PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Representación de preferencias por funciones de utilidad continuas

Tesis para optar el grado de Magíster en Matemáticas

AUTOR

Lily Fanny Zapata Revoredo

ASESOR

Alejandro Lugon Ceruti

JURADO

Johel Beltrán Ramirez

Abelardo Jordán Liza

LIMA-PERÚ

2015

Dedicatoria

A Dios que me brindó vida.

A mis queridos padres Cándido y Rosa Emilia, por que este trabajo representa uno de sus anhelos.

Agradecimiento

Al Dr.Alejandro Lugon Ceruti; por su orientación, motivación y paciencia durante el desarrollo de este trabajo de investigación.

Índice general

Introducción

Las preferencias que se tiene por un determinado bien son variables entre cada consumidor, que elige de un conjunto de alternativas. Estas ideas propias de un contexto económico son representadas matemáticamente mediante una relación binaria, reflexiva y transitiva para las preferencias y un espacio topológico para el conjunto de alternativas. Tenemos así una forma cómoda de estudiar y analizar este tema económico y para el cual es factible emplear las diversas herramientas matemáticas.

De esta manera se sigue la idea de representar preferencias de manera numérica, esto es, definiendo una función de utilidad real. Surgiendo naturalemente las preguntas ¿Bajo qué condiciones podemos tener esta representación? ¿Es siempre posible representar una preferencia? Las respuestas a estas preguntas son dadas por el clásico ejemplo de las Preferencias Lexicógraficas, puesto que esta relación es reflexiva y transitiva pero no admite representación numérica.

De ser posible dicha representación numérica, surge otra pregunta ¿Es dicha representación una función continua? ¿Bajo qué condiciones se tendría una función continua? La respuesta a estas interrogantes se dan en el trabajo realizado por el economista francés Gérard Debreu, Premio Nobel de Economía en 1983, quien presentó en el año 1954 el trabajo titulado "Representation of a preference ordering by a numerical function" [1]. Este trabajo presenta un error en la definición de la función salto, la cual no logra cubrir todos los casos que se presentan.

Este trabajo fue corregido diez años más tarde, por el mismo autor, en el trabajo "Continuity properties of Paretian Utility" [2] definiendo la función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$ como la composición de dos funciones $u = v \circ g$.
Este proceso se inicia definiendo la función $v : X \to \overline{\mathbb{R}}$ como

$$v(x) = \sum_{n \in N(x)} \frac{1}{2^n}$$

donde $N(x) = \{n : O_n \prec \{x\}\}$ considerando una base numerable en el conjunto de alternativas X. En seguida se presenta un ejemplo, original de esta investigación, el cual ilustra que la función v no siempre es continua y es debido a este hecho que se justifica el paso de la construcción de la función $g : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se centra en demostrar que los saltos de $g(S)$ son abiertos. Para luego con estas funciones v y g se defina la función utilidad como $u = v \circ g$, la cual es continua. Este es el principal resultado de esos dos artículos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos las definiciones básicas y propiedades sobre órdenes, topología y nomenclatura económica que usaremos en el desarrollo del presente trabajo.

1.1. Definiciones y Propiedades Básicas.

Las preferencias de un consumidor frente a un conjunto de alternativas están representadas matemáticamente por una relación binaria $\preccurlyeq$. A continuación presentamos las propiedades que cumple esta relación.

Definición 1.1.1 *Una relación binaria $\preccurlyeq$ en X se llama de Pre- Orden, si satisface las siguientes propiedades:*

1. *Reflexividad*

   Para todo x en X. Se tiene que $x \preccurlyeq x$.

2. *Transitividad*

   Para todo x, y, z en X tal que $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z$; se debe cumplir que $x \preccurlyeq z$.

Cuando, además,satisface

3. *Antisimetría*

   Para todo x, y *en* X*,si* $x \preccurlyeq y \ \wedge \ y \preccurlyeq x$*, entonces* $x = y$

la relación se denomina un Orden.

Un Orden que satisface la siguiente propiedad

4. *Totalidad*

   Para todo x, y *en* X *se tiene que* $x \preccurlyeq y \ \vee \ y \preccurlyeq x$

se denomina un Orden Total , de lo contrario se llama Orden Parcial.

Un Pre-Orden que cumple la propiedad 4. es llamado un Pre-Orden Total.

Definición 1.1.2 *Dado un conjunto* X *diremos que está ordenado si en él hay definida una relación de orden. Dicho conjunto estará parcial o totalmente ordenado según que la relación definida sea parcial o total.*

El conjunto ordenado por la relación $\preccurlyeq$ será denotado por el par $(X, \preccurlyeq)$.

Ejemplo 1.1.1 *.*

1. *La relación* $\leqslant$ *menor igual en el conjunto de los números enteros* $\mathbb{Z}$ *es un orden total. Entonces se sigue que* $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ *es un Conjunto Totalmente Ordenado.*

2. *En* $X = \mathbb{R}^2$ *definamos la siguiente relación* $(a, b) \preccurlyeq (a', b')$ *si y sólo si* $a' \leqslant a$ *,* $b' \leqslant b$*. Vamos a probar que está relación es un Orden Parcial.*

   Sea (a, b) *un elemento de* $\mathbb{R}^2$*, por la reflexividad en* $\mathbb{R}$ *se tiene* $a \leqslant a$ *y* $b \leqslant b$*, entonces* $(a, b) \preccurlyeq (a, b)$*. Así se sigue la reflexividad de* $\preccurlyeq$*.*

Ahora, sean (a,b) *y* (a',b') *elementos de* $\mathbb{R}^2$*, se tienen* $(a,b) \preccurlyeq (a',b')$ *si y sólo si* $a' \leqslant a$ *,* $b' \leqslant b$ *y* $(a',b') \preccurlyeq (a,b)$ *si y sólo si* $a \leqslant a', b \leqslant b'$*. De donde* $a = a'$ *y* $b = b'$*; entonces* $(a,b) = (a',b')$*. Así se cumple la antisimetría.*

Sean $(a,b); (a',b'); (a'',b'')$ *elementos de* $\mathbb{R}^2$*, se tienen* $(a,b) \preccurlyeq (a',b')$ *si y sólo si* $a' \leqslant a$ *,* $b' \leqslant b$ *y* $(a',b') \preccurlyeq (a'',b'')$ *si y sólo si* $a'' \leqslant a', b'' \leqslant b'$ *de donde se concluye que* $a' \leqslant a, b' \leqslant b$*, es decir,* $(a,b) \preccurlyeq (a'',b'')$*. Así la relación es transitiva. Está relación prueba que es un Orden.*

Además, observamos que los pares ordenados $(0,1)$ *y* $(2,-1)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *no se pueden relacionar puesto que* $2 > 0$ *y* $-1 < 1$*.*

Por lo tanto $(\mathbb{R}^2, \preccurlyeq)$ *es un Conjunto Parcialmente Ordenado.*

3. *La relación* $(a,b) \preccurlyeq (a',b')$ *si y sólo si* $a - b \leq a' - b'$*; es un pre orden total en* $\mathbb{R}^2$*, como veremos a continuación.*

   La reflexividad es trivial. Sean $(a,b) \preccurlyeq (a',b')$ *y* $(a',b') \preccurlyeq (a'',b'')$*. Por definición, se tiene* $a - b \leq a' - b'$ *y* $a' - b' \leq a'' - b''$*, luego por la transitividad en los números reales* $a - b \leq a'' - b''$*, así por definición se tiene* $(a,b) \preccurlyeq (a'',b'')$*, por lo tanto la relación es transitiva.*

   Sean (a,b) *y* (a',b') *elementos de* $\mathbb{R}^2$*, como* $(a-b)$ *y* $(a'-b')$ *son elementos en* $\mathbb{R}$ *y como* $\leq$ *es una relación de orden total en* $\mathbb{R}$*, entonces se pueden comparar. Por lo tanto la relación* $\preccurlyeq$ *es total.*

   De donde se concluye que $\preccurlyeq$ *es un Pre Orden Total.*

4. *Orden Lexicográfico es el utilizado para ordenar las palabras en el diccionario. Formalmente para el caso en el que* $X = \mathbb{R}^2_+$*, el orden lexicográfico, dados dos puntos* $x = (a,b)$ *e* $y = (a',b')$*, lo expresamos como*

$$(a,b) \preccurlyeq (a',b') \leftrightarrow a < a' \vee (a = a' \wedge b \leqslant b').$$

El Orden Lexicográfico es una relación de Orden Total, como veremos a continuación.

Sea (a,b) *cualquier elemento de* $\mathbb{R}_+^2$, *se tiene que* $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ *y como* $\leqslant$ *es reflexiva se sigue que* $a = a \wedge b \leqslant b$ *entonces* $(a = a \wedge b \leqslant b)$, *de donde* $(a,b) \preccurlyeq (a,b)$.

Por lo tanto la relación es reflexiva.

Sean (a,b) *y* (a',b') *cualesquiera elementos de* $\mathbb{R}_+^2$ *tal que :*

$$(a,b) \preccurlyeq (a',b') \tag{1.1}$$

$$(a',b') \preccurlyeq (a,b) \tag{1.2}$$

De la definición de $\preccurlyeq$ *tendremos que:*

- *La ecuación (1.1) implica que* $a \leqslant a'$
- *La ecuación (1.2) implica que* $a' \leqslant a$

Por lo tanto

$$a' = a \tag{1.3}$$

Usando la ecuación (1.3) en la ecuación (1.1) y la definición del Orden Lexicográfico, tendremos que $b \leqslant b'$.

De modo análogo, usando la ecuación (1.3) en la ecuación (1.2) obtenemos $b' \leqslant b$. *Esto prueba que* $(a,b) = (a',b')$

Por lo tanto la relación es antisimétrica.

Sean $(a,b), (a',b')$ *y* (a'',b'') *cualesquiera elementos de* $\mathbb{R}_+^2$ *tales que:*

$$(a,b) \preccurlyeq (a',b') \tag{1.4}$$

$$(a',b') \preccurlyeq (a'',b'') \tag{1.5}$$

De la definición de $\preccurlyeq$ *tendremos que:*

- *La ecuación (1.4) implica que* $a \leqslant a'$
- *La ecuación (1.5) implica que* $a' \leqslant a''$

Por lo tanto $a \leqslant a' \leqslant a''$. *Si* $a < a''$ *entonces* $(a,b) \preccurlyeq (a'',b'')$ *como queríamos. Podemos entonces asumir que* $a = a''$. *En ese caso* $a = a' = a''$. *Usando que* $a = a'$ *en (1.4) concluimos que* $b \leqslant b'$ *o usando que* $a' = a''$ *en (1.5) concluimos que* $b' \leqslant b''$. *Entonces* $a = a''$ *y* $b \leqslant b''$ *probando que* $(a,b) \preccurlyeq (a'',b'')$ *como queriamos.*

Por lo tanto la relación es transitiva.

En este orden todos los elementos son comparables mediante $\preccurlyeq$. *Por lo tanto es un Orden Total.*

Definición 1.1.3 *Sean* X *un conjunto no vacío y* $\sim$ *una relación binaria sobre* X. *Se dice que* $\sim$ *es una relación simétrica si para todo par de elementos* a, b *de* X, *se tiene que si* $a \sim b$ *entonces* $b \sim a$.
Si, además, esta relación es reflexiva y transitiva se le llama relación de equivalencia.

Definición 1.1.4 *Sean* X *un conjunto distinto del vacío y* $\sim$ *una relación de equivalencia definida sobre* X.
Se define $[x] = \{y \in X / x \sim y\}$ *a la cual se le llama clase de equivalencia.*
El conjunto cociente $X/\sim$ *es el conjunto de las clases de equivalencia de* X.

Definición 1.1.5 *Dado* $(X, \preccurlyeq)$ *un conjunto totamente ordenado, se dice que una función de valor real* ϕ *definida sobre* X *preserva el orden, cuando*

$$x \preccurlyeq y \text{ si y sólo si } \phi(x) \leqslant \phi(y)$$

Definición 1.1.6 *Sea* X *un conjunto cualquiera, una topología* τ *sobre* X *es una colección de subconjuntos de* X *que tiene las siguientes propiedades:*

- *$\emptyset, X$ pertenecen a τ*

- *La unión arbitraria de elementos de cualquier subcolección de elementos de τ pertenecen a τ.*

- *La intersección finita de elementos de τ pertenecen a τ*

A los elementos de esta colección τ se les llama abiertos; al complemento de un abierto con respecto al conjunto X se le llama cerrado. Al par (X, τ) se le llama espacio topológico.

Ejemplo 1.1.2 *Si X es cualquier conjunto, la colección de todos los subconjuntos de X es una topología τ sobre X; esta es llamada Topología Discreta. La colección que considera al vacío y al mismo X solamente, es también una topología sobre X, la cual es llamada Topología Indiscreta o Topología Trivial.*

Definición 1.1.7 *Si X está dotado de una topología τ y una relación de orden $\preccurlyeq$ tal que para cada x' en X los conjuntos*

$$\{x \in X / x \preccurlyeq x'\}, \; \{x \in X / x' \preccurlyeq x\}$$

son cerrados, denominaremos a τ Topología Natural para $\preccurlyeq$.

Definición 1.1.8 *Suponga que τ y τ' son dos topologías sobre el conjunto X. Si $\tau' \supset \tau$, decimos que τ' es más fina que τ; si τ' contiene propiamente a τ, diremos que τ' es estrictamente más fina que τ. También diremos que τ es más fuerte que τ' o estrictamente más fuerte. En estas dos situaciones diremos que τ es comparable con τ' si $\tau' \supset \tau$ o $\tau \supset \tau'$.*

Definición 1.1.9 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una colección $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es una base en X para la topología τ si cualquier elemento de τ diferente del vacío, es unión de elementos que pertenecen a $\mathcal{B}$.*

Proposición 1.1.1 *Si X es un conjunto, y sea $\mathfrak{B}$ una colección de subconjuntos de X tal que satisface las siguientes propiedades:*

- *Para cada $x \in X$, existe al menos un elemento de $\mathcal{B}$ conteniendo al elemento x.*
- *Si x pertenece a la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe un elemento $\mathcal{B}_3 \in \mathcal{B}$ conteniendo a x tal que $\mathcal{B}_3 \subset (\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)$.*

Entonces $\mathfrak{B}$ es la base de una topología τ sobre X. Llamaremos a la topología τ obtenida en la proposición, la topología generada por $\mathfrak{B}$.

Demostración. Ver [7], §13 - pag 78. □

Definición 1.1.10 *Un conjunto D es denso en (X, τ) si todo abierto de τ intersectado con D es no vacío.*

Ejemplo 1.1.3 *Es un hecho bastante conocido que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, éste último dotado de la topología usual.*

Ejemplo 1.1.4 *$\mathfrak{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ es una base de la topología euclideana sobre $\mathbb{R}$.*
Sea S un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ entonces $S = \bigcup_{i \in J} (a_i, b_i)$ con $(a_i, b_i) \in \mathfrak{B}$.
Por otro lado sabemos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces

$$\mathfrak{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$$

es una base numerable de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.1.5 *Sea $\{x_i\}$ una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y p un elemento distinto de $x_i, \forall i$, con $x_i < p$. Sea $\widehat{X} = \{x_1, x_2, x_3, ...\} \cup \{p\}$ un subconjunto* *ordenado y numerable de* $\mathbb{R}$*, donde* $x_i < x_{i+1}, \forall i = 1, 2, ...,$ *definimos:*

$$
\begin{array}{ccc}
O_1 = \{x_1\} & O_2 = \{x_1, x_2, x_3, ...\} \cup \{p\} & O_3 = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_i, x_{i+1} ...\} \\
O_4 = \{x_2\} & O_5 = \{x_2, x_3, x_4, ...\} \cup \{p\} & O_6 = \{x_2, x_3, x_4, ..., x_i, x_{i+1} ...\} \\
O_7 = \{x_3\} & O_8 = \{x_3, x_4, x_5, ...\} \cup \{p\} & O_9 = \{x_3, x_4, x_5, ..., x_i, x_{i+1} ...\} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
O_{1+3i} = \{x_{i+1}\} & O_{2+3i} = \{x_{i+1}, x_{i+2}, ..., \} \cup \{p\} & O_{3+3i} = \{x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+m}, ...\}
\end{array}
$$

para $i = 0, 1, 2, ...$

Veamos que $\{O_{1+3i}, O_{2+3i}, O_{3+3i}; i = 1, 2, ...\}$ *cumplen con la Proposición 1.1.1. En efecto, la primera condición se satisface trivialmente porque* $O_2 = \widehat{X}$*. Para la segunda condición de base, basta observar* $\forall n, m = \{1, 2, ...\} : (O_n \cap O_m)$ *es vacío o es un elemento que pertenece a* $\mathfrak{B}$*.*

Por lo tanto

$$\mathfrak{B} = \{O_{1+3i}, O_{2+3i}, O_{3+3i}, \forall i \in \mathbb{Z}_0^+\}$$

es la base de una topología τ *sobre* $\widehat{X}$*.*

Definición 1.1.11 *Un espacio topológico* (X, τ) *es separable, si existe un subconjunto* D *de* X*, el cual es denso y numerable.*

En el Ejemplo 1.1.5, $(\widehat{X}, \tau)$ es claramente un espacio topológico separable, por ser numerable.

Definición 1.1.12 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Una separación de* X *es un par* U, V *de subconjuntos abiertos y disjuntos de* X*, cuya unión es* X*. El espacio topológico* X *es llamado conexo, si no existe una separación para* X*.*

1.2. Representación de las preferencias en la Teoría Económica

En economía las preferencias racionales de los agentes son relaciones completas y transitivas, es decir, preordenes totales; sobre un conjunto X de alternativas. Estas se representan mediante la función de utilidad, que equivale a preservar el orden. Nótese que la función de utilidad es puramente ordinal, esto es, sirve para ordenar, pero no para decir cuanto es mejor una canasta que otra, esto es, no es una función cardinal. De hecho, pueden usarse distintas funciones de utilidad para representar unas mismas preferencias. La racionalidad de las preferencias es una condición necesaria para ser representadas; pero no es suficiente. Esto lo vemos en el clásico ejemplo de las preferencias alfabética o lexicográficas (Ejemplo 1.2.4) que son racionales; sin embargo no tiene ninguna función de utilidad que las representen. Surge así la interrogante ¿Cuándo a una preferencia del consumidor se le puede asociar una función de utilidad? En este trabajo presentamos el principal resultado de Debreu; que afirma que es posible encontrar una función continua que representa las preferencias de un consumidor bajo ciertas condiciones, que se analizarán más adelante. Por el momento en esta sección se mostrará un ejemplo para el cual no es posible asociar una función que represente preferencias.

Definición 1.2.1 *Una preferencia $\preccurlyeq$ es una relación binaria sobre un conjunto X y esta se dice Racional si es un Pre-Orden Total en X.*

$$Para\ todo\, x, y\ en\, X:\ x \preccurlyeq y$$

Se lee "y es al menos tan buena como x"

A partir de esta relación se puede definir dos nuevas relaciones sobre X:

- *Preferencia estricta* ($\prec$)

$$\text{Para todo}\, x, y\, \text{en}\, X\, \text{se tiene}\, x \prec y \text{ si y sólo si } x \preccurlyeq y \wedge \neg(y \preccurlyeq x)$$

Y se lee "y es preferida a x"

En tal caso, si el individuo puede elegir entre las alternativas x, y entonces se decidirá por elegir y.

- *Relación de indiferencia* ($\sim$)

$$\text{Para todo}\, x, y\, \text{en}\, X\, \text{se tiene}\, x \sim y \text{ si y sólo si } x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x$$

y se lee "x es indiferente a y"

Ambas alternativas le proporcionan al individuo la misma satisfacción.

Definición 1.2.2 *Dado un elemento x_i' de X, el conjunto $\{x_i \in X / x_i \sim x_i'\}$, es decir, el conjunto de elementos en X que son indiferentes a x_i', se le llama clase de indiferencia de $x_i^{'}$. Un elemento de X pertenece a una y sólo a una clase de indiferencia. En otras palabras, el conjunto de clases de indiferencia forman una partición de X.*

Definición 1.2.3 *Una preferencia $\preccurlyeq$ sobre un espacio topológico (X, τ) se dice continua si para todo par de sucesiones convergentes $x^n \to x$ e $y^n \to y$ tales que $x^n \succcurlyeq y^n$ para todo n, se tiene que $x \succcurlyeq y$.*

La siguiente proposición muestra que existen muchas maneras de definir la continuidad de unas preferencias. Veamos la proposición para $X = \mathbb{R}^l_+$:

Proposición 1.2.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\succcurlyeq$ es continua.*

2. *$\{(x,y) \in \mathbb{R}^l_+ \times \mathbb{R}^l_+ \ x \succcurlyeq y\}$ es cerrado.*

3. *Para todo par de elementos x, y de X tal que $x \prec y$ existen abiertos U_x, U_y de x e y respectivamente tales que si $a \in U_x$ y $b \in U_y$ se tiene que $a \prec b$.*

4. *Para todo $x \in \mathbb{R}^l_+$ los conjuntos $\{y \in \mathbb{R}^l_+ : y \succcurlyeq x\}$ y $\{y \in \mathbb{R}^l_+ : x \succcurlyeq y\}$ son cerrados.*

5. *Para todo $x \in \mathbb{R}^l_+$ los conjuntos $\{y \in \mathbb{R}^l_+ : y \succ x\}$ y $\{y \in \mathbb{R}^l_+ : x \succ y\}$ son abiertos.*

Demostración. Ver [4], Proposición 6 - pág.6. □

Ejemplo 1.2.1 *Consideremos el conjunto X con la topología de la base $\mathfrak{B}$ del Ejemplo 1.1.5. Verificaremos que la preferencia $\leqslant$ son continuas. En efecto:*

$$\{y \in X : y < p\} = \{x_1, x_2, ..., x_i, ...\} = O_{3+3i}$$

$$\{y \in X : y > p\} = \emptyset$$

$$\{y \in X : y > x_i\} = \{x_{i+1}, x_{i+2}, ..., p\} = O_{2+3i}$$

$$\{y \in X : y < x_1\} = \emptyset$$

$$\{y \in X : y < x_i\} = O_1 \cup O_4 \cup O_7 \cup ... \cup O_{1+3i},\ para\, i \geqslant 2$$

los cuales conocemos son abiertos, de acuerdo a la definición de la base $\mathfrak{B}$. Con este análisis, la Proposición 1.2.1 $(5 \to 1)$garantiza la continuidad de las preferencias.

Ejemplo 1.2.2 *Preferencia Lexicográfica. Sea $\preccurlyeq$ la preferencia alfabética o lexicográfica en $X = \mathbb{R}^2_+$. Esto es,*

$$(x_1, x_2) \preccurlyeq (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leqslant y_2)$$

Consideremos $x_n = \big(0,1\big)$ y $y_n = (\frac{1}{n}, 0)$,de modo que $x_n \preccurlyeq y_n, \forall n$. Sin embargo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (0,1)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = (0,0)$ de donde se sigue $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \prec \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Vemos así que las preferencias lexicográficas no son continuas.

Definición 1.2.4 *Diremos que una preferencia* $\preccurlyeq$ *definida en* X *y una función* $u : X \to \mathbb{R}$ *están asociadas, si y sólo si:*

$$\forall x, y \in X : x \preccurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$$

También diremos que u *es una función utilidad que representa a una preferencia* $\preccurlyeq$.

Ejemplo 1.2.3 *A la relación dada en el Ejemplo. 1.1.1 -3 se le asocia la función* $u(a, b) = a - b$ *que preserva el orden, como veremos a continuación. En efecto, la relación se define como* $(a, b) \leq (a', b')$ *si y sólo si* $a - b \leq a' - b'$, *luego*

$$u(a, b) \leq u(a', b')$$

No toda preferencia se puede representar, como veremos a continuación.

Ejemplo 1.2.4 *Sea* $\preccurlyeq$ *la preferencia lexicográfica en* $X = \mathbb{R}^2_+$. *Ver Ejemplo 1.2.2 Supongamos que existe* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *representando a* $\preccurlyeq$. *Demostraremos que existe* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ *inyectiva, lo cual es un absurdo.*

En efecto, como $(r, 0) \prec (r, 1)$ *tenemos que* $u((r, 0)) < u((r, 1))$, *definamos* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ *de la siguiente manera: para cada* r *real,* $\varphi(r)$ *es un número racional tal que:*

$$u((r, 0)) < \varphi(r) < u((r, 1)) \tag{1.6}$$

Para $r < r'$ *tenemos* $(r, 1) \prec (r', 0)$ *entonces*

$$u(r, 0) < \varphi(r) < u(r, 1) < u(r', 0) < \varphi(r') < u(r', 1)$$

Luego la función $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{Q}$ *es estrictamente creciente y por lo tanto es inyectiva, lo cual es un absurdo puesto que la cardinalidad de* $\mathbb{R}_+$ *es mayor que de la* $\mathbb{Q}$. *Por lo tanto, no es posible representar las preferencias lexicográficas con una función .*

Del Ejemplo 1.2.4 se ve que no es suficiente que las preferencias sean racionales para tener una representación. En el Ejemplo 1.2.2 vemos que las Preferencias Lexicográficas no es continua.

Capítulo 2

Teorema de Debreu

Nuestra meta en este capítulo es la representación de preferencias mediante una función de utilidad continua u.Unos requisitos suficientes son que X tenga una base numerable de abiertos $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y que las preferencias sean continuas. Este es el principal resultado del Teorema de Debreu.

Para probar el Teorema de Debreu, probaremos primero la existencia de una función

$$v : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

la cual no siempre es continua. Esto nos obliga a definir cierta función creciente y continua

$$g : S \subset \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$$

Para lograr la meta, se define la función de utilidad u como la composición de las funciones g y v, es decir $u = g \circ v$; la cual será continua. [1]

[1] Se establece que $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

La siguiente *Figura*. 2.1, muestra el proceso del presente trabajo en este capítulo.

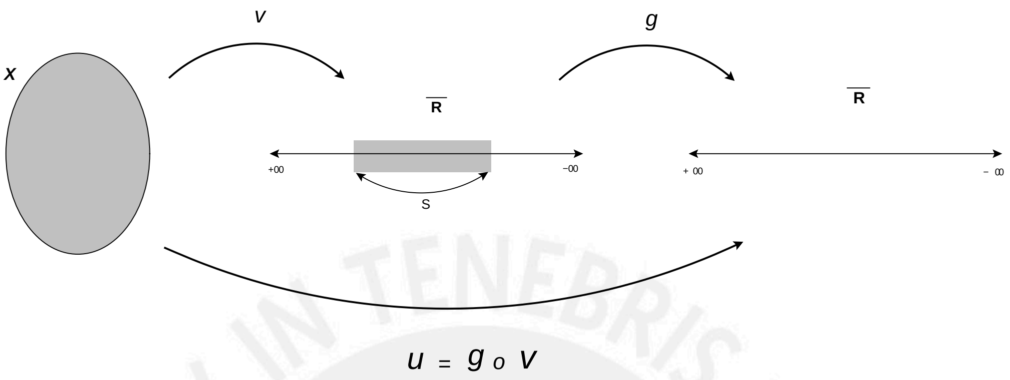

Figura 2.1: Construcción de la función u

2.1. Construcción de la función v

En esta sección veremos como se define la función creciente v sobre un espacio topológico X con una base numerable de abiertos $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sobre 2^X, se define la relación:

Definición 2.1.1 *Para cualesquiera subconjuntos Y, Z de $(X, \preccurlyeq)$ diremos que $Y \prec Z$, si para todo y en Y y para todo z en Z se tiene que $y \prec z$*

Observemos que esta relación es transitiva. Para $Y \prec Z$ y $Z \prec W$ se tiene que $y \prec z$ y $z \prec w$ para todo y, z, w en Y, Z, W respectivamente. Entonces se tiene que $y \prec w$, puesto que y, z, w son elementos de $(X, \preccurlyeq)$. Por lo tanto, la relación $\prec$ definida entre subconjuntos de X es transitiva.

El siguiente lema muestra la existencia de una función creciente definida sobre X hacia $\overline{\mathbb{R}}$, a la cual llamaremos v.

Lema 2.1.1 *Sea $(X, \preccurlyeq)$ un espacio topológico totalmente pre ordenado con una base numerable de conjuntos abiertos $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde la $\preccurlyeq$ es continua. Entonces existe una función estrictamente creciente*

$$v : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

Demostración: Para cada x en X, definimos

$$N(x) = \{n : O_n \prec \{x\}\} \quad y \quad v(x) = \sum_{n\in N(x)} \frac{1}{2^n}$$

Cabe mencionar que se adoptará la convención que la función v es cero cuando el conjunto de índices es vacío.

- v está bien definida.

  $$\sum_{n\in N(x)} \frac{1}{2^n} \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^m} = 1$$

  Luego se deduce que la serie $\sum_{n\in N(x)} \frac{1}{2^n}$ es convergente en $\mathbb{R}$.

  Por lo tanto v está bien definida.

- v es estrictamente creciente.

  Demostraremos $v(x) < v(y)$, cuando $x \prec y$. Para ello será suficiente probar que $N(x)$ es un subconjunto propio de $N(y)$. En efecto, sea n un elemento de $N(x)$, entonces $O_n \prec \{x\}$. Así para todo z de O_n se tiene $z \prec x$. Por transitividad $z \prec y$ para todo z en O_n. Luego $O_n \prec \{y\}$, esto es, n es un elemento de $N(y)$. Por lo tanto $N(x)$ es subconjunto de $N(y)$.

  Ahora, para probar que $N(x)$ es un subconjunto propio de $N(y)$, consideremos el conjunto abierto $\{z \in X : z \prec y\}$ conteniendo al elemento x.

Como X posee una base numerable de abiertos $\mathfrak{B} = \{O_n\}_n \in \mathbb{N}$, entonces podemos escribir

$$\{z \in X : z \prec y\} = \bigcup_{i \in T \subset \mathbb{N}} O_i$$

Luego $O_i \prec \{y\}$, entonces para todo i en T, se tiene que i pertenece a $N(y)$. Como $x \in \{z \in X : z \prec y\}$, entonces existe un i' en T tal que x pertenece a $O_{i'}$, entonces i' no pertenece a $N(x)$. Por lo tanto v es una función creciente.

□

De manera natural surge la interrogante acerca de esta función ¿Es v la función adecuada para cumplir con el principal resultado del Teorema de Debreu? En la siguiente sección presentaremos el análisis de la función v, el cual responderá a la interrogante planteada.

2.2. Acerca de la función v

En esta sección presentaremos de manera detallada un análisis sobre la continuidad de la función v. Observamos el comportamiento de dicha función sobre un espacio topológico X, cuando este es finito o cuando es infinito.

- **Si X es finito.** Podemos trabajar con la topología discreta y recordar el hecho bastante conocido de topología:

  Proposición 2.2.1 *Toda función definida sobre un conjunto que posee la topología discreta es continua.*

  Corolario 2.2.1 *La funcion $v : X \to \mathbb{R}$ es continua.*

- **Si X es infinito.** En este caso presentaremos un ejemplo para el cual la función v no es continua.

Considerando a $\widehat{X} = \{x_1, x_2, x_3, ...\} \cup \{p\}$ un subconjunto ordenado y numerable de $\mathbb{R}$, donde $x_i < x_{i+1}$, la base $\mathfrak{B} = \{O_{1+3i}, O_{2+3i}, O_{3+3i} \forall i \in \mathbb{Z}_0^+\}$ y la relación de preferencia como la relación $\leqslant$ (`menor igual que`) de los números reales para los cuales conocemos que las preferencias son continuas en la topología generada por $\mathfrak{B}$, ver Ejemplo 1.2.1.

Ahora siguiendo la definición dada para la función v en el Lema 2.1.1 analizaremos qué ocurre cuando se aplica a cada elemento de X:

- Como $N(x_i) = \{n : O_n < \{x_i\}\} = \{1, 4, 7, ..., 1+3i\}$ entonces

$$v(x_i) = \sum_{n \in N(x_i)} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{2^{1+3k}} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{1+3k}} = \frac{4}{7} \tag{2.1}$$

- Como $N(p) = \{n : O_n < \{p\}\} = \{1+3i, i \in \mathbb{Z}_0^+\} \cup \{3+3i, i \in \mathbb{Z}_0^+\}$ entonces

$$v(p) = \sum_{n \in N(p)} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{1+3k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3+3k}} = \frac{5}{7} \tag{2.2}$$

Luego recordemos que una aplicación es continua, si y sólo si, para todo conjunto abierto I en $\mathbb{R}$ el conjunto $v^{-1}(I)$ es abierto. Es claro que $I = \left\langle \frac{5}{7} - \epsilon, \frac{5}{7} + \epsilon \right\rangle$ es un intervalo abierto. Más aún gracias a 2.2 podemos tomar un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo que $im(v) \cap I = \left\{\frac{5}{7}\right\}$. Entonces $v^{-1}(I) = v^{-1}\left\{\frac{5}{7}\right\} = \{p\}$, el cual no es un abierto de X. De lo que se desprende que $v : X \to \overline{\mathbb{R}}$ no es continua.

En esta sección se ha presentado un ejemplo para el cual v no es continua.

Pero sí rescatamos el hecho que la función v representa preferencias. Basados en este hecho definiremos una función g continua tal que de modo general la composición $g \circ v$ también sea continua, la cual representa la función utilidad u.

2.3. Construcción de la función g

La meta en esta sección es probar la existencia de una función $g : S \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que todos los saltos del conjunto $g(S)$ sean abiertos, lo cual se formalizará en el Teorema 2.3.1. Para tal efecto daremos definiciones y demostraremos lemas y proposiciones previas como veremos a continuación. Empecemos con una serie de definiciones de los objetos que usaremos.

Definición 2.3.1 *Se llama conjunto degenerado a aquellos conjuntos que tienen un único elemento.*

Definición 2.3.2 *Un $f_$conjunto es un subconjunto no degenerado A de S tal que $\{c \in S/a \leqslant c \leqslant b\}$ es un subconjunto finito de A para todo $a, b \in A$ tales que $a < b$. Un $f_$conjunto es llamado maximal, si no existe otro $f_$conjunto de S conteniéndolo. Si A es un $f\_$ conjunto maximal diremos que A es un $F_$conjunto.*

Un $f_$conjunto necesariamente tiene una de las siguientes formas:

- finito.
- $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$
- $\dots < a_{-2} < a_{-1} < a_0$
- $\dots < a_{-1} < a_0 < a_1 < \dots$

Ejemplo 2.3.1 *Dado* $S = \{1, 2, 3\}$ *y sean* $A_1 = \{2, 3\}, A_2 = \{1, 2\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$

- $1 < 2 : \{c \in S : 1 \leq c \leq 2\} = \{1, 2\}$ *es finito.*
- $1 < 3,\ \{c \in S : 1 \leq c \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$ *es finito.*
- $2 < 3,\ \{c \in S : 2 \leq c \leq 3\} = \{2, 3\}$ *es finito.*

Por lo tanto A_1, A_2, A_3 *son* $f\_$*conjuntos y* A_3 *es un* $F\_$*conjunto.*

Definición 2.3.3 *Un elemento extremal de un conjunto* $S \subset \mathbb{R}$ *es un menor elemento o un mayor elemento de tal conjunto.*

Definición 2.3.4 *Un* $i\_$*conjunto es un subconjunto no degenerado* A *de* S*, sin puntos extremales, tal que si* a, b *pertenecen* A *y* $a < b$ *entonces* $\{c \in S / a \leqslant c \leqslant b\}$ *es un subconjunto infinito de* A.
Un $i\_$*conjunto es llamado maximal, si no existe otro* $i\_$*conjunto de* S *conteniéndolo. Si* A *es un* $i\_$ *conjunto maximal diremos que* A *es un* $I\_$*conjunto.*

Ejemplo 2.3.2 *Dado* $S = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ *y sean* $A_1 = \langle -\infty, 0\rangle, A_2 = \langle 1, +\infty\rangle$

- $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow \{c \in S : x_1 \leqslant x \leqslant x_2\}$ *es infinito.*
- $x_1 > x_2 > 1 \Rightarrow \{c \in S : x_1 \geqslant x \geqslant x_2\}$ *es infinito.*

Por lo tanto A_1, A_2 *son* $i\_$*conjuntos y* S *es un* $I\_$*conjunto.*

Definición 2.3.5 *Un Punto Singular de* S *es un punto que no pertenece ni a un* $f\_$*conjunto ni a un* $i\_$*conjunto.*

Ejemplo 2.3.3 *Sea* $S = \langle 0, 1\rangle \cup \{2, \frac{5}{2}, 3\} \cup [4, 5\rangle$*. El punto* $c = 4$ *es un punto singular, pues no pertenece a un* $f\_$*conjunto ni a un* $i\_$*conjunto.*

Definición 2.3.6 *Un $F\_conjunto$ o un $I\_conjunto$ de S son llamados $E\_conjuntos$ de S.*

Definición 2.3.7 *Para dos subconjuntos A, B en S. Se define la relación $<$ como*

$$A < B \text{ si y sólo si } a < b, \text{para todo } a \text{ en } A \text{ y para todo } b \text{ en } B$$

Con estas definiciones podemos empezar con los resultados, dados en los siguientes lemas:

Lema 2.3.1 *Sean A, B, $f\_conjuntos$ de S, con $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $(A \cup B)$ es un $f\_conjunto$.*

Demostración. Sean a, b elementos de $(A \cup B)$, $a < b$ arbitrarios. Ya que $A \cap B$ es no vacía podemos tomar un $w \in A \cap B$. Supongamos que $w < a < b$. Como w, b son elementos de B entonces $\{c \in S/w \leqslant c \leqslant b\}$ es finito y $\{c \in S/w \leqslant c \leqslant b\} \subseteq B$. Luego $\{c \in S/a \leqslant c \leqslant b\} \subseteq \{c \in S/w \leqslant c \leqslant b\} \subseteq B \subseteq (A \cup B)$ y ya que $\{c \in S/w \leqslant c \leqslant b\}$ es *$f\_conjunto$*, entonces $\{c \in S/a \leqslant c \leqslant b\}$ es finito. Esto prueba que $(A \cup B)$ es finito si $w < a < b$. Se procederá de manera analóga si $a < b < w$ con lo cual se prueba que $(A \cup B)$ es *$f\_conjunto$*.

Supongamos que $a < w < b$. Como a, w son elementos de A entonces $\{c \in S/a \leqslant c \leqslant w\}$ es finito y $\{c \in S/a \leqslant c \leqslant w\} \subseteq A$ y como w, b son elementos de B entonces $\{c \in S/w \leqslant c \leqslant b\}$ es finito y $\{c \in S/w \leqslant c \leqslant b\} \subseteq B$. Luego $\{c \in S/a \leqslant c \leqslant b\} \subseteq \{c \in S/a \leqslant c \leqslant w\} \cup \{c \in S/w \leqslant c \leqslant b\} \subseteq (A \cup B)$ y ya que $\{c \in S/a \leqslant c \leqslant w\}$ y $\{c \in S/w \leqslant c \leqslant b\}$ son finitos, entonces $\{c \in S/a \leqslant c \leqslant b\}$ es finito. Esto prueba que $(A \cup B)$ es *$f\_conjunto$*.

Lema 2.3.2 *Sean A, B, $i\_conjuntos$ de S, con $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $(A \cup B)$ es un $i\_conjunto$*

Demostración. Como ni A, ni B tienen puntos extremales entonces $(A \cup B)$ tampoco tendrá puntos extremales. Así será suficiente demostrar que si a, b pertenecen a $(A \cup B)$, con $a < b$ entonces $\{c \in S : a \leqslant c \leqslant b\}$ es un subconjunto infinito de $(A \cup B)$. Para tal efecto se procede de manera análoga a la demostración realizada para el Lema 2.3.1. $\square$

Lema 2.3.3 *Si C es un f_conjunto de S. Entonces existe un f_conjunto maximal M conteniendo a C .*

Demostración. El candidato a conjunto maximal es el conjunto formado por la unión de todos los f_conjuntos A_λ que contienen al conjunto C, es decir

$$M = \bigcup_{C \subset A_\lambda} A_\lambda.$$

Es claro que $C \subset M$. Veamos ahora que M es un f_conjunto. En efecto, sean a, b elementos de M. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a < b$. Luego por definición de M existen f_conjuntos A_λ y $A_{\widehat{\lambda}}$ tales que

- a es un elemento de A_λ y $C \subset A_\lambda$
- b es un elemento de $A_{\widehat{\lambda}}$ y $C \subset A_{\widehat{\lambda}}$

Como $A_\lambda, A_{\widehat{\lambda}}$ tienen intersección no vacía (pues $C \subset A_\lambda \cap A_{\widehat{\lambda}}$) y son f_conjuntos, entonces $A_\lambda \cup A_{\widehat{\lambda}}$ es un f_ conjunto. Esto implica $\{c \in S/a \leqslant c \leqslant b\}$ es un sub conjunto finito de $A_\lambda \cup A_{\widehat{\lambda}}$ y como esta unión es un subconjunto de M, se deduce que $\{c \in S/a \leqslant c \leqslant b\}$ es un conjunto finito de M.

Lema 2.3.4 *Si C es un i_conjunto de S. Entonces existe un i_conjunto maximal M conteniendo a C .*

Demostración. Se procede de manera análoga a la demostración realizada para el Lema 2.3.3, empleando el Lema 2.3.2 en vez del Lema 2.3.1. $\square$

Lema 2.3.5 *Si A es un $f\_conjunto$ y B es un $i\_conjunto$ entonces* $\#(A \cap B) \leqslant 1$

Demostración. Supongamos que $d, e \in (A \cap B)$ con $d < e$. Ya que $d, e \in A$ tendremos que $\{x \in S/d \leqslant x \leqslant e\}$ es finito. Ya que $d, e \in B$ tendremos también que $\{x \in S/d \leqslant x \leqslant e\}$ es infinito, lo cual es un absurdo.

Lema 2.3.6 *Sean A, B $E\_conjuntos$ distintos de S. Entonces A y B son disjuntos.*

Demostración. Supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$. Si A, B son $F\_conjuntos$ distintos se sigue del Lema 2.3.1 que $(A \cup B)$ es un $f\_conjunto$. Como A, B son distintos entonces $A \subsetneq (A \cup B)$ o $B \subsetneq (A \cup B)$. Siendo $(A \cup B)$ un $f\_conjunto$ estaríamos contradiciendo la maximilidad de A o de B. En forma análoga se concluye si A, B son $I\_conjuntos$.
Ahora supongamos que A es un $F\_conjunto$ y B es un $I\_conjunto$. Sabemos que existe un elemento c en $(A \cup B)$. Además como A y B son no degenerados podemos elegir un $a \in A$ y $b \in B$ de modo que $a \neq c$ y $b \neq c$, también se sabe que A y B son distintos, podemos elegirlos de modo que $a \neq b$. Por el Lema 2.3.5 tenemos que

$$\#(A \cap B) \leqslant 1 \tag{2.3}$$

y por lo tanto $A \cap B = \{c\}$. En particular, $a \notin B$ y $b \notin A$

a) Supongamos que $a < b < c$. Como $a, c \in A$ entonces $\{x \in S/a \leqslant x \leqslant c\} \subseteq A$ eso implica que $b \in A$ contradiciendo(2.3)

En los casos que $b < a < c$, $c < a < b$ y $c < b < a$ podemos aplicar un argumento análogo.

b) Supongamos que $a < c < b$. Por definición de $i\_conjunto$, $c \in B$ no puede ser un extremo de B. Entonces existe $d \in B$ tal que $d < c$. Ahora podemos aplicar el argumento del caso (a) para a, c y el elemento d en vez de b.

Si $b < c < a$ podemos aplicar un argumento análogo.

□

En el siguiente lema vemos la relación de orden sobre los *E_conjuntos* de S.

Lema 2.3.7 *Sean A, B E_conjuntos distintos. Entonces $A < B$ o $B < A$.*

Demostración. Por el Lema 2.3.6 se tiene que A y B son disjuntos. Supongamos que $A \not< B$ y $B \not< A$, luego existen a, a' elementos de A y b, b' elementos de B tal que $b' < a'$ y $a < b$, respectivamente. Observemos qué sucede según la ubicación de los elementos.

1. Podría ocurrir que $b' < a < b$ como se observa en la $Figura$.2.2:

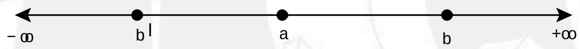

Figura 2.2: Ubicación 1

   Como $b' < a < b$ y b, b' son elementos de B, el cual es un *E_conjunto*, entonces el conjunto $\{c \in S / b' \leqslant c \leqslant b\}$ es un subconjunto de B. Tomando $c = a$ vemos que a es un elemento de B. Entonces a es un elemento de $(A \cap B)$ lo cual contradice, el hecho de $A \cap B \neq \emptyset$.

2. Podría ocurrir que $a < b' < a'$ como se observa en la Figura 2.3:

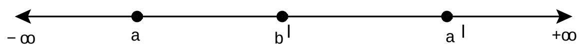

Figura 2.3: Ubicación 2

   Procedemos de manera análoga al caso anterior y tendremos que b' es un elemento de A, es decir, b es un elemento de $(A \cap B)$, lo cual es una contradicción, con el hecho de que A y B son disjuntos.

Por lo tanto $A < B$ o $B < A$. $\square$

Definición 2.3.8 *Dos E_conjuntos de S se dicen adyacentes si existe a lo más un elemento r de S, entre ellos, es decir: para todo x_1 de E_1 y para todo x_2 de E_2, existe un elemento r de S tal que $x_1 < r < x_2$.*

El conjunto S puede tener también, además de los *E_conjuntos*, puntos singulares. El siguiente lema proporciona un orden entre un *E_conjunto* y un punto singular.

Lema 2.3.8 *Sean un E_conjunto A y un punto singular a. Entonces $\{a\} < A$ o $A < \{a\}$*

Demostración. Supongamos que $\{a\} \not< A$ y $A \not< \{a\}$ y sean los elementos b, c en A tales que $c < a < b$. Procediendo de manera análoga a la demostración del Lema 2.3.7, concluimos que a es un elemento de A. Esto es absurdo, pues A es un *E_conjunto* y no puede poseer puntos singulares. Por lo tanto $\{a\} < A$ o $A < \{a\}$ $\square$

El siguiente lema garantiza el hecho de que S contiene *E_conjuntos*.

Lema 2.3.9 *Sea S un conjunto no degenerado de $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces S contiene un E_conjunto.*

Demostración. Sean a, b elementos de S tales que $a < b$ y considere el conjunto

$$A = \{c \in S : a \leqslant c \leqslant b\}$$

Si A es finito resulta un *f_conjunto*. Luego por el Lema 2.3.3, existe un *F_conjunto* conteniéndolo.

Si A es infinito, entonces quitando de A los elementos a, b obtenemos un $i\_conjunto$. Luego por el Lema 2.3.4, existe un $I\_conjunto$ conteniéndolo.
Así cualquiera que sea el caso, se tiene que S contiene un $E\_conjunto$. $\square$

Para el conjunto S, podemos definir la siguiente familia de intervalos $\langle \text{ínf}\, E_1, supE_1 \rangle$, $\langle \text{ínf}\, E_2, SupE_2 \rangle, ...,$ y formar la colección

$$\mathcal{F} = \{ I_E = \langle \text{ínf}\, E, \sup E \rangle : E \, \text{es un} \, E\_ \, \text{conjunto de} \, S \}.$$

Gracias al Lema 2.3.6 los intervalos en $\mathcal{F}$ son disjuntos. Luego, se desprende que $\mathcal{F}$ es numerable.
Sea $\mathcal{E}$ la colección de $E_$conjuntos. Se observa, claramente, que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \psi : & \mathcal{E} \to & \mathcal{F} \\ & E_i \mapsto & \psi(E_i) = I_{E_i} \end{array}$$

es biyectiva.
De la aplicación ψ y la numerabilidad de $\mathcal{F}$, se tiene que $\mathcal{E}$ es numerable. Es posible entonces expresar los $E\_conjuntos$ en una sucesión $E_1, E_2, ..,$ los cuales son distintos. $\square$

Ahora definimos g sobre $F\_conjuntos$, $I\_conjuntos$ y puntos singulares, como se demostrará en los siguientes tres resultados: Lema 2.3.10, Lema 2.3.11 y Lema 2.3.12, respectivamente. Daremos dos definiciones que serán usadas en estos lemas:

Definición 2.3.9 *Una Laguna L_1 en el conjunto S es un intervalo no degenerado de $\overline{\mathbb{R}}$, sin puntos de S, pero teniendo una cota inferior y una cota superior en S. L_1 se dice "Laguna Maximal"si no existe otra laguna de S conteniéndola.*

Definición 2.3.10 *Un Salto del conjunto S es una laguna maximal de S.*

Ejemplo 2.3.4 *Sea $S = \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$, entonces el intervalo $L = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$ es una laguna de S y $L_1 = [0, 1]$ es una laguna maximal de S.*

Lema 2.3.10 *Sean E_n un $F\_conjunto$, α_n, β_n elementos de $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $\alpha_n < \beta_n$. Entonces existe una función creciente $g_n : E_n \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que todos los saltos de $g_n(E_n)$ son conjuntos abiertos, con $\alpha_n = inf\, g_n(E_n); \beta_n = sup\, g_n(E_n)$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la forma de los $F\_conjuntos$.

□

Para el caso que los E_n sean $I-conjuntos$, se tiene el siguiente resultado

Lema 2.3.11 *Sean E_n un $I\_conjunto$, α_n, β_n elementos de $\overline{\mathbb{R}}$, con α_n menor que β_n. Entonces existe una función creciente $g_n : E_n \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $g_n(E_n)$ no tiene saltos, con $\alpha_n = \text{ínf } g_n(E_n); \beta_n = \sup\, g_n(E_n)$.*

Demostración. Consideremos D_n denso y numerable en E_n. Definimos

$$g_n : D_n = \{x_1, x_2, ..., x_p, ...\} \to \mathbb{Q}' = \langle \alpha_n, \beta_n \rangle \cap \mathbb{Q}$$

del siguiente modo: Para x_1 en D_n definimos $g_n(x_1) = r_1$, con r_1 en $\mathbb{Q}'$. Si $x_1 > x_2$ elegimos el $g(x_2)$ como el primer elemento numerado en $\{r_i : i \geqslant 2\}$ tal que $r_1 > g(x_2)$. Así definimos g_n como el primer elemento numerado de $\{r_1, \ldots\} - \{g(x_1), \ldots, g(x_{i-1})\}$, los cuales tienen la misma relación de orden que los números $g(x_1), \ldots, g(x_{i-1})$. La función así construida es creciente sobre D_n. Se definen para cada x' en E_n, los conjuntos

$$D_{nx'} = \{x \in D_n : x < x'\}, \qquad D_n^{x'} = \{x \in D_n : x > x'\}$$

Ahora probaremos que que $\sup g_n(D_{nx'}) = \text{ínf}\, g_n(D_n^{x'})$.

- Probaremos $\sup g_n(D_{nx'}) \leqslant \text{ínf}\, g_n(D_n^{x'})$. En efecto, sea $\overline{x}'$ en $D_{nx'}$ y x'' en $D_n^{x'}$, entonces $\overline{x}'' < x''$, luego si r' es un elemento de $g_n(D_{nx'})$ y r'' es un elemento de $g_n(D_n^{x'})$,entonces $r' < r''$. Luego $\sup g_n(D_{nx'}) \leqslant r''$, entonces $\sup g_n(D_{nx'}) \leqslant \text{ínf}\, g_n(D_n^{x'})$.

- Probaremos que $\inf g_n(D_n^{x'}) \leqslant \sup g_n(D_{nx'})$. Supongamos que ocurriese que $\inf g_n(D_n^{x'})$ sea mayor que $\sup g_n(D_{nx'})$, entonces existe un elemento r en $\mathbb{Q}$, tal que $\inf g_n(D_n^{x'}) > r > \sup g_n(D_{nx'})$, el cual no es tomado por g_n; lo cual es una contradicción. Se sigue que $\inf g_n(D_n^{x'}) \leqslant \sup g_n(D_{nx'})$

Por lo tanto $\inf g_n(D_n^{x'}) = \sup g_n(D_{nx'})$.
Ahora para x en E_n, definimos $\widetilde{g}_n(x) = \inf g_n(D_n^{x'}) = \sup g_n(D_{nx'})$. Si x es un elemento de D_n, entonces $\widetilde{g}_n(x) = g_n(x)$, luego $\widetilde{g}_n$ es una extensión de g_n y además creciente.
De esta manera se construye $g_n : E_n \to \langle \alpha_n, \beta_n \rangle$ creciente, también se tiene que $\mathbb{Q}' \subset g_n(E_n) \subset \langle \alpha_n, \beta_n \rangle$, de donde $g_n(E_n)$ no tiene saltos. □

El siguiente lema, nos permite definir la función g cuando $E_m < \{a\} < E_n$ con a un punto singular de S.

Lema 2.3.12 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ una partición de los E_conjuntos. Si $\{E_r < E_s\}, \forall E_r \in \mathcal{A}$ y $\forall E_s \in \mathcal{B}$. Entonces*

$$\sup_{E_r \in \mathcal{A}} \beta_r = \inf_{E_s \in \mathcal{B}} \alpha_s$$

Demostración. Supongamos que para $E_r \in \mathcal{A}$ y $E_s \in \mathcal{B}$ se cumple la hipótesis, de donde se sigue que $\beta_r < \alpha_s$. Entonces $\sup\limits_{E_r \in \mathcal{A}} \beta_r \leqslant \inf\limits_{E_s \in \mathcal{B}} \alpha_s$
Ahora, demostraremos que $\sup\limits_{E_r \in \mathcal{A}} \beta_r \geqslant \inf\limits_{E_s \in \mathcal{B}} \alpha_s$. Supongamos por el contrario que $\sup\limits_{E_r \in \mathcal{A}} \beta_r < \inf\limits_{E_s \in \mathcal{B}} \alpha_s$. Para un n suficientemente grande definimos a:

- E_{p_n} como el mayor de los E_m en $\mathcal{A}$, para todo n mayor que m. De donde el $\beta_{pn} = \sup\limits_{E_r \in \mathcal{A}} \beta_r$
- E_{q_n} como el menor de los E_m en $\mathcal{B}$, para todo n mayor que m. De donde el $\alpha_{qn} = \inf\limits_{E_s \in \mathcal{B}} \alpha_s$

E_{p_n} y E_{q_n} así definidos, presentan los siguientes casos:

1. E_{p_n} y E_{q_n} son adyacentes, para algún n.

   Por la definición de β_{p_n} y α_{q_n} y como E_{p_n} pertenece a $\mathcal{A}$ y E_{q_n} pertenece a $\mathcal{B}$, entonces β_{p_n} es menor que α_{q_n}. Se sabe que, por construcción $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\emptyset$ y por ser E_{p_n} y E_{q_n} adyacentes, existe al menos un elemento s de S entre ellos, es decir, $\beta_{p_n} < s < \alpha_{q_n}$. Lo cual no puede ocurrir, como se detalla a continuación:

   a) Sea E_s de $\mathcal{A}$, tal que $E_s < E_{p_n}$ y s en E_s, tal que $\beta_{p_n} < s$. Lo cual es una contradicción con la definición de supremo.

   b) Sea E_l de $\mathcal{B}$ tal que $E_l > E_{q_r}$ y s en E_l, tal que $s < \alpha_{q_n}$. Lo cual es una contradicción con la definición de ínfimo.

   Por lo tanto,

   $$\sup_{E_r\in\mathcal{A}} \beta_r = \inf_{E_s\in\mathcal{B}} \alpha_s$$

2. E_{p_n} y E_{q_n} son no adyacentes, para ningún n.

   Puesto que β_{p_n} es menor que α_{q_n}, elegimos un elemento $\beta_{p_{n+1}}$, con E_{p_n+1} en $\mathcal{A}$ y $\alpha_{q_n}+1$, con E_{q_n+1} en $\mathcal{B}$, tal que $\beta_{p_n} < \beta_{p_{n+1}} < \alpha_{q_{n+1}} < \alpha_{q_n}$. Luego $[\beta_{p_{n+1}}, \alpha_{q_{n+1}}] \subset [\beta_{p_n}, \alpha_{q_n}]$. Como esta elección se puede hacer para cada n, se tiene que asi una sucesión decreciente de conjuntos compactos:

   $$[\beta_{p_n}, \alpha_{q_n}] \supseteq [\beta_{p_{n+1}}, \alpha_{q_{n+1}}] \supseteq [\beta_{p_{n+2}}, \alpha_{q_{n+2}}] \supseteq \dots$$

   tal que $K = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} [\beta_{p_{n+m}}, \alpha_{q_{n+m}}] \neq \emptyset$ es tambien un conjunto compacto. Luego existe x en $K \subset S$ tal que x pertenece a $[\beta_{p_n}, \alpha_{q_n}]$. Lo cual contradice el hecho que E_{p_n} y E_{q_n} son no adyacentes.

Por lo tanto

$$\sup_{E_r\in\mathcal{A}} \beta_r = \inf_{E_s\in\mathcal{B}} \alpha_s$$

□

Se muestra la construcción de la función g sobre cualquier elemento de S.

Puesto que S posee $F\_conjuntos$ o $I\_conjuntos$ o puntos singulares. Definiremos g según sea el conjunto donde se encuentre cada elemento.

I. Deinición de g sobre $E\_conjuntos$

Si E_n fuese un $F\_conjunto$ o un $I\_conjunto$ se elije g como la función g_n satisfaciendo las condiciones del Lema 2.3.10 y Lema 2.3.11, respectivamente. Veamos la construcción inductiva de la función g, es decir, como se deben elegir los α_n y β_n

1. Para E_1, sean $\alpha_1 = 0$; $\beta_1 = 1$.
2. Para E_n, consideremos los casos que pueden presentarse

   a) Si $E_m < E_n$, para todo m menor que n y sea E_j el mayor de estos E_m.

   - Si E_j y E_n son adyacentes, es suficiente tomar $\alpha_n = \beta_j$ y $\beta_n = \beta_j + 1$
   - Si E_j y E_n no son adyacentes, es suficiente tomar $\alpha_n = \beta_j + 1$ y $\beta_n = \beta_j + 2$

   b) Si $E_n < E_m$, para todo m menor que n y sea E_k el menor de estos E_m.

   - Si E_k y E_n son adyacentes, es suficiente tomar $\alpha_n = \beta_k - 1$ y $\beta_n = \beta_k$
   - Si E_k y E_n no son adyacentes, es suficiente tomar $\alpha_n = \beta_k - 2$ y $\beta_n = \beta_k - 1$

   c) Para todo m menor que n existen E_j, E_k; los cuales son el mayor de los E_m menores que E_n y el menor de los E_m mayores que E_n, respectivamente.

- Si E_j, E_n son adyacentes y E_n, E_k tambien son adyacentes, es suficiente tomar $\alpha_n = \beta_j$; $\beta_n = \alpha_k$.

  Puesto que β_j es un extremo de $g_j(E_j)$; α_n un extremo de $g_n(E_n)$; y α_k un extremo de $g_k(E_k)$. Se tiene que $\beta_j < \alpha_n < \alpha_k$, entonces $\beta_j < \alpha_k$.

- Si E_j, E_n son adyacentes pero E_n, E_k no lo son, se toma

$$\alpha_n = \beta_j;\ \beta_n = \frac{1}{3}(\beta_j + 2\alpha_k)$$

  Puesto que β_j es un extremo de $g_j(E_j)$; α_n es un extremo de $g_n(E_n)$; α_k es un extremo de $g_k(E_k)$. Se tiene que $\beta_j < \alpha_n < \alpha_k$, entonces $\beta_j < \alpha_k$.

- Si E_n, E_k son adyacentes, pero E_n, E_j no lo son, se toma

$$\alpha_n = \frac{1}{3}(2\beta_j + \alpha_k);\ \beta_n = \alpha_k$$

  Puesto que β_j es un extremo de $g_j(E_j)$; α_n un extremo de $g_n(E_n)$; α_k un extremo de $g_k(E_k)$. Se tiene que $\beta_j < \alpha_n < \alpha_k$ entonces $\beta_j < \alpha_k$.

- Si ni E_j con E_n, ni E_n con E_k son adyacentes, tomemos

$$\alpha_n = \frac{1}{3}(2\beta_j + \alpha_k);\ \beta_n = \frac{1}{3}(\beta_j + 2\alpha_k)$$

  Puesto que β_j es un extremo de $g_j(E_j)$, α_n es un extremo de E_n; α_k un extremo de $g_k(E_k)$. Se tiene que $\beta_j < \alpha_n < \alpha_k$, entonces $\beta_j < \alpha_k$.

Luego

$$g\Big|_{E_n} = g_n \text{ para cada } n$$

II. Sobre puntos singulares a de S.

1. Si $\{a\}$ es menor que E_n, para cada n, definimos $g(a) = Inf\alpha_n$ (el cual puede ser $-\infty$), de donde $g(a)$ es menor que $g(b)$, para todo b en E_n y para cada n en $\mathbb{N}$.

2. Si E_n es menor que $\{a\}$, para cada n, definimos $g(a) = Sup\beta_n$ (el cual puede ser $+\infty$), de donde $g(b)$ es menor que $g(a)$, para todo b en E_n y para cada n en $\mathbb{N}$.

3. Si existen $E\_conjuntos$ E_m y E_n tales que $E_m < \{a\} < E_n$ se define $\mathcal{A} = \{E_r/E_r < \{a\}\}$ y $\mathcal{B} = \{E_s/E_s > \{a\}\}$, claramente $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Además, si $E_r \in \mathcal{A}$ y $E_s \in \mathcal{B}$ entonces $E_r < E_s$. Luego por Lema 2.3.12 se tiene que:

$$\sup_{E_r \in \mathcal{A}} \beta_r = \inf_{E_s \in \mathcal{B}} \alpha_s$$

y definimos

$$g(a) = \sup_{E_r \in \mathcal{A}} \beta_r = \inf_{E_s \in \mathcal{B}} \alpha_s$$

$\square$

Ahora se muestra que g así construida es creciente. Para a, b elementos de S, tal que a es menor que b, los casos que pueden darse son:

1. Si a, b están en un mismo E_n, entonces $g(a) < g(b)$ por el Lema 2.3.10 si fuese un $F\_conjunto$ o por el Lema 2.3.11 si fuera un $I\_conjunto$.

2. Si a, b se encuentran en distintos $E\_conjuntos$. Aquí ocurren dos casos:

   a) Si a, b están en E_n y E_m respectivamente, con E_m, E_n no adyacentes. Elejimos α_n como $\beta_n + 1$ y β_n como $\beta_n + 2$, tal como se realizo en la construcción inductiva de g.Luego existe g_n creciente en E_n entonces es posible definir g como g_n, esto es:

$$g(a) = g_n(a) < g_n(b) = g(b)$$

Por lo tanto, $g(a) < g(b)$, es decir, g es creciente.

b) Sean a, b que pertenecen a E_m y E_n, respectivamente y tal que E_n, E_m son adyacentes.

- Si E_m y E_n son *I_conjuntos*.

  Como son *I_conjuntos* entonces existen g_m, tal que $g_m(E_m)$ es subconjunto de $\langle \alpha_m, \beta_m \rangle$ y $g_n(E_n)$ es subconjunto de $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle$, respectivamente. De donde tenemos que $\alpha_m < g_m(a) < \beta_m$ y $\alpha_n < g_n(b) < \beta_n$. Luego $g_m(a) < \beta_m = \alpha_n < g_n(b)$. Haciendo posible definir g como $g(a) = g_m(a) < g_n(b) = g(b)$. Por lo tanto $g(a) < g(b)$, es decir, g es creciente.

- Si E_m y E_n son *F_conjuntos*

  Supongamos $\beta_m = g_m(a)$ y como E_m y E_n son adyacentes entonces $\beta_m = \alpha_n$, de donde es posible construir un *f_conjunto* a la derecha de E_m, denotado por A. Luego $(E_m \cup A)$ es también un *f_conjunto* que contiene a E_m, es decir, $E_m \subset (E_m \cup A)$, entonces $(E_m \cup A)$ es maximal, lo cual es una contradicción, pues E_m representa un conjunto maximal. Entonces

  $$g_m(a) \neq \beta_m \tag{2.4}$$

  Luego, se tiene que $g_m(a) < \beta_m$. En forma análoga, es posible construir un *f_conjunto* a la izquierda de E_n, denotado por B, tal que $E_n \subset (E_n \cup B)$. Luego E_n no es maximal, lo cual es una contradicción, pues E_n es un *F_conjunto*. De donde $\alpha_n < g_n(b)$, puesto que $\alpha_n = \inf g_n(E_n)$, es decir, $g_m(a) < \beta_m = \alpha_n < g_n(b)$. Entonces $g_m(a) < g_n(b)$, luego defimos como $g(a) = g_m(a) < g_n(b) = g(b)$. Por lo tanto $g(a) < g(b)$.

- Si E_m es un *F_conjunto* y E_n es un *I_conjunto*. Usando lo anterior y suponiendo que $g_m(a) = \beta_m$, se tiene que E_m no es maximal. Luego $g_m(a) < \beta_m$ y si suponemos que $g_n(a) = \alpha_n$, entonces es posible construir un $i\_conjunto$ $C = A \cup E_n$, donde A un $f\_conjunto$ tal que $E_n \subset C$, así E_n no es maximal, lo cual es una contradicción pues E_n es un $I\_conjunto$, de donde $\alpha_n < g_n(b)$. Entonces $g_m(a) < \beta_m = \alpha_n = g_n(b)$, de donde $g_m(a) < g_n(b)$. Por lo tanto $g(a) < g(b)$.

3. Si a es singular y b pertenece a E_n, ocurren los siguientes casos:

   - Entre ellos existe algún E_m. Es decir, $\{a\} < E_m < E_n$. Luego $\{a\} < E_n$, así es posible definir

     $$g(a) = \inf \alpha_n < g(b)$$

     De donde $g(a) < g(b)$, es decir, g es creciente.

   - Entre ellos no existe algún E_m, se define $g(a) = \alpha_n$. Con argumentos similares al caso anterior, se deduce que no se puede tener $g_n(b) = \alpha_n$, puesto que de ser así, a no sería singular y E_n no sería $f\_conjunto$ maximal. Luego

     $$g(a) = \alpha_n < g_n(b)$$

     Por lo tanto

     $$g(a) < g(b)$$

4. Si b es singular y a pertenece a E_n, se procede como en el caso anterior. Concluyendo que

   $$g(a) < g(b)$$

5. Si a, b son singulares, existe al menos un E_n entre ellos, es decir, existe E_n tal que

   $$g(a) = \inf g_n(E_n), \;\; g(b) = \sup g_n(E_n)$$

Por lo tanto

$$g(a) < g(b)$$

$\square$

Para g la función construida en la *Proposición*.2.3.1, veremos que los saltos de $g(S)$ son abiertos.

Proposición 2.3.1 *Sea $g : S \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces todos los saltos del conjunto $g(S)$ son abiertos*

Demostración. Demostraremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = g(E_n)$ es un salto de $g(S)$.

Supongamos, por el contrario, que no existe n en $\mathbb{N}$, tal que $G = g(E_n)$. Definimos los conjuntos $\widetilde{A} = \{E_r : \beta_r \leqslant \inf G\}$ y $\widetilde{B} = \{E_s : \sup G \leqslant \alpha_s\}$, tal que $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ contienen a todos los *E_conjuntos* del conjunto S. Como G es un salto, se tiene que $\inf G < \sup G$, lo cual implica que $\widetilde{A} = \emptyset$ o $\widetilde{B} = \emptyset$.

- Si $\widetilde{A} = \emptyset$, entonces $\widetilde{B}$ contiene a todos los *E_conjuntos* de S, luego existe un elemento, llamado s, que pertenece a $g(S)$, tal que $s \leqslant \inf G$, pues de lo contrario G no sería un salto de $g(S)$. Entonces existe un punto singular a tal que $g(a) = s$. De acuerdo con la construcción de g, como a es punto singular y no existe E_m entre a y E_n, se define $g(a) = \inf g_n(E_n) = \inf\limits_{E_s \in \widetilde{B}} \alpha_s$. Entonces

$$g(a) = \inf g_n(E_n) = \inf_{E_s \in \widetilde{B}} \alpha_s \tag{2.5}$$

Por construcción de $\widetilde{B}$, se tiene que

$$\sup G \leqslant \inf g_n(E_n) = \inf_{E_s \in \widetilde{B}} \alpha_s$$

como $g(a) = s \leqslant \inf G < \sup G \leqslant \inf g_n(E_n) = \inf\limits_{E_s \in \widetilde{B}} \alpha_s$.

Entonces

$$g(a) < \text{ínf}\, g_n(E_n) = \inf_{E_s \in \widetilde{B}} \alpha_s$$

Lo cual contradice lo afirmado en *ecuación* (2.5), de donde se sigue la existencia de n.

- Si $\widetilde{B} = \emptyset$, entonces $\widetilde{A}$ contiene a todos los *E_conjuntos* de S, entonces existe exactamente s en $g(S)$ tal que $s \geqslant \sup G$, entonces existe un punto singular b tal que $g(b) = s$.

  De acuerdo con la construcción de g, como b es un punto singular y no existe E_m entre b y E_n, se define $g(b) = \sup g_n(E_n) = \sup_{E_r \in \widetilde{A}} \beta_r$, entonces

$$g(b) = \sup_{E_r \in \widetilde{A}} \beta_r \tag{2.6}$$

  Por construcción de $\widetilde{A}$ se tiene

$$\sup_{E_r \in \widetilde{A}} \beta_r \leqslant \text{ínf}\, G < \sup G \leqslant s = g(b)$$

  Entonces

$$\sup_{E_r \in \widetilde{A}} \beta_r < g(b)$$

  Lo cual contradice la *ecuación* (2.6).

De donde existe n en $\mathbb{N}$, tal que $g(E_n) = G$ tal que G es un conjunto abierto. Es suficiente demostrar la existencia de n, puesto que si E_n es un *F_conjunto* entonces por Lema 2.3.10, se tiene que G es abierto y si E_n fuese un *I_conjunto*, entonces como por Lema 2.3.11 g no tiene saltos, entonces la proposición es satisfecha. □

El siguiente Teorema consolida lo trabajado hasta el momento:

Teorema 2.3.1 *Si S es un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$, existe una función creciente*

$$g : S \to \overline{\mathbb{R}}$$

tal que todos los saltos de $g(S)$ son abiertos.

Demostración. Se sigue de manera inmediata de la construcción de g y de la Proposición 2.3.1. □

2.4. Teorema de Debreu

En esta sección se presenta el principal resultado de Debreu. Esto es, representar las preferencias del consumidor definidas en un conjunto no vacío de alternativas X mediante una función de utilidad continua, el cual es una consecuencia de las Proposición 2.4.1 , 2.4.2 y 2.4.3. Empezaremos dando una serie de definiciones y proposiciones necesarias.

Definición 2.4.1 *La topología preorden superior sobre X, es la topología más débil para el cual el conjunto $\{x \in X : x \succcurlyeq y\}$ es cerrado para cada y en X.*

Definición 2.4.2 *La topología preorden inferior sobre X, es la topología más débil para el cual el conjunto $\{x \in X : x \preccurlyeq y\}$ es cerrado para cada y en X.*

Proposición 2.4.1 *Sea X un conjunto completamente preordenado , si existe una función creciente v de X hacia $\overline{\mathbb{R}}$, entonces existe una función creciente $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$, la cual es semicontinua superior en la topología preordenada superior y semicontinua inferior en la topología preordenada inferior.*

Demostración Por el Teorema 2.3.1, existe $g : S \to \overline{\mathbb{R}}$ creciente, tal que todos los saltos de $g(S)$ son abiertos. Tomando $S = v(X)$, se tiene que $g : v(X) \to \overline{\mathbb{R}}$, donde todos los saltos de $g(v(X))$ son abiertos. Definimos una función u en X como $u(x) = g(v(x))$ el cual es creciente, por ser g y v crecientes.

Ahora demostraremos que u es semicontinua superior con la topología preordenada superior. Será suficiente demostrar que para cada γ en $\overline{\mathbb{R}}, u^{-1}([\gamma, +\infty])$ es cerrado en X, como γ está en $\overline{\mathbb{R}}$ entonces hay dos posibilidades.

1. $\gamma \in u(X)$ entonces existe y en X tal que $u(y) = \gamma$. Por lo tanto $y = u^{-1}(\gamma)$.

   También
   $$\begin{aligned} u^{-1}([\gamma, +\infty]) &= \{x \in X : u(x) \in [\gamma, +\infty]\} \\ &= \{x \in X : u(x) \geq \gamma\} \\ &= \{x \in X : x \succcurlyeq u^{-1}(\gamma)\} \\ &= \{x \in X : x \succcurlyeq y\} \end{aligned}$$
   es cerrado por definición de topología preordenada superior.

2. Si γ no pertenece a $u(X)$ se presentan dos casos:

   a) Si γ no pertenece a un salto de $u(X)$. Ocurre alguno de los siguientes sub-casos

   a.1) Si $\gamma \leq \inf u(X)$ entonces $\gamma \leq u(x), \forall x \in X$. Veamos que:
   $$\begin{aligned} u^{-1}([\gamma, +\infty]) &= \{x \in X : u(x) \in [\gamma, +\infty]\} \\ &= \{x \in X : u(x) \geq \gamma\} \\ &= X \end{aligned}$$
   X es cerrado.

   a.2) Si $u(X) < \gamma$ entonces $u(x) < \gamma, \forall x \in X$, luego no existe x en X tal que $u(x) \geq \gamma$. Por lo tanto $u^{-1}([\gamma, +\infty]) = \emptyset$, el cual es cerrado.

   a.3) Si $[\gamma, +\infty] = \bigcap [\alpha, +\infty]$ con $\alpha \leq \gamma$

Veamos que $u^{-1}([\gamma,+\infty]) = u^{-1}(\bigcap_{\alpha\in X}[\alpha,\infty]) = \bigcap_{\alpha\in X} u^{-1}([\alpha,+\infty])$, el cual es cerrado.

b) Si γ pertenece a un salto de $u(X)$. Luego por Teorema 2.3.1, tenemos que existe $\langle\lambda,\mu\rangle$ un salto abierto, con $\lambda,\mu \in u(X)$, y $\lambda < \gamma < \mu$. Además

$$u^{-1}([\mu,+\infty]) = u^{-1}([\gamma,+\infty])$$

Siendo $u^{-1}([\mu,+\infty])$ cerrado, entonces $u^{-1}([\gamma,+\infty])$ es cerrado. Y así u es semicontinua superiormente.

Con argumentos similares se demuestra la semicontinuidad inferior en la topología preordenada inferior. □

Proposición 2.4.2 *Sea X un espacio topológico totalmente preordenado con una base numerable de conjuntos abiertos. Si el conjunto $\{x \in X : x \succcurlyeq y\}$ es cerrado para cada $y \in X$, entonces existe una función $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ semicontinua superior y creciente asociada a $\succcurlyeq$.*

Demostración. Para X con una base numerable $\mathfrak{B} = \{O_1, O_2, O_3, \ldots\}$, existe una función creciente v, como en el Lema 2.1.1.
Luego por Proposición 2.4.1 existe $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ la cual es creciente y semicontinua superior en la topología pre orden superior $\mathcal{T}_{ps}$. Ahora como esta topología es más débil o a lo sumo igual que la topología de X. Por lo tanto u es semicontinua en $\mathcal{T}$. □

En forma análoga se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 2.4.3 *Sea X un espacio topológico completamente preordenado con una base contable de conjuntos abiertos . Si el conjunto $\{x \in X : x \preccurlyeq y\}$ es cerrado para cada y en X. Entonces existe una función $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ semicontinua inferior y creciente.*

Demostración. Análogo a la demostración de la Proposición 2.4.2. $\square$

Teorema 2.4.1 *(**Teorema de Debreu**) Sea X un espacio topológico completamente preordenado con una base numerable de conjuntos abiertos . Si los conjuntos $\{x \in X : x \preccurlyeq y\}$ y $\{x \in X : x \succcurlyeq y\}$ son cerrados para cada y en X. Entonces existe una función $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ continua y creciente.*

Demostración. De las Proposiciones 2.4.2 y 2.4.3 se desprende que existe una función creciente $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Luego por el *Proposición* 2.4.1, existe $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ semicontinua en las topologías preordenadas superior e inferiormente.

Como la topología dada sobre X es más fuerte o a lo sumo igual a ambas topologías, se tiene que u es semicontinua superior e inferior en la topología dada. $\square$

Ahora veremos otros resultados que también son consecuencia directa de la Proposición 2.4.1.

Proposición 2.4.4 *Sea X un espacio topológico completamente preordenado, conexo y separable. Si los conjuntos $\{x \in X : x \preccurlyeq y\}$ y $\{x \in X : x \succcurlyeq y\}$ son cerrados para cada y en X. Entonces existe una función $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ continua y creciente.*

Demostración. Sea $Z = \{z_1, z_2, z_3, ...\}$ un subconjunto denso numerable de X. Sean y, y' en X tal que $y \prec y'$. Dando lugar a los conjuntos cerrados $\{x \in X : x \preccurlyeq y\}$, $\{x \in X : x \succcurlyeq y'\}$; los cuales son no vacíos y disjuntos. En efecto:

- Son no vacíos. Como X es preordenado, se tiene que $y \preccurlyeq y$, $y' \preccurlyeq y'$, entonces $y \in \{x \in X : x \preccurlyeq y\}$ y $y' \in \{x \in X : y' \preccurlyeq x\}$. Por lo tanto son diferentes del vacío.

- Son disjuntos. Puesto que de existir un elemento w en la intersección, se tendría que $w \preccurlyeq y$ y $y' \preccurlyeq w$ entonces $y' \preccurlyeq w \preccurlyeq y$. Luego $y' \preccurlyeq y$, lo cual es una contradicción, pues $y \prec y'$.

Resumiendo los conjuntos $\{x \in X : x \preccurlyeq y\}, \{x \in X : y' \preccurlyeq x\}$ son cerrados, no vacíos y disjuntos. Sin embargo, la unión de ellos no es todo X.

Como $y \prec y'$ entonces existe z en Z tal que $y \prec z \prec y'$. Luego el conjunto abierto $\{x \in X : y \prec x \prec y'\}$ es no vacío, entonces existe una base numerable de abiertos de la forma $\{x \in X : y \prec x \prec y'\}$. Ahora se define $v : X \to \overline{\mathbb{R}}$ para cada x en X, como se hizo en el Lema 2.1.1

$$\text{Con } N(x) = \{n : z_n \prec x\} \text{ y } v(x) = \sum_{n \in N(x)} \frac{1}{2^n}$$

De donde $v : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es creciente. Luego por la Proposición 2.4.1 existe $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ semicontinua superior en la topología preordenada superior y semicontinua inferior en la topología pre ordenada inferior. Por lo tanto en virtud del Teor.2.4.1 existe $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ continua y creciente.

$\square$

Proposición 2.4.5 *Sea X un conjunto completamente pre ordenado conteniendo un subconjunto numerable Z tal que si x, y en X satisface $x \prec y$, entonces existe $z \in Z$ satisfaciendo $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$. Entonces existe una función creciente $v : X \to \overline{\mathbb{R}}$.*

Demostración. Para $x \in X$, denotemos por $a(x)$ la clase de equivalencia de x respecto a $\preccurlyeq$. Particularmente cuando $a(w) \cap Z$ es no vacío, $a(w)$ será denotado por $c(w)$. Definiendo así los conjuntos

$$A = \{a(x) : x \in X\} \quad \text{y} \quad C = \{a(w) : w \in X, \text{con}\, c(w) \cap Z \neq \emptyset\}$$

Es claro que $C \subset A$ y además C es numerable. Denotaremos por $\preceq$ la relación en A inducida por la relación $\preccurlyeq$ en X. Definimos $a(x) \prec b(x)$ si y sólo si $a(x) \preceq b(x)$ pero no $b(x) \preceq a(x)$, de donde A es un conjunto totalmente ordenado. Dado $a(x), b(x)$ en A, entonces $a(x) \prec b(x)$ si y sólo si $x \prec y$, para todo x, y en $a(x)$ y $b(x)$, respectivamente. Si $x \prec y$ entonces existe z en Z tal que $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$, para todo x, y en $a(x)$ y $b(x)$, respectivamente. Entonces $x \preccurlyeq z$ para todo x en $a(x)$, luego $x \preccurlyeq z \preccurlyeq w$ para todo x en $a(x)$, puesto que z pertenece a $c(w)$. De donde $x \preceq w$, para todo x, w en $a(x), c(w)$, respectivamente. Por lo tanto $a(x) \prec c(w)$. En forma análoga se verifica que $c(w) \prec b(x)$. Luego, existe $a(w)$ en C tal que $a(x) \prec c(w) \prec b(x)$.

Sin perdida de generalidad, diremos a, b en A y c en C, para expresar $a(x), b(x)$ en A y $c(w)$ en C. Considerando b, b' en A tal que $b \prec b'$, pero no existe a en A tal que $b \prec a \prec b'$, luego b y/o b' están en C. Consecuentemente estos pares de elementos b, b' de A forman una clase numerable, puesto que a lo más dos de ellos tienen un elemento de C como una componente.

Agregando las componentes de los pares a la clase numerable C obtenemos un nuevo conjunto numerable $C^* = \{c_1, c_2, c_3, ...\}$, de donde dado a, b en A tal que $a \prec b$. Entonces existe c_i en C^* tal que $a \prec c_i \prec b$, es decir, C^* es denso y numerable en A. Considerando

$$N(x) = \{n : c_n \prec a(x)\} \text{ y definiendo } v(x) = \sum_{n \in N(x)} \frac{1}{2^n}$$

La cual es una función creciente como se demostró en el *Lema*.2.1.1.

$\square$

.

Bibliografía

[**1**] G. Debreu, *Representation of a preference ordering by a numerical function.* In Decision Process. John Wiley, 1954.

[**2**] G. Debreu, *Continuity properties of Paretian Utility.* International Economic Review, 5, 1964.

[**3**] G. Debreu, *Theory of Value*. Bosh. España, 1959.

[**4**] A. Lugon, *Economía Matemática- Notas de Clase*. Disponible en: http://macareo.pucp.edu.pe/alugon/teaching/IEMc/separatav6.pdf

[**5**] A. Jordan, *Sobre un Lema de Representación de Debreu*. Perú: Pro Mathematica XXV, 2009.

[**6**] A. Mas - Colell y otros, *Microeconomic Theory.* Oxford University. New York: Press, 1995.

[**7**] J. Munkres, *Topology, A First Course*. Prentice-Hall. New Jersey: 1976.