

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



PUCP

**PORTAFOLIO ÓPTIMO EN ESCENARIOS DE SALTOS
ESTOCÁSTICOS: APLICACIÓN A LAS ADMINISTRADORAS DE
FONDOS DE PENSIONES DE PERÚ**

Tesis para optar el grado de Magíster en Economía que presenta

Diego Luis Solís Palomino

**Dirigido por
Paul Collazos Tamariz**

San Miguel, 2015

Resumen

La presente tesis ha sido elaborada con la finalidad de evaluar el impacto de los saltos estocásticos en la Selección de Portafolio Óptimo de un agente económico que administra el portafolio de Renta Variable del Fondo 3 de una AFP en el Perú. Para ello, se determinó el efecto de ignorar la presencia de saltos mediante el cálculo del Costo de Equivalente de Certeza (CEQ), el cual mide la inversión adicional necesaria para que la utilidad bajo la estrategia que no considera los saltos sea igual a la utilidad bajo la estrategia que sí considera los saltos.

Para llevar a cabo la investigación, se utilizó un caso particular del Modelo de Difusión de Saltos planteado por Merton (1969) donde los saltos a través de los activos son simultáneos pero la magnitud de los saltos cambia a través de los activos, además del Modelo de Difusión Puro que no captura el salto y finalmente el Modelo de Media-Varianza planteado por Markowitz (1952). El análisis se llevó a cabo para diversos valores del coeficiente de aversión al riesgo y una función de utilidad de aversión relativa al riesgo constante (CRRA). Considerando la metodología planteada por Das y Uppal (2004) se implementaron los modelos de optimización sin restricciones y con restricciones de prohibición de venta en corto y de apalancamiento del portafolio. Además se redujo el universo de instrumentos elegibles a cuatro clases de activos, renta variable local, renta variable extranjera - mercados desarrollados, renta variable extranjera - mercados emergentes y renta variable extranjera - mercados frontera, los cuales fueron representados por activos proxy para replicar el portafolio del Fondo 3.

Se determinó los portafolios óptimos de inversión en función de los parámetros de las ecuaciones diferenciales estocásticas de los modelos mencionados, para realizar la optimización estocástica se usaron técnicas de Programación Dinámica Estocástica, Control Óptimo Estocástico y Cálculo Estocástico; seguidamente, se determinó los parámetros de las ecuaciones diferenciales estocásticas de los modelos mediante el Método Momentos usando para ello la función característica o representación Lévy - Khintchine para procesos de Lévy; finalmente, se determinó el Costo de Equivalente de Certeza (CEQ).

Se demostró que si se considera la presencia de saltos en el rendimiento de los activos se produce un cambio en la asignación de los activos dentro del portafolio. Se encontró que a medida que aumenta el grado de aversión al riesgo en el inversionista las diferencias entre los pesos de los activos en el modelo de difusión de salto y en el modelo de difusión puro se reducen, ello implica que mientras mayor sea la aversión al riesgo se reduce el efecto de los saltos en la asignación de los portafolios óptimos. Asimismo, se obtuvo que para menores valores de aversión al riesgo, el modelo de difusión de saltos, que sí reconoce los saltos a diferencia del modelo de difusión puro y del modelo media-varianza que no reconocen los saltos, asigna un mayor peso a activos con menor amplitud de salto mientras que para mayores valores de aversión al riesgo, asigna un mayor peso a activos con mayor amplitud del salto.

Se obtuvo que el costo de no considerar los saltos en los rendimientos de los activos medido a través del Costo de Equivalente de Certeza (CEQ) aumenta en la medida que el horizonte de inversión aumente y el coeficiente de aversión al riesgo disminuya. Se demostró que el costo de ignorar la presencia de los saltos en los rendimientos de los activos y en la selección de portafolio es mayor utilizando la composición actual del portafolio de renta variable del Fondo 3 seguido por el modelo de difusión puro y el modelo media-varianza, es decir, para igualar a la utilidad esperada de la riqueza bajo el modelo de difusión de saltos es necesario añadir un mayor monto de dinero al Fondo 3 en comparación con el modelo de difusión puro y con el modelo media-varianza, con lo cual se demostró que con la composición actual del portafolio de renta variable del Fondo 3 la utilidad esperada es menor debido a que se ignora la presencia de los saltos en los rendimientos de los activos y en la selección de portafolio, en comparación con el modelo de difusión saltos que sí considera los saltos donde la Utilidad es mayor.

La presente investigación brinda un aporte teórico en la medida que extiende las investigaciones realizadas previamente sobre el tema ya que incorpora restricciones de prohibición de venta en corto y de apalancamiento del portafolio a los modelos de optimización. Asimismo, como parte de su aporte empírico, la presente investigación demuestra que los saltos impactan negativamente en la selección del portafolio óptimo y que el Fondo de Pensiones Tipo 3 es un agente económico que presenta cierto grado de aversión al riesgo el cual está asociado a un mayor valor del Costo de Equivalente de Certeza (CEQ).



Agradecimiento

A mis padres por su apoyo incondicional, por ser el motor que me impulsa a crecer cada día, gracias por ser mis mejores amigos y consejeros; gracias por todo lo que me han dado en la vida y por todo lo que soy.

A mi hermano Paul, por permitirme guiarlo y aprender con él cada día.

A mi hermanita Camila que es la luz que ilumina nuestra casa.



Contenido

Resumen.....	2
Agradecimiento.....	4
1. Introducción	6
2. Marco Teórico	10
2.1. Revisión de la Literatura Teórica	10
2.2. Revisión de la Literatura Empírica.....	12
3. Objetivo e Hipótesis de la Investigación	14
4. Marco Metodológico	15
4.1. Dinámica del Rendimiento de los Activos.....	15
4.1.1. Modelo de Difusión Puro	15
4.1.2. Modelo de Difusión de Saltos	16
4.2. Optimización de Portafolio.....	17
4.2.1 Modelo de Difusión Puro sin Restricciones.....	18
4.2.2. Modelo de Difusión de Saltos sin Restricciones.....	19
4.2.3. Modelo de Difusión de Saltos con Restricciones.....	20
4.2.4. Modelo Media-Varianza.....	21
4.3. Estimación de los Parámetros de los Modelos.....	22
4.4. Equivalente de Certeza - Costo de Ignorar los Saltos	25
5. Análisis Empírico	26
5.1. Descripción de la Data	26
5.2. Parámetros Estimados	31
5.3. Portafolios Óptimos.....	32
5.4. Costo del Equivalente de Certeza (CEQ)	45
6. Conclusiones	55
Bibliografía	57

1. Introducción

La crisis financiera del año 2008 tuvo su nacimiento en Estados Unidos y se propagó hacia los otros mercados en lo que se conoce como un efecto de Contagio Financiero, fenómeno donde las pérdidas en un activo, una clase de activo o un país incrementan el riesgo de pérdidas subsecuentes en otros activos, otras clases de activos u otros países, ello implica que una perturbación en un activo puede afectar negativamente sus rendimientos futuros como la de los otros agentes que participan dentro del sistema financiero. La crisis financiera del 2008 ha enfatizado la relevancia de este fenómeno para entender las varias formas de riesgo inherente en los rendimientos de los activos y sus implicaciones para la asignación de activos y la diversificación en las decisiones de Portafolio Óptimo.

Durante el periodo de la crisis financiera del 2008, la Bolsa de Valores peruana también se afectó debido a la caída del rendimiento de los índices de los otros países, más aún de los Estados Unidos donde surgió la crisis, la Figura 1.1 muestra el contagio financiero que se generó durante el periodo de la crisis en el mercado de renta variable, para ello se presenta la evolución de cuatro índices que abarcan en su totalidad el universo de renta variable, el MSCI PERU ALL que corresponde al índice del mercado de renta variable peruano, el MSCI WORLD IMI que corresponde al índice del mercado de renta variable de Países Desarrollados, el MSCI EM IMI que corresponde al índice del mercado de renta variable de Países Emergentes y el MSCI FM que corresponde al índice del mercado de renta variable de Países Frontera. Al respecto, se aprecia que durante los meses de agosto a noviembre del 2008, periodo correspondiente a la crisis financiera, los cuatro índices cayeron, no obstante el índice peruano se afectó en mayor proporción respecto a los otros índices, por otro lado, el índice de los países desarrollados, donde se encuentra Estados Unidos, disminuyó en menor proporción respecto al resto de índices debido a que fue el foco de transmisión de la crisis, eso implica que la caída en el índice MSCI WORLD IMI generó la caída en los otros índices, MSCI PERU ALL, MSCI EM IMI y MSCI FM, casi al mismo tiempo pero en diferentes magnitudes, además el comportamiento de los cuatro índices durante el periodo mostrado es similar, lo cual indica una alta interacción entre los índices.

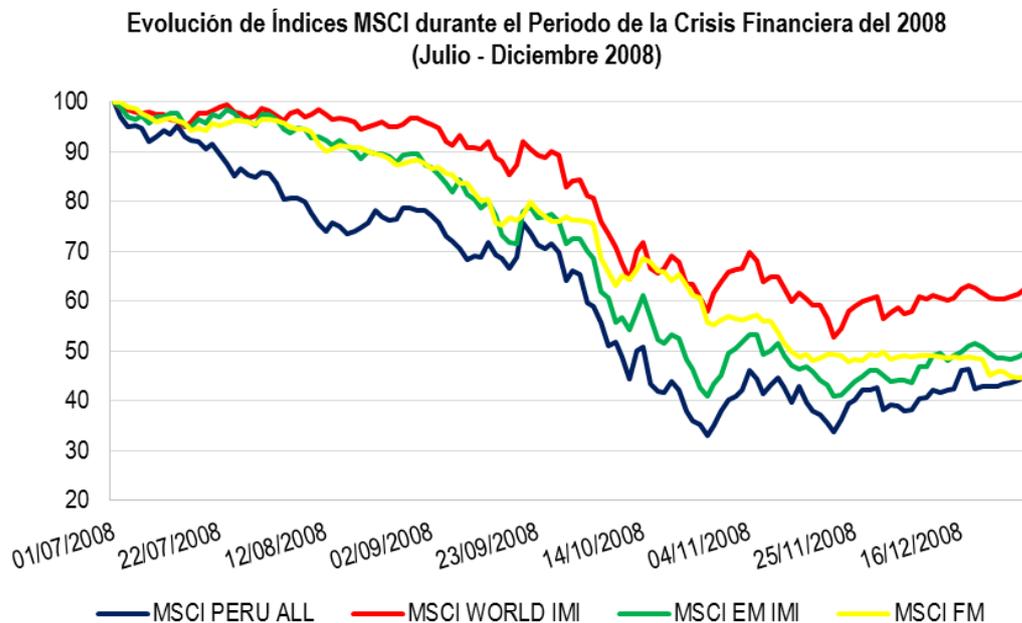


Figura 1.1. Evolución de Índices MSCI durante el Periodo de la Crisis Financiera del 2008
(Base 01/07/2008 = 100)

Durante los últimos 11 años, desde el año 2002 hasta el año 2013, los inversionistas institucionales han incrementado su portafolio de inversiones de manera significativa, siendo el Sistema Privado de Pensiones (SPP) el que ha registrado mayores tasas de crecimiento, habiendo crecido en más de 8 veces, como se puede apreciar en la Tabla 1.1, lo cual muestra la importancia del SPP dentro del mercado de capitales peruano.

Año	AFP	Bancos	Compañía de Seguros	Fondos Mutuos	Total
Dic 02	4,528	2,282	1,200	1,299	9,309
Dic 13	36,528	8,646	7,961	5,908	59,042
Tasa de crecimiento (anualizada)	20.9%	12.9%	18.8%	14.8%	18.3%
Múltiplo	8.1x	3.8x	6.6x	4.5x	6.3x

Tabla 1.1. Participación en el Mercado de Capitales (en millones de dólares)

Durante la crisis financiera del 2008, la rentabilidad de los Fondos fue seriamente afectada, como se puede apreciar en la Figura 1.2 hubo una reducción drástica en la rentabilidad de los portafolios durante el periodo de la crisis financiera, específicamente, en mayo del 2008 la rentabilidad del sistema alcanzó un valor de 36,128 millones de nuevos soles mientras que a octubre del 2008 la rentabilidad se redujo a 14,773 millones de nuevos soles, es decir una reducción de 21,355 millones de nuevos soles lo que equivale a una reducción del 60.5%. La pérdida máxima del Fondo 1 fue 8%, para el Fondo 2 fue 27% y para el Fondo 3 fue 40%.

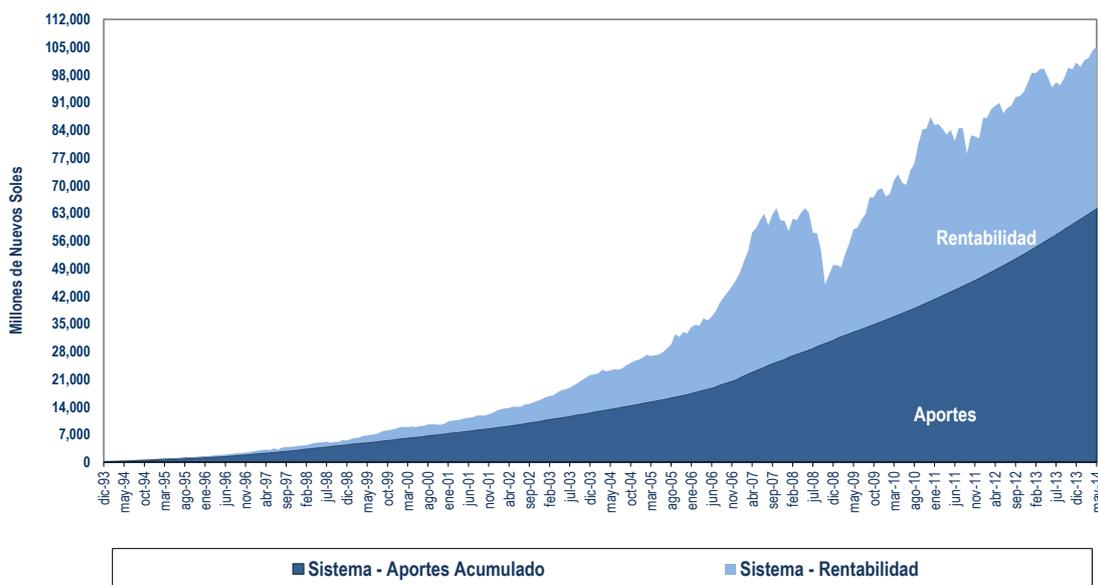


Figura 1.2. Evolución de la Rentabilidad de las AFPs (Fuente: SBS)

Por otro lado, en la búsqueda de una mejor diversificación del portafolio de inversiones que les permita obtener mejores combinaciones rendimiento-riesgo, las AFPs están optando por asignar cada vez una mayor parte de las inversiones de su portafolio en instrumentos del exterior, ello se conoce como un proceso de diversificación internacional, como se puede apreciar en la Figura 1.3, al 30 de Abril del 2015, las AFPs mantiene el 40.95% de sus inversiones en instrumentos del exterior, no obstante, podrían ver afectadas sus rentabilidades debido a la presencia del riesgo sistémico, definido como el riesgo de ocurrencia de eventos infrecuentes que están altamente correlacionados a través de varios activos, ello significa una posible reducción en sus ganancias como consecuencia del contagio financiero, el cual se transmitiría de sus activos internacionales hacia sus activos domésticos. La Figura 1.4 muestra la evolución de las inversiones en instrumentos del Exterior del Fondo 3 de AFP Integra, Profuturo AFP y Prima AFP respecto al

portafolio Fondo 3 de cada AFP, al respecto se aprecia que las inversiones en el exterior han ido en aumento progresivamente lo cual conlleva a un aumento de la exposición del portafolio del Fondo a posibles contagios financieros.

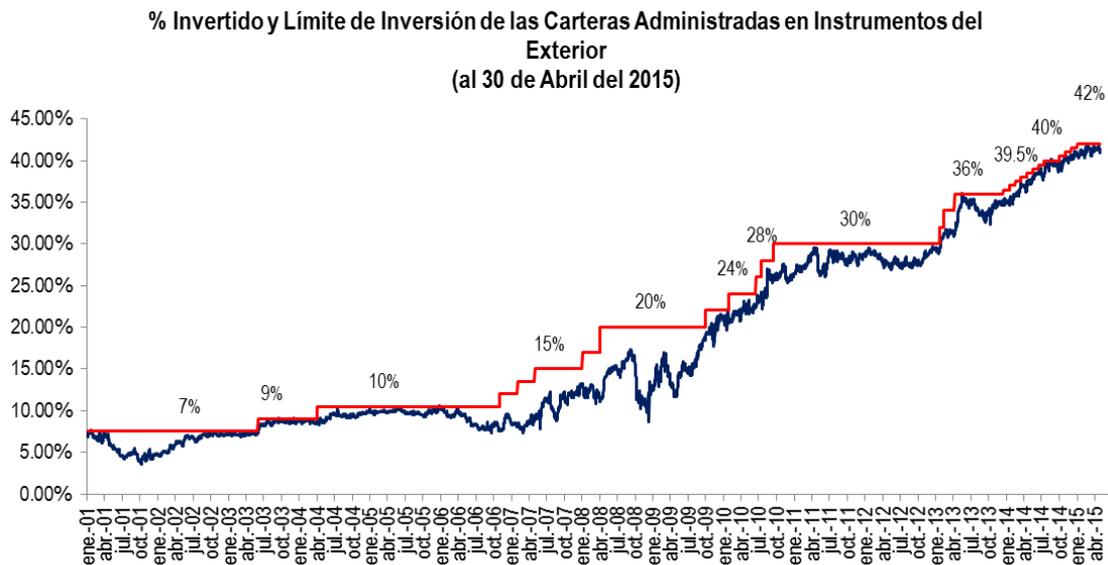


Figura 1.3. Porcentaje Invertido del SPP en Instrumentos del Exterior

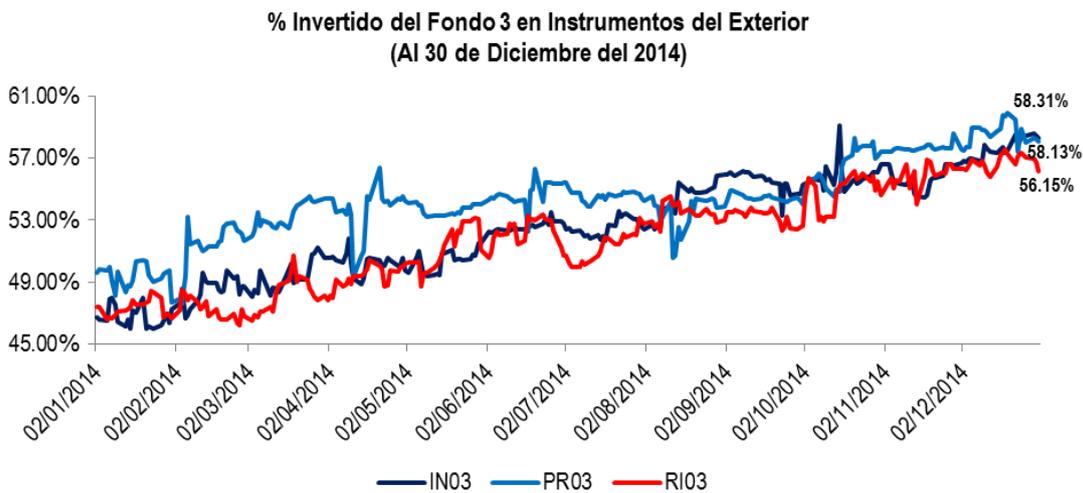


Figura 1.4. Porcentaje Invertido del Fondo 3 en Instrumentos del Exterior

Hay plena evidencia que las variables financieras, como las acciones, tipos de cambios o tasas de interés, por ejemplo, no siguen el paseo aleatorio lognormal que ha sido el fundamento y las base de los modelos financieros clásicos de la literatura financiera. Una de las características más llamativas de los mercados financieros reales es que en ciertos periodos hay una caída súbita inesperada o un aumento fuera de lo común, estos movimientos inesperados ocurren con mucha más frecuencia de lo que se podría esperar de un rendimiento distribuido normalmente con una volatilidad razonable. En pequeñas escalas de tiempo, el movimiento del precio de los activos se aprecia como un recorrido discontinuo, es decir, la dinámica de dicho activo presenta saltos, asimismo, dichos saltos tienden a ocurrir al mismo tiempo a través de los países pero en diferentes magnitudes.

Como consecuencia del contagio financiero entre los activos se produciría shocks en el precio y rendimiento de los diversos activos que conforman el portafolio, lo cual llevaría a la presencia de saltos en la dinámica de los rendimientos de los activos del universo disponible de inversión. No

hay un mecanismo en el modelo clásico de optimización que considere los movimientos inesperados en la dinámica de los activos. Los modelos clásicos como el modelo Media Varianza de Markowitz (1952) asumen un mercado racional donde los inversionistas adversos al riesgo asignan los activos entre el portafolio de mercado y el cash o mercado de dinero, con la visión de maximizar el rendimiento del portafolio dado un nivel de riesgo específico. No obstante, los inversionistas deberían utilizar un modelo que permita capturar estos movimientos inesperados en los activos, Merton (1969) planteó un Modelo de Difusión de Saltos que consiste en un modelo de difusión puro al cual se le añaden los saltos en intervalos de tiempo aleatorios, se modela el rendimiento de los precios de los activos como un proceso de Lévy con un componente Gaussiano *nonzero* y una parte de salto, el cual es un proceso de Poisson compuesto con varios saltos finitos en cada intervalo de tiempo.

La presente investigación estudiará el impacto de los saltos en la Selección de Portafolio Óptimo de un agente económico que administra el portafolio de Renta Variable del Fondo 3 de una AFP en el Perú. Para ello, se cuantificará el efecto de ignorar la presencia de saltos mediante el cálculo del Costo de Equivalente de Certeza (CEQ), el cual mide la inversión o monto de dinero que se debe añadir a la inversión inicial para que la utilidad esperada bajo la estrategia que no considera los saltos sea igual a la utilidad esperada bajo la estrategia que sí considera los saltos. El proceso de transmisión de los saltos se produce mediante el impacto de los saltos en los rendimientos de los instrumentos disponibles a invertir y considerando que dichos instrumentos forman parte de los portafolios óptimos de inversión, también se afectaría la composición del portafolio óptimo y por lo tanto afectaría la Utilidad Esperada.

Para llevar a cabo la investigación, se usará un caso particular del Modelo de Difusión de Saltos planteado por Merton (1969) donde los saltos a través de los activos son simultáneos pero la magnitud de los saltos cambia a través de los activos, además del Modelo de Difusión Puro que no captura el salto y finalmente el Modelo de Media Varianza planteado por Markowitz (1952), utilizado todavía por muchos como modelo de asignación de activos. El análisis se llevará a cabo para diversos valores del coeficiente de aversión al riesgo y se utilizará una función de utilidad del tipo CRRA. Considerando la metodología planteada por Das y Uppal (2004) se implementarán los modelos de optimización sin restricciones y con restricciones de prohibición de venta en corto y de apalancamiento del portafolio.

La metodología de trabajo de la presente investigación consistirá, primero, en determinar los portafolios óptimos de inversión en forma cerrada en función de los parámetros de las ecuaciones diferenciales estocásticas de los modelos mencionados, para realizar la optimización estocástica se usarán técnicas de Programación Dinámica Estocástica, Control Óptimo Estocástico y Cálculo Estocástico; segundo, se determinará los parámetros de las ecuaciones diferenciales estocásticas de los modelos mediante el Método Momentos usando para ello la representación Lévy - Khintchine para procesos de Lévy; finalmente, se evaluará el costo financiero por ignorar el efecto de los saltos en los portafolios mediante el cálculo del Equivalente de Certeza.

Se reducirá el universo de instrumentos elegibles a cuatro clases de activos, renta variable local, renta variable extranjera - mercados desarrollados, renta variable extranjera - mercados emergentes y renta variable extranjera - mercados frontera que permita replicar el portafolio del Fondo 3. Cada uno de los activos estará representado por un activo proxy, para el caso de renta variable local se utilizará el MSCI All Perú Capped Index (MSCI PERU ALL CAP Index), para renta variable extranjera - mercados desarrollados se utilizará el MSCI World Developed Markets Investable Market Index (MSCI WORLD IMI Index), para renta variable extranjera - mercados emergentes se utilizará el MSCI Emerging Markets Investable Market Index (MSCI EM IMI Index) y finalmente para renta variable extranjera - mercados frontera se utilizará el MSCI Frontier Markets Index (MSCI FM Index); el periodo de análisis será el comprendido entre el 01 de Febrero del 2006 y 29 de Agosto del 2014.

2. Marco Teórico

2.1. Revisión de la Literatura Teórica

2.1.1. Procesos Estocásticos

Un proceso estocástico X es una familia de variables aleatorias $(X_t)_{t \in [0, T]}$ indexadas al tiempo. El parámetro de tiempo t puede ser discreto o continuo, no obstante en la presente investigación consideraremos procesos estocásticos en tiempo continuo. Para cada realización de la aleatoriedad ω , la trayectoria $X(\omega): t \rightarrow X_t(\omega)$ define una función del tiempo, conocido como trayectoria muestral del proceso X .

2.1.2. Movimiento Browniano

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad. Para cada $\omega \in \Omega$ suponga que existe una función continua $W(t)$ de $t \geq 0$ que satisface que $W(0) = 0$ y que depende de ω . Entonces $W(t), t \geq 0$ es un movimiento browniano si para todos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ los incrementos $W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$ son independientes y cada uno de estos incrementos está distribuido normalmente con:

$$E[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0$$

$$Var[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = t_{i+1} - t_i$$

2.1.3. Martingalas

El proceso estocástico $X = (X_t, t \geq 0)$ adaptado a la Filtración $F_t, t \geq 0$ es una supermartingala (submartingala) si para todo t es integrable $E|X_t| < \infty$ y para todo $0 \leq s \leq t$

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s \quad (E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s)$$

Si

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq t$$

Entonces X_s se denomina "Martingala".

2.1.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación de la forma:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

Definida para t en $[0, T]$ y con condición inicial la variable aleatoria X_0 que se asume F_0 -medible e independiente del movimiento Browniano. La incógnita de esta ecuación es el proceso X_t y los coeficientes $b(t, X)$ y $\sigma(t, X)$ son funciones de $[0, T]$ en \mathbb{R} en \mathbb{R} y se conocen como los *coeficientes de tendencia* (*drift* en inglés o *deriva* en español) y de *difusión* respectivamente. La ecuación diferencial se interpreta como la ecuación integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

En donde la primera es una integral de Riemann mientras que la segunda es una integral estocástica de Itô. Este sistema puede interpretarse como un sistema determinista gobernado por la parte no aleatoria de la ecuación pero perturbado por un ruido aditivo dado por la integral estocástica. A este proceso se le llama *proceso de Itô*.

2.1.5. Lema de Itô

El Lema de Itô establece que si X_t es un proceso de Itô y $f(t, X)$ es una función de clase C^1 en t y de clase C^2 en X entonces el proceso $Y_t = f(t, X_t)$ es también un proceso de Itô y satisface la siguiente expresión

$$dY_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2$$

Donde los subíndices indican derivada y además se cumple las siguientes relaciones de multiplicación:

$$(dt)(dt) = 0$$

$$(dt)(dB_t) = 0$$

$$(dB_t)(dB_t) = dt$$

2.1.6. Funciones Cadlag

Muchos de los procesos encontrados en las finanzas no tienen trayectorias muestrales continuas, por lo que se necesita un espacio que permita las funciones discontinuas, para estos casos existen las *funciones cadlag*.

Una función $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ se conoce como cadlag si es continua por la derecha con límites por la izquierda, esto implica que para cada $t \in [0, T]$ los límites

$$f(t-) = \lim_{s \rightarrow t, s < t} f(s) \quad f(t+) = \lim_{s \rightarrow t, s > t} f(s)$$

existen y además $f(t) = f(t+)$

Por supuesto, cualquier función continua es cadlag pero funciones cadlag podrían tener discontinuidades. Si t es un punto de discontinuidad denotamos

$$\Delta f(t) = f(t) - f(t-)$$

Como el "salto" de f en t .

De manera general, dada una función continua

$$g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

Y constantes $f_i, i = 0 \dots n-1$ y $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$, la siguiente función es cadlag:

$$f(t) = g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} f_i 1_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

La función g puede ser interpretada como el componente continuo de f al cual se le han añadido los "Saltos". Los Saltos de f ocurren en $t_i, i \geq 1$ con $\Delta f(t_i) = f_i - f_{i-1}$. Es necesario mencionar que no todas las funciones cadlag pueden ser descompuesta entre una parte continua y una parte salto.

Por todo lo anterior se puede inferir que las funciones cadlag son usadas para modelar las trayectorias de procesos con saltos.

La función es continua por la derecha para saltos en el momento t_i porque su valor en t_i se considera después de haber ocurrido el salto: $f(t_i) = f(t_i+)$

Dado que t es interpretada como una variable de tiempo, "derecha" significa "después". Si una función continua derecha tiene un salto en el momento t , luego el valor $f(t)$ no es previsible

siguiendo la trayectoria hasta el momento t : la discontinuidad es vista como un evento repentino, si fuera "izquierda" por ejemplo, la trayectoria permitiría predecir el valor en t . En un contexto de modelación financiera, los saltos representan eventos repentinos e imprevisibles, por lo que escoger continuidad-derecha es natural.

2.1.7. Distribución Poisson

Una variable aleatoria N sigue una distribución de Poisson con parámetros λ si:

$$\forall n \in \mathbf{N}, P(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

2.1.8. Proceso de Poisson

Sea $(\tau_i)_{i \geq 1}$ una secuencia de variables aleatorias exponenciales independientes con parámetro

$$\lambda \text{ y } T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$$

El proceso $(N_t, t \geq 0)$ definido por

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{t \geq T_n}$$

Es conocido como un Proceso de Poisson con intensidad λ .

El Proceso de Poisson es entonces definido como un *proceso de conteo*, es decir, cuenta el número de tiempos aleatorios (T_n) que ocurren entre 0 y t , donde $(T_n - T_{n-1})_{n \geq 1}$ es una secuencia de variables exponenciales *i.i.d.* con distribución exponencial de parámetro λ

2.1.9. Proceso de Lévy

Un proceso estocástico cadlag $(X_t)_{t \geq 0}$ en (Ω, F, P) con valores en \mathbf{R}^d tal que $X_0 = 0$ se llama Proceso de Lévy si satisface las siguientes propiedades:

1. Tiene incrementos independientes: para toda sucesión creciente de tiempos t_0, \dots, t_n las variables aleatorias $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.
2. Tiene incrementos estacionarios: la ley de $X_{t+h} - X_t$ no depende de t
3. Es continuo en probabilidad: $\forall \varepsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0$

2.1.10. Proceso Poisson Compuesto

Un proceso Poisson compuesto con intensidad $\lambda > 0$ y distribución de amplitud de salto f es un proceso estocástico X_t definido por:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

Donde las amplitudes del salto Y_i son *i.i.d.* con función de distribución f y N_t es un proceso de Poisson con intensidad λ independiente de $(Y_i)_{i \geq 1}$

2.2. Revisión de la Literatura Empírica

El estudio de los problemas de selección de portafolio en tiempo continuo tiene una larga historia que data desde los estudios realizados por Merton (1969, 1971), en el Modelo de Merton, el problema de optimización del inversionista consiste en determinar cómo escoger de manera óptima su consumo, así como determinar la asignación del portafolio óptimo entre un activo libre de riesgo y un activo riesgoso cuya dinámica sigue un Modelo de Difusión de Saltos con el propósito de maximizar su utilidad esperada en el tiempo. El modelo de difusión de saltos

planteado por Merton consiste en un modelo de difusión puro al cual se le añaden los saltos en intervalos de tiempo aleatorios. Las fuentes de riesgo en este enfoque son todos difusivos por lo que grandes cambios repentinos en los activos riesgosos subyacentes tiene muy poca probabilidad de ocurrencia.

Los primeros estudios estuvieron enfocados a identificar los saltos dentro de una serie financiera, Aït-Sahalia (2004) estudió la posibilidad de desentrañar los ruidos brownianos de los saltos, esto es cierto incluso si, a diferencia de los habituales saltos de Poisson, el proceso de salto exhibe una infinidad de pequeños saltos en cualquier intervalo de tiempo finito, que debe ser más difícil de distinguir del ruido browniano, compuesto a su vez de muchos pequeños movimientos. Se estudió el efecto de la presencia de saltos en la capacidad para identificar el componente de volatilidad y se encontró que, sorprendentemente, los saltos no tuvieron ningún efecto perjudicial. Aún más sorprendente, el resultado no depende de que los saltos son grandes y poco frecuentes, es decir, los saltos de Poisson; esto sigue siendo válido en el caso de saltos de Cauchy, que pueden ser infinitamente pequeños en magnitud e infinitamente frecuente. Por último, se proporcionó una explicación de este fenómeno con base en el hecho de que todos los procesos de salto, a pesar de tener un número infinito de pequeños saltos, tienen características distintivas en relación con el movimiento browniano que en última instancia puede ser recogido por la probabilidad.

Das & Uppal (2004) incorporaron el estudio de los saltos como metodología para la estimación del riesgo sistémico, plantearon que el rendimiento de los activos internacionales está caracterizado por saltos y que estos saltos tienden a ocurrir al mismo tiempo a través de los países dando lugar a un riesgo sistémico, mediante un sistema multivariado de procesos de difusión de saltos donde la llegada de los saltos es simultaneo entre los activos determinaron el portafolio óptimo para un inversionista que toma en cuenta el riesgo sistémico mediante un proceso de difusión de saltos y para otro que ignora el riesgo sistémico mediante un proceso de difusión puro sin salto. Los portafolios óptimos derivados dependen de los parámetros de la dinámica de rendimiento, dichos parámetros fueron determinados usando el Método de Momentos.

Expandiendo lo planteado por Das y Uppal (2004), Aït-Sahalia et al. (2006, 2009) considero modelos brownianos multidimensionales, la investigación se enfocó en determinar el impacto de los saltos en la selección de portafolio siguiendo los estudios de Merton (1971), mediante el estudio del problema de Merton de maximización de la utilidad esperada usando como conjunto de inversión activos riesgosos y un activo libre de riesgo. Analizan el problema de la selección de portafolio de un inversionista que es afectado por riesgos brownianos y por saltos, consideran que los activos están sujetos a saltos aleatorios los cuales podrían afectar uno o más activos o clases de activos, pero cuando ello ocurre, son simultáneos y todos los activos deberían saltar al mismo tiempo. Tales saltos son del tipo "Poisson", en el sentido que la llegada de un salto hoy día no influye en las futuras llegadas de saltos. Consideran que los precios de los activos siguen una dinámica de Lévy Exponencial donde el componente del salto solo es un proceso de salto puro de Lévy el cual no permite identificar los efectos del salto en el mismo activo ni en otros activos. Utilizando funciones de utilidad para los inversionistas del tipo CARA y CRRA derivan el portafolio óptimo en forma cerrada que depende de los parámetros de la dinámica de los activos riesgosos.

Con la misma intención, Cacho - Diaz (2007) usa un modelo de difusión de saltos en la dinámica del retorno de los activos, es decir, modela el rendimiento del activo como un Proceso de Levy Exponencial donde la frecuencia de los saltos es finita y en el cual la intensidad del salto en los activos es simultáneo pero el tamaño del salto es diferente entre cada activo, es decir, los saltos ocurren al mismo tiempo pero con diferente magnitud. Además usa un modelo económico de demanda óptima para encontrar un enlace entre la demanda de los Hedge Funds para activos y la dinámica de los retornos de activos, asume que los Hedge Funds resuelven el problema de selección de portafolio de consumo de Merton, el autor usa los resultados de Aït-Sahalia, Cacho Díaz y Hurd (2006) para derivar la regla de inversión óptima en forma cerrada.

Cvitanic et al. (2008) modela los activos riesgosos mediante procesos de Lévy con saltos puros y momentos elevados, determinan el portafolio óptimo de un inversionista con utilidad CRRA.

Respecto a la correlación en los saltos, algunas investigaciones introducen el concepto de saltos mutuamente exacerbados dentro de la dinámica de los rendimientos de los activos como respuesta al problema de contagio financiero mediante los saltos, en la medida que los modelos de difusión de saltos no permitían analizar la correlación de los saltos entre los activos, Aït-Sahalia & Hurd (2012) analizan el problema del portafolio óptimo de inversión y consumo en modelos de difusión de saltos multidimensionales en el cual los precios de los activos están sujetos a procesos de saltos mutuamente exacerbados, ello permite capturar el tipo de contagio cuando un salto negativo en el precio de un activo genera un incremento en la probabilidad de futuros saltos tanto en el mismo activo como en los otros activos.

Aït-Sahalia et al.(2012) modela el contagio financiero usando procesos de saltos mutuamente exacerbados, su análisis se centró en el contagio financiero que produce el mercado norteamericano sobre otros mercados tales como el mercado europeo, mercado inglés, mercado japonés, mercado latinoamericano; para ello considera que los rendimientos de los índices bursátiles de estas 6 regiones (índices MSCI) siguen un modelo de difusión de saltos Hawkes, su objetivo es identificar el efecto que produce un salto en una región sobre sí misma y el efecto sobre las otras regiones, la estimación fue hecha mediante el Método generalizado de Momentos (GMM) y mediante Simulaciones de Monte Carlo, su investigación concluyó que una salto en EEUU contagia de manera más negativa a las otras regiones y que los saltos en esta regiones tiene poco efecto negativo en EEUU.

Branger et al. (2013) compara dos clases de modelo para estudiar canales adicionales de correlación entre los rendimientos de los activos: modelos de regime switching con saltos y modelos de contagio con saltos. Ambas clases de modelos involucran el uso de cadenas de Markov ocultas que captura los estados buenos y malos de la economía. La característica distintiva del modelo de contagio con salto es que largos rendimientos negativos y transiciones no observables de la economía dentro de los estados malos de la economía pueden ocurrir simultáneamente. Se demostró que solo un modelo de contagio con saltos induce un proceso de auto exacerbación para la intensidad de los saltos.

En relación a la incertidumbre de los parámetros, Aït-Sahalia & Matthys (2014) parten de la idea planteada por Aït-Sahalia et al. (2006, 2009) en relación a incluir los saltos en la dinámica de los rendimientos, mediante procesos de Lévy exponenciales, no obstante, hacen notar que las investigaciones previas en relación a la inclusión de saltos consideran a los parámetros retornos esperados, intensidad del salto y distribución del tamaño del salto como si fueran conocidos, cuando en la práctica estos parámetros no son conocidos y por lo tanto, el inversionista se enfrenta a una cantidad considerable de incertidumbre en el modelo, plantean un modelo de optimización robusto con saltos.

3. Objetivo e Hipótesis de la Investigación

El objetivo de la presente investigación consiste en evaluar el impacto de los saltos en la selección del portafolio óptimo de un agente económico que administra el portafolio de renta variable del Fondo Tipo 3 de una AFP en el Perú cuantificando el efecto de ignorar la presencia de saltos mediante el cálculo del Costo de Equivalente de Certeza (CEQ).

La hipótesis es que los saltos impactan negativamente en la selección del portafolio óptimo y que el Fondo de Pensiones Tipo 3 es un agente económico que presenta cierto grado de aversión al riesgo el cual está asociado a un mayor valor del Costo de Equivalente de Certeza (CEQ).

4. Marco Metodológico

En este capítulo se describirá el marco metodológico de la presente investigación, el cual consiste primero en mostrar la dinámica de los activos e tiempo continuo, en segundo lugar, se presentará la metodología de optimización de portafolios mediante la aplicación del modelo de difusión puro, modelo de difusión de saltos y modelo media varianza, en tercer lugar, se procederá a determinar los parámetros de las ecuaciones diferenciales estocásticas de los modelos descritos, seguidamente, en base a los parámetros obtenidos y a los modelos de optimización se procede a determinar los portafolios óptimos, finalmente, se presenta la metodología de cálculo del costo de equivalente de certeza.

4.1. Dinámica del Rendimiento de los Activos

El inversionista busca maximizar la utilidad esperada de su riqueza terminal mediante la inversión en un conjunto de activos riesgosos y un activo libre de riesgo, es decir, el inversionista escogerá los montos a ser invertidos en cada uno de los " N " activos riesgosos y en el activo libre de riesgo durante el periodo $t \in [0, \infty)$. El universo de inversión disponible consiste de un activo libre de riesgo con precio $S_{0,t}$ y N activos riesgosos con precios $S_t = [S_{1,t}, \dots, S_{N,t}]$. La dinámica del rendimiento de los activos corresponderá a un Modelo de Difusión Puro y a un Modelo de Difusión de Saltos.

El activo libre de riesgo seguirá el proceso de rendimiento dado por:

$$dS_0 = rS_0 dt \quad (1)$$

Donde r es la tasa de interés instantánea del activo libre de riesgo, el cual se asume que es constante en el tiempo.

4.1.1. Modelo de Difusión Puro

Hay N activos riesgosos en la economía, cada uno de ellos sigue un modelo de difusión de puro dado por la siguiente expresión:

$$\frac{dS_n}{S_n} = \mu_n^d dt + \sigma_n^d dZ_n, n = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

Con

$$E\left[\frac{dS_n}{S_n}\right] = \mu_n^d dt \quad (3)$$

$$E\left[\left(\frac{dS_n}{S_n}\right) \times \left(\frac{dS_m}{S_m}\right)\right] = \sigma_{nm}^d dt \quad (4)$$

Donde S_n es el precio del activo n , Z_n es el movimiento browniano, μ_n^d es el drift y σ_n^d es la volatilidad, se ha colocado encima la letra d que caracterizará al modelo de difusión puro.

Se denota por Σ^d a la matriz de covarianzas $N \times N$ de los componentes de difusión donde el componente típico de esta matriz es $\sigma_{nm}^d = \rho_{nm}^d \sigma_n^d \sigma_m^d$ donde ρ_{nm}^d es el coeficiente de correlación entre los shocks brownianos dZ_n y dZ_m .

En términos matriciales, μ^d es el N -vector de los rendimientos esperados, $\Sigma^d = \sigma^d \rho^d (\sigma^d)'$ donde σ^d corresponde a la matriz diagonal de volatilidades y ρ^d es la matriz simétrica de correlaciones.

4.1.2. Modelo de Difusión de Saltos

Hay N activos riesgosos en la economía, los cuales permiten identificar los eventos sistémicos inesperados mediante la introducción del componente del salto al modelo de difusión puro generando el modelo de difusión de salto planteado por Merton (1969) dado por la siguiente expresión:

$$\frac{dS_n}{S_n} = \mu_n dt + \sigma_n dZ_n + (\tilde{J}_n - 1) dQ_n(\lambda_n), n = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

Donde Q_n es un proceso de Poisson con intensidad λ_n y $(\tilde{J}_n - 1)$ es la amplitud del salto aleatorio que determina el porcentaje de cambio en el precio del activo si el evento de Poisson ocurre. Se asume que los shocks de difusión, el salto Poisson y la variable aleatoria J_n son independientes y que:

$$J_n = \ln(\tilde{J}_n) \quad (6)$$

Tiene media j_n y varianza v_n^2 lo cual implica que la distribución del tamaño de los saltos es específico para cada activo. No obstante, en la presente investigación J_n no tendrá una distribución de probabilidad y será una constante para cada activo igual a la media de la distribución de acuerdo a la siguiente expresión $J_n = j_n$

Considerando que el objetivo es modelar los grandes cambios en los precios que ocurran al mismo tiempo entre los activos riesgosos, se tomará un caso particular del modelo de difusión de saltos mencionado, donde la llegada de los saltos ocurre al mismo tiempo a través de todos los activos, es decir, si ocurre un salto, este se genera al mismo tiempo en todos los activos. Se plantea la siguiente expresión para reflejar el salto simultáneo en todos los activos:

$$dQ_n(\lambda_n) = dQ_m(\lambda_m) = dQ(\lambda), \forall n = \{1, \dots, N\}, m = \{1, \dots, N\} \quad (7)$$

Por lo tanto el modelo de difusión de saltos queda definido por

$$\frac{dS_n}{S_n} = \mu_n dt + \sigma_n dZ_n + (\tilde{J}_n - 1) dQ(\lambda), n = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

Con

$$E\left[\frac{dS_n}{S_n}\right] = \mu_n dt + \mu_n^J dt \quad (9)$$

Se aprecia que para en el caso del modelo de difusión de saltos, el rendimiento esperado total tiene dos componentes, el primero proviene del proceso de difusión, μ_n y el otro proviene del proceso de salto, μ_n^J

Asimismo, se asume que el tamaño del salto es perfectamente correlacionado entre los activos, con lo cual la covarianza total entre dS_n y dS_m está dada por la siguiente ecuación:

$$E\left[\left(\frac{dS_n}{S_n}\right) \times \left(\frac{dS_m}{S_m}\right)\right] = \sigma_{nm} dt + \sigma_{nm}^J dt \quad (10)$$

Se aprecia que la covarianza proviene de dos fuentes, el primero es la covarianza entre los componentes de difusión de los rendimientos, σ_{nm} y el segundo es la covarianza entre los componentes del salto σ_{nm}^J

Del mismo modo a lo planteado por Das & Uppal (2003) y Penagos & Rubio (2012), en la presente investigación, se procederá a comparar el portafolio de un inversionista, en este caso del Fondo 3 de una AFP, que modela el rendimiento de los activos utilizando un modelo de difusión puro, contra un inversionista que toma en cuenta el riesgo sistémico y por tanto modela el rendimiento de los activos usando un modelo de difusión de saltos, pero busca que los primeros dos momentos de rendimiento sean iguales en ambos modelo. Ello implica que los parámetros estimados del modelo de difusión puro deberán ser de tal manera que los primeros dos momentos del modelo de difusión de saltos definidos en las ecuaciones (9) y (10) sean iguales a los dos primeros momentos del modelo de difusión puro definidos en las ecuaciones (3) y (4).

Por lo tanto, tomando como base las ecuaciones (3), (4), (9) y (10), los parámetros estimados deberán satisfacer las siguientes expresiones:

$$\mu_n^d = \mu_n + \mu_n^J \quad (11)$$

$$\sigma_{nm}^d = \sigma_{nm} + \sigma_{nm}^J \quad (12)$$

Esta relación implica que un inversionista que modela el rendimiento de los activos del portafolio como un modelo de difusión de saltos toma el rendimiento esperado total del modelo de difusión puro, μ_n^d y la covarianza del modelo de difusión puro σ_{nm}^d y sustrae de ellos el rendimiento del componente del salto μ_n^J y la covarianza del componente del salto σ_{nm}^J respectivamente, entendiéndose que luego serán incorporados nuevamente al modelo de difusión de salto a través del componente del salto $(\tilde{J}_n - 1)dQ(\lambda)$, con ello obtiene solamente el rendimiento μ_n y covarianza σ_{nm} propios del modelo de difusión de saltos ya que contrarresta la contribución del salto.

4.2. Optimización de Portafolio

En este punto se formulará y resolverá el problema de optimización de portafolio cuando los rendimientos de los activos son modelados mediante el caso particular del Modelo de Difusión de Saltos planteado por Merton (1969) descrito en el acápite anterior, el Modelo de Difusión Puro como caso particular al modelo de difusión de saltos el cual no considera el componente del salto y el Modelo Media-Varianza planteado por Markowitz (1952).

Dado que los mercados son incompletos en presencia de saltos con tamaños aleatorios, se determinará los pesos del portafolio óptimo utilizando técnicas de Programación Dinámica Estocástica y Control Óptimo Estocástico en lugar del Enfoque Martingala de Inversión Óptima.

Se considerará como inversionista representativo al Fondo 3 – Renta Variable de una AFP el cual maximiza la utilidad esperada de la riqueza terminal, W_T dada la siguiente función de Utilidad:

$$U(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (13)$$

Donde $\gamma > 0$ es el coeficiente constante de aversión al riesgo relativo.

Se define $W_{0,t}$ como el porcentaje de la riqueza (o peso en el portafolio) invertido en el activo libre de riesgo en el momento t .

Por otro lado $w_t = [w_{1,t}, \dots, w_{N,t}]$ denota el vector de pesos en el portafolio de cada uno de los N activos riesgosos, asumiendo además que es un proceso cáglád adaptado dado que los pesos

en el portafolio no pueden anticipar los saltos.

Los pesos en el portafolio óptimo satisfacen la siguiente expresión:

$$w_{0,t} + \sum_{i=1}^N w_{i,t} = 1 \quad (14)$$

4.2.1 Modelo de Difusión Puro sin Restricciones

En primer lugar, se procederá a detallar el problema de optimización para obtener los pesos del portafolio óptimo usando el modelo de difusión puro.

El precio del activo libre de riesgo seguirá el proceso definido en la expresión (1)

$$dS_0 = rS_0 dt$$

El proceso estocástico para el precio de cada activo o índice que sigue un modelo de difusión puro está definido por la expresión (2)

$$\frac{dS_n}{S_n} = \mu_n^d dt + \sigma_n^d dZ_n$$

El problema de maximización de un inversionista en el tiempo t se define con la siguiente expresión:

$$V(W_t, t) = \max_{\{\omega\}} E \left(\frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right) \quad (15)$$

Sujeto a la dinámica de la riqueza definida por la siguiente expresión

$$\frac{dW_t}{W_t} = (\omega' R^d + r) dt + \omega' \sigma^d dZ_t \quad (16)$$

Donde W es el vector $N \times 1$ de pesos del portafolio para los N activos riesgosos, R^d es el N -vector de excesos de retornos definidos por las siguientes expresiones:

$$R^d = \{ \mu_1^d - r, \dots, \mu_N^d - r \} \quad (17)$$

Usando el Lema de Itô para procesos de difusión de saltos, la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman queda definida por las siguientes expresiones:

$$0 = \max_{\{\omega\}} \left\{ \frac{\partial V(W_t, t)}{\partial t} + (\omega' R^d + r) W_t \frac{\partial V(W_t, t)}{\partial W} + \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega W_t^2 \frac{\partial^2 V(W_t, t)}{\partial W^2} \right\} \quad (18)$$

Para resolver la expresión (18), la Función de Valor de la Utilidad toma la siguiente forma:

$$V(W_t, t) = F(t) \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (19)$$

Reemplazando esta solución en la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman planteada en la expresión (18) se obtiene

$$0 = \max_{\{\omega\}} \left\{ \frac{1}{F(t)} \frac{dF(t)}{dt} + (1-\gamma)(\omega' R^d + r) - \gamma(1-\gamma) \frac{1}{2} \omega' \Sigma^d \omega \right\} \quad (20)$$

Derivando respecto a W se obtiene los pesos del portafolio óptimo del modelo de difusión puro definidos en la siguiente expresión:

$$\omega_{\text{óptimo}}^d = \frac{1}{\gamma} (\Sigma^d)^{-1} R^d \quad (21)$$

4.2.2. Modelo de Difusión de Saltos sin Restricciones

A continuación se procederá a detallar el problema de optimización para obtener los pesos del portafolio óptimo usando el modelo de difusión puro, ello implica que el proceso incluye al componente de Salto.

Al igual que en el caso anterior, el precio del activo libre de riesgo seguirá el proceso definido en la expresión (1)

$$dS_0 = rS_0 dt$$

Por otro lado, el proceso estocástico para el precio de cada activo o índice que sigue un modelo de difusión de saltos está definido por la expresión (8)

$$\frac{dS_n}{S_n} = \mu_n dt + \sigma_n dZ_n + (\tilde{J}_n - 1) dQ(\lambda) \quad (22)$$

Con los valores de μ_n y σ_{nm} definidos en las expresiones (11) y (12).

Por lo tanto, el problema de maximización de un inversionista en el tiempo t se define con la siguiente expresión:

$$V(W_t, t) = \max_{\{\omega\}} E \left(\frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right) \quad (23)$$

Sujeto a la dinámica de la riqueza definida por la siguiente expresión

$$\frac{dW_t}{W_t} = (\omega' R + r) dt + \omega' \sigma dZ_t + \omega' J dQ(\lambda) \quad (24)$$

Con

$$W_0 = 1$$

Donde w es el vector $N \times 1$ de pesos del portafolio para los N activos riesgosos, R es el N -vector de excesos de retornos definidos por las siguientes expresiones:

$$R = \{\mu_1 - r, \dots, \mu_N - r\} \quad (25)$$

Asimismo, se define a J como el vector de amplitudes de saltos aleatorios para los activos riesgosos, el cual caracterizado con la siguiente expresión:

$$J = (\tilde{J}_1 - 1, \tilde{J}_2 - 1, \dots, \tilde{J}_N - 1) \quad (26)$$

Usando el Lema de Itô para procesos de difusión de saltos, la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman queda definida por las siguientes expresiones:

$$0 = \max_{\{\omega\}} \left\{ \frac{\partial V(W_t, t)}{\partial t} + (\omega' R + r) W_t \frac{\partial V(W_t, t)}{\partial W} + \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega W_t^2 \frac{\partial^2 V(W_t, t)}{\partial W^2} + \lambda E[V(W_t + W_t \omega' J, t) - V(W_t, t)] \right\} \quad (27)$$

Para resolver la expresión (18), la Función de Valor de la Utilidad toma la siguiente forma:

$$V(W_t, t) = F(t) \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (28)$$

Reemplazando esta solución en la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman planteada en la expresión (27) se obtiene:

$$0 = \max_{\{\omega\}} \left\{ \frac{1}{F(t)} \frac{dF(t)}{dt} + (1-\gamma)(\omega'R + r) - \gamma(1-\gamma) \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega + \lambda E \left[(1 + \omega' J)^{1-\gamma} - 1 \right] \right\} \quad (29)$$

Derivando respecto a w se obtiene los pesos del portafolio óptimo del modelo de difusión de saltos definidos en la siguiente expresión:

$$0 = R - \gamma \Sigma \omega_{\text{óptimo}} + \lambda E \left[J \left(1 + \omega'_{\text{óptimo}} J \right)^{-\gamma} \right] \quad (30)$$

Si se reemplaza la expresión (28) en la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman y se evalúa para $\omega_{\text{óptimo}}$ se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{F(t)} \frac{dF(t)}{dt} = -k \quad (31)$$

Donde:

$$k = (1-\gamma)(\omega'_{\text{óptimo}} R + r) - \gamma(1-\gamma) \frac{1}{2} \omega'_{\text{óptimo}} \Sigma \omega_{\text{óptimo}} + \lambda E \left[\left(1 + \omega'_{\text{óptimo}} J \right)^{1-\gamma} - 1 \right]$$

Utilizando la condición frontera

$$F(T) = 1 \quad (32)$$

Se obtiene la siguiente expresión:

$$F(\omega, t) = e^{k(T-t)} \quad (33)$$

Por la tanto, la Función de Valor de la Utilidad está definida por la siguiente expresión:

$$V(W_t, t) = e^{k(T-t)} \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (34)$$

4.2.3. Modelo de Difusión de Saltos con Restricciones

A continuación se detallará el procedimiento de resolución del problema de selección de portafolio en presencia de restricciones. Las restricciones que se considerarán en la presente investigación serán la prohibición de ventas en corto¹ y de apalancamiento del portafolio².

1. Restricción de Venta en Corto no permite la posición en corto en ningún activo en el portafolio

$$\omega \geq 0, \forall t \quad (35)$$

2. Restricción de Préstamo o Apalancamiento impuesta para evitar el apalancamiento del portafolio., lo cual no permite un préstamo en el activo libre de riesgo.

$$\omega'_t 1 \leq 1, \forall t \quad (36)$$

¹ Short Selling

² Borrowing

Se añade estas restricciones en la función objetivo (29) obteniéndose la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \underset{\omega}{Máx} \left\{ (1 - \gamma) \left(\omega' R + r - \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega \right) + \frac{1}{2} (1 - \gamma)^2 \omega' \Sigma \omega + \lambda E \left[(1 + \omega' J)^{(1-\gamma)} - 1 \right] \right. \\ \left. + (1 - \omega' 1) \phi + \omega' \xi \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

Donde $\{\phi, \xi\}$ son multiplicadores de Lagrange con las siguientes condiciones:

$$1 - \omega' 1 \geq 0, \phi = 0 \quad \text{ó} \quad 1 - \omega' 1 = 0, \phi \geq 0 \quad (38)$$

$$\omega_i \geq 0, \xi_i = 0 \quad \text{ó} \quad \omega_i = 0, \xi_i \geq 0, \quad \forall i = \{1, \dots, N\} \quad (39)$$

Derivando respecto a w se obtiene los pesos del portafolio óptimo del modelo de difusión de saltos con restricciones definidos en la siguiente expresión:

$$0 = R - \gamma \Sigma \omega_{\text{óptimo}} + \lambda E \left[J \left(1 + \omega'_{\text{óptimo}} J \right)^{-\gamma} \right] - 1\phi + \xi \quad (40)$$

Sujeto a las condiciones definidas en las ecuaciones (38) y (39)

Por otro lado, para obtener el portafolio óptimo del modelo de difusión puro con restricciones, se reemplaza $\lambda = 0$ en la ecuación anterior, obteniéndose la siguiente expresión:

$$0 = R - \gamma \Sigma \omega_{\text{óptimo}}^d - 1\phi + \xi \quad (41)$$

Sujeto a las condiciones definidas en las ecuaciones (38) y (39)

4.2.4. Modelo Media-Varianza

Considere N activos riesgosos donde la serie de rendimiento de cada activo riesgoso es denotado por r_i , la varianza del rendimiento de cada activo es σ_i^2 y la matriz de covarianza es σ_{ij}

Considere que el inversionista solo puede asignar su riqueza entre los N activos riesgosos, asimismo, en ausencia de un activo libre de riesgo, el problema de media-varianza consiste en escoger el vector de pesos ω_i que minimice la varianza del rendimiento del portafolio σ_p^2 sujeto a un rendimiento esperado del portafolio igual a un rendimiento objetivo constante r

El problema Media-Varianza queda definido mediante las siguientes expresiones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \\ \text{Sujeto a} \quad \sum_{i=1}^N \omega_i E(r_i) = r \\ \quad \quad \quad \sum_{i=1}^N \omega_i = 1 \end{array} \right. \quad (42)$$

La primera restricción fija el rendimiento esperado del portafolio hacia su objetivo, mientras que la segunda restricción asegura que toda la riqueza sea invertida en los activos riesgosos.

Con el objetivo de comparar el modelo media varianza con los modelos de difusión puro y de difusión de saltos, se incorporará la aversión al riesgo en el problema de optimización media-varianza según lo planteado por Campbell & Viceira (2002).

Sea R_{t+1} el vector de los rendimientos riesgosos con N elementos, el cual tiene el vector de rendimiento esperado $E_t R_{t+1}$ y una matriz de varianza – covarianza Σ_t , asimismo, ω_t es el vector de pesos de los activos riesgosos dentro del portafolio.

El problema de maximización queda definido mediante las siguientes expresiones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar } E(R_p) - \frac{\gamma}{2} \text{Var}(R_p) \\ \text{Sujeto a } \sum_{i=1}^N \omega_i = 1 \end{array} \right. \quad (43)$$

Reemplazando las expresiones del rendimiento esperado y varianza del portafolio se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar } \omega_t'(E_t R_{t+1}) - \frac{\gamma}{2} \omega_t' \Sigma_t \omega_t \\ \text{Sujeto a } \sum_{i=1}^N \omega_i = 1 \end{array} \right. \quad (44)$$

4.3. Estimación de los Parámetros de los Modelos

Se comenzará el análisis con el modelo de difusión puro definido en (2). Los parámetros que serán estimados son $\{\mu^d, \Sigma^d\}$ donde μ^d es el N -vector de rendimientos en exceso y Σ^d es la matriz de covarianzas $N \times N$ de los componentes de difusión. Los momentos no condicionales del modelo de difusión puro están definidos mediante las expresiones (3) y (4):

$$E\left[\frac{dS_n}{S_n}\right] = \mu_n^d dt$$

$$E\left[\left(\frac{dS_n}{S_n}\right) \times \left(\frac{dS_m}{S_m}\right)\right] = \sigma_{nm}^d dt$$

Esto significa que los parámetros $\{\mu^d, \Sigma^d\} = \{\mu_n, \sigma_{nm}\}$ pueden ser estimados directamente de las medias y covarianzas de las series de datos.

Por otro lado, para derivar los cuatro momentos no condicionales del modelo de difusión de saltos $\{\mu_n, \sigma_{nm}, \lambda, j_n\}$ definidos en (8) se utilizará el procedimiento planteado por Das y Uppal (2004) y Chacko & Viceira (2003).

Se definen los procesos (2) y (8) en términos logarítmicos utilizando la siguiente transformación:

$$X_n = Ln(S_n) \quad (45)$$

Con ello, el modelo de difusión puro en (2) definido mediante la siguiente expresión:

$$\frac{dS_n}{S_n} = \mu_n^d dt + \sigma_n^d dZ_n, n = 1, 2, \dots, N$$

Se convierte en la siguiente expresión:

$$dX_n = \alpha_n^d dt + \sigma_n^d dZ_n \quad (46)$$

Donde

$$\alpha_n^d = \mu_n^d - \frac{1}{2}(\sigma_n^d)^2 \quad (47)$$

Asimismo, el modelo de difusión de saltos en (8) definido mediante la siguiente expresión:

$$\frac{dS_n}{S_n} = \mu_n dt + \sigma_n dZ_n + (\tilde{J}_n - 1) dQ(\lambda), n = 1, 2, \dots, N$$

Puede ser escrito según la siguiente expresión:

$$dX_n = \alpha_n dt + \sigma_n dZ_n + J_n dQ \quad (48)$$

Donde

$$\alpha_n = \mu_n - \frac{1}{2}(\sigma_n)^2 \quad (49)$$

Los momentos del modelo de difusión de saltos son calculados usando la función característica la cual se deriva del teorema de Kolmogorov.

La función característica de los rendimientos de activos que siguen un modelo de difusión de saltos se define mediante la siguiente expresión:

$$F(X_1, \dots, X_N, \tau, s_1, \dots, s_N) = \exp \left[i \sum_{n=1}^N s_n X_n + C(\tau) \right] \quad (50)$$

Donde

$$C(\tau) = \left[-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sigma_n^2 s_n^2 - \sum_{n \neq m} \rho_{nm} \sigma_n \sigma_m s_n s_m + \sum_{n=1}^N \left(\mu_n - \frac{1}{2} \sigma_n^2 \right) i s_n + \lambda M \right] \tau$$

$$M = \exp \left[i \sum_{n=1}^N j_n s_n \right] - 1$$

Y s_n son los argumentos de la función que representan a cada activo.

Para obtener el k -ésimo momento no central para el activo n se utiliza la siguiente expresión:

$$E[X_n^k] = \frac{1}{i^k} \left(\frac{\partial^k F}{\partial s_n^k} \right)_{s=0} \quad (51)$$

A partir del cual se puede obtener los momentos centrales. Los momentos cruzados como las covarianzas y coasimetrías también se pueden obtener de la función característica tomando derivadas parciales con respecto a ambos activos en el momento cruzado.

Los momentos de los rendimientos de los activos que siguen un modelo de difusión de saltos se definen mediante las siguientes expresiones, para $n, m = \{1, \dots, N\}$ ³:

$$\text{Media} = \left(\mu_n - \frac{1}{2} \sigma_n^2 + j_n \lambda \right) t \quad (52)$$

$$\text{Covarianza} = [\sigma_{nm} + (j_n j_m) \lambda] t \quad (53)$$

$$\text{CoAsimetría}_{nm} = \frac{(j_n^2 j_m) \lambda t}{\sigma_n^2 \sigma_m} \quad (54)$$

$$\text{Exceso Curtosis} = \frac{j_n^4 \lambda t}{\sigma_n^4} \quad (55)$$

Comparando la media y la covarianza para el modelo de difusión de saltos con el modelo de difusión puro, donde $\lambda = 0$ se obtiene las siguientes expresiones en línea con lo señalado en las expresiones (11) y (12):

$$\mu_n^J = j_n \lambda \quad (56)$$

$$\sigma_{nm}^J = j_n j_m \lambda \quad (57)$$

Por lo tanto, los momentos de difusión del modelo de difusión de saltos son obtenidos utilizando las expresiones (11) y (12) y quedan definidas mediante las siguientes expresiones:

$$\mu_n = \mu_n^d - j_n \lambda \quad (58)$$

$$\sigma_{nm} = \sigma_{nm}^d - j_n j_m \lambda \quad (59)$$

Con ello se garantiza que los rendimientos y las covarianzas del modelo de difusión puro y del modelo de difusión de saltos serán iguales.

Para las condiciones de momentos definidos en las expresiones (52) al (55) los parámetros a ser estimados serán $\{\mu_n, \sigma_{nm}, \lambda, j_n\}$. Para el universo de N activos se estimará N amplitudes de saltos j_n y una intensidad del salto de Poisson λ para igualar las expresiones de momento de N excesos de curtosis y N^2 coasimetrías definidas en (54) y (55). Se escogerá estos $N + 1$ parámetros tal que minimicen la desviación estándar de las $N^2 + N$ condiciones de momentos de los excesos de curtosis y coasimetrías de sus valores obtenidos de la data.

³ Para el tratamiento de los datos de los rendimientos de los activos, la Coasimetría se define mediante la siguiente expresión:

$$\text{CoAsimetría}_{nm} = \frac{E[(r_n - E(r_n))^2 (r_m - E(r_m))]}{\sigma_n^2 \sigma_m} = \frac{(j_n^2 j_m) \lambda t}{\sigma_n^2 \sigma_m}$$

El Exceso de Curtosis se define mediante la siguiente expresión:

$$\text{Exceso Curtosis} = \frac{E[(r_n - E(r_n))^4]}{\sigma_n^4} - 3 = \frac{j_n^4 \lambda t}{\sigma_n^4}$$

4.4. Equivalente de Certeza - Costo de Ignorar los Saltos

Para analizar el efecto de ignorar la presencia de saltos en los rendimientos de los activos y en la selección de portafolio se determinará el Costo de Equivalente de Certeza, en inglés, *Certainty Equivalent Cost*, a partir de ahora CEQ.

Con el objetivo de cuantificar el costo de ignorar los saltos estocásticos se calculará la riqueza adicional necesaria para incrementar la utilidad esperada de la riqueza terminal bajo la estrategia subóptima hasta alcanzar la utilidad esperada de la riqueza terminal bajo la estrategia óptima. Se denota por CEQ a la riqueza adicional o monto de dinero adicional que hace que la utilidad esperada bajo la estrategia ω_{optimo}^d , portafolio óptimo que ignora el riesgo de los saltos, sea igual a la utilidad esperada bajo la estrategia ω_{optimo} , portafolio óptimo que considera la presencia de los saltos en el rendimiento de los activos.

En otras palabras, el CEQ es el monto marginal de dinero que iguala la utilidad esperada del modelo de difusión puro con la utilidad esperada del modelo de difusión de saltos.

Se denota:

$$V(W_t, t; \omega_i) \tag{60}$$

A la Función de Valor de la Utilidad bajo la estrategia de portafolio óptimo ω_i , el cual puede ser:

$$\omega_i = \{ \omega_{\text{optimo}}, \omega_{\text{optimo}}^d \} \tag{61}$$

Donde ω_{optimo}^d es el portafolio óptimo bajo el modelo de difusión puro y ω_{optimo} es el portafolio óptimo bajo el modelo de difusión de saltos.

La riqueza de compensación CEQ se calcula igualando las siguientes expresiones:

$$V((1 + CEQ)W_t, t; \omega_{\text{optimo}}^d) = V(W_t, t; \omega_{\text{optimo}}) \tag{62}$$

Luego, utilizando las expresiones (28) y (62) se obtiene:

$$F(t, \omega_{\text{optimo}}^d) \left[\left(\frac{1}{1-\gamma} \right) ((1 + CEQ)W_t)^{1-\gamma} \right] = F(t, \omega_{\text{optimo}}) \left[\left(\frac{1}{1-\gamma} \right) W_t^{1-\gamma} \right] \tag{63}$$

Lo cual implica que

$$CEQ = \left[\frac{F(t, \omega_{\text{optimo}})}{F(t, \omega_{\text{optimo}}^d)} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1 \tag{64}$$

Donde:

$$F(t, \omega_i) = e^{((1-\gamma)[\omega_i'R+r] + \frac{1}{2}(1-\gamma)(-\gamma)\omega_i'\Sigma\omega_i + \lambda E[(1+\omega_i'J)^{(1-\gamma)} - 1]) (T-t)} \tag{65}$$

5. Análisis Empírico

5.1. Descripción de la Data

La presente investigación utilizará activos proxy para cada clase de activo, para ello, se tendrá que reducir el universo de instrumentos elegibles a cuatro clases de activos representativos, las cuales son renta variable local, renta variable extranjera -- mercados desarrollados, renta variable extranjera -- mercados emergentes y renta variable extranjera -- mercados frontera.

Los activos proxy seleccionados se muestran en la Tabla 5.1

ACTIVO	CATEGORÍA	INDICADORES REPRESENTATIVOS	FUENTE
1	Renta Variable Local	MSCI All Perú Capped Index (MSCI PERU ALL CAP Index)	MSCI, Bloomberg
2	Renta Variable Extranjera - Mercados Desarrollados	MSCI World Developed Markets Investable Market Index (MSCI WORLD IMI Index)	MSCI, Bloomberg
3	Renta Variable Extranjera - Mercados Emergentes	MSCI Emerging Markets Investable Market Index (MSCI EM IMI Index)	MSCI, Bloomberg
4	Renta Variable Extranjera - Mercados Frontera	MSCI Frontier Markets Index (MSCI FM Index)	MSCI, Bloomberg

Tabla 5.1. Activos Proxy seleccionados

Respecto a los indicadores representativos de cada categoría, en la Tabla 5.2 se muestra el detalle de los índices MSCI seleccionados.

La Tabla 5.3 muestra la estadística descriptiva del rendimiento de los activos, media, desviación estándar, varianza, curtosis coeficiente de asimetría, mínimo y máximo rendimiento diario. Como se puede apreciar, los rendimientos de los activos parecen ser no gaussianos en la medida que presentan exceso de curtosis elevado y mayor que cero, comportamiento posiblemente causado por los Saltos; coeficiente de asimetría negativo y eventos extremos.

La Figura 5.1 muestra la evolución del valor de los índices utilizados como proxy del universo de activos disponibles de inversión para el periodo de análisis. Se puede apreciar que durante el periodo de la crisis del 2008 -- 2009, los precios de los 4 índices se redujeron drásticamente, por ejemplo en ese periodo, el MSCI PERU ALL Index disminuyó desde un precio de 2435 el 17.04.2008 hasta un precio de 800.9 el 24.10.2008, es decir una reducción de aproximadamente 67% en 6 meses; el MSCI WORLD IMI Index disminuyó desde un precio de 951 el 19.05.2008 hasta un precio de 510 el 24.10.2008, es decir una reducción de aproximadamente 46% en 5 meses; el MSCI EM IMI Index disminuyó desde un precio de 1204 el 15.05.2008 hasta un precio de 442 el 24.10.2008, es decir una reducción de aproximadamente 64% en 5 meses; el MSCI FM Index disminuyó desde un precio de 1068 el 11.06.2008 hasta un precio de 349 el 03.03.2009, es decir una reducción de aproximadamente 68% en 9 meses.

La Figura 5.2 muestra la evolución del rendimiento de los índices utilizados como proxy del universo de activos disponibles de inversión para el periodo de análisis, se aprecia que las mayores variaciones en los rendimientos en los cuatro activos se llevaron a cabo durante el periodo de la crisis del año 2008.

Índice	Nombre	Descripción	Países
MSCI PERU ALL CAP	MSCI All Perú Capped Index	Es un índice diseñado para representar el rendimiento del universo de acciones de Perú. El Universo de acciones peruana incluye instrumentos que están listados en Perú junto con compañías no peruanas pero que están listadas en Perú y presentan la mayoría de sus operaciones en Perú.	Perú
MSCI WORLD IMI	MSCI WORLD Developed Markets Investable Market Index	Es un índice de renta variable de capitalización de Mercado ajustado por libre flotación diseñado para medir el rendimiento de mercados desarrollados. El índice representa 23 países de mercados desarrollados cubriendo el segmento de grande, mediana y pequeña capitalización, el índice cubre aproximadamente 99% del set de oportunidad global invertible	Estados Unidos, Reino Unido, Australia, Austria, Bélgica, Canadá, Dinamarca, Finlandia, Francia, Alemania, Hong Kong, Irlanda, Israel, Italia, Japón, Holanda. Nueva Zelanda, Noruega, Portugal, Singapur, España, Suecia, Suiza.
MSCI EM IMI	MSCI Emerging Markets Investable Market Index	Es un índice de renta variable de capitalización de Mercado ajustado por libre flotación diseñado para medir el rendimiento de mercados emergentes. El índice representa 22 países de mercados emergentes cubriendo el segmento de grande, mediana y pequeña capitalización, el índice cubre aproximadamente 99% del set de oportunidad global invertible.	Brasil, Chile, China, Colombia, República Checa, Egipto, Grecia, Hungría, India, Indonesia, Korea, Malasia, México, Perú, Filipinas, Polonia, Rusia, Qatar, Sudáfrica, Taiwan, Tailandia, Turquía, Emiratos Árabes Unidos
MSCI FM	MSCI Frontier Markets Index	Es un índice de renta variable de capitalización de Mercado ajustado por libre flotación diseñado para medir el rendimiento de mercados frontera. El índice representa 24 países de mercados frontera cubriendo el segmento de grande y mediana capitalización, el índice cubre aproximadamente 85% del set de oportunidad global invertible.	Argentina, Bahrein, Bangladesh, Bulgaria, Croacia, Estonia, Jordania, Kenia, Kuwait, Líbano, Lituania, Nigeria, Rumania, Serbia, Eslovenia, Sri Lanka, Tunez, Ucrania, Vietnam.

Tabla 5.2. Detalle de los Índices MSCI

	MSCI PERU ALL	MSCI WORLD IMI	MSCI EM IMI	MSCI FM
Media	0.0427%	0.0140%	0.0159%	-0.0090%
Desviación estándar	1.8585%	1.1635%	1.3821%	0.8568%
Varianza	0.0345%	0.0135%	0.0191%	0.0073%
Exceso de Curtosis	8.327	7.862	7.551	16.569
Coefficiente de asimetría	-0.58308	-0.47211	-0.54183	-1.94112
Rango	27.888%	16.244%	19.492%	13.581%
Mínimo	-15.532%	-7.355%	-9.789%	-9.143%
Máximo	12.356%	8.889%	9.703%	4.437%

Tabla 5.3. Estadística Descriptiva de los Rendimientos de los activos

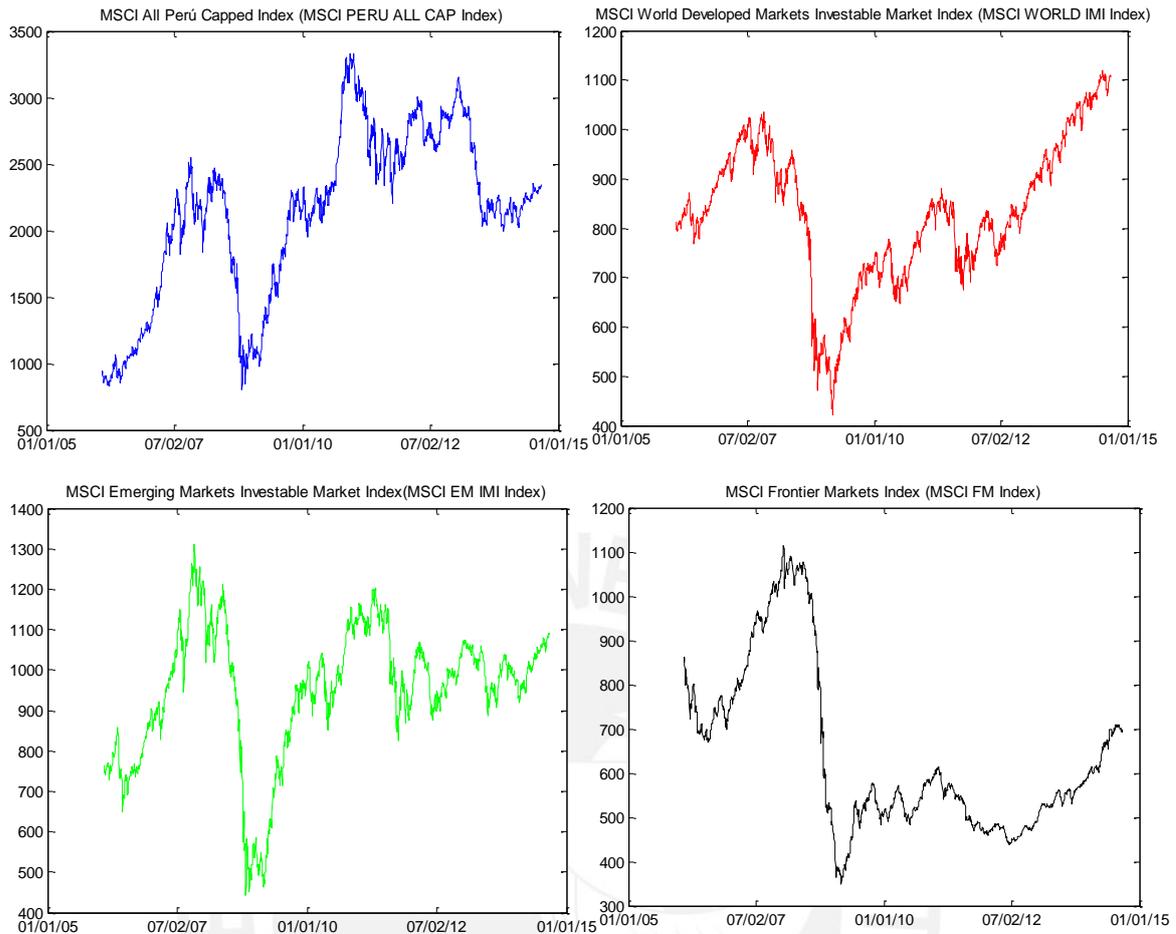


Figura 5.1. Evolución del Valor de los Índices usados como Proxy

Por otro lado, la Tabla 5.4 muestra la matriz de varianzas y covarianzas, mientras que la Tabla 5.5 muestra la matriz de correlaciones. Se aprecia que el índice de las acciones peruanas, MSCI PERU ALL Index, tiene mayor correlación con el índice de acciones de países desarrollados, MSCI WORLD IMI, en comparación con los otros índices. Cabe señalar que estas matrices presentan valores en tiempo discreto por lo que solo serán usadas en el Modelo de Media Varianza de Markowitz y no en los modelos de optimización en tiempo continuo que se plantean en la presente tesis.

	MSCI PERU ALL	MSCI WORLD IMI	MSCI EM IMI	MSCI FM
MSCI PERU ALL	0.000345			
MSCI WORLD IMI	0.000157	0.000135		
MSCI EM IMI	0.000152	0.000118	0.000191	
MSCI FM	0.000033	0.000029	0.000051	0.000073

Tabla 5.4. Matriz de Varianzas y Covarianzas

	MSCI PERU ALL	MSCI WORLD IMI	MSCI EM IMI	MSCI FM
MSCI PERU ALL	1.0000			
MSCI WORLD IMI	0.7274	1.0000		
MSCI EM IMI	0.5918	0.7364	1.0000	
MSCI FM	0.2060	0.2910	0.4283	1.0000

Tabla 5.5. Matriz de Correlaciones

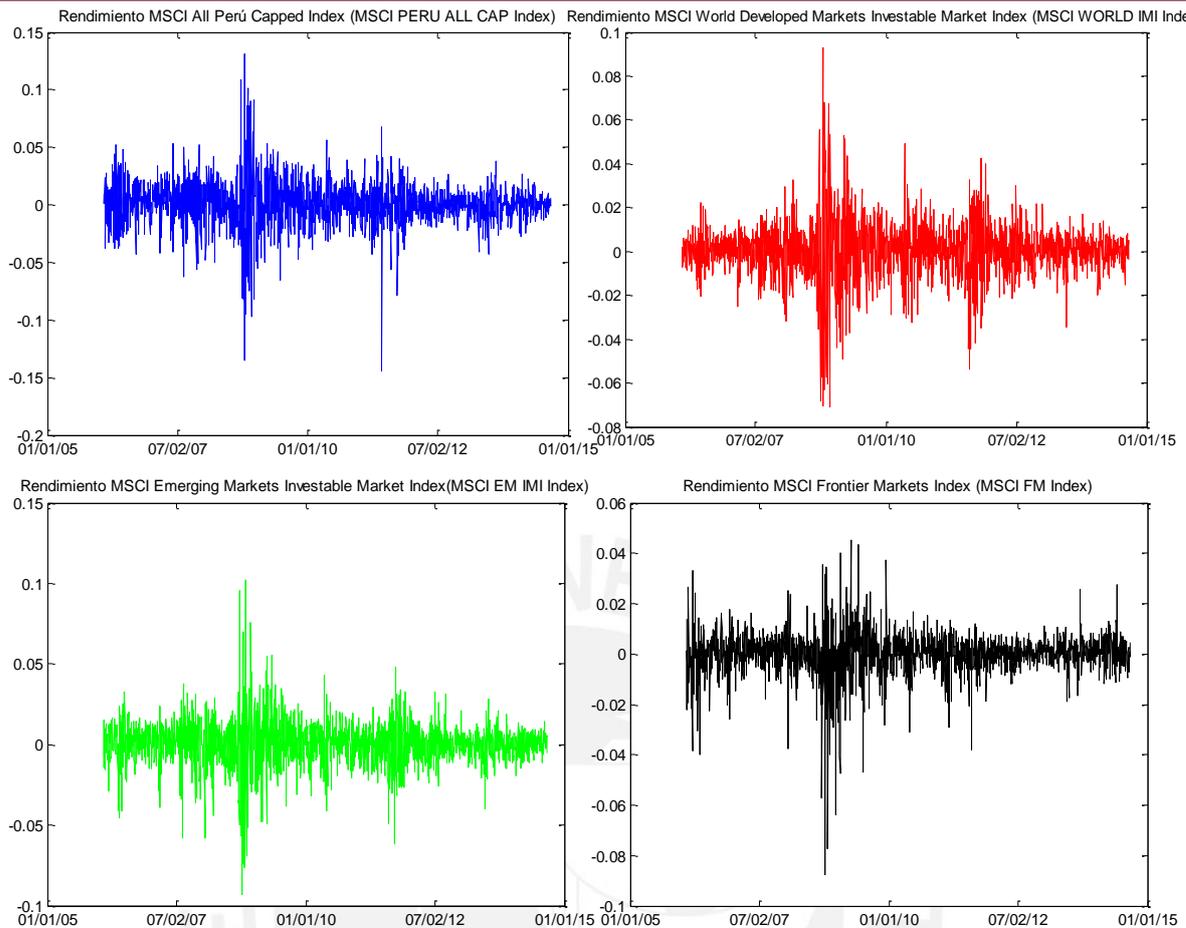


Figura 5.2. Evolución del Rendimiento de los Índices usados como Proxy

La Figura 5.3 muestra el gráfico Q-Q de los rendimientos diarios de los cuatro activos contra una distribución normal estándar, se aprecia que la distribución normal no hace un buen trabajo ajustando las colas anchas de la data empírica de los cuatro activos.

La Figura 5.4 muestra la Distribución del Rendimiento de los Activos comparado con una Distribución Normal, se aprecia que la distribución normal no se ajusta a la distribución de los rendimientos de los 4 activos en la medida que no captura el pico central ni las colas anchas.

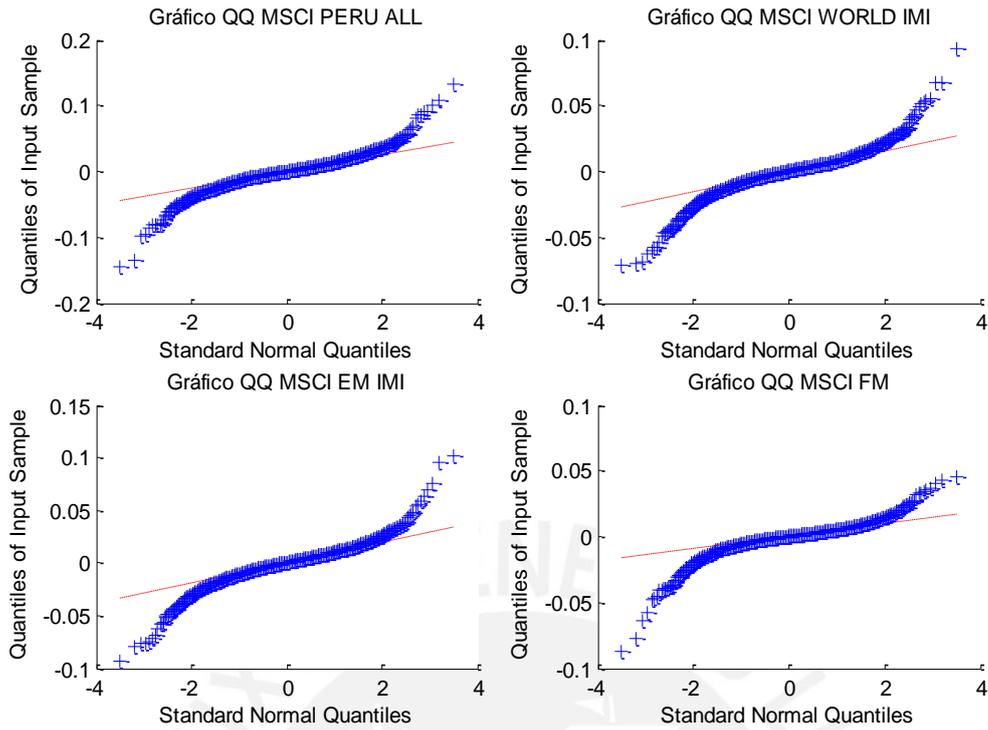


Figura 5.3. Gráfico Q-Q del Rendimiento de los Activos

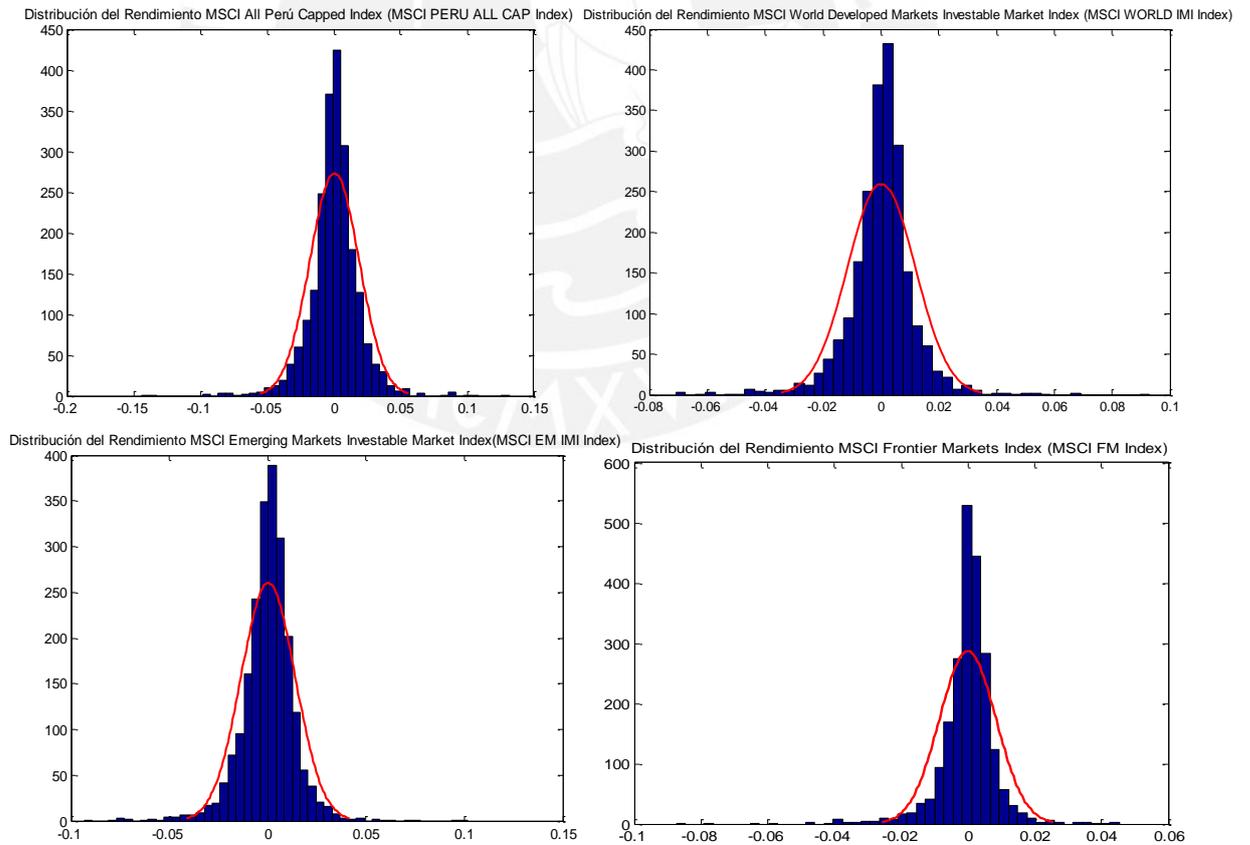


Figura 5.4. Distribución de Rendimiento de los Activos vs Distribución Normal

5.2. Parámetros Estimados

Respecto al Modelo de Difusión Puro, la Tabla 5.6 contiene los parámetros $\{\mu_n, \sigma_{nm}\}$ obtenidos directamente de la data según lo mencionado en el capítulo anterior. Se aprecia que el MSCI Perú All Capped Index presenta un rendimiento igual a 0.042% diario, el cual es mayor respecto a los otros activos, ello ocurrió debido a que durante la crisis financiera de 2008 el Perú fue afectado en menor medida respecto a los otros países de la región, se aprecia que en el caso de los países de mercado desarrollados, el MSCI World Developed Markets Index presenta un menor rendimiento igual a 0.014% diario; por otro lado el MSCI Emerging Market Index presenta un rendimiento igual a 0.016%, mientras que el MSCI Frontier Market Index presenta un rendimiento negativo igual a -0.00897%; ello corrobora que la crisis financiera de 2008 afectó en mayor proporción a los mercados de renta variable provenientes de países desarrollados. Asimismo, se aprecia que el MSCI Perú All Capped Index presenta la mayor volatilidad respecto a los otros activos igual a 1.85%, seguido por el MSCI Emerging Market Index con una volatilidad igual a 1.38%, el MSCI World Developed Markets Index con 1.16% y finalmente el MSCI Frontier Market Index con 0.85%. De los resultados obtenidos se aprecia que mientras mayor rendimiento presente mayor será la volatilidad, no obstante como se mencionó en el acápite anterior, los cuatro activos presentan coeficientes de asimetría negativos y excesos de curtosis elevados los cuales no son características de activos con comportamiento gaussiano, sin embargo, sí califican como activos con componentes de saltos.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
u_1^d	0.0004265	α_1	0.0002538
u_2^d	0.0001404	α_2	0.0000728
u_3^d	0.0001590	α_3	0.0000635
u_4^d	-0.0000897	α_4	-0.0001264
σ_1^d	0.0185850	σ_{11}	0.0003454
σ_2^d	0.0116348	σ_{12}	0.0001572
σ_3^d	0.0138206	σ_{13}	0.0001519
σ_4^d	0.0085676	σ_{14}	0.0000328
		σ_{22}	0.0001354
		σ_{23}	0.0001184
		σ_{24}	0.0000290
		σ_{33}	0.0001910
		σ_{34}	0.0000507
		σ_{44}	0.0000734

Tabla 5.6. Parámetros Estimados Modelo de Difusión Puro

Respecto al Modelo de Difusión de Saltos, la Tabla 5.7 contiene los parámetros $\{\mu_n, \sigma_{nm}, \lambda, j_n\}$ obtenidos del Método de Momentos usando las expresiones (52) al (55) y los resultados obtenidos del modelo de difusión puro de la Tabla 5.6. Se aprecia que el valor estimado de lambda (λ) que es la intensidad del salto es igual a 0.023 para el periodo analizado, al respecto dicho valor implica que en promedio la posibilidad de ocurrencia de un salto simultáneo en un día a través de los cuatro índices es aproximadamente 2.3% (0.023 saltos por un día), lo que equivale a decir que un salto es esperado cada 43.5 días o 1.45 meses. Asimismo, se aprecia que la amplitud o tamaño del salto para el MSCI Perú All Capped Index es igual a -0.081, lo cual implica que de ocurrir un salto, el rendimiento de este activo disminuiría en -7.78%⁴. Para el caso del MSCI World

⁴ El rendimiento cae $\exp(-0.081)-1 = -0.0778$.

Developed Markets Index la amplitud del salto es igual a -0.05 lo que equivale a una disminución del rendimiento de este activo en 4.87% si ocurriese un salto, en el caso del MSCI Emerging Market Index la amplitud del salto es igual a -0.058 lo que equivale a una disminución del rendimiento de este activo en 5.71% mientras que para el MSCI Frontier Market Index la amplitud del salto es igual a -0.0443 lo que equivale a una disminución del rendimiento de este activo en 4.34%.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
u_1	0.0022878	α_1	0.0021905
u_2	0.0012890	α_2	0.0012501
u_3	0.0015097	α_3	0.0014539
u_4	0.0009294	α_4	0.0009153
σ_1	0.0139483	σ_{11}	0.0001946
σ_2	0.0088275	σ_{12}	0.0000641
σ_3	0.0105627	σ_{13}	0.0000425
σ_4	0.0053083	σ_{14}	-0.0000498
λ	0.0229653	σ_{22}	0.0000779
j_1	-0.0810465	σ_{23}	0.0000508
j_2	-0.0500141	σ_{24}	-0.0000220
j_3	-0.0588139	σ_{33}	0.0001116
j_4	-0.0443765	σ_{34}	-0.0000093
		σ_{44}	0.0000282

Tabla 5.7. Parámetros Estimados Modelo de Difusión de Saltos

5.3. Portafolios Óptimos

Se resuelve numéricamente la ecuación (21) para obtener los pesos del portafolio para un inversionista que ignora los saltos sistémicos y modela los retornos como un modelo de difusión puro, para ello se considera una intensidad de salto (λ) igual a cero debido a que este modelo no contempla la presencia de saltos en el rendimiento de los activos. Los parámetros de los activos que se emplean son los reportados en la Tabla 5.6. Se asume una tasa libre de riesgo anualizada igual a 2%. Se resolverán los portafolios óptimos para 10 valores de coeficientes de aversión relativa al riesgo que oscilan en el rango de 2 hasta 10.

La Tabla 5.8 contiene la asignación de los portafolios óptimos del modelo de difusión puro sin restricciones para los diferentes valores del coeficiente de aversión al riesgo, al respecto se aprecia que para todos los coeficientes de aversión al riesgo se asigna una posición larga en el MSCI PERU ALL, MSCI EM IMI y activo libre de riesgo; mientras que se asigna una posición corta en el MSCI WORLD IMI y MSCI FM, ello implica que según este modelo lo óptimo sería apalancarse en los dos activos con menor rendimiento y volatilidad con el objetivo de sobreponderar la posición en los otros activos con mayor rendimiento y volatilidad; y también sobreponderar la posición en el activo libre de riesgo, asimismo, se aprecia que entre los dos activos con posición corta el apalancamiento es mayor en el activo con el menor rendimiento y volatilidad. Por otro lado, la Figura 5.5 muestra el comportamiento de la asignación de cada activo dentro del portafolio óptimo y su evolución para diferentes grados de aversión al riesgo, al respecto, de los resultados mostrados en la Tabla 5.8 y de la Figura 5.5 se aprecia que a medida que aumenta la aversión al riesgo, la inversión en el MSCI PERU ALL (Mercado Peruano), MSCI EM IMI (Mercado Emergente) y el activo libre de riesgo se reduce mientras que la inversión en el MSCI WORLD IMI (Mercado Desarrollado) y el MSCI FM (Mercado Frontera) aumenta, ello

implica que a medida que aumenta la aversión al riesgo se reduce el grado de apalancamiento en el portafolio, fluctuando de una posición corta de 2.058 para una aversión al riesgo de 2 hasta llegar a una posición corta de 0.411 para una aversión al riesgo de 10. Asimismo, la inversión en el MSCI PERU ALL se reduce de 0.79 para una aversión al riesgo de 2 hasta llegar a 0.15 para una aversión al riesgo de 10; la inversión en el MSCI EM IMI se reduce de 0.43 para una aversión al riesgo de 2 hasta llegar a 0.08 para una aversión al riesgo de 10 y la inversión en el activo libre de riesgo se reduce de 1.83 para una aversión al riesgo de 2 hasta llegar a 1.16 para una aversión al riesgo de 10; lo contrario ocurre con los otros dos activos riesgosos, en el caso del MSCI WORLD IMI la inversión aumenta de -0.68 para una aversión al riesgo de 2 hasta llegar a -0.13 para una aversión al riesgo de 10 mientras que la inversión en el MSCI FM aumenta de -1.36 para una aversión al riesgo de 2 hasta llegar a -0.27 para una aversión al riesgo de 10.

Se resuelve numéricamente la ecuación (30) para obtener los pesos del portafolio para un inversionista que sí considera los saltos sistémicos y modela los retornos como un modelo de difusión de saltos. Los parámetros de los activos que se emplean son los reportados en la Tabla 5.7. Se asume una tasa libre de riesgo anualizada igual a 2%. Se resolverán los portafolios óptimos para 10 valores de coeficientes de aversión relativa al riesgo que oscilan en el rango de 2 hasta 10.

La Tabla 5.9 contiene la asignación de activos de los portafolios óptimos del modelo de difusión de saltos sin restricciones para los diferentes valores del coeficiente de aversión al riesgo, al respecto se aprecia que para todos los coeficientes de aversión al riesgo se asigna una posición larga en el MSCI PERU ALL, MSCI EM IMI y activo libre de riesgo; mientras que se asigna una posición corta en el MSCI WORLD IMI y MSCI FM, ello implica que según este modelo lo óptimo sería apalancarse en los dos activos con menor rendimiento y volatilidad, y que además presenten las mayores amplitudes de salto, con el objetivo de sobreponderar la posición en los otros activos con mayor rendimiento y volatilidad, y menor amplitud de salto; y también sobreponderar la posición en el activo libre de riesgo, asimismo, se aprecia que entre los dos activos con posición corta el apalancamiento es mayor en el activo con el menor rendimiento y volatilidad, y mayor amplitud de salto. Este modelo de difusión de saltos asigna un mayor peso a un activo que tiene la menor amplitud del salto⁵, debido a que al rendimiento de la data⁶ se le debe restar el rendimiento del salto para obtener el componente del rendimiento del modelo de difusión de saltos; ese rendimiento del salto que se está restando después se añade al componente del rendimiento del modelo de difusión de saltos dentro del componente del salto, con ello el rendimiento del modelo de difusión puro será igual al rendimiento del modelo de difusión de saltos⁷, por lo tanto, según se puede apreciar en la Tabla 5.7, los valores del rendimiento del modelo de difusión de saltos son mayores cuando la amplitud del salto es más negativa, ello hace que el peso de un activo con una amplitud más negativa (menor amplitud del salto) sea mayor respecto a un activo con una amplitud menos negativa (mayor amplitud del salto).

Asimismo, la Figura 5.6 muestra el comportamiento de la asignación de cada activo dentro del portafolio óptimo y su evolución para diferentes grados de aversión al riesgo, al respecto, de los resultados mostrados en la Tabla 5.9 y de la Figura 5.6 se aprecia que a medida que aumenta la aversión al riesgo, la inversión en el MSCI PERU ALL (Mercado Peruano), MSCI EM IMI (Mercado Emergente) y el activo libre de riesgo se reduce mientras que la inversión en el MSCI WORLD IMI (Mercado Desarrollado) y el MSCI FM (Mercado Frontera) aumenta, ello implica que a medida que aumenta la aversión al riesgo se reduce el grado de apalancamiento en el portafolio, fluctuando de una posición corta de 2.01 para una aversión al riesgo de 2 hasta llegar a una posición corta de 0.402 para una aversión al riesgo de 10. Asimismo, la inversión en el MSCI PERU ALL se reduce de 0.92 para una aversión al riesgo de 2 hasta llegar a 0.18 para una

⁵ Considerar que las amplitudes son negativas y que en el caso de ocurrir un salto, el precio y rendimiento este activo es el que se reduce más respecto a los otros activos

⁶ El rendimiento de la data es igual al rendimiento del modelo de difusión puro

⁷ Ver ecuaciones (56) al (59).

aversión al riesgo de 10; la inversión en el MSCI EM IMI se reduce de 0.46 para una aversión al riesgo de 2 hasta llegar a 0.09 para una aversión al riesgo de 10 mientras que la inversión en el activo libre de riesgo se reduce de 1.63 para una aversión al riesgo de 2 hasta llegar a 1.12 para una aversión al riesgo de 10; lo contrario ocurre con los otros dos activos riesgosos, en el caso del MSCI WORLD IMI la inversión aumenta de -0.77 para una aversión al riesgo de 2 hasta llegar a -0.15 para una aversión al riesgo de 10 mientras que la inversión en el MSCI FM aumenta de -1.2 para una aversión al riesgo de 2 hasta llegar a -0.24 para una aversión al riesgo de 10.

Comparando ambos modelos se aprecia que el considerar la presencia de saltos sistémicos en el rendimiento de los activos produce un cambio en la asignación de los activos dentro del portafolio además de intervenir en el grado de apalancamiento del portafolio, al respecto, se aprecia que, por ejemplo, para una aversión al riesgo igual a 2.5, la inversión en el MSCI PERU ALL aumenta de 0.6325 en el modelo sin saltos⁸ a 0.736 en el modelo con saltos⁹, la inversión en el MSCI EM IMI aumenta de 0.346 en el modelo sin saltos a 0.369 en el modelo con saltos mientras que la inversión en el MSCI FM aumenta de -1.09 en el modelo sin saltos a -0.99 en el modelo con saltos; por el contrario, la inversión en el MSCI WORLD IMI disminuye de -0.55 en el modelo sin saltos a un valor de -0.62 en el modelo con saltos mientras que la inversión en el activo libre de riesgo disminuye de 1.66 en el modelo sin saltos a 1.50 en el modelo con saltos. La Tabla 5.10 muestra la diferencia de los pesos de los portafolios óptimos entre el modelo de difusión de saltos y el modelo de difusión puro para los diversos coeficientes de aversión al riesgo, al respecto, se aprecia que a medida que aumenta el grado de aversión al riesgo en el inversionista las diferencias entre los pesos de los dos modelos se reduce, ello implica que mientras mayor sea la aversión al riesgo se reduce el efecto de los saltos en la asignación de los portafolios óptimos.

Considerando que los Fondos de Pensiones están prohibidos de realizar ventas en corto y tampoco pueden apalancarse, se procederá a incluir dichas restricciones en el Modelo de Difusión Puro y en el Modelo de Difusión de Saltos, no obstante, primero se analizará los resultados del Modelo Media Varianza toda vez que este modelo es el que utilizan actualmente los fondos de pensiones como modelo de asignación de activos óptimo.

La Tabla 5.11 contiene la composición del portafolio óptimo obtenido mediante el Modelo Media Varianza de Markowitz para valores de rendimiento esperado de 3%, 4%, 5%, 6%, 6%, 7%, 8%, 9%, 10%, 11% y 12% según lo planteado en (42), asimismo, se reporta el riesgo del portafolio anual y el ratio de Sharpe respectivo. Al respecto se aprecia que a medida que aumenta la rentabilidad esperada y el riesgo del portafolio, aumenta el peso del MSCI PERU ALL (Mercado Peruano) y del MSCI EM IMI (Mercado Emergente), mientras que disminuye el peso del MSCI WORLD IMI (Mercado Desarrollado) y MSCI FM (Mercado Frontera) en el portafolio óptimo, ello guarda relación con los resultados obtenidos con el modelo de difusión puro y con el modelo de difusión de saltos en la medida que un aumento en la aversión al riesgo implica un riesgo bajo para el portafolio y por ende una rentabilidad esperada baja.

Con el objetivo de comparar el modelo media varianza con los modelos de difusión puro y de difusión de saltos, se incorporará la aversión al riesgo en el modelo media varianza según lo planteado en el problema de maximización de las ecuaciones (43) y (44), la Tabla 5.14 muestra la composición del portafolio óptimo obtenido mediante el Modelo Media Varianza con aversión al riesgo para un rango de coeficientes de aversión al riesgo que van desde 2 hasta 10, asimismo la Figura 5.9 muestra la evolución de la composición del portafolio óptimo para los diferentes valores de coeficientes de aversión al riesgo. Al respecto se aprecia que a medida que aumenta la aversión al riesgo, disminuye el peso del MSCI PERU ALL (Mercado Peruano) pasando de un peso de 71.4% para una aversión al riesgo de 2 hasta un peso de 10.2% para una aversión al riesgo de 10, del mismo modo disminuye el peso del MSCI EM IMI (Mercado Emergente) pasando de un peso de 19.98% para una aversión al riesgo de 2 hasta un peso de 0% para una aversión al

⁸ Modelo de Difusión Puro

⁹ Modelo de Difusión de Saltos

riesgo de 10, sin embargo, aumenta el peso del MSCI WORLD IMI (Mercado Desarrollado) pasando de un peso de 8.5% para una aversión al riesgo de 2 hasta un peso de 33.3% para una aversión al riesgo de 10, mientras que el MSCI FM (Mercado Frontera) también aumenta pasando de un peso de 0% para una aversión al riesgo de 2 hasta un peso de 56.5% para una aversión al riesgo de 10.

Como se mencionó, el modelo de difusión puro y el modelo de difusión de saltos son modelos sin restricciones, sin embargo, en la normativa peruana las AFPs están prohibidas de realizar ventas en corto con los activos del portafolio¹⁰ y de apalancar el portafolio¹¹, por lo tanto es necesario incorporar estas restricciones en el modelo de difusión puro y en el modelo de difusión de saltos, la metodología para obtener el portafolio óptimo con restricciones para cada aversión al riesgo se detalló en el acápite 4.2.3 y en las ecuaciones (38) al (41).

La Tabla 5.12 muestra la composición del portafolio óptimo obtenido mediante el modelo de difusión puro con restricciones para el rango de coeficiente de aversión al riesgo de 2 hasta 10, asimismo, la Figura 5.7 muestra la evolución del portafolio óptimo del modelo de difusión puro con restricciones para los diferentes valores de coeficientes de aversión al riesgo. Al respecto se aprecia que a medida que aumenta la aversión al riesgo, disminuye el peso del MSCI PERU ALL (Mercado Peruano) pasando de un peso de 71.51% para una aversión al riesgo de 2 hasta un peso de 10.93% para una aversión al riesgo de 10, del mismo modo disminuye el peso del MSCI EM IMI (Mercado Emergente) pasando de un peso de 22.39% para una aversión al riesgo de 2 hasta un peso de 0% para una aversión al riesgo de 10, sin embargo, aumenta el peso del MSCI WORLD IMI (Mercado Desarrollado) pasando de un peso de 6.1% para una aversión al riesgo de 2 hasta un peso de 34.62% para una aversión al riesgo de 10, mientras que el MSCI FM (Mercado Frontera) también aumenta pasando de un peso de 0% para una aversión al riesgo de 2 hasta un peso de 54.44% para una aversión al riesgo de 10.

La Tabla 5.13 muestra la composición del portafolio óptimo obtenido mediante el modelo de difusión de saltos con restricciones para el rango de coeficiente de aversión al riesgo de 2 hasta 10, asimismo, la Figura 5.8 muestra la evolución del portafolio óptimo del modelo de difusión de saltos con restricciones para los diferentes valores de coeficientes de aversión al riesgo. Al respecto se aprecia que a medida que aumenta la aversión al riesgo, disminuye el peso del MSCI PERU ALL (Mercado Peruano) pasando de un peso de 81.61% para una aversión al riesgo de 2 hasta un peso de 8.5% para una aversión al riesgo de 10, del mismo modo disminuye el peso del MSCI EM IMI (Mercado Emergente) pasando de un peso de 18.38% para una aversión al riesgo de 2 hasta un peso de 0% para una aversión al riesgo de 10, sin embargo, aumenta el peso del MSCI WORLD IMI (Mercado Desarrollado) pasando de un peso de 0% para una aversión al riesgo de 2 hasta un peso de 34.6% para una aversión al riesgo de 10, mientras que el MSCI FM (Mercado Frontera) también aumenta pasando de un peso de 0% para una aversión al riesgo de 2 hasta un peso de 54.44% para una aversión al riesgo de 10.

La Tabla 5.15 muestra la diferencia en los pesos entre el modelo de difusión de saltos con restricciones y el modelo de difusión puro con restricciones, asimismo, la Figura 5.10 muestra la evolución de la diferencia entre los pesos para los diferentes valores de coeficiente de aversión al riesgo. Al respecto, se aprecia que el modelo de difusión de saltos asigna un mayor peso respecto al modelo de difusión puro dentro del portafolio óptimo al MSCI PERU ALL (Mercado Peruano) para los valores de coeficiente de aversión al riesgo desde 2 hasta 7 mientras que le asigna un menor peso para coeficientes de aversión al riesgo desde 8 hasta 10. Asimismo, se aprecia que el modelo de difusión de saltos a diferencia del modelo de difusión puro asigna un menor peso al MSCI WORLD IMI (Mercado Desarrollado), mientras que en el caso del MSCI FM (Mercado Frontera) se aprecia una mayor asignación en comparación con el modelo de difusión puro. Por otro lado, se aprecia un comportamiento opuesto entre el MSCI EM IMI (Mercado Emergente) y

¹⁰ *Shortselling risky assets*

¹¹ *Borrowing the portfolio*

el MSCI WORLD IMI (Mercado Desarrollado), se muestra en la Figura 5.10 que el modelo de difusión de saltos asigna un menor peso al MSCI WORLD IMI y en su lugar lo asigna al MSCI EM IMI. También se aprecia que para valores menores de aversión al riesgo el modelo de difusión de saltos a diferencia del modelo de difusión puro asigna un mayor peso a los activos con menor intensidad de salto, es decir, a los activos que caen más cuando ocurre un salto, ello debido a que los valores del rendimiento del modelo de difusión de saltos son mayores cuando la amplitud del salto es más negativa, no obstante a medida que aumenta la aversión al riesgo las diferencias entre ambos modelos se reducen y el peso de los activos con mayor amplitud de salto (menos negativo) aumenta en el modelo de difusión de saltos en comparación con el modelo de difusión puro. En conclusión, para menores valores de aversión al riesgo, el modelo de difusión de saltos, que sí reconoce los saltos a diferencia del modelo de difusión puro que no reconoce los saltos, asigna un mayor peso a activos con menor amplitud de salto (más negativo) mientras que para mayores valores de aversión al riesgo, el modelo de difusión de saltos a diferencia del modelo de difusión puro asigna un mayor peso a activos con mayor amplitud del salto (menos negativo).

La Tabla 5.16 muestra la diferencia en los pesos entre el modelo de difusión de saltos con restricciones y el modelo media varianza, asimismo, la Figura 5.11 muestra la evolución de la diferencia entre los pesos para los diferentes valores de coeficiente de aversión al riesgo. Al respecto, se aprecia que el modelo de difusión de saltos asigna un mayor peso, respecto al modelo media varianza, al activo MSCI PERU ALL (Mercado Peruano) para los valores de coeficiente de aversión al riesgo desde 2 hasta 7 mientras que le asigna un menor peso para coeficientes de aversión al riesgo desde 8 hasta 10, estas diferencias son mayores que las diferencias respecto al modelo de difusión puro presentado en el párrafo anterior. Asimismo, se aprecia que el modelo de difusión de saltos a diferencia del modelo media varianza asigna un menor peso al MSCI WORLD IMI (Mercado Desarrollado), mientras que en el caso del MSCI FM (Mercado Frontera) se aprecia una mayor asignación en comparación con el modelo media varianza. Por otro lado, al igual que las diferencias con el modelo de difusión puro, también se aprecia un comportamiento opuesto entre el MSCI EM IMI (Mercado Emergente) y el MSCI WORLD IMI (Mercado Desarrollado), se muestra en la Figura 5.11 que el modelo de difusión de saltos asigna un menor peso al MSCI WORLD IMI y en su lugar lo asigna al MSCI EM IMI. También se aprecia que para valores menores de aversión al riesgo el modelo de difusión de saltos a diferencia del modelo media varianza asigna un mayor peso a los activos con menor intensidad de salto, es decir, a los activos que caen más cuando ocurre un salto, ello debido a que los valores del rendimiento del modelo de difusión de saltos son mayores cuando la amplitud del salto es más negativa, no obstante a medida que aumenta la aversión al riesgo las diferencias entre ambos modelos se reducen y el peso de los activos con mayor amplitud de salto (menos negativo) aumenta en el modelo de difusión de saltos en comparación con el modelo media varianza. En conclusión, para menores valores de aversión al riesgo, el modelo de difusión de saltos, que sí reconoce los saltos a diferencia del modelo media varianza que no reconoce los saltos, asigna un mayor peso a activos con menor amplitud de salto (más negativo) mientras que para mayores valores de aversión al riesgo, el modelo de difusión de saltos a diferencia del modelo media varianza asigna un mayor peso a activos con mayor amplitud del salto (menos negativo).

La Tabla 5.17 muestra la diferencia en los pesos entre el modelo de difusión puro con restricciones y el modelo media varianza, asimismo, la Figura 5.12 muestra la evolución de la diferencia entre los pesos para los diferentes valores de coeficiente de aversión al riesgo. Al respecto, se aprecia que las diferencias son mínimas para los coeficientes de aversión al riesgo de 2 a 5, sin embargo las diferencias se incrementan a medida que aumenta la aversión al riesgo. Se muestra que el modelo de difusión puro, a diferencia del modelo media varianza, asigna un mayor peso al MSCI PERU ALL (Mercado Peruano) para los valores de coeficiente de aversión al riesgo mayores a 5, asimismo, asigna un mayor peso al MSCI WORLD IMI (Mercado Desarrollado) también a partir de 5, sin embargo, asigna un menor peso al MSCI FM (Mercado Frontera) a partir de 5. Por otro lado, se aprecia que los pesos asignados al MSCI EM IMI (Mercado Emergente) son iguales en ambos modelos.

Modelo de Difusión Puro		Coeficiente de Aversión al Riesgo (Gamma)									
Pesos	Descripción	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10
w1	Peso invertido en el MSCI PERU ALL	0.79069	0.63255	0.52713	0.39534	0.31628	0.26356	0.22591	0.19767	0.17571	0.15814
w2	Peso invertido en el MSCI WORLD IMI	-0.68980	-0.55184	-0.45987	-0.34490	-0.27592	-0.22993	-0.19709	-0.17245	-0.15329	-0.13796
w3	Peso invertido en el MSCI EM IMI	0.43251	0.34601	0.28834	0.21626	0.17301	0.14417	0.12358	0.10813	0.09611	0.08650
w4	Peso invertido en el MSCI FM	-1.36909	-1.09527	-0.91273	-0.68454	-0.54764	-0.45636	-0.39117	-0.34227	-0.30424	-0.27382
w5	Peso invertido en el Activo Libre de Riesgo	1.83569	1.66855	1.55713	1.41784	1.33428	1.27856	1.23877	1.20892	1.18571	1.16714

Tabla 5.8. Portafolio Óptimo – Modelo de Difusión Puro Sin Restricciones

Modelo de Difusión de Saltos		Coeficiente de Aversión al Riesgo (Gamma)									
Pesos	Descripción	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10
w1	Peso invertido en el MSCI PERU ALL	0.92004	0.73604	0.61337	0.46004	0.36803	0.30670	0.26288	0.23002	0.20447	0.18402
w2	Peso invertido en el MSCI WORLD IMI	-0.77508	-0.62006	-0.51671	-0.38753	-0.31002	-0.25835	-0.22144	-0.19376	-0.17223	-0.15501
w3	Peso invertido en el MSCI EM IMI	0.46181	0.36945	0.30788	0.23091	0.18473	0.15394	0.13195	0.11545	0.10263	0.09236
w4	Peso invertido en el MSCI FM	-1.23875	-0.99096	-0.82578	-0.61931	-0.49544	-0.41286	-0.35388	-0.30964	-0.27524	-0.24771
w5	Peso invertido en el Activo Libre de Riesgo	1.63198	1.50553	1.42124	1.31590	1.25270	1.21058	1.18049	1.15793	1.14038	1.12634

Tabla 5.9. Portafolio Óptimo – Modelo de Difusión de Saltos Sin Restricciones

Diferencia Difusión Salto - Difusión Puro		Coeficiente de Aversión al Riesgo (Gamma)									
Pesos	Descripción	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10
w1	Peso invertido en el MSCI PERU ALL	0.12935	0.10349	0.08625	0.06469	0.05176	0.04313	0.03697	0.03235	0.02876	0.02588
w2	Peso invertido en el MSCI WORLD IMI	-0.08528	-0.06822	-0.05684	-0.04263	-0.03410	-0.02842	-0.02436	-0.02131	-0.01894	-0.01705
w3	Peso invertido en el MSCI EM IMI	0.02930	0.02344	0.01953	0.01465	0.01172	0.00977	0.00837	0.00733	0.00651	0.00586
w4	Peso invertido en el MSCI FM	0.13034	0.10431	0.08695	0.06523	0.05219	0.04350	0.03729	0.03263	0.02901	0.02611
w5	Peso invertido en el Activo Libre de Riesgo	-0.20371	-0.16303	-0.13589	-0.10194	-0.08157	-0.06798	-0.05828	-0.05100	-0.04533	-0.04080

Tabla 5.10. Diferencia Pesos – Modelo de Difusión de Saltos menos Modelo de Difusión Puro Sin Restricciones

Modelo de Media Varianza		Pesos del Portafolio Óptimo									
Pesos	Descripción	E[R] = 3%	E[R] = 4%	E[R] = 5%	E[R] = 6%	E[R] = 7%	E[R] = 8%	E[R] = 9%	E[R] = 10%	E[R] = 11%	E[R] = 12%
w1	Peso invertido en el MSCI PERU ALL	0.19288	0.24887	0.30174	0.35461	0.40749	0.46036	0.51323	0.56610	0.61898	0.67185
w2	Peso invertido en el MSCI WORLD IMI	0.31930	0.30548	0.28241	0.25934	0.23627	0.21320	0.19013	0.16706	0.14400	0.12093
w3	Peso invertido en el MSCI EM IMI	0.00000	0.00825	0.03154	0.05483	0.07811	0.10140	0.12468	0.14797	0.17126	0.19454
w4	Peso invertido en el MSCI FM	0.48782	0.43740	0.38431	0.33122	0.27813	0.22504	0.17195	0.11886	0.06577	0.01268
Riesgo del Portafolio Anual		16.83%	17.85%	18.99%	20.25%	21.60%	23.01%	24.49%	26.02%	27.60%	29.20%
Rendimiento Esperado del Portafolio Anual		3.00%	4.00%	5.00%	6.00%	7.00%	8.00%	9.00%	10.00%	11.00%	12.00%
Ratio de Sharpe		0.059	0.112	0.158	0.198	0.232	0.261	0.286	0.307	0.326	0.342

Tabla 5.11. Portafolio Óptimo – Modelo Media Varianza

Modelo de Difusión Puro		Coeficiente de Aversión al Riesgo (Gamma)									
Pesos	Descripción	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10
w1	Peso invertido en el MSCI PERU ALL	0.71511	0.55988	0.45931	0.33359	0.25816	0.20824	0.17294	0.14646	0.12587	0.10939
w2	Peso invertido en el MSCI WORLD IMI	0.06092	0.17003	0.21379	0.26850	0.30133	0.31955	0.32907	0.33621	0.34177	0.34622
w3	Peso invertido en el MSCI EM IMI	0.22397	0.14548	0.10121	0.04586	0.01265	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
w4	Peso invertido en el MSCI FM	0.00000	0.12461	0.22570	0.35205	0.42786	0.47221	0.49799	0.51732	0.53236	0.54439

Tabla 5.12. Portafolio Óptimo – Modelo de Difusión Puro Con Restricciones

Modelo de Difusión de Saltos		Coeficiente de Aversión al Riesgo (Gamma)									
Pesos	Descripción	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10
w1	Peso invertido en el MSCI PERU ALL	0.81612	0.65778	0.53739	0.39170	0.29440	0.22793	0.17905	0.14115	0.11054	0.08503
w2	Peso invertido en el MSCI WORLD IMI	0.00000	0.04861	0.11726	0.24352	0.27320	0.29445	0.31090	0.32438	0.33590	0.34605
w3	Peso invertido en el MSCI EM IMI	0.18388	0.17912	0.12707	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
w4	Peso invertido en el MSCI FM	0.00000	0.11449	0.21828	0.36478	0.43240	0.47762	0.51004	0.53447	0.55356	0.56892

Tabla 5.13. Portafolio Óptimo – Modelo de Difusión de Saltos Con Restricciones

Modelo de Media Varianza con Aversión al Riesgo		Coeficiente de Aversión al Riesgo (Gamma)									
Pesos	Descripción	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10
w1	Peso invertido en el MSCI PERU ALL	0.71477	0.56008	0.45944	0.33365	0.25818	0.20689	0.16937	0.14123	0.11935	0.10184
w2	Peso invertido en el MSCI WORLD IMI	0.08543	0.16970	0.21360	0.26849	0.30142	0.31718	0.32286	0.32711	0.33043	0.33308
w3	Peso invertido en el MSCI EM IMI	0.19980	0.14531	0.10099	0.04559	0.01236	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
w4	Peso invertido en el MSCI FM	0.00000	0.12492	0.22596	0.35226	0.42805	0.47594	0.50777	0.53165	0.55023	0.56508

Tabla 5.14. Portafolio Óptimo – Modelo Media Varianza con Aversión al Riesgo

Diferencia Difusión Salto - Difusión Puro		Coeficiente de Aversión al Riesgo (Gamma)									
Pesos	Descripción	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10
w1	Peso invertido en el MSCI PERU ALL	0.10101	0.09790	0.07808	0.05811	0.03624	0.01968	0.00611	-0.00531	-0.01532	-0.02437
w2	Peso invertido en el MSCI WORLD IMI	-0.06092	-0.12141	-0.09653	-0.02498	-0.02813	-0.02510	-0.01817	-0.01183	-0.00587	-0.00016
w3	Peso invertido en el MSCI EM IMI	-0.04009	0.03363	0.02587	-0.04586	-0.01265	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
w4	Peso invertido en el MSCI FM	0.00000	-0.01012	-0.00742	0.01273	0.00455	0.00542	0.01206	0.01714	0.02120	0.02453

Tabla 5.15. Diferencia Pesos – Modelo de Difusión de Saltos Con Restricciones menos Modelo de Difusión Puro Con Restricciones

Diferencia Difusión Salto - Media Varianza		Coeficiente de Aversión al Riesgo (Gamma)									
Pesos	Descripción	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10
w1	Peso invertido en el MSCI PERU ALL	0.10135	0.09770	0.07795	0.05805	0.03622	0.02104	0.00968	-0.00008	-0.00880	-0.01681
w2	Peso invertido en el MSCI WORLD IMI	-0.08543	-0.12108	-0.09634	-0.02497	-0.02822	-0.02273	-0.01195	-0.00273	0.00547	0.01298
w3	Peso invertido en el MSCI EM IMI	-0.01592	0.03380	0.02608	-0.04559	-0.01236	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
w4	Peso invertido en el MSCI FM	0.00000	-0.01043	-0.00768	0.01252	0.00436	0.00169	0.00227	0.00281	0.00333	0.00383

Tabla 5.16. Diferencia Pesos – Modelo de Difusión de Saltos Con Restricciones menos Modelo Media Varianza

Diferencia Difusión Puro - Media Varianza		Coeficiente de Aversión al Riesgo (Gamma)									
Pesos	Descripción	2	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10
w1	Peso invertido en el MSCI PERU ALL	0.00034	-0.00020	-0.00014	-0.00006	-0.00002	0.00136	0.00357	0.00523	0.00652	0.00755
w2	Peso invertido en el MSCI WORLD IMI	-0.02451	0.00033	0.00019	0.00001	-0.00009	0.00237	0.00622	0.00910	0.01134	0.01314
w3	Peso invertido en el MSCI EM IMI	0.02417	0.00017	0.00021	0.00026	0.00030	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
w4	Peso invertido en el MSCI FM	0.00000	-0.00030	-0.00026	-0.00022	-0.00019	-0.00373	-0.00979	-0.01433	-0.01786	-0.02069

Tabla 5.17. Diferencia Pesos – Modelo de Difusión Puro Con Restricciones menos Modelo Media Varianza

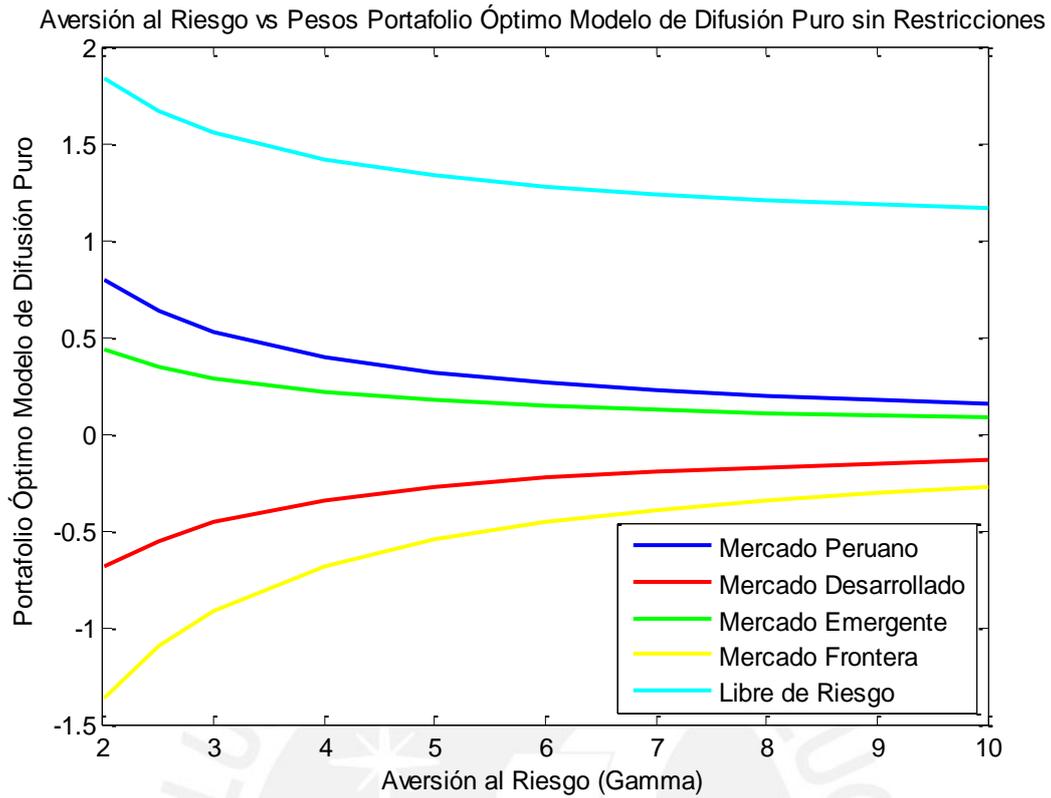


Figura 5.5. Portafolio Modelo de Difusión Puro sin Restricciones vs Aversión al Riesgo

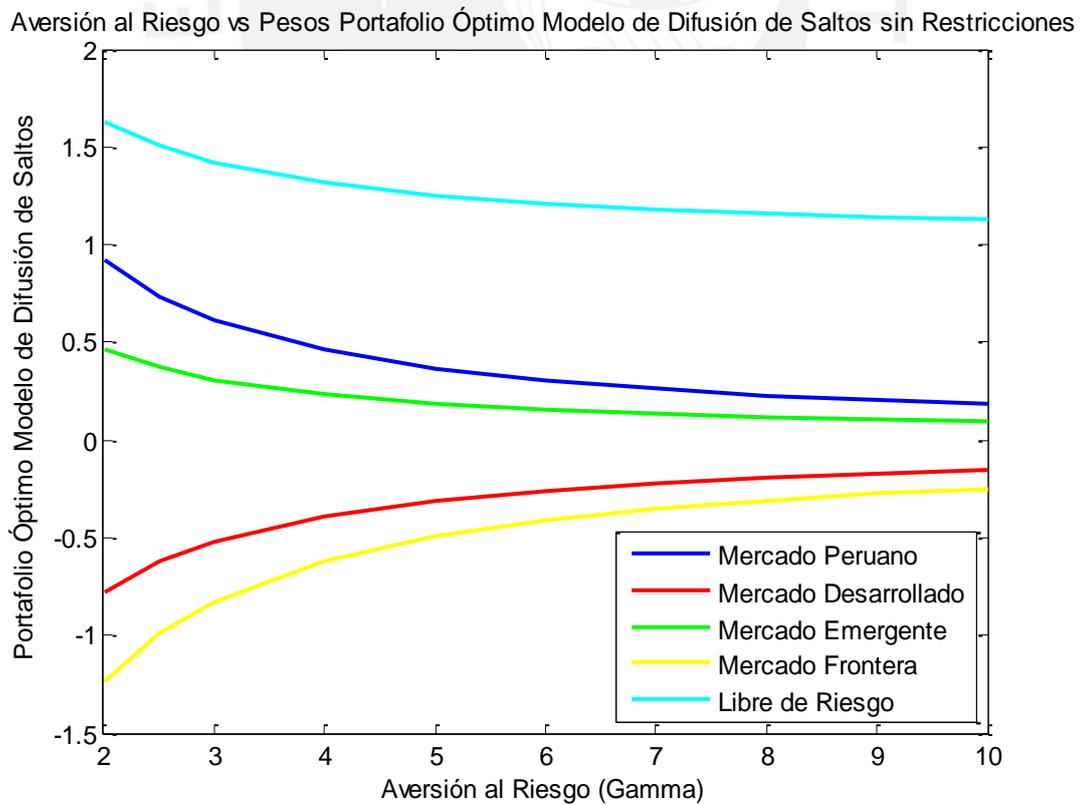


Figura 5.6. Portafolio Modelo de Difusión de Saltos sin Restricciones vs Aversión al Riesgo

Aversión al Riesgo vs Pesos Portafolio Óptimo Modelo de Difusión Puro con Restricciones

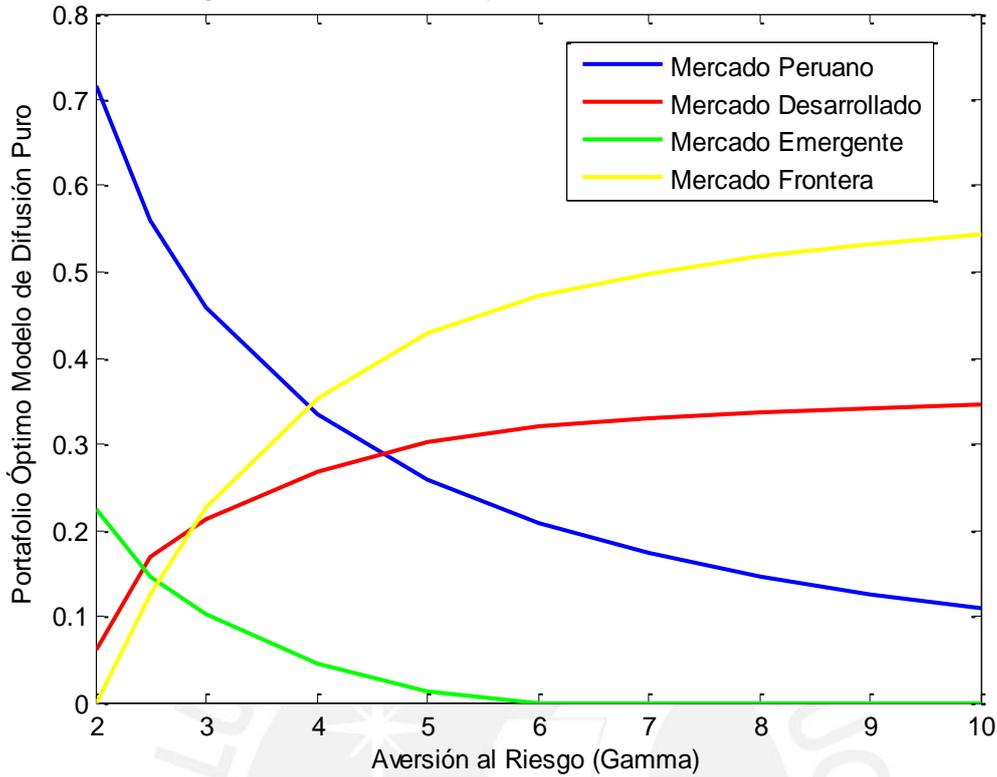


Figura 5.7. Portafolio Modelo de Difusión Puro Con Restricciones vs Aversión al Riesgo

Aversión al Riesgo vs Pesos Portafolio Óptimo Modelo de Difusión de Saltos con Restricciones

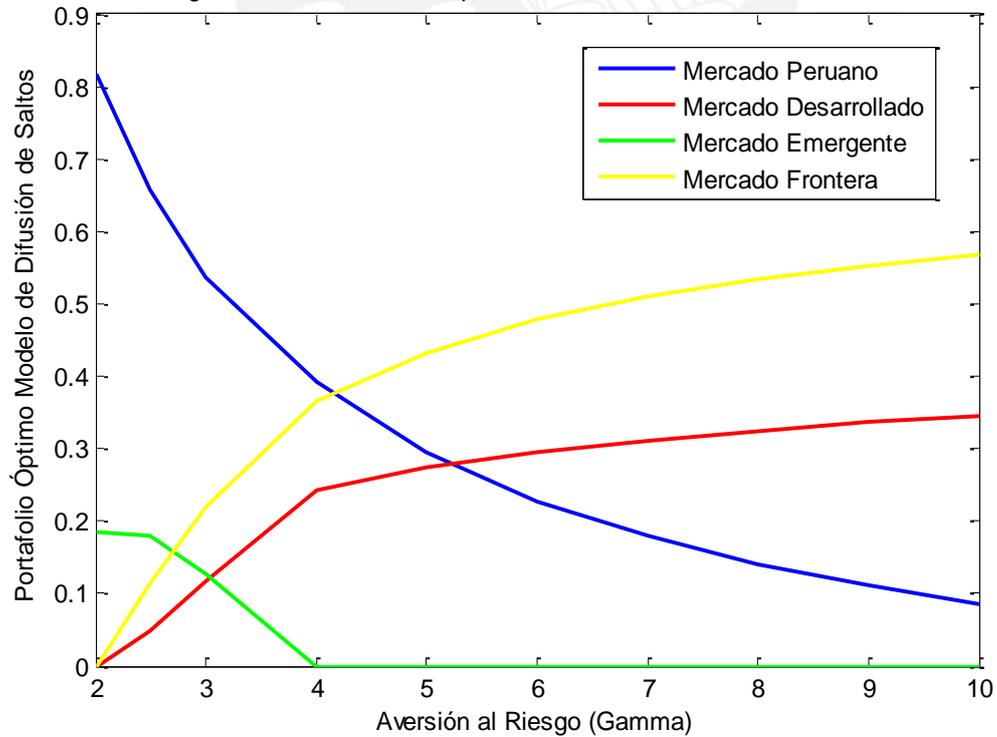


Figura 5.8. Portafolio Modelo de Difusión de Saltos Con Restricciones vs Aversión al Riesgo

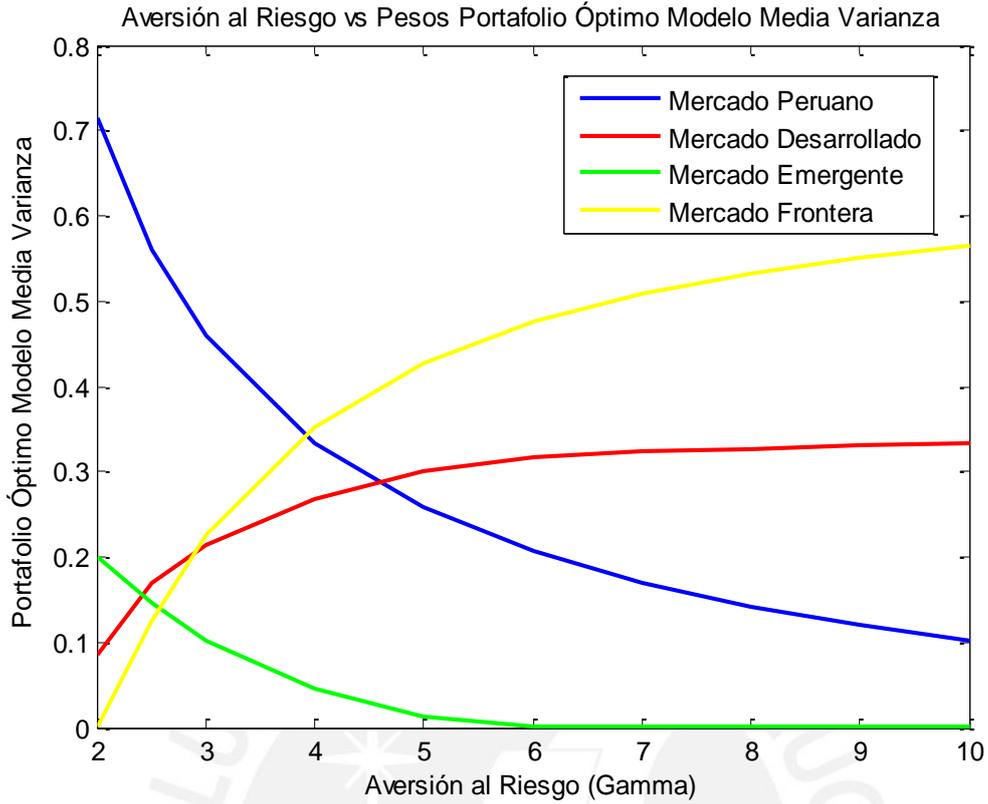


Figura 5.9. Portafolio Modelo Media Varianza vs Aversión al Riesgo

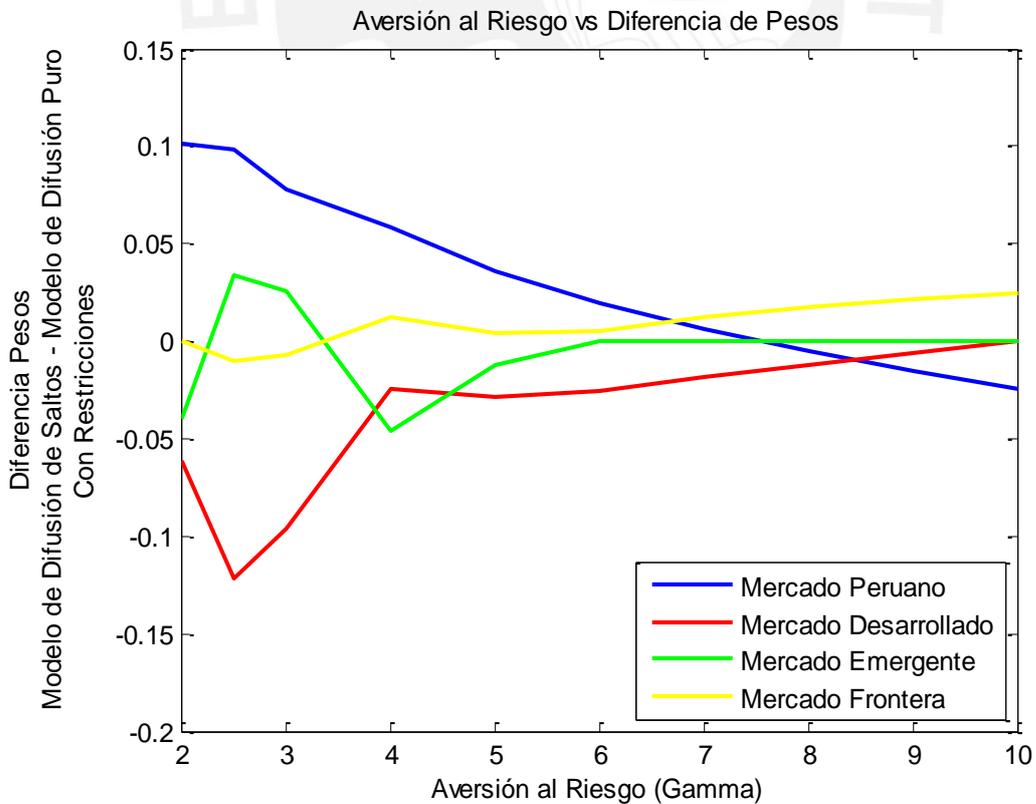


Figura 5.10. Diferencia de Pesos Difusión de Saltos –Difusión Puro con Restricciones

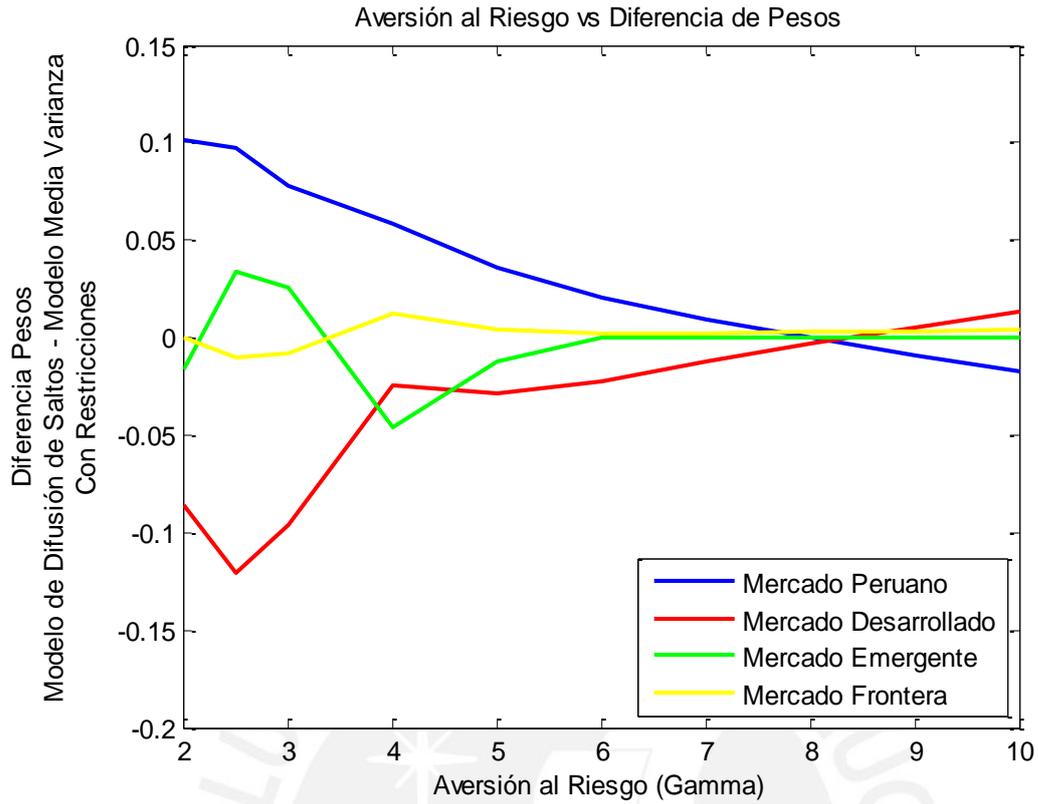


Figura 5.11. Diferencia de Pesos Difusión de Saltos con Restricciones – Media Varianza

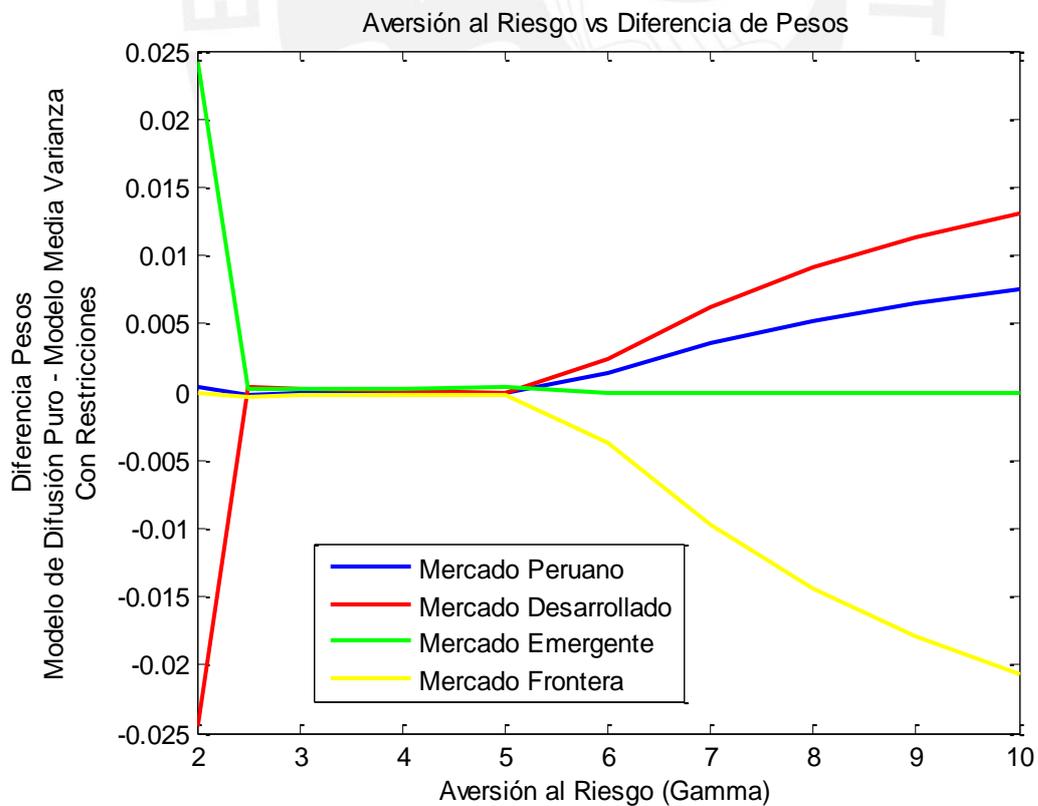


Figura 5.12. Diferencia de Pesos Difusión Puro con Restricciones – Media Varianza

Según información de la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS), al 31 de agosto del 2014, el portafolio de renta variable del Fondo 3 presentaba una rentabilidad real de 8.6% y un riesgo real de 24.5%, no obstante, con el objetivo de compararlo con los portafolios obtenidos con los modelos de difusión puro, difusión de saltos y media varianza, es necesario adaptar cada activo del portafolio de renta variable del Fondo 3 a los activos utilizados como proxy en la presente investigación, al respecto, la Tabla 5.18 muestra la composición del portafolio de renta variable del Fondo 3 adaptado a los activos proxy, asimismo, se muestra el riesgo, rendimiento y ratio de Sharpe.

Pesos	Descripción	F3
w1	Peso invertido en el MSCI PERU ALL	0.36805
w2	Peso invertido en el MSCI WORLD IMI	0.61555
w3	Peso invertido en el MSCI EM IMI	0.01551
w4	Peso invertido en el MSCI FM	0.00089
Riesgo del Portafolio Anual		24.986%
Rendimiento Esperado del Portafolio Anual		8.849%
Ratio de Sharpe		0.27

Tabla 5.18. Portafolio de Renta Variable – Fondo 3

La Figura 5.13 muestra la frontera eficiente obtenida mediante el modelo media varianza, asimismo, se presenta el portafolio de renta variable del Fondo 3 real y el portafolio de renta variable del Fondo 3 adaptado, al respecto, utilizando los portafolios óptimos obtenidos para el modelo de difusión puro con restricciones presentados en la Tabla 5.12, se obtuvo que el portafolio que se adapta mejor al portafolio de renta variable del Fondo 3 corresponde al portafolio de un inversionista con un coeficiente de aversión al riesgo igual a 2.5.

Al respecto, en la Figura 5.13 se ha colocado el portafolio óptimo del modelo de difusión puro y del modelo de difusión de saltos sin restricciones y con restricciones correspondientes para un coeficiente de aversión al riesgo igual a 2.5. Utilizando los resultados presentados en las Tablas 5.8 al 5.17, se aprecia que para un coeficiente de aversión al riesgo igual a 2.5, mediante los modelos sin restricciones, la inversión en el MSCI PERU ALL (Mercado Peruano) aumenta de 0.6325 en el modelo de difusión puro a 0.736 en el modelo de difusión de saltos, asimismo, la inversión en el MSCI EM IMI (Mercado Emergente) aumenta de 0.346 en el modelo de difusión puro a 0.369 en el modelo de difusión de saltos mientras que la inversión en el MSCI FM (Mercado Frontera) aumenta de -1.09 en el modelo de difusión puro a -0.99 en el modelo de difusión de saltos; por el contrario, la inversión en el MSCI WORLD IMI (Mercado Desarrollado) disminuye de -0.55 en el modelo de difusión puro a un valor de -0.62 en el modelo de difusión de saltos, finalmente, la inversión en el activo libre de riesgo disminuye de 1.66 en el modelo de difusión puro a 1.50 en el modelo de difusión de saltos. Considerando los modelos con restricciones, la inversión en el MSCI PERU ALL (Mercado Peruano) aumenta de 0.559 en el modelo de difusión puro a 0.657 en el modelo de difusión de saltos, asimismo, la inversión en el MSCI EM IMI (Mercado Emergente) aumenta de 0.145 en el modelo de difusión puro a 0.179 en el modelo de difusión de saltos, por el contrario, la inversión en el MSCI FM (Mercado Frontera) disminuye de 0.124 en el modelo de difusión puro a 0.114 en el modelo de difusión de saltos; asimismo, la inversión en el MSCI WORLD IMI (Mercado Desarrollado) también disminuye de 0.17 en el modelo de difusión puro a un valor de 0.04 en el modelo de difusión de saltos. Respecto al modelo media varianza con aversión al riesgo, la inversión en el MSCI PERU ALL es de 0.55, en el caso del MSCI WORLD IMI es de 0.169, en el MSCI EM IMI es de 0.145 mientras que en el MSCI FM es de 0.124.

Finalmente, en la Figura 5.13 se aprecia que los portafolios óptimos del modelo de difusión puro y del modelo de difusión de saltos sin restricciones están fuera de la frontera eficiente debido a que son modelos que consideran dentro de su composición inversión en el activo libre de riesgo, mientras que los portafolios óptimos del modelo de difusión puro y del modelo de difusión de

saltos con restricciones sí se encuentran dentro de la frontera eficiente, lo cual podría indicar una supuesta no optimalidad, no obstante, es necesario mencionar que el modelo de difusión puro y el modelo de difusión de saltos son modelos en tiempo continuo mientras que el modelo media varianza es un modelo en tiempo discreto, por lo que no es posible realizar simplemente una comparación en términos de rendimiento y riesgo, en vista de ello, Das y Uppal (2004) plantearon realizar la comparación de los modelos determinando el valor de la función de utilidad y utilizar como medida de comparación el cálculo del Costo del Equivalente de Certeza (CEQ).

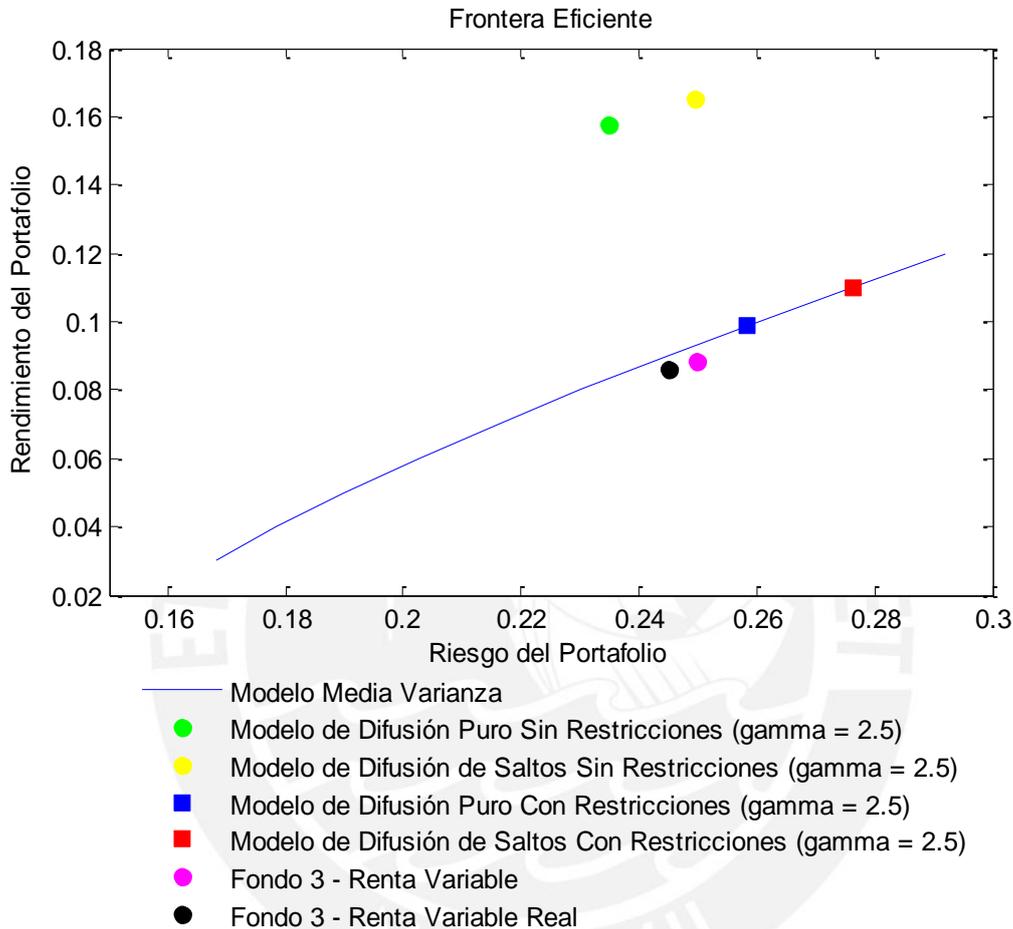


Figura 5.13. Frontera Eficiente

5.4. Costo del Equivalente de Certeza (CEQ)

Se procederá a calcular el efecto de ignorar la presencia de saltos en los rendimientos de los activos y en la selección de portafolio en la Utilidad Esperada mediante la determinación del Costo de Equivalente de Certeza (CEQ) el cual mide la riqueza adicional que se necesita para incrementar la utilidad esperada de la riqueza bajo la estrategia subóptima hasta alcanzar la utilidad esperada de la riqueza bajo la estrategia óptima, es decir, el monto adicional que hace que la utilidad esperada bajo la estrategia subóptima sea igual a la utilidad esperada bajo la estrategia óptima, el CEQ se calculará para diversos horizontes de inversión y coeficientes de aversión al riesgo relativo para los portafolios óptimos con restricciones. Según la metodología planteada en el capítulo 4, para determinar el CEQ se utiliza los portafolios óptimos de cada modelo con restricciones obtenidos para cada nivel de aversión al riesgo y utilizando las expresiones (64) y (65) se procede a estimar el CEQ para diversos horizontes de inversión que van desde 30 días hasta 1250 días (5 años).

La Tabla 5.19 muestra el Equivalente de Certeza (CEQ) del Modelo de Difusión Puro con Restricciones respecto al Modelo de Difusión de Saltos con Restricciones mientras que la Tabla 5.20 muestra el Equivalente de Certeza (CEQ) del Modelo de Difusión Puro con Restricciones respecto al Modelo de Difusión de Saltos con Restricciones en Nuevos Soles, asimismo, las Figuras 5.14 y 5.15 muestran la relación entre la aversión al riesgo, el horizonte de inversión y el CEQ obtenidos de la Tabla 5.19, al respecto, se aprecia que el CEQ es mayor para valores de aversión al riesgo menores, se muestra que a medida que aumenta el horizonte de inversión el valor del CEQ también aumenta, por otro lado, a medida que aumenta la aversión al riesgo, el CEQ disminuye hasta un valor de aversión al riesgo de 7, luego aumenta hasta el valor de aversión al riesgo de 10. En esa misma línea, también se analizará los resultados de los portafolios de los modelos sin restricciones, al respecto, la Tabla 5.21 muestra el Equivalente de Certeza (CEQ) del Modelo de Difusión Puro sin Restricciones respecto al Modelo de Difusión de Saltos sin Restricciones mientras que la Tabla 5.22 muestra el CEQ en Nuevos Soles, asimismo, la Figura 5.16 muestra la relación entre la aversión al riesgo, el horizonte de inversión y el CEQ obtenidos en la Tabla 5.21, según ello, se aprecia que el CEQ es mayor cuando el horizonte de inversión es mayor, además el CEQ disminuye a medida que aumenta el coeficiente de aversión al riesgo.

Por lo tanto, el costo de no considerar los saltos en los rendimientos de los activos medido a través del CEQ aumenta en la medida que el horizonte de inversión aumente y el coeficiente de aversión al riesgo disminuya. De los resultados mostrados en las Tablas 5.19 y 5.20 que corresponden a los modelos con restricciones se aprecia que para un coeficiente de aversión al riesgo de 2, el CEQ es igual a 0.06% para un horizonte de inversión de 1 año y se incrementa a 0.3% para un horizonte de inversión de 5 años. Esto significa que para un inversionista con una riqueza inicial de S/. 10 000, el costo de ignorar los saltos aumenta de S/. 6 para un horizonte de inversión de 1 año a S/. 30 para un horizonte de inversión de 5 años, no obstante, según los resultados mostrados en las Tablas 5.21 y 5.22 que corresponden a los modelos sin restricciones se aprecia un efecto y costo mayor, por ejemplo, para una aversión al riesgo de 2, el CEQ es igual a 0.14% para un horizonte de inversión de 1 año y se incrementa a 0.73% para un horizonte de inversión de 5 años. Esto significa que para un inversionista con una riqueza inicial de S/. 10 000, el costo de ignorar los saltos aumenta de S/. 14.61 para un horizonte de inversión de 1 año a S/. 73.25 para un horizonte de inversión de 5 años.

Del mismo modo, respecto al modelo media-varianza, La Tabla 5.23 muestra el Equivalente de Certeza (CEQ) del Modelo Media-Varianza respecto al Modelo de Difusión de Saltos con Restricciones mientras que la Tabla 5.24 muestra el CEQ en Nuevos Soles, asimismo, las Figuras 5.17 y 5.18 muestran la relación entre la aversión al riesgo, el horizonte de inversión y el CEQ obtenidos de la Tabla 5.23, al respecto, se aprecia que el CEQ es mayor para mayores horizontes de inversión, asimismo el CEQ disminuyó a medida que aumentó el coeficiente de aversión al riesgo hasta llegar a 8, luego aumentó hasta llegar a 10. De los resultados mostrados en la Tabla 5.23 se aprecia que para un coeficiente de aversión al riesgo de 2, el CEQ es igual a 0.065% para un horizonte de inversión de 1 año y se incrementa a 0.33% para un horizonte de inversión de 5 años. Esto significa que para un inversionista con una riqueza inicial de S/. 10 000, el costo de ignorar los saltos aumenta de S/. 6.52 para un horizonte de inversión de 1 año a S/. 32.65 para un horizonte de inversión de 5 años, con ello se concluye que el costo de ignorar la presencia de los saltos en los rendimientos de los activos y en la selección de portafolio es ligeramente mayor utilizando el modelo media-varianza que el modelo de difusión puro, es decir, para igualar a la utilidad esperada de la riqueza bajo el modelo de difusión de saltos es necesario añadir un mayor monto de dinero al modelo media-varianza en comparación con el modelo de difusión puro, por ejemplo, como se mencionó, para un coeficiente de aversión de 2 y horizonte de inversión 5 años, el monto que se debe añadir o costo de ignorar es S/.32 en el modelo de difusión puro, mientras que en el modelo media-varianza el monto que se debe añadir es S/.30.

Como se mencionó, el portafolio que se adapta mejor al portafolio de renta variable del Fondo 3 corresponde al portafolio de un inversionista con un coeficiente de aversión al riesgo igual a 2.5, según ello, las Tablas 5.25 y 5.26 muestran la comparación del Equivalente de Certeza (CEQ) del

Modelo de Difusión Puro con Restricciones respecto al Modelo de Difusión de Saltos con Restricciones y del Modelo Media-Varianza respecto al Modelo de Difusión de Saltos con Restricciones para el coeficiente de aversión al riesgo de 2.5, asimismo se calculó el CEQ del Portafolio de Renta Variable del Fondo 3 respecto al Modelo de Difusión de Saltos con Restricciones, al respecto, se aprecia que en el caso del modelo de difusión puro respecto al modelo de difusión de saltos, el CEQ es igual a 0.05722% para un horizonte de inversión de 1 año y se incrementa a 0.286% para un horizonte de inversión de 5 años, lo cual implica que para una riqueza inicial de S/. 10 000, el costo de ignorar los saltos aumenta de S/. 5.722 para un horizonte de inversión de 1 año a S/. 28.642 para un horizonte de inversión de 5 años, asimismo, en el caso del modelo media-varianza, el CEQ es igual a 0.05709% para un horizonte de inversión de 1 año y se incrementa a 0.285% para un horizonte de inversión de 5 años, lo cual implica que para una riqueza inicial de S/. 10 000, el costo de ignorar los saltos aumenta de S/. 5.709 para un horizonte de inversión de 1 año a S/. 28.576 para un horizonte de inversión de 5 años, finalmente, en el caso del portafolio de renta variable del Fondo 3, el CEQ es a 0.624% para un horizonte de inversión de 1 año y se incrementa a 3.16% para un horizonte de inversión de 5 años, lo cual implica que para una riqueza inicial de S/. 10 000, el costo de ignorar los saltos aumenta de S/. 62.447 para un horizonte de inversión de 1 año a S/. 316.16 para un horizonte de inversión de 5 años, ello permite concluir que el costo de ignorar la presencia de los saltos en los rendimientos de los activos y en la selección de portafolio es mayor utilizando la composición del portafolio de renta variable del Fondo 3 seguido por el modelo de difusión puro y el modelo media-varianza, es decir, para igualar a la utilidad esperada de la riqueza bajo el modelo de difusión de saltos es necesario añadir un mayor monto de dinero a la inversión inicial del Fondo 3 en comparación con el modelo de difusión puro y con el modelo media-varianza, lo cual demuestra que con la composición actual del portafolio de renta variable del Fondo 3 la utilidad esperada es menor debido a que se ignora la presencia de los saltos en los rendimientos de los activos y en la selección de portafolio, en comparación con el modelo de difusión saltos que sí considera los saltos donde la Utilidad es mayor.

Aversión al Riesgo Relativo (Gamma)	Horizonte de Inversión (días)								
	30	60	90	120	250	500	750	1000	1250
2	0.0000720	0.0001440	0.0002160	0.0002880	0.0006001	0.0012005	0.0018013	0.0024024	0.0030039
2.5	0.0000686	0.0001373	0.0002059	0.0002746	0.0005722	0.0011447	0.0017175	0.0022907	0.0028642
3	0.0000522	0.0001044	0.0001566	0.0002087	0.0004349	0.0008701	0.0013054	0.0017409	0.0021766
4	0.0000125	0.0000249	0.0000374	0.0000499	0.0001039	0.0002078	0.0003117	0.0004156	0.0005195
5	0.0000134	0.0000268	0.0000402	0.0000537	0.0001118	0.0002236	0.0003354	0.0004472	0.0005590
6	0.0000060	0.0000121	0.0000181	0.0000242	0.0000504	0.0001008	0.0001511	0.0002015	0.0002519
7	0.0000027	0.0000054	0.0000081	0.0000107	0.0000224	0.0000448	0.0000671	0.0000895	0.0001119
8	0.0000064	0.0000127	0.0000191	0.0000254	0.0000529	0.0001059	0.0001589	0.0002118	0.0002648
9	0.0000165	0.0000330	0.0000495	0.0000660	0.0001376	0.0002752	0.0004129	0.0005505	0.0006882
10	0.0000331	0.0000662	0.0000993	0.0001324	0.0002759	0.0005518	0.0008278	0.0011039	0.0013801

Tabla 5.19. Equivalente de Certeza (CEQ) del Modelo de Difusión Puro respecto al Modelo de Difusión de Saltos con Restricciones

Aversión al Riesgo Relativo (Gamma)	Horizonte de Inversión (días)								
	30	60	90	120	250	500	750	1000	1250
2	0.720	1.440	2.160	2.880	6.001	12.005	18.013	24.024	30.039
2.5	0.686	1.373	2.059	2.746	5.722	11.447	17.175	22.907	28.642
3	0.522	1.044	1.566	2.087	4.349	8.701	13.054	17.409	21.766
4	0.125	0.249	0.374	0.499	1.039	2.078	3.117	4.156	5.195
5	0.134	0.268	0.402	0.537	1.118	2.236	3.354	4.472	5.590
6	0.060	0.121	0.181	0.242	0.504	1.008	1.511	2.015	2.519
7	0.027	0.054	0.081	0.107	0.224	0.448	0.671	0.895	1.119
8	0.064	0.127	0.191	0.254	0.529	1.059	1.589	2.118	2.648
9	0.165	0.330	0.495	0.660	1.376	2.752	4.129	5.505	6.882
10	0.331	0.662	0.993	1.324	2.759	5.518	8.278	11.039	13.801

Tabla 5.20. Equivalente de Certeza (CEQ) del Modelo de Difusión Puro respecto al Modelo de Difusión de Saltos con Restricciones en Nuevos Soles

Aversión al Riesgo Relativo (Gamma)	Horizonte de Inversión (días)								
	30	60	90	120	250	500	750	1000	1250
2	0.000175	0.000350	0.000526	0.000701	0.001461	0.002924	0.004389	0.005856	0.007325
2.5	0.000140	0.000280	0.000421	0.000561	0.001169	0.002339	0.003510	0.004683	0.005857
3	0.000117	0.000234	0.000350	0.000467	0.000974	0.001949	0.002924	0.003901	0.004879
4	0.000088	0.000175	0.000263	0.000351	0.000730	0.001461	0.002193	0.002925	0.003657
5	0.000070	0.000140	0.000210	0.000280	0.000584	0.001169	0.001754	0.002339	0.002925
6	0.000058	0.000117	0.000175	0.000234	0.000487	0.000974	0.001461	0.001949	0.002437
7	0.000050	0.000100	0.000150	0.000200	0.000417	0.000835	0.001253	0.001670	0.002089
8	0.000044	0.000088	0.000131	0.000175	0.000365	0.000731	0.001096	0.001462	0.001827
9	0.000039	0.000078	0.000117	0.000156	0.000325	0.000649	0.000974	0.001299	0.001624
10	0.000035	0.000070	0.000105	0.000140	0.000292	0.000584	0.000877	0.001169	0.001462

Tabla 5.21. Equivalente de Certeza (CEQ) del Modelo de Difusión Puro respecto al Modelo de Difusión de Saltos sin Restricciones

Aversión al Riesgo Relativo (Gamma)	Horizonte de Inversión (días)								
	30	60	90	120	250	500	750	1000	1250
2	1.752	3.504	5.256	7.009	14.607	29.236	43.886	58.557	73.250
2.5	1.402	2.803	4.205	5.608	11.686	23.386	35.099	46.826	58.566
3	1.168	2.336	3.505	4.673	9.738	19.486	29.243	39.010	48.787
4	0.876	1.752	2.629	3.505	7.304	14.613	21.927	29.247	36.572
5	0.701	1.402	2.103	2.804	5.843	11.690	17.539	23.393	29.249
6	0.584	1.168	1.753	2.337	4.869	9.741	14.615	19.491	24.370
7	0.501	1.002	1.502	2.003	4.174	8.349	12.526	16.705	20.886
8	0.438	0.876	1.315	1.753	3.652	7.305	10.960	14.616	18.273
9	0.389	0.779	1.168	1.558	3.246	6.493	9.742	12.991	16.241
10	0.351	0.701	1.052	1.402	2.922	5.844	8.767	11.691	14.616

Tabla 5.22. Equivalente de Certeza (CEQ) del Modelo de Difusión Puro respecto al Modelo de Difusión de Saltos sin Restricciones en Nuevos Soles

Aversión al Riesgo Relativo (Gamma)	Horizonte de Inversión (días)								
	30	60	90	120	250	500	750	1000	1250
2	0.0000782	0.0001564	0.0002345	0.0003127	0.0006517	0.0013037	0.0019562	0.0026092	0.0032625
2.5	0.0000685	0.0001370	0.0002055	0.0002740	0.0005709	0.0011421	0.0017136	0.0022855	0.0028576
3	0.0000521	0.0001042	0.0001563	0.0002085	0.0004343	0.0008689	0.0013036	0.0017385	0.0021736
4	0.0000125	0.0000250	0.0000374	0.0000499	0.0001040	0.0002081	0.0003121	0.0004162	0.0005202
5	0.0000135	0.0000269	0.0000404	0.0000538	0.0001122	0.0002244	0.0003366	0.0004488	0.0005611
6	0.0000068	0.0000136	0.0000204	0.0000272	0.0000566	0.0001132	0.0001698	0.0002264	0.0002830
7	0.0000017	0.0000034	0.0000051	0.0000068	0.0000142	0.0000284	0.0000425	0.0000567	0.0000709
8	0.0000001	0.0000003	0.0000004	0.0000006	0.0000012	0.0000024	0.0000036	0.0000048	0.0000060
9	0.0000022	0.0000045	0.0000067	0.0000089	0.0000186	0.0000372	0.0000557	0.0000743	0.0000929
10	0.0000083	0.0000165	0.0000248	0.0000330	0.0000688	0.0001376	0.0002065	0.0002753	0.0003442

Tabla 5.23. Equivalente de Certeza (CEQ) del Modelo Media Varianza respecto al Modelo de Difusión de Saltos con Restricciones

Aversión al Riesgo Relativo (Gamma)	Horizonte de Inversión (días)								
	30	60	90	120	250	500	750	1000	1250
2	0.782	1.564	2.345	3.127	6.517	13.037	19.562	26.092	32.625
2.5	0.685	1.370	2.055	2.740	5.709	11.421	17.136	22.855	28.576
3	0.521	1.042	1.563	2.085	4.343	8.689	13.036	17.385	21.736
4	0.125	0.250	0.374	0.499	1.040	2.081	3.121	4.162	5.202
5	0.135	0.269	0.404	0.538	1.122	2.244	3.366	4.488	5.611
6	0.068	0.136	0.204	0.272	0.566	1.132	1.698	2.264	2.830
7	0.017	0.034	0.051	0.068	0.142	0.284	0.425	0.567	0.709
8	0.001	0.003	0.004	0.006	0.012	0.024	0.036	0.048	0.060
9	0.022	0.045	0.067	0.089	0.186	0.372	0.557	0.743	0.929
10	0.083	0.165	0.248	0.330	0.688	1.376	2.065	2.753	3.442

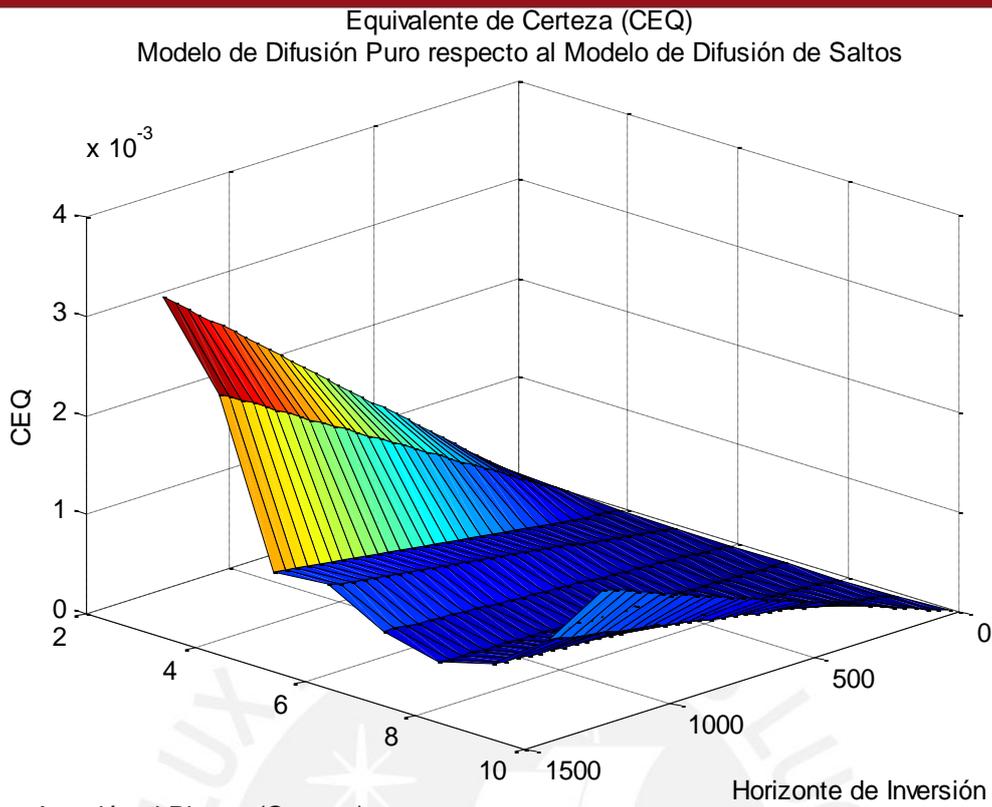
Tabla 5.24. Equivalente de Certeza (CEQ) del Modelo Media Varianza respecto al Modelo de Difusión de Saltos con Restricciones en Nuevos Soles

Aversión al Riesgo Relativo Gamma = 2.5	Horizonte de Inversión (días)								
	30	60	90	120	250	500	750	1000	1250
Modelo de Difusión Puro	0.0000686	0.0001373	0.0002059	0.0002746	0.0005722	0.0011447	0.0017175	0.0022907	0.0028642
Modelo Media Varianza	0.0000685	0.0001370	0.0002055	0.0002740	0.0005709	0.0011421	0.0017136	0.0022855	0.0028576
Fondo 3	0.0007473	0.0014952	0.0022436	0.0029926	0.0062447	0.0125285	0.0188515	0.0252139	0.0316161

Tabla 5.25. Comparación de Equivalente de Certeza (CEQ) respecto al Modelo de Difusión de Saltos

Aversión al Riesgo Relativo Gamma = 2.5	Horizonte de Inversión (días)								
	30	60	90	120	250	500	750	1000	1250
Modelo de Difusión Puro	0.686	1.373	2.059	2.746	5.722	11.447	17.175	22.907	28.642
Modelo Media Varianza	0.685	1.370	2.055	2.740	5.709	11.421	17.136	22.855	28.576
Fondo 3	7.473	14.952	22.436	29.926	62.447	125.285	188.515	252.139	316.161

Tabla 5.26. Comparación de Equivalente de Certeza (CEQ) respecto al Modelo de Difusión de Saltos en Nuevos Soles



Aversión al Riesgo (Gamma)
Figura 5.14. CEQ Difusión Puro respecto Difusión de Saltos con Restricciones 3D

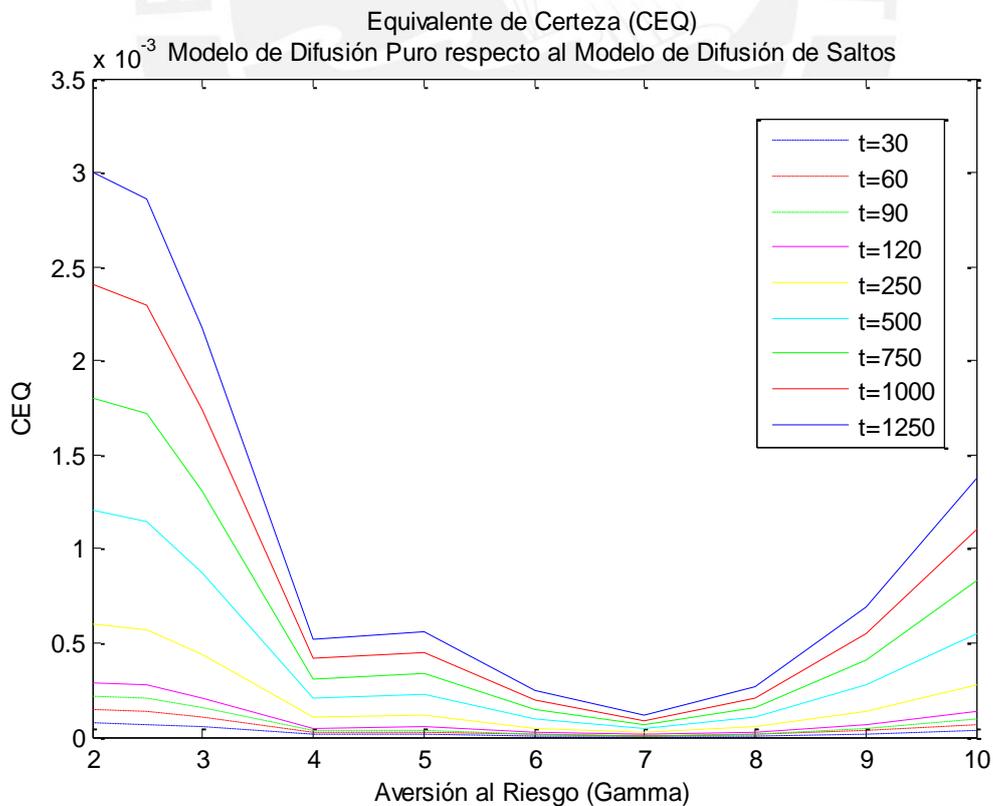


Figura 5.15. CEQ Difusión Puro respecto Difusión de Saltos con Restricciones

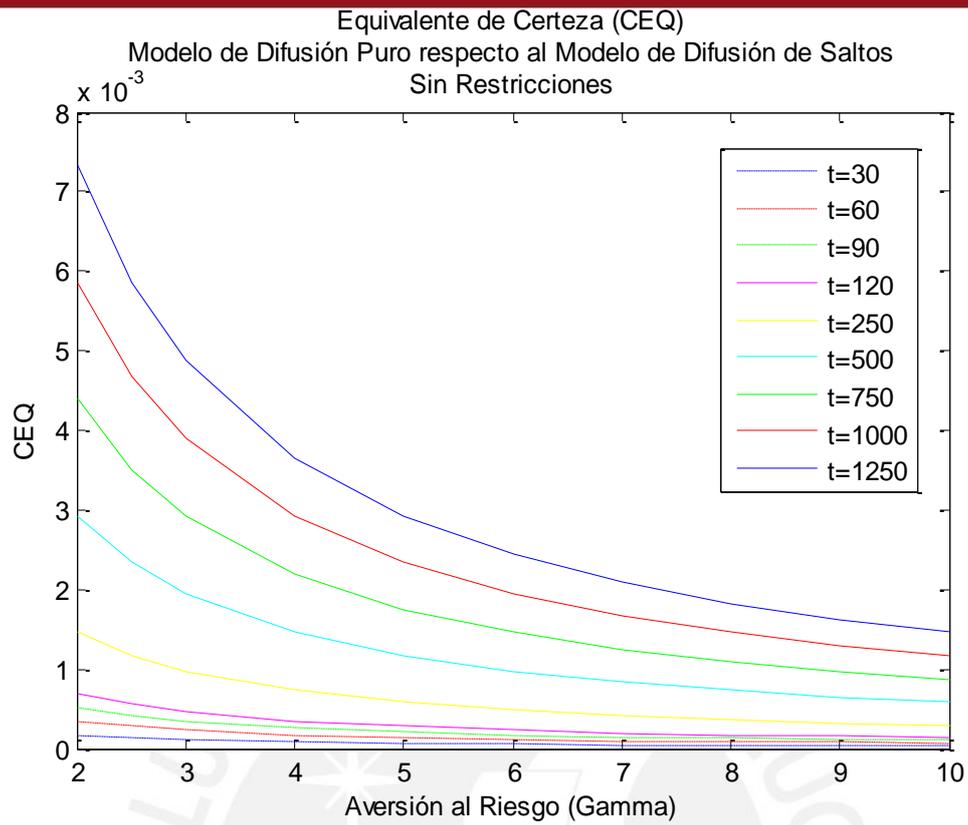


Figura 5.16. CEQ Difusión Puro respecto Difusión de Saltos sin Restricciones

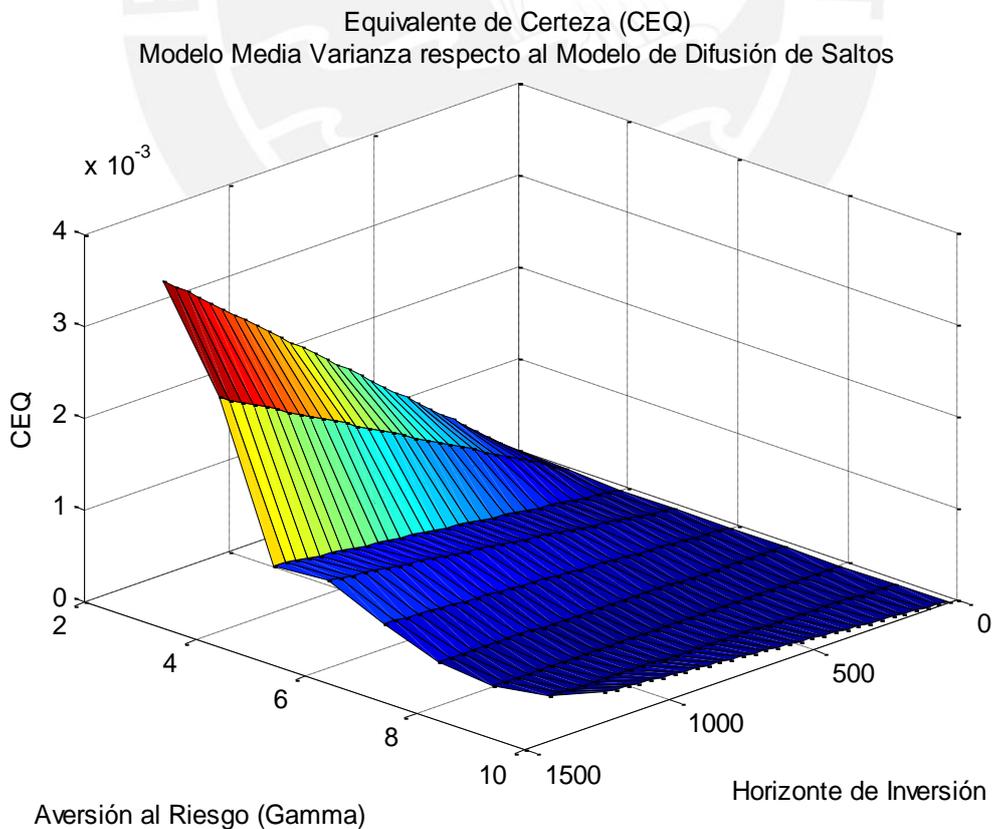


Figura 5.17. CEQ Media Varianza respecto Difusión de Saltos con Restricciones 3D

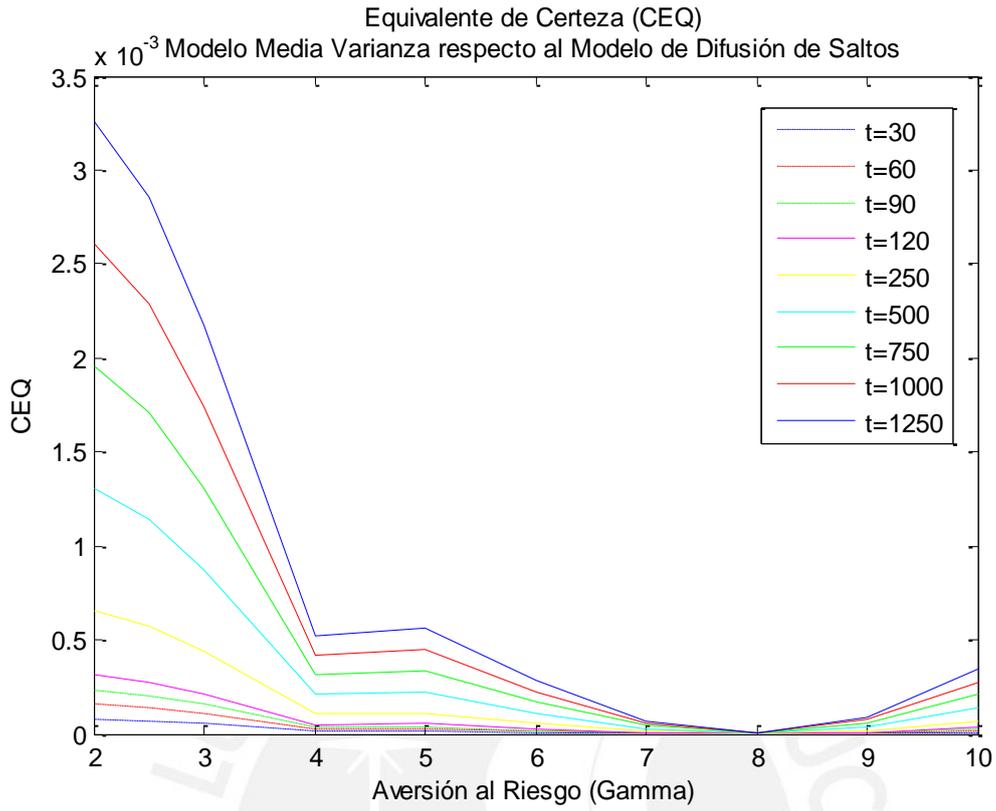


Figura 5.18. CEQ Media Varianza respecto Difusión de Saltos con Restricciones

6. Conclusiones

La presente investigación realizó una evaluación del impacto de los saltos en la selección del portafolio óptimo de un agente económico que administra el portafolio de renta variable del Fondo Tipo 3 de una AFP en el Perú. Para medir ese impacto se cuantificó el efecto de ignorar la presencia de saltos mediante el cálculo del Costo de Equivalente de Certeza (CEQ), el cual mide la inversión adicional necesaria para que la utilidad bajo la estrategia que no considera los saltos sea igual a la utilidad bajo la estrategia que sí considera los saltos.

En primer lugar, se demostró que la distribución normal no se ajusta a los rendimientos de los activos, tanto el gráfico Q-Q como el gráfico de distribución demostraron ello en la medida que la distribución normal no captura el pico central ni las colas anchas de la distribución de rendimiento de los activos reflejado por una curtosis elevada y por una asimetría negativa, por lo tanto, el supuesto de normalidad que se utiliza en el modelo de media-varianza no se estaría cumpliendo pues estaríamos subestimando los valores de rendimiento y generando un error en las estimaciones del portafolio.

Asimismo, respecto al modelo de difusión puro, se obtuvo que lo óptimo sería apalancarse en los dos activos con menor rendimiento y volatilidad con el objetivo de sobreponderar la posición en los otros activos con mayor rendimiento y volatilidad; y también sobreponderar la posición en el activo libre de riesgo, además, se obtuvo que entre los dos activos con posición corta el apalancamiento es mayor en el activo con el menor rendimiento y volatilidad. Se obtuvo que a medida que aumenta la aversión al riesgo se reduce el grado de apalancamiento en el portafolio.

Por otro lado, respecto al modelo de difusión de saltos, se obtuvo que lo óptimo sería apalancarse en los dos activos con menor rendimiento y volatilidad, y que además presenten las mayores amplitudes de salto, con el objetivo de sobreponderar la posición en los otros activos con mayor rendimiento y volatilidad, y menor amplitud de salto; y también sobreponderar la posición en el activo libre de riesgo, asimismo, se encontró que entre los dos activos con posición corta el apalancamiento es mayor en el activo con el menor rendimiento y volatilidad, y mayor amplitud de salto. Se encontró que el rendimiento del modelo de difusión de saltos es mayor cuando la amplitud del salto es más negativa, ello hace que el peso de un activo con una amplitud más negativa (menor amplitud del salto) sea mayor respecto a un activo con una amplitud menos negativa (mayor amplitud del salto). Además, también se obtuvo que a medida que aumenta la aversión al riesgo se reduce el grado de apalancamiento en el portafolio.

De esa misma manera, se demostró que si se considera la presencia de saltos sistémicos en el rendimiento de los activos se produce un cambio en la asignación de los activos dentro del portafolio además de intervenir en el grado de apalancamiento del portafolio. Se encontró que a medida que aumenta el grado de aversión al riesgo en el inversionista las diferencias entre los pesos de los activos en el modelo de difusión de salto y en el modelo de difusión puro se reducen, ello implica que mientras mayor sea la aversión al riesgo se reduce el efecto de los saltos en la asignación de los portafolios óptimos. Asimismo, se obtuvo que para menores valores de aversión al riesgo, el modelo de difusión de saltos, que sí reconoce los saltos a diferencia del modelo de difusión puro y del modelo media-varianza que no reconocen los saltos, asigna un mayor peso a activos con menor amplitud de salto mientras que para mayores valores de aversión al riesgo, asigna un mayor peso a activos con mayor amplitud del salto.

Finalmente, se obtuvo que el costo de no considerar los saltos en los rendimientos de los activos medido a través del Costo de Equivalente de Certeza (CEQ) aumenta en la medida que el horizonte de inversión aumente y el coeficiente de aversión al riesgo disminuya. Se demostró que el costo de ignorar la presencia de los saltos en los rendimientos de los activos y en la selección de portafolio es mayor utilizando la composición actual del portafolio de renta variable del Fondo 3 seguido por el modelo de difusión puro y el modelo media-varianza, es decir, para igualar a la

utilidad esperada de la riqueza bajo el modelo de difusión de saltos es necesario añadir un mayor monto de dinero al Fondo 3 en comparación con el modelo de difusión puro y con el modelo media-varianza, con lo cual se demostró que con la composición actual del portafolio de renta variable del Fondo 3 la utilidad esperada es menor debido a que se ignora la presencia de los saltos en los rendimientos de los activos y en la selección de portafolio, en comparación con el modelo de difusión saltos que sí considera los saltos donde la Utilidad es mayor.

Por lo tanto, en respuesta a la hipótesis planteada, se ha demostrado que los saltos impactan negativamente en la selección del portafolio óptimo y que el Fondo de Pensiones Tipo 3 es un agente económico que presenta cierto grado de aversión al riesgo el cual está asociado a un mayor valor del Costo de Equivalente de Certeza (CEQ).



Bibliografía

- 1) Aït-Sahalia, Yacine & Brandt, Michael (2001). "Variable Selection for Portfolio Choice". *The Journal of Finance*. Vol. LVI, N° 4.
- 2) Aït-Sahalia, Yacine & Hurd, Thomas (2012). "Portfolio Choice in Markets with Contagion". Working Papers Series. Princeton University.
- 3) Aït-Sahalia, Yacine & Matthys, Felix (2014). "Robust Portfolio Optimization with Jumps". Working Paper. Princeton University.
- 4) Aït-Sahalia, Yacine (2004). "Disentangling diffusion from Jumps". *Journal of Financial Economics* 74, 487-528.
- 5) Aït-Sahalia, Yacine, Cacho-Díaz, Julio & Hurd, Thomas (2006). "Portfolio choice with a large number of assets: Jumps and diversification". Working Paper. Princeton University.
- 6) Aït-Sahalia, Yacine, Cacho-Díaz, Julio & Hurd, Thomas (2009). "Portfolio Choice with Jumps: A closed-form solution". *The Annals of Applied Probability* Vol.19, N°2, 556-584.
- 7) Aït-Sahalia, Yacine, Cacho-Díaz, Julio & Laeven, Roger (2012). "Modelling Financial Contagion Using Mutually Exciting Jump Processes". Princeton University.
- 8) Aït-Sahalia, Yacine, Cacho-Díaz, Julio & Laeven, Roger (2012). "Supplement to Modelling Financial Contagion Using Mutually Exciting Jump Processes". Princeton University.
- 9) Atterbury, Thomas (2003). "Learning How to Invest When Returns are Uncertain". Ph.D. in Business Economics Thesis. Harvard University.
- 10) Barndorff-Nielsen, Ole E. & Shephard, Neil (2003). "Impact of Jumps on returns and realised variances: econometric analysis of time-deformed Lévy processes"
- 11) Barndorff-Nielsen, Ole E. & Shephard, Neil (2006). "Measuring the impact of jumps in multivariate price processes using bipower covariation"
- 12) Barndorff-Nielsen, Ole E. & Shephard, Neil (2012). "Basics of Lévy Processes"
- 13) Bollerslev, Tim & Todorov, Victor (2011). "Estimation of Jump Tails". *Econometría*, Vol. 79, N° 6 (November 2011), 1727-1783.
- 14) Brandt, Michael W. (2010). "Portfolio Choice Problems". *Handbook of Financial Econometrics*.
- 15) Branger, N., Kraft, H. & Meinerding, C. (2013). "Partial Information about Contagion Risk, Self-Exciting Processes and Portfolio Optimization". Working Paper. Goethe University.
- 16) Cacho-Díaz, Julio (2007). "Identification and Inference of Jumps using Hedge Fund Returns". Princeton University.
- 17) Cacho-Díaz, Julio (2008). "Optimal Portfolio Choice with Jumps". Ph.D. Thesis. Princeton University.
- 18) Campbell, John & Luis M: Viceira (2004). "Long – Horizon Mean Variance Analysis"
- 19) Campbell, John Y., João Cocco, Francisco Gomes, Pascal J. Maenhout, and Luis M. Viceira. (2001). "Stock market mean reversion and the optimal equity allocation of a long-lived investor". *European Finance Review* 5(3): 269-292.
- 20) Campbell, John Y., Yeung Lewis Chan, and Luis M. Viceira. (2003). "A Multivariate Model of Strategic Asset Allocation". *Journal of Financial Economics* 67, N°. 1: 41-80.
- 21) Chacko, George & Luis M. Viceira (2003). "Spectral GMM estimation of Continuous-Time Processes". *Journal of Econometrics* 116 (2003) 259-292.
- 22) Chacko, George & Luis M. Viceira (2005). "Dynamic Consumption and Portfolio Choice with Stochastic Volatility in Incomplete Markets". *The Review of Financial Studies*, Vol. 18, No. 4 (Winter, 2005), pp. 1369-1402
- 23) Chávez-Bedoya, Luis & Birge, Jhon (2014). "Asset Allocation under Generalized Hyperbolic Distribution: Optimal Portfolios and Performance Measures"
- 24) Chávez-Bedoya, Luis & Birge, Jhon (2014). "Modeling Distribution Uncertainty in Active Portfolio Management"
- 25) Chávez-Bedoya, Luis & Birge, Jhon (2014). "Portfolio Optimization under generalized hyperbolic skewed t Distribution and exponential utility"
- 26) Chávez-Bedoya, Luis (2006). "Procesos de Lévy: Propiedades e Integración Estocástica". Tesis Magister en Matemáticas con Mención en Procesos Estocásticos. Escuela de Posgrado.

- Pontificia Universidad Católica del Perú.
- 27) Chávez-Bedoya, Luis (2011). "Portfolio Optimization under Generalized Hyperbolic Distribution of Returns and Exponential Utility". Ph.D. Thesis Industrial Engineering and Management Sciences. Northwestern University.
 - 28) Cont, Rama & Tankov, Peter (2004). "Financial Modelling with Jump Processes". Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.
 - 29) Cont, Rama (2001). "Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues". *Quantitative Finance* Volume1 (2001) 223-236.
 - 30) Cvitanic, J., Polimenis, V. & Zapatero, F. (2008). "Optimal Portfolio allocation with higher moments". *Annals of Finance*.
 - 31) Cvitanic, Jaksa & Karatsas, Ioannis (1992). "Convex Duality in Constrained Portfolio Optimization". *The Annals of Applied Probability*, Vol. 2, No. 4. (Nov., 1992), pp. 767-818.
 - 32) Cvitanic, Jaksa, Polimenis, Vassilis & Zapatero, Fernando (2011). "Optimal portfolio allocation with higher moments".
 - 33) Das, Sanjiv & Uppal, Raman (2004). "Systematic Risk and International Portfolio Choice". *The Journal of Finance*. Vol. LIX, N° 6. December 2004.
 - 34) Eraker, Bjorn, Johannes, Michael & Polson, Nicholas (2003). "The Impact of Jumps in Volatility and Returns". *The Journal of Finance*. Vol. LVIII, N° 3, June 2003.
 - 35) Ferreira Gomes, Francisco (2000). "Essays on Optimal Portfolio Choice". Ph.D. Thesis. Harvard University.
 - 36) Giesecke, Kay & Smelov, Dmitry (2013). "Exact Sampling of Jump Diffusion". *Operation Research* Vol.61, N° 4, July-August 2013, pp. 893-907.
 - 37) Glasserman, Paul & Xu, Xingbo (2011). "Portfolio Rebalancing Error with Jumps and Mean Reversion in Asset Prices". *Stochastic Systems* 2011, Vol.1, 1-37.
 - 38) Glasserman, Paul & Xu, Xingbo (2013). "Robust Portfolio Control with Stochastic Factor Dynamics". *Operation Research* Vol. 61, N° 4, July-August 2013, pp. 874-893
 - 39) Glasserman, Paul & Xu, Xingbo (2013). "Robust Risk Measurement and Model Risk". *Quantitative Finance* 2013.
 - 40) Hansen, Lars P. (2007). "Generalized Methods of Moments Estimation".
 - 41) Harvey, Campbell (2010). "Portfolio Selection with higher moments". *Quantitative Finance*. Vol.10, N° 5, May 2010, 469-485.
 - 42) Haugh, Martin & Jain, Ashish (2009). "The Dual Approach to Portfolio Evaluation: A Comparison of the Static, Myopic and Generalized Buy-and-Hold Strategies"
 - 43) Haugh, Martin & Kogan, Leonid (2008). "Duality Theory and Approximate Dynamic Programming for Pricing American Options and Portfolio Optimization"
 - 44) Haugh, Martin (2003). "Duality Theory and Simulation in Financial Engineering". *Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference*.
 - 45) Haugh, Martin, Kogan, Leonid & Wang, Jiang (2003). "Evaluating Portfolio Policies: A Duality Approach"
 - 46) Haugh, Martin, Kogan, Leonid & Wu, Zhen (2006). "Portfolio Optimization with Position Constraints: an Approximate Dynamic Programming Approach"
 - 47) Hu, Wenbo & Kercheval, Alec (2010). "Portfolio Optimization for student t and skewed t returns". *Quantitative Finance*, Vol.10, N° 1, January, 2010, 91-105.
 - 48) Hwan Sung, Chang (2006). "Application of Modern Control Theory in Portfolio Optimization". Ph.D. Thesis. Stanford University.
 - 49) Jain, Ashish (2007). "Essays on Volatility Derivatives and Portfolio Optimization". Ph.D. Thesis. Columbia University.
 - 50) Jin, Xing & Zhang, Allen (2012). "Ambiguity Aversion, Optimal Portfolio Choice and Market Decomposition with Rare Events"
 - 51) Jin, Xing & Zhang, Allen (2012). "Decomposition of Optimal Portfolio Weight in a Jump-Diffusion Model and Its Applications"
 - 52) Jin, Xing & Zhang, Kun (2013). "Dynamic optimal portfolio choice in a jump-diffusion model with investment constraints". *Journal of Banking & Finance* 37 (2013) 1733–1746
 - 53) Johannes, Michael (2004). "The Statistical and Economic Role of Jumps in Continuous-Time Interest Rate Models". *The Journal of Finance*. Vol. LIX, N° 1.

- 54) Jondeau, Eric & Rockinger, Michael (2006). "Optimal Portfolio Allocation under Higher Moments". *European Financial Management*, Vol. 12, No. 1, 2006, 29-55.
- 55) Jurek, Jakub & Luis M. Viceira (2010). "Optimal Value and Growth Tilts in Long-Horizon"
- 56) Kilic, Erden & Ulusoy, Veysel (2012). "Evaluation of International Transmission Processes: Financial Contagion"
- 57) Kladvivko, Kamil (2008). "The General Method of Moments (GMM) using MATLAB: The practical guide based on the CKLS interest rate model"
- 58) Labbé, Chantal (2004). "Contribution to the Theory of Constrained Portfolio Optimization". Ph.D. Thesis. University of Waterloo.
- 59) Le Courtois, Olivier & Menoncin, Francesco (2013). "Management of Pension Fund under Market Jump Risk"
- 60) Lim, Andrew (2005). "Mean Variance Hedging when there are Jumps". *Siam Journal of Control Optimization*. Vol. 44, No. 5, pp. 1893–1922.
- 61) Liu, Jun (2000). "Portfolio Selection in Stochastic Enviroments". Ph.D. Thesis Stanford University.
- 62) Liu, Jun, Longstaff, Francis & Pan, Jun (2003). "Dynamic Asset Allocation with Event Risk". *The Journal of Finance*. Vol. LVIII, N°1, Feb 2003.
- 63) Liu, Ming (2010). "Efficient Simulation in Financial Risk Management". Ph.D. Thesis Stanford University.
- 64) Luschgy, Harald & Pages, Gilles (2008). "Moment Estimates for Lévy Processes"
- 65) Madan, Dilip & Yen, Ju (2008). "Asset Allocation with Multivariate Non-Gaussian Returns" *Handbook in Operation Research and Management Sciences*.
- 66) Maenhout, Pascal (2000). "Essays on Portfolio Choice ans Asset Pricing". Ph.D. Thesis. Harvard University
- 67) Markowitz, Harry (1952). "Portfolio Selection". *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.
- 68) Matsuda, Kazuhisa (2005). "Introduction to the Mathematics of Lévy Processes"
- 69) Mendoza, Rodrigo (2014). "Eficiencia financiera en los portafolios de inversión de las AFP en el Perú: Un enfoque robusto de Multifondos"
- 70) Merton, Robert C. (1969). "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case". *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 51, No. 3 (Aug., 1969), pp. 247-257.
- 71) Merton, Robert C. (1971). "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model". *Journal of Economic Theory* 3, 373-413.
- 72) Moloche, Guillermo (2012). "Política Óptima de Inversiones de las AFPs: Implicancias del marco regulatorio y los esquemas de comisiones"
- 73) Papapantoleon, Antonis (2008). "An Introduction to Lévy Processes with Applications in Finance"
- 74) Penagos, Gabriel, Rubio, Gonzalo (2013). The Effects of Systemic Risk on the Allocation between Value and Growth Portfolios. *Journal of Mathematical Finance*, 2013, 3, 165-180
- 75) Purzitsky, Adam A. (2007). "Jump Diffusion Models in Empirical Asset Pricing". Ph.D. Thesis. Princeton University.
- 76) Reus, Lorenzo (2014). "Robust Portfolio Optimization with Applications in Currencies and Private Equity". Ph.D. Thesis. Princeton University.
- 77) Rivas-Llosa, Roddy & Camargo, Gonzalo (2002). "Eficiencia financiera de los límites de inversión para las AFP: una aplicación al caso peruano"
- 78) Sezgin, Orge & Korn, Ralf. "Continuous-time mean-variance portfolio optimization in a jump-diffusion market". *Decisions Economics and Finance* 34: 21-40.
- 79) Skiadas, Costis (2009). "Dynamic Portfolio Choice and Risk Aversion". *Handbook in Operation Research and Management Science*, Vol 15.
- 80) Solís Palomino, Diego Luis (2011). "Portafolio de acciones: aplicación de técnicas emergentes para su optimización". Tesis Título de Ingeniero Industrial. Facultad de Ciencias e Ingeniería. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- 81) Tankov, Peter & Voltchkova, Ekaterina (2009). "Jump-diffusion models: a practitioner's guide"

- 82) Todorov, Victor (2007). "Jump Processes in Finance: Modeling, Simulation, Inference and Pricing". Ph.D. Thesis. Duke University.
- 83) Torres, Jose Miguel (2007). "Essays in International Capital Markets". Ph.D. Thesis. Harvard University.
- 84) Watcher, Jessica (2000). "Essays in Financial Economics". Ph.D. Thesis. Harvard University.
- 85) Watcher, Jessica (2010). "Asset Allocation". Annual Reviews of Financial Economics 2:175-206, December 2010.
- 86) Wenjing Wuo & Chengming Xu (2004). "Optimal Portfolio Selection when stock prices follow a jump-diffusion processes". Mathematical Methods and Operations Research (2004) 60:485-496
- 87) White, Joshua S. (2003). "Three Essays on Portfolio Choice". Ph.D. Thesis. Harvard University.
- 88) Winkel, Matthias (2010). "Lévy Processes and Finance".
- 89) Wu, Liuren (2008). "Modeling Financial Security Returns Using Lévy Processes". Handbook in Operation Research and Management Sciences
- 90) Xu, Xingbo (2013). "Financial Portfolio Risk Management: Model Risk, Robustness and Rebalancing Error". Ph.D. Thesis. Columbia University.

