

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



“MOVILIZACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS REQUERIDOS PARA EL
TRATAMIENTO DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL EN EL CUARTO GRADO
DE EDUCACIÓN SECUNDARIA BÁSICA”

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

AUTOR
Carlos Ramos Trejo

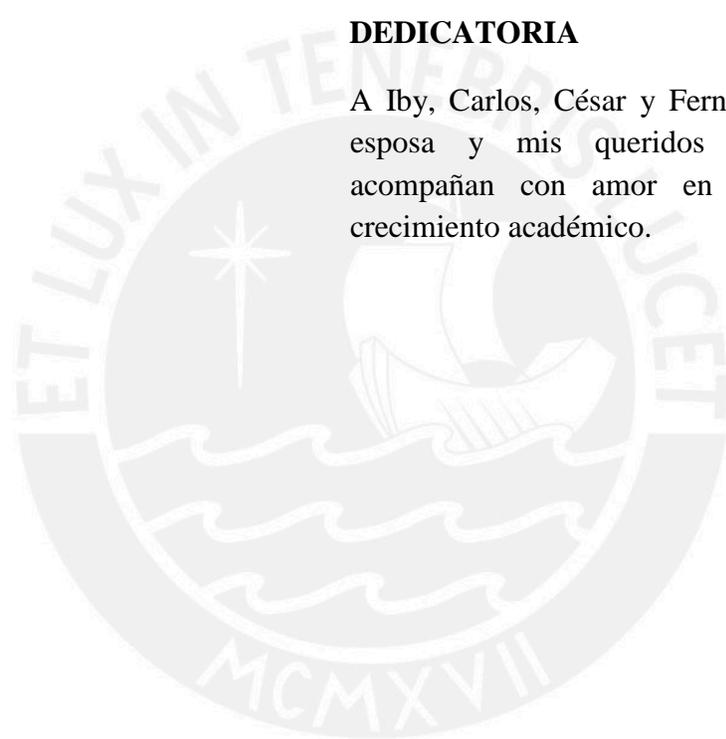
ASESOR
Augusta Rosa Osorio Gonzales

JURADO
Augusta Rosa Osorio Gonzales
Jesús Victoria Flores Salazar
Cileda de Queiroz e Silva Coutinho

LIMA – PERÚ
2015

DEDICATORIA

A Iby, Carlos, César y Fernando, mi adorada esposa y mis queridos hijos, que me acompañan con amor en este gratificante crecimiento académico.



AGRADECIMIENTO

A mi asesora, Mg. Augusta Osorio, por su constante motivación y orientación, sin las cuales el presente trabajo no se hubiese materializado.

A mis jurados, Dra. Jesús Flores y Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho por su agudeza y rigor en el análisis de los objetos que constituyen los fundamentos de la probabilidad.

A todo el equipo docente que conforma la Maestría en Enseñanza de la Matemática, donde en cada uno de ellos fluye la sabiduría, encontrando las orientaciones pertinentes.

RESUMEN

El presente trabajo propone una secuencia de actividades orientadas a superar las dificultades que presentan los estudiantes del cuarto grado de secundaria pertenecientes a la Educación Básica Regular en la movilización de los conocimientos previos requeridos para el tratamiento de la probabilidad condicional, como son: situación de incertidumbre, espacio muestral y cálculo de probabilidad. El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), propuesto por Godino y colaboradores constituyó el marco teórico para la implementación de la secuencia de actividades, pues este enfoque es propicio para el tratamiento didáctico de las dificultades en el conocimiento de los objetos matemáticos. En la presente investigación, donde empleamos el método cualitativo, se corroboró mediante una prueba diagnóstica la existencia de dificultades en el conocimiento de los conceptos previos requeridos para el tratamiento de probabilidad condicional. Estos conocimientos están referidos a situación de incertidumbre, espacio muestral, y cálculo de probabilidad. La implementación de la secuencia de actividades bajo el enfoque del EOS, permitió movilizar los conocimientos previos requeridos para construir el concepto de probabilidad condicional, donde las situaciones contextualizadas facilitaron dicha movilización.

Palabras claves: Probabilidad, movilización, dificultad, suceso, espacio muestral

ABSTRACT

This work shows a proposal on a sequence of activities aimed at overcoming the difficulties that students present the fourth degree of secondary belonging to the Regular Basic Education in the mobilization of the previous knowledge required for the treatment of the conditional probability. The existing difficulties in students were corroborated with a diagnostic test.

The approach Ontosemiotic formed the theoretical framework for the implementation of the sequence of activities aimed at facilitating the mobilization of prior knowledge to conditional probability as required are: Situation of uncertainty, sample space and calculation of probability. The approach of Ontosemiotic cognition and instruction Mathematics (EOS), proposed by Godino and collaborators, constitutes a supportive approach to teaching the treatment of the difficulties in knowledge of the mathematical objects.

In the present investigation, where we use the qualitative method, it was confirmed by a diagnostic test the existence of difficulties in the knowledge of the previous concepts required for the treatment of conditional probability.

These skills are referred to situation of uncertainty, sample space, and calculation of probability. It was proved that a sequence of activities implemented under the approach of the EOS allows you to mobilize the previous knowledge required to build the concept of conditional probability, where the contextualized situations provided this mobilization.

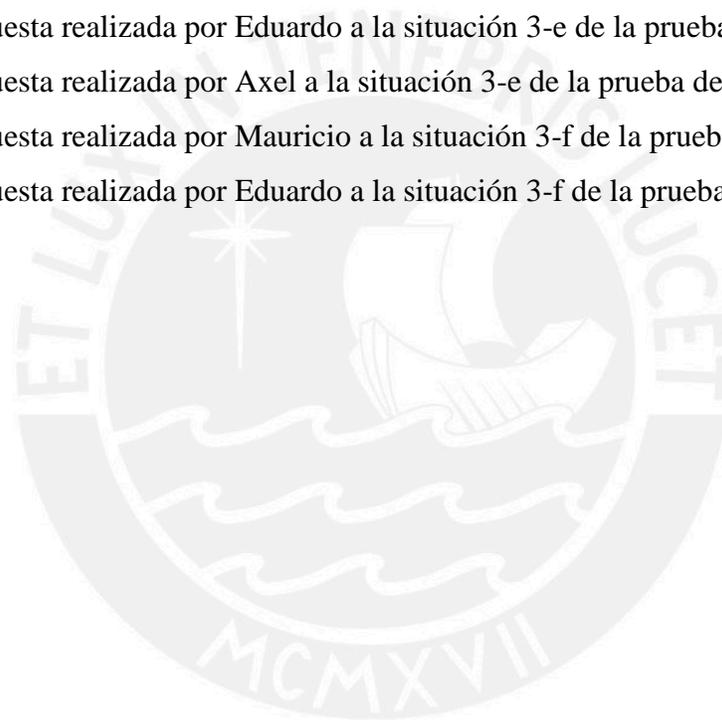
Key Words. Probability, mobilization, difficulty, event, sample space.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Facetas y niveles de análisis didáctico del EOS.	10
Figura 2. Equiprobabilidad en Texto de Matemática	36
Figura 3. Aplicación de probabilidad en texto de Matemática	37
Figura 4. Distribución de las casas de Iby y sus amigos	44
Figura 5. Diagrama de árbol sobre probabilidad que nazcan dos varones y una mujer.	46
Figura 6. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 1-a.	48
Figura 7. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 1-a.	48
Figura 8. Dificultades registradas por Axel a la situación 1-a.	48
Figura 9. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 1-b.	49
Figura 10. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 1-b.	49
Figura 11. Dificultades registradas por Axel a la situación 1-b.	50
Figura 12. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 1-c.	50
Figura 13. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 1-c.	51
Figura 14. Dificultades registradas por Axel a la situación 1-c.	51
Figura 15. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 1-d.	52
Figura 16. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 1-d.	52
Figura 17. Dificultades registradas por Axel a la situación 1-d.	52
Figura 18. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 2-a.	53
Figura 19. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 2-a.	54
Figura 20. Dificultades registradas por Axel a la situación 2-a.	54
Figura 21. Dificultades registradas por Axel a la situación 2-b.	55
Figura 22. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 2-b.	55
Figura 23. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 2-b.	55
Figura 24. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 2-c.	56
Figura 25. Dificultades registradas por Axel a la situación 2-c.	56
Figura 26. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 2-c.	57
Figura 27. Dificultades registradas por Axel a la situación 3-a.	58
Figura 28. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 3-a.	58
Figura 29. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 3-b.	59
Figura 30. Dificultades registradas por Axel a la situación 3-b.	59

Figura 31. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 3-b.	59
Figura 32. Dificultades registradas por Axel a la situación 3-c.	60
Figura 33. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 3-c.	60
Figura 34. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 3-c.	60
Figura 35. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 3-d.	61
Figura 36. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 3-d.	61
Figura 37. Dificultades registradas por Axel a la situación 3-d.	61
Figura 38. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 4.	62
Figura 39. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 4.	63
Figura 40. Dificultades registradas por Axel a la situación 4.	63
Figura 41: Justificación realizada por Mauricio a la situación 1-a de la prueba de salida.	95
Figura 42. Justificación realizada por Eduardo a la situación 1-a de la prueba de salida.	95
Figura 43. Justificación realizada por Axel a la situación 1-a de la prueba de salida.	96
Figura 44. Justificación realizada por Mauricio a la situación 1-b de la prueba de salida.	96
Figura 45. Justificación realizada por Eduardo a la situación 1-b de la prueba de salida.	97
Figura 46. Justificación realizada por Axel a la situación 1-b de la prueba de salida.	97
Figura 47. Justificación realizada por Mauricio a la situación 1-c de la prueba de salida.	98
Figura 48. Justificación realizada por Eduardo a la situación 1-c de la prueba de salida.	98
Figura 49. Justificación realizada por Axel a la situación 1-c de la prueba de salida.	99
Figura 50. Justificación realizada por Mauricio a la situación 2-a de la prueba de salida.	99
Figura 51. Justificación realizada por Eduardo a la situación 2-a de la prueba de salida.	100
Figura 52. Justificación realizada por Axel a la situación 2-a de la prueba de salida.	100
Figura 53. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 2-b de la prueba de salida.	101
Figura 54. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 2-b de la prueba de salida.	102
Figura 55. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 2-c de la prueba de salida.	102
Figura 56. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 2-c de la prueba de salida.	103
Figura 57. Respuesta realizada por Axel a la situación 2-c de la prueba de salida.	103
Figura 58. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 2-d de la prueba de salida.	104
Figura 59. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 2-d de la prueba de salida.	104
Figura 60. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 3-a de la prueba de salida.	105
Figura 61. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 3-a de la prueba de salida.	106

Figura 62. Respuesta realizada por Axel a la situación 3-a de la prueba de salida.	106
Figura 63. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 3-b de la prueba de salida.	107
Figura 64. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 3-b de la prueba de salida.	107
Figura 65. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 3-c de la prueba de salida.	108
Figura 66. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 3-c de la prueba de salida.	108
Figura 67. Respuesta realizada por Axel a la situación 3-c de la prueba de salida.	109
Figura 68. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 3-d de la prueba de salida.	109
Figura 69. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 3-d de la prueba de salida.	110
Figura 70. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 3-e de la prueba de salida.	110
Figura 71. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 3-e de la prueba de salida.	111
Figura 72. Respuesta realizada por Axel a la situación 3-e de la prueba de salida.	111
Figura 73. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 3-f de la prueba de salida.	112
Figura 74. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 3-f de la prueba de salida.	112



LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Configuración epistémica de referencia	24
Tabla 2. Descriptores para el análisis de idoneidad cognitiva	27
Tabla 3. Descriptores para el análisis de idoneidad cognitiva de los conocimientos previos	39
Tabla 4. Resultados de la prueba diagnóstica sobre conocimientos previos.	47
Tabla 5. Descriptores para el análisis de idoneidad cognitiva de los conocimientos previos	70
Tabla 6. Descriptores para el análisis de idoneidad cognitiva del tratamiento de los conocimientos previos	74
Tabla 7. Descriptores para el análisis de idoneidad cognitiva del tratamiento de los conocimientos previos relativo a espacio muestral, suceso y probabilidad	77
Tabla 8. Descriptores para el análisis de idoneidad cognitiva del tratamiento de los conocimientos previos validados en la prueba de salida.	82
Tabla 9. Resultados de las situaciones planteadas en la prueba de salida.	91

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y FUNDAMENTOS	1
ANTECEDENTES	1
1.2 JUSTIFICACIÓN.	4
1.3. PREGUNTA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN	7
OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	7
Objetivo general	7
Objetivos específicos	8
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y MÉTODO DE INVESTIGACIÓN	9
2.1 EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA.	9
2.1.1. Niveles y facetas del EOS.	9
2.1.2 Dificultades en el aprendizaje de los objetos matemáticos.	13
2.1.3. Fundamentos epistemológicos.	14
2.1.4. Conceptos previos a probabilidad condicional	19
2.1.5. Configuración epistémica de los conocimientos previos a probabilidad condicional.	22
2.1.6. Consideraciones para el análisis de la movilización de los conocimientos previos a probabilidad condicional.	26
2.2 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN	27
2.2.1 Procedimientos metodológicos de investigación.	28
2.2.2. Instrumentos de investigación.	29
CAPITULO 3. DIFICULTADES EN LA COMPRESIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS A PROBABILIDAD CONDICIONAL	31
3.1. DIFICULTADES EN LOS DIVERSOS ENFOQUES DE PROBABILIDAD	31
3.1.1. Dificultades en el Enfoque Clásico.	31
3.1.2. Dificultades en el Enfoque Frecuentista.	32
3.1.3 Dificultad en el Enfoque Subjetivo.	32
3.2 SEGOS EN EL APRENDIZAJE DE PROBABILIDAD.	33
3.2.1. Sesgo de equiprobabilidad.	33

3.2.2. Sesgo de representatividad.	33
3.3 DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS PRODUCIDOS EN LA FORMACION DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD.	34
3.4. DIFICULTADES PRESENTADOS EN LOS TEXTOS ESCOLARES	35
CAPÍTULO 4. ESTUDIO DIAGNÓSTICO	39
4.1. PROPUESTA Y OBJETIVOS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA	39
4.2. SOBRE LOS SUJETOS	40
4.3 ANÁLISIS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS.	41
4.3.1 Ítems propuestos en la prueba diagnóstica e identificación de las posibles dificultades.	41
4.3.2 Resultados de la prueba diagnóstica.	46
4.3.3 Resultados totales de la prueba diagnóstica	46
4.3.4 Determinación de las dificultades registradas en la aplicación de la prueba diagnóstica.	47
CAPÍTULO 5. SECUENCIA DE ACTIVIDADES APLICADAS Y DESCRIPCIÓN DE RESULTADOS	67
SECUENCIA DE ACTIVIDADES EN TORNO A LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS A LA PROBABILIDAD CONDICIONAL.	67
5.1 DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES.	68
5.2. IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES.	68
5.3. INSTRUMENTOS QUE CONFORMAN LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES. 69	
5.3.1 Diseño del instrumento A para la movilización de los conocimientos previos relativos a situaciones de incertidumbre, posibilidad, espacio muestral, probabilidad.	69
5.3.2 Diseño del instrumento B para la movilización de los conocimientos relativos a probabilidad	74
5.3.3 Diseño del instrumento C para la movilización del concepto de cálculo de probabilidad de experimentos aleatorios, considerando el espacio muestral y la ocurrencia de un suceso o evento compuesto.	77
5.4 DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES.	80
5.5. LOGROS ALCANZADOS POR LOS ESTUDIANTES EN EL TRATAMIENTO DE LAS DIFICULTADES	82
5.5.1 Dificultades establecidas e ítems propuestos en la prueba de salida.	82

5.5.2 RESULTADOS OBTENIDOS DE LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE SALIDA.	90
5.5.3 VENTAJAS DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES.	115
CONCLUSIONES	117
REFERENCIAS	121
APÉNDICES	124



CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y FUNDAMENTOS

El presente capítulo trata sobre los antecedentes y justificaciones de nuestra investigación, la cual es el estudio de la movilización de los conocimientos previos requeridos para el tratamiento de la probabilidad condicional. Estos antecedentes y justificaciones orientan la determinación de la pregunta y los objetivos de nuestra investigación.

ANTECEDENTES

El Ministerio de Educación del Perú (MINEDU, 2012), propone para los alumnos de la Educación Básica Regular, el desarrollo de competencias y capacidades en el área de Matemática a través del aprendizaje de cuatro dominios: Número y Operaciones, Cambio y Relaciones, Geometría y Estadística y Probabilidad. Este último dominio establece como competencia, que los estudiantes resuelvan situaciones problemáticas en la cual tengan que recopilar y procesar datos, así como la exploración de situaciones de incertidumbre para elaborar conclusiones y tomar decisiones.

En las instituciones educativas del Perú, es frecuente que el dominio de Estadística y Probabilidad sea relegado al final en la calendarización académica, lo cual conlleva a que en situaciones reiteradas su ejecución sea mínima o nula dado que coincide con la culminación del año educativo, tal como lo sostienen Advíncula y Osorio (2013), cuando afirman que “estos temas no se cubren, al menos en secundaria (...) porque el tiempo lectivo que propone el Ministerio a veces resulta insuficiente” (p.3). Esta situación también es observada en el sistema escolar español, pues, Batanero (2001) observa que “en la práctica son todavía pocos los profesores que incluyen este tema y en otros casos se trata muy brevemente o en forma excesivamente formalizada” (p.16).

Según el Diseño Curricular Nacional DCN (2009) para el cuarto grado de Educación Secundaria de menores, la cual comprende a estudiantes de 15 y 16 años de edad (VII Ciclo), corresponde abordar el tema de probabilidad condicional. Este tema, requiere del conocimiento de determinados conceptos previos y dado el escaso o nulo tratamiento de estos conceptos en los grados inferiores, esta situación se complica. Ya lo advierte también Lonjedo (2008), quien sostiene que los docentes en el desarrollo de su accionar pedagógico tratan de evitar los conceptos que tienen que ver con la probabilidad y en particular con la

probabilidad condicional. Por lo tanto, se hace necesario implementar actividades orientadas al dominio de tales conceptos previos.

Por otro lado, los textos escolares que se utilizan en la Educación Básica, concretamente los libros que son implementados por el Ministerio de Educación para los colegios nacionales, abordan los temas referidos a probabilidad muy escuetamente y con enfoques carentes de rigurosidad como se mostrará más adelante en el desarrollo del presente trabajo de investigación. Cabe precisar que en las instituciones educativas privadas de nuestro país la situación no es muy diferente, pues los textos escolares que utilizan como Matemática de Coveñas o Santillana solo enfatizan tres dominios: Número y Operaciones, Cambio y Relaciones y Geometría.

Es pertinente precisar que las limitaciones referidas son recurrentes en diferentes ámbitos del sistema educativo. Así, Ortiz (2002), al realizar el análisis de cuatro textos escolares de la Educación Básica en España, en referencia al tratamiento que recibe el concepto de probabilidad, encuentra que “el significado de los conceptos probabilísticos elementales mostrado en los libros de texto tienen un carácter complejo debido a la interrelación de los diferentes conceptos, lo que hace difícil la secuenciación de su enseñanza (...) y hay una gran variabilidad en el significado que, para los diferentes conceptos probabilísticos, presentan los libros de texto de un mismo nivel de enseñanza” (p.249). Estas condiciones generan dificultad y confusión en los estudiantes al momento de tratar temas de probabilidad en general y el de probabilidad condicional particular.

Además, Ortiz (2002), se percata de la presencia de conceptos inexistentes en el cálculo de probabilidades en el ámbito académico, como el denominado "suceso condicionado" (p.15). Cabe mencionar que estas características se presentan en distintos niveles y ámbitos educativos, con un mayor índice de ocurrencia en la Educación Básica en España; la cual no solo es propia de España, sino también en nuestro país, donde el rigor matemático y las verificaciones por parte de las entidades supervisoras encargadas son frecuentemente vulnerados.

Al respecto Vélchez (2005) al realizar un estudio respecto a la enseñanza de las funciones trigonométricas en nuestro país afirma que “La mayoría de los docentes no prepara su clase y algunos que si lo hacen se limitan a utilizar, como textos de consulta los libros escolares

de circulación nacional [...] alejados de los fundamentos matemáticos que sustentan los tópicos que enseñan” (p. 17)

Además, Cañizares (1997), que realizó investigaciones con niños entre 10 y 14 años pertenecientes a la Educación Básica española, muestra que los estudiantes pese a poseer un dominio del pensamiento proporcional, no les es suficiente para resolver situaciones de comparación de probabilidades, pues los estudiantes incurren en sesgos procedimentales o de interpretación, a la vez que sugiere realizar análisis relativo a estos factores, así como el diseño de estrategias instruccionales. Esto se debe a la limitación en la aplicación del pensamiento proporcional con sesgos deterministas frente a la naturaleza aleatoria de la probabilidad de la ocurrencia de sucesos, advirtiendo que si bien el pensamiento proporcional brinda herramientas que facilita la comprensión de fenómenos probabilísticos, es indispensable consolidar en los estudiantes la comprensión de la noción de aleatoriedad.

Por otro lado, Serrano (1996), al realizar indagaciones sobre los significados institucionales y personales referidos a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad, empleó un cuestionario y un guion de entrevista. Fueron aplicados en la ciudad de Melilla, España a estudiantes de la Educación Básica con una edad de 14 años y a estudiantes del Bachillerato con una edad de 18 años, ambos grupos seleccionados mediante una muestra intencional. Encontró que los argumentos que utilizan los estudiantes para responder problemas sobre probabilidad condicional o interpretación frecuencial de la probabilidad, se basan en propiedades no acordes al significado institucional matemático, a pesar que algunas de dichas respuestas son correctas. Los argumentos incorrectos con mayor frecuencia que presentaron fueron: La creencia que hubo un error en los datos del problema, la búsqueda de razones de tipo causal para explicar un suceso no esperado o justificar los resultados por la impredecibilidad de los experimentos aleatorios sin tener en cuenta la probabilidad de los sucesos.

Estos hallazgos permiten inferir la necesidad de consolidar los aprendizajes respecto a los conceptos referidos a espacio muestral, experimento aleatorio, suceso simple y compuesto, así como de probabilidad en nuestros estudiantes.

Estas limitaciones presentes en el tratamiento del dominio de Probabilidad en la Educación Básica, dificulta que nuestros jóvenes estudiantes puedan comprender y aplicar el concepto de probabilidad condicional, consideramos oportuno orientar nuestra investigación sobre la comprensión de los conceptos abordados a partir de situaciones cotidianas propias de los estudiantes.

Los factores limitantes mencionados hacen que los estudiantes interioricen los conocimientos referidos a probabilidad, espacio muestral, sucesos simples y compuestos, sin establecer juicios de reflexión respecto a su naturaleza y significancia así como su aplicación en contextos reales. El resultado preocupante es la formación de estudiantes con una capacidad incipiente de tomar decisiones acertadas en circunstancias que se requiere un análisis que involucra situaciones de aleatoriedad.

Para validar nuestra posición hemos implementado una prueba diagnóstica a los estudiantes de una de las secciones del cuarto grado de secundaria de una Institución Educativa Pública del Callao, con la finalidad de conocer el dominio que poseen los estudiantes sobre los conceptos previos al conocimiento de probabilidad condicional. Los resultados obtenidos en esta prueba evidenciaron una carencia en el conocimiento de estos saberes previos.

1.2 JUSTIFICACIÓN.

La necesidad de conocer, dominar y aplicar los conceptos de probabilidad por parte de la sociedad en su conjunto y de los estudiantes en particular es cada vez más urgente, pues el entorno social, los mecanismos de desarrollo económico de nuestro país y de la sociedad global lo requieren, tal como sustentan Jiménez y Jiménez (2005). Además, en nuestra labor académica hemos observado y registrado las limitaciones de nuestros estudiantes en la comprensión respectiva referidos al tópico de probabilidad.

También, Batanero (2002), considera que la enseñanza y el aprendizaje de probabilidad en el nivel escolar revisten de importancia para el desarrollo del razonamiento humano al señalar:

El ser humano en su intento de modelar fenómenos de la naturaleza, se ha encontrado con situaciones que obedecen a modelos deterministas y otras obedecen a un modelo aleatorio, así para los científicos sociales es más difícil descubrir principios fundamentales que respondan a la inmensa complejidad de los fenómenos que se proponen estudiar, que para los investigadores de la física interpretar el fenómeno de la caída libre. Pero esta complejidad también atañe a los biólogos cuando tratan de modelar el funcionamiento del cerebro

humano o las leyes de la genética. Afortunadamente, las ciencias sociales y las biológicas han adquirido un método matemático, nuevo por completo, de obtener información sobre sus fenómenos respectivos: el método estadístico. Sin embargo, con el uso de los métodos estadísticos, ha surgido también el problema de determinar la confiabilidad de los resultados. Este aspecto de la estadística se trata por medio de la teoría matemática de la probabilidad. (p.8).

Estas afirmaciones nos permiten sostener la importancia del aprendizaje de la probabilidad en los estudiantes de la Educación Básica Regular, particularmente en quienes concluyen su formación en la secundaria, lo cual les permitirá asumir la toma de decisiones con una actitud crítica, teniendo en cuenta que la actuación de ellos se enmarca en un compromiso con el desarrollo social y el crecimiento personal. Esta toma de decisiones está enmarcada, como lo señala Batanero (2002), en situaciones fundamentalmente aleatorias o de incertidumbre y que la Educación Básica no ha sido capaz de proponer a nuestros estudiantes una formación basado en esta realidad existente, tal como lo señala Osorio (2012), cuando afirma que “podemos decir de nuestra parte que la mayoría de personas no logran concebir la idea de que las situaciones que viven en la vida cotidiana responden en la mayoría de los casos a situaciones aleatorias, dado que desde la escuela les han presentado las situaciones como deterministas” (p.21). Estas afirmaciones son el resultado de estudios de investigación y que permiten inferir que en nuestro sistema educativo acostumbramos a presentar situaciones que en la realidad son de incertidumbre como si fuesen deterministas.

Otro aspecto por el cual es importante el reforzamiento en el aprendizaje de los conceptos básicos de probabilidad es el hecho que, cotidianamente, el ciudadano común se ve bombardeado por un sin número de informaciones que procuran sistemáticamente en una toma de decisiones inadecuadas debido a la falta de herramientas probabilísticas para modelar adecuadamente la realidad.

Esta situación es destacada por Pajares y Tomeo (2009), quienes enfatizan en la importancia de la probabilidad cuando afirman que:

Los bancos utilizan sofisticados métodos estadísticos para calcular la probabilidad de que un cliente realice el pago de su crédito a tiempo, en caso de que se le conceda (...). También en el mundo del deporte se usan sistemas estadísticos que sirven al entrenador para tomar decisiones sobre las tácticas que convienen en un determinado momento de juego (...). De la misma forma, ningún operador puede calcular cuánto va a subir la Bolsa, aun cuando tenga a su alcance todas las variables económicas disponibles. Este tipo de fenómenos no admiten un modelo determinístico, sino un modelo probabilístico, que como resultado nos

dice la probabilidad de que la Bolsa suba un cierto porcentaje. El resultado no es un valor determinado, sino la probabilidad de un valor. (p. 4).

Estas precisiones resaltan la utilidad del dominio de la probabilidad en contextos extra académicos, en escenarios de actuación cotidiana y decisiones trascendentes, entre ellas podemos considerar la dimensión financiera, fundamental para la sostenibilidad y el crecimiento de un país, o la dimensión social, en el estudio de conflictos; y que son las interpretaciones determinísticas las que no permiten una aproximación a la realidad, por lo que se hace necesario la implementación del enfoque probabilístico, lo cual permitirá una correcta comprensión de la realidad.

Por otro lado en el tema de estadística y probabilidad el Diseño Curricular Nacional, (DCN 2009), plantea desarrollar en el cuarto grado de secundaria, el tema de probabilidad condicional en el componente de estadística y probabilidad (p. 336), y para lo cual señala que el estudiante debe conocer previamente los conceptos de sucesos y espacio de sucesos, experimento determinístico y aleatorio en situaciones reales, probabilidad de eventos equiprobables, regla de Laplace, sucesos y frecuencia de un suceso, operaciones con sucesos, probabilidad en diagramas de árbol, los cuales están propuestos ser desarrollados en el VI ciclo, lo que corresponde al primer, segundo y tercer grado de secundaria. Así, el DCN reafirma la importancia de la movilización de los conocimientos previos orientados a garantizar el aprendizaje de la probabilidad condicional.

Corresponde tener la certeza de que nuestros estudiantes hayan logrado el aprendizaje de estos conceptos previos, pues existe la posibilidad que estos aprendizajes no se hayan alcanzado, tal como lo advierte Batanero (2002) cuando observa que el currículo de matemáticas ha tenido hasta recientemente un carácter exclusivamente determinista. Se hace necesario mostrar al alumno un enfoque más equilibrado de la realidad, el cual debe incluir necesariamente el pensamiento estadístico y probabilístico, puesto que la incertidumbre es circunstancial y está presente de una manera ineludible en nuestra existencia.

Por nuestra experiencia, en la enseñanza de matemática en la Educación Básica Regular, observamos que los estudiantes presentan limitaciones referidas al dominio de conceptos básicos como: situación determinística, situación de incertidumbre equiprobable y no

equiprobable, espacio muestral, suceso simple y compuesto, posibilidad y probabilidad; conceptos necesarios para el aprendizaje de la probabilidad condicional.

Es por esta razón, que se ha desarrollado un conjunto de actividades orientadas a reforzar el aprendizaje de los conceptos previos a la introducción a la probabilidad condicional, con la finalidad de consolidar un tratamiento reflexivo de la probabilidad. Este conjunto de actividades ha sido estructurado en forma coherente, considerando la situación real de los estudiantes, establecida por la evaluación diagnóstica implementada.

Las actividades se orientan a:

- Reconocer situaciones de incertidumbre y determinísticas, establecer el espacio muestral de una situación de incertidumbre.
- Realizar cálculos de probabilidad que permita medir el grado de factibilidad con que pueda ocurrir un suceso simple o un suceso compuesto, bajo el enfoque clásico de probabilidad.

1.3. PREGUNTA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

De acuerdo a las justificaciones planteadas la pregunta de investigación que nos planteamos en el presente trabajo es:

¿La implementación de una secuencia de actividades según los criterios de idoneidad del Enfoque Ontosemiótico permitirá movilizar los conocimientos previos requeridos para el tratamiento de la probabilidad condicional?

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Para lograr responder a la pregunta de nuestra investigación nos planteamos los siguientes objetivos.

Objetivo general

Analizar los resultados de la implementación de una secuencia de actividades según los criterios de idoneidad del Enfoque Ontosemiótico en la movilización de los conocimientos previos: situación de incertidumbre, espacio muestral y cálculo de probabilidad requeridos para el tratamiento de la probabilidad condicional.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general nos proponemos cumplir los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar dificultades en la movilización de los conocimientos previos de probabilidad condicional que presentan los estudiantes, a través de la aplicación de una prueba diagnóstica.
2. Diseñar y aplicar una secuencia de actividades que permita a los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria movilizar los conocimientos previos necesarios para construir el concepto de probabilidad condicional.

Luego de presentar los antecedentes de nuestra investigación, las justificaciones que la fundamentan y donde se mostró la necesidad de esta investigación en el estudio de la movilización de los conocimientos previos requeridos a la probabilidad condicional, así como haber establecido la pregunta y los objetivos de investigación, a continuación se presentará el marco teórico que sustenta el presente trabajo, así como la identificación de las dificultades en la movilización de los conocimientos previos requeridos para el tratamiento de probabilidad condicional.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

Para responder a nuestras preguntas de investigación, emplearemos el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática propuesta por Godino, Batanero y Font (2007), dado que este enfoque hace énfasis en el proceso cognitivo que ocurre en el aprendizaje de los objetos matemáticos, y siendo las dificultades, situaciones inherentes en un proceso cognitivo y esto nos permitirá conocer los conocimientos previos necesarios para construir el concepto de probabilidad condicional, así como las dificultades que se presenta en la movilización de tales conocimientos previos.

2.1 EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA.

El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), ha sido desarrollado por Godino, Batanero y Font (2007). Este enfoque nace a comienzos de los años noventa en la Universidad de Granada (España), tiene su génesis en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), iniciado en Francia.

Un supuesto de este enfoque, en base a la TAD, postula que las matemáticas desde el punto de vista institucional y personal, constituyen un quehacer humano en respuesta a situaciones problemáticas de contexto ya sea de naturaleza fáctica (fenómenos naturales o sociales) o de la propia matemática. Como resultado a estas situaciones los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, etc.), surgen y sufren transformaciones progresivamente.

2.1.1. Niveles y facetas del EOS.

El EOS postula a establecer articulaciones entre los objetos matemáticos, su enseñanza y aprendizaje. Para ello plantea una perspectiva global, considerando cuatro dimensiones o niveles y seis facetas que intervinientes en cada una de las dimensiones.

Las dimensiones o niveles que aborda el EOS son: Las prácticas, que moviliza diferentes elementos tales como un agente (sea una institución o una persona) que realiza la práctica, un medio en el que dicha práctica se realiza. La segunda dimensión o nivel, se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de dichas prácticas y las que surjan de

ellas; la finalidad de esta dimensión es describir los procesos matemáticos y didácticos involucrados. La tercera dimensión, aborda el análisis de la trama de normas y metanormas que soportan y condicionan los procesos de estudio. La cuarta dimensión de análisis a los procesos de estudio matemático se centra en la valoración de la idoneidad orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio. Dentro de cada una de estas dimensiones está comprendida el estudio de seis facetas que permite realizar el análisis de los aspectos del conocimiento matemático. Las facetas que discurre cada una de las dimensiones son: Ecológica, Mediacional, Interaccional, Afectiva, Epistémica y Cognitiva, conforme se muestra en la figura 1. Este enfoque prioriza el carácter relacional y multidimensional de la enseñanza de la matemática entre el docente, los alumnos y los objetos matemáticos.



Figura 1. Facetas y niveles de análisis didáctico del EOS.

Fuente: Godino (2011, p.20)

En este marco teórico se considera la matemática desde tres puntos de vista: como actividad de resolución de problemas (internos o externos a las matemáticas) socialmente compartida; como un lenguaje simbólico propio en que se expresan las ideas matemáticas; y como un sistema conceptual lógicamente organizado. Para su operatividad, teniendo en cuenta el triple carácter de la matemática se toma como noción primitiva la situación problemática a partir del cual se define los conceptos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado.

Los autores de este marco teórico conciben la actividad matemática como un conjunto de prácticas de las cuales surgen los objetos matemáticos. Una práctica matemática es “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc), realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida y validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

En el estudio de la matemática, más que una actuación particular ante una situación problemática concreta, resulta preponderante valorar los sistemas de prácticas de las personas en su conjunto y su actuación ante determinadas situaciones problemáticas. Se entiende como objeto matemático al “sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones – problemas ligadas con el objeto” (Godino y Batanero, 1994, p. 335). Sabemos que los significados están influenciados por los contextos sociales e individuales de los sujetos, por lo que es de índole relativo. En lo que concierne al significado institucional, se diferencia entre el global (qué significa el objeto en una institución), referencial (qué significado del objeto se considera en la enseñanza), pretendido (qué se postula enseñar), implementado (que se logra enseñar) y evaluado (qué parte del objeto se evalúa).

En lo que se refiere al significado personal, se diferencia también entre global (todo lo que un individuo conoce), evaluado (lo que podemos evaluar a priori de su conocimiento), declarado (lo que pasada la evaluación hemos conseguido evaluar y logrado (la parte del conocimiento que está de acuerdo con el significado institucional).

Godino, Batanero y Font (2007), sostienen la existencia de diferentes categorías en los objetos ligados a las prácticas matemáticas, los cuales serán objetos institucionales, si los sistemas de práctica son asumidos por una institución o serán objetos personales si dichos sistemas son asumidos por una persona. Las categorías propuestas son:

- Situaciones-problemas: Referido a las aplicaciones extra o intra-matemáticas, ejercicios, problemas o situaciones que inducen una actividad matemática. En nuestro caso el problema son las situaciones propuestas por el docente con relación a un recurso didáctico relacionado con la probabilidad condicional.
- Lenguajes: Referido a los términos, notaciones, diagramas y gráficos que se utilizan con la finalidad representar datos de un problema, las operaciones que se realiza con dichos

datos así como la solución encontrada. En nuestro caso se usa el lenguaje verbal, simbólico y figural como el diagrama del árbol.

- Conceptos: Datos mediante definiciones o descripciones. En nuestro caso los estudiantes emplearán los conceptos y definiciones referidos a: espacio muestral, espacio muestral finito, aleatoriedad, evento posible, suceso o evento simple, suceso o evento compuesto, probabilidad, y equiprobabilidad.
- Proposiciones: Referido a las propiedades, teoremas o corolarios que se emplea al resolver un problema matemático. En nuestro caso por ejemplo, los estudiantes tienen que recordar que la suma de probabilidades en el espacio muestral es igual a la unidad.
- Procedimientos: Referidos a los algoritmos, técnicas, cálculo y operaciones que los estudiantes utilizan al resolver un problema. En nuestro caso los estudiantes usarán técnicas básicas de cálculos de probabilidades como proporcionalidad o el uso de diagrama de árbol.
- Argumentos: Referidos a los enunciados que son usados para validar y explicar las proposiciones sean deductivas o de otro tipo, así como sustentar los procedimientos o bien para la solución de problemas.

Estas seis categorías están relacionadas entre sí formando configuraciones o redes de objetos intervinientes que incluye a las otras, y que permitirá todos ellos analizar las dificultades cognitivas que presentan los estudiantes en lo que concierne al dominio de los conceptos previos de probabilidad.

En ese sentido la teoría del EOS presenta una Técnica de Análisis Semiótico, caracterizando los significados desde el punto de vista institucional y personal y analizando minuciosamente los conflictos semióticos derivados de la resolución de problemas matemáticos concretos la comparación entre estos significados permitirá identificar conflictos semióticos, que:

[...] se refieren a toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos personas o instituciones en un proceso de interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de enseñanza y aprendizaje implementadas. (Godino, 2002, p. 246)

De modo general de acuerdo con este enfoque, para la concreción de una práctica matemática, se hace necesario implementar algunos o todos los elementos mencionados

anteriormente: situaciones-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Estas seis categorías se articulan formando configuraciones definidas como redes de objetos emergentes del sistema de prácticas que pueden ser cognitivas (objetos personales) o socio-epistémicas (redes de objetos institucionales).

2.1.2 Dificultades en el aprendizaje de los objetos matemáticos.

El EOS, como enfoque didáctico, destaca la necesidad de identificar las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de aprendizaje de los diferentes objetos matemáticos, así como determinar las causas que las originan, para de esta manera organizar la enseñanza teniendo en cuenta esas informaciones.

1. Dificultad en el aprendizaje de los objetos matemáticos.

Según Godino, et al (2004) la dificultad en el aprendizaje, “indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja” (p. 74).

Así mismo Godino, et al (2004), consideran que las causas de las dificultades pueden ser:

- a. *Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos.* La abstracción y generalización de las matemáticas es una posible causa de las dificultades de aprendizaje. El análisis de contenido matemático permite prever su grado de dificultad potencial e identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza.
- b. *Dificultades generadas por la secuencia de actividades propuestas.* Existe la posibilidad que las propuestas de actividades presentadas a los estudiantes no sea potencialmente significativa a sus intereses y motivaciones.
- c. *Dificultades que se originan en la organización del centro.* En ocasiones el horario del curso es inapropiado, el número de alumnos es demasiado grande, no se dispone de materiales o recursos didácticos, etc.
- d. *Dificultades relacionadas con la motivación de estudiante.* Puede ocurrir que las actividades propuestas por el docente sean potencialmente significativas y que la metodología sea la adecuada, pero el estudiante no esté en condiciones de hacerlas.

suyas porque no esté motivado. Este tipo de dificultades está relacionado con la autoestima y la historia escolar del estudiante.

- e. *Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico de los alumnos.* Una fuente de dificultades de aprendizaje de los estudiantes hay que buscarla en el hecho de que algunos de ellos aún no han superado la etapa de operaciones concretas y realizan operaciones formales.
- f. *Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores.* Puede ocurrir que el alumno, a pesar de tener un nivel evolutivo adecuado, no tenga los conocimientos previos necesarios para poder aprender el nuevo contenido, y, por tanto, la "distancia" entre el nuevo contenido y lo que sabe el alumno no es la adecuada. La evaluación inicial puede detectar los contenidos previos que hay que adquirir para conseguir el aprendizaje del contenido previsto.

En nuestra investigación pretendemos estudiar las dificultades en la movilización de los conceptos previos requeridos para la comprensión de la probabilidad condicional, para lo cual las dificultades propuestas por el EOS nos permiten tener las herramientas de análisis respectivo.

2.1.3. Fundamentos epistemológicos.

El concepto de aleatoriedad, como señala Batanero (2001) ha tenido varias acepciones a través del desarrollo de la humanidad, lo cual ha llevado a diversas concepciones de probabilidad, pero a diferencia de otras disciplinas de la matemática, no ha tenido una estructura axiomática con enfoques antagónicos.

La noción de aleatoriedad se registra desde tiempos antiguos, estando su origen ligado a los juegos de azar, siendo una de las principales civilizaciones la egipcia y siendo concebida desde el aspecto lúdico. El desarrollo estructurado de probabilidad sin embargo, surge bastante más tarde con Gerolamo Cardano (1501 – 1476), quien en su libro sobre juegos de azar “Liber de ludo aleae” escrito en la década de 1560 pero publicado póstumamente, constituye el primer tratado riguroso de probabilidad, allí podemos encontrar las primeras consideraciones sobre las reglas de adición y multiplicación y los axiomas de independencia y condicionamiento.

Posteriormente, Blaise Pascal (1623 – 1662) y Pierre de Fermat (1601 – 1665) contribuyen en la gestación de la concepción de probabilidad. Así Pascal en una carta escrita en 1654, expone su método de resolución para un problema propuesto por Chevalier de Mere, en la que se refiere a un juego de azar con ganancias donde es interrumpido antes de llegar a su final, por lo que se hace necesario tomar una decisión respecto a la distribución total de las ganancias.

Influenciado por los trabajos realizados por Pascal, Christian Huygens elabora el libro titulado de *raciociniis in ludo aleae*, en la cual introduce la noción de esperanza matemática.

Tomás Bayes (1702 – 1761), escribe “La doctrina de las Chances”, la cual es publicada dos años después de su muerte. En esta obra introduce un nuevo concepto de probabilidad, en función al análisis del observador y el supuesto de equiprobabilidad por simetría. La propuesta bayesiana se fundamenta en la noción de atribuir la ocurrencia o una probabilidad a las causas de un evento o suceso observado teniendo como referencia un valor asumido a priori y recalculado a partir de la observación.

Jean Le Rond D’Alembert (1717 – 1783) presenta una concepción valiosa respecto al cuestionamiento de la independencia de los resultados obtenidos por dos o más jugadas consecutivas en una moneda, así él asume el hecho que se obtenga dos resultados consecutivos similares como muy raramente, incrementándose esta situación rara si se tratara de que el mismo resultado se obtuviese tres o cuatro veces, para finalmente negar tal ocurrencia en cien jugadas consecutivas.

El mismo D’Alembert analiza el hecho de establecer la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda dos veces como dos de tres pues concibe las siguientes posibilidades:

Posibilidad 1. Cara en el primer lanzamiento y el juego termina.

Posibilidad 2. Sello en el primer lanzamiento y cara en el segundo.

Posibilidad 3. Sello en el primer lanzamiento y sello en el segundo.

Así Serrano (1996), afirma en torno a los fundamentos epistemológicos:

Las cuestiones epistemológicas ocupan un lugar fundamental en la reflexión de las personas interesadas por el aprendizaje de las matemáticas. Ello es debido a que los obstáculos surgidos históricamente en la formación de los conceptos se reproducen, con cierta frecuencia, en los alumnos. Otras veces, los estudios de tipo epistemológico pueden ayudar

a comprender las dificultades de los alumnos en el uso de los conceptos para la resolución de problemas.

El cálculo de probabilidades ocupa una situación muy particular a este respecto, ya que, a pesar de contar con una axiomática satisfactoria, prosiguen las controversias sobre la interpretación de conceptos básicos, como los de probabilidad o independencia. Estas controversias no son de tipo técnico, ya que el cálculo de probabilidades, como tal, no plantea contradicciones ni paradojas, como ocurriría en el caso de la teoría de conjuntos, ni se han propuesto otras axiomáticas que compitan con éxito con la de Kolmogorov. Los problemas que la axiomatización no ha resuelto se refieren a la naturaleza de los objetos que se analizan por medio de la probabilidad.(...) la noción de aleatoriedad junto con la idea de probabilidad es el punto de partida del cálculo de probabilidades.(...) Las expresiones ‘experimento aleatorio’, suceso aleatorio, o incluso los sustantivos ‘azar’, ‘aleatorio’ aparecen con frecuencia en el lenguaje cotidiano como en los manuales escolares. Pero su significado, al referirse a una entidad abstracta, no queda unívoca y nítidamente determinado. Tanto en la vida ordinaria como en los textos escolares encontramos diferencias en las propiedades asignadas a los experimentos y sucesos aleatorios. (p.14).

Esto hace referencia a los diferentes significados que han sido asociados al concepto de probabilidad a lo largo de la historia, los cuales aún en la actualidad coexisten, debido fundamentalmente al desarrollo reciente del estudio de este objeto en referencia a otros objetos matemáticos.

Los significados asociados al concepto de probabilidad, han emergido progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas a lo largo del tiempo. Así el enfoque o concepción clásica relativo a la noción de probabilidad definida en 1812 por el matemático francés Pierre Simon de Laplace en su obra Teoría Analítica de las Probabilidades (Vladimirovna, 2005), en la que expresa una concepción de determinismo absoluto a la ocurrencia de eventos, pues sostiene que ningún hecho se produce sin una causa que la genera, por lo que la probabilidad está asociada en parte a nuestra ignorancia y en parte a nuestro conocimientos.

Laplace desarrolla un modelo matemático basado en diez principios de los cuales mencionares los cuatro primeros:

Primer principio: Responde al modelo propuesto por Pascal en 1654 (a través de una carta escrita a Fermat), la fórmula de probabilidad de un evento A.

$$P(A) = \frac{\text{total de casos favorables}}{\text{total de casos posibles}}$$

Segundo principio: Supuesto que cada uno de los casos son igualmente posibles de ocurrir. De no serlo se determina sus posibilidades respectivas, cuya exacta apreciación constituye uno de los puntos más delicados de la teoría del azar. Entonces se determina la probabilidad mediante la suma de las probabilidades de los casos favorables.

Tercer Principio: Las probabilidades aumentan o disminuyen por sus recíprocas combinaciones. En caso de eventos independientes, la probabilidad de existencia conjunta es el producto de sus probabilidades parciales.

Cuarto Principio: La probabilidad del evento compuesto en caso dependan uno del otro es el producto de la probabilidad de uno de ellos por la probabilidad de que si ocurre ésta, ocurrirá la otra.

Los principios descritos estaban orientados a resolver problemas de cálculo de probabilidades asociados a juegos de azar, y como se puede apreciar se condiciona a la característica de que cada una de las posibilidades tengan la misma chance de ocurrir.

Posteriormente Jacques Bernoulli (1654 – 1705) a través de su obra “Ars Conjectandi” propone la concepción frecuentista de probabilidad, en la cual aproxima la probabilidad de un evento en función a la frecuencia registrada, cuando la experiencia es repetida un gran número de veces al cual denomina “Ley de los grandes números”. Este enfoque es aplicado en diversas situaciones básicamente de carácter social, como el comportamiento de crecimiento demográfico, los conflictos sociales o la teoría de errores, que resulta imprescindible tanto para maximizar la información que se pueda obtener de un conjunto de datos experimentales como para evaluar la fiabilidad de dichos datos.

En 1919 Richard von Mises a través de su obra Fundamentos del Cálculo de Probabilidades, realiza una aproximación de la noción de probabilidad a la frecuencia experimental, asumiendo a la probabilidad como el límite de frecuencias.

Sin embargo, la necesidad de incorporar información previa para mejorar las estimaciones probabilísticas generó la existencia de la concepción subjetiva de la probabilidad. Finalmente, el enfoque axiomático, propuesto por Kolmogorov en 1933, logró dotar a la

noción de probabilidad de un sentido matemático preciso, permitiendo al mismo tiempo, resolver diferentes problemas filosóficos asociados a las tres concepciones anteriores, dado que los tres enfoques son contemplados por el enfoque axiomático.

Los hechos sustanciales en la formación del concepto de probabilidad generan las situaciones a considerar Coutinho (1994):

- Dificultad de elegir un modelo matemático adecuado que permita mostrar una relación estrecha con el mundo real.
- Dificultad provocada por la carencia de un soporte matemático adecuado, evidenciado en estudios anteriores al trabajo propuesto por Kolmogorov.
- Dificultad en la resolución de situaciones relacionadas al carácter objetivo o subjetivo de probabilidad.
- Dificultad debido a la complejidad de ciertos problemas de lógica combinatoria.

Estas dificultades constituyen los obstáculos epistemológicos, los cuales como refiere Brousseau (citado por Coutinho) no podemos ni debemos evitar, debido a que cumplen un papel constructivo del conocimiento objetivo. Además Coutinho (1994) advierte:

- Los obstáculos mencionados se encuentran registrados e identificados en el desarrollo histórico de la matemática.
- La aplicación de estos obstáculos es encontrado en el trabajo que realizan los estudiantes.

Estos obstáculos cuando no son trabajados adecuadamente pueden reforzar las concepciones erróneas de los estudiantes. Así el carácter subjetivo de probabilidad establecido por Bayes puede en determinadas situaciones reforzar la concepción errónea que la probabilidad de un evento depende de las informaciones obtenidas por ese evento, es decir de las informaciones obtenidas por el investigador u observador, pudiendo ocurrir que observaciones diferentes generan probabilidades diferentes para un mismo evento.

2.1.4. Conceptos previos a probabilidad condicional

Los conceptos previos requeridos en la comprensión de la probabilidad condicional, que corresponden al dominio esperado de los estudiantes al culminar el VI ciclo, en la que se encuentran los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de menores con edades que oscilan entre 15 y 16 años. Consideramos los siguientes conceptos como previos al aprendizaje de la probabilidad condicional.

1. Situaciones de incertidumbre.

Una situación es de incertidumbre, cuando no podemos afirmar con precisión el resultado a obtener hasta que no haya concluido la situación. En sentido comparativo sería diferente a una situación determinística, en la cual se puede saber del resultado antes de concluir la situación.

Podríamos considerar como situación de incertidumbre el hecho de postular a una universidad a través de un examen de admisión o someterse a una intervención quirúrgica cuando es indispensable para nuestra salud dicha intervención. En el lenguaje cotidiano podría relacionarse con expresiones como nadie tiene el futuro asegurado o no todo está escrito.

También podríamos considerar situaciones de incertidumbre observar el resultado que obtuvo el equipo local que somos hinchas al final de un partido de fútbol, considerando como posibles resultados el siguiente conjunto {ganó, empató, perdió}. Esta misma situación podría presentar otro conjunto con una cantidad no definida de resultados posibles si consideramos el hecho de especificar el resultado del score obtenido, donde el primer componente corresponde al score del equipo local y el segundo al score del equipo visitante, el conjunto de los posibles resultados sería {..., (2,1), (2,0), (1,1), (0,0), (0,1),...}. También podríamos considerar una situación de incertidumbre el hecho de sortear un kit educativo entre los estudiantes matriculados en el presente año académico, donde cada uno de los estudiantes matriculados son elementos del conjunto de los posibles ganadores.

2. Experimento aleatorio.

Situación de incertidumbre en la que es posible repetirla con las mismas condiciones y que no necesariamente se obtiene el mismo resultado. Las condiciones para que sea un experimento aleatorio: imposibilidad de establecer el resultado previamente, factibilidad de identificar todos los posibles resultados, posibilidad de replicar o reproducir tantas veces se quiera con las mismas condiciones.

Así, podemos considerar que la situación de sortear un kit educativo entre los estudiantes matriculados constituye un experimento aleatorio, pues se puede repetir la situación bajo las mismas condiciones, tantas veces como se quiera, en tanto que aplicar un examen de matemática a una determinada sección y verificar el resultado no constituye un experimento aleatorio, dado que en una siguiente aplicación del examen las condiciones no necesariamente son las mismas, pues existe la posibilidad que los estudiantes hayan incrementado sus conocimientos.

3. Espacio muestral.

Es el conjunto conformado por todos los posibles resultados de una situación de incertidumbre. Así en la situación aplicar un examen de matemática a una determinada sección compuesto por 30 estudiantes, y verificar la cantidad de estudiantes que superaron la nota 15, el espacio muestral estará constituido por el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots, 30\}$, o en un partido de fútbol del campeonato escolar organizado por el colegio en el que se juego dos tiempos de 20 minutos en cada tiempo, verificar el minuto que ocurre el primer gol, en este caso el espacio muestral está constituido por el conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 40\}$, aunque pueda darse el caso que tal evento no ocurra.

4. Sucesos simples.

Constituyen cada uno de los elementos del espacio muestral de un experimento aleatorio a los cuales se les puede denominar como sucesos posibles o posibilidad. Así por ejemplo, en el experimento elegir aleatoriamente a un ciudadano mayor de dieciocho años, de nacionalidad peruana, de la base de datos de la RENIEC, para que sea presidente de mesa del próximo proceso electoral nacional y verificar el departamento donde nació. El espacio muestral está constituido por $\{\text{Abancay, Apurímac, Ayacucho, \dots, Ucayali}\}$. (Hemos

utilizado el criterio alfabético para la mención de los elementos del conjunto. Un suceso simple o posible es {Huánuco} o {San Martín}.

5. Sucesos compuestos.

Si un experimento aleatorio posee espacio muestral finito, los sucesos compuestos está constituido por todos los elementos del conjunto potencia del espacio muestral excepto los sucesos simples. Así en el experimento anterior, referido a la elección del presidente de mesa, un suceso compuesto será el verificar que el departamento donde nació la persona elegida como presidente de mesa sea colindante con el Océano Pacífico. En este caso el suceso compuesto estará formado por el conjunto {Tumbes, Piura, Lambayeque,, Tacna}. (Hemos utilizado el criterio de distribución geográfica de los departamentos, partiendo del norte de nuestro país).

6. Probabilidad clásica.

Si un experimento aleatorio es equiprobable, entonces podemos determinar la probabilidad que ocurra un determinado suceso simple o compuesto. Así, en el experimento sortear un kit educativo entre los estudiantes matriculados y verificar el alumno ganador, corresponde a un evento simple, asumiendo que la cantidad de estudiantes es n , pues se tiene que,

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{n}, \text{ donde } P(A_i) \text{ indica la probabilidad que gane el}$$

alumno de orden i en la lista de los n estudiantes matriculados. En tanto que un suceso compuesto estaría dado por el conjunto formado por los estudiantes que pertenecen al cuarto grado de secundaria, además si se sabe que en el cuarto grado de secundaria existen k estudiantes entonces la probabilidad que gane dicho kit un estudiante del cuarto grado Otro suceso compuesto estaría dado por el conjunto formado por los estudiantes de género masculino, entendiendo que el colegio atiende a una población estudiantil de ambos géneros, además si la cantidad de estudiantes varones es h , la probabilidad que gane el sorteo un estudiante varón estaría dado por:

$$P(\text{gane un estudiante de género masculino}) = \frac{h}{n}$$

2.1.5. Configuración epistémica de los conocimientos previos a probabilidad condicional.

Para el trabajo que vamos a realizar donde se pretende establecer una articulación coherente, es necesario plantear la configuración epistémica de referencia de los conceptos previos mencionados en la sección anterior.

Esta configuración permitirá tener el sistema de referencia para el análisis del grado de representatividad de los significados implementados o pretendidos. Así por ejemplo, el tratamiento de la probabilidad en el cuarto grado puede o bien limitarse al tratamiento del cálculo de la probabilidad clásica a partir de situaciones presentadas en contextos ideales donde la determinación del resultado esté en función al lanzamiento de un dado o una moneda equilibrada, o bien abordar este enfoque considerando situaciones de contexto real donde se requiera optar por una decisión reflexivamente, pues la mayoría de las situaciones reales responden a enfoques de probabilidad distintas del enfoque clásico.

En tanto que el análisis de respuestas de los estudiantes a la secuencia de actividades implementadas lo realizaremos en función a la evaluación de salida y a la luz de la idoneidad cognitiva, la cual nos permitirá establecer la proximidad de los significados personales a los pretendidos o implementados a la vez que se espera de los estudiantes la reflexión y el sustento tanto en sus procedimientos como en sus resultados, empleando justificaciones válidas.

Los componentes que tenemos en consideración para esta configuración serán los mencionados en Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), y son los que nos procuran la trayectoria epistémica de la secuencia de actividades, valorados mediante la evaluación de salida de la secuencia de actividades ejecutadas. Estos componentes son: las situaciones-problemas, el lenguaje, las definiciones, los procedimientos, los argumentos y las relaciones; los cuales son recurrentes en la secuencia de actividades.

Entendemos como:

Situaciones-problema, a los diferentes escenarios de contexto presentados en la evaluación realizada al final de la secuencia de actividades que van a tener que responder los estudiantes.

Hemos procurado que el presente componente se aproxime a los intereses de los estudiantes, puesto que recurriremos a situaciones estrechamente ligados a su entorno y a situaciones cotidianas que acontecen al interior de la institución educativa donde estudian; y, además consideramos que las actividades propuestas invitan a los estudiantes a proponer soluciones que van más allá de una interpretación determinista de las situaciones dadas. Este es un requisito previo e indispensable para las actividades que comprenden la secuencia didáctica.

Lenguaje, constituido por los conceptos, notaciones, diagramas y gráficos que se utilizan, las cuales están asociados al objeto en estudio y su tratamiento, que para nuestro caso son los conceptos previos al desarrollo de la probabilidad condicional, los cuales son empleados desde el recojo de información a través de la prueba diagnóstica, luego durante la secuencia de actividades y finalmente en la prueba de salida.

Definiciones, constituido por el significado que asumimos referente a cada uno de los conceptos considerados en el componente de lenguaje, los cuales serán incorporados por los estudiantes.

Procedimientos, cada una de las actividades realizadas por los estudiantes con la finalidad de establecer los significados asociados a los conceptos previos requeridos, estos procedimientos deben responder al trabajo reflexivo de los estudiantes frente a las situaciones planteadas.

Argumentos, constituido por las explicaciones, comprobaciones y justificaciones que el estudiante debe considerar para asumir como válidas la resolución de cada una de las situaciones planteadas.

Relaciones, los objetos matemáticos, que en nuestro caso son los conceptos previos, así como los problemas se relacionan entre sí, es así que a partir de una determinada situación problemática, se ha desarrollado la comprensión y el tratamiento de diversos conceptos previos establecidos.

A continuación presentamos la tabla que muestra la configuración.

Tabla 1. Configuración epistémica de referencia

<p>Situaciones- problema</p>	<p>Se presenta situaciones de contextos estrechamente ligados a la realidad cotidiana de los estudiantes, siendo estas situaciones muy próximas a su inter actuar educativo. A través de estas situaciones o escenarios pretendemos motivarlos a explorar diferentes formas de analizar el objeto de estudio.</p>
<p>Lenguaje</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Verbal: Constituido por los enunciados. • Simbólico: Las representaciones mediante fracciones y porcentajes. • Figural: Los gráficos, diagramas o esquemas representativos de las diversas situaciones propuestas.
<p>Reglas, Definiciones</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Situación determinística: certeza del resultado a obtenerse en una situación antes que éste ocurra. • Situación de incertidumbre: carencia de certeza previa sobre el resultado de una situación, está principalmente asociado al conocimiento personal que se tiene de la situación. • Posibilidad: cada uno de los resultados que pueda suceder como consecuencia de la acción involucrada en una situación de incertidumbre. • Probabilidad: Es una forma de cifrar la esperanza de que suceda una situación posible, anticipando a lo que en la realidad acontecería, teniendo conocimiento de la naturaleza de dicha situación. • Espacio muestral: conjunto formado por cada uno de los posibles resultados a obtenerse de una situación de incertidumbre. • Suceso o evento simple: cada uno de los posibles resultados de la situación de incertidumbre y que conforman el espacio muestral, también denominado posibilidad. • Suceso o evento compuesto: cada uno de los elementos del conjunto potencia del espacio muestral, a excepción de los sucesos simples. • Experimento aleatorio: situación de incertidumbre reproducible bajo las mismas condiciones pero que al repetirse dicha situación no necesariamente se obtiene el mismo resultado.
<p>Procedimientos</p>	<ol style="list-style-type: none"> I. Para reconocer una situación de incertidumbre, los estudiantes analizan la situación propuesta, así como las características y el escenario de los posibles y diversos resultados a ocurrir como desenlace de la situación planteada. II. Para determinar el espacio muestral de una situación de incertidumbre, los estudiantes establecen todos y cada uno de los posibles resultados o posibilidades de la situación y la presentan de forma ordenada como elementos de un conjunto.

	<p>III. Para determinar un experimento aleatorio, analizan las condiciones de reproducibilidad bajo las mismas condiciones que debe cumplir la situación dada.</p> <p>IV. Para determinar el resultado de un evento en un espacio muestral, los estudiantes analizan las condiciones expuestas en el contexto dado y determinan el resultado factible de la acción propuesta.</p>
<p>Argumentos</p>	<p>Tesis: La situación presenta la característica de incertidumbre.</p> <p>Justificación: Establecemos que la tesis es verdadera si el estudiante considera que no es posible determinar el resultado de la ejecución de una situación antes que concluya, pero si es posible determinar el conjunto de todos los posibles resultados a obtener antes que se ejecute la situación.</p> <p>Tesis: La situación presenta la característica de posibilidad de ocurrencia</p> <p>Justificación: Establecemos que la tesis es verdadera, si el estudiante concibe como factible la ocurrencia de dicha situación entre un conjunto de posibles resultados.</p> <p>Tesis: El conjunto de resultados o posibilidades presentado es el espacio muestral de la situación de incertidumbre.</p> <p>Justificación: Establecemos que la tesis es verdadera si el conjunto de posibilidades presentado por los estudiantes comprende todos los posibles resultados que se generan de la situación de incertidumbre.</p> <p>Tesis: La situación presenta la característica de probabilidad.</p> <p>Justificación: Establecemos que la tesis es verdadera, si el estudiante evidencia un conocimiento de la situación y del conjunto de posibilidades que conforma, además tiene una medición del grado de factibilidad de la ocurrencia de un evento o de un conjunto de eventos posibles.</p> <p>Tesis: La situación presenta la característica de espacio muestral.</p> <p>Justificación: Establecemos que la tesis es verdadera si el estudiante identifica cada uno de los elementos que conforma el espacio muestral con la característica que cada uno de estos elementos le corresponde alguna probabilidad de ocurrencia.</p>
<p>Relaciones</p>	<p>Se establecen diversas relaciones en el tratamiento de los conceptos básicos de probabilidad condicional, a través de las situaciones problemáticas planteadas.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Asociar el espacio muestral a la existencia de una situación de incertidumbre. - Asociar la probabilidad de un evento o suceso simple a partir de un espacio muestral equiprobable. - Asociar la probabilidad de un evento o suceso compuesto en un experimento aleatorio.

2.1.6. Consideraciones para el análisis de la movilización de los conocimientos previos a probabilidad condicional.

Nuestro trabajo se centra en el estudio de la faceta cognitiva, por lo que el EOS propuesto por Godino (2006) para esta faceta de idoneidad específica lo siguiente:

La idoneidad cognitiva expresa el grado en que los significados pretendidos o implementados se encuentran en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos o implementados. En ese sentido, para nuestro estudio consiste en establecer las dificultades en el aprendizaje del significado de lo que es situación determinística y aleatoria, espacio muestral, suceso o evento y cálculo de probabilidad, y si son posibles de ser superadas dichas dificultades por los estudiantes del cuarto grado de la educación básica. Así como poder verificar si durante el desarrollo de las actividades y al final de la misma los estudiantes logran superar tales dificultades.

El EOS concibe que la idoneidad cognitiva se encuentra definida sobre la noción de los significados y el significado es concebido en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas, las cuales posibilita describirla en términos de configuraciones, definida como conglomerados de situaciones-problema, definiciones o conceptos, procedimientos, proposiciones, lenguajes y argumentos. La esencia de tales configuraciones son las situaciones-problema contextualizadas propuestas. Por consiguiente se pretende lograr la comprensión de los significados en función de la movilización de los conocimientos previos requeridos.

Godino (2006), afirma que los distintos elementos constituyentes de la configuración epistémica pueden interactuar entre sí, por lo que presenta un sistema de descriptores o indicadores que orientan una propuesta de idoneidad didáctica como herramienta de análisis y valoración de la movilización de los conocimientos.

Para nuestra investigación hemos considerado algunos de los descriptores propuestos para la idoneidad didáctica en función de la configuración epistémica de referencia de los conocimientos previos requeridos.

Debemos precisar que algunos descriptores son considerados en más de una actividad en tanto que otras son específicas a determinadas actividades.

Tabla 2. Descriptores para el análisis de idoneidad cognitiva

Componente	Descriptor
Conocimientos	<p>Valorar si los significados pretendidos se pueden alcanzar en las diversas actividades:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Los significados que se procuró los alumnos lleguen a emplear con la resolución de las situaciones propuestas en las actividades, fueron realmente alcanzables con las situaciones problema que se les propuso en las actividades mismas. • Los procedimientos que se pretendió que los alumnos lleguen a emplear con la ejecución de las actividades contenidas en el instrumento, fueron realmente alcanzables con los conocimientos adquiridos en las actividades anteriores o con las situaciones problema propuestos.
Aprendizaje	<p>Valorar si las actividades propuestas permiten identificar la apropiación de los significados implementados:</p> <ul style="list-style-type: none"> • El instrumento de la actividad permitió recoger de forma detallada las respuestas de los alumnos de modo que procuró evidenciar la movilización de los conocimientos en el estudiante. <p>Valorar si los estudiantes llegan a apropiarse de los significados implementados:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Las respuestas dadas por los estudiantes alumnos fueron cercanas a las esperadas, para ello se considera importante evaluar el conjunto de procesos y recursos que empleó el estudiante en la movilización del conocimiento, considerando la valoración pertinente en caso que el estudiante realiza un procesamiento correcto y arriba a una respuesta incorrecta.

2.2 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

Por la naturaleza de nuestro trabajo, la investigación a realizar será cualitativa, y nos permitirá resolver las interrogantes planteadas en el presente trabajo. La investigación cualitativa se caracteriza por la observación de la actuación de los estudiantes investigados cuando se enfrentan en las diversas actividades diseñadas, tanto en la prueba diagnóstica, como en las actividades de reforzamiento. Los resultados de estas actividades nos permitirán realizar el análisis de los resultados obtenidos en cada una de las actividades a desarrollar.

La investigación cualitativa, según Rodríguez, Gil y García (1996), se caracteriza porque:

Estudia la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas. La investigación cualitativa implica la utilización y recogida de una gran variedad de materiales como entrevista, experiencia personal, historias de vida, observaciones, textos históricos, imágenes, sonidos, los cuales describen la rutina y las situaciones problemáticas y los significados en la vida de las personas. (p. 32).

Considerando las características propuestas por los autores, afirmamos que realizaremos recogida de información a través de los diversos instrumentos a aplicar en las actividades planteadas como son la prueba diagnóstica y las actividades de reforzamiento, con la finalidad de analizar sus respuestas teniendo en consideración los referentes dados por los criterios de idoneidad didáctica propuestos desde el enfoque del EOS.

2.2.1 Procedimientos metodológicos de investigación.

Con la finalidad de establecer los conocimientos previos requeridos por los estudiantes para que puedan construir el concepto de probabilidad condicional e identificar las posibles dificultades en la movilización de dichos conocimientos, nos planteamos los siguientes pasos a seguir.

- a) Elaboración de la configuración epistémica de los conocimientos previos requeridos para la comprensión de probabilidad condicional.
- b) Determinación de las dificultades que involucra la comprensión de los conocimientos previos requeridos para la comprensión de probabilidad condicional las cuales se constituirán en requerimientos orientados a establecer las actividades a desarrollar.
- c) Diseño y aplicación de la prueba diagnóstica, que será aplicado a los estudiantes participantes con la finalidad de recoger información confiable y fidedigna de los conocimientos requeridos y las dificultades existentes.
- d) Análisis de los resultados obtenidos en la evaluación diagnóstica con la finalidad de establecer los conceptos previos requeridos a ser implementados en la siguiente fase así como el tratamiento de las dificultades determinadas.
- e) Diseño y aplicación de una secuencia de actividades en el grupo de estudiantes donde se implementó la prueba diagnóstica, orientado a lograr el dominio de los conocimientos previos requeridos, teniendo en consideración para su diseño la configuración epistémica respectiva, así como los resultados de la prueba

diagnóstica. En la implementación de la secuencia de actividades los estudiantes interactuarán de manera reflexiva y en forma grupal durante tres sesiones respecto al conocimiento de los conceptos requeridos en situaciones de contexto.

- f) Diseño y aplicación de una evaluación de salida que nos permita medir el alcance del dominio en los conocimientos requeridos, teniendo como indicadores la idoneidad de la secuencia de actividades para el aspecto cognitivo y que han sido reforzados en las actividades realizadas durante la secuencia de actividades.
- g) Análisis de la información proporcionada por los estudiantes a través de la evaluación de salida, con el fin de establecer la valoración de idoneidad de la secuencia de actividades implementadas.
- h) Presentación de conclusiones del presente trabajo de investigación.

2.2.2. Instrumentos de investigación.

Para el logro de los propósitos del presente trabajo de investigación consideramos los siguientes instrumentos de investigación.

a) Prueba diagnóstica sobre conocimientos previos.

La prueba diagnóstica contiene ocho ítems que se muestra en el apéndice del presente trabajo, esta prueba nos permitirá conocer si el estudiantes que participa en la investigación tiene los conocimientos previos requeridos para el estudio de probabilidad condicional. Esta prueba aborda básicamente sobre situaciones deterministas y situaciones de incertidumbre, espacio muestral, suceso simple y compuesto, así como cálculo de probabilidad de sucesos simples y compuestos. Se aplicará a los estudiantes participantes de la presente investigación en la sesión I, y tendrá una duración de 40 minutos.

b) Secuencia de actividades.

El centro de nuestra investigación es promover una secuencia de actividades orientadas a superar las dificultades de los conocimientos previos que son necesarios para el aprendizaje de la probabilidad condicional, los cuales serán identificados en la aplicación de la prueba diagnóstica. Está secuencia constará de tres momentos y en cada una de ellas se administrará un ficha de actividades a fin que los estudiantes logren el dominio de los conocimientos requeridos. La característica de esta secuencia de actividades es su carácter

colaborativo por cuanto se realizará en pares, y además contará con la asesoría del investigador.

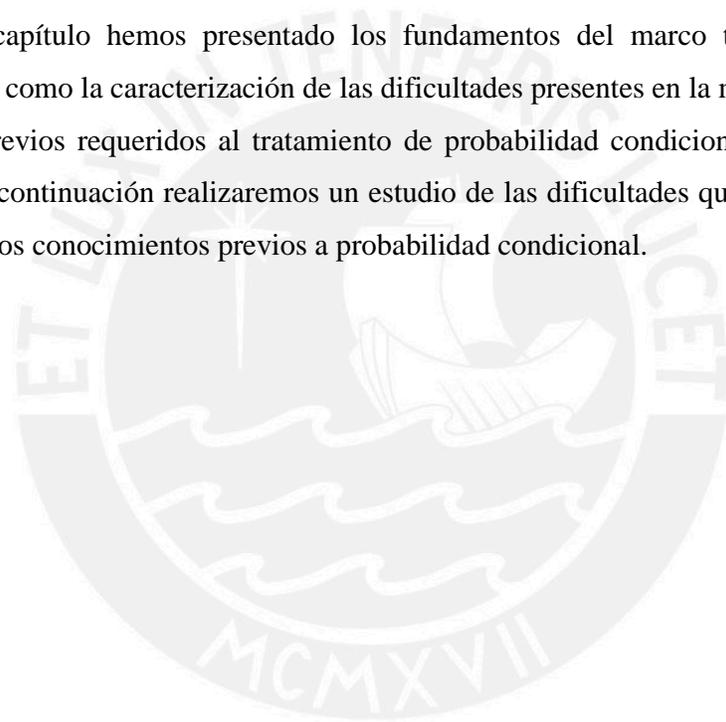
Este conjunto de tres actividades se muestra en el apéndice del presente trabajo.

La aplicación de esta secuencia se efectuará en las sesiones II, III y IV, en un periodo de 40 minutos cada una de ellas.

c) Evaluación de los conceptos trabajados.

Con la finalidad de validar la superación de las dificultades presentadas en la evaluación diagnóstica, se administrará una prueba de carácter individual, la cual se efectuará en la sesión V. El instrumento se muestra en el apéndice del presente trabajo.

En el presente capítulo hemos presentado los fundamentos del marco teórico de nuestra investigación, así como la caracterización de las dificultades presentes en la movilización de los conocimientos previos requeridos al tratamiento de probabilidad condicional y el método de investigación. A continuación realizaremos un estudio de las dificultades que se presenta en la movilización de los conocimientos previos a probabilidad condicional.



CAPITULO 3. DIFICULTADES EN LA COMPRESIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS A PROBABILIDAD CONDICIONAL

Consideramos oportuno referir las dificultades que involucra la movilización de los conocimientos previos a la probabilidad condicional.

3.1. DIFICULTADES EN LOS DIVERSOS ENFOQUES DE PROBABILIDAD

Según Sánchez (2009), en los programas de educación secundaria se propone el estudio de al menos de uno de los tres enfoques de probabilidad, por lo que describe algunas dificultades en cada enfoque.

3.1.1. Dificultades en el Enfoque Clásico.

Si bien los aprendices desde niños tienen rudimentos de la probabilidad clásica, pues infieren información para realizar anticipaciones y la solución correcta de problemas sencillos desde el enfoque clásico. Sin embargo las dificultades aumentan considerablemente en la educación secundaria cuando la situación requiera elementos de análisis combinatorio para construir el espacio muestral. Una limitación del enfoque clásico que ha llevado a muchos investigadores a proponer el enfoque frecuentista radica en el hecho que este enfoque solo es aplicable a situaciones que generan espacios muestrales finitos equiprobables.

El uso de la probabilidad geométrica para el enfoque clásico es considerado una situación en la que la probabilidad de cada elemento es la misma aunque el espacio muestral es reorganizado.

Otra situación a observar en este enfoque, podemos considerar el caso de colocar en una urna bolas, en la que cada una de ellas tiene la misma probabilidad de ser elegida. Pero si agrupamos las bolas por colores (sortear una bola y observar el color) nos estaría llevando a una experiencia aleatoria con espacio muestral no equiprobable.

3.1.2. Dificultades en el Enfoque Frecuentista.

Conocido también como Enfoque Experimental o Empírico, la dificultad es la ausencia de actividades prácticas y vivenciales en las clases de probabilidad. Otra de las dificultades, es que no proporciona el valor exacto de una probabilidad, a ello se aúna otra dificultad que está ligada a la anterior, se refiere a la determinación de las veces que corresponde de manera pertinente repetir una experiencia para alcanzar una óptima estimación de la probabilidad. Se suele solicitar a los estudiantes repetir la experiencia muchas veces sin cuantificar tal expresión. Sin embargo advierte que esta dificultad concibiendo desde otra óptica sería una oportunidad para tratar los temas de estimación y aproximación en contextos de probabilidad. Otro inconveniente adicional, se produce por el hecho que existe un gran número de situaciones que no es posible repetir las bajo las mismas condiciones, pero que sin embargo, en tales situaciones tiene sentido aplicar este enfoque de probabilidad.

Uno de los recursos a emplearse para este enfoque son los simuladores computacionales en las que el alumno realiza pruebas simuladas de repeticiones tendientes a observar la estabilización de frecuencias relativas acumuladas.

3.1.3 Dificultad en el Enfoque Subjetivo.

En este enfoque la dificultad radica en la escasa o nula aplicación que se implementa en la educación básica, pues según refiere este enfoque permite asignar una probabilidad a un rango amplio de situaciones, donde su ocurrencia es única, por lo que no existe la posibilidad de realizar repeticiones bajo las mismas condiciones, siendo necesario como sostiene Batanero (2001), el conocimiento y la experiencia de la persona, lo que implica que la probabilidad de un suceso puede ser diferente para diferentes personas.

Una dificultad de este enfoque radica en determinar una regla que permita asignar valores numéricos a las probabilidades. Así, la probabilidad de acertar respecto al número de estudiantes que aprobarán un determinado tema de matemática, constituye un caso que requiere de la aplicación del enfoque subjetivo, por cuanto la valoración va depender del conocimiento que posea el docente respecto al dominio de dicho tema por parte de los estudiantes y de las características con que se ha implementado dicho tema y que constituye

la evidencia disponible necesaria, teniendo en cuenta que se trata de un suceso irrepetible bajo las mismas condiciones, pues si se pretende repetir dicho examen, las condiciones no serán distintas dado que el nivel de conocimiento del tema por parte de los estudiantes ya no será el mismo.

3.2 SESGOS EN EL APRENDIZAJE DE PROBABILIDAD.

Según refiere Sánchez (2009), los sesgos en el aprendizaje de probabilidad se debe a que muchas veces los estudiantes tienen sus propias ideas previas sobre las situaciones, las cuales se caracterizan por ser persistentes e inconsistentes con la naturaleza intrínseca de la situación.

3.2.1. Sesgo de equiprobabilidad.

Consiste en una tendencia de los estudiantes a concebir e interpretar que los resultados de una experiencia aleatoria tienen la misma probabilidad. Al respecto Lecoutre (1992), advierte respecto a la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de dos sucesos de un experimento aleatorio. Al respecto sostiene, luego de un trabajo experimental con estudiantes de diversas edades y nivel de preparación, que esta creencia en los estudiantes no es atribuible a una falta en el razonamiento, sino a una idea de que si el experimento es al azar, todos sus resultados deben tener la misma probabilidad. Además, queda la posibilidad de fomentar este sesgo, con una sobreestimación del enfoque clásico en la enseñanza. También Coutinho (1994) encuentra como una barrera cognitiva este sesgo al que lo identifica como la creencia de equiprobabilidad debido a la ausencia de informaciones sobre un evento a ser observado, así como la de que la probabilidad de un evento pueda ser influenciada por informaciones obtenidas en la observación.

3.2.2. Sesgo de representatividad.

Consiste en asumir la probabilidad de un evento sobre la base del grado de convicción en el que la persona o el estudiante concibe que el evento no es parte, sino representa a la población de la que proviene o al proceso del cual es generado. Por ejemplo, se puede apreciar el hecho cuando se trata respecto a la naturaleza de

la independencia en la ocurrencia de eventos. Al respecto Sánchez (2009) menciona el razonamiento del estudiante cuando se le pide evaluar cuál es más probable, que una familia tenga seis descendientes cuya secuencia sea todos varones, o que sea alternado varón y mujer; los estudiantes suelen asumir como más probable el segundo caso, pues consideran que es más representativa en base al supuesto que cada sexo tiene una probabilidad del 50%. Otra expresión de sesgo de representatividad es el llamado falacia del jugador, el cual consiste en asumir que después de la ocurrencia repetida de un resultado, el jugador o competidor tiende a considerar que la probabilidad del resultado alternativo se incrementa, discriminando la naturaleza de independencia de eventos sucesivos.

Estos sesgos se tornan en dificultades para la construcción del concepto de probabilidad condicional dado que generan una concepción errónea al proponer un modelo de interpretación de una situación en la que el espacio muestral es modificado por las restricciones que se plantean.

3.3 DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS PRODUCIDOS EN LA FORMACION DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD.

En lo que se refiere a las dificultades que conducen a obstáculos. Coutinho (1994), firma:

Analizando la evolución histórica de la formación del concepto de probabilidad, observamos hechos muy importantes:

- Dificultad de elegir un adecuado modelo matemático para establecer la relación estrecha con el mundo real [...], la dificultad en un problema sobre probabilidad radica en la construcción de un modelo adecuado a partir de los datos observados.
- La dificultad generada por la falta de un soporte matemático adecuado, queda evidenciado en la diversidad de estudios anteriores al trabajo desarrollado por Kolmogorov.
- Dificultad en la resolución de situaciones que involucran adoptar un enfoque objetivo o subjetivo de probabilidad.
- Dificultad debido a la complejidad de ciertos problemas sobre lógica combinatoria.(pp. 25 y 26).

Las dificultades mencionados por Coutinho (1994), son observables en el estudio de probabilidades. Además muchas personas de nuestro entorno presentan dificultad en la toma de decisiones. Así las personas proclives al juego del azar (sea la tinka, loterías), optan por informarse cuáles han sido los números que han salido con más frecuencia en los juegos anteriores para tomar una decisión a favor de estos números, sin considerar la

naturaleza de independencia de los sucesos, es decir el hecho que salga una de las bolillas en el sorteo anterior, no incide en el hecho que vuelva a salir, así como no considerar la condición de espacio muestral equiprobable de estos juegos.

También Osorio (2012), menciona en lo relacionado a las estrategias de razonamiento que utilizan los estudiantes ante situaciones de incertidumbre, allí encuentra que los alumnos presentan dificultades en la solución a situaciones de incertidumbre que requiere de la consideración de todas las posibilidades que pudiese darse en una situación determinada, lo cual indica la dificultad de la determinación del espacio muestral.

Los obstáculos lo podemos encontrar también en el lenguaje referido a los conceptos relacionados con la probabilidad, este lenguaje es utilizado por los estudiantes inclusive en las actividades lúdicas y cotidianas, los cuales corresponde en el aula precisar el significado de estos términos, así Batanero (1999) afirma que el tratamiento de la noción de aleatoriedad se realiza preferentemente de un modo descriptivo, donde la descripción de las características atribuidas a los resultados de los experimentos, se realiza mediante expresiones como imprevisible o incierto, con las que se procura que se evoquen las propiedades de las situaciones, pero cuyo significado no suele clarificarse para referirse a los resultados de experimentos aleatorios. Esta falta de clarificación origina interpretaciones ambiguas por parte de los estudiantes, configurándose de esta manera como una dificultad en la comprensión de la noción de aleatoriedad.

3.4. DIFICULTADES PRESENTADOS EN LOS TEXTOS ESCOLARES

Los libros de texto como señalan Barragués, Ignacio y Guisasola(2006), es el más importante de los recursos que utilizan docentes en el desarrollo de sus clases en los diferentes niveles educativos. Además Ortiz (2002) advierte que si un libro presenta un significado sesgado, éste puede llegar a ser asimilado por los estudiantes.

Los significados sesgados que presentan los textos escolares son considerados como obstáculos, a continuación presentamos dos situaciones:

Situación 1. Corresponde al texto de primer grado propuesto por el MINEDU la definición referida a suceso equiprobable como una igualdad de posibilidades, es decir asume que probabilidad es lo mismo que posibilidad.

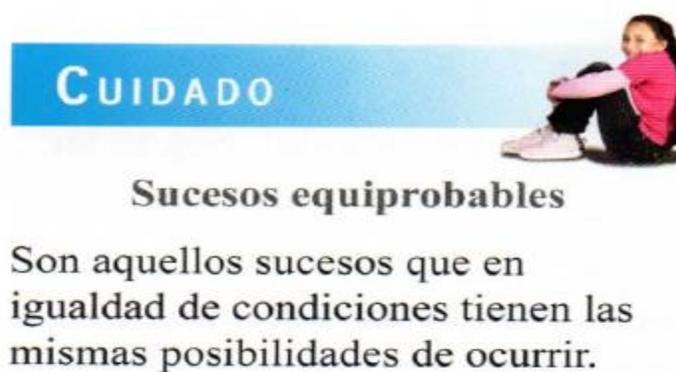


Figura 2. Equiprobabilidad en Texto de Matemática

Fuente: MINEDU, p. 238

En la expresión dada, se presenta un error conceptual, pues la noción de sucesos equiprobables corresponde al enfoque laplaciano, donde los sucesos o eventos pertenecen a un espacio muestral finito, caracterizado bajo una concepción a priori de que cada uno de los sucesos tiene la misma probabilidad o verosimilitud de ocurrir, es decir son igualmente probables (Ortiz, 2002). Además, las probabilidades a priori son las asignadas a los sucesos antes de obtener una evidencia experimental (Canavos, 1987).

De las observaciones realizadas vemos que la posibilidad está asociada a la existencia de un suceso o evento, careciendo de la propiedad de ser cuantificable o comparable numéricamente.

Situación 2. Corresponde a un ejemplo respecto al cálculo de probabilidad de sucesos compuestos.

4. Un estudiante rinde tres exámenes. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe por lo menos 2 de ellos?

Solución

Aprobar por lo menos 2 de ellos significa aprobar 2 o 3 de los exámenes. Sea A aprueba y D desaprueba, entonces:

- Casos favorables = 4
- Total de casos = 8

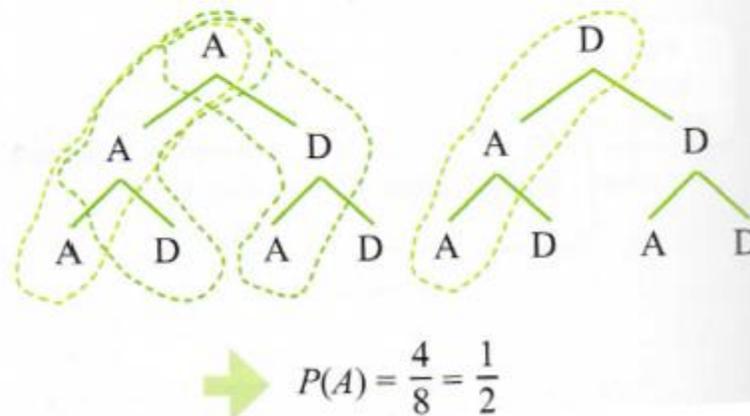


Figura 3. Aplicación de probabilidad en texto de Matemática

Fuente: MINEDU p 242

Se presenta una situación de incertidumbre como si fuese un experimento aleatorio equiprobable, sin considerar que las condiciones ya no son las mismas (no son reproducibles) para cada caso en que la situación se vuelva a realizar, entendiendo como situación el hecho de aplicar un exámenes y verificar el resultado obtenido; pues para el siguiente examen el dominio del tema y el tema en sí ya no son necesariamente los mismos. Es decir, no cumple la característica de reproducibilidad bajo las mismas condiciones que se requiere para un experimento aleatorio, por lo que el enfoque clásico es inconsistente. Por la característica de la situación planteada, corresponde ser encarado desde el enfoque subjetivo.

Podemos observar como los obstáculos expresados mediante los sesgos en el aprendizaje de probabilidad constituyen una dificultad de naturaleza epistémica, los cuales se evidencian

en la producción bibliográfica, siendo los que contribuyen a generar obstáculos en los significados institucionales. Por lo que se hace imprescindible y de importancia sustantiva el rol del profesor quien debe conocer y reflexionar sobre estos obstáculos y sesgos que se refuerzan en muchos libros, para minimizarlas y poder ayudar a los estudiantes a superarlas.



CAPÍTULO 4. ESTUDIO DIAGNÓSTICO

En el presente capítulo realizamos el estudio diagnóstico orientado a identificar las dificultades en la movilización de los conceptos previos que presentan los estudiantes. Realizaremos una descripción de los sujetos participantes en la presente investigación y el desarrollo de la aplicación de la prueba diagnóstica.

4.1. PROPUESTA Y OBJETIVOS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

El estudio diagnóstico pretende identificar los conocimientos previos relativos a probabilidad condicional que poseen los estudiantes. Se realizó teniendo en consideración los descriptores detallados en la tabla 3.

Tabla 3. Descriptores para el análisis de idoneidad cognitiva de los conocimientos previos

Descriptor
<p>Valorar si los alumnos demuestran apropiación: Las respuestas dadas por los alumnos son cercanas a las esperadas.</p>
<p>Significados pretendidos: Situación de incertidumbre, Situación determinista, Espacio muestral, Suceso o evento, Probabilidad,</p>

Las consideraciones incluidas en la prueba diagnóstica fueron propuestas con la intención de encontrar respuestas a nuestras preguntas de investigación: ¿Qué conocimientos previos son necesarios para que los estudiantes puedan construir el concepto de probabilidad condicional?, ¿Qué dificultades pueden ser identificadas en la movilización de los conocimientos previos? Estas preguntas surgen como consecuencia de las dificultades y obstáculos descritos en el capítulo anterior.

Nuestra fase experimental está constituida por sesiones programadas:

- a) Sesión 1. Encuentro con los estudiantes, explicación del trabajo a realizar y aplicación de la prueba diagnóstica orientado a identificar los conocimientos previos que poseen los estudiantes.

- b) Sesión 2. Actividad colaborativa con los estudiantes orientado a la identificación de situaciones aleatorias y determinísticas, así como la determinación del espacio muestral de situaciones aleatorias.
- c) Sesión 3. Actividad colaborativa con los estudiantes orientado a comprender la determinación de sucesos o eventos simples y compuestos.
- d) Sesión 4. Actividad colaborativa con los estudiantes orientado a determinar la probabilidad de un evento en situaciones del contexto de los estudiantes.
- e) Sesión 5. Actividad individual donde se estará evaluando los conceptos trabajados en las sesiones 2, 3 y 4.

La aplicación de la prueba diagnóstica constituye nuestro primer encuentro con los estudiantes y se realiza en la primera sesión de las cinco sesiones programadas. El objetivo de la aplicación de nuestro primer instrumento Prueba diagnóstica es determinar si los alumnos poseen los conocimientos previos referidos a la comprensión de la probabilidad condicional e identificar las posibles dificultades a presentarse.

4.2. SOBRE LOS SUJETOS

En las actividades de la presente investigación participaron 26 estudiantes pertenecientes a una sección del cuarto grado de secundaria del turno tarde de una institución educativa pública del Callao cuyas edades oscilan entre 15 y 16 años.

La mayoría de ellos han estudiado desde su ingreso a la educación secundaria en dicha institución educativa. Esta institución educativa posee dos turnos (uno en la mañana y otro en la tarde), y en cada turno hay estudiantes del primero al quinto de secundaria, con un rango de edades desde los 11 años hasta los 18 años. La población estudiantil en el turno de la mañana está conformada por varones y mujeres en tanto que en la tarde únicamente por varones. Cada grado se distribuye por secciones nominadas por las letras del abecedario correspondiendo las primeras letras al turno de la mañana.

Las características de los estudiantes en ambos turnos son similares por cuanto comparten en general el mismo vecindario.

4.3 ANÁLISIS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS.

La prueba diagnóstica nos permitió determinar los conocimientos previos que los estudiantes poseen, así como realizar el diagnóstico de las dificultades que involucra la movilización de dichos conocimientos previos, la información que se obtenga permite diseñar la implementación de la secuencia de actividades. La aplicación de esta prueba ha sido de 40 minutos.

4.3.1 Ítems propuestos en la prueba diagnóstica e identificación de las posibles dificultades.

En este primer instrumento de investigación se plantearon ocho ítems para que lo resuelvan en forma individual. Los ítems tratan de obtener información sobre conocimientos referidos a situaciones deterministas y situaciones de incertidumbre, espacio muestral, suceso simple y compuesto, así como cálculo de probabilidad de sucesos simples y compuestos

A continuación se presenta cada uno de los ítems de esta prueba diagnóstica, así como la respuesta esperada y las dificultades que presentan los estudiantes.

1. Identifica cuáles son situaciones de incertidumbre y cuáles son situaciones determinísticas. Explica por qué.

a. La temperatura que hierve el agua al nivel del mar.

RESPUESTA ESPERADA. Teniendo en consideración a la indicación previa que clasifiquen o bien como situación de incertidumbre o como situación determinística, corresponde a una situación determinística, la justificación es: dado que se trata de un fenómeno físico que se encuentra en función de la presión atmosférica, y siendo al nivel del mar la presión atmosférica constante, el agua ebulliciona a 100°C .

b. Número de autos que circulan durante una hora determinada en la avenida Faucett.

RESPUESTA ESPERADA. Decidimos presentar esta situación a los estudiantes por cuanto es cotidiano en ellos transitar por esta avenida. La respuesta correcta corresponde: Es una situación de incertidumbre, la justificación es que no se puede

predecir la cantidad de autos que pasará en una determinada hora, únicamente podemos conocer una vez realizado el conteo en ese periodo de tiempo. De hecho existe la posibilidad que dicha cantidad no sea la misma en la siguiente hora, o incluso al día siguiente en el mismo lapso de tiempo.

c. Tiempo que tarda en llegar la luz desde el sol a la tierra.

RESPUESTA ESPERADA: Es una situación determinística, por cuanto se trata de un fenómeno físico, caracterizado porque la luz posee en el espacio un desplazamiento a velocidad constante, y siendo la distancia entre la tierra y el sol determinados por sus trayectorias que cumplen un orden establecido.

d. Un alumno del cuarto grado se presenta como candidato para alcalde en las elecciones municipales escolares y gana las elecciones.

RESPUESTA ESPERADA: Es una situación determinista, por cuanto el escenario presenta el resultado del proceso eleccionario, el cual es el triunfo del estudiante que se presentó como candidato en el proceso eleccionario.

2. El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Determina el espacio muestral de los siguientes experimentos



a. Lanzar un dado y observar el resultado en la cara superior

RESPUESTA ESPERADA. Para esta situación se mostró una imagen de un dado convencional de forma cúbica, y aunque no se explicita, se asume que se trata de un dado equilibrado, es decir no cargado, por lo que la respuesta correcta es:

Espacio muestral: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b. Número de estudiantes del 4to “A” que aprobaron el examen de matemática si son 35 estudiantes.

RESPUESTA ESPERADA. Espacio muestral: $\{0, 1, 2, 3, \dots, 34, 35\}$, Donde el elemento 0 corresponde a la posibilidad que ningún estudiante apruebe el examen, en tanto 35 a la posibilidad que aprueben el total de estudiantes. También el espacio muestral admite como elementos cantidades enteras entre el 0 y el 35.

c. Tiempo que te demoras de tu casa al colegio.

RESPUESTA ESPERADA. Esperamos diferentes respuestas, de acuerdo a la realidad particular cada uno de los estudiantes, pues algunos se desplazan mediante un medio de transporte público, otros lo realizan a pie, lo que sí debería mostrarse como respuesta es o bien un intervalo de tiempo o bien un conjunto donde los elementos sean cantidades discretas que indiquen los minutos posibles que requieren para trasladarse al colegio desde sus domicilios, considerando casos extremos en la inversión del tiempo, pues sea cual fuese el medio de transporte empleado por cada uno de ellos, el tiempo empleado no es el mismo.

Así por ejemplo si un alumno vive a una distancia de 3 km. del colegio y teniendo en cuenta que a veces se desplaza en bus o caminando podría indicar como espacio muestral en minutos el siguiente conjunto: $\{10, 11, 12, 13, \dots, 24, 25\}$, también podría considerar el intervalo $[10, 25]$.

3. *Iby y sus amigos viven en un mismo barrio. La distancia de la casa de Iby a la casa de Kira, Jorge, Fernando, Hilda y Oscar es de cuatro cuadras a cada uno de ellos (conforme muestra la figura). Iby acostumbraba visitar a sus amigos durante los días de la semana de lunes a viernes (un día a cada uno de ellos), por ejemplo el lunes visitaba a Kira, el martes a Jorge, el miércoles a Fernando, el jueves a Hilda y el viernes a Oscar.*

Para hacer más emocionante las visitas decide realizarlo mediante un sorteo diario, lanzando una moneda, con la condición que si sale cara avanzaría una cuadra al norte y si sale sello avanzaría una cuadra al este. Cada jugada representa una cuadra, por lo que tiene que lanzar 4 veces para determinar a quién va visitar. (Cabe aclarar que esta estrategia de elección apertura la posibilidad que visite al mismo amigo más de un día a la semana).

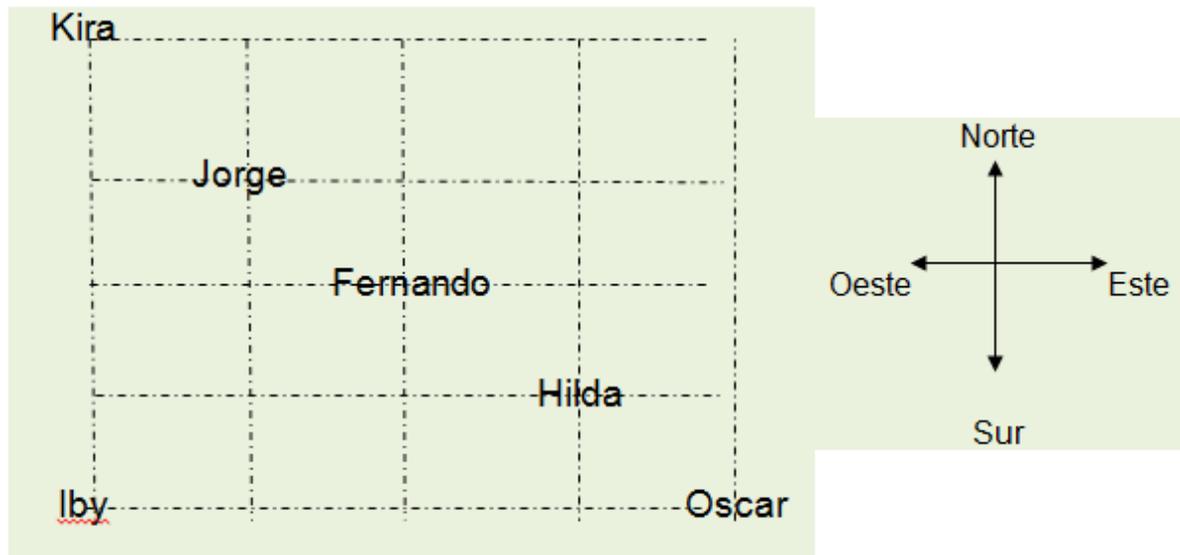


Figura 4. Distribución de las casas de Iby y sus amigos

- a. **¿Cuál es la diferencia entre la antigua forma de Iby de visitar a sus amigos y la nueva modalidad?**

RESPUESTA ESPERADA. En la antigua forma había un orden pre-establecido que garantizaba la visita a cada uno de sus amigos por parte de Iby durante la semana, en tanto que en la nueva modalidad no había un orden preestablecido y además no garantiza que visite a cada uno de sus amigos durante la semana pese a que diario visita a uno de sus amigos.

- b. **¿Cuáles son los posibles resultados al lanzar una moneda?**

RESPUESTA ESPERADA: O que se obtenga cara o que se obtenga sello, que son las que corresponde a los dos lados que posee una moneda equilibrada.

- c. **¿Cuál es la probabilidad de salir cara o sello?**

RESPUESTA ESPERADA. Considerando dos los posibles resultados y teniendo cada una de ellas la misma probabilidad de ocurrir, entonces:

$$\text{Probabilidad (obtener cara)} = \text{Probabilidad (obtener sello)} = \frac{1}{2}.$$

- d. **¿Todos los amigos tienen la misma probabilidad de ser visitados por Iby?**

RESPUESTA ESPERADA. No, pues la probabilidad que sean visitados cada uno de los amigos no es la misma, quienes tienen menos probabilidad son Oscar y Kira, en tanto que quien tiene mayor probabilidad de ser visitado es Fernando. El

conjunto que conforma el espacio muestral está conformado por 16 elementos, que son las combinaciones que se obtiene al lanzar la moneda cuatro veces.

4. **Una pareja ha planificado tener tres hijos. Suponemos que en cada parto tiene igual probabilidad de tener un hijo varón o mujer. ¿Cuál es la probabilidad que tengan dos hijos varones y una mujer?**

- a) 3
- b) 1
- c) $1/3$
- d) $3/8$

En este caso hemos tenido que forzar la situación para proponer un experimento de equiprobabilidad (pues sabemos que el hecho de tener un hijo varón o mujer no es equiprobable, depende de las condiciones genéticas de los progenitores entre otros factores).

RESPUESTA CORRECTA: Probabilidad (dos hijos varones y una hija mujer) = $\frac{3}{8}$,

pues el espacio muestral está constituido de ocho eventos simples posibles o variaciones, y siendo la ocurrencia de cada uno de ellos igual de probables, observamos que son tres los casos favorables.

El recurso que podrían emplear los estudiantes es el diagrama del árbol, el cual ilustra los posibles resultados.

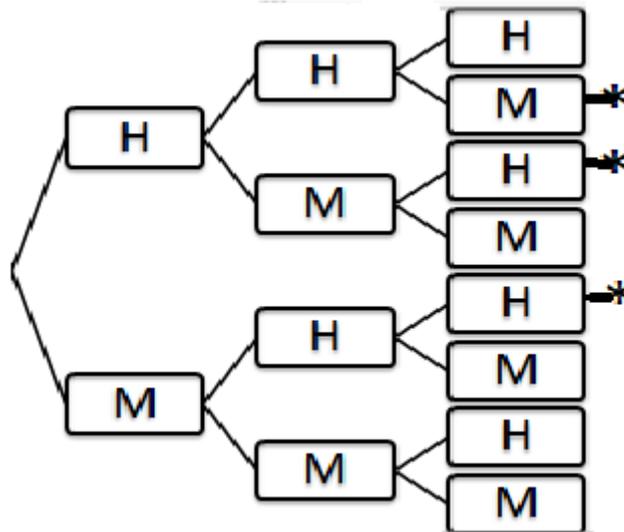


Figura 5. Diagrama de árbol sobre probabilidad que nazcan dos varones y una mujer.

Aquí se observa los tres casos favorables de los ocho resultados posibles que se pudiese presentar

4.3.2 Resultados de la prueba diagnóstica.

La tabla que se muestra a continuación presenta los resultados obtenidos por los estudiantes, considerando la cantidad de respuestas correctas en cada uno de los ítems propuestos, así como la cantidad de estudiantes que tuvieron dificultades en los respectivos ítems

4.3.3 Resultados totales de la prueba diagnóstica

En la aplicación de la prueba diagnóstica participaron 26 estudiantes. En la siguiente tabla se presenta los resultados indicando la cantidad de alumnos que acertaron en cada uno de los ítems propuesto, así como la cantidad de alumnos que tuvieron dificultades.

Tabla 4. Resultados de la prueba diagnóstica sobre conocimientos previos.

Ítem	Respuestas acertadas	Respuestas que presentan dificultad
Ítem 1 –a	9	17
Ítem 1 –b	7	19
Ítem 1 – c	6	20
Ítem 1 – d	5	21
Ítem 2 – a	9	17
Ítem 2 b	1	25
Ítem 2 – c	2	24
Ítem 3 – a	7	19
Ítem 3 – b	9	17
Ítem 3 – c	8	18
Ítem 3 – d	0	26
Ítem 4	2	24

4.3.4 Determinación de las dificultades registradas en la aplicación de la prueba diagnóstica.

A continuación realizaremos el análisis de las respuestas brindadas por los estudiantes con la finalidad de determinar las dificultades que se genera en la movilización de los conocimientos previos requeridos a la probabilidad condicional.

1. Identifica cuáles son situaciones aleatorias y cuáles son situaciones deterministas. Explica por qué.

a. La temperatura que hierve el agua al nivel del mar.

DIFICULTADES ENCONTRADAS: En esta actividad la mayoría de los estudiantes arribaron a respuestas erróneas. Los alumnos presentaron dificultad en la comprensión de situación determinista debido a la movilización de una concepción errónea sobre los fenómenos físicos. Esta dificultad se encuentra dentro del análisis de idoneidad cognitiva, y corresponde a las categorías de concepto y

lenguaje, propuesto en el EOS, pues los estudiantes consideraron que para la misma altura respecto al nivel del mar, la temperatura en que hierve el agua es variable.

A continuación presentamos las respuestas elaboradas por tres estudiantes:

Respuesta elaborada por Eduardo

a. La temperatura que hierve el agua al nivel del mar.
Aleatorio porque depende de la zona del mar, a veces hace Frio.

Figura 6. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 1-a.

Observamos que el estudiante presenta dificultad según la categoría de conceptos propuesto en el EOS, dado que considera la elección del lugar donde se realiza la medición como aleatoria y no la temperatura en que hierve el agua.

Respuesta elaborada por Mauricio.

a. La temperatura que hierve el agua al nivel del mar.
Aleatorio, porque es imposible medir la temperatura porque que cambia constantemente

Figura 7. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 1-a.

Observamos que el estudiante presenta dificultad en la categoría de lenguaje según el EOS, dado que el estudiante expresa el comportamiento de la temperatura sea del medio ambiente o de las aguas del mar pero no se orienta a comunicar la respuesta requerida.

Respuesta elaborada por Axel.

a. La temperatura que hierve el agua al nivel del mar.
ALEATORIO ES AGUA PORQUE TIBIA EL Y HAY PLAYAS DONDE EL AGUA ES FRIA. HAY PLAYAS DONDE

Figura 8. Dificultades registradas por Axel a la situación 1-a.

El estudiante muestra dificultad en la categoría de concepto según el EOS, pues alude al hecho de conocer playas que presentan sus aguas temperaturas variadas.

b. Número de autos que circula durante una hora determinada en la avenida Faucett.

DIFICULTADES ENCONTRADAS. Decidimos presentar esta situación a los estudiantes por cuanto es cotidiano en ellos transitar por esta avenida. La respuesta correcta corresponde: Es una situación de incertidumbre, la justificación es que no se puede predecir la cantidad de autos que pasará en una determinada hora, únicamente podemos conocer una vez realizado el conteo en ese periodo de tiempo. De hecho existe la posibilidad que dicha cantidad no sea la misma en la siguiente hora, o incluso al día siguiente en el mismo lapso de tiempo.

A continuación presentamos las dificultades registradas por tres estudiantes.

Respuesta elaborada por Eduardo.

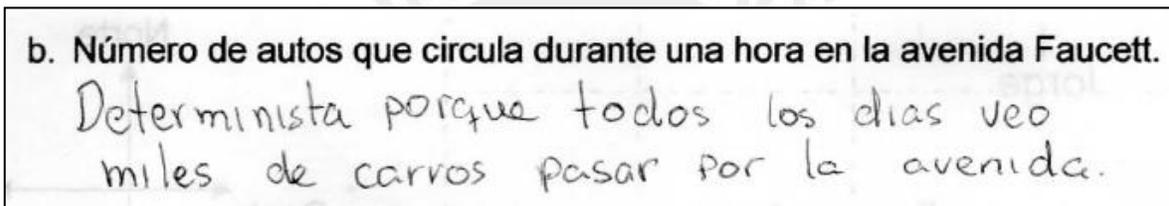


Figura 9. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 1-b.

En el análisis de las dificultades propuesto en el EOS, corresponde a la categoría de concepto, pues estudiante establece como una situación fija o determinista. En la categoría de argumento se observa dificultad, pues realiza esta afirmación en función a su experiencia dado que se traslada por dicha avenida.

Respuesta elaborada por Mauricio.

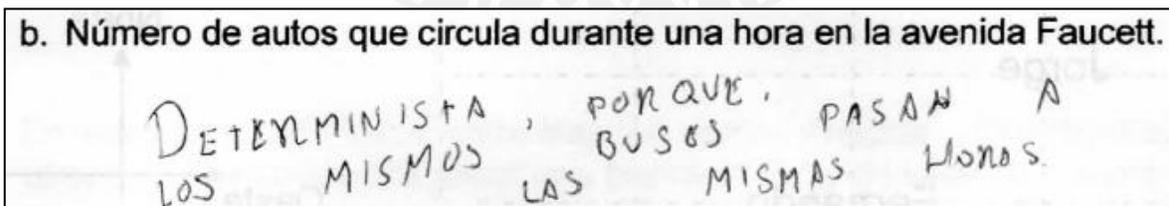


Figura 10. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 1-b.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de concepto dentro del análisis propuesto por el EOS, porque restringe la situación propuesta a un suceso que no posee la característica de ser determinista. También presenta dificultad en la categoría de argumentos, pues restringe la situación a su experiencia, en la que pudo percatarse respecto

a la frecuencia y los horarios que pasan los buses, los cuales ya están establecidos, y son utilizados como argumentos.

Respuesta elaborada por Axel.

b. Número de autos que circula durante una hora en la avenida Faucett.

Desde 10 minutos circulan 600 autos
en una hora en aproximado 1200 autos

Figura 11. Dificultades registradas por Axel a la situación 1-b.

El alumno presenta dificultad en la categoría de concepto dentro del enfoque del EOS, pues implícitamente establece como una situación determinista. Su respuesta coincide con la información respecto a los reportes brindados por los medios informativos respecto al promedio de autos que circula en la avenida Faucet, lo cual reafirma el desconocimiento del concepto en sí.

c. Tiempo que tarda en llegar la luz desde el sol a la tierra.

DIFICULTADES ENCONTRADAS.

En este ítem el número de estudiantes que presentaron dificultad fueron de 20 de los 26 participantes en la presente investigación, siendo básicamente el factor para el desacierto en sus respuestas las características que rige a las situaciones de incertidumbre y el escenario que factibiliza su aplicación.

A continuación presentamos las dificultades registradas por tres estudiantes.

Respuesta elaborada por Eduardo.

c. Tiempo que tarda en llegar la luz desde el sol a la tierra.

Aleatorio, porque la tierra en determinados meses se acerca al sol y el tiempo ya no podemos saber.

Figura 12. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 1-c.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de situación problema dentro del enfoque del EOS, pues concibe tal situación como caótica, dado que afirma como en determinados meses la tierra se aleja del sol y la distancia ya no es la misma por lo que el tiempo varía y no se puede saber con certeza cuál es ese tiempo. El estudiante también presenta dificultad

en la categoría de concepto, por cuanto evidencia carencia en el dominio de las leyes físicas que rigen en la velocidad de la luz.

A continuación se muestra la respuesta dada por el estudiante Mauricio.

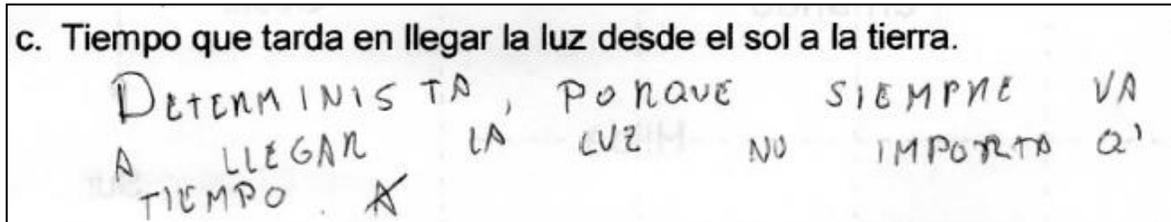


Figura 13. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 1-c.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de argumentos según el EOS, pues aplica una justificación no válida, dado que afirma se trata de una realidad inevitable por la distancia que se encuentra la tierra al sol, remarcando en su respuesta que hay hechos que se tienen que darse como el llegar la luz desde el sol y que ese momento tiene que llegar. También presenta dificultad en la categoría de lenguaje, dado que interpreta el término tiempo como aspecto meteorológico, mas no como duración medido en segundos.

En la figura siguiente se muestra la respuesta dada por el estudiante 3.

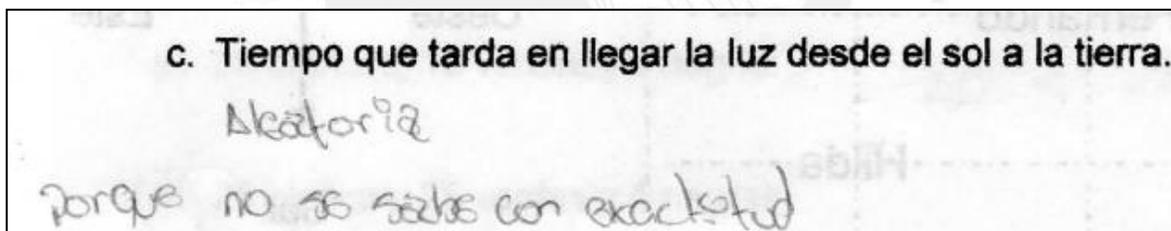


Figura 14. Dificultades registradas por Axel a la situación 1-c.

La respuesta obtenida presenta dificultad en la categoría de concepto según el EOS, pues expresa desconocimiento de las leyes físicas. Ello confirma la dificultad que presenta para comprender una situación de incertidumbre.

d. Un alumno del cuarto grado se presenta como candidato para alcalde en las elecciones municipales escolares y gana las elecciones.

DIFICULTADES ENCONTRADAS.

Los estudiantes presentaron dificultad en la categoría de situación – problema, por cuanto en el contexto se precisa que el estudiante gana las elecciones, lo cual se atribuye a la característica de determinista, es decir el resultado ya es conocido y carece de

incertidumbre dicho resultado. A continuación se muestra las respuestas elaboradas por tres estudiantes.

Respuesta elaborada por Eduardo.

d. Un alumno del cuarto grado se presenta como candidato para alcalde en las elecciones municipales escolares y gana las elecciones.
Determinístico, porque las encuestas lo han determinado así. Y ya sabemos quien ganara y quien no.

Figura 15. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 1-d.

En el análisis dentro de las configuraciones propuestas por el EOS, el alumno presenta dificultad en la categoría de argumento, pues alude como justificación a su respuesta, el hecho de los reportes que se obtienen a través de las encuestas antes de las elecciones, son concluyentes y coincidentes con los resultados.

En la figura se muestra la respuesta dada por Mauricio.

d. Un alumno del cuarto grado se presenta como candidato para alcalde en las elecciones municipales escolares y gana las elecciones.
DETERMINA, PORQUE LA GENTE DECIDE

Figura 16. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 1-d.

El estudiante presenta dificultad en la categoría situación – problema según el EOS, pues el estudiante orienta su respuesta en la decisión de los electores, cuando el contexto está referido al hecho que un candidato gane las elecciones. Debemos precisar que el escenario previo al proceso electoral es situación de incertidumbre en cuanto al resultado a obtener.

En la figura se muestra la respuesta dada por Axel.

d. Un alumno del cuarto grado se presenta como candidato para alcalde en las elecciones municipales escolares y gana las elecciones.
determinista, es un caso realista por que cualquiera puede postular y ganar.

Figura 17. Dificultades registradas por Axel a la situación 1-d.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de situación – problema, pues su respuesta se orienta al contexto de los derechos de los estudiantes a que puedan postular y tener la posibilidad de ganar dichas elecciones.

2. El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Determina el espacio muestral de los siguientes experimentos:

a) Lanzar un dado y obtener un resultado en la cara superior.

DIFICULTADES ENCONTRADAS Este inciso ha sido propuesto desde un contexto cercano para el estudiante, quien está habituado a jugar dados y tiene muy interiorizado las características, específicamente en dados hexaédricos equilibrados. Se pretende verificar si al ser un contexto cercano, los estudiantes explicitan sus conocimientos. Hemos incluido una imagen del dado hexaédrico para evitar ambigüedades.

A continuación presentamos las dificultades registradas por tres estudiantes.

Respuesta elaborada por Eduardo.

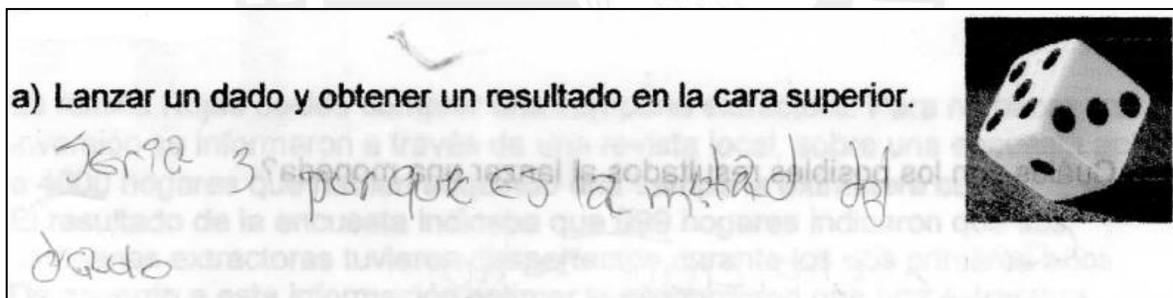


Figura 18. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 2-a.

El estudiante evidencia dificultad en la categoría de concepto del significado de espacio muestral, pues posiblemente emplea la naturaleza del juego de la monedas “cara y sello” (expresando el valor medio) al juego de los dados.

En la figura se muestra la respuesta dada por Mauricio.

a) Lanzar un dado y obtener un resultado en la cara superior.
1 de 6. Porque son seis caras y solo se pide la cara superior.



Figura 19. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 2-a.

El estudiante evidencia dificultad en la categoría de concepto de espacio muestral, pues interpreta el enunciado, como el hecho de establecer la probabilidad de obtener un valor específico en la cara superior considerando los seis números existentes.

En la figura se muestra la respuesta dada por el estudiante Axel.

a) Lanzar un dado y obtener un resultado en la cara superior.
UN SEXTO, PORQUE ES UNO DE SEIS.



Figura 20. Dificultades registradas por Axel a la situación 2-a.

El estudiante evidencia dificultad en la categoría de concepto de espacio muestral confundiendo con otro concepto de probabilidad. Se observa que en su justificación emplea el equivalente de la respuesta.

b) Número de alumnos del 4to "A" que aprobaron el examen de matemática si son 35 alumnos.

Los estudiantes rinden exámenes permanentemente en cada una de los cursos, por lo que la obtención de los resultados a nivel de sección es comentada por ellos. Hemos decidido proponer el caso del curso de matemática, por ser el curso en el cual se aplicó la prueba diagnóstica.

A continuación se presenta las respuestas construidas por tres estudiantes.

En la figura se muestra la respuesta dada por Axel.

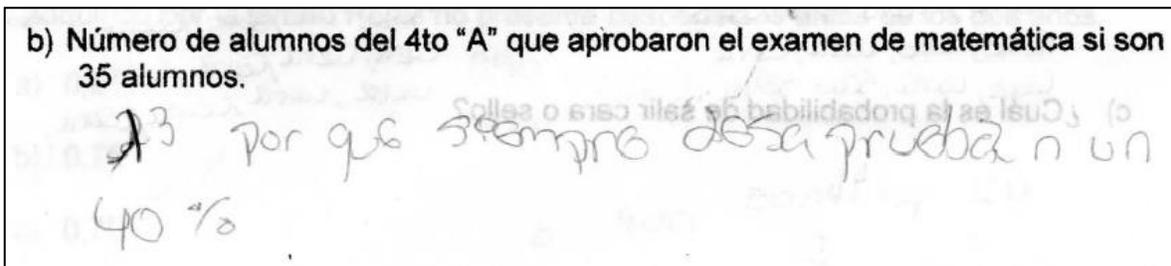


Figura 21. Dificultades registradas por Axel a la situación 2-b.

El estudiante muestra dificultad en la categoría de concepto según el EOS. Concibe la situación como determinista, basándose en la información del reporte académico del porcentaje de estudiantes aprobados y desaprobados, que fue previamente informado a todos los estudiantes.

Respuesta elaborada por Eduardo.

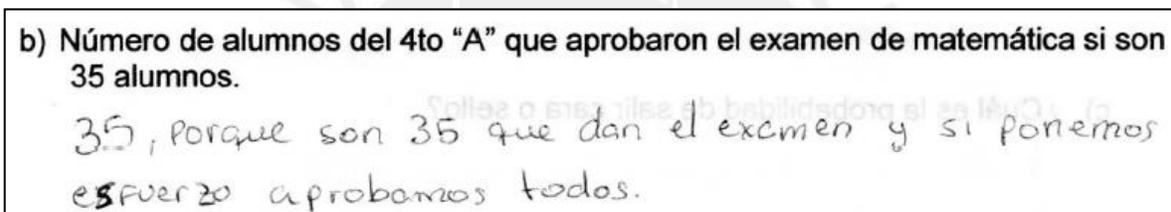


Figura 22. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 2-b.

El estudiante muestra dificultad en la categoría de concepto de espacio muestral según el EOS. Cabe mencionar que dicha sección ha obtenido el más alto puntaje en rendimiento académico, no existiendo desaprobados en el área de matemática, lo cual el estudiante asume como determinista descartando el hecho que existan desaprobados.

Respuesta elaborada por Mauricio.

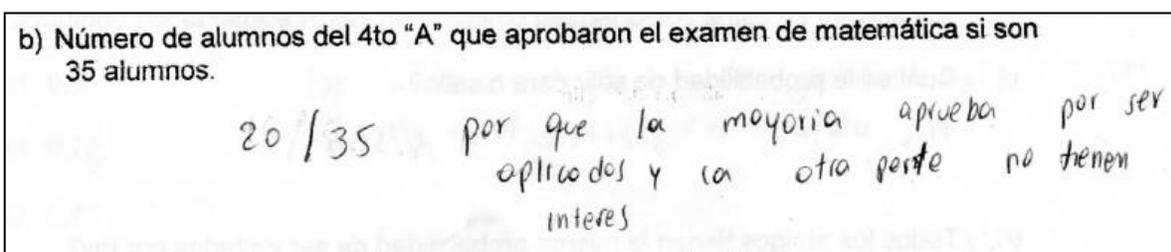


Figura 23. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 2-b.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de concepto según el EOS, pues argumenta su respuesta, a partir de la experiencia que ha tenido sobre los resultados obtenidos por el

salón, en donde la cantidad de aprobados es mayor que los desaprobados en el área de matemática.

c) Tiempo que te demoras de tu casa al colegio.

Los estudiantes se trasladan diariamente desde su casa al colegio, siendo una situación cotidiana, esta distancia no es uniforme, así como los medios de transporte, por lo que las respuestas están en función a sus vivencias.

Respuesta elaborada por Mauricio.

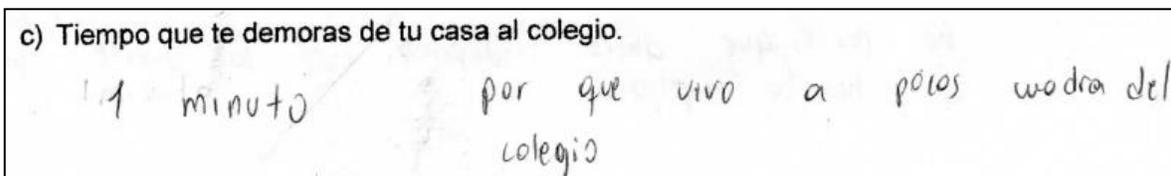


Figura 24. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 2-c.

El estudiante muestra dificultad en la categoría de situación - problema según el EOS, en lo que respecta a espacio muestral donde le permita mostrar todos los posibles escenarios a ocurrir. El estudiante vive muy cerca del colegio por lo que consideró la inexistencia de situaciones que podría modificar el tiempo de llegada al colegio.

Respuesta elaborada por Axel.

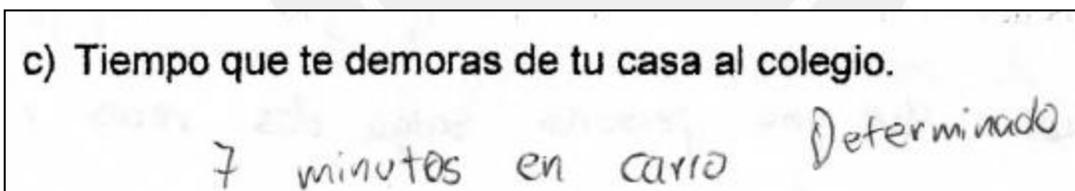


Figura 25. Dificultades registradas por Axel a la situación 2-c.

El estudiante muestra dificultad en la categoría de concepto según el EOS en lo que respecta al conocimiento de espacio muestral, pues asume como una situación determinada, basándose en el hecho de que al trasladarse en un carro, está exento de factores de incertidumbre.

Respuesta elaborada por Eduardo.

c) Tiempo que te demoras de tu casa al colegio.

20 minutos, porque es el tiempo que me demoro todos los días.

Figura 26. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 2-c.

El estudiante muestra dificultad en la categoría de concepto de espacio muestral según el EOS. Concibe la situación como determinada a la rutina de traslado diario. No considera la existencia de factores que pudiesen variar el tiempo que ha registrado.

3. **Iby y sus amigos viven en un mismo barrio. La distancia de la casa de Iby a la casa de Kira, Jorge, Fernando, Hilda y Oscar es de cuatro cuadras a cada uno de ellos (conforme muestra la figura). Iby acostumbraba visitar a sus amigos durante los días de la semana de lunes a viernes (un día a cada uno de ellos), por ejemplo el lunes visitaba a Kira, el martes a Jorge, el miércoles a Fernando, el jueves a Hilda y el viernes a Oscar.**

Para hacer más emocionante las visitas decide realizarlo mediante un sorteo diario, lanzando una moneda, con la condición que si sale cara avanzaría una cuadra al norte y si sale sello avanzaría una cuadra al este. Cada jugada representa una cuadra, por lo que tiene que lanzar 4 veces para determinar a quién va visitar. (Cabe aclarar que esta estrategia de elección apertura la posibilidad que visite al mismo amigo más de un día a la semana)

Este ítem presenta cuatro situaciones, orientados a verificar el dominio de los estudiantes relativo a los conceptos de cálculo de probabilidades partiendo de la determinación de una situación de incertidumbre.

- a) ¿Cuál es la diferencia entre la antigua forma de Iby de visitar a sus amigos y la nueva modalidad?

DIFICULTADES ENCONTRADAS.

Se presenta una situación muy cercana a los estudiantes, quienes permanentemente recurren a las monedas para determinar el inicio de alguna actividad, como por ejemplo cuando pretenden determinar cuál de los equipos de fútbol inicia el partido, en el caso que dos equipos decidan confrontar.

Respuesta elaborada por Axel.

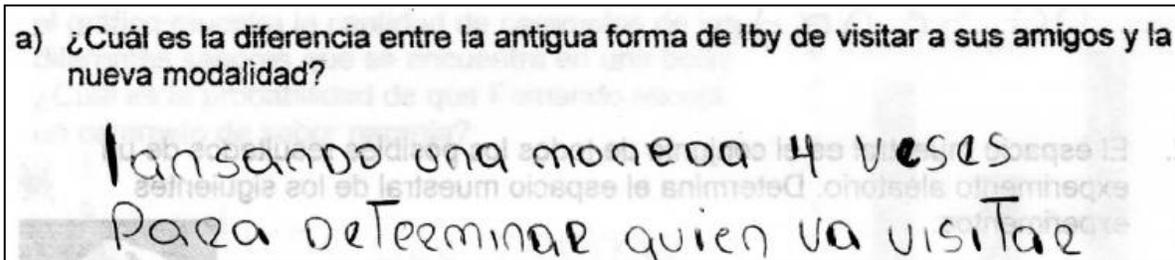


Figura 27. Dificultades registradas por Axel a la situación 3-a.

El estudiante presenta según el EOS, dificultad en la categoría de situación – problema, pues no precisa la diferencia entre dos situaciones de naturaleza distinta, como es la de incertidumbre y la determinista.

Respuesta elaborada por Eduardo.

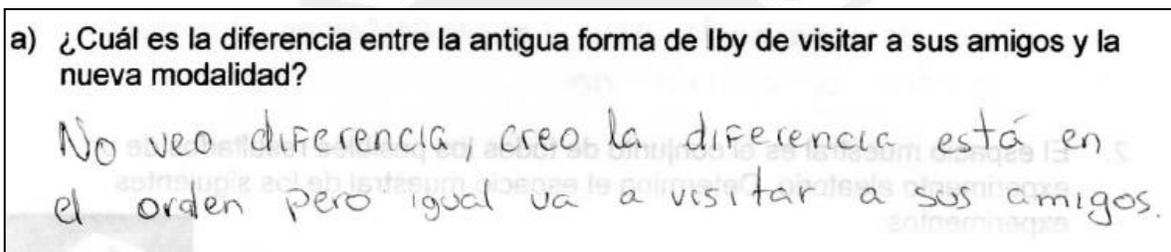


Figura 28. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 3-a.

El estudiante muestra dificultad en la categoría de situación – problema según el EOS, pues si bien alude que en la segunda forma no existe un orden preestablecido como en la primera forma de visita, considera como resultado final el mismo, manifestando que al final de la semana visita a todos solo que en diferente orden.

b) ¿Cuáles son los posibles resultados al lanzar una moneda?

DIFICULTADES ENCONTRADAS. Al igual que el inciso anterior, el objeto tangible utilizado para determinar el espacio muestral es la moneda, objeto que es de amplio conocimiento de los estudiantes.

Respuesta elaborada por Eduardo.

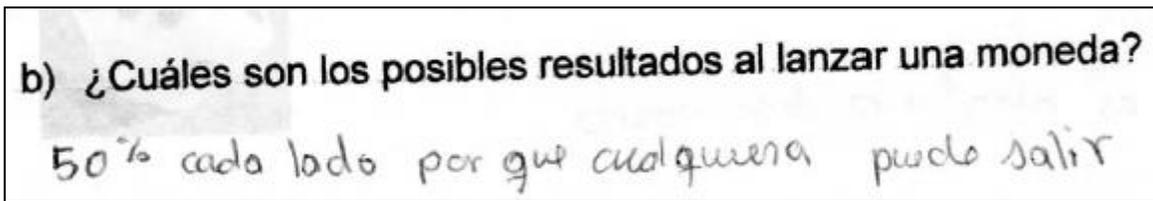


Figura 29. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 3-b.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de concepto según el EOS, al establecer el espacio muestral, realiza una confusión entre probabilidad de un evento simple con espacio muestral en sí.

Respuesta elaborada por Axel.

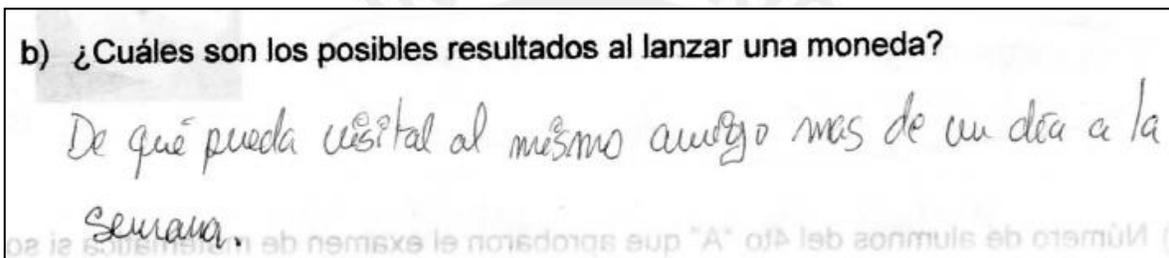


Figura 30. Dificultades registradas por Axel a la situación 3-b.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de situación – problema según el EOS, pues concibe el escenario como la acción que corresponde al resultado que se obtenga al lanzar la moneda.

Respuesta elaborada por Mauricio.

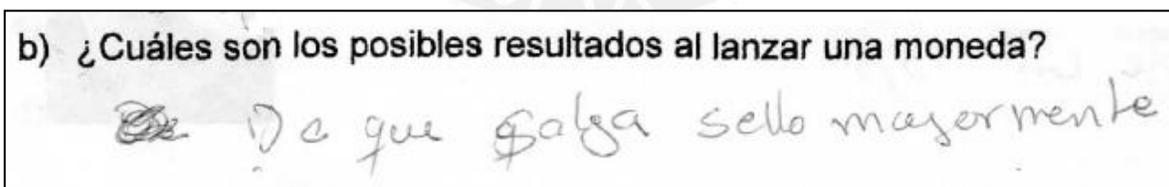


Figura 31. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 3-b.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de concepto según el EOS, pues expresa una concepción sesgada de probabilidad de un evento. Evidencia una tendencia en muchos jóvenes que consideran que el sello es el resultado más frecuente.

c) ¿Cuál es la probabilidad de salir cara o sello?

Los estudiantes suelen emplear monedas con la finalidad de tomar decisiones respecto a una divergencia en la cual no se define el orden respectivo entre dos posibles casos, como el caso del inicio de un partido de fútbol mencionado en el inciso a.

Respuesta elaborada por Axel.

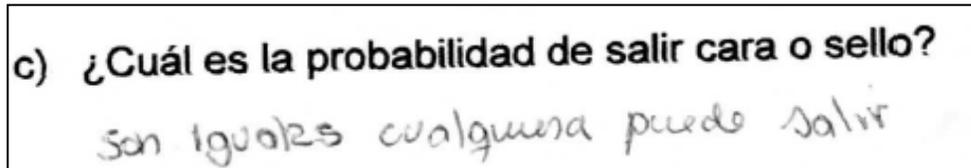


Figura 32. Dificultades registradas por Axel a la situación 3-c.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de lenguaje según el EOS, pues no especifica la notación correspondiente, y así poder aplicar en el cálculo de probabilidad. Si bien se trata de un espacio muestral equiprobable, corresponde indicar la factibilidad de ocurrencia de cada uno de los eventos.

Respuesta elaborada por Eduardo.

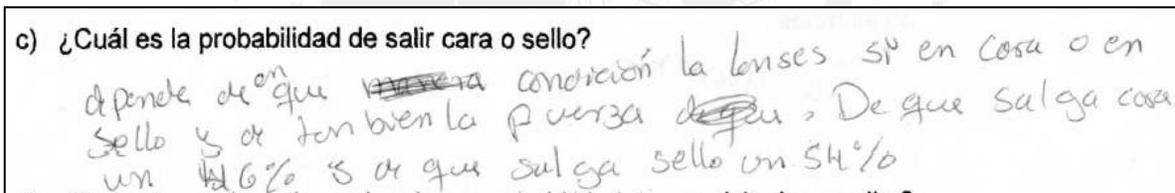


Figura 33. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 3-c.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de concepto según el EOS, en lo que respecta a la probabilidad de ocurrencia de un evento. Alude a una condición subjetiva como es la posición inicial con que se lanza o la fuerza del lanzamiento.

Respuesta elaborada por Mauricio.

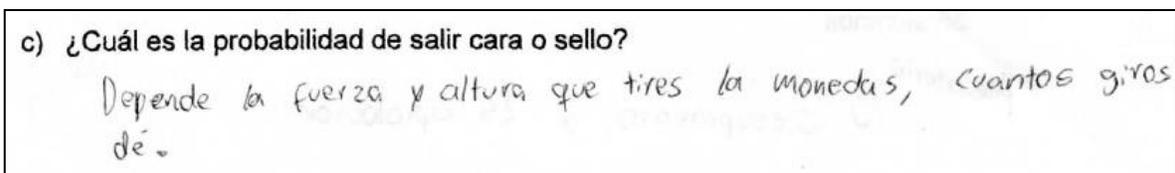


Figura 34. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 3-c.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de lenguaje según el EOS, dado que no precisa la factibilidad de ocurrencia de cada uno de los eventos solicitados. Refiere como

condiciones para obtener un determinado resultado, la fuerza y altura de lanzamiento de la moneda, así como la cantidad de giros que pueda dar.

d) ¿Todos los amigos tienen la misma probabilidad de ser visitados por Iby?

La determinación del ganador se establece en base a los resultados de un evento compuesto.

Respuesta elaborada por Eduardo.

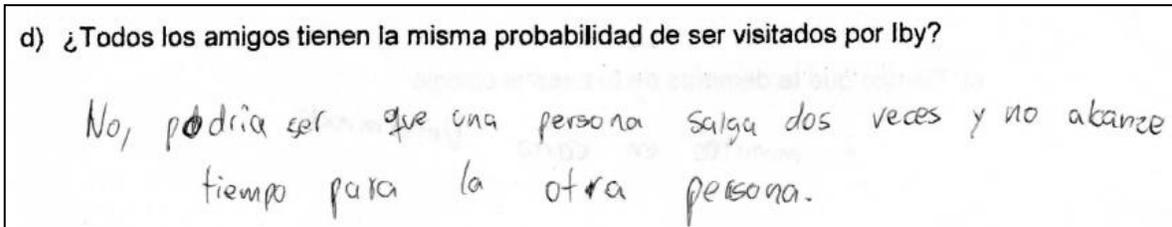


Figura 35. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 3-d.

El estudiante presenta dificultad la categoría de situación – problema según el EOS, pues se trata del cálculo de probabilidad de un evento en un espacio muestral compuesto. El estudiante no precisa cuál de los amigos es el que tiene mayor probabilidad de ser visitado.

Respuesta elaborada por Mauricio.

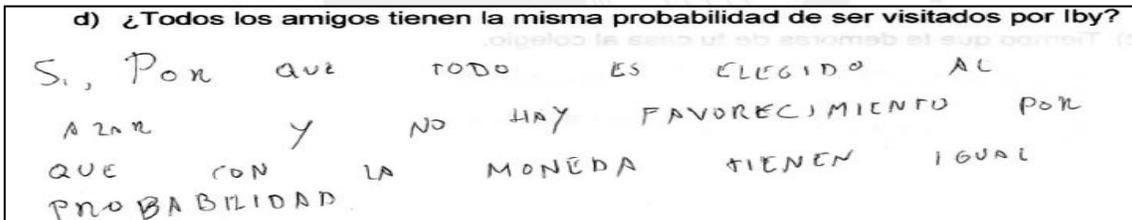


Figura 36. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 3-d.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de situación – problema según el EOS, pues considera como equiprobable la situación justificando que la elección por medio de la moneda garantiza la equiprobabilidad de la situación.

Respuesta elaborada por Axel.

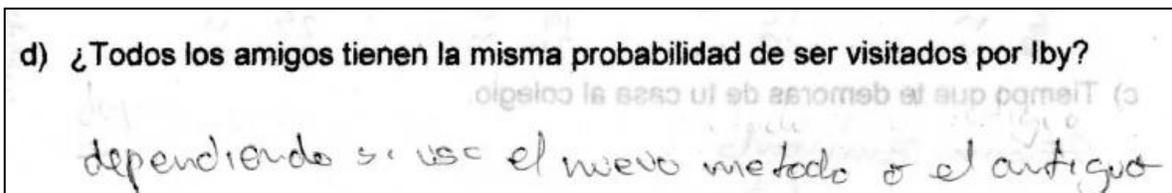


Figura 37. Dificultades registradas por Axel a la situación 3-d.

El estudiante muestra dificultad en la categoría de situación problema según el EOS, pues se trata de un escenario de cálculo de probabilidad en eventos compuestos. Esto se evidencia en su respuesta, pues al referir si depende de que método se emplea, admite la posibilidad que mediante uno de ellos existe la probabilidad de que todos tengan la misma probabilidad de ser visitados, lo cual no ocurre, por cuanto por la primera forma no existe probabilidad por ser una situación determinista y la segunda se trata de eventos compuestos no equiprobables.

- 4. Una pareja ha planificado tener tres hijos. Suponemos que en cada parto tiene igual probabilidad de tener un hijo varón o mujer. ¿Cuál es la probabilidad que tengan dos hijos varones y una mujer?**
- a) 3
 - b) 1
 - c) 1/3
 - d) 3/8

En este ítem asumimos que cada parto tiene igual probabilidad de nacimiento respecto al sexo, se pretende verificar el dominio que poseen los estudiantes respecto al cálculo de probabilidad de un evento compuesto.

A continuación se presenta las respuestas registradas por tres estudiantes.

Respuesta elaborada por Mauricio.

4. Una pareja ha planificado tener tres hijos. Suponemos que en cada parto tiene igual probabilidad de tener un hijo varón o mujer. ¿Cuál es la probabilidad que tengan dos hijos varones y una mujer?

a) 3	Por que pueden todos
b) 1	SUS HIJOS VARONES 0
<input checked="" type="checkbox"/> c) 1/3	TODAS MUJERES 0 COMBINADO.
d) 3/8	

Figura 38. Dificultades registradas por Mauricio a la situación 4.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de procedimientos según el EOS, para determinar el espacio muestral de la situación. Se observa que considera tres eventos equiprobables como el espacio muestral y a partir de allí asume la probabilidad del evento solicitado.

Respuesta elaborada por Eduardo.

4. Una pareja ha planificado tener tres hijos. Suponemos que en cada parto tiene igual probabilidad de tener un hijo varón o mujer. ¿Cuál es la probabilidad que tengan dos hijos varones y una mujer?

a) 3

b) 1

c) 1/3

d) 3/8

V V M
V M V
M V V

Solo uno de ellos ocurre.

Figura 39. Dificultades registradas por Eduardo a la situación 4.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de procedimiento según el EOS para la identificación del espacio muestral. Considera como espacio muestral únicamente tres eventos que cumplen con lo solicitado y asume como factible la ocurrencia de uno de ellos.

Respuesta elaborada por Axel.

4. Una pareja ha planificado tener tres hijos. Suponemos que en cada parto tiene igual probabilidad de tener un hijo varón o mujer. ¿Cuál es la probabilidad que tengan dos hijos varones y una mujer?

a) 3

b) 1

c) 1/3

d) 3/8

Porqué es una probabilidad por cada 3 hijos.

Figura 40. Dificultades registradas por Axel a la situación 4.

El estudiante presenta dificultad en la categoría de situación – problema según el EOS, pues manifiesta el hecho de ser igual probable el nacimiento de un hijo varón o mujer en cada uno de los tres partos.

4.3.5 Síntesis de las dificultades presentadas en la prueba diagnóstica.

La prueba diagnóstica nos ha permitido corroborar la presencia de dificultades que presentan los estudiantes en la movilización de los saberes previos. A continuación sintetizamos dichas dificultades:

Dificultad A. El EOS, considera seis categorías que permite realizar el análisis de las dificultades presentadas por los estudiantes. Los estudiantes, presentan dificultad para determinar si una situación presenta la característica de incertidumbre en las categorías de concepto, situación – problema, lenguaje y argumento. Al respecto, Serradó, Cardeñoso y Ascárate (2006) señalan que: “Existe una comprensión inadecuada de las situaciones de incertidumbre en relación con el significado de causa-efecto”, es decir del hecho de predecir a priori el resultado de una situación.

Proponemos:

Presentar a los estudiantes situaciones que les invite a reflexionar respecto a la posibilidad de obtener un resultado no necesariamente fijado previamente, es decir que presente la característica de situación no determinista, en la que los alumnos puedan superar la dificultad según las categorías indicadas.

Dificultad B. Según el EOS, los estudiantes presentan dificultad de determinar el espacio muestral en una situación de incertidumbre en las categorías de procedimiento, concepto y situación - problema. Al respecto Serradó, et al (2006), mencionan que para facilitar la comprensión del concepto en mención, se recurre “[...] al estudio de generadores aleatorios simples como ruletas, urnas, dados, barajas o monedas que facilitan determinar los elementos del espacio muestral, pero se pueden configurar como un obstáculo para la posterior determinación y generalización del significado de espacio muestral a contextos cotidianos

Proponemos

Presentar escenarios que tengan la característica de ser contextualizada y les permita reflexionar sobre la posibilidad de obtener diversos resultados los cuales no necesariamente tienen la misma chance de ocurrir respecto a los otras posibilidades existentes en la situación, teniendo en consideración las categorías propuestas en el EOS.

Dificultad C. Según el EOS, los estudiantes presentan dificultad al realizar cálculos de probabilidades en situaciones de incertidumbre, considerando las categorías de concepto, lenguaje y procedimientos. Al respecto Barragués y Guisasola (2009) sostienen que los estudiantes presentan dificultad cuando “[...] asumen de manera irreflexiva la equiprobabilidad de todos los sucesos elementales asociados a un experimento aleatorio [...]” (p. 28). Además Serradó, et al (2006) afirman que “la subjetividad asociada a la determinación de la simetría o equidad del azar puede ser un obstáculo para la determinación si dos sucesos son equiprobables. Es más dicha subjetividad favorece la aparición del llamado sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre y Duran, 1998), en el que los sujetos consideran los posibles resultados de cualquier fenómeno equiprobables porque son materia del azar” (p. 66)

Proponemos

Actividades de su entorno en la que los estudiantes tengan la posibilidad de analizar situaciones de incertidumbre y establecer reflexivamente la probabilidad de ocurrencia de un suceso, considerando las categorías observadas según el EOS. Para ello presentamos situaciones donde los sucesos que conforman el espacio muestral no sea necesariamente de equiprobabilidad y en la que a partir de las discusiones y reflexiones entre sus compañeros y con la intervención del docente del curso puedan identificar las condiciones de equiprobabilidad o no de los sucesos respectivos.

Ante esta situación y debiendo estos conceptos previos ser abordados como manifiesta Batanero (2005) como condiciones necesarias para la comprensión del concepto de

probabilidad condicional, y dado que los estudiantes presentan dificultades en cada uno de estos conceptos previos según las categorías lenguaje, situación – problema, procedimientos, conceptos y argumentos propuestos por el EOS, y además, conscientes que esta comprensión es un proceso continuo por el cual los estudiantes construyen y relacionan en forma progresiva los diferentes elementos que involucra cada concepto, hemos considerado necesario desarrollar una secuencia de actividades orientadas a superar estas dificultades, las cuales han sido evaluadas al finalizar dicha secuencia mediante una prueba de salida, según las categorías propuestas.

En este capítulo se ha presentado la determinación de las dificultades que presentan los estudiantes en la movilización de los conceptos previos requeridos a probabilidad condicional, así como las dificultades presentadas en la prueba diagnóstica. A continuación, en el siguiente capítulo presentaremos una propuesta de secuencia de actividades que permita movilizar los conocimientos previos requeridos al tratamiento de probabilidad condicional, así como la descripción de los resultados obtenidos en la prueba de salida.



CAPÍTULO 5. SECUENCIA DE ACTIVIDADES APLICADAS Y DESCRIPCIÓN DE RESULTADOS

En el presente capítulo presentamos nuestra propuesta de una secuencia de actividades, las cuales son implementadas con una dinámica de trabajo colaborativo en pares y están orientados a movilizar los conocimientos previos requeridos al tratamiento de probabilidad condicional en estudiantes del cuarto grado de secundaria cuyas edades oscilan entre 15 y 16 años, y pertenecen a una institución educativa pública del Callao, teniendo como referencia las dificultades corroboradas a través de la aplicación de la prueba diagnóstica descrita en el capítulo anterior. Así mismo realizaremos el análisis de los logros alcanzados en la secuencia de actividades a través de la aplicación de una prueba de salida a cada uno de los estudiantes participantes del presente proceso de experimentación.

A continuación realizamos una explicación de cada uno de las actividades implementadas.

SECUENCIA DE ACTIVIDADES EN TORNO A LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS A LA PROBABILIDAD CONDICIONAL.

La secuencia de actividades ha sido diseñada en base a los resultados de la prueba diagnóstica. Esta secuencia está orientada a implementar una serie de actividades con la finalidad de intentar superar las dificultades halladas en la prueba diagnóstica. A continuación realizaremos la descripción respectiva de esta secuencia.

Primero, presentamos los criterios considerados para su elaboración y los objetivos que se pretende alcanzar con dicha secuencia de actividades.

Segundo, realizamos una descripción de cada uno de los instrumentos que conforman la secuencia de actividades, y que corresponden a las diferentes actividades ejecutadas en dicha secuencia. Aquí hemos considerado presentar las respuestas esperadas de cada uno de las situaciones presentada.

Tercero, presentamos las características de la aplicación en sí de la secuencia de actividades.

5.1 DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES.

La información recogida acerca de las características de los estudiantes y descritas en el capítulo 4, refiere uniformidad en cuanto a su formación académica, el cual es el resultado de la movilización de conocimientos de una propuesta implementada por el sistema escolar, característica significativa para realizar el análisis de los conocimientos requeridos.

Los textos empleados por los estudiantes de esta institución educativa son prioritariamente los proporcionados por el Ministerio de Educación, los cuales son distribuidos a cada uno de los estudiantes al inicio del año escolar, y cuyas limitaciones se ha mencionado en el capítulo 3 del presente trabajo.

En cuanto al curso de Matemática, correspondiente al cuarto grado de secundaria de Educación Básica Regular, comprende el componente de estadística y probabilidad, el cual en la institución educativa donde se realiza el presente trabajo de investigación ha sido programado en el cuarto bimestre, por lo que las actividades propuestas fueron implementadas en dicho bimestre.

5.2. IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES.

La secuencia de actividades se ha desarrollado en tres sesiones.. Las dudas y consultas realizadas por los estudiantes respecto a las actividades, fueron orientadas por el investigador quien monitoreó cada una de dichas actividades, estas orientaciones se caracterizaron por presentar escenarios distintos pero que pretendía el desarrollo del pensamiento considerando las situaciones aleatorias.

Las actividades que se implementó en cada una de las sesiones han sido de naturaleza colaborativa entre pares de estudiantes, entendiendo que el diálogo y la discusión reflexiva entre ellos aunado a las orientaciones del investigador, permitió la concreción de dicha naturaleza colaborativa durante las sesiones implementadas

A continuación presentamos las tres actividades implementadas en la secuencia:

Actividad 1. Actividad colaborativa para el desarrollo de conceptos previos a probabilidad condicional: incertidumbre, espacio muestral, posibilidad. Esta actividad se realiza en la segunda sesión.

Actividad 2. Actividad colaborativa para el desarrollo de los conceptos de cálculo de probabilidad de suceso simple y compuesto. Esta actividad se realiza en la tercera sesión.

Actividad 3. Actividad colaborativa para aplicar los conceptos de probabilidad clásica. Esta actividad se realiza en la cuarta sesión.

El tiempo empleado en cada una de las actividades fue de 40 minutos.

5.3. INSTRUMENTOS QUE CONFORMAN LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES.

Los instrumentos empleados en la secuencia de actividades fueron diseñados considerando los resultados de la prueba diagnóstica tratados en el capítulo anterior, y están orientados a superar las dificultades establecidas como resultado de la prueba diagnóstica. Cada instrumento fue aplicado en cada una de las tres actividades que conforma la secuencia.

Los instrumentos son:

INSTRUMENTO A. Constituido por tres ítems de trabajo, donde mediante actividades colaborativas (por parejas de estudiantes) y con el apoyo del investigador se tratará las dificultades relativos a los conceptos previos a probabilidad: incertidumbre, espacio muestral, posibilidad.

INSTRUMENTO B. Actividad colaborativa en contextos cotidianos donde se tratará las dificultades relativo al concepto de probabilidad y de equiprobabilidad de suceso simple y compuesto.

INSTRUMENTO C. Actividad colaborativa en parejas que se tratará las dificultades relativo a la aplicación del conocimiento de probabilidad clásica en contextos.

5.3.1 Diseño del instrumento A para la movilización de los conocimientos previos relativos a situaciones de incertidumbre, posibilidad, espacio muestral, probabilidad.

El diseño de este instrumento pretende tratar las dificultades relativo a los conocimientos previos de probabilidad condicional. Se realizó teniendo en consideración los descriptores detallados en la tabla 4.

Tabla 5. Descriptores para el análisis de idoneidad cognitiva de los conocimientos previos

Descriptor
<p>Valorar si los alumnos demuestran apropiación:</p> <p>Las respuestas dadas por los alumnos son cercanas a las esperadas a través de situaciones que permitan movilizar estos conocimientos en situaciones de contexto.</p>
<p>Significados pretendidos:</p> <p>Situación de incertidumbre, Situación determinista, Posibilidad, Espacio muestral, Suceso o evento, Probabilidad.</p>

Esta actividad se realiza en parejas, permitiendo a los estudiantes discutir las situaciones propuestas y serán asistidos por el investigador.

Los objetivos que pretende el diseño de este instrumento son:

- a) Reconocer y establecer diferencias entre una situación de incertidumbre y una situación que no es de incertidumbre.
- b) Determinar los elementos del espacio muestral de una situación de incertidumbre, teniendo en cuenta las características de dicha situación.
- c) Determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio equiprobable.
- d) Determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio no equiprobable.

A continuación presentamos las situaciones planteadas a los estudiantes, así como las respuestas esperadas a cada una de dichas situaciones. Precisamos que la actividad se orienta a movilizar en los estudiantes los conocimientos requeridos en situaciones cotidianas por lo que consideramos incidir en ser explícitos en el enunciado respecto al concepto de situación de incertidumbre.

1. Se presenta tres situaciones cotidianas, determinen cuáles de ellas son situaciones de incertidumbre (es decir no sabemos el resultados exacto antes de que la situación ocurra) y cuáles no son situaciones de incertidumbre. Justifiquen adecuadamente sus respuestas.

a) **Cantidad de estudiantes que asisten al aula el día de hoy.**

RESPUESTA ESPERADA: Es una situación de incertidumbre. Entre las justificaciones podríamos esperar que los estudiantes sostengan que se trata de decisiones propias de cada uno de los estudiantes si asisten o no, por lo que determinación de la cantidad de estudiantes que asistirán solo será posible ser conocido el momento que se encuentren en el aula.

b) **Nota a obtener en un examen de matemática.**

RESPUESTA ESPERADA: Es una situación de incertidumbre. Entre las justificaciones a sostener se espera que afirmen que no saben la complejidad del examen puesto que desconocen las preguntas en concreto a ser aplicados o la certeza de las respuestas que obtengan.

c) **Ropa que me pondré para asistir al colegio.**

RESPUESTA ESPERADA: Es una situación de no incertidumbre. Las justificaciones que esperamos consideren son: se trata de una decisión previa, cada estudiante realiza una elección de la ropa que se va poner, otra justificación es que en el colegio existe normas, las cuales indican que el alumno asiste con el uniforme de educación física en caso tenga el curso de educación física y el los demás días con el uniforme único escolar.

2. **El área de Educación Física organiza un campeonato de fútbol escolar intersecciones a nivel interno, dividido en dos categorías: Inferior (conformado por los estudiantes del primero, segundo y tercer grado) y Superior (conformado por los estudiantes del cuarto y quinto grado). En cada categoría se va premiar al equipo con mayor puntaje. Respondan las siguientes interrogantes, justificando adecuadamente sus respuestas.**

a. **¿Será posible que el premio de la categoría superior lo obtenga una sección A?**

RESPUESTA ESPERADA: Se espera que la respuesta que obtengamos de los estudiantes sea: Si es posible que una sección A gane el campeonato en la categoría superior, por cuanto entre los equipos participantes en la categoría superior se encuentra la sección del cuarto grado A y también la sección del quinto grado A,

por lo que es posible que uno de ellos obtenga el premio al igual que cada una de las demás secciones participantes en dicha categoría. Otra justificación que se espera es: todos los equipos que participan en la categoría superior tienen posibilidad de ganar el premio, y estando participando el cuarto A así como el quinto A, es posible que también uno de ellos gane el premio por lo que una sección A puede ganar el premio.

- b. **¿Será posible que un equipo que participe con cuatro jugadores gane el premio?**

RESPUESTA ESPERADA: Si es posible, cabe aclarar que es convencional que sean seis la cantidad de jugadores que participan por cada equipo en este tipo de campeonatos y este hecho es conocido por los estudiantes del colegio; entre las justificaciones se espera consideren es: Todos los equipos participantes tienen posibilidad de ganar y si un equipo con cuatro jugadores está participando entonces también es posible que gane el premio. Otra respuesta esperada es si las bases del campeonato permiten que un equipo pueda participar con cuatro jugadores, entonces la situación propuesta es posible.

- c. **¿Consideras que es posible que el equipo premiado en la categoría superior sea la sección del tercero “F”?**

RESPUESTA ESPERADA: No es posible, y la justificación es que el equipo premiado en la categoría superior tiene necesariamente que pertenecer al cuarto grado o al quinto grado, por lo que la sección del tercero “F” no pertenece a ninguno de los dos grados. Otra justificación es afirmar que el tercero “F” no pertenece al conjunto conformado por las secciones que pueden ganar el premio, es decir no es un elemento del espacio muestral.

3. **El Comité de aula ha programado realizar una rifa interna de una mochila con la participación exclusiva de los estudiantes del salón. Cada alumno recibe un ticket.**
- a. **Si los tickets no son transferibles, determina el conjunto de los posibles ganadores.**

RESPUESTA ESPERADA: La respuesta esperada puede ser determinada por extensión en la cual se tendría que mencionar a cada uno de los estudiantes pertenecientes al salón (en este caso se trata del cuarto grado “G”), es decir:

El conjunto de los posibles ganadores es: {Flavio, Mauricio, Fernando,}

Otra forma de determinar dicho conjunto es por comprensión, en este caso es: El conjunto de los posibles ganadores es todos los estudiantes del salón o cada uno de los estudiantes del salón.

b. **Bajo las condiciones dadas, ¿consideras que todos tienen la misma oportunidad de ganar el sorteo?**

En esta propuesta buscamos la comprensión del concepto de equiprobabilidad en una situación que es cotidiana a los jóvenes estudiantes, cabe precisar que el término oportunidad se está empleando como un equivalente de probabilidad y orientando a diferenciar del concepto de posibilidad.

RESPUESTA ESPERADA: La respuesta esperada es si, debido a que cada uno de los participantes poseen un ticket con la misma probabilidad de salir elegido.

c. **Supongamos que algunos estudiantes vendieron sus tickets a sus compañeros dentro del salón.**

En este escenario estamos variando las condiciones respecto al caso a. con el objetivo de analizar la situación desde las nuevas restricciones propuestas.

i. **Determina el conjunto de los posibles ganadores.**

RESPUESTA ESPERADA: Esperamos que la respuesta asumida por los estudiantes sea dada por comprensión. (Dado que no mencionamos qué estudiantes en concreto han vendido sus tickets ni quiénes son los que compraron así como la cantidad de tickets que compraron). En todo caso la respuesta esperada es: El conjunto de los posibles ganadores está conformado únicamente por los estudiantes que poseen al menos un ticket.

ii. **¿Todos los estudiantes del salón tienen la misma oportunidad de ganar el sorteo?**

RESPUESTA ESPERADA: La respuesta correcta es no, y entre las justificaciones esperadas son: Porque los que vendieron sus tickets no tienen ninguna oportunidad de ganar y quienes compraron los tickets tienen más oportunidad de ganar incluso de quienes no ganaron ni vendieron.

Quizá una situación adicional a plantearse a los estudiantes hubiese sido: ¿Todos los estudiantes que poseen ticket tienen la misma oportunidad de ganar el sorteo?. Esta situación consideramos que hubiese servido al afianzamiento del concepto de equiprobabilidad y su aplicación en situaciones del entorno de los estudiantes.

5.3.2 Diseño del instrumento B para la movilización de los conocimientos relativos a probabilidad

El diseño de este instrumento pretende tratar las dificultades respecto a los conocimientos básicos referidos a espacios muestrales, suceso o evento y probabilidad que fueron determinadas en la prueba diagnóstica. Se realizó teniendo en consideración los descriptores detallados en la tabla 5.

Tabla 6. Descriptores para el análisis de idoneidad cognitiva del tratamiento de los conocimientos previos

Descriptor
<p>Valorar si los alumnos demuestran apropiación:</p> <p>Las respuestas dadas por los alumnos son cercanas a las esperadas a través de situaciones que permitan movilizar estos conocimientos en situaciones de contexto.</p>
<p>Significados pretendidos:</p> <p>Espacio Muestral, Suceso o evento, Probabilidad</p>

Este instrumento implementado en la sesión 3, al igual que el anterior, también será desarrollado por los estudiantes en parejas.

Esta actividad se inicia presentando los conocimientos a ser empleados y que se encuentran en la hoja de trabajo proporcionado a los estudiantes.

A continuación se muestra las situaciones diseñadas en el instrumento, así como un comentario de cada situación y las respuestas esperadas.

Dado una situación de incertidumbre, se denomina posibilidad a cada uno de los eventos simples que conforma dicha situación.

En tanto probabilidad es la valoración de la factibilidad de la ocurrencia de la posibilidad o posibilidades que conforma una situación de incertidumbre.

En situaciones de incertidumbre donde cada una de las posibilidades tiene la misma factibilidad de ocurrir, se denomina espacios equiprobables.

Las situaciones propuestas, así como las respuestas esperadas se detallan a continuación:

1. **El área de Educación Física organiza un campeonato de fútbol escolar intersecciones a nivel interno, dividido en dos categorías: Inferior (conformado por los estudiantes del primero, segundo y tercer grado) y Superior (conformado por los estudiantes del cuarto y quinto grado). El partido inaugural lo realizarán dos secciones del turno tarde que conforman la categoría superior y serán elegidos por sorteo.**

COMENTARIO: Los estudiantes pueden interpretar como una repetición de la actividad realizada en la sesión anterior, por lo que se considera pertinente indicarles tuvieron la concentración necesaria para encarar la situación proporcionada.

a. **Determina el conjunto de posibilidades que conforman el partido inaugural.**

COMENTARIO: Esta es una situación de contexto y muy particular de la institución educativa donde se aplicó el instrumento, pues se trata de un colegio muy arraigado a la práctica del fútbol, el cual es practicado por casi la totalidad de estudiantes varones, y como en el turno tarde la totalidad de estudiantes son varones, permitió capturar la atención de ellos. En esta institución educativa ocurre que el cuarto grado comprende las secciones desde el cuarto A hasta el cuarto H en orden alfabético, funcionando en el turno mañana hasta la sección cuarto D, en tanto que en la tarde funciona desde la sección cuarto E, por lo que en cuarto grado funciona en el turno tarde cuatro secciones. En el quinto grado existe desde la sección quinto A hasta el quinto F, y en la mañana funciona hasta la sección quinto C, en tanto que en la tarde funciona desde el quinto D, por lo que en quinto grado funciona en el turno tarde tres secciones.

RESPUESTA ESPERADA. Con esta descripción de la particularidad que presenta la institución educativa y teniendo las restricciones que indica el caso la respuesta nos lleva a realizar una combinatoria de siete elementos tomados de dos en dos, el cual nos genera 21 combinaciones, que son las 21 posibilidades, es decir: El conjunto de posibilidades que conforma el partido inaugural está formado por $\{ (4\text{toE} - 4\text{toF}), (4\text{toE} - 4\text{toG}), (4\text{toE}-4\text{toH}), (4\text{toE}-5\text{toD}), \dots(5\text{toE}-5\text{toF}) \}$

- b. **Estima la probabilidad que el partido inaugural ocurra entre 4G y 4F.**

COMENTARIO: Tratándose de una elección a través de un sorteo, cada uno de los equipos tiene igual probabilidad de ser elegido en para el partido original, o lo que es equivalente, cada una de las posibilidades encontradas en la actividad anterior tiene igual probabilidad, y siendo 21 posibles resultados en el sorteo con la condición de equiprobabilidad.

RESPUESTA ESPERADA.

$$\text{Probabilidad (partido inaugural jueguen } 4G - 4F) = \frac{1}{21}$$

- c. **Estima la probabilidad que el partido inaugural ocurra entre dos equipos del 4to grado.**

COMENTARIO: Sabemos que la cantidad de equipos participantes del cuarto grado en el turno tarde son cuatro, pues aunque no se menciona en las indicaciones, se especificó de manera verbal que cada sección presenta un equipo, por lo que la cantidad de posibilidades para el partido entre dos equipos del cuarto grado es una combinación de cuatro elementos tomados de dos en dos, es decir seis posibles resultados (los estudiantes pueden emplear la información de la actividad anterior para determinar este resultado).

RESPUESTA ESPERADA.

$$\text{Probabilidad (partido inaugural jueguen dos equipos del 4to grado)} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

- d. **Estima la probabilidad que el partido inaugural se dé entre dos equipos del mismo grado.**

COMENTARIO. En esta situación los estudiantes para determinar los casos favorables deben encontrar la suma de la cantidad de posibilidades que el partido ocurra entre dos equipos del cuarto grado con la cantidad de posibilidades que el partido ocurra entre dos equipos del quinto grado, es decir la suma de la cantidad de combinaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos con la cantidad de combinaciones de tres elementos tomados de dos en dos (recalcando que ello es válido por tratarse de un experimento equiprobable donde cada posibilidad tiene igual probabilidad de ocurrir), por lo que los casos favorables son: $6+3=9$.

RESPUESTA ESPERADA:

Probabilidad (partido inaugural ocurra entre dos equipos del mismo grado) =

$$\frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

5.3.3 Diseño del instrumento C para la movilización del concepto de cálculo de probabilidad de experimentos aleatorios, considerando el espacio muestral y la ocurrencia de un suceso o evento compuesto.

Esta actividad será trabajada en pareja por los estudiantes y está orientado a tratar las dificultades respecto a la determinación del espacio muestral de un experimento aleatorio y la probabilidad de un evento compuesto en un experimento aleatorio. Se realizó teniendo en consideración los descriptores detallados en la tabla 6.

Tabla 7. Descriptores para el análisis de idoneidad cognitiva del tratamiento de los conocimientos previos relativo a espacio muestral, suceso y probabilidad

Descriptor
<p>Valorar si los alumnos demuestran apropiación:</p> <p>Las respuestas dadas por los estudiantes son cercanas a las esperadas a través de situaciones que permitan movilizar los conocimientos en situaciones de contexto.</p>
<p>Significados pretendidos:</p> <p>Espacio Muestral, Suceso o evento compuesto, Cálculo de probabilidad de experimentos aleatorios.</p>

A continuación se presenta las situaciones planteadas a los estudiantes, así como las respuestas esperadas por los estudiantes:

1. En el salón del cuarto grado “A” turno mañana, la profesora de matemática tiene programado la exposición del grupo 6 conformado por los estudiantes: Fernando, Hilda y César, sobre el tema progresiones aritméticas y geométricas. La profesora ha indicado que al iniciar la clase va sortear con papeles numerados quienes van exponer, pues serán solo dos: el primero expondrá sobre progresión aritmética y el segundo sobre progresión geométrica. De acuerdo a la información:

COMENTARIO. En la institución educativa donde se realizó el presente trabajo, es usual en el curso de matemática formar grupos para exponer los diferentes temas que constituyen el curso, si bien es cierto se presenta un escenario del turno mañana, ello fue diseñado con la finalidad de permitir realizar una actividad teniendo en cuenta el criterio del género de los estudiantes, dado que en el turno tarde estudian únicamente varones.

- a) **Verificar el conjunto de los posibles ponentes, considerando los temas de exposición.**

COMENTARIO: La cantidad de elementos que constituye el conjunto solución está dada por variaciones de tres elementos tomados de dos en dos, puesto que el orden de ser elegido si es importante, por cuanto ser elegido en primer orden permitirá exponer un tema distinto a lo que si se es elegido en segundo orden, es decir el conjunto solución estará formado por seis elementos.

RESPUESTA ESPERADA:

Conjunto de los posibles ponentes según tema de exposición: {(Progresión aritmética – Fernando y Progresión geométrica- Hilda), (Progresión aritmética – Fernando y Progresión geométrica- César), (Progresión aritmética – Hilda y Progresión geométrica- Fernando), (Progresión aritmética – Hilda y Progresión geométrica- César), (Progresión aritmética – César y Progresión geométrica- Fernando), (Progresión aritmética – César y Progresión geométrica- Hilda)}

- b) **Determina la probabilidad que Fernando exponga el tema progresiones aritméticas.**

COMENTARIO: De las seis variaciones que son las posibilidades que se puede presentar, dos corresponden a la posibilidad donde Fernando puede ser elegido para que exponga el tema de progresiones aritméticas, y considerando que se trata de un experimento equiprobable.

RESPUESTA ESPERADA:

$$\text{Probabilidad (Fernando exponga el tema progresiones aritméticas)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c) **Determina la probabilidad que Fernando exponga alguno de los temas.**

COMENTARIO: En esta situación son cuatro las posibilidades donde Fernando puede ser elegido para que exponga alguno de los temas propuestos: {(Progresión aritmética – Fernando y Progresión geométrica- Hilda), (Progresión aritmética – Fernando y Progresión geométrica- César), (Progresión aritmética – Hilda y Progresión geométrica- Fernando), (Progresión aritmética – César y Progresión geométrica- Fernando)}, es decir es la unión de las posibilidades donde Fernando exponga el tema progresiones aritméticas con las posibilidades que exponga el tema progresiones geométricas.

RESPUESTA ESPERADA:

$$\text{Probabilidad (Fernando exponga alguno de los temas)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

d) **Determina la probabilidad que los expositores sean dos varones.**

COMENTARIO: De las 6 variaciones o posibilidades se observa que son dos las que cumplen la condición: {(Progresión aritmética – Fernando y Progresión geométrica- César), (Progresión aritmética – César y Progresión geométrica- Fernando)}.

RESPUESTA ESPERADA:

$$\text{Probabilidad (Expositores sean dos varones)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- e) **Determina la probabilidad que los expositores sean un varón y una mujer.**

COMENTARIO: Del conjunto formado por seis variaciones o posibilidades, se obtiene que son cuatro las posibilidades donde puede ocurrir que los expositores elegidos sean un varón y una mujer: {(Progresión aritmética – Fernando y Progresión geométrica- Hilda), (Progresión aritmética – Hilda y Progresión geométrica- Fernando), (Progresión aritmética – Hilda y Progresión geométrica- César), (Progresión aritmética – César y Progresión geométrica- Hilda)}.

RESPUESTA ESPERADA:

$$\text{Probabilidad (Expositores sean un varón y una mujer)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Otra forma de interpretar es asumir que se trata del complemento que los dos expositores sean varones, es decir al menos uno de ellos no es varón, es decir:

$$\begin{aligned} \text{Probabilidad (Expositores sean un varón y una mujer)} &= 1 - \text{Probabilidad} \\ \text{(Expositores sean dos varones)} &= 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} \end{aligned}$$

5.4 DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES.

La secuencia de actividades se realizó en el último bimestre del año lectivo 2013, en el lapso de tres sesiones conforme se había planificado, con un periodo de 40 minutos en cada una de las sesiones.

Cada una de las actividades de la secuencia fue monitoreada en su totalidad por el investigador.

Los estudiantes fueron explicitados respecto a la necesidad de argumentar y justificar sus respuestas a cada una de las situaciones propuestas. A continuación se detalla los resultados de cada una de las actividades.

La primera actividad de la secuencia se realizó la sesión II, aplicándose el instrumento A. El investigador realizó precisiones respecto a la dinámica del trabajo, agrupándoles en pares, con la indicación que sería él quien asistiría a los grupos de trabajo que requieran las orientaciones pertinentes en caso se presentara dificultades. Las consultas de los estudiantes

fueron frecuentes y el investigador en forma permanente realizó orientaciones respecto a las dificultades que se enfrentaban los estudiantes, la intencionalidad del investigador en todo momento fue presentarles a los estudiantes que referían dificultad, situaciones de contexto que les permitiera reflexionar sobre las situaciones presentadas en la actividad. Observamos cómo alrededor de 20 estudiantes participantes en la presente investigación presentaban dificultad en la comprensión de la situación presentada, y en muchas de las interrogantes presentadas por ellos fueron sus mismos compañeros quienes colaboraron en la comprensión de dicha situación. Esta actividad estuvo proyectada ser desarrollada en 40 minutos desde la entrega del instrumento a los estudiantes, sin embargo resultó insuficiente por cuanto dos de los grupos no recibieron la asesoría en forma óptima por cuanto dicha asesoría consistía en procurar que sean ellos quienes reflexionen sobre las características de las situaciones que se les presenta a través de situaciones propias de su contexto, esta actividad fue desarrollada por 26 estudiantes. Al final de la actividad se indicó que la siguiente actividad se realizaría la primera clase de la semana siguiente, siguiendo la modalidad del trabajo en pares.

La segunda actividad de la secuencia se realizó en la fecha establecida a través de la aplicación del instrumento B, los estudiantes se mostraron prestos y la distribución demandó menor inversión de tiempo, por cuanto procuraron iniciar la actividad con el compañero que trabajaron la actividad anterior, el investigador dio algunas indicaciones genéricas y reiteró la importancia de ser consultado respecto a las dificultades que se les pudiese presentar, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes. Los estudiantes se avocaron en la realización de la actividad con mayor facilidad respecto a la actividad anterior, el investigador orientó a los grupos básicamente en el ordenamiento del registro de datos cuando la actividad pretendía relacionar la factibilidad de un suceso o evento en un espacio muestral equiprobable que requería realizar un listado de dicho espacio muestral, los estudiantes evidenciaban dominio de los conceptos. En esta actividad participaron 26 estudiantes.

La tercera actividad de la secuencia se realizó en la cuarta sesión y se desarrolló el instrumento C. La característica de esta actividad continuó desarrollándose en una dinámica colaborativa y en parejas, los estudiantes fueron orientados respecto a las dudas y

dificultades que presentaban en la movilización de los conocimientos relativos a la aplicación del concepto de probabilidad clásica en los contextos propuestos.

5.5. LOGROS ALCANZADOS POR LOS ESTUDIANTES EN EL TRATAMIENTO DE LAS DIFICULTADES

A continuación presentamos la prueba de salida desarrollada por los estudiantes participantes de la presente investigación, así como los resultados del análisis al tratamiento de las dificultades realizado en la secuencia de actividades a partir de la prueba de salida que se aplicó al final de dicha secuencia, la cual corresponde a la quinta sesión de dicha secuencia. En esta actividad participaron los 26 estudiantes pertenecientes al cuarto grado de secundaria sección F de una institución educativa del Callao.

5.5.1 Dificultades establecidas e ítems propuestos en la prueba de salida.

La prueba de salida pretende evidenciar y comprobar los conocimientos logrados por los estudiantes en el desarrollo de las actividades previas. Se realizó teniendo en consideración los descriptores detallados en la tabla 7.

Tabla 8. Descriptores para el análisis de idoneidad cognitiva del tratamiento de los conocimientos previos validados en la prueba de salida.

Descriptor
<p>Valorar si los alumnos demuestran apropiación:</p> <p>Las respuestas dadas por los alumnos son cercanas a las esperadas a través de situaciones que permitan movilizar estos conocimientos en situaciones de contexto.</p>
<p>Significados pretendidos:</p> <p>Situación de incertidumbre, situación determinista, posibilidad, Espacio Muestral, Suceso o evento, Probabilidad</p>

A continuación se presenta las dificultades establecidas en la movilización de los conocimientos previos a probabilidad condicional, las situaciones propuestas a los estudiantes respecto a dichas dificultades, así como la explicación de los contextos propuestos, las respuestas esperadas orientadas al tratamiento de dichas dificultades detectadas en la prueba diagnóstica y las respuestas elaboradas por los estudiantes.

1. Dificultad: Reconocimiento de una situación que presenta incertidumbre.

Es pertinente realizar el tratamiento de esta dificultad establecida en la prueba diagnóstica y como lo señala Osorio (2012), “ es importante (...) que los alumnos tomen conciencia de la separación entre situaciones aleatorias (desde el punto de vista de la incertidumbre) y las situaciones determinadas (...) con lo cual se entra a la idea de probabilidad” (p.16).

Para verificar el tratamiento de éste conocimiento presentamos a los estudiantes diversos escenarios de su contexto, estableciendo las justificaciones respectivas.

A continuación se presenta las situaciones propuestas a los estudiantes en la prueba de salida, descripción de cada una de tales situaciones, así como las respuestas esperadas

1. Se presenta tres situaciones cotidianas, determina cuáles de ellas son situaciones de incertidumbre y cuáles no son situaciones de incertidumbre. Justifica tu respuesta.

a) Tiempo que permanece el semáforo en el color verde en la intersección de las avenidas Santa Rosa y Colonial.

La validez de la respuesta estará determinada por las justificaciones que construyan los estudiantes respecto al conocimiento que poseen sobre la situación. Al respecto, el lugar referido, corresponde a una zona cercana de la institución educativa donde se implementó el presente trabajo de investigación, lugar por donde transitan la mayoría de los estudiantes que asisten a dicha institución educativa.

RESPUESTA ESPERADA: Una posible respuesta válida es que consideren que no es una situación de incertidumbre, expresando como justificaciones el hecho que el Ministerio de Transportes ha colocado en dicho lugar un semáforo con una duración fijada para cada uno de los colores que permite tanto la circulación vehicular como peatonal.

Otra respuesta válida es que consideren que es una situación de incertidumbre por cuanto desconocen con precisión cuál es el periodo de tiempo para cada uno de los colores, y más aún si varía dichos periodos de tiempo durante las 24 horas del día.

b) **Distancia recorrida entre tu casa y el colegio.**

RESPUESTA ESPERADA. La respuesta que esperamos consideren es que se trata de una situación de incertidumbre, teniendo como justificación la situación que si toman un micro para trasladarse, existe la posibilidad que varíen en su recorrido por situaciones sea de congestión vehicular, por obras en la vía pública o por problemas del funcionamiento de los semáforos. Otra justificación esperada es que si el recorrido lo realizan caminando, también se puede presentar la situación que tengan que desviar por obras en la vía pública entre otras situaciones que pueda presentarse.

c) **Ocurrencia de un eclipse solar mañana.**

RESPUESTA ESPERADA. La respuesta esperada que corresponde es: No es de incertidumbre, y la justificación esperada es que se trata de un fenómeno que responde a leyes físicas, por lo que se puede saber con anterioridad el instante en que ocurrirá un eclipse.

2. Dificultad: Reconocimiento del espacio muestral de una situación que presenta incertidumbre.

Como menciona Serrano (1996), existe intuiciones erróneas sobre el cálculo de probabilidades cuando no se tiende claramente identificado el espacio muestral. A continuación se presenta las situaciones propuestas a los estudiantes con la finalidad que establezcan el espacio muestral, considerando el conocimiento de la situación que es de su contexto, así como las respuestas esperadas.

2. El Gobierno Regional ha solicitado la participación de dos estudiantes de cuarto grado para postular a una beca de estudios, los tutores del cuarto grado han decido elegir por sorteo a dos de los cinco primeros puestos en rendimiento representantes de las secciones A, B, C, D y E: Luis, Alberto, Raúl, Juan y Santiago.

a. Determina el conjunto de posibles elegidos para participar en el concurso.

Se trata de determinar la cantidad de las combinaciones que se pueda formar con los cinco estudiantes tomados de dos en dos, siendo cada una de estas combinaciones las posibilidades que existe, es decir diez posibilidades.

RESPUESTA ESPERADA

Conjunto formado por los posibles elegidos {(Luis y Alberto), (Luis y Raúl), (Luis y Juan), (Luis y Santiago), (Alberto y Raúl), (Alberto y Juan), (Alberto y Santiago), (Raúl y Juan), (Raúl y Santiago), (Juan y Santiago)}.

A continuación presentamos una situación en la que se realiza variaciones al contexto original con la finalidad de establecer el tratamiento que realizan los estudiantes entorno al conocimiento de espacio muestral.

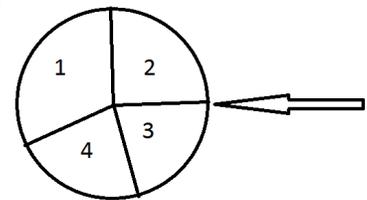
c. **Si Juan y Santiago deciden no participar antes de realizar el sorteo y los tutores aceptan estas renunciaciones, determina el conjunto de posibles elegidos si deciden no incluir a otros estudiantes de la lista inicial para participar en el sorteo.**

En esta actividad se prevé que los estudiantes realicen restricciones para determinar el espacio muestral al variar las condiciones iniciales.

RESPUESTA ESPERADA: Para la solución, el conjunto de participantes al sorteo se reduce a tres estudiantes, y se tiene que determinar el número de combinaciones de tres estudiantes tomados de dos en dos, el cual nos genera tres combinaciones o posibilidades.

Conjunto de posibles elegidos bajo las nuevas condiciones: {(Luis y Alberto), (Luis y Raúl), (Alberto y Raúl)}.

El colegio ha organizado una Ginkana y uno de los juegos que presenta es el de la ruleta giratoria que se muestra. La flecha indica la opción ganadora (en caso que cae en línea se vuelve a tirar). Si un estudiante del colegio decide participar una única vez en el juego, es decir va realizar un único tiro entonces:



¿Es posible que obtenga el número 5? Justifique su respuesta

Se va presentar esta situación a los estudiantes, con el objetivo de verificar la determinación de que si un elemento es parte o no del espacio muestral.

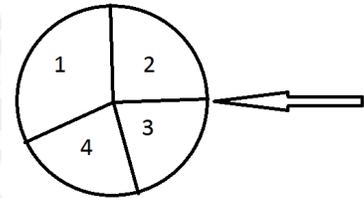
El gráfico presenta cuatro sectores circulares no congruentes, numerados en forma consecutiva del 1 al 4.

RESPUESTA ESPERADA: La respuesta esperada es: No, y la justificación respectiva está dada por el hecho que no es parte del conjunto de los posibles resultados a obtener, el cual es: $\{1, 2, 3, 4\}$, es decir es imposible que dicho valor se obtenga por no ser elemento del espacio muestral.

4.1.2. Dificultad: Reconocimiento de la ocurrencia de un evento compuesto en una situación que presenta incertidumbre.

Respecto a esta dificultad, Serrano (1996), considera que el estudiante incurre en sesgos en la evaluación de probabilidades cuando se trata de eventos compuestos, inclusive cuando en aquellos estudiantes con buen razonamiento combinatorio. A continuación presentamos situaciones que permiten verificar el tratamiento de esta dificultad así como la respuesta esperada.

El colegio ha organizado una Ginkana y uno de los juegos que presenta es el de la ruleta giratoria que se muestra. La flecha indica la opción ganadora (en caso que cae en línea se vuelve a tirar). Si un estudiante del colegio decide participar una única vez en el juego, es decir va realizar un único tiro entonces:



¿Es posible que obtenga el 1 y 2, en el mismo tiro?

Una de las dificultades de los estudiantes es la interpretación de los conectores que se emplea para la ocurrencia de sucesos o eventos.

RESPUESTA ESPERADA. La respuesta que esperamos es: No, y la justificación es que se trata de un posible evento que pretende estar constituido por el hecho que ocurra los dos sucesos a la vez, es decir la intersección de dos posibilidades, pero el resultado a obtener es necesariamente uno y solo uno de los números o dicho de otra manera solo una de las posibilidades que conforma el espacio muestral, por cuanto son sectores disjuntos, es decir el escenario que se obtenga dos números a la vez es imposible.

¿Es posible que obtenga un 3 o un 4?

RESPUESTA ESPERADA. La respuesta esperada que corresponde es: Sí, pues se trata de un evento compuesto conformado por la reunión de dos posibilidades que son elementos del espacio muestral.

4.1.3. Dificultad: Realizar cálculo de probabilidad en experimentos aleatorios.

Presentamos una situación para verificar el dominio del cálculo de probabilidad en espacios muestrales de experimentos aleatorios no equiprobables, luego presentamos la respuesta esperada, una tabla de frecuencia con la cantidad de respuestas correcta e incorrecta y finalmente las respuestas realizadas por los estudiantes.

El colegio ha organizado una Ginkana y uno de los juegos que presenta es el de la ruleta giratoria que se muestra. La flecha indica la opción ganadora (en caso que cae en línea se vuelve a tirar). Si un estudiante del colegio decide participar una única vez en el juego, es decir va realizar un único tiro entonces:

¿Cuál es la probabilidad de obtener un 5?

La respuesta esperada es: La probabilidad es cero, dado que no es un elemento del espacio muestral es decir no está entre los posibles resultados a obtener.

3. Realización del cálculo de probabilidad en experimentos aleatorios de espacio muestral equiprobable.

Pretendemos determinar si los estudiantes lograron comprender la determinación de la probabilidad de ocurrencia de un suceso simple o compuesto en un experimento aleatorio equiprobable considerando situaciones de su contexto. A continuación se presenta las situaciones, las respuestas esperadas, una tabla comparativa sobre la cantidad de estudiantes que evidencian comprensión del concepto respecto a los que no muestran tal evidencia. Finalmente presentamos algunas de las respuestas presentadas por los estudiantes.

2. **El Gobierno Regional ha solicitado la participación de dos estudiantes de cuarto grado para postular a una beca de estudios, los tutores del cuarto grado han decidido elegir por sorteo a dos de los cinco primeros puestos en rendimiento representantes de las secciones A, B, C, D y E: Luis, Alberto, Raúl, Juan y Santiago.**

b. **Estima la probabilidad que Luis sea elegido.**

El espacio muestral asociado al experimento, está constituido por la cantidad de combinaciones que se pueda realizar de un total de cinco elementos tomados de dos en dos, por cuanto no importa el orden que salgan los dos elegidos. Este espacio muestral es:

$$E = \{(Luis, Alberto), (Luis, Raúl), (Luis, Juan), (Luis, Santiago), (Alberto, Raúl), (Alberto, Juan), (Alberto, Santiago), (Raúl, Juan), (Raúl, Santiago), (Juan, Santiago)\}$$

Tratándose de un experimento equiprobable, cada una de las posibilidades tiene igual probabilidad de ocurrir, por lo que dentro de los diez elementos o posibilidades que posee el espacio muestral, observamos que son cuatro las posibilidades en la que Luis puede ser elegido, por lo que la respuesta es:

$$\text{Probabilidad (Luis sea elegido)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

A continuación presentamos una situación propuesta a los estudiantes, caracterizada por la modificación en el espacio muestral dado por un cambio en las condiciones de elección con el objetivo de confirmar la comprensión del concepto del cálculo de probabilidad, luego mostramos la respuesta esperada, una tabla comparativa sobre la cantidad de estudiantes que evidencian comprensión del concepto respecto a los que no muestran tal evidencia. Finalmente presentamos algunas de las respuestas presentadas por los estudiantes.

El Gobierno Regional ha solicitado la participación de dos estudiantes de cuarto grado para postular a una beca de estudios, los tutores del cuarto grado han decidido elegir por sorteo a dos de los cinco primeros puestos en rendimiento representantes de las secciones A, B, C, D y E: Luis, Alberto, Raúl, Juan y Santiago.

Si Juan y Santiago deciden no participar antes de realizar el sorteo y los tutores aceptan estas renunciaciones, y acuerdan no incluir a otros estudiantes de la lista inicial para participar en el sorteo. Estima la probabilidad que Luis sea elegido.

El espacio muestral asociado al experimento, está constituido por la cantidad de combinaciones que se pueda realizar de un total de tres elementos tomados de dos en dos, dado que dos de los integrantes o elementos del conjunto original no participan, además por cuanto no importa el orden que salgan los dos elegidos. Este espacio muestral es:

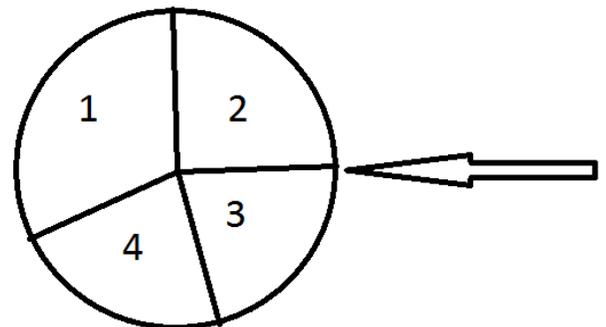
$$E = \{(Luis, Alberto), (Luis, Raúl), (Alberto, Raúl)\}$$

Como se aprecia el nuevo espacio muestral está conformado por tres elementos o posibilidades, de los cuales son dos los casos o posibilidades en las que Luis puede ser elegido, y siendo el sorteo un experimento equiprobable, la respuesta esperada es:

$$\text{Probabilidad (Luis sea elegido)} = \frac{2}{3}$$

Presentamos una situación para verificar el dominio del cálculo de probabilidad en espacios muestrales de experimentos aleatorios no equiprobables, para lo cual se les pidió que previamente determinaran la posibilidad de ocurrencia del suceso, es decir si se encuentra en el espacio muestral, luego presentamos la respuesta esperada, una tabla de frecuencia con la cantidad de respuestas correcta e incorrecta y finalmente las respuestas realizadas por los estudiantes.

El colegio ha organizado una Ginkana y uno de los juegos que presenta es el de la ruleta giratoria que se muestra. La flecha indica la opción ganadora (en caso que cae en línea se vuelve a tirar). Si un estudiante del colegio decide participar una única vez en el juego, es decir va realizar un único tiro entonces:



¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3 o 4 en el mismo tiro?

Se espera que los estudiantes estimen la probabilidad de obtener un 3, así como la probabilidad de obtener un 4, y sumen dichas probabilidades. El resultado a considerar puede ser expresado en porcentaje siendo válido una cantidad cercana al 50% pero menor que ésta.

Presentamos una situación para verificar el dominio del cálculo de probabilidad en espacios muestrales de experimentos aleatorios no equiprobables, para lo cual se les pidió que previamente determinaran la posibilidad de ocurrencia del suceso, es decir si se encuentra en el espacio muestral, luego presentamos la respuesta esperada, una tabla de frecuencia con la cantidad de respuestas correcta e incorrecta y finalmente las respuestas realizadas por los estudiantes.

El colegio ha organizado una Ginkana y uno de los juegos que presenta es el de la ruleta giratoria que se muestra. La flecha indica la opción ganadora (en caso que cae en línea se vuelve a tirar). Si un estudiante del colegio decide participar una única vez en el juego, es decir va realizar un único tiro entonces:

¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 y 2 en el mismo tiro?

La respuesta esperada es: La probabilidad es cero, pues se trata de una situación que no se encuentra en el espacio muestral.

5.5.2 RESULTADOS OBTENIDOS DE LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE SALIDA.

La prueba de salida se aplicó a los 26 estudiantes que participaron de la secuencia de actividades orientados al tratamiento de las dificultades en la movilización de los conocimientos previos a probabilidad condicional. A continuación presentamos los resultados que muestra la cantidad de estudiantes que acertaron en sus respuestas así como la cantidad de estudiantes que cometieron errores. Luego realizaremos un análisis de tres estudiantes que muestra el tratamiento que realizaron a cada una de las situaciones propuestas.

Tabla 9. Resultados de las situaciones planteadas en la prueba de salida.

Situaciones propuestas	Estudiantes que acertaron	Estudiantes que tuvieron dificultad
Situación 1-a	21	5
Situación 1-b	21	5
Situación 1-c	18	8
Situación 2-a	22	4
Situación 2-b	20	6
Situación 2-c	20	6
Situación 2-d	18	8
Situación 3-a	25	1
Situación 3-b	17	9
Situación 3-c	21	5
Situación 3-d	23	3
Situación 3-e	17	9
Situación 3-f	16	10

Los resultados obtenidos en la tabla muestran una superación significativa en el tratamiento de las dificultades de los conocimientos previos a probabilidad condicional en los estudiantes participantes de la presente investigación, según las categorías de concepto, situación – problema, argumentos, lenguaje y procedimientos propuestos en el EOS. Aunque se observa la presencia de dificultades referidos a determinados conocimientos y categorías según el EOS en algunos de los estudiantes participantes de la presente investigación. Así en las tres primeras situaciones orientadas al tratamiento de situaciones de incertidumbre y situaciones deterministas, de los 26 estudiantes participantes, fueron 21 quienes justificaron adecuadamente las dos primeras situaciones referidas a incertidumbre (1-a y 1-b) , en tanto la tercera situación que es determinista (1-c) lograron justificar adecuadamente 18 estudiantes de los 26, esto se justifica porque las dificultades en la identificación de la naturaleza de estas situaciones como sostiene Serradó, et al (2006), está relacionado con las características dadas en la formación académica de los estudiantes donde se les presenta situaciones establecidas por resultados deterministas, generando

como consecuencia dificultad de establecer en forma correcta si una situación presenta incertidumbre.

Sin embargo el alto número de respuestas acertadas está respaldado por los planteamientos formulados en el EOS, básicamente en las categorías de situación – problema, conceptos y argumentos. Los planteamientos propuestos en el EOS nos ha servido para implementar la secuencia de actividades, que está orientado a desarrollar procesos de instrucción en la enseñanza de la matemática como señalan Godino et al (2006), procurando que los estudiantes incorporen en dichas actividades los significados pretendidos a través de la mediación del profesor quien participa como mediador en dicho proceso.

En la situación 2-a, fueron 22 estudiantes quienes determinaron correctamente el espacio muestral, entendido como el conjunto de todos los posibles resultados o todos los sucesos aleatorios asociados a una situación de incertidumbre, y donde la mayoría de ellos listaron los posibles resultados a obtener por tratarse de un espacio finito, sin embargo en la situación 2-b, en la cual se requiere que a partir de la identificación del espacio muestral, realicen la estimación de probabilidad de un evento, la cantidad de estudiantes que arriban a una respuesta correcta se reduce a 20. Estos resultados se justifican pues al respecto Contreras (2011), se percató del hecho que los estudiantes presentan un éxito mayor cuando en la situación propuesta listan todos los posibles sucesos con la intención de determinar el espacio muestral, en concordancia con la categoría de procedimientos propuesto en el EOS. El incremento en la dificultad respecto a la estimación de la probabilidad de un suceso una vez determinado el espacio muestral es advertido por Longedo (2008) al sostener que en los estudiantes la determinación correcta de la probabilidad de un suceso no siempre es garantizada a partir de la identificación del espacio muestral, lo que conlleva a la necesidad de garantizar el dominio de la situación – problema en contextos reales según el EOS.

En la situación 2-c, fueron 20 estudiantes quienes respondieron adecuadamente, sin embargo algunos estudiantes continúan presentando dificultades, ello se debe como sostiene Longedo (2008), al hecho de establecer condiciones o restricciones con el fin que los estudiantes determinen el espacio muestral reducido, pudiendo generar en ellos un significado y proceso de resolución incorrecto. En la situación 2-d, la cantidad de estudiantes que lograron una respuesta correcta fueron 18, confirmando una superación

significativa de las dificultades por parte de ellos. Sin embargo el hecho que algunos estudiantes no lograron superar las dificultades en la estimación de la probabilidad en el espacio muestral reducido como lo señala Longedo (2008) ocurre por no estar garantizado establecer de manera correcta la probabilidad de ocurrencia de un suceso a partir de la identificación del espacio muestral.

En la situación 3-a, fueron 25 estudiantes los que arribaron a la respuesta correcta y justificaron adecuadamente, la obtención de este logro se da porque es observable los sucesos simples que intervienen en la situación de incertidumbre propuesto y como afirma Ortiz (2002) al reforzar el concepto de situación aleatoriedad o incertidumbre cuando señala que un suceso es aleatorio cuando no es seguro su ocurrencia ni tampoco imposible por encontrarse en el espacio muestral, por lo que los estudiantes que logren determinar el espacio muestral estarán en la capacidad de discriminar la imposibilidad de ocurrencia de sucesos que no pertenecen a dicho espacio.

En la situación 3-b, se tiene que 17 estudiantes arribaron a la respuesta correcta con justificaciones válidas. También se observa que persiste dificultad en un grupo de estudiantes, resultado que es justificado por el hecho de existir dificultad en la comprensión y el significados de la intersección de sucesos simples en un espacio muestral y que muchas veces es relegado en la enseñanza de la probabilidad, al respecto Ortiz (2002) afirma "... la intersección de sucesos no siempre tiene sentido, se introduce la idea de suceso imposible, que en terminología conjuntista corresponderá al conjunto vacío" (p. 71).

En la situación 3-c, fueron 21 estudiantes quienes respondieron correctamente, la superación significativa de la dificultad en la comprensión de ocurrencia de un suceso compuesto está como lo sostiene Ortiz (2002), en la significancia que se atribuye "... a la unión de dos o más sucesos simples" (p.74).

Respecto a la situación 3-d, fueron 23 estudiantes los que respondieron correctamente, pues si el evento no se encuentra en el espacio muestral, se produce una imposibilidad de ocurrencia, y su probabilidad nula, como lo sostiene Canizares (1997) al sostener que la noción de suceso imposible presenta dificultad, en tanto que dicha dificultad disminuye con

la idea de probable. Es decir el hecho de haber comprendido la imposibilidad de ocurrencia allana la comprensión de la noción de probabilidad de dicho suceso.

En la situación 3-e, 17 estudiantes participantes determinaron la respuesta correcta, la dificultad de los estudiantes que no lograron establecer la respuesta correcta está estrechamente ligada a la dificultad que tuvieron al establecer la ocurrencia del suceso o evento propuesto en la situación 3-b, pues como señala Canizares (1997), quien encuentra confusión en los estudiantes al relacionar lo improbable con lo imposible.

En la situación 3-f, 16 estudiantes lograron responder correctamente, en tanto quienes no han logrado responder en forma correcta evidenciaron dificultad en la comprensión del concepto de probabilidad de un suceso compuesto y en el sesgo de equiprobabilidad, pues asumieron que cada uno de los cuatro sucesos simples del espacio muestral eran equiprobables, la presencia de esta dificultad es corroborada por los hallazgos que realizó Lecoutre (1992), quien observó este sesgo en estudiantes de todas las edades de formación, al realizar un estudio sobre la determinación de la probabilidad de ocurrencia de obtener un determinado valor al sumar los puntos obtenidos en la parte superior al lanzar dos dados no cargados.

A continuación realizaremos el análisis referido a las respuestas correctas de los estudiantes sobre las situaciones planteadas en la prueba de salida.

Situación 1: Se presenta tres situaciones cotidianas, determina cuáles de ellas son situaciones de incertidumbre y cuáles no son situaciones de incertidumbre. Justifica tu respuesta.

a) Tiempo que permanece el semáforo en el color verde en la intersección de las avenidas Santa Rosa y Colonial.

En esta situación planteada, 21 estudiantes realizaron las justificaciones adecuadas a sus respuestas. A continuación realizaremos el análisis de las respuestas de tres estudiantes.

Estudiante Mauricio: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

a) Tiempo que permanece el semáforo en el color verde en la intersección de las avenidas Santa Rosa y Colonial.

ES UNA SITUACIÓN DE INCERTIDUMBRE, POR QUE MUCHAS VECES SE MALOGRA Y PUEDE VARIAR EL TIEMPO QUE ESTABA PROGRAMADO.

Figura 41: Justificación realizada por Mauricio a la situación 1-a de la prueba de salida.

Comentario: Según el EOS, podemos afirmar que Mauricio evidencia superación de la dificultad presentada en la categoría de concepto de incertidumbre en la situación planteada. En su argumentación apela al conocimiento que posee respecto a la programación de los tiempos de duración de los colores de estos dispositivos de control de tránsito, y la posibilidad de que tengan algún desperfecto de tal manera que no se cumpla con el periodo de tiempo programado.

Estudiante Eduardo La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

a) Tiempo que permanece el semáforo en el color verde en la intersección de las avenidas Santa Rosa y Colonial.

No es de incertidumbre porque ya está programado el tiempo que dura el color verde, es un minuto.

Figura 42. Justificación realizada por Eduardo a la situación 1-a de la prueba de salida.

Comentario: Según el EOS, podemos afirmar que Eduardo presenta dominio en la categoría situación – problema; pues considera la situación como determinística, basado en la información que posee respecto a la programación del tiempo para el color verde en dicho semáforo.

Estudiante Axel: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

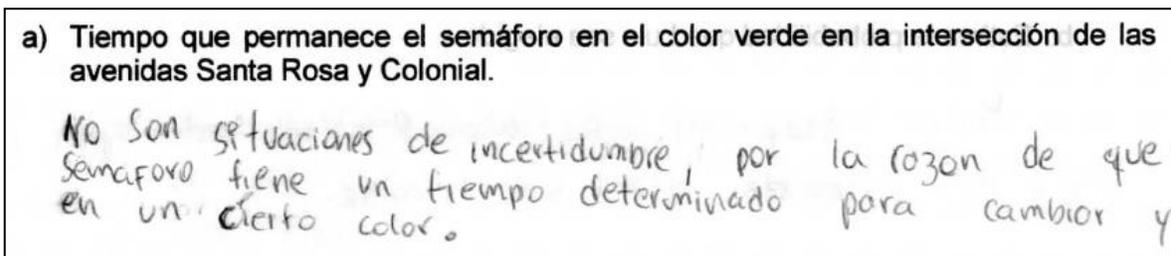


Figura 43. Justificación realizada por Axel a la situación 1-a de la prueba de salida.

Comentario: La respuesta que construye Axel, muestra el dominio en la categoría de argumentos de situaciones de incertidumbre según el EOS, por cuanto en su justificación considera la existencia establecida de un periodo de tiempo para cada uno de los colores del semáforo, aunque no especifica cual es dicho tiempo.

b) Distancia recorrida entre tu casa y el colegio.

En vista que 21 estudiantes de los 26 participantes, respondieron justificando adecuadamente, haremos el análisis de tres de ellos.

Estudiante Mauricio: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

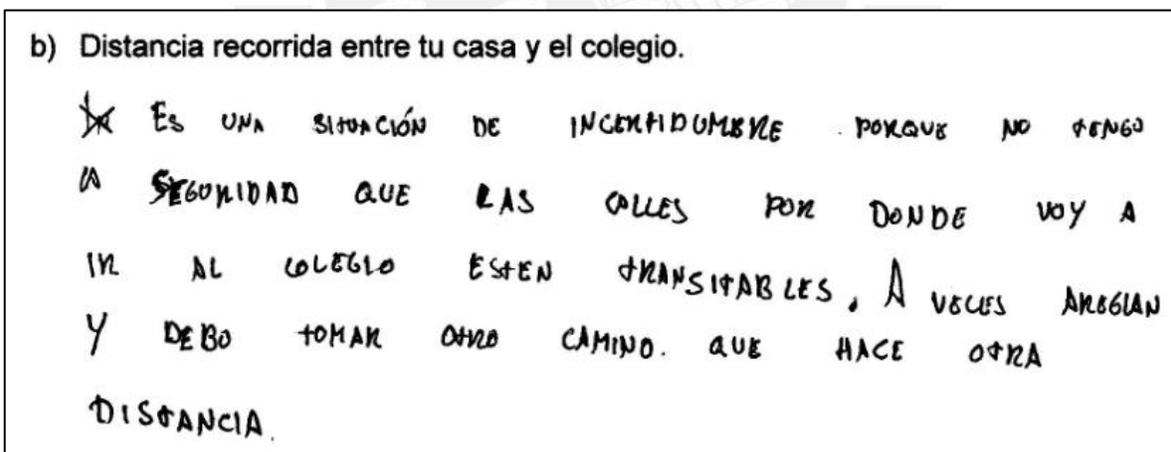


Figura 44. Justificación realizada por Mauricio a la situación 1-b de la prueba de salida.

Comentario: Mauricio muestra conocimiento en la categoría situación – problema según el EOS, en lo que se refiere a incertidumbre en el contexto presentado, por cuanto al desplazarse de su casa hacia el colegio. Además muestra conocimiento en la categoría de argumento, pues admite la posibilidad de encontrarse con una calle no accesible, con lo que la distancia a recorrer ya no sería necesariamente la misma.

Estudiante Eduardo La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

b) Distancia recorrida entre tu casa y el colegio.
Es de incertidumbre porque hay la posibilidad que cuando suba al carro haga un desvío en su ruta y la distancia va a ser distinto que cuando sigue su ruta habitual.

Figura 45. Justificación realizada por Eduardo a la situación 1-b de la prueba de salida.

Comentario: En este caso Eduardo muestra el conocimiento en la categoría de situación – problema según el EOS, para decidir si la situación presenta incertidumbre, pues refiere la posibilidad de que pueda variar de trayectoria en su desplazamiento por otros lugares y que ello conllevaría a una modificación en la distancia recorrida.

Estudiante Axel: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

b) Distancia recorrida entre tu casa y el colegio.
Es situación de incertidumbre, porque no todos los días camino por el mismo lugar exactamente, y por eso varía la distancia.

Figura 46. Justificación realizada por Axel a la situación 1-b de la prueba de salida.

Comentario: En la presente situación Axel evidencia dominio en la categoría de argumentos según el EOS, pues es muy explícito en justificar adecuadamente su afirmación y alude a la existencia de posible variación en la trayectoria de desplazamiento de su casa al colegio, por lo que la distancia recorrida no podría ser establecida previamente.

c. Ocurrencia de un eclipse mañana.

En esta situación fueron 18 estudiantes de los 26 participantes quienes justificaron adecuadamente sus afirmaciones. A continuación presentamos las respuestas dadas por tres de ellos:

Estudiante Mauricio: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

c) Ocurrencia de un eclipse solar mañana.

NO ES DE INCERTIDUMBRE POR QUE LOS ECLIPSES
OCURREN CADA CIERTO TIEMPO Y EN LOS MEDIOS
DE COMUNICACIÓN INFORMAN CON ANTICIPACIÓN EL DÍA
Y LA HORA.

Figura 47. Justificación realizada por Mauricio a la situación 1-c de la prueba de salida.

Comentario: Podemos apreciar que Mauricio presenta dominio en la categoría de concepto según el EOS, dado que distingue las características de una situación de incertidumbre, que es la incapacidad de poder determinar la ocurrencia de un suceso; a lo que en la situación planteada Mauricio argumenta el hecho que este fenómeno responde a un orden establecido pudiendo prever el momento de ocurrencia. Además en la categoría de argumento, da a conocer la información presentada por los medios de comunicación previo a la ocurrencia del evento.

Estudiante Eduardo La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

c) Ocurrencia de un eclipse solar mañana.

No es de incertidumbre porque se sabe
con anticipación cuando va haber eclipse
y mañana no habra eclipse.

Figura 48. Justificación realizada por Eduardo a la situación 1-c de la prueba de salida.

Comentario: Observamos que Eduardo presenta dominio en la categoría de concepto, y justifica la característica de no incertidumbre en la situación propuesta, estableciendo como característica de no incertidumbre que la ocurrencia de estos sucesos ya son conocidos con anterioridad.

Estudiante Axel: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

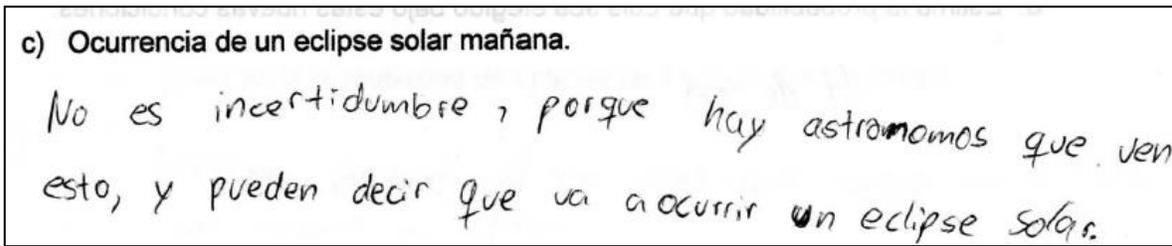


Figura 49. Justificación realizada por Axel a la situación 1-c de la prueba de salida.

Comentario: Axel presenta dominio en la categoría de argumentos según el EOS, y justifica su afirmación respecto a que la situación no presenta incertidumbre, basado en el conocimiento que determinados profesionales son capaces de determinar previamente el momento que ocurrirá un eclipse.

Situación 2. El Gobierno Regional ha solicitado la participación de dos alumnos del cuarto grado para postular a una beca de estudios, los tutores del cuarto grado han decidido elegir por sorteo a dos de los cinco primeros puestos en rendimiento representantes de las secciones A, B, C, D y E: Luis, Alberto, Raúl, Juan y Santiago.

a. Determina el conjunto de posibles elegidos para participar en el concurso.

En esta situación fueron 22 estudiantes de los 26 participantes quienes respondieron adecuadamente. A continuación se presenta las respuestas de tres de los estudiantes.

Estudiante Mauricio: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

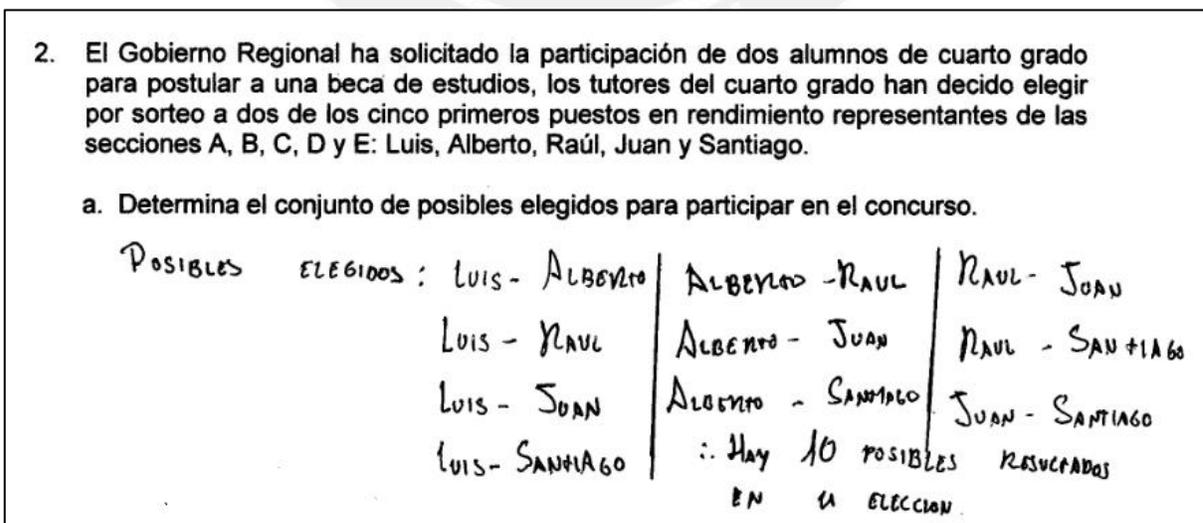


Figura 50. Justificación realizada por Mauricio a la situación 2-a de la prueba de salida.

Comentario: En la situación planteada de espacio muestral finito, Mauricio presenta dominio en la categoría de procedimientos, pues realizó una construcción por extensión de los elementos del conjunto que comprende dicho espacio, esta construcción garantiza la identificación de cada uno de los sucesos que compone la situación de incertidumbre.

Estudiante Eduardo La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

El Gobierno Regional ha solicitado la participación de dos alumnos de cuarto grado para postular a una beca de estudios, los tutores del cuarto grado han decidido elegir por sorteo a dos de los cinco primeros puestos en rendimiento representantes de las secciones A, B, C, D y E: Luis, Alberto, Raúl, Juan y Santiago.

a. Determina el conjunto de posibles elegidos para participar en el concurso.

Siendo un caso de incertidumbre por tratarse de un sorteo, el conjunto de posibles elegidos es: °° Hay 10 Posibilidades

- * Luis y Alberto
- * Luis y Raúl
- * Luis y Juan
- * Luis y Santiago
- * Alberto y Raúl
- * Alberto y Juan
- * Alberto y Santiago
- * Raúl y Juan
- * Raúl y Santiago
- * Juan y Santiago

Figura 51. Justificación realizada por Eduardo a la situación 2-a de la prueba de salida.

Comentario: En la situación propuesta, Eduardo presenta dominio en la categoría de procedimientos según el EOS, al realizar una identificación de los elementos que conforma el conjunto de posibles resultados a obtener bajo una lista, a la vez que indica la cantidad de elementos que conforma dicho espacio muestral; con lo que se verifica el conocimiento que posee referido a la determinación del espacio muestral finito en una situación de incertidumbre.

Estudiante Axel: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

2. El Gobierno Regional ha solicitado la participación de dos alumnos de cuarto grado para postular a una beca de estudios, los tutores del cuarto grado han decidido elegir por sorteo a dos de los cinco primeros puestos en rendimiento representantes de las secciones A, B, C, D y E: Luis, Alberto, Raúl, Juan y Santiago.

a. Determina el conjunto de posibles elegidos para participar en el concurso.

Posibles:

- ✓ Luis - Alberto
- ✓ Luis - Raúl
- ✓ Luis - Juan
- ✓ Luis - Santiago
- ✓ Alberto - Raúl
- ✓ Alberto - Juan
- ✓ Alberto - Santiago
- ✓ Raúl - Juan
- ✓ Raúl - Santiago
- ✓ Juan - Santiago

Hay 10 Posibles resultados

Figura 52. Justificación realizada por Axel a la situación 2-a de la prueba de salida.

Comentario: Tratándose de combinaciones, Axel realiza un listado de todas las combinaciones, la cual constituye en su conjunto el espacio muestral de la situación planteada, esta respuesta evidencia dominio en la categoría de procedimientos según el EOS.

La observación adicional que corresponde es precisar que los estudiantes no presentan dominio en la categoría de lenguaje según el EOS, pues no registraron el símbolo de llaves { } que caracteriza a la notación conjuntista.

b. Estima la probabilidad que Luis sea elegido.

En la situación propuesta 20 estudiantes del total de 26 participantes respondieron adecuadamente. A continuación presentamos las respuestas de tres de ellos.

Estudiante Mauricio: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

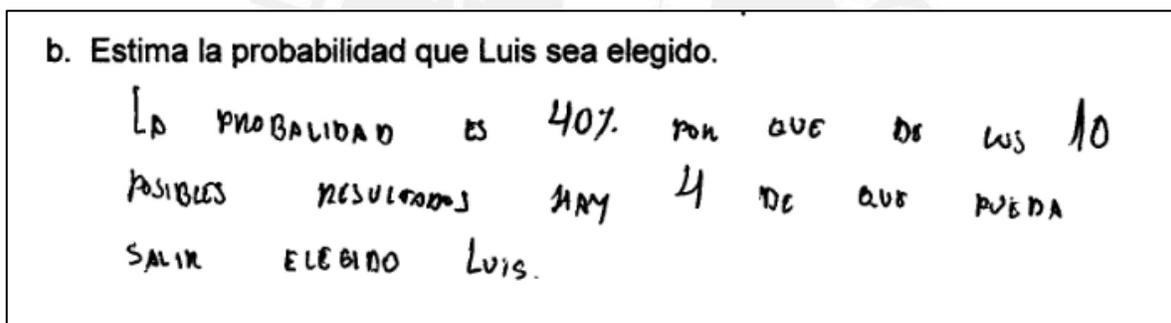


Figura 53. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 2-b de la prueba de salida.

Comentario: Sobre la respuesta se observa que Mauricio presenta dominio en la categoría de concepto dentro del análisis del EOS, pues recurre a la concepción clásica de probabilidad bajo el supuesto que cada uno de los elementos del espacio muestral determinado en la actividad anterior, tienen la misma probabilidad de ocurrir. Además evidencia dominio en la categoría de argumentos, pues sostiene en función al espacio muestral la probabilidad expresado en porcentaje.

Estudiante Eduardo: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

b. Estima la probabilidad que Luis sea elegido.
 Como se trata de un sorteo y cualquiera puede salir
 se tiene que en 4 de los 10 aparece Luis.
 ∴ Probabilidad de que Luis sea elegido es igual a $\Rightarrow \frac{4}{10}$ o 40%

Figura 54. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 2-b de la prueba de salida.

En la respuesta brindada por Eduardo evidencia dominio en la categoría de concepto dentro del análisis del EOS, pues se puede corroborar la aplicación de probabilidad desde la concepción clásica, ya que sustenta su afirmación en el supuesto que en un sorteo las condiciones de ocurrencia son las mismas para cada uno de los casos o sucesos establecidos en la actividad anterior. Además evidencia dominio en la categoría de lenguaje, pues expresa su respuesta en notación porcentual y fraccionaria.

Situación C. Si Juan y Santiago deciden no participar antes de realizar el sorteo y los tutores aceptan estas renunciaciones, determina el conjunto de los posibles elegidos si deciden no incluir a otros alumnos de la lista inicial para participar en el sorteo.

A continuación se realiza el análisis de las respuestas de tres estudiantes.

Estudiante Mauricio: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

c. Si Juan y Santiago deciden no participar antes de realizar el sorteo y los tutores aceptan estas renunciaciones, determina el conjunto de posibles elegidos si deciden no incluir a otros alumnos de la lista inicial para participar en el sorteo.
 POSIBLES ELEGIDOS SIN CONSIDERAR A JUAN Y SANTIAGO:
 LUIS - RAUL
 LUIS - ALBERTO
 ALBERTO - RAUL
 HAY 3 POSIBLES RESULTADOS.

Figura 55. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 2-c de la prueba de salida.

Comentario: En la situación dada Mauricio evidencia dominio en la categoría de situación – problema dentro del análisis del EOS, pues ha logrado realizar las restricciones de la lista de participantes a fin de establecer el espacio muestral bajo las nuevas condiciones. En la

falencias pues obvia la notación simbólica de los conjuntos, sin embargo precisa la cantidad de elementos o sucesos que conforma la nueva situación propuesta.

Situación d. Estima la probabilidad de que Luis sea elegido bajo estas nuevas condiciones.

En esta situación 18 estudiantes respondieron correctamente. A continuación se presenta la respuesta construida por tres de ellos.

Estudiante Mauricio: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

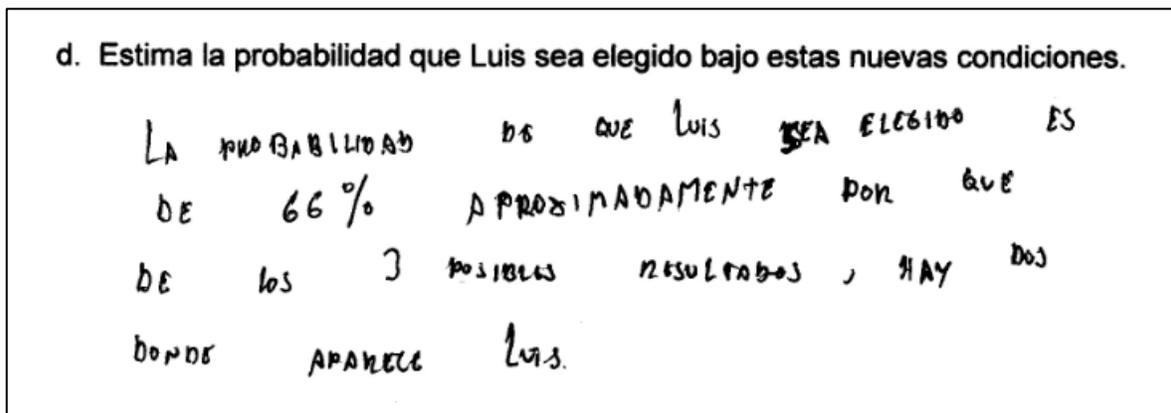


Figura 58. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 2-d de la prueba de salida.

Comentario: Mauricio evidencia dominio en la categoría de concepto en el análisis propuesto por el EOS, pues presenta su respuesta desde el enfoque clásico de probabilidad, considerando el hecho que cada uno de los sucesos presentados en la actividad anterior tiene la misma probabilidad de ocurrencia. En la categoría de lenguaje, utiliza para su respuesta la expresión porcentual, que le es más habitual en sus diálogos coloquiales, pero omite la representación fraccionaria.

Estudiante Eduardo: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

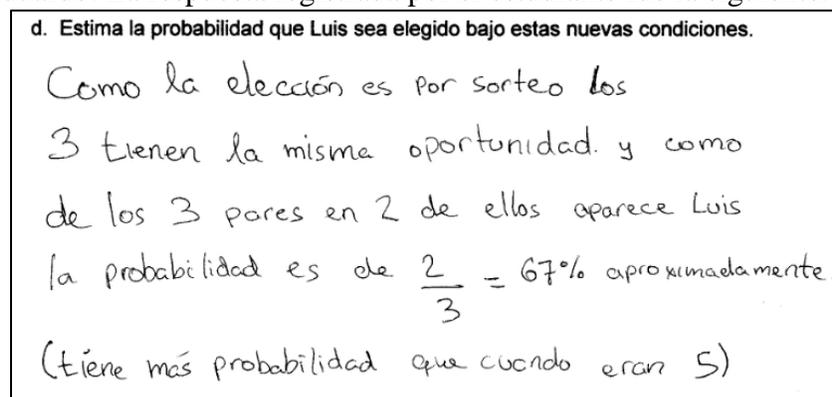
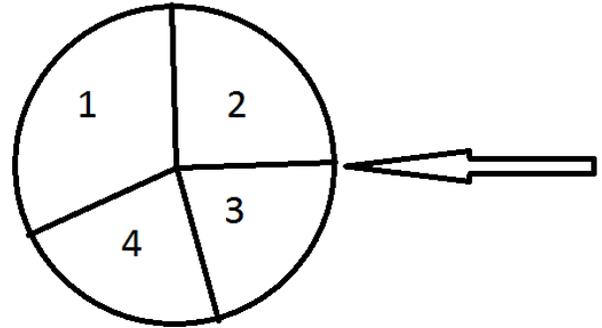


Figura 59. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 2-d de la prueba de salida.

Comentario. Eduardo evidencia dominio en la categoría de concepto dentro del análisis propuesto en el EOS pues aplica la concepción clásica de probabilidad. Además evidencia dominio en la categoría de argumentos, pues justifica su respuesta, considerando la naturaleza de que la ocurrencia de cada uno de los casos descritos es la misma. En la categoría de lenguaje, el estudiante evidencia dominio en las notaciones respectivas, pues expresa su respuesta en notaciones equivalentes empleando tanto en notación fraccionaria como porcentual.

Situación 3. El colegio ha organizado una Ginkana y uno de los juegos que presenta es el de la ruleta giratoria que se muestra. La flecha indica la opción ganadora (en caso que cae en línea se vuelve a tirar). Si un estudiante del colegio decide participar una única vez en el juego, es decir va realizar un único tiro entonces:

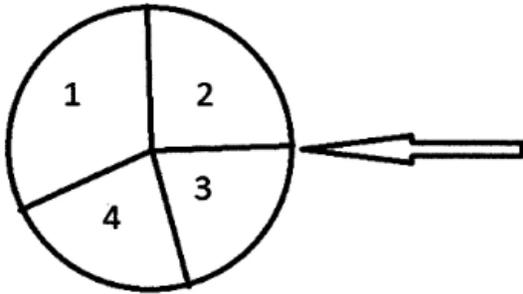


a. ¿Es posible que obtenga el número 5? Justifique su respuesta.

En esta situación 25 estudiantes respondieron correctamente de los 26 participantes. A continuación se muestra las respuestas de tres de ellos.

Estudiante Mauricio: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

3. El colegio ha organizado una Ginkana y uno de los juegos que presenta es el de la ruleta giratoria que se muestra. La flecha indica la opción ganadora (en caso que cae en línea se vuelve a tirar). Si un estudiante del colegio decide participar una única vez en el juego, es decir va realizar un único tiro entonces:



a. ¿Es posible que obtenga el número 5? Justifique su respuesta

No, porque EL NUMERO 5 NO SE PRESENTA COMO UNA OPCION EN EL JUEGO.

Figura 60. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 3-a de la prueba de salida.

Comentario: Mauricio evidencia dominio en la categoría de situación – problema dentro del análisis del EOS, pues contextualiza su respuesta basado en el hecho de la imposibilidad de ocurrencia de un suceso que no se encuentra en el espacio muestral.

Estudiante Eduardo: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

3. El colegio ha organizado una Ginkana y uno de los juegos que presenta es el de la ruleta giratoria que se muestra. La flecha indica la opción ganadora (en caso que cae en línea se vuelve a tirar). Si un estudiante del colegio decide participar una única vez en el juego, es decir va realizar un único tiro entonces:

a. ¿Es posible que obtenga el número 5? Justifique su respuesta

NO Porque el número 5 no está en el juego

Figura 61. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 3-a de la prueba de salida.

Comentario: El estudiante evidencia dominio en la categoría de situación – problema, pues interpreta la situación en el hecho de inexistencia de este número en el conjunto de los posibles resultados al cual se refiere.

Estudiante Axel: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

3. El colegio ha organizado una Ginkana y uno de los juegos que presenta es el de la ruleta giratoria que se muestra. La flecha indica la opción ganadora (en caso que cae en línea se vuelve a tirar). Si un estudiante del colegio decide participar una única vez en el juego, es decir va realizar un único tiro entonces:

a. ¿Es posible que obtenga el número 5? Justifique su respuesta

No por que no hay el número cinco en la ruleta.

Figura 62. Respuesta realizada por Axel a la situación 3-a de la prueba de salida.

Comentario: Axel evidencia dominio en la categoría de situación – problema dentro del análisis del EOS, pues sustenta su respuesta en el hecho que no estar dicho número en el conjunto de los posibles resultados, lo cual le lleva a afirmar que no es posible la obtención de dicho resultado.

Situación 3-b. ¿Es posible que se obtenga el 1 y 2 en el mismo tiro?

En esta situación 17 estudiantes respondieron correctamente. A continuación se muestra tres de ellas

Estudiante Mauricio: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

b. ¿Es posible que obtenga el 1 y 2, en el mismo tiro?
 No es posible por que son
 regiones separadas y si
 cae en línea se tira
 otra vez.

Figura 63. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 3-b de la prueba de salida.

Comentario: Mauricio evidencia dominio en la categoría de situación – problema en el análisis del EOS, pues basa su respuesta en la distribución de las regiones disjuntas, la cual imposibilita que la flecha señale ambas regiones a la vez, garantizando que se obtenga un único resultado.

Estudiante Eduardo La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

b. ¿Es posible que obtenga el 1 y 2, en el mismo tiro?
 No, porque son regiones o zonas
 diferentes y la flecha señala
 a una sola zona. Si cae al medio
 de las dos zonas, no vale y se vuelve a girar

Figura 64. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 3-b de la prueba de salida.

Comentario: Eduardo evidencia dominio en la categoría de situación – problema dentro del análisis del EOS, pues hace referencia a la restricción en caso la flecha señale una de las

líneas divisorias y por ser regiones disjuntas sostiene que se puede obtener solamente uno de los cuatro resultados numerados que se encuentran presentes en la ruleta.

Situación 3-c. ¿Es posible que obtenga un 3 o un 4?

En esta situación 21 estudiantes respondieron correctamente de los 26 participantes. A continuación se presenta las respuestas registradas por tres de ellos.

Estudiante Mauricio: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

c. ¿Es posible que obtenga un 3 o un 4?
 SI ES POSIBLE POR QUE NOS DA
 LA POSIBILIDAD QUE SEA CUALQUIERA
 DE LAS DOS OPCIONES.

Figura 65. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 3-c de la prueba de salida.

Comentario: El estudiante presenta dominio en la categoría de concepto dentro del análisis del EOS, pues asume el hecho que es posible que se obtenga alguno de los dos números propuestos, al emplear una expresión equivalente como es cualquiera de las dos opciones. En la categoría de lenguaje no es explícito en el equivalente a la unión de eventos simples.

Estudiante Eduardo La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

c. ¿Es posible que obtenga un 3 o un 4?
 Si, porque los dos números estan
 dentro de los posibles y el "o"
 nos dice uno de los dos.

Figura 66. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 3-c de la prueba de salida.

Comentario: Eduardo evidencia dominio en la categoría de lenguaje dentro del análisis del EOS, pues interpreta la situación como la posibilidad que se obtenga uno de dichos números, por ser elementos del espacio muestral y expresa que el hecho de ser elemento o suceso de dicho espacio muestral garantiza la posibilidad de ocurrencia.

Estudiante Axel: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

c. ¿Es posible que obtenga un 3 o un 4?
Si es posible que tenga un 3 o un 4 Pero eso depende de la Suerte de uno

Figura 67. Respuesta realizada por Axel a la situación 3-c de la prueba de salida.

Comentario: El estudiante evidencia dominio en la categoría de concepto dentro del análisis del EOS, pues considera como posible el hecho que salga de uno de dichos números. En la categoría argumentos evidencia falencia pues atribuye a la suerte como factor de ocurrencia, siendo este evento de naturaleza aleatoria.

Situación 3-d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 5?

En esta situación 23 estudiantes de los 26 participantes respondieron correctamente. A continuación presentamos la respuesta de tres de ellos.

Estudiante Mauricio: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 5?
0%, porque el 5 no está presente en el juego de la ruleta.

Figura 68. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 3-d de la prueba de salida.

Comentario: El estudiante evidencia dominio en la categoría de concepto dentro del análisis del EOS, pues en la actividad anterior realizó previamente el listado de los elementos que constituyeron el espacio muestral, y considerando la ausencia de dicho suceso en el espacio muestral, establece la probabilidad nula de ocurrencia asignándole el valor cero en su notación porcentual.

Estudiante Eduardo La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 5?

0 de 4, es decir 0%.
 Porque no está en la lista
 de los posibles.

Figura 69. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 3-d de la prueba de salida.

Comentario: El estudiante evidencia dominio en la categoría de argumentos, pues hace referencia a los cuatro únicos posibles resultados que se puede obtener al girar la ruleta, y dado que el valor solicitado no se encuentra es que asigna el valor cero como proporción y como porcentaje.

e. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 y 2 en el mismo tiro?

En esta situación, 17 estudiantes de los 26 participantes lograron responder correctamente. A continuación se muestra las respuestas de tres de ellos.

Estudiante Mauricio: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

e. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 y 2 en el mismo tiro?

0%. POR QUE NO PUEDE SALIR
 AMBOS RESULTADOS A LA VEZ EN
 UN MISMO TIRO.

Figura 70. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 3-e de la prueba de salida.

Comentario: Mauricio evidencia dominio en la categoría de concepto dentro del análisis propuesto por el EOS, pues asigna el valor de probabilidad teniendo como justificación el hecho que imposibilita que ocurra un suceso conteniendo los dos valores a la vez.

Estudiante Eduardo La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

e. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 y 2 en el mismo tiro?

0% porque no es posible que se pueda obtener 2 números a la vez en un mismo tiro.

Figura 71. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 3-e de la prueba de salida.

Comentario: El estudiante evidencia dominio en la categoría situación – problema, pues interpreta la probabilidad nula de ocurrencia de un evento que contiene la intersección de dos regiones disjuntas y en la cual es posible que ocurra solo una de ellas.

Estudiante Axel: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

e. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 y 2 en el mismo tiro?

0% probabilidad por que solo se puede sacar o obtener un numero por tiro en la ruleta.

Figura 72. Respuesta realizada por Axel a la situación 3-e de la prueba de salida.

Comentario: El estudiante evidencia dominio en la categoría de situación – problema dentro del enfoque propuesto por el EOS, pues justifica la probabilidad nula, valiéndose de la condición inicial de la no ocurrencia de sucesos disjuntos a la vez, que en su equivalente geométrico son las regiones disjuntas de la ruleta.

Situación 3-f. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3 o 4 en el mismo tiro?

En esta situación 16 estudiantes respondieron correctamente de los 26 participantes. A continuación se muestra la respuesta de tres de ellos.

Estudiante Mauricio: La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

f. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3 o 4 en el mismo tiro?
 POR EL GRAFICO ES MENOS DE LA
 MITAD, PODRIA DECIR UN 45%.
 APROXIMADAMENTE.

Figura 73. Respuesta realizada por Mauricio a la situación 3-f de la prueba de salida.

Comentario: El estudiante evidencia dominio en la categoría de situación – problema dentro del análisis del EOS, pues consideró el criterio de la unión de ambas regiones, las cuales ocupan menos del 50% de la ruleta, realizando una estimación.

Estudiante Eduardo La respuesta registrada por el estudiante fue la siguiente.

f. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3 o 4 en el mismo tiro?
 Es menos del 50%, aproximadamente
 la probabilidad es del 45% o 0,45.

Figura 74. Respuesta realizada por Eduardo a la situación 3-f de la prueba de salida.

Comentario: El estudiante evidencia dominio en la categoría de situación – problema dentro del análisis del EOS, pues hace una aproximación de la probabilidad, además en la categoría de procedimiento, realizó una prolongación en la ruleta como justificación tomando como línea de referencia uno de los lados limitantes.

De los resultados obtenidos en la prueba de salida podemos establecer las siguientes conclusiones:

Según las categorías propuestas por el EOS en el marco de idoneidad didáctica, los estudiantes lograron superar las dificultades respecto al conocimiento sobre situaciones de incertidumbre pues son más de 18 alumnos de los 26 que participaron, además de su diferenciación respecto a situaciones que no presentan incertidumbre. Las categorías donde se presenta superación de las dificultades son los relativos a: conceptos, situaciones –

problema, argumentos, lenguaje y procedimientos conforme se ha podido analizar en las respuestas planteadas por los estudiantes. Las situaciones que presentaron mayor cantidad de justificaciones válidas son las referidas a las situaciones de incertidumbre 1-a y 1-b, que lograron responder correctamente 21 estudiantes. En tanto la situación de no incertidumbre 1-c, ha sido respondida correctamente por 18 estudiantes.

Los estudiantes en su mayoría lograron superar las dificultades respecto al conocimiento relativo a espacio muestral en la categorías de procedimiento, argumento y situación - problema en el análisis realizado dentro del enfoque del EOS, así 22 estudiantes lograron construir el conjunto correspondiente al espacio muestral finito correspondiente a la situación 2-a. Por otro lado, cuando se realizó restricciones que modificaba los elementos del espacio muestral, la cantidad de aciertos fue de 20 estudiantes, que es la que corresponde a la situación 2-c.

La situación 3-a, referida a la imposibilidad de ocurrencia de un suceso que no se encuentra en el espacio muestral fueron 25 estudiantes que respondieron acertadamente.

Los estudiantes presentan dominio en las categorías de concepto y situación – problema según el enfoque del EOS, referido a la ocurrencia simultánea de dos sucesos simples presentada en la situación 3-b, el número de respuestas correctas es inferior a lo alcanzado en la situación 3-a, esto se debe como señala Ortiz (2002) a la dificultad que se presenta al determinar el espacio muestral que se requiere establecer para la determinación de sucesos simples. En cuanto a la movilización del conocimiento referido a la ocurrencia de un suceso que implica la unión de sucesos simples planteado en la situación 3-c, fueron 21 estudiantes que respondieron acertadamente.

Los estudiantes al establecer la probabilidad de ocurrencia de un suceso, dada las condiciones de las situaciones planteadas en la categoría de concepto según el EOS, recurrieron al enfoque clásico, considerando las características particulares del espacio muestral finito en cada una de las situaciones planteadas: 2-b, 2-d, 3-d, 3-e y 3-f.

Los estudiantes lograron superar significativamente las dificultades respecto a los conocimientos previos requeridos para el tratamiento de la probabilidad condicional, los cuales fueron identificados en la prueba diagnóstica, así podemos afirmar:

- En la dificultad de la determinación del espacio muestral, los estudiantes si bien no representaron dicho espacio en su notación conjuntista en las diversas situaciones propuestas, si fueron capaces de identificar los elementos que lo constituyen.
- En la dificultad del cálculo de probabilidad, los estudiantes al haber realizado actividades con espacio muestral finito, fueron capaces de establecer la probabilidad de ocurrencia de un evento simple o compuesto utilizando el concepto clásico de probabilidad, aunque muchos de ellos apelaban a la determinación del espacio muestral para dicho cálculo.



5.5.3 VENTAJAS DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES.

Las dificultades en la movilización de los conocimientos básicos de probabilidad que presentan los estudiantes y las cuales fueron corroboradas mediante la aplicación de la prueba diagnóstica, han servido para iniciar una secuencia de actividades orientadas a ayudar a superar tales dificultades, considerando las categorías conceptos, lenguaje, situación – problema, procedimientos y argumentos planteadas por el EOS .

Esta secuencia de actividades se caracterizó por promover en los estudiantes la realización de un aprendizaje reflexivo en su proceso de reforzamiento de los conocimientos tratados, siendo la principal fuente de este aprendizaje la naturaleza de contexto real de las situaciones propuestas, las cuales motivaron y despertaron interés en ellos por cuestionar los resultados más impredecibles que pudiese ocurrir pero que estaban dentro de lo posible.

Pudimos observar un cambio significativo en la forma como se concibe el entorno por parte de los estudiantes participantes, pues comenzaron a surgir cuestionamientos ante situaciones- problemas preestablecidas, como es la determinación del espacio muestral. Otra de las características que permitió desarrollar las actividades con gran interés por parte de los estudiantes ha sido el carácter colectivo del desarrollo de las actividades, ya que les permitía explorar por ellos mismos sobre la posibilidad de ocurrencia de situaciones poco probables en escenarios que les son cotidianos.

Cabe mencionar que si bien formalmente esta secuencia de actividades está constituida por cinco actividades, en la práctica se ha extendido más allá de las propuestas en sí, pues tuvimos que orientar las dificultades que han tenido en espacios y tiempos distintos, en algunas ocasiones empleando momentos posteriores a las actividades planteadas o en el momento del desarrollo de otros tópicos del curso de matemática, ello era interesante pues evidenciaba el interés de los estudiantes por comprender los conceptos que involucraba el proceso de reforzamiento y lo que era más interesante un cambio en la forma de concebir e interpretar la realidad, pues como se ha mencionado en varias partes del presente trabajo, la formación que se imparte a nuestros estudiantes está orientado a la obtención de resultados únicos, es decir en una concepción determinística ajena a la realidad.

Esta secuencia de actividades permitió en los estudiantes promover un ambiente de interaprendizaje espontáneo, pues a medida que avanzábamos en la secuencia, se observaba una mayor facilidad para la ejecución de las actividades en forma colectiva o grupal, pues cada una de las actividades ha sido desarrollada en parejas. Es en esas circunstancias que nuestro rol como orientador ha sido importante aunque logramos que el centro del aprendizaje sean los objetos matemáticos que veníamos proponiendo como reforzamiento y los estudiantes se convirtieron en los encargados en consolidar sus aprendizajes. Las discusiones en cuanto a las situaciones posibles propias de su contexto permitieron cumplir con los objetivos propuestos. En muchas de las circunstancias los tiempos resultaron cortos, por cuanto se trataba de un cambio de observar y entender la realidad.

La presentación de las situaciones propias de su contexto requiere de una correcta redacción, para lo cual hemos tenido que recurrir a la experticia de diversos docentes, sin embargo hemos observado que el primer inciso del ítem 1 de la prueba de entrada presentó dificultad de interpretación constituyendo una dificultad en la categoría de lenguaje en el enfoque del EOS, por lo que de manera reflexiva asumimos un compromiso en mejorar su redacción y así evitar dificultad de comprensión.

Consideramos que promover actividades de esta naturaleza en nuestros estudiantes, incluso a estudiantes de menor grado académico, permitirá alcanzar las condiciones para desarrollar el tema de probabilidad condicional con la convicción de un aprendizaje reflexivo de parte de ellos.

CONCLUSIONES

Luego del análisis realizado a los resultados de la prueba de salida, arribamos a las conclusiones que dan respuesta a nuestras preguntas de investigación.

¿La implementación de una secuencia de actividades según los criterios de idoneidad del Enfoque Ontosemiótico permitirá movilizar los conocimientos previos requeridos para el tratamiento de la probabilidad condicional?

Básicamente las dificultades mostradas por los estudiantes participantes del presente trabajo, según lo previsto por Serradó, et al (2006), estuvo relacionado a la identificación y comprensión de situaciones que presenta incertidumbre y la discriminación respecto a situaciones deterministas considerando las categorías de concepto, situación – problema, procedimiento, lenguaje y argumentos, pues como sostiene Osorio (2012), la formación académica brindada a los estudiantes no es próxima a identificar y analizar situaciones de incertidumbre por el hecho de ser presentadas como determinísticas. Esta dificultad se hizo evidente en la aplicación de la prueba diagnóstica, donde el lenguaje utilizado por los estudiantes según el EOS para expresar la probabilidad de un evento presentaba carencias en su representación. Otro de los conocimientos previos que presentó dificultades en la categoría de procedimientos según el EOS, es la determinación del espacio muestral, previsto por Serradó, et al (2006), pues los estudiantes presentan dificultad al momento de establecer el conjunto de todos los sucesos que pudiese ocurrir. Finalmente, pudimos identificar la dificultad en los estudiantes las categorías de concepto y lenguaje según el EOS, al pretender establecer la probabilidad de ocurrencia de un suceso, evidencian sesgos de interpretación de la situación, lo cual concuerda con estudios realizados por Lecoutre y Duran (1998), se aprecia al momento que ellos resuelven las situaciones 3-d.

La existencia de dificultades en la movilización de los conocimientos previos necesarios para la comprensión del concepto de probabilidad condicional, impulsa la necesidad de establecer tratamientos didácticos orientados a superar dichas dificultades. Frente a ello se implementó una secuencia de actividades a partir del Enfoque Ontosemiótico (EOS), que como sostiene Godino et al (2006) constituye un conjunto de nociones teóricas, que desde un punto de vista pragmático se orienta a explicar y actuar sobre diversos escenarios que se

producen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así bajo este soporte teórico, los estudiantes participaron de una secuencia en la que la metodología participativa y reflexiva permitió alcanzar resultados óptimos en las categorías de concepto, situación – problema, argumentos y lenguaje propuestos por el EOS, en el tratamiento de las dificultades establecidas. Así de esta manera logramos consolidar el aprendizaje de los conocimientos requeridos en la mayoría de los estudiantes participantes, con lo que podemos afirmar que se logró responder a nuestra pregunta de investigación.

En el presente trabajo de investigación se establecieron las dificultades que se presenta en la movilización de los conocimientos previos necesarios para que los estudiantes puedan construir el concepto de probabilidad condicional, así como determinar el impacto de la aplicación de una secuencia de actividades en la construcción de los conocimientos previos requeridos, orientado a superar las dificultades identificadas en el marco de las categorías planteadas por el EOS. A la luz de los análisis preliminares realizados para la identificación de tales dificultades y de los resultados obtenidos luego de aplicar la prueba de salida, se plantean las siguientes consideraciones finales en esta investigación:

La comprensión de probabilidad condicional requiere de conocimientos previos. En nuestro trabajo se ha encontrado dificultades en las categorías de concepto, situación – problema, argumentos, procedimientos y lenguaje según el análisis propuesto por el EOS, en la movilización de dichos conocimientos previos por parte de nuestros estudiantes y que fueron determinadas a través de la aplicación de la prueba diagnóstica.

La primera dificultad encontrada fue observada en la categoría de concepto según el EOS, cuando los estudiantes trataron de determinar la existencia de incertidumbre en determinadas situaciones. Esta dificultad encontrada es corroborada en los estudios realizados por Batanero (2002), respecto a las dificultades que presentan los estudiantes en la determinación de la incertidumbre o aleatoriedad en determinados contextos, a fin de establecer toma de decisiones adecuadas.

La segunda dificultad encontrada fue en las categorías de procedimientos, situación – problema y lenguaje según el EOS, para la determinación del espacio muestral de una situación que presenta incertidumbre, así como la identificación de los sucesos o eventos

que lo conforman. Al respecto los estudios realizados por Serradó, et al (2006), refieren de la existencia recurrente en los estudiantes, y que resulta determinante al momento de establecer probabilidad en sucesos simples y compuestos.

La tercera dificultad encontrada fueron según las categorías de concepto y lenguaje de acuerdo al EOS, los sesgos de probabilidad que presentaron los estudiantes, esto se pudo apreciar al momento de pretender establecer la probabilidad en sucesos simples o compuestos de espacio muestral no equiprobable, lo cual es advertido por Lecoutre (1992), quien pudo apreciar esta dificultad en estudiantes de distintos niveles de estudio.

Ante estas dificultades establecidas en la evaluación diagnóstica, se implementó una secuencia didáctica de actividades teniendo como respaldo el Enfoque Ontosemiótico. Este enfoque como lo sostiene Godino, et al (2006), permite realizar tratamientos a las dificultades según las categorías planteadas en el EOS, que se pudiesen presentar en la movilización de los conocimientos en Matemática. Así, los resultados obtenidos en la prueba de salida confirman la superación significativa considerando las categorías planteadas en el EOS, de las dificultades que presentaron los estudiantes en los conocimientos previos requeridos para la comprensión del concepto de probabilidad condicional.

La comprensión y dominio de estos conocimientos es el resultado de una serie de actividades orientadas a reforzar tales conocimientos. La ejecución de estas actividades se realizó en un periodo de cinco semanas, y que tuvieron como característica la participación reflexiva de los estudiantes para compartir en sus grupos de trabajo la comprensión de los conocimientos implementados.

Los resultados obtenidos confirman la existencia de la posibilidad de superar las dificultades en las categorías de concepto, argumentos, situación – problema y lenguaje según el EOS de los conocimientos previos requeridos para la comprensión de la probabilidad condicional en un periodo de tiempo óptimo, considerando que tales dificultades se presenta en el común de los estudiantes que transitan en la educación básica por más de diez años.

La potencialidad para el logro de la superación de las dificultades establecidas, consideramos que radica en la posibilidad de permitirles desarrollarse reflexivamente en situaciones cercanas a su cotidianidad.

Consideramos que las actividades de contexto propuesto a los estudiantes han logrado despertar el interés, lo que reafirma nuestra convicción de procurar desarrollar en ellos los aprendizajes que estén estrechamente ligados a sus necesidades.

Esperamos que esta investigación promueva una reflexión a quienes ejercemos la docencia matemática, respecto a la necesidad de incorporar situaciones propias del contexto de nuestros estudiantes y que les permita afrontar con éxito las dificultades que se presenta en la movilización de los conocimientos previos requeridos para el tratamiento de la probabilidad condicional. Asimismo, pretendemos coadyuvar a que nuestros estudiantes realicen el tratamiento adecuado a cada uno de los conocimientos requeridos, y que son necesarias no solo para la comprensión y la comunicación de saberes probabilísticos; sino, principalmente, como recurso y herramienta que le permita desenvolverse en la sociedad con idoneidad, asumiendo decisiones pertinentes y correctas.

Asumimos reflexivamente el compromiso de mejorar la redacción de las situaciones planteadas a los estudiantes ya que en el desarrollo de las actividades propuestas en el presente trabajo, presentaron dificultad de comprensión, teniendo que ser subsanadas mediante las asesorías orientadoras a los grupos de trabajo.

Confiamos que el presente trabajo motive a la comunidad docente a adentrarse en el estudio de propuestas didácticas que considere un acercamiento a los intereses y necesidades de nuestros estudiantes, entendiendo la relevante importancia de la estadística y probabilidad en la formación de nuestros estudiantes.

REFERENCIAS

- Advíncula, E. y Osorio, R. (2013). *Logros de aprendizaje de los estudiantes de Educación Básica en torno a los temas de Estadística y Probabilidad*. Recuperado de <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/337.pdf>
- Batanero, C (1999). Aleatoriedad, sus significados e implicancias educativas. Uno. Recuperado de <http://www.ugr.es/~batanero>
- Batanero, C (2001). *Didáctica de la Estadística*. Recuperado <http://www.ugr.es/~batanero>
- Batanero, C (2002). *Los retos de la educación estadística*. Recuperado <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf>
- Batanero, C (2005). *Significados de la probabilidad en la educación secundaria*. Recuperado de <http://www.ugr.es/~batanero>
- Canavos, G. (1987). *Probabilidad y Estadística*. México: Mc Grown Hill.
- Cañizares, M. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. España: Universidad de Granada.
- Contreras, J. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Universidad de Granada. España.
- Coutinho, C. (1994) *Introducao ao conceito de probabilidade por uma visao frequentista*. Brasil. PUC-SP.
- Godino, J. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Actas de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife (Brasil). Recuperado de <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/CP-godino.pdf>
- Godino, J. y Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des mathematiques*.

- Godino, J. y Batanero, C (1998). *Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. I. Vale Ediciones.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Proyecto Edumat-Maestros Recuperado el 12 de marzo de 2015 de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V (2007). *The onto-semiotic approach to research in mathematics education*. Recuperado de <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/godino>.
- Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M (2006). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas*. Paradigma, VOL. XXVII, Nº 2, diciembre de 2006 / 221-252. Recuperado de <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf>
- James, B. (2004). *Probabilidad: Un curso de nivel intermedio*. Lima, Ed. IMCA
- Jiménez, L. y Jiménez, J. (2005) *Enseñar probabilidad en primaria y secundaria?. ¿Para qué y por qué?*. Cidse – Revista virtual Matemática. Recuperado el 16 marzo de 2015 de <http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/contribuciones-v6-n1-may2005/arti-aleat/>.
- Lecoutre, M. (1992). Cognitive models and problem spaces in Purely Random Situations. Recuperado de <http://link.springer.com/article/10.1007/BF00540060>
- Lecoutre, M. y Duran, J. (1998). *Judgements and Cognitive Models: A Study of an Uncertain Situation*. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/3482523.pdf?acceptTC=true>
- Longedo, A (2008), *Análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal y de sus procesos de resolución*. España. Universidad de Valencia.
- Ortiz, J. (2002) *La probabilidad en los libros de texto*. España: Universidad de Granada.

- Osorio, A. (2012) *Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior*. Lima. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Pajares, A. y Tomeo, V. (2009) *Didáctica de la Estadística y la probabilidad en Secundaria. Experimentos y materiales*. Recuperado de http://estudiosestadisticos.ucm.es/data/cont/docs/12-2013-02-06-CT03_2009.pdf.
- Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular Nacional (2009)*. Recuperado de www.minedu.gob.pe.
- Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. España. Ed. Algibe.
- Sánchez, E (2009) La probabilidad en el programa de estudios de matemáticas de la secundaria en México, en *Educación Matemática*. 21(2), pp 39 – 77.
- Serrano, L. (1996) *Significados Institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. España. Universidad de Granada.
- Vílchez, J. (2005) *La enseñanza de las funciones trigonométricas en el quinto grado de educación secundaria*. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú..
- Vladimirovna, O. (2005) *Fundamentos de probabilidad y estadística*. Recuperado de https://books.google.com.pe/books/about/Fundamentos_de_Probabilidad_y_Estad%C3%ADsti.html?id=cbdromy2Xrwc&hl=es.

APÉNDICES



APÉNDICE I – INSTRUMENTOS DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO.

Instrumento 1 para la verificación del dominio de los conceptos previos a probabilidad condicional que poseen los estudiantes.

APELLIDOS Y NOMBRES: _____

EDAD. _____ CUARTO GRADO DE SECUNDARIA. SECCIÓN “ ”

EN CADA SITUACION ESCRIBE LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA Y JUSTIFICA CADA UNA DE TUS RESPUESTAS.

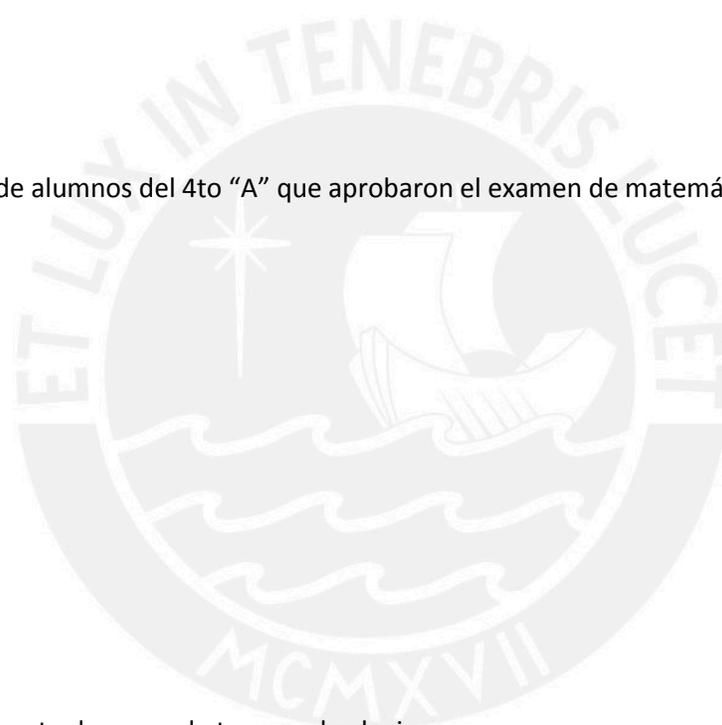
1. Identifica cuáles son situaciones aleatorias y cuáles son situaciones deterministas. Explica por qué.
 - a. La temperatura que hierve el agua al nivel del mar.
 - b. Número de autos que circula durante una hora en la avenida Faucett.
 - c. Tiempo que tarda en llegar la luz desde el sol a la tierra.
 - d. Un alumno del cuarto grado se presenta como candidato para alcalde en las elecciones municipales escolares y gana las elecciones.

2. El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de una situación de incertidumbre. Determina el espacio muestral de las siguientes situaciones:

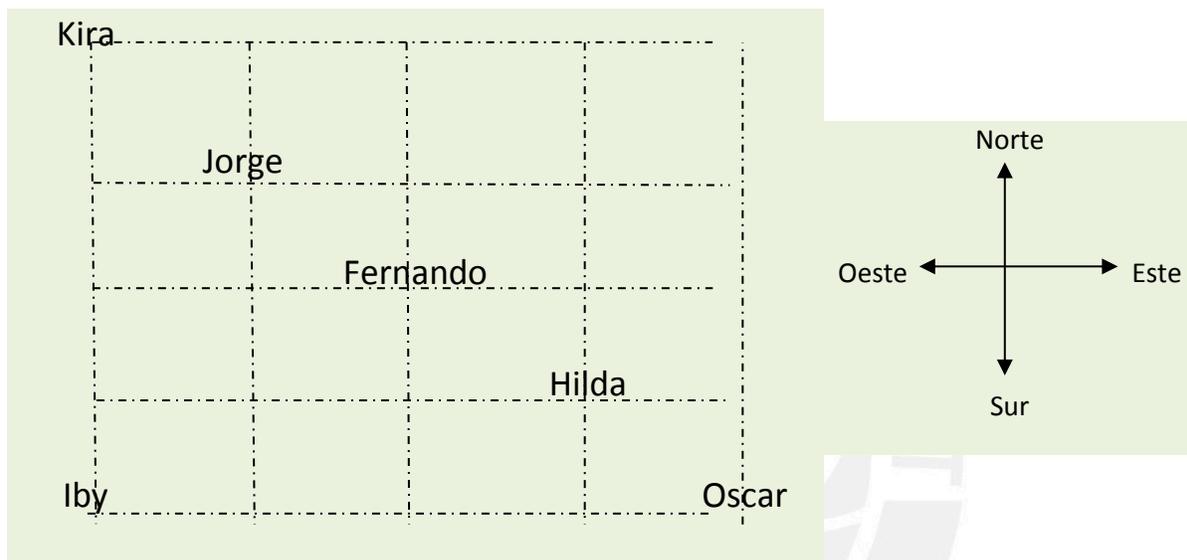
a) Lanzar un dado y obtener un resultado en la cara superior.

b) Número de alumnos del 4to "A" que aprobaron el examen de matemática si son 35 alumnos.

c) Tiempo que te demoras de tu casa al colegio.



3. Iby y sus amigos viven en un mismo barrio. La distancia de la casa de Iby a la casa de Kira, Jorge, Fernando, Hilda y Oscar es de cuatro cuadras a cada uno de ellos (conforme muestra la figura). Iby acostumbraba visitar a sus amigos durante los días de la semana de lunes a viernes (un día a cada uno de ellos), por ejemplo el lunes visitaba a Kira, el martes a Jorge, el miércoles a Fernando, el jueves a Hilda y el viernes a Oscar. Para hacer más emocionante las visitas decide realizarlo mediante un sorteo diario, lanzando una moneda, con la condición que si sale cara avanzaría una cuadra al norte y si sale sello avanzaría una cuadra al este. Cada jugada representa una cuadra, por lo que tiene que lanzar 4 veces para determinar a quién va visitar. (Cabe aclarar que esta estrategia de elección apertura la posibilidad que visite al mismo amigo más de un día a la semana)



- a) ¿Cuál es la diferencia entre la antigua forma de Iby de visitar a sus amigos y la nueva modalidad?
- b) ¿Cuáles son los posibles resultados al lanzar una moneda?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de salir cara o sello?
- d) ¿Todos los amigos tienen la misma probabilidad de ser visitados por Iby?

4. Una pareja ha planificado tener tres hijos. Suponemos que en cada parto tiene igual probabilidad de tener un hijo varón o mujer. ¿Cuál es la probabilidad que tengan dos hijos varones y una mujer?
- a) 3
 - b) 1
 - c) $1/3$
 - d) $3/8$



Instrumento 2 para el reforzamiento de los conceptos de incertidumbre y espacio muestral.

Integrantes:

1. _____

2. _____

En las siguientes actividades, lean la información proporcionada, dialoguen sobre la solución y redacten sus respuestas.

1. Se presenta tres situaciones cotidianas, determinen cuáles de ellas son **situaciones de incertidumbre** (es decir no sabemos el resultados exacto antes de que la situación ocurra) y cuáles **no son situaciones de incertidumbre**. Justifiquen adecuadamente sus respuestas.
 - a) Cantidad de alumnos que asisten al aula el día de hoy.
 - b) Nota a obtener en un examen de matemática.
 - c) Ropa que me pondré para asistir al colegio.

2. El área de Educación Física organiza un campeonato de fútbol escolar intersecciones a nivel interno, dividido en dos categorías: **Inferior** (conformado por los estudiantes del primero, segundo y tercer grado) y **Superior** (conformado por los estudiantes del cuarto y quinto grado). En cada categoría se va premiar al equipo con mayor puntaje. Respondan las siguientes interrogantes, justificando adecuadamente sus respuestas.

a. ¿Será posible que el premio de la categoría superior lo obtenga una sección A?

b. ¿Será posible que un equipo que participe con cuatro jugadores gane el premio?

c. ¿Consideras que es posible que el equipo premiado en la categoría superior sea la sección del tercero "F"?

Instrumento 3 para el reforzamiento de los conceptos de posibilidad y probabilidad en un espacio muestral de experimento aleatorio equiprobable.

Integrantes:

1. _____

2. _____

En las siguientes actividades, lean la información proporcionada, dialoguen sobre la solución y redacten sus respuestas.

Dado una situación de incertidumbre, se denomina posibilidad a cada uno de los eventos simples que conforma dicha situación.

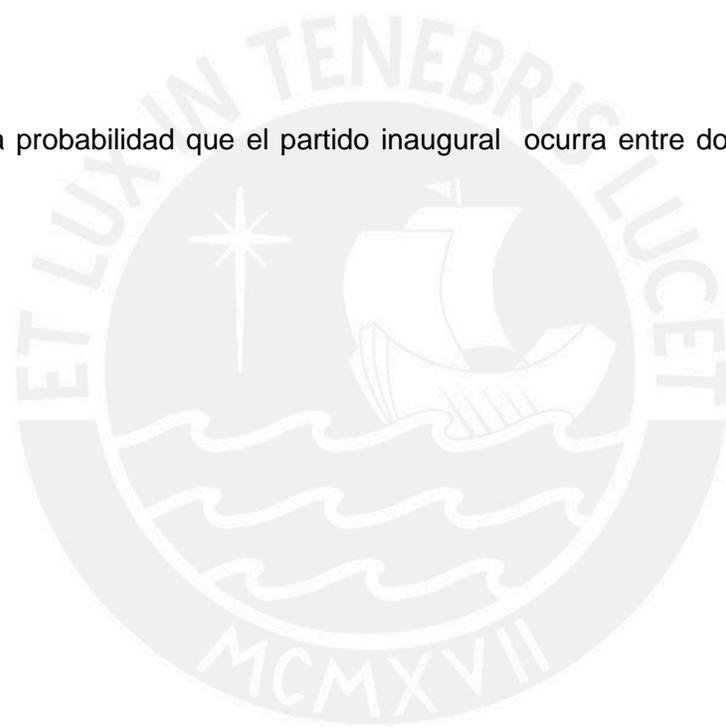
En tanto probabilidad es la valoración de la factibilidad de la ocurrencia de la posibilidad o posibilidades que conforma una situación de incertidumbre.

En situaciones de incertidumbre donde cada una de las posibilidades tiene la misma factibilidad de ocurrir, se denomina espacios equiprobables.

1. El área de Educación física organiza un campeonato de fútbol escolar intersecciones a nivel interno, dividido en dos categorías: **Inferior** (conformado por los estudiantes del primero, segundo y tercer grado) y **Superior** (conformado por los estudiantes del cuarto y quinto grado). El partido inaugural lo realizarán dos secciones del turno tarde que conforman la categoría superior y serán elegidos por sorteo.
 - a. Determina el conjunto de posibilidades que conforman el partido inaugural.

b. Estima la probabilidad que el partido inaugural ocurra entre 4G y 4F.

c. Estima la probabilidad que el partido inaugural ocurra entre dos equipos del 4to grado.



d. Estima la probabilidad que el partido inaugural se de entre dos equipos del mismo grado.

Instrumento 4 para el reforzamiento del conceptos de probabilidad en un espacio muestral de experimento aleatorio equiprobable.

Integrantes:

1. _____

2. _____

En la siguiente actividad, lean la información proporcionada, dialoguen sobre la solución y redacten sus respuestas.

1. En el salón del cuarto grado “A” turno mañana, la profesora de matemática tiene programado la exposición del grupo 6 conformado por los alumnos: Fernando, Hilda y César, sobre el tema progresiones aritméticas y geométricas. La profesora ha indicado que al iniciar la clase va sortear con papeles numerados quienes van exponer, pues serán solo dos: el primero expondrá sobre progresión aritmética y el segundo sobre progresión geométrica. De acuerdo a la información:

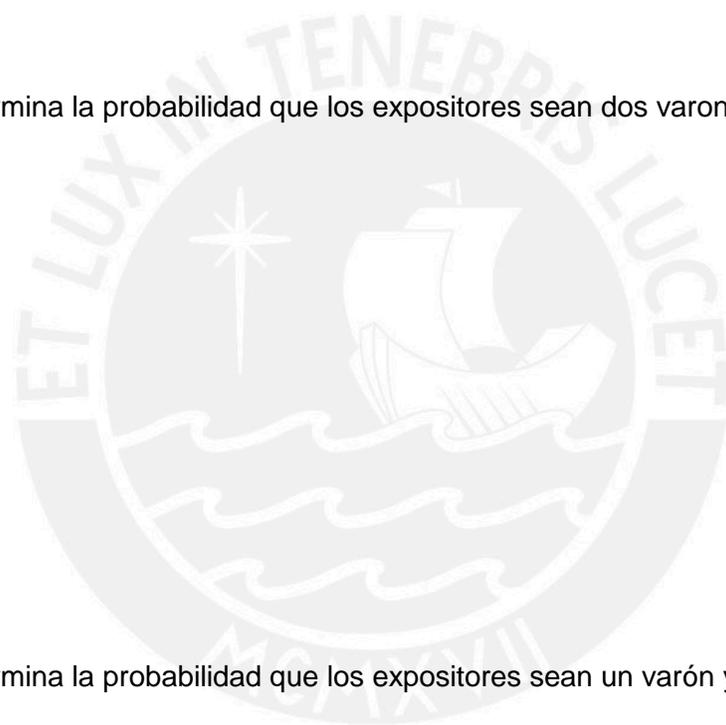
a) Verificar el conjunto de los posibles ponentes, considerando los temas de exposición.

b) Determina la probabilidad que Fernando exponga el tema progresiones aritméticas.

c) Determina la probabilidad que Fernando exponga alguno de los temas.

d) Determina la probabilidad que los expositores sean dos varones.

e) Determina la probabilidad que los expositores sean un varón y una mujer.



Instrumento 5 Prueba de salida para la verificación del dominio de los conceptos previos a probabilidad condicional.

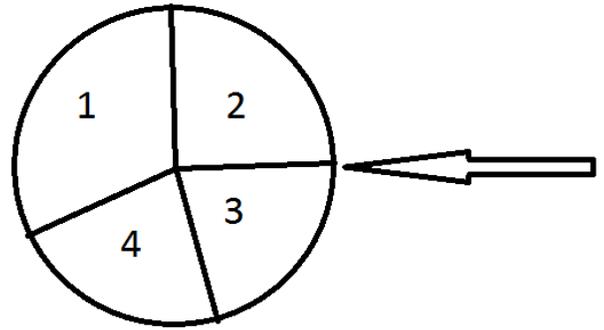
Apellidos y Nombres: _____

Fecha: _____

Resuelve las actividades propuestas:

1. Se presenta tres situaciones cotidianas, determina cuáles de ellas **son situaciones de incertidumbre** y cuáles **no son situaciones de incertidumbre**. **Justifica tu respuesta.**
 - a) Tiempo que permanece el semáforo en el color verde en la intersección de las avenidas Santa Rosa y Colonial.
 - b) Distancia recorrida entre tu casa y el colegio.
 - c) Ocurrencia de un eclipse solar mañana.

3. El colegio ha organizado una Ginkana y uno de los juegos que presenta es el de la ruleta giratoria que se muestra. La flecha indica la opción ganadora (en caso que cae en línea se vuelve a tirar). **Si un estudiante del colegio decide participar una única vez en el juego, es decir va realizar un único tiro entonces:**



- a. ¿Es posible que obtenga el número 5? **Justifique su respuesta**
- b. ¿Es posible que obtenga el 1 y 2, en el mismo tiro?
- c. ¿Es posible que obtenga **un 3 o un 4**?
- d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 5?
- e. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 y 2 en el mismo tiro?
- f. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3 o 4 en el mismo tiro?

APÉNDICE 2. CONCEPCIONES DE PROBABILIDAD Y MODELO DE EXPERIMENTO ALEATORIO.

La probabilidad presenta diferentes concepciones, fruto del desarrollo epistemológico que ha presentado a través de su desarrollo, estas son:

Concepción clásica de probabilidad.

Asume que la probabilidad de un suceso es un componente aleatorio de una cierta clase, si la probabilidad de este objeto es igual que la de cualquier otro componente de su clase. Esta definición es restringida a situaciones de juegos de azar en base a dados, monedas, extracción de cartas de una baraja o de bolas de urnas, así como sorteos; todas ellas legales, todas estas situaciones de incertidumbre que son reproducibles responden a la concepción laplaciana de probabilidad. Según esta concepción:

- La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.
- La probabilidad del suceso seguro es 1.
- La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de estos sucesos.
- El espacio muestral asociado al experimento debe ser finito para poder asociar probabilidades a los sucesos. Los sucesos elementales deben ser equiprobables, es decir, asignamos a cada suceso elemental una probabilidad $1/n$, donde n es el número de sucesos del espacio muestral.
- Si un suceso compuesto se compone de k sucesos simples, la probabilidad de dicho suceso compuesto es igual a k/n , donde n es el número de sucesos elementales del espacio muestral.
- La probabilidad de un suceso es un valor objetivo. Sólo depende del experimento y del número de sucesos elementales asociados y no de nuestro conocimiento sobre el fenómeno.

Concepción frecuencial de probabilidad.

En situaciones de contexto natural, al extender la idea de probabilidad, como el grupo sanguíneo de un recién nacido, nos percatamos que no podemos aplicar el supuesto de equiprobabilidad, es aquí donde se hace necesario determinar a través de una frecuencia

relativa, por lo que se tendría que emplear la concepción frecuencial, el cual es adecuado cuando se cuenta con un registro de un gran número de casos. Aquí surge el dilema de decidir el número necesario de experimentos para considerar que a partir de este número habríamos probado el aleatorio del objeto. Según esta concepción:

- La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.
- La probabilidad del suceso seguro es 1.
- La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de estos sucesos.
- Los experimentos aleatorios son repetibles indefinidamente en las mismas condiciones.
- Los espacios muestrales pueden o no ser finitos.
- Los sucesos elementales pueden o no ser equiprobables.
- La frecuencia relativa de los sucesos tiende a estabilizarse alrededor de un cierto número, que es la probabilidad del suceso, en un número suficientemente grande de experimentos. Esta estabilización tiene un carácter aleatorio, pues se producen oscilaciones, aunque la probabilidad de que su tamaño exceda un cierto valor puede calcularse en función del número de pruebas.
- La probabilidad de un suceso es un valor objetivo; depende del suceso y no del conocimiento que se tenga sobre el mismo.

En estas dos concepciones la probabilidad es una propiedad objetiva.

Concepción subjetiva de probabilidad.

Según esta concepción, si un objeto es o no considerado como miembro aleatorio depende de nuestro conocimiento sobre el mismo. Lo que puede ser aleatorio para uno, puede no ser aleatorio para otro. La aleatoriedad no es una propiedad física objetiva, sino que tiene un carácter subjetivo. De allí que esta concepción asume el supuesto que todas las probabilidades serían condicionales. Esta visión sería más adecuada en las situaciones en que poseemos cierta información, que puede cambiar nuestro juicio sobre la aleatoriedad o la probabilidad de un suceso.

Teniendo como fundamento los principios epistemológicos, asumiremos los siguientes conceptos básicos necesarios para la comprensión del concepto de probabilidad condicional.

Modelo matemático para un experimento (modelo probabilístico).

Según James (2004), un experimento es realizado bajo ciertas condiciones fijas. Sea Ω el conjunto de resultados posibles, donde por “resultado posible” se entiende un resultado elemental e indivisible del experimento. Ω será llamado espacio muestral del experimento.

A manera de ejemplo podemos considerar los experimentos:

Realizar las elecciones municipales escolares y observar el número de votos a favor que obtuvo cierto candidato. En esta situación $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, \text{cantidad total de estudiantes que votaron}\}$

Desarrollar un partido de fútbol y determinar la diferencia del score, en este caso los posibles resultados del experimento son números enteros no negativos. Si asumimos que no hay diferencia máxima, podríamos considerar $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$. Es evidente que ese conjunto no tiene un cardinal definido pues los elementos son resultados sin una condición que limita un máximo en la diferencia.

Medir la estatura en metros de un alumno de una institución educativa. Al igual que el experimento anterior, podríamos considerar $\Omega = [0, \infty[$, dado que no existe un parámetro que abarque todas las estaturas posibles, salvo el caso de considerar nuestras experiencia y los reportes de las fichas actualizadas de los estudiantes pertenecientes a la institución educativa, por lo que otros candidatos serían los conjuntos $\Omega = \left[\frac{1}{5}, 3\right]$ o $\Omega =]0, 3[$.

Aquí también estos conjuntos contienen todos los resultados posibles del experimento.

Por lo tanto, Ω tiene la propiedad de contener todos los resultados posibles.

De aquí asumimos que:

- A todo resultado posible le corresponde un único valor $\omega \in \Omega$.

- Resultados distintos corresponden valores distintos en Ω , es decir ω no puede representar más de un resultado

Evento. Si Ω es el espacio muestral del experimento, todo subconjunto $A \subset \Omega$, será llamado evento. Ω es el evento cierto o seguro, \emptyset el evento imposible. Si $\omega \in \Omega$, el evento $\{\omega\}$ se llama elemental o simple.

Definición clásica de probabilidad. Cuando Ω es finito, y se basa en el concepto de resultados equiprobables o en el principio de la indiferencia. Es decir cada uno de los eventos $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ tiene igual probabilidad de ocurrir entonces definimos

$$P(i) = \frac{1}{n}, \forall i \in \Omega, \text{ por lo que todo evento tendrá una probabilidad.}$$

Probabilidad geométrica. Dos eventos tienen la misma probabilidad si y solamente si tienen la misma área, es decir para $A \subset \Omega$, siempre que Ω tenga un área bien definida.

$$P(A) = \frac{\text{área } A}{\text{área } \Omega},$$

Evento aleatorio. Un evento A al cual atribuimos una probabilidad será llamado evento aleatorio. Asumamos que la clase de los eventos aleatorios posee ciertas propiedades básicas. Indicando con A la clase de los eventos aleatorios, estipulamos las siguientes propiedades para A

P1 $\Omega \in A, (\text{definiremos } P(\Omega) = 1)$

P2 Si $B \in A$, entonces $B^c \in A$

(y evidentemente definiremos $P(B^c) = 1 - P(B)$)

P3 Si $B \in A$ y $C \in A$, entonces $(B \cup C) \in A$

Álgebra de subconjuntos. Sea Ω un conjunto no vacío. Una clase A de subconjuntos de Ω que satisface las propiedades P1, P2 y P3, se llama álgebra de subconjuntos de Ω . El álgebra de subconjuntos válida las siguientes propiedades:

P4 $\emptyset \in A$

P5 $\forall n, \forall B_1, \dots, B_n \in A$ tenemos $\bigcup_{i=1}^n B_i \in A$ y $\bigcap_{i=1}^n B_i \in A$. Esta proposición afirma que un álgebra es cerrada bajo un número finito de aplicaciones de las operaciones \cup , \cap y c .

Propiedades de la probabilidad, sea P una probabilidad, entonces:

Propiedad 1. $P(B^c) = 1 - P(B)$, caso particular importante $P(\phi) = 1 - P(\Omega) = 0$

Propiedad 2. $0 \leq P(B) \leq 1$

Propiedad 3. $B_1 \subset B_2 \rightarrow P(B_1) \leq P(B_2)$

Modelo probabilístico. Está constituido por

- a. Un conjunto no vacío Ω , de resultados posibles, el espacio muestral.
- b. A es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω .
- c. P es la probabilidad de A.

Se tiene que todo modelo probabilístico es espacio de probabilidad (Ω, A, P)

Probabilidad condicional. Sea (Ω, A, P) un espacio de probabilidad. Si $C \in A$ y $P(C) > 0$, la probabilidad condicional de A dado B está definido por:

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}, \quad B \in A.$$