiedades, etc., que debe haber rigor, secuencialidad, y validación general de las afirmaciones, y los modos de representación deben ser en lenguaje matemático.

Cuarta pregunta: Según su apreciación, ¿desde qué nivel es posible trabajar demostraciones en clases de matemáticas?

Presentamos la respuesta del docente Nº 2:

“Yo he trabajado con nivel secundario, pero me parece que desde el nivel anterior se pueden ir trabajando cosas básicas, de repente para que luego cuando lleguen a secundaria tengan una idea, continúen con esas. Inicios de demostraciones me parecen que desde quinto grado y sexto grado de primaria deben tener esa nociones”.

Observamos que el docente cree que las demostraciones matemáticas se deben trabajar desde los últimos grados de la educación primaria.

Y la respuesta del docente Nº 1:

“En secundaria a partir de 4º. Según el DCN se debe trabajar en cuarto grado de secundaria”.

En el caso del docente Nº 1 vemos que considera recién trabajar con demostraciones en los últimos grados de la secundaria, haciendo referencia a lo que se indica en el Diseño Curricular Nacional de la educación básica del Perú. Pensamos que el docente cree que las demostraciones matemáticas solo pueden ser trabajadas por alumnos de los últimos grados de la secundaria.

En la siguiente tabla mostramos un resumen de las respuestas de los docentes entrevistados.

Tabla 6. Respuesta a la cuarta pregunta

Según su apreciación, ¿desde qué nivel es posible trabajar demostraciones en clases de matemáticas?	**Número de profesores**
Desde primaria	**2**
Desde 5º y 6º de primaria	**3**
Toda la secundaria	**3**
Desde 3º de secundaria	**3**
Desde 4º de secundaria	**1**
Total	**12**

Esta tabla nos da la información de que todos los docentes entrevistados aprecian que se debe trabajar las demostraciones matemáticas en la escuela, en su mayoría piensan que debe ser en la secundaria pero hay un número significativo de ellos que opinan deben ser desde la primaria.

Quinta pregunta: **¿Qué campo de las matemáticas favorecen el trabajo con demostraciones en el aula?**

Presentamos a continuación la respuesta del docente Nº 6

“El campo que más favorece es la geometría, hay más que demostrar en geometría”

La siguiente es la respuesta del docente Nº 8

“En general todos, pero yo casi siempre me he abocado en geometría porque aparecen bastantes teoremas y propiedades que merecen ser demostrados. Muchas veces el alumno solo los crea pero supongo que hay demostraciones en algebra, aritmética pero en geometría he visto bastantes propiedades para demostrar”.

Notemos que ambos docentes mencionaron que el campo de la geometría favorece más el trabajo con las demostraciones, uno de ellos además declaró que todos los campos de la matemática pero que más se ha dedicado a trabajarlo con temas de geometría.

La siguiente tabla muestra el resumen de las respuestas de los docentes entrevistados:

Tabla 7. Respuesta a la quinta pregunta

¿Qué campo de las matemáticas favorecen el trabajo con demostraciones en el aula?	Número de profesores
Solo geometría	**6**
Geometría y aritmética	**2**
Geometría y algebra	**1**
Geometría y trigonometría	**1**
Algebra	**1**
Todos los campos	**1**
Total	**12**

A excepción de un docente todos los docentes entrevistados consideran que el campo de la matemática que favorece el trabajo con las demostraciones matemáticas es la geometría. Solo uno de los encuestados mencionó que todos los campos favorecen el trabajo con demostraciones matemáticas.

Sexta pregunta: **Desde su perspectiva, ¿Qué rol /función /papel juegan las demostraciones en las clases de matemáticas?**

Presentamos la respuesta del docente Nº 2

“Un rol importante porque ahí el alumno va a reforzar su conocimiento y si son demostraciones de propiedades el alumno va a adquirirlas con mayor seguridad y eso le va a servir para continuar con otros estudios donde se necesite esa propiedad y va a aplicarlas con mayor éxito”. Según lo manifestado por el docente, le atribuye el rol de *transferencia* (ver Capítulo II p. 33) cuando expresa que “eso le va a servir para continuar con otros estudios donde se necesite esa propiedad y va a aplicarlas con mayor éxito

La respuesta siguiente es la del docente Nº 7

“Justificar la validez de lo que estamos proponiendo de las propiedades que usamos, de los teoremas que usamos, justificar si son válidos o no, si están dentro de una estructura lógica de razonamiento, de pensamiento”. En lo manifestado por el docente de acuerdo a nuestro marco teórico (p. 27), pensamos se le puede atribuir al rol de sistematización cuando manifiesta textualmente “dentro de una estructura lógica de razonamiento…” y *verificación* porque según manifiesta textualmente “justificar la validez de (...) propiedades, (...) teoremas…”

La respuesta siguiente es la del docente Nº 6

“Yo tuve un docente en la UNI que me dijo que una clase de matemática sin demostración no era buena clase de matemática, me quede con esa idea que se debe hacer por lo menos una demostración en la clase de matemática. Juegan un rol muy importante, porque aquí hay más entendimiento para el alumno, lo inclinas a que use propiedades, que argumente cosas, que no acepte los teoremas como verdades absolutas, sino que diga porqué es verdad. Con el proceso de demostrar se aprovechan situaciones donde el alumno aplica procedimientos que si son bien aprovechadas, yo creo que es el camino correcto para enseñar”

Según lo manifestado por el docente interpretamos que se puede atribuir el rol de explicación cuando manifiesta: “(…) que use propiedades, que argumente cosas, que no acepte los teoremas como verdades absolutas, sino que diga porqué es verdad…” (ver Capítulo II p. 33).

La tabla siguiente muestra el resumen de los roles que le atribuyen a las demostraciones matemáticas los docentes entrevistados, hay algunas respuestas que atribuyen más de un rol:

Tabla 8. Respuesta a la sexta pregunta

Desde su perspectiva, ¿Qué rol /función /papel juegan las demostraciones en las clases de matemáticas?	**Número de profesores**
Explicación	**4**
Transferencia	**1**
Sistematización	**2**
Verificación	**3**
Menciona otros aspectos que no son considerado roles por los investigadores.	**4**

De los doce docentes ocho reconocen uno o más roles que cumplen las demostraciones matemáticas en las sesiones de clases. Pero de los doce hay cuatro entrevistados que no reconocen los roles que los investigadores plantean como tales y mencionan aspectos que no lo hemos podido vincular directamente con algunos de los roles que hemos explicado en el capítulo II (p. 26) de nuestro Marco teórico.

Séptima pregunta: ¿Ud. trabaja demostraciones en sus clases de matemáticas?

En las entrevistas, once de los docentes preguntados mencionaron que trabajan con demostraciones en sus clases pero en pocas oportunidades. Lo que nos hace pensar que los docentes no practican aquello que consideran importante según lo que ellos mismos manifiestan.

Octava pregunta: ¿Qué resultados / propiedades ha demostrado con sus estudiantes por ejemplo? ¿Por qué esos y no otros? ¿Con qué propósito /fin?

Presentamos las respuestas del docente Nº 11:

"Propiedades y resolución de problemas en geometría. Hago un procedimiento y explico las propiedades y en algunos problemas que te exigen aplicar estrategias para justificar"

Y aquí las respuestas del docente Nº 12:

"Sí en el teorema de Pitágoras, funciones trigonométricas, identidades trigonométricas, cómo se cumplen y se demuestran, y en álgebra con las fórmulas para llegar a la demostración."

Las respuestas de los docentes reflejan que la asignatura en la que trabajan más las demostraciones es la geometría, reiterando las respuestas que dieron a la sexta pregunta.

La tabla Nº 8 muestra el resumen de los temas expresados por los entrevistados como ejemplos de resultados o propiedades trabajados en sus clases de matemática:

Tabla 9. Respuesta a la octava pregunta

¿Qué resultados / propiedades ha demostrado con sus estudiantes por ejemplo? ¿Por qué esos y no otros? ¿Con qué propósito /fin?	**Número de profesores**
En Triángulos. Suma de los ángulos internos de un triángulo. Teorema de Pitágoras. Propiedades de los triángulos	**9**
Simetría	**1**
Suma de términos de una P.G.	**2**
En lógica	**1**
En geometría: Rectas paralelas, Teorema de la base media o mediana	**2**
En algebra: productos notables	**2**
En trigonometría	**1**

En este cuadro se observa que los docentes han trabajado en la mayoría de los casos en temas de geometría.

Notamos que el total de frecuencias es mayor que 12 (número de docentes entrevistados) es porque alguno de ellos mencionó más de uno de los temas que incluimos en nuestra tabla.

Novena pregunta: ¿Ud. Cree que es importante enseñar demostraciones matemáticas en la escuela secundaria? ¿Por qué?

Presentamos la respuesta del docente Nº 3

"Sí es importante en ambos niveles (primaria y secundaria) porque ayuda a desarrollar lo que es la habilidad de su razonamiento lógico, porque muchas veces nosotros no sabemos que a través de preguntas podemos conectarlos a ellos con el nuevo aprendizaje, con ello se sienten más seguros de poder resolver y poder razonar y dar sus puntos de vista".

Pensamos que en su respuesta el docente está conectando la importancia de las demostraciones con el rol de la *transferencia* de la demostración matemática cuando expresa que "podemos conectarlos a ellos con el nuevo aprendizaje…". Según lo expresado en capítulo II (p. 33) de los roles de la demostración. Además el docente declara como importante el 'desarrollo de la habilidad de su razonamiento lógico', en este caso interpretamos que tiene relación con la noción de demostración desde la perspectiva de la matemática escolar (p. 25).

Y la del docente Nº 6:

"Sí, es importante. Primero porque juegan el papel que el estudiante no crea todo lo que escucha si no que el estudiante sea un crítico de la matemática en el sentido de que si dices esto a ver demuéstralo. Yo siempre le he dicho a mis alumnos háganse la idea de que estamos en un juicio donde el abogado da recursos en defensa, pero demuéstralo; el juez que pide al abogado que lo demuestre, el estudiante también debe pedir al profesor que lo demuestre".

La respuesta del docente nos hace pensar que relaciona la importancia de las demostraciones matemáticas con el rol de la *verificación* cuando expone que 'el estudiante no crea todo lo que escucha si no que sea un crítico de la matemática, es decir, que se muestre evidencia de la afirmación presentada.

Todos los docentes entrevistados reconocen la importancia de la demostración matemática. La mayoría mencionó que ayuda al razonamiento lógico de los estudiantes, para que lo "ayude en su creatividad" y "no se mecanice con las operaciones matemáticas", y que le sirva para "continuar con otros estudios". Observamos que asocian las razones que le atribuyen a la importancia de las demostraciones con algunos de los roles atribuidos por los investigadores, o con los significados de algunas de las perspectivas mencionadas en nuestro trabajo (ver Capítulo II p. 22).

Teniendo en cuenta que la entrevista aplicada a los docentes se realizó en dos etapas: Una primera etapa con preguntas abiertas que nos permitirá describir los significados que los profesores encuestados le dan a las demostraciones matemáticas y otra segunda parte con preguntas cerradas que nos permitirá valorar las calificaciones de argumentos sobre demostraciones matemáticas que realizan los docentes encuestados, luego es necesario contrastar ambas partes de la entrevista para interpretar las coincidencias o contradicciones que expresan los docentes respecto a sus creencias sobre las demostraciones matemáticas. Presentamos al análisis de las respuestas de la primera etapa de dos participantes elegidos por tener respuestas más completas en ambas etapas de la entrevista el participante número 4 y el participante número 10.

3.3.2. Análisis completo de las respuestas de dos de los participantes

Respuestas del Participante Nº 4

Mostramos las siguientes tablas que contienen las repuestas del participante N° 4 a las preguntas de la primera etapa de las entrevistas semiestructuradas llevadas a cabo. En la primera columna de las tablas, especificamos las preguntas principales que rigen el desarrollo de esta primera etapa de la entrevista; mientras que en la segunda columna, incluimos las respuestas textuales del participante, pero además en negritas y cursivas las preguntas adicionales realizadas por el entrevistador. Al final de cada una de las tablas presentamos nuestra descripción y análisis.

Tabla 10. Respuesta a la pregunta 1 del Participante 4

PREGUNTA Nº1	RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 4
¿Alguna vez ha trabajado demostraciones matemáticas en su educación?	Alguna cosas, sí. Algunos puntitos, algunos puntos. ***¿En qué nivel? ¿En secundaria o en superior?*** No, no. En secundaria. ***¿En secundaria? Ah ya, desde secundaria has visto***. En secundaria, algunas demostraciones puntuales de algunos ejercicios. Bueno, como venían en los libros. Algunas demostraciones, y esas simplemente las trabajábamos

El docente manifiesta que trabajó solo algunas demostraciones en su educación secundaria. En su respuesta destacamos la importancia del uso de los libros de texto en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, ya que de acuerdo a lo manifestado por el participante, parece haber sido una herramienta referencial en su aprendizaje de las demostraciones matemáticas. Según indica, su profesor las trabajaba en clase tal como figuraba en los libros de texto.

Tabla 11. Respuesta a la pregunta 2 y 3 del participante 4

PREGUNTAS Nº 2 y 3	**RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 4**
¿Qué es para Ud. una demostración matemática?	Bueno, una demostración son argumentos deductivos, que empleamos, ¿no? Que para eso empleamos a veces axiomas, definiciones, teoremas… para poder, demostrar algo si es verdadero, para demostrar, bueno, lo que se quiere demostrar, ¿no? Si se quiere demostrar algo entonces yo empleo definiciones, axiomas, otros teoremas para poder demostrar. Por eso son… y en sí son argumentos pues que voy deduciendo, argumentos deductivos.
¿Qué caracteriza una demostración matemática?	¿La característica principal? ***¿O qué caracteriza una demostración para ti? ¿Qué característica debe tener una demostración?*** Primero que tiene que ser, eh..., las deducciones tienen que ser formales, sin nada de empirismos, ¿no? Tengo que basarme en algo para ir demostrando deductivamente, me tengo que estar basando en cosas ya formales, establecidas ya formalmente. ***¿Ya demostradas?*** Claro, ya teoremas. ***¿Qué quieres decir con formalismo?*** El formalismo tiene que ver con el uso de lenguaje simbólico o matemático y que se da cuando las demostraciones van secuencialmente probando primero casos particulares y luego hasta generalizar.

El docente afirma que las demostraciones son “argumentos deductivos”, para lo que se emplean verdades matemáticas en la forma de “axiomas, definiciones, teoremas”, a lo que el participante también hace referencia como “cosas ya formales, establecidas ya formalmente”. Además destacamos en su respuesta lo siguiente: “las deducciones tienen que ser formales, sin nada de empirismos”.

En este caso el docente expresa que las “deducciones” que caracterizan a una demostración tienen que ser formales, poniendo énfasis en este último punto: El formalismo. Asimismo destacamos la forma como el participante percibe la matemática: que se origina en axiomas, definiciones, teoremas ya demostrados, etc., y que a partir de deducciones se pueden ir demostrando nuevos teoremas. También hacemos notar sobre la forma como el participante N° 4 asocia al formalismo con el lenguaje simbólico o matemático, tal y como él indica.

Tomando en cuenta las respuestas del participante a las preguntas 2 y 3 de la primera etapa de la entrevista, percibimos que el docente tiene una noción de demostración matemática similar a la dada desde la perspectiva de la lógica y los fundamentos de la matemática (ver capítulo II, p. 21).

Tabla 12. Respuesta a la pregunta 4 del participante 4

PREGUNTA Nº 4	**RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 4**
Según su apreciación, ¿desde qué nivel es posible trabajar demostraciones en clases de matemáticas?	Según el grado de la demostración, creo yo, ¿no? Hay demostraciones, donde, eh…, que para ser demostradas implica (el uso de) bastantes pasos: varias definiciones, otros teoremas, algunos axiomas, entonces es… *(Inaudible)*…. Pero para demostrar algunas donde solamente se va a emplear algunos, pocas definiciones o pocos teoremas, ¿no?, o pocas deducciones, entonces yo creo que se puede emplear desde tercer grado. ***¿De Secundaria?*** Sí, desde tercero de secundaria.

El participante asocia el desarrollo de demostraciones matemáticas con “la cantidad” de conocimiento matemático acumulado, en la forma de definiciones, axiomas, teoremas, etc. De acuerdo a su respuesta, para hacer demostraciones más “sofisticadas”, se requiere de una mayor acumulación y uso de este tipo de conocimiento. Él sugiere así que es posible trabajar demostraciones “simples” (en el sentido de que se empleen pocos conocimientos para ellas), desde tercer grado de secundaria.

Tabla 13. Respuesta a la pregunta 5 del participante 4

PREGUNTA Nº 5	**RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 4**
¿Qué campo de las matemáticas favorecen el trabajo con demostraciones en el aula? ¿Cuál? ¿Alguno? ¿Ninguno?	Bueno, el campo, creo que, donde se emplean más las demostraciones, creo que es el campo de la geometría. ***¿Geometría es en donde más se trabaja?*** Sí es donde más se trabaja.

El docente manifiesta que, desde su punto de vista, la geometría es el campo que propicia el trabajo con demostraciones. Y que, según él, es ese el campo donde más se trabajan demostraciones matemáticas en el aula.

Tabla 14. Respuesta a la pregunta 6 del participante 4

PREGUNTA Nº 6	**RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 4**
Desde su perspectiva, ¿Qué rol /función /papel juegan las demostraciones en las clases de matemáticas?	Las demostraciones en las clases de matemáticas… ***¿Qué rol juegan?*** … juega el papel de mmm… de hacer más formal un conocimiento, de profundizar el conocimiento y hacerlo más formal. O sea, si es demostrable, estamos demostrando que se cumple esto, ¡ah!, entonces el alumno va a ver que no le estoy, como decir, que no lo estamos engañando, va a ver que ese concepto sí se puede cumplir basando en un paso, deduciendo uno, un teorema o una definición y se cumple. Entonces yo creo que el de formalizar la matemática, formalizar el contenido. ***Eso de que se cumpla algo, ¿cómo le llamarías tú? ¿Verdad?*** Claro, sí. Demostrar las verdades. Sí eso

Observemos que nuevamente en este caso nuestro entrevistado expresa el carácter formal de las demostraciones. El participante menciona explícitamente que, desde su punto de vista, las demostraciones juegan el papel de “formalizar la matemática, formalizar el contenido”. De acuerdo a nuestros elementos teóricos, el rol atribuido en este caso, parece hacer referencia al rol de sistematización (ver Capítulo II, p. 30). …Como evidencia de ello, destacamos lo señalado por el participante en las siguientes frases: “*Hacer más formal un conocimiento*”, “*deduciendo un teorema*”, “*formalizar la matemática, formalizar el contenido*”. Esto último parece indicar que el participante ve en la demostración un medio para organizar la matemática y particularmente el contenido, como él señala.

Otro rol al que hace referencia es el de la verificación de un concepto cuando expresa “el alumno va a ver que no le estoy, como decir, que no lo estamos engañando, va a ver que ese concepto sí se puede cumplir, basando en un paso, deduciendo uno,…’. Este caso es el rol que generalmente ha sido reconocido por los investigadores como rol de verificación de las demostraciones.

Tabla 15. Respuesta a la pregunta 7 del Participante 4

PREGUNTA Nº 7	RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 4
Ud. ¿Trabaja demostraciones en sus clases de matemáticas?	Como te digo, algunas veces lo hacemos. No, siempre. Algunas que vemos, que son importantes y que los alumnos ¿no? nos puedan entender, entonces, esas las trabajamos. ***¿En qué grados sobre todo?*** En cuarto grado. ***¿En cuarto…?*** De secundaria

El docente expresa haber trabajado con las demostraciones en cuarto de secundaria, es decir, casi al finalizar nuestra educación básica. Para esto él recalca que para trabajar las demostraciones, se requiere determinar aquellas (demostraciones) que son importantes, y aquellas que podrían ser entendidas por los estudiantes, asumiendo de esta manera que no todas las demostraciones pueden ser entendidas por estudiantes de la educación básica.

Tabla 16. Respuesta a la pregunta 8 del participante 4

PREGUNTA Nº 8	RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 4
¿Qué resultados / propiedades ha demostrado con sus estudiantes por ejemplo? ¿Por qué esos y no otros? ¿Con qué propósito /fin?	Teoremas por ejemplo de rectas paralelas, basándome en los axiomas, en varios axiomas, entonces para demostrar algunos conceptos sobre todo de la geometría plana, entonces… hemos ido buscando. A ver este teorema, lo podemos, se puede demostrar, sí, viendo los pasos, uno, dos pasos, tres pasos entonces el alumno ahí poquito a poquito sí. Los que se meten de lleno a la matemática a veces lo comprenden, lo comprenden.

Aquí nuevamente se observa que las demostraciones son para el docente mejor aprovechadas en geometría, para que el estudiante comprenda las matemáticas.

Notamos nuevamente la perspectiva del participante respecto a lo que entiende por demostración, cuando dice: "*Teoremas de rectas paralelas, basándome en varios axiomas… un paso, dos pasos. El alumno ahí poquito a poquito…*"

Tabla 17. Respuesta a la pregunta 9 del Participante 4

PREGUNTA Nº 9	RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 4
¿Ud. Cree que es importante enseñar demostraciones matemáticas en la escuela secundaria? ¿Por qué?	Yo creo que sí, sí es importante, sí es importante. ***¿Alguna razón más aparte de lo que ya nos dicho que el alumno va a entenderla?*** Como te digo que… este… afianza los conocimientos matemáticos en el alumno, porque se van tocando, ¿no? Para ir demostrando y en esos pasos se van tocando axiomas se van tocando teoremas entonces va afianzando los conocimientos y conceptos matemáticos en el alumno

Observamos que el docente expresa que la importancia de las demostraciones matemáticas tienen que ver con la utilización de los axiomas, teoremas matemáticos empleados por el estudiante. Aquí igualmente el participante expresa su perspectiva de la demostración vista desde la lógica y fundamentos de la matemática. También se puede interpretar que asocia a las demostraciones con el rol de sistematización de las matemáticas.

En esta primera etapa en la que hemos mostrado las respuestas del participante Nº 4, encontramos que el docente (por lo que manifiesta ‘teóricamente’) tiene una visión de la demostración similar a la vista desde la perspectiva de la lógica y fundamentos de la matemática (ver capítulo II, p. 22). Interpretamos lo dicho anteriormente, por los significados que observamos ha otorgado el docente y hemos detallado en el análisis de las respuestas del participante a cada pregunta realizada en los segmentos anteriores.

Evaluación de los argumentos por el docente Nº 4:

Mostramos la siguiente tabla, que especifica en la primera columna el número asignado al argumento de cada problema calificado por el docente, en la segunda columna el calificativo que el docente le otorgó a dicho argumento (que puede ser del 1 al 4) y en la tercera columna mostramos la justificación otorgada por el docente, agregando en negrita y cursiva las preguntas complementarias que el investigador cree por conveniente para entender cuáles son los aspectos adicionales para las consideraciones que hacen los participantes acerca de sus calificaciones y finalmente nuestra apreciación o análisis de dicha calificación o justificación.

Tabla 18. Calificación al argumento 1.1 del Participante 4

Problema 1		
N° Argumento	**Calificación**	**Justificación del participante**
1.1	4	Si es demostración, cuatro. Yo digo que es una demostración por inducción, es una demostración inductiva cuando se parte de la mínima expresión que es 1 y, afirmo para un "n" y tengo que ver si se cumple para un "n+1"

Asigna calificativo 4: compatible con su perspectiva manifestada en la primera etapa de la entrevista. De acuerdo a su perspectiva de la demostración vista desde *la lógica y fundamentos de la matemática* (ver p. 22) el docente le da un calificativo esperado, pues la demostración muestra esquemas simbólicos y es un método de demostración conocido y aceptado. Además ante la pregunta de cuál argumento elige para esta tarea, el participante eligió este arguemnto.

Tabla 19. **Calificación al argumento 1.2 del Participante 4**

1.2	1	Hasta aquí es una comprobación de algo. ***¿No es una demostración?*** No es una demostración es una comprobación ***¿Entonces le pondrías un calificativo?*** ¿Uno dices no? ***Uno es cuando no es…*** Ya uno. ***Tú sabes que puedes usar la escala del uno al cuatro.*** Ya uno entonces. Pero aquí hay una cosita, o es o no es. ***O sea tú. Depende algunos me dicen 2 porque tiene algo de la demostración, tres porque le falta un poquito.*** Es que tiene algunos pasos de la demostración, pero no es una demostración porque solamente lo está calculando para un número finito, ¿no?, pero por ejemplo lo decimos con el otro es para un "n" ¿no?

Asigna calificativo 1, compatible con su perspectiva mostrada en la primera etapa. El docente reconoce que el argumento tiene un proceso que puede permitir generalizar la demostración, pero carece de la generalización formal vista desde dicha perspectiva, le da un calificativo mínimo.

Tabla 20. Calificación al argumento 1.3 del Participante 4

1.3	4	Sí. Sí, es demostración. ***¿4 entonces?*** Sí 4. ***Porque está usando el "n"*** Parte de una situación de suma ¿no? Hay una suma hasta "n" términos, hace la misma suma ¿no? en forma inversa, y luego hace la misma suma de los dos. Una suma y por lo tanto llega a una afirmación.

Asigna calificativo 4: compatible con su perspectiva puesto que el argumento muestra una forma de representación simbólica, formal y generaliza el problema. Además, señalo que este argumento es el seleccionado frente a la pregunta de ¿cuál argumento le convence más?

Tabla 21. Calificación al argumento 1.4 del Participante 4

1.4	3	Acá me está diciendo solamente cuando n es par o impar nada más no es en forma general ¿no?, acá es en forma general (el participante señala la hoja donde está escrito el problema planteado) para cualquier n la suma es esta. ***Como es números enteros positivos.*** Pero acá me dice solamente me dice n es bien par o impar solamente para uno de estos casos Y acá, está probando para el impar y el par Me parece que es un caso particular. ***¿Entonces le pondrías cuánto***? A ya tú quieres que lo califique Q***ue lo califiques del 1 al 4.*** Yo le pondría un tres ***¿Un tres porque te parece un caso particular?*** porque me parece un caso particular, como te digo la duda es ahorita 7, yo seguiría probando por ejemplo aquí han probado para un siete, el tiempo faltaría que tal para un... qué tal para un 9, como pasa, o para un 10, entonces de ahí ya voy generalizando al menos que tú me digas que si se cumple para un 9 o que si se cumple para un 11, la cuestión es que de aquí sacar esta fórmula, de aquí como llega a esta fórmula, para otro número, para 9, para 11, para 13. entonces por eso no lo veo

Asigna calificativo 3: No es compatible con su perspectiva mostrada en la primera etapa. Interpretamos que el docente a pesar de su perspectiva de demostración matemática mostrada en la primera etapa, y de no aceptar los argumentos de tipo genérico como una demostración; reconoce que este argumento tiene un proceso demostrativo, por tal razón le otorga un calificativo de 3 a dicho argumento.

Tabla 22. Calificación al argumento 1.5 del Participante 4

1.5	1	Ya esto no es una demostración. ***¿No es?*** Es una comprobación, pero no es una demostración, está comprobando simplemente que se cumple esto. ***¿Le pondrías un uno?*** Un uno

Asigna calificativo 1: compatible con su perspectiva mostrada en la primera etapa. Interpretamos que el docente no reconoce un argumento genérico como demostración matemática.

Tabla 23. Calificación al argumento 1.6 del Participante 4

1.6	2	***¿Qué es para ti?, si no entiendes algo me preguntas.*** Esto, el procedimiento para mi está bien se entiende el procedimiento, llega a esto un poco jalado, llega. Está comprobando la fórmula por medio de estos triángulos está comprobando pero no lo está demostrando. Yo le pongo un 2. ***Es una comprobación también ¿no? ¿Porque no uno, que explicación darías?*** Bueno acá todavía trabaja con....he...este aquí estamos, yo todavía estoy con una duda. Para mi estas son comprobaciones, no son tan formales para una demostración.

Asigna calificativo 2: No es compatible con su perspectiva. En este caso el docente expresa su noción de demostración, que debe ser *formal*, pensamos que para él debe ser escrito de forma simbólica, por ello no le otorga el calificativo esperado al argumento desde su perspectiva mostrada, pero se contradice al otorgarle el calificativo 2, pues debería ser 1 para dicha perspectiva.

Tabla 24. Calificación al argumento 2.1 del Participante 4

Problema 2		
2.1	4	Es una demostración gráfica. ***Entonces ¿si es demostración?, ¿un 4?*** Si está demostrando gráficamente, Siempre y cuando se cumpla esto ¿no? (señala en la figura del argumento la línea recta formada por los tres ángulos) Todo lo que tú me dices, una línea recta, los argumentos dados…

Asigna calificativo 4: no es compatible con su perspectiva. En este caso, pensamos que él docente está contradiciendo la perspectiva mostrada, recalca que si se cumple que los ángulos forman la línea recta, pero para el caso de las matemáticas no califica como demostración puesto que es un caso particular.

Tabla 25. Calificación al argumento 2.2 del Participante 4

2.2	4	(lee el argumento) Pero aquí gráficamente es la duda porqué… no sé si el triángulo está bien dibujado (se refiere a los lados) (uno quedaría más arriba que el otro) porque acá lo presentas…pero no sé... Así está ¿no? bueno en el dibujo no se nota tanto. Son perpendiculares nada más, correcto. (lee el argumento) ***(Se le explica el argumento)*** Sí es una demostración, 4

Asigna calificativo 4: No es compatible con su perspectiva. El docente duda y recalca las condiciones que se requiere para reconocerla como demostración, a pesar de no observar un proceso expresado de forma meramente simbólica lo acepta como demostración. Además, este argumento es el que eligió de entre los presentados para el presente problema.

Tabla 26. Calificación al argumento 2.3 del Participante 4

2.3	4	(lee el argumento) Acá si me convence .4 (señala el dibujo) pero acá, señala el texto (lee) (***se le explica el argumento***) Sí ***¿También es demostración?*** Sí. ***(Comentario después de la evaluación del argumento).*** Esta es de una manera un poco más empírica, se podría decir, pero lo está demostrando. Y ahorita me estoy.... es una demostración más gráfica una comprobación gráfica. después me vas a preguntar con cual me quedo)

Asigna calificativo 4: No es compatible con su perspectiva. El docente reconoce el argumento como demostración, contradiciendo la perspectiva que muestra tener en la primera etapa de la entrevista. Le llama empírico pues el esquema no es muy formal y se expresa una buena parte de la demostración en lenguaje verbal. Además, El participante eligió este argumento como el más convincente de los presentados para el presente problema.

Tabla 27. Calificación al argumento 2.4 del Participante 4

2.4	3	***(lee el argumento, trata de entenderlo)*** Es una demostración gráfica, no es demostración. Le pongo un tres. ***¿Qué le falta para que sea un 4?*** Debe convencerme más, no me convence tanto.

Asigna calificativo 3: No es compatible con su perspectiva. Interpretamos que el docente al no ver una forma de presentación simbólica como él cree que deben presentarse las demostraciones no le asigna el calificativo 4, pero tampoco le otorga el calificativo 1 de acuerdo a su perspectiva, se contradice y reconoce procesos demostrativos en el argumento.

Tabla 28. Calificación al argumento 2.5 del Participante 4

2.5	3	(lee el argumento) (***Se le explica el argumento***) Por ejemplo acá ha señalado uno ¿no? (al triangulo seleccionado en la figura)… Claro lo

		está demostrando gráficamente Si es demostración pero califica un 3. ***¿Solo tres?*** Si, igual no me convence.

Asigna calificativo 3: No es compatible con su perspectiva. En este caso, igualmente como en el caso del argumento 2.4, Pensamos que el docente al no ver una forma de presentación simbólica como él cree que deben presentarse las demostraciones no le asigna el calificativo 4. Pero se contradice con su perspectiva mostrada pues reconoce procesos demostrativos en el argumento.

Tabla 29. Calificación al argumento 3.1 del Participante 4

Problema 3		
3.1	1	(lee el argumento) Pero ahí me está diciendo que es el mismo número con el mismo a tiene que ser un b por ejemplo y sería dos b y si sería un dos b mira...entonces seria así supongamos ¿no? ***(Le muestro el argumento 3.2) ¿Sería así?*** Aja ***Entonces ya está lo que pensaste*** Si entonces yo tendría un “2(a+b)” y esto sería par ¿no? Por lo tanto la suma de dos números naturales pares es otro número par, entonces, Esto por lo que esta... esto por lo que esta acá no lo veo, madre, como te puedo decir será... sería una demostración para esta (tarea) ***O sería de repente para otro caso ¿no?*** Claro puede ser para otro caso ***¿Por ejemplo que caso sería para ti?*** A ver para dos números pares iguales pero para esa (muestra el escrito del problema presentado) generalmente no. ***¿Entonces para ese que calificativo le pondrías al 3.1?*** A ya tú quieres que le ponga un calificativo. ***Si del 1 al 4*** El uno porque no se presta simplemente.

Asigna calificativo 4: Compatible con su perspectiva. El docente reconoció que el argumento esta denotado simbólicamente pero no satisface las condiciones del problema, que son para dos números naturales pares, pero no especifica que dicha representación simbólica es para números iguales.

Tabla 30. Calificación al argumento 3.2 del Participante 4

3.2	4	(lee el argumento) Si es. ***¿Esa si es?, es un…*** cuatro

Asigna calificativo 4: compatible con su perspectiva. En este caso el argumento si satisface las condiciones del problema, lo que es reconocido por el docente. Además, este argumento es el elegido por el docente de entre los presentados para la tarea y también fue el señalado como el más convincente de todos los argumentos.

Tabla 31. Calificación al argumento 3.3 del Participante 4

3.3	4	(Lee el argumento) Puedo escribir ¿no? ***Sí.*** Le pongo un tres. ***Que le falta para que sea 4.*** Es forma general ponle 4. ***Cambiaste*** Bueno al menos trabaja generalmente porque todos terminan en 2,4,6,

Asigna calificativo 4: compatible con su perspectiva. El docente a pesar de haber dudado, suponemos por su perspectiva de demostración que muestra tener, reconoce que es un argumento que demuestra de forma general la propiedad y le otorga el calificativo respectivo.

Tabla 32. Calificación al argumento 3.4 del Participante 4

3.4	1	Es una comprobación más que una demostración ¿***Qué le pones?*** uno

Asigna calificativo 1: compatible con su perspectiva. El docente reafirma su perspectiva de la demostración desde la lógica y fundamentos de la matemática.

Tabla 33. Calificación al argumento 3.5 del Participante 4

3.5	4	Que te puedo decir, más que una demostración, esta es una explicación de este caso, (coge el argumento 3.2 y lee) por lo tanto, no sé, más que demostración esto viene a ser una descripción de esta demostración esto viene ser una descripción. ***¿No es lo mismo? una está dado un poco más en símbolos y la otra en palabras.*** Si pues.

		A esa de allá que le has dicho que es. Que es una demostración. ***Y esta que no.*** Si pero claro esta sería la demostración seria la seria la verbalización de esta demostración. ***Ya entonces por lo que me dices no te parece demostración sería una explicación ¿cómo lo calificarías?*** No sé a ver, esto es lo mismo que esto entones esto en una demostración también porque tiene los mismos argumentos deductivos de la demostración. Le pongo 4.

Asigna calificativo 4: no es compatible con su perspectiva. Interpretamos que el docente, tiene de acuerdo a su perspectiva mostrada en las preguntas de la primera fase, un esquema de demostración simbólica, podría decirse formal en su noción de demostración, y le cuesta aceptar otra forma de representación, pero lo acepta, y finalmente le asigna el calificativo de demostración.

Tabla 34. Calificación al argumento 3.6 del Participante 4

3.6	2	Es una propiedad de los números pares. ***¿No es demostración?*** No es demostración. ¿***Qué le pondrías***? dos

Asigna calificativo 2: No es compatible con su perspectiva. El docente reafirma su perspectiva de demostración y no reconoce que el argumento mostrado es un argumento genérico y que califica como demostración matemática.

Tabla 35. Calificación al argumento 3.7 del Participante 4

3.7	3	(Lee el argumento. Se le explica un poco) La cuestión es también ver que propiedad está empleando porque, Bueno acá no lo dice pero se supone que está aplicando la propiedad conmutativa. ***A claro para separar*** Para separar y entonces. ***Lo hace de una manera visual.*** Claro sin justificar mucho. ***Su justificación es que está dividiendo*** Le pondría un tres. ***Un tres por lo que falta justificar dices ¿no?*** Claro, separa sin justificar.

Asigna calificativo 3: No es compatible con su perspectiva, el docente participante se contradice y reconoce que hay generalidad para demostrar en el presente argumento, por tal razón le otorga un calificativo muy cercano al que representa una demostración matemática.

Tabla 36. Calificación al argumento 4.1 del Participante 4

Problema 4		
4.1	4	¿Cómo así? ¿Cómo una demostración? ***Sí.*** Como una demostración no lo, no lo…. ***¿No lo ves cómo demostración?*** No lo veo como una demostración ***de repente***... Algo abstracto, el símbolo infinito porque esto es el infinito que implica. ***ya muy buena pregunta, ya te explico un poco el niño que hizo esta demostración para el su idea de números, cualquier número era el infinito era su forma de generalizar*** a ya es un "n" ***Un "n" para él si no como no sabía poner n puso infinito porque él sabe que todos los números son infinitos, ¿no? no termina nunca, ¿qué dices? ¿Califica como una demostración?*** Claro como una demostración porque está aplicando un criterio de la división. Le pongo 4

Asigna calificativo 4: No es compatible con su perspectiva, reconoce la generalidad de la demostración después de la explicación por el uso de "n", pero se contradice con la perspectiva mostrada en la primera etapa.

En esta segunda etapa en la que hemos mostrado las respuestas del participante Nº 4, a los argumentos presentados, encontramos que el docente (por lo que manifiesta en la "práctica") tiene una visión no definida de la demostración de la demostración matemática (ver capítulo II, p. 22). Interpretamos lo dicho anteriormente, por las justificaciones que otorga el docente a cada argumento presentado y detallado en el análisis de sus respuestas. Interpretamos que el docente reconoce argumentos expresados de diferentes formas y no solo de la forma rigurosa y formal de las matemáticas que, según sus respuestas en la primera etapa, deberían ser expresadas las demostraciones matemáticas.

En suma la creencia que posee el participante de las demostraciones matemáticas es que debe tener un carácter formal, expresado simbólicamente, pero acepta en algunos casos, las demostraciones con argumentos genéricos, aunque no le otorga el total crédito de ser una demostración matemática. Reconoce los roles de sistematización y verificación de la demostración matemática. Además de tener la visión de que las demostraciones matemáticas son favorecidas cuando se trabajan en el campo de la geometría.

Respuestas del participante Nº 10.

Mostramos las siguientes tablas que muestran las repuestas otorgadas por el participante Nº 10 a las preguntas de la primera etapa de las entrevistas semiestructuradas llevadas a cabo. En la primera columna de las tablas, especificamos las preguntas principales que regían el desarrollo de esta primera etapa de la entrevista; mientras que la segunda columna incluimos las respuestas textuales del participante, pero además en negritas y cursivas las preguntas adicionales realizadas por el entrevistador. Al final de cada una de las tablas presentamos nuestra descripción y análisis.

Tabla 37. Respuesta a la pregunta 1 del Participante 10

PREGUNTA Nº 1	RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 10
¿Alguna vez ha trabajado demostraciones matemáticas en su educación?	¿En mi formación? Sí. ***¿En el colegio?*** En el colegio no recuerdo, creo que muy poco. En mis estudios superiores sí he trabajado.

El docente afirma no recordar haber trabajado demostraciones matemáticas en la escuela o en todo caso las ha trabajado poco. Pero si manifiesta haber trabajado demostraciones matemáticas en su educación superior.

Tabla 38. Respuesta a la pregunta 2 del Participante 10

PREGUNTA Nº 2	RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 10
¿Qué es para Ud. una demostración matemática?	Ya, bueno hablando de un teorema. Yo pienso que es una demostración si es que sigue un proceso lógico deductivo partiendo de las premisas, de las hipótesis. Partimos de las hipótesis, a partir de esos procesos lógicos llegamos a demostrar las tesis entonces para mí eso es demostración. ***Y esos pasos que tú dices que no deben faltar, en esos pasos ¿qué está involucrado? ¿Hay algo involucrado? O sea… porque tú mencionaste hace un rato que se tiene que utilizar axiomas.*** Si, para mí los axiomas, por ejemplo, son los argumentos. Pero esos argumentos tienen que estar debidamente justificados, pues yo digo,

	utilizo esto y de repente estoy utilizando esta propiedad y por qué, tiene que ir siempre justificado diciendo por qué se está utilizando esa propiedad. ***Ya, y cuando tú dices argumentos deductivos ¿dices eso no? Argumentos deductivos, ¿en qué sentido deductivo? Porque deductivo es una palabra bastante sofisticada.*** Ya... En cuanto a deductivo yo me estaba refiriendo a toda la demostración como proceso deductivo. No precisamente solamente a un argumento... sino a toda la demostración. ***¿Qué es Deductivo?*** Deductivo, yo entiendo que voy llevando una secuencia lógica. A partir de ciertos pasos yo voy a llegar a una conclusión. ***Y como es la conexión entre dichos pasos*** Tienen que guardar estrecha relación. No pueden estar desvinculados, tienen que depender entre ellos. Tiene que haber una dependencia. Individualmente no pueden ser analizados

Cuando el participante menciona *"siguiendo un proceso lógico deductivo"* interpretamos que puede tener una noción de demostración desde cualquiera de dos perspectivas mencionadas en nuestro marco teórico, que son: Perspectiva matemática o Perspectiva de la matemática escolar. Pero en las respuestas dadas por el participante a las nuevas preguntas planteadas, pensamos que su perspectiva se aclara y deja entrever que tiene una noción de la demostración desde la perspectiva de la matemática escolar cuando expresa que, *"siguiendo ciertos pasos (...) que guardan estrecha relación (...) llegará a una conclusión"* (ver cap. II. P. 25).

Tabla 39. Respuesta a la pregunta 3 del Participante 10

PREGUNTA Nº 3	**RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 10**
¿Qué caracteriza una demostración matemática?	Bueno creo que una estructura de la demostración matemática esta dado en forma de un condicional donde la primera parte representaría la hipótesis o conjunto de hipótesis que vienen a ser enunciados verdaderos y a partir de ellos logramos demostrar la tesis. ***¿Importa que la demostración tenga la forma clásica, la forma algorítmica rigurosa o puede ser contextualizado dependiendo del problema?*** Creo que tendría que tener en cuenta también el contexto… porque previamente a mi estudiante

	tendría que haberle enseñado eso también… y hacer una generalización. ***Digamos que desde tu punto de vista no necesariamente tiene que tener el rigor de los símbolos.*** Claro siempre y cuando guarde relación con lo que se sabe que es demostración. El alumno puede no acordarse los símbolos pero describe el proceso.

El docente manifiesta que las demostraciones tienen una estructura que empieza con "hipótesis que vienen a ser enunciados verdaderos" a partir de los cuales se logra la demostración. También resaltamos en su respuesta lo siguiente: *"siempre y cuando guarde relación con lo que se sabe que es demostración. El alumno puede no acordarse los símbolos pero describe el proceso".*

Interpretamos en esta respuesta que nos otorga el participante Nº 10, que tiene una noción de demostración similar a la dada desde la perspectiva de la matemática escolar (ver cap. II p. 25)

Tabla 40. Respuesta a la pregunta 1 del Participante 10

PREGUNTA Nº 4	**RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 10**
Según su apreciación, ¿desde qué nivel es posible trabajar demostraciones en clases de matemáticas?	En Cuarto grado los teoremas de Geometría, en tercer grado también en cuanto a lógica. En quinto grado. Incluso en los grados de 2° también. ***¿En segundo ya pueden hacer demostraciones?*** Si algunas demostraciones no en todas porque también tenemos que tener en cuenta que su ritmo de aprendizaje de los estudiantes en zona rural es muy diferente que en zona urbana

El docente manifiesta que sí se puede trabajar las demostraciones desde segundo de secundaria, teniendo en cuenta el *"ritmo de aprendizaje de los estudiantes"* y su contexto social.

Tabla 41. Respuesta a la pregunta 5 del Participante 10

PREGUNTA Nº 5	**RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 10**
¿Qué campo de las matemáticas favorecen el trabajo con demostraciones en el aula? ¿Cuál? ¿Alguno? ¿Ninguno?	Teoremas en geometría es en donde se puede trabajar más las demostraciones. ***¿Por qué, porque es donde se puede trabajar más?***

	Porque… ***¿Es más fácil? ¿Qué cosa es lo que favorecen digamos que se trabaje más demostraciones en geometría?*** Ya, porque en geometría uno le puede dar, los axiomas, enunciar los axiomas y a partir de eso vamos encontrando propiedades, llegamos a los teoremas y se les indica que el estudiante tiene que utilizar esos axiomas, otros teoremas que anteriormente hemos estudiado, para que ellos puedan hacer la demostración.

El docente afirma desde su punto de vista, que el campo de la geometría es el que contribuye al trabajo con demostraciones, Y de acuerdo a lo que manifiesta resaltamos que el participante reconoce el rol de sistematización de la demostración pues organiza los resultados en axiomas, propiedades, teoremas (ver capítulo II, p. 30).

Tabla 42. Respuesta a la pregunta 6 del Participante 10

PREGUNTA Nº 6	**RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 10**
Desde su perspectiva, ¿Qué rol /función /papel juegan las demostraciones en las clases de matemáticas?	Lo que a mí me interesa es que el estudiante sea un poco… aprenda a argumentar, aprenda a justificar sus procesos y eso creo que lo hace más independiente. Y pienso que el estudiante que aprende a hacer una demostración, incluso puede investigar por él mismo y puede ir afianzando mejor sus aprendizajes, no se hace repetitivo porque mayormente en secundaria lo que a mí me han enseñado es darme la fórmula y ya la utilizas. Y eso en cualquier momento la memoria te puede fallar pero si sabes cómo se deduce, o cómo se demuestra, creo que es un aprendizaje más significativo.

El docente entrevistado en su respuesta enfatiza que las demostraciones matemáticas sirven para que "*el estudiante…aprenda a argumentar aprenda a justificar sus procesos*" de acuerdo a nuestros elementos teóricos el rol atribuido para este caso es el de *explicación* (ver Capítulo II, p. 28). Otro rol al que hace referencia aunque no de manera explícita cuando manifiesta "puede investigar por él mismo y puede ir afianzando mejor sus aprendizajes" es el rol de *transferencia* (ver cap. II, p. 33).

Tabla 43. Respuesta a la pregunta 1 del Participante 10

PREGUNTA Nº 7	**RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 10**
¿Ud. trabaja demostraciones en sus clases de matemáticas?	Si trabajo demostraciones en mis clases.

El participante expresa si trabajar las demostraciones en sus clases de matemáticas.

Tabla 44. Respuesta a la pregunta 8 del Participante 10

PREGUNTA Nº 8	**RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 10**
¿Qué resultados / propiedades ha demostrado con sus estudiantes por ejemplo? ¿Por qué esos y no otros? ¿Con qué propósito /fin?	Para teoremas en cuarto grado, los teoremas de Geometría, en tercer grado, también en cuanto a lógica, en tercer grado trabajo la parte de lógica y ahí trabajamos las demostraciones. En quinto grado también. ***¿De qué tipo de demostraciones?*** Teoremas, algunas propiedades ***¿Propiedades de que más o menos te acuerdas?*** Si, propiedades de los números naturales, propiedades de los números enteros. ***¿Eso desde 3° de secundaria?*** Incluso en segundo grado también ***¿Ya pueden los estudiantes hacer demostraciones?*** Si algunas demostraciones no en todas porque también tenemos que tener en cuenta que su ritmo de aprendizaje de los estudiantes en zona rural es muy diferente en zona urbana. ***Pero… dices que si hacen en 2° de secundaria.*** Sí, pero algunas ***¿Qué tipo de demostraciones tú le haces más o menos por ejemplo desde segundo grado? ¿Qué tipo de preguntas les haces? ¿Qué tipo de argumentos esperas que ellos muestren?*** Ya, en primer lugar damos las propiedades y esperamos que utilicen estas propiedades para hacer alguna demostración. ***¿Te acuerdas de alguna en particular? En segundo sobre todo, ya que dices que en ese grado sí se puede ¿no?*** Por ejemplo para demostrar la propiedad transitiva. Por ejemplo esta la propiedad distributiva en segundo grado ya con los números enteros, entonces nosotros podemos empezar haciendo algunas conjeturas tomando algunos casos particulares y posteriormente hacer la generalización. ***Ah ya, ya de casos particulares tú lo que buscas es que ellos hagan esto general.*** Sí, que lo hagan general, porque para los alumnos darles así nomás, ellos lo aprenden pero es un aprendizaje memorístico, repetitivo en cualquier momento pueden olvidarse, pero si trabajan con casos particulares y después hacemos la generalización, ellos ya no se olvidan.

El docente muestra nuevamente que trabaja con temas de geometría en sus clases, también menciona ejercicios de lógica y de propiedades de números. Interpretamos, cuando el docente expresa "(…) *podemos empezar haciendo algunas conjeturas tomando algunos casos particulares y posteriormente hacer la generalización*", que tiene una noción de la demostración matemática similar a la dada desde la perspectiva de la matemática escolar. Además, acepta la generalización a partir de casos particulares tomados como representativos de un caso general, esto nos indica que el participante acepta argumentos genéricos como productores de demostración (ver capítulo II, p. 25).

Tabla 45. Respuesta a la pregunta 9 del Participante 10

PREGUNTA Nº 9	RESPUESTA DEL PARTICIPANTE Nº 10
¿Ud. Cree que es importante enseñar demostraciones matemáticas en la escuela secundaria? ¿Por qué?	Sí, creo que es muy importante como mencioné, hace que el estudiante sea más independiente, que pueda justificar todo sus procesos, no sea solamente repetitivo lo que hace, no lo haga mecánicamente más bien lo que hace, sea de una manera razonada y utilizando propiedades, teoremas, axiomas y sobre todo argumentando todos los procesos,

El docente expresa que las demostraciones sean "de una manera razonada" Interpretamos aquí nuevamente la noción de demostración matemática similar a la perspectiva de la matemática escolar que expresa que, los modos de argumentación emplean formas de razonamiento y además, cuando menciona "utilizando propiedades, teoremas, axiomas" como aspectos importantes de las demostraciones, también se hace referencia a la misma perspectiva pues éstas se consideran afirmaciones aceptadas por la comunidad de la clase. (Ver cap. II p. 25).

En esta primera etapa en la que hemos mostrado las respuestas del participante Nº 10, observamos que el docente (por lo que manifiesta 'teóricamente') tiene una visión de la demostración desde la perspectiva de la matemática escolar (ver capítulo II, p. 25). Interpretamos lo dicho anteriormente, por los significados que observamos ha otorgado el docente y hemos detallado en el análisis de las respuestas del participante a cada pregunta realizada en los segmentos anteriores.

Evaluación de los argumentos por el docente Nº 10:

Las tablas siguientes, que especifica en la primera columna el número asignado al argumento de cada problema calificado por el docente, en la segunda columna el calificativo que el docente le otorgó a dicho argumento (que puede ser del 1 al 4) y en la tercera columna mostramos la justificación otorgada por el docente, agregando en negrita y cursiva las preguntas complementarias que el investigador cree por conveniente para entender cuáles son los aspectos adicionales para las consideraciones que hacen los participantes acerca de sus calificaciones y finalmente nuestra apreciación o análisis de dicha calificación o justificación.

Tabla 46. Calificación al argumento 1.1 del Participante 10

Problema 1		
N° Argumento	**Calificación**	**Justificación y Análisis**
1.1	4	Le pongo un cuatro. Si es demostración. Es el método inductivo.

El docente le da un calificativo esperado para este argumento pues, esta es una demostración efectuada por el método de Inducción matemática, que es conocido y aceptado en la comunidad matemática. Este tipo de demostración es compatible con su perspectiva mostrada en la primera parte de la entrevista. Además, este es el argumento elegido por el docente de entre los presentados para el problema, también fue el seleccionado como el más convincente.

Tabla 47. Calificación al argumento 1.2 del Participante 10

1.2	1	Para mí no es una demostración porque estamos restringiendo solamente a los 10 primeros números naturales. Le pongo un uno.

Asigna un calificativo 1: no es compatible con su perspectiva mostrada en la primera parte de la entrevista. El argumento tiene procesos demostrativos y le podría haber asignado un calificativo mayor a uno, aunque no cuatro porque aún le falta generalizar.

Tabla 48. Calificación al argumento 1.1 del Participante 10

1.3	4	Pienso que si es una demostración. Le pongo 4. Porque ya no estamos restringiendo como en el caso anterior solamente a 10 números, sino para un "n". Me está diciendo para la suma de los primeros "n" números naturales. Acá se puede sumar utilizando la propiedad conmutativa y al sumarlos puede llegar a esta conclusión y ya estoy demostrando la suma de los "n" primeros números naturales.

Asigna un calificativo 4: Aceptado para todas las perspectivas de la demostración matemática. El docente reconoce la generalidad de la demostración en el argumento y le asigna el calificativo esperado.

Tabla 49. Calificación al argumento 1.4 del Participante 10

1.4	2	Creo que también son dos casos particulares nada más. Es un 2. ***¿Porque no uno?*** Es un análisis para cada caso pero aun así con un caso particular no podríamos

		hacer una generalización. ***¿Cuántos casos particulares más necesitarías para generalizar? Porque me decías que con casos particulares si llevas a tus alumnos a generalizar.*** Hay ciertas propiedades que se pueden hacer generalizaciones pero yo esperaría por ejemplo que se pueda hacer la demostración con inducción matemática.

Asigna un calificativo 2: Contradice su perspectiva mostrada en la primera parte de la entrevista, que es la de la demostración matemática vista desde la escuela (ver cap. II p. 25), en ella se acepta argumentos que a partir de casos particulares que tienen carácter general y explicativo generalizan un problema también general, por lo tanto interpretamos que el docente al no reconocer este tipo de argumento llamado genérico (ver capítulo II p. 26) le otorga un calificativo menor al esperado desde su perspectiva mostrada.

Tabla 50. Calificación al argumento 1.5 del Participante 10

1.5	3	Si es una demostración. ***¿O sea un 4?*** Aunque es un caso particular también o sea toma el rectángulo para demostrar ¿no? Y te hace un caso como el 8 si es un caso particular creo que también debería ser un..., y está tomando solamente 8 números podría trabajarse quizás con una cantidad impar de números también para poder generalizar. Le pondría un 3.(cambia)

Asigna un calificativo 3: Muy cercano al 4, al igual que en su respuesta anterior, no hay total compatibilidad con su perspectiva mostrada, este argumento califica como genérico, es decir si es una demostración desde la perspectiva de la matemática escolar (ver capítulo II p. 26)

Tabla 51. Calificación al argumento 1.6 del Participante 10

1.6	3	Se parece bastante a la inducción matemática. Pero también se está generalizando a partir de casos particulares. Un tres también.

Asigna un calificativo 3: Muy cercano al 4, similar a su respuesta anterior, no lo califica como demostración matemática de acuerdo a su perspectiva mostrada en la primera parte de la entrevista. Este argumento califica como genérico, es decir si es una demostración desde la perspectiva de la matemática escolar (ver capítulo II p. 26).

Tabla 52. Calificación al argumento 2.1 del Participante 10

Problema 2		
2.1	2	Lo calificaría con un 2. ***¿Por qué no 1 que tiene?***

		Yo veo que acá es una prueba más que una demostración. Al recortar estamos probando que al unir los tres ángulos suman 180º, pero una demostración creo que tendría un poquito más. Pasos más elaborados para sustentar

Asigna un calificativo 2: No es compatible con su perspectiva. Este argumento es un caso particular, el docente lo reconoce cuando afirma “*Al recortar estamos probando*”, sin embargo el docente le asigna un puntaje que contradice su perspectiva mostrada en la primera parte de la entrevista.

Tabla 53. Calificación al argumento 2.2 del Participante 10

2.2	3	le pondría un 3 está también probando nada más que la suma de los ángulos internos es 180

Asigna calificativo 3: No muestra total compatibilidad con su perspectiva mostrada. El docente manifiesta que solo es un caso particular. Pensamos que de acuerdo al calificativo otorgado, le falta muy poco para reconocerla como demostración, es decir, acepta argumentos expresados en lenguaje verbal como argumentos demostrativos.

Tabla 54. Calificación al argumento 2.3 del Participante 10

2.3	4	Si es una demostración. ***¿Eso califica con un con un…?*** Cuatro. Porque ya se está basando en otros teoremas imagino que enseñados anteriormente ***Claro si ahí hay que suponer que todo lo que está empleando el alumno ya lo ha visto, lo ha demostrado y lo conoce, se está tomando como cierto*** Ya, Está argumentando otras proporciones que ya son verdaderas. Ya entonces es cuatro.

Asigna calificativo 4: Es compatible con su perspectiva. El argumento califica como demostración y el docente lo acepta. Está aceptando argumentos que tengan parte gráfica y verbal como demostración. Además este argumento es el elegido de entre los presentados para el problema y también es el seleccionado como el más convincente.

Tabla 55. Calificación al argumento 2.4 del Participante 10

2.4	3	Le daría un tres. También le das un tres creo que está organizando una prueba

Asigna calificativo 3: No es totalmente compatible con su perspectiva mostrada en la primera parte de la entrevista. El docente reconoce procesos de demostración pero no le otorga el calificativo esperado para una demostración matemática. Entendemos que es por la forma verbal en que esta expresado el argumento.

Tabla 56. Calificación al argumento 2.5 del Participante 10

2.5	3	***¿Qué calificación le pones ahí?*** 3 también porque es prueba nada más, ***¿Qué le falta para que sea 4?*** Yo creo que es una prueba, con un caso particular ***¿Para ti que es una prueba y que la diferencia de una demostración?*** Para mí una prueba es con casos particulares tratar de demostrar que se cumple el teorema.

Asigna calificativo 3: No es totalmente compatible con su perspectiva. En este caso, igualmente como en el caso del argumento 2.4, Pensamos que el docente reconoce procesos demostrativos en el argumento. No lo califica totalmente como demostración porque aún no reconoce argumentos genéricos como demostración matemática.

Tabla 57. Calificación al argumento 3.1 del Participante 10

Problema 3		
3.1	1	Le pongo uno porque está sumando para el mismo número, para para los mismos números pares.

Asigna Calificativo 1: Compatible con su perspectiva mostrada en la primera parte de la entrevista. El participante reconoce que el argumento no cumple con las condiciones del problema.

Tabla 58. Calificación al argumento 3.2 del Participante 10

3.2	4	Si yo pienso que si es una demostración. ***le pone 4*** Porque está sumando dos números pares si todos tienen factor 2 cuando lo suma al final también tienen el factor 2. Dado que todo número par tiene como un factor 2. Ya puedo decir de manera general la suma de dos números pares siempre me va a dar un número par ***Y Qué diferencia los dos argumentos? (el 3.1 y el 3.2)*** La diferencia es acá estoy tomando solamente un número y acá estoy tomando dos números diferentes

Asigna Calificativo 4: Compatible con su perspectiva mostrada en la primera parte de la entrevista. El participante reconoce que el argumento demuestra de manera general el problema presentado y lo distingue del anterior. Además, este argumento es el que fue elegido por el docente de entre los presentados para el problema y también el que según el entrevistado es el más convincente.

Tabla 59. Calificación al argumento 3.3 del Participante 10

3.3	1	No creo que también sea una demostración, un 1. Porque más bien yo estaría acá… estoy comprobando que si yo sumo dos números pares, su resultado va a ser otro número par pero no estoy haciendo una generalización todavía, no está diciendo para todo número n para todo número natural par. ***¿No se está tomando para todos los números pares?*** Al tomar un número y otro y sumar estaría como tomando casos particulares

Asigna Calificativo 1: No es compatible con su perspectiva mostrada en la primera parte de la entrevista. El participante no reconoce que el argumento cumple con las condiciones del problema y que lo hace de manera general, lo toma como casos particulares, por tal razón le otorga un calificativo como si no fuera una demostración matemática.

Tabla 60. Calificación al argumento 3.4 del Participante 10

3.4	1	También pienso que aún no es una demostración, como el caso anterior un caso particular. Un uno. ***Desde tu punto de vista este es parecido a la de acá entonces, o sea en como tú las valoras, para… (señala el argumento 3.3 y 3.4)*** Si porque prácticamente aquí estoy sumando un número que podría terminar en 4 o que termine en 6, y el resultado va a terminar en 0

Asigna Calificativo 1: Es compatible con su perspectiva mostrada en la primera parte de la entrevista. El participante reconoce que el argumento está mostrando casos particulares, por tal razón le otorga el calificativo previsto para este tipo de argumento que no califica como una demostración matemática.

Tabla 61. Calificación al argumento 3.5 del Participante 10

3.5	4	Sí es demostración es igual que el argumento anterior solamente que esta dicho de otra forma (explica) ***¿Qué calificativo le pondrías?*** Un 4

Asigna calificativo 4: Compatible con su perspectiva mostrada en la primera parte de la entrevista. Interpretamos que el docente, de acuerdo a su noción de demostración matemática, si acepta argumentos expresados de forma verbal. Por consiguiente le asigna el calificativo previsto para una demostración matemática.

Tabla 62. Calificación al argumento 3.6 del Participante 10

3.6	3	Aquí se ha agregado el grafico. Pienso también que como una demostración, no podría decirlo. ***¿Has leído todo?*** Puede ser que también en lo que está escrito diga algo. Sí. si Por tomar un caso nada más pienso que no… no estaría en demostración, pero si tiene mucho, porque se está diciendo… de que si juntamos dos números pares, también su resultado puede ser agrupado en parejas y lo de parejas implica que tendríamos el factor dos … Pero por ser un caso particular le pondría un tres. ***El tres está cerca al 4 y el 4 es que si es demostración o sea casi casi tú le consideras que si es una demostración*** Pero de repente haciendo una generalización, diciendo ya para cualquier número… ***Pero acá dice así se podrá hacer esto siempre que tome dos números pares, o falta algo más.*** Pero siempre y cuando… digamos para todos los números naturales, para todos se cumple… ***Es lo que allí dice, ¿Por qué 3? el profesor debe estar preparado para argumentar también porqué le puso 3 y no 4*** He puesto 3, porque solamente está tomando un 10 y un 16 está tomando dos casos y estoy representando un 10 y estoy representando un 16, entonces para mi este es un caso particular ***Entonces ¿porque no uno?*** Por lo que describe ***¿Qué está describiendo?*** Describe que toma… al menos representa un número de esa forma y cuando vamos a sumar esos números, también vamos a tenerlos en parejas y eso implica que el alumno está notando que hay la presencia del factor 2. ***Ya*** Por esa restricción yo le pondría un 3

Asigna Calificativo 3: No es totalmente compatible con su perspectiva mostrada en la primera parte de la entrevista. Pensamos que el participante no reconoce que el argumento cumple con las condiciones del problema, y que lo hace de manera general, tal vez sea por estar representado de forma gráfica, lo toma como casos particulares, por tal razón le otorga un calificativo muy cercano pero no el previsto para una demostración matemática.

Tabla 63. Calificación al argumento 3.7 del Participante 10

3.7	4	El argumento es con la noción de división como reparticiones equitativas, máximas y naturales. La noción del número par es que está dividido en dos partes iguales. Si el número puede ser expresado como suma de dos números iguales y el otro también por lo tanto al sumarle también va a tener la presencia de un factor 2. ***¿Cuánto le pondrías?*** Cuatro ***¿Importa que la demostración tenga la forma clásica, la forma algorítmica de Euclides? Riguroso. O que la división se trate de manera diferente, como reparticiones con un proceso contextualizado, ¿importa para ti para como sea una demostración?*** Tendríamos que tener en cuenta el contexto, y como estamos hablando de acá de un contexto de división como repartición máxima, equitativa y natural creo que tendría que tener en cuenta también el contexto, porque previamente a mi estudiante tendría que haberle enseñado eso también y yo veo que acá además está haciendo una generalización porque yo veo que acá está trabajando para un “n” y un “m” como factores de los números A y B ***¿O sea que para ti más importante que el contexto, es esto que pone simbólicamente, que pone los símbolos n y m?*** las dos cosas

Asigna calificativo 4: Es compatible con su noción de demostración matemática que pensamos tiene, similar a la de la perspectiva de matemática escolar (ver capítulo II p. 26). El participante reconoce que hay generalidad en la demostración, sin importar su forma de expresarlo que es dentro de un contexto de la división. Dejando entrever que también es importante la forma simbólica para expresar argumentos demostrativos.

Tabla 64. Calificación al argumento 4.1 del Participante 10

Problema 4		
4.1	3	***En este último problema, este alumno maneja el concepto de división como repartición y estos alumnos aprenden que un número es divisible por otro si la división es exacta o sea sobra cero objetos al finalizar mi repartición equitativa y máxima.*** Le pongo un 3 falta generalizar para todo n. ***Entonces este niño asocia los números con que hay infinitos, hay todos estos, él lo asocia de esa manera.*** ¿Él asocia este símbolo entonces como si yo dijera cualquier número natural? ***Sí, pero ¿Qué pasa si sólo te muestran la parte verbal, es demostración?*** Si solo hubiese dado esto. Como una demostración no lo calificaría. ***No, ¿porque no?*** Porque da una respuesta a una pregunta, no es una demostración (no se entiende)

Asigna calificativo 3: No es compatible con su perspectiva mostrada en sus respuestas a la primera parte de la entrevista. Notamos que el participante tiene en su noción de demostración la idea o creencia que siempre debe escribirse símbolos, a pesar de reconocer la forma verbal de expresar un argumento, Por tal razón no le otorga el calificativo esperado sino uno muy cercano que en este caso es el tres.

Finalmente esta segunda etapa, en la que hemos mostrado las respuestas textuales del participante Nº 10, a los argumentos presentados, Hallamos que el docente (por lo que manifiesta en la "práctica") tiene una visión no definida de la demostración matemática (ver capítulo II, p. 22). Interpretamos lo dicho anteriormente, por las justificaciones que otorga el docente a cada argumento presentado y detallado en el análisis de sus respuestas. Desciframos que el docente reconoce argumentos expresados de diferentes formas pero no le da el calificativo como demostración matemática, que según su perspectiva mostrada en la primera etapa, si son aceptadas como demostraciones matemáticas.

En suma la creencia que posee el participante de las demostraciones matemáticas es que debe tener un carácter general, expresado simbólicamente o verbalmente de acuerdo al contexto, porque acepta en algunos casos, las demostraciones con argumentos genéricos, aunque no le otorga el total crédito de ser una demostración matemática. Reconoce los roles de explicación y transferencia de la demostración matemática. Además de tener la visión de que las demostraciones matemáticas son favorecidas cuando se trabajan en el campo de la geometría.

Los docentes, le dieron calificaciones de 3 a argumentos que no del todo que cumplen con sus propias perspectivas de la demostración, pero que no obstante si son demostraciones en la perspectiva de la matemática escolar.

Los docentes consideran a la Geometría como el campo que favorece el trabajo con demostraciones matemáticas, esto también indica la coherencia con la creencia de trabajar las demostraciones con estudiantes de los últimos grados de la secundaria.

CONSIDERACIONES FINALES

En base a los antecedentes presentados y la justificación de la investigación, las creencias y conocimientos sobre demostraciones matemáticas son importantes para el trabajo de los docentes con sus estudiantes, pues los docentes están muy influenciados por ellas. En la presente investigación se observa que hay coincidencia con lo encontrado en Furinguetti y Morselli (2009) Cuando los docentes creen que la geometría es el dominio ideal para la enseñanza de la demostración, pero no coincide en que sea el único campo de las matemáticas que favorece el trabajo con demostraciones matemáticas. En Knuth (2002), encontramos coincidencias en cuanto a que los maestros especifican que las demostraciones matemáticas juegan algunos roles, como, por ejemplo, para explicar que un enunciado es verdadero y para sistematizar las matemáticas, pero además hemos encontrado que los docentes reconocen el rol de transferencia de la demostración matemática. Es la razón por el interés en el desarrollo de la investigación.

En los documentos oficiales se debe considerar con mayor énfasis la capacidad de "Razonamiento y demostración" y debe ser transversal para todos los contenidos y todos los grados.

Con respecto a nuestros objetivos los docentes le dan a la demostración matemática, significados compatibles con las de nuestro marco teórico, pero sus creencias hacen que su perspectiva no este determinada, teóricamente expresan tener un significado diferente al que reconocen en la práctica; es decir Hay diferencias entre el convencimiento personal y psicológico (creencia) y el estar convencido matemáticamente. Los docentes identifican algunos roles que las demostraciones matemáticas cumplen, no la totalidad de roles considerados por los investigadores. Todo lo anteriormente manifestado nos hace pensar que el trabajo con los estudiantes en clases de matemática no aprovecharían los beneficios de trabajar con las demostraciones matemáticas, como: el descubrimiento de nuevos conocimientos, los modos de razonamiento, expresarse siguiendo una secuencia lógica, etc.

Por lo tanto, si los profesores fortalecieran las creencias y conocimientos del rol de las demostraciones matemáticas en las aulas, a continuación, su trabajo con los estudiantes mejoraría.

De tal modo que las investigaciones futuras tendrían que explorar aún más las creencias y conocimientos de la demostración matemática que los maestros deben tener ya que con ello ayudaría a sus estudiantes a aprender a razonar matemáticamente.

REFERENCIAS

Cabassud, R. Conner, A. Iscimen, F. Furinghetti, F. Jahnke, H & Morselli, F. (1012) Conceptions of proof in research and teaching (chapter 7) *Proof and Proving in Mathematics Education*. The 19th Interamerican Conference on Mathematics Education - ICME Study.

Callejo, M. & Vila, A. (2003) Origen y Formación de Creencias Sobre la Resolución de Problemas. Estudio de un Grupo de Alumnos que Comienzan la Educación Secundaria. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. 2, pp. 173-194. Recuperado de: http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/mcallejo+vila.pdf

Crespo, C. y Ponteville, C. (2005) Las funciones de la demostración en el aula de Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 18, *pp. 307-312*. Recuperado de: http://www.pucrs.br/famat/viali/orientacao/leituras/artigos/ALME18.pdf

Creswell, J (2003). *Research Dedign Qualitative, Quantitative. and Mixed Methods Approaches*. Second Edition. University of Nebraska, Lincoln. Recuperado de: http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic1334586.files/2003_

Creswell, J. (2010). *Projeto de Pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre: Artmed. Recuperado de: Creswell_A%20Framework%20for%20Design.pdf.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof with sketchpad. *Pythagoras*, 24, pp. 17-24. Recuperado de http://goo.gl/Cz6vCh

Diccionario de la Real Academia Española (2014). Recuperado de: http://www.rae.es/diccionario-de-la-lengua-espanola/la-23a-edicion-2014

Flores, A. (2005) ¿Cómo saben los alumnos que lo que aprenden en matemáticas es cierto? Un estudio exploratorio. *Educación Matemática*, 17, 3, pp. 5-24 Grupo Santillana México. Distrito Federal, México.

Frasier, B. (2010). *Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof*. (Tesis para obtener el grado de Doctor en Matemáticas y Ciencias de la Educación). Universidad de Massachusetts Lowell, Massachusetts, Estados Unidos de Norte América.

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Teacher's beliefs and the teaching of proof. *Proceedings of the ICMI Study 19th Conference: Proof and Proving in Mathematics Education.* 1, pp. 201 – 207.

Godino, J. & Recio, A. (2001) significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*. 19 (3), pp. 405-414. Recuperado de http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v19n3/02124521v19n3p405.pdf

Gonzales, F. (2005) . *Apuntes de Lógica Matemática. Razonamientos y demostraciones*. España: Universidad de Cádiz. Departamento de Matemática. [Versión de Google Libros]. Recuperado de http://www2.uca.es/matematicas/Docencia/ESI/1711051/Apuntes/Leccion3.pdf

Hanna G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, 21(1), pp. 6-13. Recuperado de: http://www.researchgate.net/publication/226635673

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44. pp. 5-23. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/226598348_Proof_Explanation_and_Exploration_An_Overview

Hanna, G., de Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education*. The 19th Interamerican Conference on Mathematics Education - ICME Study.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students’ proof schemes: Results from exploratory studies. In A, Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinski (Eds) *Research in collegiate mathematics education III* (Issues in mathematics Education. 7 pp. 234-282. Recuperado de: http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/Students'%20Proof%20Schemes.pdf

Hemmi, K., Lepik, M., & Viholainen, A. (2011). Upper Secondary School Teachers’ Views of Proof and Proving – an Explorative Cross-Cultural Study. Congress of European Research in Mathematics Education - *CERME 7*. Recuperado de: https://norbal.files.wordpress.com/2011/09/mavi16_hemmi_etal_final.pdf

Herbst, P., Miyakawa, T., & Chazan, D. (2010). Revisiting the Functions of Proof in Mathematics Classrooms: A view from a theory of instructional exchanges. *Deep Blue at the University of Michigan*. Recuperado de: http://hdl.handle.net/2027.42/78168

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México, (Ed.) Mc Graw-Hill/Interamericana, S.A. Recuperado de: http://www.academia.edu/6399195/Metodologia_de_la_investigacion_5ta_Edicion_Sampieri

Hersh, R (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24 (4) pp. 389-399.* Recuperado de*:* http://link.springer.com/article/10.1007/BF01273372#page-1

Knuth, E. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education* 33(5), pp. 379-405. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/pdf/4149959.pdf?acceptTC=true

Knuth, E. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education* 5, pp. 61–88. Kluwer Academic Publishers.

Martínez, M. (2006). Investigación Cualitativa (Síntesis conceptual). *Revista IIPSI facultad de psicología UNMSM*. 9 (1) – 2006 pp. 123 – 146.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso, estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión*, 20, pp. 165 – 193. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf

NCTM (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Ordoñez, C. (2014). *La construcción de la noción de división y divisibilidad de números naturales, mediada por justificaciones, en alumnos de tercer grado de nivel primario*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5653

Peláez, A., Rodríguez, J., Ramírez, S., Pérez, L., Vázquez, A., González, L. (2013). *La entrevista*. Recuperado de Ahttps://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/ Investigación EE/Presentaciones/Curso_10/Entrevista_trabajo.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2005), *Evaluación Nacional del rendimiento estudiantil. Lima: Autor Recuperado de:* http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/en2004/MatematicaS3_5.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2008). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Lima: Autor. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/normatividad/reglamentos/DisenoCurricularNacional.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2010). *Orientaciones para el Trabajo Pedagógico del Área de Matemática*. Lima: Autor. Recuperado de: http://ebr.minedu.gob.pe/des/pdfs/otpmatematica2010.pdf

Ponte, J. (2006). Estudos de Caso em Educação Matemática. *Boletim de Educação Matemática*. 19 (25), pp. 1 – 23. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221859007

Recio, A. (2002). La demostración en Matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino 190 (Eds.), *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 27 – 43. Universidad de Almería. Recuperado de: http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_1.pdf#page=201

Reid, D. (2011). Understanding proof and transforming teaching. *In Wiest, L., & Lamberg, T. (Eds.) Proceedings of the Thirty-third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* pp. 15-30. Reno NV: University of Nevada.

Reid, D., Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education*. Acadia University, Wolfville, Canada.

Stylianides, A. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321. Recuperado de: http://goo.gl/K9lZnn

Stylianides, G. (2009). Reasoning – and – Proving in School Mathematic Textbooks, *Mathematical Thinking and Learning*, 11 (4), pp. 258 – 288. DOI: 10.1080/10986060903253954

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students, ability for deductive reasoning. *Mathematical Thinking and Learning.* 10, pp. 103-133

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En Grouws, D.A. (ed.): *Handbook of research on Mathematics teaching and learning*. pp. 127-146. MacMillan. New York.

ANEXOS

Anexo 1: Entrevista Personal

PREGUNTAS
INFORMACION PERSONAL:
Esta entrevista es muy importante para nuestra investigación, por favor responda con sinceridad. Sus respuestas solo servirán para fines de la investigación y se mantendrán en absoluta reserva. Muchas gracias.
¿Cuál es su nombre?
¿Cuantos años de experiencia tienen en la enseñanza de la matemática?
¿Qué niveles educativos ha enseñado? ¿En qué nivel educativo enseña actualmente?
¿En qué Institución ha sido formado: Universidad, Instituto pedagógico (algún otro)?
¿Con que nivel académico cuenta?
¿Cuándo fue la última vez que ha recibido capacitación y en qué temas?
PREGUNTAS DE INVESTIGACION: (Desde su punto de vista, no el punto de vista de sus alumnos)
¿Alguna vez ha trabajado demostraciones matemáticas en su educación?
¿Qué es para Ud. una demostración matemática?
¿Qué caracteriza una demostración matemática?
Según su apreciación, ¿desde qué nivel es posible trabajar demostraciones en clases de matemáticas?
¿Qué campo de las matemáticas favorecen el trabajo con demostraciones en el aula? ¿Cuál? ¿Alguno? ¿Ninguno?

Desde su perspectiva, ¿Qué rol /función /papel juegan las demostraciones en las clases de matemáticas?
Ud. ¿Trabaja demostraciones en sus clases de matemáticas?
¿Qué resultados / propiedades ha demostrado con sus estudiantes por ejemplo? ¿Por qué esos y no otros? ¿Con qué propósito /fin?
Ud. ¿Cree que es importante enseñar demostraciones matemáticas en la escuela secundaria? ¿Por qué?
INSTRUMENTOS ESCRITOS: (Preguntas para cada problema y cada argumento) (siempre desde su punto de vista no el de sus alumnos)
¿Cómo calificaría usted del 1 al 4 el siguiente argumento? 1 significa que NO es una demostración, mientras que 4 significa que SI es una demostración. ¿Por qué? ¿Cuál fue el criterio que empleo para la calificación que asigno? Si coloca 1: ¿Por qué no es una demostración desde su punto de vista? Si coloca 2: ¿Por qué no considero el puntaje 1? ¿Por qué 2? Si coloca 3: ¿Por qué considera que no debe recibir el puntaje 4? Si coloca 4: ¿Por qué es una demostración?
PREGUNTA PARA CADA PROBLEMA (Después de haber visto todos los Argumentos)
Si usted tuviese que elegir solo una de estas demostraciones ¿cuál elegiría? ¿Por qué?
(PREGUNTA OPCIONAL, DESPUES DE HABER VISTO TODOS LOS ARGUMENTOS) ¿Cuál de los argumentos presentados le parece más convincente?

ARGUMENTOS

Anexo 2: Problema 1

Demostrar que la suma de los “$\boldsymbol{n}$” primeros enteros positivos es igual a:

$$\frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\mathbf{2}}$$

Anexo 3: Argumento 1.1

Para $n = 1$ es cierto, ya que $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Supongamos que esto es cierto para algún k arbitrario, esto es, $S(k) = \frac{k\,(k+1)}{2}$

Luego:

$$S(k+1) = S(k) + (k+1) = \frac{k\,(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Por lo tanto la afirmación es verdadera para $k+1$ en el caso que sea cierta para k.

Anexo 4: Argumento 1.2

Considera la suma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

Ahora escribo esta suma, y la "inversa", y sumamos:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ \underline{10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1} \\ 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 \end{array}$$

$$= 10 \times 11$$

Ya que la suma se hace dos veces, dividimos 10×11 por 2 para obtener la suma.

Anexo 5: Argumento 1.3

$$S(n) = 1 \ + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \ \ldots \ + \ n$$

$$S(n) \ = \ n \ + \ (n-1) \ + \ (n \ - \ 2) + \ \ldots \ + \ 1$$

Tomando la suma de estas dos filas

$$2\,S = \ (1 + \ n) + \ [\,2 + (n - \ 1)] + \ [\,3 + (n - \ 2)\,] + \cdots + (n+1)$$

$$2\ \mathrm{S} \ = \ (n + \ 1) \ + \ (n + \ 1) \ + \ (n \ + \ 1) + \ \ldots \ + \ (n \ + \ 1)$$

$$2\ \mathrm{S} \ = \ n(n \ + \ 1$$

Por lo tanto, $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Anexo 6: Argumento 1.4

n es o bien par o bien impar.

Primero, considero que n es impar, por ejemplo 7.

Entonces la suma que se tiene es: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$.

Observa que puedes reorganizar los sumandos en 3 parejas: $1 + 7$, $2 + 6$, $3 + 5$, todas las parejas suman 8, con el 4 en el medio que quedó fuera.

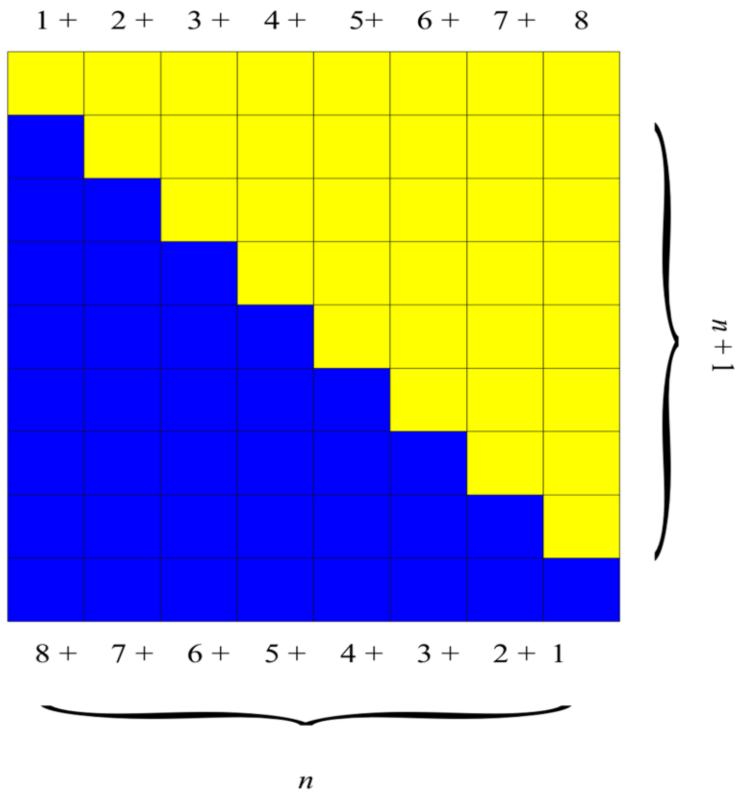
Así que la suma es $3 \times 8 + 4$, o en general $\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)(n+1) + \left(\frac{n+1}{2}\right)\right]$, que se simplifica como $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$.

Luego considero que n es par, por ejemplo 8.

De aquí que la suma que se tiene es: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$. Observa que aquí también puedes reorganizar los sumandos en 4 parejas: $1 + 8$, $2 + 7$, $3 + 6$, $4 + 5$, *y todas las parejas suman* 9. *Así que la suma es* 4×9, *o en general* $\left[\left(\frac{n}{2}\right)(n+1)\right]$, *que se simplifica como* $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$.

Anexo 7: Argumento 1.5

Si me pidiesen calcular la suma: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$, yo dibujaría una pirámide, y cada número para mí es un número de cuadraditos puestos uno sobre el otro, como la pirámide amarilla que he dibujado abajo.



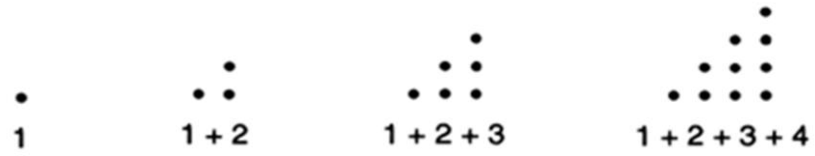
Dibujo otra pirámide igual, pero la pinto de azul y la coloco como en la figura, formando un rectángulo con mi pirámide amarilla.

En el rectángulo hay 8×9 cuadraditos, entonces en mi pirámide amarilla hay $\frac{8\times9}{2} = 36$ cuadraditos.

Así se puede hacer en todos los casos. Mi rectángulo tendría $n(n+1)$ cuadraditos, y mi pirámide tendría $\frac{n(n+1)}{2}$ cuadraditos.

Anexo 8: Argumento 1.6

Podemos representar la suma de los n primeros enteros positivos como números “triangulares”.

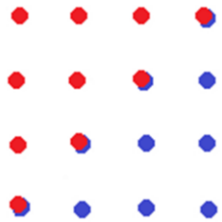


Si $\quad n = 1 \qquad n = 2 \qquad n = 3 \qquad n = 4$

Los puntos forman triángulos rectángulos e isósceles con el n-ésimo triángulo conteniendo:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n \quad \text{puntos.}$$

Al superponer un segundo triángulo rectángulo e isósceles del mismo tamaño de tal manera que las diagonales coincidan produce un cuadrado que contiene n^2 puntos, más n puntos adicionales, por las diagonales que se superponen. Para ilustrar esto, la figura de abajo representa el cuarto triángulo rectángulo e isósceles y otro triángulo del mismo tamaño superpuesto de tal manera que las diagonales coinciden. En este caso, se produce un cuadrado que contiene 4^2 puntos, más 4 puntos adicionales, debido a la superposición de las diagonales:



Por lo tanto, en el caso general (utilizando el n-ésimo triángulo), el número de puntos producidos por los dos triángulos superpuestos es:

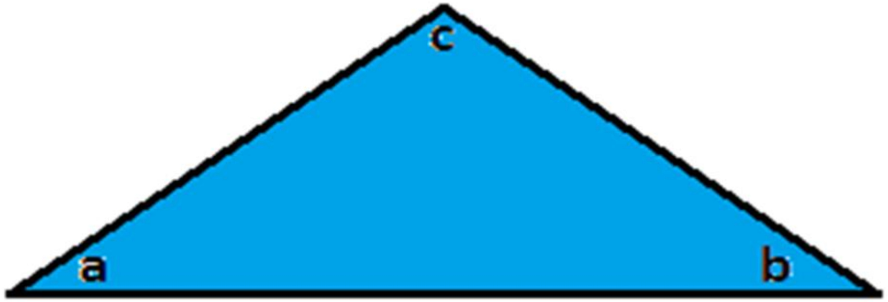
$$2\,S(n) = n^2 + n \text{ , por lo que } S(n) = \frac{(n^2 + n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

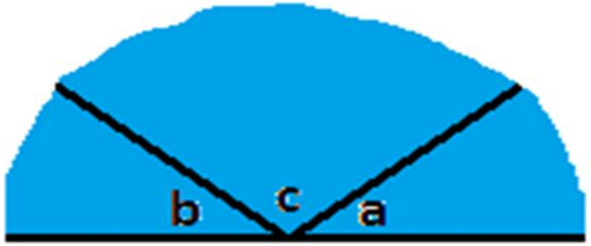
Anexo 9: Problema 2

Demostrar que la suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°

Anexo 10: Argumento 2.1

Corté los ángulos del triángulo obtuso y los puse juntos (como se muestra a continuación)

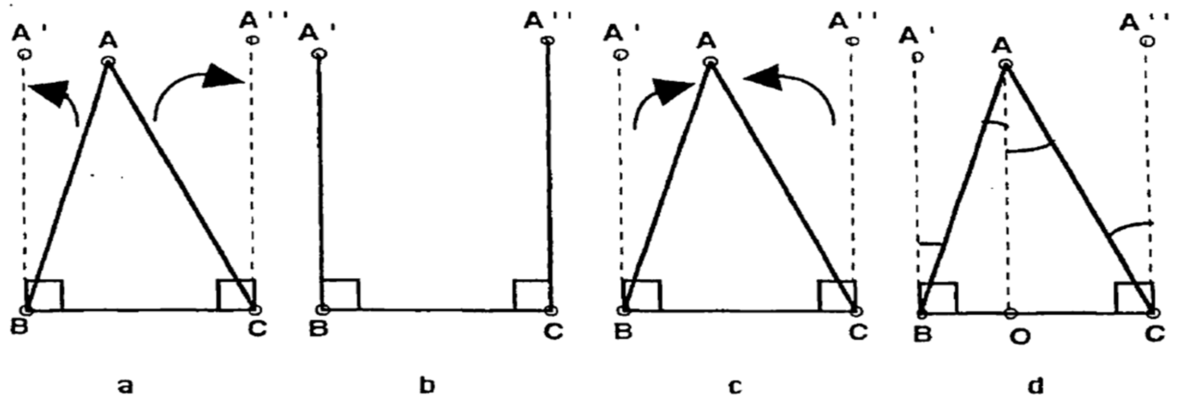




Los ángulos se unieron como una línea recta, que hace 180°. Hice también lo mismo con un triángulo agudo, así como con un triángulo rectángulo y sucedió lo mismo. Por lo tanto, la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

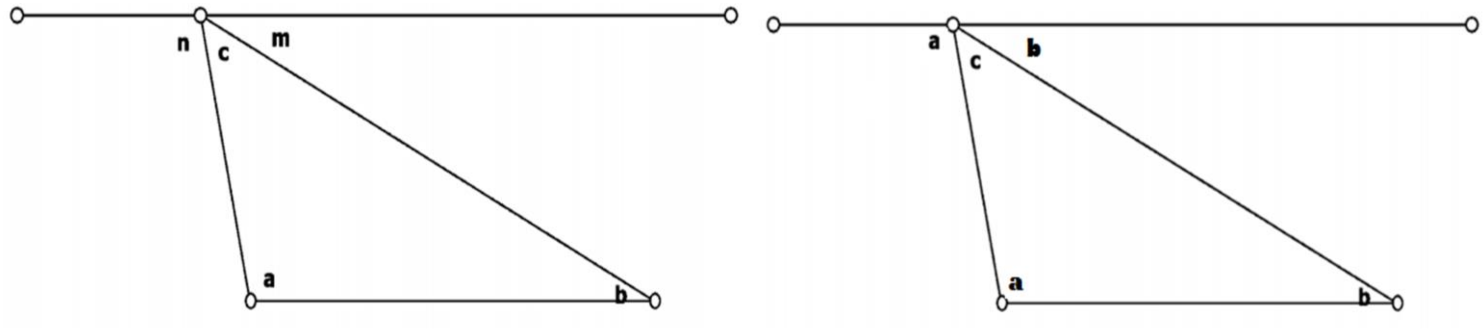
Anexo 11: Argumento 2.2

Imagina que rotas los lados AB y AC de un triángulo ABC en direcciones opuestas alrededor de los vértices B y C, respectivamente, hasta que los ángulos con el segmento BC sean 90°. Mira mis dibujos a y b. Esta acción transforma al triángulo ABC en la figura A'BCA'', donde A'B y A''C son perpendiculares al segmento BC. Para recrear el triángulo original, los segmentos A'B y A''C son inclinados el uno hacia el otro de tal manera que los puntos A' y A'' se unen de nuevo en el punto A. Mira mi dibujo c. Observa que cuando hice esto perdí dos pedazos de los ángulos B y C iguales a 90° (perdí los ángulos A'BA y A''CA) pero al mismo tiempo yo gané estos pedazos al crear el ángulo A. Esto se puede ver mejor si dibujamos AO perpendicular a BC: el ángulo A'BA es congruente a BAO, y el ángulo A''CA es congruente a OAC. Mira mi dibujo d. Por eso es que la suma de los ángulos del triángulo ABC es 180°.



Anexo 12: Argumento 2.3

Dibujé una línea paralela a la base del triángulo



Sé que $n = a$ por ser ángulos alternos entre dos líneas paralelas y son congruentes. Por la misma razón, también sé que $m = b$.

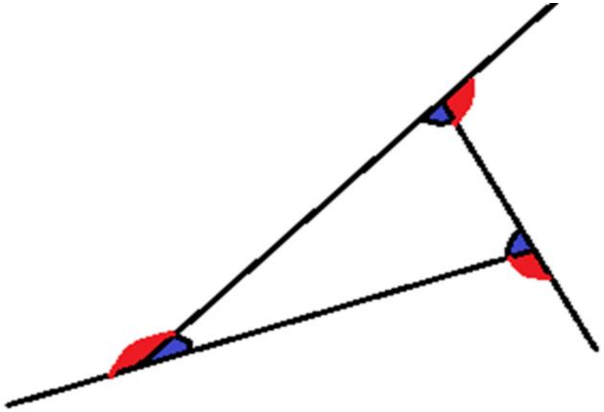
Dado que la medida de un ángulo llano es 180◦, sé que $n + c + m = 180°$. Sustituyendo a para n, y b para m, tenemos que $a + b + c = 180°$.

Por lo tanto, la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

Anexo 13: Argumento 2.4

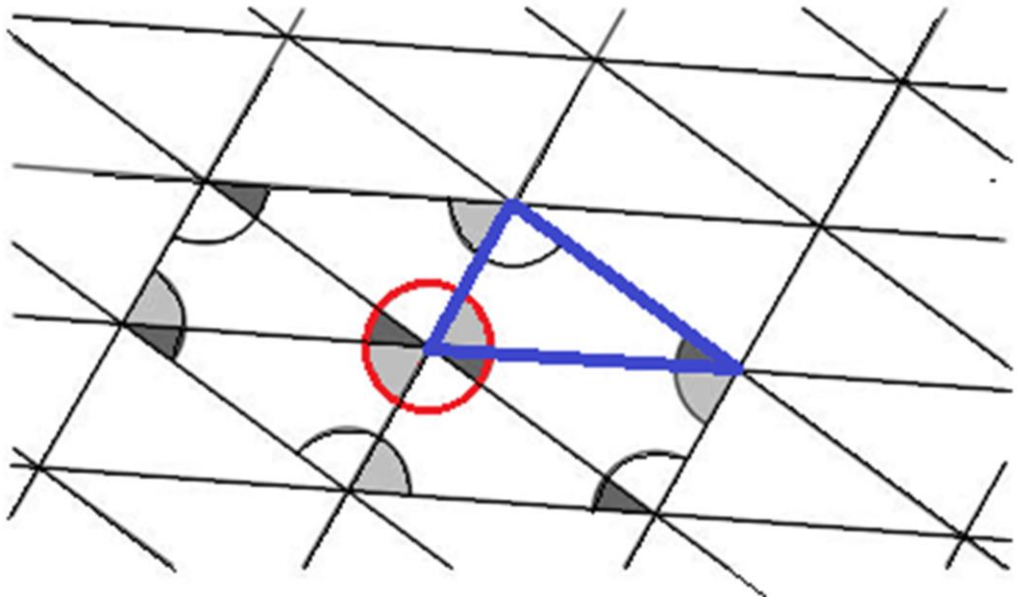
Si caminas todo el camino alrededor del borde de un triángulo, terminas donde y tal como comenzaste. Debes haber girado entonces un total de $360°$.

Puedes ver que cada ángulo exterior cuando se suma al ángulo interior debe dar $180°$, ya que hacen una línea recta. Esto hace un total de $540°$, y que $540° - 360° = 180°$



Anexo 14: Argumento 2.5

Dibujé un teselado de triángulos y marqué todos los ángulos iguales.



Sé que los ángulos alrededor de un punto suman 360°.

Anexo 15: Problema 3

La suma de dos números naturales pares es un número par

Anexo 16: Argumento 3.1

Si tenemos un número par, entonces tendrá la forma: $2a$, con a un número natural.

Y si lo sumo con otro número que también es par, tendré: $2a + 2a = 4a$, que también es un número par

Anexo 17: Argumento 3.2

Dados dos números pares A y B, sé que:

$A = 2a$, para algún natural a

$B = 2b$, para algún natural b.

Si sumo A y B, obtendré:

$$A + B = 2a + 2b = 2\,(a + b)$$

que es un número par también.

Anexo 18: Argumento 3.3

Los números pares terminan en 0, 2, 4, 6 u 8.

Cuando sumas cualquiera de estos números, la respuesta terminará también en 0, 2, 4, 6 u 8.

Anexo 19: Argumento 3.4

Sé que siempre será par porque cada vez que sumo dos números pares, el resultado me da un número par.

$$4 + 6 = 10$$

$$8 + 8 = 16$$

$$36 + 400 = 436$$

Así puedo seguir dando parejas de números pares, y seguiré obteniendo un número par como resultado.

Anexo 20: Argumento 3.5

Los números pares son números que pueden ser divididos (exactamente) por 2. Cuando sumas números con un factor común, 2 en este caso, la respuesta tendrá el mismo factor

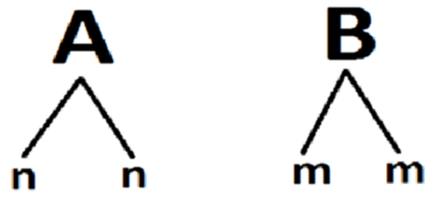
Anexo 21: Argumento 3.6

Su respuesta será aún un número par porque estamos utilizando números pares, que son números que se pueden agrupar en parejas. Por ejemplo, mira mi dibujo de los números 10 y 16:

A 10 lo pude agrupar en parejas (señalando los cubos amarillos), y este otro número (16) también lo pude agrupar en parejas (señalando los cubos de color negro), y cuando los junto, el resultado también se seguirá agrupando en parejas. Así se podrá hacer esto siempre que tome dos números pares.

Anexo 22: Argumento 3.7

(Este argumento está basado en la definición de división como reparticiones equitativas, máximas y naturales).



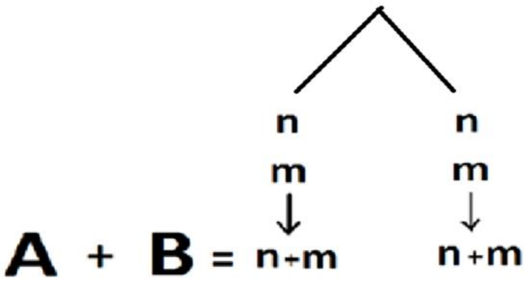
Al repartirlo entre 2

Sobra 0 Sobra 0

O sea a cada una de las 2 personas le doy la misma cantidad de objetos y cuando termino mi repartición me sobra nada. Y no he roto ninguno de mis objetos.

Entonces: **A+B = n + n + m + m**

Y reparto estos objetos entre 2 personas.



y sobra 0 O sea A+B es par tambien

Anexo 23: Problema 4

¿Es verdad que cualquier número es divisible por 1?

Anexo 24: Argumento 4.1

Sí, porque todo se lo darían al 1.

Por ejemplo: