

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD**  
**CATÓLICA**  
DEL PERÚ

## PROCESO DE PERCOLACIÓN EN DOS DIMENSIONES

Tesis para optar por el Título de Licenciada en Matemática, que presenta la bachiller:

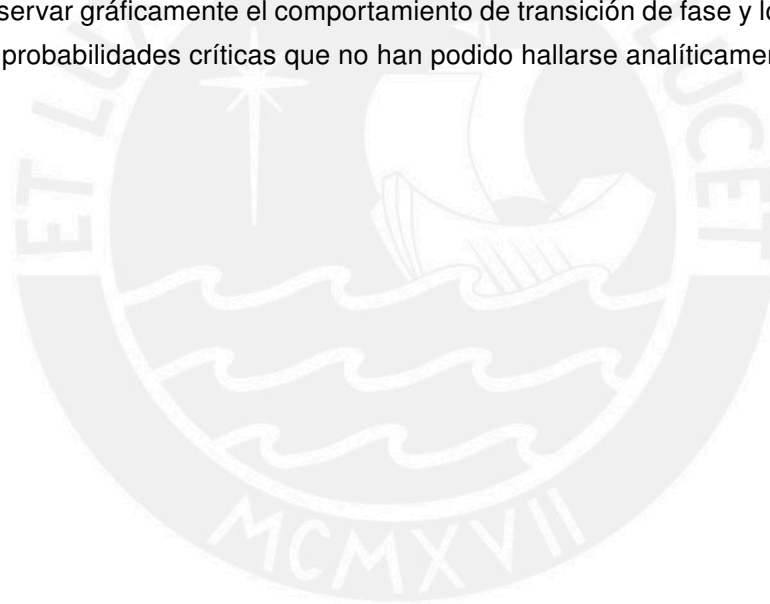
**Karen Alexandra Vásquez Vivas**

**ASESOR: Johel V. Beltrán Ramírez**

Lima, setiembre de 2014

## Resumen

Los procesos de percolación son modelos que sirven para describir el flujo de líquidos en medios porosos desordenados. Este trabajo es una introducción a los procesos de percolación independiente sobre grafos planos. Primero desarrollamos la teoría de grafos y de probabilidad involucrada para luego definir los modelos de percolación de enlaces y de sitios (*bond* y *site*, respectivamente, por sus nombres en inglés), en los cuales los objetos de interés son las aristas y los vértices del grafo, respectivamente. Después exhibimos las cualidades más básicas de estos modelos y las características cuantitativas usadas en su estudio haciendo hincapié en su comportamiento de "transición de fase": un pequeño cambio de los parámetros del modelo resulta en un cambio abrupto de su comportamiento global. En este caso, esta transición de fase ocurre en una probabilidad crítica que, en general, es difícil de hallar exactamente. La excepción son algunos grafos "simétricos", para los que se cumple una interesante relación entre sus probabilidades críticas y que explicaremos en este trabajo. Finalmente, presentamos algoritmos computacionales para simular los modelos de percolación de enlaces y de sitios. Además, utilizamos estos algoritmos para observar gráficamente el comportamiento de transición de fase y los adaptamos para estimar probabilidades críticas que no han podido hallarse analíticamente.



# Índice general

Introducción . . . . .	7
<b>1. Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1. Grafos . . . . .	9
1.2. Teoremas de Extensión de Probabilidades . . . . .	15
1.3. Medida de Probabilidad Producto . . . . .	19
1.4. Independencia . . . . .	25
<b>2. Modelo de Percolación</b>	<b>31</b>
2.1. El Espacio de Configuraciones . . . . .	31
2.2. El Modelo de Percolación . . . . .	32
2.3. El evento crítico . . . . .	36
<b>3. La Probabilidad de Percolación y el Tamaño del <i>Cluster</i></b>	<b>39</b>
3.1. La desigualdad FKG . . . . .	39
3.2. La probabilidad de percolación y la media del tamaño del <i>cluster</i> abierto . . . . .	41
3.3. Percolación en $\mathbb{L}^d$ . . . . .	46
3.4. La fase subcrítica . . . . .	54
3.5. La fase supercrítica . . . . .	55
<b>4. Probabilidades Críticas</b>	<b>57</b>
4.1. Probabilidades Críticas para la Percolación de Enlaces . . . . .	57
4.2. Probabilidades Críticas para la Percolación de Sitios . . . . .	61
<b>5. Simulación del Proceso de Percolación</b>	<b>63</b>
5.1. Sobre el Algoritmo . . . . .	63
5.2. Simulación y Estimación de la Probabilidad Crítica para el Modelo de Percolación de Sitios en $\mathbb{L}^2$ . . . . .	64
5.3. Simulación del Modelo de Percolación Independiente de Enlaces en $\mathbb{L}^2$ . . . . .	66
5.4. Algunas Aplicaciones más del Algoritmo . . . . .	67
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

## Introducción

La teoría de percolación se inició formalmente cuando Broadbent y Hammersley en 1957, presentaron un modelo de un medio poroso aleatorio para poder entender el comportamiento de un fluido pasando a través de un sistema desordenado discreto, como, por ejemplo, partículas que se filtran a través de una máscara de gas o agua traspasando una piedra porosa. Situémonos en el segundo caso e imaginemos una enorme piedra porosa inmersa en un balde lleno de agua. ¿Cuál es la probabilidad de que el centro de la piedra esté mojado? En dos dimensiones podemos modelarlo de la siguiente manera: Consideremos el grafo (la malla)  $\mathbb{Z}^2$  y un número  $0 \leq p \leq 1$ . Observaremos una por una las aristas de este grafo y las declararemos abiertas con probabilidad  $p$  y cerradas con probabilidad  $1 - p$ , independientemente de todas las demás aristas. Podemos ver una sección transversal de la piedra como una región de  $\mathbb{R}^2$ . Las aristas de  $\mathbb{Z}^2$  representan los poros que atraviesan la piedra y  $p$  es la proporción de aristas que están suficientemente abiertas como para que el agua pase por ellas. Cuando la piedra está inmersa en el agua, un vértice  $X$  del centro de la piedra está mojado si y solo si existe un camino de aristas abiertas (mojadas) que parte de  $X$  y llega a algún vértice en el borde de la piedra. La teoría de la percolación trata en esencia del análisis de esos caminos abiertos. Otras preguntas que podemos plantearnos es: ¿cómo se comporta la probabilidad de que el centro de la piedra esté mojado con respecto a  $p$ ?, ¿cuánto debe valer  $p$  para garantizar que el centro de la piedra esté mojado?

Con esta idea, podemos generalizar lo que hemos hecho al grafo infinito  $\mathbb{Z}^2$ . Decimos que ocurre percolación cuando hay un camino abierto infinito que parte del origen. Así nuestras preguntas anteriores se transforman en: ¿cómo se comporta la probabilidad de que ocurra percolación cuando  $p$  varía?, ¿para qué valores de  $p$  la probabilidad de que ocurra percolación es mayor que 0?

Con respecto a la primera pregunta, es de esperarse que la probabilidad de que ocurra percolación se incremente con  $p$  y que es exactamente 0 cuando  $p = 0$ . El valor  $p$  en el que la probabilidad de que ocurra percolación deja de ser 0 es llamado "probabilidad crítica".

Es así que Broadbent y Hammersley probaron que el modelo de percolación en  $\mathbb{Z}^2$  tenía una transición de fase que ocurría cuando  $p$  tomaba el valor de la probabilidad crítica y desarrollaron algunas herramientas para estudiar las dos fases que tiene este proceso: cuando el que ocurra percolación tiene probabilidad cero, es decir, no ocurre percolación (antes de la probabilidad crítica) y cuando el que ocurra percolación tiene probabilidad positiva.

Encontrar el valor de la probabilidad crítica para  $\mathbb{Z}^2$  fue un problema que permaneció abierto hasta que en 1982, Kesten lo resolvió:  $p_c = \frac{1}{2}$ . Antes de ello, alrededor de 1964, Russo y Seymour junto con Welsh ya habían hecho importantes progresos.

Después de esto se han estudiado mucho la fase subcrítica ( $p < p_c$ ) y también la fase supercrítica ( $p > p_c$ ). Acerca del modelo cuando  $p$  es exactamente el valor crítico  $p_c$  o está muy cerca de este valor, aún se tienen muy pocas respuestas y permanece como un problema abierto hasta ahora, a pesar de que se tienen nociones claras de cómo debería ser el comportamiento del modelo.

Es la teoría matemática del modelo de percolación de lo que se trata este trabajo. En el primer capítulo desarrollamos los elementos de la teoría de grafos y de probabilidad que necesitamos para definir formalmente los modelos de percolación de enlaces y de sitios. En los párrafos anteriores estuvimos hablando del modelo de enlaces, en el cual son las aristas las que se abren aleatoriamente y de manera independiente. Por otro lado, en el modelo de sitios son los vértices del grafo los que se abren aleatoriamente de manera independiente. Las preguntas que nos hicimos pueden plantearse de manera análoga para el modelo de percolación de sitios.

En el segundo capítulo definimos los modelos de percolación y los eventos y variables aleatorias de interés. En el tercer capítulo definimos las características cuantitativas que ayudan a describir el modelo y cómo se comportan en relación a  $p$  y además explicamos su comportamiento de transición de fase. En la fase subcrítica, presentamos el teorema del decaimiento exponencial del tamaño de la componente conexa infinita. Sobre la fase supercrítica, presentamos el teorema de unicidad de la componente conexa infinita.

En el cuarto capítulo relatamos acerca de los métodos que se han utilizado para encontrar las probabilidades críticas de ciertos grafos simétricos llamados autoduales.

Por último, en el quinto capítulo elaboramos algoritmos computacionales para simular los modelos de percolación independiente de sitios en  $\mathbb{L}^d$  para  $d \in \{2, 3\}$ . Además utilizamos estos algoritmos para poder observar gráficamente la transición de fase del modelo de percolación y después los adaptamos para estimar probabilidades críticas que no han podido hallarse analíticamente hasta ahora, por ejemplo, para el caso de percolación de sitios en  $\mathbb{L}^2$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Para definir rigurosamente el modelo de percolación necesitamos conceptos básicos de las teorías de grafos y probabilidad. Comenzaremos estudiando a los grafos de la manera que más se ajusta a nuestros objetivos, para luego seguir con algunas definiciones y resultados muy importantes de probabilidad que nos serán útiles en el capítulo siguiente.

### 1.1. Grafos

Si  $X$  es un conjunto, vamos a denotar por  $X^{(n)}$  a la colección de subconjuntos de  $X$  que tienen cardinalidad  $n$ :

$$X^{(n)} = \{A \in 2^X : \#A = n\}.$$

**Definición 1.1 (Grafo).** Un *grafo*  $G$  es un par ordenado  $(V, E)$  donde  $V$  es un conjunto no vacío llamado *conjunto de vértices* y  $E \subset V^{(2)}$  es el *conjunto de aristas*. Para denotar que  $x \in V$  escribiremos solo que  $x \in G$ .

Denotaremos a la arista  $\{x, y\}$  simplemente por  $xy$  o por  $yx$ , donde los vértices  $x$  e  $y$  son llamados sus *vértices finales*. Además, dos vértices distintos  $a, b \in V$  son *vértices adyacentes* si la arista  $ab$  está en  $E$  y dos *aristas* son *adyacentes* si tienen en común exactamente uno de sus vértices finales.

Por otro lado,  $|G|$ , el *orden* de  $G$ , es su número de vértices,  $\#V$ , y su *tamaño*,  $e(G)$ , es la cantidad de aristas de  $G$ ,  $\#E$ . Finalmente, diremos que  $G$  es *finito* si su orden es finito y en el caso en que el orden sea enumerable, diremos que  $G$  es *enumerable*.

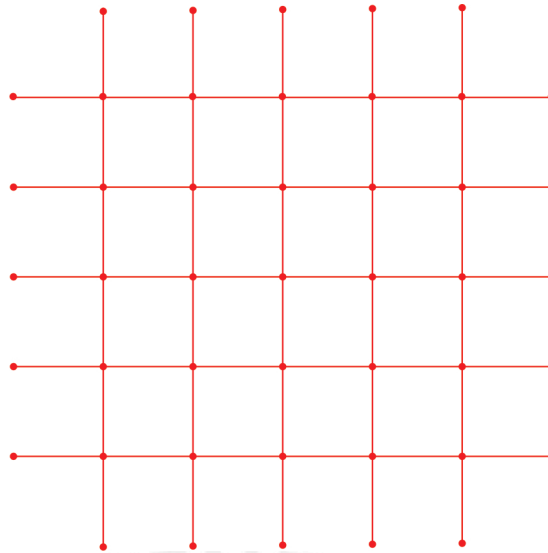
Como notamos, la definición es consecuencia de la representación gráfica natural que tiene un grafo: los vértices como puntos y las aristas como curvas uniendo algunos de ellos.

Uno que usaremos muy a menudo es el *grafo cuadrado*  $\mathbb{L}^2$ , mostrado en la Figura 1.1,

$$\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$$

donde  $d \in \mathbb{N}$  y

$$\mathbb{E}^d = \{\{x, y\} \subset \mathbb{Z}^d : \|x - y\| = 1\}.$$



**Figura 1.1:** Una porción del grafo infinito  $\mathbb{L}^2$ .

A lo largo de esta sección, siempre que escribamos  $G$  estaremos denotando a un grafo  $(V, E)$ , además  $V(G)$  denota al conjunto de vértices de  $G$  y  $E(G)$  denotará a su conjunto de aristas.

**Definición 1.2** (Subgrafo). Un grafo  $G' = (V', E')$  es un *subgrafo de  $G$*  si  $V' \subset V$  y  $E' \subset E$ , lo que denotamos por  $G' \subset G$ .

Como siempre tendremos claro con cuál grafo  $G$  trabajaremos, diremos simplemente que  $G'$  es un *subgrafo*.

Si tenemos un subconjunto de vértices o aristas, podemos hablar de un “grafo generado” por él. También podemos construir nuevos grafos quitando aristas o vértices a uno ya dado.

**Definición 1.3** (Subgrafo inducido). El *subgrafo inducido por  $V' \subset V$*  es el subgrafo  $G' = (V', E')$  que contiene todas las aristas de  $G$  que unen pares de vértices en  $V'$ , es decir,

$$E' = \{\{x, y\} \in E : \{x, y\} \subset V'\},$$

y lo escribimos como  $G' = G[V']$ . Notemos que este es el subgrafo más grande que tiene a  $V'$  como conjunto de vértices.

Además, dado  $W \subset V$ , un subconjunto de vértices, entonces  $G - W$  es el subgrafo obtenido al quitar de  $G$  todos los vértices en  $W$  y todas aquellas aristas que tengan a sus vértices finales en  $W$ , esto es,

$$G - W = G[V \setminus W].$$

Si  $F \subset E$  es un subconjunto de aristas, entonces  $G - F$  es el subgrafo obtenido al borrar de  $G$  todas las aristas en  $F$ :

$$G - F = (V, E \setminus F).$$

Por último, si nos dan dos subgrafos  $H_1 = (V_1, E_1)$  y  $H_2 = (V_2, E_2)$ , entonces

$$H_1 \setminus H_2 = (V_1, E_1 \setminus E_2) \text{ y}$$

$$H_1 \cap H_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2).$$

Algo que nos interesará mucho son los caminos y ciclos en un grafo que, de manera intuitiva, serán “sucesiones” de aristas y vértices adyacentes.

**Definición 1.4** (Camino). Un *camino* de longitud  $l \in \mathbb{N}$  es un grafo  $P$  con un conjunto de  $l + 1$  vértices indexados

$$V(P) = \{x_i : 0 \leq i \leq l\}$$

y con conjunto aristas

$$E(P) = \{x_i x_{i+1} : 0 \leq i \leq l - 1\}.$$

Este grafo será denotado por  $x_0 x_1 \dots x_l$ . Los vértices  $x_0$  y  $x_l$  se llaman *vértices inicial* y *final*, respectivamente y diremos que  $P$  es un *camino de  $x_0$  a  $x_l$* .

Un *camino infinito* es un grafo  $P$  enumerable, cuyo conjunto de vértices está indexado

$$V(P) = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$$

y cuyo conjunto de aristas es

$$E(P) = \{x_i x_{i+1} : i \in \mathbb{N}\}.$$

Este grafo es escrito como  $x_0 x_1 x_2 \dots$ . El vértice  $x_0$  es conocido como *vértice inicial* y diremos que  $P$  es un camino que parte de  $x_0$ .

Finalmente, fijados  $x, y \in V$  distintos, denotamos por

$$\Gamma_{x,y}^G = \{H \subset G : H \text{ es un camino de } x \text{ a } y\} \text{ y}$$

$$\Gamma_{x,\infty}^G = \{H \subset G : H \text{ es un camino infinito que parte de } x\}.$$

**Definición 1.5** (Ciclo). Un *ciclo* de longitud  $l \in \mathbb{N}$  es un grafo  $C$  con un conjunto de  $l$  vértices, indexado

$$V(P) = \{x_i : 1 \leq i \leq l\}$$

y con conjunto aristas

$$E(P) = \{x_i x_{i+1} : 1 \leq i \leq l - 1\} \cup \{x_l x_1\}.$$

Este ciclo será denotado por  $x_1 x_2 \dots x_l x_1$ .

Al igual que en topología, los caminos nos ayudarán a ver si un grafo tiene partes “desconectadas” entre sí o no.

**Definición 1.6** (Vértices que se comunican). Sean  $x, y \in V$  distintos. Diremos que  $x$  se *comunica con  $y$  en  $G$* , y escribiremos  $x \overset{G}{\longleftrightarrow} y$ , si existe un subgrafo de  $G$  que es un camino de  $x$  a  $y$ .



Si  $H \subset G$ ,  $x \xleftrightarrow{G} H$  denota que existe  $z \in H$  tal que  $z \xleftrightarrow{G} x$ .

Además, escribiremos  $x \xleftrightarrow{G} \infty$  cuando exista un subgrafo de  $G$  que es un camino infinito que parte de  $x$ .

Cuando el contexto sea claro, omitiremos el nombre del grafo  $G$  sobre las flechas.

**Definición 1.7** (Grafo conexo). El grafo  $G$  será *conexo* si cualquier par de vértices distintos están comunicados.

A los subgrafos conexos de  $G$  que no están contenidos de manera estricta en ningún otro subgrafo conexo de  $G$  (es decir, los subgrafos conexos maximales de  $G$ ) los llamaremos *componentes conexas de  $G$*  y denotaremos por  $C_x^G$  a la componente conexa de  $G$  que tiene a  $x$  entre sus vértices. Cuando el contexto sea claro, omitiremos el superíndice  $G$ .

Los caminos son ejemplos de grafos conexos. Como los caminos tienen asociada una longitud, nos ayudan a definir una distancia entre los vértices dentro de un grafo.

**Definición 1.8** (Distancia grafo). La *distancia grafo entre  $x$  e  $y \in V$*  es la longitud del camino de menor longitud que va de  $x$  a  $y$ , si es que existe tal camino. Si, por el contrario, estos vértices no están conectados entonces la distancia grafo entre ellos es infinita.

Y con una distancia ya podemos hablar de bolas y esferas.

**Definición 1.9** (Bolas y esferas). Dado  $n \in \mathbb{N}$ , definimos la *bola centrada en  $x$  con radio  $n$*  como el subgrafo  $B_n(x)$  inducido por los vértices que están a distancia grafo menor o igual a  $n$  de  $x$  y la *esfera centrada en  $x$  con radio  $n$* ,  $S_n(x)$ , como el inducido por aquellos vértices a distancia exactamente  $n$  de  $x$ .

Así como los caminos, las bolas son subgrafos conexos del grafo  $G$ .

Ahora comenzamos a definir características de los grafos para poder especificar bien con qué grafos trabajaremos.

**Definición 1.10** (Grado). El *grado de un vértice  $v \in V$*  es la cardinalidad del conjunto de los *vecinos de  $x$* :

$$\#\{e \in E : v \text{ es un vértice final de } e\}.$$

Si todos los vértices de  $G$  tienen el mismo grado  $g$ , decimos entonces que  $G$  es de *grado  $g$* . Finalmente,  $G$  será *localmente finito* cuando todos sus vértices tengan grado finito.

Uno de los hechos que nos interesarán al definir el modelo de percolación será que un grafo (infinito) tenga una componente conexa infinita. Después de pensarlo un poco, nos damos cuenta de que esto vale la pena estudiarlo en un grafo en el que los vértices no tienen una cantidad infinita de vecinos, es decir, en grafos localmente finitos. Intuitivamente, un grafo conexo es infinito si en el podemos encontrar caminos tan largos como queramos. Nos proponemos construir este camino infinito vértice por vértice.

Supongamos entonces que  $x \in G$ . El vértice inicial de nuestro camino será  $x_0 = x$ . Para el siguiente paso, nuestras opciones son los vecinos de  $x$ . Lo que necesitamos es que partiendo de ese vecino de  $x$  podamos formar caminos tan largos como queramos

teniendo en cuenta que no podemos retornar por  $x$ . Por ello, nos olvidamos de  $x$  y de sus aristas adyacentes y consideramos el grafo  $G_1 = G - x_0$ .

Definitivamente, al hacer esto hemos desconectado de alguna manera a  $G$ . Como  $G$  era conexo, cada vértice  $y \neq x$  de  $G$  estaba conectado con  $x$  por medio de un camino  $P$  en  $G$  cuyo antepenúltimo vértice era alguno de los vecinos de  $x$ . Esto quiere, decir que en  $G_1$ , cada vértice  $y \in G_1$  está conectado con algún vecino de  $x$  por medio del camino en  $G_1$  que resulta de “borrarle” a  $P$  su última arista.

Así, la cantidad de componentes conexas de  $G_1$  está acotada por el grado de  $x$ . Con esto podemos establecer la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.** *Sea  $x \in V$ . Si  $G$  es localmente finito y conexo, entonces  $G - \{x\}$  tiene una cantidad finita de componentes conexas. En particular, si  $U \subset V$  es finito, entonces  $G - U$  seguirá teniendo una cantidad finita de componentes conexas.*

Volviendo a nuestra pregunta inicial, como consecuencia de todo lo anterior,  $G_1$  tiene que tener, al menos, una componente conexas infinita porque  $G$  era infinito. Entonces, algún vecino de  $x$  que está en una componente conexas infinita de  $G_1$ . Seguir por ahí nos permitirá avanzar indefinidamente. Para decidirnos por el tercer vértice nos olvidamos de  $x_0$  y  $x_1$  (por donde ya pasamos) y nuevamente nos dirigimos por donde hay infinitos vértices. Es decir, consideramos al grafo (infinito)  $G_2 = C_1 - x_1$ , donde  $C_1$  es la componente conexas de  $x_1$  en  $G_1$ , y  $x_3$  será un vecino de  $x_1$  en  $G_1$  que está en una componente conexas infinita de  $G_2$ . De este modo podemos proseguir indefinidamente debido a que  $G$  era enumerable. Finalmente, resumimos lo obtenido.

**Proposición 1.2.** *Supongamos que  $G$  es enumerable y localmente finito. Para cualquier  $x \in V$ , se cumple lo siguiente:*

$$|C_x| = \infty \Leftrightarrow x \leftrightarrow \infty.$$

Otro hecho, que también nos será útil, está dado por la siguiente proposición.

**Proposición 1.3.** *Supongamos que  $G$  es enumerable, conexo y localmente finito y que  $H$  es un subgrafo conexo finito de  $G$ . Para cualquier  $x \in H$ , se cumple lo siguiente:*

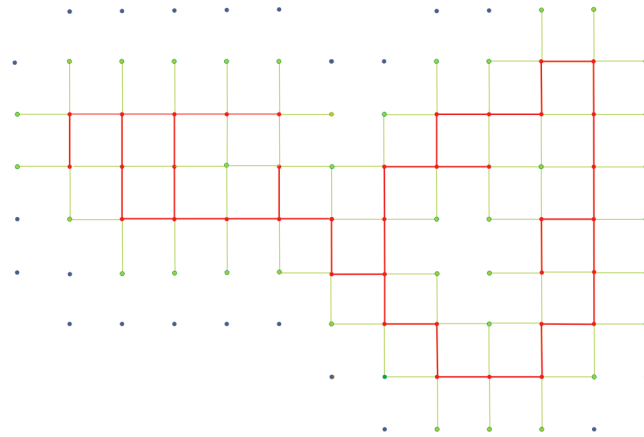
$$\exists y \in G \setminus H, \text{ tal que } y \xleftrightarrow{H} x \wedge y \xleftrightarrow{G \setminus H} \infty.$$

Lo primero que podemos deducir es que el vértice  $y$  buscado está en una componente conexas infinita de  $G \setminus H$ . A la vez,  $y$  tiene que estar “cerca” de  $x$ . Intuitivamente, podemos ver que  $y$  debe estar en el “borde” de  $H$ , el cual definimos a continuación (ver Figura 1.2).

**Definición 1.11** (Borde de un subgrafo). Sea  $H = (V', E')$  un subgrafo. El *borde de aristas* de  $H$ ,  $\partial_e H$ , está formado por las aristas que tienen exactamente un vértice final en  $H$ , es decir

$$\partial_e H = \{ab \in E : a \in V', b \in V \setminus V'\}.$$

El conjunto de los vértices finales del borde de aristas que están en  $H$ , forman su *borde*



**Figura 1.2:** Un subgrafo finito de  $\mathbb{L}^2$  (rojo) y su borde de aristas (verde).

*interior de vértices:*

$$\partial_v^- H = \{a \in V' : \text{existe } b \in V \setminus V' \text{ tal que } ab \in \partial_e H\}.$$

Análogamente, definimos el borde exterior de vértices de  $H$  como

$$\partial_v^+ H = \{b \in V \setminus V' : \text{existe } a \in V' \text{ tal que } ab \in \partial_e H\}.$$

Ahora podemos finalizar la demostración de la proposición. Todos los caminos que parten de  $x$  y terminan en un vértice fuera de  $H$  tienen alguno de sus vértices en  $\partial_v^- H$ . Como  $x \longleftrightarrow \infty$  entonces, algún vértice  $y$  de  $\partial_v^- H$  tiene que estar conectado con el infinito para no contradecir lo primero.

La siguiente definición resulta de considerar las aristas de un grafo como vértices de un nuevo grafo, cuyas aristas estarán dadas por la relación de adyacencia.

**Definición 1.12** (Grafo de línea). El *grafo de línea* de  $G = (V, E)$  es el grafo  $L(G) = (\tilde{V}, \tilde{E})$ , donde  $\tilde{V} = E$  y

$$\tilde{E} = \left\{ \{e_1, e_2\} \subset E^{(2)} : e_1, e_2 \text{ son aristas adyacentes} \right\}.$$

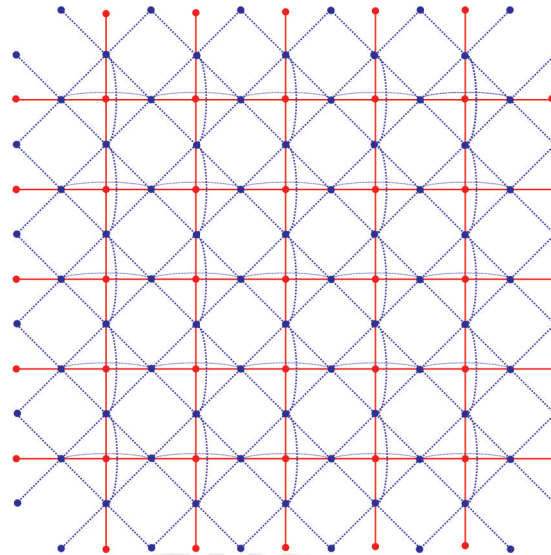
Si para  $G$  existe un grafo  $H$  tal que  $G = L(H)$ , entonces diremos que  $G$  es un grafo de línea.

Por ejemplo, el grafo de línea de  $\mathbb{L}^2$  (ver Figura 1.3) es  $(\mathbb{E}^2, \tilde{E})$ , donde  $\tilde{E}$  es tal que si una arista  $xy \in \tilde{E}$  entonces también lo están las tres aristas de  $\mathbb{Z}^2$  que parten de  $x$  además de las otras tres aristas que parten de  $y$  y que son distintas de  $xy$ .

Para finalizar esta sección tenemos a la definición de homomorfismo de grafos, la cual concreta la idea de que dos grafos son “los mismos” si sus conjuntos de vértices se corresponden de manera adecuada.

**Definición 1.13** (Homomorfismo). Sean  $G$  y  $H$  grafos. Un *homomorfismo entre  $G$  y  $H$*  es una función

$$f : V(G) \rightarrow V(H)$$



**Figura 1.3:** Un subgrafo de  $\mathbb{L}^2$  (rojo) y su grafo de línea (azul).

tal que si  $\{e_1, e_2\} \in E(G)$  entonces  $\{f(e_1), f(e_2)\} \in E(H)$ .

Además,  $f$  sería un *isomorfismo* si  $f$  fuera biyectiva y  $f^{-1}$  también cumpliera con ser un homomorfismo entre  $H$  y  $G$ .

**Definición 1.14** (Vértices equivalentes). Dos vértices  $v_1, v_2 \in V$  son *equivalentes* si existe un automorfismo  $f$  de  $G$  tal que  $f(v_1) = v_2$ .

**Definición 1.15** (Grafo transitivo).  $G$  es transitivo cuando para todo par de vértices distintos  $v_1, v_2 \in V$ , son equivalentes.

Por ejemplo,  $\mathbb{L}^d$  es un grafo transitivo: los isomorfismos que nos permiten identificar sus vértices entre sí son las traslaciones.

## 1.2. Teoremas de Extensión de Probabilidades

En esta sección hablaremos de los teoremas de extensión de medidas que nos serán útiles.

En principio, es difícil definir una medida de probabilidad en un  $\sigma$ -álgebra dado. Lo más viable es comenzar definiéndola en una subcolección más sencilla. Dos teoremas de extensión de medidas nos aseguran que si hacemos esto en una subcolección especial entonces podemos obtener una probabilidad en el  $\sigma$ -álgebra generado. Antes de enunciarlos, recordamos lo que son un semiálgebra y un álgebra.

**Definición 1.16** (Semiálgebra). Una colección  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de un conjunto  $\Omega$  es un semiálgebra de  $\Omega$  cuando

- i. Si  $S, T \in \mathcal{S}$  entonces  $S \cap T \in \mathcal{S}$ .
- ii. Si  $S \in \mathcal{S}$  entonces  $S^c = \Omega \setminus S$  es una unión finita disjunta de conjuntos en  $\mathcal{S}$ .

**Definición 1.17** (Álgebra). Una colección  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\Omega \neq \emptyset$  es un álgebra si es cerrada por complementos y por uniones finitas.

Vamos a denotar con  $\uplus$  a las uniones disjuntas.

**Proposición 1.4.** Si  $\mathcal{S}$  es un semiálgebra, la colección

$$\bar{\mathcal{S}} = \{\text{uniones finitas disjuntas de elementos de } \mathcal{S}\}$$

es un álgebra.

*Demostración.* Sean  $A = \uplus_{i=1}^n A_i$  y  $B = \uplus_{i=1}^m B_i \in \bar{\mathcal{S}}$ , donde los conjuntos  $A_i, B_i \in \mathcal{S}$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $n = m$ . Tenemos que

$$A \cap B = \uplus_{i=1}^n (A_i \cap B_i)$$

está en  $\bar{\mathcal{S}}$  dado que los conjuntos  $A_i \cap B_i \in \mathcal{S}$ .

Después,

$$A^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

también está en  $\bar{\mathcal{S}}$  porque cada  $A_i^c \in \mathcal{S}$  y porque  $\bar{\mathcal{S}}$ , como vimos antes, es cerrada por intersecciones. □

**Teorema 1.5.** Sean  $\mathcal{S}$  un semiálgebra y  $\mathcal{P} : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$  una función que cumple

i. Si  $A, A_i \in \mathcal{S}$  son tales que  $A = \uplus_{i=1}^n A_i$ , entonces

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A_i).$$

ii. Si  $A, A_i \in \mathcal{S}$  con  $A = \uplus_{i=1}^{\infty} A_i$  entonces

$$\mathcal{P}(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i).$$

Entonces, existe una única extensión  $\sigma$ -aditiva  $\bar{\mathcal{P}} : \bar{\mathcal{S}} \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\bar{\mathcal{P}}(\emptyset) = 0$ .

*Demostración.* Para  $A = \uplus_{i=1}^n A_i \in \bar{\mathcal{S}}$ , con  $A_i \in \mathcal{S}$ , definimos

$$\bar{\mathcal{P}}(A) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A_i).$$

Primero vemos que  $\bar{\mathcal{P}}$  está bien definida: si también  $A = \uplus_{i=1}^m \hat{A}_i \in \bar{\mathcal{S}}$ , con  $\hat{A}_i \in \mathcal{S}$ , entonces, notando que  $A_i = \uplus_{j=1}^m (A_i \cap \hat{A}_j)$  y  $\hat{A}_i = \uplus_{j=1}^n (\hat{A}_i \cap A_j)$ , vemos que

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathcal{P}(A_i \cap \hat{A}_j) = \sum_{j=1}^m \mathcal{P}(\hat{A}_j).$$

En segundo lugar, notemos que  $\bar{\mathcal{P}}$  es aditiva pues si  $A = \uplus_{i=1}^n A_i \in \bar{\mathcal{S}}$ , con  $A_i \in \mathcal{S}$  y  $B = \uplus_{i=1}^m B_i \in \bar{\mathcal{S}}$ , con  $B_i \in \mathcal{S}$  y  $A, B$  son disjuntos entonces

$$A \cup B = \left( \uplus_{i=1}^n A_i \right) \uplus \left( \uplus_{j=1}^m B_j \right)$$

y así,

$$\bar{\mathcal{P}}(A \cup B) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A_i) + \sum_{j=1}^m \mathcal{P}(B_j) = \bar{\mathcal{P}}(A) + \bar{\mathcal{P}}(B).$$

Ahora mostraremos que  $\bar{\mathcal{P}}$  es  $\sigma$ aditiva. Sea  $A = \uplus_{i=1}^{\infty} A_i \in \bar{\mathcal{S}}$ , con  $A_i \in \bar{\mathcal{S}}$ . Como cada  $A_i = \uplus_{j=1}^{n_i} B_{i,j}$  con  $B_{i,j} \in \mathcal{S}$ , entonces podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que

$$A = \uplus_{i=1}^{\infty} A_i \text{ con } A_i \in \mathcal{S}.$$

Primero veamos que  $\bar{\mathcal{P}}$  es  $\sigma$ -subaditiva.

$$\bar{\mathcal{P}}(A_i) = \sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{P}(B_{i,j}), \text{ y así}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mathcal{P}}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{P}(B_{i,j}).$$

Por otro lado, desde que  $A \in \bar{\mathcal{S}}$ , sabemos que  $A = \uplus_{k=1}^m E_k$ , entonces

$$E_k = \uplus_{i=1}^{\infty} (E_k \cap A_i), 1 \leq k \leq m,$$

por lo que la subaditividad de  $\mathcal{P}$  implica que

$$\mathcal{P}(E_k) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(E_k \cap A_i), 1 \leq k \leq m.$$

Después,

$$\bar{\mathcal{P}}(A) = \sum_{k=1}^m \mathcal{P}(E_k) \leq \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(E_k \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \mathcal{P}(E_k \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i),$$

debido a que  $A_i = \uplus_{k=1}^m (A_i \cap E_k)$  y debido a la aditividad de  $\mathcal{P}$ ,

$$\mathcal{P}(A_i) = \sum_{k=1}^m \mathcal{P}(E_k \cap A_i), i \geq 1.$$

Por último, veamos que  $\bar{\mathcal{P}}$  es  $\sigma$ -superaditiva. Tenemos que para  $n \geq 1$ ,

$$A = \uplus_{i=1}^n A_i + \uplus_{i=n+1}^{\infty} A_i$$

y, como  $A$  y  $\biguplus_{i=1}^n A_i$  están en  $\bar{\mathcal{S}}$ , entonces  $\biguplus_{i=n+1}^{\infty} A_i$  también está en  $\bar{\mathcal{S}}$ , para todo  $n \geq 1$ . Finalmente, como consecuencia de la aditividad de  $\bar{\mathcal{P}}$ , para todo  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{P}}(A) &= \bar{\mathcal{P}}\left(\biguplus_{i=1}^n A_i\right) + \bar{\mathcal{P}}\left(\biguplus_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{P}}(A_i) + \bar{\mathcal{P}}\left(\biguplus_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{P}}(A_i).\end{aligned}$$

Entonces, al hacer tender  $n \rightarrow \infty$  obtenemos

$$\bar{\mathcal{P}}(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mathcal{P}}(A_i).$$

□

A continuación enunciamos el teorema de extensión de Carathéodory

**Teorema 1.6** (Teorema de Extensión de Carathéodory). *Sean  $\mathcal{A}$  un álgebra y  $\mathcal{P}$  una medida en  $\mathcal{A}$ , es decir, una función  $\mathcal{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  que cumple las siguientes condiciones:*

i. *Para todo  $A \in \mathcal{A}$  se cumple que*

$$\mathcal{P}(A) \geq \mathcal{P}(\emptyset) = 0.$$

ii. *Si  $A, A_i \in \mathcal{A}$  son tales que  $A = \biguplus_{i=1}^{\infty} A_i$  entonces*

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i).$$

Entonces, existe una única extensión de  $\mathcal{P}$  a una medida  $\mathbb{P}$  en  $\sigma(\mathcal{A})$ .

En la parte siguiente, usaremos el siguiente teorema de extensión, que es consecuencia de los dos teoremas precedentes.

**Teorema 1.7.** *Sean  $\mathcal{S}$  un semiálgebra y  $\mathcal{P} : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$  una función que cumple*

i. *Si  $A, A_i \in \mathcal{S}$  son tales que  $A = \biguplus_{i=1}^n A_i \in \mathcal{S}$ , entonces*

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A_i).$$

ii. *Si  $A, A_i \in \mathcal{S}$  son tales que  $A = \biguplus_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$ , entonces*

$$\mathcal{P}(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i).$$

Entonces, existe una única extensión de  $\mathcal{P}$  a una medida  $\mathbb{P}$  en  $\sigma(\mathcal{A})$ .

### 1.3. Medida de Probabilidad Producto

Vamos a definir el producto de una colección arbitraria de espacios de probabilidad. Primero recordamos cómo definir el producto de una cantidad finita de espacios de probabilidad.

**Definición 1.18** (Producto Finito de Espacios Medibles). Sea  $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i)\}_{1 \leq i \leq n}$  una colección finita de espacios medibles. El *espacio medible producto* de esta colección es:

$$\bigotimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathcal{F}_i) = \left( \prod_{i=1}^n \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right),$$

en donde  $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$  denota al  $\sigma$ -álgebra producto, el cual es el  $\sigma$ -álgebra generado por los rectángulos de  $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ :

$$\mathcal{R} \left( \{(\Omega_i, \mathcal{F}_i)\}_{1 \leq i \leq n} \right) = \left\{ \prod_{i=1}^n A_i : A_i \in \mathcal{F}_i, 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Cuando no haya confusión de cuál es la colección de  $\sigma$ -álgebra de la que hablamos, escribiremos solo  $\mathcal{R}$  para denotar a sus rectángulos.

En nuestro caso, los rectángulos forman aquella semiálgebra que nos ayudará a construir una probabilidad producto.

**Proposición 1.8.** *La colección de los rectángulos*

$$\mathcal{R} \left( \{(\Omega_i, \mathcal{F}_i)\}_{1 \leq i \leq n} \right)$$

*es un semiálgebra.*

*Demostración.* Sean  $A_i^1, A_i^2 \in \mathcal{F}_i$ , entonces

$$\left( \prod_{i=1}^n A_i^1 \right) \cap \left( \prod_{i=1}^n A_i^2 \right) = \prod_{i=1}^n (A_i^1 \cap A_i^2)$$

es un rectángulo también, porque cada  $\mathcal{F}_i$  es cerrado por intersecciones.

Además, si  $A_i \in \mathcal{F}_i$ ,  $(\prod_{i=1}^n A_i)^c$  es la unión de todos los elementos de  $\mathcal{R}$  de la forma  $\prod_{i=1}^n B_i$ , donde  $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$  pero sin incluir a  $\prod_{i=1}^n A_i$ .

Finalmente entonces,  $\mathcal{R}$  es un semiálgebra. □

**Teorema 1.9** (Existencia y Unicidad de la Probabilidad Producto Finito). *Sea  $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)\}_{1 \leq i \leq n}$  una colección de espacios de probabilidad. Entonces existe una única medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  en  $\bigotimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$  que para  $A \in \mathcal{R}$ ,  $A_i \in \mathcal{F}_i$  tales que  $A = \prod_{i=1}^n A_i$ , se comporta como:*

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_i(A_i).$$

*A la probabilidad  $\mathbb{P}$ , la llamamos medida de probabilidad producto de  $(\mathbb{P}_i)_{1 \leq i \leq n}$ .*



Así, definimos el espacio de probabilidad producto

$$\bigotimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$$

como el espacio medible producto  $\bigotimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$  equipado con la medida de probabilidad producto, que denotamos por  $\bigotimes_{i=1}^n \mathbb{P}_i$ .

*Demostración.* Vamos a considerar el caso en que  $n = 2$ . Como los rectángulos forman ya un semiálgebra, vamos a demostrar que  $\mathcal{P} : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$  definida como en el enunciado del teorema, cumple las condiciones del Teorema de Extensión (Teorema 1.7). Mostraremos más incluso: probaremos que  $\mathcal{P}$  es  $\sigma$ -aditiva en  $\mathcal{R}$ .

Sea  $A \times B \in \mathcal{R}$  una unión disjunta  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$ , donde  $A_i \in \mathcal{F}_1$  y  $B_i \in \mathcal{F}_2$ . Definimos, para  $x \in A$ ,  $\mathcal{I}(x) = \{i \in \mathbb{N} : x \in A_i\}$ .

Para todo  $x \in A$ , cuando  $i \in \mathcal{I}(x)$ ,  $\{x\} \times B_i \subset A_i \times B_i$  y los conjuntos  $\{x\} \times B_i$  son disjuntos y su unión es  $\{x\} \times B$ . Entonces, para todo  $x \in A$ ,

$$B = \bigsqcup_{i \in \mathcal{I}(x)} B_i$$

y así

$$1_A(x) \mathbb{P}_2(B) = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i}(x) \mathbb{P}_2(B_i)$$

para cada  $x \in \Omega_1$ .

Notamos que  $1_A(x) \mathbb{P}_2(B)$  y  $\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(x) \mathbb{P}_2(B_i)$  son funciones  $\mathcal{F}_1$ -medibles y al integrar con respecto a  $\mathbb{P}_1$  obtenemos

$$\mathcal{P}(A \times B) = \mathbb{P}_1(A) \mathbb{P}_2(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_1(A_i) \mathbb{P}_2(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i \times B_i)$$

Hemos demostrado que  $\mathcal{P}$  es  $\sigma$ -aditiva en  $\mathcal{R}$  y automáticamente se cumplen ambas condiciones del Teorema de Extensión. Luego,  $\mathcal{P}$  tiene una única extensión al  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{R}$ , que es el  $\sigma$ -álgebra producto  $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ .

Para  $n > 2$ , procedemos por inducción teniendo en cuenta que

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i = \left( \bigotimes_{i=1}^{n-1} \mathcal{F}_i \right) \otimes \mathcal{F}_n.$$

□

Algo que debemos observar es que con la medida de probabilidad producto, las proyecciones canónicas  $\pi_i : \prod_{i \in I} \Omega_i \rightarrow \Omega_i$ ,  $\pi_j : \prod_{i \in I} \Omega_i \rightarrow \Omega_j$ , para  $i, j \in \mathbb{N}$  distintos son variables aleatorias independientes.

La siguiente definición extiende nuestra noción de rectángulos para el caso de productos arbitrarios.

**Definición 1.19** (Cilindros). Dada una colección arbitraria de espacios medibles  $\{(\Omega_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in T}$ , sus *cilindros* son los subconjuntos del espacio producto

$$\prod_{t \in T} \Omega_t = \left\{ f : T \rightarrow \bigcup_{t \in T} \Omega_t \mid \forall t \in T, f(t) \in \Omega_t \right\},$$

que son preimágenes de proyecciones finitas, es decir, los que forman parte de la colección

$$\mathcal{C}(\{(\Omega_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in T}) = \left\{ \pi_I^{-1}(A) : I \subset T \text{ es finito}, A \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i \right\}.$$

Los cilindros son usados para generalizar el producto de cantidades arbitrarias de  $\sigma$ -álgebras.

**Lema 1.10.** *La colección de los cilindros*

$$\mathcal{C}(\{(\Omega_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in T})$$

es un álgebra.

*Demostración.* Consideramos  $A \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i, B \in \bigotimes_{i \in J} \mathcal{F}_i$  con  $I, J \subset T$  finitos. Vemos que se cumple que

$$C_1 = (\pi_{I \cup J})^{-1} \circ (\pi_I^{I \cup J})^{-1}(A), \text{ y}$$

$$C_2 = (\pi_{I \cup J})^{-1} \circ (\pi_J^{I \cup J})^{-1}(B),$$

por lo que

$$C_1 \cup C_2 = (\pi_{I \cup J})^{-1} \left( (\pi_I^{I \cup J})^{-1}(A) \cup (\pi_J^{I \cup J})^{-1}(B) \right),$$

por lo que  $\mathcal{C}$  es cerrada por intersecciones desde que  $\bigotimes_{i \in I \cup J} \mathcal{F}_i$  lo es.

Además, como

$$\pi_I^{-1}(A^c) = (\pi_I^{-1}(A))^c$$

y  $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$  es cerrado por complementos,  $\mathcal{C}$  es cerrada por complementos.

Concluimos entonces que  $\mathcal{C}$  es un álgebra. □

Como antes, cuando sea claro con que colección de  $\sigma$ -álgebras trabajamos, denotaremos a sus cilindros solo por  $\mathcal{C}$ .

**Definición 1.20** (Espacio Medible Producto). Dada una colección arbitraria de espacios medibles  $\{(\Omega_t, \mathcal{F}_t)\}_{t \in T}$ , podemos dotar al espacio producto  $\prod_{t \in T} \Omega_t$  con el  $\sigma$ -álgebra generado por los cilindros. El espacio medible así obtenido es llamado *espacio medible producto* de los  $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ :

$$\bigotimes_{t \in T} (\Omega_t, \mathcal{F}_t) = \left( \prod_{t \in T} \Omega_t, \bigotimes_{t \in T} \mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{C}) \right).$$

A  $\bigotimes_{t \in T} \mathcal{F}_t$  lo llamaremos  $\sigma$ -álgebra producto.

Notemos que el  $\sigma$ -álgebra producto ha sido definido como el menor de los  $\sigma$ -álgebras que hace que todas las proyecciones finitas sean funciones medibles. Nuestra última tarea es poner una medida que extienda a la probabilidad producto finito en este producto de espacios medibles.

**Teorema 1.11** (Existencia y Unicidad de la Probabilidad Producto Infinito). *Sea  $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  una colección de espacios de probabilidad. Entonces existe una única medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  en  $\bigotimes_{i=1}^{\infty} (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$  que para  $A \in \mathcal{C}$ ,  $\hat{A} \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ ,  $I \subset \mathbb{N}$  finito, tales que  $A = (\pi_I)^{-1}(\hat{A})$  se comporta como:*

$$\mathbb{P}(A) = \left( \bigotimes_{i \in I} \mathbb{P}_i \right) (\hat{A}).$$

A la probabilidad  $\mathbb{P}$ , la llamamos medida de probabilidad producto de  $(\mathbb{P}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

Así, definimos el espacio de probabilidad producto

$$\bigotimes_{i=1}^{\infty} (\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$$

como el espacio medible producto  $\bigotimes_{i=1}^{\infty} (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$  equipado con la medida de probabilidad producto, que denotamos por  $\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_i$ .

*Demostración.* Como los cilindros  $\mathcal{C}$  forman un álgebra, queremos mostrar que se cumplen las hipótesis del Teorema de Extensión de Carathéodory (Teorema 1.6). Definimos  $\mathcal{P}$ , para  $A = (\pi_I)^{-1}(\hat{A}) \in \mathcal{C}$ , con  $\hat{A} \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ ,  $I \subset \mathbb{N}$  finito, como

$$\mathcal{P}(A) = \left( \bigotimes_{i \in I} \mathbb{P}_i \right) (\hat{A}).$$

Notamos que, para  $j \in \mathbb{N} \setminus I$ ,

$$A = (\pi_I)^{-1}(\hat{A}) = (\pi_{I \cup \{j\}})^{-1} \left( \left( \pi_I^{I \cup \{j\}} \right)^{-1} (\hat{A}) \right) = (\pi_{I \cup \{j\}})^{-1} (\hat{A} \times \Omega_j),$$

y además,

$$\left( \bigotimes_{i \in I \cup \{j\}} \mathbb{P}_i \right) (\hat{A} \times \Omega_j) = \left( \bigotimes_{i \in I} \mathbb{P}_i \right) (\hat{A}) \mathbb{P}_j(\Omega_j) = \left( \bigotimes_{i \in I} \mathbb{P}_i \right) (\hat{A}) = \mathcal{P}(A).$$

Primero verificamos la buena definición de  $\mathcal{P}$ : si  $A = \pi_I^{-1}(\hat{A}) = \pi_J^{-1}(\tilde{A})$ , donde  $\hat{A} \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$  y  $\tilde{A} \in \bigotimes_{i \in J} \mathcal{F}_i$  e  $I, J \subset \mathbb{N}$  finitos, entonces

$$A = \pi_{I \cup J}^{-1} \circ (\pi_I^{I \cup J})^{-1} (\hat{A}) = \pi_{I \cup J}^{-1} \circ (\pi_J^{I \cup J})^{-1} (\tilde{A}),$$

luego, teniendo en cuenta la observación anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left( \bigotimes_{i \in I \cup J} \mathbb{P}_i \right) \left( (\pi_I^{I \cup J})^{-1}(\hat{A}) \right) &= \left( \bigotimes_{i \in I \cup J} \mathbb{P}_i \right) \left( (\pi_J^{I \cup J})^{-1}(\tilde{A}) \right) \\ \left( \bigotimes_{i \in I} \mathbb{P}_i \right) (\hat{A}) &= \left( \bigotimes_{i \in J} \mathbb{P}_i \right) (\tilde{A}). \end{aligned}$$

La primera condición del Teorema 1.6 se cumple inmediatamente debido a la definición de  $\mathcal{P}$ . Nos queda por probar que si  $A \in \mathcal{C}$  es una unión disjunta  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , con  $A_i \in \mathcal{C}$ , entonces

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i).$$

Primero debemos notar que  $\mathcal{P}$  es aditiva gracias a la aditividad de las probabilidades producto finito. En efecto, si

$$A = \pi_I^{-1}(\hat{A}) \text{ y } B = \pi_J^{-1}(\hat{B}),$$

son disjuntos, donde  $\hat{A} \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$  y  $\hat{B} \in \bigotimes_{i \in J} \mathcal{F}_i$ , entonces

$$A = \pi_{I \cup J}^{-1} \circ (\pi_I^{I \cup J})^{-1}(\hat{A}) \text{ y}$$

$$B = \pi_{I \cup J}^{-1} \circ (\pi_J^{I \cup J})^{-1}(\hat{B}),$$

son tales que  $A' = (\pi_I^{I \cup J})^{-1}(\hat{A})$  y  $B' = (\pi_J^{I \cup J})^{-1}(\hat{B})$  son disjuntos y

$$A \cup B = \pi_{I \cup J}^{-1}(A' \cup B').$$

Después,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A \cup B) &= \left( \bigotimes_{i \in I \cup J} \mathbb{P}_i \right) (A' \cup B') \\ &= \left( \bigotimes_{i \in I \cup J} \mathbb{P}_i \right) (A') + \left( \bigotimes_{i \in I \cup J} \mathbb{P}_i \right) (B') \\ &= \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B). \end{aligned}$$

Ahora suponemos que  $A \in \mathcal{C}$  es una unión disjunta infinita enumerable  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , con  $A_i \in \mathcal{C}$ . Para todo  $n \geq 1$

$$B_n = A \setminus \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \in \mathcal{C}.$$

entonces,

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A_i) + \mathcal{P}(B_n).$$

Así, para demostrar la  $\sigma$ -aditividad de  $\mathcal{P}$  nos quedaría por demostrar que  $\mathcal{P}(B_n) \downarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , lo cual es consecuencia del lema siguiente.

**Lema 1.12.** Si  $B_n \downarrow B \in \mathcal{C}$  es una sucesión decreciente tal que para algún  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(B_n) \geq \epsilon$$

entonces  $B \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Denotamos por  $\mathcal{C}^{(n)}$  a los cilindros del espacio producto  $\bigotimes_{i=n+1}^{\infty} (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$  y por  $\mathcal{P}^{(n)}$  a la probabilidad producto, análoga a  $\mathcal{P}$ , definida en los cilindros  $\mathcal{C}^{(n)}$  de  $\bigotimes_{i=n+1}^{\infty} (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ . Dado  $A \in \mathcal{C}$ , definimos

$$A(x_1, \dots, x_n) = \pi_{\{\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n\}\}} \left( A \cap \pi_{\{1, \dots, n\}}^{-1}(x_1, \dots, x_n) \right) \in \mathcal{C}^{(n)}.$$

Notamos que se cumple que

$$\mathcal{P}(A) = \int \mathcal{P}^{(n)}(A(x_1, \dots, x_n)) d\mathcal{P}_1(x_1) \dots d\mathcal{P}_n(x_n).$$

Ahora sea  $B_n \downarrow B \in \mathcal{C}$  tal que  $\mathcal{P}(B_n) \geq \epsilon, \forall n$ . Consideramos, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$D_n^1 = \left\{ x_1 : \mathcal{P}^{(1)}(B_n(x_1)) > \epsilon/2 \right\}.$$

Notamos que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B_n) &= \int \mathcal{P}^{(1)}(B_n(x_1)) d\mathcal{P}_1(x_1) \\ &= \int_{D_n^1} \mathcal{P}^{(1)}(B_n(x_1)) d\mathcal{P}_1(x_1) + \int_{(D_n^1)^c} \mathcal{P}^{(1)}(B_n(x_1)) d\mathcal{P}_1(x_1) \\ &\leq \mathcal{P}_1(D_n^1) + (\epsilon/2) \mathcal{P}_1((D_n^1)^c) \\ &\leq \mathcal{P}_1(D_n^1) + \epsilon/2, \end{aligned}$$

por lo cual,

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq \mathcal{P}_1(D_n^1) + \epsilon/2 \\ \epsilon/2 &\leq \mathcal{P}_1(D_n^1), \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Además,  $D_n^1 \downarrow \subset \mathcal{F}_1$  entonces,  $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_n^1 \neq \emptyset$ , es decir, existe  $\hat{x}_1 \in \Omega_1$  tal que

$$\mathcal{P}^{(1)}(B_n(\hat{x}_1)) > \epsilon/2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nuevamente,  $B_n(\hat{x}_1) \downarrow \subset \mathcal{C}^{(1)}$ . Definimos para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$D_n^2 = \left\{ x_2 : \mathcal{P}^{(2)}(B_n(\hat{x}_1, x_2)) > \epsilon/4 \right\}.$$

Notamos que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B_n(\hat{x}_1)) &= \int \mathcal{P}^{(2)}(B_n(\hat{x}_1, x_2)) d\mathcal{P}_2(x_2) \\ &= \int_{D_n^2} \mathcal{P}^{(2)}(B_n(\hat{x}_1, x_2)) d\mathcal{P}_2(x_2) + \int_{(D_n^2)^c} \mathcal{P}^{(2)}(B_n(\hat{x}_1, x_2)) d\mathcal{P}_2(x_2) \\ &\leq \mathcal{P}_2(D_n^2) + (\epsilon/4)\mathcal{P}_2((D_n^2)^c) \\ &\leq \mathcal{P}_2(D_n^2) + \epsilon/4, \end{aligned}$$

por lo cual,

$$\begin{aligned} \epsilon/2 &\leq \mathcal{P}_2(D_n^2) + \epsilon/4 \\ \epsilon/4 &\leq \mathcal{P}_2(D_n^2), \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

es decir,  $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_n^2 \neq \emptyset$  y, por lo tanto, existe  $\hat{x}_2 \in \Omega_2$  tal que

$$\mathcal{P}^{(2)}(B_n(\hat{x}_1, \hat{x}_2)) > \epsilon/4, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Continuando de esta manera, obtenemos una sucesión  $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \bigotimes_{i=1}^{\infty} \Omega_i$  tal que

$$\mathcal{P}^{(i)}(B_n(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_i)) > \epsilon/2^i, \forall i, n \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que  $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ . Para probarlo, fijamos  $i \in \mathbb{N}$ . Sabemos que  $B_i = \pi_I^{-1}(\hat{B}_i)$  para  $I \subset \mathbb{N}$  finito y  $\hat{B}_i \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ . Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que  $I = \{1, \dots, m\}$ , para  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Como

$$\mathcal{P}^{(m)}(B_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)) > 0$$

entonces  $B_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m) \neq \emptyset$  y, desde que  $B_i = \pi_{\{1, \dots, m\}}^{-1}(\hat{B}_i)$ , se sigue que todo punto de  $\bigotimes_{i=1}^{\infty} \Omega_i$  cuyas primeras  $m$  coordenadas son  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$  está en  $B_i$ . □

Finalmente, se cumplen las hipótesis del Teorema de Extension de Caratheodory, entonces  $\mathcal{P}$  se extiende de manera única a una probabilidad en el espacio medible producto  $\bigotimes_{i=1}^{\infty} (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ . □

Nuevamente, debemos observar que la probabilidad producto hace que las proyecciones (que ahora son una colección enumerable y ya no finita) sean variables aleatorias independientes en un sentido que precisaremos en la sección siguiente.

## 1.4. Independencia

Aquí presentaremos algunas consecuencias de la independencia de variables aleatorias que vamos a necesitar en el capítulo siguiente.

Consideremos un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Recordemos que una colección finita de subconjuntos de  $\mathcal{F}$ ,  $\{A_i : i \in I\}$  es *independiente* cuando para todo  $A_i \in \mathcal{A}_i$ :

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

En lo que resta de esta sección, nos referiremos a colecciones de sub  $\sigma$ -álgebras de un mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , simplemente como colecciones de  $\sigma$ -álgebras.

Ahora vamos a extender nuestra definición de independencia para colecciones arbitrarias.

**Definición 1.21** (Independencia). Sean  $T \neq \emptyset$  y  $\{A_t : t \in T\}$ , una colección de subconjuntos de  $\mathcal{F}$ . Diremos que ésta es *independiente* si para todo  $I \subset T$ , finito:

$$\{A_i : i \in I\} \text{ es independiente.}$$

Probaremos una condición necesaria y suficiente para tener independencia. Antes, recordamos las siguientes definiciones y el teorema  $\pi - \lambda$ .

**Definición 1.22** ( $\pi$ -Sistemas y  $\lambda$ -Sistemas). Una colección de subconjuntos de  $\Omega$ ,  $\mathcal{P}$ , es un  $\pi$ -sistema si es estable por intersecciones, es decir, si  $A, B \in \mathcal{P}$  entonces  $A \cap B \in \mathcal{P}$ .

Una colección de subconjuntos de  $\Omega$ ,  $\mathcal{L}$ , es un  $\lambda$ -sistema si

- i.  $\Omega \in \mathcal{L}$ .
- ii. Si  $A, B \in \mathcal{L}$  y  $A \subset B$  entonces  $B \setminus A \in \mathcal{L}$ .
- iii. Si  $(A_i)_{i \geq 1} \in \mathcal{L}$  y  $A_i \uparrow A$  entonces  $A \in \mathcal{L}$ .

**Teorema 1.13** (Teorema  $\pi - \lambda$ ). Si  $\mathcal{P}$  es un  $\pi$ -sistema y  $\mathcal{L}$  es un  $\lambda$ -sistema que lo contiene, entonces

$$\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}.$$

**Proposición 1.14.** Sea  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$  una colección de  $\pi$ -sistemas. Entonces,  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$  son independientes si y solo si  $\{\sigma(A_i)\}_{1 \leq i \leq n}$  son independientes.

*Demostración.* Supongamos que  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$  son  $\pi$ -sistemas independientes que tienen a  $\Omega$  entre sus elementos. Sean  $A_2 \in \mathcal{A}_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$ . Definimos

$$\mathcal{L} = \left\{ A_1 \in \mathcal{F} : \mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \right\}.$$

Probaremos que  $\mathcal{L}$  es un  $\lambda$ -sistema. Notamos que  $\Omega \in \mathcal{L}$  por que  $\Omega \cap \bigcap_{i=2}^n A_i = \bigcap_{i=2}^n A_i$  y entonces

$$\mathbb{P} \left( \Omega \cap \bigcap_{i=2}^n A_i \right) = \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\Omega) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Sean ahora  $A, B \in \mathcal{L}$  tales que  $A \subset B$ , entonces

$$(B - A) \cap \bigcap_{i=2}^n A_i = \left( B \cap \bigcap_{i=2}^n A_i \right) - \left( A \cap \bigcap_{i=2}^n A_i \right).$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( (B - A) \cap \bigcap_{i=2}^n A_i \right) &= \mathbb{P} \left( B \cap \bigcap_{i=2}^n A_i \right) - \mathbb{P} \left( A \cap \bigcap_{i=2}^n A_i \right) \\ &= \mathbb{P}(B) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i) \\ &= (\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i) \\ &= \mathbb{P}(B - A) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i). \end{aligned}$$

Entonces  $B - A \in \mathcal{L}$ . Por último, sean  $B_j \in \mathcal{L}$  tales que  $B_j \uparrow B$ . Vemos que se cumple que

$$\left( B_j \cap \bigcap_{i=2}^n A_i \right) \uparrow \left( B \cap \bigcap_{i=2}^n A_i \right).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( B \cap \bigcap_{i=2}^n A_i \right) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( B_j \cap \bigcap_{i=2}^n A_i \right) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_j) \mathbb{P} \left( \bigcap_{i=2}^n A_i \right) \\ &= \mathbb{P}(B) \mathbb{P} \left( \bigcap_{i=2}^n A_i \right). \end{aligned}$$

Entonces  $B \in \mathcal{L}$ . Hemos probado que  $\mathcal{L}$  es un  $\lambda$ -sistema.

Ahora,  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{L}$  según las hipótesis. Entonces, aplicando el Teorema  $\pi - \lambda$ , tenemos que  $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{L}$ , es decir, si  $A_1 \in \mathcal{A}_1$ , entonces

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

Como  $A_1 \in \sigma(\mathcal{A}_1), A_2 \in \mathcal{A}_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$  son arbitrarios, obtenemos que

$$\{\sigma(\mathcal{A}_1)\} \cup \{A_i\}_{2 \leq i \leq n}$$

es una colección independiente de  $\sigma$ -álgebras. Luego, repitiendo el argumento  $n$  veces, obtenemos el resultado querido. □



Dada una colección de  $\sigma$ -álgebras,  $\{\mathcal{G}_t : t \in T\}$ , denotaremos por  $\mathcal{G}_T$  al  $\sigma$ -álgebra generado por ellos:

$$\mathcal{G}_T = \sigma \left( \bigcup_{t \in T} \mathcal{G}_t \right).$$

Asociados a una sucesión de  $\sigma$ -álgebras, tenemos eventos que no están en el  $\sigma$ -álgebra generado por cualquier subcolección finita de ellos, es decir, son medibles según una cantidad infinita de  $\sigma$ -álgebras y nada menos. Estos eventos son llamados *eventos cola* y los definimos a continuación.

**Definición 1.23** ( $\sigma$ -álgebra cola). Sea  $\{\mathcal{G}_t : t \in T\}$  una colección enumerable de  $\sigma$ -álgebras. Tomemos  $I_n, n \geq 1$ , finitos y tales que  $I_n \uparrow T$ . Definamos

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{G}_{T \setminus I_n}.$$

El  $\sigma$ -álgebra cola de  $\{\mathcal{G}_t : t \in T\}$  es

$$\tau = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{H}_n.$$

El  $\sigma$ -álgebra cola de una una colección enumerable de  $\sigma$ -álgebras es único, es decir, no depende de la sucesión creciente que escojamos para definirla.

Para demostrar esta buena definición, supongamos que tenemos dos sucesiones  $I_n \uparrow T$  y  $J_n \uparrow T$ . Como cada  $I_n$  es finito, existe una sucesión  $k_n$ , tal que

$$J_{k_n} \supset I_n, \text{ y en consecuencia, } T \setminus J_{k_n} \subset T \setminus I_n.$$

Luego,

$$\mathcal{H}_n^J = \mathcal{G}_{T \setminus J_n} \subset \mathcal{G}_{T \setminus J_{k_n}} \subset \mathcal{G}_{T \setminus I_n} = \mathcal{H}_n^I$$

y así, obtenemos que

$$\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{H}_n^J \subset \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{G}_{T \setminus J_{k_n}} \subset \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{H}_n^I.$$

Procediendo de la misma manera, finalmente, se cumple que

$$\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{H}_n^J = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{H}_n^I.$$

Un teorema muy importante es el que afirma que el  $\sigma$ -álgebra cola de una una colección independiente es trivial (*i. e.* todos sus eventos tienen probabilidad 0 ó 1). Para demostrarlo haremos uso del siguiente hecho.

**Proposición 1.15** (Reagrupamiento). *Supongamos que la colección de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N}\}$  sea independiente. Entonces para todo  $p \in \mathbb{N}$ , si denotamos por  $I_p = 1, \dots, p$ , los  $\sigma$ -álgebras*

$$\mathcal{G}_{I_p} \text{ y } \mathcal{G}_{\mathbb{N} \setminus I_p} \text{ son independientes.}$$

*Demostración.* Esto es consecuencia de la proposition anterior considerando los  $\pi$ -sistemas

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{G}_{I_p}$$

y

$$\mathcal{A}_2 = \bigcup_{k=p+1}^{\infty} \sigma(\mathcal{G}_i : p \leq i \leq k) \subset \mathcal{G}_{\mathbb{N} \setminus I_p}.$$

□

**Teorema 1.16** (Ley 0-1 de Kolmogorov). *Sea  $\{\mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N}\}$  una colección enumerable de  $\sigma$ -álgebras independientes. Entonces se cumple que su  $\sigma$ -álgebra cola es independiente de sí mismo y, en consecuencia, es trivial.*

*Demostración.* Recordemos que  $\tau = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{H}_n$ , con  $\mathcal{H}_n = \sigma(\mathcal{G}_m : m \geq n)$ . Denotamos por  $I_0$  a  $\emptyset$  y por  $I_n$  al conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Así,

$$\tau = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{G}_{\mathbb{N} \setminus I_{n-1}}.$$

Vamos a demostrar que  $\tau$  es independiente de sí mismo. Esto implica que  $\forall A \in \tau, P(A) = P(A)P(A)$ , es, decir,  $P(A) \in \{0, 1\}$ .

Primero, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que

$$\mathcal{G}_{I_n} \text{ y } \mathcal{G}_{\mathbb{N} \setminus I_n} \text{ son independientes.}$$

Como  $\tau \subset \mathcal{G}_{\mathbb{N} \setminus I_n}$  entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{G}_{I_n} \text{ y } \tau \text{ son independientes.}$$

Luego,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_{I_n} \text{ y } \tau \text{ son independientes.}$$

Entonces,

$$\mathcal{G}_{\mathbb{N}} = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_{I_n}\right) \text{ y } \tau \text{ son independientes.}$$

Como  $\tau \subset \mathcal{G}_{\mathbb{N}}$ , entonces  $\tau$  es independiente de sí mismo.

□

La Ley 0 – 1 de Kolmogorov y la herramienta de acoplamiento de medidas que definiremos a continuación nos ayudarán a describir el modelo de percolación.

**Definición 1.24** (Acoplamiento de medidas). Un acoplamiento de una colección de espacios de medida  $\{(X_t, \mathcal{M}_t, \mu_t)\}_{t \in T}$  es otro espacio de medida

$$(X, \mathcal{M}, \mu)$$

junto con una colección de funciones medibles

$$\{f_t : X \rightarrow X_t\}_{t \in T}$$

tales que la medida inducida por  $f_t$  en  $(X_t, \mathcal{M}_t)$  coincide con  $\mu_t$ , es decir,

$$\mu(f_t^{-1}(A)) = \mu_t(A),$$

para todo  $A \in \mathcal{M}_t$  y para todo  $t \in T$ .

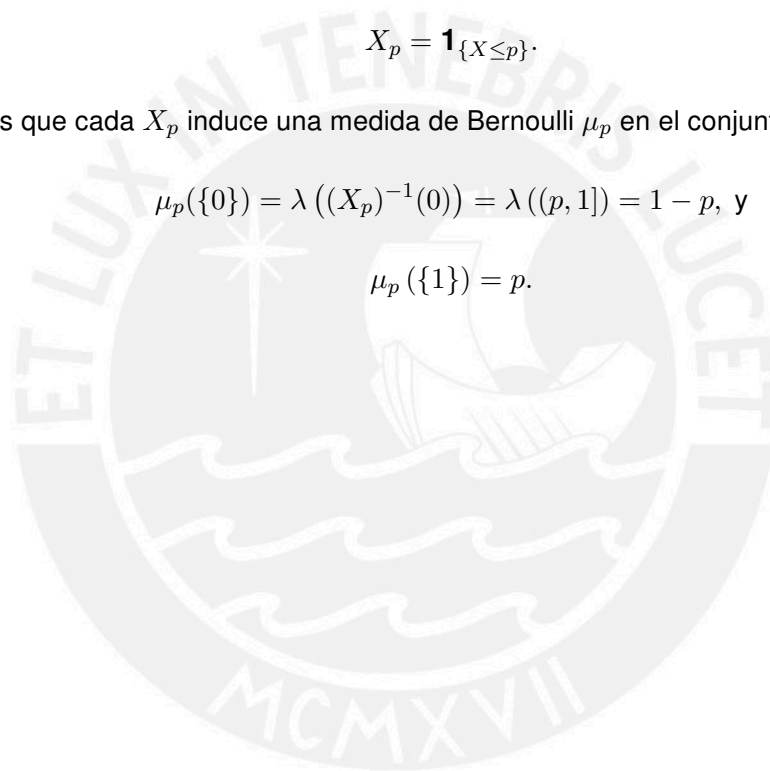
**Ejemplo** (Ejemplo Importante). Acoplemos todas las variables aleatorias con distribución Bernoulli de parámetro  $p \in [0, 1]$  por medio del intervalo  $[0, 1]$  con la medida de Lebesgue  $\lambda$  y las variables aleatorias  $X_p : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ , definidas por

$$X_p = \mathbf{1}_{\{X \leq p\}}.$$

Notemos que cada  $X_p$  induce una medida de Bernoulli  $\mu_p$  en el conjunto  $\{0, 1\}$ :

$$\mu_p(\{0\}) = \lambda((X_p)^{-1}(0)) = \lambda((p, 1]) = 1 - p, \text{ y}$$

$$\mu_p(\{1\}) = p.$$



## Capítulo 2

# Modelo de Percolación

En palabras simples, un modelo de percolación es una medida de probabilidad sobre el conjunto de los subgrafos de un grafo dado. Sin embargo, nosotros no lo definiremos de esta forma tan general sino que más bien, trabajaremos con algunos subgrafos que pueden ser representados más fácilmente, en términos solo de sus aristas o solo de sus vértices. Así, por ejemplo, a cada arista del grafo dado le asociaremos el número 1 si está presente en el subgrafo y 0 a aquellas que no están en él. Es sobre este espacio de sucesiones de ceros y unos en donde pondremos una medida de probabilidad adecuada, que será nuestra medida de percolación.

Aclaremos además que en este contexto, nos referiremos a una arista o vértice por *enlace* o *sitio*, respectivamente y a una componente conexa de un grafo, como *cluster*.

### 2.1. El Espacio de Configuraciones

Comencemos entonces definiendo aquel espacio que usaremos en vez del de los subgrafos.

**Definición 2.1** (Espacio de configuraciones). Llamamos *espacio de configuraciones de enlaces* del grafo  $\Lambda = (V, E)$ , al conjunto  $\{0, 1\}^E$  de los subconjuntos de aristas, mientras que al conjunto de los subconjuntos de vértices,  $\{0, 1\}^V$ , lo llamamos el *espacio de configuraciones de sitios* de  $\Lambda$ .

En ambos espacios producto, tenemos las proyecciones canónicas

$$\pi_e^\Lambda : \{0, 1\}^E \rightarrow \{0, 1\}, \text{ para } e \in E, \text{ y}$$

$$\pi_v^\Lambda : \{0, 1\}^V \rightarrow \{0, 1\}, \text{ en el caso de } v \in V.$$

Denotaremos  $\pi_e^\Lambda(\omega)$  por  $\omega_e$ , para  $\omega \in \{0, 1\}^E$ ,  $e \in E$  y  $\pi_v^\Lambda(\eta)$  por  $\eta_v$ , para  $\eta \in \{0, 1\}^V$ ,  $v \in V$

Cuando el contexto sea claro, omitiremos el superíndice  $\Lambda$ . Consideremos  $\mathcal{H}_E(\Lambda)$ , la colección de los subgrafos de  $\Lambda$  que tienen a  $V$  como conjunto de vértices. Esta se relaciona biunívocamente con  $\{0, 1\}^E$  asignando a cada subconjunto  $F$  de aristas el subgrafo

más grande que tiene a  $F$  como conjunto de aristas:

$$\begin{aligned} \varphi_E^\Lambda : \{0, 1\}^E &\rightarrow \mathcal{H}_E(\Lambda) \\ \omega &\mapsto (V, \{e \in E : \omega_e = 1\}). \end{aligned}$$

Es fácil notar que  $(\varphi_E^\Lambda)^{-1}(H) = \mathbf{1}_{E(H)} : E \rightarrow \{0, 1\}$ , para  $H \in \mathcal{H}_E(\Lambda)$ .

De manera análoga, también hay una biyección de  $\{0, 1\}^V$  a los subgrafos que son generados por subconjuntos de vértices, que denotamos por  $\mathcal{H}_V(\Lambda)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_V^\Lambda : \{0, 1\}^V &\rightarrow \mathcal{H}_V(\Lambda) \\ \eta &\mapsto G[\{v \in V : \eta_v = 1\}]. \end{aligned}$$

La inversa de esta aplicación es  $(\varphi_V^\Lambda)^{-1}(H) = \mathbf{1}_{V(H)} : V \rightarrow \{0, 1\}$ .

Otra vez, omitiremos el superíndice  $\Lambda$  a menos que haya lugar a confusiones.

En el conjunto de los subgrafos de  $\Lambda$  hay un orden parcial natural, dado por la relación “ser un subgrafo de”, así también podemos establecer un orden parcial en  $\{0, 1\}^E$ :

$$\omega_1 \preceq \omega_2 \Leftrightarrow (\omega_1)_e \leq (\omega_2)_e, \forall e \in E,$$

es decir,

$$\omega_1 \preceq \omega_2 \Leftrightarrow \varphi_E(\omega_1) \subset \varphi_E(\omega_2).$$

De igual manera, también tenemos dotar a  $\{0, 1\}^V$  de un orden parcial:

$$\eta_1 \preceq \eta_2 \Leftrightarrow (\eta_1)_v \leq (\eta_2)_v, \forall v \in V \Leftrightarrow \varphi_V(\eta_1) \subset \varphi_V(\eta_2).$$

Los comentarios anteriores dejan claro cómo estos espacios de configuraciones, en realidad, están identificándose con la colección de subgrafos.

Por otro lado, como los espacios de configuraciones son productos de espacios finitos, podemos dotarlos del  $\sigma$ -álgebra producto, al que denotaremos por  $\mathcal{F}_E$  y  $\mathcal{F}_V$ , para  $\{0, 1\}^E$  y  $\{0, 1\}^V$ , respectivamente. Con este  $\sigma$ -álgebra las proyecciones canónicas se vuelven funciones medibles.

## 2.2. El Modelo de Percolación

Ahora especificamos la clase de medidas de probabilidad que consideraremos sobre el espacio de configuración que definimos antes.

**Definición 2.2** (Modelo de Percolación). Sea  $\Lambda = (V, E)$  un grafo enumerable y localmente finito. Un *modelo de percolación de enlaces* en  $\Lambda$  es un espacio de probabilidad

$$\left( \{0, 1\}^E, \mathcal{F}_E, \mathbb{P}_\Lambda^b \right).$$

De manera similar, un *modelo de percolación de sitios* en  $\Lambda$  es un espacio de probabilidad

$$(\{0, 1\}^V, \mathcal{F}_V, \mathbb{P}_\Lambda^s).$$

A  $\mathbb{P}_\Lambda^b$  y a  $\mathbb{P}_\Lambda^s$  se les conoce como *medidas de percolación de enlaces y de sitios*, respectivamente.

En lo que sigue, cuando no haya lugar a confusiones, escribiremos  $\omega$  para denotar a una configuración y no hacer distinción de si está en  $\{0, 1\}^E$  o en  $\{0, 1\}^V$  y así resaltar que lo que decimos se cumple en los dos casos. Por la misma razón, usaremos  $\varphi$  para referirnos a  $\varphi_E$  o a  $\varphi_V$ .

**Definición 2.3** (Subgrafo abierto). Al subgrafo que le corresponde a una configuración (de enlaces o de sitios)  $\omega$ ,  $\varphi(\omega)$ , lo llamaremos *subgrafo abierto*.

**Definición 2.4** (Camino abierto). Decimos que un camino  $P \subset \Lambda$  es  $\omega$ -abierto si se cumple que

$$P \subset \varphi(\omega).$$

De manera sencilla, esta definición quiere decir que dada una configuración de enlaces  $\omega$  y un camino  $P \subset \Lambda$ , se cumple que

$$P \text{ es } \omega\text{-abierto} \Leftrightarrow \omega_e = 1, \forall e \in E(P),$$

y en el caso de una configuración de sitios  $\nu$

$$P \text{ es } \nu\text{-abierto} \Leftrightarrow \eta_v = 1, \forall v \in V(P).$$

Ahora veremos algunos eventos de interés y variables aleatorias importantes en un modelo de percolación. Es importante prestar atención a que son eventos distintos dependiendo de si están  $\mathcal{F}_E$  o  $\mathcal{F}_V$ , a pesar de que los denotemos de igual manera.

**Proposición 2.1.** Sea  $P \subset \Lambda$  un camino,  $H \subset \Lambda$ , un subgrafo. Los siguientes subconjuntos de  $\Omega$  son medibles:

- i.  $\{P \text{ es abierto}\} := \{\omega \in \Omega : P \text{ es } \omega\text{-abierto}\},$
- ii.  $\{x \longleftrightarrow y\} := \{\omega : x \xleftrightarrow{\varphi(\omega)} y\},$
- iii.  $\{x \xrightarrow{H} y\} := \{\omega : x \xleftrightarrow{\varphi(\omega) \cap H} y\},$
- iv.  $\{x \longleftrightarrow H\} := \{\omega : x \xleftrightarrow{\varphi(\omega)} H\},$
- v.  $\{x \longleftrightarrow \infty\} := \{\omega : x \xleftrightarrow{\varphi(\omega)} \infty\},$
- vi.  $\{|C_x| = \infty\} := \{\omega : |C_x^{\varphi(\omega)}| = \infty\}$  y
- vii.  $\{\omega : \varphi(\omega) \text{ tiene un cluster infinito}\}.$

*Demostración.* En primer lugar, haremos la prueba fijando una configuración de enlaces  $\omega$  en  $\{0, 1\}^E$ . Para una arista cualquiera  $e \in E$ , notemos antes que el evento

$$\{e \text{ está abierto}\} := \{\omega \in \{0, 1\}^E : \omega_e = 1\}$$

es  $\mathcal{F}_E$ -medible. Luego:

- i.  $\{P \text{ es abierto}\} = \bigcap_{e \in E(P)} \{e \text{ está abierto}\}$ ,
- ii.  $\{x \longleftrightarrow y\} = \bigcup_{P \in \Gamma_{x,y}^\Lambda} \{P \text{ es abierto}\}$ ,
- iii.  $\{x \xrightarrow{H} y\} = \bigcup_{P \in \Gamma_{x,y}^H} \{P \text{ es abierto}\}$ ,
- iv.  $\{x \longleftrightarrow H\} = \bigcup_{y \in V(H)} \bigcup_{P \in \Gamma_{x,y}^\Lambda} \{P \text{ es abierto}\}$ ,
- v.  $\{x \longleftrightarrow \infty\} = \bigcup_{P \in \Gamma_{x,\infty}^\Lambda} \{P \text{ es abierto}\}$ ,
- vi.  $\{|C_x| = \infty\} = \left\{ \sum_{y \in V} 1_{\{x \longleftrightarrow y\}} = \infty \right\}$  y
- vii.  $\{\omega : \varphi(\omega) \text{ tiene un cluster infinito}\} = \bigcup_{x \in V} \{|C_x| = \infty\}$

son medibles porque todas las operaciones involucradas en sus definiciones son enumerables.

Ahora haremos la prueba fijando una configuración de sitios  $\eta$  en  $\{0, 1\}^V$ .

Para un vértice cualquiera  $v \in V$ , notemos primero que el evento

$$\{v \text{ está abierto}\} := \{\eta \in \{0, 1\}^V : \eta_v = 1\} \subset \mathcal{F}_V.$$

Así,

- i.  $\{P \text{ es abierto}\} = \bigcap_{v \in V(P)} \{v \text{ está abierto}\}$ ,
- ii.  $\{x \longleftrightarrow y\} = \bigcup_{P \in \Gamma_{x,y}^\Lambda} \{P \text{ es abierto}\}$ ,
- iii.  $\{x \xrightarrow{H} y\} = \bigcup_{P \in \Gamma_{x,y}^H} \{P \text{ es abierto}\}$ ,
- iv.  $\{x \longleftrightarrow H\} = \bigcup_{y \in V(H)} \bigcup_{P \in \Gamma_{x,y}^\Lambda} \{P \text{ es abierto}\}$ ,
- v.  $\{x \longleftrightarrow \infty\} = \bigcup_{P \in \Gamma_{x,\infty}^\Lambda} \{P \text{ es abierto}\}$ ,
- vi.  $\{|C_x| = \infty\} = \left\{ \sum_{y \in V} 1_{\{x \longleftrightarrow y\}} = \infty \right\}$  y
- vii.  $\{\omega : \varphi(\omega) \text{ tiene un cluster infinito}\} = \bigcup_{x \in V} \{|C_x| = \infty\}$

son medibles desde que todas las operaciones involucradas en sus definiciones son enumerables. □

**Observación 2.1.** Luego de la proposición anterior 2.1, notemos que

- i.  $\{x \leftrightarrow \infty\} = \{|C_x| = \infty\}$ , en el caso de un grafo enumerable y localmente finito.
- ii. Si ambos  $x, y \in V(H)$ , entonces el evento  $\{x \xleftrightarrow{H} y\} \in \mathcal{F}_E$  es medible según el  $\sigma$ -álgebra generado por las proyecciones a las aristas en  $H$ :

$$\{x \xleftrightarrow{H} y\} \in \sigma(\{\pi_e : e \in E(H)\}).$$

Por ello ,cuando  $H$  es infinito, entonces

$$\{x \xleftrightarrow{H} \infty\} := \bigcup_{P \in \Gamma_{x, \infty}^H} \{P \text{ es abierto}\}$$

es también  $\sigma(\{\pi_e : e \in E(H)\})$ -medible.

De manera similar, el evento  $\{x \xleftrightarrow{H} y\} \in \mathcal{F}_V$  es medible según el  $\sigma$ -álgebra generado por las proyecciones a los vértices en  $H$ :

$$\{x \xleftrightarrow{H} y\} \in \sigma(\{\pi_v : v \in V(H)\}).$$

Y cuando  $H$  es infinito,

$$\{x \xleftrightarrow{H} \infty\} := \bigcup_{P \in \Gamma_{x, \infty}^H} \{P \text{ es abierto}\}$$

es también  $\sigma(\{\pi_v : v \in V(H)\})$ -medible.

**Proposición 2.2.** *Las funciones*

- i.  $|C_x|$ , el tamaño del cluster que contiene a  $x \in V$ , e
- ii.  $I$ , la cantidad de componentes conexas infinitas.

son variables aleatorias.

*Demostración.* Consideremos una configuración de enlaces  $\omega \in \{0, 1\}^E$ . Estas variables aleatorias pueden “escribirse” en términos de los eventos de la proposición anterior.

$$i. |C_x| : \{0, 1\}^E \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$$\omega \mapsto \sum_{y \in V} \mathbf{1}_{\{x \xleftrightarrow{\omega} y\}}$$

También

$$ii. I : \{0, 1\}^E \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Para  $I$ , tenemos que

$$\{I \geq 1\} = \bigcup_{x \in V} \{|C_x| = \infty\} \text{ y}$$

$$\{I \geq 2\} = \bigcup_{x, y \in V} [ \{|C_x| = \infty\} \cap \{|C_y| = \infty\} \cap \{x \leftrightarrow y\}^c ].$$



Por ello, en general:

$$\{I \geq n\} = \bigcup_{\vec{x} \in V^n} \left[ \left( \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{|C_{x_i}| = \infty\} \right) \cap \left( \bigcap_{i < j} \{x_i \longleftrightarrow x_j\}^c \right) \right], \forall n \geq 1,$$

donde  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

En el caso de una configuración de sitios,  $\nu \in \{0, 1\}^V$ , también se cumple que

$$i. |C_x|(\nu) = \sum_{y \in V} \mathbf{1}_{\{x \overset{\nu}{\longleftrightarrow} y\}},$$

$$ii. \{I \geq n\} = \bigcup_{\vec{x} \in V^n} \left[ \left( \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{|C_{x_i}| = \infty\} \right) \cap \left( \bigcap_{i < j} \{x_i \longleftrightarrow x_j\}^c \right) \right].$$

□

### 2.3. El evento crítico

Fijado un grafo  $\Lambda$ , nos enfocaremos en estudiar el evento en el que el subgrafo abierto tiene un *cluster* infinito y cómo cambia su probabilidad según el modelo que como veremos más adelante, indicará un cambio sustancial en su estructura.

A partir de ahora todos los grafos  $\Lambda = (V, E)$  que consideremos serán enumerables y localmente finitos.

**Definición 2.5** (Percolación). Diremos *ocurre percolación* cuando el subgrafo abierto que resulta tiene un *cluster* infinito, es decir:

$$\{\text{ocurre percolación}\} := \bigcup_{x \in \Lambda} \{|C_x| = \infty\}$$

Es de esperarse que para ver que existe un *cluster* infinito tengamos que estar "informados" del estado de una cantidad infinita de vértices, si estamos en un modelo de enlaces (o infinitos vértices, si es un modelo de sitios), nunca bastará conocer el estado de una cantidad finita de ellas, por más grande que sea esta.

**Lema 2.3.** *El evento {ocurre percolación} pertenece al  $\sigma$ -álgebra cola de la colección de las proyecciones  $\{\pi_e : e \in E\}$ , si estamos en un modelo de enlaces y  $\{\pi_v : v \in V\}$ , si estamos en un modelo de sitios).*

*Demostración.* Antes de todo, definimos, para  $x \in \Lambda$ ,  $B_n = B_n(x)$ .

Consideremos primero el caso de enlaces. Las proyecciones  $\{\pi_e : e \in E\}$  forman una colección enumerable de variables aleatorias. El  $\sigma$ -álgebra cola es

$$\tau = \bigcap_{n \geq 1} \sigma(\pi_e : e \in E(\Lambda \setminus B_n)).$$

Nuestro objetivo es demostrar que, fijado  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\bigcup_{x \in \Lambda} \{x \longleftrightarrow \infty\} \in \sigma(\pi_e : e \in E(\Lambda \setminus B_n)), \forall n \geq 1.$$

Fijemos  $\omega \in \{0, 1\}^E$ . Según el Lema 1.3, existe  $x \in \Lambda$  es tal que  $x \xleftrightarrow{\varphi(\omega)} \infty$ , si y solo si

$$\exists y \in \varphi(\omega) \cap \Lambda \setminus B_n \text{ tal que } y \xleftrightarrow{\varphi(\omega) \cap \Lambda \setminus B_n} \infty.$$

Esto quiere decir que

$$\bigcup_{x \in V} \{x \longleftrightarrow \infty\} = \bigcup_{y \in \Lambda \setminus B_n} \{y \xleftrightarrow{\Lambda \setminus B_n} \infty\} \in \sigma(\pi_e : e \in \Lambda \setminus B_n), \forall n \geq 1.$$

Cómo  $n$  era arbitrario, concluimos que  $\bigcup_{x \in V} \{x \longleftrightarrow \infty\}$  pertenece al  $\sigma$ -álgebra cola de  $\{\pi_e : e \in E\}$ .

En el caso de vértices, tenemos las proyecciones  $\{\pi_v : v \in V\}$  y nuevamente se cumple que

$$\bigcup_{x \in V} \{x \longleftrightarrow \infty\} = \bigcup_{y \in \Lambda \setminus B_n} \{y \xleftrightarrow{\Lambda \setminus B_n} \infty\} \in \sigma(\pi_v : v \in \Lambda \setminus B_n), \forall n \geq 1,$$

y así

$$\bigcup_{x \in V} \{x \longleftrightarrow \infty\} \in \tau = \bigcap_{n \geq 1} \sigma(\pi_v : v \in \Lambda \setminus B_n).$$

□

La siguiente definición especifica la clase de modelos de percolación que estudiaremos a lo largo de este trabajo.

**Definición 2.6** (Percolación independiente). Un modelo de percolación en  $\Lambda$  es *independiente* cuando la colección de las proyecciones es independiente.

Un modelo de percolación de enlaces independiente en el grafo  $\Lambda$  está totalmente definido por la función

$$\begin{aligned} \mathbf{p} : E &\rightarrow [0, 1] \\ e &\mapsto \mathbb{P}(\{e \text{ está abierto}\}) \end{aligned}$$

Para  $e \in E$ , denotaremos  $\mathbf{p}(e)$  por  $\mathbf{p}_e$ . Si nos dan como información solo la función  $\mathbf{p} : E \rightarrow [0, 1]$ , definimos las distribuciones finito- dimensionales como probabilidades producto

$$\forall J \subset E, \text{ finito y } \forall B \subset \{0, 1\}^J, \mu_J(B) = \sum_{\omega \in B} \prod_{e \in J} \mathbf{p}_e^{\omega_e} (1 - \mathbf{p}_e)^{1 - \omega_e}.$$

A la probabilidad producto de las medidas de Bernoulli  $\{\mathcal{B}(\mathbf{p}_e)\}_{e \in E}$  en el espacio  $\{0, 1\}^E$  la llamamos *medida de percolación de enlaces independiente con probabilidades  $\mathbf{p}$*  y la denotamos por  $\mathbb{P}_{\Lambda, \mathbf{p}}^b$ .

Del mismo modo, dada una función  $\mathbf{p} : V \rightarrow [0, 1]$ , definimos la *medida de percolación de sitios independiente con probabilidades  $\mathbf{p}$*  como la probabilidad producto de las medidas de Bernoulli  $\{\mathcal{B}(\mathbf{p}_v)\}_{v \in V}$  sobre  $\{0, 1\}^V$  y que denotaremos por  $\mathbb{P}_{\Lambda, \mathbf{p}}^s$ .

Desde ahora trabajaremos solo con estos modelos de percolación independientes. Además, cuando nos sea conveniente, no escribiremos los superíndices  $b$  o  $s$  para indicar que nos referimos a un proceso de enlaces o de sitios, respectivamente. Sobreentenderemos, en estos casos, que las definiciones o resultados valen en ambos casos.

El siguiente teorema nos dice que el evento en el que existe un *cluster* infinito es trivial en el caso modelos de percolación independiente.

**Teorema 2.4.** *El evento  $A = \bigcup_{x \in V} \{|C_x| = \infty\}$  cumple que  $\mathbb{P}_{\Lambda, p}(A)$  pertenece a  $\{0, 1\}$ .*

*Demostración.* Como antes, consideraremos, sin pérdida de generalidad, una configuración de enlaces. Las proyecciones  $\{\pi_e : e \in E\}$  forman una colección independiente, por lo tanto, el  $\sigma$ -álgebra cola es trivial según la Ley 0-1 de Kolmogorov (Teorema 1.16). Así, como consecuencia del Lema 2.3, el evento

$$\bigcup_{x \in V} \{x \longleftrightarrow \infty\}$$

tiene probabilidad 0 ó 1. □

Finalmente, hacemos una observación acerca de la cantidad de *clusters* infinitos a propósito del teorema anterior.

**Proposición 2.5.** *La variable aleatoria  $I$ , la cantidad de *clusters* infinitos, no está en el  $\sigma$ -álgebra cola de las proyecciones.*

*Demostración.* Esto es consecuencia de la proposición 2.2 *ii*.  $I$  depende de cualquier cantidad finita de proyecciones por lo cual no está en el  $\sigma$ -álgebra cola. □

## Capítulo 3

# La Probabilidad de Percolación y el Tamaño del *Cluster*

### 3.1. La desigualdad FKG

El evento en el que un camino  $P$  está abierto cumple una propiedad especial: si una configuración  $\omega$  es tal que ocurre ese evento entonces cualquier otra configuración que resulta de cambiar algunos ceros de  $\omega$  por unos, también hace que el evento ocurra. En realidad, todos los eventos de dicha proposición cumplen con esta especie de monotonía, la cual especificamos a continuación.

**Definición 3.1** (Evento creciente). Un evento  $F \in \mathcal{F}$  es creciente cuando

$$\omega \in F, \omega \preceq \omega' \Rightarrow \omega' \in F.$$

La desigualdad FKG nos dice que dos eventos crecientes están positivamente correlacionados, es decir, dado que uno de ellos ocurrió es igual o más probable que el otro ocurra. Esta desigualdad se cumple para el proceso de percolación independiente y es la clave para poder estudiar la probabilidad de percolación en la sección que sigue. La prueba que presentamos es de Bollobás y Riordan (ver [3]).

**Teorema 3.1** (Desigualdad FKG). Consideremos un proceso de percolación independiente con probabilidades sobre sus aristas (o vértices) dadas por  $\mathbf{p}$  en el grafo  $\Lambda$ . Si los cilindros  $F$  y  $G$  son eventos crecientes, entonces se cumple que

$$\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(F \cap G) \geq \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(F)\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(G).$$

*Demostración.* Aunque consideraremos en particular un proceso de percolación de enlaces, el caso de la percolación de sitios es completamente análogo.

Tengamos presente que la probabilidad  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$  es una probabilidad producto infinito. Por lo tanto, trabajaremos con la restricción de esta probabilidad  $\mathbb{P}$  en el espacio producto finito  $\{0, 1\}^J$ , donde  $J$  es un subconjunto finito de aristas de  $\Lambda$  tal que  $F = (\pi_J)^{-1}(\tilde{F})$  y  $G = (\pi_J)^{-1}(\tilde{G})$ . Supongamos también que las aristas en  $J$  están enumeradas:  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . y denotemos, por  $J_i$  al conjunto  $\{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ , para  $i < n$ .

A cualquier  $B \subset \{0, 1\}^J$  podemos separarlo en dos partes según su última coordenada:

$$B_0 = \{\pi_{J_{n-1}}(\omega) : \pi_{e_n}(\omega) = 0\} \text{ y } B_1 = \{\pi_{J_{n-1}}(\omega) : \pi_{e_n}(\omega) = 1\}.$$

Así,

$$\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbf{p}_n)\mathbb{P}(B_0) + \mathbf{p}_n\mathbb{P}(B_1),$$

donde, por simplicidad, denotamos también con  $\mathbb{P}$  a la medida producto sobre el espacio  $\{0, 1\}^{J_{n-1}}$  y  $\mathbf{p}(e_n) = \mathbf{p}_n$ . Cuando  $B \subset \{0, 1\}^J$  es creciente,  $B_0 \subset B_1$  y, por lo tanto,

$$\mathbb{P}(B_1) - \mathbb{P}(B_0) \geq 0.$$

Ahora, procederemos con la demostración. Lo haremos por inducción. Supongamos que la desigualdad que se quiere demostrar se cumple para  $n - 1$ . Si es así, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{F} \cap \tilde{G}) &= (1 - \mathbf{p}_n)\mathbb{P}(\tilde{F}_0 \cap \tilde{G}_0) + \mathbf{p}_n\mathbb{P}(\tilde{F}_1 \cap \tilde{G}_1) \\ &\geq (1 - \mathbf{p}_n)\mathbb{P}(\tilde{F}_0)\mathbb{P}(\tilde{G}_0) + \mathbf{p}_n\mathbb{P}(\tilde{F}_1)\mathbb{P}(\tilde{G}_1). \end{aligned}$$

Luego, nuestra intención es probar que

$$\begin{aligned} (1 - \mathbf{p}_n)\mathbb{P}(\tilde{F}_0)\mathbb{P}(\tilde{G}_0) + \mathbf{p}_n\mathbb{P}(\tilde{F}_1)\mathbb{P}(\tilde{G}_1) \\ \geq \{(1 - \mathbf{p}_n)\mathbb{P}(\tilde{F}_0) + \mathbf{p}_n\mathbb{P}(\tilde{F}_1)\}\{(1 - \mathbf{p}_n)\mathbb{P}(\tilde{G}_0) + \mathbf{p}_n\mathbb{P}(\tilde{G}_1)\} \\ = \mathbb{P}(\tilde{F})\mathbb{P}(\tilde{G}), \end{aligned}$$

lo cual se cumple si y solo si

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_n\{\mathbb{P}(\tilde{F}_0)\mathbb{P}(\tilde{G}_0) - \mathbb{P}(\tilde{F}_1)\mathbb{P}(\tilde{G}_0) - \mathbb{P}(\tilde{F}_0)\mathbb{P}(\tilde{G}_1) + \mathbb{P}(\tilde{F}_1)\mathbb{P}(\tilde{G}_1)\} \\ \geq \mathbf{p}_n^2\{\mathbb{P}(\tilde{F}_0)\mathbb{P}(\tilde{G}_0) - \mathbb{P}(\tilde{F}_1)\mathbb{P}(\tilde{G}_0) - \mathbb{P}(\tilde{F}_0)\mathbb{P}(\tilde{G}_1) + \mathbb{P}(\tilde{F}_1)\mathbb{P}(\tilde{G}_1)\}. \end{aligned}$$

Esto último es cierto pues

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{F}_0)\mathbb{P}(\tilde{G}_0) - \mathbb{P}(\tilde{F}_1)\mathbb{P}(\tilde{G}_0) - \mathbb{P}(\tilde{F}_0)\mathbb{P}(\tilde{G}_1) + \mathbb{P}(\tilde{F}_1)\mathbb{P}(\tilde{G}_1) \\ = \{\mathbb{P}(\tilde{F}_0) - \mathbb{P}(\tilde{F}_1)\}\{\mathbb{P}(\tilde{G}_0) - \mathbb{P}(\tilde{G}_1)\} \\ \geq 0, \end{aligned}$$

desde que

$$\mathbb{P}(\tilde{F}_1) - \mathbb{P}(\tilde{F}_0) \geq 0 \text{ y } \mathbb{P}(\tilde{G}_1) - \mathbb{P}(\tilde{G}_0) \geq 0.$$

□

### 3.2. La probabilidad de percolación y la media del tamaño del *cluster* abierto

Consideremos un proceso de percolación independiente. Si la función  $\mathbf{p}$ , que define la probabilidad de cada arista o vértice este abierto, es constante e igual a  $p$ , entonces, denotaremos la probabilidad correspondiente por  $\mathbb{P}_{\Lambda,p}^b$  para el caso del modelo de enlaces y por  $\mathbb{P}_{\Lambda,p}^s$  para el modelo de sitios.

**Definición 3.2** (Función de probabilidad de percolación). La *función de probabilidad de percolación de un punto*  $x \in V$  se define como:

$$\begin{aligned} \theta_{\Lambda,x} &: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ p &\mapsto \mathbb{P}_{\Lambda,p}(\{x \leftrightarrow \infty\}). \end{aligned}$$

Denotaremos por  $\theta_{\Lambda,x}^b$  y  $\theta_{\Lambda,x}^s$  a las funciones de probabilidad de percolación de enlaces y de sitios, respectivamente.

Quando el contexto sea claro no escribiremos el subíndice  $\Lambda$  para  $\theta_{\Lambda,x}$  y omitiremos los superíndices  $b$  y  $s$  cuando lo que digamos se cumpla en los casos de enlaces y de sitios a la vez.

Notemos que en la definición de  $\theta_x$  en vez de  $\{x \leftrightarrow \infty\}$  también podíamos usar al evento  $\{|C_x| = \infty\}$ .

**Observación 3.1.** Se cumple que  $\theta_x(0) = 0$  y  $\theta_x(1) = 1$ .

**Lema 3.2.** Si  $x$  e  $y$  son vértices de  $\Lambda$  y  $P$  es un camino finito de longitud  $d$  que los une, entonces

$$p^d \theta_x(p) \leq \theta_y(p).$$

*Demostración.* Sabemos que

$$\{x \longleftrightarrow \infty\} \cap \{P \text{ está abierto}\} \subset \{y \longleftrightarrow \infty\}.$$

Por lo tanto, bastaría que demostráramos que

$$\mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow \infty\}) \mathbb{P}_p(\{P \text{ está abierto}\}) \leq \mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow \infty\} \cap \{P \text{ está abierto}\}),$$

pues  $\mathbb{P}_p(\{P \text{ está abierto}\}) = p^d$ .

Recordemos que ambos eventos,  $\{x \longleftrightarrow \infty\}$  y  $\{P \text{ está abierto}\}$  son crecientes. Por un lado,  $\{P \text{ está abierto}\}$  sí es un cilindro pero, por otro,  $\{x \longleftrightarrow \infty\}$  no lo es, lo que nos impide usar la desigualdad FKG de manera directa.

Sin embargo,  $\{x \longleftrightarrow \infty\}$  es límite de eventos de una sucesión no creciente de eventos que sí son cilindros:

$$\{x \longleftrightarrow \infty\} = \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x \longleftrightarrow \partial B_n\},$$

donde  $k \geq 1$  es suficientemente grande como para que  $P$  sea un subgrafo de  $B_k$ . Así:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow \infty\} \cap \{P \text{ está abierto}\}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(\{x \xrightarrow{B_n} \partial B_n\} \cap \{P \text{ está abierto}\}) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(\{x \xrightarrow{B_n} \partial B_n\}) \mathbb{P}_p(\{P \text{ está abierto}\}) \\ &= \mathbb{P}_p(\{P \text{ está abierto}\}) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(\{x \xrightarrow{B_n} \partial B_n\}) \\ &= \mathbb{P}_p(\{P \text{ está abierto}\}) \mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow \infty\}). \end{aligned}$$

□

**Corolario 3.3.** *En un grafo conexo, si  $\theta_x(p) = 0$  para algún vértice  $x$  entonces también es cero para todos los demás vértices, y si en algún vértice es positiva, lo será también en todos los vértices.*

**Teorema 3.4.**  $\theta_x(p)$  es no decreciente.

*Demostración.* Lo que queremos demostrar es que

$$p \leq p' \Rightarrow \theta_x(p) \leq \theta_x(p'),$$

es decir,

$$p \leq p' \Rightarrow \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow \infty\}) \leq \mathbb{P}_{p'}(\{x \leftrightarrow \infty\}).$$

Es en casos como estos en los que necesitamos de un acoplamiento. Lo que haremos, entonces, es juntar todos los procesos de percolación independientes (considerando, sin pérdida de generalidad, los procesos de enlace). Recordemos que las proyecciones son variables aleatorias con distribución Bernoulli. Por ello, nuestro acoplamiento estará dado por el espacio  $[0, 1]^E$  dotado de la medida de probabilidad  $\mu$ , que resulta del producto de la medida de Lebesgue sobre  $[0, 1]$ , y las funciones medibles  $Z_p : [0, 1]^E \rightarrow \{0, 1\}^E$  tales que

$$\begin{aligned} Z_p(\tilde{\omega}) &= \omega : E \rightarrow \{0, 1\} \\ e &\mapsto \mathbf{1}_{\{\tilde{\omega}(e) \leq p\}}. \end{aligned}$$

Con este acoplamiento, nuestra pregunta se transforma en preguntarnos si lo siguiente es cierto:

$$\mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow \infty\}) = \mu(Z_p^{-1}(\{x \leftrightarrow \infty\})) \leq \mu(Z_{p'}^{-1}(\{x \leftrightarrow \infty\})) = \mathbb{P}_{p'}(\{x \leftrightarrow \infty\}),$$

lo cual podemos responder inmediatamente si nos damos cuenta de que

$$Z_p^{-1}(\{x \leftrightarrow \infty\}) \subset Z_{p'}^{-1}(\{x \leftrightarrow \infty\}).$$

Esto último sí se cumple porque para cualquier  $\omega \in \{0, 1\}^E$ :

$$Z_p^{-1}(\omega) \subset Z_{p'}^{-1}(\omega),$$

desde que  $Z_p(\tilde{\omega}) \leq Z_{p'}(\tilde{\omega}), \forall \tilde{\omega} \in [0, 1]^E$ .

□

El resultado anterior nos asegura la existencia de un valor  $\tilde{p} \in [0, 1]$  a partir del cual  $\theta_x$  cambia para ser positiva (sin importar el vertice  $x$  de  $\Lambda$ , si este es conexo).

**Definición 3.3** (Probabilidad crítica de Hammersley). La *probabilidad crítica de Hammersley* de  $\Lambda$  en  $x \in V$  es

$$p_H(\Lambda; x) = \sup\{p : \theta_x(p) = 0\}.$$

Cuando el contexto sea claro, escribiremos tan solo  $p_H(x)$ . Como consecuencia del Lema 3.2, se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 3.5.** En un grafo conexo, la probabilidad crítica de Hammersley no depende del site, es decir,

$$p_H(x) = p_H, \text{ para todo } x \in V.$$

La siguiente proposición nos dice que el que ocurra percolación también esta siendo señalado por la probabilidad crítica de Hammersley.

**Teorema 3.6.** Si  $A$  el evento en el que existe un cluster infinito y  $\Lambda$  es conexo, entonces  $\Psi(p) = \mathbb{P}_p(A)$  cumple que

$$\Psi(p) = \begin{cases} 0, & \text{si } p < p_H \\ 1, & \text{si } p > p_H. \end{cases}$$

*Demostración.* Cuando  $p > p_H$ , es decir,

$$\theta_x(p) = \mathbb{P}_p(\{|C_x| = \infty\}) > 0$$

entonces

$$0 < \mathbb{P}_p(\{|C_x| = \infty\}) \leq \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{x \in V} \{|C_x| = \infty\}\right) = \mathbb{P}_p(A).$$

En este caso, según el Teorema 2.4,  $\mathbb{P}_p(A)$  no tiene más opción que ser 1.

Por otro lado, cuando  $p < p_H$ ,

$$\mathbb{P}_p(A) = \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{x \in V} \{|C_x| = \infty\}\right) \leq \sum_{x \in V} \mathbb{P}_p(\{|C_x| = \infty\}) = 0.$$

□

Lo anterior nos indica que la presencia de *clusters* infinitos es lo que diferencia las etapas antes y después de  $p_H$ . Cuando  $p < p_H$ , la probabilidad de que exista un *cluster* infinito es nula, pero si  $p > p_H$ , entonces, casi seguramente existe un *cluster* infinito.

Insistimos nuevamente en que esta probabilidad crítica esta marcando el momento en el cual las cualidades del subgrafo abierto cambian drásticamente.

Esto es lo que en Mecánica Estadística se llama un fenómeno de “transición de fase”.



**Definición 3.4** (Tamaño medio del *cluster* abierto). Dado un vértice  $x \in V$ , definimos la función *tamaño medio del cluster que contiene a x* como:

$$\chi_{\Lambda,x}(p) = E_{\Lambda,p}(|C_x|),$$

donde  $E_{\Lambda,p}$  (de enlaces o de sitios) es la esperanza según la probabilidad  $\mathbb{P}_{\Lambda,p}$  (de enlaces o de sitios, respectivamente).

Cuando el contexto sea claro no escribiremos el subíndice  $\Lambda$  para  $\chi_{\Lambda,x}$ .

**Lema 3.7.** Si  $x, y \in V$  y  $P$  es un camino de longitud  $d$  que conecta  $x$  con  $y$ , entonces

$$p^d \chi_x(p) \leq \chi_y(p).$$

*Demostración.* Para probar este hecho usaremos la misma idea que para el caso de  $\theta_x$  (Teorema 3.2). Primero, notemos que

$$\chi_x(p) = \sum_{z \in V} \mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow z\}). \quad (3.1)$$

En segundo lugar, para un  $z \in V$  fijo, el evento  $\{x \longleftrightarrow z\}$  es creciente y, si bien no es un cilindro, si puede aproximarse por estos:

$$\{x \longleftrightarrow z\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \xrightarrow{B_n} z\}, \text{ y}$$

$$\mathbb{P}_p\{x \longleftrightarrow z\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p\{x \xrightarrow{B_n} z\}.$$

De esta manera, podemos usar la desigualdad FKG para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\{y \longleftrightarrow z\}) &\geq \mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow z\} \cap \{x \longleftrightarrow y\}) \\ &\geq \mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow z\}) \mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow y\}). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \chi_y(p) &= \sum_{z \in V} \mathbb{P}_p(\{y \longleftrightarrow z\}) \\ &\geq \sum_{z \in V} \mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow z\}) \mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow y\}) \\ &\geq \mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow y\}) \sum_{z \in V} \mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow z\}) \\ &= p^d \chi_x(p). \end{aligned}$$

□

**Corolario 3.8.** Cuando  $\Lambda$  es conexo,  $\chi_x(p)$  es finito para algún vértice sí y solo sí lo es para todos los demás vértices.

**Teorema 3.9.** La función  $\chi_x(p)$  es no decreciente en  $p$ .

*Demostración.* Basta usar el acoplamiento de la demostración del Teorema 3.4 y la expresión (3.1).

□

Esto nos lleva a la definición de una nueva probabilidad crítica.

**Definición 3.5** (Probabilidad crítica de Temperley). La *probabilidad crítica de Temperley* de  $\Lambda$  en  $x \in V$  se define como

$$p_T(\Lambda; x) = \sup\{p : \chi_{\Lambda, x}(p) < \infty\}.$$

Como siempre no escribiremos  $\Lambda$  cuando no haya lugar a confusiones.

**Observación 3.2.** Tengamos en cuenta que:

i. Por definición, tenemos que:

$$p_T(x)(\Lambda) \leq p_H(x)(\Lambda).$$

ii. Un proceso de percolación de enlaces en el grafo  $\Lambda$  puede interpretarse como un proceso de percolación de sitios en su grafo de línea  $L(\Lambda)$ . Podemos relacionar una configuración de enlaces de  $\Lambda$ ,  $\omega \in \{0, 1\}^E$  con el mismo  $\omega$ , visto como una configuración de sitios de  $L(\Lambda)$ .

Para redondear nuestros comentarios, vemos que sucede con las probabilidades críticas en el grafo de línea. Recordemos que estamos considerando que  $\Lambda$  es localmente finito.

**Proposición 3.10.** Consideremos un grafo  $\Lambda$  conexo. Para todo  $p \in (0, 1)$ , las medidas de percolación  $\mathbb{P}_{\Lambda, p}^b$  y  $\mathbb{P}_{L(\Lambda), p}^s$  cumplen que

$$p_H^b(\Lambda) = p_H^s(L(\Lambda)) \text{ y } p_T^b(\Lambda) = p_T^s(L(\Lambda)).$$

*Demostración.* Nuestro objetivo es relacionar los hechos de que resulten *clusters* infinitos en  $\Lambda$  y en  $L(\Lambda)$ . Algo que debemos tener en cuenta es que mientras en  $\Lambda$  contabilizamos los *sites*, en el grafo  $L(\Lambda)$ , contamos las aristas.

La proposición resulta de la observación de que en un grafo  $\Lambda$  conexo

$$|\Lambda| = \infty \Leftrightarrow e(\Lambda) = \infty.$$

Luego,  $\varphi_E^\Lambda(\omega)$  tiene un *cluster* infinito si y solo si  $\varphi_E^{L(\Lambda)}(\omega)$  tiene un *cluster* infinito. Como consecuencia las probabilidades de que ocurra percolación en el modelo de enlaces en  $\Lambda$  y en el modelo de sitios en  $L(\Lambda)$  son las mismas y por ello las probabilidades críticas de Hammersley son las mismas.

□

A pesar de la proposición anterior, no siempre podemos realizar el proceso inverso: no todo proceso de percolación de sitios puede verse como un proceso de percolación de enlaces. La razón de este hecho está en que no todos los grafos son grafos de línea. En este sentido, podemos afirmar que los procesos de percolación de sitios son más generales y que basta estudiar estos últimos.

Las funciones y las probabilidades críticas que vimos nos ayudan a estudiar los subgrafos abiertos que resultan de un proceso de percolación. Además de todos ellos, existen otras funciones que también describen al subgrafo abierto.

**Definición 3.6.** Sea  $x \in V$ . Definimos las siguientes funciones:

i. *Media truncada del tamaño del cluster*

$$\chi_x^f(p) = \mathbb{E}_p(|C_x| \cdot \mathbf{1}_{\{C_x \leq \infty\}})$$

ii. *Número de clusters por sitio*

$$\kappa_x(p) = \mathbb{E}_p(|C_x|^{-1})$$

iii. *Momentos truncados del cluster*

$$\chi_{x,k}^f(p) = \mathbb{E}_p(|C_x|^{-k} \cdot \mathbf{1}_{\{C_x \leq \infty\}})$$

**Observación 3.3.** Cuando el grafo  $\Lambda$  es transitivo  $\theta_x$ ,  $\chi_x$  y las funciones de la definición previa no dependen de  $x$ , es decir, son constantes en los vértices. En estos casos omitiremos los subíndices  $x$ .

### 3.3. Percolación en $\mathbb{L}^d$

Ahora nos centraremos en el caso particular en que  $\Lambda = \mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , donde

$$\mathbb{E}^d = \left\{ \{x, y\} \in \mathbb{Z}^d : \|x - y\| = 1 \right\}.$$

En adelante, denotaremos por  $p_H(d)$  a la probabilidad crítica de Hammersley para el modelo de enlaces en el grafo  $\mathbb{L}^d$ , la cual, en este caso, no depende del sitio  $x \in \mathbb{Z}^d$  porque  $\mathbb{L}^d$  es un grafo conexo (y transitivo). De igual manera, denotaremos por  $p_T(d)$  a la probabilidad crítica de Tempersley de  $\mathbb{L}^d$ .

Comencemos viendo que  $p_H(d)$  comienza en 1 y después va decreciendo mientras la dimensión crece.

**Proposición 3.11.**  $p_H(1) = 1$

*Demostración.* Calculemos  $\theta_x(p) = \theta_0(p) = \mathbb{P}_p(\{0 \longleftrightarrow \infty\})$ . Primero, notemos que

$$\{0 \longleftrightarrow \infty\} \subset \left( \bigcap_{z>0} \{0 \longleftrightarrow z\} \right) \cup \left( \bigcap_{z<0} \{0 \longleftrightarrow z\} \right) \text{ y que}$$

$$\bigcap_{z>0} \{0 \longleftrightarrow z\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{e_i \text{ esta abierto}\},$$

donde  $e_i = \{i, i + 1\}$ . Luego,

$$\mathbb{P}_p \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{e_i \text{ esta abierto}\} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} p^n,$$

que también es igual a la probabilidad del evento  $\bigcap_{z<0} \{0 \longleftrightarrow z\}$ . Así, este límite es 0 para todo  $p < 0$  y es positivo e igual a 1 si  $p = 1$ . □

**Proposición 3.12.** *La probabilidad crítica de Hammersley de  $\mathbb{L}^d$  decrece con la dimensión  $d$ , es decir,*

$$p_H(d + 1) \leq p_H(d), \forall d \geq 1.$$

*Demostración.* Esto es consecuencia de que  $\mathbb{L}^d$  es isomorfo a un subgrafo de  $\mathbb{L}^{d+1}$ . Por ello,

$$\{x \xrightarrow{\mathbb{L}^d} \infty\} \subset \{x \xrightarrow{\mathbb{L}^{d+1}} \infty\}$$

y así,

$$\theta(\mathbb{L}^d; p) \leq \theta(\mathbb{L}^{d+1}; p).$$
□

**Observación 3.4.** El Teorema de Kesten afirma que  $p_H(2) = 1/2$  (ver[9]). Los valores de las probabilidades críticas para  $d \geq 3$  no se conocen explícitamente.

Ahora nos interesa estudiar la variable aleatoria  $I$ , la cantidad de componentes conexas infinitas. Claramente,  $I$  es invariante por traslaciones. A continuación definimos esta característica.

**Definición 3.7** (Traslación en  $\mathbb{L}^d$ ). Dado  $\nu \in \mathbb{Z}^d$ , la *traslación por  $\nu$*  es la función  $T_\nu$  la función definida por

$$\begin{aligned} T_\nu : \{0, 1\}^E &\rightarrow \{0, 1\}^E \\ (\omega_e)_{e \in E} &\mapsto (\omega_{e+\nu})_{e \in E} \end{aligned}$$

Un evento  $A$  es invariante por traslaciones si  $\forall \nu \in \mathbb{N}^d, T_\nu^{-1}(A) = A$ . Una variable aleatoria  $X$  es invariante por traslaciones si  $\forall \nu \in \mathbb{N}^d, X \circ T_\nu = X$ .

**Lema 3.13.** *Para todo  $p \in [0, 1]$ , la medida de percolación independiente  $\mathbb{P}_p$  en  $\mathbb{L}^d$  es invariante por traslaciones, es decir,*

$$\mathbb{P}_p \circ T_\nu = \mathbb{P}_p, \forall \nu \in \mathbb{Z}^d.$$

**Teorema 3.14** (Ergodicidad de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas). Sean  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  variables aleatorias idénticamente distribuidas y  $T$  el desplazamiento

a la izquierda, esto es

$$T(\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots) = (\dots, X_0, X_1, X_2, \dots).$$

Entonces,  $\forall A \in \sigma(X_n : n \in \mathbb{Z})$ ,

$$T^{-1}(A) = A \rightarrow \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}.$$

**Corolario 3.15.** Uno de los eventos  $\{I = 0\}$ ,  $\{I = 1\}$  o  $\{I = \infty\}$  tiene probabilidad uno.

También se cumple que  $p_T$  es monótona con la dimensión.

**Proposición 3.16.** La probabilidad crítica de Tempersley de  $\mathbb{L}^d$  decrece con la dimensión  $d$ , es decir,

$$p_T(d+1) \leq p_T(d), \forall d \geq 1.$$

*Demostración.* Sabemos que

$$\chi_0(p) = \sum_{x \in V} \mathbb{P}_p(\{0 \leftrightarrow x\}).$$

Como

$$\{0 \xrightarrow{\mathbb{L}^d} x\} \subset \{0 \xrightarrow{\mathbb{L}^{d+1}} x\}$$

entonces,

$$\chi(\mathbb{L}^d; p) \leq \chi(\mathbb{L}^{d+1}; p).$$

□

El siguiente teorema establece que las probabilidades críticas cuando  $d \geq 2$  no son triviales. Para probarlo seguimos a Grimmet [6]. Dedicamos lo que resta de la sección a ello.

**Teorema 3.17.** Para  $d \geq 2$  se cumple que  $0 < p_T(d) \leq p_H(d) < 1$ .

*Demostración.* Sabemos que siempre se cumple que

$$p_T(d) \leq p_H(d).$$

Nuestra tarea es encontrar una cota inferior y otra superior que no sean triviales para la probabilidad crítica de Tempersley y la de Hammersley de  $\mathbb{L}^d$ , respectivamente.

Primero, necesitamos demostrar que  $0 < p_T(d), \forall d \geq 2$ . Para ello, contaremos los caminos que parten del origen. Si definimos el conjunto

$$\Gamma_0(n) = \{P \subset \mathbb{L}^d : P \text{ es un camino finito que parte de } x \text{ y tiene longitud } n\},$$

entonces  $\sigma(n) = |\Gamma_0(n)|$  es la cantidad de caminos de longitud  $n$  que parten del origen. Observemos que esta última cantidad,  $\sigma(n)$ , no es mayor a  $2d(d-1)^{n-1}$  y así

$$\lambda(d) = \limsup \sigma(n)^{1/n} \leq 2d - 1 < \infty.$$

Además, definamos la variable aleatoria

$$N(n) = \sum_{P \in \Gamma_0(n)} \mathbf{1}_{\{P \text{ está abierto}\}},$$

que es la cantidad de caminos de longitud  $n$  que parten del origen y que están abiertos. Podemos calcular la esperanza de  $N(n)$ :

$$E(N(n)) = p^n \sigma(n).$$

Si encontráramos  $p'$  positivo tal que  $\chi(p')$  sea finita, entonces tendríamos  $p_T(d) \geq p'$ . Lo que haremos es encontrar ese  $p'$ .

Tomando en cuenta que para todo vértice  $x$  en  $C_0$  existe un camino de  $0$  a  $x$  y que, por lo tanto, el tamaño de ese *cluster* es a lo más la cantidad de caminos abiertos que parten del origen,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} N(n)$ , entonces obtenemos que se cumple que

$$\begin{aligned} \chi(p) &= E_p(|C_0|) \\ &\leq E_p\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} N(n)\right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} E_p(N(n)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} p^n \sigma(n). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Fijemos  $\epsilon < 1$  positivo. Si imponemos que  $p\lambda(d) < \epsilon$  entonces, existe  $n_0 > 0$  tal que  $p\sigma(n)^{1/n} < \epsilon$  para todo  $\forall n \geq n_0$ , es decir

$$p^n \sigma(n) < \epsilon^n, \forall n \geq n_0. \tag{3.3}$$

y, en consecuencia,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} p^n \sigma(n) < \infty.$$

Luego, resumiendo, cuando  $p < \frac{\epsilon}{\lambda(d)}$  entonces

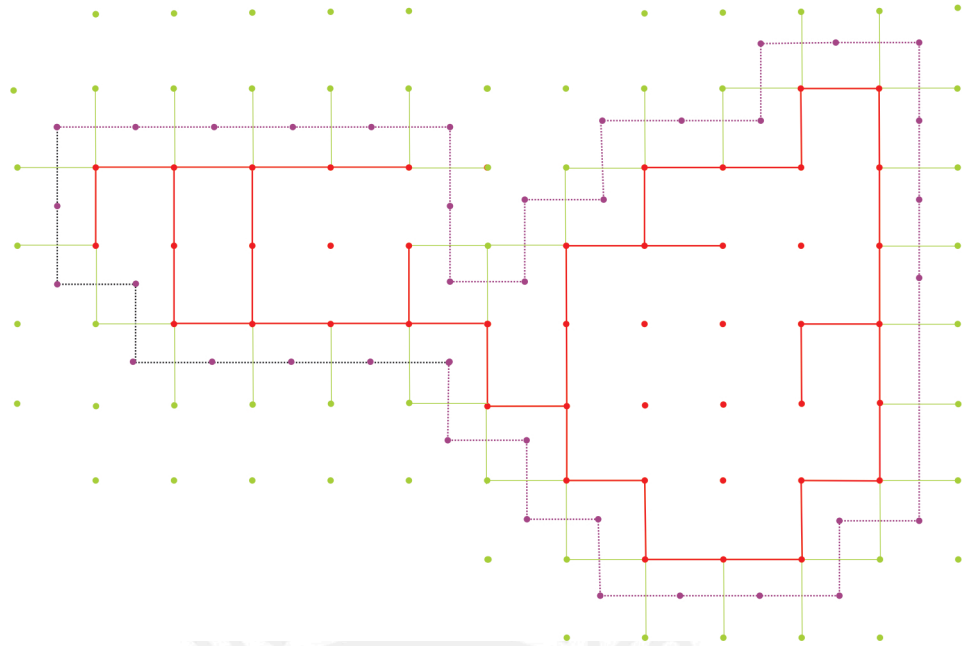
$$\chi(p) < \infty.$$

Finalmente, como  $\epsilon < 1$  era arbitrario, tenemos la cota inferior:

$$p_T(d) \geq \frac{1}{\lambda(d)}.$$

Ahora vamos por la cota superior para  $p_H(d)$ ,  $\forall d \geq 2$ . Notemos que solo necesitamos probar que  $p_H(2) < 1$ , debido a la Proposición 3.12. Antes de comenzar, requerimos hacer algunas observaciones.

Si consideramos a  $\mathbb{L}^2$  como un grafo “dibujado en el plano” es fácil convencerse de que si, como resultado de un proceso de percolación, obtenemos un subgrafo cuya com-



**Figura 3.1:** Un subgrafo finito de  $\mathbb{L}^2$  está rodeado por un ciclo que atraviesa aristas de su borde.

ponente conexa que contiene al origen es finita, entonces el borde de este *cluster* está formado por las aristas cerradas que lo rodean, los cuales no permiten que el origen se conecte con el infinito. Es más, podemos encerrar a este *cluster* finito atravesando las aristas cerradas del borde para obtener un ciclo (que se ve como una curva cerrada) como en la Figura 3.1.

Si atravesamos de la misma manera todas las aristas de  $\mathbb{L}^2$  obtenemos un nuevo grafo que tiene sus vértices en las *caras* de  $\mathbb{L}^2$  y cada una de sus aristas  $e$  se cruza con una sola arista  $e^*$  de este nuevo grafo. Llamamos a  $e^*$ , la arista dual de  $e$ . Este último no es tan distinto de  $\mathbb{L}^2$ : él y su dual, son isomorfos y, en realidad, podemos verlo como una simple traslación del original (son isomorfos). Lo llamaremos *grafo dual* de  $\mathbb{L}^2$  y lo denotamos por  $\mathbb{L}_*^2$  (ver Figura 3.2).

Según lo observado, podemos “dibujar en el plano” a  $\mathbb{L}_*^2$  como el grafo que tiene vértices en

$$V(\mathbb{L}_*^2) = \mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

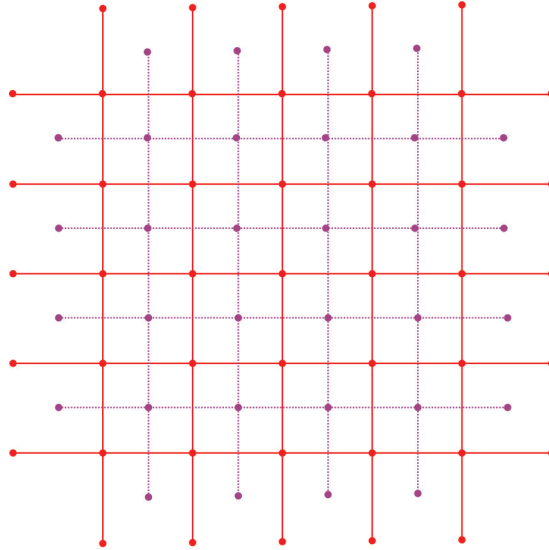
y sus aristas nuevamente son los pares de aristas que están a distancia 1.

En general, podemos definir el *dual* de cualquier *grafo plano*. Aquí no necesitamos de aquellas definiciones pero aún así las incluimos en el capítulo siguiente.

Debido a la correspondencia 1 – 1 entre las aristas de  $\mathbb{L}^2$  y su dual, podemos definir en este último grafo  $\mathbb{L}_*^2$  un *Proceso de Percolación dual*. Declaramos  $e^*$  *abierto* si y solo si  $e$  está abierto. De esta manera obtenemos un proceso de percolación independiente en  $\mathbb{L}_*^2$  con el mismo parámetro  $p$  del proceso original.

Ahora sí podemos proceder con la prueba. Definimos

$$\Delta_0^*(n) = \{H \subset \mathbb{L}_*^2 : H \text{ es un ciclo que rodea a } 0 \text{ y tiene longitud } n\}$$



**Figura 3.2:** Una parte de  $\mathbb{L}^2$  (rojo) y su grafo dual (morado).

y  $\rho(n) = |\Delta_0^*(n)|$ , como la cantidad de ciclos de  $\mathbb{L}_*^2$  de longitud  $n$  que encierran al origen. Podemos acotar esta última cantidad como sigue:

$$\rho(n) \leq n\sigma(n-1). \quad (3.4)$$

Además, definamos la variable aleatoria

$$M(n) = \sum_{P \in \Delta_0^*(n)} \mathbf{1}_{\{P \text{ está abierto}\}},$$

que es la cantidad de ciclos de longitud  $n$  que rodean al origen y que están abiertos. Si encontráramos  $\tilde{p}$  positivo tal que  $\theta(\tilde{p})$  sea positivo, entonces tendríamos  $p_H(d) \leq \tilde{p}$ . Al igual que hicimos antes, encontraremos tal valor  $\tilde{p}$ .

Tomando en cuenta que cuando el origen está en un *cluster* finito, entonces existe un ciclo cerrado en  $\mathbb{L}_*^2$  que encierra al origen (Lema 3.19 a continuación) y (3.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \theta(p) &= \mathbb{P}_p(\{|C_0| = \infty\}) \\ &\geq \mathbb{P}_p\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{M(n) = 0\}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{M(n) \geq 1\}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ \bigcup_{H \in \Delta_0^*(n)} \{H \text{ está cerrado}\} \right]\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &\geq 1 - \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[ \sum_{H \in \Delta_0^*(n)} \mathbb{P}_p(\{H \text{ está cerrado}\}) \right] \\
 &= 1 - \sum_{n \in \mathbb{N}} (1-p)^n \rho(n) \\
 &\geq 1 - \sum_{n \in \mathbb{N}} (1-p)^n n \sigma(n-1). \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Fijemos  $\epsilon < 1$ . Si imponemos que  $(1-p)\lambda(2) < \epsilon$  entonces, como consecuencia de (3.3) existe  $n_0 > 0$  tal que para todo  $\forall n \geq n_0$

$$n(1-p)^n \sigma(n-1) < (1-p)n\epsilon^{n-1}.$$

Luego,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (1-p)^n n \sigma(n-1) < \infty.$$

Es más, cuando  $(1-p) \downarrow 0$ ,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (1-p)^n n \sigma(n-1) \rightarrow 0,$$

por ello, es posible encontrar  $\tilde{p} \in \left(1 - \frac{\epsilon}{\lambda(2)}, 1\right)$  tal que si  $p > \tilde{p}$  entonces

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (1-p)^n n \sigma(n-1) \leq \frac{1}{2}.$$

Finalmente, podemos seguir con (3.5). Si  $p > \tilde{p}$  entonces

$$\begin{aligned}
 \theta(p) &\geq 1 - \sum_{n \in \mathbb{N}} (1-p)^n n \sigma(n-1) \\
 &\geq \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

En consecuencia,

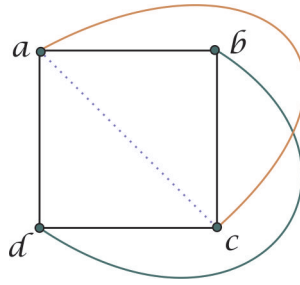
$$p_H(2) \leq \tilde{p}.$$

□

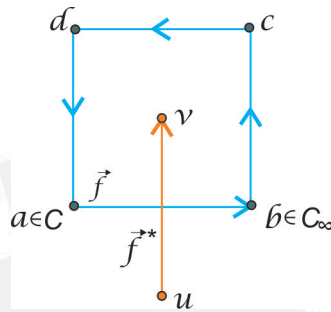
**Definición 3.8** (Borde externo). Sea  $H \subset \mathbb{L}^2$  un subgrafo finito y conexo. El *borde externo* de  $H$ ,  $\partial^\infty H$ , es el subconjunto de aristas de  $\mathbb{L}_*^2$  duales a las aristas del borde de la componente conexa infinita  $H_\infty$  del subgrafo  $\mathbb{L}^2 - V(H)$ :

$$\partial^\infty H = \{e^* \in \mathbb{E}^* : e \in \partial_e(H_\infty)\}.$$

**Lema 3.18.** Consideremos una curva cerrada simple  $\mathcal{C}$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  que pasa por cuatro puntos distintos  $a, b, c$  y  $d$ , en ese orden. Entonces cualesquiera dos curvas simples contenidas en el exterior de  $\mathcal{C}$  tal que una de ellas comienza en  $a$  y termina en  $c$  y la otra,



**Figura 3.3:** En el plano en el plano no pueden haber dos curvas que no se cruzan fuera del cuadrado  $abcd$ .



**Figura 3.4:** La arista  $C - C_\infty$ ,  $ab$ , y su dual orientados.

comienza en  $b$  y termina en  $d$ , se cruzan.

**Lema 3.19.** Si  $G$  es un subgrafo finito de  $\mathbb{L}^2$  entonces  $\partial^\infty G$  es un ciclo con  $G$  en su interior.

*Demostración.* Para hacer sencilla la demostración, le daremos dirección a las aristas involucradas. Comenzamos orientando  $\partial_e G_\infty$  como sigue

$$\vec{F} = \{ \vec{ab} : a \in V(G), b \in V(G_\infty), ab \in \partial_e G_\infty \}$$

y llamaremos a sus miembros  $G - G_\infty$  aristas.

Luego, hay que orientar adecuadamente a  $\partial^\infty G$ . Para  $\vec{f} = \vec{ab} \in \vec{F}$ , definimos  $\vec{f}^*$  como la arista dual a  $f$  orientada de tal modo que  $a$  está a la izquierda de  $\vec{f}^*$  o, de manera equivalente,  $\vec{f}^*$  se obtiene al rotar un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$  en sentido antihorario a  $\vec{f}$  alrededor de su punto medio. Así,

$$\overrightarrow{\partial^\infty G} = \{ \vec{f}^* : \vec{f} \in \vec{F} \}.$$

Ahora haremos la afirmamos principal: si  $\vec{f}^* = \vec{uv} \in \overrightarrow{\partial^\infty G}$  entonces existe una única arista en  $\overrightarrow{\partial^\infty G}$  que sale de  $v$ , es decir, que tiene a  $v$  como vértice inicial y, también, hay una única arista que entra en  $u$ , en otras palabras, que tiene a  $u$  como vértice final.

Solo demostraremos la primera parte de la afirmación que dice que cada arista tiene un solo sucesor porque para ver que tiene un solo antecesor se presentan los mismos casos.

Consideremos  $\vec{f} = \vec{ab}$  y ubiquemos sus vértices finales y también a los vértices  $c$  y  $d$ , adyacentes a  $a$  y a  $b$ , respectivamente, como en la Figura 3.4.

Notemos que cualquier arista de  $\mathbb{L}^2$  está en uno y solo uno de los tres subgrafos  $G$ ,  $G_\infty$  o, el resto,  $R = \mathbb{L}^2 - V(G) - V(G_\infty)$ . Este último está formado por las componentes conexas finitas de  $\mathbb{L}^2 - V(G)$ .

Probaremos la afirmación viendo que en todos los casos posibles en donde se encuentren  $c$  y  $d$ , se cumple.

Primero, notemos que no son posibles los tres casos en que  $c \in V(R)$  y cuando  $c \in V(G_\infty)$  y  $d \in V(R)$  pues no hay  $R - G_\infty$  aristas en  $\mathbb{L}^2$ , pues ambas son componentes conexas distintas de  $\mathbb{L}^2 - V(G)$ .

Además, tampoco es posible que  $c \in V(G)$  y  $d \in V(G_\infty)$  pues en caso contrario, existiría un camino en  $G$  de  $a$  hacia  $c$  y otro en  $G_\infty$  que inicia en  $b$  y termina en  $d$ , lo que implicaría que en el plano habrían dos curvas que no se cruzan fuera del cuadrado  $abcd$ , lo cual no puede ocurrir según el Lema 3.18.

Entonces solo nos quedan cuatro casos. En los dos casos en que  $c \in V(G)$  y  $d \notin V(G_\infty)$ , la única arista que sale de  $u$  es  $\vec{cb}^*$ . Por último, cuando  $c \in V(G_\infty)$  y  $d \in V(G)$ , la arista buscada es  $\vec{dc}^*$  y si ambos  $c$  y  $d$  están en  $V(G_\infty)$ , es  $\vec{ad}^*$ .

Así terminamos de probar nuestra afirmación.

Finalmente, como cada arista en  $\partial^\infty G$  tiene un único sucesor y un único antecesor, entonces  $\partial^\infty G$  contiene un ciclo  $S$ . Como  $S$  separa el plano en dos regiones y cruza solamente  $G - G_\infty$  aristas, entonces  $G_\infty$  está fuera de  $S$  y  $G$  está dentro. Por otro lado, si  $f^* \in \partial^\infty G$  con  $f = ab$  y  $a \in G$  o  $b \in G$  y el otro está en  $G_\infty$ , el ciclo debe cortar a la arista  $f$  porque  $a$  y  $b$  deben quedar dentro de  $S$  y fuera de  $S$ , respectivamente. Luego,  $f^* \in S$ . En otras palabras,  $\partial^\infty G$  está contenida en el ciclo  $S$ , es decir, todo  $\partial^\infty G$  es un ciclo que encierra a  $G$ .

□

### 3.4. La fase subcrítica

Para finalizar este capítulo, haremos una descripción de las fases que se presentan en los procesos de percolación: la fase *subcrítica* se da cuando  $p < p_c$ , y la *supercrítica*, cuando  $p > p_c$ , donde  $p_c$  denota a  $p_H^b, p_H^s, p_T^b$  o  $p_T^s$ .

En secciones anteriores vimos que en el caso de la probabilidad crítica de Hammersley nos interesaba saber en que momento aparecía algún *cluster* infinito. Antes de  $p_H$  todos los cluster eran finitos. Pero, ¿de qué tamaño son?

Con esa motivación, enunciemos sin prueba, el teorema de decaimiento exponencial de la probabilidad del evento  $\{x \longleftrightarrow S_n(x)\}$  (ver detalles en [3]).

**Teorema 3.20** (Decaimiento exponencial). *Sea  $\Lambda$  un grafo enumerable, conexo y localmente finito. Entonces para todo  $p < p_H^b$  existe  $\alpha > 0$  tal que*

$$\mathbb{P}_p^b(\{x \longleftrightarrow S_n(x)\}) \leq \exp\left(\frac{-n\alpha}{(\log n)^2}\right),$$

para todo sitio  $x$  in  $V$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Cabe resaltar que también se cumple el teorema para el modelo de percolación de enlaces. Una de sus consecuencias es que para una gran variedad de grafos se cumple que las probabilidades críticas de Hammersley y Temperley coinciden.

**Teorema 3.21.** *Sea  $\Lambda$  un grafo enumerable, conexo y localmente finito. Si existe una constante  $C$  tal que*

$$|S_n(x)| \leq \exp\left(\frac{nC}{(\log n)^3}\right),$$

para todo sitio  $x$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$p_H^b = p_T^b \text{ y } p_H^s = p_T^s.$$

*Demostración.* Ya sabemos que siempre se da que  $p_T^b \leq p_H^b$  que bajo la condición de conexidad las probabilidades críticas no dependen del vértice  $x$ . Por lo tanto solo nos queda demostrar la otra desigualdad. Para  $p < p_H^b$  y cualquier vértice  $x$ :

$$\chi_x(p) = E_p(|C_x|) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[ \sum_{y \in S_n(x)} \mathbb{P}_p^b(y \longleftrightarrow x) \right] \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)| \mathbb{P}_p^b(\{x \longleftrightarrow S_n(x)\}).$$

Esta última suma converge debido al teorema de decaimiento exponencial de Menshikov que acabamos de enunciar. Como consecuencia,  $p \leq p_T^b$  y desde que  $p < p_H^b$  era arbitrario, entonces

$$p_T^b \geq p_H^b.$$

□

### 3.5. La fase supercrítica

La fase supercrítica está marcada por la presencia de *clusters* infinitos. Pero, ¿cuántos de estos hay? La respuesta está dada por el siguiente teorema de unicidad del *cluster* infinito (una demostración se puede encontrar en [3]). Antes de enunciarlo, necesitamos las siguientes definiciones.

**Definición 3.9** (Grafo del tipo finito). Un grafo  $\Lambda$  enumerable, conexo y localmente finito es *del tipo finito* si hay una cantidad finita de clases de equivalencia de vértices bajo la relación de equivalencia  $x \sim y$  si y solo si existe un automorfismo de  $\Lambda$  que lleva  $x$  en  $y$ .

**Definición 3.10** (Grafo amenable). Un grafo  $\Lambda$  enumerable, conexo y localmente finito es *amenable* si para todo vértice  $x$

$$\frac{|S_n(x)|}{|B_n(x)|} \rightarrow 0.$$

Esto último quiere decir que un grafo es *amenable* cuando las bolas de radio grande contienen muchos más vértices que las esferas que la bordean.

**Teorema 3.22** (Unicidad del *cluster* infinito). *Sea  $\Lambda$  un grafo enumerable, conexo, localmente finito, del tipo finito y amenable. Para cualquier  $p \in (0, 1)$  se cumple que  $\mathbb{P}_p^s(I_0) = 1$  o  $\mathbb{P}_p^s(I_1) = 1$ , donde  $I_k$  es el evento en el que existen exactamente  $k$  clusters infinitos.*

Aclaremos que también hay unicidad del *cluster* infinito para el modelo de percolación de enlaces.



## Capítulo 4

# Probabilidades Críticas

Calcular probabilidades críticas es un amplio problema actualmente. Solo algunas de ellas para grafos particulares han podido ser halladas de manera precisa. En este capítulo hacemos una reseña de algunos de los métodos empleados para calcular las pocas probabilidades críticas conocidas. En todo el capítulo no presentamos ninguna prueba debido a que escapa al contenido de este trabajo. Recomendamos consultar [6].

### 4.1. Probabilidades Críticas para la Percolación de Enlaces

En esta sección consideraremos un grafo  $\Lambda$  plano (dibujado en el plano) enumerable, conexo y localmente finito. Recordemos que  $p_H^b$  y  $p_H^s$  denotan la probabilidad crítica de Hammersley para los procesos de enlaces y de sitios, respectivamente, en el grafo  $\Lambda$ . De igual manera,  $p_T^b$  y  $p_T^s$  denotan la probabilidad crítica de Tempersley para los procesos de enlaces y de sitios.

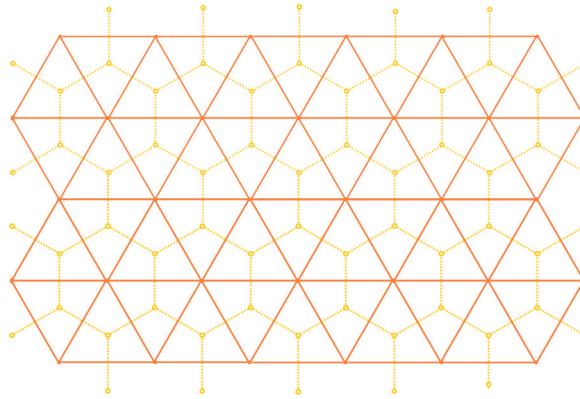
**Observación 4.1.** Todos los grafos que veremos a continuación cumplen con las condiciones del Teorema 3.21 y por lo tanto, para ellos se cumple que  $p_H^b = p_T^b$  y  $p_H^s = p_T^s$ . Por ello, escribiremos  $p_c^b = p_H^b = p_T^b$  y  $p_c^s = p_H^s = p_T^s$  para esos valores comunes.

Calcular la probabilidad crítica del grafo  $\Lambda$  de manera rigurosa y exacta es posible solo en pocos casos, en los cuales la estructura especial de  $\Lambda$  juega un rol primordial, la cual, en los casos que veremos, cumplirá una condición de simetría que precisaremos a continuación. Un isomorfismo de grafos lo entenderemos como una correspondencia de grafos que conserva las aristas.

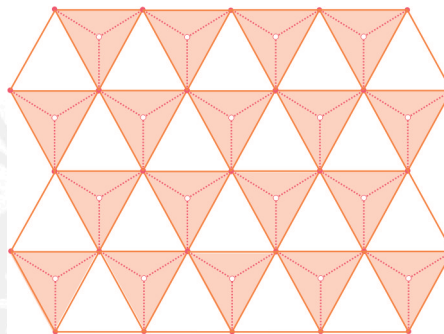
**Definición 4.1.** Decimos que un grafo plano  $\Lambda$  es *simétrico* si la transformación  $x \mapsto -x$  de  $\mathbb{R}^2$  es un isomorfismo de grafos.

En lo que sigue, vamos a comentar acerca de las herramientas que se han usado para encontrar algunas probabilidades críticas.

En el caso del modelo de enlaces, la herramienta más importante y la más utilizada es la dualidad de la cual hablamos en la demostración del Teorema 3.17.



**Figura 4.1:** El grafo triangular  $T$  (naranja) y su dual, el grafo hexagonal,  $H$  (amarillo).



**Figura 4.2:** Al aplicar la transformación estrella-triángulo al grafo  $T$  (naranja) en las aristas de caras sombreadas, se obtiene el grafo  $H$  (líneas punteadas).

**Teorema 4.1.** Si  $\Lambda$  es un grafo plano simétrico y  $\Lambda^*$ , su dual, entonces

$$p_c^b(\Lambda) + p_c^b(\Lambda^*) = 1.$$

Si aceptamos esto, entonces se deduce de inmediato que para todos los grafos que son isomorfos a sus duales se tiene que

$$p_c^b = \frac{1}{2}.$$

Si consideramos ahora el grafo *triangular*,  $T$ , su dual es el grafo *hexagonal*,  $H$  (ver Figura 4.1).

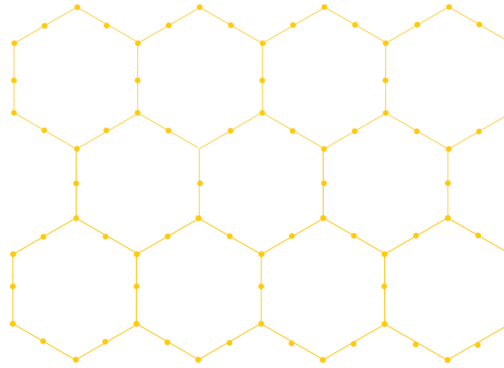
En este caso requerimos de una segunda herramienta para relacionarlos. Esta es la *transformación estrella-triángulo* (ver Figura 4.2). Con su ayuda es posible calcular con exactitud su probabilidad crítica de enlaces.

**Teorema 4.2.** El grafo cuadrado  $\mathbb{L}^2$  cumple que

$$p_c^b(\mathbb{L}^2) = \frac{1}{2},$$

el grafo triangular  $T$ , que

$$p_c^b(T) = 2 \operatorname{sen}(\pi/18)$$



**Figura 4.3:** El grafo  $H_2$  obtenido al subdividir una vez cada arista de  $H$ .

y el grafo hexagonal  $H$ , que

$$p_c^b(H) = 1 - 2 \operatorname{sen}(\pi/18).$$

La tercera herramienta que veremos son pequeñas transformaciones que podemos hacerle a un grafo cuyo efecto en la probabilidad crítica es fácil de calcular. Si el grafo  $\Lambda^{(k)}$  es obtenido a partir de  $\Lambda$  subdividiendo  $k - 1$  veces cada arista de  $\Lambda$ , entonces

$$p_c(\Lambda^{(k)}) = p_c(\Lambda)^{1/k},$$

donde  $p_c$  es  $p_H^b$  o  $p_T^b$ .

Por ejemplo, si  $H_2$  es el grafo que resulta de subdividir una vez cada arista de  $H$  (ver Figura 4.3), entonces

$$p_c^b(H_2) = p_c^b(H)^{1/2}. \tag{4.1}$$

También, si el grafo  $\Lambda^{[k]}$  es obtenido a partir de  $\Lambda$  reemplazando cada arista por  $k$  aristas paralelas, entonces

$$1 - p_c(\Lambda^{[k]}) = (1 - p_c(\Lambda))^{1/k},$$

donde  $p_c$  es  $p_H^b$  o  $p_T^b$ .

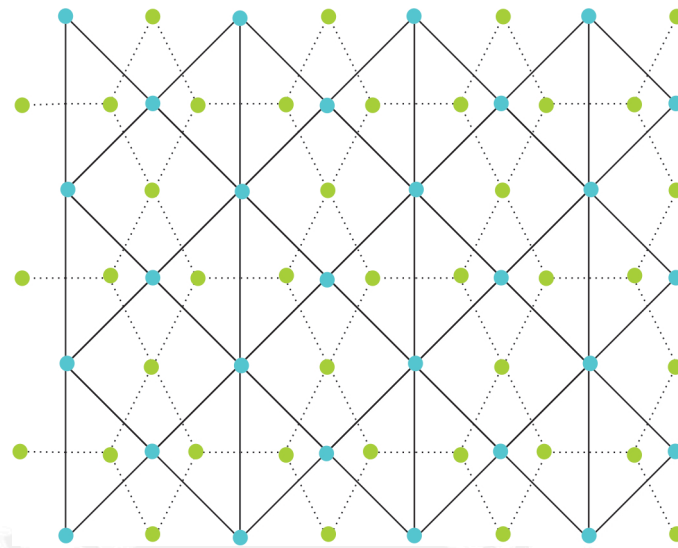
Con un poco más de trabajo que el que hicimos con  $T$  se puede transformar el dual del grafo *bow-tie*,  $S$ , en una copia del mismo (ver Figura 4.4).

Para ello, hay que duplicar ciertas aristas y luego aplicar la transformación estrella-triángulo como se ve en la Figura 4.5. Esto lleva a establecer el siguiente teorema (ver [3, pág. 153]).

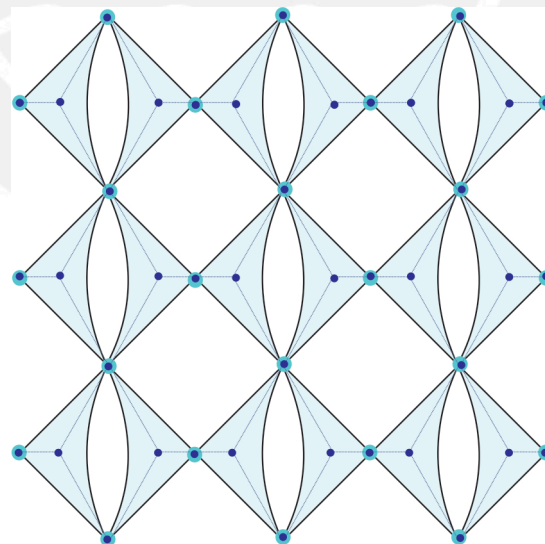
**Teorema 4.3.** *La probabilidad crítica del modelo de enlaces en el grafo bow-tie  $S$ ,  $p_c^b(S)$ , es la raíz que pertenece al intervalo  $(0, 1)$  del polinomio*

$$1 - p - 6p^2 + 6p^3 - p^5.$$

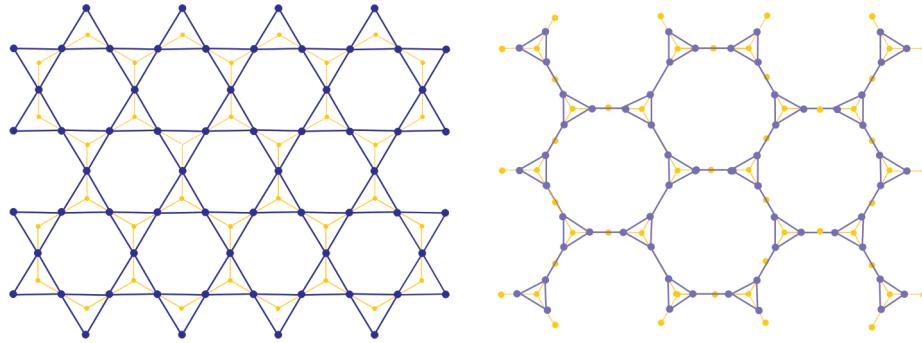




**Figura 4.4:** El grafo *bow-tie*  $S$  y su dual (líneas punteadas con vértices verdes).



**Figura 4.5:** Al duplicar las diagonales del grafo  $S$  y aplicar la transformación estrella-triángulo en las caras sombreadas, obtenemos el grafo  $H'$  (azul) que es el grafo  $H$  con algunas aristas subdivididas una vez.



**Figura 4.6:** Izquierda. El grafo *kagomé*  $K$  (azul) es el grafo de línea de  $H$ . Derecha. El grafo *kagomé extendido*  $K^+$  (azul) es el grafo de línea de  $H_2$ .

## 4.2. Probabilidades Críticas para la Percolación de Sitios

Pasemos ahora al cálculo de probabilidades críticas del modelo de sitios. Una primera herramienta que ya hemos visto es la Proposición 3.10, que dice que el modelo de percolación de enlaces en  $\Lambda$  es equivalente al modelo de percolación de sitios en el grafo de línea  $L(\Lambda)$ . El siguiente teorema nos habla de la probabilidad crítica de sitios del grafo *kagomé*,  $K$ , y del grafo *kagomé extendido*,  $K^+$ , mostrados en la Figura 4.6. Se recomienda consultar [3, pág. 155].

**Teorema 4.4.** *El grafo kagomé  $K$  cumple que*

$$p_c^s(K) = 1 - 2 \operatorname{sen}(\pi/18)$$

*y el grafo kagomé extendido  $K^+$ , que*

$$p_c^s(K^+) = (1 - 2 \operatorname{sen}(\pi/18))^{1/2}.$$

*Demostración.* Solo basta notar que  $K$  es el grafo de línea del grafo hexagonal  $H$  (ver Figura 4.6) y que  $K^+$  que el grafo de línea de  $H_2$ . Luego, el resultado se sigue de la Proposición 3.10 y de la Ecuación 4.1. □

En el modelo de sitios la herramienta más importante es el *matching* así como en el modelo de enlaces lo es la dualidad. Obtenemos un *matching* para  $\Lambda$ ,  $\Lambda^\boxtimes$ , añadiendo a  $\Lambda$  todas las diagonales de todas sus caras.

Como  $\Lambda$  y  $\Lambda^\boxtimes$  tienen el mismo conjunto de vértices, un proceso de percolación de sitios en  $\Lambda$  induce otro proceso de percolación de sitios en  $\Lambda^\boxtimes$ .

Además, se cumple una propiedad análoga a la que se cumplía para grafos duales según la Proposición 3.19: un *cluster* abierto finito de  $\Lambda$  está "rodeado" por un ciclo cerrado en  $\Lambda^\boxtimes$ . Es fundamentalmente esta propiedad la que permite demostrar lo siguiente.

**Teorema 4.5.** *Si  $\Lambda$  es un grafo plano simétrico, entonces*

$$p_c^s(\Lambda) + p_c^s(\Lambda^\boxtimes) = 1.$$

Cuando  $\Lambda$  y  $\Lambda^{\boxtimes}$  son isomorfos (por lo que se llama grafo auto- *matching* a  $\Lambda$ ) entonces

$$p_c^s(\Lambda) = p_c^s(\Lambda^{\boxtimes}) = \frac{1}{2}.$$

Una condición suficiente para que un grafo sea auto-*matching* es que todas sus caras sean triángulos.

**Teorema 4.6.** *El grafo triangular  $T$ , cumple que*

$$p_c^s(T) = \frac{1}{2}.$$



## Capítulo 5

# Simulación del Proceso de Percolación

En el capítulo anterior resumimos cómo se han determinado las probabilidades críticas exactas de algunos grafos conocidos. Sin embargo hay aún muchas probabilidades críticas por determinar exactamente, entre ellas las de los grafos  $\mathbb{L}^d$ , con excepción del modelo de percolación de enlaces para  $d = 2$  y los modelos de percolación en  $\mathbb{L}^1$ . Por ello, en este capítulo veremos cómo se pueden simular procesos de percolación y también estimar las probabilidades críticas que no se han podido hallar analíticamente.

### 5.1. Sobre el Algoritmo

Vamos a considerar grafos transitivos, es decir, grafos en los que todos los vértices son equivalentes. Para simular un proceso de percolación independiente de enlaces lo que hay que hacer es simular una variable aleatoria Bernoulli de parámetro  $p_e$  para cada arista  $e$  del grafo (y hay que hacer lo mismo para los vértices en el caso de percolación de sitios). Como no podemos simular los estados de las infinitas aristas del grafo estudiado, lo que se hace es simular una “gran parte” del *cluster* abierto que resulta: observamos un cuadrado  $R_n = [-n, n] \times [-n, n]$  de tamaño  $2n$ , alrededor del origen 0 del grafo.

Nosotros hemos elaborado *scripts* en *Mathematica* que nos permiten, además, simular gráficamente los resultados de estas simulaciones con funciones propias de ese software para el caso del grafo  $\mathbb{L}^2$ .

Después de la simulación, lo que queremos es hacer estimaciones de las probabilidades críticas. Para ello, tomamos en cuenta que

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(\{0 \leftrightarrow \infty\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(\{0 \leftrightarrow \partial R_n\}).$$

Luego, si  $n$  es suficientemente grande,  $\mathbb{P}_p(\{0 \leftrightarrow \partial R_n\})$  aproxima bien  $\theta(p)$ . Entonces, si estimamos la probabilidad  $\mathbb{P}_p(\{0 \leftrightarrow \partial R_n\})$  con el método de Monte Carlo para  $n$  grande, esta es una buena estimación de  $\theta(p)$ , que denotamos por  $\hat{\theta}(p)$ . Finalmente, con los resultados obtenidos para  $\hat{\theta}(p)$  con diferentes valores de  $p$  entre 0 y 1, podemos aproximar  $p_c$  por el valor en el cual  $\hat{\theta}(p)$  deja de ser 0.

Para detectar la ocurrencia o no ocurrencia del evento  $\{0 \leftrightarrow \partial R_n\}$  es necesario identificar a la componente conexa del origen en el *cluster* abierto. Nosotros lo hicimos con un algoritmo recursivo. Si algún vértice de  $\partial R_n$  está en esa componente conexa entonces sí ha ocurrido el evento.

Una primera decisión que tuvimos que tomar cómo almacenar estos estados, pues finalmente esto influyó en la complejidad de nuestro algoritmo y en el tipo de representación gráfica del resultado simulado. En este punto utilizamos medios distintos en el caso de enlaces y de sitios.

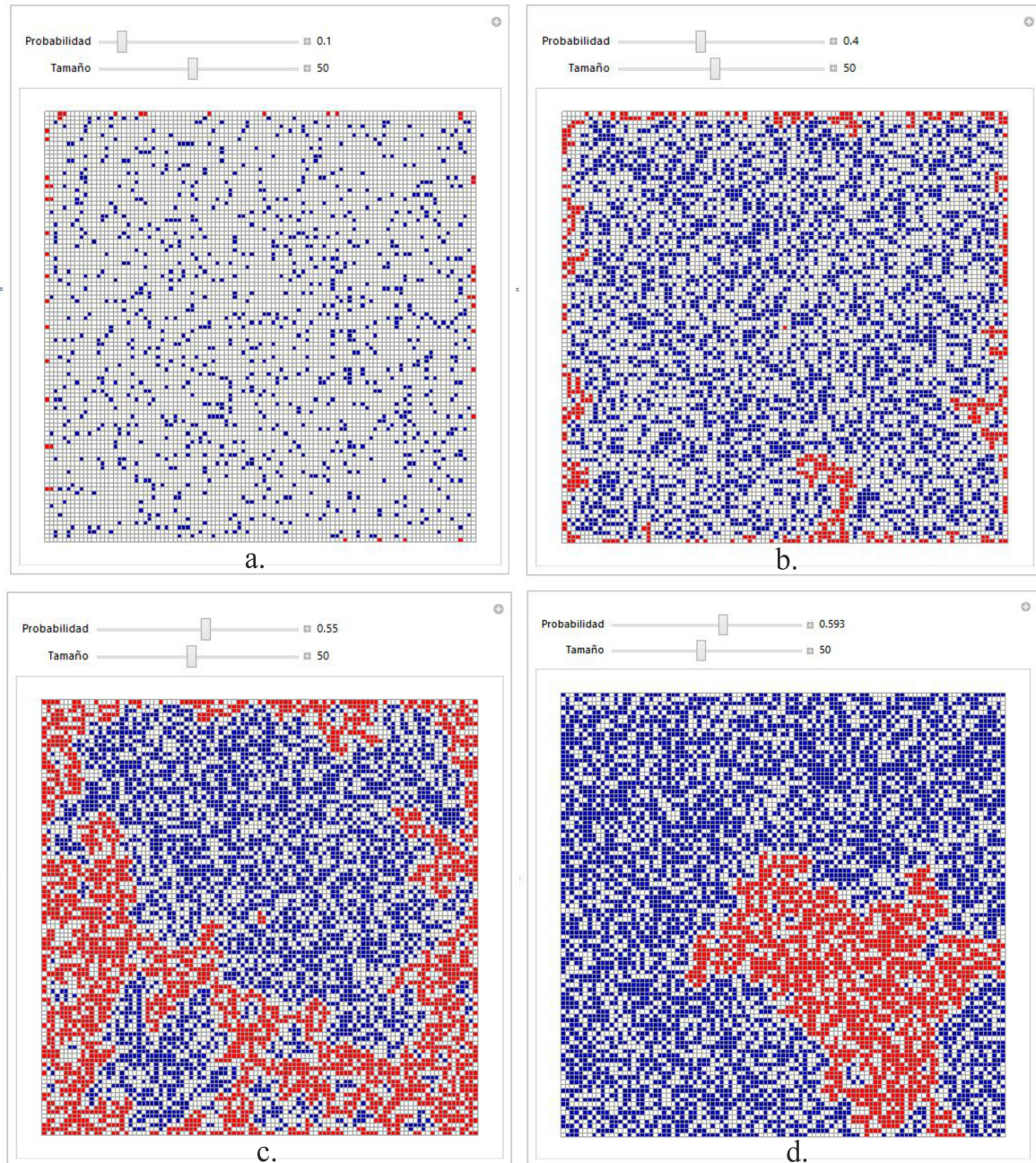
## 5.2. Simulación y Estimación de la Probabilidad Crítica para el Modelo de Percolación de Sitios en $\mathbb{L}^2$

El programa que hemos escrito para simular un modelo de percolación independiente de sitios en  $\mathbb{L}^2$  tiene como argumentos a un número natural  $n$  y a un real  $p \in [0, 1]$ . Lo que obtenemos es una representación gráfica interactiva del subgrafo abierto en el cuadrado  $R_n$ , resultado de un proceso de percolación independiente de sitios en  $\mathbb{L}^2$  con probabilidad  $\mathbb{P}_p$ . Los parámetros pueden ajustarse con controles manuales y obtenemos un resultado inmediato. En la matriz con celdas de colores, los vértices cerrados son dejados en blanco y los vértices abiertos son rojos o azules. Los de rojo son los que pertenecen a la componente conexa del origen o a la componente conexa de los vértices de  $\partial R_n$ . A continuación, presentamos las imágenes que obtuvimos en seis simulaciones. En la Figura 5.1, observamos simulaciones de la fase subcrítica y la supuesta fase crítica estimada por varios autores. En la Figura 5.1 c. tenemos una simulación de la fase subcrítica muy cerca del valor crítico que han estimado varios autores.

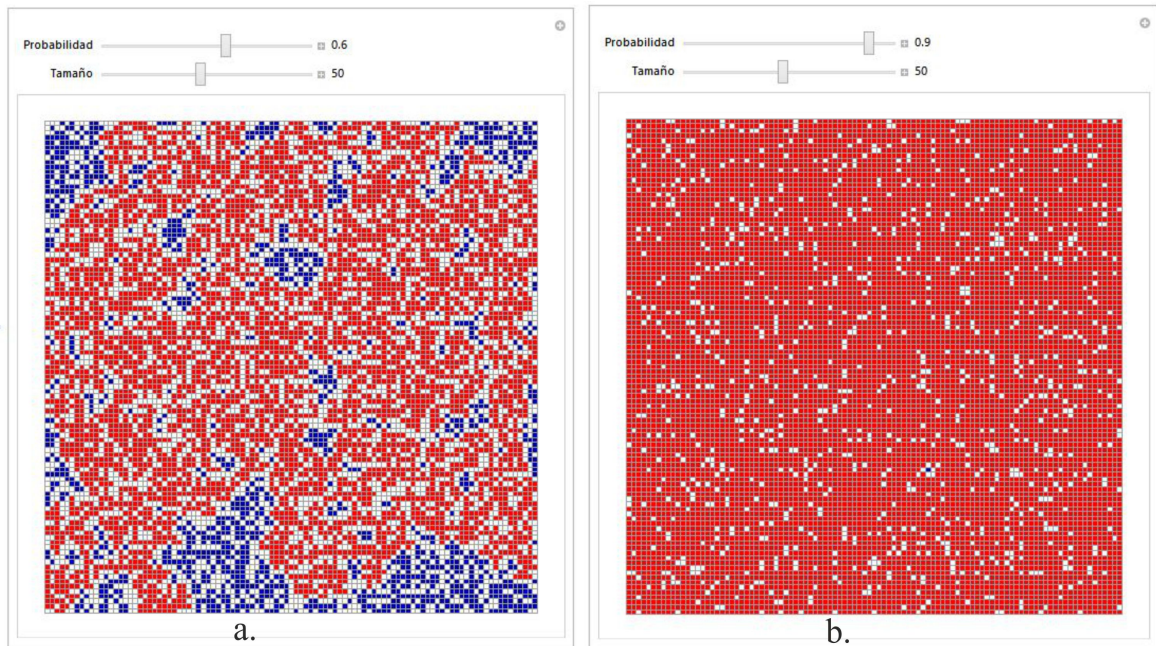
En la Figura 5.2 tenemos simulaciones de la fase supercrítica.

Comentamos que almacenamos los estados simulados en una matriz cuadrada de tamaño  $(2n + 1)^2$  y que para la identificación de la componente conexa del origen es necesario inspeccionar cada uno de los cuatro vecinos de este vértice y luego, a los cuatro vecinos de cada uno de estos y así sucesivamente (recuérdese que usamos un algoritmo recursivo). Como no es difícil reconocer a los vecinos de un vértice, en este caso la ejecución del programa es rápida y eso es lo que permite que podamos presentar una simulación interactiva. Esto nos deja admirar claramente la evolución durante las distintas fases del proceso.

Además hemos hecho un programa para estimar la probabilidad crítica, que como hemos comentado antes, no se ha podido hallar analíticamente hasta ahora. Obtuvimos que la probabilidad crítica para este modelo es  $\simeq 0,59$  con  $n = 200$ . El valor estimado en es 0.593.



**Figura 5.1:** Simulaciones en cuadrados de  $[-50, 50] \times [-50, 50]$  alrededor del origen.



**Figura 5.2:** Simulaciones en cuadrados de  $[-50, 50] \times [-50, 50]$  alrededor del origen.

### 5.3. Simulación del Modelo de Percolación Independiente de Enlaces en $\mathbb{L}^2$

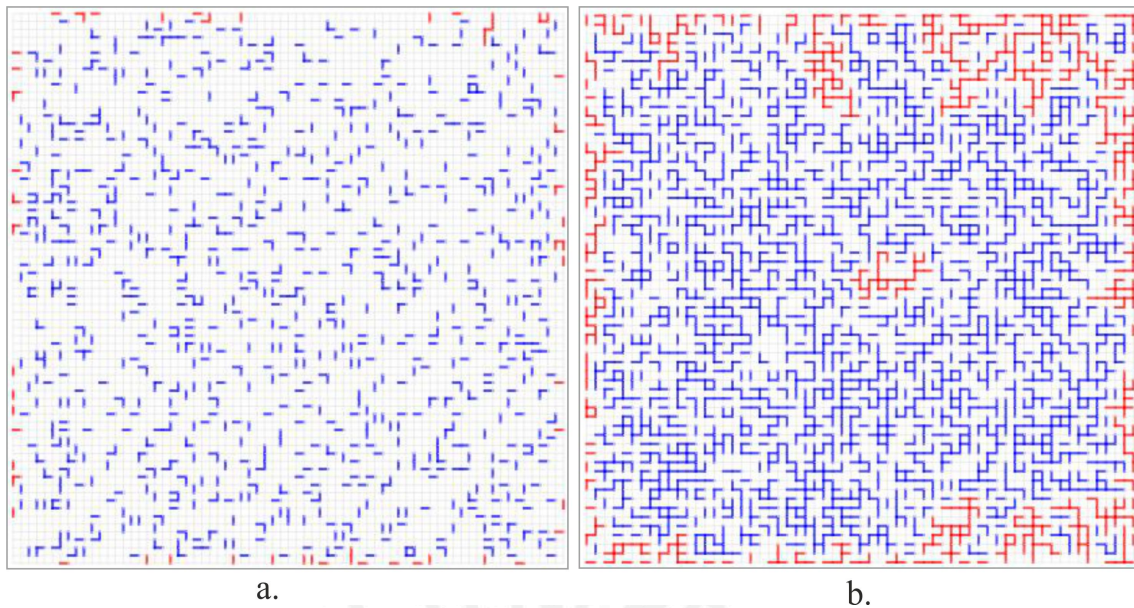
Al igual que antes los parámetros del programa son un número natural  $n$  y a un real  $p \in [0, 1]$ . Lo que obtenemos es una representación gráfica del subgrafo abierto en el cuadrado  $R_n$  que resulta de un proceso de percolación de enlaces en  $\mathbb{L}^2$  con probabilidad  $\mathbb{P}_p$ . Las aristas cerradas son de un color gris muy pálido y las aristas abiertas son rojas o azules. Las de rojo son las que pertenecen a la componente conexa del origen o a la componente conexa de los vértices de  $\partial R_n$ . A continuación presentamos también las imágenes que obtuvimos en seis simulaciones.

En la Figura 5.3 a., observamos una simulación de la fase subcrítica con probabilidad  $p$  muy baja y en Figura 5.3 b., con una probabilidad cuatro veces mayor. En la Figura 5.4 a. tenemos una simulación de la fase subcrítica muy cerca del valor crítico, cabe resaltar que en esta aún no ocurre el evento  $\{0 \leftrightarrow \partial R_n\}$  (la componente conexa del origen comprende solo 3 vértices). En la Figura 5.4 b. tenemos una simulación de la fase crítica.

Las dos últimas simulaciones en la Figura 5.4 son de la fase supercrítica.

Comentamos que a diferencia del caso anterior, aquí almacenamos los estados simulados de las aristas en un vector y que en este caso hay más datos que almacenar, pues mientras el rectángulo  $R_n$  tiene  $(2n - 1)^2$  vértices, su cantidad de aristas asciende a  $4n(2n - 1)$ . Debido a esto la identificación de los vecinos de una arista y de la componente conexa del origen toma más tiempo de ejecución que antes y, como consecuencia, esta vez no se presenta una representación gráfica interactiva.

Además, la estimación de la probabilidad crítica, para  $n = 200$ , nos da  $\approx 0,51$  mientras que la probabilidad crítica conocida para este modelo (ver referencia) es 0,5.



**Figura 5.3:** Simulaciones en cuadrados de  $[-60, 60] \times [-60, 60]$  ( $n=30$ ) alrededor del origen: a.  $p = 0,1$  b.  $p = 0,4$

#### 5.4. Algunas Aplicaciones más del Algoritmo

Primero hemos modificado el programa para estimar la probabilidad del modelo de sitios anterior para poder realizar estimaciones de la probabilidad crítica de  $\mathbb{L}^3$ . Como hemos hecho notar antes, el tiempo de ejecución aumenta porque ahora un vértice tiene seis vértices vecinos diferentes y la cantidad de vértices totales es  $(2n + 1)^3$ . Con este programa obtuvimos una estimación de la probabilidad crítica de  $\simeq 0,3$ . La probabilidad crítica estimada en es 0,3116.

Recalcamos de igual manera, se puede modificar el programa del modelo de percolación de enlaces para poder encontrar una estimación de esta probabilidad crítica para  $\mathbb{L}^3$ , que según es 0,2488.

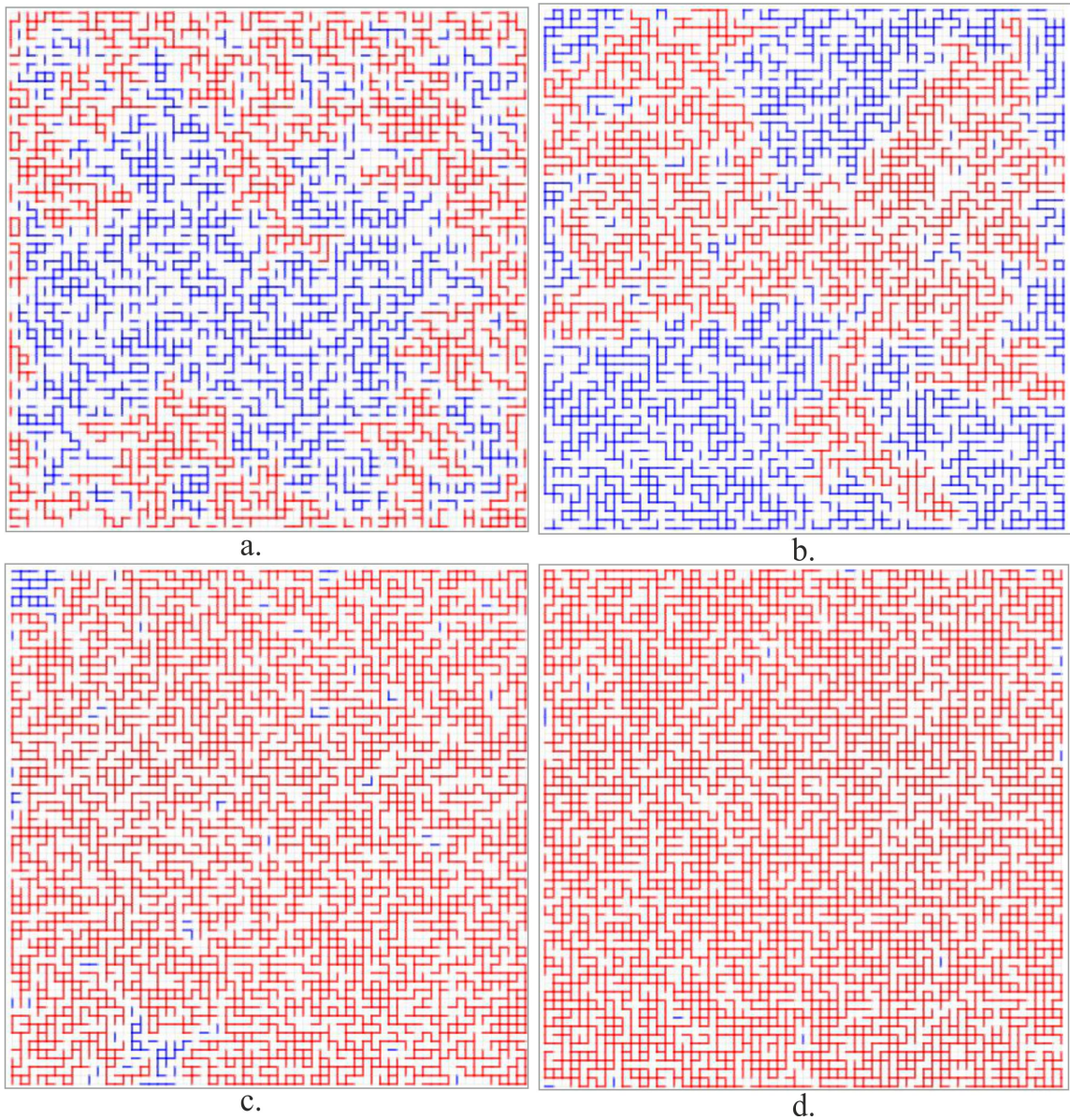
Nosotros, en vez de hacer lo anterior, lo modificamos para tratar otro modelo de percolación independiente de enlaces en  $\mathbb{L}^2$  en el que las aristas horizontales (paralelas al eje  $X$ ) y las verticales (paralelas al eje  $Y$ ) no tienen la misma probabilidad de estar abiertas. Las aristas horizontales tienen probabilidad  $p$  de estar abiertas y las verticales tienen probabilidad  $q$  de estar abiertas. Hemos considerado ahora el rectángulo  $D_n = [0, n] \times [0, n]$ .

A continuación mostramos las simulaciones obtenidas para distintos valores de  $p$  y  $q$ . Al igual que antes, mostramos en rojo las aristas abiertas en la componente conexa del origen y también las de los vértices abiertos en el borde superior del cuadrado  $D_n$ , es decir, de los vértices con coordenadas  $(i, n)$ , para  $0 \leq i \leq n$  y las de los vértices abiertos del borde derecho del cuadrado  $D_n$ , que son los vértices de coordenada  $(n, i)$  con  $0 \leq i \leq n$ . Notemos que el origen se encuentra en el vértice inferior izquierdo.

Podemos apreciar un comportamiento esperado: se forman caminos verticales más largos cuando  $p$  está fijo y  $q$  aumenta.

Finalmente, hemos estudiado el comportamiento de las probabilidades de los eventos  $\{0 \text{ se conecta con el borde superior de } D_{60}\}$ , que denotamos por  $P_v$  y del evento  $\{0 \text{ se conecta con el bor}$





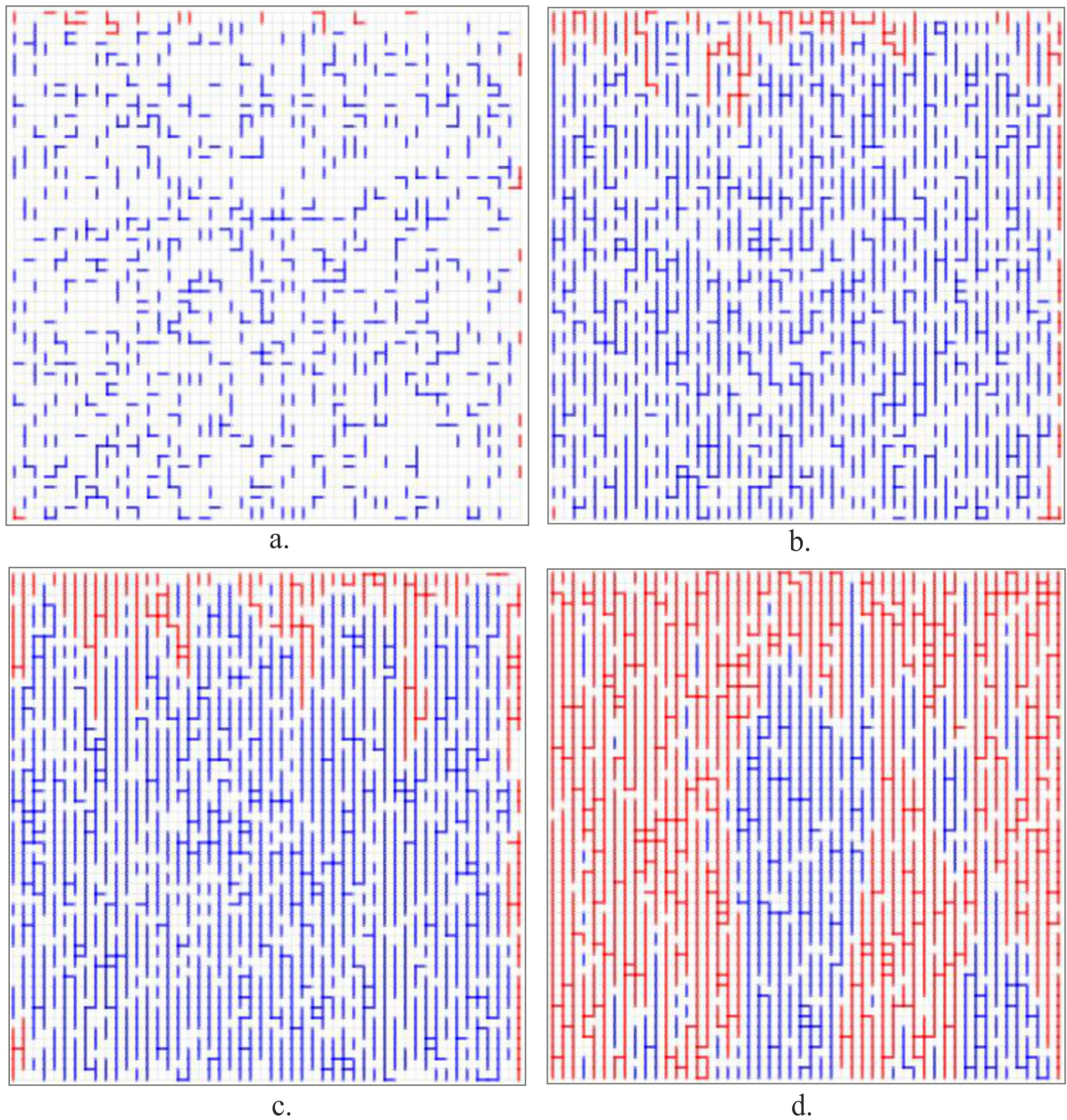
**Figura 5.4:** Simulaciones en cuadrados de  $[-60, 60] \times [-60, 60]$  ( $n=30$ ) alrededor del origen: a.  $p = 0,45$  b.  $p = 0,5$  c.  $p = 0,6$  d.  $p = 0,7$ .

$p$	$q$	$P_h$	$P_v$	$p$	$q$	$P_h$	$P_v$
0.1	0.3	0	0	0.4	0.8	0.67	0.67
0.1	0.5	0	0	0.4	0.9	0.86	0.86
0.1	0.7	0	0	0.5	0.6	0.3563	0.3563
0.1	0.9	0	0.153	0.5	0.7	0.66	0.66
0.2	0.5	0	0	0.5	0.8	0.7166	0.7166
0.2	0.7	0	0	0.5	0.9	0.873	0.873
0.2	0.9	0.55	0.58	0.6	0.7	0.743	0.743
0.3	0.5	0	0	0.6	0.8	0.853	0.853
0.3	0.7	0.01	0.065	0.6	0.9	0.93	0.93
0.3	0.9	0.765	0.765	0.7	0.8	0.863	0.863
0.4	0.5	0	0	0.7	0.9	0.946	0.946
0.4	0.6	0.045	0.06	0.8	0.9	0.973	0.973
0.4	0.7	0.426	0.426				

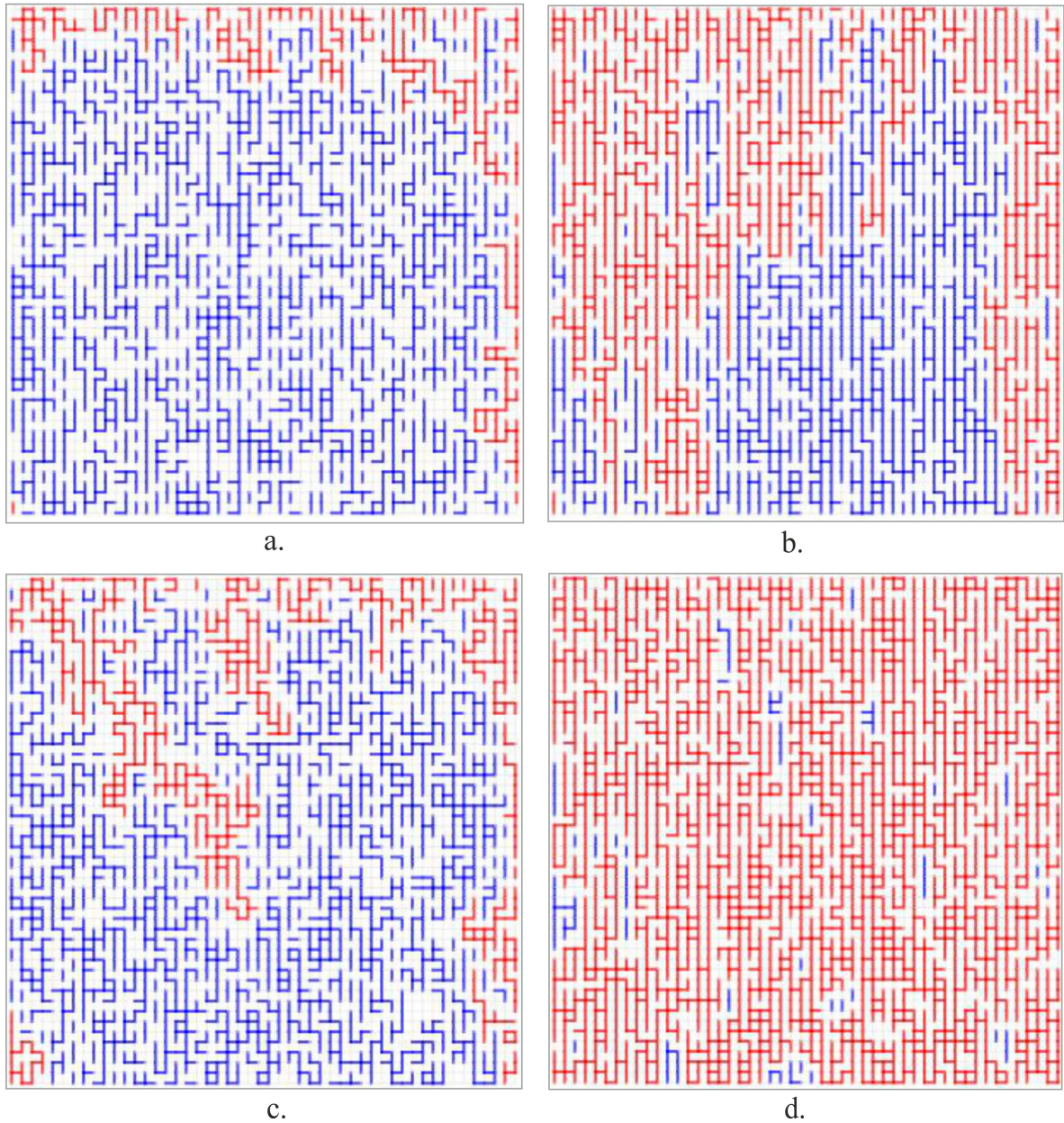
**Figura 5.5:** Estimaciones de  $P_v$  y de  $P_h$  para  $n = 60$  para distintos valores de  $p$  y  $q$ .

que denotamos por  $P_h$  y presentamos las estimaciones de estas probabilidades en la tabla de la figura 5.5 para distintos valores de  $p$  y  $q$  cuando  $p < q$ .

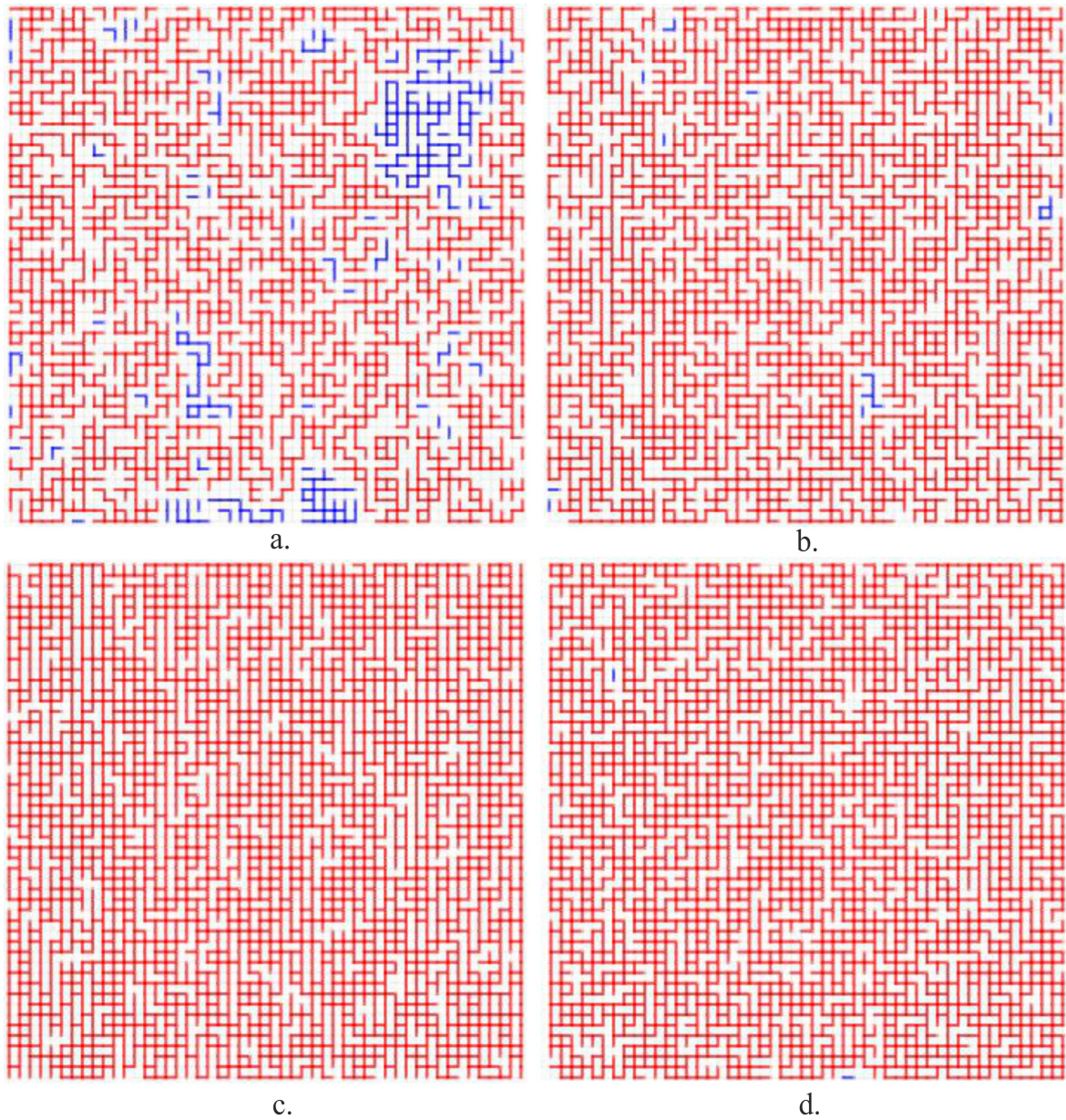
Lo que observamos es que en todos los casos  $P_h \leq P_v$  y además es interesante ver que a partir de cierto momento ambas probabilidades son iguales. Nosotros observamos este comportamiento, más o menos, desde que  $p = 0,3$  y  $q = 0,9$ .



**Figura 5.6:** Simulaciones en cuadrados de  $[0, 60] \times [0, 60]$  ( $n=60$ ): a.  $p = 0,1, q = 0,2$  b.  $p = 0,1, q = 0,6$  c.  $p = 0,1, q = 0,8$  d.  $p = 0,1, q = 0,9$ .



**Figura 5.7:** Simulaciones en cuadrados de  $[0, 60] \times [0, 60]$  ( $n=60$ ): a.  $p = 0,2, q = 0,6$  b.  $p = 0,2, q = 0,9$  c.  $p = 0,3, q = 0,6$  d.  $p = 0,3, q = 0,8$ .



**Figura 5.8:** Simulaciones en cuadrados de  $[0, 60] \times [0, 60]$  ( $n=60$ ): a.  $p = 0,5, q = 0,6$  b.  $p = 0,5, q = 0,8$  c.  $p = 0,6, q = 0,7$  d.  $p = 0,6, q = 0,8$ .

## Bibliografía

- [1] A. Aharony and D. Stauffer. *Introduction To Percolation Theory*. Taylor & Francis, 2003.
- [2] R.B. Ash and C. Doléans-Dade. *Probability and Measure Theory*. Harcourt/Academic Press, 2000.
- [3] B. Bollobás and O. Riordan. *Percolation*. Cambridge University Press, 2006.
- [4] R. Durrett. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge series on statistical and probabilistic mathematics. Cambridge University Press, 2010.
- [5] M. Franceschetti and R. Meester. *Random Networks for Communication: From Statistical Physics to Information Systems*. Cambridge series in statistical and probabilistic mathematics. Cambridge University Press, 2007.
- [6] G. Grimmett. *Percolation*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer, 1999.
- [7] Geoffrey Grimmett. Percolation and disordered systems. In *Lectures on Probability Theory and Statistics*, pages 153–300. Springer, 1997.
- [8] P.R. Halmos. *Measure Theory*. Number v. 9 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1974.
- [9] H. Kesten. *Percolation theory for mathematicians*. Progress in probability and statistics. Birkhäuser, 1982.
- [10] D. Khoshnevisan. *Probability*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Soc., 2007.
- [11] A. Klenke. *Probability Theory: A Comprehensive Course*. Universitext. Springer, 2007.
- [12] Mark E. J. Newman and Robert M. Ziff. Fast Monte Carlo algorithm for site or bond percolation. *Physical review E*, 64(1):016706, 2001.
- [13] Stephen Wolfram. “Percolation on a square grid” from the Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/PercolationOnASquareGrid/>.
- [14] Robert M. Ziff and Christian R. Scullard. Exact bond percolation thresholds in two dimensions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(49):15083, 2006.