PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ÁREAS DE CUADRILÁTEROS CONVEXOS: ANÁLISIS DE DOS TEXTOS OFICIALES PARA VI CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR HACIENDO USO DE LOS ELEMENTOS DEL EOS

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

que presenta

CECILIO CONDORI ALARCÓN

Dirigido por

CAROLINA RITA REAÑO PAREDES

San Miguel, 2015

A la memoria de mis padres,

a mi esposa, mis hijos Aldo y Anel y mi hermano Alfredo.

AGRADECIMIENTO

A Dios, el Ser Maravilloso, que todo lo ve, que todo lo resuelve. Gracias, Dios mío.

Al Ministerio de Educación del Perú, el que, por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominado “Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014”.

A la Pontificia Universidad Católica del Perú, y a su Escuela de Postgrado, por ser la mejor Universidad del Perú y por el nivel de exigencia que tiene con todos los estudiantes.

A mi asesora por ser una excelente persona, por su exigencia y por guiarme acertadamente en mi trabajo de investigación.

A los jurados:

A la Dra. Cecilia Gaita, una docente a carta cabal como persona y como profesional: toda mi admiración.

A la Mg. Verónica Neira por sus orientaciones para la culminación de mi trabajo.

A mis profesores de la maestría, por la oportunidad de conocer profesionales de alto nivel de formación, que me motivaron en el interés por la investigación de la matemática.

A mi esposa, el amor de mi vida, por su constante comunicación y por alentarme a concluir con esta etapa de formación de mi vida.

A mis hijos, los grandes tesoros que tengo: Aldo, por su importante apoyo, por haber vivido experiencias inolvidables en la ciudad de Lima; y a Anel que es la luz de mi vida, por transmitirme su confianza en mis estudios de postgrado.

A mis compañeros, colegas y amigos a través de ellos conocí el Perú, y pude formar un círculo de comunicación y estudios para el futuro. Gracias amigos.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo analizar el significado institucional pretendido en torno a áreas de cuadriláteros convexos en el VI ciclo de Educación Básica Regular del Perú. Para realizar este análisis, se consideró como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), el cual nos brinda las herramientas necesarias para describir los significados de referencia y elaborar el significado pretendido a través de sus elementos: lenguaje, situaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos; y se analizaron dos libros de texto usados para la preparación o desarrollo del curso de matemática. Luego, se elaboraron configuraciones epistémicas para diferentes campos de problemas de áreas de cuadriláteros atendiendo la propuesta de Freudenthal, los cuales han sido ejemplificados por Corberán y Marmolejo. La metodología empleada es de tipo cualitativo, descriptivo e interpretativo, la cual nos sirve de apoyo para analizar las tareas que se encuentran en los textos de educación secundaria. Los resultados del análisis de los textos matemáticos nos han permitido construir y fijar el significado de referencia para, luego, analizar el significado pretendido y, finalmente, otorgar una valoración de idoneidad epistémica a las tareas sobre áreas de cuadriláteros convexos contenidos en los textos de secundaria analizados.

Palabras claves: configuración epistémica, descomposición, reconfiguración, área.

ABSTRACT

The present research work has as objective to analyze the institutional meaning sought around areas of convex quadrilaterals in the VI cycle of Regular Basic Education of Peru. To carry out this analysis, it is considered as theoretical framework the Ontosemiotic Approach of the awareness and Mathematical Instruction (EOS), which offers us the necessary instruments to describe the reference meanings and to elaborate the meaning expected through their elements: language, situations, concepts, propositions, procedures and arguments. Two text books were analyzed, which were used for the preparation or development of mathematics course. Then epistemic configurations were elaborated for different fields of problems of areas of quadrilaterals assisting the proposal of Freudenthal, which have been exemplified by Corberán and Marmolejo. The used methodology is of qualitative, descriptive and interpretive type, which serves us as support to analyze the tasks that are in the texts of high school. After the results of analyzing the mathematical texts has allowed us to build and set the reference meaning, then to analyze the sought meaning and finally to give an assessment of epistemic suitability to the tasks about areas of convex quadrilaterals contents in the analyzed secondary texts.

Key words: epistemic configuration, epistemic suitability, area, decomposition.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Facetas y niveles de análisis didáctico 25

Figura 2. Tipos de significados institucionales 27

Figura 3. Configuración de objetos primarios 29

Figura 4. Componentes de la Idoneidad Didáctica 32

Figura 5. Rhin Mathematical Papirus. Nº 52 33

Figura 6. Área de rectángulo 36

Figura 7. Área de un cuadrado 36

Figura 8. Área de un paralelogramo 37

Figura 9. Área de un trapecio 37

Figura 10. Área de un rombo 37

Figura 11. Región de 5 lados 38

Figura 12. Área de región cuadrangular 39

Figura 13. Demostración de región cuadrangular 40

Figura 14. Demostración área de paralelogramo 41

Figura 15. Demostración de área de un rombo 41

Figura 16. Demostración área de trapecio 42

Figura 17. Cuadrado dividido en partes 54

Figura 18. División en unidades cuadradas 55

Figura 19. Repartir cuadrado en unidades 55

Figura 20. Por puntos medios se genera un área 56

Figura 21. Descomposición del Tangram 56

Figura 22. Descomposición de la superficie 57

Figura 23. Descomposición de un cuadrado 57

Figura 24. Área por coordenadas 58

Figura 25. Recubrir con baldosas el área ... 59
Figura 26. Cuadriculación para medida exacta ... 59
Figura 27. Transformación de deshacer y recomponer ... 60
Figura 28. Transformación de medidas ... 60
Figura 29. Equivalencia de triángulos ... 62
Figura 30. Reconfiguración simple ... 63
Figura 31. Configuración simple ... 63
Figura 32. Transformación por arrastre ... 63
Figura 33. Cuadratura de figura no poligonal ... 64
Figura 34. Superposición el octágono en un cuadrado ... 64
Figura 35. Refraccionamiento rectangular ... 65
Figura 36. Plano cuadriculado ... 74

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Competencias por ciclos de secundaria 19

Tabla 2. Resultados a nivel nacional de secundaria 22

Tabla 3. Capacidades y conocimientos de geometría 1° grado 43

Tabla 4. Capacidades y conocimientos de geometría 2° grado 43

Tabla 5. Competencias y capacidades del área matemática 44

Tabla 6. Competencia del organizador Geometría por ciclos 45

Tabla 7. Procedimientos y estrategias por objetivos específicos 50

Tabla 8: Los fenómenos como medio de organización 53

Tabla 9. Formulario de áreas de cuadriláteros convexos 61

Tabla 10. Clasificación de tareas por Marmolejo 62

Tabla 11. Relaciones de ejemplificación de procedimientos 65

Tabla 12. Descripción de los textos para la construcción del significado 65

Tabla 13. Configuración epistémica de campo de problemas por demostración de referencia 67

Tabla 14. Configuración epistémica de campo de problemas por repartición equitativa de referencia 68

Tabla 15. Configuración epistémica de campo de problemas por comparación y reproducción de referencia 70

Tabla 16. Configuración epistémica de campo de problemas por medida de referencia 72

Tabla 17. Configuración epistémica de campo de problemas por método directo de referencia 75

Tabla 18. Configuración epistémica de significado de referencia 77

Tabla 19. Configuración epistémica de campo de problemas por repartición equitativamente de 1º año de secundaria 82

Tabla 20. Configuración epistémica de campo de problemas por comparación y reproducción de 1º año de secundaria 82

Tabla 21. Configuración epistémica de campo de problemas por medida de 1º año de secundaria 84

Tabla 22. Configuración epistémica de problemas de contexto de 1º año secundaria 86

Tabla 23. Configuración epistémica de campo de problemas por comparación y reproducción de 2º año de secundaria 87

Tabla 24. Configuración epistémica de campo de problemas por medida de 2º año secundaria 88

Tabla 25. Configuración epistémica de problema de contexto de 2º año secundaria 90

Tabla 26. Análisis del significado pretendido 91

Tabla 27. Indicadores de idoneidad epistémica para 1º secundaria 93

Tabla 28. Indicadores de idoneidad epistémica para 2º secundaria 94

INDICE

CAPÍTULO I LA PROBLEMÁTICA 14

1.1. Antecedentes 14

1.2. Justificación 18

1.3. Problema de Investigación 21

1.4. Objetivos de investigación 23

CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO 24

2.1. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) 24

2.2. Análisis didáctico desde el punto de vista del EOS 24

2.3. El significado institucional de los objetos matemáticos en el diseño curricular y en la planeación de la enseñanza 26

2.4. Tipos de significados institucionales 26

2.5. Significado institucional de referencia 27

2.6. Significado institucional pretendido 28

2.7. El significado institucional de áreas de cuadriláteros a estudiantes de Educación Básica Regular. 28

2.8. Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas 28

2.9. Configuración epistémica como herramienta para el análisis de textos 30

3.2. Unidad de medida 34

3.3. Estudio concepto de área 35

3.4. Estudio del objeto de áreas de cuadriláteros desde el punto de vista didáctico 42

CAPITULO IV METODOLOGÍA EMPLEADA EN LA INVESTIGACIÓN 47

4.1. Metodología y procedimiento 47

4.2. Aplicación de la Metodología seleccionada a la investigación. 50

CAPITULO V SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA 52

5.1. Aproximaciones didácticas sobre áreas de cuadriláteros. 54

5.2 Análisis de los libros de texto seleccionados. 65

5.2.1. Descripción detallada de los elementos de significado para cada una de las situaciones problemas identificadas en los textos....................66

5.3. Descripción del significado institucional de Referencia de áreas de cuadriláteros convexos para VI ciclo de Educación Básica Regular....................76

CAPITULO VI SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDO....................80

6.1. Descripción de los libros de texto en estudio de 1º y 2º de secundaria....................80

6.1.1. Descripción de los elementos de significado encontrados en el libro de texto oficial de 1º de secundaria....................81

6.1.2. Descripción de los elementos de significado encontrados en el libro de texto oficial de 2º de secundaria....................87

6.2. Análisis de significado institucional pretendido....................90

6.3. Indicadores de idoneidad epistémica de dos libros de textos del sexto ciclo de Educación Básica Regular sobre áreas de cuadriláteros convexos....................92

6.4. Análisis comparativo de la idoneidad didáctica de los campos de problemas de áreas de cuadriláteros convexos – dimensión epistémica....................95

CONCLUSIONES....................98

RECOMENDACIONES....................101

REFERENCIAS....................102

INTRODUCCIÓN

El estudio del objeto matemático de áreas de cuadriláteros convexos es el principio para comprender el desarrollo de áreas de superficies planas y resulta vital para comprender los diversos contenidos para las especialidades de Ingeniería y ciencias

En Perú (2009) señala que las tareas de matemática elaboradas o desarrolladas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en el nivel de educación secundaria, observamos con frecuencia que se enfatizan los ejercicios algorítmicos y se abandonan la capacidad de razonamiento y demostración.

Un análisis de los resultados de las investigaciones realizadas con relación al dominio de los conceptos matemáticos y a la aplicación de estos aprendizajes en el nivel secundario nos permite apreciar cómo, lamentablemente, los índices de eficacia y dominio alcanzados por los estudiantes peruanos son muy bajos en relación a los niveles esperados, a pesar de los esfuerzos del Ministerio de Educación por capacitar permanentemente a los docentes de la especialidad de Matemática. Por ello, se realiza el presente trabajo de investigación: con el fin de analizar los significados institucionales de áreas de cuadriláteros convexos en los libros de texto de las instituciones públicas del Perú. Para ello, se utilizarán herramientas del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.

A continuación, presentamos brevemente la organización de esta investigación, la cual está estructurada en 6 capítulos.

En el capítulo I, damos a conocer los antecedentes de diversas investigaciones acerca del área de cuadriláteros, y el análisis de libros de texto que tratan esta temática; además de su problemática. Este capítulo contiene tanto la justificación del problema, su delimitación y su planteamiento así como el objetivo general y objetivos específicos de la investigación.

En el capítulo II, explicamos el marco teórico sobre el cual se fundamenta nuestra investigación: el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), debido a que ofrece herramientas concretas en el campo de investigación en didáctica de la matemática. Dicho enfoque nos presenta una configuración epistémica para describir los significados institucionales.

En el capítulo III, presentamos un esquema general para investigaciones de corte cualitativo como metodología de investigación, el cual describe los pasos que se siguieron en el desarrollo del presente estudio. Además, se presenta una tabla con las estrategias y procedimientos para lograr cada uno de los objetivos específicos planteados, los que contribuirán a lograr el objetivo general.

En el capítulo IV, se presenta el estudio del objeto matemático de áreas de cuadriláteros desde su historia y la descripción de este complejo concepto desde el punto de vista matemático y didáctico.

En el capítulo V, se describe el significado institucional de referencia a través del análisis de dos libros de texto de matemática recomendados en la parte bibliográfica del texto de secundaria que se analizará. Posteriormente, se realizan las configuraciones epistémicas describiéndolas con los elementos primarios de significado: lenguaje, situaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos analizados. Seguidamente, se describe el significado institucional de referencia con el apoyo de los textos matemáticos y de las investigaciones sobre áreas de cuadriláteros convexos.

En el capítulo VI, se describe el significado institucional pretendido. Para lograrlo, se muestra el análisis de libros de texto de sexto ciclo de la EBR, que corresponde a 1º y 2º año de secundaria, usados por los estudiantes y docentes de las instituciones públicas de Perú. Además, se identifican los diversos elementos de significado y, finalmente, se valora con idoneidad epistémica las tareas contenidas en los libros de texto del sexto ciclo de EBR.

Asimismo se establecen las conclusiones, considerando los objetivos de investigación planteados; se resumen las relaciones que se observan entre los significados institucionales de referencia y pretendido; y se brindan recomendaciones para la enseñanza y aprendizaje del áreas de cuadriláteros convexos.

CAPÍTULO I LA PROBLEMÁTICA

En este capítulo, presentamos los antecedentes que nos han servido como punto de partida para la presente investigación. Además, presentamos las razones que justifican nuestro estudio, planteamos el problema de investigación y, finalmente, enunciamos los objetivos (generales y específicos) que guían nuestro trabajo.

1.1. Antecedentes

Los antecedentes de esta investigación han sido organizados considerando los siguientes criterios: investigaciones relacionadas con el estudio de la geometría y el cálculo de las medidas de áreas de cuadriláteros e investigaciones relacionadas con el análisis de libros de texto.

Investigaciones relacionadas con el estudio de la geometría y de áreas de figuras planas.

Freudenthal (1983) considera que existen diversos enfoques relacionados con la construcción del objeto mental *área* y su diferencia con el concepto matemático; por ello, refiriéndose a la riqueza fenomenológica de este objeto mental, propone conceptos como *reparto justo* (aprovechando regularidades, estimando, midiendo); *comparando y reproduciendo* (otra forma) por inclusión; transformación de deshacer y recomponer; estimación; medición; medio de transformaciones; *midiendo* por agotamiento, por aproximaciones, por conversión; relaciones geométricas; fórmulas generales; transformaciones.(pp.380-381). Asimismo, critica que, en la enseñanza del área, esta se reduce a la expresión “longitud por anchura”. Ante esta situación, sugiere realizar comparaciones entre áreas, lo que es necesario para la construcción del concepto área como magnitud en objeto mental.

Por otro lado, Marmolejo y Gonzales (2015), en su investigación, señalan que existen estudios de fenómenos del tratamiento de concepto área de superficies planas, que definen como tratamiento y conceptualización del área; conservación del área y su papel en el tratamiento del concepto de área; medida de cantidades de área; y el área con la articulación con otros conceptos matemáticos. Estos investigadores mencionan a Freudenthal (1983), quien considera que el principal objetivo respecto del área debe considerar a la constitución del objeto mental sin tener la necesidad de llegar al propio concepto matemático, de esta manera considera su enseñanza centrada en la diferencia y descripción de los distintos fenómenos que lo organizan: reparto justo, comparaciones y mediciones. Asimismo, mencionan a Douady y Perrin (1989), quienes resaltan las bondades de la enseñanza del área a partir de la diferenciación de los elementos matemáticos que la caracterizan: superficie, cantidad de área y medida. De esta forma, proponen una enseñanza del área que resalte como una magnitud autónoma, desligándola de la superficie y del número.

Por otro lado, Gonzales (2011) señala que la enseñanza de la medición de áreas es un proceso largo y complejo, este investigador utiliza como marco teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Teoría Antropológica de lo Didáctico, y menciona a Freudenthal (1983), quien sostiene que los conceptos matemáticos son inventados como herramienta para organizar fenómenos del mundo físico, social y mental. Asimismo, durante la enseñanza, propone mostrar a los sujetos los fenómenos que las nociones matemáticas organizan, tan ampliamente como sea posible. Con respecto al concepto *área*, este autor sugiere tener en cuenta las siguientes aproximaciones:

a) Repartir equitativamente
b) Comparar y reproducir
c) Medir

Por otro lado, este investigador presenta el análisis de siete clases observadas en la enseñanza y aprendizaje de la medición de áreas de superficies planas, que fueron desarrolladas por un profesor en el segundo año de un colegio secundario. En este sentido concluye que las tareas, difíciles de enseñar; las decisiones del docente respecto de su práctica cotidiana; la elección del contenido y sus efectos deben estar basados en un estudio profundo del contenido desde su aspecto didáctico y matemático. Las magnitudes y la medida deberían permanecer en la enseñanza, adquirir una mayor presencia en todos los niveles de escolaridad y extenderse, incluso, hasta los estudios superiores, ya que la medida es un tema en el que confluyen aspectos geométricos, aritméticos, gráficos y de resolución de problemas, prácticas todas que se enfrentan, de alguna u otra manera, a lo largo de toda la vida.

En tanto, Cabañas (2011) describe un estudio concerniente a la noción de área que se basa en la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa. Toma diversas fuentes y resultados para presentar una visión alternativa a partir del tratamiento de la noción de área en el nivel de las actividades asociadas, que son detectadas en la educación básica y superior cuando tratan con la integral definida, mediante actividades como repartir, comparar y reproducir, medir y cuantificar; y conservar. Los resultados muestran que, cuando una modificación que no produce cambios en un área, esta se mantiene. Se puede afirmar, por tanto, que el valor de un área permanece sin cambios mientras su figura pueda ser transformada a otra cualitativamente nueva.

Asimismo, Corberán (1996) señala, en su investigación sobre los objetivos planteados, cómo realizar un análisis didáctico del concepto de superficies planas; cómo estudiar el grado de comprensión que poseen los alumnos de este concepto al finalizar primaria, secundaria y universidad; y cómo diseñar, experimentar y evaluar una unidad de enseñanza para secundaria con el objeto de corregir algunos de los errores detectados en los alumnos de este nivel y ampliar su formación sobre el tema de área. Los distintos aspectos del área que trata son: concepciones del área; unidad de medida; conservación; relación entre el área y el perímetro; relación entre el área y la forma de una superficie; bidimensionalidad; fórmulas para el cálculo; significado geométrico del teorema de Pitágoras; papel de la percepción visual en tareas de comparación de áreas; relación entre el área de un rombo, paralelogramo y trapecio con la de un rectángulo; procedimientos utilizados en la resolución de problemas; y conservación y/o variación del área y/o perímetro de una superficie cuando esta es sometida a determinadas transformaciones. El estudio teórico *área*, se apoya en teorías didácticas distintas como las de Freudenthal (1983), Héraud (1989) y Perrín-Glorian (1992). Existen diferencias en el estudio desarrollado por estos tres investigadores. En tanto que Freudenthal realiza un estudio teórico sin concretar la propuesta curricular, Héraud y Perrin-Glorian conducen sus investigaciones hacia la elaboración de una secuencia didáctica de enseñanza de área. El análisis didáctico realizado indica que, para el logro de un adecuado proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto *área*, es necesario abordar la enseñanza progresiva de las diferentes manifestaciones sobre el concepto de *área*.

Además, Marmolejo (2014) caracteriza las tareas de áreas de regiones poligonales, según los tipos de visualización que los libros de texto promueven en su desarrollo o comprensión. Es así que, el investigador que constituye una primera aproximación para detectar el papel que cumple la visualización en los textos. Asimismo en relación con el papel de las operaciones visuales en el tratamiento del área, su aplicación es la que induce la la manipulación del área de forma cualitativa, acción determinante para la comprensión del concepto, puesto que promueve su estudio como magnitud según señala Freudenthal (1983) citado en Marmolejo, que describe las tareas y propiedades del área donde intervienen las operaciones visuales; reconfiguración, configuración, anamorfosis, cuadratura, superposición y fraccionamiento de regiones poligonales. Nuestro interés consiste en examinar la manera cómo se analizan las diferentes categorías de análisis y comprensión que presenta con sus ejemplos sobre áreas de cuadriláteros.

Todas las investigaciones que presentamos como antecedentes son importantes para nuestro trabajo, ya que nos permitirán realizar el tratamiento del tema de área, sobre todo, la parte correspondiente con área de cuadriláteros convexos, utilizar la fenomenología propuesto por Freudenthal y acudir a la ejemplificación diseñada por Corberán y Marmolejo.

A continuación, presentamos investigaciones realizados sobre el análisis del libro de texto en su abordaje de diferentes objetos matemáticos.

Investigaciones relacionadas al análisis de libros de texto

Sayritupac (2013) muestra el análisis de los significados personales e institucionales de las medidas de tendencia central en un estudio con alumnos de primeros ciclos de las carreras de Humanidades de una universidad privada de Lima. Como marco teórico utiliza el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, el cual brinda las herramientas para el análisis del objeto matemático en estudio, a través de sus elementos de significado: lenguaje, situaciones, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos. El investigador analizó tres libros de texto usados para la preparación del curso. La metodología empleada fue de tipo cualitativo e interpretativo. Este trabajo resulta importante para nosotros, ya que nosotros consideraremos en nuestra investigación el análisis de los significados institucionales de referencia y pretendido, y la valoración de los libros de texto de secundaria de las instituciones educativas del país.

Por otro lado, Garcés (2013) expone un estudio cuyo objetivo es determinar el grado de idoneidad didáctica de las tareas de ecuaciones lineales de una, dos y tres incógnitas, propuestas en los libros de texto de matemáticas a los alumnos del nivel secundario de las instituciones educativas públicas del Perú, y a los alumnos de la carrera de Administración Bancaria del Instituto de Formación Bancaria-Lima, a fin de mejorar el desarrollo de las actividades matemáticas. Para lograrlo, se apoya en las herramientas de análisis que ofrece el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, tales como las prácticas matemáticas; los objetos matemáticos; y las configuraciones epistémicas y la idoneidad didáctica en su faceta epistémica, cognitiva a priori y ecológica, en la que utiliza como herramienta de análisis las tablas de indicadores de idoneidad didáctica. Asimismo, considera el uso de la metodología cualitativa de tipo descriptivo, y concluye en que las tareas matemáticas de ecuaciones lineales que se proponen a los alumnos de secundaria tienen una baja idoneidad epistémica, por lo que considera que existe una brecha entre la educación secundaria y la educación superior.

Cabe añadir que Rondero & Font (2015) realizan una reflexión teórica, en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, sobre una visión integrada de los diferentes tipos de articulación contemplados en trabajos de investigación previos. Estos investigadores utilizan como marco teórico este mismo enfoque y como contexto de reflexión, el objeto matemático Media Aritmética, cuyo objetivo de desarrollo de la configuración es mostrar parte del complejo de representaciones, definiciones, proposiciones, propiedades, etc. asociadas a un término, cuando este se utiliza en el contexto intramatemático de la Estadística. El formato para realizar una configuración cuenta con 6 filas. En la primera fila, se ha seleccionado una muestra representativa de problemas; en la segunda fila, una muestra de representaciones ostensivas; en la tercera, las diferentes definiciones; en la cuarta, las propiedades más relevantes, y en la quinta, los argumentos que se utilizan para resolver los problemas seleccionados en la primera fila. En la medida en que estos datos son significativos para nuestra investigación, los consideraremos como modelo para realizar las configuraciones epistémicas de los campos de problemas que se presentan.

Nuestro trabajo para el análisis de libros textos se basará en las investigaciones citadas anteriormente. De estas, tomaremos en cuenta la elaboración de significados institucionales, el grado de idoneidad y, por último, el modelo de elaboración de configuraciones epistémicas.

A continuación, presentamos la justificación de nuestra investigación.

1.2. Justificación

En Perú (2009), el Diseño Curricular Nacional (DCN), publicado por el Ministerio de Educación, sostiene que los estudiantes de educación secundaria deben lograr desarrollar el pensamiento matemático y el dominio progresivo de las capacidades básicas: razonamiento y demostración; comunicación matemática; y resolución de problemas. Para ello, se debe considerar el organizador de Geometría y medición, el cual, en cuanto al objeto matemático *áreas de cuadriláteros*, propone lo siguiente:

En cuanto al objeto matemático, áreas de cuadriláteros propone lo siguiente:

Tabla 1. Competencias por ciclos de secundaria

GRADO	COMPETENCIAS POR CICLOS	CAPACIDADES DE GRADO	CONOCIMIENTOS
1°	Resuelve problemas que relacionan figuras planas y sólidos, argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.	Calcula el perímetro y áreas de figuras poligonales.	Polígonos, áreas de figuras poligonales.
2°		Resuelve problemas que implican el cálculo sistemático o con fórmulas del perímetro o del área de figuras geométricas planas.	Perímetros y áreas de figuras geométricas planas.

Fuente: Perú (2009, p.318)

En Perú (2009), se indican los conocimientos ligados a las capacidades y competencias para los grados de 1º y 2º de educación secundaria, tal como se muestra en la Tabla 1.

Así también, Perú (2013) y El Instituto peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de Educación Básica (IPEBA) elaboraron los Mapas de Progreso del Aprendizaje, en los cuales se describe con precisión lo que los estudiantes deben saber, saber hacer y valorar, de manera graduada en cada ciclo de la educación básica, y ofrecen criterios claros y comunes para monitorear y evaluar dichos aprendizajes. Las Rutas del Aprendizaje son también parte del currículo oficial peruano y consisten en un conjunto de herramientas que proponen orientaciones pedagógicas y sugerencias didácticas para la enseñanza efectiva de los aprendizajes fundamentales, entre los que se encuentra el objeto de estudio de nuestra investigación.

En relación a los Mapas de Progreso, éstos son: Número y operaciones, Cambio y relaciones, Geometría y Estadística y probabilidad. En el caso del Mapa de Progreso de Geometría, éste considera el estudio de áreas, como una de las competencias para VII ciclo en la cual lo siguiente: “Estima y calcula áreas de superficies compuestas que incluyen formas circulares y no poligonales.” Es así que cuando el estudiante logra este nivel, realiza desempeños como identificar propiedades comunes entre formas poligonales de la misma familia y elabora un organizador visual respecto a la clasificación de cuadriláteros.

Asimismo uno de los documentos formales, que ha sido considerado como modelo de transformación de la enseñanza en los Estados Unidos y otros países, puesto que se utiliza como base para realizar adaptaciones curriculares en los diferentes países del mundo es Nationmal Council of Teachers of Mathematics NCTM (2000) propone los principios estándares para la matemática escolar, el cual dentro de su visión de estandarización de la enseñanza de las matemáticas, este documento aporta directrices para orientar la enseñanza de la geometría desde la enseñanza preescolar hasta la secundaria. Esta propuesta gira en torno a cuatro objetivos generales, para los cuales existen objetivos específicos en cada nivel. Los objetivos generales son analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones; desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas; localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación; aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas; utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.

Por lo expuesto anteriormente, consideramos que uno de los campos temáticos que ocupa un amplio espacio en los currículos de primaria y secundaria es el área de Geometría. Cabe agregar que, en los programas de secundaria, se encuentra de manera explícita en los programas para el primer y segundo año de educación secundaria; pues, actualmente, la Geometría es considerada una disciplina importante en los contenidos matemáticos de la enseñanza-aprendizaje. A partir del estudio de la Geometría, se pretende establecer una serie de destrezas cognitivas de carácter general, que pueden ser utilizadas en muchos casos particulares, y que contribuyen por sí mismas a desarrollar las capacidades del conocimiento del estudiante

Por otro lado, el análisis de libros de texto se realiza debido a la importancia que estos adquieren para los docentes de secundaria en la implementación del aula. Los libros de texto son uno de los materiales didácticos de mayor uso en la planificación, preparación y desarrollo de las clases de matemáticas (Gonzales y Sierra, 2004). Por consiguiente, nuestra investigación se justifica por la importancia que el libro de texto posee como recurso didáctico para los docentes. Según Godino (2006), los textos forman la parte sustancial del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por esta razón, analizaremos dos libros de textos del VI ciclo de Educación Básica Regular correspondientes al primer y segundo grado de educación secundaria, distribuidos por el ministerio de educación a todas las instituciones educativas estatales peruanas.

1.3. Problema de Investigación

Para establecer un seguimiento de los resultados de los sistemas educativos en cuanto al rendimiento de los alumnos dentro de un marco internacional común, se han establecido las destrezas que se han de desarrollar en la enseñanza de la Matemática. En este sentido destacamos las siguientes:

A efectos de PISA, una de las capacidades que se exige en el Proyecto es:

> Razonamiento y argumentación: la capacidad matemática a la que se recurre a través de las diferentes etapas y actividades asociadas a la competencia matemática se denomina razonamiento y argumentación. Esta capacidad implica procesos de pensamiento arraigados de forma lógica que exploran y conectan los elementos del problema para realizar inferencias a partir de ellos, comprobar una justificación dada o proporcionar una justificación de los enunciados o soluciones a los problemas. (Perú 2012, p.16)

Una mirada a los resultados de las investigaciones realizadas con relación al dominio de los conceptos matemáticos y a la aplicación de estos aprendizajes en el nivel secundario nos permite apreciar cómo, lamentablemente, los índices de eficacia y dominio alcanzados por los estudiantes peruanos son muy bajos en relación a los niveles esperados, a pesar de los esfuerzos del Ministerio de Educación por capacitar permanentemente a los docentes de la especialidad de Matemática.

El Proyecto PISA (Programme for International Student Assessment), conducido por la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE), es una evaluación internacional estandarizada, desarrollada en forma conjunta por los países participantes. Tiene por objetivo evaluar, cada tres años, las competencias de los estudiantes cuando llegan al final de la etapa de enseñanza obligatoria, hacia los 15 años. La evaluación está orientada al dominio de los procesos, la comprensión de los conceptos matemáticos y la aplicación de estos aprendizajes para resolver situaciones usuales de la vida cotidiana.

El Perú participó en los años 2009 y 2012. De acuerdo con los informes presentados, los estudiantes peruanos fueron los que, en promedio, obtuvieron la menor puntuación en la escala de alfabetización matemática. Este informe nos compromete en la importante tarea de sumar esfuerzos sobre acciones concretas basadas en un profundo sentido de urgencia y responsabilidad para mejorar el nivel de docentes y estudiantes.

Por otro lado, según el Ministerio de Educación MINEDU (2004), la Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC) realizó una evaluación nacional a los estudiantes de colegios nacionales y privados sobre competencias y desempeños en las áreas de comunicación y matemática. Esta prueba fue aplicada a tercero y quinto de secundaria, y se tomó en cuenta que:

> "La formación matemática es el dominio de habilidades y conocimientos matemáticos útiles para desempeñarse con eficacia ante situaciones problemáticas novedosas o rutinarias, cuya solución requiere la puesta en práctica de dichas habilidades y conocimientos." (UMC, p. 20).

Los resultados indicaron que, en el Perú, sólo el 6% de los estudiantes de tercer grado de secundaria se ubica en el nivel suficiente, lo que significa que únicamente esta población demuestra un desempeño adecuado de las habilidades requeridas; mientras que un 94% de los estudiantes de la población nacional de tercer grado de secundaria no alcanza este nivel. Estas cifras permiten inferir que la didáctica de la matemática de nuestro país responde a un enfoque centrado en la enseñanza de reglas y algoritmos, que no permite a nuestros estudiantes dominar los procesos, comprender los conceptos matemáticos y aplicarlos para resolver situaciones de la vida cotidiana. Tal como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Resultados a nivel nacional de secundaria

NIVEL	Suficiente	Básico	Previo	Menos previo
	6%	19,9%	19%	55,1%

Fuente: Adaptado de Perú (2005, p.53)

Por todo ello, queremos reflexionar y buscar alternativas para mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje del objeto matemático. En particular, en nuestro trabajo de investigación analizaremos el objeto matemático de áreas de cuadriláteros convexos contenidos en los dos libros de texto oficiales del VI ciclo de Educación Básica Regular, distribuidos en las instituciones educativas públicas de nuestro país.

Desde nuestra experiencia como docente de matemática en el nivel de educación secundaria, hemos visto la dificultad que presentan los estudiantes para lograr comprender el concepto de área de cuadriláteros. Estas dificultades se evidencian al resolver problemas planteados con situaciones-problema de su entorno, gráficos relacionados sobre área, y en los diferentes cálculos que realizan mediante operaciones aritméticas y geométricas. Por otro lado, también existen deficiencias en la manera como se plantean las tareas y actividades relacionados con áreas de cuadriláteros en los libros de texto de matemática para los grados de 1º y 2º año de secundaria, distribuidos a las instituciones educativas públicas del Perú por el Ministerio de Educación. Por tal razón, formulamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál es el significado institucional que se fija en los libros de textos de secundaria sobre el área de cuadriláteros convexos?

Para responder a esta pregunta, es necesario formular un objetivo general, el cual estará ligado a ciertos objetivos específicos que harán posible alcanzar el objetivo general propuesto.

1.4. Objetivos de investigación

- **Objetivo general**

  Analizar el significado institucional pretendido en torno a áreas de cuadriláteros convexos en el VI ciclo de Educación Básica Regular de las instituciones públicas del país.

- **Objetivos específicos**

  1. Describir el significado de referencia a partir de textos matemáticos e investigaciones relacionadas con áreas de cuadriláteros convexos.
  2. Describir el significado pretendido a través del análisis de las tareas de cuadriláteros convexos contenidos en dos libros de texto oficiales del nivel secundario.
  3. Valorar la idoneidad epistémica de las tareas de áreas de cuadriláteros convexos contenidos en los dos libros de texto analizados.

CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO

Para nuestro trabajo de investigación consideramos pertinente el uso de elementos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición matemática (EOS), ya que ofrece herramientas adecuadas para el proceso de análisis de libros de texto de áreas de cuadriláteros convexos.

2.1. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS)

Nuestro trabajo de investigación queda fundamentado en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) de Godino (2011). Este es un marco teórico que trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en educación matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas. Dicha teoría propone tres dimensiones en el análisis de la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina: la epistémica, la cognitiva y la instruccional. Cada una de ellas aborda el tema con herramientas agrupadas en tres modelos teóricos: teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos, teoría de las funciones semióticas y la teoría de las configuraciones didácticas. En nuestro trabajo, abordaremos las dimensiones epistémicas. Asimismo, describiremos los significados institucionales de áreas de cuadriláteros convexos en sus tareas a estudiantes de las instituciones públicas.

2.2. Análisis didáctico desde el punto de vista del EOS

Los niveles de análisis didáctico de los procesos de estudio matemático que presenta Godino (2009) señala en diversos trabajos realizados en el marco del EOS. (D’Amore, Font y Godino 2007; Font y Contreras, 2008; Font, Godino, 2006; Godino, Belcomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) se han propuesto y desarrollado cinco niveles para el análisis didáctico de proceso de estudio:

1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos);
2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos;
3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas;
4) Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa);
5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Estos niveles de análisis propuestos en el marco de EOS son considerados para el desarrollo de un análisis completo que permite describir, explicar y valorar procesos de estudio. En nuestra investigación, usaremos los niveles de análisis didáctico nivel 2 y nivel 5.

Nivel 2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos

En toda práctica, se identifica un *sujeto agente* (institución o persona) y un *medio* en el que dicha práctica se realiza (que puede contener otros sujetos u objetos). Puesto que el *sujeto agente* realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones-problema, resulta necesario considerar también los objetos, procesos y significados matemáticos involucrados. Este nivel de análisis se centra en los objetos y, sobre todo, en los procesos que intervienen en la realización de las prácticas. También considera lo que emergen de estas. Por ello, en nuestro trabajo, elaboraremos las configuraciones epistémicas de los textos matemáticos y didácticos.

Nivel 5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio

Este nivel de análisis se aplica a los procesos de estudio matemático centrados en la valoración de su idoneidad didáctica. Por lo tanto, son importantes y necesarios los criterios de “idoneidad” o “adecuación” que permitan valorar los procesos de instrucción realizables y guiar su mejora, evaluar la pertinencia del proceso de instrucción matemática, y señalar pautas para la mejora del diseño y la implementación del proceso de estudio.

Para valorar las tareas contenidas en los libros de texto de secundaria se muestra en Fgura 1.

Figura 1. Facetas y niveles de análisis didáctico
Fuente: Godino (2011,p.4)

2.3. El significado institucional de los objetos matemáticos en el diseño curricular y en la planeación de la enseñanza

Tanto en el diseño curricular como en la planeación de la enseñanza se deciden cuáles serán los sistemas de prácticas que se promoverán respecto a un conjunto de objetos matemáticos, a fin que los estudiantes los conozcan y aprendan a utilizarlos para resolver una serie de situaciones - problema. Estos sistemas de prácticas son los significados institucionales de los objetos matemáticos que habrá de estudiarse y constituyen el sistema de referencia de la enseñanza.

2.4. Tipos de significados institucionales

Dado que los significados dependen del contexto social y de los sujetos, su carácter es relativo. Por lo tanto, su utilización en el análisis didáctico lleva a introducir la tipología básica de significados que se resume en la Figura 2 (Godino, 2008, p.6).

En EOS, respecto a los significados institucionales se proponen los siguientes tipos:

- *Implementado:* en un proceso de estudio específico, es el sistema de prácticas que implementa el docente de manera efectiva.
- *Evaluado:* consiste en el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- *Pretendido:* atañe al sistema de prácticas que se usa en la planificación del proceso de estudio.
- *Referencial:* concierne al sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido; este se determina mediante un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión así como reparando en la diversidad del contexto de su uso.

Respecto a los significados personales se proponen los siguientes tipos:

- *Global:* corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales relativas a un objeto matemático, que es capaz de manifestar el sujeto.
- *Declarado:* proporciona información sobre las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas; incluye tanto a las correctas como a las incorrectas desde el punto de vista institucional.

- *Logrado:* abarca las prácticas que resultan conformes con la pauta institucional establecida.

Figura 2. Tipos de significados institucionales
Fuente: Godino, Batanero y Font (2008,p.6)

2.5. Significado institucional de referencia

Cuando un investigador planifica el proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por delimitar "lo que es dicho objeto para las instrucciones matemáticas y didácticas" y acude a los textos matemáticos, a las orientaciones curriculares, investigaciones relacionados al objeto matemático y, en general, a lo que los expertos conciben como las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija en los términos del objeto instruccional. Asimismo, usa sus conocimientos personales previamente adquiridos. (Godino, 2009) . Todo esto constituye un sistema de prácticas que designamos como "significado de referencia del objeto". Este sistema de práctica se usará como referencia o patrón para elaborar el significado pretendido del objeto matemático de áreas de cuadriláteros convexos, el cual está compuesto por: cuadrado, rectángulo, romboide, rombo, trapezoide. Según Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007), en una institución educativa de enseñanza, este significado forma una parte del significado holístico global por lo que se hace necesario un estudio histórico y epistemológico sobre el origen y evolución del objeto matemático.

2.6. Significado institucional pretendido

Se considera al *significado institucional pretendido* como un sistema de prácticas que se planifican para un determinado objeto matemático, el cual se desarrollará en un cierto proceso instruccional. Es decir, el profesor considera el significado institucional de referencia, su propia experiencia, las restricciones institucionales y los conocimientos previos de los estudiantes para seleccionar y ordenar la parte del significado que va a proponer a los alumnos.

2.7. El significado institucional de áreas de cuadriláteros a estudiantes de Educación Básica Regular.

El proceso que se determinó, considerando Perú (2009) y mapas de progreso (en el cual se plantearon una serie de cambios en las estrategias de enseñanza de Matemática), tuvo como propósitos:

a) Caracterizar el significado institucional (referencial y pretendido) de la Geometría, específicamente del objeto matemático “áreas de cuadriláteros convexos”.
b) Aanalizar el proceso de cambio que sufren dichos significados (sistemas de prácticas).

Para hacer viable la investigación, seleccionamos un contenido que fuese representativo de la geometría que se estudia en el VI ciclo de Educación Básica Regular: *áreas de cuadriláteros convexos*, y procedimos a caracterizar el significado institucional de referencia, plasmado en las investigaciones y en los textos recomendados como bibliografía en los textos de 1º y 2º año de secundaria. Luego, procedimos a caracterizar el significado pretendido, que fue determinado por nuestra investigación.

2.8. Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Los objetos matemáticos personales, según Godino y Batanero (1994), son “emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas” (Godino & Batanero, 336); por tanto, van cobrando forma en un aprendizaje que motiva la propia práctica. Unido a este término está el *significado personal de un objeto*, que consiste en “el sistema de prácticas personales de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado” (pág. 343). La relación entre los signos usados para codificar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer su significado ha sido modelizados por Godino (2002), quien esboza un marco teórico que incluye los siguientes tipos de entidades primarias, propias de la actividad matemática: lenguaje, situación-problema, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentaciones.

De acuerdo con Ramos (2005, p.4), cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática es necesario activar un conjunto formado por lenguajes, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones. A este conjunto se le llama configuración. Estas pueden ser cognitivas o epistémicas, por lo tanto, si es una configuración cognitiva se entiende que se trata de un conjunto de objetos personales; si es una configuración epistémica, se habla de un conjunto de objetos institucionales. Para las clases de matemáticas, que constituyen nuestro objeto de estudio, dichos elementos se articulan en la siguiente configuración epistémica mostrada en la (Figura 3). Estos seis tipos de objetos se articulan formando configuraciones epistémicas.

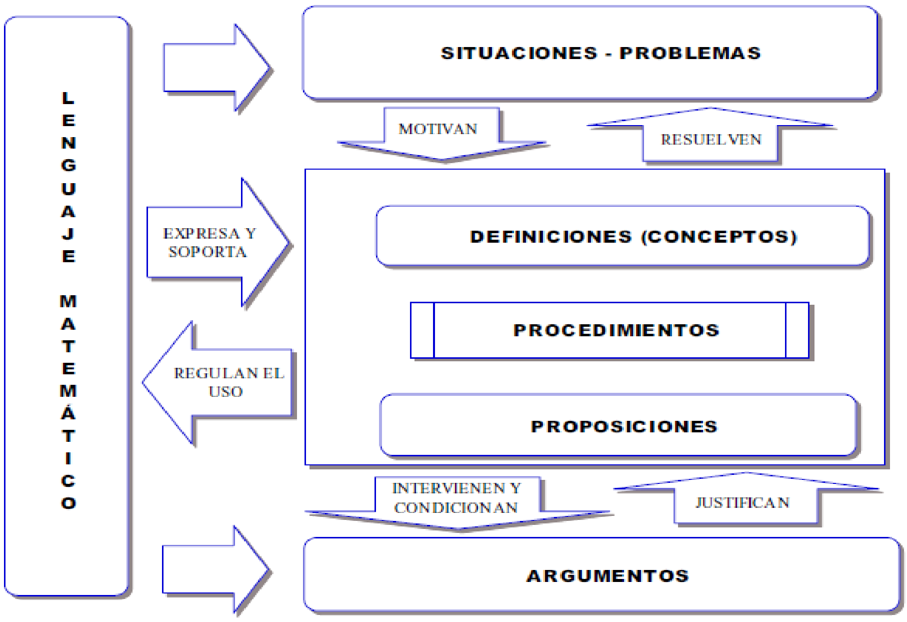


Figura 3. Configuración de objetos primarios
Fuente: Godino, Batanero y Font (2008, p.7)

Es importante mencionar que las herramientas descritas servirán para elaborar las configuraciones epistémicas para el significado de referencia y significado pretendido de nuestro objeto matemático de áreas de cuadriláteros convexos, como mostramos en el siguiente ejemplo de objetos primarios de áreas de cuadriláteros.

Los objetos primarios de áreas de cuadriláteros.

1. *Lenguaje: (términos, expresiones, notaciones, gráficos)*: en un texto se encuentran en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos. Por ejemplo, las palabras área de cuadrado, rectángulo, paralelogramo, rombo y trapecio, así como su representaciones simbólicas

   $A = a^2$; $A = b \times h$; $A = \frac{D \times d}{2}$; $A = \frac{(b+b') \times h}{2}$, también las gráficas relacionados a áreas de cuadriláteros convexos.

2. *Situaciones- problema:* se refieren a los problemas o ejercicios de cualquier otra situación problemática, en cuya resolución emergen los conceptos relacionados a áreas de cuadriláteros. Por ejemplo, "encuentra el área de una ventana de una construcción tiene la forma de trapecio, tiene las medidas como son la base mayor es el doble de la base menor y la altura es 12 dm."
3. *Definiciones:* introducidas mediante definiciones o descripciones. *(conceptos previos)*: perímetro, número natural, propiedades, área, diferencia de cuadrados, lado, vértice, axioma, teoremas, sujeto ante las tareas matemáticas. Por ejemplo la definición de área de cuadrado, donde los lados son iguales y por lo tanto el cuadrado es a^2 .
4. *Proposiciones*: son enunciados sobre conceptos es decir, propiedades o atributos de los objetos de áreas de cuadriláteros convexos. Ejemplo. "el área del rombo es igual a cuatro veces el área del triángulo."
5. *Procedimientos previos*: se refiere, a los algoritmos, operaciones que realiza un estudiante al enfrentarse a situaciones problemas, cálculo mental, técnicas de cálculo y procedimientos. Ejemplo, mediante fórmulas, se resuelve el cálculo de áreas de trapecios.
6. *Argumentaciones*: son enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos. Ejemplo, la suma de áreas parciales es igual al área total.

2.9. Configuración epistémica como herramienta para el análisis de textos

El análisis de libros de texto ha de ser una de las competencias que debe desarrollar el profesor de matemática (Font & Godino, 2006), para que, de esta manera pueda mejorar su práctica docente. En ese sentido, el enfoque ontosemiótico propone una ontología formada por los objetos primarios mencionados en la sección anterior, cuyo análisis nos brinda una perspectiva general del texto matemático usado en el proceso de instrucción. De acuerdo con Godino y colaboradores, cuando se realiza una práctica matemática se activa un conglomerado de objetos primarios (Figura 3) al que podemos llamar configuración epistémica: se trata de los objetos institucionales. Para nuestra investigación, los objetos institucionales se presentan en los textos del VI ciclo de Educación Básica Regular del Perú.

2.10. Criterios de Idoneidad de un proceso de instrucción.

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios y un desglose operativo de dicha noción han sido introducida en el EOS (Godino, Contreras y Font, 2006) como herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que orienta hacia la intervención efectiva de aula. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes (Godino, Batanero y Font, 2007):

Según Font y Adán (2013) manifiesta para valorar la calidad de las matemáticas se propone el constructo "criterios de idoneidad", en especial el criterio de idoneidad epistémica:

1. *Idoneidad epistémica*, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas "buenas matemáticas".
2. *Idoneidad cognitiva*, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar.
3. *Idoneidad interaccional*, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos.
4. *Idoneidad mediacional*, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
5. *Idoneidad emocional*, para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción.
6. *Idoneidad ecológica*, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc.

Para cada una de las seis idoneidades hay un conjunto de indicadores. A continuación consideramos los indicadores de la idoneidad epistémica:

- Muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.)
- Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico, etc) y traducciones, y conversiones entre los mismos.
- Procurar que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén claros y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo al que se dirigen.
- Presentación de los enunciados y procedimientos básicos del tema que se adecúen a las explicaciones, comprobaciones, demostraciones del nivel educativo a que se dirigen.
- Establecimiento de relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas los temas estudiados, etc.

Describimos la Idoneidad Epistémica en el sentido de si las matemáticas que se enseñan son las adecuadas (buenas matemáticas). La enseñanza de área de cuadriláteros convexos en la educación secundaria puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad) o una secuencia de actividades didácticas teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica sobre diferentes procedimientos de áreas de cuadriláteros convexos, con la finalidad del uso de descomposición, reconfiguración, configuración propuesto por Freudenthal para mejorar el proceso enseñanza y aprendizaje (alta idoneidad).

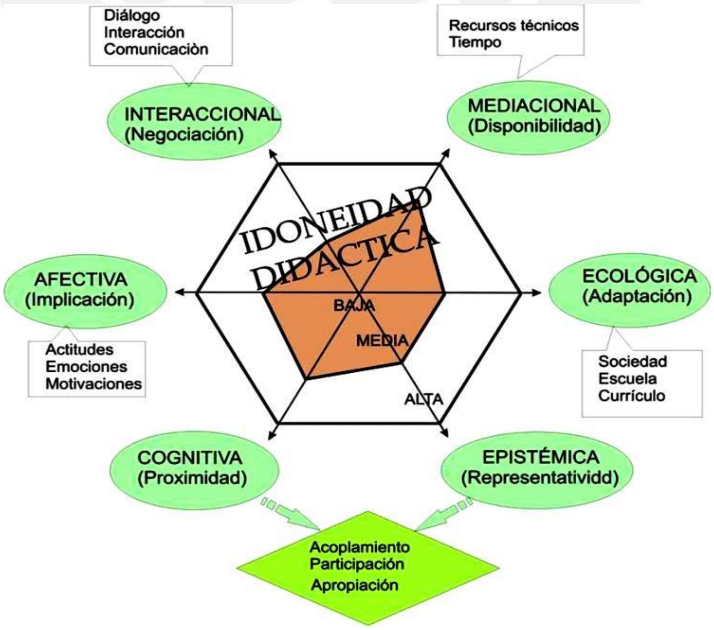


Figura 4. Componentes de la Idoneidad Didáctica
Fuente: Godino (2011, p. 6)

CAPÍTULO III ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO: ÁREAS DE CUADRILÁTEROS CONVEXOS

Con la finalidad de conocer la evolución, usos y/o tratamientos del concepto de área de cuadriláteros a través de la historia, exponemos la siguiente información, la misma que refleja la importancia otorgada al concepto área y magnitud desde la Antigüedad y que servirá como referencia histórica para el tratamiento de área de cuadriláteros convexos.

3.1. Noción de área

Turegano (1993), en su investigación manifiesta que hace aproximadamente 15 000 años se evidencia el comienzo de la noción de área y el buen manejo que se hizo de este concepto, puesto que se realizaron mediciones de la superficie o extensión de terrenos. El historiador Heródoto nos dice: El rey de Egipto dividió el suelo del país entre sus habitantes, asignando lotes cuadrados de igual extensión a cada uno de ellos, cada terreno cuadrangular lo representaba por un cuadrado. Este hecho lleva implícito el uso de nuevas unidades de medida para las superficies. Varios problemas geométricos importantes en el papiro de Rhind escrito por Ahmes (aproximadamente, 1650 A.C), nos muestra habilidad para resolver prácticas del cálculo de áreas y volumen de los antiguos egipcios.

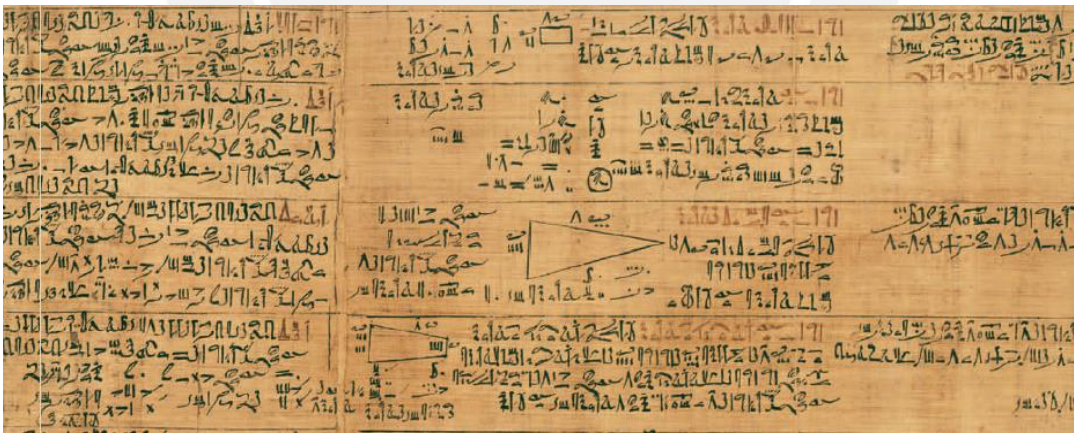


Figura 5. Rhin Mathematical Papirus. Nº 52
Fuente: Facco (2003, p. 20)

En la (Figura 5), en el problema 52, se trata el caso de un trapecio isósceles considerando el supuesto en que la base mayor es 6, la menor 4 y la distancia entre ellas es 20. Ahmes toma la semisuma de las dos bases, de manera que se convierta en un rectángulo y al multiplicar por 20 para hallar el área. En este tipo de transformaciones, en que se convierten trapecios en rectángulos podemos ver ya los comienzos de una especie de congruencia y de la idea de demostración en geometría.

De lo práctico y utilitario pasamos a niveles de abstracción que, aun hoy prevalecen en la enseñanza, aparece el método axiomático-deductivo que caracterizo a la matemática griega hasta los tiempos de Arquímedes. Pitágoras (584-504 A.C.) desarrolló un método conocido en la actualidad como aplicación de áreas, que se basa, esencialmente, en la superposición de un área sobre otra. En opinión de Boyer (1949), este constituyó el primer paso en el intento de definir de manera exacta la noción de área.

Eudoxo enunció un axioma que sirve de base al método de exhausción (equivalente griego del cálculo integral) y que dice que, dadas dos magnitudes que tengan una razón, es decir, que sean del mismo tipo y ninguna de las dos sea cero, entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que no exceda a la otra.

3.2. Unidad de medida

La necesidad de medir estuvo presente desde los inicios de la humanidad en los múltiples problemas que se enfrentaban en ese tiempo. Los historiadores de la Matemática indicaban que contar y medir son las grandes actividades que dieron origen a una diversidad de conocimientos matemáticos, los mismos que van evolucionando en el tiempo y en el espacio.

El origen de la medida se remonta al periodo neolítico, entre el 7000 y 4000 A.C. aproximadamente, período en el que el hombre empieza a organizar, cultivar, intercambiar; y surge la necesidad de medir. El hombre utilizaba parte de su cuerpo para realizar mediciones (brazo, mano, pie, codo, etc.) con lo que formó un sistema de unidades de medida. Boyer (1986), afirma: "La unidad de longitud que usaban los egipcios para medir en vertical era el codo, mientras que al medir distancias horizontales utilizaban la mano de las que había siete en un codo. (p.40).

Los cuadriláteros, a comienzos del siglo XIX, se introducían en clases en las que podrían encontrarse divididas las figuras terminadas por cuatro líneas. Eran tres: el trapezoide, el trapecio y el paralelogramo, definidas por la disposición de las líneas: ninguna paralela a otra, dos paralelas entre sí y las cuatro paralelas dos a dos, respectivamente. Podemos decir que, en esa época, establecer una definición para las diferentes formas geométricas era crucial. A partir de las críticas comenzaba un razonamiento deductivo que condujo a la clasificación de los paralelogramos: se presentaron el romboide, el rombo, el rectángulo y el cuadrado.

Por otro lado, las ecuaciones cuadráticas por medio de los procedimientos conocidos como de *aplicación de áreas* desde del álgebra geométrica que aparece tratada de una manera completa en los *Elementos de Euclides*.

3.3. Estudio concepto de área

En los diccionarios se define a la superficie como una cualidad (extensión) y al área como una medida, es decir, como un número. La superficie es una cualidad que puede compararse y sumarse; por ejemplo, se puede comparar la superficie de un rectángulo con la de un paralelogramo, o la de otras figuras, con un rectángulo.

Claramente, podemos ver la diferencia estudiando la estructura algebraica de ambos conceptos. La superficie es una magnitud, lo que se caracteriza matemáticamente como un semimódulo ordenado. Por ello, se puede establecer una relación de equivalencia y definir en ellas una operación interna: la suma, y otra externa: el producto por un escalar, y una relación que es de orden.

Por otro lado, en el libro de Moise (1986) se presenta la definición de área de la siguiente manera:

Postulado 19: toda región poligonal le corresponde un número positivo único, y, a esta definición le antecede la de región poligonal. (Moise, p.291).

Región poligonal: "es la reunión de un número finito de regiones triangulares en un plano, tales que si dos cualesquiera de ellas se intersecan, su intersección, es o bien un punto o un segmento"

Región triangular: es la reunión de un triángulo y su interior.

En el libro de Geometría 2da.edición Barnett Rich (1997), se presenta el desarrollo para el cálculo de áreas de cuadriláteros convexos. Una unidad cuadrada es la superficie encerrada por un cuadrado cuyo lado es 1 unidad. El área de una superficie cerrada, tal como la de un polígono, es el número de unidades cuadradas contenidas en su superficie.

Asimismo, según Allen y otros (1965) el área define como una función de conjuntos que asigna un número real único a un conjunto de puntos en el plano. El dominio de esta función es el conjunto que puede ser encerrado o incluido en algún cuadrado. De acuerdo con esta definición, es posible plantear una serie de postulados que nos permiten desarrollar toda la teoría de áreas de cuadriláteros:

Postulado 1. (postulado de área): existe una función (A) llamada área, definida para todos los puntos de los conjuntos acotados en el plano, de modo que, a cada conjunto acotado S, se le asigna un número no negativo A(S).

Postulado 2. (Suma de áreas): dados dos conjuntos S y T del plano, que no tienen punto en común, el área de la reunión de S y T es igual a la suma de las áreas de S y T.

De acuerdo a la fenomenología propuesta por Freudenthal, es importante considerar dicho aporte, para abordar en el proceso enseñanza del área en los niveles de primaria y secundaria.

Asimismo son importantes los conceptos y definiciones, y estudiar cómo se halla el área de cuadriláteros convexos, entendiéndose por Corberán que en el fenómeno *midiendo,* en su organización, por fórmula general presenta en la subcategoría, por los cuales son resueltos en texto de Rich (1997).

a) *El área de un rectángulo:* es igual al producto de la longitud de su base y de su altura $A = b \times h$; En la Figura Nº 6 se muestra.

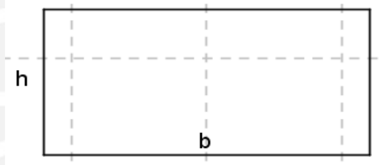


Figura 6. Área de rectángulo

Fuente: Rich (1997, p.165)

b) *El área de un cuadrado*: es igual al cuadrado de la longitud de un lado; de lo cual se deduce que el área de un cuadrado también es igual a la mitad del cuadrado de la longitud de su diagonal. $A = a^2$; $A = \frac{D^2}{2}$

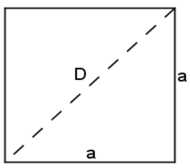


Figura 7. Área de un cuadrado
Fuente: Rich (1997, p.165)

c) *El área de un paralelogramo*: es igual al producto de la longitud de un lado y la longitud de la altura sobre el mismo lado. $A = b \times h$

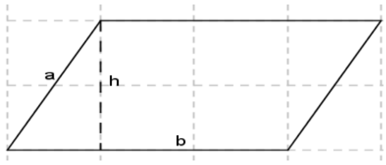


Figura 8. Área de un paralelogramo
Fuente: Rich (1997, p.165)

d) *El área de un trapecio*: es igual a la mitad del producto de la longitud de su altura y la suma de las longitudes de sus bases. $A = \frac{h}{2}(b + b')$

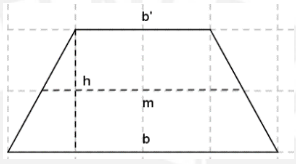


Figura 9. Área de un trapecio
Fuente: Rich (1997, p.165)

e) *El área de un rombo*: es igual a la mitad del producto de las longitudes de sus diagonales. Como cada diagonal es mediatriz de la otra, el área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}d\right)\left(\frac{1}{2}D\right) = \frac{1}{8}dD$$

De manera que el rombo, que está formado por cuatro triángulos congruentes con el triángulo **I**, tiene un área de $4\left(\frac{1}{8}dD\right)$ o $\frac{1}{2}dD$

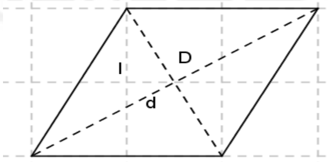


Figura 10. Área de un rombo
Fuente: Rich (1997, p.165)

Por otro lado, la finalidad de las definiciones por demostración se justifica en la medida en que ayudan a planificar. En Perú (2009), la capacidad de Razonamiento y demostración, se manifiesta: *Aplica composiciones de transformación a figuras geométricas planas* y en Perú (2015), sobre la capacidad de *Razona y argumenta generado ideas matemáticas*; en los mapas de progreso de geometría, *formula y comprueba conjeturas* *relacionadas con las combinaciones de formas geométricas que permiten teselar un plano* y en el libro de texto de primer año, respecto a los aprendizajes esperados, dice: *Deduce fórmulas para el cálculo de polígonos regulares*. Por todo lo anterior, consideramos pertinente tomar nota del libro *Geometría Básica* 2da. edición Teódulo I. Verástegui (2003), en el cual se presentan y ejemplifican aplicaciones de demostraciones considerando a la propuesta de Freudenthal en el campo de problemas por medición, como subcategorías de definiciones para elementos geométricos. La propuesta es como sigue:

DEFINICIÓN 1

Dado un polígono P_n, con $n \geq 3$, la región poligonal que determina P_n, denotada por $R(P_n)$, es la unión del interior de P_n con su frontera, es decir, $R(P_n) = P_n \cup Int(P_n)$ como se observa en la figura Nº 11, sobre la región de 5 lados.

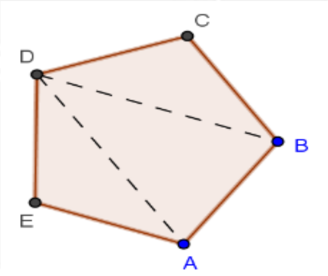


Figura 11. Región de 5 lados
Fuente: Verástegui (2012, p.188)

En toda región poligonal $R(P_n)$, $n \geq 3$ se descompone o se expresa como la unión de un número finito de regiones triangulares y tal forma de descomponer o de expresar no es única.

AXIOMA 1

En el plano π, a cada región poligonal $R(P_n)$, con $n \geq 3$, se le hace corresponder o se le asigna un único número real no negativo $A(P_n)$.

Este axioma establece que, para regiones poligonales en el plano π, existe una función A, tal que $A: R(P_n) \rightarrow A(P_n)$, donde $A(P_n)$, es un número real no negativo; es decir, a cada región poligonal se le hace corresponder o se le asigna un único número real.

DEFINICIÓN 2

Al número real no negativo $A(P_n)$, en el axioma anterior, se le llama área de región poligonal $R(P_n)$.

AXIOMA 2

Si $R\ (P_4)$ es una región cuadrangular (P_4 es un cuadrado) cuyos lados tienen longitud a, entonces su área es $A(P_4) = a^2$

Este axioma expresa que el área de una región cuadrangular o de una región cuadrada, cuyo lado mide a (en unidades de distancia usada), es $a \times a = a^2$. En particular, el área de un cuadrado de lado $1u$ es $1u \times 1u = 1u^2$, es la unidad de área cuyos lados están medidos en unidad u.

De esto se desprende que, si el lado de una región cuadrangular es $a = 1+1+....+1$, a veces, entonces su área es $a^2 = a \times a = (1+1+......+1) \times (1+1+......+1) = 1+1+......+1$,

En la Figura Nº 12, se muestra la resolución del cuadrado que proporciona como valor al lado $a = 5$cm, el área de una región cuadrada de lado 5cm es:

$$a(5cm) \times (5cm) = (1+1+1+1+1) \times (1+1+1+1+1) = 25cm^2$$

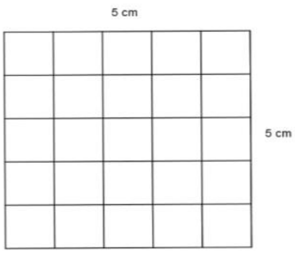


Figura 12. Área de región cuadrangular
Fuente: Verástegui (2012, p.191)

TEOREMA 1

Si P_4 es un rectángulo tal que las longitudes de sus lados son a y b, entonces el área de la región rectangular es $A(P_4) = ab$, es decir, el área de una región rectangular es el producto de las longitudes de sus lados (base b y altura a)

Demostración: sea ABCD un rectángulo que define la región R cuyos lados miden $AB = a$ $BC = b$, si se extiende AB una longitud b y BC una longitud a, como en la Figura 13, se tiene una región cuadrangular de lados $a+b$ y área $(a+b)^2$, por axioma 2, y queda descompuesta en cuatro regiones rectangulares R, congruentes, y una región cuadrangular T de lado $b-a$ y área $A(T) = (b-a)^2$.

Luego, se tiene: $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4A(R)$,

Efectuando cuadrados resulta*:* $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4A(R)$

de donde: $4A(R) = 4ab$, es decir, $A(R) = ab$

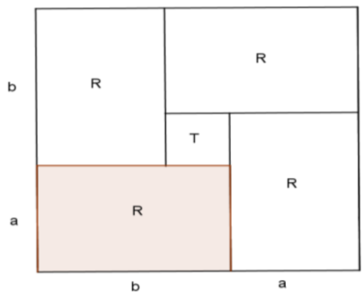


Figura 13. Demostración de región cuadrangular
Fuente: Verástegui (2012, p.191)

TEOREMA 2

Si R_1 es la región plana determinada por un paralelogramo cuya base (un lado) tiene longitud b y la altura respecto a esta base tiene longitud$h$, y R_2 es una región rectangular cuyos lados tienen longitudes b y h ; entonces R_1 y R_2 son regiones "equidescomponibles" y, de esto se desprende: $A(R_1) = bh$

Demostración: sea ABCD el paralelogramo que determina R_1 cuya base tiene longitud $AD = b$ y la altura tiene longitud $BE = h$**,** con $E \in \overline{AD}$ y $\overline{BE} \perp \overline{AL}$; y sea $MNPQ$ el rectángulo que determina R_2 cuyos lados miden $MQ = b$ y $MN = h$. Sea $S \in MQ$, tal que $MS = AE$**, e**ntonces ΔABE **y** ΔSNM son congruentes por criterio LAL, y los trapecios $BCDE$ y $PNSQ$ son congruentes. Luego, las regiones R_1 y R_2 son "equidescomponibles" tal como se muestra en la figura Nº 14, es decir, $A(R_1) = A(R_2)$, pero por el teorema 1**,** $A(R_2) = bh$, y de donde se tiene: $A(R_1) = bh$.

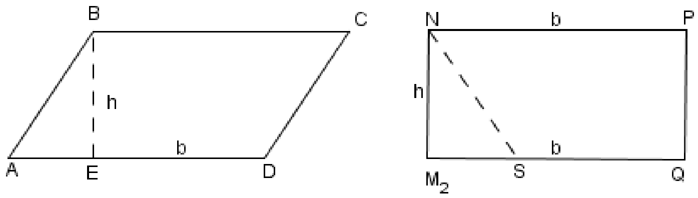


Figura 14. Demostración área de paralelogramo
Fuente: Verástegui (2012, p.194)

COROLARIO 1

El área de una región plana R determinada por un rombo es igual a la mitad del producto de las longitudes de sus diagonales $AC = d_1$ y $BD = d_2$, y el área de la región es $R = \frac{d_1 d_2}{2}$

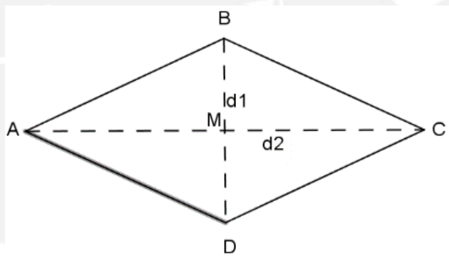


Figura 15. Demostración de área de un rombo
Fuente: Verástegui (2012, p.194)

Demostración: sea R la región plana determinada por el rombo $ABCD$**,** tal que sus diagonales AC y $\overline{BD}$ se interceptan perpendicularmente en sus puntos medios M y tengan longitudes d_1 y d_2, respectivamente. La diagonal AC descompone a la región R en dos regiones congruentes $R(\triangle ABC)$ y $R(\triangle ACD)$ cuyas alturas miden $\frac{d_2}{2}$ y sus bases miden d_1. En la figura Nº 15, se muestra la demostración del rombo.

$A(R) = A(\Delta ABC) + A(\Delta ACD) = \frac{1}{2} d_1 \left(\frac{d_2}{2}\right) + \frac{1}{2} d_1 \left(\frac{d_2}{2}\right) = \frac{1}{2} d_1 d_2$; de donde $A(R) = \frac{d_1}{d_2}$

TEOREMA 3

Si T_4 es un trapecio con lados paralelos, bases, de longitudes b_1 y b_2, la altura respecto a estos lados de longitud h ; entonces el área de la región trapezoidal determinada por T_4 es $A(T_4) = \dfrac{h\left(b_1 + b_2\right)}{2}$

Demostración:

En la Figura Nº 16, se muestra la demostración del área de trapecio. Sea T_4 el trapecio $ABCD$ donde $\overline{AD} // \overline{BC}$, $AD = d_1$, $BC = d_2$ y $CE = h$, con E en la recta $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overline{CE} \perp \overline{AD}$. La diagonal AC determina dos triángulos CAD y CBA de alturas iguales a h y cuyas bases respectivas miden $AD = d_1$, $BC = d_2$ y definen las regiones triangulares R_1 y R_2, respectivamente. Luego, por el axioma y el teorema 2, se tiene: $A(T_4) = A\left(R_1\right) + A\left(R_2\right) = \dfrac{hb_1}{2} + \dfrac{hb_2}{2} = \dfrac{h\left(b_1 + b_2\right)}{2}$ De esto: $A(T_4) = \dfrac{h\left(b_1 + b_2\right)}{2}$

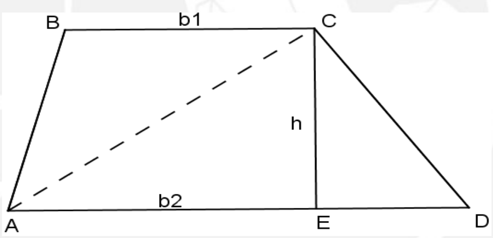


Figura 16. Demostración área de trapecio
Fuente: Verástegui (2012, p.199)

3.4. Estudio del objeto de áreas de cuadriláteros desde el punto de vista didáctico

Los contenidos a tomar en cuenta en nuestra investigación se encuentran en Perú (2009) en el Diseño Curricular Nacional (DCN), ubicados en VI CICLO del nivel secundaria en el primer y segundo grado de la siguiente forma: en primer grado, perímetro y áreas de figuras poligonales; en segundo grado, perímetro y áreas de figuras geométricas planas,

Según el ministerio de Educación el Diseño Curricular Nacional presenta las siguientes estructuras de capacidades y conocimientos para primer y segundo año de educación secundaria, como se muestra en las Tablas 3 y 4. .

Tabla 3. Capacidades y conocimientos de geometría 1° grado

Matemática	PRIMER GRADO
GEOMETRÍA Y MEDICIÓN	
CAPACIDADES	CONOCIMIENTOS
▪ **Razonamiento y demostración** - Clasifica polígonos de acuerdo a sus características - Identifica las propiedades de sólidos geométricos como: cubos, prismas rectos y cilindros rectos. - Identifica figuras con simetría axial y simetría puntual. - Aplica traslaciones a figuras geométricas planas en el plano cartesiano. - Aplica rotaciones a sólidos geométricos en las coordenadas cartesianas de tres dimensiones. ▪ **Comunicación matemática** - Grafica el desarrollo de diversos cuerpos geométricos. - Matematiza situaciones reales utilizando las unidades de longitud, masa y capacidad del sistema métrico decimal. ▪ **Resolución de problemas** - Calcula el perímetro y área de figuras poligonales. - Estima o calcula exactamente el área de figuras planas utilizando diversos métodos.	▪ **Geometría plana** - Polígonos - Perímetros y áreas de figuras poligonales - Ángulos internos y externos de un polígono. <u>Noción de área</u> ▪ **Medida** - Conversión de unidades de longitud, masa y capacidad en el sistema métrico decimal - Construcción y medición de ángulos y segmentos ▪ **Transformaciones** - Sistema rectangular de coordenadas - Simetría, simetría axial, simetría puntual - Operaciones de traslación y rotación de figuras geométricas en el plano cartesiano ▪ **Geometría del espacio** - Cubo, prisma y cilindro - Área lateral y total del cubo, prisma y cilindro

Fuente: Perú (2009, p.322)

Tabla 4. Capacidades y conocimientos de geometría 2° grado

Matemática	SEGUNDO GRADO
GEOMETRÍA Y MEDICIÓN	
CAPACIDADES	CONOCIMIENTOS
▪ **Razonamiento y demostración** - Establece relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas y segmentos. - Define polígonos regulares e irregulares. - Aplica traslaciones a figuras geométricas planas. - Aplica rotaciones a figuras geométricas planas. - Aplica reflexiones a figuras geométricas planas. - Aplica composiciones de transformación a figuras geométricas planas. ▪ **Comunicación matemática** - Representa la traslación, rotación y reflexión de figuras geométricas planas respecto a un eje de simetría. ▪ **Resolución de problemas**	▪ **Geometría plana** - Rectas paralelas y perpendiculares - Ángulos formados por una recta secante a dos paralelas - Suma de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo - Perímetros y áreas de figuras geométricas planas - Longitud de la circunferencia del círculo ▪ **Medida** - Ángulos opuestos por el vértice y ángulos adyacentes - Conversión de unidades cúbicas en el sistema métrico decimal - Medida de ángulos entre dos recta en el espacio y medida de ángulos diedros. ▪ **Transformaciones** - Sistema rectangular de coordenadas

- Resuelve problemas de contexto matemático que involucran el cálculo de ángulos formados por una recta secante a dos paralelas. - Resuelve problemas que implican el cálculo sistemático o con fórmulas del perímetro o del área de figuras geométricas planas. - Resuelve problemas que involucran suma de ángulos interiores y exteriores de un triángulo. - Resuelve problemas que involucran el cálculo de la circunferencia de un círculo.	- Traslación, rotación y reflexión de figuras geométricas planas respecto a un eje de simetría - Composición de transformaciones ▪ **Geometría del espacio** - Puntos, rectas y planos en el espacio - Pirámide y cono. - Áreas lateral y total de la pirámide y del cono - Polígonos regulares e irregulares. Líneas notables.

Fuente: Perú (2009, p.326)

Asimismo en Perú (2015), se señalan, de manera clara y precisa las competencias de los estudiantes y la viabilidad de la aplicación de las mismas en el plan de estudios, competencias, capacidades e indicadores de las áreas curriculares de matemática tal como se muestra en la Tabla Nº 5.

Tabla 5. Competencias y capacidades del área matemática

ÁREA	COMPETENCIAS	CAPACIDADES
MATEMÁTICA (Ciclos II, III, IV, V, VI, VII)	- Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad. - Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio. - Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización. - Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de gestión de datos e incertidumbre.	- Matematiza situaciones. - Comunica y representa ideas. - Elabora y usa estrategias. - Razona y argumenta generando ideas matemáticas.

Fuente: Perú (2015, p.4)

También observamos las competencias del III, IV y V ciclo de EBR relacionadas al área de matemática por ciclos correspondiente al organizador de geometría y medición para determinar qué tipo de problemas se desarrollan en estos ciclos de estudio, según se observa en la Tabla 6.

Tabla 6. Competencia del organizador Geometría por ciclos

III CICLO	IV CICLO	V CICLO
• Resuelve problemas de situaciones cotidianas que requieran de la medición y comparación de atributos mensurables de objetos y eventos, y las comunica utilizando lenguaje matemático. • Resuelve problemas, con autonomía y seguridad, cuya solución requiera de relaciones de posición y desplazamiento de objetos en el plano.	• Resuelve y formula problemas con perseverancia y actitud exploratoria, cuya solución requiera de las relaciones entre los elementos de polígonos regulares y sus medidas: áreas y perímetros, e interpreta sus resultados y los comunica utilizando lenguaje matemático. • Interpreta y valora la transformación de figuras geométricas en distintos aspectos del arte y el diseño.	• Resuelve y formula problemas cuya solución requiera de la transformación de figuras geométricas en el plano, argumentando con seguridad, los procesos empleados y comunicándolos en lenguaje matemático. • Resuelve y formula problemas cuya solución requiera de relaciones métricas y geométricas en la circunferencia, círculo, prisma recto y poliedro; argumentando con seguridad, los procesos empleados en su solución, y comunicándolos en lenguaje matemático.

Fuente: Perú (2009, p.189)

Es necesario acotar que los textos de 1ero. de secundaria que son utilizados por los estudiantes del VI ciclo de Educación Básica Regular, elaborados por el Departamento Editorial del Grupo Editorial Norma en Perú, este libro de texto consta de 250 páginas: 8 capítulos. El capítulo seis trata el tema de la medida y la geometría plana en cada una de sus dos unidades respectivamente. En tanto que para el 2º año de secundaria, el libro de texto consta de 254 páginas con 8 capítulos de estudio, de los cuales el capítulo 5 está dedicado a los contenidos para la enseñanza y aprendizaje de polígonos. En este capítulo, nos interesan las páginas 145 a 147, en las cuales se estudian los temas de perímetros y áreas. En la presente investigación, analizaremos actividades propuestas para áreas de cuadriláteros de dichos libros de texto

En el libro de texto de primer año observamos el desarrollo de las actividades relacionados a áreas de cuadriláteros como son: cuadrado, rectángulo, romboide. Luego, el planteamiento de actividades (p.181) cuyos aprendizajes esperados en la capacidad de *Razonamiento y demostración*, deduce fórmulas para el cálculo de polígono regulares, asimismo para la capacidad *Comunicación matemática*, calcula el área de polígonos regulares.

El perímetro (P) de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados. El perímetro se mide en unidades de longitud como milímetro (mm), el metro (m), el kilómetro (Km), etc.

El área (A) de un polígono es la medida de la superficie encerrada por los lados de dicho polígono. El área se mide en unidades como milímetro cuadrado (mm^2), el metro cuadrado (m^2), el kilómetro cuadrado (Km^2), etc.

La primera tarea que plantea el libro de texto del ministerio de Educación es sobre las fórmulas del cálculo de áreas de las figuras planas como son: área de triángulos, área del cuadrilátero, área del cuadrado, área del romboide, área del rombo y área del trapecio; y sus respectivas fórmulas. Luego, observamos el planteamiento de una 2da. actividad para que el docente y los estudiantes desarrollen las tareas de áreas de cuadriláteros.

Como tercera actividad, se propone que, con ayuda del profesor, el alumno resuelva los ejercicios planteados en el libro de texto de 2º de secundaria.

Todo lo descrito pertenece los dos libros de texto del VI ciclo de Educación Básica Regular de las instituciones públicas del país.

A continuación en el siguiente capítulo, presentamos la metodología empleada en la investigación.

CAPITULO IV METODOLOGÍA EMPLEADA EN LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se describe la metodología a usar, la cual será de tipo cualitativo descriptivo e interpretativo, pues la actividad principal a realizar será la descripción y análisis de las tareas que se encuentran en los libros de texto del nivel secundario en términos de las configuraciones epistémicas.

4.1. Metodología y procedimiento

El propósito fundamental de nuestra investigación fue describir la forma como se planifican las tareas y actividades matemáticas en los libros de texto dirigidos a los estudiantes de primero y segundo año de secundaria de las instituciones educativas públicas del Perú. Asimismo, nos planteamos analizar las configuraciones epistémicas, que tienen las distintas tareas y actividades matemáticas de las áreas de cuadriláteros de los libros de texto de educación universitaria o libros de texto formales; y también nos dedicaremos al análisis de la contextualización de las situaciones-problemas planteadas a los estudiantes del VI ciclo de Educación Básica Regular.

El presente estudio se define como una investigación cualitativa de tipo descriptiva e interpretativa. Se analizaron situaciones, tareas, y actividades matemáticas que son observables, presentes en los libros de texto de primero y segundo año de secundaria y relacionadas con áreas de cuadriláteros convexos.

Latorre, Rincón & Arnal (2005) proponen un esquema general para investigaciones cualitativas. Este esquema contempla las fases generales que debe seguir toda investigación cualitativa. Para nuestro trabajo de investigación, tomamos como referencia el trabajo de investigación de Garcés (2014), quien utilizó las fases propuestas por ellos. Consideramos cinco fases que son adecuadas y respondían a nuestro propósito:

A continuación detallamos las fases:

1. Fase exploratoria o de reflexión:
   a) Se identifica la problemática a investigar.
   b) Se plantea el problema de investigación.
   c) Se realiza la revisión de investigaciones antecedentes.
2. Fase de planificación:

a) Se determina los libros de texto del nivel secundario objeto de investigación.
b) Se delimitan y se ajustan el problema y cuestiones de la investigación.
c) Se reformulan los objetivos de investigación.
d) Se seleccionan los textos de matemáticas a analizar en el nivel secundario.
e) Se elige el marco teórico para la investigación.
f) Se selecciona la estrategia a seguir en la investigación.

3. Fase de recojo y análisis de la información:
   a) Se eligen estrategias para la recolección de la información.
   b) Se eligen técnicas a seguir para el análisis de la información.
4. Fase de retirada del escenario:
   a) Se finaliza el recojo de la información de los libros de texto.
   b) Se hace un análisis comparativo y reflexivo de la información que proporcionaron los resultados.
5. Fase de elaboración del informe:
   a) Se redactan las conclusiones de la investigación.
   b) Se elaboran la redacción y la revisión de dicho informe.

A continuación, explicaremos como estas fases fueron aplicadas a nuestro trabajo de investigación.

Fase exploratoria

En la fase exploratoria, se identificó la problemática a investigar (investigaciones que nos interesaba estudiar), se describieron los libros de texto de educación secundaria, se revisaron y analizaron los diferentes tipos de problemas que están planteados en los textos: cómo se desarrollan y qué argumentos contienen para desarrollar el estudio del objeto matemático. Asimismo, se realizó una revisión de los antecedentes relacionados con nuestro trabajo de investigación y, luego, se identificó el problema de investigación. En nuestro caso específico, después de haber revisado los contenidos en los libros de texto oficial de primero y segundo, se determinó lo siguiente:

El texto para el primer año de secundaria, correspondiente al VI ciclo de Educación Básica Regular, consta de 254 páginas, divididas en ocho unidades (se trabajan 2 unidades por bimestre). El tema que nos interesó fue el de las tareas de áreas de cuadriláteros convexos, concretamente en la unidad 6, el tema 1 (p. 170-178), que se refiere al tratamiento de la medida; y el tema 2 (p. 179-197), que se dedica al tratamiento del estudio de polígonos (básicamente de áreas de cuadriláteros). El texto para el segundo año de secundaria correspondiente al VI ciclo de Educación Básica Regular, consta de 254 páginas, divididas en ocho unidades (se trabajan 2 unidades por bimestre). El tema que tratamos es el de las tareas de áreas de cuadriláteros convexos, concretamente, en la unidad 5, el tema 2 (p. 146-165), el cual está dedicado al tratamiento del estudio de polígonos, esencialmente, el de áreas de cuadriláteros.

Fase de planificación

Asimismo, se formularon los objetivos de investigación y se eligió el marco teórico a utilizar (Cap. II): para nuestra investigación, este fue el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática- EOS, por las herramientas teóricas de análisis que este enfoque ofrece y por los niveles bien definidos de su estructura, con las configuraciones epistémicas que permiten analizar el problema desde diferentes dimensiones y los procesos de idoneidad didáctica. También elegimos los dos libros de textos de matemática, para elaborar el significado institucional de referencia del objeto matemático de área de cuadriláteros, y seleccionamos dos libros de texto de educación secundaria para elaborar el significado institucional pretendido.

Fase de recojo y análisis de la información

En esta etapa de la investigación, realizamos la recolección de datos, que consistió en identificar las tareas de los dos libros de textos de secundaria de matemática del VI ciclo de EBR y se realizó la elaboración de las configuraciones epistémicas con las herramientas del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemático EOS, sobre la base del análisis de los significados institucionales de referencia y pretendido (Caps. V y VI). La finalidad de esta fase fue fijar el significado institucional de referencia y el significado pretendido para, luego, valorar mediante la idoneidad epistémica, los libros de texto de 1° y 2° año de secundaria.

Fase de retirada del escenario

En esta fase, una vez fijado el significado de referencia de los libros de textos formales, elaboramos las configuraciones epistémicas de las tareas y actividades relacionados con las áreas de cuadriláteros convexos de los textos de secundaria seleccionados y elegidos; y de los libros de matemáticas formales.

Fase de elaboración del informe

Para la elaboración del informe, usaremos un cuadro de procedimientos y estrategias del análisis de los libros de textos de secundaria y de matemática y, finalmente, redactaremos las conclusiones que obtuvimos en esta investigación.

Sobre la base de los objetivos ya mencionados, plantearemos las estrategias y procedimientos para el registro de la información, así como para el análisis de los textos matemáticos y de secundaria. En la Tabla Nº 7, se detallan los procedimientos y estrategias planteados.

4.2. Aplicación de la Metodología seleccionada a la investigación.

En la siguiente tabla se muestra la aplicación de los procedimientos y estrategias por objetivos.

Tabla 7. Procedimientos y estrategias por objetivos específicos

OBJETIVO GENERAL: Analizar el significado institucional pretendido en torno a áreas de cuadriláteros convexos en el VI ciclo de Educación Básica Regular de las instituciones públicas del país.		
OBJETIVOS ESPECÍFICOS	ACCIONES POR OBJETIVO	ACCIONES POR CADA ACTIVIDAD
1.Describir el significado de referencia a partir de textos matemáticos e investigaciones relacionadas con áreas de cuadriláteros convexos.	Considerar algunos resultados de las tesis doctorales desarrollados por Freudenthal (1983), Corberán R. (1996), Marmolejo G. (2014) Para describir el significado de referencia en nuestra investigación.	- Analizamos y describimos el significado de referencia como patrón para elaborar el significado pretendido del objeto matemático de áreas de cuadriláteros convexos contenidos en los libros de texto de secundaria.
	Seleccionar los libros de texto a analizar *Geometría Básica Curso* (Verástegui 2003) y *Geometría* (Alexander 2013)	- Recurrimos a los documentos oficiales y bibliográficos para elegir los textos formales de matemática sugerida a los estudiantes y docentes. - Decidimos seleccionar 2 libros de texto matemático de educación superior. Los textos seleccionados se usan como texto de consulta para la enseñanza de educación superior.
	Elaborar la configuración epistémica del tema de áreas de cuadriláteros convexos contenidos en los 2 libros de texto seleccionados y descritos para determinar los objetos matemáticos emergentes e intervinientes en las tareas.	- Elaboramos la configuración epistémica del objeto matemático de áreas de cuadriláteros convexos contenidas en los 2 textos de matemática superior elegidos. - Elaboramos la configuración epistémica para determinar de manera puntual los objetos matemáticos (situaciones-problemas, lenguajes, definiciones,

		procedimientos, proposiciones y argumentos) presentes en los temas relacionadas y, para lograrlo, recurrimos a la técnica del análisis, teniendo como instrumento la tabla de configuración epistémica proporcionado por el EOS.
2.Describir el significado pretendido a través de las tareas de áreas de cuadrilátero convexos contenidos en dos libros de texto oficiales del nivel de secundaria	Analizar los libros de texto de educación secundaria distribuidos a los estudiantes por el Ministerio de Educación; los contenidos respecto a áreas de cuadriláteros convexos, de acuerdo al diseño curricular nacional (DCN); e identificar las tareas matemáticas con las herramientas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).	- Seleccionamos los libros de texto que utilizan los alumnos de segundo año de educación secundaria de las instituciones educativas públicas de nuestro país que están alineados en el diseño curricular nacional de Educación Básica Regular en Perú (2009). Para nuestro estudio, consideramos el VI ciclo, por ello, los textos seleccionados corresponden al 1º y 2º grado de educación secundaria, los mismos que son distribuidos a los estudiantes y profesores a nivel nacional por el Ministerio de Educación del Perú.
	Elaborar la configuración epistémica del tema de áreas de cuadriláteros convexos contenidos en los libros de texto seleccionados: el texto oficial de 1ro. y 2do. año de secundaria que forman parte de los textos de consulta para docentes y estudiantes.	- Elaboramos la configuración epistémica de las tareas de áreas de cuadriláteros convexos contenidas en los dos textos oficiales de secundaria cuyo propósito es determinar de manera puntual los objetos matemáticos primarios (situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos) presentes en los temas relacionadas.
3. Valorar la idoneidad epistémica de las tareas de áreas de cuadriláteros convexos contenidos en los dos libros de texto analizados.	Elaborar los criterios de idoneidad epistémica.	Para cumplir con este objetivo específico se plantea realizar lo siguiente: Verificar si se cumplen, en los libros de texto analizado, los descriptores que se consideran en la matriz de idoneidad epistémica.

Fuente: elaboración propia

Seguidamente presentamos la descripción del significado institucional de referencia a partir de investigaciones y textos formales de matemática.

CAPITULO V SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA

El significado institucional de referencia es el sistema que se usa como patrón para elaborar, describir o analizar el significado pretendido de un objeto matemático. Según Wilhelmi, et ál. (2007), en una institución específica (en nuestro caso consideramos las instituciones educativas del nivel secundario), este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático en estudio. Así, el objetivo de este capítulo consiste en describir y fijar el significado institucional de referencia sobre áreas de cuadriláteros, para nuestra investigación. Dado que, para determinar dicho significado se hace necesario, entre otros aspectos, un estudio histórico y epistemológico sobre el origen y evolución del objeto de áreas de cuadriláteros como son cuadrado, rectángulo, paralelogramo, rombo y trapecio, consideramos las siguientes dos etapas:

Primero, consideramos las investigaciones doctorales en las que mostraremos un resumen de las diferentes aproximaciones didácticas con sus respectivos ejemplos.

Segundo, analizamos dos libros de textos que hemos seleccionado para este fin, centrándonos en los capítulos que tratan el objeto matemático en estudio, clasificándolos y describiendo los elementos de significado de áreas de cuadriláteros convexos. Se añaden, además, algunos ejemplos que permiten visualizar mejor esta clasificación. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico de áreas de cuadriláteros convexos, y una investigación epistemológica sobre el origen y evolución del objeto de estudio.

El propósito es verificar a través de la historia como ha evolucionado la magnitud área, que tradicionalmente, ha sido estudiada a partir de un enfoque aritmético, en el que sobresale el uso de fórmulas, las conversiones de unidades y las aplicaciones enmarcadas bajo el área de polígonos. Actualmente, se considera que, antes de la aritmetización del área, se debe establecer un tratamiento a través de la medición, en la cual se integren los variados matices y aplicaciones prácticas que tiene esta magnitud, para concluir en que se llega al concepto de *área* a partir de múltiples contextos como aquellos en los que se debe repartir equitativamente, a partir de situaciones en las que hay que comparar y reproducir áreas, y, por último, en situaciones en las que se debe medir.

Asimismo, la fenomenología del área, está estrechamente relacionada con las necesidades del hombre, (necesidad por medir algo). Freudenthal (1983) indica tres aproximaciones del concepto de área:

1. Repartir equitativamente: actividad en la que se incluyen situaciones en que un objeto hay que repartirlo.
2. Comparar y reproducir: actividad en la que se incluyen situaciones en que hay que comparar dos superficies y obtener una reproducción de una superficie de forma diferente a la que tiene.
3. Medir: proceso que incluye situaciones en las que la superficie aparece ligada a un proceso de medición, ya sea para comparar, repartir o valorar.

El análisis fenomenológico de área se describe por medio de una organización y se manifiesta la relación entre dicho concepto y los fenómenos, Freudenthal (1983), manifiesta que los conceptos desde la fenomenología se tratan como procesos cognitivos que, situados en el contexto educativo, permiten organizar su enseñanza. Según García (2013), los fenómenos organizados para el concepto de área son variados y pueden construir objetos mentales diferentes según el campo de fenómenos que se elija para incursionar en su enseñanza.

Tabla 8: **Los fenómenos como medio de organización**

FENOMENOLOGÍA	DANDO LUGAR AL ÁREA COMO
REPARTIR EQUITATIVAMENTE A TRAVÉS	PORCIÓN DEL PLANO OCUPADO
Regularidades	
Estimación	
Medida	
COMPARAR Y REPRODUCIR POR	
Inclusión	TÉRMINO DE ENCUBRIMIENTO DEL PLANO
Transformación de componer y descomponer	
Estimación	
Medida	
Funciones	
MIDIENDO POR	ALGORITMO DEL CÁLCULO
Exhausión con unidades	
Por cuadriculación	
Transformación de romper y rehacer	
Medio de relaciones geométricas	
Medio de fórmulas generales	
Medio transformaciones(equivalencias)	

Fuente: García (2013, pp.66)

Por otro lado, los fenómenos que se presenta son ejemplificados por cada orgnizador para luego ubicar por campos de problemas y finalmente realizar las configuraciones epistémicas para los elementos primarios que determina el EOS.

A pesar que la investigación estaba basado en polígonos regulares, sin embargo los ejemplos que se enmarcan son para cuadriláteros, ello nos permite profundizar el estudio de área de cuadriláteros convexos.

5.1. Aproximaciones didácticas sobre áreas de cuadriláteros.

Freudenthal (1983), matemático alemán, dedica, en uno de sus libros más importantes, un apartado a la fenomenología didáctica del concepto área. Las aproximaciones que considera más importantes son las siguientes:

a) Repartir equitativamente:

Se presenta ante situaciones en las que, a partir de cierta superficie, hay que distribuirla de manera equitativa, puede darse en momentos como los siguientes:

R1: *Aprovechando regularidades*. Tiene lugar en situaciones de reparto equitativo sobre determinada región de área. Si la forma de dicha región es regular, se puede aludir a una distribución equivalente a fin de obtener secciones iguales.

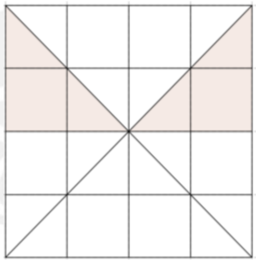


Figura 17. Cuadrado dividido en partes
Fuente: elaboración propia

R2: *Por estimación*. Consiste en superponer las partes posibles en que se desea repartir determinada superficie hasta obtener partes iguales.

En el ejemplo de la Figura Nº 18, se muestra cómo se subdivide la unidad en partes iguales más pequeñas para realizar una buena estimación del área de los segmentos de la superficie en la que no "cabía" de forma entera la unidad, o bien para recomponer la unidad con los trozos sobrantes.

	SUPERFICIE (A)	SUPERFICIE (B)	SUPERFICIE (C)
GRUPO 1	subdividen la unidad y la recomponen	subdividen la unidad y la recomponen	recomponen la unidad

Figura 18. División en unidades cuadradas
Fuente: Corberán (1996, p.306)

R3: *Por medida*. Consiste en determinar la medida de área de la superficie a repartir (o tomar como referencia una medida de área si es que se conoce) y dividir el resultado en el número de partes en que se desea hacer tal repartición, a fin de que sean iguales.

En el ejemplo de la Figura Nº 19, se muestra que el área del cuadrado pequeño mide 4cm, de acuerdo con ello, se puede preguntar: ¿Cuánto mide el área del cuadrado grande?

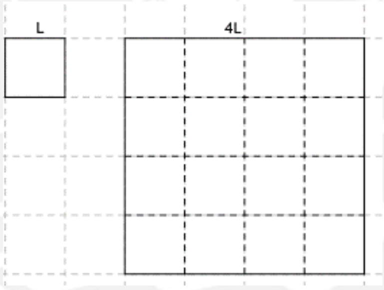


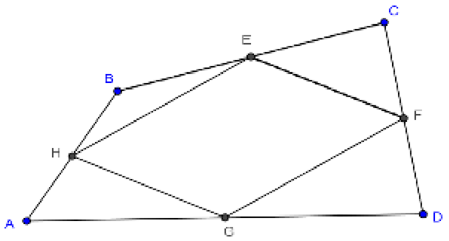
Figura 19. Repartir cuadrado en unidades
Fuente: Corberán (1996, p.260)

b) **Comparar y reproducir:**

Se incluyen aquellas situaciones en las que hay que comparar dos superficies y también aquéllas otras en las que hay que obtener una reproducción de una superficie con una forma diferente a la que tiene; por ejemplo, dibujar un cuadrado que tenga la misma área que un triángulo dado.

C1: *Por inclusión*. Si una superficie está contenida en otra, su comparación es inmediata, así, si un libro está sobre una mesa, la superficie de su portada es menor que la mesa.

En el ejemplo de la Figura Nº 20, se muestra que el área del rombo es la mitad del área del trapezoide.



Área ABCD = 11,46 cm2

Área EFGH = 5,73 cm2

$$\frac{\acute{A}REA\ ABCD}{\acute{A}REA\ EFGH} = 2$$

Figura 20. Por puntos medios se genera un área
Fuente: Contreras (2013, p. 35)

C2: *Por transformaciones de romper y rehacer*. Consiste en descomponer una superficie en diversas partes y reorganizarlas posteriormente, para obtener formas diferentes que poseen la misma área. Tal es el caso de las diferentes figuras que pueden realizarse con un Tangram. En la enseñanza de las matemáticas, el Tangram se usa para introducir conceptos de geometría plana; y para promover el desarrollo de capacidades psicomotrices e intelectuales de los niños y jóvenes, pues permite ligar de manera lúdica la manipulación concreta de materiales con la formación de ideas abstractas, como se muestra en la Figura Nº 21.

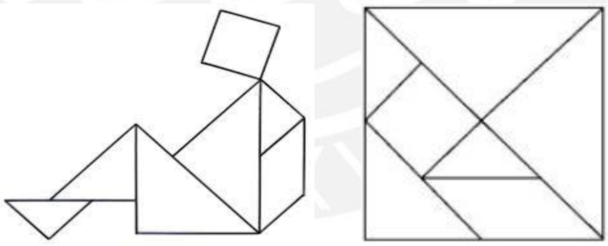


Figura 21. Descomposición del Tangram
Fuente: Corberán (1996, p.258)

C3: *Por estimación*. Es posible estimar la región de área que ocupa determinada superficie a partir de la percepción visual sin que se requiera como dato la medida de su área. En el caso de que se involucren más de dos superficies, entonces se pueden comparar. Esto se muestra en la Figura 22.

Figura 22. Descomposición de la superficie
Fuente: Marmolejo (2014, p.132)

C4: *Por medida*. Para comparar dos superficies lo más habitual es recurrir a medir, sobre todo cuando la diferencia entre las dos superficies a comparar es muy pequeña; la medida también se puede aplicar para obtener copias de otra superficie.

En el ejemplo de la Figura 23, se muestra que el cuadrado A se divide en tres piezas y se recompone, sin superponerlas, en dos nuevas formas B y C. Se pueden plantear preguntas como ¿qué figura tiene mayor área?, ¿las figuras tienen la misma área o no se sabe?

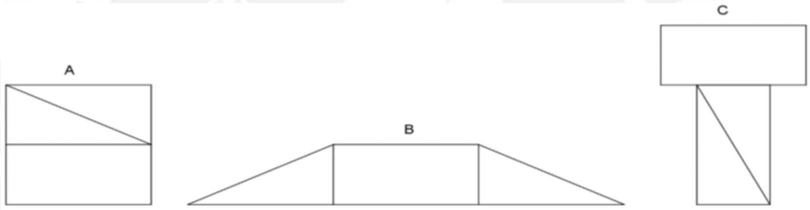


Figura 23. Descomposición de un cuadrado
Fuente: Corberán (1996, p.261)

C5: *Por medio de funciones*. En la Figura Nº 24, se muestra un sistema de coordenadas bidimensional (en un plano). Este es un sistema en el cual un punto puede moverse en todas direcciones, manteniéndose siempre en el mismo plano. El sistema más usado es el sistema de coordenadas rectangular u ortogonal más conocido como Plano Cartesiano.

Este sistema está formado por dos rectas perpendiculares entre sí, llamadas ejes de coordenadas (eje de las x y eje de las y). Un tipo de pregunta sobre este tema es encontrar el área una figura: en un plano cartesiano, dibuje un paralelogramo con coordenadas cuyos de vértices son: $A = (0, 0)$, $B = (2, 4)$, $C = (9, 4)$ y D = (7, 0), determine su área. Cuya solución es: altura equivale 4 y la base equivale 7 entonces el área del paralelogramo es 28 unidades.

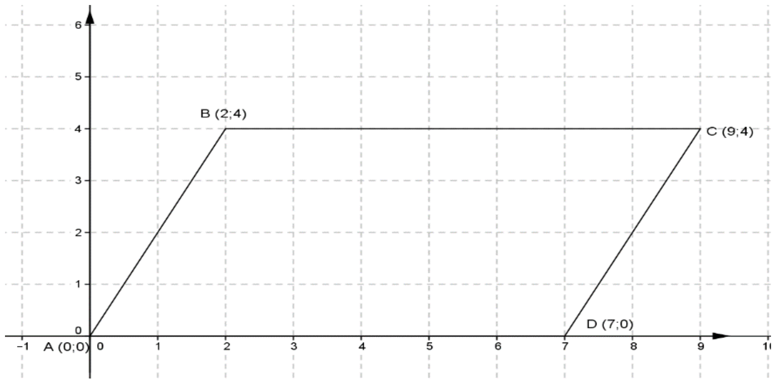


Figura 24. Área por coordenadas
Fuente: Rosero (2012, p.79)

c) **Medir:**

Las superficies aparecen relacionadas con una diversidad de procesos de medición, en el que aparecen además, la comparación, la conservación, el reparto y el cálculo. Suelen llevarse a cabo mediante métodos como los siguientes:

M1: *Por exhaución con unidades*: consiste en rellenar el interior de la superficie a medir con unidades de superficie, colocadas unas junto a otras y no superpuestas, y, en aquellas partes de la superficie donde no entran, se recurre al llenado con unidades más pequeñas. Este proceso se continúa hasta que se recubra totalmente la superficie a medir o se considera que la porción no recubierta es despreciable para la actividad que estamos realizando. Esta técnica no es muy práct**ica.**

En el ejemplo de la Figura Nº 25, se observa la importancia asignada al cálculo del área por sobre la comprensión de las magnitudes involucradas. En este caso, dadas las medidas, se pide recubrir o rellenar áreas con metros cuadrados de baldosas que se necesiten con losetas cuyas áreas es proporcional al área de la figura.

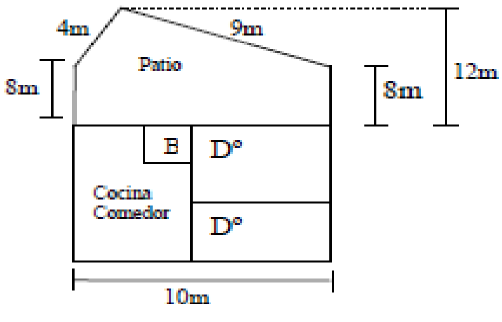


Figura 25. Recubrir con baldosas el área
Fuente: Gutiérrez, (2011, p.28)

M2: *Por cuadriculación*: consiste en obtener una medida aproximada, de entre un valor superior e inferior, de cualquier superficie. Para ello, se superpone una rejilla cuadrada (1 cm. de lado, por ejemplo) a la superficie a medir, y se cuenta el número de cuadrados que son totalmente interiores en la superficie; y, por otra parte, el número de cuadrados que intersecan a la superficie. Tendremos así una medida aproximada por efecto y otra por exceso. Presentamos el ejemplo por cuadriculación en la figura Nº 26, la cual considera como unidad del área el cuadrado (A) y como unidad de longitud (L).

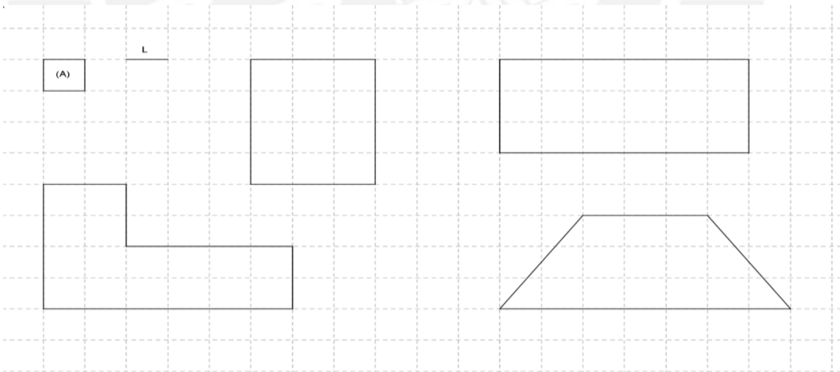


Figura 26. Cuadriculación para medida exacta
Fuente: Corberán (1996, p.291)

M3: *Por transformaciones de deshacer y recompone*r: es un proceso por el que se suelen deducir las fórmulas de las figuras geométricas en el nivel secundario. Por ejemplo, en la Figura Nº 27, se muestra el cálculo del área de un cuadrado mediante el proceso de transformación a dos triángulos rectángulos, y finalmente se recompone en un triángulo equilátero.

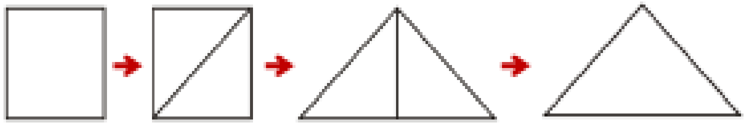


Figura 27. Transformación de deshacer y recomponer
Fuente: Corberán (1996, p.296)

M4: *Por medio de relaciones geométricas generales*: este es el procedimiento usual para calcular una superficie, midiendo sus dimensiones lineales, por medio de fórmulas, obtener su dimensión, por ejemplo, a través de aplicación la geometría euclidiana (teoremas, axiomas, definiciones, etc.).

Demostración: diseña un rectángulo que tenga igual área que el rombo de la figura y muestra cómo se hace. Las medidas de las diagonales del rombo son 4 y 7 unidades respectivamente y las medidas de los lados del cuadrilátero son 2 y 7 respectivamente. Además son equivalentes las medidas de diagonal (d') = altura (h) y diagonal (d) = base (b). Por lo tanto el área rombo es equivalente al área del rectángulo.

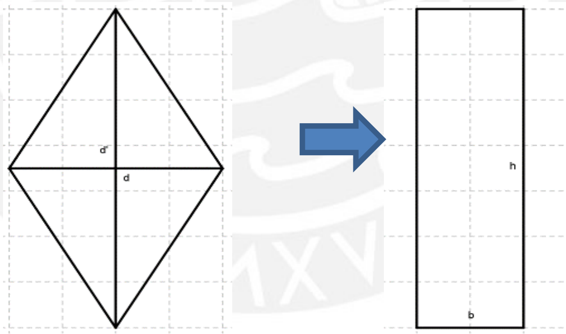
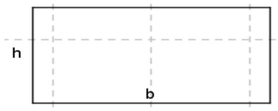
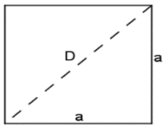
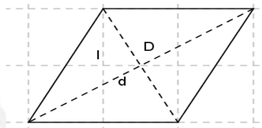
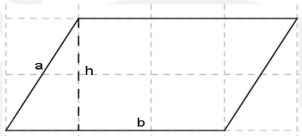
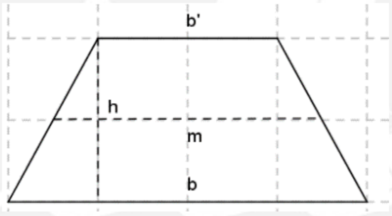


Figura 28. Transformación de medidas
Fuente: Corberán (1996, p.186)

M5: *Por medio de fórmulas generales*: otra forma de representar algebraicamente el cálculo de áreas lo constituyen las fórmulas.

Tabla 9. Formulario de áreas de cuadriláteros convexos

Nombre	Figura	Fórmula
Rectángulo		$A = b \times h$
Cuadrado		$A = a^2$
Rombo		$A = \frac{D \times d}{2}$
Paralelogramo		$A = b \times h$
Trapecio		$A = \frac{(b + b') \times h}{2}$

Fuente: Godino (2004, p.401)

M6: *Por medio de transformaciones (congruencias, afinidades, equivalencias, etc.)*: todo triángulo es equivalente a un paralelogramo de igual base y mitad de altura, o a un paralelogramo de igual altura y mitad de base, o a la mitad de un paralelogramo de igual base e igual altura.

En los ejemplos de la Figura Nº 29, los puntos medios de los lados, MCN son congruentes con M'BN, y, por suma, serán equivalentes al triángulo ABC y al paralelogramo AMM'B, de igual base y mitad de altura. En el segundo caso si N es el punto medio de BC, se tendrá que $\Delta NMB = \Delta NM'C$, y el triángulo ABC es equivalente, por suma, al paralelogramo ACM'M de igual altura y mitad de base que el triángulo.

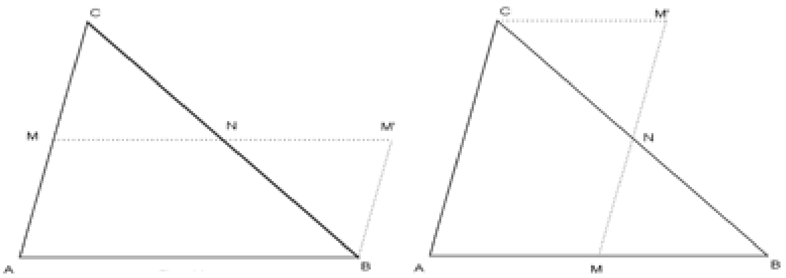


Figura 29. Equivalencia de triángulos
Fuente: Bruño (1996, p.334)

Por otro lado, Marmolejo (2014), resalta la importancia de esta primera categoría de análisis no solo en cuestiones de naturaleza visual, también en el papel que la visualización desempeña en la comprensión del concepto de área de cuadriláteros. Por ello presenta las operaciones y ejemplos que los libros de texto movilizan al suscitar el estudio del área así como algunas de las tareas y propiedades matemáticas en las de su aplicación en cuadriláteros, como se ilustra en la Tabla 10.

Tabla 10. Clasificación de tareas por Marmolejo

OPERACIÓN	TAREA	PROPIEDAD
a) RECONFIGURACIÓN	Transformación de una figura en otra con diferente contorno visual e iguales áreas	Relación de equivalencia
b) CONFIGURACIÓN	Producción de regiones poligonales rectilíneas a partir de la unión de regiones previamente dadas	Adición de áreas.
c) ANAMORFOSIS	Variación del área y conservación de la forma	Relación de orden
d) SUPERPOSICIÓN	Pavimentación de superficies. Cálculo de área de regiones sombreadas.	Medida de área y unidad de medida.
e) FRACCIONAMIENTO	Repartos equitativos de regiones poligonales. Comprensión de fórmulas.	

Fuente: Marmolejo (2014, pp.116)

A continuación, describiremos cada uno de las subdivisiones que consideramos de acuerdo a Marmolejo (2014).

En esta etapa, se observan operaciones visuales (reconfiguración simple, reconfiguración por exceso, reconfiguración por ensamblaje de partes, configuración simple, configuración por reiteración, configuración por simetría, agrandamiento, achicamiento, por arrastre, traslación, rotación, simetría axial, cuadratura, superposición directa, superposición inversa, fraccionamiento y re-fraccionamiento).

a) *Reconfiguración*: en la Figura Nº 30, se muestra una reconfiguración simple de un cuadrado en un triángulo isósceles.

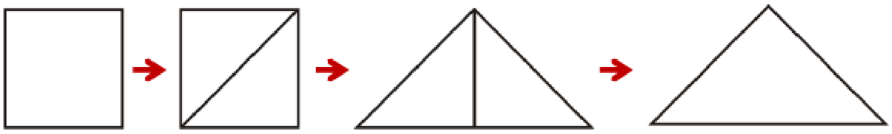


Figura 30. Reconfiguración simple
Fuente: Marmolejo (2014, p.117

b) *Configuración*: en la (Figura Nº 31), se muestra una configuración simple aplicada a un cuadrado y dos triángulos para formar un rectángulo.

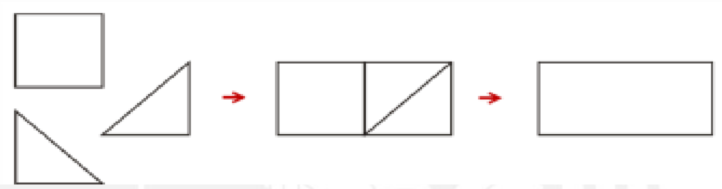


Figura 31. Configuración simple
Fuente: Marmolejo (2014, p.119

c) *Anamorfosis*: se aplica sobre la figura de partida un proceso de deformación continuo. Aparece en los manuales escolares de tres maneras diferentes: por agrandamiento, cuando el proceso de deformación mantiene invariante la forma de la figura y las relaciones entre sus unidades constituyentes ocasiona un aumento en su cantidad de superficie; por achicamiento, ocasiona una disminución en su cantidad de superficie; y por arrastre (se muestra en la (Figura Nº 32), en la cual se transforma un rectángulo en un paralelogramo.

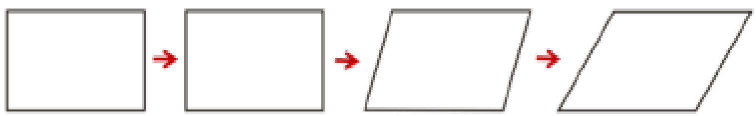


Figura 32. Transformación por arrastre
Fuente: Marmolejo (2014, p.120

d) *Cuadratura:* el contorno de la figura de partida es curvilíneo y se representa sobre un fondo cuadriculado. Calcular de manera exacta y directa su área no es posible. Es necesario aplicar una estimación. Teniendo en cuenta el contorno de la figura de partida y las líneas que conforman el fondo cuadriculado, se dibuja una nueva figura de contorno rectilíneo, sobre la cual sí es factible calcular la medida de su área. En la figura 33, se muestra la cuadratura curvilínea en un área rectangular. Cada cuadrado de la cuadricula en que resalta la figura tiene por medida 1 cm$^{2.}$ y se calcula de modo aproximado igual a 18 m^2.

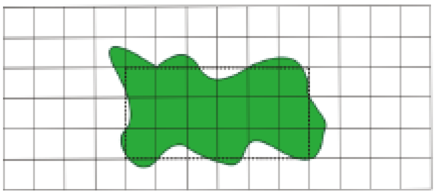


Figura 33. Cuadratura de figura no poligonal
Fuente: Marmolejo (2014, p.121)

e) *Superposición*: en el ejemplo de la figura 34, se muestra la superposición del octágono en el cuadrado en la aplicación para calcular el área de la segunda figura a partir de la primera.

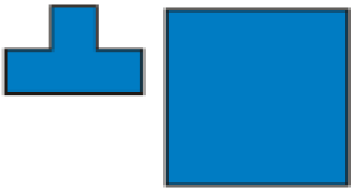


Figura 34. Superposición el octágono en un cuadrado
Fuente: Marmolejo (2014, p.122)

f) *Fraccionamiento*: Es un procedimiento de la descomposición bidimensional de una figura en sus figuras o subconfiguraciones. Este tipo de operaciones está presente en tareas en las que se solicita transformar una figura en otra de contorno distinto e igual área, dividir la cantidad de área de una figura en partes iguales y calcular el área de figuras irregulares mediante la aplicación de fórmulas de áreas básicas (cuadrado, triangulo, rectángulo, entre otras). En el ejemplo de la figura Nº 35, se muestra el refraccionamiento que enfatiza la discriminación de las subconfiguraciones rectangulares.

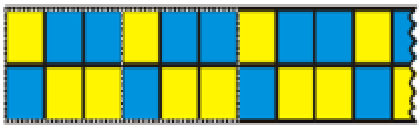


Figura 35. Refraccionamiento rectangular
Fuente: Marmolejo (2014, p.123)

En la siguiente tabla resumimos la relación que existe entre las formas de ejemplificar por Corberán y Marmolejo al realizar las operaciones de área de cuadriláteros, siguiendo la propuesta de Freudenthal (1983).

Tabla 11. Relaciones de ejemplificación de procedimientos

Concepto	CORBERÁN (1996) (propuesta de Freudenthal)	MARMOLEJO (2014) (visualización)
Repartos equitativos de regiones poligonales. Comprensión de fórmulas.	REPARTIR EQUITATIVAMENTE	FRACCIONAMIENTO
Transformación de una figura en otra con diferente contorno visual e iguales áreas.	TRANSFORMACIONES	RECONFIGURACIÓN
Pavimentación de superficies. Cálculo de área de regiones sombreadas.	EXHAUCIÓN	SUPERPOSICIÓN
Variación del área y conservación de la forma	CONVERSIÓN	ANAMORFOSIS

Fuente: elaboración propia

5.2 Análisis de los libros de texto seleccionados.

En primer lugar, en nuestra investigación es necesario identificar los textos que servirán de referencia teórica matemática. Consideraremos algunos libros de textos de matemática que se emplean para el estudio de la geometría en el nivel superior. Estos se muestran en la Tabla Nº 12, con una descripción breve acerca de su contenido enfoque y fines.

Tabla 12. Descripción de los textos para la construcción del significado

Código	Título	Autores	Año	Descripción
A	*Geometría Básica* Curso 1	Teódulo Verástegui	2003	Este texto es usado para la enseñanza de la geometría a los alumnos del nivel superior empleando el método axiomático.
B	*Geometría*	Daniel Alexander	2013	Este libro está dirigido a estudiantes del nivel superior y sirve de reforzamiento para aprender los principios de la geometría.

Fuente: elaboración propia

Consideramos los los libros de textos A y B más relevantes para la construcción del significado institucional de referencia del objeto matemático en estudio.

Según el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemático EOS, es necesario identificar las situaciones problemáticas que originan estos significados. En particular, en nuestra exploración teórica previa, hemos identificado los diferentes tipos de situaciones - problema o campo de problemas sobre áreas de cuadriláteros convexos propuesta por Freudenthal y analizamos en los dos textos matemáticos.

1) Problemas que contienen situaciones que incluyen demostraciones de áreas de cuadriláteros convexos
2) Problemas que implican la repartición equitativa de áreas de cuadriláteros convexos aprovechando regularidades por estimación o medición
3) Problemas que se resuelven a través de la comparación y la reproducción de áreas de cuadriláteros convexos
4) Problemas que se resuelven usando las mediciones de áreas de cuadriláteros convexos
5) Problemas que se resuelven usando el método directo para medir áreas de cuadriláteros.

Luego, construiremos 5 configuraciones epistémicas del objeto matemático *área de cuadriláteros en contextos geométricos*, para lo cual será necesario identificar los otros objetos primarios que darán forma a estos significados.

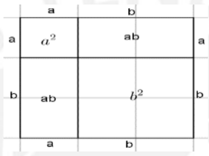
5.2.1. Descripción detallada de los elementos de significado para cada una de las situaciones problemas identificadas en los textos.

Para elaborar cada configuración epistémica hemos tenido en cuenta el campo de problemas identificados en los textos: por demostración, por repartición equitativa, por comparación y reproducción, por mediciones, por el método directo y problemas de contexto en función a los campos de problemas se ha descrito los elementos primarios (situación problema, lenguaje, definiciones, proposiciones y argumentos). Luego elaboramos las siguientes configuraciones:

1) Configuración epistémica del campo de problemas que contiene situaciones que incluyen demostraciones de áreas de cuadriláteros convexos.

   Del estudio del libro de texto matemático se ha obtenido la siguiente configuración epistémica con relación al campo de problemas por demostraciones.

Tabla 13. Configuración epistémica de campo de problemas por demostración de referencia

Problema: En esta configuración se consideran problemas que contienen situaciones que incluyen demostraciones de áreas de cuadriláteros convexos. Texto A (p. 191) Ejemplo: Demostrar el siguiente teorema: Si el lado del cuadrado está dividido en dos segmentos, el área total de este cuadrado es la suma de las áreas de los dos cuadrados cuyos lados son estos dos segmentos, más dos veces el área del rectángulo cuyos lados contiguos son dichos segmentos.
Lenguaje ***Verbal:*** Relacionados con el contexto (contiguos) Términos verbales matemáticos (cuadrado, división, segmentos, suma, lados, rectángulo, áreas, más dos veces) ***Simbólico:*** $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ***Gráfico:*** 
Definiciones-conceptos Área de cuadrado, Área de rectángulo.
Proposiciones: ➢ Si el lado del cuadrado se divide en dos partes, una de longitud a y otra de longitud b, el lado del cuadrado tiene longitud $a+b$. ➢ $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
Procedimientos: Sumar, multiplicar, dividir, elevar al cuadrado, doble producto, cuadrado de un binomio, procedimiento algebraico, descomponer. Expresar la longitud del lado del cuadrado como $a+b$ y, luego, aplicar el producto notable del cuadrado de un binomio.
Argumentos: Demostración deductiva ***Argumento 1***: Descomponer el lado del cuadrado. (Gráfico 1). ***Argumento2:*** Descomponer el área de un cuadrado en dos cuadrados de áreas a^2 y b^2 respectivamente, y dos rectángulos de área *ab.* ***Argumento 3***: Aplicar el producto notable $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Fuente: elaboración propia

2) Configuración epistémica del campo de problemas que implican la repartición equitativa de áreas de cuadriláteros convexos aprovechando regularidades por estimación y medición.

Del estudio de los textos matemáticos se ha obtenido la siguiente configuración epistémica en relación al campo de problemas por repartición equitativa, y además contiene las siguientes subcategorías como son por regularidades, por estimación y por medida.

Tabla 14. Configuración epistémica de campo de problemas por repartición equitativa de referencia

Problemas:

En esta configuración epistémica se considera problemas que implican la repartición equitativa de áreas de cuadriláteros convexos aprovechando regularidades por estimación o medición.

R1: Por regularidades: Texto B (p. 354)

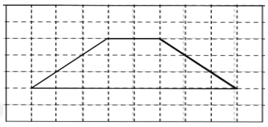
El rectángulo MNPQ tiene dimensiones de 3 y 4 cm. El número de cuadrados, de 1cm de lado, en el rectángulo es 12. Calcular el área contando el número de cuadrados que contiene la figura.

R2: Por estimación: Texto B (p.362)

Encuentre una estimación menor del área de la figura contando cuadrados enteros dentro de la figura.

R3: por medida: Texto B (p. 370)

Utilice la relación proporcional A_1/A_2 para comparar las áreas de dos cuadrados en los que cada lado del primer cuadrado es 3 veces la longitud de cada lado del segundo cuadrado.



Lenguaje

Verbal:

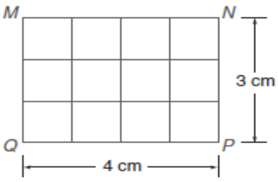
Relacionados con el contexto (limita, cubren, dentro)

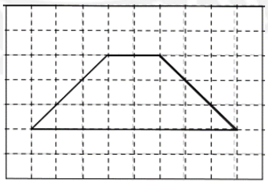
Términos verbales matemáticos (calcular, región cuadrada, congruentes, región plana, medir, área, relación proporcional, contando, cuadrados, perímetro, estimación)

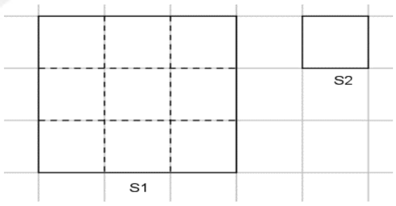
S***imbólico:***

- MNPQ; 3 y 4 cm
- $\frac{A_1}{A_2}$; $S_1 = 3S_2$; $\frac{S_1}{S_2} = 3$; $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2$; $\frac{A_1}{A_2} = (3)^2$; $\frac{A_1}{A_2} = 9$

Gráfico:







Definiciones-conceptos

Área de cuadrado, proporcionalidad, área de rectángulo, perímetro, estimación.

Proposiciones:

- Si un rectángulo tiene 3 y 4 cm. En sus lados, entonces el número de cuadrados es 12.
- Determina el área por el método de conteo de cuadrados contenidos en la superficie.
- $S_1 = 3S_2$ por tanto $\frac{S_1}{S_2} = 3$

- $\frac{S_1}{S_2} = (3)^2$; $\frac{A_1}{A_2} = 9$ - El área del primer cuadrado es 9 veces el área del segundo cuadrado.
Procedimientos: - Multiplicar, dividir, determinar proporcionalidad, sumar, elevar al cuadrado, resolver problemas, razonamiento algebraico. - Contar el total de cuadrados contenidos en la figura. - Estimar y componer la cantidad de cuadrados enteros contenidos en la figura geométrica. - Relacionar utilizando proporcionalidad.
Argumentos: Razonamiento cualitativo y cuantitativo. ***Argumento 1:*** Si una figura se descompone en partes, el área total de la figura es igual a la suma del área de las partes. ***Argumento 2:*** Deducir y aplicar la fórmula del área del rectángulo: $A = base\ x\ altura$ ***Argumento 3:*** Estimar una menor área de cuadriláteros con los cuadrados enteros. ***Argumento 4:*** Al reconfigurar una figura geométrica, se conserva su área. ***Argumento 5:*** Comparar el área de los cuadrados por medio de la relación de proporcionalidad de $S_1 = 3S_2$ por tanto $\frac{S_1}{S_2} = 3$ ***Argumento 6:*** Si S_1 y S_2 son los lados de un cuadrado, entonces $\frac{S_1}{S_2} = k$; $\frac{A_1}{A_2} = k^2$ siendo A_1 y A_2 las áreas de dichos cuadrados.

Fuente: elaboración propia

3) Configuración epistémica del campo de problemas relacionados a la comparación entre dos o más superficies, la reproducción de una superficie en otra de distinta forma pero de igual área o conservando el área. Para ello, los problemas pueden verse a través de la inclusión, transformación, estimación, medición o uso de funciones de áreas de cuadriláteros convexos.

Del estudio de los textos matemáticos o formales se ha construido la siguiente configuración epistémica en relación al campo de problemas por comparación y reproducción, 5 subcategorías por inclusión, por transformación, por estimación, y por medidas.

Tabla 15. Configuración epistémica de campo de problemas por comparación y reproducción de referencia

Problemas:

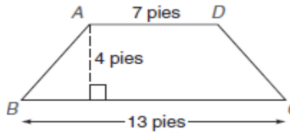
Configuración epistémica de problemas relacionados con la comparación entre dos o más superficies, la reproducción de una superficie en otra de distinta forma pero de igual área o conservando el área. Para ello, los problemas pueden resolverse a través de la inclusión, transformación, estimación, medición o el uso de funciones de áreas de cuadriláteros convexos. Según la propuesta de (Freudenthal, 1983).

C1: Por inclusión: Texto B (p.372)

El cuadrado RSTV está inscrito en el cuadrado WXYZ, como se muestra. Si ZT=5 y TY=12. Encuentre el área de RSTV.

C2: Por transformación de romper y rehacer: Texto A (p.189)

Con las piezas del rompecabezas Tangram, construya diversas figuras que tengan forma de un rectángulo, un paralelogramo, un trapecio isósceles, un hexágono no regular, letras del alfabeto A y G.



Trapezoide $ABCD$ con $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

C3: Por estimación: Texto B (p.370)

Encuentre el área del cuadrilátero.

C4: Por medida: Texto A (p. 192)

Al variar (aumentar o disminuir) las longitudes de los lados de un rectángulo, se forma un nuevo rectángulo. Determina la variación (aumento o disminución) del área de una región rectangular con sus dimensiones dadas:

a) 12 cm y 20 cm, y se aumenta 1 cm a cada lado.

C5: Por medio de funciones: Texto A (p.371)

Para el cuadrilátero cíclico ABCD, encuentre el área si AB= 39mm, BC=52mm, CD=25mm y DA=60mm.

Lenguaje

Verbal:

Relacionados con el contexto (construya, variación, cíclico, forma, , piezas, Tangram, figura)
Términos verbales matemáticos (área, cuadrado, dimensiones, contando cuadriláteros, rectángulos, paralelogramo, trapecio isósceles)

Simbólico:

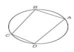
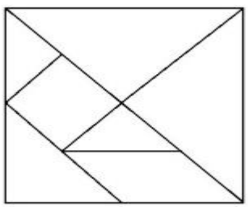
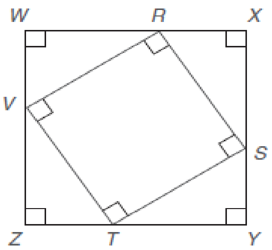
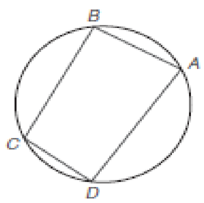
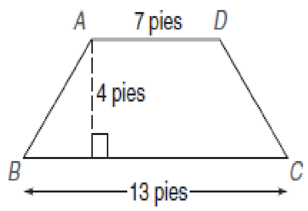
- RSTV; WXYZ; ZT=5 y TY=12.
- A y G.
- 12 cm y 20 cm,
-  ABCD, AB= 39mm, BC=52mm, CD=25mm y DA=60mm.

Gráfico:









Trapezoide $ABCD$ con $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

Definiciones-conceptos

Tangram, área de cuadrado, rectángulo, paralelogramo, área de trapecio, descomposición o transformación, área de cuadrilátero cíclico.
Proposiciones: - El cuadrilátero formado por las cuatro hipotenusas es un cuadrado. - Descomponer las piezas del rompecabezas Tangram para transformar en figuras de cuadriláteros. - Si un cuadrilátero se descompone en otro igual, entonces los cuadriláteros son equivalentes. - Si $A_1 = A_1$, al aumentar una unidad a cada lado del cuadrilátero, entonces el área $A_2 > A_1$ - El área de un cuadrilátero inscrito es igual al área de un cuadrilátero en general.
Procedimientos: Multiplicación, potenciación, radicación, promedio, suma, descomposición, composición, aumento, resolución de problemas. - Cálculo de la hipotenusa del triángulo rectángulo por medio del teorema de Pitágoras - Cálculo del área del cuadrado. - Descomposición y construcción del Tangram en cuadriláteros. - Descomposición, construcción y cálculo del área del trapecio. - Estimación del área del trapecio sin utilizar la fórmula del cálculo del trapecio. - Comparación del cálculo de áreas cuando A1=A1 entonces A2>A1 - Cálculo del área del cuadrilátero inscrito cuyos lados miden AB= 39mm, BC=52mm, CD=25mm y DA=60mm.
Argumentos: Razonamiento cuantitativo y cualitativo. ***Argumento1:*** Por medio del teorema de Pitágoras $ZT^2 + TY^2 = ST^2$, calcula el lado del cuadrado formado al interior del cuadrado grande. ***Argumento 2:*** Por postulado de adición de áreas, el área del cuadrado mayor es igual al área del cuadrado menor más la suma de las áreas de los cuatro triángulos congruentes. $$(a+b)^2 = c^2 + 4\times\frac{ab}{2} \quad ; \quad a^2 + b^2 = c^2$$ ***Argumento 3:*** Descomponer el Tangram y componer figuras geométricas de cuadriláteros. ***Argumento 4:*** Por equivalencia, el área del trapecio es igual al área del rectángulo. $$A = \frac{1}{2}\mathrm{h}(\mathrm{b}_1 + \mathrm{b}_2) \approx A = b.h$$ ***Argumento 5:*** Por el aumento de 1 unidad a los lados del rectángulo, se resuelve: $$A_1 = 12\times 20 = 240 \qquad A_2 = 13\times 21 = 273$$ $$A_1 = A_1 \rightarrow A_2 \rangle A_1$$ ***Argumento 6:*** Aplicar la fórmula de Herón para encontrar el área de cuadriláteros inscritos en una circunferencia. $A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$ s= perímetro, lados= a, b, c, d

Fuente: elaboración propia

4) Configuración epistémica para el campo de problemas que se resuelven usando la medida, ya sea por un proceso de exhaución, cuadriculación, transformación, relaciones geométricas en general y aplicación de fórmulas de áreas de cuadriláteros convexos.

   Del estudio de los libros de textos matemáticos o formales se ha construido la siguiente configuración epistémica en relación al campo de problemas por mediciones 6 subcategorías: por exhaucion, por cuadricula, conversión de transformaciones de deshacer y rehacer, por medio de relaciones geométricas generales y por medio de fórmulas generales.

Tabla 16. Configuración epistémica de campo de problemas por medida de referencia

Problemas:

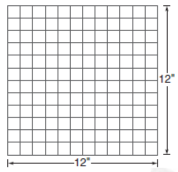
En la Configuración epistémica para el campo de problemas que se resuelven usando la medida, ya sea por un proceso de exhaución, cuadriculación, transformación, relaciones geométricas en general, aplicación de fórmulas de áreas de cuadriláteros convexos, según la propuesta de Freudenthal (1983).

M1: Por exhaución con unidades : Texto A (p.193)

El piso rectangular de una habitación de 6 metros de largo por 4 metros de ancho se desea cubrir con losetas de formas rectangulares, cuyas dimensiones son 20cm y 15cm por lado. ¿Será posible cubrir dicho piso con una cantidad exacta de losetas?

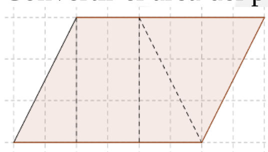
M2: Por cuadriculación: Texto B (p. 354)

Si pie=12 pulg., 1 pie^2 = 144 pulg^2, como se muestra en el cuadrado.



M3: Por conversión de transformaciones de deshacer y recomponer. Texto A (p.188)

Convertir el área del paralelogramo al área de un cuadrilátero.



M4: Por medio relaciones geométricas generales. Texto B (p. 355)

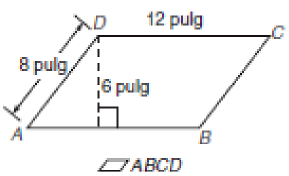
Encuentre el área del rectángulo ABCD, con las dimensiones AB=12 cm y AD = 7 cm

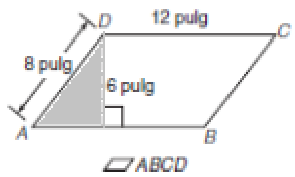
M5: Por medio de fórmulas generales. Texto B (p.367)

Dado que RS//VT, encuentre el área del trapecio, donde se observa que RS=5, TV=13 y RW=6.

M6: Por medio de transformaciones. Texto B (p.359)

Encuentre el área del paralelogramo que se describe por medio de transformaciones.





Lenguaje

Verbal:

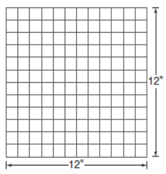
Relacionados con el contexto (habitación, piso, cubrir, losetas, formas, exacta, posible, figura, observa)

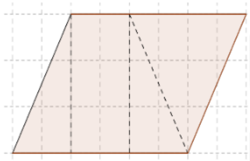
Términos verbales matemáticos (área, cuadrado, cuadriláteros, rectángulos, paralelogramo, trapecio isósceles, triángulo, trapecio, dimensiones, cantidad, altura, largo, ancho, metros, transformar).

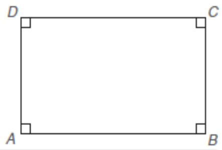
Simbólico:

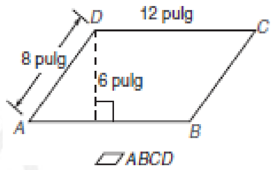
- 6 x 4m, 20cm y 15cm
- pie=12 pulg, 1 pie^2 = 144 $pulg^2$
- AB=12 cm y AD = 7 cm RS//VT, RS=5, TV=13 y RW=6.
- ▱ABCD; AD=8 pulg; DC=12 pulg;

Gráficos:









Definiciones-conceptos

Área de cuadrado, rectángulo, paralelogramo, descomposición, reconfiguración trapecios, área de cuadrilátero cíclico.

Proposiciones:

- Si el número que representa el área total del piso es múltiplo del número que representa al área de una loseta, entonces el piso puede ser cubierto por el número exacto de losetas.
- Si 1 pie equivale a 12 pulgadas, entonces 12x12= 144 por lo tanto 1pie^2 = 144 pulgadas
- Por descomposición se convierte en rectángulo.
- El área de un rectángulo es el producto de sus lados.
- El área de un trapecio es el producto de la altura por la semisuma de las bases.
- Si se transforma un paralelogramo en un rectángulo de igual base y altura, entonces las áreas de los cuadriláteros son equivalentes.

Procedimientos:

Sumar, multiplicar, dividir, convertir, comparar, aplicar.

- Dividir el área del piso entre el área de una loseta para saber cuántas losetas se necesitan para cubrir dicho piso.
- Multiplicar la medida de los lados de un cuadrado.
- Convertir un paralelogramo en un cuadrilátero.
- Multiplicar los lados del cuadrilátero.
- Aplicar la fórmula del cálculo del trapecio.
- Transformar el paralelogramo en un rectángulo.
- Comparar el área del paralelogramo y el área de un rectángulo.

Argumentos:

Razonamiento cuantitativo y cualitativo; y razonamiento deductivo e inductivo.

Argumento 1: La suma de áreas parciales es igual al área total y debido a que 6 m x 4 m es múltiplo de 20 cm x 15 cm, entonces el piso puede ser cubierto con una cantidad exacta de losetas.

Argumento 2: El área del piso es 6 m x 4 m = 24 m^2 = 240 000 cm^2 y el área que cubre cada loseta es 20 cm x 15 cm = 300 cm^2. Al dividir 240 000 cm^2 entre 300 cm^2 resulta 800; por lo tanto, se necesitan 800 losetas.

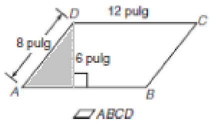
Argumento 3: Un cuadrado pequeño representa 1 pulg, entonces el área del cuadrado es 12 pulg x 12 pulg = 144 $pulg^2$.

Argumento 4: Descomponer el paralelogramo y convertirlo en un cuadrilátero.

Argumento 5: Con los valores asignados AB=b=12 cm, AD=h=7 cm, entonces $A = b.h$
(12 cm)(7cm) = 84 cm^2.

Argumento 6: Por fórmula general, encontramos el área del trapecio

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$



Argumento 7: Transforma el paralelogramo en un cuadrilátero, por lo tanto el área de los cuadriláteros son equivalentes.

Fuente: elaboración propia

5) Configuración epistémica del campo de problemas que implica usar el método directo para medir áreas de cuadriláteros.

   Según Fandiño y D'more (2009), en sus investigaciones consideran que, una de las formas de desarrollo de áreas de polígonos en el plano cuadriculado de puntos, es cuando se diseña los polígonos de forma tal que los vértices estén siempre sobre los números de la cuadricula, como se ven representados en los siguientes 2 ejemplos de la Figura 36.

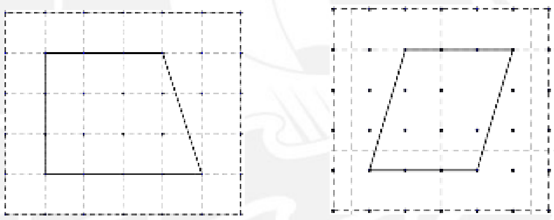


Figura 36. Plano cuadriculado
Fuente: adaptado

Puede suceder que algunos puntos de la cuadricula "caigan" en los lados, mientras otros "caerán" dentro del polígono.

Ejemplo:

C: número de nudos de la cuadricula que están sobre el contorno del polígono.

I: número de nudos del plano cuadriculado que están dentro del polígono.

Veamos los valores de C y de I en los dos ejemplos precedentes.

Polígono 1: C=11, I=6

Polígono 2: C=8, I=6

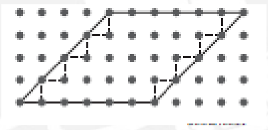
Si consideramos el cuadrado de la cuadrícula como unidad de medida de superficie, observando atentamente los tres diseños y contando los cuadrados contenidos, es fácil notar que las áreas de los polígonos son:

Polígono 1: 10,5 cuadrados

Polígono 2: 9 cuadrados

Pues bien, existe una relación que vincula, en general, los valores de C e I con el área del polígono, relación que fue demostrada por Pick (1895-1942) en 1899: el área de cualquier polígono sobre un geoplano está proporcionado por: $A = \frac{C}{2} + I - 1$

Tabla 17. Configuración epistémica de campo de problemas por método directo de referencia

Problemas: En esta configuración se consideran los problemas que implican hallar el área de un polígono, específicamente de un cuadrilátero, mediante el método directo del teorema de Pick. Texto B (p.356). En un tablero geométrico (o tablero con clavijas), se forma un paralelogramo mediante una banda elástica, con base b=6 y altura h= 4. Cuente el número de cuadrados enteros y en mitades para encontrar el área del paralelogramo.
Lenguaje ***Verbal:*** Relacionados con el contexto (tablero, clavijas, banda elástica) Términos verbales matemáticos (paralelogramo, tablero geométrico, mitades) ***Simbólico:*** b=6 y h= 4, ***Gráfico:*** 
Definiciones-conceptos Área de paralelogramo, tablero geométrico.
Proposiciones: Mediante el conteo de las clavijas ubicadas al borde y al interior del cuadrilátero se puede determinar el área del cuadrilátero.
Procedimientos: Contar las clavijas ubicados al borde y al interior del cuadrilátero. Dividir la suma de las clavijas de los bordes del cuadrilátero, sumar las clavijas del interior.
Argumentos: Usar la fórmula de teorema de Pick para hallar el área: $A = \frac{C}{2} + I - 1$

Fuente: elaboración propia

Las configuraciones elaboradas han sido utilizadas por medio de 2 libros de texto matemáticos y por lo tanto, nos permite construir significado institucional de referencia de áreas de cuadriláteros convexos para el sexto nivel de Educación Básica Regular.

5.3. Descripción del significado institucional de Referencia de áreas de cuadriláteros convexos para VI ciclo de Educación Básica Regular.

En esta sección describimos los distintos significados según las entidades primarias (situaciones problemas, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), que nos permitirá describir las practicas asociadas a la resolución de campos de problemas, con ello, haremos una valoración de los significados pretendidos a partir de los libros de textos analizados.

Situaciones problema: son las diversas problemáticas que enfrentan los alumnos durante las diferentes actividades que constituye el proceso de instrucción.

Lenguaje: términos relacionados con el objeto matemático de áreas de cuadriláteros convexos, con el que los estudiantes se deben familiarizar y servirá para enunciar las definiciones y propiedades de dicho objeto.

Términos con el contexto: expresiones relacionadas con el contexto de los diferentes problemas o tareas.

Términos verbales matemáticos: palabras que expresan objetos u operaciones matemáticas

Simbólico: signos y símbolos de objetos matemáticos

Gráfico: gráficos relacionados con cuadriláteros usados en los libros de texto.

Definiciones: Significado que le damos a cada concepto considerado en el componente del lenguaje dentro del proceso de instrucción.

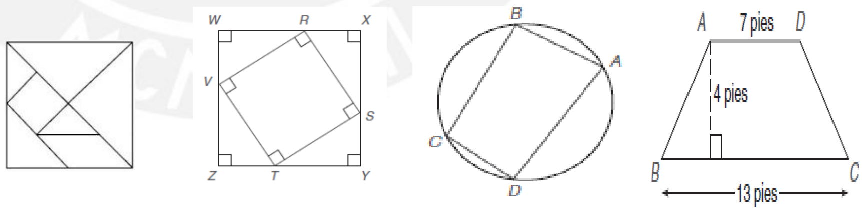
Procedimientos: Conjunto de pasos a seguir por los alumnos para poder definir u obtener alguno de los significados al objeto matemático en estudio. Se realizará en términos contextualizados.

Argumentos: Razones que el estudiante debe tener presente para justificar la tesis, inherentes a los significados trabajados, verdaderas.

Para determinar el significado institucional de referencia, se ha considerado la fenomenología propuesto por Freudenthal, asimismo ubicamos en los libros de matemática los diferentes campos de problemas o podemos designar campos de fenómenos, según la propuesta de Freudenthal ya que se relaciona con el enfoque Ontosemiótico del

Conocimiento e Instrucción Matemática EOS, con los campos de problemas equivalente al campo de fenómenos de área. Para luego presentar la configuración epistémica de los campos de fenómenos y finalmente describir y fijar el significado institucional de referencia.

Tabla 18. Configuración epistémica de significado de referencia

SITUACIÓN - PROBLEMAS:	
R3,C1,C2,M1,M4,M5	- Contextualizados. - Con contextos próximos a la realidad del alumno. - Con diferentes grado de complejidad.
LENGUAJE	
R3: Por medida C1: Por inclusión C2: Por transformaciones de romper y rehacer C3: Por estimación M1: Por exhaución con unidades M4: Por relaciones geométricas M5: Por fórmulas generales	***Verbal:*** Relacionados con el contexto de la situación problemática Términos matemáticos: Área, cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo, trapecio, comparación, equivalencia, trasladar, recubrimiento medida, lados, congruencia, estimación, proporcionalidad, tangram, contando, descomposición, construya, variación, figura, dimensiones, cantidad, transformar, largo, ancho, base, altura, tablero geométrico, mitades, doble, cuadrado, conversión, etc. Las notaciones simbólicas las utilizamos para referirnos a determinados conceptos ***Simbólico:*** $A=a^2$; $A=b\times h$; $A=\frac{D\times d}{2}$; $A=\frac{(b+b')\times h}{2}$ $A=\frac{C}{2}+I-1$; $\frac{S_1}{S_2}=k$; **Gráfico:** 
DEFINICIONES	
R3: Por medida C1: Por inclusión C2: Por transformaciones de romper y rehacer C3: Por estimación M1: Por exhaución con unidades M4: Por relaciones geométricas	Área de cuadriláteros (cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo, trapecio) Descomposición.- Cubrimiento.- Comparación de áreas.- Áreas equivalentes.- Áreas sombreadas.- Proporcionalidad.- Tangram.-

M5: Por fórmulas generales	
PROPOSICIONES	
R3: Por medida C1: Por inclusión C2: Por transformaciones de romper y rehacer C3: Por estimación M1: Por exhaución con unidades M4: Por relaciones geométricas M5: Por fórmulas generales	- El área del primer cuadrado es tantas veces el área del segundo cuadrado. - El área es determinado contando unidades. - El área total es múltiplo del área de losetas. - Si una figura se descompone en otro, entonces sus áreas son equivalentes. - Descomponer y componer las piezas del tangram. - El área sombreada es la mitad o tercera parte del área total. - El área total es la suma de áreas parciales. - Transforma el área en otra equivalente realizando mediciones. - Descompone la figura de tal forma se conserva su área. - Calcula el área de cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo y trapecio. -
PROCEDIMIENTOS	
R3: Por medida C1: Por inclusión C2: Por transformaciones de romper y rehacer C3: Por estimación M1: Por exhaución con unidades M4: Por relaciones geométricas M5: Por fórmulas generales	- Estimar - Componer - Relacionar - Multiplicar - Dividir - Descomponer - Componer - Convertir - Cubrir - Medir - Aplicar la equivalencia
ARGUMENTOS	
Repartir equitativamente	Razonamiento cualitativo, cuantitativo
Por comparación y reproducción	Razonamiento cualitativo
Por mediciones	Razonamiento geométrico, razonamiento aritmético

Fuente: elaboración propia

Comentario:

Analizamos y revisamos las diversas investigaciones sobre el tema de áreas de cuadriláteros convexos, así como, el análisis de los dos libros de texto.

- Mencionamos que no todos los campos de problemas y sus ejemplos propuestos se encuentran o se evidencian en los libros de textos matemáticos seleccionados.

- Cabe destacar, la propuesta importante planteada por Freudenthal acerca de que los libros de textos y profesores que tratan estos temas de área de cuadriláteros deben tener un rol predominante y que, al considerar los campos de problemas matemáticos deben considerar los fenómenos y sus respectivos organizadores del desarrollo de área buscar relacionarlos por descomposición, reconfiguración, reproducción y comparación de cuadriláteros.
- Consideramos importante e ideal, para elaborar los significados pretendidos, nuestro significado de referencia.

Seguidamente presentamos la descripción del significado pretendido.

CAPITULO VI SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDO

El objetivo de este capítulo es describir el significado pretendido del libro de texto empleado en educación secundaria, que esperamos y alcanzar con los alumnos, en el desarrollo del objeto matemático "área de cuadriláteros convexos". Para esto examinaremos este contenido matemático lo siguiente:

6.1. Descripción de los libros de texto en estudio de 1º y 2º de secundaria

Los libros de textos en los que se realizan el análisis son del primer año y segundo año de educación secundaria, distribuidos por el Ministerio de Educación a todas las instituciones educativas estatales a nivel nacional.

El Ministerio de Educación, desde la política educativa de estado, tiene la responsabilidad de entregar periódicamente a las instituciones educativas públicas a nivel nacional, material educativo, para el desarrollo de los aprendizajes establecidos en el Diseño Curricular Nacional; por ello, se distribuyen los libros de textos escolares a todos los estudiantes del Perú.

Elegimos los libros de texto oficiales de 1º y 2º de secundaria, ya que en ellos encontramos el objeto matemático *área de cuadriláteros*, al cual se dedica nuestro trabajo de investigación.

El libro de texto de matemática del primer grado de secundaria otorgado por el Ministerio de Educación, presenta los siguientes contenidos:

Unidad 1: Relaciones lógicas y conjuntos
Unidad 2: Sistemas de los números naturales
Unidad 3: Sistema de los números enteros
Unidad 4: Sistema de los números racionales
Unidad 5: Funciones y algebra
Unidad 6: Medida y geometría plana
Unidad 7: Geometría del espacio y transformaciones
Unidad 8: Estadística, combinatoria y azar.

La unidad seis está dividida en dos temas, tema 1 (Medida y geometría plana), tema 2 (geometría plana: polígonos) en el libro oficial de 1º de secundaria, cuyo objeto matemático estudiado se encuentra en las páginas 179 a 189.

El libro de texto de matemática del segundo grado de secundaria otorgado por el Ministerio de Educación, presenta los siguientes contenidos:

Unidad 1: Relaciones lógicas y sistemas numéricos
Unidad 2: Funciones
Unidad 3: Lenguaje algebraico
Unidad 4 Un mundo con medidas
Unidad 5: Geometría plana
Unidad 6: Geometría en nuestro espacio
Unidad 7: Transformaciones
Unidad 8: Estadística

Asimismo, el tema "Áreas de cuadriláteros convexos" es tratado dentro de la unidad 5 (Geometría plana), tema 2 (Polígonos: área de figuras planas) en el libro oficial de *Matemática 2º de secundaria*, cuyo objeto matemático estudiado se encuentran en las páginas 146 a 151.

6.1.1. Descripción de los elementos de significado encontrados en el libro de texto oficial de 1º de secundaria

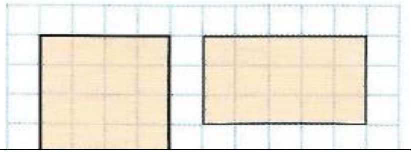
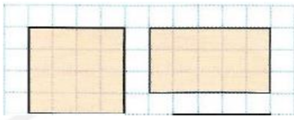
Para realizar el análisis del libro de texto hemos seleccionado la unidad en la que trata el objeto de estudio, una vez que hayamos observado y seleccionado, que nos concierne es el de las tareas de áreas de cuadriláteros convexos, concretamente en la unidad 6, (p. 179-197), dedicado al tratamiento del estudio de polígonos, básicamente de áreas de cuadriláteros.

A continuación, una vez ubicado el objeto, el siguiente paso es analizar y agrupar de acuerdo a los elementos primarios que contenga como son situación-problema, lenguaje, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos. Por lo tanto para determinar los elementos de significado hemos visto por conveniente partir desde el análisis epistémico del significado institucional de referencia y se ha fijado cuales aparecen en los dos libros de texto de secundaria.

Seguidamente elaboramos las configuraciones epistémicas de los campos de problemas o campos de fenómenos referente a área de cuadriláteros convexos que se ubican en los lilbros de textos de secundaria.

1) Configuración epistémica del campo de problemas que implican la repartición equitativa de áreas de cuadriláteros convexos, aprovechando regularidades, por estimación o medición.

Tabla 19. Configuración epistémica de campo de problemas por repartición equitativamente de 1º año de secundaria

Problemas: En esta configuración epistémica se consideran problemas que implican la repartición equitativa de áreas de cuadriláteros convexos, aprovechando regularidades por estimación o medición. R3: por medida: Texto 1º (p.180) El área de cuadrado y del rectángulo. El área es la cantidad de unidades $\square$ que cubren la región.  El cuadrado es cubierto por $4 \times 4 = 16\blacksquare = 16u^2$ El rectángulo es cubierto por $3 \times 5 = 15\blacksquare = 15u^2$
Lenguaje ***Verbal:*** Relacionados con el contexto (cubren). Términos verbales matemáticos (cuadrado, rectángulo, área). ***Simbólico:*** $4 \times 4 = 16\blacksquare = 16u^2$; $3 \times 5 = 15\blacksquare = 15u^2$ Gr***áfico:*** 
Definiciones-conceptos Área de cuadrado, área de rectángulo, proporcionalidad
Proposiciones: El área de la región se puede determinar contando el número de unidades cuadradas.
Procedimientos: - Completando unidades cuadradas se determina el área del cuadrado tiene 16 unidades cuadradas y el área del rectángulo tiene 15 unidades cuadradas.
Argumentos: ***Argumento 1***: Si S_1 y S_2 son los lados de un cuadrado, entonces $\frac{S_1}{S_2} = k$; $\frac{A_1}{A_2} = k^2$ siendo A_1 y A_2 las áreas de dichos cuadrados.

Fuente: elaboración propia

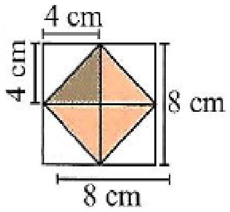
2) Configuración epistémica del campo de problemas relacionados con la comparación entre dos o más superficies y la reproducción de una superficie en otra de distinta forma pero de igual área-conservación del área. Para ello, los problemas pueden resolverse a través de la inclusión, transformación, estimación, medición y funciones de áreas de cuadriláteros convexos.

Tabla 20. Configuración epistémica de campo de problemas por comparación y reproducción de 1º año de secundaria

Problemas: Configuración epistémica de problemas relacionados con la comparación entre dos o más superficies y la reproducción de una superficie en otra de distinta forma pero de igual área o conservación del área. Para ello, los problemas pueden resolverse a través de la inclusión, transformación, estimación, medición y de funciones de áreas de cuadriláteros convexos, según la propuesta de Freudenthal (1983). C1. Por inclusión: (p.181)

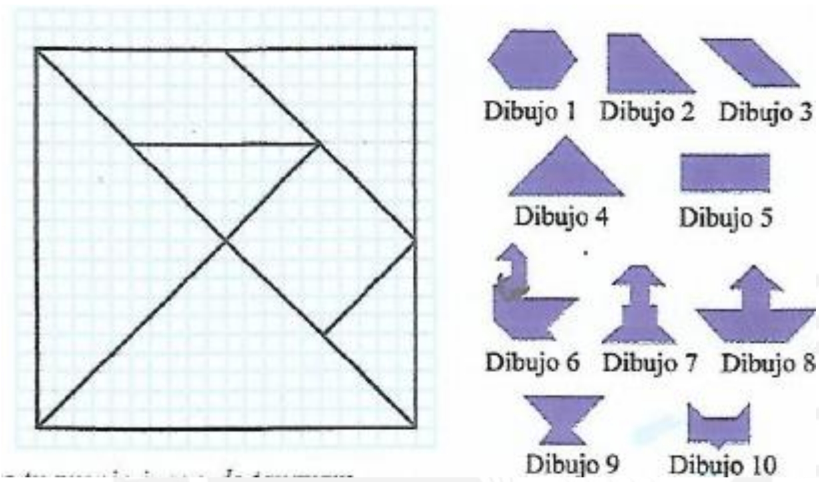
El área del rombo es igual a cuatro veces el área de uno de los triángulos formados, y el área del rombo es la mitad del área de rectángulo.

Área del rombo: 4 (área triángulo)= $\dfrac{4(4\times 4)}{2} = 32cm^2$

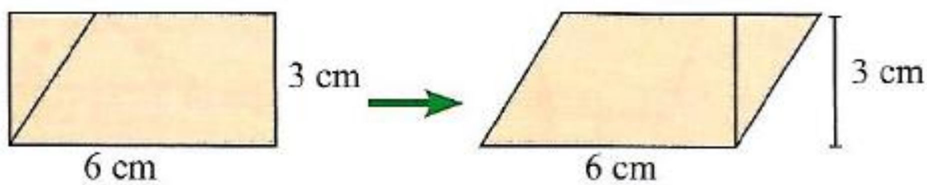


Área del rectángulo = $8\times 8 = 64cm^2$

C2: Por transformación de romper y rehacer: (p.183)
Construyan con las piezas de un Tangram como se observa en la figura (el cuadrado tiene 10 cm de lado). Recorten las piezas y armen las figuras mostradas.

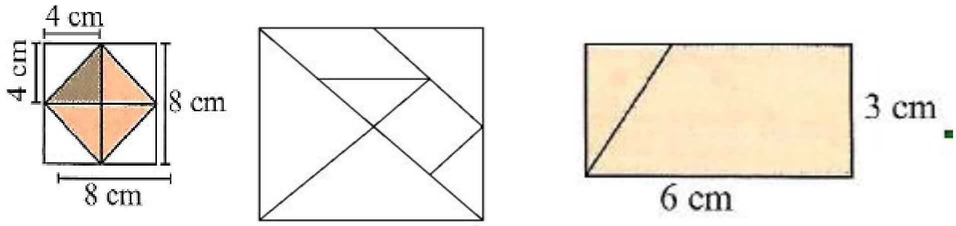


C3. Por estimación: (p.181)
Un romboide se obtiene al trasladar la parte triangular de un rectángulo de un extremo a otro de la siguiente manera:



Se observa que las áreas de ambas figuras coinciden: Área= 6 x 3 = 18 cm^2

Lenguaje
Verbal:
Relacionados con el contexto (recorte, armar)
Términos verbales matemáticos (área, cuadrado, rectángulo, paralelogramo, rombo, triángulo, 4veces, mitad, romboide)
Simbólico:
6 x 3 = 18 cm^2
Gráfico:



Definiciones-conceptos
Área de rombo, área de cuadrado, área del cuadrado, área del triángulo.

Proposiciones:
- El área del rombo es igual a cuatro veces el área del triángulo.
- El área del rombo es la mitad del área del cuadrado.
- Con las piezas del rompecabezas Tangram, es posible construir diversas figuras geométricas.
- Se puede calcular el área de un cuadrilátero por medio de descomposición y composición.

Procedimientos:
Multiplicar, sumar, dividir.
- 4 (área triángulo)= $\frac{4(4\times 4)}{2} = 32cm^2$ y área del rectángulo = $8\times 8 = 64cm^2$
- Descomponer el Tangram en cuadriláteros.
- Descomponer el rectángulo y componer en un romboide. Área = 6 x 3 = 18 cm^2

Argumentos:
Argumento 1: El área del rombo es igual a la mitad del área del rectángulo.

$$A_{\square}=\frac{d\times D}{2} \Rightarrow A_{\square}=\frac{b\times h}{2}$$

Argumento 2: Descomponer el Tangram, componer y reconocer que dan forma a otra figura.
Argumento 3: El cuadrilátero se transforma en paralelogramo. $A_{\square}=b\times h \Rightarrow A_{\square}=b\times h$

Fuente: elaboración propia

3) Configuración epistémica para el campo de problemas que se resuelven usando la medida, ya sea por un proceso de exhaución, cuadriculación, transformación, relaciones geométricas en general y aplicación de fórmulas de áreas de cuadriláteros convexos.

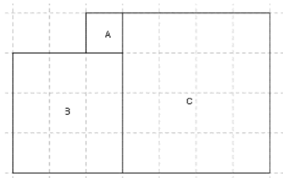
Tabla 21. Configuración epistémica de campo de problemas por medida de 1º año de secundaria

Problemas:
En esta configuración epistémica para el campo de problemas que se resuelven usando la medida, ya sea por un proceso de exhaución, cuadriculación, transformación, relaciones geométricas en general, aplicación de fórmulas de áreas de cuadriláteros convexos, según la propuesta de Freudenthal (1983):

M1: Por exhaución con unidades: (p.196), correspondiente a la heteroevaluación.

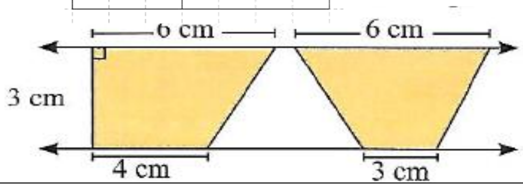
En la figura: A, B y C son cuadrados. Si se sabe que el perímetro de A es 4 cm y el de B es 12 cm, completa:

a) El área del cuadrado A es ……….
b) El área del cuadrado C es ………

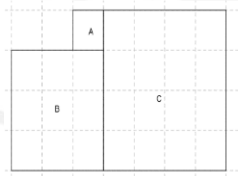


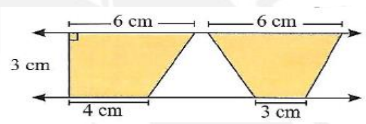
M5: Por medio de fórmulas generales (p.181).

Calcula el área de cada uno de los trapecios.



Lenguaje
Verbal:
Términos verbales matemáticos (área, perímetro, cm., área de trapecios)
Simbólico: A, B, C; A=4; B=12;
Gráfico:





Definiciones-conceptos
Área de trapecio, área de cuadrado, perímetro, múltiplos.

Proposiciones:
- El área de las regiones B y C son múltiplos del área de la región A.
- El área de dos trapecios, como indica la figura, son iguales o equivalentes.

Procedimientos:
Multiplicar, sumar, dividir, comparar.
- Descomponiendo en unidades cuadradas, se sabe que el área del cuadrado B tiene 9 unidades cuadradas y el área del cuadrado C tiene 16 unidades cuadradas.
- Mediante fórmulas, se resuelve el cálculo de áreas de trapecios.

Argumentos:
Argumento 1: La suma de áreas parciales es igual al área total.
Argumento 2: Área de C= $A_A+A_A+\ldots+A_n$
Argumento 3: Por fórmula general, el área del trapecio es $A=\frac{1}{2}h(b_1+b_2)$
Argumento 4: El área del trapecio isósceles es mayor que el área del trapecio rectángulo.

Fuente: elaboración propia

4) Configuración epistémica del campo de problemas de contexto

Tabla 22. Configuración epistémica de problemas de contexto de 1º año secundaria

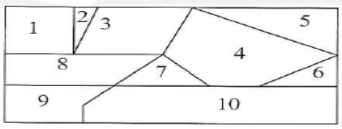
Problemas:

En esta configuración se consideran los problemas contextualizados del entorno del estudiante, dicho problema se ubica en la sección de heteroevaluación (p.196).

En la figura, se muestra la vista aérea de varias parcelas. Con ayuda de una regla y transportador, completa:

a) La parcela__________es cuadrada.
b) La parcela 3 es un_________________
c) La parcela ____________es un triángulo isósceles.
d) La parcela 8 es un________
e) La parcela _________es un polígono no cóncavo.
f) Las parcelas______________ son triángulos rectángulos.

Lenguaje
Verbal:
Relacionados con el contexto (parcelas)
Términos verbales matemáticos (cuadrada, triángulo isósceles, polígono, rectángulo)
Gráfico:



Definiciones-conceptos
Área de cuadrado, área de paralelogramo, trapecio, polígonos.

Proposiciones:
- Que la suma de las figuras geométricas (parcelas) sea igual a la figura del rectángulo.

Procedimientos:
Sumar, multiplicar, dividir, medir, señalar.
- Sumar las parcelas señaladas.
- Medir con regla y transportador las parcelas.
- Señalar el área total del rectángulo.

Argumentos:
Argumento 1: El área total de la figura es igual a la suma del área de las partes.
Argumento 2: Calcular el área total del rectángulo $A = b \times h$

En los libros de texto de educación secundaria realizamos el análisis de los objetos matemáticos emergentes e intervinientes en las tareas que se les asigna a los estudiantes de primero año de secundaria pública, luego realizamos las configuraciones epistémicas de los campos de problemas que hemos ubicado referente a área de cuadriláteros convexos, como se muestra en las tablas Nº 19, 20,21 y 22.

6.1.2. Descripción de los elementos de significado encontrados en el libro de texto oficial de 2º de secundaria

Podemos observar que el libro de texto entregado por el Ministerio de Educación a los estudiantes de las instituciones educativas públicas del Perú, para el segundo año de secundaria correspondiente al VI ciclo de Educación Básica Regular, consta de 254 páginas, dividido en ocho unidades (se trabajan 2 unidades por bimestre), el tema que nos concierne es el de las tareas de áreas de cuadriláteros convexos, concretamente en la unidad 5, el tema 2 (p. 146-165), el cual se dedica al tratamiento del estudio de polígonos, básicamente de áreas de cuadriláteros.

A continuación presentamos las configuraciones epistémicas del campo de problemas presentes en el libro mencionado.

1) Configuración epistémica del campo de problemas relacionados con la comparación de dos o más superficies y la reproducción de una superficie en otra de distinta forma, pero de igual área-conservación del área. Para ello, los problemas pueden resolverse a través de la inclusión, transformación, estimación, medición o el uso de funciones de áreas de cuadriláteros convexos.

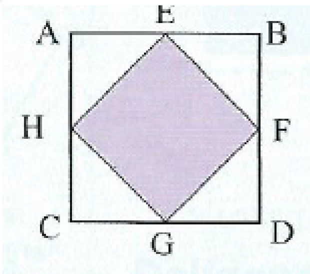
Tabla 23. Configuración epistémica de campo de problemas por comparación y reproducción de 2º año de secundaria

Problemas:

Configuración epistémica de problemas relacionados con la comparación de dos o más superficies y la reproducción de una superficie en otra de distinta forma, pero de igual área-conservación del área. Para ello, los problemas pueden resolverse a través de la inclusión, transformación, estimación, medición o el uso de funciones de áreas de cuadriláteros convexos,

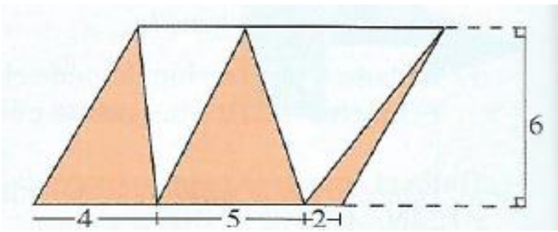
C1: Por inclusión: (p.150)

Calcula el área de la región sombreada si el lado del cuadrado ABCD mide 12 cm y el cuadrilátero EFGH está formado por los puntos medios de cada lado.



C3: Por estimación: (p.150)

Calcula el área de la región sombreada del paralelogramo si sus dimensiones están en metros.



Lenguaje

Verbal: Relacionados con el contexto (región sombreada) Términos verbales matemáticos (área, lado, cuadrado, cuadrilátero, dimensiones, cm) ***Simbólico:*** ABCD, 12 cm, EFGH. ***Gráfico:*** áreas sombreadas.
Definiciones-conceptos Área de cuadrado, área del paralelogramo.
Proposiciones: En cualquier cuadrilátero, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo cuya área es la mitad de la del cuadrilátero original. La suma de las áreas sombreadas es igual al área de un cuadrilátero.
Procedimientos: Suma, descompone, multiplica, divide. - Descompone y divide el área del paralelogramo formado al interior del cuadrilátero. - Descompone y compone el área sombreada del paralelogramo.
Argumentos: ***Argumento 1:*** Se resuelve por medio del teorema de Varignon: “El área formado por los puntos medios de un cuadrilátero es la mitad del área original. $A_{EFGH} = \frac{A_{ABCD}}{2}$ ***Argumento 2:*** El área sombreada por descomposición y composición es equivalente a la mitad del área del paralelogramo. $A_{SOMBREADA} = \frac{b \times h}{2}$

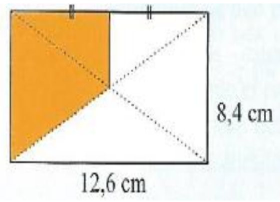
Fuente: elaboración propia

2) Configuración epistémica del campo de problemas que se resuelven usando la medida, ya sea por un proceso de exhaución, cuadriculación, transformación, relaciones geométricas en general o la aplicación de fórmulas de áreas de cuadriláteros convexos.

Tabla 24. Configuración epistémica de campo de problemas por medida de 2º año secundaria

Problemas: En la configuración epistémica para el campo problemas que se resuelven usando la medida, ya sea por un proceso de exhaución, cuadriculación, transformación, relaciones geométricas en general o la aplicación de fórmulas de áreas de cuadriláteros convexos. M1: Por exhaución con unidades : (p.147) ¿Qué cantidad de tela necesitamos para cambiar la cubierta de una mesa de billar de 300 cm de largo por 2 m de ancho?  M4: Por medio relaciones geométricas generales (p. 150)

Calcula el área de la región sombreada.



M5: Por medio de fórmulas generales (p.147)

Calcula el área de una cometa que tiene forma de rombo, si su diagonal menor es la mitad de la diagonal mayor, y ambas suman 96 cm.

Lenguaje

Verbal:

Relacionados con el contexto (cubierta, mesa de billar, región sombreada, cometa)

Términos verbales matemáticos (cantidad, área, largo, ancho, rombo, diagonal,

Simbólico:

300 cm; 8,4cm; 96 cm

G***ráfico:*** área sombreada, mesa de billar.

Definiciones-conceptos

Área de rombo, área de trapecio, diagonal.

Proposiciones:

- La cantidad de tela comprada es equivalente a la superficie del área de la mesa de billar.
- Si se divide la figura en ocho partes, el área sombreada constituye las 3/8 partes de la figura.
- El área de un rombo es el producto de sus diagonales.

Procedimientos:

Multiplicar, dividir, sumar, duplicar.

- Calcular el área de la mesa de billar para determinar la cantidad exacta de tela.
- Sumar el área de las 3/8 partes del rectángulo.
- Calcular la medida de las diagonales, sabiendo que una de ellas es el doble de la otra.
- Calcular el área de rombo.

Argumentos:

Argumento 1: Se calcula el área del rectángulo $A = b \times h$

Argumento 2: Se aplica la fórmula del área sombreada de un trapecio: $A = \frac{(B+b)\times h}{2}$

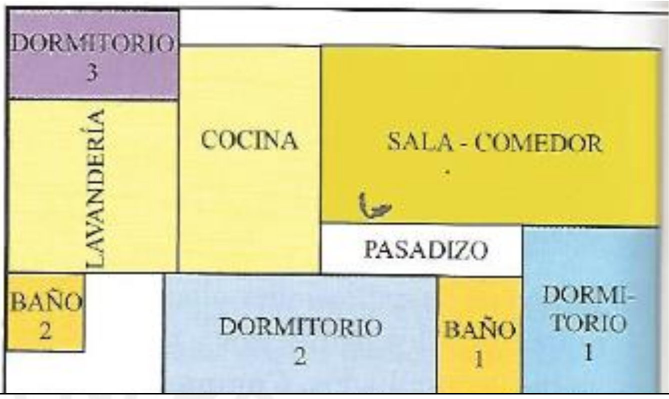
Argumento 3: $A = \frac{b \times h}{2}$

Argumento 4: Se aplica la fórmula del área de rombo. $A = \frac{D \times d}{2}$

Fuente: elaboración propia

En la siguiente configuración epistémica se observa de un problema de contexto del estudiante.

Tabla 25. Configuración epistémica de problema de contexto de 2º año secundaria

Problemas: En esta configuración consideramos la aplicación de áreas de cuadriláteros. Se observa en la página de heteroevaluación (p.162). En un papelógrafo tracen la medida a escala de cada habitación de la vivienda y la ubicación de cada puerta. Indiquen la función que cumple cada habitación. Determinen el área de cada habitación. 
Lenguaje ***Verbal:*** Relacionados con el contexto (habitación, ubicación, vivienda, papelógrafo, tracen, función) Términos verbales matemáticos (escala, medida, cuadriláteros) ***Gráfico:*** Como se observa
Definiciones-conceptos Área de cuadrado, área de rectángulo.
Proposiciones: - La suma de las áreas de las habitaciones es igual al área de la vivienda
Procedimientos: Sumar, multiplicar, dividir, medir, señalar. - Medir a escala cada área que se observa. - Sumar el área de las habitaciones. - Encontrar el área total de la vivienda.
Argumentos: ***Argumento 1:*** El área total de la figura es igual a la suma del área de las partes. ***Argumento 2:*** Calcular el área total del rectángulo $A = b \times h$

Fuente: elaboración propia

En los libros de texto de educación secundaria realizamos el análisis de los objetos matemáticos emergentes e intervinientes en las tareas que se les asigna a los estudiantes de segundo año de secundaria pública, luego hemos realizado las configuraciones epistémicas de los campos de problemas que hemos ubicado referente a área de cuadriláteros convexos, como son las Tablas Nº 23, 24 y 25.

6.2. Análisis de significado institucional pretendido

En este análisis de los objetos matemáticos emergentes e intervinientes en las tareas que se les asigna a los estudiantes de primero y segundo año de secundaria pública, las configuraciones epistémicas de los campos de problemas que hemos ubicado referente a área de cuadriláteros convexos, con los resultados de dicho análisis determinamos la comparación con los significados institucionales de referencia.

Tabla 26. Análisis del significado pretendido

ELEMENTOS DE EOS	REFERENCIA	PRETENDIDO	
CAMPO DE PROBLEMAS o FENOMENOS DE ÁREA DE CUADRILÁTEROS CONVEXOS.		1º	2º
POR DEMOSTRACIONES	X		
POR REPARTIR EQUITATIVAMENTE			
R1: POR REGULARIDADES	X		
R2: POR ESTIMACIONES	X		
R3: POR MEDIDA	X	X	
POR REPRODUCCIÓN Y COMPARACIÓN			
C1: POR INCLUSION	X	X	X
POR TRANSFORMACIONES DE ROMPER Y REHACER	X	X	
C3: POR ESTIMACION	X	X	X
C4: POR MEDIDA	X		
C5: POR MEDIO DE FUNCIONES	X		
POR MEDIR			
M1: POR EXHAUCIÓN CON UNIDADES	X		X
M2: POR CUADRICULACIÓN	X		
M3: POR CONVERSIÓN	X		
M4: POR RELACIONES GEOMÉTRICAS	X		
M5: POR FÓRMULAS GENERALES	X	X	X
M6: POR TRANSFORMACIONES	X		X
POR METODO DIRECTO	X		

Fuente: elaboración propia

Conclusiones sobre el análisis de los significados institucionales

1. Los significados de referencia de áreas de cuadriláteros convexos, que presentamos después de haber realizado las configuraciones epistémicas del significado, nos han permitido encontrar 5 campos de problemas o fenómenos que son: por demostraciones, repartir equitativamente, comparar y reproducir, medir, método directo. Los problemas identificados en los libros de textos matemáticos de referencia se asocian con estos 5

campos de problemas. (ver tablas 13-17)

2. En los significados pretendidos de áreas de cuadriláteros podemos indicar en el cuadro resumen que, en los textos de primer y segundo año no se realizan demostraciones, lo cual debería trabajarse en este campo, ya que en Perú (2009) una de las capacidades mencionado es *Razonamiento y Demostración*; en el segundo campo, por reparto equitativo, solo se presenta en la subcategoría de reparto equitativo por medida. En el primer año existe una total ausencia. En segundo grado, el tercer campo de problemas correspondiente comparar y reproducir, se presenta en las subcategorías de inclusión y estimación. Podemos resaltar que en el primer año se trabaja en la subcategoría de transformaciones por romper y rehacer; en el cuarto campo de problemas, los encontramos en las subcategorías correspondientes a fórmulas generales, y se trabajan en ambos grados. (ver tablas 19-25)
3. En este análisis, ponemos de manifiesto que, de las 16 subcategorías propuestas por Freudenthal (1983), ejemplificados por Corberán y Marmolejo, solo se trabaja áreas de cuadriláteros convexos en 5 subcategorías u organizadores en primer año; y 5 subcategoríasu organizadores en segundo año, prevaleciendo las subcategorías u organizadores que corresponden a tareas por fórmulas generales y por inclusión en la categoría de reproducción y comparación.
4. Asimismo se puede apreciar los organizadores de cuadricula, por transformaciones romper y rehacer se realiza en los ciclos anteriores de EBR.

6.3. Indicadores de idoneidad epistémica de dos libros de textos del sexto ciclo de Educación Básica Regular sobre áreas de cuadriláteros convexos.

Es importante dar la valoración a los contenidos de los libros de textos oficiales de VI ciclo de Educación Básica Regular, con el instrumento que representa el grado de idoneidad epistémica respecto al área de cuadriláteros convexos en la cual representa el significado de referencia.

En la propuesta de Freudenthal sobre el desarrollo de la fenomonología de área de cuadriláteros convexos nos permite identificar los campos de problemas presente en los dos libros de texto, correspondiente a primer y segundo año de secundaria. En este sentido podemos mencionar la Tabla Nº 27, propuesto por Godino (2011), elaborado por Garcés (2013) que adaptamos para la valoración los indicadores de idoneidad didáctica, Básicamente observaremos en ella los indicadores de idoneidad epistémica.

Tabla 27. Indicadores de idoneidad epistémica para 1º secundaria

COMPONENTE	INDICADORES	CUMPLE		OBSERVACIÓN
		SI	NO	
SITUACIONES PROBLEMA	Se presentan varios problemas contextualizados de áreas de cuadriláteros por repartición equitativa	x		
	Se ejemplifica con ejercicios que requieren de comparación de áreas de cuadriláteros.	x		
	Se resuelven ejercicios algorítmicos aplicando fórmulas de áreas de cuadriláteros	x		
	Se proponen situaciones de problemas cercanos al estudiante de áreas de cuadriláteros.		x	
LENGUAJES	Uso del modo de expresión verbal en las actividades sobre áreas de cuadriláteros.	x		
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de áreas de cuadriláteros		x	
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de áreas de cuadriláteros		x	
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con áreas de cuadriláteros		x	
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de secundaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación	x		
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, verbal).	x		
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.		x	
REGLAS (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y conceptos de áreas de cuadriláteros son claros y correctos.		x	
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos		x	
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación secundaria	x		
	Se presentan los enunciados de áreas de cuadriláteros.	x		
	En caso que se propongan problemas contextualizados, se muestran procedimientos básicos para resolver estos problemas áreas de cuadriláteros	x		
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de áreas de cuadriláteros		x	
	Se proponen situaciones de áreas de cuadriláteros donde los alumnos tengan que generar o intercambiar procedimientos.	x		

ARGUMENTOS	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes son adecuadas al nivel educativo secundario.	x		
	Las demostraciones de teoremas son adecuadas a dar solución son adecuadas desde la matemática.		x	
	Se promueven situaciones-problemas relacionados a áreas de cuadriláteros para que el alumno argumente.		x	
RELACIONES	Los objetos matemáticos primarios (problemas, definiciones proposiciones, etc.) se relacionan entre sí.	x		
	Los objetos matemáticos emergentes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con áreas (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí.		x	

Fuente: Adaptado de Garcés (2013)

Tabla 28. Indicadores de idoneidad epistémica para 2º secundaria

COMPONENTE	INDICADORES	CUMPLE		OBSERVACIÓN
		SI	NO	
SITUACIONES PROBLEMA	Se presentan varios problemas contextualizados de áreas de cuadriláteros por repartición equitativa		x	
	Se ejemplifica con ejercicios que requieren de comparación de áreas de cuadriláteros.	x		
	Se resuelven ejercicios algorítmicos aplicando fórmulas de áreas de cuadriláteros	x		
	Se proponen situaciones de problemas cercanos al estudiante de áreas de cuadriláteros.	x		
LENGUAJES	Uso del modo de expresión verbal en las actividades sobre áreas de cuadriláteros.	x		
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de áreas de cuadriláteros		x	
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de áreas de cuadriláteros		x	
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con áreas de cuadriláteros		x	
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de secundaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación	x		
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, verbal)	x		
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.	x		
REGLAS (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y conceptos de áreas de cuadriláteros son claros y correctos.		x	
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos		x	

	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación secundaria	x		
	Se presentan los enunciados de áreas de cuadriláteros.	x		
	En caso que se propongan problemas contextualizados, se muestran procedimientos básicos para resolver estos problemas áreas de cuadriláteros		x	
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de áreas de cuadriláteros		x	
	Se proponen situaciones de áreas de cuadriláteros donde los alumnos tengan que generar o intercambiar procedimientos.	x		
ARGUMENTOS	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes son adecuadas al nivel educativo secundario.	x		
	Las demostraciones de teoremas son adecuadas a dar solución son adecuadas desde la matemática.		x	
	Se promueven situaciones-problemas relacionados a áreas de cuadriláteros para que el alumno argumente.		x	
RELACIONES	Los objetos matemáticos primarios (problemas, definiciones proposiciones, etc.) se relacionan entre sí.	x		
	Los objetos matemáticos emergentes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con áreas (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí.		x	

Fuente: Adaptado de Garcés (2013)

6.4. Análisis comparativo de la idoneidad didáctica de los campos de problemas de áreas de cuadriláteros convexos – dimensión epistémica

A continuación realizamos un análisis comparativo del nivel de cumplimiento de los indicadores de idoneidad epistémica de los campos de problemas o campos de fenómenos de área de cuadriláteros convexos, correspondientes a la educación secundaria pública de secundaria pública de nuestro país.

En la tabla 27 y 28, resumimos el nivel de cumplimiento de los componentes e indicadores de idoneidad epistémica de cada uno de los campos de problemas o fenómenos de áreas de cuadriláteros de educación secundaria pública, descritas y analizadas en el presente estudio

A partir de estas dos tablas podemos observar que, en cuanto al componente "situaciones problemas" el cual posee 4 indicadores, todos los campos analizados si cumple con la mayoría de los indicadores porque con el EOS, dichos campos de fenómenos o problemas tiene una idoneidad alta, podemos precisar que en cada campo hay varios organizadores.

En lo referente al componente “lenguajes”, podemos apreciar en las tablas, que el cumplimiento llega a cumplir hasta la mitad y, de acuerdo a EOS, podemos concluir que los campos de problemas presenta un grado medio de idoneidad epistémica.

Asimismo en lo que respecta a “reglas” (definiciones, proposiciones y procedimientos), podemos apreciar que, en cada campo de problemas o fenómenos analizados, se llega a cumplir hasta la mitad, y, de acuerdo con el EOS, podemos indicar que posee un grado medio de idoneidad epistémica.

De igual forma, para el componente “argumentos”, a partir de la tabla para ambos grados de estudio, podemos observar el análisis de idoneidad epistémica a los campos de problemas o fenómenos no cumple en la mayoría, por lo tanto, según el EOS, podemos apreciar que tienen un bajo grado de idoneidad epistémica para el componente indicado.

Finalmente, en cuánto al componente “relaciones” entre componentes, podemos apreciar que los indicadores son dos para el cumplimiento de este componente, el cual indica que la mitad para el sí y mitad para el no, por lo cual concluimos tiene un grado epistémico medio.

Entonces, podemos concluir que, los campos de problemas o fenómenos de área de cuadriláteros que se proponen a los estudiantes del VI ciclo de EBR, en los libros de texto distribuidos por el ministerio de educación secundaria pública, de acuerdo a EOS, poseen un grado bajo a medio de idoneidad epistémica. Esto se puede apreciar en relación a la fenomenología propuesta por Freudenthal y analizada por EOS. En el campo de problemas, se puede resumir, en cuánto al planteado, que no se precisan problemas de contexto. En la sección de trabajo, en ambos libros de textos, no hay tránsito de ida y vuelta en cuanto al uso del lenguaje gráfico, algebraico, aritmético. Además, faltan argumentos, demostraciones, procedimientos para proporcionárles al alumno; y no se aprecia con precisión el tránsito de tratamiento de las figuras por medio de descomposiciones, estimaciones, reconfiguraciones, recubrimiento, y otros procesos que propone Freudenthal.

Asimismo, debemos precisar que las relaciones entre los objetos matemáticos presentes en los campos de problemas o fenómenos a falta de argumentos y problemas planteados para el nivel y edad cronológica al que se supone que están dirigidos. Asimismo, podemos precisar que los libros de textos de VI ciclo presenta grado mediolib de idoneidad epistémica, faltando precisar los otros indicadores de Idoneidad didáctica.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

En esta parte de la tesis, presentamos las conclusiones a las que hemos llegado, así como algunas sugerencias de carácter general con respecto al tema de áreas de cuadriláteros convexos.

En relación al primer objetivo específico, *describir el significado de referencia a partir de textos matemáticos e investigaciones relacionadas con áreas de cuadriláteros convexos,* planteamos las siguientes conclusiones:

1. Al realizar las configuraciones epistémicas de las tareas de áreas de cuadriláteros convexo, de los textos formales de matemática, encontramos que los elementos matemáticos primarios emergentes se agrupan en los siguientes campos de problemas o fenómenos de áreas de cuadriláteros: por demostración, por repartir equitativamente (regularidades, estimaciones y medida) por comparar y reproducir (inclusión, transformaciones, estimación, medida y funciones) por medir (exhaución, cuadriculación, conversión, relaciones geométricas, fórmula general y transformaciones), por método directo, y por procedimientos que relacionan transformación y reconfiguración, repartir equitativamente y fraccionamiento, conversión y anamorfosis, exhaución y superposición.
2. El significado de referencia nos mostró que predomina el lenguaje verbal y simbólico, la mayoría de las tareas y actividades matemáticas son desarrolladas por procedimientos algorítmicos. También observamos que se plantean situaciones problemas y un uso de las demostraciones en menor porcentaje.
3. **3.** Lo más interesante y valioso de la tesis es: describir el significado de referencia de áreas de cuadriláteros convexos, luego de realizado las configuraciones epistémicas podemos observar que las tareas, las prácticas matemáticas se organicen en cinco campos de problemas. Lo ideal, sería que un libro de texto formal de matemática contengan los cinco campos de problemas de áreas de cuadriláteros convexos.

En relación al segundo objetivo específico, *describir el significado pretendido a través del análisis de las tareas de cuadriláteros convexos contenidos en dos libros de texto oficiales del nivel secundario,* planteamos las siguientes conclusiones:

4. Luego de analizar los dos libros de textos de educación secundaria, distribuidos a los

estudiantes de las instituciones educativas públicas, encontramos que los elementos primarios (situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) intervinientes, no se articulan para desarrollar las tareas y practicas matemáticas

5. Según las investigaciones, a partir del significado de referencia. observamos que los dos libros de textos oficiales deberían contener los seis campos de problemas de áreas de cuadriláteros convexos; sin embargo, predominan procedimientos algorítmicos y gráficos que no están relacionados con los procedimientos de descomponer, reconfigurar, transformar, demostrar, ni con problemas de contexto.

6. No se enfatiza el lenguaje verbal, puesto que no se trabajan problemas contextualizados con áreas de cuadriláteros. Además, no se proponen situaciones en las que los estudiantes deban argumentar o criticar las posibles soluciones. Es así que hay desarticulación de las entidades primarias que propone el EOS.

7. En Perú (2009), se proponen las capacidades que proporciona el estudio de la geometría, *demostración y razonamiento,* en el primero y segundo año de secundaria; sin embargo, no se promueve el desarrollo de las demostraciones ni la resolución de problemas**,** y, por ello, no se consigue que el alumno logre las capacidades detalladas en Perú (2015): *Razona y argumenta generando ideas matemáticas.* Cabe mencionar que es importante dedicar atención a las transformaciones, reconfiguraciones, reparto y reproducción; a fin de lograr que los estudiantes conozcan, de acuerdo con su edad cronológica, la importancia de usar demostraciones desde los primeros grados de secundaria y enfatizar estas ideas con más rigor en últimos grados de secundaria.

En relación al tercer objetivo específico, *Valorar la idoneidad epistémica de las tareas de áreas de cuadriláteros convexos contenidos en los dos libros de texto analizados.*

8. Sobre la valoración en su dimensión epistémica, de las tareas matemáticas de áreas de cuadriláteros convexos ubicados en los dos libros de texto de educación secundaria y luego de aplicar la tabla de indicadores de idoneidad propuestas por el EOS, adaptado por Garcés, encontramos que, dichas tareas de textos de secundaria podemos indicar que presenta un bajo grado de idoneidad, porque, de los 16 subcategorías que se presenta en el significado institucional de referencia, podemos indicar que se presentan en los grados de 1º y 2º , 10 subcategorías que se plantean en dichos libros de texto correspondiente al VI ciclo. Por lo

tanto podemos indicar que presenta al grado y nivel la enseñanza sobre áreas de cuadriláteros, pero hay que considerar el propósito de que las actividades y tareas que se planifican deben estar basado en la propuesta de Freudenthal, como son descomposiciones, composiciones, transformaciones, reconfiguraciones, mediciones, etc.

Finalmente, en relación a nuestro objetivo general, analizar institucional pretendido en torno a áreas de cuadriláteros convexos en el VI ciclo de Educación Básica Regular de las instituciones públicas del país, hemos llegado a las siguientes conclusiones:

9. Se analizó que, en los significados pretendidos y los significados de referencia en torno a áreas de cuadriláteros convexos, podemos mencionar que los cinco campos de problemas encontrados en los significados institucionales de referencia deberían contener también los significados pretendidos. Comparamos los libros de textos en el VI ciclo de Educación Básica Regular, que no se complementan con los campos de problemas o fenómenos y, por lo tanto podemos concluir que los otros campos de problemas se trabajan en los III, IV y V ciclo de EBR (Tabla 6).
10. Asimismo, podemos concluir que el grado de idoneidad epistémica alcanzado por los libros de textos de secundaria de VI ciclo den EBR es de idoneidad epistémica grado medio, Este es uno de los factores que influye en la poca comprensión de la nocion de área y el desarrollo de áreas de cuadriláteros convexos por parte de los estudiantes.

RECOMENDACIONES

1. Complementar el significado de referencia del objeto matemático de áreas de cuadriláteros con los resultados de otras investigaciones.
2. Ampliar el significado pretendido en cual se debe considerar el análisis de otros materiales elaborados por los profesores, y los documentos oficiales de la institución educativa
3. Es importante que los profesores de matemática tengan una visión más amplia sobre la fenomenología de áreas de cuadriláteros a través de los procedimientos de reconfigurar, descomponer, repartir, comparar y reproducir. Asimismo, el docente debe de desarrollar en sus estudiantes las capacidades de razonamiento-demostración en el proceso de enseñanza-aprendizaje de áreas de cuadriláteros.
4. Considerando los resultados y conclusiones de este trabajo, se pude diseñar una propuesta para desarrollar los otros dos significados institucionales: implementado y evaluado.
5. Determinar el grado de idoneidad en sus dimensión cognitiva y ecológica de las tareas de áreas de cuadriláteros convexos de educación secundaria.
6. Elaborar análisis de tareas y prácticas matemáticas de libros de textos de otros grados de educación secundaria.

REFERENCIAS

Allen, F., Douglas, E., Richmond, D., Rickart, Ch., Swain, H. y Walker, R. (1965); *Matemática Para la Escuela Secundaria Geometría (Parte 2) Comentario*; USA.

Alexander, D (2013). Geometría. México: Cengage Learning.

Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Investigación Ciencias Sociales*, 8(1), pp. 25-42. Recuperado de http://scielo.iics.una.py/pdf/riics/v8n1/v8n1a03.pdf

Boyer, F. (1986) *Historia de la Matemática* Madrid España. Alianza Editorial S.A.

Bruño. (1971). *Geometría curso superior*. España

Cabañas G., & Cantoral, R. (2005). La conservación en el estudio de área. *Departamento de la Matemática Educativa. Centro de investigación de estudios avanzados.* Recuperado de http://www.academia.edu/923794/LA_CONSERVACI%C3%93N_EN_EL_ESTUDIO_DEL_%C3%81REA

Cabañas, M (2011). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico. Departamento de Matemática Educativa Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN México, Distrito Federal, México. Recuperado de http://www.proyectosmatedu.cinvestav.mx/diplomado/mi_cuenta/data/pdf/clase5/cabanas-2011.pdf

Contreras, J. (2013). El Teorema de Varignon: Historia, especializaciones y extensiones. *Department of Mathematical Sciences, Ball State University*, Muncie, pp.24-39. http://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eureka/n31/contrera.pdf

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria y Universidad*. Universidad de Valencia. http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Corberán96.pdf

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J.D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Paradigma 28(2). 49-77 Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/dimension_metadidactica_11nov07.pdf

Douady, R. y Perrin, M. (1989). Um processus d´apprentissage du concept d´aire de surface plane. I.R.E.M. 37. Universite Paris VII.

Fandiño, M. y D'Amore, B.(2009). *Área y perímetro*. Bogotá Colombia. Editorial Magisterio.

Facco, S. (2003). *Concepto de área. Una propuesta de enseñanza aprendizaje. (Tesis de Maestría en Educación Matemática*: Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo). Recuperado de: http://www.pucsp.br/pensamentomatematico/dissertacao_sonia_facco.pdf

Font, V. y Godino D. (2006). *La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores*. Universidad de Granada. Recuperado de file:///C:/Users/sistemas/Downloads/538-1469-1-PB%20(2).pdf.

Font, V. y Adán, M. (2013). Valoración de la idoneidad matemática de tareas. Investigación en Educación Matemática XVII. pp. 283-291 Recuperado de file:///H:/tesis%20doctorales/Dialnet-InvestigacionEnEducacionMatematicaXVII-569414.pdf

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Gamboa, R., Ballestero, E. (2010) La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Educare*, 14(2), pp. 125-142. http://www.redalyc.org/pdf/1941/194115606010.pdf

García, G. (2013). *La construcción del concepto de área a través de la resolución de problemas: las interacciones y el análisis cognitivo.* Tesis de doctorado. Universidad de Huelva. Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/7517

Garcés, W. (2013). *Análisis didáctico como herramienta para determinar el grado de idoneidad de las tareas sobre ecuaciones lineales entre la educación secundaria y educación superior tecnológico*. Tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/5149/GARCES_CORDOVA_ANALISIS_IDONEIDAD.pdf?sequence=1

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3), 325- 355. Recuperado de www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J. (2004). Didáctica de la Matemática para maestros. Recuperado de http://www.ugr.es/

Godino, J. D. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-933517-1-7. [461 páginas; 8,8MB]. Recuperable de http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. D., Batanero, C. y Wilhelmi, M.R. (2007). *Análisis didáctico de procesos de estudio basado en el enfoque ontosemiótico.* Recuperado de *http://www.ugr.es/*

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). *Análisis ontosemiótico de una lección sobre suma y resta. Revista Relime, 9(1), pp. 131-155.* Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/autor?codigo=242848

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J,D., Font, V., Wilhelmi, M.R. y Castro. C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. Enseñanza de las Ciencias, 27(1), 59-76. Recuperado de *http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm#signi_sistemicos*

Godino, J.D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Gonzales, J. (2011). *"La enseñanza de la medición de áreas. Un largo y complejo proceso"* (Tesis de Maestría, Universidad Nacional del Nordeste). http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/tesis_la_ensenanza_de_la_medicion_de_areas.pdf

Gonzales, A. & Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en españa durante el siglo xx. Enseñanza de las ciencias, 2004, 22(3), pp. 389–408. Recuperado de file:///H:/tesis/marco%20teorico%20de%20eos/21990-21914-1-PB%20(2).pdf

Latorre, A., Rincón, D. y Arnal, J. (1996). Bases metodológicas de la investigación educativa. Barcelona: Recuperado de https://docs.google.com/a/pucp.pe/document/d/1rJVvR3V2a1GhWWBvujpdvIys4UmfyZaqkVmi-0OSAJU/edit

Marmolejo, G. (2014). Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles. Universidad de Salamanca. http://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/125728/1/DDMCE_MarmolejoAveniaGA_Desarrollodelavisualizaci%C3%B3n.pdf

Marmolejo, G. & Gonzales, M. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. Recuperado de file:///H:/tesis%20doctorales/articulos%20de%20historia/7345-37574-1-B%20(1).pdf

Moise, E y Downs F. (1970). Geometría moderna. México D.F: Fondo Educativo Interamericano.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

Norma (2012 a). Matemática 1. Ministerio de Educación. Recuperado de: http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivos

Norma (2012 b). Matemática 2. Ministerio de Educación. Recuperado de: http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivos

Perú, Ministerio de Educación (2005) *Unidad de Medición de la Calidad Educativa UMC.* Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/en2004/MatematicaS3_5.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de EBR.* Lima. Recuperado de: http://www.santillana.com.pe/dcn_2009.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2012). *Libros Matemática del 1° secundaria.* . Lima. Editorial del Grupo Editorial Norma en Perú.

Perú, Ministerio de Educación (2012). *Libros Matemática del 2° secundaria.* . Lima. Editorial del Grupo Editorial Norma en Perú.

Perú, Ministerio de Educación (2015). *Diseño Curricular Nacional de EBR.* Lima. http://ccec.edu.pe/files/RM-199-2015-MINEDU-Modifica-DCN-2009.pdf

Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. (Tesis Doctoral). Universidad de Barcelona, España.

Rich, B. (1997). Geometría Plana. New York: Mc Graw-Hill. https://es.scribd.com/doc/227311450/GEOMETRIA-Schaum-Barnett-Rich-Geometria-pdf

Rondero, C. & Font, V. (2015), Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. Enseñanza de las Ciencias, 33(2) pp. 29-49 Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/ejemplar/399804

Salvador, C., Rouanet, R., y Asijtuj A. (2011). *Comprendo las fórmulas de área de figuras geométricas* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Universidad de los Andes, pp.663-671 Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4862/

Sayritupac, J. (2013). *Significados de las medidas de tendencia central. Un estudio con alumnos universitarios de carreras de humanidades*. Tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Toro, I. y Parra, D. (2010). *Fundamentos epistemológicos de la investigación cualitativa/cuantitativa.* Primera edición. Bogotá: Fondo editorial Universidad EAFIT.

Torregrosa, G. y Quezada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericano de Investigación de Matemática Educativa*. 10(2) pp. 275-300 Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2362684

Turegano, S. (1993). De noción área a su definición. *Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla- La Mancha.*

Verástegui, T. (2003). Geometría Básica curso 1: Geometría Plana. Lima Perú.