

# PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

## FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD  
CATÓLICA**  
DEL PERÚ

### IMPLEMENTACIÓN DE UN MÓDULO DE LABORATORIO PARA EL ESTUDIO DINÁMICO EN ESTRUCTURAS METÁLICAS DE EQUIPOS MECÁNICOS

Tesis para optar el Título de Ingeniero Mecánico,  
que presenta el bachiller:

**ED FREDDY ARZAPALO BARRERA**

**ASESOR: Dipl. Ing. Jorge Alencastre Miranda**

Lima, Octubre del 2015

**Resumen:**

En la actualidad, el Perú presenta una gran demanda en la utilización de estructuras metálicas que trabajan con equipos mecánicos tales como zarandas, chancadoras, fajas transportadoras, entre otros. El campo de aplicación abarca todo tipo de industrias, donde la que más resalta es la minería, ya que el Perú es considerado un país minero (actividad principal). Es por ello, la importancia de conocer el comportamiento dinámico de dichas estructuras tiene un valor agregado muy importante.

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo implementar un módulo de laboratorio en base a una estructura metálica, la cual trabaje con equipos mecánicos. Para así poder mostrar la influencia y mejorar la comprensión sobre la influencia de los parámetros de inercia, rigidez y fuerza excitatriz.

La primera parte abarcó todos los conceptos necesarios para poder abordar los problemas de vibraciones mecánicas en las estructuras metálicas. Se explicó con mayor detalle los conceptos de los parámetros que influyen y estén relacionados con el comportamiento dinámico y la estabilidad. También se indicaron las herramientas necesarias para determinar las frecuencias naturales en  $n$  GDL mediante el análisis modal. En cuanto a la parte del diseño, se contemplaron las recomendaciones mencionadas por la norma VDI 2225; desde el estudio del arte, hasta obtener el concepto de solución óptimo, para luego realizar los planos de fabricación.

La siguiente parte abarcó la experimentación que se realizó en el Laboratorio de Física de la PUCP, con ello se obtuvo datos experimentales (análisis modal) para luego contrastarlos con los elementos finitos. Luego, se comprobó que hay una variación menor al 10 % en el primer modo de los datos conceptuales con los experimentales. También, se mostró la influencia del tipo de uniones y cómo estos afectaron a las condiciones de borde. Además, se logró mostrar la diferencia de los modos y frecuencias naturales al cambiar cambió la configuración del sistema.

Por último, se logró cumplir con los objetivos planteados al mostrar la influencia de los parámetros de inercia, rigidez y fuerza excitatriz. Como también se resaltó, la importancia de las condiciones de borde para tener una mejor representación del modelo actual, en este caso se resaltó la influencia del tipo de uniones.



Dedico este trabajo a mi familia, quienes me apoyaron todos estos años.

En especial a mi madre por su incondicional apoyo.

A mi padre por sus consejos en todo momento.

A mis compañeros por el apoyo brindado.

## Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a todos las personas que me acompañaron durante mi formación universitaria y la realización del presente proyecto de tesis. Agradezco a mi familia por haberme dado valores y principios. Agradezco a los profesores de la sección de Ingeniería Mecánica por la formación académica brindada. Un agradecimiento especial al Dipl. Ing. Jorge Hernán Alencastre Miranda por el apoyo, la asesoría y consejos brindados que permitieron conseguir este logro; esperando que siga manteniendo su estilo de enseñanza tanto para la formación académica como personal de los estudiante. Así mismo, agradezco al profesor de la sección de Física Richard Rivera por el apoyo en la realización de la experimentación en el Laboratorio de Acústica y por la asesoría brindada en el trabajo.

Agradezco a la Pontificia Universidad Católica del Perú, a la Facultad de Ciencias e Ingeniería y a la sección de Ingeniería Mecánica por haber hecho de esta casa de estudios un lugar idóneo para la formación académica, profesional y humana. Finalmente, agradezco a Dios, a mi familia y a mis compañeros que me acompañaron en esta etapa de formación en mi vida.

## ÍNDICE DEL CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	1
<b>CAPÍTULO 1: VIBRACIONES</b>	3
1.1. Definición	3
1.2. Solución de 1 Grado de Libertad	4
1.3. Solución de “n” Grados de Libertad	5
1.4. Análisis de estabilidad del sistema	7
1.5. Método de los elementos finitos	8
1.5.1. Fundamentos del MEF	9
1.5.2. Procedimiento para aplicar MEF	10
<b>CAPÍTULO 2: DISEÑO Y FABRICACIÓN DEL MÓDULO EXPERIMENTAL</b>	13
2.1. Metodología del diseño según norma VDI 2225	13
2.1.1. Comprensión de la solicitud	13
2.1.1.1. Estado de la tecnología	13
2.1.1.2. Lista de exigencias	17
2.1.2. Estructura de funciones	19
2.1.3. Concepto de solución	21
2.1.4. Proyecto preliminar óptimo	26
2.2. Estabilidad del sistema	30
2.2.1. Verificación de pandeo	30
2.2.2. Verificación a corte de los pernos	31
2.2.3. Verificación dimensional de la base	32
2.3. Análisis modal	32
2.3.1. Determinación del rango de frecuencias naturales del sistema	32
2.4. Elaboración de detalles	37
2.4.1. Planos de despiece	37
2.4.2. Planos de fabricación	37
2.5. Fabricación del módulo experimental	38

2.6. Evaluación económica del módulo experimental	39
2.7. Instrucciones para el funcionamiento	40
<b>CAPÍTULO 3: EXPERIMENTACIÓN CUALITATIVA Y MEDICIONES</b>	<b>46</b>
3.1. Experimentación	46
3.1.1. Objetivos	46
3.1.2. Modelos a ensayar	46
3.1.3. Ámbito geográfico	47
3.1.4. Instrumentación y equipos	47
3.1.5. Materiales	48
3.2. Recopilación de datos	48
3.2.1. Determinación de las frecuencias de resonancia del módulo	48
3.2.2. Ensayo del módulo con la base empotrada	50
3.2.3. Ensayo del módulo caso articulado	54
3.2.4. Ensayo del módulo con mayor rigidez	56
<b>CAPÍTULO 4: SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS</b>	<b>58</b>
4.1. Simulación	58
4.1.1. Caso 1: Base del módulo con unión empotrada y nodos empotrados	59
4.1.2. Caso 2: Base del módulo con unión articulada y nodos empotrados	62
4.1.3. Caso 3: Uniones del módulo articulado	64
4.1.4. Caso 4: Módulo con mayor rigidez	65
4.2. Análisis de los resultados	67
4.2.1. Comparación de los resultados teóricos y experimentales	67
4.2.2. Interpretación de los resultados obtenidos	75
<b>PLANOS</b>	
<b>CONCLUSIONES</b>	
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	
<b>ANEXOS</b>	

## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descripción	Unidad
$\ddot{X}(t)$	Aceleración del sistema en función del tiempo	[mm/s <sup>2</sup> ]
h	Altura entre cada nivel del módulo	[m]
A	Área de la sección del fleje metálico	[mm <sup>2</sup> ]
c	Amortiguamiento del sistema	[N.s/m]
d	Coefficiente de atenuación	[1/s]
K	Elasticidad del sistema	[N/mm]
f	Frecuencias naturales del sistema	[Hz]
$F_p$	Fuerza de pandeo	[N]
$F(t)$	Fuerza excitatriz del sistema	[N]
I	Inercia del sistema	[mm <sup>4</sup> ]
L <sub>p</sub>	Longitud de pandeo	[mm]
L	Longitud del elemento	[mm]
E	Módulo de Young	[N/mm <sup>2</sup> ]
$X(t)$	Posición del sistema en función del tiempo	[mm]
i	Radio de giro	[m]
$\dot{X}(t)$	Velocidad del sistema en función del tiempo	[mm/s]
W <sub>n</sub>	Velocidades angulares del sistema	[rad/s]
$\rho_{Acero}$	Densidad del acero	[Kg/mm <sup>3</sup> ]
$\rho_{Al}$	Densidad del aluminio	[Kg/mm <sup>3</sup> ]
$\delta$	Desplazamiento unitario	[mm]
$\sigma_{tracción}$	Esfuerzo a la tracción	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_{corte}$	Esfuerzo al corte	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\tau_{adm}$	Esfuerzo al corte admisible	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_p$	Esfuerzo de pandeo	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\lambda$	Factor de esbeltez	
F.S.	Factor de seguridad	

## Introducción

Las estructuras metálicas que trabajan con equipos mecánicos -tales como zarandas, chancadoras, fajas transportadoras, entre otros- tienden a fallar al producirse una variación en alguna de las condiciones dinámicas con las cuales trabajan. Por tanto, para lograr una mayor comprensión de este fenómeno se requerirá del uso de módulos educativos, los cuales representen de manera clara dicho comportamiento.

Cabe señalar que se observa la falta de existencia de módulos educativos, los cuales retraten este tipo de estructuras metálicas; debido a que la mayoría está orientada hacia el campo de ingeniería civil, donde se estudia con mayor detalle el comportamiento estático.

En nuestro país, donde la minería juega un rol importante en la economía, existe la necesidad de comprender mejor el comportamiento dinámico de estructuras metálicas que están sometidas a cargas dinámicas por equipos mecánicos, ya que estos tienden a fallar cuando se varía de alguna forma la condición inicial de trabajo a la cual han sido diseñadas. En lo que concierne a equipos mecánicos estos pueden ser zarandas, chancadoras, molinos, torres de transferencia parte de un sistema de una faja transportadora, cargadores de barcos, grúas, etc.

Con la implementación de un módulo educativo de este tipo de estructura metálica se permitirá realizar la experimentación y observar el comportamiento dinámico. En consecuencia, se ayudará a la mejor comprensión y valoración de los parámetros de inercia, rigidez y fuerza excitatriz; que serán reflejados en los diferentes modos de vibración de la estructura. Es decir, el módulo educativo dará a conocer las posibles causas que afectan tanto el comportamiento dinámico como las pautas de posibles soluciones para que no sean causa de una posible falla en la estructura. Por otro lado, la simulación nos permitirá analizar el comportamiento de forma virtual, ya que en la actualidad todo proceso de diseño pasa por un procedimiento de simulación y con la experimentación se podrá realizar una comparación entre estos dos métodos.

El objetivo general y los objetivos específicos del presente trabajo son los siguientes:

**Objetivo general:**

Implementar un módulo educativo en base a una estructura metálica, la cual trabaje con equipos mecánicos. Con la finalidad de mostrar la influencia de los parámetros como rigidez, inercia y fuerza excitatriz en el comportamiento dinámico y de esta manera mejorar su compresión.

**Objetivos específicos:**

- Diseñar el módulo educativo basado en una estructura metálica.
- Realizar posibles configuraciones en el módulo educativo.
- Realizar los planos de fabricación para su posterior montaje.
- Definir las condiciones de operación para la experimentación, para ello se contará con un manual de funcionamiento.
- Experimentar con el modulo educativo y con sus posibles configuraciones.
- Realizar la simulación numérica de cada ensayo.
- Contrastar los resultados de la simulación con los datos obtenidos mediante método analítico y experimentación.

El primer capítulo de esta tesis resume información teórica necesaria para poder comprender los parámetros que influyen en el comportamiento dinámico de una estructura metálica que trabaje con equipos mecánicos. En el segundo capítulo se realizará el diseño y fabricación del módulo de laboratorio. El tercer capítulo mencionará la experimentación cualitativa a realizar y las mediciones obtenidas. El cuarto capítulo desarrollará el procedimiento general de simulación, por último se realizará la comparación entre los datos obtenidos del análisis modal, la experimentación y la simulación.

## CAPÍTULO 1

### VIBRACIONES

#### 1.1.- Definición:

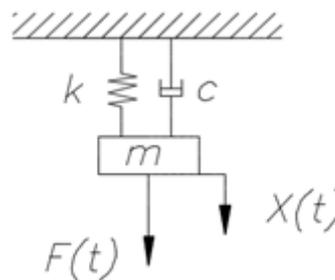
La definición del fenómeno de las vibraciones mecánicas es la variación de algún parámetro físico con respecto a su posición de equilibrio en un determinado tiempo. Estas son originadas cuando existe un cambio en las variables que presenta el sistema. No es necesario que se presente una gran magnitud de vibración para poder tener efectos significativos que puedan perjudicar el funcionamiento adecuado del sistema; ya que, en un comportamiento dinámico, llegar al estado límite resulta con mayor facilidad. Para el estudio de las vibraciones mecánicas, se precisa de un modelamiento en 1 grado de libertad para entender el comportamiento del sistema, pero para obtener una mayor descripción del sistema es necesario que se utilice un sistema de “n” grados de libertad aunque sean de una mayor complejidad.

Como todo sistema que trabaje en condiciones dinámicas, presentará la propiedad de las frecuencias naturales, las cuales están directamente relacionadas con la distribución de la masa y rigidez, es decir las frecuencias naturales son características propias del sistema. Por otro lado, cuando se presente una fuerza externa que genere la vibración al sistema, se obtendrán frecuencias de excitación. Si estas coinciden con las

frecuencias naturales del sistema, se produce la resonancia, generando oscilaciones grandes que son muy perjudiciales al sistema.

### 1.2.- Solución de 1 Grado de Libertad (GDL):

Todo sistema que presente 1 Grado de Libertad (GDL), necesariamente tendrá que tener como estudio a una sola variable, en la figura 1.1 se representa una esquematización de un sistema con un 1 GDL.



**Figura 1.1** Modelo de 1 GDL. Elaboración Propia.

Donde las siguientes variables representan:

**Tabla 1.1** Variables del sistema de 1 GDL. Elaboración propia.

Variable	Representa	Energía asociada
m	La inercia del sistema	Energía cinética
k	Elasticidad del sistema	Energía potencial
c	Amortiguamiento del sistema	Energía disipativa
F (t)	Fuerza excitatriz del sistema	Trabajo

Donde la ecuación diferencial del sistema es la siguiente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{Ec. 1.1}$$

Si se dividen todos los factores por “m”, entonces se obtendría lo siguiente:

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + w_n^2 x = F(t)/m \quad (\text{Ec. 1.2})$$

Donde:

- $d = c / (2m)$ , es el coeficiente de atenuación.
- $W_n = \sqrt{k/m}$ , es la frecuencia natural a la cual el sistema oscilará o vibrará.
- $W_{ext} = W_n$ , cuando la frecuencia exterior es igual a la frecuencia natural del sistema se presentará el fenómeno de resonancia.

Como se mencionó anteriormente, en la industria existen una gran cantidad de estructuras metálicas que trabajan con equipos mecánicos, y por tal motivo al analizar el fenómeno de las vibraciones en cada una, se puede observar que la variable del amortiguamiento es despreciable o casi nula.

### 1.3.- Solución de N Grados de Libertad (N GDL):

Cuando un sistema presente más de un grado de libertad, su solución será seguir el mismo procedimiento que se aplica para un grado de libertad, con diferencias que se emplearán una cantidad de “N” ecuaciones de acuerdo a la cantidad de Grados de Libertad que presente el sistema, con ello se encontrará los diferentes modos de vibración presentes en el sistema. En otros términos, se obtendría un esquema parecido al siguiente, cabe mencionar que se despreciará el amortiguamiento por lo mencionado anteriormente:

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{x}_1 + \dots + m_{1n}\ddot{x}_n + k_{11}x_1 + \dots + k_{1n}x_n &= F1(t) \\ m_{21}\ddot{x}_1 + \dots + m_{2n}\ddot{x}_n + k_{21}x_1 + \dots + k_{2n}x_n &= F2(t) \\ \vdots & \\ m_{n1}\ddot{x}_1 + \dots + m_{nn}\ddot{x}_n + k_{n1}x_1 + \dots + k_{nn}x_n &= Fn(t) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 1.3})$$

De forma abreviada la ecuación sería la siguiente:

$$M\ddot{X} + KX = F(t) \quad (\text{Ec. 1.4})$$

La forma matricial de la ecuación anterior es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F1(t) \\ F2(t) \\ F3(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.5})$$

Entonces, se determinarán las frecuencias naturales del sistema; con ello, se identificarán los modos de vibración, esto será mediante la aplicación de la siguiente ecuación:

$$M\ddot{X} + KX = 0 \quad (\text{Ec. 1.6})$$

Además, la ecuación de la posición sería de la siguiente manera:

$$X_{(t)} = X \cos(\omega t) \quad (\text{Ec. 1.7})$$

Derivando se obtiene la velocidad de cada nivel:

$$\dot{x}_{(t)} = -\omega X \sin(\omega t) \quad (\text{Ec. 1.8})$$

Volviendo a derivar:

$$\ddot{x}_{(t)} = -\omega^2 X \cos(\omega t) \quad (\text{Ec. 1.9})$$

Reemplazando (Ec. 1.7) y (Ec. 1.9) en (Ec. 1.6):

$$-\omega^2 MX \cos(\omega t) + kX \cos(\omega t) = 0 \quad (\text{Ec. 1.10})$$

Agrupando términos:

$$(K - \omega M)X \cos(\omega t) = 0 \quad (\text{Ec.1.11})$$

Donde una solución será cuando  $\omega = 0$  (solución trivial), pero las otras soluciones de nuestro sistema de ecuaciones vendrán del otro término, es decir:

$$X \cos(\omega t) \neq 0 \quad (\text{Ec.1.12})$$

Entonces, se deberá analizar la determinante de la matriz para encontrar las otras soluciones para las frecuencias naturales del sistema.

$$\text{Det}[K - wM] = 0 \quad (\text{Ec.1.13})$$

Al resolver (Ec.1.13) se obtendrán las “N” frecuencias en las cuales el sistema oscilará y cada una con su respectivo modo de vibración.

#### 1.4.- Análisis de estabilidad del sistema:

Para poder garantizar el adecuado funcionamiento del módulo se deberá considerar lo siguiente:

- **Verificación de pandeo en las columnas.**

Se deberá realizar esta verificación, ya que las columnas del módulo educativo son de sección transversal pequeña a comparación con su longitud, es decir son esbeltas. Para poder realizar esta comprobación se verificará por el método de Euler, este método es muy aceptado por casi todas las normas y para la aplicación que se dará en esta tesis será suficiente para garantizar que no exista un problema de pandeo. Para la aplicación de este método se necesitará saber el factor de esbeltez ( $\lambda$ ) (Ec. 1.14), dicho factor es adimensional donde se relaciona la longitud efectiva de pandeo ( $L_p$ ) con el radio de giro de la sección (i).

$$\lambda = L_p / i \quad (\text{Ec. 1.14})$$

Según la gráfica de Euler, cuando el factor de esbeltez ( $\lambda$ ) tenga un valor mayor a 100 podrá garantizarse que el elemento no falla por pandeo, ya que si es menor a 100 es posible que el elemento falle primero por fluencia que por pandeo. Entonces el esfuerzo de pandeo ( $\sigma_p$ ) se puede aproximar de la siguiente manera:

$$\sigma_p = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\text{Ec.1.15})$$

Por otro lado, la Fuerza de pandeo ( $F_p$ ) tendrá la siguiente aproximación:

$$F_p = \frac{\pi^2 EI}{L_p^2} \quad (\text{Ec.1.16})$$

- Resistencia del tornillo a los esfuerzos de corte ( $\tau_{corte}$ ) a los que estarán sometidos, es decir se debe verificar que el valor del factor de seguridad sea lo suficiente para garantizar las uniones en el sistema. Según el Euro código 3 (EC.3) se puede aproximar el esfuerzo al corte, aplicando un factor de 0.6 al esfuerzo de tracción ( $\sigma_{trac.}$ ) que dependerá del tipo de grado del perno. Entonces, se utilizarán las siguientes ecuaciones:

$$\tau_{corte} \leq \frac{\tau_{adm}}{F.S.} \quad (\text{Ec. 1.17})$$

$$\tau_{corte} = \frac{F_{corte}}{A} \quad (\text{Ec. 1.18})$$

$$\tau_{adm} = 0.6 \times \sigma_{trac.} \quad (\text{Ec.1.19})$$

Además, si el grado del perno es A.B; entonces:

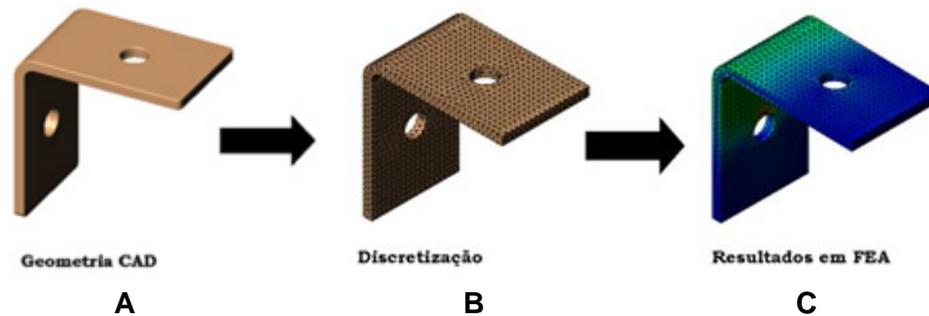
$$\sigma_{trac.} = 100 \times A \quad (\text{Ec.1.20})$$

- El adecuado peso de la base (cimentación) para que el módulo pueda operar al ser sometido a las vibraciones originadas por la fuerza excitatriz del desbalance del servomotor de 24 VDC.

### 1.5.- Método de los elementos finitos:

Método numérico utilizado para resolver y obtener soluciones aproximadas de problemas complejos en ingeniería [Alencastre 2013]: también conocido por sus siglas en inglés FEA (FINITE ELEMENT ANALYSIS). Este método fue desarrollado por Richard Courant con el fin de obtener soluciones aproximadas de análisis que impliquen el fenómeno de las vibraciones. Después se llegó a generalizar el método para diferentes campos en ingeniería. Las primeras aplicaciones de este método fueron en estudiar el análisis de la rigidez y desplazamientos de sus nodos.

Los problemas que resuelve el método de los elementos finitos presentan más de una variable dependiente, donde cada una deberá satisfacer las ecuaciones diferenciales en su respectivo dominio. El método busca modelar un problema de medio continuo como un ensamble de elementos finitos (problemas más sencillos) relacionados entre sí mediante los nodos. El proceso anteriormente mencionado es conocido como discretización. (fig. 1.2)



**Figura 1.2** A) Geometría CAD. B) Discretización. C) Resultados de la simulación.

Fuente: Render – Curso de elementos finitos.

### 1.5.1.-Fundamentos del MEF

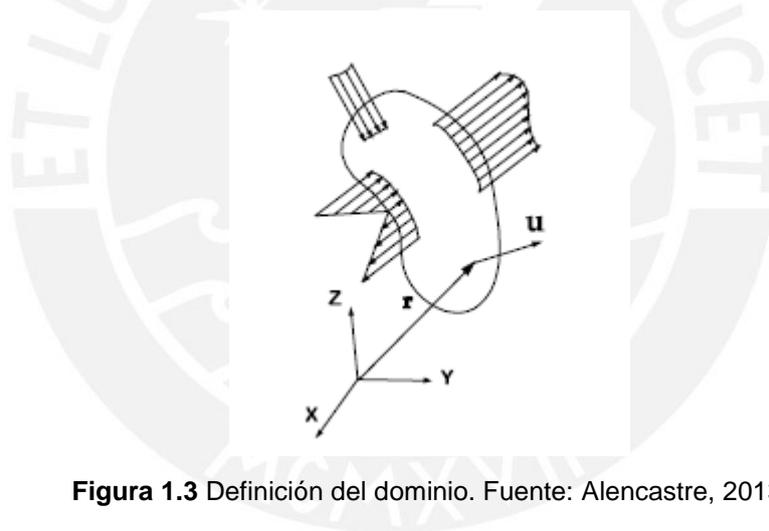
Para poder utilizar de una manera eficiente esta herramienta será bueno recordar siempre bajo que principios trabaja esta herramienta:

- Toda función continua que presenta un dominio global puede ser representado como el conjunto de un número finito de funciones continuas con subdominios más pequeños.
- La geometría de estos pequeños subdominios son de una geometría sencilla. Este conjunto es conocido como los elementos finitos.
- Los puntos donde existe interacción o intersección entre dos o más dominios son llamados nodos, los cuales no necesariamente tienen que ser un punto de conexión en el medio físico. Por otro lado, como todo elemento presentan 6 grados de libertad (desplazamiento y rotación en los 3 ejes).
- El objetivo de los elementos finitos es resolver las funciones con subdominios más pequeños y a partir de ello poder aproximar la respuesta de todo el sistema en su dominio global.
- Para el análisis estructural usando elementos finitos se debe comprobar el equilibrio de fuerzas y momentos, relaciones entre deformación y desplazamientos (Leyes de compatibilidad), y relaciones entre esfuerzo y deformación (leyes constitutivas). [Alencastre 2013].
- La matriz que permitirá relacionar las fuerzas nodales con los desplazamientos será la de rigidez  $[K]$ .

### 1.5.2.-Procedimiento para aplicar MEF

- **Definición del fenómeno físico**

Para poder utilizar la herramienta de los elementos finitos, es importante que se identifique el dominio a estudiar, ya que para cada caso se presentarán características diferentes; tales como, físicas, geométricas y de frontera. Además, se debe identificar las variables y ecuaciones diferenciales que están en el sistema o dominio. Por último, se identifican las condiciones de borde que actúan sobre la frontera del sistema. Para el caso a estudiar, tanto las fuerzas externas, como los desplazamientos debido al tipo de soporte o unión de elementos (empotrado, articulado, etc.) dentro del sistema generarán las condiciones de borde.



**Figura 1.3** Definición del dominio. Fuente: Alencastre, 2013.

- **Discretización del sistema:**

Como se mencionó anteriormente, una vez definido el sistema a estudiar, se procede a discretizar o dividir el sistema en un número finito de elementos donde están relacionados por los nodos. Para ello, existen muchas maneras de realizar esta división, donde se puede variar la geometría de los elementos como también su tamaño. Una adecuada combinación de estas dos características significa tener un mallado correcto que permitirá aproximar el comportamiento del modelo discreto al real.

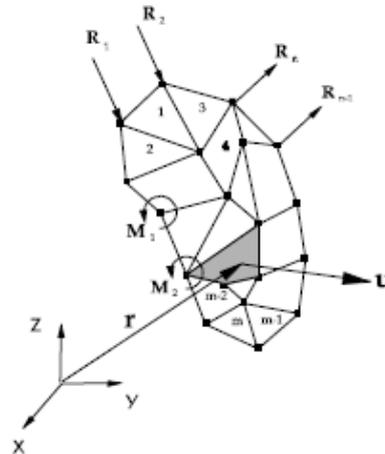


Figura 1.4 Discretización del medio (mallado). Fuente: Alencastre, 2013.

• **Análisis de la ecuación finita en los elementos**

Todo elemento deberá cumplir con las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos (analizar los 6 GDL), también se deberá verificar las relaciones de desplazamientos con deformaciones (ley constitutivas). Para el análisis estructural se aplicará la ley de Hooke, donde se relacionan las propiedades físicas del material con sus características físicas. Es decir, se relacionan la rigidez (propiedad del material del elemento) con su respectivo desplazamiento y fuerza interna.

$$[K]^{(e)} \cdot \{u\}^{(e)} = \{F\}^{(e)} \tag{Ec. 1.21}$$

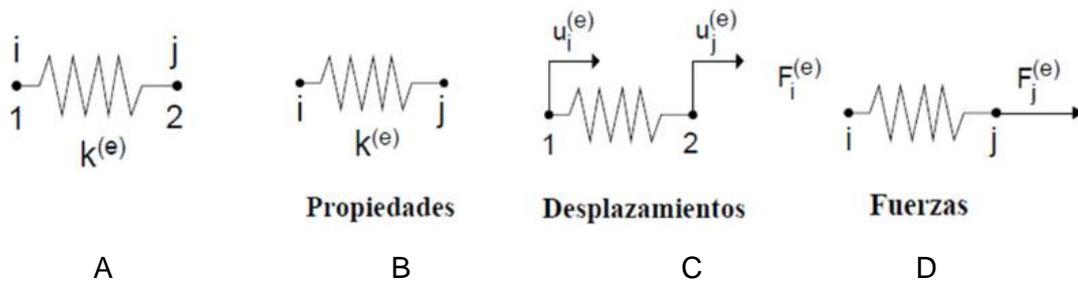
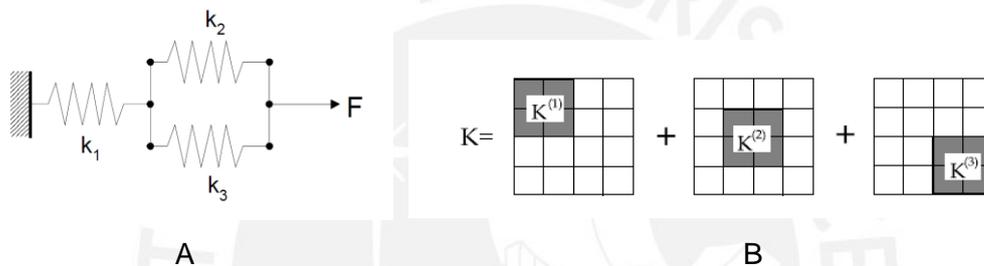


Figura 1.5 A) Elemento resorte. B) Propiedades. C) Desplazamientos. D) Fuerzas. Fuente: Alencastre, 2013.

- **Formación de la matriz global del dominio o sistema**

La matriz global es la sumatoria o unión de todas las ecuaciones finitas de cada elemento. Para poder hallar una relación entre cada elemento se utilizarán las leyes de compatibilidad; es decir, los nodos tendrán que tener tanto la dirección como el desplazamiento en mismo sentido, de igual magnitud –respectivamente- en los elementos que pertenezca. Con ello, se forma una matriz global que pueda representar todas las características de cada elemento y con ello definir el comportamiento del sistema o dominio en general.



**Figura 1.6** A) Esquema de resortes en paralelo y serie. B) Influencia de cada resorte en la matriz global. Fuente: Alencastre, 2013.

$$[K].\{u\} = \{F\} \tag{Ec. 1.22}$$

- **Solución del sistema global**

Para poder relacionar todos los subdominios en una matriz global, que represente el fenómeno físico de todo el conjunto, se deberá ver la relación de los nodos con respecto a las cargas a las que están sometidos y las condiciones de borde que permitirán resolver el sistema. Es decir, se calcularán desplazamientos y a partir de las leyes constitutivas se determinarán las deformaciones y por lo tanto los esfuerzos.

$$[K]^{(e)}. \{u\}^{(e)} = \{F\}^{(e)} \tag{Ec. 1.23}$$

## CAPÍTULO 2

### DISEÑO Y FABRICACIÓN DEL MÓDULO EXPERIMENTAL

#### 2.1.- Metodología del diseño según norma VDI 2225

##### 2.1.1.- Comprensión de la solicitud

##### 2.1.1.1.- Estado de la tecnología

El acero es un material estructural muy versátil. Se puede observar un sinnúmero de construcciones en acero, producto del desarrollo de la ciencia y la tecnología en la fabricación de éste, hacia finales del siglo XIX. Hoy en día, el acero constituye cerca del 95% de todo el tonelaje de producción de metal a nivel mundial. [McCormac, 2008].

El campo de aplicación de las estructuras metálicas de acero es muy amplio, abarca todo tipo de industrias como minería, metalúrgica, pesquera, cementera, naves industriales, etc. El presente trabajo se centrará en el estudio de estructuras metálicas que trabajen con equipos mecánicos.

Por ejemplo, las estructuras que trabajan en una planta chancadora trabajan con equipos mecánicos como zarandas, chancadoras y fajas transportadoras. La mayoría de estos equipos trabajan con vibraciones, transmitiendo este efecto a las estructuras que lo soportan. Es decir, la estructura está en constante vibración.



**Figura 2.1.** Imagen de una estructura metálica en un proceso de chancado.  
Fuente: Concasseur. [1]

Por otro lado, en la industria pesquera se cuenta con cargadores de barcos móviles que sirven para el traslado de granel a las embarcaciones. Estas máquinas permiten eliminar la necesidad de tener equipos fijos. Principalmente están conformados por un brazo extensible o pluma, una faja transportadora, un dissipador para elevar y una estructura móvil para apoyar el brazo. Donde pueden alcanzar una altura mayor a 20 metros y la extensión del brazo puede ser mayor a 60 metros.

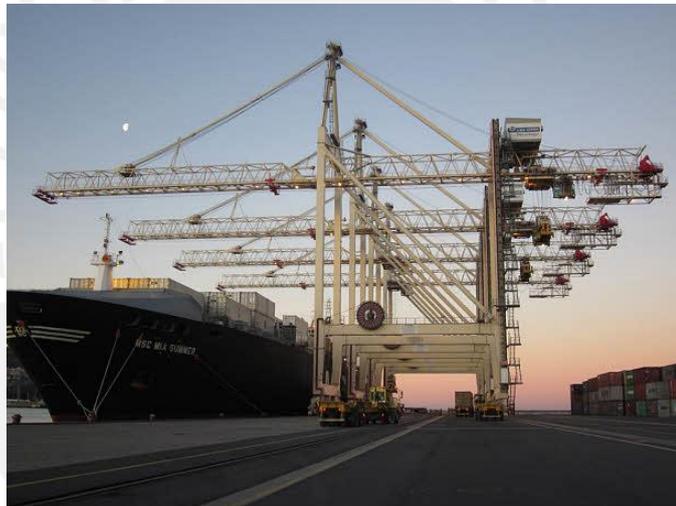


**Figura 2.2.** Imagen de un Cargador de barco móvil. Fuente: Aumund. [2]

Otra estructura que trabaja con equipos mecánicos son las grúas. Las primeras grúas trabajaban con energía proporcionada por máquinas de vapor, pero en la actualidad se utilizan motores de combustión interna o motores eléctricos. Se clasifican entre móviles

y fijas, donde las fijas soportan mayores cargas que las móviles ya que no presentan movilidad.

Entre algunos tipos, están las grúas torres que están soportadas por una estructura que está compuesta por una viga horizontal que se llama pluma y un pilar vertical llamado torre. También están las grúas telescópicas, este tipo presenta un sistema hidráulico y otro sistema que permita la extensión del brazo, ya que está formado por tubos que están uno dentro del otro. Otro tipo de grúa es el pórtico que presenta una viga que esta sostenida mediante dos o más patas. Existen muchas variantes, pueden ser grúas pórtico para contenedores, de puesto de trabajo (fábricas) y montada sobre raíles.



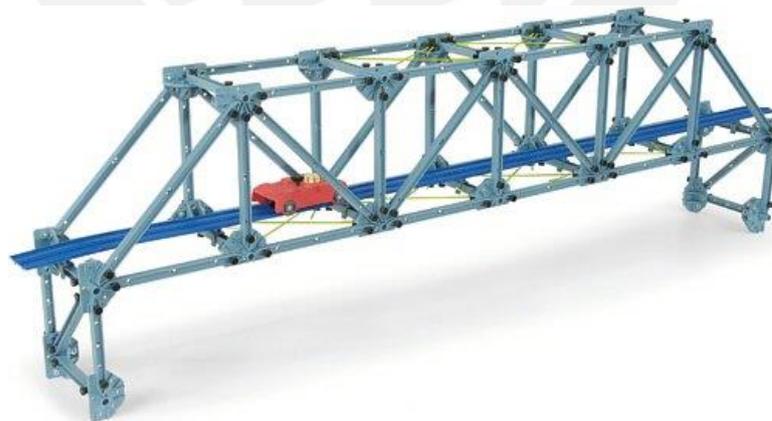
**Figura 2.3.** Imagen de una grúa pórtico para contenedores. Fuente: Liebherr. [3]

Como se puede apreciar existe una gran variedad de estructuras metálicas que trabajan con equipos mecánicos y por ende tienden a vibrar. Como se mencionó, el objetivo principal del presente trabajo es fabricar, experimentar y simular este tipo de estructuras para observar y ver la influencia de los parámetros en el comportamiento dinámico. Además, el estudio y la representación del comportamiento dinámico en estructuras metálicas están orientados a la representación de sismos (ingeniería civil) y para ello utilizan como factor externo mesas vibratorias; es decir, el agente externo que influye no es un equipo mecánico.



**Figura 2.4.** Imagen de un módulo educativo en una mesa vibratoria. Fuente: UNAM. [4]

Mayormente existen módulos educativos que permiten realizar ensayos tanto estático como dinámico pero enfocado al campo de ingeniería civil como diferentes tipos de puentes Howe, Pratt, Warren. Donde se pueden apreciar qué elementos están en tracción y compresión. También se pueden agregar cargas para poder experimentar con estos módulos.



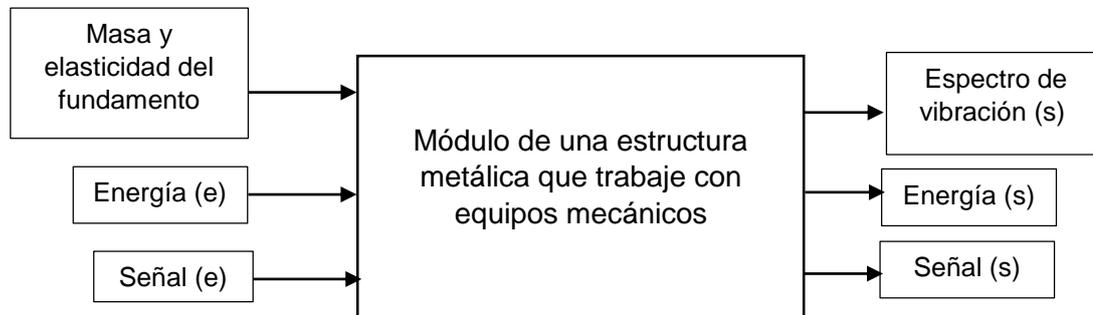
**Figura 2.5.** Imagen de un módulo educativo de un puente tipo Warren. Fuente: Tecnoedu. [5]

## 2.1.1.2.- Lista de exigencias

LISTA DE EXIGENCIAS			Pág. 1 de 1
			Edición: Rev.1
<b>PROYECTO:</b>			Fecha: 28/08/14
			Revisado por: Docente: J.A.
<b>CLIENTE:</b>			Elaborado por: Ed Arzapalo
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ			Responsable
N°	Deseo o exigencia	Descripción	
1	EF	<b>Función principal</b> Mejorar la comprensión de la influencia de la rigidez, inercia y fuerza excitatriz en estructuras metálicas que trabajen con equipos mecánicos, a través de una experimentación.	Ed Arzapalo
2	EF D EF	<b>Geometría</b> Las dimensiones del módulo deben ser las adecuadas para facilitar su portabilidad y fácil manejo.  Se desea que el módulo no debe exceder los 60 cm en altura.  El módulo educativo podrá cambiar de un modelo flexible a un modelo rígido.	Ed Arzapalo
3	EF EF	<b>Cinemática</b> La estructura debe ser diseñada de tal forma que a un nivel bajo de vibraciones se pueda apreciar el fenómeno, es decir la frecuencia debe estar entre 5 a 20 Hz.  Se tendrá un variador de velocidad del motor para poder ver el comportamiento dinámico de la estructura a diferentes frecuencias.	Ed Arzapalo
4	EF EF EF	<b>Fuerzas</b>  La fuerza de excitación debe ser originada por un motor eléctrico desbalanceado de corriente continua.  Determinar fuerzas y masas de forma analítica.  Asegurar la estabilidad de la estructura.	Ed Arzapalo

5	EF	<b>Energía</b> Energía eléctrica.	Ed Arzapalo
6	EF EF	<b>Señales</b> Poder realizar mediciones de los parámetros de vibración a través de sensores (acelerómetros, etc.) Análisis de los parámetros medidos.	Ed Arzapalo
7	EF	<b>Seguridad</b> Seguridad de la máquina ante una eventual falla del módulo.	Ed Arzapalo
8	EF	<b>Ergonomía</b> Correcta ubicación del mando para tener una cómoda operatividad. Operatividad del módulo con un operario.	Ed Arzapalo
9	EF D	<b>Fabricación</b> Los elementos constituyentes del módulo deben ser de fácil fabricación (mecanizado) para nuestro medio.  Los materiales a utilizar deben ser de fácil adquisición.	Ed Arzapalo
10	EF	<b>Control</b> Medición del desplazamiento del sistema, fuerza de excitación. Determinación y análisis del espectro de vibración.	Ed Arzapalo
11	EF	<b>Montaje</b> Las uniones de las estructuras deben ser fijas, desmontables y de fácil acceso. Requiere de una base.	Ed Arzapalo
12	EF	<b>Transporte</b> De fácil transporte, las piezas del módulo pueden ser guardados en una maleta adecuada para transportar el módulo.	Ed Arzapalo
13	D	<b>Uso</b> La experimentación debe ser realizada en un ambiente cerrado.	Ed Arzapalo
14	EF	<b>Mantenimiento</b> Los elementos son intercambiables. Uso de pintura corrosiva.	Ed Arzapalo
15	EF	<b>Costo</b> Costo del proyecto (diseño, fabricación y experimentación): US\$ 500	Ed Arzapalo
16	D	<b>Plazo de entrega</b> El plazo de entrega del diseño y su fabricación será al final del ciclo 2015-1.	Ed Arzapalo

### 2.1.2.- Estructura de Funciones



#### ENTRA:

MASA Y ELASTICIDAD DEL FUNDAMENTO

ENERGIA (e): Energía eléctrica.

SEÑALES (e):

- Botón para arrancar el motor

#### SALE:

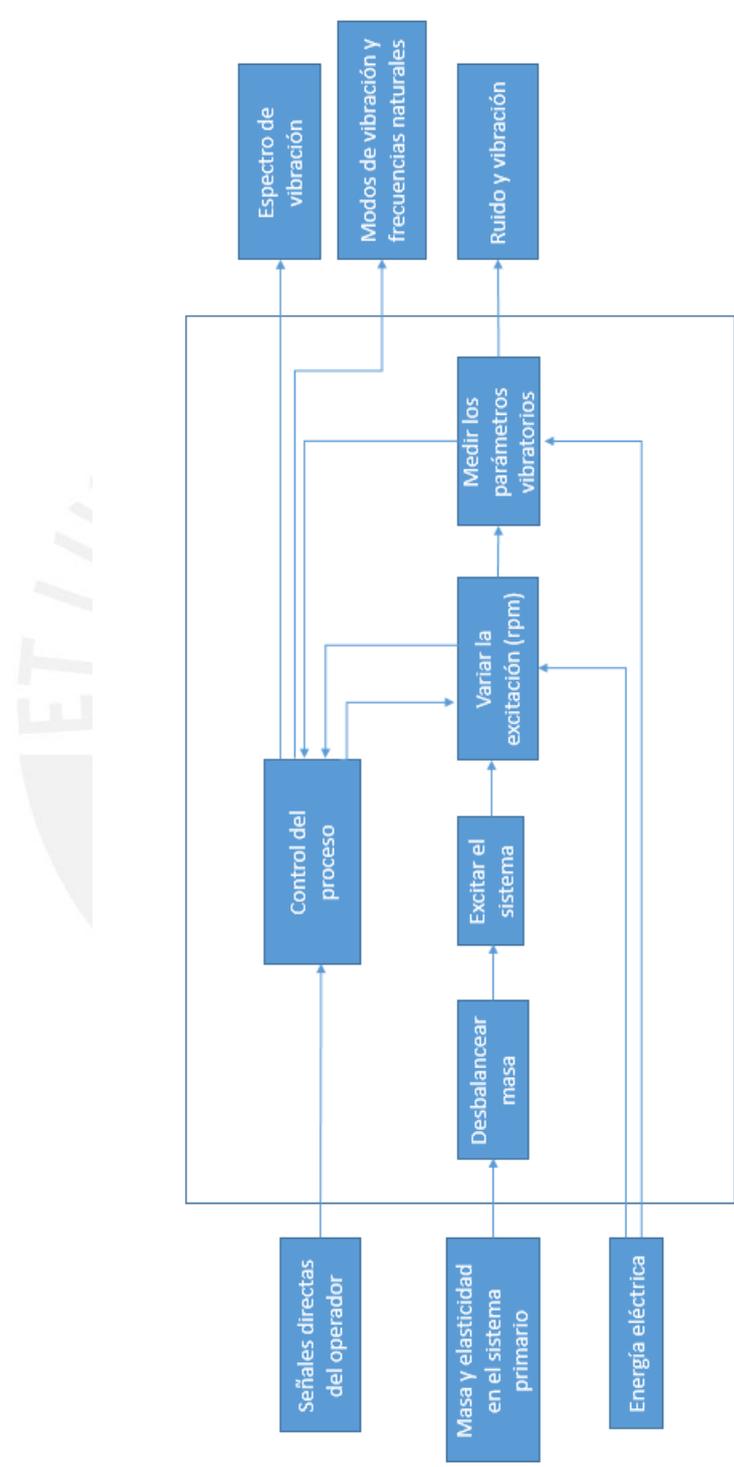
ENERGIA (s): Calor, ruido y vibraciones.

ESPECTRO DE VIBRACIÓN

SEÑALES (s):

- Botón de apagado.
- Botón para desacelerar las rpm (revoluciones por minuto).

Representación procesal de la estructura de funciones:



### 2.1.3.- Concepto de solución

Existe una gran variedad de estructuras metálicas que trabajan con equipos mecánicos, sin embargo se identificaron casos específicos como una torre de transferencia, faja transportadora, cargadores de barcos y grúas para poder obtener el diseño básico del módulo educativo y analizar cuál sea el más conveniente. Para ello, se deben tener en cuenta los siguientes criterios, ya que realizan una variación en los modos de vibración y frecuencias naturales:

- Inercia: Este parámetro muestra la relación entre una fuerza aplicada al cuerpo y la correspondiente respuesta de aceleración, también puede ser relacionada - de igual manera- con el momento y la aceleración angular. En otros términos, la inercia es la resistencia que ofrece un cuerpo al cambiar de un estado estático a uno dinámico y viceversa. Cabe recordar que la inercia está asociada directamente a la masa total del sistema. Además, presenta una relación directa con la energía cinética.

Entonces, para poder modificar este parámetro, se debe aumentar o disminuir el número de elementos en el módulo educativo, ello afectará directamente en la masa del sistema. Otra modificación a realizar sería con el tipo de material a utilizar, es decir se basaría en la propiedad de densidad.

- Rigidez: Los elementos de rigidez presentan una relación entre la fuerza aplicada o momento, con el desplazamiento o rotación correspondiente, son elementos que guardan y liberan energía potencial del sistema. Entonces, la manera más sencilla y práctica de rigidizar el sistema es agregando elementos al módulo. Además, la rigidez varía de acuerdo al tipo del material.
- Amortiguamiento: También conocidos como elementos de disipación, poseen una relación entre la fuerza aplicada o momento, con la velocidad. En otras palabras, son elementos que no pueden guardar ni liberar energía potencial, el movimiento mecánico a los que son sometidos se convierten en calor o sonido, es decir son no conservativos. Por ello, una forma de modificar este parámetro en el sistema es agregando componentes amortiguadores como pistones que

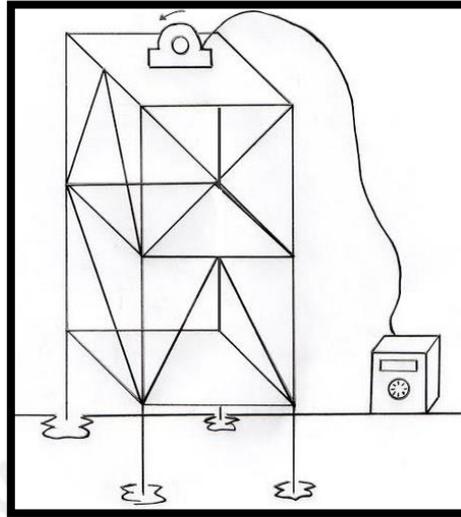
presenten amortiguadores viscosos, también se puede contar con un amortiguador de placas paralelas en la base.

- Fuerza excitatriz: Este parámetro puede variar de diferentes formas, como la variación de la magnitud de la fuerza o la frecuencia de aplicación de esta. Además, este parámetro influye directamente en el desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema.
- Tipo de uniones: En el módulo educativo tendrá gran importancia el tipo de uniones que se realice, ya que existe una diferencia entre una unión atornillada y un remache. Por otro lado, también se podría realizar experimentaciones con las uniones, haciendo referencia a las uniones debilitadas en algunas estructuras.

Como puede apreciarse, cada parámetro presenta una influencia sobre los modos de vibración y las frecuencias naturales, ahora de acuerdo a cada uno de los criterios mencionados anteriormente, se observarán algunos tipos de configuraciones de acuerdo al módulo educativo a utilizar.

#### Concepto solución 1: Torre de transferencia

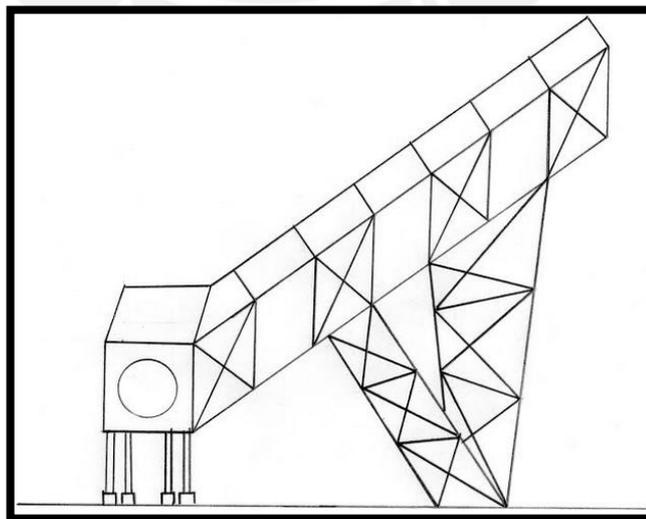
Se utilizará una torre con tres niveles, donde el motor de corriente continua simulará a la chancadora que trabaja en la torre de transferencia, además el diseño nos ofrece una gran variedad de configuraciones, como agregar elementos que formen una “v” o “x”. También nos permite ubicar en diferentes posiciones al motor D.C. (fuerza externa). El módulo sería de fácil fabricación y montaje. A continuación, se mostrará cómo en un caso real se aplican estas posibles configuraciones.



**Figura 2.6.** Concepto de solución 1: Torre de transferencia. Elaboración propia.

### Concepto solución 2: Faja transportadora

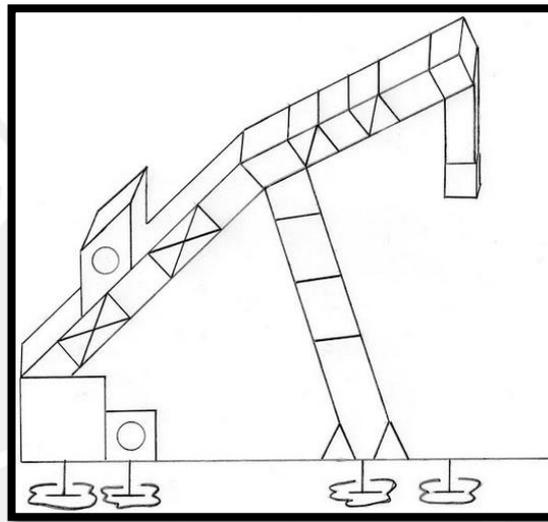
En la actualidad, cuando ocurre algún problema de vibraciones con las fajas transportadoras se recurre generalmente a rigidizar el sistema, la parte negativa de este módulo sería que para rigidizar no se presenta una gran variedad de posibles configuraciones, otro punto es que la fuerza externa solo posee una ubicación y, por último, su fabricación y montaje es más complejo, ya que requiere de elementos como la faja, el tipo de unión de los elementos, etc.



**Figura 2.7.** Concepto de solución 2: Faja transportadora. Elaboración propia.

### Concepto solución 3: Cargador de barco

Un módulo que represente un cargador de barco, presentaría pocas posibles configuraciones y la ubicación de la fuerza externa es única también. Por otro lado, lo diferente de un módulo así es que se puede integrar de mejor manera el concepto de un amortiguador, ya que ellos presentan cilindros hidráulicos, pero la fabricación y montaje de este presentaría una mayor complejidad.



**Figura 2.8.** Concepto de solución 3: Cargador de barco. Elaboración propia.

### Concepto solución 4: Grúas pórtico

Un módulo basado en este tipo de grúas, puede permitir una mayor variedad de configuraciones, la diferencia con la primera solución es que este último no presenta muchos niveles y la fuerza de excitación no varía de lugar, es decir posee una posición fija. Por último, presenta una mayor complejidad en la fabricación y montaje.

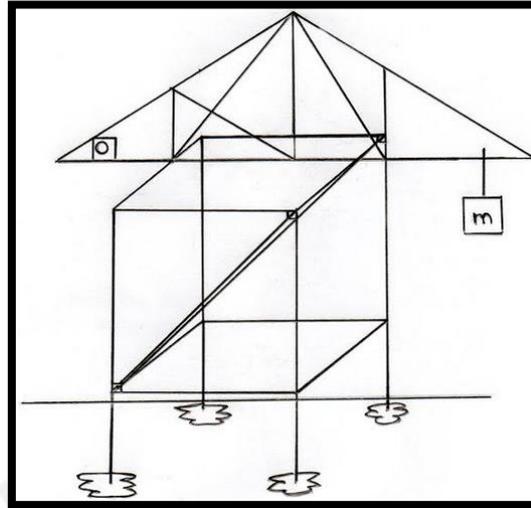


Figura 2.9. Concepto de solución 4: Grúa pórtico. Elaboración propia.

A continuación se realizará una comparación de acuerdo a criterios técnicos para poder seleccionar el concepto de solución óptimo.

**Criterios Técnicos:**

Tabla 2.1. Evaluación del Concepto de Solución. Elaboración propia.

Tabla de Evaluación del Concepto de Solución-Módulo educativo de una estructura metálica												
No.	Criterios Técnicos	Soluciones										
		Concepto Solución 1		Concepto Solución 2		Concepto Solución 3		Concepto Solución 4		Solución Ideal		
	g	p	p*g	p	p*g	p	p*g	p	p*g	p	p*g	
1	Función Principal (configuraciones)	3	3	9	2	6	2	6	2	6	4	12
2	Fuerza o Energía	3	3	9	2	6	2	6	3	9	4	12
3	Seguridad	3	3	9	3	9	2	6	3	9	4	12
4	Señales	2	3	6	2	4	2	4	2	4	4	8
5	Fabricación	3	3	9	2	6	1	3	3	9	4	12
6	Montaje	3	2	6	2	6	1	3	2	6	4	12
7	Mantenimiento	3	2	6	2	6	1	3	2	6	4	12
8	Ergonomía	2	3	6	3	6	2	4	3	6	4	8
9	Diseño	2	3	6	2	4	2	4	3	6	4	8
10	Transporte	2	3	6	2	4	3	6	3	6	4	8
11	Facilidad de manejo	3	3	9	2	6	3	9	3	9	4	12
12	Estabilidad	2	3	6	2	4	3	6	2	4	4	8
	Suma Total	31		87		67		60		80		124
	Orden			1		3		4		2		

Leyenda:

0 = no satisface

1=Aceptable a las justas

2= Suficiente

3= Bien

4=Muy Bien

g= peso ponderado, se da en función a la importancia a los criterios de evaluación.

Criterios según VDI 2225

Donde el concepto de solución óptimo es el concepto de solución 1.

### 2.1.4.- Proyecto preliminar óptimo

Ahora se presentará opciones para el proyecto óptimo para su posterior evaluación por criterios técnicos y económicos.

#### Proyecto Preliminar 1:

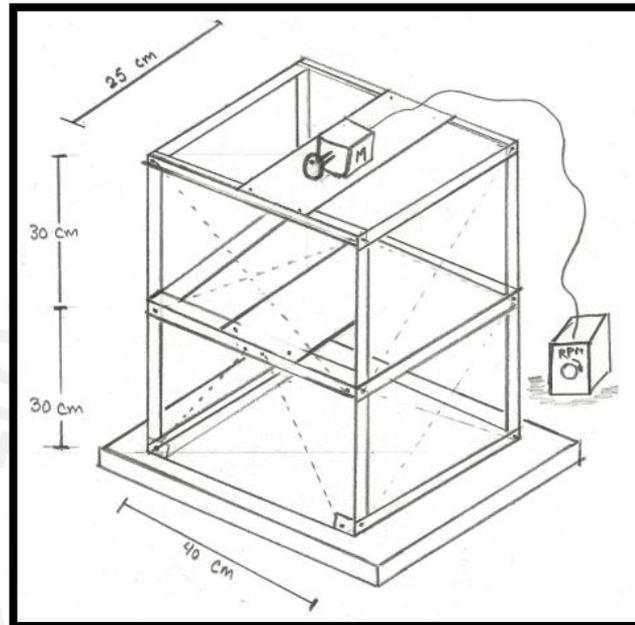


Figura 2.10. Proyecto preliminar 1. Elaboración propia.

#### Proyecto Preliminar 2:

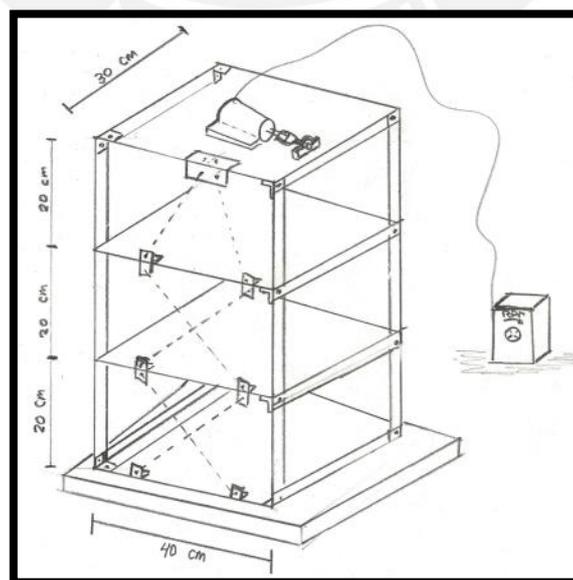


Figura 2.11. Proyecto preliminar 2. Elaboración propia.

## Proyecto Preliminar 3:

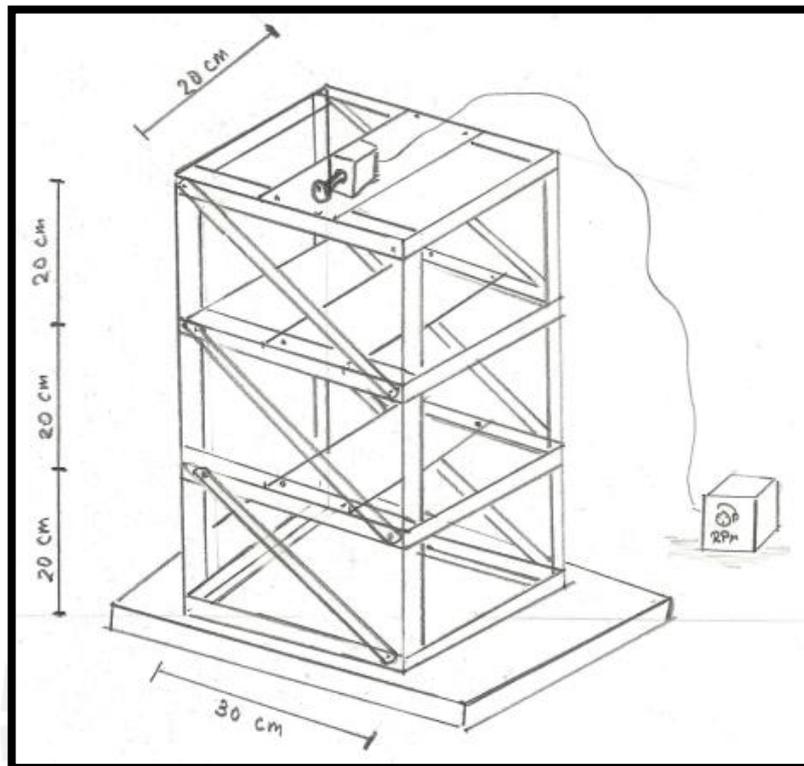


Figura 2.12. Proyecto preliminar 3. Elaboración propia.

**Propiedades Técnicas:**

**Tabla 2.2.** Evaluación Técnica de los proyectos preliminares. Elaboración propia.

Tabla de Evaluación del Concepto de Solución-Módulo educativo de una estructura metálica										
No.	Propiedades Técnicas	Soluciones								
		Proyecto Preliminar 1			Proyecto Preliminar 2		Proyecto Preliminar 3		Solución Ideal	
		g	p	p*g	p	p*g	p	p*g	p	p*g
1	Función Principal (configuraciones)	4	2	8	2	8	4	16	4	16
2	Fuerza o Energía	3	3	9	3	9	3	9	4	12
3	Seguridad	4	3	12	2	8	3	12	4	16
4	Señales	1	3	3	2	2	3	3	4	4
5	Fabricación	4	3	12	3	12	3	12	4	16
6	Montaje	4	3	12	2	8	3	12	4	16
7	Mantenimiento	4	2	8	2	8	3	12	4	16
8	Ergonomía	3	3	9	2	6	2	6	4	12
9	Diseño	3	3	9	3	9	3	9	4	12
10	Transporte	1	2	2	2	2	2	2	4	4
11	Facilidad de manejo	2	3	6	2	4	3	6	4	8
12	Estabilidad	3	3	9	2	6	3	9	4	12
	<b>Suma Total</b>	36		99		82		108		144
	<b>Valor Técnico</b>			0.6875		0.56944		0.75		1
	<b>Orden</b>			2		3		1		

**Leyenda:**

0= No satisface

1 = Aceptable a las justas

2 = Suficiente

3 = Bien

4 = Muy Bien

g = peso ponderado, se da en función a la importancia de los criterios de evaluación

Criterios según VDI 2225

**Propiedades Económicas:**

**Tabla 2.3.** Evaluación económica de los proyectos preliminares. Elaboración propia.

Tabla de Evaluación del Concepto de Solución-Módulo educativo de una estructura metálica										
No.	Aspectos Económicos	Soluciones								
		Solución 1			Solución 2		Solución 3		Solución	
		g	p	p*g	p	p*g	p	p*g	p	p*g
1	Número de Piezas	2	2	4	3	6	3	6	4	8
2	Adquisición de piezas para Fabricación	3	3	9	4	12	3	9	4	12
3	Disponibilidad de Materiales	1	3	3	2	2	3	3	4	4
4	Facilidad de Montaje	3	3	9	2	6	3	9	4	12
5	Facilidad de Mantenimiento	3	2	6	3	9	3	9	4	12
6	Costo de Operación	2	2	4	2	4	3	6	4	8
	<b>Suma Total</b>	14		35		39		42		56
	<b>Valor Técnico</b>			0.625		0.69643		0.75		1
	<b>Orden</b>			2		3		1		

**Leyenda:**

0= No satisface

1 = Aceptable a las justas

2 = Suficiente

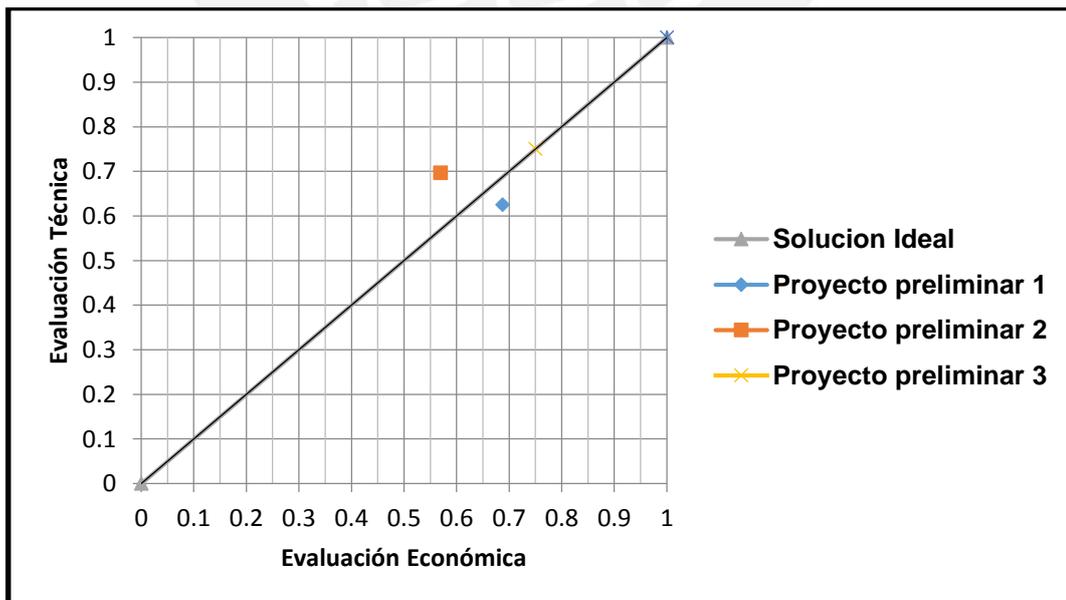
3 = Bien

4 = Muy Bien

g = peso ponderado, se da en función a la importancia de los criterios de evaluación

Criterios según VDI 2225

**Evaluación:**



**Figura 2.13.** Gráfica de evaluación. Elaboración propia

Donde:

Proyecto preliminar 1: Segundo puesto

Proyecto preliminar 2: Tercer puesto

**Proyecto preliminar 3: Proyecto preliminar óptimo**

## 2.2. Estabilidad del sistema

### 2.2.1.- Verificación de pandeo.

Se utilizarán las ecuaciones mencionadas en el capítulo 1. Ec. 1.14 y Ec. 1.15.

**Tabla 2.4.** Resultados parciales del pandeo. Evaluación propia.

	Caso	Area(m2)	Inercia	Lp (m)	i= radio de giro	Lambda
1	Empotrado - articulado	0.000028	2.334E-12	0.42	0.000288716	1454.71

Además, el módulo de elasticidad es  $2.1 \cdot 10^{12}$  Pascal.

En cuanto al valor del peso del módulo es de 4.8 kg, se calcula de la siguiente manera:

**Tabla 2.5.** Cálculo del peso del módulo. Evaluación propia.

Item	Elemento	Material	Dimensiones			Cantidad	Volumen (mm <sup>3</sup> )	Peso (g)
			Largo (mm)	Ancho (mm)	Espesor (mm)			
1	Ángulo 1" x 1" x 2 mm	Al	300	52	2	6	187.2	505.44
2	Platina 1" x 3 mm	Al	200	25	3	6	90	243.00
3	Plancha de 1/16"	acero	120	200	1.5	3	265	530.00
4	Ángulo de union	Al	360	52	2	1	37.44	101.09
5	Columnas (regla de metal)		60	28	1	4	-	15.00
6	Motor desbalanceado +acople	-	-	-	-	1	-	705.00
7	Plancha de 1/4"	Fe	200	120	6.35	2	304.8	2392.68
8	Pernos M6		-	-	-	40	7.5	300.00
							<b>Peso total (Kg)</b>	<b>4.79</b>

Por otro lado, la fuerza de compresión que ocurre en la columna es ejercida por el peso propio del sistema, además el peso total sería distribuido en las 4 columnas. Es decir, cada columna estará sometida a 12.26 N, de esta forma se hallará el esfuerzo al que

estará sometido y con ello el factor de seguridad, considerando un caso crítico donde la fuerza de corte es ejercida totalmente en el tornillo o unión del tercer nivel. Entonces, los resultados serían los siguientes:

**Tabla 2.6.** Presentación de resultados. Evaluación propia.

Esfuerzo de pandeo (PA)	Esfuerzo de pandeo (MPa)	Fuerza (N)	Esfuerzo (F/A)	FS
9794071.71	9.79	12.26	437946.43	<b>22.36</b>

Al obtener un factor de seguridad mayor a 10, se podrá garantizar que el módulo tendrá una buena estabilidad y que para la aplicación que tiene es suficiente.

### 2.2.2.- Verificación de corte de los pernos

Se realizará la verificación del esfuerzo de corte originada por el peso propio del módulo a la que estará sometido el perno del primer nivel por ser el más crítico. Para ello, se aplicarán las ecuaciones mencionadas en el capítulo 1 (Ec.1.17), (Ec.1.18), (Ec.1.19) y (Ec.1.20). Resumiendo se obtienen los siguientes resultados:

**Tabla 2.7.** Resultados. Evaluación propia.

Perno	M5	Unidad
clase	5.6	-
Área	19.635	mm <sup>2</sup>
Esfuerzo a la tracción	500	MPa
Factor conversión	0.6	-
Esfuerzo cortante admisible	300	MPa
Fuerza de corte	47.09	N
Esfuerzo cortante	2.40	MPa
<b>F.S</b>	<b>125.1</b>	-

Donde se puede concluir que el perno utilizado es más que suficiente para poder garantizar la estabilidad del módulo.

### 2.2.3.- Verificación de la dimensión de la base

Para la verificación de la norma se seguirán las recomendaciones por la norma ACI 351.3R-04 de cimentación directa de máquinas rotativas, donde hace referencia a que el peso de la cimentación tiende a estar alrededor del triple del peso de la máquina.

**Tabla 2.8.** Resultados. Evaluación propia.

Plancha de Fe	Dimensión	Unidad
Largo	300	mm
Ancho	400	mm
Espesor	12.7	mm
Volumen	0.0015	m <sup>3</sup>
Densidad	7874	Kg/m <sup>3</sup>
Masa	12	Kg
Masa de módulo	4.8	Kg
<b>F. S.</b>	<b>2.5</b>	-

Donde se puede verificar que se cumple con lo dispuesto por la norma ACI 351.3R-04.

## 2.3.- Análisis Modal

### 2.3.1.- Determinación del rango de frecuencias naturales del sistema

Para determinar el rango de frecuencias del sistema se utilizará un método analítico (análisis modal). Para ello se debe tener las siguientes consideraciones:

- Representar el sistema como un grado de libertad.
- Calcular la rigidez del sistema.
- Se despreciará la variable de amortiguamiento.

El procedimiento a seguir será el siguiente:

Se asumirá una fuerza excitatriz igual a la unidad, con ello se obtendrá deformaciones en el sentido axial, cabe mencionar que cada nivel de la estructura tendrá diferente desplazamiento. Al representar el sistema con un grado de libertad se puede hallar un desplazamiento para el tercer nivel.

Este desplazamiento ( $\partial$ ) puede ser hallado, gracias a la fórmula de deflexión. A continuación se representará un modo de vibración y el valor de la rigidez de cada nivel cuando se dé un desplazamiento unitario en el piso que este a mayor altura.

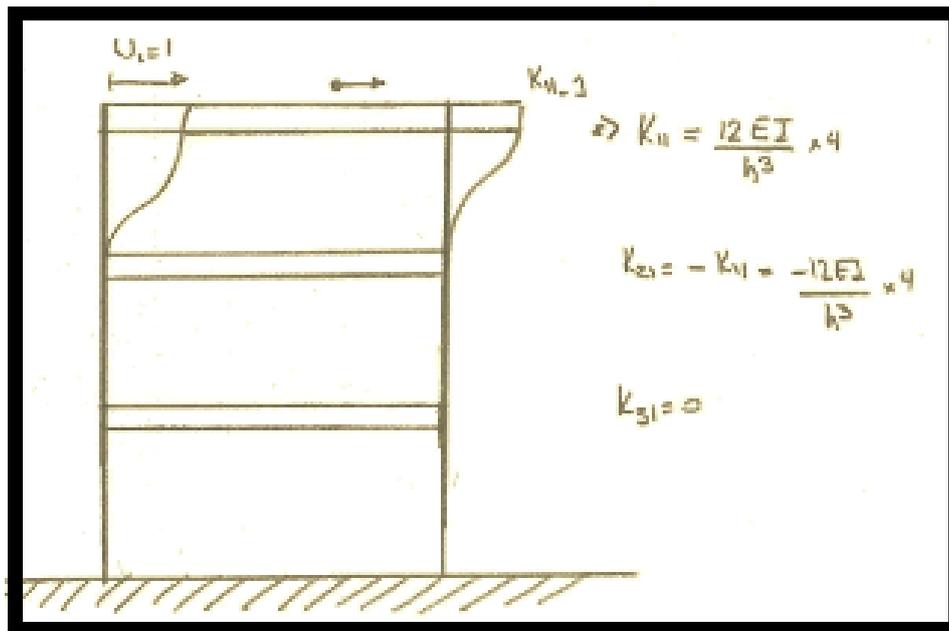


Figura 2.14. Primer modo de vibración-configuración de base empotrada. Elaboración propia

$$\partial = \frac{FL^3}{12EI} \quad (\text{Ec. 2.1})$$

Por otro lado, se debe saber que en el momento que nuestro sistema empiece a oscilar, a medida que se incremente la frecuencia se obtendrán diferentes tipos de oscilaciones del sistema. Ello se observa porque cada frecuencia natural generará un tipo diferente de oscilación del conjunto. Por ello, la necesidad de representar la ecuación diferencial característica del sistema de forma matricial como se mencionó en la Ec 1.4.

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

Entonces será necesario aplicar el procedimiento descrito en el capítulo 1. Para nuestro caso la forma matricial quedará expresado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como tenemos el mismo peso por cada nivel, entonces nuestras masas (m) son iguales.

$$m_1 = m_2 = m_3 = m$$

Luego se deberá analizar la determinante de la matriz para encontrar las otras soluciones para las frecuencias naturales del sistema ( $w_1, w_2, w_3$ ).

$$Det[K - wM] = 0$$

$$Det \begin{bmatrix} k_{11} - w^2 m_1 & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} - w^2 m_2 & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} - w^2 m_3 \end{bmatrix} = 0$$

Es decir:

$$(k_{11} - w^2 m_1)(k_{22} - w^2 m_2)(k_{33} - w^2 m_3) + k_{12} k_{23} k_{31} + k_{13} k_{21} k_{32} -$$

$$k_{13}(k_{22} - w^2 m_2)k_{31} - k_{12} k_{21}(k_{33} - w^2 m_3) - (k_{11} - w^2 m_1)k_{23} k_{32} = 0 \dots (5)$$

Resolviendo (5) se obtendrá:  $w_1, w_2, w_3$ .

Se analizará para los siguientes casos: cuando la unión en la base tiende a tener un comportamiento empotrado y cuando tienda a ser articulado.

- Caso empotrado:

La matriz de rigidez del sistema tendrá la siguiente distribución:

$$K = \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 \\ -12 & 24 & -12 \\ 0 & -12 & 24 \end{bmatrix} x \frac{4EI}{h^3}$$

Donde:

E: Módulo de rigidez del fleje metálico ( $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ )

I: Inercia del fleje metálico ( $I = 2.5 \times 10^{-12} \text{ m}^4$ )

h: Altura entre cada nivel ( $h = 0.2 \text{ m}$ )

Entonces:

$$K = \begin{bmatrix} 2940 & -2940 & 0 \\ -2940 & 5880 & -2940 \\ 0 & -2940 & 5880 \end{bmatrix}$$

Si:  $a = w^2 \cdot m$  y  $w = 2 \pi f$ , entonces:

Para calcular la masa "m" se realizará el siguiente procedimiento:

$$\rho_{Al} = 2700 \text{ Kg/m}^3 \quad (\rho_{Al}: \text{Densidad del Aluminio})$$

$$\rho_{Acero} = 7850 \text{ Kg/m}^3 \quad (\rho_{Acero}: \text{Densidad del Acero})$$

Como se calculó previamente la masa total del módulo, entonces la masa promedio por nivel es un tercio de la masa total, es decir:

$$m = 1.6 \text{ Kg.}$$

Resolviendo (5):

$$-a^3 + 14700 a^2 - 51861600 a + 25412184000 = 0$$

$$a_1 = 582.31; \quad w_1 = 19.093 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad f_1 = 3.039 \text{ Hz}$$

$$a_2 = 4571.57; \quad w_2 = 53.497 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad f_2 = 8.514 \text{ Hz}$$

$$a_3 = 9546.2; \quad w_3 = 77.305 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad f_3 = 12.303 \text{ Hz}$$

- Caso articulado:

Se aplicará el mismo procedimiento con la diferencia que la matriz de rigidez será diferente y ello debido a las condiciones de borde que han cambiado. Entonces la matriz de rigidez del sistema tendrá la siguiente distribución:

$$K = \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 \\ -12 & 24 & -12 \\ 0 & -12 & 15 \end{bmatrix} \times \frac{4EI}{h^3}$$

Es decir, la matriz sería la siguiente:

$$K = \begin{bmatrix} 2940 & -2940 & 0 \\ -2940 & 5880 & -2940 \\ 0 & -2940 & 3675 \end{bmatrix}$$

Resolviendo (5):

$$-a^3 + 15750 a^2 - 59535000 a + 3.1255873 \times 10^{10} = 0$$

$$a_1 = 213.2; w_1 = 11.553 \frac{rad}{s}; f_1 = 1.836 Hz$$

$$a_2 = 3327.4; w_2 = 45.639 \frac{rad}{s}; f_2 = 7.264 Hz$$

$$a_3 = 8954.4; w_3 = 78.871 \frac{rad}{s}; f_3 = 11.916 Hz$$

Entonces como cuadro comparativo se obtiene lo siguiente:

**Tabla 2.9.** Comparación de Resultados. Evaluación propia.

	Empotrado		Articulado		Variación
	f(Hz)	w (rad/s)	f(Hz)	w (rad/s)	%
<b>Modo 1</b>	3.039	19.093	1.839	11.553	<b>39.49</b>
<b>Modo 2</b>	8.514	53.497	7.264	45.640	14.68
<b>Modo 3</b>	12.303	77.305	11.916	74.871	3.15



**Figura 2.15.** Foto de la fabricación del módulo educativo.

## **2.4. Elaboración de detalles.**

Los planos a continuación se encuentran anexados en PLANOS.

### **2.4.1. Planos de despiece.**

Plano 1. Ensamble del módulo de laboratorio.

### **2.4.2. Planos de fabricación.**

Plano 2. Soporte del servomotor.

Plano 3. Acople del servomotor.

Plano 4. Base del módulo.

Plano 5. Perfil Horizontal de 300 mm.

Plano 6. Fleje metálico de 60 cm.

Plano 7. Platina.

Plano 8. Plancha de ¼".

Plano 9. Plancha de 1.5 mm.

Plano 10. Perfil Horizontal de 200 mm.

Plano 11. Ángulos de unión izquierda y derecha.

Plano 12. Arriostre

Plano 13. Perfil horizontal base de 300 mm.

## 2.5. Fabricación del módulo experimental

La fabricación del módulo de laboratorio fue realizado en un taller de mecánica, el cual contó con herramientas y máquinas de un taller de banco básico; tales como, limadora de codo, taladro y herramientas manuales de banco, los cuales permitieron realizar la fabricación de cada pieza y el tipo de unión entre estas, obedeciendo los acabados y tolerancias que se indicaron en los planos de despiece. Se utilizó un proceso de doblado de una plancha de 1.5 mm, el cual fue realizado en un taller especialista en doblado; además, se cortaron planchas de Fierro en un taller que trabaja con equipos de oxicorte.

En las figuras 2.16 y 2.17, se muestran algunos procesos, de fabricación y montaje de las partes que conforman el módulo de laboratorio.



**Figura 2.16.** Taladro de banco.



Figura 2.17. Cortadora de Aluminio.

## 2.6. Evaluación económica del módulo experimental.

En la tabla 2.10 se muestran los costos que abarcaron la realización de este proyecto. Donde se considera el costo de la materia prima, la mano de obra, los instrumentos y máquinas que se utilizaron para la fabricación y montaje del módulo. Como también el costo de la experimentación que se realizó en el laboratorio de Acústica de la Sección de Física de la PUCP, cabe mencionar que para el ensayo realizado no hubo ningún costo que haya sido cobrado por la Universidad, ni por el personal calificado.

**Tabla 2.10.** Cotización del Proyecto. Evaluación propia.

Costo total del proyecto				
Item	Descripción	Cantidad	Precio Unitario en Nuevos Soles (S/.)	Precio en Nuevos Soles. (S/.)
<b>Equipos e Instrumentos</b>				
1	Torquímetro 1-25 N	1	275	275
2	Servomotor DC 24 V	1	30	30
3	Variador de Velocidad	1	70	70
4	Batería de 24 V	1	30	30
<b>Materiales</b>				
5	Perfil de Aluminio 1" x 1" x 2 mm ( 1 barra = 6 m)	4 m	50	50
6	Platina de Aluminio 1" x 3 mm (1 barra = 6 m)	2 m	22	22
7	Plancha de acero 120 mm x 200 mm x 1.5 mm	3	15	45
8	Plancha de Fierro 120 mm x 120 mm x 0.25"	2	4	8
9	Plancha de Fierro 300 mm x 400 mm x 0.5"	1	45	45
10	Soporte de motor	1	20	20
11	Acople de motor	1	25	25
12	Reglas de metal de 60 cm	4	4.5	18
13	Reglas de meta de 30 cm	6	2.5	15
14	Pernos M5 x 10 + Tuerca	16	0.2	3.2
15	Pernos M5 x 15 + Tuerca	12	0.25	3
16	Pernos M6 + Tuerca	19	0.3	5.7
17	Arandela M6	6	0.2	1.2
18	Cables eléctricos	2	0.5	1
19	Cinta refractiva	1	1	1
20	Costo de mecanizado	1	500	500
21	Costo de montaje	1	100	100
22	equipos del laboratorio de Acustica de La Sección de Física de la PUCP ( \$300.00/ día)	3	900	2700
23	Costo de Ingenieria de Diseño	1	500	1500
<b>Costo total del proyecto</b>				<b>5468.1</b>

## 2.7. Instrucciones para el funcionamiento

### Procedimiento para realizar la configuración de los parámetros vibratorios

1.- Para realizar una configuración en cuanto a la masa del sistema, se cuenta con pequeñas planchas de fierro, con las siguientes dimensiones: 120 mm x 120 mm x 6 mm, las cuales permiten modificar el peso por nivel de la estructura.

2.- Se puede modificar la fuerza de desbalance, el cual está directamente relacionada con las masas que se agreguen en el acople del servomotor, las cuales afectarán en la magnitud de los desplazamientos de cada nivel.

3.- En cuanto a la rigidez del sistema, se pueden agregar elementos de arriostramiento, para poder apreciar el cambio de las frecuencias y modos de vibración del sistema.

4.- El tipo de unión en la base del sistema, también puede ser modificado, obteniendo como resultado la variación del grado de empotramiento o de articulación en la base del sistema, el cual también repercute en las frecuencias y modos de vibración. Ello se podrá lograr mediante el uso de un torquímetro de 1-25 N.m; con ello, modificar el torque de ajuste en cada unión. De acuerdo a cada tipo de perno (dimensión y grado) se tendrá un torque de ajuste de acuerdo a sus características. Ver Anexo E.

5.- Se puede realizar un sinnúmero de configuraciones al sistema, debido a que se permite la combinación de los parámetros anteriormente mencionados, siempre y cuando se asegure la estabilidad del sistema y el adecuado ajuste en las uniones para evitar cualquier tipo de accidente.

6.- La fuente de alimentación para el servomotor de DC de 24 V será de una tensión de 220 V, ya que se cuenta con un variador de velocidades acoplada al servomotor con su respectivo transformador.

### **Puesta en marcha**

1.- Verificar que todas las uniones estén correctamente ajustadas y aseguradas, tanto las conexiones de la base, como el de cada ángulo que permite la adecuada estabilidad del sistema.

- 2.- Realizar la configuración que se desee experimentar, para poder apreciar el cambio de las frecuencias y modos de vibración.
- 3.- Asegurarse que el variador de velocidades del servomotor este ubicado en un lugar seguro y que la conexión de alimentación este en perfectas condiciones.
- 4.- Realizar el cambio de velocidades de manera paulatina para no sobrecargar la corriente en los circuitos de la tarjeta del variador de velocidades.
5. Se debe tener en cuenta que girar la perilla en sentido anti horario hará que las rpm (revoluciones por minuto) del servomotor incrementen y de manera inversa se reducirán las rpm. Cabe mencionar que el variador de velocidades está diseñado para operar con una corriente generada por 24 V. Además, el rango de frecuencias de trabajo oscila entre 1–25 Hz.

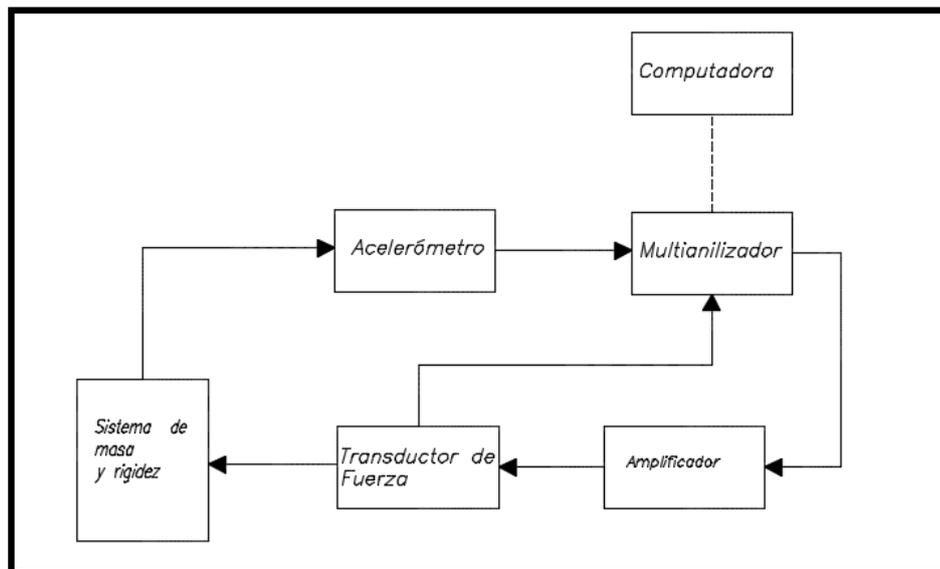
### **Montaje de los equipos e instrumentos de medición**

Para el desarrollo de la experimentación del módulo de laboratorio se deberá realizar la configuración de la sensibilidad de los instrumentos a utilizar de acuerdo a la información brindada por los catálogos. Los instrumentos a utilizar son de la marca Brüel & Kjær, los cuales pertenecen al Laboratorio de Acústica de la Sección de Física.

- Un acelerómetro tipo 4383 y sensibilidad 30.89 pC/g. Marca Brüel & Kjær. Anexo A.3.
- Un mini – shacker tipo 4810. Brüel & Kjær. Anexo A.1.
- Un amplificador SAE TWD.
- Un sistema multianalizador Brüel & Kjær tipo 3160-A-042.
- Un transductor de fuerza tipo 8200 y sensibilidad 4pC/N. Marca Brüel & Kjær. Anexo A.2.
- Una computadora con Windows 7.
- Un torquímetro de 1 – 25 N.m . Marca TOPTUL. Anexo A.4

Procedimiento para realizar las mediciones:

Para realizar la experimentación del análisis modal se debe colocar el transductor de fuerza acoplado con el mini shaker en algún punto del módulo de la estructura, además el multianalizador debe estar conectado con el acelerómetro, el amplificador, el shaker y la computadora donde ha de visualizarse las gráficas de amplitud vs frecuencia, fase y coherencia. Además, el amplificador forma parte del sistema, comunicando el multianalizador con el mini shaker. A continuación se mostrará un esquema donde se puede visualizar como es el proceso de toma de datos del análisis modal.



**Figura 2.15.** Esquema del procesamiento de señal. Elaboración propia.

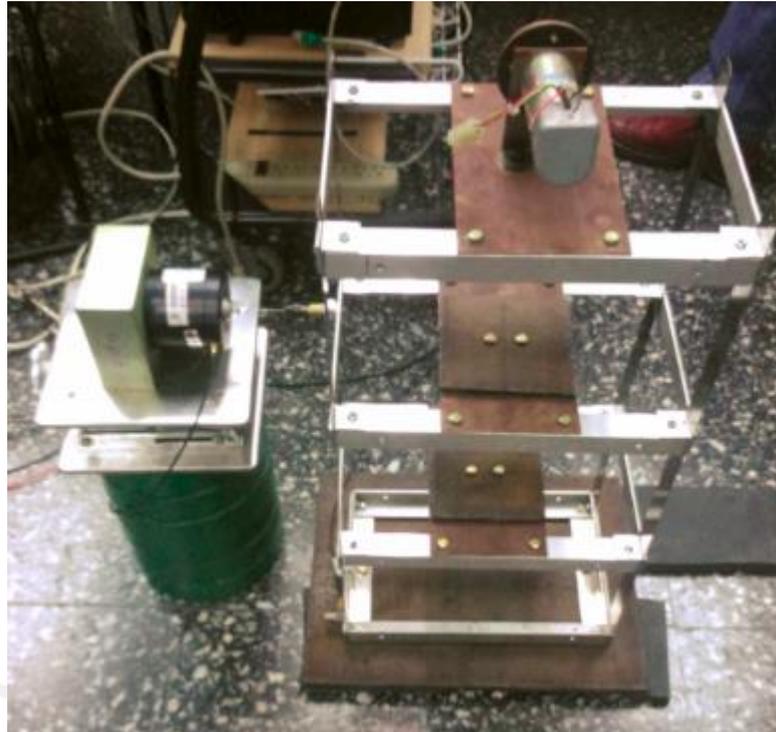
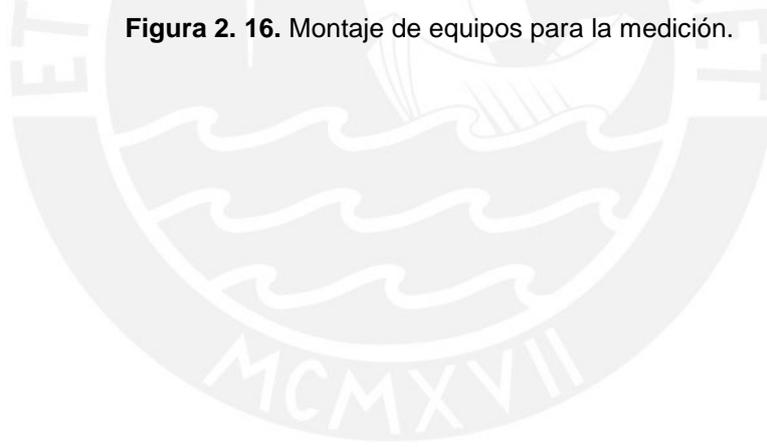


Figura 2. 16. Montaje de equipos para la medición.



## REFERENCIAS

- [1] CONCASSEUR: Matériel de mines et carrières, Concassage, Broyage, Criblage, Installation complète clé en main.  
<http://www.concasreur.com/concasseurs/concasseurs-machaires.php>
- [2] AUMUND: Samson Materials Handling Ltd.  
[http://www.aumund.com/content/img/samson/sized\\_pictures/copper-concentrate\\_shiploader.jpg](http://www.aumund.com/content/img/samson/sized_pictures/copper-concentrate_shiploader.jpg)
- [3] LIEBHERR: Grúas Marítimas.  
[http://www.liebherr.com/MCP/es-ES/products\\_mcp.wfw/id-11605-0/layout-PopupTabWide/item-ImageGalleryImage6692\\_1587\\_936/measure-metric](http://www.liebherr.com/MCP/es-ES/products_mcp.wfw/id-11605-0/layout-PopupTabWide/item-ImageGalleryImage6692_1587_936/measure-metric)
- [4] IINGEN-UNAM: Mesa vibratoria  
<http://www.iingen.unam.mx/es-mx/Investigacion/Laboratorios/Paginas/MesaVibradora.aspx>
- [5] TECNOEDU: Conjunto de elementos para construir estructuras avanzadas.  
<http://www.tecnoedu.com/Pasco/ME6992B.php?f=1>

## CAPÍTULO 3

### EXPERIMENTACIÓN CUALITATIVA Y MEDICIONES

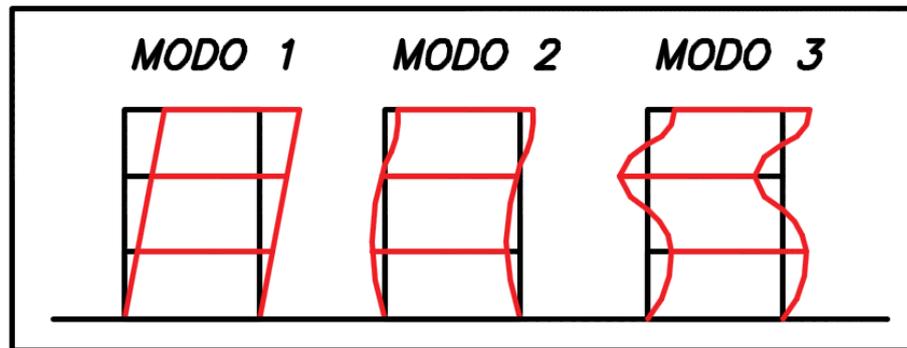
#### 3.1. Experimentación

##### 3.1.1. Objetivos

- Determinación de las frecuencias naturales del sistema, los cuales serán representados con su respectivo modo de vibración, para nuestro sistema serán tres modos de vibración.
- Observar el cambio de las frecuencias y modos de vibración cuando se realicen los cambios de los parámetros de rigidez, inercia y fuerza excitatriz en el módulo educativo.

##### 3.1.2. Modelos a ensayar

La configuración de nuestro módulo es de 3 GDL (Grados de libertad), debido a que en cada nivel hay una mayor concentración del peso de la estructura. El rango de frecuencias de estudio o de ensayo será de 0 a 25 Hz; ya que, según el análisis desarrollado en el capítulo segundo, los dos primeros modos de vibración son menores a 10 Hz y el último, mayor a este valor.



**Figura 3.1.** Esquematación de los modos de vibración. Elaboración propia.

### 3.1.3. Ámbito geográfico

Los ensayos y mediciones se realizarán en el Laboratorio de Acústica de la Sección de Física de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

### 3.1.4. Instrumentación y equipos

#### a) Instrumentación

- Un sistema multi-analizador PULSE tipo 3560C FFT (transformada rápida de Fourier), conectada a una PC con interface para Microsoft Windows.
- Acelerómetro tipo 4383 y sensibilidad 30.89 pC/g. Marca Brüel & Kjær.
- Transductor de fuerza tipo 8200 y sensibilidad 4pC/N. Marca Brüel & Kjær.
- Tacómetro óptico MM0024 B&K.
- Cables de conexión.
- Adaptadores (charge input).

#### b) Equipos

- Un Servomotor DC de 24 V.
- Configuraciones de masa y elasticidad
- Un variador de velocidades.

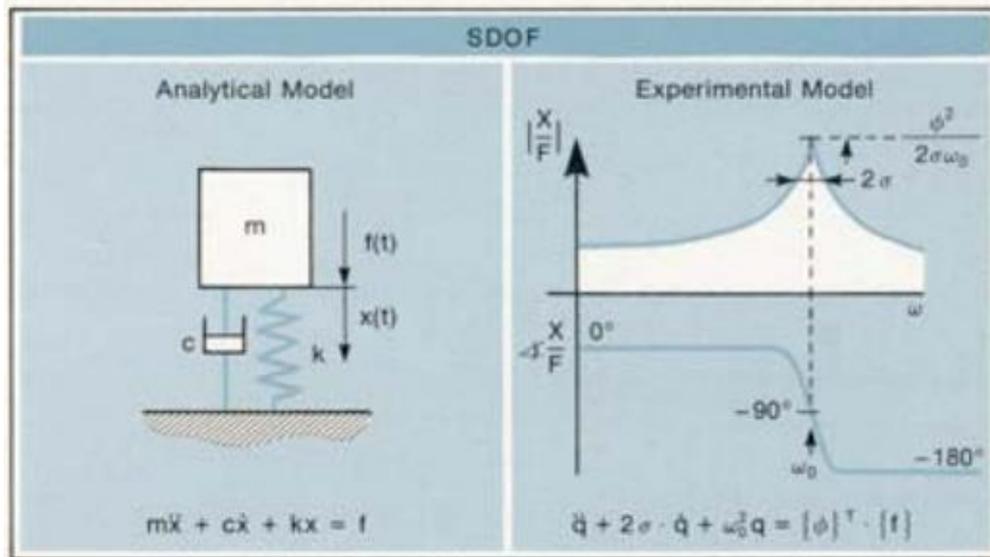
### 3.1.5. Materiales

- Dos planchas de hierro de 120 mm x 120 mm x 6 mm.
- Seis reglas de metal de 30 cm.
- Arandelas y pernos de M6 para generar desbalance.
- Ocho platinas de aluminio de 1" x 200 mm x 1/8".
- Diez perfiles de aluminio de 1" x 1" x 2 mm.
- Tres planchas de acero de 200 mm x 120 mm x 1.5 mm

## 3.2. Recopilación de datos

### 3.2.1. Determinación de las frecuencias de resonancia del módulo.

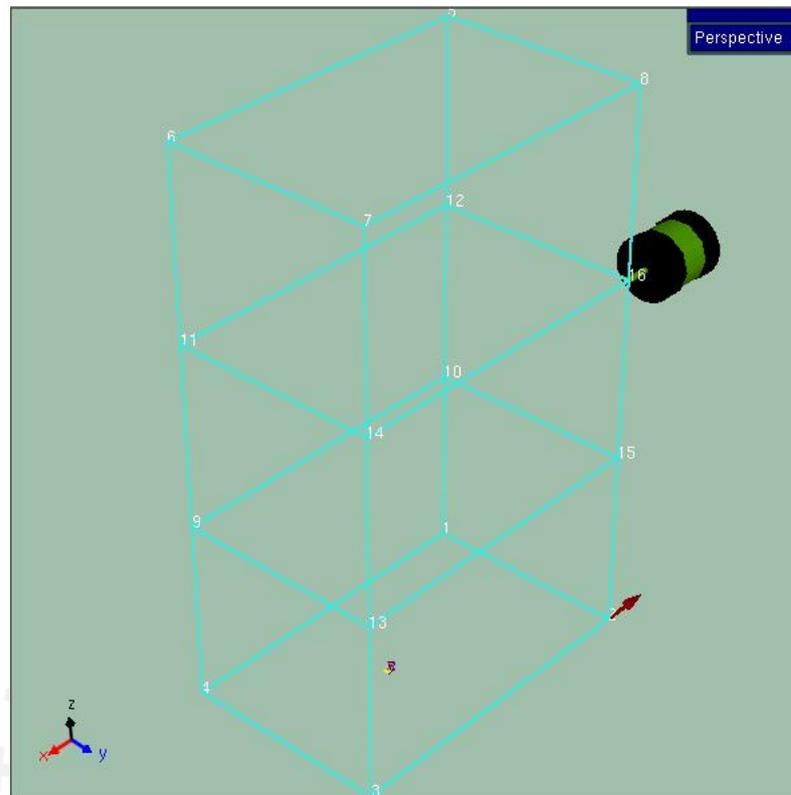
El ensayo de análisis modal es una experimentación que permitirá detectar algunos parámetros modales del módulo, los cuales son parte de nuestro estudio, entre estos se encuentran los parámetros de frecuencia modal y forma del modo. Entonces, los parámetros modales en cada uno de los modos podrán brindar información sobre el comportamiento dinámico del sistema; es decir, los modos de vibración son propiedades dinámicas independientes de un sistema. En otros términos, el análisis modal es una técnica de experimentación que nos permitirá estudiar el comportamiento dinámico en un sistema de "N" grados de libertad, por ser este un modelo complejo se podrá utilizar un análisis de modelo SDOF (single degree of freedom), que en español sería el estudio de 1 grado de libertad (1 GDL).



**Figura 3.2.** Esquemización de un GDL y gráfica de amplitud vs frecuencia. Fuente: <http://www.bksv.com/doc/br0458.pdf>

Mediante un barrido de frecuencias, se determinarán las frecuencias naturales de vibración del sistema, para ello se utilizará un acelerómetro - el cual trabaje en nuestro rango de frecuencias, hallado previamente- y se realizaran varias medidas en cada uno de los puntos de uniones (16 puntos). Para obtener mejores resultados es recomendable utilizar una velocidad de barrido relativamente baja y que la resolución de la frecuencia sea la adecuada.

A continuación, se presentará un esquema donde se podrá visualizar donde ha sido colocado el mini-shaker, el transductor de fuerza y la denominación de los puntos de las uniones. Esto se ha aplicado de la misma manera en todos los experimentos realizados.



**Figura 3.3.** Representación del módulo para la experimentación mediante software.

Cabe mencionar que se realizarán tres ensayos los cuales tienen como condición de entrada lo siguiente:

- Ensayo del módulo con la base empotrada (Torque de ajuste variable e isotorque). Anexo B.1. y B.2.
- Ensayo del módulo con la base articulada. Anexo B.3.
- Ensayo del módulo con mayor rigidez. Anexo B.4.

### 3.2.2. Ensayo del módulo con la base empotrada

Para este ensayo se determinó que la configuración de la base deberá tener como componentes en la unión lo siguiente: una platina y un ángulo de aluminio, los cuales restringirán los grados de libertad de la regla de metal en la base y de esta forma representar un caso de empotramiento. Dentro de esta condición también se realizó la variación del momento de ajuste. Es decir, el primer ensayo fue realizado con torques

de ajuste diferentes en cada unión (ajuste manual). En el otro caso se utilizó un torquímetro para garantizar que todas las uniones presenten igual torque de ajuste. A continuación, se presentará la data tomada sobre estos experimentos.

- Ajuste manual – Torque aleatorios.

De la toma de data de los 16 puntos tomados los gráficos más representativos. Para ver la data de los demás puntos ver anexo B.1.

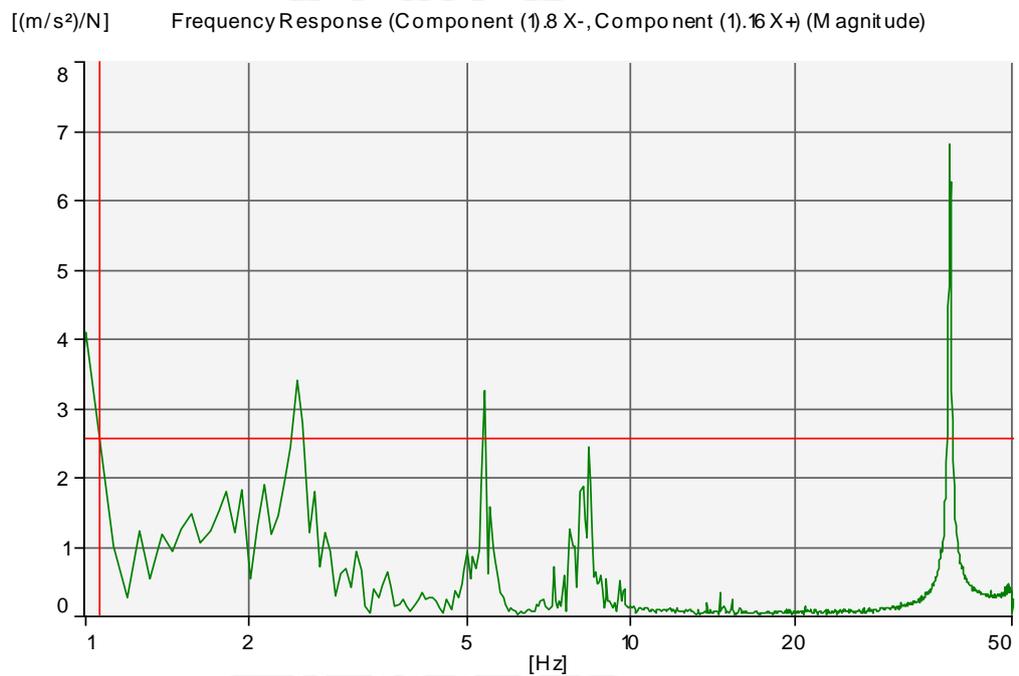
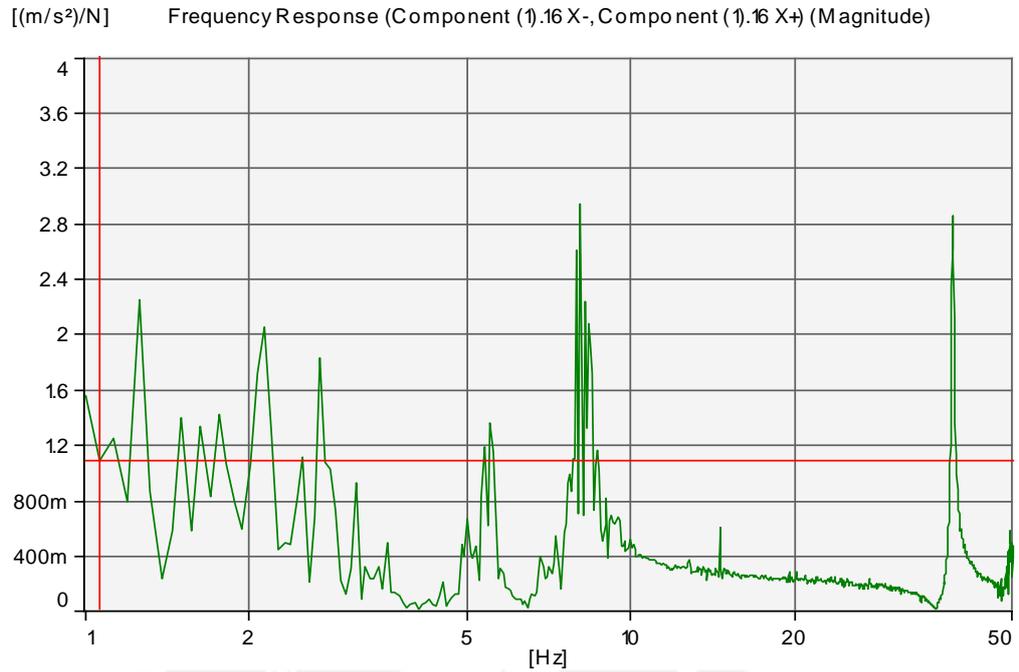


Figura 3.4. Análisis modal del punto 8.



**Figura 3.5.** Análisis modal del punto 16.

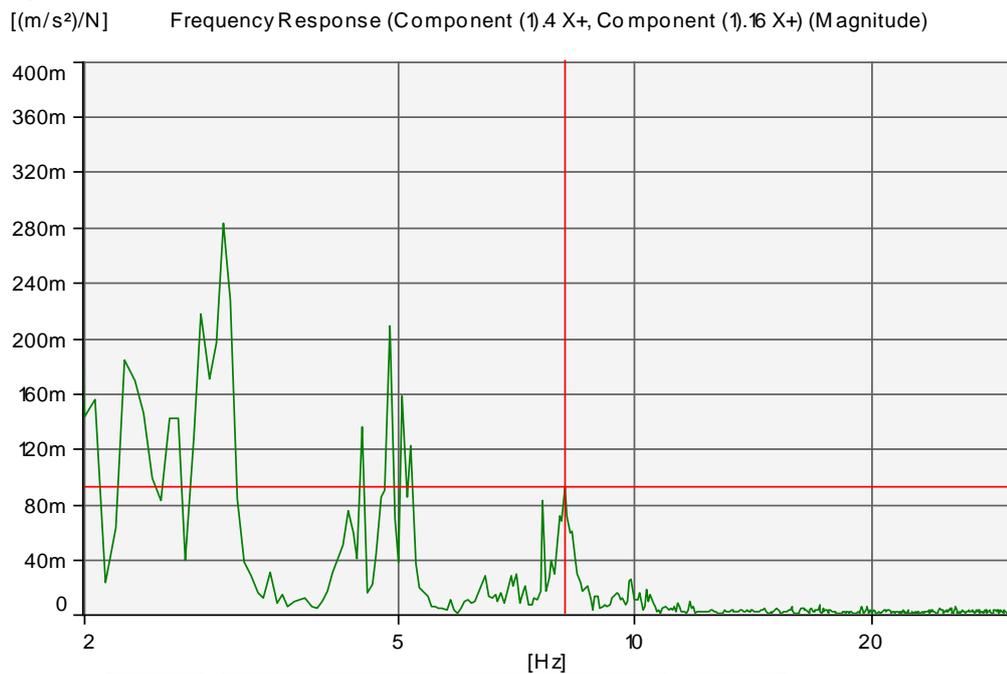
Se presentará a continuación una tabla resumen sobre los 16 puntos tomados.

**Tabla 3.1.** Resumen de los tres modos principales.

Punto	Modo 1 (Hz)	Modo 2 (Hz)	Modo 3 (Hz)
1	2.3	5.5	8.2
2	3	5.5	8.2
3	2.3	4.5	8.2
4	2.8	6	8
5	2.8	5.5	8.2
6	2.5	5.5	8
7	2.3	5.5	8.2
8	2.5	5.5	8.3
9	1.8	5.5	8.2
10	2.5	5.4	8
11	2.7	5.3	8.1
12	2.9	5.4	8.1
13	2	5.5	8.2
14	2.5	5.5	8
15	2.2	5.4	8
16	2.8	5.4	8
<b>Promedio</b>	<b>2.49</b>	<b>5.43</b>	<b>8.12</b>

- Ajuste con torquímetro – Torques iguales

De la toma de data de los 16 puntos tomados los gráficos más representativos. Para ver la data de los demás puntos ver anexo B.2.



**Figura 3.6.** Análisis modal del punto 4.

Se presentará a continuación una tabla resumen sobre los 16 puntos tomados.

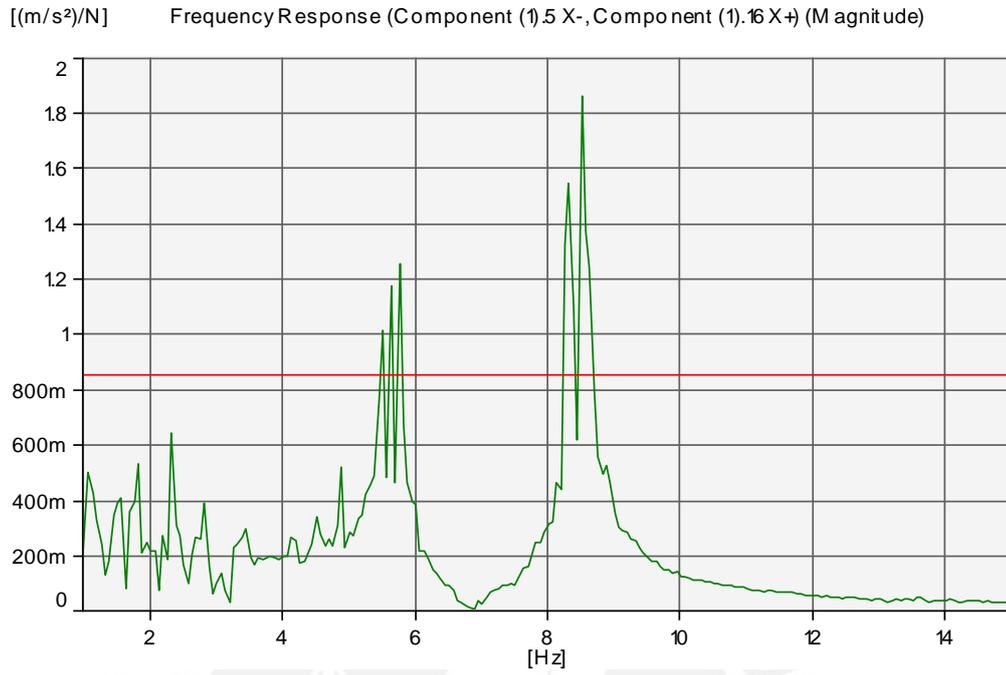
**Tabla 3.2.** Resumen de los tres modos principales.

Punto	Modo 1 (Hz)	Modo 2 (Hz)	Modo 3 (Hz)
1	3	5.2	8
2	2	5	7.5
3	2.16	5.5	7.3
4	3	5	8.5
5	2	5	8.3
6	3.25	5.5	8.3
7	3	5.2	8
8	2.8	5	8.4
9	2.1	5.3	8
10	3	5.2	8
11	2.4	5.2	8.3
12	3	5.5	8.5
13	3	5.3	8.2
14	2.8	5.3	8.2
15	3	5	8.3
16	2.8	5.3	8.4
<b>Promedio</b>	<b>2.71</b>	<b>5.18</b>	<b>8.19</b>

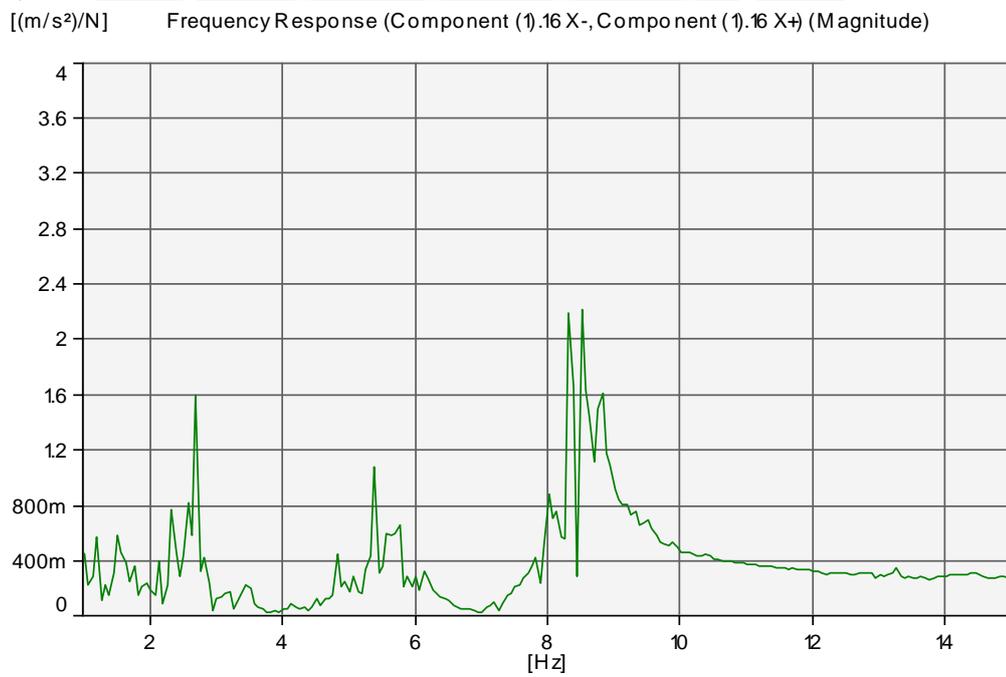
### 3.2.3. Ensayo del módulo caso Articulado

Para el caso articulado, se realizará la misma configuración que el experimento anterior con la diferencia del tipo de unión de las reglas con la base, donde esta será conformada por la regla de metal y el ángulo de aluminio. Es decir, se ha retirado la platina de aluminio y con ello se representará una pérdida de rigidez en la unión, tendiendo esta a ser una unión articulada.

A continuación, se presentarán los gráficos más representativos y la data de este experimento. Para ver la data de los demás puntos ver anexo B.3.



**Figura 3.7.** Análisis modal del punto 5.



**Figura 3.8.** Análisis modal del punto 16.

Se presentará a continuación una tabla resumen sobre los 16 puntos tomados.

**Tabla 3.3.** Resumen de los tres modos principales.

Punto	Modo 1 (Hz)	Modo 2 (Hz)	Modo 3 (Hz)
1	2.2	5.5	8.8
2	2.8	5	8.5
3	1.8	5.5	8.3
4	2	5.6	8.2
5	1.8	5.5	8.2
6	2.1	5.5	8.3
7	1.7	5.5	8.3
8	2	5.4	8.4
9	1.8	5.6	8.5
10	2	5.5	8.3
11	2	5.6	8.5
12	1.8	5.5	8.5
13	2.1	5.8	8.2
14	2.1	5.5	7
15	2	5.5	8
16	2.1	5.3	8.2
<b>Promedio</b>	<b>2.02</b>	<b>5.49</b>	<b>8.26</b>

#### 3.2.4. Ensayo del módulo caso con mayor rigidez.

Para este último ensayo se partió de la configuración del primer ensayo con la diferencia de agregar en las caras laterales del módulo un sistema de arriostramiento basado en la adición de reglas de metal en sentido de una diagonal. La finalidad de este ensayo consiste en demostrar un caso de rigidización de un sistema estructural mediante la utilización de arriostres. De la toma de data de los 16 puntos tomados se mostrarán los gráficos más representativos. Para ver la data de los demás puntos ver anexo B.4.

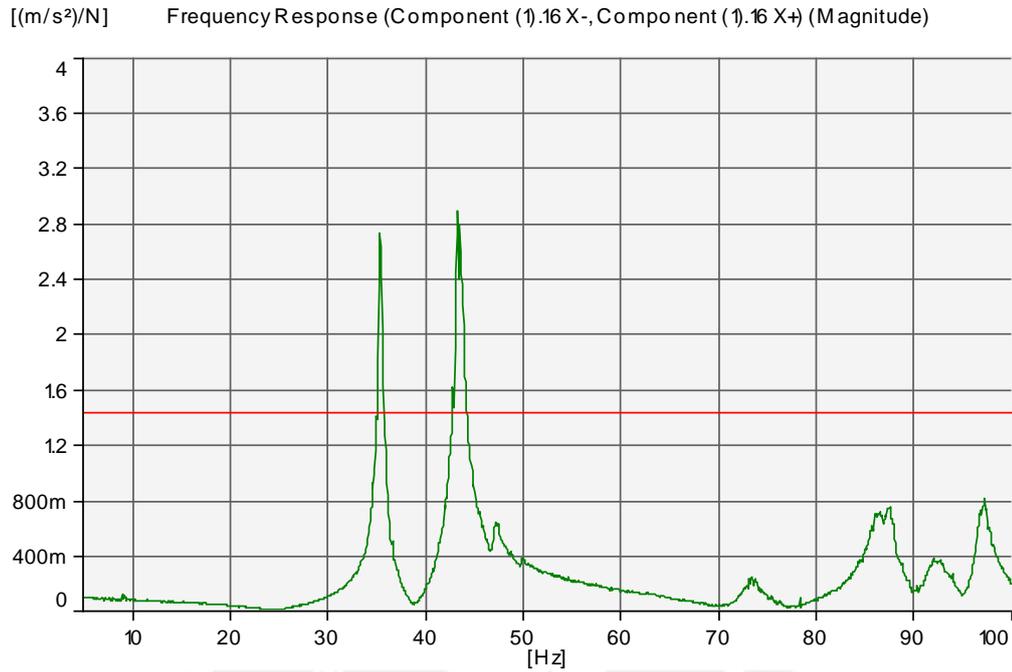


Figura 3.9. Análisis modal del punto 16.

Se presentará a continuación una tabla resumen sobre los 16 puntos tomados.

Tabla 3.4. Resumen de los tres modos principales.

Punto	Modo 1 (Hz)	Modo 2 (Hz)	Modo 3 (Hz)
1	8.3	35	44
2	8.2	35	44
3	8.8	35.3	44.5
4	9	35.1	44
5	8.8	35	43.5
6	8.7	35	43
7	8.5	35.1	43.8
8	8.5	35.8	44
9	4	35	44
10	8	35.1	44.2
11	8.5	35.8	44.3
12	8.5	35.1	44
13	8.5	35	44.2
14	8.4	35.1	44.3
15	8.6	35.1	44.3
16	8.8	35	44
<b>Promedio</b>	<b>8.26</b>	<b>35.16</b>	<b>44.01</b>

## CAPÍTULO 4

### SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

#### 4.1 Simulación

Como se ha descrito anteriormente, la finalidad de este proyecto es realizar también un contraste con el método de la simulación con los experimentos previamente realizados. Para ello se tendrán las siguientes evaluaciones correspondientes a cada ensayo realizado en la experimentación. Además, se utilizó el software FEMAP NASTRAN para realizar el análisis modal del sistema. Donde se tuvieron las siguientes condiciones para cada ensayo:

Para cada simulación se tomaron las siguientes condiciones: las propiedades mecánicas del material de la regla son equivalentes a un acero A36, el peso del motor en cada nivel es el mismo los cuales están conformados por los pesos de los perfiles de aluminio, la plancha de acero de 200 mm x 120 mm x 1.5 mm y la plancha de Fierro de 200 mm x 200 mm x 0.25 in.

En resumen, se tiene que los tres primeros modos de vibración de cada ensayo son los siguientes, mediante el método de la simulación.

**Tabla 4.1.** Resumen de datos obtenidos.

MODO	Caso 1 (Hz)	Caso 2 (Hz)	Caso 3 (Hz)	Caso 4 (Hz)
1	3.03	1.92	1.94	7.71
2	8.84	7.58	7.62	50.82
3	12.16	12.44	12.50	79.37

Donde:

Caso 1: Base del módulo con unión empotrada y nodos empotrados.

Caso 2: Base del módulo con unión articulada y nodos empotrados.

Caso 3: Uniones del módulo articuladas.

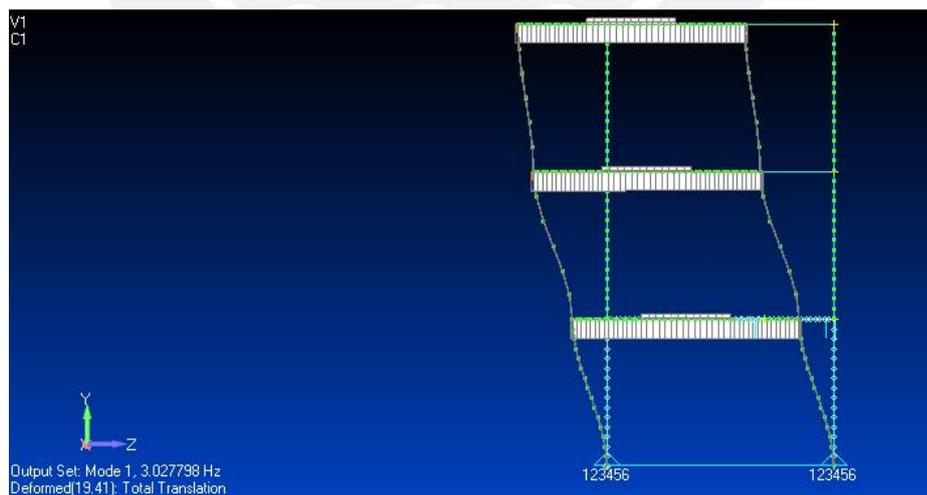
Caso 4: Base del módulo con mayor rigidez.

A continuación, se explicará con mayor detalle los datos obtenidos por cada ensayo.

#### 4.1.1. Caso 1: Base del módulo con unión empotrada y nodos empotrados.

Para este ensayo las condiciones de borde serán que en las uniones de la base se encuentren empotradas, es decir tienen los 6 grados de libertad restringidos y que en las demás uniones se considere una unión empotrada. Es decir, cada nivel se desplazará como un bloque o una masa concentrada. Como se muestra en las Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5

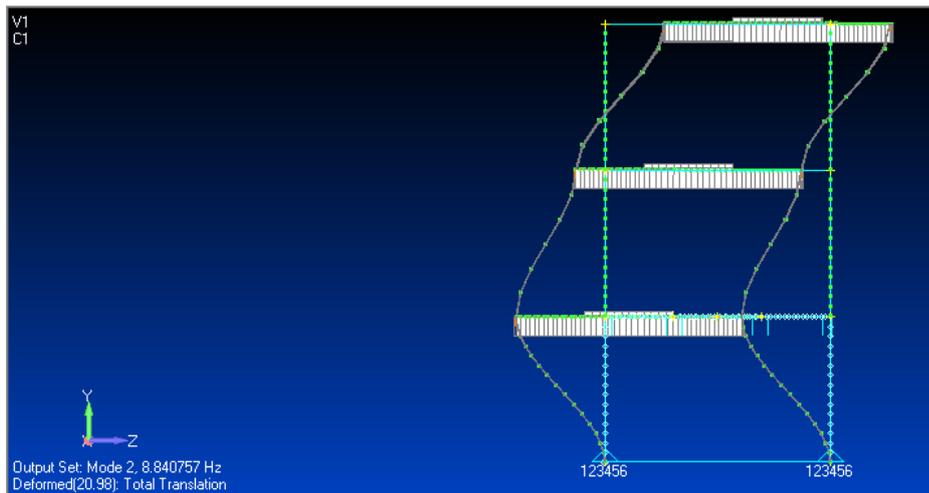
El primer modo sucede a 3.027 Hz, presenta la siguiente configuración: cada nivel tiende a desplazarse en la misma dirección, es decir están en fase, tal como se muestra en la figura 4.1. Además, a mayor altura el desplazamiento será mayor.



**Figura 4.1.** Primer modo de vibración del módulo a 3.027 Hz.

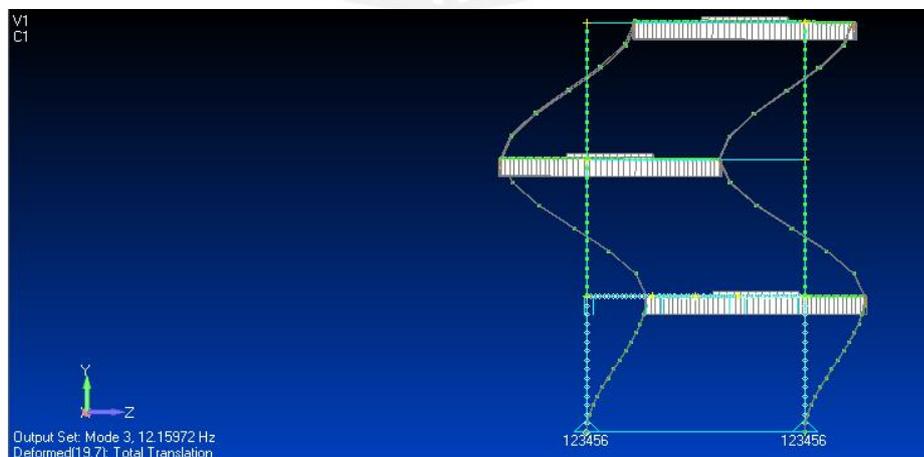
En la segunda frecuencia natural ocurre en 8.84 Hz se puede observar que el desplazamiento entre el primer nivel y el tercer nivel están en sentido o dirección

opuesta; es decir están en desfase. Mientras que el desplazamiento en el nivel tiende a ser muy pequeño, tal como se muestra en la figura 4.2. Además, en el método experimental este desplazamiento se puede percibir con dificultad.



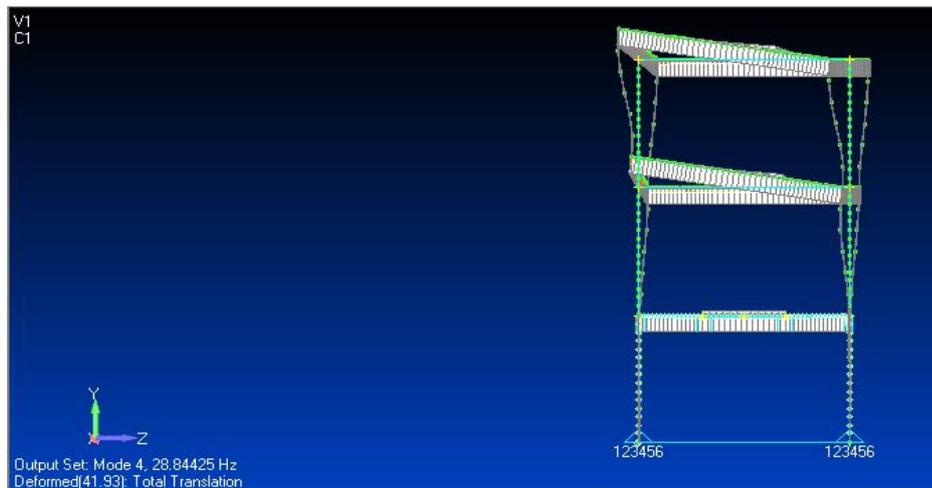
**Figura 4.2.** Segundo modo de vibración del módulo a 8.84 Hz.

En la tercera frecuencia natural (12.16 Hz) se puede observar que el modo presenta la siguiente configuración: El primer nivel se desplaza en la misma dirección que el tercer nivel. Por otro lado, el segundo nivel se encuentra en desfase o sentido opuesto a los otros dos niveles, tal como se muestra en la figura 4.3.



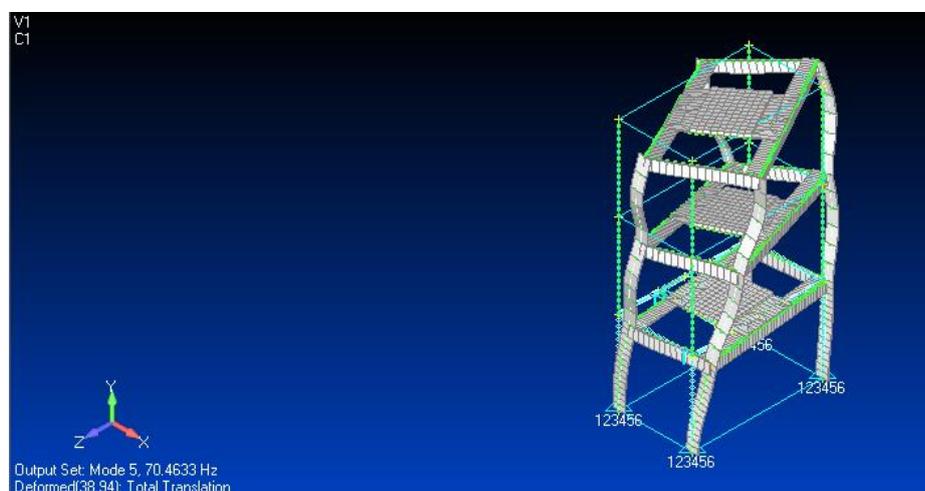
**Figura 4.3.** Tercer modo de vibración del módulo a 12.16 Hz.

El cuarto modo sucede cuando la frecuencia es 28.88 Hz, en este caso se muestra que el primer nivel tiende a desplazarse poco a diferencia del segundo y tercer nivel. Ya que, estos últimos tiende a desplazarse en la dirección transversal originando una deformación por torsión. Tal como se muestra en la figura 4.4.



**Figura 4.4.** Cuarto modo de vibración del módulo a 28.88 Hz.

Por último, el quinto modo sucederá a una frecuencia de 70.46 Hz. En este caso se puede observar en la figura 4.5. que el efecto torsional se hace más notorio. Es decir, el desplazamiento es en las direcciones X y Z.

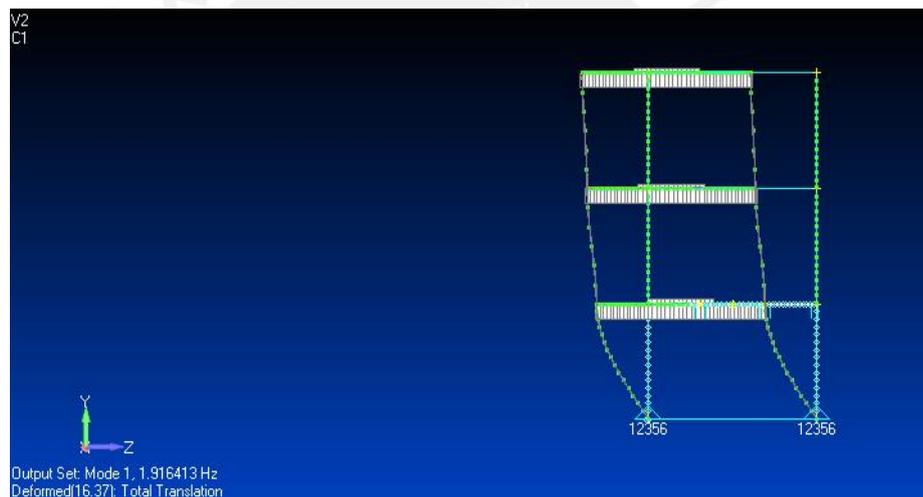


**Figura 4.5.** Quinto modo de vibración del módulo a 70.46 Hz.

#### 4.1.2. Caso 2: Base del módulo con unión articulada y nodos empotrados.

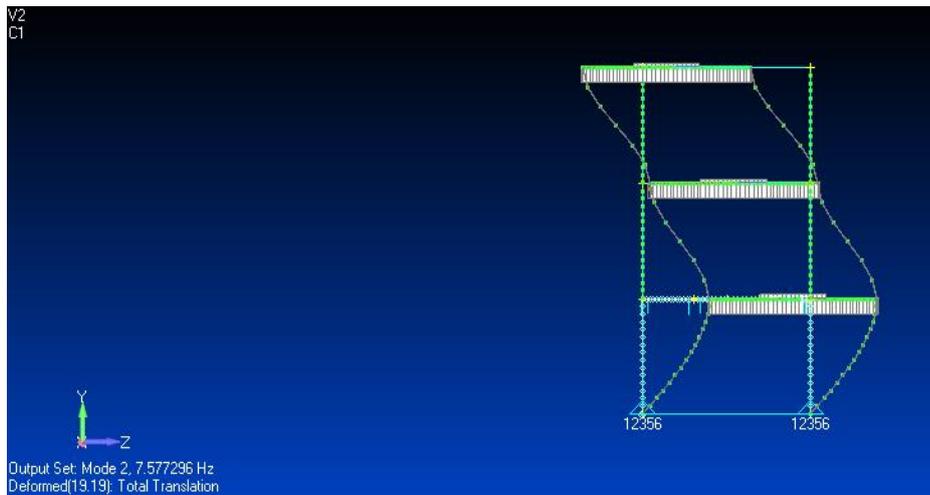
Para este ensayo, las condiciones de frontera son que las uniones en la base son articuladas permitiendo el giro en el eje x, además que las uniones en los nodos son empotrados.

El primer modo sucederá cuando la frecuencia un valor aproximado de 1.91 Hz, la diferencia con el anterior ensayo o caso radica a que los desplazamientos de todos los niveles tienden a ser casi iguales, la variación es pequeña, como se puede ver en la figura 4.6.



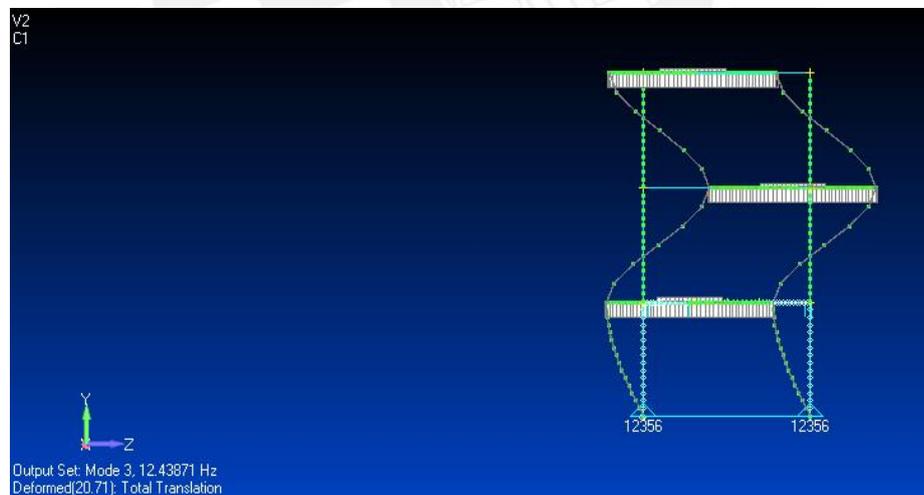
**Figura 4.6.** Primer modo de vibración del módulo a 1.91 Hz.

El segundo modo presentará la misma configuración que el segundo modo del caso anterior con la diferencia que este sucederá a 7.57 Hz; es decir hay poca variación, tal como se muestra en la figura 4.7.



**Figura 4.7.** Segundo modo de vibración del módulo a 7.57 Hz.

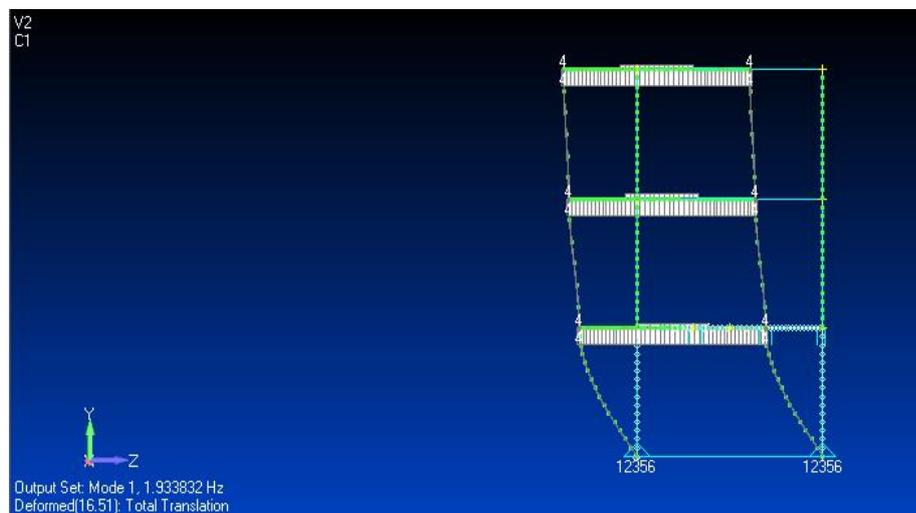
El tercer modo presenta un modo parecido al ensayo cuando la base presentó unión empotrada. La diferencia radica que en la unión se puede observar un ángulo de deformación en la base por ser articulado. Tal como se muestra, en la figura 4.8



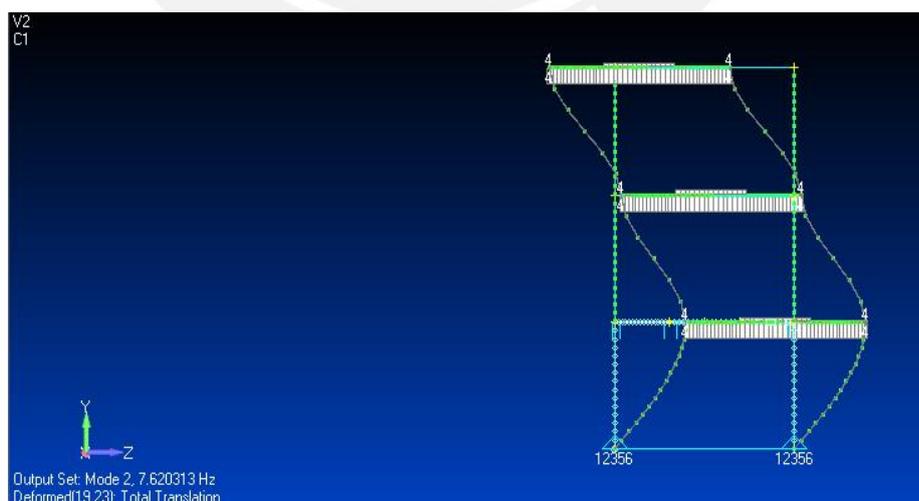
**Figura 4.8.** Tercer modo de vibración del módulo a 12.44 Hz.

### 4.1.3. Caso 3: Uniones del módulo en articulado

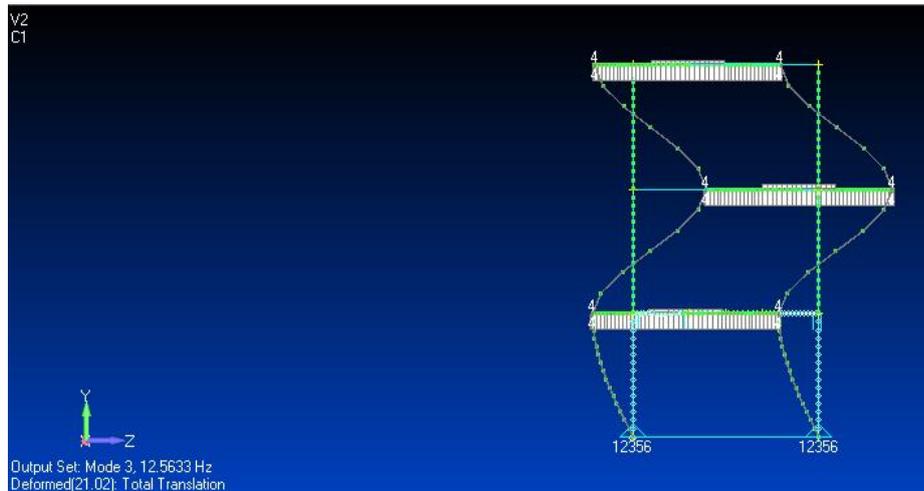
Para este ensayo todas las uniones, tanto en la base, como en los nodos superiores, permiten el giro en el eje x. Como se puede observar los modos presentan las mismas configuraciones que el caso 2. Es decir, la condición de borde predominante es la unión en la base. Esto puede ser observado en las gráficas 4.9., 4.10. y 4.11.



**Figura 4.9.** Primer modo de vibración del módulo a 1.93 Hz.



**Figura 4.10.** Segundo modo de vibración del módulo a 7.62 Hz.

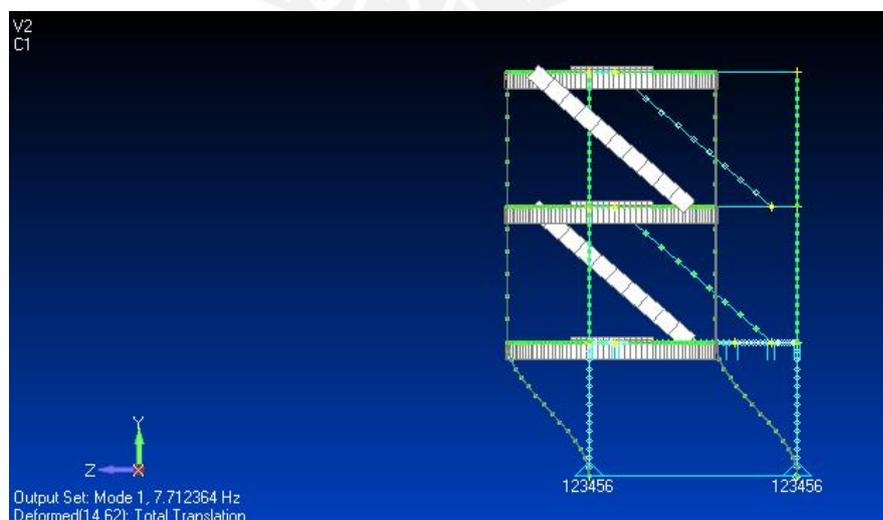


**Figura 4.11.** Tercer modo de vibración del módulo a 12.56 Hz.

#### 4.1.4 Caso 4: Módulo con mayor rigidez.

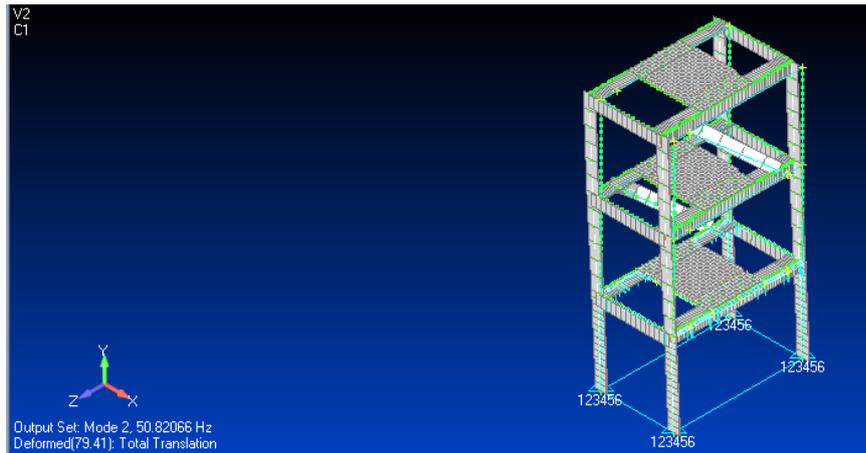
En este último ensayo se tiene como condiciones de frontera que todas las uniones son empotradas y, para aumentar la rigidez del sistema se utilizará de dos elementos, que serán montados como arriostres en el módulo.

Se puede observar que en la primera frecuencia natural (7.71 Hz), el modo de vibración presenta la configuración: Todos los niveles se desplazan en fase debido a los elementos agregados, tal como se muestra en la figura 4.12.



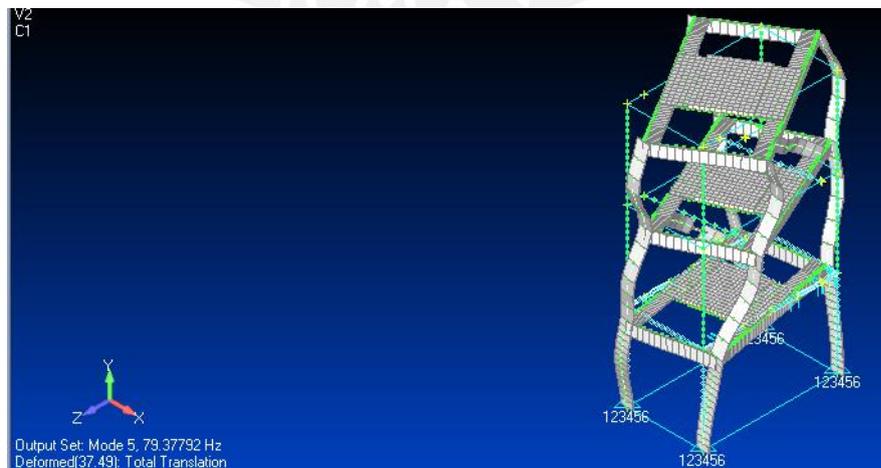
**Figura 4.12.** Primer modo de vibración del módulo a 7.71 Hz.

En el segundo modo de vibración, la deformación tiende a ser más en el eje X que en el Z, esto ocurre a una frecuencia de 50.38 Hz, mostrando un indicio de un posible modo por deformación torsional. Tal como se muestra en la figura 4.13.



**Figura 4.13.** Segundo modo de vibración del módulo a 50.83 Hz.

Por último, el tercer modo sucederá a una frecuencia de 79.37 Hz donde se visualiza más un efecto torsional. Tal como se muestra en la figura 4.14. Además, se sustenta con los indicios dados por el segundo modo.



**Figura 4.14.** Tercer modo de vibración del módulo a 79.37 Hz.

## 4.2 Análisis de los resultados.

### 4.2.1. Comparación de los resultados teóricos y experimentales

#### I) Determinación de las frecuencias naturales del sistema

Según los datos experimentales obtenidos, las frecuencias naturales oscilan en un rango desde 2 Hz a 10 Hz. Según las gráficas del capítulo interior. Cabe mencionar que cuando las frecuencias de excitación tienden a las frecuencias naturales, se producirá el fenómeno de resonancia. Pero este fenómeno no se concretizará en un solo punto, ya que la resonancia es un rango de frecuencias que oscilan alrededor de un punto pico con una variación del  $\pm 20\%$ . Tal como se muestra en la siguiente figura.

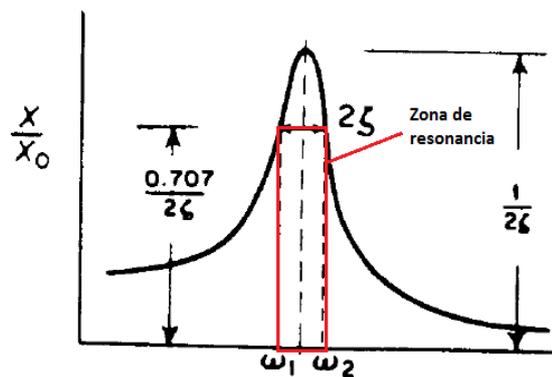


Figura 4.15. Descripción del área de resonancia. Elaboración propia.

Para identificar las frecuencias naturales del sistema, mediante el método de la experimentación se debe verificar que en las gráficas amplitud vs frecuencia se obtengan los mayores o grandes cambios en la amplitud (picos). De esta forma se podrá tener una idea de las zonas donde se ubican las frecuencias naturales y una forma de verificar que efectivamente dicho pico represente una frecuencia natural es mediante la gráfica de los ángulos de desfase vs frecuencia.

Cabe recordar que por cada frecuencia se tiene un valor de amplitud, el cual presenta una parte real y otra imaginaria, donde el valor de la amplitud es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada parte. Para poder determinar el ángulo de desfase ( $\theta$ ) en cada frecuencia se debe aplicar la siguiente ecuación.

$$\theta = \arctan\left(\frac{Im}{Re}\right) \quad (\text{Ec. 4.1})$$

Donde:

Im: Parte Imaginaria de la amplitud.

Re: Parte Real de la amplitud.

Para ello, se presentará la verificación de las frecuencias naturales del sistema en el punto más representativo de cada ensayo.

- Ensayo del módulo con la base empotrada (Torque de ajuste variable).

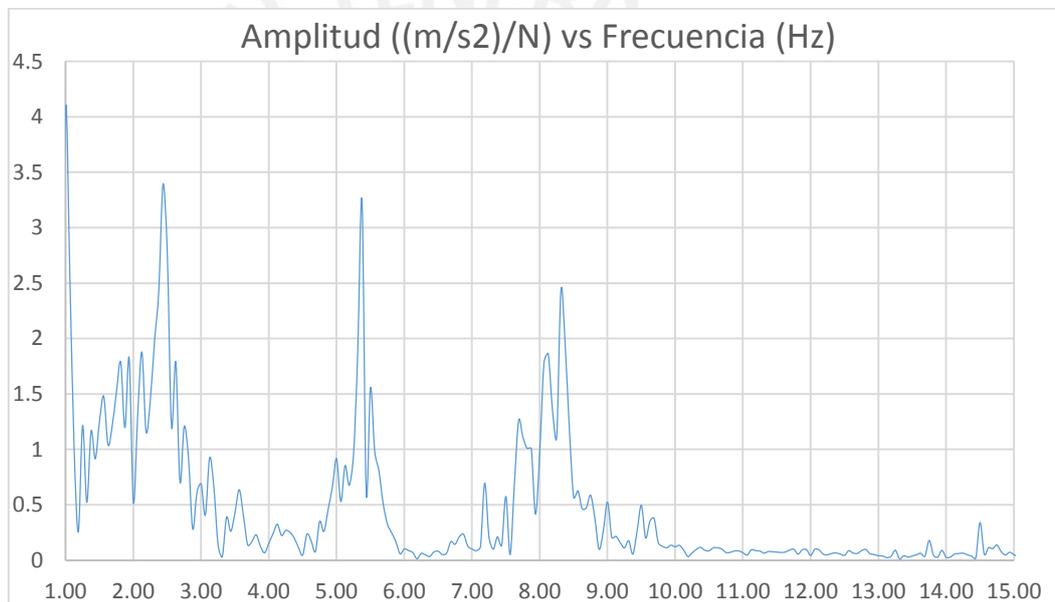


Figura 4.16. Gráfica de amplitud vs. Frecuencia del punto 8.

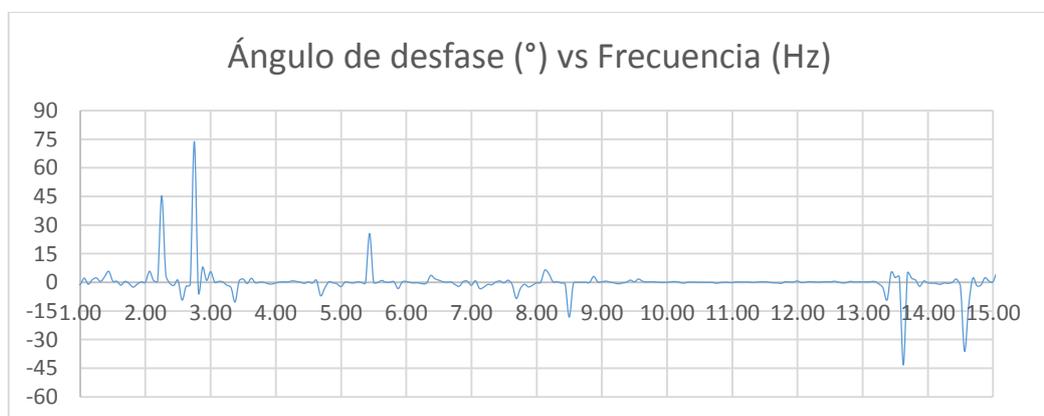


Figura 4.17. Gráfica de ángulo de desfase vs. Frecuencia del punto 8.

Como se puede apreciar, los valores de los picos más altos aparecen en 2.5 Hz, 5.5 Hz y 8.4 Hz. Donde representan las frecuencias naturales del sistema y para su verificación se puede observar que en la gráfica de ángulo de desfase vs frecuencia se obtienen valores altos de ángulos de desfase, lo que indica un gran cambio. De la misma forma se procedió para los demás puntos para obtener un promedio de las frecuencias naturales del sistema, como se observa en la tabla 3.1 en el capítulo tercero. Ver Anexo B.1. y C.1.

- Ensayo del módulo con la base empotrada (Iso-torque).

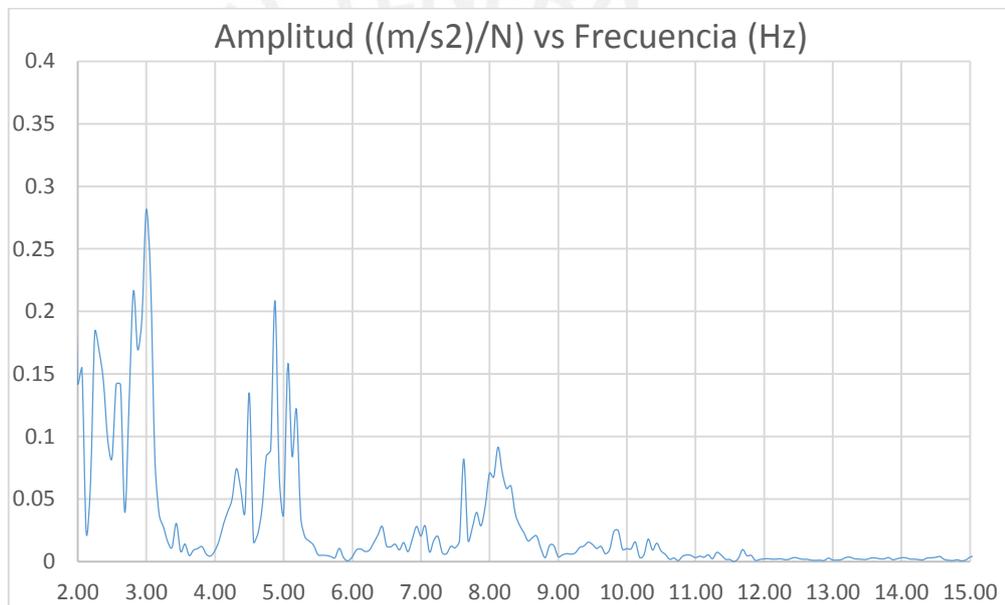


Figura 4.18. Gráfica de amplitud vs. Frecuencia del punto 4.

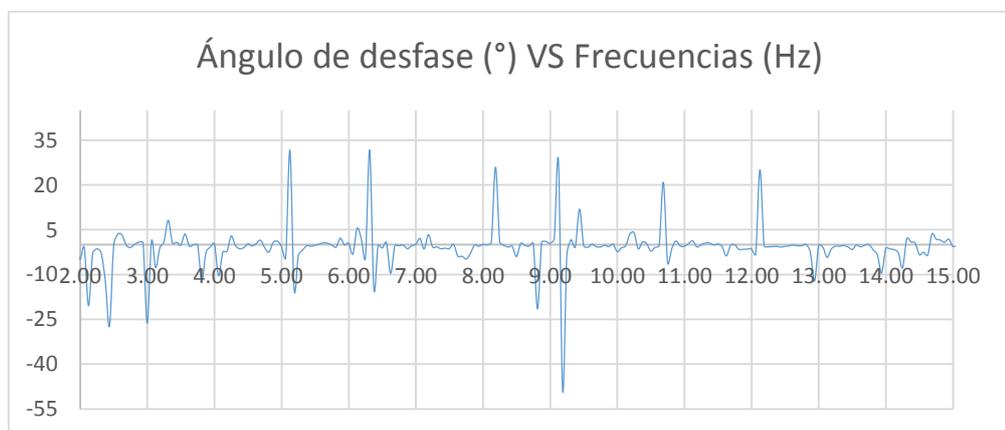


Figura 4.19. Gráfica de ángulo de desfase vs. Frecuencia del punto 4.

Como se puede apreciar, los valores de los picos más altos aparecen en 3 Hz, 5.1 Hz y 8.2 Hz. Donde representan las frecuencias naturales del sistema y para su verificación se puede observar que en la gráfica de ángulo de desfase vs frecuencia se obtienen valores altos de ángulos de desfase, lo que indica un gran cambio. De la misma forma se procedió para los demás puntos para obtener un promedio de las frecuencias naturales del sistema como se observa en la tabla 3.2 en el capítulo tercero. Ver Anexo B.2. y C.2.

- Ensayo del módulo con la base articulada.

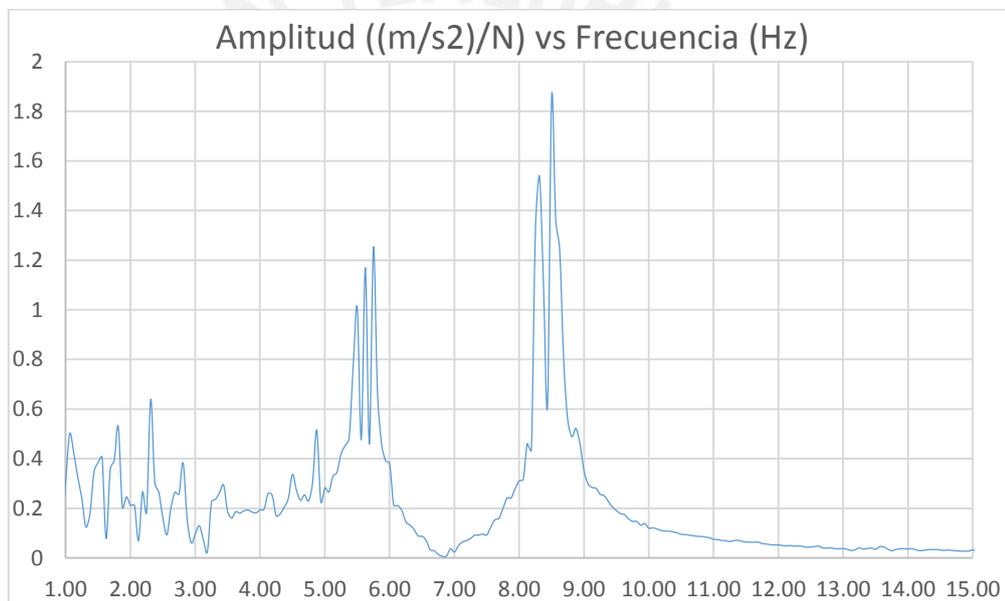


Figura 4.20. Gráfica de amplitud vs. Frecuencia del punto 5.

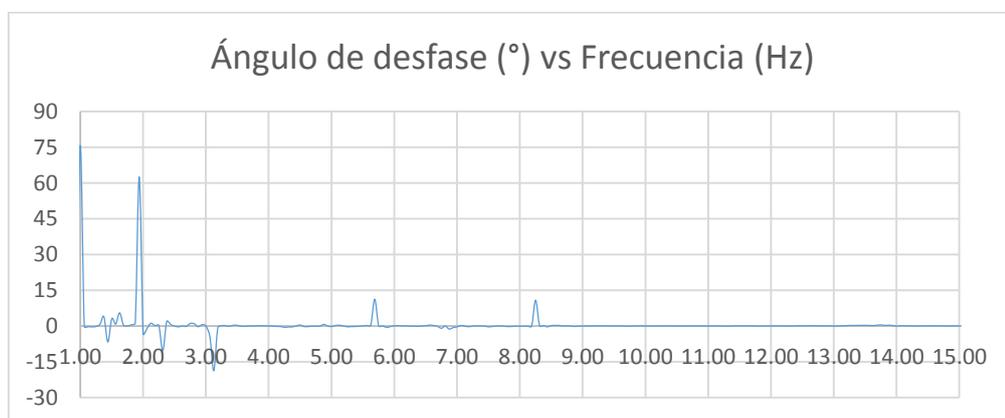
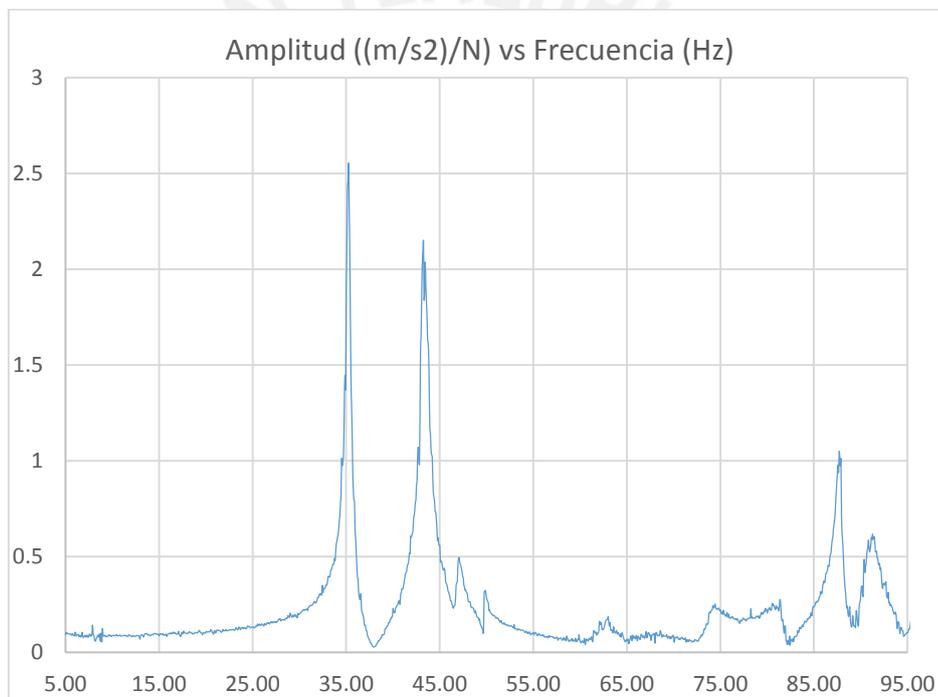


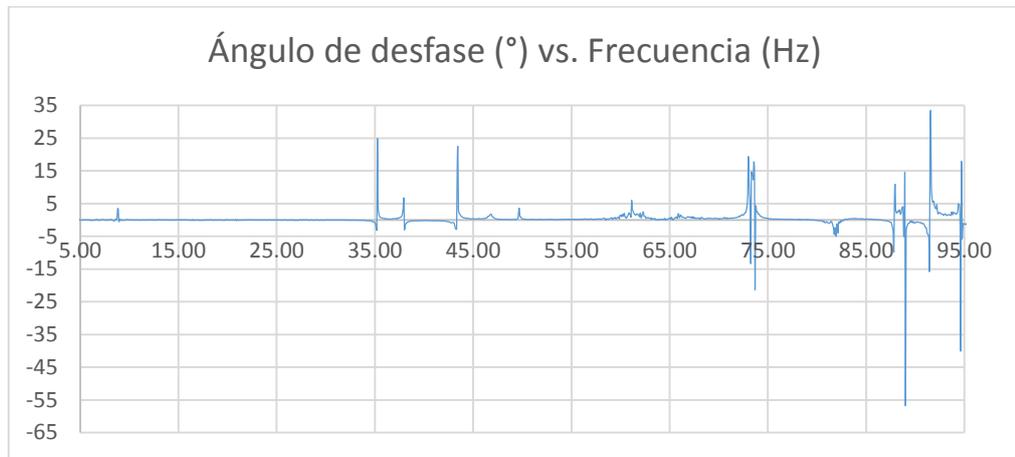
Figura 4.21. Gráfica de ángulo de desfase vs. Frecuencia del punto 5.

Como se puede apreciar, los valores de los picos más altos aparecen alrededor de los 1.9 Hz, 5.6 Hz y 8.3 Hz. Donde representan las frecuencias naturales del sistema y para su verificación se puede observar que en la gráfica de ángulo de desfase vs frecuencia se obtienen valores altos de ángulos de desfase, lo que indica un gran cambio. De la misma forma se procedió para los demás puntos para obtener un promedio de las frecuencias naturales del sistema como se observa en la tabla 3.3 en el capítulo tercero. Ver Anexo. B.3. y C.3.

- Ensayo del módulo con mayor rigidez.



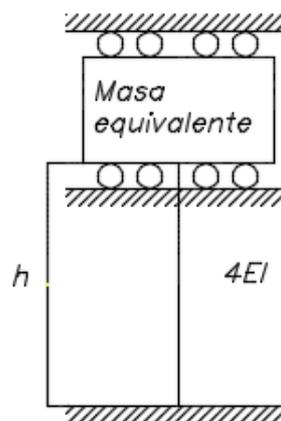
**Figura 4.22.** Gráfica de amplitud vs. Frecuencia del punto 5.



**Figura 4.23.** Gráfica de ángulo de desfase vs. Frecuencia del punto 5.

Como se puede observar en la figura 4.22, los tres picos importantes que representen las frecuencias naturales del sistema son los siguientes: 8.5, 35 y 44 Hz. También se observa en la gráfica 4.23 que, efectivamente, hay cambios notorios de ángulos de fase cerca a las frecuencias mencionadas anteriormente. Del mismo modo se determinó las frecuencias naturales del sistema como se observa en la tabla 3.4 en el capítulo tercero. Ver Anexo B.4. y C.4.

Además, para el caso de la rigidez se estimará aproximado el sistema a un grado de libertad, ya que para poder representarlo en más grados de libertad, el sistema adquiere una mayor complejidad. Por otro lado, con la representación de un grado de libertad se puede estimar la primera frecuencia natural.



**Figura 4.24.** Esquema del sistema con mayor rigidez 1 GDL.

Aplicando la teoría descrita en el capítulo primero se obtiene los siguientes resultados:

**Tabla 4.2.** Primera frecuencia natural del sistema.

Variables	Unidades	Valores
Inercia	$m^4$	2.3333E-12
Elasticidad	Pa	2.1E+11
Altura	m	0.2
Masa	Kg	4.8
1° Frecuencia. natural	Hz	7.90

Como se puede apreciar la primera frecuencia natural dependerá exclusivamente en este caso de la altura equivalente donde se encuentre el peso concentrado del sistema. El caso más representativo será representado cuando la altura es 0.2 m, ya que efectivamente este valor es muy próximo a la primera frecuencia natural del sistema hallada por el método experimental y FEM.

## II) Resumen de las frecuencias naturales del sistema

A continuación se mostrarán tres tablas resumen, donde se muestran los resultados por el método analítico, experimental y por simulación para cada tipo de ensayo respectivamente (cuatro casos). Cabe mencionar que la cantidad de modos de vibración principales son tres, por ser el sistema de tres grados de libertad.

- a) Caso empotrado
- Iso-torque:

**Tabla 4.3.** Cuadro comparativo de las frecuencias naturales del sistema.

Caso: Base y nodos empotrados						
MODO	Método experimental (Hz)	Método Analítico (Hz)	Variación (%) Experimental vs Analítico	Elementos Finitos (FEM) (Hz)	Variación (%) Analítico vs FEM	Variación (%) Experimental vs FEM
1	2.70	3.04	11.15	3.027	0.40	10.80
2	5.20	8.51	38.90	8.84	3.73	41.18
3	8.20	12.30	33.35	12.16	1.18	32.57

- Torque variable:

**Tabla 4.4.** Cuadro comparativo de las frecuencias naturales del sistema.

Caso: Base y nodos empotrados						
MODO	Método experimental (Hz)	Método Analítico (Hz)	Variación (%) Experimental vs Analítico	Elementos Finitos (FEM) (Hz)	Variación (%) Analítico vs FEM	Variación (%) Experimental vs FEM
1	2.49	3.04	17.94	3.027	0.40	17.62
2	5.43	8.51	36.18	8.84	3.73	38.56
3	8.12	12.30	34.01	12.16	1.18	33.23

- b) Caso articulado

**Tabla 4.5.** Cuadro comparativo de las frecuencias naturales del sistema.

Caso: Uniones articuladas						
MODO	Método experimental (Hz)	Método Analítico (Hz)	Variación (%) Experimental vs Analítico	Elementos Finitos (FEM) (Hz)	Variación (%) Analítico vs FEM	Variación (%) Experimental vs FEM
1	2.02	1.84	9.95	1.93	4.87	4.40
2	5.49	7.26	24.46	7.58	4.17	38.13
3	8.26	11.90	30.57	12.44	4.34	50.56

- c) Caso de mayor rigidez

**Tabla 4.6.** Cuadro comparativo de las frecuencias naturales del sistema.

Caso: Módulo con mayor rigidez						
MODO	Método experimental (Hz)	Método Analítico (Hz)	Variación (%) Experimental vs Analítico	Elementos Finitos (FEM) (Hz)	Variación (%) Analítico vs FEM	Variación (%) Experimental vs FEM
1	8.26	7.90	4.51	7.71	2.41	7.08
2	35.16	-	-	50.83	-	30.84
3	44.01	-	-	79.37	-	44.56

#### 4.2.2 Interpretación de los resultados obtenidos.

a) De acuerdo al método analítico se puede apreciar que la ubicación de las frecuencias naturales donde han de manifestarse los modos principales de vibración están en el rango de 1.8 Hz a 12.5 Hz. Donde se puede comprobar que el método por elementos finitos representa efectivamente el método conceptual, ya que se tiene como variación entre estos resultados de un 0.4 % hasta un 4.87 % para los tres primeros modos de vibración, cabe recordar que dicha variación se cumple en los ensayos donde no se ha incrementado la rigidez del sistema y solo se ha modificado el tipo de unión en el sistema. En el ensayo con mayor rigidez la variación entre el método de elementos finitos con respecto al método analítico el error es de 7.08 % en el primer modo lo cual es aceptable. Es decir, la aplicación de los elementos finitos representa el método conceptual (correcta calibración).

b) Se puede apreciar que las frecuencias naturales obtenidas por el método de la experimentación en el ensayo -en donde todas las uniones están con un mismo torque de ajuste y la base representa una unión empotrada- están en un rango de 2.5 Hz a 8.5 Hz. A comparación con el método analítico, el cual se observa un error de 11.5 %, 38.9 % y 33 % para la primera, segunda y tercera frecuencia natural respectivamente. Es importante resaltar, que en el caso articulado se observa una menor variación entre los datos obtenidos por el método experimental y analítico.

c) Se puede visualizar en las gráficas del capítulo tercero y en los respectivos anexos, B.1, B.2 y B.3., que los picos donde se ubican las frecuencias naturales presentan un ancho muy pequeño o mínimo, con ello se puede deducir que el factor de amortiguamiento- que es estructural- es mínimo y se comprueba la afirmación dada en el capítulo dos.

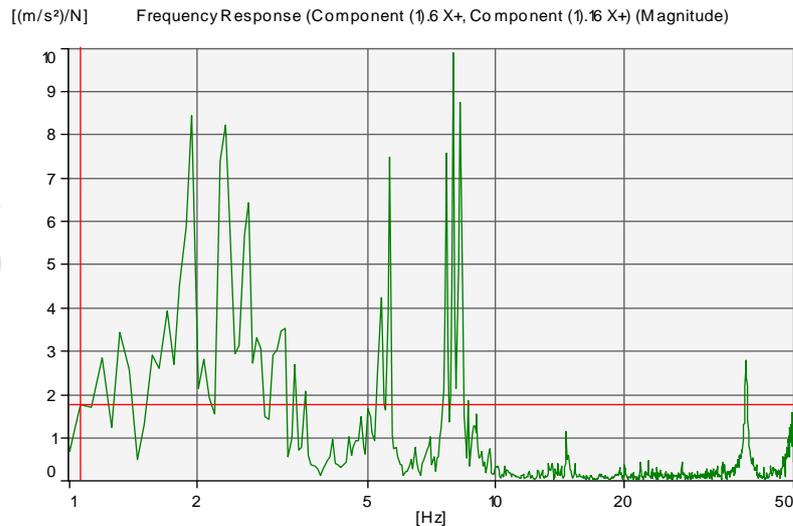
d) El porcentaje de error entre los datos obtenidos, tanto por el método experimental, como por el método analítico, en los ensayos donde no se ha aumentado la rigidez es muy similar, representando así una tendencia de la forma en cómo se abordó el problema, específicamente con las condiciones de frontera. Dentro de las comparaciones entre las frecuencias naturales se puede ver que se tiene un menor error, con un 10 % de error en la primera frecuencia natural. Ello es importante, ya que

siempre la primera frecuencia representa el caso más crítico en el comportamiento dinámico.

e) De acuerdo a las gráficas de amplitud vs frecuencia y desfase vs frecuencia (capítulo cuarto) se puede comprobar que las frecuencias naturales no son un determinado valor. Esto se puede afirmar, ya que a una determinada frecuencia donde existe un pico en la amplitud, no necesariamente se encontrará un pico en la gráfica de desfase. Por lo que se concluye que el fenómeno de las vibraciones aparece en un rango de frecuencias. Es decir, cada modo principal de vibración sucederá cuando la frecuencia de excitación esté dentro del rango de las frecuencias naturales del sistema.

f) Los espectros hallados en las gráficas amplitud vs frecuencia de cada ensayo muestran a simple vista las tres primeras frecuencias naturales del sistema, pero para verificar que efectivamente se trate de una frecuencia natural se debe comprobar que el ángulo de desfase en esa misma frecuencia tienda a ser  $90^\circ$  (caso ideal). En algunos casos, será suficiente que se vea un gran cambio en el ángulo de desfase.

g) El método analítico nos brinda información sobre los tres modos principales del sistema. Es por ello que, cuando se valida la simulación, este método brinda una información sobre otro tipo de modo de vibración - que es el torsional. También se puede observar en el primer caso, específicamente en las figuras 4.4 y 4.5, que a una frecuencia de 28.88 Hz el sistema empieza a tener un efecto de deformación torsional, ello es más visible en la figura 4.5 donde la frecuencia natural es 70.46 Hz. Además, esto es validado mediante el método de la experimentación, así como se observa en la figura 4.25 donde existe un pico después de los 20 Hz, esto representaría al modo torsional obtenido por la simulación en la figura 4.5.



**Figura 4.25.** Análisis modal del punto 6.

h) Se puede apreciar que cuando se realiza la configuración del sistema con mayor rigidez, las frecuencias naturales tienden a aumentar, ello es más notorio en la segunda y tercera frecuencia natural, las cuales superan los 20 Hz. Además, en el rango de 0 a 20 Hz se presentaban los tres modos principales del sistema cuando este presentó menor rigidez.

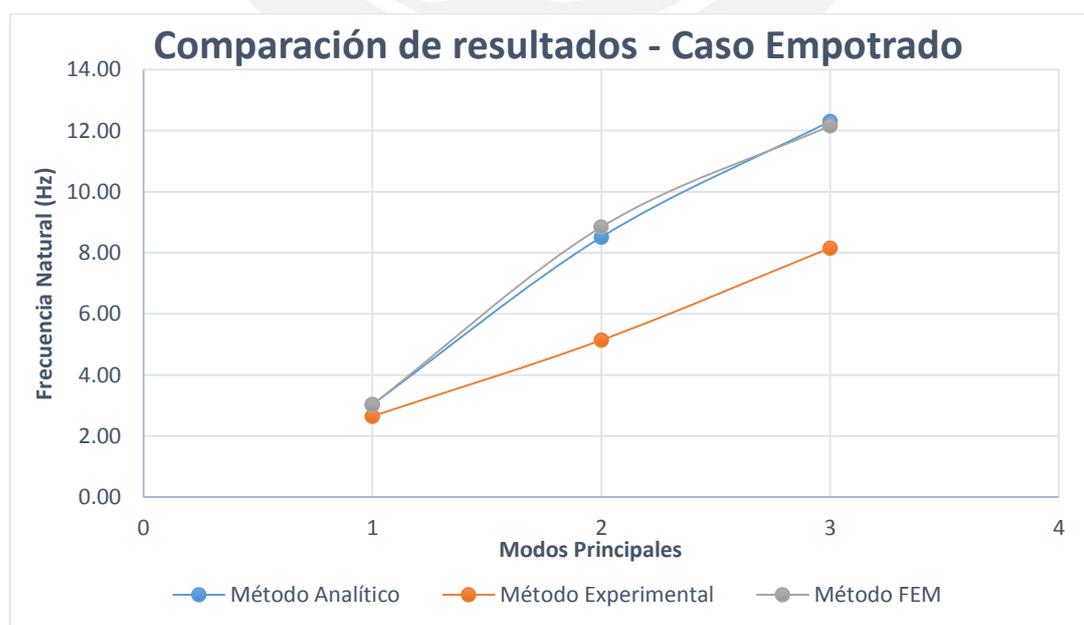
i) Se puede observar que en cuanto a las condiciones de borde el tipo de unión que se realice afecta al comportamiento dinámico de la estructura metálica. En el caso del módulo, se puede observar la diferencia que existe entre tener una unión empotrada y articulada; esta diferencia es más notoria en el primer modo, donde se alcanzó una variación del 39.49 %, en cambio los otros modos tienden a reducir su valor de variación.

j) Otro aspecto importante sobre el tipo de unión es que la configuración de todo el sistema esté con un mismo torque, ya que esta condición de borde afectará bastante a la variación de los resultados. Debido a que, al tener torques aleatorios, el modelo conceptual no implica esta variación de torques, pues el sistema se toma como continuo. El tener torques variables en cada unión hará que el sistema presente condiciones de borde más discontinuas y no tienda a ser como el modelo conceptual.

k) En el ensayo de menor rigidez, los tres modos principales representaban movimientos generados por flexión, pero al colocar arriostres el comportamiento del sistema tiende a ser un modo por flexión; los otros dos tienden a ser modos originados más por efectos

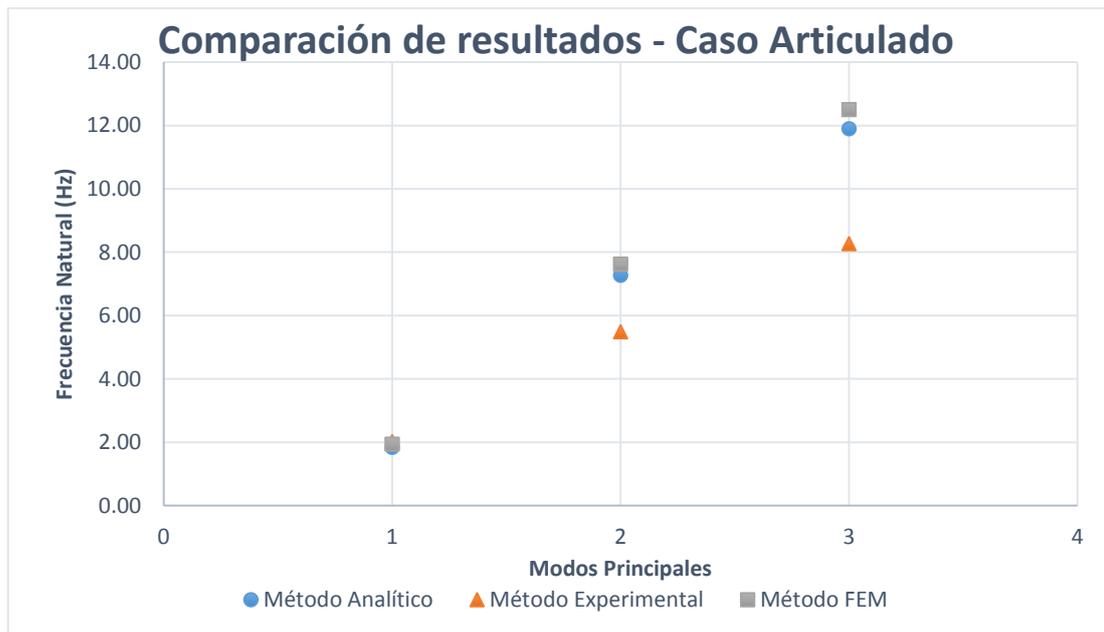
torsionales. Ya que, con la configuración de rigidez el sistema deja de tener tres niveles y se comporta como si fuera la unión de dos partes; el primero con menor rigidez y el segundo es la unión de los dos niveles superiores. Ello, debido a que el colocar arriostres restringe los desplazamientos de los nodos en la parte superior. Además, el no tener arriostres en cada nivel en ambos lados laterales favorecerá a que ocurra la torsión, debido a que en un lado de un nivel está restringido el movimiento; pero en el otro lado, no.

l) Sobre los datos obtenidos, tanto por el método experimental, como por el analítico o por simulación, se puede observar que estos ocurren en frecuencias no muy alejadas, pero a medida que se incrementa la frecuencia y aparecen las otras frecuencias naturales del sistema, los valores entre cada método tienden a alejarse más. Esto es originado, ya que el método analítico como la simulación no representa de manera idéntica a la experimentación. Las causas son varias, desde error en las condiciones de borde como también error en las mediciones realizadas, ya sea por calibración o forma inadecuada de realizar la medición. A continuación, en las figuras 4.26, 4.27, se mostrarán las tendencias de los casos cuando en la unión de la base representaron el caso empotrado y articulado. Por último, una gráfica (figura 4.28) donde se pueda observar todo el panorama sobre la dispersión de estos valores en cada uno de los modos principales.



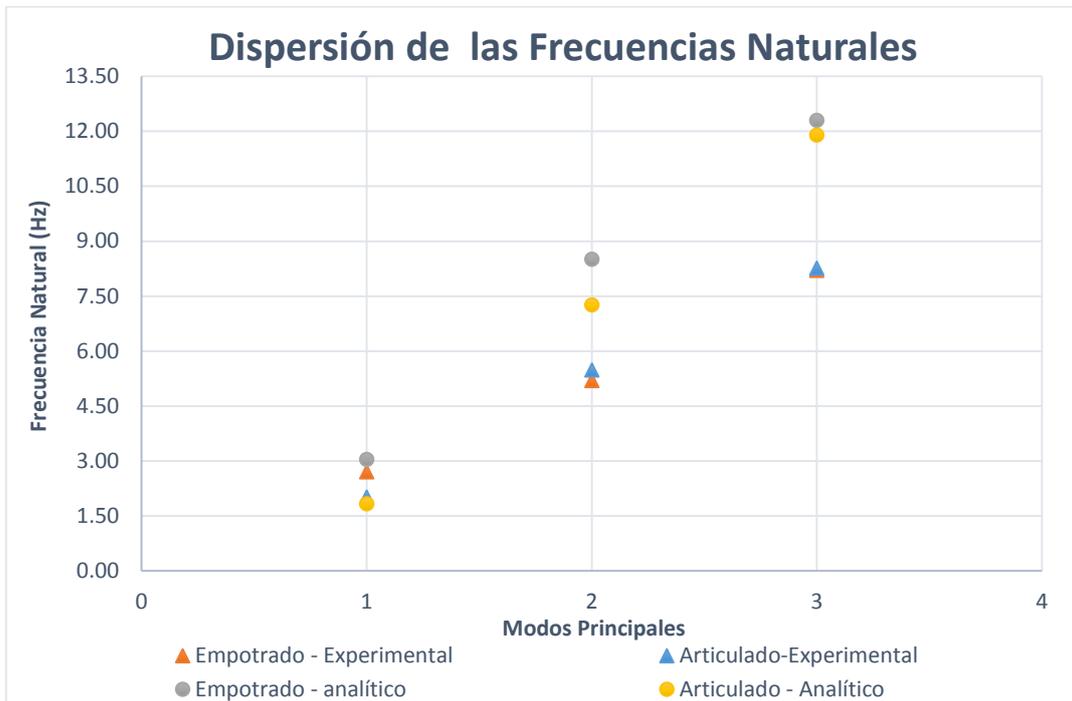
**Figura 4.26.** Comparación de resultados del caso empotrado.

Se puede apreciar que el error tiende a aumentar a medida que se aumentan los modos, pero, tanto el método analítico, como el de elementos finitos, no llegan a representar de forma idéntica la experimentación. Por otro lado, en el caso articulado se puede apreciar que la dispersión de las frecuencias halladas en sus respectivos modos tiende a disminuir como se puede apreciar en la figura 4.27.



**Figura 4.27.** Comparación de resultados del caso articulado

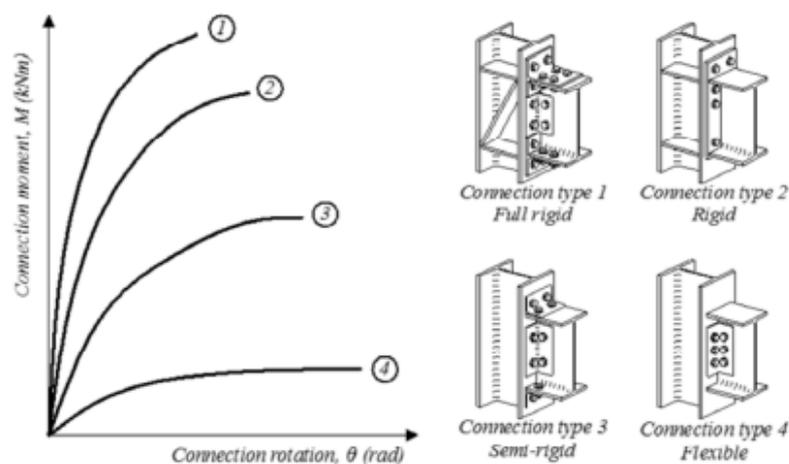
Por último, se presentará en la figura 4.28 cómo está la dispersión, tanto en el caso empotrado, como en el articulado. Además, se puede observar que a un mayor modo de los datos experimentales, tanto en los dos casos se reduce su variación entre ellos, de la misma forma entre los datos del caso empotrado y articulado en el método analítico. Caso contrario cuando se realiza la comparación entre los diferentes métodos.



**Figura 4.28.** Dispersión de las frecuencias naturales.

De acuerdo a las gráficas 4.26, 4.27 y 4.28 se puede observar que las uniones del módulo diseñado tienen un comportamiento muy cercano a las uniones articuladas. Ya que las uniones pueden permitir un gran giro de deformación en el fleje aun así se aplicará un pequeño momento. Es decir, el comportamiento del sistema se aproximará más a la curva 4 del siguiente gráfico.

#### ► Clasificación de las conexiones por la rigidez



**Figura 4.29.** Clasificación de las conexiones por la rigidez.

## PLANOS

**Plano 1.** Ensamble del módulo de laboratorio.

**Plano 2.** Soporte del servomotor.

**Plano 3.** Acople del servomotor.

**Plano 4.** Base del módulo.

**Plano 5.** Perfil Horizontal de 300 mm.

**Plano 6.** Fleje metálico 60 cm.

**Plano 7.** Platina.

**Plano 8.** Plancha de ¼".

**Plano 9.** Plancha de 1.5 mm.

**Plano 10.** Perfil Horizontal de 200 mm.

**Plano 11.** Ángulos de unión izq. y derecha.

**Plano 12.** Arriostre.

**Plano 13.** Perfil Horizontal base de 300 mm.

## CONCLUSIONES

1. – En el presente trabajo de investigación realizado, se alcanzaron los objetivos planteados; ya que se diseñó, fabricó y se realizaron los ensayos experimentales del módulo de laboratorio que represente a una estructura metálica que trabaje con equipos mecánicos. También se realizó el contraste de los resultados obtenidos por los diferentes métodos como el analítico, elementos finitos y experimentales obteniéndose resultados muy cercanos y aceptables para la máquina diseñada. El comportamiento dinámico se pudo entender mediante métodos de aprendizaje activo. Debido a que se contó con un módulo de laboratorio, el cual permitió entender -por medio de la experiencia directa- la relación que existe entre las frecuencias naturales y sus respectivos modos de vibración con los parámetros de rigidez, inercia y fuerza excitatriz. Ya que el módulo te permite realizar muchas configuraciones con el objetivo de poder apreciar el cambio del comportamiento dinámico del módulo de laboratorio, el cual representa una estructura metálica que trabaja con equipos. Es por ello, que realizar el diseño de módulos de laboratorio para estudiar fenómenos presenta un gran valor en el aprendizaje y comprensión de los fenómenos estudiados en los cursos de Ingeniería Mecánica en el país.

2.- El presente trabajo de tesis contribuirá con la formación del estudiante de pre grado de ingeniería a través de la experimentación y el estudio sobre la influencia de los parámetros de rigidez, inercia y fuerza excitatriz en sistemas que presenten un comportamiento dinámico, como es el caso de las estructuras metálicas que trabajan con equipos mecánicos. Así mismo, la presenta da origen a posteriores trabajos de investigación relacionados con el diseño de módulos de laboratorio para el estudio del comportamiento dinámico de las estructuras metálicas que trabajen con equipos mecánicos.

3.- Es posible diseñar y fabricar un módulo de laboratorio para estudiar el comportamiento dinámico de estructuras metálicas con tecnología accesible en el país, y estar a la vanguardia en la educación con modelos de laboratorios o educativos. Para ello, se deben aplicar los conocimientos estudiados y adquiridos en el pre grado de Ingeniería Mecánica de la PUCP de los cursos de Metodología del diseño (Proyecto en

Ingeniería Mecánica 1), Vibraciones Mecánicas, Métodos Matemáticos y Numéricos en Ingeniería.

4.- Se pudo comprobar la importancia de los parámetros de inercia, rigidez y fuerza excitatriz, como también la importancia de las uniones en el sistema. Por ejemplo, cuando se realiza la variación de la masa, es decir se produce un cambio en la inercia, que modificará la frecuencia natural del módulo de manera inversamente proporcional. Por otro lado, cuando se realiza un cambio en la rigidez, este afecta a las frecuencias naturales de forma directamente proporcional. En cuanto a la fuerza excitatriz, esta solo afectará en la amplitud de los desplazamientos en los diferentes modos de vibración, pero para que ocurra el fenómeno de la resonancia será suficiente que la frecuencia de excitación del sistema sea de un valor aproximado a la frecuencia natural independientemente de la magnitud de la fuerza excitatriz. Por último, la importancia de las uniones se muestra en este caso con el torque de ajuste, ya que tener todas las uniones con un mismo torque ayudará a tener una mayor semejanza, tanto con el método analítico, como el de elementos finitos; es decir, las uniones influyen directamente con las condiciones de borde del sistema.

5.- De acuerdo a las variaciones obtenidas, tanto por el método analítico, como experimental y de elementos finitos se puede concluir que el sistema diseñado tiende a comportarse al caso articulado, ya que en este caso se presentaron las menores variaciones para las tres frecuencias naturales desde 9.9 % hasta 30.5 %. Pero, cabe mencionar, que el sistema no es 100% articulado y que en cada unión presenta un momento, el cual vendría ser el factor de empotramiento que existe en las uniones. Esto es correcto, ya que en la realidad una unión no es empotrada ni articulada, sino tiende a comportarse como alguno de ellos. Ello dependerá del factor de empotramiento.

6. – El análisis cualitativo y cuantitativo de los métodos de elementos finitos, así como el método analítico resultan ser de valores muy cercanos a los valores obtenidos experimentalmente. Es decir, cuando se realice una simulación para determinar o predecir el comportamiento dinámico de un sistema, se podrá mostrar el comportamiento real si se tiene en cuenta las condiciones de borde, que son los datos de entrada tanto para el método analítico como el de elementos finitos. También cabe resaltar la importancia de conocer las vibraciones para poder desarrollar un método

conceptual, el cual permita tener indicadores de los rangos sobre las frecuencias naturales. Estas son imprescindibles para poder verificar que la aplicación de elementos finitos sea la adecuada.

7.- Las mediciones realizadas en el Laboratorio de Acústica se realizaron con un acelerómetro que censa el movimiento en una dirección principal. Por ello se tuvo que realizar la toma de 16 puntos por cada ensayo, para luego sacar un promedio de las frecuencias halladas para determinar las frecuencias naturales del sistema a cierta configuración. Es evidente, que utilizar el promedio solo brinda una aproximación de los rangos donde se ubicarán las frecuencias naturales con sus respectivos modos de vibración. Como consecuencia, se da origen a un trabajo de investigación sobre la experimentación para emplear métodos estadísticos aplicando variaciones para poder encontrar datos que representen con mayor precisión y con cierto grado de confiabilidad la ubicación de las frecuencias naturales del sistema.

8.- Como se mencionó anteriormente, tanto en la interpretación de resultados, como en las conclusiones, si bien se ha conseguido una data muy importante sobre la influencia de los parámetros de rigidez, inercia y fuerza excitatriz. Esto puede ser mejorado de diferentes maneras como las siguientes:

Mejorar las condiciones de borde para tener una mayor aproximación entre los métodos utilizados y poder representar con mayor exactitud el comportamiento descrito experimentalmente. También se pueden mejorar los materiales a utilizar especialmente el de las columnas del módulo, ya que el diseño contempló usar flejes metálicos porque están diseñadas para trabajar en movimiento. Sin embargo, por restricciones económicas se utilizaron reglas de metal.

## Bibliografía

- Thomson, William Tyrrell  
1982 Teoría de vibraciones. Aplicaciones. Segunda edición. Mexico: Prentice Hall. Latinoamérica
- S.S. RAO.  
1989 The Finite Element Method in Engineering. UK Oxford: Pergamon Press 2da. Ed.
- Alencastre Miranda, Jorge  
2013 Separatas del curso: Elementos finitos en el diseño mecánico. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima: 2013
- Alencastre Miranda, Jorge  
2012 Separatas del curso: Vibraciones. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima: 2012
- McCormac, Jack C.  
1996 Diseño de estructuras de acero: método LRFD. México: Alfaomega.
- The European Union  
2005 Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1 – 8: Design of joints.
- Norma DIN  
1970 Manual de Normas Fundamentales para la Ingeniería Mecánica, Octava Edición, Edit. Balzola, Bilbao, 1970.
- Decker, Kar Heinz,  
1980 Elementos de Maquinas, Séptima Edición en Español, Edit. Urmo, S.A. Madrid, 1980.
- Vera Lázaro, Alejandro  
2011 Dinámica Estructural 1 GDL. Perú: Macro E.I.R.L.

-American Concrete Institute (ACI)

2004 ACI 351.3R-04. Foundations for Dynamic Equipment. Mayo 3, 2004.  
Reported by ACI Committee 351.

-Brüel & Kjær

1982 Measuring Vibration, Brüel & Kjær , Naerum.

-Balachandran, Balakumar

2006 Vibraciones. México: International Thomson Editores.

-Berrios Barcena, David Reynaldo

2010 *Diseño de un módulo de laboratorio para el estudio de la transmisibilidad, en la cimentación de máquinas.* Tesis de maestría en Escuela de graduados con mención en Magister en Ingeniería Mecánica. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú, Escuela de Postgrado.

-CARRASCO ANGULO, Cristian Alfredo

2011 *Metodología para el análisis estático y dinámico de estructuras metálicas aplicando el método de los elementos finitos.* Tesis de licenciatura en Ciencias e Ingeniería con mención en Ingeniería Mecánica. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú, Facultad de Ciencias e Ingeniería.