PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

FORMAS ARMÓNICAS CON VALORES EN UN FIBRADO VECTORIAL
E
INMERSIONES DE VARIEDADES RIEMANNIANAS

TESIS

para obtener el grado de

MAGISTER

presentada por

LLAUCE SANTAMARIA EDWIN EDILBERTO

Bajo la dirección del Doctor

FIGUEROA SERRUDO CHRISTIAM BERNARDO

Miembros del jurado

Dr. ALCANTARA BODE, JULIO CESAR
Dr. MAMANI TRONCOSO, RICHARD MANUEL

Marzo del 2014
Lima-Peru

Dedico este trabajo a mis padres, Genaro y María Tomasa por su amor y esmero sacrificio y a mis hermanos por ser perceverantes en el día a día y apoyarme en los momentos dificiles.

A mi esposa Linsay por su amor y comprensión y a mi pequeño hijo Thiago que es la felicidad del hogar.

A mis tíos Pedro y Janet por su apoyo.

Agradezco a las personas que de una u otra manera aportaron en la realización de este trabajo.

A mi asesor Dr. Chritiam Figueroa, por permitirme ser su tesista y orientarme en la ejecución del trabajo.

Contenido

Introducción

El propósito de este trabajo es discutir la aplicación de la teoría de las formas armónicas con valores en un fibrado vectorial y su relación con las inmersiones en una variedad riemanniana.

Sea M una variedad riemanniana y E un fibrado vectorial riemanniano sobre M, entonces podemos definir de manera natural el operador laplaciano $\square$ en las formas diferenciales con valores en E y expresaremos el producto escalar $\langle \square\theta, \theta \rangle$, donde θ es una p-forma con valores en E, en términos de la curvatura y la diferencial covariante. Además si M es compacta, obtendremos, mediante integración sobre M una formula análoga a las formas diferenciales ordinarias de Bochner's.

Sea f una inmersión de M en una variedad riemanniana M'. Consideramos la segunda forma fundamental α de (M, f) como una 1-forma con valores en $\mathrm{Hom}(T(M), N(M))$. Asumiendo que M' es de curvatura seccional constante y la curvatura media normal de (M, f) es paralela, probaremos que la segunda forma fundamental α es armónica, es decir $\square\alpha = 0$. En particular, si la inmersión f es una inmersión minimal, entonces α es armónica. Por el contrario, si M es compacta y α es armónica, entonces la curvatura media normal es paralela.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedad diferenciable

Una variedad topológica de dimensión ”n” es un espacio topológico M el cual es de Hausdorff, admite una base enumerable de abiertos y es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Esta última condición significa que en torno de cada punto $p \in M$ podemos obtener un abierto U y un homeomorfismo $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$, donde $V = \varphi(U)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Llamamos al par (φ, U) una carta o sistema local de coordenadas de M.

Sea M^n una variedad topológica (n denota la dimensión de M). Un atlas sobre M es una familia $A = (\varphi_\alpha, U_\alpha)_\alpha \in \Lambda$ de cartas de M tal que la colección $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ constituye una cobertura abierta de M. Para $1 \leq r \leq \infty$, decimos que A es un atlas de clase C^r si dos cartas cualesquiera $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$, (φ_β, U_β) de A son C^r-compatibles, i.e. si el cambio de coordenadas,

$$\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un difeomorfismo de clase C^r (esta definición tiene sentido pues $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$). Un atlas A de clase C^r es llamado maximal si no es posible obtener un atlas de clase C^r que contenga propiamente a éste, es decir si A_0 es un atlas de clase C^r y $A \subset A_0$ entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$.

Definición 1.1.1. *Una variedad diferenciable de clase C^r es un par (M, A) donde M es una variedad topológica y A es un atlas C^r-maximal sobre M (A es llamado una estructura diferenciable de clase C^r sobre M)*

Definición 1.1.2. *Sean $(M^m, \mathcal{A})$ y $(N^n, \mathcal{B})$ variedades diferenciables de clase C^r y sea $f : M \to N$ una función. Decimos que $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ es una función de clase C^s $(s \leq r)$ si para todo* *par de cartas $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$, $(\psi, V) \in \mathcal{B}$ tales que $f(U) \cap V$, la composición $\psi f \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es una función de clase C^s (esta definición tiene sentido gracias a que $\varphi(U)$ y $\psi(V)$ son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente).*

1.2 Espacio Tangente

Sea M una variedad diferenciable. Una aplicación diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ es llamada una curva (diferenciable) en M. Suponga que $\alpha(0) = p \in M$, y sea D el conjunto de las funciones de M diferenciables en p. El vector tangente a una curva α en $t = 0$ es una función $\alpha'(0) : D \to \mathbb{R}$ dada por $\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}$ $f \in D$. Un vector tangente en p es un vector tangente en $t = 0$ de alguna curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p$. El conjunto de los vectores tangentes a M en p será indicado por T_pM.

Si elegímos una parametrización $\boldsymbol{x} : U \to M^n$ en $p = \boldsymbol{x}(0)$, podemos expresar la función f y la curva α en esta parametrización dada por $f \circ x(q) = f(x_1, ..., x_n)$, $q = (x_1, ..., x_n) \in U$ y $x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ respectivamente. Por tanto restringiendo f en α, obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha^{'}(0) &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x_1(t), ..., x_n(t))|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = (\sum_i x_i'(0)(\frac{\partial}{\partial x_i})_0)f. \end{aligned}$$

En otras palabras, el vector $\alpha'(0)$ puede ser expresado por la parametrización x por

$$\alpha'(0) = \sum_i x_i'(0)(\frac{\partial}{\partial x_i})_0$$

Observe que $(\frac{\partial}{\partial x_i})_0$ es un vector tangente en p, a una curva coordenada

$$x_i \to x(0, ...0, x_i, 0, ...0)$$

De la expresión $\alpha'(0) = \sum_i x_i'(0)(\frac{\partial}{\partial x_i})_0$ muestra que el vector tangente a una curva α en p depende de las derivadas de α en un sistemas de coordenadas. De ahí también que el conjunto de T_pM, con las operaciones usuales de funciones, forma un espacio vectorial de dimensión n, y que la elección de una parametrización $x : U \to M$ determina una base asociada $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_0, ..., (\frac{\partial}{\partial x_1})_0\}$ en T_pM.

Es inmediato que la estructura lineal en T_pM así definida no depende de la parametrización $\boldsymbol{x}$. El espacio vectorial T_pM es llamado el espacio tangente de M en p.

1.3 Variedad Riemanniana

Una *métrica Riemanniana* en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto p de M un producto interno $\langle , \rangle_p$ en el espacio tangente T_pM, que varía diferenciablemente en el siguiente sentido: Si $x : U \subset \mathbb{R} \to V \subset M$ es un sistemas de coordenadas locales en torno de p se tiene que las aplicaciones

$$g_{ij} : U \to \mathbb{R}$$

definidas por $\langle((d\varphi_q)(e_i), (d\varphi_q)(e_j)\rangle_q$ es una función diferenciable en V.

Una variedad diferenciable con una métrica riemanniana dada es llamada una *variedad Riemanniana*.

1.4 Variedad orientable

Sea M una variedad diferenciable. Se dice que M es *orientable* si M admite una estructura diferenciable $(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)$ tal que:
(i) para todo par α, β, con $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \boldsymbol{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \phi$, el cambio diferencial de coordenadas $\boldsymbol{x}_\beta \circ \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}$ tine determinante positivo.

Caso contrario, se dice que M no es *orientable*. Si M es orientable, la elección de una estructura diferenciable satisfaciendo (i) es llamada una *orientación* de M y M, es entonces *orientada*.
Dos estructuras diferenciables que satisfacen (i) *determinan la misma orientación* si la unión de las mismas satisfacen (i).

No es difícil verificar que si M es orientable y conexa existen exactamente dos orientaciones distintas en M.

Sean ahora M_1 y M_2 variedades diferenciables y $\varphi : M_1 \to M_2$ un difeomorfismo. Es inmediato verificar que M_1 es orientable si y solo si M_2 es orientable. Si además de esto, M_1 y M_2 son conexas y orientadas, φ induce una orientación en M_2 que puede o no coincidir con una orientación inicial de M_2. En el primer caso, se dice que φ *preserva la orientación* y en el segundo, φ *invierte la orientación*.

Ejemplo 1.1. *Si M puede ser cubierta por dos vecindades coordenadas V_1 y V_2 de modo que la intersección $V_1 \cap V_2$ es conexa, entonces M es orientable. Pues como el determinante del jacobiano del cambio de coordenadas es ϕ, que no cambia de signo en $V_1 \cap V_2$; si es negativo en un punto, basta intercambiar el signo de una de las coordenadas para que pase a positivo en ese punto, en $V_1 \cap V_2$.*

1.5 Campos de Vectores

Un Campo de vectores X en una variedad diferenciable M es una correspondencia que a cada punto $p \in M$ asocia un vector $X(p) \in T_pM$.
Teniendo en cuenta que el conjunto de todos los vectores tangentes a M, definimos el fibrado tangente $TM = \{(p, v)/v \in T_pM, p \in M\}$,

$$\begin{array}{rcl} \pi : TM & \rightarrow & M \\ (p, v) & \rightarrow & p \end{array}$$

Se puede dotar de estructura de variedad diferenciable, a TM de tal manera que π es C^∞
Un campo de vectores X puede interpretarse como una aplicación de M en su fibrado tangente tal que,

$$X : M \rightarrow TM/\pi \circ X = id_M$$

Un campo de vectores X se dirá diferenciable, si la aplicación $X : M \rightarrow TM$ entre la variedad y su fibrado tangente es diferenciable. El conjunto de todos los campos de vectores diferenciables sobre M se denotará por $\mathfrak{X}(M)$.
Sea X un campo de vectores sobre M. Para cada punto p de M, $X(p) \equiv X_p$ es un vector tangente a M en p, y por consiguiente, es una derivación local (en el conjunto de las funciones diferenciables en un entorno de p) de manera que los campos de vectores se pueden considerar como derivaciones sobre el álgebra de las funciones diferenciables sobre la variedad:

$$X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

donde $X(f)(p) = X_p(f)$

Está interpretación permite caracterizar a los campos de vectores diferenciables como aquellos que transforman funciones diferenciables en funciones diferenciables. En el conjunto de los campos de vectores diferenciables sobre M podemos definir dos operaciones naturales, la suma y el producto por funciones diferenciables, del siguiente modo:

Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $X + Y : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ está definida por
$(X + Y)(f) : M \rightarrow R$, $(X + Y)(f)(p) = X_p(f) + Y_p(f)$

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$ entonces $fX : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$
está definida por $(fX)(g) : M \rightarrow R$, $(fX)(g)(p) = f(p)X_p(g)$
Con las dos operaciones anteriores, el conjunto $\mathfrak{X}(M)$ admite estructura de módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$ de las funciones diferenciables.

1.6 Corchete de Lie

Si X e Y son dos campos de vectores diferenciables y f es una función diferenciable, entonces $X(Y(f))$ e $Y(X(f))$ son funciones diferenciables. Sin embargo, este tipo de operaciones no conduce en general a nuevos campos de vectores diferenciables, ya que envuelven derivadas de orden superior a la primera.

Lema 1.1. *Sean X e Y dos campos de vectores diferenciables sobre M. Entonces existe un único campo $Z \in X(M)$ tal que $Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$, para toda función $f \in C^\infty(M)$. El campo Z se denomina el corchete de Lie de X e Y y se denota por $[X, Y]$.*
Prueba *Ver [6] pag 28*

Esta forma de construir nuevos campos a partir de otros ya existentes nos permite definir la operación corchete:

$$\begin{array}{rcl} [,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) & \to & [X, Y] \end{array}$$

que a cada par de campos le asocia su corchete de Lie, la cual posee interesantes propiedades.

Usando la definición de corchete se puede mostrar la siguiente.

Proposición 1.1. *Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vectores diferenciables sobre M, $a, b \in R$ y $f, g \in C^\infty(M)$ funciones diferenciables. Entonces:*
(1) $[X, Y] = -[Y, X]$ (antisimetría)
(2) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (R-linealidad)
(3) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidad de Jacobi)
(4) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X; \quad f, g \in C^\infty(M)$.
Prueba *Ver [6] pag 29*

1.7 Fibrados

Un ***fibrado*** con base M y ***fibra*** F es una aplicación suave $\pi : E \to M$, donde E es una variedad suave llamada ***espacio total***, tal que alrededor de cada punto $x \in M$, existe U, vecindad de x en M, y un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$, llamada ***trivialización*** (local) en x, que hace el diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

conmute.
En consecuencia para cada $x \in M$, la aplicación $\varphi_x : F \to \pi^{-1}(x) = F_x$ dada por $\varphi_x(y) = \varphi^{-1}(x, y)$ es un difeomorfismo, donde φ es una trivialización local en x.

Ejemplo 1.2. *La aplicación $\pi_1 : M \times F \to M$ es llamada* ***fibrado trivial****.*

Una aplicación $\sigma : M \to E$ es una ***sección*** (del fibrado $\pi : E \to M$ de fibra F) si $\pi \circ \sigma = Id_M$. Denotaremos por $\Gamma(M, E)$ al conjunto de secciones del fibrado $\pi : E \to M$.

Dos fibrados con base M y fibra F, digamos, $\pi : E \to M$ y $\pi' : E' \to M$, son ***isomorfos*** si existe un difeomorfismo $\varphi : E \to E'$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

conmute.

Un fibrado $\pi : E \to M$ con base M y fibra F es ***trivial***, si es isomorfo al fibrado $\pi_1 : M \times F \to M$ del Ejemplo 1.2 (en otros términos si admite una trivialización definida en todo E). Por su misma definición, todo fibrado es localmente trivial.

Todo fibrado trivial $\pi : E \to M$ con base M y fibra F, admite una sección global: puesto que existe un difeomorfismo $\varphi : E \to M \times F$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

conmute, basta considerar $a \in F$, y definir $\sigma_a : M \to E$ como $\sigma_a(x) = \varphi^{-1}(x, a)$.

Si el fibrado $\pi : E \to M$ con base M y fibra F es trivial, entonces existe una identificación entre $\Gamma(M, E)$ y el conjunto de aplicaciones suaves $f : M \to F$. Para lograrlo basta considerar

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M,E) & \to & C^\infty(M,F) \\ \sigma & \mapsto & \pi_2 \circ \varphi \circ \sigma, \end{array}$$

con inversa

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M,F) & \to & \Gamma(M,E) \\ f & \mapsto & (x \mapsto \varphi^{-1}(x, f(x))), \end{array}$$

donde $\pi_2 : M \times F \to F$ es la proyección a la segunda coordenada.

A continuación veremos una forma práctica de generar fibrados. Sea el fibrado $\pi : E \to N$ con base N, fibra F y una aplicación suave $f : M \to N$. El conjunto $f^*(E) := \{(x, v) \in M \times E : f(x) = \pi(v)\}$ es una variedad suave y junto con la aplicación $\pi_1 : f^*(E) \to M$ dada por $\pi_1(x,v) = x$, obtenemos una estructura de fibrado (de base M y fibra F). El fibrado $\pi_1 : f^*(E) \to M$ es conocido como el ***fibrado pullback*** de E ***bajo*** f .

Observemos que si $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ es una trivialización local del fibrado $\pi : E \to N$, entonces la aplicación $\tilde{\varphi}_\alpha : (M \times E) \cap (f^{-1}(U_\alpha) \times E) \to f^{-1}(U_\alpha) \times F$ definida por $\tilde{\varphi}_\alpha(x,v) = (x, \pi_2\varphi_\alpha(v))$ representa una trivialización local del fibrado pullback de E.

Sea el fibrado $\pi : E \to N$ con base N, fibra F y una aplicación suave $f : M \to N$. Existe una aplicación suave $u : f^*(E) \to E$ (llamada **aplicación fibrada**) que hace el diagrama

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Además para cada $x \in M$, la aplicación u induce un difeomorfismo

$$u_x : F \to \pi^{-1}(f(x)) = F_{f(x)}$$

fibra a fibra.

En efecto, sea $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ una trivialización local de $\pi : E \to N$. La aplicación suave $u_\alpha : \pi_1^{-1}(f^{-1}(U_\alpha)) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ queda definida por $u_\alpha(x,v) = \varphi_\alpha^{-1}(f(x), \pi_2\varphi_\alpha(v))$.
Además si $(x,v) \in \pi_1^{-1}(f^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta))$ entonces $u_\alpha(x,v) = u_\beta(x,v)$. De aquí podemos definir u localmente sobre $f^*(E)$.
Además, dado un punto $x \in M$, consideramos la aplicación $u_x : F \to \pi^{-1}(f(x)) = F_{f(x)}$ dada por $u_x(y) = \varphi_\alpha^{-1}(f(x), y)$, donde

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$$

es una trivialización local de $\pi : E \to N$ en $f(x)$.

Ejemplo 1.3. *Sea el fibrado $\pi : E \to N$ con base N, fibra F. Entonces el fibrado pullback de E bajo la aplicación $id : N \to N$ es el propio fibrado $\pi : E \to N$.*

Ejemplo 1.4. *Dado el fibrado $\pi : E \to N$ con base N, fibra F, seleccionemos $c \in N$. Para la aplicación constante $c : M \to N$ definida por $c(x) = c$, el fibrado pullback de E bajo c es trivial.*

A continuación presentamos un tipo especial de fibrado, cuya noción extiende el concepto de fibrado de una variedad. Un ***fibrado vectorial de dimensión*** n es un fibrado $\pi : E \to M$, con fibra F isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Además para $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ cualquier trivialización local en x, se exige que la aplicación $\varphi_x : F = \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(x)$ dada por $\varphi_x(y) = \varphi^{-1}(x,y)$ sea un isomorfismo de espacios vectoriales. A continuación damos un ejemplo fundamental de fibrado vectorial.

Ejemplo 1.5. *Consideremos una variedad suave M y $TM = \{(x,v) : x \in M, v \in T_xM\}$ el espacio tangente de M el cual posee una estructura natural de variedad suave. La proyección a la primera coordenada $\pi_1 : TM \to M$ es un fibrado vectorial llamado* ***fibrado tangente de*** *M.*

Una variedad M C^∞ de dimensión n se dice ***paralelizable*** si existen $X_1, \ldots, X_n$ campos C^∞ tangentes sobre M linealmente independientes; es decir, para cada punto $x \in M$ el conjunto $(X_1(x), \ldots, X_n(x))$ constituye una base de T_xM. Adaptada a la teoría de fibrados tendremos que una variedad M es paralelizable si su fibrado tangente TM es trivial: sea $\varphi : TM \to M \times \mathbb{R}^n$ el difeomorfismo entre TM y el fibrado trivial. Tomemos $X_i : M \to TM$ campo suave tangente sobre M definido por $X_i(x) = \varphi^{-1}(x, e_i) = \varphi_x(e_i)$. La independencia lineal de los campos $X_1, \ldots, X_n$ se sigue de la independencia lineal de los vectores canónicos $e_1, \ldots, e_n$ en $\mathbb{R}^n$ y del hecho de que la aplicación φ_x es un isomorfismo para cada $x \in M$.

A continuación veremos fibrados vectoriales con algún tipo de estructura extra.
Un ***fibrado vectorial con producto interno*** es un fibrado vectorial $\pi : E \to M$ junto con una correspondencia $\langle\, , \rangle$ que asocia a cada $x \in M$ un producto interno $\langle\, , \rangle_x$ sobre $\pi^{-1}(x)$. Dicha asignación debe ser suave, en el sentido que si $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ es cualquier trivialización local del fibrado, la aplicación $\psi : U \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = \langle \varphi^{-1}(x, e_i), \varphi^{-1}(x, e_j)\rangle_x$ es suave. Además para $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ cualquier trivialización local en x, se exige que la aplicación $\varphi_x : F = \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(x)$ sea una isometría.

Un ***fibrado vectorial orientado*** es un fibrado vectorial $\pi : E \to M$ junto con una correspondencia $\mathcal{O}$ que asocia a cada $x \in M$, una orientación $\mathcal{O}_x$ sobre $\pi^{-1}(x)$. Dicha asignación debe ser suave, en el sentido que si $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ es cualquier trivialización local del fibrado, entonces se tiene $\mathcal{O}_q = [\varphi^{-1}(q, e_1), \ldots, \varphi^{-1}(q, e_n)]$ para todo $q \in U$. Además, para $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$, cualquier trivialización local en x, se exige que la aplicación $\varphi_x : F = \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(x)$ preserve orientación. Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial orientado con producto interno de dimensión n. Una ***trivialización ortonormal positiva*** de E es una trivialización global $\varphi : E \to M \times \mathbb{R}^n$ tal que para cada punto $x \in M$ el conjunto $(\varphi^{-1}(x, e_1), \ldots, \varphi^{-1}(x, e_n))$ es una base ortonormal positiva de $\pi^{-1}(x)$. En consecuencia, si un fibrado posee una trivialización ortonormal positiva, éste tiene que ser trivial. Dadas dos trivializaciones ortonormales positivas $\varphi_1, \varphi_2 : E \to M \times \mathbb{R}^n$ del fibrado vectorial orientado con producto interno $\pi : E \to M$ de dimensión n, llamamos **aplicación cambio de base entre** φ_1 **y** φ_2 a la aplicación $u : M \to SO_n$ (denotada por $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$) dada por $u(x)$, la matriz cambio de base entre los sistemas de vectores $(\varphi_1^{-1}(x, e_1), \ldots, \varphi_1^{-1}(x, e_n))$ y $(\varphi_2^{-1}(x, e_1), \ldots, \varphi_2^{-1}(x, e_n))$ en $\pi^{-1}(x)$.

1.8 Fibrado Producto Tensorial

1.9 Derivada Covariante

Definición 1.9.1. *Sea M una variedad diferenciable, E un fibrado vectorial sobre M, se define la derivada covariante o equivalentemente, conexión (lineal) como la aplicación $D : \Gamma(E) \times TM \to \Gamma(E)$*
con las siguientes propiedades.

1. $D_{V+W}\sigma = D_V\sigma + D_W\sigma$ *para* $V, W \in T_xM,\ \sigma \in \Gamma(E)$

2. $D_{fV}\sigma = fD_V\sigma$ *para* $f \in C^\infty(M, R),\ V \in \Gamma(TM)$

3. $D_V(\sigma + \tau) = D_V\sigma + D_V\tau$ *para* $V \in T_xM,\ \sigma, \tau \in \Gamma(E)$

y satisface: $D_V(f\sigma) = V(f)\sigma + fD_V\sigma \quad f \in C^\infty(M, R)$.

Observación 1.1. *Por la propiedad 1 y 2 también podemos considerar D como una aplicación $\Gamma(TM) \otimes \Gamma(E)$ de $\Gamma(E)$ y escribimos para $\sigma \in \Gamma(E)$, $V \in T_xM$*

$$\begin{array}{rcl} D_\sigma : TM & \to & \Gamma(E) \\ v & \mapsto & w, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D : \Gamma(E) & \to & \Gamma(TM^* \otimes E) \\ \sigma & \mapsto & D\sigma(), \end{array}$$

$$D\sigma(V) := D_V\sigma.$$

1.10 Inmersión

Una función diferenciable $f : M^m \to N^n$ es una inmersión en $p \in M$ si la derivada $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es inyectiva (observe que en ese caso necesariamente tenemos $m < n$). La función $\boldsymbol{f}$ es llamada una inmersión cuando es una inmersión en cada uno de los puntos de M.

Decimos tambien que una función diferenciable $f : M^m \to N^n$ es una submersión en $p \in M$ si la derivada $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es sobreyectiva (observe que en ese caso necesariamente tenemos $m > n$). La función f es llamada una submersión cuando es una submersión en cada uno de los puntos de M.

1.10.1 Segunda Forma Fundamental

Sea $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ una inmersión. Se sabe que, para cada $p \in M$, existe una vecindad $U \subset M$ de $p \in M$ tal que $f(U) \subset \overline{M}$ es una subvariedad de $\overline{M}$. Esto quiere decir que existe una vecindad $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ y un difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ Para simplificar la notación, identificaremos U con $f(U)$ y cada vector $v \in T_pM$, $q \in U$, con $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Usaremos tales identificaciones para entender, por ejemplo, un campo local (esto es, definido en U) de vectores de M en un campo local (esto es, definido en $\overrightarrow{U}$) de vectores en $\overline{M}$;

Para cada $p \in M$, el producto interno en $T_p\overline{M}$ descompone $T_p\overline{M}$ en la suma directa $T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}$, donde $(T_pM)^{\perp}$ es el complemento ortogonal de T_pM en $T_p\overline{M}$.

Si $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escribir $v = v^T + v^N$, $v^T \in T_pM$, $v^N \in (T_pM)^{\perp}$. Denominamos v^T la componente tangencial de v y v^N la componente normal de v. Tal descomposición es evidentemente diferenciable en el sentido que las aplicaciones de $T\overline{M}$ en $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \to (p, v^T) \;\; y \;\; (p, v) \to (p, v^N)$$

son diferenciables.

La Conexión Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Si X e Y son campos locales de vectores en M, e $\overline{X}, \overline{Y}$ son extensiones locales an $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

Definamos la segunda forma fundamental de la inmersión $f : M \to \overline{M}$. Para esto conviene previamente introducir la siguiente definición. Si X e Y son campos locales en M,

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

es un campo local en $\overline{M}$ normal a M. $B(X, Y)$ no dependen de las conexiones $\overline{X}, \overline{Y}$. En efecto, si $\overline{X}_1$ es una extensión de X tenemos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}-\overline{X}_1}\overline{Y},$$

que se anula en M, pues $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ en M; además de esto, si $\overline{Y}_1$ es otra extensión de Y,

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}_1 - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pues $(\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0$ a lo largo de la trayectoria de X, que se encuentra en M.

Por lo tanto $B(X, Y)$ está bien definida, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ los campos diferenciables en U de vectores normales a $f(U) \approx U$.

Proposición 1.2. *Si $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, la aplicación $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

es bilineal y simétrica.

Prueba Ver [6] pag 140

Ahora podemos definir la segunda forma fundamental. Sea $p \in M$ y $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. La aplicación $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(X, Y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_pM.$$

Por la proposición anterior es una forma bilineal y simétrica.

La forma cuadrática II_η definida en T_pM por

$$II_n = H_\eta(x, x)$$

es llamada la segunda forma fundamental de f en p según el vector normal η. Aveces se utiliza también la expresión segunda forma fundamental para designar la aplicación B que en cada punto $p \in M$ es una aplicación bilineal, simétrica tomando valores en $(TpM)^{\perp}$.

Observe que la aplicación bilineal H_η tiene asociada una aplicación lineal auto-adjunta $S_\eta : T_pM \to T_pM$ talque:

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

La proposición siguiente nos da una expresión de la aplicación lineal asociada a la segunda forma fundamental en términos de la derivada covariante.

Proposición 1.3. *Sea $p \in M$, $x \in T_pM$ y $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Sea N una extensión local de η normal a M. Entonces*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Prueba Ver [6] pag 142

1.11 Conexión

1.11.1 Tensores sobre un Espacio Vectorial

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita (todos los espacios vectoriales y variedades se supone real). Como de costumbre, V^* denota el espacio dual de V el espacio de covectores, o funcionales lineales con valores reales, en V y denotamos la pareja natural $V^* \times V \to R$ por

cualquiera de las notaciones $(\omega, X) \to \langle \omega, X \rangle$ o $(\omega, X) \to \omega(X)$
para $\omega \in V^*, X \in V$.
Un tensor k-covariante en V es una aplicación multilineal

$$F : \underbrace{V \times ... \times V}_{k-veces} \to \mathbb{R}.$$

Del mismo modo, un tensor l-contravariante es una aplicación multilineal

$$F : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{l-veces} \to \mathbb{R}.$$

Con frecuencia tenemos que considerar también tensores de tipos mixtos. Un tensor de tipo $\binom{k}{l}$,

También llamado un tensor k-covariante , l-contravariante, es una aplicacón multilineal

$$F : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{l-veces} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{k-veces} \to \mathbb{R}.$$

En realidad, en muchos casos, es necesario considerar multilineales cuya argumentos consisten en k vectores y l covectores, pero no necesariamente en el orden implícito en la definición anterior; tal objeto todavía se llama un tensor de tipo $\binom{k}{l}$.

Para cualquier tensor dado, vamos a dejar claro que los argumentos son vectores y covectores. El espacio de todas los tensores k-covariantes en V se denota por $T^k(V)$, el espacio de tensores l-contravariantes por $T_l(V)$, y el espacio de mezclado $\binom{k}{l}$-tensores por $T^k_l(V)$.

El espacio de todos los tensores k-covariantes en V se denota por $T^k(V)$, el espacio de tensores l-contravariantes por $T_l(V)$, y el espacio de mezclado $\binom{k}{l}$-tensores por $T^k_l(V)$. El rango de un tensor es el número de argumentos (vectores y / o covectores) que se necesita. Hay identificaciones obvias
$T^k_0(V) = T^k(V)$, $T^0_l(V) = T_l(V)$, $T^1(V) = V^*$, $T_1(V) = V^* * = V$ y $T^0(V) = R$. A menos obvia, pero extremadamente importante, la identificación es $T^1_1(V) = End(V)$, el espacio de lineal endomorfismos de V (así mismo para aplicaciones lineales de V).

La idea de un tensor en una variedad riemanniana, es una generalización natural de campos de vectores $\mathfrak{X}(M)$

Definición 1.11.1. *Un tensor T de orden r en una variedad riemanniana es una aplicación multilineal.*

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M, R).$$

Es decir dados $Y_1, ..., Y_r \in \mathfrak{X}(M)$, $T(Y_1, ..., Y_r)$ es una función diferenciable en M y T lineal en cada argumento:

$$T(X_1, ..., fX_i + gY_1, ..., Y_r) = fT(X_1, ..., X_i, ..., Y_r) + gT(X_1, ..., X_i, ..., X_r).$$

Donde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in C^\infty(M, R)$

Observación 1.2. *identificaremos un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ como un tensor $X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M, R)$ dada por $X(Y) = \langle X, Y \rangle$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$*

Definición 1.11.2. *Sea T un tensor de orden r, una diferencial covariante ∇T de T es un tensor de orden (r + 1) dada por:*
$\nabla T(Y_1, ..., Y_r, X) = X(T(Y_1, ..., Y_r)) - T(\nabla_X Y_1, ..., Y_r) - ... - T(Y_1, ..., Y_{r-1}, \nabla_X Y_r)$
Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, una derivada covariante $\nabla_X T$ de T en relación a X es un tensor de orden r dado por:

$$\nabla_X T(Y_1, ..., Y_r) = \nabla T(Y_1, ..., Y_r, X).$$

Capítulo 2

Formas Armónicas con valores en un fibrado vectorial e Inmersiones de Variedades Riemannianas

2.1 Fibrado vectorial Riemanniano

Sea M una variedad riemanniana n-dimensional y E un fibrado vectorial con producto interno sobre M y la diferenciación covariante D_X satisfaciendo en E, es decir

$$X\langle\varphi,\psi\rangle = \langle D_X\varphi,\psi\rangle + \langle\varphi, D_X\psi\rangle \tag{2.1}$$

para cualquier campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ y para cualquier par de secciones φ, ψ de E. Un fibrado vectorial E con estas propiedades se llama un *fibrado vectorial riemanniano.*

Denotamos por $C^p(E)$ al espacio vectorial real de todas las p-formas en M con valores en E. Se define el *operador*

$$\partial : C^p(E) \to C^{p+1}(E),\ (p = 0, 1, ...)$$

por la fórmula

$$\begin{aligned}(\partial\theta)(X_1, ..., X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}D_{X_i}(\theta(X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_{p+1})) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\theta([X_i, X_j], X_1, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_{p+1}),\ \theta \in C^p(E)\end{aligned} \tag{2.2}$$

donde X_i denotan campos vectoriales sobre M. La *derivada covariante* $D_X\theta$ de $\theta \in C^p(E)$ es una p-forma con valores vectoriales tal que.

$$(D_X\theta)(X_1, ..., X_p) = D_X(\theta(X_1, ..., X_p)) - \sum_{i=1}^{p} \theta(X_1, ..., \nabla_X X_i, ..., X_p), \qquad (2.3)$$

donde $\nabla_X X_i$ denota la derivada covariante del campo de vectores X_i en la variedad riemanniana M.

Para una 1-forma θ con valores vectoriales tenemos la siguiente formula:

$$\begin{aligned}(\partial\theta)(X, Y) &= D_X(\theta(Y)) - D_Y(\theta(X)) - \theta([X, Y]) \\ &= D_X(\theta(Y)) - D_Y(\theta(X)) - \theta(\nabla_X Y - \nabla_Y X)\end{aligned}$$

agrupando convenientemente,

$$= (D_X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y)) - (D_Y(\theta(X)) - \theta(\nabla_Y X)).$$

Por (2.3) tenemos,

$$(\partial\theta)(X, Y) \quad = \quad (D_X\theta)(Y) - (D_Y\theta)(X) \qquad (2.4)$$

En general el *diferencial covariante* $D\theta$ de θ es una (p+1)-tensor con valores vectoriales definido por:

$$(D\theta)(X_1, ..., X_p, X) = (D_X\theta)(X_1, ..., X_p). \qquad (2.5)$$

Ahora definimos el operador *operador*

$$\partial^* : C^p(E) \to C^{p-1}(E), \ (p > 0)$$

de la siguiente manera. Sea $x \in M$ y sea $\{e_1, ..., e_n\}$ una base ortonormal del espacio tangente $T_x(M)$ de M en x. Para cualquier $(p-1)$ vectores tangentes $u_1, ..., u_{p-1}$ en x, definimos

$$(\partial^*\eta)_x(u_1, ..., u_{p-1}) = -\sum_{k=1}^{n} (D_{e_k}\eta)_x(e_k, u_1, ..., u_{p-1}), \qquad (2.6)$$

donde $\eta \in C^p(E)$, $(D_{e_k}\eta)_x$ denota el valor de $D_X\eta$ en x, para cualquier campo de vectores X satisfaciendo $X_k = e_k$. Se sigue que $(\partial^*\eta)_x$ es una aplicación lineal $(p-1)-alternada$ de $T_x(M)$ en E_x, la fibra de E sobre x, y la asignación $x \to (\partial^*\eta)_x$ define una $(p-1)-forma$ $\partial^*\theta$ con valores en E. Si θ es una $0-forma$ con valores en E, definimos $\partial^*\theta = 0$.

Definición 2.1.1. *El laplaciano $\square$ para formas diferenciales con valores vectoriales se define como:*

$$\square = \partial\partial^* + \partial^*\partial : C^p(E) \to C^p(E). \tag{2.7}$$

La curvatura $\tilde{R}$, conocida la diferenciación covariante D en E, es una $2-forma$ con valores en $Hom(E,E)$ dado por:

$$\tilde{R}(X,Y)\varphi = D_X(D_Y\varphi) - D_Y(D_X\varphi) - D_{[X,Y]}\varphi \tag{2.8}$$

para cualquier sección φ de E y para cualquier campo de vectores X e Y en M.

Denotamos por $\langle\theta,\eta\rangle$ el producto escalar de θ y $\eta \in C^p(E)$ (p-formas con valores en E), a la función suave sobre M definida por:

$$\langle\theta,\eta\rangle(x) = \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} \langle\theta(e_{i_1},...,e_{i_p}), \eta(e_{i_1},...,e_{i_p})\rangle_x, \tag{2.9}$$

donde $\{e_1,...,e_n\}$ es una base ortonormal de $T_x(M)$, $\langle,\rangle$ producto interno en E_x.

Teorema 2.1. *Sea θ una 1-forma con valores en E. Entonces*

$$\langle\square\theta,\theta\rangle = \frac{1}{2}\triangle\langle\theta,\theta\rangle + \langle D\theta, D\theta\rangle + A, \tag{2.10}$$

donde $\triangle$ denota el laplaciano de la variedad riemanniana M y A denota una función suave en M definida de la siguiente manera:

$$A(x) = \sum_{i,j}\langle(\tilde{R}(e_j,e_i)\theta(e_j),\theta(e_i)\rangle + \sum_i\langle\theta(S(e_i)),\theta(e_i)\rangle, \tag{2.11}$$

donde $\{e_1,...,e_n\}$ es una base ortonormal de $T_x(M)$ y S denota el endomorfismo de $T_x(M)$ definido por el tensor de Ricci S de M, es decir $S(e_i) = \sum_k S_{ki}e_k$.

Prueba. Fijamos un punto $x \in M$ y sea $\{e_1,...,e_n\}$ una base ortonormal de $T_x(M)$.
Optamos por n campos vectoriales $E_1,...,E_n$ en M, tal que $E_i(x) = e_i$ y $(\nabla_{E_k}E_i)_x$=0 para $i,k = 1,...,n$. Es decir E_i es un referencial geodésico.
Por (2.7) y (2.6) tenemos,

$$\begin{aligned}(\partial^*\partial\theta)(e_i) &= -\sum_{k=1}^{n}(D_{e_k}\partial\theta)(e_k,e_i)\\ &= -\sum_s(D_{e_s}\partial\theta)(e_s,e_i)\end{aligned}$$

Usando (2.3) tenemos,

$$= -\sum_s(D_{e_s}((\partial\theta)(E_s,E_i)) - (\partial\theta)(E_s,\nabla_{e_s}E_i) - (\partial\theta)(\nabla_{e_s}E_s,E_i))$$

Evaluando en x.

$$= -\sum_s D_{e_s}((\partial\theta)(E_s, E_i)).$$

De (2.4) tenemos,

$$= -\sum_s D_{e_s}((D_{E_s}\theta)(E_i) - (D_{E_i}\theta)(E_s))$$

$$= -\sum_s D_{e_s}((D_{E_s}\theta)(E_i)) + \sum_s D_{e_s}((D_{E_i}\theta)(E_s))$$

De (2.3),

$$= -\sum_s((D_{E_s}D_{E_s}\theta)(e_i) + (D_{E_s}\theta)(\nabla_{e_s}E_i)) + \sum((D_{E_s}D_{E_i}\theta)(e_s) + (D_{E_i}\theta)(\nabla_{E_i}E_s))$$

Evaluando en x.

$$(\partial^*\partial\theta)(e_i) \quad = \quad -\sum_s((D_{E_s}D_{E_s}\theta)(e_i) + \sum_s(D_{E_s}D_{E_i}\theta)(e_s) \tag{2.12}$$

Por otro lado,

$$\partial^*\theta = -\sum_{s,t} g^{st}(D_{E_t}\theta)(E_s)$$

donde g^{st} es la matriz inversa de la matriz $(g(E_s, E_t))$ ver [9]. De donde, por (2.6) tenemos,

$$\begin{aligned}(\partial\partial^*\theta)(e_i) \quad &= D_{e_i}(\partial^*\theta)\\ &= D_{e_i}(-\sum_{s,t} g^{st}(D_{E_t}\theta)(E_s))\\ &= -\sum_{s,t} D_{e_i}(g^{st}(D_{E_t}\theta)(E_s))\end{aligned}$$

Derivando,

$$\begin{aligned}&= -\sum_{s,t}(e_i g^{st})(D_{e_t}\theta)(e_s)) - \sum_{s,t} g^{st} D_{e_i}((D_{E_t}\theta)(E_s))\\ &= -\sum_{s,t}(D_{e_i}(\langle E_s, E_t\rangle))(D_{e_t}\theta)(e_s) - \sum_{s,t}\delta^{st} D_{e_i}((D_{E_t}\theta)(E_s))\end{aligned}$$

Derivando $D_{e_i}(\langle E_s, E_t\rangle$, se tiene,

$$= -\sum_{s,t}(\langle\nabla_{e_i}e_s, e_t\rangle + \langle e_s, \nabla_{e_i}E_t\rangle)(D_{e_t}\theta)(e_s) - \sum_s D_{e_i}((D_{E_s}\theta)(E_s))$$

Evaluando en x.

$$= -\sum_s D_{e_i}((D_{E_s}\theta)(E_s))$$

Usando (2.3),

$$= -\sum_s((D_{E_i}D_{E_s}\theta)(e_s) + (D_{E_s}\theta)(\nabla_{E_i}e_s))$$

Evaluando en x se tiene,

$$(\partial\partial^{*}\theta)(e_i) = -\sum_s (D_{E_i}D_{E_s}\theta)(e_s), \tag{2.13}$$

Así de (2.12) y (2.13) obtenemos,

$$(\Box\theta)(e_i) = \sum_s ((D_{E_s}D_{E_i} - D_{E_i}D_{E_s})\theta)(e_s) - \sum_s (D_{E_s}D_{E_s}\theta)(e_i). \tag{2.14}$$

Dado que $[E_s, E_i] = 0$ en x,

$$\begin{aligned}((D_{E_s}D_{E_i} - D_{E_i}D_{E_s})\theta)(e_s) &= ((D_{E_s}D_{E_i} - D_{E_i}D_{E_s}) - D_{[E_s,E_i]})\theta)(e_s)\\ &= (D_{E_s}D_{E_i}\theta)(e_s) - (D_{E_i}D_{E_s}\theta)(e_s) - (D_{[E_s,E_i]}\theta)(e_s)\end{aligned}$$

Usando (2.3) tenemos,

$$\begin{aligned}= \quad & D_{E_s}((D_{E_i}\theta)(e_s)) - (D_{E_i}\theta)(\nabla_{E_s}e_s) - D_{E_i}((D_{E_s}\theta)(e_s)) + (D_{E_s}\theta)(\nabla_{E_i}e_s)\\ & -(D_{[E_s,E_i]}(\theta(e_s)) + \theta(\nabla_{[E_s,E_i]}e_s)\end{aligned}$$

Nuevamente usando (2.3), en los paréntesis,

$$\begin{aligned}&= D_{E_s}(D_{E_i}(\theta(e_s)) - \theta(\nabla_{E_i}e_s)) - D_{E_i}(\theta(\nabla_{E_s}e_s)) + \theta(D_{E_i}D_{E_s})(e_s) - D_{E_i}(D_{E_s}(\theta(e_s))\\ &\quad -\theta(\nabla_{E_s}e_s)) + D_{E_s}(\theta(\nabla_{E_i}e_s)) - \theta(D_{E_s}D_{E_i})(e_s) - D_{[E_s,E_i]}(\theta(e_s)) + \theta(\nabla_{[E_s,E_i]}e_s)\end{aligned}$$

Derivando,

$$\begin{aligned}&= D_{E_s}D_{E_i}(\theta(e_s)) - D_{E_s}(\theta(\nabla_{E_i}e_s)) - D_{E_i}(\theta(\nabla_{E_s}e_s)) + \theta(D_{E_i}D_{E_s})(e_s)\\ &\quad -D_{E_i}D_{E_s}(\theta(e_s)) + D_{E_i}(\theta(\nabla_{E_s}e_s)) + D_{E_s}(\theta(\nabla_{E_i}e_s))\\ &\quad -\theta(D_{E_s}D_{E_i})(e_s) - D_{[E_s,E_i]}(\theta(e_s)) + \theta(\nabla_{[E_s,E_i]}e_s)\end{aligned}$$

Evaluando en x y agrupando convenientemente,

$$= (D_{E_s}D_{E_i} - D_{E_i}D_{E_s} - D_{[E_s,E_i]})(\theta(e_s)) - \theta(D_{E_s}D_{E_i} - D_{E_i}D_{E_s} - \nabla_{[E_s,E_i]})(e_s))$$

Por la definición de Curvatura,

$$((D_{E_s}D_{E_i} - D_{E_i}D_{E_s})\theta)(e_s) = \tilde{R}(e_s,e_i)(\theta(e_s)) - \theta(R(e_s,e_i)(e_s)). \tag{2.15}$$

Luego, la ecuación (2.14) queda de la siguiente manera.

$$(\Box\theta)(e_i) = \sum_s (\tilde{R}(e_s,e_i)(\theta(e_s)) - \theta(R(e_s,e_i)(e_s))) - \sum_s (D_{E_s}D_{E_s}\theta)(e_i). \tag{2.16}$$

Por lo tanto,

$$\langle \Box\theta, \theta\rangle(e_i) = \sum_i \langle (\Box\theta)(e_i), \theta(e_i)\rangle$$

Usando (2.16),

$$\begin{aligned} &= \sum_i \langle \sum_s (\tilde{R}(e_s, e_i)(\theta(e_s)) - \theta(R(e_s, e_i)(e_s))), \theta(e_i)\rangle \\ &\quad - \sum_i \langle \sum_s (D_{E_s} D_{E_s}\theta)(e_i), \theta(e_i)\rangle \end{aligned}$$

Distribuyendo convenientemente,

$$\begin{aligned} &= \sum_{s,i} \langle (\tilde{R}(e_s, e_i)(\theta(e_s)), \theta(e_i)\rangle - \sum_i \langle \sum_s \theta(R(e_s, e_i)(e_s), \theta(e_i)\rangle \\ &\quad - \sum_{s,i} \langle (D_{E_s} D_{E_s}\theta)(e_i), \theta(e_i)\rangle \end{aligned}$$

Como $S(e_i) = \sum_s R(e_s, e_i)(e_s)$ es el tensor Ricci se tiene,

$$= \sum_{s,i} \langle (\tilde{R}(e_s, e_i)(\theta(e_s)), \theta(e_i)\rangle - \sum_i \langle \theta(S(e_i), \theta(e_i)\rangle - \sum_{s,i} \langle (D_{E_s} D_{E_s}\theta)(e_i), \theta(e_i)\rangle. \quad (2.17)$$

Por otro lado ver [9] pag 13, teniendo en cuenta que $E_s(x) = x_s$, $\nabla_{E_s} E_s$ en x,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\triangle\langle\theta, \theta\rangle &= -\tfrac{1}{2} traz(\nabla(d\langle\theta, \theta\rangle)) \\ &= -\tfrac{1}{2}\sum_s \nabla_{E_s}(d\langle\theta, \theta\rangle)(E_s)/_x \end{aligned}$$

Derivando según el fibrado dual,

$$= -\tfrac{1}{2}\sum_s e_s(d\langle\theta, \theta\rangle)(e_s) - d\langle\theta, \theta\rangle(\nabla_{E_s} E_s)$$

Evaluando en x se tiene,

$$= -\frac{1}{2}\sum_s E_s E_s(\langle\theta, \theta\rangle)$$

Volviendo a derivar,

$$= -\frac{1}{2}\sum_s E_s(\langle D_{E_s}\theta, \theta\rangle + \langle\theta, D_{E_s}\theta\rangle)$$

$$= -\sum_s E_s\langle D_{E_s}\theta, \theta\rangle$$

Derivando,

$$= -\sum_s (\langle D_{E_s} D_{E_s}\theta, \theta\rangle + \langle D_{E_s}\theta, D_{E_s}\theta\rangle)$$

Por lo tanto, cumple en el último de (2.17) .

$$-\sum_{s,t} \langle (D_{E_s} D_{E_s}\theta)(e_i), \theta(e_i)\rangle = \langle D\theta, D\theta\rangle(x) + \frac{1}{2}\triangle\langle\theta, \theta\rangle(x) \quad (2.18)$$

De la ecuación (2.17) y (2.18),

$$\langle \Box\theta, \theta\rangle(e_i) = \sum_{s,i} \langle (\tilde{R}(e_s, e_i)(\theta(e_s)), \theta(e_i)\rangle - \sum_i \langle \theta(S(e_i), \theta(e_i)\rangle + \tfrac{1}{2}\triangle\langle\theta,\theta\rangle + \langle D\theta, D\theta\rangle$$

Así queda demostrado,

$$\langle \Box\theta, \theta\rangle = \tfrac{1}{2}\triangle\langle\theta,\theta\rangle + \langle D\theta, D\theta\rangle + A$$

□

Acontinuación veremos algunas consecuencias del teorema anterior.

Corolario 2.1. *Sea θ una 1-forma E-valuada. Supongamos que $\Box\theta = 0$ y $\Delta\langle\theta,\theta\rangle = 0$. Entonces tenemos. $A \leq 0$ en todo M.*

Prueba. Por el teorema anterior tenemos: $\langle \Box\theta, \theta\rangle = \frac{1}{2}\triangle\langle\theta,\theta\rangle + \langle D\theta, D\theta\rangle + A$. Entonces usando las condiciones $\Box\theta = 0$ y $\Delta\langle\theta,\theta\rangle = 0$, tenemos.

$$\begin{aligned} A &= -\langle D\theta, D\theta\rangle \\ &= -\|D\theta\|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

□

Supongamos ahora que M es compacto y orientable. Entonces podemos definir el producto interno (θ, η) de dos p-formas en $C^p(E)$ por,

$$(\theta, \eta) = \int_M \langle\theta, \eta\rangle * 1, \tag{2.19}$$

donde 1 representa el elemento volumen de M.

Corolario 2.2. *Sea θ una 1-forma E-valuada tal que $\Box\theta = 0$. Entonces tenemos que.*

$$(D\theta, D\theta) + \int_M A * 1 = 0.$$

Prueba. Usando (2.19),

$$(D\theta, D\theta) + \textstyle\int_M A * 1 = \int_M \langle D\theta, D\theta\rangle * 1 + \int_M A * 1$$

Usando (2.10),

$$= \int_M (\langle\Box\theta, \theta\rangle - \frac{1}{2}\Delta\langle\theta,\theta\rangle - A) * 1 + \int_M A * 1$$

Usando las condición ($\Box = 0$),

$$= \int_M (-\frac{1}{2}\Delta\langle\theta,\theta\rangle - A) * 1 + \int_M A * 1$$

Además $\int_M \Delta\langle\theta,\theta\rangle = 0$, pues $\partial M = 0$ ver [6] pag 96. Entonces se tiene,

$$(D\theta, D\theta) + \int_M A * 1 = 0.$$

$\Box$

En particular, $A \geq 0$ en todo M, entonces tenemos que $A \equiv 0$ y $D\theta = 0$. Hacemos notar que el operador ∂^* es el operador adjunto de ∂, es decir,

$$(\partial\theta, \eta) = (\theta, \partial^*\eta) \tag{2.20}$$

para cualquier $\theta \in C^p(E)$ y $\eta \in C^{p+1}(E)$. De donde,

$$\begin{aligned}
(\Box\theta,\theta) &= \int_M \langle\Box\theta,\theta\rangle * 1 \\
&= \int_M \langle\partial^*\partial\theta + \partial\partial^*\theta,\theta\rangle * 1 \\
&= \int_M \langle\partial^*\partial\theta,\theta\rangle * 1 + \int_M \langle\partial\partial^*\theta,\theta\rangle * 1 \\
&= \int_M \langle\partial\theta,\partial\theta\rangle * 1 + \int_M \langle\partial^*\theta,\partial^*\theta\rangle * 1 \\
&= (\partial\theta,\partial\theta) + (\partial^*\theta,\partial^*\theta)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Por lo tanto, si M es compacto, $\Box\theta = 0$ si y solo si $\partial\theta = 0$ y $\partial^*\theta = 0$.

2.2 La Segunda Forma Fundamental

Sea M una variedad riemanniana n-dimensional isométricamente inmersa en una variedad riemanniana M' de dimensión $(n+p)$. Denotamos por $N(M)$ al fibrado normal y α a la segunda forma fundamental de M. La segunda forma fundamental α es una 2-forma simétrica $N(M)$-valuada de M. Acontinuación definimos:

$$E = Hom(T(M), N(M)) \quad = \quad T^*(M) \otimes N(M)$$

Interpretaremos α como una 1-forma β, E-valuada de la siguiente manera. Para cada campo de vectores X en M, definimos $\beta(X)$ como:

$$\beta(X) \cdot Y = \alpha(X, Y) \tag{2.22}$$

donde $\beta(X)$ es una sección de E.

Dado que α es simétrica, se tiene que.

$$\beta(X) \cdot Y = \beta(Y) \cdot X, \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.23}$$

Decimos también que β es la segunda forma fundamental de M.

La métrica a la largo de las fibras de E se define naturalmente por las métricas riemannianas de M y M'. La derivada covariante D_X en E, asociada a la métrica anterior es también definido por la diferenciación covariante ∇_X en M y $D_X^\perp$ en $N(M)$, donde recordaremos que para cualquier vector normal ξ de M, $D^\perp(\xi)$ se define como la componente normal de $\nabla_{X'}\xi$, donde $\nabla_{X'}$ denota la diferenciación covariante en la variedad riemanniana M'.

Sea φ una sección de E. Podemos considerar φ como una 1-forma sobre M con valores en $N(M)$. De (2.3),

$$(D_X\varphi)(Y) = D_X^\perp(\varphi(Y)) - \varphi(\nabla_X Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Recordando que $D^\perp$ es la conexión en $N(M)$.

$$= D_X^\perp(\varphi(Y)) - \varphi(\nabla_X Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.24}$$

Por otro lado, sean f, η tal que $\varphi = f \otimes \eta$ y $\psi = g \otimes \xi$, donde $f, g \in T^*(M)$ y $\xi, \eta \in N(M)$. Entonces,

$$\langle D_X\varphi, \psi\rangle + \langle \varphi, D_X\psi\rangle = \langle D_X(f \otimes \eta), g \otimes \xi\rangle + \langle f \otimes \eta, D_X(g \otimes \xi)\rangle$$

Derivando,

$$= \langle (D_X f) \otimes \eta + f \otimes D_X^\perp\eta, g \otimes \xi\rangle + \langle f \otimes \eta, (D_X g) \otimes \xi + g \otimes D_X^\perp\xi\rangle$$

Distribuyendo el producto interno tenemos.

$$= \langle (D_X f) \otimes \eta, g \otimes \xi\rangle + \langle f \otimes D_X^\perp\eta, g \otimes \xi\rangle + \langle f \otimes \eta, (D_X g) \otimes \xi\rangle + \langle f \otimes \eta, g \otimes D_X^\perp\xi\rangle$$

Aplicando la definición de producto interno en el producto tensorial, ver [9] pag 4.

$$= \langle D_X f, g\rangle\langle \eta, \xi\rangle + \langle f, g\rangle\langle D_X^\perp\eta, \xi\rangle + \langle f, D_X g\rangle\langle \eta, \xi\rangle + \langle f, g\rangle\langle \eta, D_X^\perp\xi\rangle$$

Agrupando convenientemente,

$$= (\langle D_X f, g\rangle + \langle f, D_X g\rangle)\langle \eta, \xi\rangle + (\langle D_X^\perp\eta, \xi\rangle + \langle \eta, D_X^\perp\xi\rangle)\langle f, g\rangle$$

Por definición de derivada,

$$= X(\langle f,g\rangle)\langle \eta,\xi\rangle + X(\langle \eta,\xi\rangle)\langle f,g\rangle$$

$$= X(\langle f,g\rangle\langle \eta,\xi\rangle)$$

$$= X(\langle f\otimes\eta, g\otimes\xi\rangle)$$

Por lo tanto

$$\langle D_X\varphi,\psi\rangle + \langle \varphi, D_X\psi\rangle = X(\langle\varphi,\psi\rangle). \tag{2.25}$$

para cualquier par de secciones φ y ψ de E. Es decir D es compatible con la métrica en el sistema tensorial.

La siguiente proposición se puede considerar como una interpretación de la ecuación de Codazzi en nuestro contexto.

Proposición 2.1. *Supongamos que M' es una Variedad Riemanniana de curvatura seccional constante. Entonces la segunda forma fundamental β de M satisface la ecuación $\partial\beta = 0$*

Prueba. Haciendo un cálculo simple y usando (2.2) tenemos:

$$(\partial\beta(X,Y))(Z) \quad = \quad (D_X(\beta(Y)) - D_Y(\beta(X)) - \beta([X,Y]))(Z)$$

Distribuyendo tenemos,

$$= \quad (D_X(\beta(Y)))(Z) - (D_Y(\beta(X)))(Z) - \beta(\nabla_X Y)(Z) + \beta(\nabla_Y X)(Z)$$

Usando (2.24) en cada uno de los términos,

$$= \quad D_X^{\perp}(\beta(Y)(Z)) - \beta(Y)(\nabla_X Z) - D_Y^{\perp}(\beta(X)(Z)) + \beta(X)(\nabla_Y Z) - \beta(\nabla_X Y)(Z) + \beta(\nabla_Y X)(Z)$$

Por (2.22),

$$= \quad D_X^{\perp}(\alpha(Y,Z)) - \alpha(Y,\nabla_X Z) - D_Y^{\perp}(\alpha(X,Z)) + \alpha(X,\nabla_Y Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z)$$

Agrupando convenientemente,

$$= \quad [D_X^{\perp}(\alpha(Y,Z)) - \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z)] - [D_Y^{\perp}(\alpha(X,Z)) - \alpha(\nabla_Y X,Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z)]$$

Por [4] vol.2 pag 25 se tiene,

$$(\partial\beta(X,Y))(Z) \quad = \quad (\nabla_X\alpha)(Y,Z) - (\nabla_Y\alpha)(X,Z) \qquad \forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$$

Como M' tiene curvatura seccional constante y por la ecuación de Codazzi, ver [6] pag 152, tenemos:

$$(\nabla_X \alpha)(Y,Z) = (\nabla_Y \alpha)(X,Z)$$

Por lo tanto,

$$(\partial\beta(X,Y))(Z) \quad = \quad 0$$

$\square$

2.3 Subvariedad y Curvatura media

Para cada vector normal $\nu \in N_x(M)$ Definimos el endomorfismo A_ν de $T_x(M)$ talque:

$$\langle A_\nu(u), v\rangle = \langle \beta(u)v, \nu\rangle \tag{2.26}$$

para cualquier par de vectores $u, v \in T_x(M)$.

Entonces la curvatura media normal η de M es un campo vectorial en M tal que

$$\frac{1}{n} TrA_\nu = \langle \nu, \eta(x)\rangle \tag{2.27}$$

para cualquier $\nu \in N_x(M)$ y $x \in M$.

Se dice que M es una Subvariedad *minima* de M' si la curvatura media normal se anula en cada punto, es decir $TrA_\nu = 0$ para cualquier $\nu \in N_x(M)$ y $x \in M$.

Se dice que M tiene *curvatura media constante* si la curvatura media normal η es paralelo, es decir $D_X^\perp \eta = 0$, para cualquier campo de vectores X en M.

Sea ν un campo vectorial normal. Entonces como $TrA_\nu = n\langle \nu, \eta\rangle$,

$$\begin{aligned} X \cdot TrA_\nu &= X(n\langle \nu, \eta\rangle) \\ &= n\{\langle D_X^\perp \nu, \eta\rangle + \langle \nu, D_X^\perp \eta\rangle\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto M tiene curvatura media constante, si y solo si

$$X \cdot TrA_\nu \quad = \quad TrA_{D_X^\perp \nu} \tag{2.28}$$

para cualquier campo vectorial normal ν y cualquier campo vectorial X en M.

Proposición 2.2. *Sea M' una variedad riemanniana de curvatura seccional constante. Entonces la segunda forma fundamental β de M satisface la ecuación $\partial^*\beta = 0$ si y solo si M tiene curvatura media constante.*

Prueba. Sea x un punto de M, $\{e_1, ..., e_n\}$ una base ortonormal de $T_x(M)$ y $E_1, ..., E_n$ campos de vectores en un entorno de x tal que $(E_i)_x = e_i$ y $\nabla_{E_i} E_k = 0$, en x para $i, k = 1, ..., n$.

Sea $(g^{s,t})$ la matriz inversa de la matriz $(\langle E_s, E_t\rangle)$. Entonces

$$\partial^* \beta = -\sum_{s,t} g^{st}(D_{E_t}\beta)(E_s)$$

y

$$(\partial^* \beta) \cdot E_k = -\sum_{s,t} g^{st}(D_{E_t}\beta)(E_s) \cdot E_k. \tag{2.29}$$

Luego por (2.3),

$$(D_{E_t}\beta)(E_s)(E_k) \quad = \quad (D_{E_t}(\beta(E_s)) - \beta(\nabla_{E_t}E_s))(E_k)$$

Distribuyendo,

$$= \quad (D_{E_t}(\beta(E_s))(E_k) - \beta(\nabla_{E_t}E_s)(E_k)$$

Usando (2.24),

$$= \quad D^{\perp}_{E_t}((\beta(E_s))(E_k)) - \beta(E_s(\nabla_{E_t}E_k) - \beta(\nabla_{E_t}E_s).E_k$$

Por tanto usando (2.22),

$$(D_{E_t}\beta)(E_s)(E_k) \quad = \quad D^{\perp}_{E_t}(\alpha(E_s, E_k)) - \alpha(E_s, \nabla_{E_t}E_k) - \alpha(\nabla_{E_t}E_s, E_k). \tag{2.30}$$

Como α es simétrica obtenemos,

$$(D_{E_t}\beta)(E_s)E_k = (D_{E_t}\beta)(E_k)E_s. \tag{2.31}$$

Por otra parte, por la proposición (2.1) tenemos $\partial\beta = 0$, entonces.

$$\begin{aligned} (\partial\beta(E_t, E_s))(E_k) \quad &= \quad [D^{\perp}_{E_t}(\alpha(E_s, E_k)) - \alpha(\nabla_{E_t}E_s, E_k) - \alpha(E_s, \nabla_{E_t}E_k)] \\ &\quad -[(D^{\perp}_{E_s}(\alpha(E_t, E_k)) - \alpha(\nabla_{E_s}E_t, E_k) - \alpha(E_t, \nabla_{E_s}E_k)] \\ 0 \quad &= \quad (D_{E_t}\beta)(E_s)E_k - (D_{E_k}\beta)(E_t)E_s \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(D_{E_t}\beta)(E_s)E_k = (D_{E_k}\beta)(E_t) \cdot E_s \tag{2.32}$$

Luego, para cualquier campo de vectores ν, de (2.29) y omitiendo el símbolo sumatoria se tiene:

$$\langle(\partial^* \beta)E_k, \nu\rangle \quad = \quad -g^{st}\langle(D_{E_t}\beta)(E_s).E_k, \nu\rangle$$

Por (2.32),

$$= -g^{st}\langle (D_{E_k}\beta)(E_t).E_s, \nu\rangle$$

Por (2.30),

$$= -g^{st}\{\langle D^{\perp}_{E_k}(\alpha(E_t,E_s)) - \alpha(E_t,\nabla_{E_k}E_s) - \alpha(\nabla_{E_k}E_t,E_s),\nu\rangle\}$$

Como $\nabla_{E_k}E_s = 0 = \nabla_{E_k}E_t$, en x.
Por lo tanto,

$$\langle(\partial^* \beta)E_k,\nu\rangle = -g^{st}\langle D^{\perp}_{E_k}(\alpha(E_t,E_s)),\nu\rangle \tag{2.33}$$

Ahora derivando,

$$g^{st}\langle D^{\perp}_{E_k}(\alpha(E_t,E_s)),\nu\rangle = g^{st}\{E_k\langle\alpha(E_t,E_s)),\nu\rangle) - \langle\alpha(E_t,E_s),D^{\perp}_{E_k}\nu\rangle\}$$

Distribuyendo,

$$= g^{st}\{E_k\langle\alpha(E_t,E_s)),\nu\rangle)\} - g^{st}\langle(\alpha(E_t,E_s)),D^{\perp}_{E_k}\nu\rangle$$

Usando la derivada de un producto,

$$= E_k(g^{st}\langle(\alpha(E_t,E_s)),\nu\rangle) - (E_k g^{st})\langle(\alpha(E_t,E_s)),\nu\rangle - g^{st}\langle\alpha(E_t,E_s),D^{\perp}_{E_k}\nu\rangle. \tag{2.34}$$

Entonces reemplazando (2.34) en (2.33) se tiene,

$$\begin{aligned}\langle(\partial^* \beta)E_k,\nu\rangle &= -\{E_k(g^{st}\langle(\alpha(E_t,E_s)),\nu\rangle) - g^{st}\langle\alpha(E_t,E_s),D^{\perp}_{E_k}\nu\rangle \\ &\quad -(E_k g^{st})\langle(\alpha(E_t,E_s)),\nu\rangle\}\end{aligned}$$

Usando (2.27) y (2.28),

$$= E_k(TrA_\nu) - TrA_{D^{\perp}_{E_k}\nu} - (E_k g^{st})\cdot\langle\alpha(E_t,E_s),\nu\rangle.$$

Como $\nabla_{E_k}E_i = 0$ en x, tenemos $E_k g^{st} = 0$ en x.

Por lo tanto tenemos que,

$$\langle(\partial^* \beta).E_k,\nu\rangle = TrA_{D^{\perp}_{E_k}\nu} - E_k(TrA_\nu) \tag{2.35}$$

en x, para $k = 1, 2, ..., n$.

Luego, para cualquier campo de vectores X, tangente a M,

$$\langle(\partial^* \beta)X,\nu\rangle(x) = TrA_{D^{\perp}_{X}\nu} - X(TrA_\nu) \tag{2.36}$$

en x. Como x es un punto arbitrario de M y ν un campo vectorial normal arbitrario, entonces

$$\partial^* \beta = 0$$

si y solamente si M tiene curvatura media constante. □

De las proposiciones (2.1) y (2.2) se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Sea M una variedad riemanniana inmersa isométricamente en una variedad riemanniana M' de curvatura seccional constante. Sea β la segunda forma fundamental de M considerada como una 1-forma $Hom(T(M), N(M))$-valuada.Entonces β satisface la ecuación $\Box\beta = 0$, si M tiene curvatura media constante. Reciprocamente, si M es compacta y orientable y $\Box\beta = 0$, entonces M tiene curvatura media constante.*

Prueba. Por proposición (2.1) y (2.2) tenemos $\Box\beta = 0$. Reciprocamente ahora si M es compacta y orientable y $\Box\beta = \partial^*\partial(\beta) + \partial(\partial^*\beta) = 0$, por corolario (2.2), tenemos $\partial\beta = 0$, además por proposición (2.2), $\partial^*\beta = 0$.
Por tanto M tiene curvatura media constante.

2.4 Curvatura seccional

Vamos a discutir en está sección algunas aplicaciones de los teoremas (2.1) y (2.2).
Sea M una variedad riemanniana isométricamente inmersa en una variedad riemanniana M' de curvatura seccional constante c. Sean $x \in M$ y $\{e_1, ..., e_n\}$, $\{\nu_1, ..., \nu_p\}$ bases ortonormales de $T_x(M)$ y $N_x(M)$ respectivamente. Vamos a denotar por $A_a(a = 1, 2, ..., p)$ el endomorfismo

$$A_a : T_xM \to T_xM,$$

definido por:

$$\langle A_a u, v\rangle = \langle\beta(u) \cdot v, \nu_a\rangle. \tag{2.37}$$

En términos de la base $\{e_i\}$,

$$A_a.e_i = \sum_j (A_a)_i^j e_j. \tag{2.38}$$

Por otro lado, de la ecuación de Gauss, ver ([6]) pag 149.
$\langle R(e_k, e_l)e_i, e_j\rangle = \langle R'(e_k, e_l)e_i, e_j\rangle - \langle B(e_j, e_l), B(e_i, e_k)\rangle + \langle B(e_i, e_l), B(e_j, e_k)\rangle.$
Dado que M' tiene curvatura seccional constante,

$$\begin{aligned} \langle R'(e_k, e_l)e_i, e_j\rangle &= c\{\langle e_k, e_i\rangle\langle e_l, e_j\rangle - \langle e_l, e_i\rangle\langle e_k, e_j\rangle\} \\ &= c\{\delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{li}\delta_{kj}\}; \end{aligned} \tag{2.39}$$

Además,

$$\begin{aligned} \langle B(e_j, e_l), B(e_i, e_k)\rangle &= \langle\sum_a\langle B(e_j, e_k), \nu_a\rangle\nu_a, B(e_i, e_k)\rangle \\ &= \sum_a\langle B(e_j, e_l), \nu_a\rangle\langle\nu_a, B(e_i, e_k)\rangle, \quad i, k, j, l = 1, ..., n \end{aligned}$$

Por (2.37) y (2.38),

$$= \sum_a \langle A_a(e_j), e_l\rangle \langle A_a(e_i), e_k\rangle$$

$$= \sum_a \langle \sum_r (A_a)_j^r e_r, e_l\rangle \langle \sum_s (A_a)_i^s e_s, e_k\rangle$$

Cuando $r = l$ y $s = k$ se tiene,

$$= \sum_a (A_a)_j^l \langle e_l, e_l\rangle (A_a)_i^k \langle e_k, e_k\rangle$$

Por lo tanto,

$$\langle B(e_l, e_j), B(e_k, e_i)\rangle = \sum_a (A_a)_j^l (A_a)_i^k \tag{2.40}$$

De igual manera;

$$\langle B(e_i, e_l), B(e_j, e_k)\rangle = \sum_a (A_a)_i^l (A_a)_j^k \tag{2.41}$$

Entonces de (2.39), (2.40) y (2.41),

$$R_{klij} = c\{\delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{li}\delta_{kj}\} + \sum_a \{(A_a)_j^l (A_a)_i^k - (A_a)_i^l (A_a)_j^k\} \tag{2.42}$$

donde R_{klij} denota las componentes del tensor curvatura R con respecto a la base $\{e_1, ..., e_n\}$ de $T_x(M)$.

Proposición 2.3. *Sea el endomorfismo S de $T_x(M)$, definido por $S(e_j) = \sum_l S_{lj}(e_l)$ con $S_{lj} = \sum_k R_{klkj}$. Entonces, $S = c(n-1)I + \sum_a traz(A_a)A_a - \sum_a A_a^2$.*

Prueba. Hallando otra expresión para S. De (2.42) cuando $i = k$.

$$\begin{aligned} R_{klkj} &= c\{\delta_{kk}\delta_{lj} - \delta_{lk}\delta_{kj}\} + \sum_a \{(A_a)_j^l (A_a)_k^k - (A_a)_k^l (A_a)_j^k\} \\ &= c\{\delta_{lj} - \delta_{lk}\delta_{kj}\} + \sum_a \{(A_a)_j^l (A_a)_k^k - (A_a)_k^l (A_a)_j^k\} \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_l \sum_k R_{klkj}(e_l) = \sum_l \sum_k [c\{\delta_{lj} - \delta_{lk}\delta_{kj}\} + \sum_a \{(A_a)_j^l (A_a)_k^k - (A_a)_k^l (A_a)_j^k\}](e_l)$$

Cuando $j = l$ en el primer término;

$$\sum_l S_{lj}(e_l) = c \sum_k [\delta_{ll} - \delta_{lk}\delta_{kl}](e_l) + \sum_k \sum_l \sum_a \{(A_a)_j^l (A_a)_k^k - (A_a)_k^l (A_a)_j^k\}(e_l)$$

Es decir.

$$S(e_j) \;=\; c(n-1)I + \sum_a [\sum_k \sum_l (A_a)_j^l (A_a)_k^k (e_l) - \sum_k (A_a)_j^k \sum_l (A_a)_k^l (e_l)]$$

Reordenando convenientemente,

$$= \; c(n-1)I + \sum_a [\sum_k (A_a)_k^k \sum_l (A_a)_j^l (e_l) - \sum_k (A_a)_j^k (A_a)(e_k)]$$

Por (2.38),

$$= \; c(n-1)I + \sum_a [(A_a)(A_a)(e_k) - \sum_k (A_a)_j^k (A_a)(e_k)]$$

Por definición de traza y (2.38), nuevamente,

$$\begin{aligned} &= \; c(n-1)I + \sum_a [(trazA_a)A_a(e_j) - (A_a)A_a(e_j)] \\ &= \; c(n-1)I + \sum_a traz(A_a)A_a(e_j) - \sum_a A_a^2(e_j) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$S = c(n-1)I + \sum_a traz(A_a)A_a - \sum_a A_a^2; \tag{2.43}$$

donde I representa el endomorfismo identidad de $T_x(M)$. □

Se sabe que $S(e_j) = \sum_{lk} R_{klkj}$, entonces

$$traz(S) = traz(\sum_{lk} R_{klkj}) = \frac{1}{n} \sum_j Ric_p(e_j) = K(p),$$

donde K(p) es la curvatura escalar.

Proposición 2.4. *Sea K la curvatura escalar de M. Entonces,*

$$K = c(n-1)n + n^2 \langle \eta, \eta \rangle - \langle \beta, \beta \rangle, \tag{2.44}$$

donde β,η representan la segunda forma fundamental y la curvatura media de M, respectivamente.

Prueba. Como K es la curvatura escalar de M, entonces

$$\begin{aligned} K(x) &= trazS \\ &= traz[c(n-1)I + \sum_a (trazA_a)A_a - \sum_a A_a^2] \\ &= traz(c(n-1)I) + \sum_a (trazA_a)(trazA_a) - \sum_a trazA_a^2 \\ &= c(n-1)n + \sum_a (traz(A_a))^2 - \sum_a trazA_a^2 \end{aligned}$$

Por otro lado el vector curvatura media normal η, esta dado por:

$$\eta(x) = \frac{1}{n}\sum_a trazA_a.\nu_a,$$

donde $\{\nu_a\}$ es una base ortonormal de $N_x(M)$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\langle\eta(x),\eta(x)\rangle &= \langle\tfrac{1}{n}\sum_a(trazA_a)\nu_a,\tfrac{1}{n}\sum_b(trazA_b)\nu_b\rangle\\ &= \tfrac{1}{n^2}\sum_a\sum_b trazA_a trazA_b\langle\nu_a,\nu_b\rangle\\ &= \tfrac{1}{n^2}\sum_a(traz(A_a))^2\langle\nu_a,\nu_a\rangle.\end{aligned}$$

Luego,

$$n^2\langle\eta,\eta\rangle(x) = \sum_a(trazA_a)^2. \tag{2.45}$$

Análogamente dado la segunda forma fundamental β,

$$\begin{aligned}\langle\beta(e_i),\beta(e_i)\rangle(e_j) &= \sum_{i,j}\langle\beta(e_i)e_j,\beta(e_i)e_j\rangle\\ &= \sum_{i,j}\langle\sum_a\langle\beta(e_i)e_j,\nu_a\rangle\nu_a,\beta(e_i)e_j\rangle\\ &= \sum_a\sum_{i,j}\langle\beta(e_i)e_j,\nu_a\rangle\langle\beta(e_i)e_j,\nu_a\rangle\end{aligned}$$

Por (2.37), (2.38).

$$= \sum_a\sum_{i,j}\langle A_a e_i,e_j\rangle\langle A_a e_i,e_j\rangle$$

$$= \sum_a\sum_{i,j}\langle\sum_r(A_a)_i^r e_r,e_j\rangle\langle\sum_t(A_a)_i^t e_t,e_j\rangle$$

Cuando $r=t=j$.

$$= \sum_a\sum_{i,j}(A_a)_i^j(A_a)_i^j$$

Finalmente si $i=j$.

$$\begin{aligned}&= \sum_a\sum_j(A_a^2)_j^j\\ &= \sum_a trazA_a^2\end{aligned}$$

Asi tenemos,

$$\langle\beta,\beta\rangle = \sum_a trazA_a^2 \tag{2.46}$$

Por lo tanto de (2.45) y (2.46) tenemos que la curvatura escalar M está dado por.

$$K = c(n-1)n + n^2\langle\eta,\eta\rangle - \langle\beta,\beta\rangle,$$

$\square$

Proposición 2.5. *Sea el fibrado vectorial* $E = Hom(T(M), N(M))$ *y* $\varphi \in E_x$. *Entonces* $\widetilde{R}(u,v)\varphi$ *es un elemento de* $E_x = Hom(T_x(M), N_x(M))$ *tal que,*

$$(\widetilde{R}(u,v)\varphi)(w) = R^{\perp}(u,v)\varphi(w) - \varphi(R(u,v)w), \tag{2.47}$$

donde $u, v, w \in T_x(M)$, $R^{\perp}$ *representa la curvatura del fibrado vectorial* $N(M)$ *y* R *la curvatura en* M.

Prueba. Usando (2.8);

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}(u,v)\varphi)(w) &= (D_v(D_u\varphi) - D_u(D_v\varphi) - D_{[u,v]}\varphi)(w)\\ &= (D_v(D_u\varphi))(w) - (D_u(D_v\varphi))(w) - (D_{[u,v]}\varphi)(w), \quad w \in T_xM\end{aligned}$$

Usando (2.24) en cada término,

$$\begin{aligned}= \; & D_v^{\perp}((D_u\varphi)(w)) - (D_u\varphi)(\nabla_v w) - D_u^{\perp}(D_v\varphi)(w)) + (D_v\varphi)(\nabla_v w)\\ & -D_{[u,v]}^{\perp}(\varphi(w)) + \varphi(\nabla_{[u,v]}w).\end{aligned}$$

Otra vez usando (2.24) en los paréntesis,

$$\begin{aligned}= \; & D_v^{\perp}(D_u^{\perp}(\varphi(w)) - \varphi(\nabla_u w)) - D_u^{\perp}(\varphi(\nabla_v w)) + \varphi(\nabla_u(\nabla_v w))\\ & -D_u^{\perp}(D_v^{\perp}(\varphi(w)) - \varphi(\nabla_v w)) + D_v^{\perp}(\varphi(\nabla_u w)) - \varphi(\nabla_v(\nabla_u w))\\ & -D_{[u,v]}^{\perp}(\varphi(w)) + \varphi(\nabla_{[u,v]}w)\end{aligned}$$

Derivando,

$$\begin{aligned}= \; & D_v^{\perp}D_u^{\perp}(\varphi(w)) - D_v^{\perp}(\varphi(\nabla_u w)) - D_u^{\perp}(\varphi(\nabla_v w)) + \varphi(\nabla_u(\nabla_v w))\\ & -D_u^{\perp}D_v^{\perp}(\varphi(w)) + D_u^{\perp}(\varphi(\nabla_v w)) + D_v^{\perp}(\varphi(\nabla_u w)) - \varphi(\nabla_v(\nabla_u w))\\ & -D_{[u,v]}^{\perp}(\varphi(w)) + \varphi(\nabla_{[u,v]}w).\end{aligned}$$

Agrupando convenientemente y eliminando términos iguales,

$$= \{D_v^{\perp}D_u^{\perp}(\varphi(w)) - D_u^{\perp}D_v^{\perp}(\varphi(w)) - D_{[u,v]}^{\perp}\varphi(w)\} - \varphi\{\nabla_v\nabla_u w - \nabla_u\nabla_v w - \nabla_{[u,v]}w\}$$

Entonces por la definición de tensor curvatura en cada llave,

$$(\widetilde{R}(u,v)\varphi)(w) = R^{\perp}(u,v)\varphi(w) - \varphi(R(u,v)w).$$

□

Sean ν un vector normal de M en x y N un campo vectorial normal tal que $N_x = \nu$, y X e Y dos campos vectoriales en M tal que $X_x = u$ y $Y_x = v$. Entonces,

$$R^{\perp}(u,v)\nu = (D_Y^{\perp}D_X^{\perp} - D_X^{\perp}D_Y^{\perp} - D_{[X,Y]}^{\perp})N, \tag{2.48}$$

en x.

Si ∇' representa la derivación covariante en el espacio ambiente M', entonces;

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \tag{2.49}$$

$$\nabla'_X N \;=\; -A_N(X) + D^{\perp}_X N. \tag{2.50}$$

Proposición 2.6. *Si R' es el tensor curvatura de M', entonces, la componente normal $(R'(X,Y)N)^{\perp}$ de $R'(X,Y)N$, es igual a $R^{\perp}(X,Y)N - \alpha(A_N(Y),X) + \alpha(A_N(X),Y)$.*
Es decir,

$$(R'(X,Y)N)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)N - \alpha(A_N(Y),X) + \alpha(A_N(X),Y)$$

Prueba. En efecto, por (2.48),

$$(R'(X,Y)N)^{\perp} \;=\; (\nabla'_Y\nabla'_X N - \nabla'_X\nabla'_Y N - \nabla'_{[X,Y]}N)^{\perp}$$

Usando (2.50),

$$= \;[\nabla'_Y(-A_N(X) + D^{\perp}_X N) - \nabla'_X(-A_N(Y) + D^{\perp}_Y N) - (-A_N[X,Y] + D^{\perp}_{[X,Y]}N)]^{\perp}$$

Derivando tenemos,

$$\begin{aligned} = \;& [\nabla'_Y(-A_N(X)) + \nabla'_Y(D^{\perp}_X N)]^{\perp} - [\nabla'_X(-A_N(Y)) + \nabla'_X(D^{\perp}_Y N)]^{\perp} \\ & -[-A_N[X,Y] + D^{\perp}_{[X,Y]}N]^{\perp}. \end{aligned}$$

Usando (2.49), operando y tomando la parte normal de cada término,

$$= \;-\alpha(Y,A_N(X)) + D^{\perp}_Y D^{\perp}_X N + \alpha(X,A_N(Y)) - D^{\perp}_X D^{\perp}_Y N - D^{\perp}_{[X,Y]}N.$$

Ordenando convenientemente,

$$= \;(D^{\perp}_Y D^{\perp}_X N - D^{\perp}_X D^{\perp}_Y N - D^{\perp}_{[X,Y]}N) - \alpha(Y,A_N(X)) - \alpha(X,A_N(Y))$$

Por lo tanto, por definición del tensor curvatura en el fibrado normal tenemos,

$$(R'(X,Y)N)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)N - \alpha(A_N(Y),X) + \alpha(A_N(X),Y). \tag{2.51}$$

□

Sea M' un espacio de curvatura constante se tiene:

$$R'(X,Y)N = c\{\langle N,Y\rangle X - \langle N,X\rangle Y\} = 0, \quad \langle N,T\rangle = 0$$

Por lo tanto de (2.51),

$$R^{\perp}(X,Y)N = -\alpha(A_N(X),Y) + \alpha(A_N(Y),X). \tag{2.52}$$

donde $X,Y \in TM$ y $T \in N(M)$. Evaluando en $x \in M$ tenemos;

$$R^{\perp}(u,v)\nu = -\alpha(A_\nu(u),v) + \alpha(A_\nu(v),u); \qquad u,v \in T_xM \tag{2.53}$$

En particular para una base ortonormal $\{\nu_a\}$ de $T_xM^{\perp}$.

$$R^{\perp}(u,v)\nu_a = -\alpha(A_a(u),v) + \alpha(A_a(v),u); \quad a = 1,...,n \tag{2.54}$$

Por otro lado,

$$\alpha(A_a(u),v) = \sum_b \langle \alpha(A_a u, v), \nu_b\rangle \nu_b;$$

donde $\{\nu_b\}$ es la base ortonormal anterior.
Usando (2.26), dos veces

$$\begin{aligned} \alpha(A_a(u),v) &= \sum_b \langle \beta(A_a u).v, \nu_b\rangle \nu_b \\ &= \sum_b \langle A_b A_a u, v\rangle \nu_b \end{aligned} \tag{2.55}$$

De igual modo,

$$\alpha(u, A_a(v)) = \sum_b \langle A_a A_b(u), v\rangle \nu_b. \tag{2.56}$$

Luego de (2.55) y (2.56) obtenemos,

$$\begin{aligned} R^{\perp}(u,v)\nu_a &= -\sum_b \langle A_b A_a u, v\rangle \nu_b + \sum_b \langle A_a A_b(u), v\rangle \nu_b \\ &= \sum_b \langle (A_a A_b - A_b A_a)u, v)\rangle \nu_b \end{aligned}$$

Por definición de Corchete Lie de un operador,

$$R^{\perp}(u,v)\nu_a = \sum_b \langle [A_a, A_b]u, v\rangle \nu_b. \tag{2.57}$$

Para probar el teorema principal de esta sección usaremos el teorema (2.1).
Como el laplaciano está dado por:

$$\langle \Box\beta, \beta\rangle = \frac{1}{2}\triangle\langle \beta,\beta\rangle + \langle D\beta, D\beta\rangle + A,$$

donde A está dado por.

$$A(x) = \sum_{i,j} \langle (\tilde{R}(e_j, e_i)\beta(e_j), \beta(e_i)\rangle + \sum_i \langle \beta(S(e_i)), \beta(e_i)\rangle. \tag{2.58}$$

Para esto, necesitamos expresar $A(x)$ de una forma mas simple. En el segundo término de la última ecuación, tenemos que,

$$\begin{aligned} \sum_i \langle \beta(S(e_i)), \beta(e_i)\rangle &= \sum_{i,j} \langle \langle \beta(S(e_i)), e_j\rangle e_j, \beta(e_i)\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \alpha(S(e_i), e_j), \alpha(e_i, e_j)\rangle \end{aligned}$$

Además, usando la base ortonormal $\{\nu_a\}$ de $T_xM^\perp$,

$$\sum_i \langle \beta(S(e_i)), \beta(e_i)\rangle = \sum_{i,j,a} \langle \alpha(S(e_i), e_j), \nu_a\rangle \langle \nu_a, \alpha(e_i, e_j)\rangle$$

Por (2.26),

$$= \sum_{i,j,a} \langle A_a(S(e_i)), e_j\rangle \langle A_a(e_i), e_j\rangle$$

Por (2.38),

$$= \sum_{i,j,a} \langle A_a(S(e_i)), e_j\rangle \langle \sum_r (A_a)_i^r e_r, e_j\rangle$$

Cuando $r = j$,

$$= \sum_{i,j,a} \langle A_a(S(e_i)), e_j\rangle (A_a)_i^j,$$

pues, $\langle e_j, e_j\rangle = 1$. Acomodando la suma en j se tiene.

$$= \sum_{i,a} \langle A_a(S(e_i)), \sum_j (A_a)_i^j e_j\rangle$$

Por (2.38),

$$= \sum_{i,a} \langle A_a(S(e_i)), A_a.e_i\rangle$$

Como A_a es un operador auto-adjunto,

$$\sum_i \langle \beta(S(e_i)), \beta(e_i)\rangle = \sum_{i,a} \langle S(e_i), A_a A_a.e_i\rangle$$

Por otro lado, recordando que el operador S es autoadjunto,

$$\sum_i \langle \beta(S(e_i)), \beta(e_i)\rangle = \sum_{i,a} \langle e_i, S(A_a^2.e_i)\rangle$$

Por (2.38),

$$= \sum_{i,a} \langle \sum_k (SA_a^2)_i^k e_k, e_i\rangle$$

Cuando $i = k$,

$$= \sum_{i,a} (SA_a^2)_i^i.$$

Por definición de traza.

$$\sum_i \langle \beta(S(e_i)), \beta(e_i) \rangle = \sum_a traz(SA_a^2) \tag{2.59}$$

Reemplazando (2.43) en (2.59),

$$= \sum_a traz[c(n-1)I + \sum_b (trazA_b)A_b) - \sum_b A_b^2]A_a^2$$

Por lo tanto,

$$\sum_i \langle \beta(S(e_i)), \beta(e_i) \rangle = c(n-1) \sum_a trazA_a^2 + \sum_{a,b} trazA_a.traz(A_b A_a^2) - \sum_{a,b} traz(A_a^2 A_b^2). \tag{2.60}$$

Por otra parte, $\tilde{R}$ es el tensor curvatura en el fibrado $E = Hom(T(M), N(M))$.

$$\sum_{i,j} \langle (\tilde{R}(e_j, e_i)\beta(e_j), \beta(e_i) \rangle \quad = \quad \sum_{i,j,k} \langle (\tilde{R}(e_j, e_i)\beta(e_j)e_k, \beta(e_i)e_k \rangle$$

Por proposición (2.5),

$$= \sum_{i,j,k} \langle R^\perp(e_j, e_i)\beta(e_j)e_k - \beta(e_j)(R(e_j, e_i)e_k), \beta(e_i)e_k \rangle$$

Por (2.22) y operando el producto interno,

$$= \sum_{i,j,k} \langle R^\perp(e_j, e_i)\alpha(e_j, e_k), \alpha(e_i, e_k) \rangle - \sum_{i,j,k} \langle \alpha(e_j, R(e_j, e_i)e_k), \alpha(e_i, e_k) \rangle$$

Además por definición de producto interno,

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j,k} \sum_{a,b} \langle R^\perp(e_j, e_i)\alpha(e_j, e_k), \nu_a \rangle \nu_a, \langle \alpha(e_i, e_k), \nu_b \rangle \nu_b \rangle \\ &\quad - \sum_{i,j,k} \sum_a \langle \alpha(e_j, R(e_j, e_i)e_k), \langle \alpha(e_i, e_k), \nu_a \rangle \nu_a \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j,k} \sum_{a,b} \langle \alpha(e_j, e_k), \nu_a \rangle \langle \alpha(e_i, e_k), \nu_b \rangle \langle R^\perp(e_j, e_i)\nu_a, \nu_b \rangle \\ &\quad - \sum_{i,j,k} \sum_a \langle \alpha(e_j, R(e_j, e_i)e_k), \nu_a \rangle \langle \alpha(e_i, e_k), \nu_a \rangle \end{aligned}$$

Por (2.22),

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j,k} \sum_{a,b} \langle \beta(e_j)e_k, \nu_a \rangle \langle \beta(e_i)e_k, \nu_b \rangle \langle R^\perp(e_j, e_i)\nu_a, \nu_b \rangle, \\ &\quad - \sum_{i,j,k} \sum_a \langle \beta(e_j).R(e_j, e_i)e_k, \nu_a \rangle \langle \beta(e_i).e_k, \nu_a \rangle \end{aligned}$$

Por (2.37),

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\langle(\tilde{R}(e_j,e_i)\beta(e_j),\beta(e_i)\rangle &= \sum_{i,j,k}\sum_{a,b}\langle A_a e_j,e_k\rangle\langle A_b e_i,e_k\rangle\langle R^{\perp}(e_j,e_i)\nu_a,\nu_b\rangle\\ &-\sum_{i,j,k}\sum_{a}\langle A_a e_j,R(e_j,e_i)e_k\rangle\langle A_a e_i,e_k\rangle \qquad (2.61)\end{aligned}$$

Operando cada término de (2.61) por separado y usando (2.38) y (2.57),

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k}\sum_{a,b}\langle A_a e_j,e_k\rangle\langle A_b e_i,e_k\rangle\langle R^{\perp}(e_j,e_i)\nu_a,\nu_b\rangle &= \sum_{i,j,k}\sum_{a,b}\langle\sum_{r}(A_a)^r_j e_r,e_k\rangle\langle\sum_{r}(A_b)^r_i e_r,e_k\rangle\\ &\sum_{b}\langle[A_a,A_b]e_j,e_i\rangle\nu_b,\nu_b\rangle\end{aligned}$$

Cuando $r=k$ y por (2.38);

$$=\sum_{i,j,k}\sum_{a,b}(A_a)^k_j.(A_a)^k_i\sum_{b}\langle[A_a,A_b]e_j,e_i\rangle\langle\nu_b,\nu_b\rangle$$

$$=\sum_{i,j,k}\sum_{a,b}(A_a)^k_j.(A_a)^k_i\sum_{b}\langle\sum_{r}([A_a,A_b])^r_j e_r,e_i\rangle$$

Cuando $r=i$,

$$=\sum_{i,j,k}\sum_{a,b}\sum_{b}(A_a)^j_k(A_a)^i_k([A_a,A_b])^i_j$$

Ahora cuando $j=k=i$ y $a=b$,

$$=\sum_{a,b}\sum_{i}(A_a)^i_i(A_b)^i_i([A_a,A_b])^i_i$$

Por definición de traza y Corchete de Lie tenemos.

$$=\sum_{a,b}(trazA_aA_b(A_aA_b-A_bA_a))$$

Luego,

$$\sum_{i,j,k}\sum_{a,b}\langle A_a e_j,e_k\rangle\langle A_b e_i,e_k\rangle\langle R^{\perp}(e_j,e_i)\nu_a,\nu_b\rangle=\sum_{a,b}traz(A_aA_b)^2-\sum_{a,b}traz(A_a^2A_b^2) \qquad (2.62)$$

Ahora en el segundo término de (2.61),

$$\begin{aligned}-\sum_{i,j,k}\sum_{a}\langle A_a e_j,R(e_j,e_i)e_k\rangle\langle A_a e_i,e_k\rangle &= -\sum_{i,j,k}\sum_{a}\langle\sum_{l}\langle R(e_j,e_i)e_k,e_l\rangle e_l,A_a e_j\rangle\langle A_a e_i,e_k\rangle\\ &= -\sum_{i,j,k}\sum_{a}\sum_{l}\langle R(e_j,e_i)e_k,e_l\rangle\langle e_l,A_a e_j\rangle\langle A_a e_i,e_k\rangle\end{aligned}$$

Por la ecuación de Gauss (2.42) y (2.38), tenemos.

$$=\;-\sum_{i,j,k}\sum_{a}\sum_{l}[c\{\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{jk}\delta_{il}\}-\sum_{b}\{(A_b)^l_i(A_b)^k_j-(A_b)^l_j(A_b)^k_i\}](A_a)^l_j(A_a)^k_i$$

Distribuyendo convenientemente las sumas, además para el primer término cuando $l = j$ y para el segundo término cuando $l = i$,

$$\begin{aligned} &= -c\sum_a\sum_{i,j,k}\delta_{ik}\delta_{jj}(A_a)^j_j(A_a)^k_i + c\sum_a\sum_{i,j,k}\delta_{jk}\delta_{ii}(A_a)^i_j(A_a)^k_i \\ &\quad+\sum_{a,b}\sum_{j,l,k}(A_a)^l_j\sum_i(A_a)^k_i(A_b)^i_l(A_b)^k_j - \sum_{a,b}\sum_{i,j}\sum_l(A_a)^j_l(A_b)^l_j\sum_k(A_a)^k_i(A_b)^i_k \end{aligned}$$

Cuando $k = i$,

$$\begin{aligned} &= -c\sum_a\sum_{i,j}\delta_{ii}(A_a)^j_j(A_a)^i_i + c\sum_a\sum_{i,j}\delta_{jk}(A_a)^i_j(A_a)^k_i \\ &\quad+\sum_{a,b}\sum_{j,k}\sum_l(A_a)^l_j(A_aA_b)^k_l(A_b)^k_j - \sum_{a,b}\sum_{i,j}(A_aA_b)^j_j(A_aA_b)^i_i \end{aligned}$$

Acomodando las sumas y cuando $k = j$ en el segundo término,

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j,k}\sum_a\langle A_ae_j, R(e_j,e_i)e_k\rangle\langle A_ae_i,e_k\rangle &= -c\sum_a\sum_i(A_a)^i_i\sum_j(A_a)^j_j + c\sum_a\sum_i\sum_j(A_a)^i_j(A_a)^j_i \\ &\quad+\sum_{a,b}\sum_{j,k}(A_aA_aA_b)^k_j(A_b)^k_j - \sum_{a,b}\sum_j(A_aA_b)^j_j\sum_i(A_aA_b)^i_i \end{aligned}$$

Por definición de traza,

$$\begin{aligned} &= -c\sum_a(trazA_a)(trazA_a) + c\sum_a\sum_i(A_aA_a)^i_i \\ &\quad+\sum_{a,b}\sum_{j,k}(A_aA_aA_b)^k_j(A_b)^k_j - \sum_{a,b}traz(A_aA_b).traz(A_aA_b) \\ &= -c\sum_a(trazA_a)^2 + c\sum_a traz(A_a^2) + \sum_{a,b}\sum_j(A_aA_aA_bA_b)^j_j - \sum_{a,b}(traz(A_aA_b))^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos,

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j,k}\sum_a\langle A_ae_j, R(e_j,e_i)e_k\rangle\langle A_ae_i,e_k\rangle &= -c\sum_a(trazA_a)^2 + c\sum_a traz(A_a^2) \\ &\quad+\sum_{a,b}traz(A_a^2A_b^2) - \sum_{a,b}(traz(A_aA_b))^2 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Luego sumando las igualdades (2.62) y (2.63) la ecuación (2.61) queda de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j}\langle(\tilde{R}(e_j,e_i)\beta(e_j),\beta(e_i)\rangle &= c\sum_a trazA_a^2 - c\sum_a(trazA_a)^2 - \sum_{a,b}traz(A_a^2A_b^2) \\ &\quad-\sum_{a,b}(traz(A_aA_b))^2 + 2\sum_{a,b}traz(A_aA_b)^2 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Por lo tanto de (2.60) y (2.64) la ecuación (2.58) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A(x) &= c\sum_a trazA_a^2 - c\sum_a(trazA_a)^2 - \sum_{a,b}traz(A_a^2A_b^2) - \sum_{a,b}(traz(A_aA_b))^2 \\ &\quad+2\sum_{a,b}traz(A_aA_b)^2 + cn\sum_a trazA_a^2 - c\sum_a trazA_a^2 - \sum_{a,b}traz(A_a^2A_b^2) \\ &\quad+\sum_{a,b}trazA_a.traz(A_bA_a^2) \end{aligned}$$

simplificando,

$$\begin{aligned} A(x) &= -c\sum_a (trazA_a)^2 - \sum_{a,b} traz(A_a^2A_b^2) - \sum_{a,b}(traz(A_aA_b))^2 + 2\sum_{a,b} traz(A_aA_b)^2 \\ &+cn\sum_a trazA_a^2 - \sum_{a,b} traz(A_a^2A_b^2) + \sum_{a,b} trazA_a.traz(A_bA_a^2) \end{aligned}$$

Agrupando convenientemente para tener el Corchete de Lie,

$$\begin{aligned} A(x) &= cn\sum_a trazA_a^2 - c\sum_a (trazA_a)^2 - \sum_{a,b}(traz(A_aA_b))^2 + \sum_{a,b} trazA_a.traz(A_bA_a^2) \\ &+\sum_{a,b} traz[A_a, A_b]^2. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Ahora expresaremos el operador autoadjunto A, usando sus valores propios.

Proposición 2.7. *Sean $\lambda_1^{(a)}, ..., \lambda_n^{(a)}$ los auto-valores de A_a, $\{e_1^{(a)}, ..., e_n^{(a)}\}$ una base ortonormal de $T_x(M)$ tal que $A_ae_i^{(a)} = \lambda_i^{(a)}e_i^{(a)}$ $(i = 1, ..., n; a = 1, ..., p)$ y K_{ij}^a la curvatura seccional para el 2-planos definido por $e_i^{(a)}$ y $e_j^{(a)}$, $i \neq j$. Entonces,*

$$A(x) = \sum_a \sum_{i<j} (\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 K_{ij}^{(a)} + \frac{1}{2}\sum_{a,b} traz[A_a, A_b]^2. \tag{2.66}$$

Prueba. Escribiendo $A(x)$, según la ecuación (2.65),

$$\begin{aligned} A(x) &= cn\sum_a trazA_a^2 - c\sum_a (trazA_a)^2 + \sum_a trazA_a.traz(A_a^3) + \sum_{a\neq b} trazA_a.traz(A_aA_b^2) \\ &-\sum_a (trazA_a^2)^2 - \sum_{a\neq b}(traz(A_aA_b))^2 + \sum_{a,b} traz[A_a, A_b]^2 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Denotando por $B(x)$ parte de (2.67),

$$B(x) = cn\sum_a trazA_a^2 - c\sum_a (trazA_a)^2 - \sum_a (trazA_a^2)^2 + \sum_a trazA_a.traz(A_a^3)$$

Como, $\lambda_1^{(a)}, ..., \lambda_n^{(a)}$ son los autovalores de A_a tenemos.

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_a \{cn\sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(a)})^2 - c(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(a)})^2 - (\sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(a)})^2)^2 + (\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(a)})(\sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(a)})^3)\} \\ &= \sum_a \{cn(\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^{(a)})^2 + (\lambda_n^{(a)})^2) - c(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{(a)} + \lambda_n^{(a)})^2 - (\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^{(a)})^2 + (\lambda_n^{(a)})^2)^2 \\ &+(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{(a)} + \lambda_n^{(a)})(\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^{(a)})^3 + (\lambda_n^{(a)})^3)\} \end{aligned}$$

Distribuyendo y desarrollando el binomio,

$$
\begin{aligned}
= \; & \sum_a \{cn \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^{(a)})^2 + cn(\lambda_n^{(a)})^2 - c(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{(a)})^2 - 2c(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{(a)})\lambda_n^{(a)} - c(\lambda_n^{(a)})^2 - (\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^{(a)})^2)^2 \\
& -2(\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^{(a)})^2)((\lambda_n^{(a)})^2) + (\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{(a)})(\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^{(a)})^3) + (\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{(a)})(\lambda_n^{(a)})^3 + \lambda_n^{(a)}(\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^{(a)})^3)\}
\end{aligned}
$$

Agrupando convenientemente,

$$
\begin{aligned}
= \; & \sum_a \{\{c(n-1)(\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^{(a)})^2) - (\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^{(a)})^2)^2 - c(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{(a)})^2 + (\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{(a)})(\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^{(a)})^3)\} \\
& +\{c(\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i^{(a)})^2) - 2c(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{(a)})\lambda_n^{(a)} + c(n-1)(\lambda_n^{(a)})^2\} \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} ((\lambda_i^{(a)})^3\lambda_n^{(a)} - 2(\lambda_i^{(a)})^2(\lambda_n^{(a)})^2 + \lambda_i^{(a)}(\lambda_n^{(a)})^3)\}
\end{aligned}
$$

De donde,

$$
= \sum_a \{ \sum_{i \leq i < j < n} (\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 (c + \lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(a)}) + \sum_{i<n} (\lambda_i^{(a)} - (\lambda_n^{(a)})^2)(c + \lambda_i^{(a)}\lambda_n^{(a)})\}
$$

Por lo tanto,

$$
B(x) = \sum_a \{ \sum_{i<j} (\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 (c + \lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(a)})\} \tag{2.68}
$$

Ahora fijamos el índice a y sea $A_b e_i^{(a)} = \sum_j (A_b)_i^j e_j^{(a)}$, $b = 1, 2, ..., p$.

Tenemos, $(A_a)_j^i = \delta_j^i \lambda_j^{(a)}$ por lo tanto,

$$
(A_a A_b)_j^i = \lambda_i^{(a)} (A_b)_j^i; \quad (A_b A_a)_j^i = (A_b)_j^i \lambda_j^{(a)} \tag{2.69}
$$

Por la euación de Gauss;

$$
\begin{aligned}
K_{ij}^{(a)} &= R(e_i^{(a)}, e_j^{(a)}, e_i^{(a)}, e_j^{(a)}) \\
&= c\{\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji}\} + \sum_b \{(A_b)_i^i (A_b)_i^j - (A_b)_j^i (A_b)_i^j\} \\
&= c + \sum_b (A_b)_i^i (A_b)_j^j - \sum_b (A_b)_j^i (A_b)_i^j \\
&= c + (A_a)_i^i (A_a)_j^j + \sum_{b \neq a} (A_b)_i^i (A_b)_j^j - \sum_b (A_b)_j^i (A_b)_i^j \\
&= (c + \lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(a)}) + \sum_{b \neq a} (A_b)_i^i (A_b)_j^j - \sum_b (A_b)_j^i (A_b)_i^j
\end{aligned}
$$

multiplicando a ambos por $(\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2$, tenemos,

$$
\begin{aligned}
(c + \lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(a)})(\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 &= (\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 K_{ij}^{(a)} + \sum_b (\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 (A_b)_j^i (A_b)_i^j \\
&\quad - \sum_{b \neq a} (\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 (A_b)_i^i (A_b)_j^j
\end{aligned} \tag{2.70}
$$

Notemos que si i=j, $K_{ii}^{(a)}=0$.

Como

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})^2(c+\lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(a)}) &= \sum_{i<j}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})^2(c+\lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(a)})\\ &\quad+\sum_{j<i}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})^2(c+\lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(a)})\\ &= 2\sum_{i<j}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})^2(c+\lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(a)})\end{aligned}$$

Entonces,

$$\sum_{i<j}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})^2(c+\lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(a)})=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})^2(c+\lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(a)}).$$

Sumando sobre i,j al lado derecho der (2.70),

$$\begin{aligned}=&\ \tfrac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})^2K_{ij}^{(a)}+\tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_{b}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})(A_b)_j^i(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})(A_b)_i^j\\ &-\tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_{b\neq a}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})^2(A_b)_i^i(A_b)_j^j\end{aligned}$$

Desarrollando el binomio y ordenando adecuadamente,

$$\begin{aligned}=&\ \sum_{i<j}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})^2K_{ij}^{(a)}+\tfrac{1}{2}\sum_{b}\sum_{i,j}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})(A_b)_j^i(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})(A_b)_i^j\\ &-\tfrac{1}{2}\sum_{b\neq a}[\sum_i(\lambda_i^{(a)})^2(A_b)_i^i\sum_j(A_b)_j^j-2\sum_i\lambda_i^{(a)}(A_b)_i^i\sum_j\lambda_j^{(a)}(A_b)_j^j\\ &+\sum_i(A_b)_i^i\sum_j\lambda_j^{(a)}(A_b)_j^j]\end{aligned}$$

Adecuando $(A_b)_i^j$, $(A_b)_j^i$ dentro de los paréntesis del segundo término,

$$\begin{aligned}=&\ \sum_{i<j}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})^2K_{ij}^{(a)}+\tfrac{1}{2}\sum_{b}\sum_{i,j}(\lambda_i^{(a)}(A_b)_j^i-(A_b)_j^i\lambda_j^{(a)})\\ &(\lambda_j^{(a)}(A_b)_i^j-(A_b)_i^j\lambda_i^{(a)})-\tfrac{1}{2}\sum_{b\neq a}[\sum_i(\lambda_i^{(a)})^2(A_b)_i^i\sum_j(A_b)_j^j\\ &-2\sum_i\lambda_i^{(a)}(A_b)_i^i\sum_j\lambda_j^{(a)}(A_b)_j^j+\sum_i(A_b)_i^i\sum_j\lambda_j^{(a)}(A_b)_j^j]\end{aligned}$$

Por (2.69),

$$\begin{aligned}=&\ \sum_{i<j}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})^2K_{ij}^{(a)}+\tfrac{1}{2}\sum_{b}\sum_{ij}((A_aA_b)_j^i-(A_bA_a)_j^i)((A_aA_b)_i^j\\ &-(A_bA_a)_i^j)-\tfrac{1}{2}\sum_{b\neq a}[\sum_i(\lambda_i^{(a)})^2(A_b)_i^i\sum_j(A_b)_j^j\\ &-2\sum_i\lambda_i^{(a)}(A_b)_i^i\sum_j\lambda_j^{(a)}(A_b)_j^j+\sum_i(A_b)_i^i\sum_j\lambda_j^{(a)}(A_b)_j^j]\end{aligned}$$

Por definición de corchete de Lie,

$$\begin{aligned}=&\ \sum_{i<j}(\lambda_i^{(a)}-\lambda_j^{(a)})^2K_{ij}^{(a)}+\tfrac{1}{2}\sum_{b}\sum_{j}([A_a,A_b]_j^j)^2-\tfrac{1}{2}\sum_{b\neq a}[\sum_i(\lambda_i^{(a)})^2(A_b)_i^i\sum_j(A_b)_j^j\\ &-2\sum_i\lambda_i^{(a)}(A_b)_i^i\sum_j\lambda_j^{(a)}(A_b)_j^j+\sum_i(A_b)_i^i\sum_j\lambda_j^{(a)}(A_b)_j^j]\end{aligned}$$

Agrupando convenientemente y por definición de traza,

$$= \sum_{i<j}(\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 K_{ij}^{(a)} + \tfrac{1}{2}\sum_b traz[A_a, A_b]^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{b\neq a}[\sum_i(\lambda_i^{(a)})^2(A_b)_i^i \sum_j(A_b)_j^j - 2\sum_i \lambda_i^{(a)}(A_b)_i^i \sum_j \lambda_j^{(a)}(A_b)_j^j + \sum_i (A_b)_i^i \sum_j \lambda_j^{(a)}(A_b)_j^j]$$

Usando nuevamente la definición de traza,

$$\begin{aligned}\sum_{i<j}(\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2(c+\lambda_i^{(a)}\lambda_j^{(a)}) &= \sum_{i<j}(\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 K_{ij}^{(a)} + \frac{1}{2}\sum_b traz[A_a, A_b]^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{b\neq a}\{traz A_b.traz(A_a^2 A_b) - (traz(A_a A_b))^2\}. \quad (2.71)\end{aligned}$$

Entonces, apartir de (2.71) se obtiene la igualdad (2.68)

Por lo tanto reemplazando las referencias antes mencionadas en (2.67) y simplificando obtenemos,

$$A(x) = \sum_a \sum_{i<j}(\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 K_{ij}^{(a)} + \frac{1}{2}\sum_{a,b} traz[A_a, A_b]^2.$$

$\square$

Ahora citaremos las siguientes dos lemas que nos permitan acotar las trazas.

Lema 2.1. *Sea A y B matrices simétricas $n \times n$. Entonces*

$$traz[A, B]^2 \geqq -2 traz A^2.traz B^2.$$

y la igualdad se mantiene para las matrices no nulas A y B si y solamente si, se puede transformar simultáneamente mediante una matriz ortogonal en múltiplo escalar de $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ respectivamente, donde

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \widetilde{B} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad (2.72)$$

Prueba. Supongamos que B es una matriz diagonal y denotamos por $b_1, ..., b_n$ las entradas diagonales de B. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|AB - BA\|^2 &= traz((AB-BA)^t(AB-BA)) \\
&= traz[(a_{ij}b_i - b_j a_{ji})(a_{ji}b_j - b_i a_{ji})] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1} a_{ik}^2 (b_i - b_k)^2 \\
&= \sum_{i\neq k} a_{ik}^2 (b_i - b_k)^2,
\end{aligned}$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz simétrica. Como $(b_i - b_k)^2 \leqq 2(b_i^2 + b_k^2)$, obtenemos,

$$\begin{aligned}
\|AB - BA\|^2 &\leqq 2\sum_{i\neq k} a_{ik}^2 (b_i^2 + b_k^2) \\
&\leqq 2(\sum_{i,k} a_{ik}^2)(\sum_{l} b_l^2) \\
&= 2traz(A^2)traz(B^2). \qquad (2.73)
\end{aligned}$$

Por la simétria de A y B.

$$-traz(AB - BA)^2 = \|AB - BA\|^2$$

de donde, $traz(AB - BA)^2 \geqq -2traz(A^2)traz(B^2)$.

Ahora, como que B es simétrica, existe una matriz O tal que $D = OBO^{-1}$, notemos que, $\|B\| = \|D\|$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\|AB - BA\|^2 &= \|O(AB - BA)O^{-1}\|^2 \\
&= \|OABO^{-1} - OBAO^{-1}\|^2 \\
&= \|OAO^{-1}OBO^{-1} - OBO^{-1}OAO^{-1}\|^2 \\
&= \|OAO^{-1}D - DOAO^{-1}\|^2 \\
&\leqq 2\|OAO^{-1}\|^2\|D\|^2 \\
&= 2\|A\|^2\|B\|^2 \\
&= 2traz(A^2)traz(B^2).
\end{aligned}$$

Se sigue:

$$traz(AB - BA)^2 \geqq -2trazA^2trazB^2.$$

Es decir,

$$traz[A, B]^2 \geqq -2trazA^2.trazB^2.$$

Ahora asumimos que A y B, son matrices no nulas, B es diagonal y que la igualdad se cumple. De (2.73),

$$\sum_{i\neq k} a_{ik}^2 (b_i^2 + b_k^2) = \sum_{i\neq k} a_{ik}^2 \sum_{l} b_l^2 + \sum_{i} a_{ii}^2 \sum_{l} b_l^2$$

Entonces,

$$\sum_{i\neq k}\underbrace{a_{ik}^2}\underbrace{\{\sum_l(b_l^2)-(b_i^2+b_k^2)\}}_{\geqq 0}+\sum_i a_{ii}^2\underbrace{\sum_l b_l^2}_{>0} = 0$$

$$\sum_{i\neq k} a_{ik}^2\{\sum_l(b_l^2)-(b_i^2+b_k^2)\}=0 \qquad (*)$$

y también,

$$a_{ii}^2\sum_{l\neq i,k} b_l^2=0, \forall i$$

luego, como $b_l\neq 0$ para algún l, entonces $a_{ii}=0$, $\forall i$.
De la igualdad,

$$\sum_{i\neq k} a_{ik}^2(b_i-b_k)^2=2\sum_{i\neq k} a_{ik}^2(b_i^2+b_k^2)$$

tenemos,

$$\sum_{i\neq k} a_{ik}^2(b_i+b_k)^2=0$$

Es decir, $a_{ik}=0$ ó $b_i+b_k=0$, $i\neq k$. Notemos que si $a_{ik}\neq 0$, $b_i+b_k=0$,
Sin pérdida de generalidad; se puede asumir que $a_{12}\neq 0$, $i=1; k=2$, como $b_1+b_2=0$, entonces $b_1=-b_2$. De $(*)$

$$\sum_{l=1} b_l^2-(b_2^2+b_1^2)=0,$$

es decir,

$$\sum_{l\neq 1,2} b_l^2=0$$

Osea, $b_3=...=b_n=0$. De $(*)$

$$a_{ik}^2\{(b_1^2+b_2^2)-(b_i^2+b_k^2)\}=0.$$

pero $b_i=b_k=0$, $\forall i,k\geq 3$,

$$a_{ik}^2(b_1^2+b_2^2)=0$$

Luego, $a_{ik}=0$, $i\neq 1, k\neq 2$.
Veamos el reciproco,tomando las matrices de (2.72) de la forma,

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

tenemos,

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Además, $(AB - BA)^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Entonces;

$$[A, B]^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Por tanto: $traz[A, B]^2 = 8$

Por otro lado:

$$traz(A^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$traz(B^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Por lo tanto,

$$traz[AB - BA]^2 = 2trazA^2trazB^2 = 8$$

$\square$

Lema 2.2. *Sean A_1,A_2 y A_3 matrices simétricas $n \times n$ tal que,*

$$traz[A_a, A_b]^2 = -2traz(A_a^2).traz(A_b^2)$$

para $1 \leqq a < b \leqq 3$, Entonces al menos uno de las matrices, A_a debe ser cero.

Prueba. Sean A_1, A_2, A_3 matrices simétricas no nulas de la forma.

$$A_a = \lambda \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & 0 \end{array} \right), \quad A_b = \alpha \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & 0 \end{array} \right),$$

Para $a, b = 1, 2, 3$

Observe que cuando $(A_{a=1}) = (A_{b=2})$, tenemos $\alpha_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$, ahora cuando $(A_{a=2}) = (A_{b=3})$ tenemos que $\alpha_2 = 0$, $\lambda_2 = 0$, así sucesivamente comparando las matrices, se tiene que una de estas matrices debe ser cero en este caso, $A_3 = 0$. $\square$

Teorema 2.3. *Sea M una variedad riemanniana n-dimensional con curvatura seccional, acotada inferiormente por una constante $d > 0$. Supongamos que M está inmersa en una variedad riemanniana M' de curvatura seccional constante de dimensión $n+p$ y M tiene curvatura media constante. Entonces si M es compacta y orientable o la longitud de la segunda forma fundamental β de M es constante, entonces tenemos.*

$$0 \geqq A(x) \geqq \{dn - \frac{p-1}{p}\langle\beta,\beta\rangle\}\langle\beta,\beta\rangle - dn^2\langle\eta,\eta\rangle \tag{2.74}$$

$\forall x$ de M, donde η denota la curvatura media normal de M que es paralela y $\langle\eta,\eta\rangle$ es constante.

Prueba. Por lema (2.1),

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\sum_{a,b} traz[A_a, A_b]^2 &\geqq -\sum_{a\neq b} trazA_a^2.trazA_b^2\\
&= -\sum_{a<b} trazA_a^2.trazA_b^2 - \sum_{a>b} trazA_a^2.trazA_b^2.\\
&= -2\sum_{a<b} trazA_a^2.trazA_b^2. \quad (a,b = 1,2,...,p).
\end{aligned}$$

Definamos $S_a = trazA_a^2$, entonces $\sum_a S_a = \sum_a trazA_a^2$, Por (2.45) se tiene, $\sum_a trazA_a^2 = \langle\beta,\beta\rangle$.
Como,

$$\begin{aligned}
0 &\leqq \sum_{a<b}(S_a - S_b)^2\\
&= \sum_{a<b}(S_a^2 + S_b^2) - 2\sum_{a<b} S_aS_b\\
&= ((p-1)S_1^2 + (p-1)S_2^2 + (p-1)S_3^2 + ... + (p-1)S_n^2) - 2\sum_{a<b} S_aS_b\\
&= (p-1)\sum_a S_a^2 - 2\sum_{a<b} S_aS_b\\
&= (p-1)\{(\sum_a S_a)^2 - 2\sum_{a<b} S_aS_b\} - 2\sum_{a<b} S_aS_b\\
&= (p-1)(\sum_a S_a)^2 - 2(p-1)\sum_{a<b} S_aS_b - 2\sum_{a<b} S_aS_b\\
&= (p-1)(\sum_a S_a)^2 - 2p\sum_{a<b} S_aS_b\\
&= (p-1)\langle\beta,\beta\rangle^2 - 2p\sum_{a<b} S_aS_b
\end{aligned}$$

entonces,

$$-2\sum_{a<b} S_aS_b \geqq -\frac{(p-1)}{p}\langle\beta,\beta\rangle^2.$$

Notemos que se da la igualdad si y solo si $S_a = S_b$, para $a,b = 1,...,p$. Por lo tanto obtenemos

$$\frac{1}{2}\sum_{a,b} traz[A_a, A_b]^2 \geqq -2\sum_{a<b} trazA_a^2.trazA_b^2 \geqq -\frac{(p-1)}{p}\langle\beta,\beta\rangle^2 \tag{2.75}$$

y la igualdad se tiene si y sólo si $trazA_a^2 = trazA_b^2$.
De este modo apartir de (2.66) se obtiene la desigualdad,

$$A(x) \geq \sum_a \sum_{i<j} (\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 K_{ij}^{(a)} - \frac{(p-1)}{p} \langle \beta, \beta \rangle^2 (x). \tag{2.76}$$

Supongamos ahora que la curvatura escalar de M esta acotado inferiormente por un escalar d positivo. Entonces,

$$\sum_a \sum_{i<j} (\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 K_{ij}^{(a)} \geq d \sum_a \sum_{i<j} (\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2.$$

Para cada a,

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j} (\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 &= \sum_{i<j} ((\lambda_i^{(a)})^2 + (\lambda_j^{(a)})^2) - 2 \sum_{i<j} \lambda_i^{(a)} \lambda_j^{(a)} \\
&= (n-1)(\lambda_1^{(a)})^2 + (n-1)(\lambda_2^{(a)})^2 + \ldots + (n-1)(\lambda_n^{(a)})^2 - 2 \sum_{i<j} \lambda_i^{(a)} \lambda_j^{(a)} \\
&= (n-1) \sum_i (\lambda_i^{(a)})^2 - 2 \sum_{i<j} \lambda_i^{(a)} \lambda_j^{(a)} \\
&= (n-1) trazA_a^2 - 2 \sum_{i<j} \lambda_i^{(a)} \lambda_j^{(a)}.
\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}
-2 \sum_{i<j} \lambda_i^{(a)} \lambda_j^{(a)} &= \sum_i (\lambda_i^{(a)})^2 - (\sum_i \lambda_i^{(a)})^2 \\
&= trazA_a^2 - (trazA_a)^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_a \sum_{i<j} (\lambda_i^{(a)} - \lambda_j^{(a)})^2 &= \sum_a \{(n-1) trazA_a^2 + (trazA_a^2 - (trazA_a)^2)\} \\
&= n \sum_a trazA_a^2 - \sum_a (trazA_a^2) \\
&= n \langle \beta, \beta \rangle (x) - n^2 \langle \eta, \eta \rangle (x)
\end{aligned}$$

donde η denota la curvatura media de M. De este modo se obtiene la siguiente desigualdad,

$$A(x) \geqq dn \langle \beta, \beta \rangle - n^2 \langle \eta, \eta \rangle - \frac{p-1}{p} \langle \beta, \beta \rangle^2$$

$$A(x) \geqq \{dn - \frac{p-1}{p} \langle \beta, \beta \rangle\} \langle \beta, \beta \rangle - dn^2 \langle \eta, \eta \rangle. \tag{2.77}$$

$\forall x \in M$.

Si la longitud de la Segunda Forma Fundamental β de M es constante, entonces por la proposición (2.1) tenemos que la Segunda Forma Fundamental β de M satisface $\partial\beta = 0$ y por la proposición 2.2 tenemos que la Segunda Forma Fundamental β de M satisface $\partial^*\beta = 0$ pues

M tiene curvatura media constante.
Entonces, $\Delta\beta = 0$ y $\Delta\langle\beta,\beta\rangle = 0$, pues $\langle\beta,\beta\rangle = constante$.
Por tanto, por corolario 2.1 tenemos $A \leqq 0$ en todas partes de M.
Luego,

$$0 \geqq A \geqq \{dn - \frac{p-1}{p}\langle\beta,\beta\rangle\}\langle\beta,\beta\rangle - dn^2\langle\eta,\eta\rangle$$

□

Corolario 2.3. *Sea M es una variedad riemanniana con curvatura seccional, acotada inferiormente por una constante $d > 0$. Supongamos que M está inmersa en una variedad riemanniana M' de curvatura seccional constante de dimensión $n+p$ y M tiene curvatura media constante. Entonces si M compacta y orientable y $k = \langle\eta,\eta\rangle$. Entonces se tiene, $d \geqq \frac{4k(p-1)}{p}$.*

Prueba. Por la desigualdad (2.75) tenemos.

$$dn^2\langle\eta,\eta\rangle \geqq \{dn - \frac{p-1}{p}\langle\beta,\beta\rangle\}\langle\beta,\beta\rangle.$$

$$dn^2 k \geqq \{dn - \frac{p-1}{p}\langle\beta,\beta\rangle\}\langle\beta,\beta\rangle.$$

Integrando ambos miembros.

$$dn^2 k \int_M *1 \geqq \int_M \{dn - \frac{p-1}{p}\langle\beta,\beta\rangle\}\langle\beta,\beta\rangle * 1.$$

Observamos que la igualdad se da si y sólo si

$$dn^2 k = \{dn - \frac{p-1}{p}\langle\beta,\beta\rangle\}\langle\beta,\beta\rangle.$$

Esto implica también que $A = 0$ y que β es paralelo por corolario 2.1. Además $\langle\beta,\beta\rangle$ debe satisfacer la ecuación cuadrática:

$$(p-1)x^2 - pdnx + pdn^2k = 0.$$

Es decir el discriminante de está ecuación debe ser positivo, por lo tanto debemos tener la desigualdad

$$d \geqq \frac{4k(p-1)}{p}.$$

□

Finalmente debemos mencionar que el teorema generaliza varios resultados.
Por ejemplo en S.S. Chern, M. DoCarmo and S. Kobayashi, ver [1] obtenemos el siguiente teorema.

Teorema. Sea M una variedad compacta orientada n-dimensional la cual se encuentra inmersa minimamente en un espacio de curvatura constante c de dimensión $(n+p)$. Entonces

$$\int_M [\{(1-\frac{1}{p})S - dn\}S] * 1 \geqq 0,$$

donde 1 representa el elemento volumen de M y $\langle\beta,\beta\rangle = S$.
En efecto, de

$$0 \geqq A(x) \geqq \{dn - \frac{p-1}{p}\langle\beta,\beta\rangle\}\langle\beta,\beta\rangle - dn^2\langle\eta,\eta\rangle.$$

Es decir,

$$0 \geqq \{dn - \frac{p-1}{p}\langle\beta,\beta\rangle\}\langle\beta,\beta\rangle - dn^2\langle\eta,\eta\rangle$$

$$dn^2\langle\eta,\eta\rangle \geqq \{dn - \frac{p-1}{p}\langle\beta,\beta\rangle\}\langle\beta,\beta\rangle$$

Como M es una subvariedad minima entonces, η se anula en cada punto, por tanto $\langle\eta,\eta\rangle = 0$.

$$\{\frac{p-1}{p}\langle\beta,\beta\rangle - dn\}\langle\beta,\beta\rangle \geqq 0$$

Integrando y multiplicando por el elemento volumen,

$$\int_M [\{(1-\frac{1}{p})\langle\beta,\beta\rangle - dn\}\langle\beta,\beta\rangle] * 1 \geqq 0$$

Entonces,

$$\int_M [\{(1-\frac{1}{p})S - dn\}S] * 1 \geqq 0$$

De igual manera obtenemos el siguiente resultado que aparece en el articulo de J. Simons, ver [4]

Teorema. Sea M una variedad minima cerrada de dimensión p, inmersa en S^n, entonces la segunda forma fundamental A satisface la desigualdad

$$\int_M \{\|A\|^2 - \frac{p}{p-1}dn\}\|A\|^2 \geqq 0$$

De la ecuación del teorema 2.3, teniendo en cuenta $\langle\beta,\beta\rangle = \|A\|^2$

$$0 \geqq A(x) \geqq \{dn - \frac{p-1}{p}\langle\beta,\beta\rangle\}\langle\beta,\beta\rangle - dn^2\langle\eta,\eta\rangle$$

De donde,

$$dn^2\langle \eta, \eta \rangle \geqq \{dn - \frac{p-1}{p}\langle \beta, \beta \rangle\}\langle \beta, \beta \rangle.$$

Multiplicando por $(\frac{p}{p-1})$ tenemos,

$$(\frac{p}{p-1})dn^2\langle \eta, \eta \rangle \geqq \{\frac{p}{p-1}dn - \langle \beta, \beta \rangle\}\langle \beta, \beta \rangle$$

Como M es una variedad minima entonces η se anula en cada punto, entonces $\langle \eta, \eta \rangle = 0$, por lo tanto

$$\{\langle \beta, \beta \rangle - \frac{p}{p-1}dn\}\langle \beta, \beta \rangle \geqq 0$$

Integrando ambos miembros tenemos,

$$\int_M \{\langle \beta, \beta \rangle - \frac{p}{p-1}dn\}\langle \beta, \beta \rangle \geqq 0$$

Es decir,

$$\int_M \{\|A\|^2 - \frac{p}{q}\}\|A\|^2 \geqq 0.$$

Análogamente se pueden obtener los resultados conseguidos por Katsumi Nomizu y Brian Smyth, en [3]

Referencias

[1] S.S. Chern, M. DoCarmo and S. Kobayashi: Minimal submanifols of a sphere with second fundamental form of constant length, to apper.

[2] S. Kobayashi and K. Nomizu: Foundations of Diferential Geometry, Vol.I and II, J. Wley, 1963 and 1969.

[3] K. Nomizu and B. Smyth: A formula of Simon's type and hypersurfaces of constant mean curvature. J. Diferential Geometry 3(1969).

[4] J. Simons: Minimal varieties in Riemannian manifolds, Ann. of Math. 88(1968).

[5] Carmo, M. P. Do, *Differential Geometry of Curves and Surfaces.*

[6] Carmo, M. P. Do: Geometria riemanniana, IMPA, 2005.

[7] Walter A. Poor , *Differential Geometry Structures.*

[8] Dale Husemoller:Fibre Bundles. Third edition

[9] JAMES EEL and LUC LEMARIRE, Selected Topics in Harmonic Mapas December 15-19, 1980