PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Postgrado

Dinámica de las Funciones Racionales de una Variable Compleja.
Tesis para optar el grado de Magíster en Matemática

Autor: Jonathan Abrahan Sueros Zarate

Asesor: Dr. Rudy Rosas Bazán

Miembros del jurado: **Dr. Percy Fernández Sánchez**
Dr. Jesús Zapata Samanez

LIMA - PERÚ

2013

A mi madre, Olga Zarate, por su apoyo y dedicación.

A mi padre, Edgar Sueros, por su constante esfuerzo y apoyo incondicional.

A mi hermana, Eliana Sueros, por su apoyo y constante apoyo

Agradecimientos

A mi padre, Edgar Sueros y mi madre Olga Zarate, por el apoyo que siempre me han brindado en cada aventura que emprendo en mi vida y por el incansable esfuerzo que hacen día a día para darme una vida satisfactoria.

A mi hermana, Eliana Sueros por ese apoyo incondicional de hermana con el que puedo contar siempre y por ser paciente y comprensible por las cosas que hago o dejo de hacer.

Al Dr. Rudy Rosas Bazán , no solo por su paciencia y tiempo que me dedico para preparar mejor este trabajo sino también por su amista, confianza, exigencia y motivación.

Al Dr. Percy Fernández Sánchez y al Dr. Jesús Zapata Samanez por sus observaciones para esta versión final de la tesis. Como también por todas sus enseñanzas y consejos compartidos en clase.

Resumen

El objetivo principal de la presente tesis es presentar una aplicación de los teoremas de Montel sobre familia normales en los sistemas dinámicos, para así poder caracterizar los conjuntos de Julia, denotados por J_R, definidos a través de una aplicación R meromorfa sobre $\mathbb{C}$. Primero haremos un estudio de las propiedades de las funciones meromorfas sobre el plano complejo $\mathbb{C}$ y el plano complejo extendido $\overline{\mathbb{C}}$, además estableceremos algunas métricas para poder estudiar la convergencia de las aplicaciones meromorfas. Lo anterior nos permite introducirnos a las familias normales para funciones holomorfas y para funciones meromorfas la cual posee muchas propiedades que son usadas en la caracterización del conjunto de Julia. Para facilitar algunos resultados es preciso usar la conjugada de funciones meromorfas sobre $\overline{\mathbb{C}}$ a través de las transformaciones de Möbius definidas en el plano complejo extendido. También es necesario el estudio de los puntos periódicos de las funciones meromorfas sobre $\overline{\mathbb{C}}$ obteniéndose una serie de propiedades que serán importantes en el estudio del conjunto Julia. Finalmente es vital el estudio del conjunto de puntos excepcionales la cual nos dan una serie de propiedades, para así poder dar una caracterización al conjunto de Julia. Dichas caracterizaciones son tales como, la invariancia del conjunto de Julia, J_R, por la aplicación R y por su respectiva inversa; que el conjunto J_R es igual a su conjunto de puntos de acumulación; que el conjunto J_R coincide con $\overline{\mathbb{C}}$, siempre que J_R posea algún punto interior; que J_R coincide con la frontera de la cuenca atractora generada por un punto atractor α ; y el más importante que el conjunto de julia J_R, coincide con el cierre de los puntos repulsores fijos de todos los órdenes .

Introducción

La noción de familia normal fue introducida en 1907 por Paul Montel. Durante la primera mitad del siglo XIX, Montel desarrolló lo que hoy se conoce como la teoría de familias normales, un instrumento de suma importancia en el estudio de varios aspectos de la teoría de funciones de una variable compleja. Esta teoría estudia aspectos de compacidad para familia de funciones holomorfas y se inspira en un hecho fundamental en el análisis en el siglo XIX conocido como la propiedad de Bozano – Weierstrass, que nos dice que toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.

De esta manera, encontrar subsucesiones convergentes era muy popular en ese entonces, por ello Riemann quiso extender esta propiedad de gran utilidad al conjunto E de funciones continuas definidas en un conjunto compacto de $\mathbb{R}$, pero pronto se vio que la acotación de E no era suficiente. Alrededor de 1880 Ascoli introdujo el requisito adicional que equicontinuidad en E, lo que finalmente garantiza que E tenga la propiedad de Bolzano – Weierstrass. Sin embargo no había muchas aplicaciones y es allí donde Montel introduce la noción de familia normal:

Una familia $\mathcal{F}$ de funciones analíticas sobre un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es ***normal*** *en Ω, si toda sucesión de funciones $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ contiene o una subsucesión la cual converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto de Ω a f o a ∞.*

Es así que la teoría de familias normales, tiene su origen en el teorema de Ascoli [1883] y Arzela [1889, 1895, 1899]. Si (f_n) es equicontinua y localmente limitada, entonces (f_n) posee una subsucesión que converge uniformemente en los compactos del dominio. El hecho fundamental que Montel observa es que para funciones holomorfas, localmente limitada implica equicontinua y es así que nace el famoso teorema de Montel:

Si $\mathcal{F}$ es una familia localmente limitada de funciones holomorfas en un dominio Ω, entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal en Ω.

Entre las aplicaciones de la teoría de montel podemos mencionar algunos resultados clásicos de la teoría de funciones tales como el teorema de la aplicación de Riemann, el pequeño teorema de Picard, el gran teorema de

Picard, el teorema de Landau, el teorema Schottky, así como también el estudio de grupos discontinuos y grupos discretos.

Otra aplicación de la teoría de familias normales son las aplicaciones al estudio del conjunto de Fatou y de Julia en la dinámica de una variable compleja, la cual será tratado especialmente en la presente tesis.

Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$, entonces es posible crear por medio de esta aplicación un conjunto, denotado por J_R, llamado el conjunto de Julia. Este conjunto esta formado por los puntos z de $\overline{\mathbb{C}}$, en donde la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal en z. Entonces ¿cuáles son las caracterizaciones de este conjunto?. Dichas caracterizaciones son tales como, la invariancia del conjunto de Julia, J_R , por la aplicación R y por su respectiva inversa; que el conjunto J_R es igual a su conjunto de puntos de acumulación; que el conjunto J_R coincide con $\overline{\mathbb{C}}$, siempre que J_R posea algún punto interior; que J_R coincide con la frontera de la cuenca atractora generada por un punto atractor α ; y que el conjunto de julia J_R, coincide con el cierre de los puntos repulsores fijos de todos los órdenes, es decir

$$\overline{\{\text{Puntos periódicos repulsores}\}} = J_R$$

Uno de los complementos para terminar esta prueba es que el conjunto de puntos periódicos atractores e indiferentes sea finito, este último resultado escapa de los alcances de este trabajo, para la prueba ver Alan F. Beardon Iteration of Rational Functions sección 9.6. En este trabajo, solo se prueba que el conjunto de puntos periódicos atractores es finito.

Índice general

0.1. Notaciones

1. $\overline{\mathbb{C}}$: Es el plano complejo unido con ∞, esto es $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$.
2. $D = D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$: Disco de centrado en z_0 con radio r.
3. $D_{z_0,r} = D'(z_0, r) = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}$
4. $K(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \leq r\}$.
5. $R^{(n)}(z)$ es la n-sima derivada en z.
6. $n(A)$ es el cardinal del conjunto A.
7. Ω: dominio el cual es abierto y conexo.
8. $\Omega_\infty = \Omega \cup \{\infty\}$, donde Ω es como en el anterior.

Capítulo 1

Preliminares y conceptos básicos

En este capítulo enunciaremos las principales definiciones, teoremas y proposiciones básicas del análisis complejo. Pero como posteriormente trabajaremos con aplicaciones definidas en $\mathbb{C}$ que luego se extienden a $\overline{\mathbb{C}}$ siendo estos a su vez espacios métricos, entonces es importante y fundamental conocer los conceptos y propiedades básicas de los espacios métricos para así tener una mejor comprensión y facilidad para desarrollar y manejar nuestro problema central de estudio. Además como toda métrica induce una topología, entonces es posible establecer los conjuntos abiertos, cerrados, compactos, funciones continuas y más propiedades que serán importante en este trabajo.

Por tratarse de nociones básicas, no desarrollaremos demostraciones en este capítulo. Para ver las demostraciones se puede referir en [16]

1.1. Conceptos básicos de Espacios Métricos

Empezaremos con la definición de espacios métricos. Veremos algunos conceptos heredados de topología a los espacios métricos, como también veremos algunos resultados importante que serán usados posteriormente.

Definición 1.1. Una métrica en un conjunto M es una función

$$\begin{array}{rccc} d: & M\times M & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

donde para cualquier par ordenado de elementos $x,y\in M$ se le asigna un número real, de modo que, para cualquier $x,y,z\in M$, la aplicación d cumple las siguientes propiedades. *(d1)* $d(x,y)=0$ si, y solo si, $x=y$. *(d2)* si $x\neq y$ entonces $d(x,y)>0$. *(d3)* $d(x,y)=d(y,x)$. *(d4)* $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

Un espacio *métrico* es un par (M,d), donde M es un conjunto y d es una métrica definida en el conjunto M. A la propiedad (d4) se le llama *desigualdad triangular*.

Ejemplo 1.1. Sea $M = \mathbb{R}^n$ y sea $x, y \in \mathbb{R}^n$, donde $x = (x_1, x_2, .., x_n)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, entonces en este espacio es posible definir muchos tipos de métricas. Veamos algunas métricas en este espacio.

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2} \\ d_2(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\ d_3(x,y) &= \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i| \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. Sea $M = \mathbb{C}$ y $z, w \in \mathbb{C}$, entonces una métrica en el conjunto $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ es definida por $d(z,w) = \sqrt{(z-w)\overline{(z-w)}}$

Una *bola abierta* de centro en a y radio r en (M, d) es el conjunto $B(a, r) = \{x \in M / d(x, a) < r\}$ y una *bola cerrada* de centro en a y radio r en (M, d) es el conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in M / d(x, a) \le r\}$.

Un *subconjunto* X *de un espacio métrico* (M, d) es un subconjunto en M, es decir $X \subset M$.

Definición 1.2. Un subconjunto X de un espacio métrico (M, d) se llama acotado o limitado, si existe una constante $c > 0$, tal que $d(x, y) \le c$, para cualquier $x, y \in X$.

Proposición 1.1. *Sea (M, d) un espacio métrico. Entonces $X \subset M$ es acotado si, y solo si, X está contenida en una bola abierta o cerrada de (M, d).*

Definición 1.3. Sean dos métricas d_1 y d_2 sobre el conjunto M. Diremos que las métricas d_1 y d_2 son equivalentes, si existen dos constantes positivas k_1 y k_2, tal que se cumple $d_1(x, y) \le k_2 d_2(x, y)$ y $d_2(x, y) \le k_1 d_1(x, y)$ para todo par ordenado $x, y \in M$.

Definición 1.4. Sean (M, d_M), (N, d_n) espacios métricos y una aplicación $f : M \to N$. Entonces diremos que la aplicación f es Lipschitziana, si existe una constante $c > 0$*(llamada constante de Lipschitz)* tal que $d(f(x), f(y)) \le c.d(x, y)$, para cualquier $x, y \in M$.

Topología en espacios métricos.

Definición 1.5. Un espacio topológico es un par $(X, \mathcal{T})$ el cual consiste de un conjunto X y una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X satisfaciendo las siguientes condiciones: *(1)* $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $X \in \mathcal{T}$. *(2)* La unión arbitraria de elementos en $\mathcal{T}$ es otro elemento de $\mathcal{T}$ (esta unión puede ser infinita). *(3)* La intersección arbitraria finita de elementos en $\mathcal{T}$ es otro elemento de $\mathcal{T}$.

El conjunto X es llamado espacio, los elementos de X son llamados puntos del espacio, y los subconjuntos de X que a su vez pertenecen a $\mathcal{T}$ son llamados **abiertos** en el espacio X. La familia $\mathcal{T}$, formada por subconjuntos abiertos de X, es también llamado una topología sobre X.

Todo espacio métrico (M, d) induce una topología (M, τ_d), donde $\tau_d = \{G \subset M / \forall x \in G, \text{ existe } r > 0, \text{ con } B(x, r) \subset G\}$. Entonces las definiciones y propiedades de conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, conjuntos compactos, funciones continuas, homeomorfismos y más en una topología son fácilmente heredados a los espacios métricos. Entonces note que una bola abierta $B(a, r)$ en el espacio métrico (M, d) de centro $a \in M$ y radio $r$es un elemento de la topología inducida τ_d.

Definición 1.6. Sea un subconjunto X del espacio métrico (M, d). *(1)* Un punto $a \in X$ es interior de X, si existe una bola abierta de centro a, tal que $B(a, r) \subset X$. *(2)* El interior de X es el conjunto $Int(X)$ conformado por los puntos interiores de X. *(3)* X es abierto, si todo punto a de X es un punto interior de X. *(4)* Llamaremos vecindad de a a un conjunto V abierto que contiene a a.

Definición 1.7. Sea un subconjunto X del espacio métrico (M, d). *(1)* Un punto a se dice adherente a X, si para cada $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. *(2)* La cerradura de X, es el conjunto$\overline{X}$ conformado por los puntos M que son adherente a X. *(3)* X es cerrado , si todos sus puntos son adherentes a X. *(4)* Un subconjunto$X \subset M$ es denso en M cuando$\overline{X} = M$.

Proposición 1.2. *En cualquier espacio métrico (M, d), una bola abierta $B(a, r)$ es un conjunto abierto y una bola cerrada $\overline{B}(a, r)$ es con un conjunto cerrado.*

Definición 1.8. Sea un subconjunto X del espacio métrico(M, d). *(1)* Un punto $a \in M$ se llama *punto de acumulación* de X cuando toda bola abierta de centro a contiene algún punto de X, diferente del punto a. *(2)* Indicaremos con la notación X' al *conjunto de acumulación de X* conformados por la colección de todos los puntos de acumulación de X en M.

Funciones continuas

Definición 1.9. Sean (M, d_M), (N, d_n) espacios métricos. Decimos que $f : M \to N$ es continua en $a \in M$, si para toda vecindad V de $f(a)$ existe una vecindad U de M, tal que $f(U) \subset V$.

Definición 1.10. Sean (M, d_M), (N, d_n) espacios métricos . Decimos que $f : M \to N$ es continua en M , si la imagen inversa $f^{-1}(A')$ de todo subconjunto abierto $A' \subset N$ es un subconjunto abierto de M.

Proposición 1.3. *Sean (M, d_M), (N, d_n) espacios métricos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes: (1) $f : M \to N$ es continua en el punto $a \in M$. (2) Para toda bola abierta $B' = B(f(a), \varepsilon)$ de centro $f(a)$ y radio ε, es posible encontrar una bola $B(a, \delta)$ de centro a y radio $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$, tal* *que* $f(B) \subset B'$. *(3) Para todo* $\varepsilon > 0$ *es posible encontrar un* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$*, tal que si* $x, y \in M$, $d_M(x, a) < \delta$ *implica que* $d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Proposición 1.4. *la aplicación* $f : M \to N$ *es continua en* M *si y solo si* f *es continua en todo punto* a *de* M.

Conjuntos conexos

Una *incisión* de un espacio métrico M es una descomposición de $M = A \cup B$ como la reunión de dos subconjuntos A y B ambos abiertos y disjuntos. Una incisión $M = A \cup B$ se dice *trivial* cuando uno de los dos abiertos A o B es vacío. Un espacio métrico M se llama *conexo* cuando la única incisión que posee es la trivial. Un subconjunto X de un espacio métrico M se llama *conjunto conexo* cuando X sea conexo, visto X como un subespacio métrico. Cuando X admita una incisión no trivial, diremos que X es *desconexo*.

La propiedad de que X sea conjunto conexo es intrínseca, esto es, si X es subconjunto de (M, d_M) y (M, d_N) induciendo una métrica en X, entonces X es un subconjunto conexo de M si, y solo si, es un subconjunto conexo de N.

Proposición 1.5. *Sea* (M, d) *un espacio métrico. Entonces,* M *es conexo si, y solo si,* M *y* $\emptyset$ *son los únicos subconjuntos de* M *al mismo tiempo abiertos y cerrados.*

Proposición 1.6. *La imagen de un conjunto conexo por una aplicación continua es un conjunto conexo.*

Conexidad por caminos.

Un *camino* en un espacio métrico M es una aplicación continua $f : [0, 1] \to M$. Los puntos $a = f(0)$ y $b = f(1)$, pertenecen a M y son los extremos del camino f; a es punto inicial y b punto final. Se dice en este caso que el camino f *liga(une)* a con b. Cuando a $a = b$, se dice que f es un *camino cerrado* en M. Un espacio métrico M se llama *conexo por caminos* cuando dos puntos cualesquiera de M puede ser ligados por un camino contenido en M. Un conjunto $X \subset M$ se dice conexo por camino, cuando este conjunto cumple estas mismas propiedades.

Proposición 1.7. *Si el espacio métrico* M *es conexo por caminos, entonces* M *es conexo.*

Límites de sucesiones

Una sucesión de un conjunto M es realizado por una aplicación $x : \mathbb{N} \to M$, definida en el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, .., n, ..\}$. El valor que la sucesión x asume en el número $n \in \mathbb{N}$ será indicado por x_n, en vez de $x(n)$. Entonces una sucesión es un conjunto ordenado denotado por $(x_1, x_2, .., x_n, ...)$ y cada x_n se llamará $n-$*esimo término* de la sucesión.

Usaremos las notaciones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para representar una sucesión, es decir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, .., x_n, ...)$. Por otro lado para indicar el conjunto de valores de términos de una sucesión lo escribiremos como $\{x_1, x_2, .., x_n, ..\}$ o $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Esta notación de conjunto no debe de ser confundido con la notación de sucesión. Entonces en ocasiones una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se entenderá por $\{x_n\}$.

Una subsucesión de $\{x_n\}$es una restricción de la aplicación $n \mapsto x_n$ a un subconjunto infinito $N = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ de $\mathbb{N}$. Entonces una subsucesión es indicada por la notación $(x_{n_1}, x_{n_2}, .., x_{n_k}, ...)$ o $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ o simplemente $\{x_n\}_{n\in N}$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (M, d). Se dice que el punto $a \in M$ es límite de una sucesión $\{x_n\}$ cuando, dado número $\varepsilon > 0$ arbitrario, puede obtenerse un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $d(x_n, a) < \varepsilon$. Esto se denota por $a = \lim_d x_n$ o $a = \lim_d x_n$. De no haber ambigüedad con la métrica en el conjunto $\underset{n\to\infty}{M}$ podemos entonces escribir que $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ o simplemente $a = \lim x_n$, también se dice que x_n tiende a a. También $a = \lim x_n$ significa que, dada cualquier bola abierta B, de centro a, $x_n \in B$ para todo n *suficientemente grande.* Cuando existe $a = \lim x_n, \in M$ se dice que la sucesión de puntos $\{x_n\} \subset M$, es *convergente* para a, lo denotaremos por $x_n \to a$. Si no existe $\lim x_n$ en M, diremos que la sucesión es *divergente* en M.

Una observación importante es que el esta definición de límite depende siempre de la métrica que se establezca en el conjunto donde se encontraría la sucesión $\{x_n\}$

Proposición 1.8. *Sea $(M.d)$ un espacio métrico y una sucesión $\{x_n\} \subset M$. (1)* ***(unicidad del límite)*** *La sucesión $\{x_n\}$ no puede converger a dos valores diferentes. (2) Toda sucesión convergente es acotada. (3) Si $\lim x_n = a$, entonces toda subsucesión de $\{x_n\}$ converge para a.*

Proposición 1.9. *Sean (M, d_M) y (N, d_N) espacios métricos. A fin de que una aplicación $f : M \to N$ sea continua en el punto $a \in M$ es necesario y suficiente que $x_n \to a$ en M implique $f(x_n) \to f(a)$ en N.*

Corolario 1.1. *la aplicación $f : M \to N$ es continua si, y solamente si, para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ en M implica que $\{f(x_n)\}$ también converge en N. En caso afirmativo, se tiene $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$.*

Proposición 1.10. *Sea X un subconjunto de un espacio métrico (M, d). A fin de que se tenga $a \in \overline{X}$ en M, es necesario y suficiente, que a sea el límite de una sucesión de puntos $x_n \in X$.*

Corolario 1.2. *(1) Un subconjunto $X \subset M$ es denso en el espacio métrico M si, y solamente si, todo punto de M es límite de una sucesión $\{x_n\} \subset X$. (2) A fin de que un subconjunto F sea cerrado en M, es necesario y suficiente, que F contenga el límite de cada sucesión $\{x_n\} \subset F$ que converge en M.*

Proposición 1.11. *A fin de que a sea un punto de acumulación de un conjunto $X \subset M$ es necesario y suficiente que, el punto a sea límite de una sucesión $\{x_n\} \subset X$, con $x_n \neq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Sucesiones de funciones

Definición 1.11. Una sucesión de funciones $f_n : X \to M$ (definidas en un conjunto arbitrario X y tomando valores en el espacio métrico (M, d)) es *converge* en X, si cuando para cada $x \in X$ la sucesión$\{f_n(x)\}$ converge en M.

Como para cada $x \in X$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge a un valor, entonces este valor es sabido que es único. Luego esto hace posible definir una aplicación $f : X \to M$, donde $f(x) = \lim f_n(x)$, para todo $x \in X$. Entonces diremos que la aplicación $f : X \to M$ es la función límite de $\{f_n\}$, siendo este límite único. Luego decir que "$\{f_n\}$ converge en M" significará que "$\{f_n\}$converge a la función f", siendo f la función límite de $\{f_n\}$en la métrica (M, d). Ahora denotemos por $f_n \to f$ cuando $\{f_n\}$converge a f . Esta convergencia se llama también convergencia puntualmente, pues la convergencia depende de cada punto $x \in X$.

Esto significa, evidentemente que, dado arbitrariamente $x \in X$ y cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependiendo de x y de ε) tal que $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Definición 1.12. Diremos que una sucesión de funciones $f_n : X \to M$ *converge uniformemente* en X a una aplicación $f : X \to M$, cuando, para todo número $\varepsilon > 0$ dado , fuera posible obtener un $n_0 \in \mathbb{N}$(que depende de X y no en particular de cada punto de X), tal que si $n > n_0$implica que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, para cualquier $x \in X$.

Note que la función f es la función límite, entonces decir que "$\{f_n\}$ converge uniformemente en M" significará que "$\{f_n\}$converge uniformemente a la función f", siendo f la función límite de $\{f_n\}$ en la métrica (M, d).

Es evidente que si $f_n \to f$ uniformemente en X entonces $f_n \to f$ puntualmente.

Proposición 1.12. *Sean (M, d_M), (N, d_n) espacios métricos. Si una sucesión de aplicaciones $f_n : M \to N$, continuas en el punto $a \in M$, converge uniformemente en M, a la aplicación $f : M \to N$, entonces f es continua e en el punto a.*

Límites de funciones

Definición 1.13. Sean (M, d_M), (N, d_n) espacios métricos, X un subconjunto del espacio métrico M , a un punto adherente de X y una aplicación $f : X \to N$. Entonces diremos que un punto $b \in N$ es el límite de $f(x)$ cuando x tiende para a , denotado por

$$b = \lim_{x \to a} f(x),$$

cuando, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que $x \in X$, $d(x, a) < \delta$ implica que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Proposición 1.13. *Sea (M, d) un espacio métrico y una aplicación $f : X \to M$. (1) Si $a \in X$, entonces $b = \lim_{x \to a} f(x) \in M$ si, y solo si, f es continua en a y*

$f(a) = b$. (2) Si $a \in \overline{X} \subset M$. se tiene que $b = \lim_{x \to a} f(x) \in N$ si, y solamente si, para cada sucesión de puntos $x_n \in X$, con $x_n \to a$, implica que $b = \lim f(x_n)$.

Continuidad uniforme.

Definición 1.14. Sean M y N espacios métricos. Una aplicación $f : M \to N$ se dice que es uniformemente continua cuando, para todo $\varepsilon > 0$ dado , existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que sea cual fuera $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta$ implica que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Evidentemente toda aplicación uniformemente continua es en particular continua.

Observación importante, la continuidad uniforme o continua, depende de la métrica que se toma en el conjunto del dominio , como también depende de la métrica que se toma en el conjunto de llegada de una aplicación. Entonces la continuidad depende siempre de las métricas a considerar.

Espacios Completos y Sucesiones de Cauchy.

Definición 1.15. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico M se llama *sucesión de Cauchy* cuando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > 0$ implica que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Proposición 1.14. *(1) Toda sucesión convergente es de Cauchy. (2) Toda sucesión de Cauchy es acotada. (3) Una sucesión de Cauchy que posee una sucesión convergente , es convergente(teniendo el mismo límite).*

Si la sucesión es de Cauchy no necesariamente es convergente.

Definición 1.16. Se dice que un espacio métrico M es completo cuando toda sucesión de Cauchy en M es convergente.

Ejemplo 1.3. *(1)* El espacio métrico $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$ y con la métrica usual, es un espacio métrico completo. *(2)* El espacio métrico $\mathbb{C}$ también es completo.

Espacios métricos Compactos

Sea X un subconjunto de un espacio métrico M. Una *cobertura* de X es una familia $\mathscr{C} = \{C_\lambda : \lambda \in L\}$ de subconjuntos de M tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Esto significa que, para cada $x \in X$, existe por lo menos un indice $\lambda \in L$, tal que $x \in C_\lambda$. Si existe un subconjunto $L' \subset L$ tal que, $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$, entonces la subfamilia $\mathscr{C}' = \{C_\lambda : \lambda \in L'\}$ es una *subcobertura* de $\mathscr{C}$, donde a su vez $\mathscr{C}'$ es también es una cobertura de X. Sea $\mathscr{C} = \{A_\lambda : \lambda \in L\}$ una cobertura de X en M, entonces se dice que es una *cobertura abierta*, cuando para cada A_λ, $\lambda \in L$ es abierto en M. Decimos que $\mathscr{C} = \{A_\lambda : \lambda \in L\}$ es una cobertura finita de X en M , si L es finito.

Definición 1.17. (1) Un espacio métrico M se llama compacto cuando toda cobertura abierta posee una subcobertura finita. (2) Un subconjunto K de un espacio métrico M se llama un *subconjunto compacto* de M cuando toda cobertura abierta de K en M, se le puede extraer siempre una subcobertura finita para K.

Proposición 1.15. *(1)Todo subconjunto cerrado de un espacio métrico compacto es compacto. Recíprocamente, un subconjunto compacto de cualquier espacio métrico es cerrado. (2) Todo espacio métrico compacto es completo. (3) Todo espacio métrico compacto es acotado. (4)*

Corolario 1.3. *Sea M un espacio métrico compacto . Entonces $\{x_n\}$ converge en M, si y solo si, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en M.*

Proposición 1.16. *La imagen de un conjunto compacto por una aplicación continua es un conjunto compacto. (2) Si M es compacto entonces toda aplicación continua $f : M \to N$ es acotada.*

Proposición 1.17. *Las siguientes afirmaciones respecto a un espacio métrico M son equivalentes:*

1. *Mes compacto;*
2. *Todo subconjunto infinito de M posee un punto de acumulación;*
3. *Toda sucesión en M posee una subsucesión convergente;*
4. *M es completo y totalmente acotado(respecto a su métrica definida);*

1.2. Conceptos básicos de análisis complejo

Una sucesión de números complejos se denota por $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, lo que representa un conjunto ordenado por índices en los números naturales, es decir

$$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = z_1, z_2, z_3, \dots \quad \in \mathbb{C}$$

A la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la denotaremos por $\{z_n\}$, siempre que sus índices sean números naturales $\mathbb{N}$.

Definición 1.18. Una sucesión de número complejos $\{z_n\}$ **converge a** $z \in \mathbb{C}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un entero $N \geq 1$ tal que $|z_n - z| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

donde para todo $a \in \mathbb{C}$ se tiene que $|a| = \sqrt{a.\overline{a}}$.

Definición 1.19. Si $\{z_n\}$ converge a $z \in \mathbb{C}$, escribiremos $z_n \to z$, o también $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Proposición 1.18. *Si la sucesión $\{z_n\}$ converge a $z \in \mathbb{C}$, entonces z es único.*

Definición 1.20. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es acotada si existe un número real $R > 0$ tal que $|z_n| \leq R$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos notar que $\{z_n\}$ es acotada si está contenida en algún disco.

Teorema 1.1. *Toda sucesión de números complejos convergente es acotada*

Proposición 1.19. *Si* $\{z_n\}$ *y* $\{y_n\}$ *son sucesiones de números complejos tales que* $\{z_n\} \to z$ *y* $\{y_n\} \to y$*, entonces*

1. $(z_n + y_n) \to (z + y)$.
2. $z_n y_n \to zy$.
3. $z_n / y_n \to z/y$, siempre que $y \neq 0$.

Definición 1.21. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 1$ tal que $|z_n - z_m| < \varepsilon$ siempre que $m, n \geq N$.

Esto quiere decir que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy si la diferencia $z_n - z_m$ tiene a cero siempre que n y m tienda a ∞.

Teorema 1.2. *Un sucesión de números complejos es convergente si y solo si es una sucesión de Cauchy.*

Definición 1.22. Series. Dados los números complejos $a_1, a_2, .., a_n, ..$, decimos que la serie denotada por:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

es convergente si la sucesión $\{s_n\}$ es *convergente*, donde $s_n = a_1 + a_2 + .. + a_n$ son sumas parciales; caso contrario diremos que la serie *diverge*. En el caso que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{C}$, decimos que la serie es igual a s. A esta serie la denotaremos por $\sum\limits_k a_k$

Definición 1.23. Decimos que $\sum\limits_k a_k$ es absolutamente convergente si la serie $\sum\limits_k |a_k|$ es convergente.

Proposición 1.20. *si la serie* $\sum\limits_k a_k$ *es absolutamente convergente entonces la serie* $\sum\limits_k a_k$ *converge.*

Notemos que cada función compleja f se puede expresar como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $z = x + iy$, donde u y v son funciones reales en $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.24. Una función compleja f tiene **límite** L cuando z tiende a z_0, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$ siempre que z esté en el dominio de f y $0 < |z - z_0| < \delta$. En este caso escribiremos que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

ó $f(z) \to L$ cuando $z \to z_0$.

Teorema 1.3. *La función compleja $f(z)$ tiene límite L cuando $z \to z_0$ si y solo si $f(z_n) \to L$ para cualquier sucesión $\{z_n\}$ en el dominio de $f(z)$ tal que $z_n \neq z_0$ y $z_n \to z_0$.*

Teorema 1.4. *Si una función tiene límite en z_0, entonces la función es acotada en alguna vecindad de z_0.*

Teorema 1.5. *Si $f(z) \to L$ y $g(z) \to M$ cuando $z \to z_0$ nosotros tenemos que*

1. $f(z) + g(z) \to L + M$.
2. $f(z)\, g(z) \to LM$.
3. $f(z) / g(z) \to L/M$, *siempre que* $M \neq 0$.

Definición 1.25. Una función $f(z)$ es **continua en** z_0, si existe $f(z_0)$ y $f(z) \to f(z_0)$ cuando $z \to z_0$.

Definición 1.26. Una **función continua** es una función que es continua en cada punto de su dominio.

Teorema 1.6. *Una función real continua sobre un dominio compacto alcanza su máximo valor en dicho dominio.*

1.3. Funciones Holomorfas

Acá observaremos que las definiciones básicas junto con las propiedades y reglas para la derivada compleja son casi las mismas como para la derivada usual en el análisis real.

Notaremos a una función compleja definida en U como $f : U \to \mathbb{C}$, donde $U \subset \mathbb{C}$.

Definición 1.27. (1) Sea $f : U \to \mathbb{C}$ con $z_0 \in \mathbb{C}$, diremos que f es derivable en z_0, si el límite:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1.3.1}$$

existe. (2) Diremos que f es holomorfa en U, si f es derivable en todo $z_0 \in U$. (3) Diremos que f es holomorfa en z_0 si existe una vecindad de z_0 abierta en la que f es holomorfa. El límite de la ecuación 1.3.1, lo denotemos por $f'(z_0)$ o por $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ y podemos referirnos como la derivada compleja de $f(z)$ en z_0, es decir.

$$\frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Sea la función compleja $f : U \to \mathbb{C}$, escribimos $f \in \mathcal{H}(U)$, para denotar que f es holomorfa en todo U.

Teorema 1.7. *Si $f(z)$ es holomorfa en $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces $f(z)$ es continua en z_0.*

Más adelante mostraremos un resultado que nos dice que, si f' es holomorfa, entonces f' es continua.

Proposición 1.21. *Sea f y g holomorfas en $z \in \mathbb{C}$, entonces se cumplen las siguientes reglas para la derivada compleja:*

$$(cf)'(z) = cf'(z) \quad c \in \mathbb{C} \tag{1.3.2}$$

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z) \tag{1.3.3}$$

$$(fg)'(z) = f(z)\, g'(z) + f'(z)\, g(z) \tag{1.3.4}$$

$$(f/g)'(z) = \frac{g(z)\, f'(z) - f(z)\, g'(z)}{g(z)^2}, \quad g(z) \neq 0 \tag{1.3.5}$$

Teorema 1.8. (Regla de la cadena) Suponga que $g(z)$ es holomorfa en $z_0 \in \mathbb{C}$, y suponga que $f(w)$ es holomorfa en $w_0 = g(z_0)$. Entonces la composición $(f \circ g)(z) = f(g(z))$ es holomorfa en z_0 y

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))\, g'(z_0).$$

A continuación veremos el estudio de funciones analíticas, como ejemplos de funciones holomorfas, pero primero estudiaremos el comportamiento de un tipo en particular de series llamadas "Series de potencias".

1.3.1. Funciones analíticas

Para el estudio de las funciones analítica es importante repasar primero las definiciones y propiedades básicas de series de potencias, ya que una función analítica tiene una representación en una serie de potencia.

Series de Potencia

Definición 1.28. Una serie de potencia, centrando en z_0 es una serie de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Si hacemos un cambio de variable $w = z - z_0$, se reducirá al caso en que la serie de potencia estará centrado en $w_0 = 0$. Donde la denotaremos por

$$\sum_{k} a_k (w)^k$$

.

Definición 1.29. Denotaremos por $\rho(s)$ el radio de convergencia de la serie $s = \sum_k a_k z^k$, el cual está dado por

$$\rho(s) = \text{Sup}\left\{ r \geq 0 : \sum_k |a_k|\, r^k < \infty \right\}$$

siempre que el conjunto $\left\{r \geq 0 : \sum_k |a_k| r^k < \infty\right\}$ fuera acotado, caso contrario decimos que $\rho(s) = \infty$.

Teorema 1.9. *Sea $\rho(s) < \infty$ el radio de convergencia de $s = \sum_k a_k z^k$, tenemos que:*

1. si $|z| < \rho(z)$, entonces la serie s converge absolutamente.
2. si $|z| > \rho(s)$, entonces la serie diverge

La serie $s = \sum_k a_k z^k$ con radio de convergencia $\rho(s) > 0$, nos lleva a definir la función S en en disco $D(0, \rho(s))$, como

$$\begin{aligned} S : D(0, \rho(s)) &\mapsto \mathbb{C} \\ z &\to \sum_k a_k z^k \end{aligned}$$

Teorema 1.10. *Sea $S(z)$ la función definida en $D(0, \rho)$ por la serie de potencia $\sum_k a_k z^k$ con radio de convergencia $\rho > 0$. Entonces $S(z)$ es holomorfa y su derivada es dada por*

$$S'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1},\ |z| < \rho(s)$$

además se cumple que

$$S'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k,\ |z| < \rho(s)$$

Corolario 1.4. *La función $S(z)$ definida por la serie de potencia $s = \sum_k a_k z^k$, con radio de convergencia $\rho(s) > 0$, es infinitamente diferenciable en $z \in D(0, \rho(z))$ y es dada por*

$$S^{(n)} = \sum_{k=0} (k+n)(k+n-1) \ldots (k+1) a_{k+n} z^k.$$

Este corolario es una consecuencia inmediata del teorema anterior.

Corolario 1.5. *Dada $S(z)$ una función definida por la serie $s = \sum_k a_k z^k$ con radio de convergencia $\rho(s) > 0$. Entonces para todo $k \geq 0$ se cumple que*

$$a_k = \frac{1}{k!} S^{(k)}(0),\ k \geq 0.$$

La fórmula para los coeficientes es obtenidas derivando k veces la serie para $S(z)$ y remplazando en $z = 0$.

Funciones analíticas

Ahora definiremos a las funciones analíticas como funciones representadas a través de serie de potencias en cada punto de su dominio. Por lo visto en serie de potencias, veremos como las funciones analíticas son también funciones holomorfas.

Definición 1.30. Decimos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es representable como serie de potencias en $p \in U$, si existen $a_0, a_1, a_2, ... \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ tal que

$$f(z) = a_0 + a_1(z-p) + a_2(z-p)^2 + ..., \ \forall z \in D(p,r)$$

Definición 1.31. Decimos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica si f es representable como una serie de potencias en todo $p \in \Omega$.

Teorema 1.11. *Toda función analítica en Ω es holomorfa.*

Este resultado es cierto por lo visto en el teorema 1.10. La recíproca también es cierta pero para esta prueba se necesita la formula de integral de Cauchy(F.I.C) esto es en el teorema 1.20.

1.3.2. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Estas ecuaciones establecen una relación importante entre el derivadas parciales reales y la derivada compleja.

Suponga que $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. y fijado un $z \in \Omega$, entonces se observa que la derivada compleja de $f'(z)$, o sea

$$f'(z) = \frac{\lim}{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

también es equivalente a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = f'(z) \tag{1.3.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f'(z) \tag{1.3.7}$$

Denotemos como las **Ecuaciones de Cauchy-Riemann** a las siguientes relaciones para u y para v funciones reales en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si satisfacen que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial u}(x,y). \tag{1.3.8}$$

Teorema 1.12. *Sea $f = u + iv$ definida sobre un dominio $\Omega \in \mathbb{C}$, donde u y v son funciones reales en $\mathbb{R}^2$. Entonces $f(z)$ es holomorfa sobre Ω, si y solo si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ tienen derivada parcial de primer orden continua y satisface la ecuación 1.3.8.*

Teorema 1.13. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde Ω es un dominio y si $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces $f(z)$ es constante.*

Teorema 1.14. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde Ω es un dominio, además $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$, entonces $f(z)$ es constante.*

Aplicación inversa

Teorema 1.15. (Aplicación inversa). *Sea* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $z_0 \in \Omega$, *con* $f'(z_0) \neq 0$. *Entonces existe un disco abierto suficientemente pequeño* $D \subset \Omega$ *conteniendo a* z_0, *tal que* $f(z)$ *es inyectiva sobre* D, *la imagen* $V = f(D)$ *es abierto, y la función inversa*

$$f^{-1} : V \to D$$

es biholomorfa y satisface que

$$\left(f^{-1}\right)'(f(z)) = 1/f'(z), \;\; z \in U$$

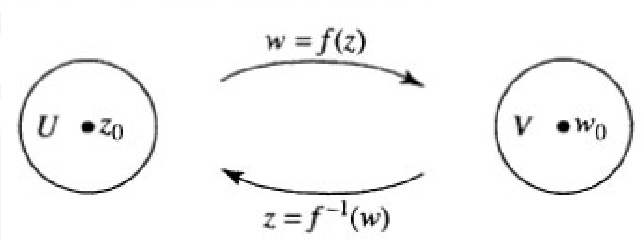


Figura 1.3.1:

1.4. Integral de Línea

Las integrales de línea juegan un rol importante en el análisis complejo, una de ellas es la Fórmula integral de Cauchy, empezaremos definiendo caminos.

Definición 1.32. Un *camino continuo* en el plano complejo que va del punto $A \in \mathbb{C}$ y termina en el punto $B \in \mathbb{C}$, es una función

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [a,b] & \to & U \subset \mathbb{C} \\ t & \to & \gamma(t) = u(t) + iv(t) \end{array}$$

continua con $\gamma(a) = A$ y $\gamma(b) = B$ donde u y v son funciones reales en $\mathbb{R}^2$.

Se sabe que si $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$ es continuo, entonces tanto u como v tiene que ser continuos. En lo sucesivo, llamaremos camino a todo camino continuo.

Definición 1.33. El camino es *simple* si $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ cuando $s \neq t$. El camino es *Cerrado* si empieza y termina en el mismo punto, esto es $\gamma(a) = \gamma(b)$. Caso contrario el camino, no sera simple.

Figura 1.4.1: caminos simples, no simples y cerrado.

Definición 1.34. La *traza* del camino γ es la imagen $\gamma([a,b])$.

Si el camino termina donde otro camino empieza, entonces estos caminos se pueden concatenar, es decir, unir.

Definición 1.35. Diremos que el camino $\gamma : [a,b] \to U \subset \mathbb{C}$, es de clase C^1 si es una función derivable en todo (a,b) y existen los límites laterales de γ en a y b, esto es

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} \gamma'(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h} \in \mathbb{C}$$

y

$$\lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} \gamma'(t) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\gamma(b+h) - \gamma(b)}{h} \in \mathbb{C}.$$

En estas condiciones, si $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ donde α y β son las componentes real e imaginaria de γ, entonces α y β son funciones de clases C^1 en (a,b) y sus derivadas se extienden continuamente en los extremos de este intervalos.

Definición 1.36. Diremos que el camino $\gamma : [a,b] \to U \subset \mathbb{C}$ es C^1 por partes, si γ es continuo y si existe una partición finita $a = a_0 < a_1 ... < a_{n-1} < a_n = b$ de $[a,b]$, tal que para todo $j = 1, ..., n$, $\gamma | [a_{j-1}, a_j]$ es de clase C^1.

Definición 1.37. Definiremos la integral sobre el camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, donde $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$, como

$$\int_a^b \gamma(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt$$

Esta definición es consistente, ya que γ es un camino, por ende es una aplicación continua, entonces se tiene que u y v son aplicaciones sobre $\mathbb{R}^2$ continua.

Definición 1.38. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino C^1 por parte, $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en el abierto A y $\gamma([a,b]) \subset A$, definimos

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt \in \mathbb{C}.$$

como la integral de f sobre γ. Note que $f(\gamma(t))\, \gamma'(t)$ es continua en cada uno de los subintervalo $[a_{i-1}, a_i] \subset [a,b]$.

Definición 1.39. Si $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ son camino C^1 por parte, con $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$, definimos la curva C^1 por parte $\gamma_1 + \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{C}$ mediante

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \left\{ \begin{array}{cc} \gamma_1(t) & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & t \in [b,c] \end{array} \right\}$$

de forma análoga se define la curva C^1por partes $\gamma_1 + \gamma_2 + .. + \gamma_n$.

Definición 1.40. Sea γ un camino C^1 por parte de la forma $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + .. + \gamma_n$, donde γ_i son caminos C^1 por partes, para $i = 1, .., n$. Si cada imagen de γ_i está en A abierto, y $f : A \to \mathbb{C}$ es continua en A, definimos la integral sobre γ como

$$\int_{\gamma_1 + \ldots + \gamma_n} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f$$

Proposición 1.22. *Sea γ un camino C^1 por partes, entonces se cumple la siguiente desigualdad*

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)|\, |dz|\, .$$

Definición 1.41. Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, un camino C^1 por partes definimos la longitud de γ como:

$$L(\gamma) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |\gamma'(t)\, dt| < \infty$$

donde γ es C^1 en cada $[a_{i-1}, a_i]$ para cada $i = 1, ..., n$.

Proposición 1.23. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino C^1 se tiene que* $\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq (L(\gamma)) \left(\sup_{z \in \gamma[a,b]} f(z) \right)$.

Teorema 1.16. Teorema Fundamental del Cálculo. Sea $F \in \mathcal{H}(\otimes)$. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es C^1 por parte y $\gamma([a,b]) \subset \Omega$ entonces se cumple:

$$\int_\gamma F' = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\, .$$

en particular, si γ es cerrada , es decir $\gamma(b) = \gamma(a)$ se tiene

$$\int_\gamma F' = 0,$$

para toda curva Γ cerrada C^1 por partes.

Definición 1.42. Llamaremos región a un conjunto $U \subset \mathbb{C}$ que es un dominio(abierto y conexo) y diferente del vació.

Proposición 1.24. Independencia de camino. *Si $f : A \to \mathbb{C}$ es continua en una región A, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\int_\gamma f$ es independiente del camino $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ para todo par de caminos C^1 por parte, γ_1 y γ_2 contenidas en A que unen un punto $z_1 \in A$ con otro punto $z_2 \in A$.*

2. *$\int_\Gamma f = 0$, para toda curva Γ cerrada C^1 por partes contenida en A.*

3. *f admite una antiderivada (o primitiva) en A ,si existe $F : A \to \mathbb{C}$ analítica en A tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in A$.*

1.5. Teorema de Cauchy

Empezaremos definiendo una extensión de una función al borde del dominio de manera holomorfa.

Definición 1.43. Diremos que el dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, con $\overline{\Omega} \subset \mathbb{C}$ tiene borde C^1 por partes, si existe camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de clase C^1 por partes, tal que $\gamma[a,b] = \partial\Omega$. Esto es que el borde $\partial\Omega$ se puede parametrizar por un camino γ de clase C^1 por partes.

Definición 1.44. Diremos que una función holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se extiende de forma holomorfa sobre su borde, si existe un dominio abierto Ω_0 con $\overline{\Omega} \subset \Omega_0$ tal que $f : \Omega_0 \to \mathbb{C}$ es holomorfa.

Teorema 1.17. Teorema de Cauchy *(Versión homológica) Sea Ω un dominio acotado donde su borde $\partial\Omega$ es C^1 por partes. Si $f(z)$ es holomorfa sobre el dominio Ω, tal que se extiende de forma holomorfa a su borde $\partial\Omega$, entonces*

$$\int_{\partial\Omega} f = 0$$

Definición 1.45. Sea $U \subset \mathbb{C}$ una región, y sean γ_1 y γ_2 dos caminos continuos contenidas en U con los mismos extremos $z_1, z_2 \in U$ $(z_1 \neq z_2)$ ó dos curvas cerradas continuas contenidas en U. Diremos que γ_1 y γ_2 son homotópicas en U si γ_1 se puede deformar *continuamente* hasta trasformarse en γ_2 sin salirse de U. En el primer caso, los extremos de las curvas deformadas han de mantenerse iguales a z_1y z_2, y en el segundo todas las curvas deformadas son cerradas. Un punto $z_0 \in U$ es una curva cerrada constante: $\gamma(t) = z_0$, $\forall t \in [a,b]$. Note que $\int_{z_0} f = 0$ para todo f.

Definición 1.46. Una región $U \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexa si toda curva cerrada continua γ contenida en U es homotópica a un punto en U.

Teorema 1.18. (Teorema de la deformación) *Sean γ_1 y γ_2 dos caminos C^1 por partes homotópicos en una región U, y sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa en U. Entonces se verifica*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Teorema 1.19. **(Teorema de Cauchy, Versión homotópica)**. *Sea γ un camino cerrado C^1 por partes homotópico a un punto en una región U. Si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa en U se cumple*

$$\int_\gamma f = 0$$

Teorema 1.20. ***(Formula Integral de Cauchy en el disco)*** *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, donde $U \subset \mathbb{C}$ es abierto. Sea $\overline{D}$ un disco cerrado tal que $\overline{D} \subset U$. Entonces para todo z en el interior de $\overline{D}$, vale la fórmula*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}} \frac{f(w)\,dw}{w - z}$$

Gracias a este teorema se puede enunciar el siguiente teorema el cual termina de unificar las funciones analíticas con las holomorfas

Teorema 1.21. *Toda función holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es analítica en dicho abierto.*

1.6. Teorema de Liouville

Veamos algunas aplicaciones de la fórmula integral de Cauchy.

Proposición 1.25. ***Fórmula integral de Cauchy para las derivadas.*** *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa en una región Ω. Entonces f es infinita veces derivable en cualquier punto de Ω. Además, si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una camino C^1 por partes y homotópica a un punto $z_0$en Ω y $z_0 \in \Omega - \gamma([a, b])$ se verifica*

$$n(\gamma, z_0) . f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw,\ k \in \mathbb{N}.$$

Donde $n(\gamma, a)$ es el número de vueltas que da la curva γ al redeor de z_0.

Proposición 1.26. ***(Desigualdad de Cauchy)*** *Sea f analítica en una región A, sea $a \in A$, y supongamos que $\overline{D}(a; R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq R\}$ está en A. Si $M = \max\limits_{|z-a|=R} |f(z)|$ entonces*

$$\left|f^k(a)\right| \leq \frac{k!}{R^k} M,\ \forall k = 0, 1, 2, ...$$

Teorema 1.22. **(Teorema de Liouville)** *Si f es una función entera (es decir, holomorfa en todo $\mathbb{C}$) y está acotada en $\mathbb{C}$, entonces f es constante.*

Proposición 1.27. *Sea f una función entera verificando*

$$|f(z)| \leq M |z|^\alpha,\ \forall z \in \mathbb{C} \backslash \overline{D(0; R)}$$

para algún M, $R > 0$ y $\alpha \geq 0$. Entonces, f es un polinomio (de grado, a lo sumo, el máximo entero de α.)

Teorema de Morera

Si $f : U \to \mathbb{C}$ es continua en una región $U \subset \mathbb{C}$ y $\int_\gamma f = 0$ para toda curva cerrada γ de clase C^1, contenida en U, entonces f es holomorfa en U.

1.6.1. Principio del modulo máximo

Propiedad del valor medio

Si $f \in \mathcal{H}(\otimes)$, donde Ω es un dominio, entonces todo disco cerrado $\overline{D}(a; r)$contenido en Ω, verifica que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

Principio del módulo máximo.

Sea $f \in \mathcal{H}(\otimes)$,donde Ω es un dominio, y que $|f|$ tiene un máximo relativo en $a \in A \subset \Omega$. Entonces f es constante en un entorno de a.

Corolario 1.6. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en una región A y $|f|$ alcanza un máximo absoluto en A, entonces f es constante en A.*

1.7. Conexidad Simple

Veremos un teorema importante para las regiones simplemente conexas.

Teorema 1.23. Caracterización de un simple conexo. *Sea Ω una región de. Las siguientes propiedades son equivalente entre sí:*

1. Ω es simplemente conexo.

2. para todo ciclo $\Gamma \subset \Omega$ y para todo $f \in H(\Omega)$ se verifica

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

3. todo camino cerrado γ contenido en Ω es homotópico a cualquier punto $p \in \Omega$.

4. todo ciclo Γ contenido en Ω es homólogo a respecto de Ω. (existencia de la primitiva) Toda función $f \in H(\Omega)$ admite una primitiva en Ω, es decir, $f = F'$ para alguna $F \in H(\Omega)$.

5. (existencia de logaritmo holomorfo) para toda función $f \in H(\Omega)$, con $f(z) \neq 0$ en todo $z \in \Omega$, existe $g \in H(\Omega)$, tal que para todo $z \in \Omega$ se tiene que $f(z) = e^{g(z)}$.

6. (existencia de raíces cuadradas holomorfas) Para toda función $f \in H(\Omega)$ con $f(z) \neq 0$ en todo $z \in \Omega$ existe $g \in H(\Omega)$, tal que $g^2(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.

1.8. Funciones holomorfas en el punto $z = \infty$.

Diremos que la función $f(z)$ es holomorfa en $z = \infty$ si la función $g(w) = f(1/w)$ es holomorfa en $w = 0$.

Si $f(z)$es analítica en ∞, entonces $g(w) = f(1/w)$ tiene una expansión de serie de potencia centrado en $w = 0$,

$$g(w) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (w)^k = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + ..., \quad |w| < \rho.$$

Así $f(z)$ es representado por una serie de expansión convergente descendiendo la potencia de z,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k} = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + ..., \quad |z| > \frac{1}{\rho}.$$

Esta serie converge absolutamente para $|z| > 1/\rho$, y converge uniformemente en $|z| > r$, siempre que $r > \frac{1}{\rho}$.

1.8.1. Los ceros de una función holomorfa

Decimos que una función no es idénticamente nula en z_0, si existe una vecindad U que contiene a z_0, tal que $f \not\equiv 0$ en U.

Definición 1.47. Sea $f(z)$ holomorfa en z_0, suponga que $f(z_0) = 0$, pero $f(z)$ no es idénticamente nula, entonces diremos que $f(z)$ tiene un **cero de orden** $\boldsymbol{N}$ *en* z_0 *si* $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(N-1)}(z_0) = 0$, *mientras que* $f^{(N)}(z_0) \neq 0$.

En vista de la fórmula de expansión de serie de potencia de $f(z)$, *tenemos que la función con cero de orden* N *en* z_0 *tiene la forma*

$$f(z) = a_N (z - z_0)^N + a_{N+1} (z - z_9)^{N+1} + ...,$$

donde $a_N \neq 0$. *Podemos factorizar el término* $(z - z_0)^N$ *de la serie de potencia y escribir*

$$f(z) = (z - z_0)^N h(z),$$

donde $h(z)$ *es analítica en* z_0 *con* $h(z_0) = a_N \neq 0$.

Un cero de orden uno, es llamado un cero simple y un cero de orden dos es llamado un doble cero.

Definición 1.48. Diremos que $f(z)$ tiene un cero en $z = \infty$ de orden N si $g(w) = f(1/w)$ tiene un cero en $w = 0$ de orden N.

Así con la definición anterior, la función f con cero en $z = \infty$ de orden N tiene la siguiente representación

$$f(z) = \frac{b_N}{z^N} + \frac{b_{N+1}}{z^{N+1}} + ..., \quad |z| > R,$$

donde $b_N \neq 0$.

Definición 1.49. Diremos que un punto $z_0 \in E$ es un punto aislado de el conjunto E si existe $\rho > 0$, tal que $|z - z_0| \geq \rho$ para todos los puntos $z \in E$ que no sea z_0.

Diremos que $z_0 \in E$ es un punto de acumulación de E, si z_0 no es aislado en E.

Teorema 1.24. *Sea Ω un dominio, y $f \in \mathcal{H}(\otimes)$, tal que no es idénticamente cero, entonces los ceros de $f(z)$ son aislados.*

Teorema 1.25. *Si $f(z)$ y $g(z)$ son holomorfas sobre un dominio Ω, y si $f(z) = g(z)$ para $z \in E \subset \Omega$, donde E posee un punto de acumulación, entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

Teorema 1.26. *(Teorema de identidad). Si las funciones holomorfas $g, f : \Omega \to \mathbb{C}$ coinciden sobre un conjunto con algún punto de acumulación en Ω entonces $f \equiv g$ en el Ω.*

1.8.2. Continuación analítica

Definición 1.50. Un Elemento de función es un par ordenado (f, D), donde D es un disco circular abierto y $f \in H(D)$.

Definición 1.51. Dos elementos de función (f_0, D_0) y (f_1, D_1) son prolongaciones directas uno del otro si se verifican dos condiciones: $D_0 \bigcap D_1 \neq \emptyset$. En este caso escribimos

$$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1).$$

Definición 1.52. Una cadena es una sucesión finita de discos $\mathcal{C}$, por ejemplo $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, ..., D_n\}$ tal que $D_{i-1} \bigcap D_i \neq \emptyset$para $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Definición 1.53. Sea un elemento de función (f_0, D_0), si existen elementos de funciones (f_i, D_i), tales que $(f_{i-1}, D_{i-1}) \sim (f_i, D_i)$ para $i = 1, ..., n$, entonces (f_n, D_n) se llama prolongación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de una cadena $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, ..., D_n\}$.

Proposición 1.28. *Sea (f_n, D_n) una prolongación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de la cadena $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, ..., D_n\}$, entonces (f_n, D_n) está determinada de manera única por $\mathcal{C}$ y el elemento (f_0, D_0).*

Definición 1.54. Una cadena $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, ..., D_n\}$ se dice que recubre un camino $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, si existen números $0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = 1$, tal que $\gamma(0)$ es el centro de D_0, $\gamma(1)$ es el centro de D_n, y

$$\gamma[s_i, s_{i+1}] \subset D_i \quad (i = 0, 1, ..., n - 1).$$

Definición 1.55. Si (f_n, D_n) puede prolongarse a lo largo de la cadena $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, ..., D_n\}$ el cual recubre un camino γ hasta (f_n, D_n), llámanos a (f_n, D_n) una prolongación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de γ; o también podemos decir que (f_0, D_0) admite una prolongación analítica a lo largo de γ.

A continuación se presenta un resultado esencial.

Teorema 1.27. **(Teorema de Monodromia)** *Supongamos que U es una región simplemente conexa, (f, D) es un elemento de función, $D \subset \Omega$, y que (f, D) puede prolongarse analíticamente a lo largo de toda curva de U que comience en el centro de D. Entonces existe una $g \in H(U)$, tal que $g(z) = f(z)$ para todo $z \in U$.*

1.8.3. Singularidades aisladas de una función holomorfa

Definición 1.56. Un punto z_0 es una **singularidad aislada** de $f(z)$, si $f(z)$ es holomorfa en algún disco perforado $D^*(a, r) = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}$ centrado en z_0.

Definición 1.57. Decimos que el límite de una función f, cuando z tiende a a, es infinito, si para todo $M > 0$, existe $\gamma > 0$, tal que $|z - a| < \gamma$ implica que $|f(z)| > M$. A este límite lo escribiremos como

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

Definición 1.58. Sea $f(z)$ holomorfa en $D^*(a, r)$. Si existe una función holomorfa $\overline{f}$ en $D(a, r)$, tal que $f = \overline{f}$ en $D^*(a, r)$, entonces la singularidad de f en z_0 se llamará removible.

Teorema 1.28. *Supongamos que $f(z)$ es holomorfa en $D^*(a, r)$ y que f es acotada en $D^*(a, r')$ para algún $r' > 0$. Entonces, f tiene una singularidad removible en a.*

Corolario 1.7. *Si $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$, entonces existe $h : D(a, r) \to \mathbb{C}$ holomorfa con $h(a) \neq 0$ y $m \in \mathbb{N}$, tal que $f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}$.*

En las condiciones del corolario anterior diremos que f tiene un polo en a de orden m.

Definición 1.59. Diremos que f tiene singularidad esencial en $z = a$, si f no tiene polo ni es removible en $z = a$.

Teorema 1.29. *Si $a \in \Omega$ y f es holomorfa en $\Omega - a$, entonces debe de presentarse solo uno de los siguientes casos par f:*

1. *f tiene una singularidad removible en a.*

2. *Existen números complejos $c_1, .., c_m$ donde m es un entero positivo y $c_m \neq 0$, tales que*

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

tiene una singularidad removible en a. Esto último es equivalente a decir que f posee un polo de orden m en a.

3. *Para todo disco $D(a;r) \subset \Omega$ centrado en a y de radio $r > 0$ se cumple que $f(D'(a;r))$ es denso en el plano. esto equivale a que $f(z)$ tiene singularidad esencia en z=a.*

Teorema 1.30. *Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$. Entonces z_0 es un polo de $f(z)$ de orden N si y solo si $1/f(z)$ es holomorfa en z_0 y tiene un cero de orden N.*

1.9. Series de Laurent y singularidades aisladas

Hemos visto que si f es holomorfa en una región U, entonces f es analítica en dicha región, luego por esta razón f puede ser representada como una serie de potencia para cada $z \in U$. Sin embargo, si $f(z)$ tiene un polo de orden p, digamos en $z = z_0$, dentro de la región U, no será holomorfa en ese punto, pero este tipo de función definida en U se puede representar como una doble serie, gracias a que $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$, es analítica en todos los puntos de la región U.

Definición 1.60. (Serie de Laurent) Se llama serie de Laurent centrada en $z = z_0$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde a_n y a_{-n} son constantes complejas (independientes de z).

Definición 1.61. Se dice que la serie de Laurent converge puntualmente para todo z en Ω cuando ambas series convergen puntualmente para todo $z \in \Omega$.

Definición 1.62. Se dice que la serie de Laurent converge absolutamente para todo z en Ω cuando ambas series convergen absolutamente para todo $z \in \Omega$.

Definición 1.63. Se dice que la serie de Laurent converge uniformemente en Ω cuando ambas series convergen uniformemente en Ω.

Definición 1.64. Diremos que una función $f(z)$ definida en en el anillo $\rho < |z - z_0| < \sigma$ tiene una expansión de Laurent , si $f(z)$ puede ser escrita como

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{, con } \rho < |z - z_0| < \sigma$$

el cual dicha serie converge absolutamente y donde su convergencia uniforme se cumple para $r \leq |z - z_0| \leq s$ siendo $\rho < r$ y $s < \sigma$.

Descomposición de Laurent

Veremos un teorema para saber bajo que condiciones una función puede ser representada como una expansión de una serie de de Laurent.

Teorema 1.31. La descomposición de Laurent *Sea $0 \leq \rho < \sigma < +\infty$, y supóngase que $f(z)$ es holomorfa en $\rho < |z - z_0| < \sigma$. Entonces $f(z)$ puede ser descompuesto como una suma*

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z),$$

donde $f_0(z)$ es holomorfa para $|z - z_0| < \sigma$, y $f_1(z)$ es holomorfa en $|z - z_0| > \rho$ y en ∞.

Como $f_0(z)$ es holomorfa, entonces se puede representar como

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < \sigma,$$

que converge absolutamente en $|z - z_0| < \sigma$ y desde luego converge uniformemente para $|z - z_0| < s$ con $s < \sigma$. De la misma forma podemos expresar a $f_1(z)$ como una serie de potencias negativas de $z - z_0$, de la forma

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| > \rho.$$

el cual converge absolutamente en $|z - z_0| > \rho$ y converge absolutamente en $|z - z_0| > r$ con $r > \rho$. Si sumamos las dos serie , obtenemos una doble expansión para $f(z)$,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \rho < |z - z_0| < \sigma, \tag{1.9.1}$$

que converge absolutamente, y que la convergencia uniformemente se da para $r \leq |z - z_0| \leq s$. Notamos que la serie 1.9.1 es la **Serie de Laurent expandida** de $f(z)$ con respecto al anillo $\rho < |z - z_0| < \sigma$.

Teorema 1.32. *(***Serie de expansión de Laurent***).* Sea $f(z)$ holomorfa para $\rho < |z - z_0| < \sigma$, con $0 \leq \rho < \sigma \leq \infty$. Entonces $f(z)$ tiene una serie de Laurent expandida como en 1.9.1, tal que converge absolutamente en cada punto del anillo y converge uniformemente sobre cada subanillo $r \leq |z - z_0| \leq s$, donde $\rho < r < s < \sigma$. Los coeficientes son únicamente determinado por $f(z)$, y ellos son dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad -\infty < n < \infty.$$

para cualquier r fijo con $\rho < r < \sigma$.

1.10. Funciones Meromorfas

Las funciones cuyas únicas singularidades son polos aparecen con frecuencias suficiente como para merecer un nombre especial.

Definición 1.65. Diremos que una función $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ es meromorfa en un abierto Ω si en cada punto de Ω o bien f es holomorfa o bien tiene un polo; dicho de otra forma si existe un conjunto $P_f \subseteq \Omega$, tal que

1. P_f no tiene puntos de acumulación en Ω;
2. $f \in H(\Omega \backslash P_f)$;
3. f tiene un polo en cada punto de P_f.

Como P_f es un subconjunto de Ω que no posee puntos de acumulación, entonces para cada compacto $K \subseteq \Omega$ el conjunto $K \bigcap P_f$ es finito, lo que implica que P_f es finito o numerable. Esta incluida la posibilidad $P_f = \emptyset$.

El conjunto de de las funciones meromorfas en el dominio Ω lo denotaremos por $\mathcal{M}(\Omega)$. Note que una función es meromorfa en un abierto, si lo es en cada componente conexa del abierto.

Ejemplo 1.4. Las funciones holomorfas en Ω también son funciones meromorfas en Ω.

Definición 1.66. Diremos que una función $R : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ es racional, si dicha función se puede escribir como el cociente de dos polinomios en Ω, es decir existen dos polinomios $p, q : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$, tal que

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

donde p y q no poseen factores en común.

Ejemplo 1.5. Las funciones racionales R definidas en el dominio Ω, son también funciones meromorfas en Ω. En efecto, como R es racional, existen dos polinomios p y q definidas en Ω, tal que $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ y sea $P_R = \{z \in \Omega / p(z) = 0\}$. (1) Veamos P_R no tiene puntos de acumulación, pues el número de ceros de un polinomio, siempre es finito o vacío. (2) $R \in \mathcal{H}(\Omega \backslash P_r)$, pues es el cociente de $p, q \in \mathcal{H}(\Omega \backslash P_R)$ donde el denominador no posee ceros en $\Omega \backslash P_R$. (3) Si $P_R = \emptyset$, entonces R holomorfa, si $P_R \neq \emptyset$, tenemos que para cada $z' \in P_R$ podemos hacer $R(z) = \frac{1}{(z-z')^k} \frac{q(z)}{p_{z'}(z)}$, donde $p(z) = (z - z')^k p_{z'}(z)$, siendo $p_{z'}(z)$ sin factores de la forma $(z - z')$. Luego es note que $\frac{q}{p_{z'}}$ es analítica en alguna vecindad de z' y además $\frac{q}{p_{z'}}(z') \neq 0$. por tal R tiene un polo en cada punto z' de P_R. De estas tres condiciones tenemos que las funciones racionales , son también meromorfas.

Proposición 1.29. *Dado un abierto no vació U en $\mathbb{C}$, el conjunto $\mathcal{M}(\Omega)$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$ respecto de las operaciones usuales con funciones. Si además U es conexo, entonces $\mathcal{M}(U)$ es un cuerpo conmutativo.*

Definición 1.67. Sea $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$, con $U \subset \mathbb{C}$. Diremos que $z_0 = \infty$ es una singularidad aislada de la función f si existe $R > 0$, tal que $f \in \mathcal{H}(A_R)$, donde $A_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subset U$.

Podemos establecer una clasificación similar a la considerada para singularidades en puntos dentro de $\mathbb{C}$.

Definición 1.68. Supongamos que ∞ es una singularidad aislada de una función f. Entonces:

1. Se dice que ∞ es una *singularidad evitable de* f o que f tiene en ∞ una singularidad evitable, si existe
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = a \in \mathbb{C},$$
es decir $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 / |z| > \delta \to |f(z) - a| < \varepsilon$

2. Se dice que ∞ *es un polo de* f o que f tiene en ∞ un polo, si
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty,$$
es decir, $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 / |z| > \delta \to |f(z)| > \varepsilon$

3. Se dice que f tiene en ∞ una *singularidad esencial* o que ∞ es una singularidad esencial de f si no existe $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$

Definición 1.69. Diremos que f tiene en ∞ un polo de orden k o que ∞ es un polo de orden k de f, si 0 es un polo de orden k de la función f^* definida como
$$f^*(z) = f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Como consecuencia de las definiciones y de los resultados previos sobre polos, podemos enunciar:

Proposición 1.30. *Supongamos que ∞ es una singularidad aislada para una función f. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. f tiene un polo de orden k en ∞ .

2. Existe $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^k} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

3. Existe un $R > 0$ y una función g holomorfa en $A_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ con $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y verifica
$$f(z) = z^k g(z)$$
para cada $z \in A_R$.

4. Existe coeficientes A_j $(1 \leq j \leq k)$, a_n con $n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\})$, con $A_k \neq 0$ unívocamente determinados, y un $R > 0$, tales que
$$f(z) = A_k z^k + ... + A_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$
siempre que $|z| > R$. *El polinomio $A_k z^k + ... + A_1 z$ se denomina parte singular o parte principal de f en ∞.*

Definición 1.70. Sea $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$, donde Ω es un dominio en $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C} \backslash D(0; R) \subseteq \Omega$ para algún $R > 0$. Diremos que $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ es meromorfa en $\Omega_\infty = \Omega \cup \{\infty\}$, denotada por $f \in \mathcal{M}(\Omega_\infty)$, si f es meromorfa en Ω y tiene en ∞ una singularidad evitable o un polo.

Esta definición extiende las funciones meromorfas definidas en dominios $\Omega \subset \mathbb{C}$, con singularidad evitable o con polo en ∞, a una función meromorfa en $\Omega_\infty = \Omega \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ donde la topología a usar sobre el conjunto $\overline{\mathbb{C}}$ será τ_χ, que estudiaremos más adelante. Entonces más adelante veremos que en dicha topología τ_χ un disco abierto que contiene a infinito es $D(\infty, R) = \{z : |z| > R\} \cup \{\infty\}$. Luego note que $\Omega_\infty = \Omega \cup \{\infty\}$ es un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$, si el conjunto Ω es abierto en $\mathbb{C}$ y el disco $D(\infty, R)$ esta en Ω_∞.

Proposición 1.31. *f es meromorfa en $\Omega_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$ si $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ es meromorfa en una vecindad abierta de $z = 0$.*

Proposición 1.32. *Veamos dos resultados importantes*

1. Si f es una función entera y meromorfa en $\overline{\mathbb{C}}$, entonces f es un polinomio.
2. $f \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ si y solo si f es racional.

Demostración.

Parte (1).En el punto ∞, puede haber una singularidad removible o un polo de la función f.

Primero Supongamos que ∞ es una singularidad removible de f, entonces existe un $L \in \mathbb{C}$, tal que $L = \lim_{z\to\infty} f(z)$. Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $R > 0$, tal que si $|z| > R$ implica que $|f(z) - L| < \varepsilon$. Para así poder inferir que $|f(z)| < \varepsilon + L = M$, siempre que $|z| > R$, donde además nos sugiere que f es acotada en dicha región. Luego como f es continua por ser f entera, entonces f es acotada en el compacto $|z| \leq R$. Luego tenemos que la aplicación entera f está acotada en el plano complejo. Por último es posible aplicar el teorema de Liouville que nos garantiza que f es constante, es decir, un polinomio de grado 0.

Supongamos que ∞ es un polo de orden k. Entonces

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^k} \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$$

y por tanto existen R, $M > 0$ tales que

$$|f(z)| \leq M |z|^k, \ |z| > R; \tag{1.10.1}$$

Ahora podemos aplicar el teorema Liouville ya que f es entera y cumple la desigualdad 1.10.1, donde se nos garantiza que f es un polinomio de grado menor o igual a k.

Parte (2) Veamos primero que $P_f = \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} / f(z) = \infty\right\}$ es finito, en efecto f tiene una singularidad evitable o un polo en el punto $z = \infty$, entonces f es holomorfa en el conjunto $\{|z| > R\}$, para algún R. Esto último nos dice que en el conjunto $\{|z| > R\} \cup \{\infty\}$ solo hay un único elemento P_f. Luego en el conjunto $|z| \leq R$ hay un número finito de polos, caso contrario habría un punto de acumulación, contradiciendo la definición de función meromorfa respecto a f. Por tal P_f es finita.

Sea ∞ un polo de f de orden k_0 y $a_1, a_2, ..a_n$ los polos finitos de f con sus respectivos ordenes $k_1, ..., k_n$, se sigue que la función

$$g\left(z\right) = \left(z - a_1\right)^{k_1} ... \left(z - a_n\right)^{k_n} f\left(z\right)$$

es analítica en todo $\mathbb{C}$, por tal g es entera. Luego podemos aplicar la parte (1) de este mismo teorema que nos garantiza que g es un polinomio. Por tanto f es el cociente de dos polinomios definidos en $\overline{\mathbb{C}}$ y por ende f es racional. $\square$

Capítulo 2

Análisis en plano complejo extendido $\overline{\mathbb{C}}$

En este capítulo se analiza la extensión de las propiedades y teoremas del plano complejo $\overline{\mathbb{C}}$ al conjunto $\mathbb{C} \cup \infty$, por ello se empezará a hacer las demostraciones necesarias.

2.1. Análisis en plano complejo extendido $\overline{\mathbb{C}}$

Veremos una correspondencia entre el plano complejo junto al punto infinito y la esfera en $\mathbb{R}^3$.

Denotaremos por $\sum$ a la esfera en $\mathbb{R}^3$ con centro en $c = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ y radio $r = 1/2$, esto quiere decir

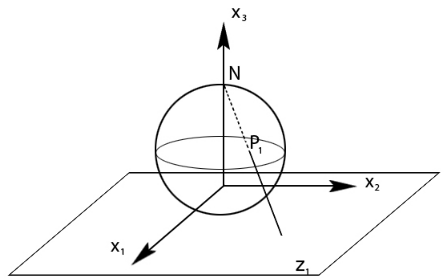
$$\Sigma = \left\{ (x, y, w) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y + \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

En este conjunto podemos ver que el plano plano $x, y - plano$ es tangente a Σ en $(0, 0, 0)$ y $N = (0, 0, 1)$ es el polo norte. Una línea que une N con z_1 en el $x, y - plano$(plano complejo) intercepta a la esfera $\sum$ en un punto $P_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Esto establece una correspondencia $\pi : P_1 \to z_1$ inyectiva entre los puntos de $\Sigma - \{N\}$ y $\mathbb{C}$. Luego asociando N con ∞, la correspondencia anterior queda extendida uno a uno entre Σ y $\overline{\mathbb{C}}$ donde la correspondencia es conocida como la proyección estereográfica, veamos esto en la figura 1.1. Ahora llamaremos a Σ la esfera de Riemann, $\overline{\mathbb{C}}$ =$\mathbb{C}$∪$\{\infty\}$ la extensión del plano complejo y la proyección estereográfica, la denotaremos por π, representada por:

$$\pi{:}\sum \to \overline{\mathbb{C}},$$

donde

$$\pi\left((u, v, w)\right) = \left(\frac{u}{1 - w}, \frac{v}{1 - w} \right),\ (u, v, w) \in \sum$$



Luego tenemos la inversa de π, denotada por π^{-1}, descrita por $\pi^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \to \sum$, donde

$$\pi^{-1}((x,y)) = \begin{cases} \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}\right) & , si \ \ (x,y) \neq \infty \\ (0,0,1) & , si \ \ (x,y) = \infty \end{cases}$$

2.1.1. Abiertos en $\overline{\mathbb{C}}$

Más adelante trabajaremos con abiertos no solo en $\mathbb{C}$, sino también con abiertos en $\overline{\mathbb{C}}$ para esto necesitamos una topología en $\overline{\mathbb{C}}$ que nos permita entender y manipular estos objetos sobre ciertas funciones. Una forma de introducir una topología en $\overline{\mathbb{C}}$ es utilizando el hecho de que $\pi : \Sigma \to \overline{\mathbb{C}}$ es biyectiva y también que en Σ conocemos sus abiertos, entonces definimos esta topología τ_π de la siguiente manera

$$\tau_\pi = \left\{A \subseteq \overline{\mathbb{C}} / \ \pi^{-1}(A) \text{ es un abierto de } \Sigma\right\}$$

Esto define una topología en $\overline{\mathbb{C}}$. En efecto, (1) El $\emptyset$ es un elemento de τ_π, pues $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y este es un abierto en Σ entonces $\emptyset \in \tau_\pi$, por otro lado $\pi^{-1}(\Sigma) = \overline{\mathbb{C}}$ tenemos que $\overline{\mathbb{C}} \in \tau_\pi$. (2) Sea $A, B \in \tau_\pi$ luego tenemos que $\pi^{-1}(A) \bigcap \pi^{-1}(B)$ es un abierto en Σ por ser ambas abiertos en Σ y como $\pi^{-1}(A) \bigcap \pi^{-1}(B) = \pi^{-1}(A \bigcap B)$ entonces este ultimo es un abierto en Σ y por tanto $A \bigcap B$ es un abierto o elemento de τ_π. (3) Sea una familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de elementos en τ_π luego $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \pi^{-1}(A_\lambda)$ es un abierto en Σ, por ser la unión arbitraria de abiertos en Σ y como $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \pi^{-1}(A_\lambda) = \pi^{-1}\left(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)$ tenemos que este último es por tanto un abierto de Σ. Por tanto de (1) , (2) y (3) tenemos que el conjunto de elementos τ_π forman un topología en $\overline{\mathbb{C}}$.

Vemos que $\overline{\mathbb{C}}$ hereda la topología de $\sum \subset \mathbb{R}^3$.

Ahora veamos un abierto que contenga al punto ∞. Sea el conjunto $A_r = \left\{(u,v,z) \in \Sigma / 1 \geq w \geq \frac{r^2}{1+r^2}\right\}$ con r fijo y $r > 0$. Note que A_r es un abierto de Σ y por tal $B_r = \pi(A_r)$ es un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$, pues $\pi^{-1}(B_r) = \pi^{-1}(\pi(A_r)) = A_r$ es un abierto de Σ. Luego notemos que $B_r = \overline{\mathbb{C}} - \overline{D}(0,r)$ siendo este un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$ que contiene a ∞. De ahora en adelante llamaremos a $D(\infty, r)$, disco abierto de $\overline{\mathbb{C}}$ de centro ∞ y radio r, escrito como $D(\infty, r) = \overline{\mathbb{C}} - \overline{D}(0, r)$, además se tiene que

$$D(\infty, r) = \left\{(x, y) \in \mathbb{C}/x^2 + y^2 > r^2,\, r > 0\right\} \cup \{\infty\}$$

Ahora veremos otra topología inducida por la métrica cordal que pasaremos a definir la cual es denotada por τ_χ. Esta topología τ_χ resultará ser equivalente a la topología τ_π, lo cual un abierto pensado en τ_χ es un abierto también en τ_π y viceversa.

2.1.2. Distancia Cordal $\chi(z, w)$

Es sabido que la definición de una métrica en un conjunto cualquiera genera una topología inducida por dicha métrica, entonces sobre el conjunto $\overline{\mathbb{C}}$ definiremos una métrica para así tener una topología inducida y saber como son sus abiertos en $\overline{\mathbb{C}}$ por medio de esta topología inducida .La identificación de $\overline{\mathbb{C}}$ con $\sum \subset \mathbb{R}^3$ nos permite definir la métrica cordal en $\overline{\mathbb{C}}$ de la siguiente forma.

Definición 2.1. Dados $z, w \in \overline{\mathbb{C}}$, la distancia cordal entre z y w, denotada por $\chi(z, w)$, se define como la distancia euclidiana entre los puntos correspondientes a z y w en la esfera $\sum$, o sea

$$\chi(z, w) = \left|\pi^{-1}(z) - \pi^{-1}(w)\right|$$

Proposición 2.1. *Dado dos puntos z_1 y z_2 en $\overline{\mathbb{C}}$ se cumple lo siguiente:*

1. Si z_1 y z_2 están en $\overline{\mathbb{C}}$ se tiene que

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

2. Si $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 = \infty$ se tiene que

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}$$

.

3. si $z_1 = \infty$ y $z_2 = \infty$ se tiene que

$$\chi(z_1, z_2) = 0$$

.

Demostración. (1) sea z y w en $\mathbb{C}$, donde $z = (z_1, z_2)$ y $w = (w_1, w_2)$, entonces

$$\chi(z_1, z_2) = \pi^{-1}((z_1, z_2)) - \pi^{-1}((w_1, w_2))$$

$$= \left|\left(\frac{z_1}{|z|^2+1}, \frac{z_2}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1}\right) - \left(\frac{w_1}{|w|^2+1}, \frac{w_2}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2}{|w|^2+1}\right)\right|$$

$$= \sqrt{\frac{\left(|w|^2+1\right)\left(|z|^2+1\right)\left[|z|^2\left(|w|^2+1\right)-2z_1w_1-2z_2w_2-2|z|^2|w|^2+|w|^2\left(|z|^2+1\right)\right]}{\left[\left(|z|^2+1\right)\left(|w|^2+1\right)\right]^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left[|z|^2-2z_1w_1-2z_2w_2+|w|^2\right]}{\left[\left(|z|^2+1\right)\left(|w|^2+1\right)\right]}} = \sqrt{\frac{\left[z_1^2+z_2^2-2z_1w_1-2z_2w_2+w_1^2+w_2^2\right]}{\left[\left(|z|^2+1\right)\left(|w|^2+1\right)\right]}}$$

$$= \frac{|z-w|}{\sqrt{\left[\left(|z|^2+1\right)\left(|w|^2+1\right)\right]}}$$

y así tenemos la primera parte de la proposición.

La parte (2) tomamos un $z \in \mathbb{C}$ y $w = \infty$, donde $z = (z_1, z_2)$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\chi(z_1, z_2) &= \left|\pi^{-1}((z_1, z_2)) - \pi^{-1}(\infty)\right| \\
&= \left|\left(\frac{z_1}{|z|^2+1}, \frac{z_2}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1}\right) - (0,0,1)\right| \\
&= \left|\left(\frac{z_1}{|z|^2+1}, \frac{z_2}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1} - 1\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{z_1}{|z|^2+1}, \frac{z_2}{|z|^2+1}, \frac{-1}{|z|^2+1}\right)\right| \\
&= \sqrt{\frac{z_1^2+z_2^2+1}{\left(|z|^2+1\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|z|^2+1}}
\end{aligned}$$

y así tenemos la parte 2. Para la parte (3) , tenemos que

$$\chi(\infty, \infty) = \left|\pi^{-1}(\infty) - \pi^{-1}(\infty)\right| = |(0,0,1) - (0,0,1)| = |(0,0,0)| = 0,$$

terminando la demostración. □

Proposición 2.2. *La distancia cordal χ, es una métrica en $\overline{\mathbb{C}}$*

Demostración. Como la métrica cordal esta inducida por la métrica usual en $\mathbb{R}^3$ sobre Σ, entonces χ es una métrica. □

Por esta razón , nos podemos referir a la distancia cordal como la métrica cordal. Entonces un *disco en la métrica cordal* de centro en $a \in \overline{\mathbb{C}}$ y radio $r > 0$, lo denotaremos como $D_\chi(a, r)$, el cual será

$$D_\chi(a, r) = \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} / \chi(z, a) < r,\, r > 0\right\}$$

este a su vez es un elemento básico de la topología τ_χ.

Proposición 2.3. *La distancia cordal tiene las siguientes propiedades veamos*

1. $\chi(z_1, z_2) \leq 1$.
2. $\chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \chi(z_1, z_2)$, para todo$z_1$y z_2 en $\overline{\mathbb{C}}$.
3. si $|z_1| \leq |z_2| \leq \infty$, entonces $\chi(0, z_1) \leq \chi(0, z_2)$.
4. $\chi(z_1, z_2) \leq |z_1 - z_2|$, con z_1y z_2 en $\mathbb{C}$.
5. $\chi(z_1, z_2) \leq \left|\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right|$ con z_1y z_2 en $\mathbb{C} - \{0\}$.

Demostración. **Parte (1)**. Claramente $\chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) \leq 1$ pues cualquier distancia cordal siempre será menor que el diámetro de la esfera es decir menor que uno.

Parte (2). Supongamos que si z_1 y z_2 son finitos entonces por definición vemos que

$$\chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \frac{\left|\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right|}{\sqrt{1 + \left|\frac{1}{z_1}\right|^2}\sqrt{1 + \left|\frac{1}{z_2}\right|^2}} = \frac{|z_1 - z_2| / |z_1 z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2} / |z_1 z_2|} = \chi(z_1, z_2).$$

Si $z_1 = \infty$ y $z_2 = \infty$ entonces $\chi(\infty, \infty) = 0 = \chi(0, 0)$ y por último si z_1 es finito y $z_2 = \infty$ se cumple que se tiene que

$$\chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{\infty}\right) = \chi\left(\frac{1}{z_1}, 0\right) = \frac{|1/z_1 - 0|}{\sqrt{1 + |1/z_1|^2}\sqrt{1 + |0|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} = \chi(z_1, \infty)$$

esto concluye la parte 2.

Parte (3). $\chi(0, z_i) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + |z_i|^{-2}}}$ para $i = 1, 2$. Por hipótesis tenemos que $|z_1| \leq |z_2| \leq \infty$ luego $|z_2|^{-1} \leq |z_1|^{-1}$ entonces $\sqrt{1 + |z_2|^{-2}} \leq \sqrt{1 + |z_1|^{-2}}$ tomando la inversa $\dfrac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^{-2}}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1 + |z_2|^{-2}}}$ donde concluimos que $\chi(0, z_1) \leq \chi(0, z_2)$.

Parte (4). Tenemos por definición: $\chi(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}}$, y como $\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2} \geq 1$ tomando inversa a esto último tenemos que $\frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} \leq 1$, ahora multiplicando por $|z_1 - z_2|$ a ambos lados de la desigualdad, tendremos lo que buscábamos desmostar.

Parte (5). Por la parte 2 de la proposición, tenemos que $\chi(z_1, z_2) = \chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right)$ y como z_1 y z_2 son diferente de ceros tenemos que su inversa se encuentran en el plano complejo, después aplicamos la parte 4 de esta misma proposición y con esto conseguimos la desigualdad deseada. □

Proposición 2.4. *La topología τ_χ es igual a la topología τ_π.*

Demostración. Primero demostraremos que

$$\pi\left(B_d\left(\pi^{-1}(a), r_a\right) \cap \sum\right) = B_\chi(a, r_a)$$

en efecto, sea $b \in \pi\left(B_d\left(\pi^{-1}(a), r_a\right) \cap \sum\right)$, entonces existe

$$y \in B_d\left(\pi^{-1}(a), r_a\right) \cap \sum,$$

tal que $b = \pi(y)$, recuerde que π es biyectiva de $\sum$ a $\overline{\mathbb{C}}$, y como $y \in \sum$, entonces podemos escribir de manera única $y = \pi^{-1}(b)$, ahora como $y \in B_d\left(\pi^{-1}(a), r_a\right)$, entonces se cumple que $\left|\pi^{-1}(a) - y\right| = \left|\pi^{-1}(a) - \pi^{-1}(b)\right| \leq r_a$, por tal $b \in B_\chi(a, r_a)$. Ahora en el recíproco sea $b \in B_\chi(a, r_a)$, entonces $b \in \overline{\mathbb{C}}$ y $\chi(a, b) \leq r_a$, es decir

$$\left|\pi^{-1}(a) - \pi^{-1}(b)\right| \leq r_a,$$

ahora como en el caso anterior podemos escribir $y = \pi^{-1}(b)$ de manera única con $y \in \sum$, esto hace que $\left|\pi^{-1}(a) - y\right| \leq r_a$, por tal tenemos que $y \in B_d\left(\pi^{-1}(a), r_a\right) \cap \sum$ y por ende

$$b = \pi(y) \in \pi\left(B_d\left(\pi^{-1}(a), r_a\right) \cap \sum\right),$$

lo que termina nuestra primera parte de la demostración.

Sea $A \in \tau_\chi$, entonces A se puede escribir como la unión de abiertos topológicos básicos de τ_χ, es decir $A = \underset{a \in A}{\cup} B_\chi(a, r_a)$, ahora de lo anterior inferimos que

$$A = \underset{a \in A}{\cup} \pi\left(B_d\left(\pi^{-1}(a), r_a\right) \cap \sum\right) = \pi\left(\underset{a \in A}{\cup}\left(B_d\left(\pi^{-1}(a), r_a\right) \cap \sum\right)\right).$$

Luego por ser π biyectiva de $\sum$ a $\overline{\mathbb{C}}$, tenemos que

$$\pi^{-1}(A) = \underset{a \in A}{\cup}\left(B_d\left(\pi^{-1}(a), r_a\right) \cap \sum\right)$$

es unión arbitraria de abiertos en $\sum$, por tal $A \in \tau_\pi$. El recíproco es similar gracias a la primera igualdad, pues sea $A \in \tau_\pi$, entonces A se puede escribir como la unión arbitraria de sus abiertos básicos, es decir

$$A = \underset{a \in A}{\cup} \pi^{-1}\left(B_d\left(\pi^{-1}(a), r_a\right) \cap \sum\right),$$

al igual que el anterior, tenemos que $A = \underset{a \in A}{\cup} B_\chi(a, r_a)$ y como es la unión arbitraria de abiertos básicos de τ_χ, entonces tenemos que $A \in \tau_\chi$, con esto se termina la demostración. □

Ahora note que $D(\infty, r)$ y $D(a, r)$ con $a \neq \infty$ son elementos de τ_x y de τ_π. Ahora cuando menciones discos abiertos al rededor de un punto de $z \in \overline{\mathbb{C}}$, nos referiremos a cualquiera de uno de estos dos conjuntos.

Los estudios de funciones meromorfas generalmente son sobre el conjunto $\mathbb{C}$, pero esto puede extenderse a $\overline{\mathbb{C}}$, donde es necesario tener en cuenta una topología sobre el conjunto $\overline{\mathbb{C}}$. Luego para cada punto $a \in \overline{\mathbb{C}}$, podemos encontrar discos abiertos de la forma $D(a, r)$ donde, para cada $a \in \mathbb{C}$ estos también son discos abiertos de $\mathbb{C}$, mas no cuando $a = \infty$. Claro que no es la única forma de tomar un disco para cada punto en $\overline{\mathbb{C}}$, pero es suficiente para trabajar en la extensión de $\mathbb{C}$ a $\overline{\mathbb{C}}$.

2.1.3. Distancia Esférica χ_0

Tenemos otra métrica alternativa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ llamada la métrica esférica, denotada por χ_0, el cual es equivalente a la métrica cordal . Está distancia esférica esta definida por la longitud euclidiana del camino más corto sobre la esfera de Riemann $\sum$ entre los puntos P_1 y P_2 representados por z y w en el plano complejo extendido.

Dados dos puntos P_1 y P_2 en $\sum$, y junto con el origen de $\sum$, forman un ángulo θ, donde tenemos

$$\chi(z, w) = 2sen(\theta/2),$$

donde z y w son puntos del plano complejo extendido representando respectivamente a P_1y P_2 en $\sum$. Este ángulo $\theta \in [0, \pi]$

Definición 2.2. Definimos la distancia esférica de dos puntos z y w por $\chi_0(z, w)$ como

$$\chi_0(z, w) = 2arcosen\left(\frac{\chi(z, w)}{2}\right), \tag{2.1.1}$$

donde $\chi_0(z, w) \in [0, \pi]$.

Proposición 2.5. *La distancia esférica χ_0, es una métrica.*

La demostración es solo un cáclulo, ver prueba en [11]

De ahora en adelante nos podemos referir a la distancia esférica , como métrica esférica

Proposición 2.6. *La métrica cordal y la la métrica esférica son equivalentes.*

Demostración. Para esto usaremos una desigualdad elemental que nos dice: Si $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ entonces se tiene que

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \operatorname{sen}(\theta) \leq \theta \tag{2.1.2}$$

volviendo a nuestro problema como $\chi_0(z, w) \in [0, \pi]$ se tiene que $\frac{\chi_0(z,w)}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, luego por la ecuación 2.1.2 tenemos que

$$\frac{2\frac{\chi_0(z,w)}{2}}{\pi} \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\chi_0(z, w)}{2}\right) \leq \frac{\chi_0(z, w)}{2}. \tag{2.1.3}$$

De la definición de distancia esférica se tiene que sen $\left(\frac{\chi_0(z,w)}{2}\right) = \frac{\chi(z,w)}{2}$ y por último remplazamos esto en la ecuación 2.1.3 lo cual nos da

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)\chi_0\left(z,w\right) \leq \chi\left(z,w\right) \leq \chi_0\left(z,w\right) \tag{2.1.4}$$

esto último nos dice que la métrica cordal y la métrica esférica son equivalentes. □

2.1.4. Derivada esférica

Un concepto análogo a la derivada de funciones en el cual se utiliza la métrica euclidiana, es la derivada esférica en la cual la métrica que utilizaremos es la métrica cordal, junto a la métrica usual en $\mathbb{C}$.

Definición 2.3. Sea $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ y Ω un dominio. Entonces llamaremos a $f^{\#}(z)$, la derivada esférica de $f(z)$ y la definimos como

$$f^{\#}(z) = \lim_{z' \to z} \frac{\chi\left(f\left(z'\right), f\left(z\right)\right)}{\left|z'-z\right|}, \forall z \in \Omega$$

Ahora veremos una equivalencia. Primero cuando $z \in \Omega$ no es polo de f, tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
f^{\#}(z) &= \lim_{z' \to z}\left(\frac{\chi\left(f\left(z'\right).f\left(z\right)\right)}{\left|z'-z\right|}\right) \\
&= \lim_{z' \to z}\left(\frac{\left|f\left(z\right)-f\left(z'\right)\right|}{\left|z'-z\right|}.\frac{1}{\sqrt{1+\left|f\left(z\right)\right|^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+\left|f\left(z'\right)\right|^2}}\right) \\
&= \lim_{z' \to z}\left(\frac{\left|f\left(z\right)-f\left(z'\right)\right|}{\left|z'-z\right|}\right)\lim_{z' \to z}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left|f\left(z\right)\right|^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+\left|f\left(z'\right)\right|^2}}\right) \\
&= \frac{\left|f'\left(z\right)\right|}{1+\left|f'\left(z\right)\right|^2}
\end{aligned}$$

Ahora veamos cuando $\xi \in \Omega$ es polo. Es sabido que $f(\xi) = \infty$ y que la función $g(z) = 1/f(z)$, con $g(\xi) = 0$ es una función analítica en ζ la cual nos garantiza la existencia $g'(\xi)$. Luego por definición tenemos que $f(z) = \lim_{z' \to \xi} \frac{\chi(f(z'),\infty)}{|z'-\xi|} = \lim_{z' \to \xi} \frac{1}{|z'-\xi|}.\frac{1}{\sqrt{1+|f(z')|^2}}$, luego factorizando $|f(z)|$ y aplicando límites tenemos que

$$f^{\#}(z) = \lim_{z' \to \xi} \frac{\left|\frac{1}{f(z)}\right|}{\left|z'-\xi\right|}.\lim_{z' \to \xi} \frac{1}{\sqrt{1+\left|\frac{1}{f(z')}\right|^2}},$$

luego sabemos que $\lim\limits_{z'\to\xi}\frac{1}{\sqrt{1+\left|\frac{1}{f(z')}\right|^2}}=1$ y además como $g(\xi)=0$ tenemos entonces que $\lim\limits_{z'\to\xi}\frac{\left|\frac{1}{f(z)}\right|}{|z'-\xi|}=\lim\limits_{z'\to\xi}\frac{|g(z')|}{|z'-\xi|}=\lim\limits_{z'\to\xi}\frac{|g(z')-g(\xi)|}{|z'-\xi|}=|g'(\xi)|$ estos significa que ambos límites existen ya que $g'(\xi)$ existe , por tal

$$f^{\#}(\xi)=|g'(\xi)|$$

por otro lado como $g(z)$ es analítica en ξ, entonces tenemos que $g'(\xi)=\lim\limits_{z'\to\xi}g'(z)=\lim\limits_{z'\to\xi}\left(\frac{1}{f(z)}\right)'$ luego como la derivada de $f(z)$ existe para cualquier z suficientemente cerca a ξ, entonces podemos aplicar la propiedad de la derivada de la división, teniendo

$$g'(\xi)=\lim_{z'\to\xi}\frac{f(z)'}{f(z)^2}$$

además es note que $g'(\xi)=\lim\limits_{z'\to\xi}\frac{f(z)'}{f(z)^2}=\lim\limits_{z'\to\xi}\frac{f(z)'}{f(z)^2+1}$, luego como $f^{\#}(\xi)=|g'(\xi)|$ tenemos entonces que la derivada esférica en el polo $z=\xi$, es :

$$f^{\#}(\xi)=\lim_{z'\to\xi}\frac{f(z)'}{f(z)^2+1}.$$

Entonces se puede ver que la función derivada esférica se representa como

$$f^{\#}(z)=\begin{cases}\frac{|f'(z)|}{1+|f'(z)|^2} & z\in\Omega,\text{ no es polo de } f(z)\\ \lim\limits_{z'\to\xi}\frac{f(z)'}{f(z)^2+1} & z\in\Omega,\text{ es polo de } f(z)\end{cases}$$

por lo visto anterior se obtiene que $f^{\#}(z)$ es continua en todo Ω.

Proposición 2.7. *Sea f una función meromorfa sobre Ω. Entonces se cumple que $f^{\#}(z)=\left(\frac{1}{f(z)}\right)^{\#}$.*

Demostración. Esto es cierto por definición y por la la proposición 2.3 parte 2, es decir

$$\begin{aligned}f^{\#}(z)&=\lim_{z'\to z}\frac{\chi(f(z'),f(z))}{|z'-z|},\ \forall z\in\Omega\\&=\lim_{z'\to z}\frac{\chi\left(\frac{1}{f(z')},\frac{1}{f(z)}\right)}{|z'-z|}\\&=\left(\frac{1}{f(z)}\right)^{\#}\end{aligned}$$

□

Lema 2.1. *Sea Ω un dominio no vació. Si $f \in H(\Omega)$ y g se define en $\Omega \times \Omega$ mediante*

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

entonces g es continua en $\Omega \times \Omega$. Ver demostración en Análisis real y complejo de W Rudin pág 202

Observación 2.1. Note que g es continua, luego para las sucesiones $\{z_n\}$, $\{w_n\}$ en Ω, que convergen al valor a, donde $z_n \neq w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, cumple lo siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(w_n)}{z_n - w_n} = f'(a)$$

Proposición 2.8. *Sea f una función meromorfa en Ω y dadas dos sucesiones $\{z_n\}$, $\{w_n\}$ en Ω, que convergen al valor a, donde $z_n \neq w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\mathit{lim}_{n\to\infty} \frac{\chi(f(z_n), f(w_n))}{|z_n - w_n|} = f^{\#}(a).$$

Demostración. En efecto supongamos que a no es polo de f, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\chi(f(z_n), f(w_n))}{|z_n - w_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|f(z_n) - f(w_n)|}{|z_n - w_n|} \times \frac{1}{\sqrt{1 + |f(z_n)|^2}} \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{1 + |f(w_n)|^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|f(z_n) - f(w_n)|}{|z_n - w_n|} \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + |f(z_n)|^2}} \\
&\quad \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + |f(w_n)|^2}} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{|f(z_n) - f(w_n)|}{|z_n - w_n|}\right) \left(\frac{1}{1 + |f(a)|^2}.\right)
\end{aligned}$$

dado que a no es polo de f, entonces f es analítica en algún disco abierto de centro en a, luego por la observación 2.1 y de lo anterior se afirma lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\chi(f(z_n), f(w_n))}{|z_n - w_n|} &= |f'(a)| \left(\frac{1}{1 + |f(a)|^2}.\right) \\
&= f^{\#}(a)
\end{aligned}$$

Si a es un polo de f, entonces la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ es analítica en algún disco abierto de centro en a. Luego por lo anterior tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\chi(g(z_n), g(w_n))}{|z_n - w_n|} = g^{\#}(a)$$

además es cierto que $g^{\#}(a) = \left(\frac{1}{f(a)}\right)^{\#}$ y si aplicamos la proposición 2.7, tenemos que $g^{\#}(a) = f^{\#}(a)$, lo que termina nuestra demostración. $\square$

Ejemplo 2.1. Sea f una función meromorfa en Ω y dadas dos sucesiones $\{z_n\}$, $\{w_n\}$ en Ω, que convergen al valor ∞, donde $z_n \neq w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces el siguiente límite existe en $\mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\chi(f(z_n), f(w_n))}{\chi(z_n, w_n)}$$

En efecto, supongamos que a no es polo de f, entonces existe un disco abierto de centro en a, tal que $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ es analítica sobre dicho disco. Luego si hacemos $z_n = \frac{1}{z'_n}$ y $w_n = \frac{1}{w'_n}$ tenemos que $\{z'_n\}$ y $\{w'_n\}$ converge a cero, entonces para un n suficientemente grande se cumple que $g(z'_n) = f\left(\frac{1}{z'_n}\right) = f(z_n)$. Volviendo al problema y recordando que $\chi(z'_n, w'_n) = \chi\left(\frac{1}{z'_n}, \frac{1}{w'_n}\right)$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\chi(f(z_n), f(w_n))}{\chi(z_n, w_n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\chi(g(z'_n), g(w'_n))}{\chi(z'_n, w'_n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\chi(g(z'_n), g(w'_n))}{|z'_n - w'_n|}}{\frac{\chi(z'_n, w'_n)}{|z'_n - w'_n|}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\chi(g(z'_n), g(w'_n))}{|z'_n - w'_n|}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\chi(z'_n, w'_n)}{|z'_n - w'_n|}} \\
&= \frac{g^{\#}(0)}{\frac{1}{1+|0|^2}} \\
&= g^{\#}(0)
\end{aligned}$$

por tanto el límite existe, pues sabemos que g es analítica en cero. Lo último que falta sería para el caso en que el infinito es un polo, donde su demostración es parecida a lo anterior, pues se toma su función analítica $g(z) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$ en algún disco abierto de centro en cero por tal existe $g^{\#}(0)$, luego $g^{\#}(z) = \left(\frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}\right)^{\#}$ y por la proposición 2.7, se tiene que $g^{\#}(z) = \left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{\#}$ y de esto concluimos que también existe la derivada esférica para el polo infinito.

2.2. Convergencia Uniforme y Convergencia Esférica.

Pasaremos al estudio de convergencia uniforme y convergencia esférica de funciones, pues para esto es de principal importancia las definiciones de distancia euclidiana y distancia cordal ya que dichas definiciones toman como herramienta base a dichas distancias.

Definición 2.4. Sea $X \subset \mathbb{C}$ y $f_n : X \to \mathbb{C}$. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre un conjunto $E \subset X$, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $n_0 = n_0(\varepsilon, E)$ en los naturales, tal que $n > n_0$ implica que

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon,$$

para todo $z \in E$.

En esta definición vemos que n_0 solo depende de ε y E , mas no depende de cada valor de z en E , pues n_0 será el mismo para todo los puntos en E. Vea que $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$, además $f(z) \neq \infty$, para todo $z \in E$, es decir, $f(E) \subset \mathbb{C}$. Luego si mencionamos que "$\{f_n\}$ converge uniformemente sobre un conjunto $E \subset X$" significa que "$\{f_n\}$ converge uniformemente sobre $E \subset X$ a f". Veamos la definición siguiente, que nos habla de convergencia uniforme a la función infinito, la cual difiere mucho de la definición anterior

Definición 2.5. Sea $X \subset \mathbb{C}$ y $f_n : X \to \mathbb{C}$. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a ∞ sobre un conjunto $E \subset X$, si para cualquier $M > 0$, existe un número $A_0 = A_0(M, E)$ en los reales, tal que si $z > A_0$ implica

$$|f_n(z)| > M,$$

para todo $z \in E$.

Es evidente que $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \infty$.

Proposición 2.9. *Sea $X \subset \mathbb{C}$ y $f_n : X \to \mathbb{C}$. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a ∞ sobre un conjunto $E \subset X$, si y solo, si $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ converge uniformemente a 0 en E.*

Demostración. Sea una sucesión de funciones $\{f_n\}$ la cual converge uniformemente a ∞ sobre un conjunto $E \subset X$, entonces para cualquier $m \in \mathbb{N}$, existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0$ implica que

$$|f_n(z)| > m,$$

para todo $z \in E$. Luego bajo las mismas condiciones tenemos que

$$\left|\frac{1}{f_n(z)} - 0\right| = \left|\frac{1}{f_n(z)}\right| < \frac{1}{m}.$$

Por tal $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ converge uniformemente a $f = 0$ en todo E. Ahora veamos el recíproco, sea $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ converge uniformemente a 0 en E. entonces dado un $M \in \mathbb{N}$, podemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ que depende de M y de E, tal que $n > n_0$ implica que

$$\left|\frac{1}{f_n(z)} - 0\right| < \frac{1}{M}$$

para todo $z \in E$. Luego bajo las mismas condiciones inferimos que $|f_n(z)| > M$, teniendo así la proposición. $\square$

Definición 2.6. Sea $X \subset \mathbb{C}$ y $f_n : X \to \overline{\mathbb{C}}$. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente a f sobre un conjunto X, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número n_0 tal que $n > n_0$ implica

$$\chi(f(z), f_n(z)) < \varepsilon,$$

para todo $z \in E$.

Note que sería razonable usar la métrica cordal en esta definición. Pero esta definición es usada para fines prácticos, ya que el resultado de que converge o no, es el mismo para ambas métricas, pues estas son equivalentes.

Proposición 2.10. *Sea $X \subset \mathbb{C}$ y $f_n : X \to \overline{\mathbb{C}}$. Entonces $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente a f sobre X, si y solo, si $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ converge esféricamente uniformemente a $\frac{1}{f}$ sobre X.*

Demostración. La demostración se infiere de la siguiente igualdad

$$\chi(f_n(z), f(z)) = \chi\left(\frac{1}{f_n}(z), \frac{1}{f}(z)\right) \tag{2.2.1}$$

dada por la proposición 2.3, parte 2. Pues si $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente a f sobre X, entonces dado un $\varepsilon > 0$, existe un número n_0, tal que $n > n_0$ implica que

$$\chi\left(\frac{1}{f_n}(z), \frac{1}{f}(z)\right) = \chi(f(z), f_n(z)) < \varepsilon,$$

para todo $z \in X$, esto nos dice que $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ converge esféricamente a $\frac{1}{f}$ sobre X. El recíproco es similar dada por la igualdad. $\square$

Proposición 2.11. *Sea $f_n : E \to \mathbb{C}$. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre $E \subset \mathbb{C}$, entonces esta sucesión converge esféricamente uniformemente a f sobre E*

Demostración. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre $E \subset \mathbb{C}$, entonces podemos dar cualquier $\varepsilon > 0$ y encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $n > n_0$ implica que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Por otra parte la parte 4 de la proposición 2.3, nos dice que $\chi(f_n(z), f(z)) < |f_n(z) - f(z)|$, pues $f_n(z), f(z) \in \mathbb{C}$. Por tanto tenemos que la sucesión $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente sobre E.

El recíproco no es del todo cierto, para que se cumpla el recíproco la función límite f, de la convergencia esféricamente uniforme, tiene que ser acotada; veamos esto en el siguiente teorema. $\square$

Teorema 2.1. *Sea $X \subset \mathbb{C}$ y $f_n : X \to \overline{\mathbb{C}}$. Si la sucesión $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente a una función acotada f sobre $E \subset X$, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre E.*

Demostración. Suponga $|f(z)| \leq M$ sobre E, M finito. Entonces

$$\chi(0, f(z)) \leq \chi(0, M) = \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} < 1,$$

esto es por la proposición 3 parte 3. Ahora escojamos $\varepsilon < 1 - \frac{M}{\sqrt{1+M^2}}$. Luego por la hipótesis tenemos que existe un entero positivo $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq n_0$, el cual implica

$$\chi(f(z), f_n(z)) < \varepsilon, \ \forall z \in E$$

de estas dos desigualdades anteriores y la desigualdad triangular en la métrica esférica tenemos lo siguiente

$$\frac{|f_n(z)|}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}} = \chi\left(0, f_{n(z)}\right) \leq \chi(0, f(z)) + \chi(, f(z), f_n(z)), \ n > n_0$$

$$< \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} + \varepsilon = m < 1 \ \forall z \in E, \forall n > n_0.$$

Entonces tenemos que $\frac{|f_n(z)|}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}} < m$ siempre que $z \in E$ y $n > n_0$. Luego despejamos $|f_n(z)|$ en la desigualdad anterior, se tiene que

$$|f_n(z)| < \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} = M_*,$$

para todo $n_0 \geq n$ y para todo $z \in E$. Esto nos dice que $|f_n(z)|$ es acotado, bajo las condiciones anteriores

$$\begin{aligned} |f(z) - f_n(z)| &= \sqrt{1+|f(z)|^2}\sqrt{1+|f_n(z)|^2}\chi(f(z), f_n(z)) \ \forall z \in E \\ &< \sqrt{1+M^2}\sqrt{1+M_*^2}\chi(f(z), f_n(z)) \ \forall z \in E, \forall n > n_0 \end{aligned}$$

Luego para todo $\varepsilon > 0$ existe un un $n_1 > 0$, tal que si $n > n_0$ implica que $\chi(f(z), f_n(z)) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+M^2}\sqrt{1+M_*^2}}$. Entonces tomando un $n' = max\{n_0, n_1\}$ tenemos que

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

siempre que $n > n'$ y $z \in E$. □

Definición 2.7. La función f es *esféricamente continua en el punto* $z_0 \in \mathbb{C}$ si, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que

$$\chi(f(z), f(z_0)) < \varepsilon,$$

siempre que $z \in D(z_0, \delta)$.

Esta definición es la definición clásica de continuidad pero con la diferencia que la métrica usada es la cordal.

Definición 2.8. La función f es *esféricamente continua sobre* $E \subseteq \mathbb{C}$, si f es *esféricamente continua en cada punto* $z_0 \in E$.

Una definición parecida a la continuidad uniforme es la siguiente:

Definición 2.9. Decimos que la función f posee en el conjunto $E \subset \mathbb{C}$ continuada esféricamente uniforme, si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\chi\left(f\left(z\right), f\left(z'\right)\right) < \varepsilon,$$

siempre que $z, z' \in E$, $|z - z'| < \delta$.

δ depende de ε y E no de cada punto.

En la siguiente definición, pasaremos a extender la continuidad en $\mathbb{C}$ a la continuidad en $\overline{\mathbb{C}}$.

Definición 2.10. La función $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$, definida en el abierto $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, es *esféricamente continua en el punto* $z_0 = \infty$ si, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\chi\left(f\left(z\right), f\left(z_0\right)\right) < \varepsilon,$$

siempre que $z \in D\left(\infty, \delta\right) = \{\infty\} \cup \{|z| > \delta\}$.

Definición 2.11. La función $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ es *esféricamente continua sobre* $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ si para cualquier $z' \in E$ y cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta\left(z', \varepsilon\right)$ con $\delta > 0$, tal que

$$\chi\left(f\left(z\right), f\left(z'\right)\right) < \varepsilon,$$

siempre que, $z \in D\left(z', \delta\right)$.

Note que si $z = \infty$, entonces $D\left(\infty, \delta\right) = \{z : |z| > \delta\} \cup \{\infty\}$ y si $z \neq \infty$, entonces $D\left(z', \delta\right) = \{z : |z| < \delta\}$

Proposición 2.12. *La función* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ *es* esféricamente continua sobre $z' \in \overline{\mathbb{C}}$ *si, y solo si para cualquier* $\varepsilon > 0$, *existe un* $\delta = \delta\left(z', \varepsilon\right)$*con* $\delta > 0$, *tal que* $\chi\left(f\left(z\right), f\left(z'\right)\right) < \varepsilon$, *siempre que* $z \in D_\chi\left(z', \delta\right)$.

Demostración. Si $z' \in \mathbb{C}$ se tiene entonces que $D_\chi\left(z', \delta\right) \subset D\left(z', \delta\right)$. Luego para todo disco $D_\chi\left(z', \delta\right)$ con $z' \in \mathbb{C}$, es posible encontrar siempre un disco $D\left(z', \delta'\right)$, tal que $D\left(z', \delta'\right) \subset D_\chi\left(z', \delta\right)$. Si $z' = \infty$ tenemos que $D\left(\infty, \delta\right) = D_\chi\left(z', \frac{\delta^2}{1+\delta^2}\right)$. Por tanto la proposición es cierta. □

Proposición 2.13. *Si* $f\left(z\right)$ *es meromorfa en un dominio* $\Omega \subset \mathbb{C}$, *entonces* f *es esféricamente continua en* Ω.

Demostración. Si f es holomorfa en $z_0 \in \Omega$, entonces f es continua en z_0, por ende dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que $|z - z_0| < \delta$ implica que $|f\left(z\right) - f\left(z_0\right)| < \varepsilon$ y como $\chi\left(f\left(z\right), f\left(z_0\right)\right) < |f\left(z\right) - f\left(z_0\right)|$, entonces tenemos que f es esféricamente continua en z_0.

Si z_0 es un polo de Ω, entonces $\frac{1}{f(z)}$ es analítica en el punto z_0. Luego como en caso anterior, tenemos que dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que $|z - z_0| <$

δ implica que $\left|\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{f(z)}\right|<\varepsilon$ y como $\chi\left(f\left(z\right),f\left(z_0\right)\right)=\chi\left(\frac{1}{f(z)},\frac{1}{f(z_0)}\right)<\left|\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{f(z_0)}\right|$. Entonces de esto último tenemos la continuidad esférica en el polo z_0. □

Proposición 2.14. *Si $f\left(z\right)$ es meromorfa en $z=\infty$, entonces f es esféricamente continua en infinito.*

Demostración. Notemos que $g\left(z\right)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ es meromorfa en $z=0$, pues f es meromorfa en $z=\infty$. Luego por la proposición anterior tenemos que g es esféricamente continua en $z=0$, por tal dado un $\varepsilon>0$, existe un $\frac{1}{\delta}>0$, tal que $\chi\left(g\left(w\right),g\left(0\right)\right)<\varepsilon$, siempre que $|w|<\frac{1}{\delta}$. Ahora haciendo $z=\frac{1}{w}$, se tiene que $\chi\left(f\left(z\right),f\left(\infty\right)\right)<\varepsilon$, siempre que $|z|>\delta$ ó $z=\infty$. Siendo así f esféricamente continua en infinito. □

Corolario 2.1. *Si $f\left(z\right)$ es meromorfa en un dominio $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$ que contiene a infinito. entonces f es esféricamente continua en Ω.*

Demostración. Sea $f\left(z\right)$ meromorfa en todo $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$, entonces por la proposición 2.13, tenemos que f es esféricamente continua en el abierto $\Omega-\{\infty\}$ y por la proposición anterior, tenemos que f es esféricamente continua en $\{\infty\}$, por tal de la definición de esféricamente continua tenemos que f es esféricamente continua en Ω. □

Proposición 2.15. *Si $f\left(z\right)$ es meromorfa en un abierto conexo $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$, entonces $f\left(\Omega\right)$ es abierto en $\overline{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Tomemos el conjunto P de polos de f en Ω, entonces f es analítica en $\Omega-\{P\}$, luego $f\left(\Omega-P\right)$ es abierta en $\mathbb{C}$ y por ende abierta en $\overline{\mathbb{C}}$. Ahora tomemos un punto $a\in P$, luego podemos tomar un abierto conexo $V\subset\Omega$ que contiene a a y que $0\notin f\left(V\right)$, por tal $\frac{1}{f}$ es analítica en todo V y por ende $\frac{1}{f}\left(V\right)\subset\mathbb{C}$ es abierta y conexa que contiene a 0, por tanto $f\left(V\right)$ es un abierto en $\overline{\mathbb{C}}$ de la misma manera se realiza si $z=\infty$, tomando la función analítica $g\left(z\right)=\frac{1}{f(1/z)}$ en un abierto conexo $W\subset\Omega$ de infinito, se obtendrá de la misma manera que $f\left(V'\right)$ es abierto en $\overline{\mathbb{C}}$. Por tanto se tiene que $f\left(\Omega\right)$ es abierta en $\overline{\mathbb{C}}$, dado que $f\left(\Omega\right)=f\left(\Omega-P\right)\cup f\left(V\right)Uf\left(W\right)$ unión de abiertos. □

2.3. Condición de Lipschitz.

Teorema 2.2. (Condición de Lipschitz) *Una función racional R satisface la condición de Lipschitz en la métrica cordal, es decir, existe un $M\in\mathbb{R}$ fijo tal que se cumple*

$$\chi\left(R\left(z\right),R\left(w\right)\right)\leq M\chi\left(z,w\right)$$

para todo z,w en el plano extendido.

Antes de continuar con la demostración veremos la siguiente proposición

Proposición 2.16. *Sea M, N espacios métricos, $a \in \overline{X} \subset M$. Dada $f : X \to N$, se tiene $\lim_{x\to a} f(x) = b \in N$, si y solo, si toda sucesión $\{x_n\} \subset X$ implica que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.*

Proposición 2.17. *Sean M, N espacios métricos, X un subconjunto de M y $f : X \to N$ una aplicación continua. Si, para cada punto $a \in \overline{X}$ existe el límite $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces la aplicación $F : \overline{X} \to N$, definida por $F(x) = f(x)$ cuando $x \in X$ y $F(y) = \lim_{x\to y} f(x)$, cuando $y \in \overline{X}\backslash X$.*

La prueba de estas dos proposiciones la encontramos en el libro de Elong Lages Lima espacos métricos, capítulo 5.

Ahora retomaremos la prueba del teorema de la condición de Lipschitz

Demostración. Primero definimos la función $Q(z, w)$ en el conjunto $U = \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \backslash \left\{(a, a) : a \in \overline{\mathbb{C}}\right\}$ como

$$\begin{array}{cccc} Q: & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (z,w) & \longmapsto & \frac{\chi(R(z),R(w))}{\chi(z,w)} \end{array},$$

note que esta aplicación es continua en todo U. También note que $\overline{U} = \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$

Luego por la proposición 2.8 y por el ejemplo 2.1, garantizamos la existencia del siguiente límite $\lim\limits_{(z,w)\to(a,a)} Q(z, w)$, donde $(a, a) \in \overline{U}\backslash U$. Luego es posible aplicar las 2 proposiciones anteriores, para afirmar que la función extendida de Q a $\mathfrak{Q}$ es continua.

$$\mathfrak{Q}(z,w) = \begin{cases} \frac{\chi(R(z),R(w))}{\chi(z,w)} & z \neq w \\ \lim\limits_{(z',w')\to(z,z)} \frac{\chi(R(z),R(w))}{\chi(z,w)} & z = w \end{cases}$$

Como $\mathfrak{Q}(z, w)$ es continua sobre el compacto $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ y la función toma valores en $\mathbb{R}$, entonces se cumple que $\mathfrak{Q}(z, w)$ es acotado. Luego existe una constante M, tal que $\mathfrak{Q}(z, w) \leq M$, por tanto si $z \neq w$,entonces tenemos que

$$\frac{\chi(R(z), R(w))}{\chi(z, w)} \leq M, \text{ para todo } z \neq w, \text{ con } z, w \in \overline{\mathbb{C}}$$

por consiguiente es de Lipschitz □

Corolario 2.2. *Sea R una función meromorfa en $\overline{\mathbb{C}}$ y dados dos puntos z_1 y z_2 en $\overline{\mathbb{C}}$. Entonces existe un camino $\sigma(t)$, con $t \in [0, 1]$, que une los puntos $\pi^{-1}(z_1)$ y $\pi^{-1}(z_2)$ en Σ, tal que el número $m = \max\limits_{z\in\pi(\sigma(t))} Q(z, z)$ cumple lo siguiente*

$$\chi(R(z_1); R(z_2)) \leq m\chi(z_1; z_2)$$

Teorema 2.3. *Una función racional R satisface la condición de Lipschitz en la métrica esférica.*

Demostración. del teorema anterior se tiene que $\chi(R(z), R(w)) \leq M\chi(z,w)$ junto con la ecuación 2.1.4 se tiene que

$$(2/\pi)\,\chi_0(R(z), R(w)) \leq \chi(R(z), R(w)) \leq M\chi(z,w) \leq M\chi_0(z,w)$$

de esto último tenemos que

$$\chi_0(R(z), R(w)) \leq \frac{M\pi}{2}\chi_0(z,w)$$

sobre toda la esfera Σ. □

Teorema 2.4. *La aplicación de Möbius*

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc = 1, \tag{2.3.1}$$

satisface la condición de Lipschitz.

$$\chi(g(z), g(w)) \leq \|g\|^2\chi(z,w)$$

Donde

$$\|g\|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2$$

es una métrica

Demostración. Usaremos el resultado del corolario 2.2 y solo tenemos que probar lo siguiente

$$\frac{|g'(z)|\left(1+|z|^2\right)}{\left(1+|g(z)|^2\right)} \leq \|g\|^2 \tag{2.3.2}$$

Denotemos vemos que $\Theta(g,z)$ a $\frac{|g'(z)|\left(1+|z|^2\right)}{\left(1+|g(z)|^2\right)}$. Luego se cumple que

$$\Theta\left(g^{-1}, g(z)\right) \times \Theta(g,z) = 1, \tag{2.3.3}$$

en efecto, como $\left(g^{-1}\right)'(z) = \frac{1}{g'(g^{-1}(z))}$ entonces

$$\begin{aligned}
\Theta\left(g^{-1}, g(z)\right) \times \Theta(g,z) &= \frac{\left|\left(g^{-1}\right)'(g(z))\right|\left(1+|g(z)|^2\right)}{\left(1+|g^{-1}(g(z))|^2\right)} \times \frac{|g'(z)|\left(1+|z|^2\right)}{\left(1+|g(z)|^2\right)} \\
&= \frac{\left|\frac{1}{g'(g^{-1}(g(z)))}\right|\left(1+|g(z)|^2\right)}{\left(1+|z|^2\right)} \times \frac{|g'(z)|\left(1+|z|^2\right)}{\left(1+|g(z)|^2\right)} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

lo que demuestra nuestra afirmación. Por otro lado, como

$$g'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2},$$

entonces $\Theta(g,z)$ queda de la siguiente manera

$$\Theta(g,z) = \frac{1+|z|^2}{|cz+d|^2+|az+b|^2}.$$

Además por la desigualdad de Cauchy Schwarz tenemos que

$$|az+b|^2 = |(a,b).(z,1)|^2 \leq |(a,b)|\,|(z,1)| = \left(|a|^2+|b|^2\right)\left(1+|z|^2\right),$$

hacemos lo mismo para $|cz+d|$.Entonces se tiene lo siguiente

$$|az+b|^2+|cz+d|^2 \leq \left(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2\right)\left(1+|z|^2\right),$$

es decir,

$$\Theta(g,z) \geq \|g\|^{-2}$$

luego de la ecuación 2.3.3, se tiene

$$\Theta\left(g^{-1},g(z)\right) \leq \|g\|^2. \tag{2.3.4}$$

note que la ecuación 2.3.4 cumple para cualquier g definida como en la ecuación 2.3.1, entonces también es válido para g^{-1}. Además como $\|g^{-1}\| = \|g\|$ entonces de la ecuación 2.3.4, se cumple que

$$\Theta\left(g,g^{-1}(z)\right) \leq \|g\|^2, \tag{2.3.5}$$

luego para todo w en $\overline{\mathbb{C}}$ existe un z, tal que $w = g^{-1}(z)$, donde junto con la ecuación 2.3.5, se tiene lo siguiente

$$\Theta(g,w) \leq \|g\|^2$$

lo que se quería probar desde un comienzo . □

Teorema 2.5. *Sea $\mathcal{G}$ la familia de transformaciones de Möbius donde para cada elemento g de $\mathcal{G}$ se cumple*

$$\chi(g(0),g(1)) \geq m,\ \chi(g(1),g(\infty)) \geq m\ \chi(g(\infty),g(0)) \geq m \tag{2.3.6}$$

siendo m un número positivo. Entonces $\mathcal{G}$ también satisface la condición de Lipschitz uniformemente.

Demostración. Como g satisface 2.3.6, entonces tenemos

$$\chi(g(0),g(1))\,\chi(g(1),g(\infty))\,\chi(g(\infty),g(0)) \geq m^3$$

luego escribiendo a $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, donde $ad-bc=1$ y evaluando χ en la desigualdad anterior, se tiene lo siguiente

$$\left(|a|^2+|c|^2\right)\left(|b|^2+|d|^2\right)\left(|a+b|^2+|c+d|^2\right) \leq 1/m^3$$

ahora como

$$1 = ad - bc = d(a+d) - b(c+d)$$

entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se cumple lo siguiente

$$1 \leq \left(|b|^2 + |d|^2\right)\left(|a+d|^2 + |c+d|^2\right)$$

donde se infiere que

$$|a|^2 + |c|^2 \leq 1/m^3$$

y con un argumento similar tenemos que

$$|b|^2 + |d|^2 \leq 1/m^3$$

notemos que si g cumple 2.3.6, entonces se cumple que $\|g\|^2 \leq 2/m^3$. Luego por el teorema anterior se ve obtiene que:

$$\begin{aligned} \chi(g(z), g(w)) &\leq \|g\|^2 \chi(z,w) \\ &\leq \frac{2}{m^3}\chi(z,w) \end{aligned}$$

notemos que esta desigualdad es para todo g en $\mathcal{G}$, garantizando la uniformidad de Lipschitz. □

2.4. La convergencia Normal.

El primer modo de convergencia en la teoría de familias normales es dado por la siguiente definición.

Definición 2.12. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos** de un dominio Ω a una función f si, para cualquier subconjunto compacto $K \subseteq \Omega$ y $\varepsilon > 0$, existe un número $n_0 = n_0(K, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que, si $n \geq n_0$ implica que

$$|f_n(z) - f(.z)| < \varepsilon,$$

para todo $z \in K$.

Esta definición nos sirve para funciones cuya imagen está dentro del plano complejo. Además vemos que la función límite de convergencia f es tal que $f(z) \neq \infty$, para todo $z \in \Omega$. Por otro lado para fines prácticos diremos que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ *converge normalmente en* Ω, cuando $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos en el dominio Ω a una función f.

Definición 2.13. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos** de un dominio Ω a la función ∞ si, para cualquier subconjunto compacto $K \subseteq \Omega$ y $\varepsilon > 0$, existe un número $n_0 = n_0(K, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que, si $n \geq n_0$ implica que

$$|f_n(z)| > \varepsilon,$$

para todo $z \in K$.

Decimos que una sucesión $\{f_n\}$ como en la definición, *converge normalmente a* ∞, si $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de un dominio Ω a la función $f \equiv \infty$.

Ahora veremos la definición para convergencia esféricamente uniforme sobre compactos, la cual tiene un parecido con la definición anterior.

Definición 2.14. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ **converge esféricamente uniformemente sobre los subconjuntos compactos** de un dominio Ω a una función $f(z)$ si, para cualquier subconjunto compacto $K \subseteq \Omega$ y $\varepsilon > 0$, existe un número $n_0 = n_0(K, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq n_0$ implica que

$$\chi(f_n(z), f(z)) < \varepsilon,$$

para todo $z \in K$.

Note que en esta definición, la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente respecto a la métrica cordal, la cual es equivalente a la métrica esférica. También para fines prácticos diremos que una sucesión de funciones $\{f_n\}$, como en la definición anterior, *converge esféricamente normalmente en* Ω cuando esta sucesión converge esféricamente uniformemente sobre los subconjuntos compactos en el dominio Ω. Esta definición nos permite trabajar con funciones meromorfas y la función límite f puede llegar a hacer la función constante ∞.

Escribiremos $f_n \to f$ para denotar que $\{f_n\}$ converge a f.

Ejemplo 2.2. Sea $f_n(z) = \frac{1}{n}z$ con $z \in \mathbb{C}$, entonces $\{f_n(z)\}$ converge normalmente en $\mathbb{C}$ a 0.

Ejemplo 2.3. Sea $f_n(z) = nz$ con $z \in \mathbb{C}$, entonces $\{f_n(z)\}$ converge esféricamente normalmente en $\mathbb{C}$ a ∞.

Ejemplo 2.4. Sea $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, donde Ω es un dominio. Si $\{f_n\}$ converge normalmente a f, entonces la función $\hat{f}_n(z) = af_n(z) + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$ converge normalmente en Ω a $af(z) + b$.

Ejemplo 2.5. Sea $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, donde Ω es un dominio. Si $\{f_n\}$ converge normalmente a ∞, entonces la función $\hat{f}_n(z) = af_n(z) + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$ converge normalmente a ∞.

Ejemplo 2.6. Sea $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, donde Ω es un dominio. Si $\{f_n\}$ converge normalmente en Ω a la función f y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|f_n(z)| < 1$, entonces $|f(z)| \leq 1$, para todo $z \in \Omega$.

2.5. Algunos teoremas Clásicos

Veamos algunos resultados clásicos, en la teoría de funciones analíticas y meromorfas.

Teorema 2.6. (el teorema de Weierstrass) *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas sobre una región Ω, el cual converge normalmente en Ω a una función f. Entonces*

1. f es analítica en Ω.
2. Toda sucesión de derivadas $\left\{f_n^{(k)}\right\}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos a $f^{(k)}$, $k = 1, 2, 3.....$

Demostración. Parte (1) Primero probaremos que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, para toda curva cerrada γ de clase C^1 en Ω, para luego aplicar el teorema de Morera y concluir así que f es analítica. Se cumple por el teorema 1.19, que $\int_\gamma f_n(z)\,dz = 0$, para cualquier curva cerrada γ de clase C^1 en Ω, pues f_n es analítica en Ω. De la hipótesis, podemos tomar el compacto $\mathrm{Img}(\gamma)$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{L(\gamma)}$, siempre que $n > n_0$, para todo $z \in \mathrm{Img}(\gamma)$. Luego acotaremos $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|$ teniendo así

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| &= \left|\int_\gamma f(z)\,dz - \int_\gamma f_n(z)\,dz\right| \\
&= \left|\int_\gamma (f(z) - f_n(z))\,dz\right| \\
&\leq \int_\gamma |f(z) - f_n(z)|\,|dz| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Esto significa que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, para toda curva cerrada γ de clase C^1 en Ω, por tanto f es holomorfa en Ω.

Parte (2) Para un punto $z_0 \in \Omega$ arbitrario, escojamos un disco $D(z_0, r) \subseteq \Omega$, y escribamos $C_r = \{z : |z - z_0| = r\}$ para algún r tal que $C_r \subset \Omega$. Por la hipótesis tenemos que dado un $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq n_0$ implica que

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon, \tag{2.5.1}$$

para todo $\zeta \in C_r$. Por otro lado por Cauchy, podemos escribir sus derivadas $f_n^{(k)}(z)$ y $f^{(k)}$ en $D\left(z_0, \frac{r}{2}\right)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
f_n^{(k)}(z) &= \frac{k!}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta, \\
f^{k}(z) &= \frac{k!}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta,
\end{aligned}$$

para todo $z \in D\left(z_0, \frac{r}{2}\right)$, pues f y f_n, $n = 1, 2, ...$ son funciones analíticas. Luego para todo $n \geq n_0$, tenemos

$$\left|F_k(z) - f_n^{(k)}(z)\right| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\right| \left|\int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta\right| \tag{2.5.2}$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(\zeta) - f_n(\zeta)|}{|(\zeta - z)|^{k+1}} |d\zeta| \tag{2.5.3}$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \int_{C_r} \frac{\varepsilon}{|(r/2)|^{k+1}} |d\zeta| \tag{2.5.4}$$

$$= \frac{k!\varepsilon}{2\pi \left(\frac{r}{2}\right)^{k+1}} \int_{C_r} |d\zeta| \tag{2.5.5}$$

$$= \frac{k!\varepsilon 2\pi r}{2\pi \left(\frac{r}{2}\right)^{k+1}} \tag{2.5.6}$$

$$= \frac{k!\varepsilon 2^{k+1}}{r^k} \tag{2.5.7}$$

la primera desigualdad es por la desigualdad de integrales en valor absoluto, la segunda desigualdad es por la desigualdad 2.5.1 y por la relación $\frac{r}{2} < |\zeta - z|$ y como $\int_{C_r} |d\zeta| = 2\pi r$, entonces se llega a la última ecuación. Esto nos dice que $f_n^{(k)}(z)$ converge uniformemente a $f^{(k)}(z)$ sobre $D\left(z_0, \frac{r}{2}\right)$ para cada $k = 0, 1, 2, ..$ entonces tenemos que $f_n^{(k)}(z) \to f^{(k)}(z)$ uniformemente en los subconjuntos compactos Ω, ya que K puede ser cubierta por una colección de discos abiertos de la forma anterior. □

Corolario 2.3. *Sea* $f{:}\Omega \to \mathbb{C}$ *una función acotada y* $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$, *con* $n = 1, 2, ...$ *funciones meromorfas. Entonces si* $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $E \subset \Omega$ *a* f, *se cumple lo siguiente*

(1) Para un n *suficientemente grande,* f_n *es uniformemente acotada sobre* E.

(2) Para un n *suficientemente grande* f_n *es analítica sobre* E.

(3) f *es analítica sobre* E.

Demostración. (1) Como f es acotada sobre E, entonces existe una constante $M \in \mathbb{R}$, tal que $|f(z)| < M$, para todo $z \in E$. Ahora de la hipótesis, tenemos que dado un $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $n > n_0$, implica que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, de esto último, tenemos que $|f_n(z)| < \varepsilon + |f(z)| < \varepsilon + M$, para todo $z \in E$ y $n > n_0$. Siendo así $f_n(z)$ acotada uniformemente a partir de un n_0 suficientemente grande. (2) Luego como la sucesión $\{f_n\}_{n > n_0}$ es meromorfa y uniformemente acotada sobre E , se deduce que estas funciones son analíticas, pues no hay polos. (3) Luego por el teorema de el teorema de Weierstrass, tenemos que la función f es analítica, pues la sucesión de funciones analíticas $\{f_n\}_{n>n_0}$, converge normalmente a f sobre Ω. □

Ejemplo 2.7. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas sobre $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente en Ω a una función analítica f , entonces la sucesión $f_n^{\#} \to f^{\#}$ uniformemente sobre Ω y si Ω es compacto, tenemos que $\{f_n^{\#}\}$ es uniformemente acotada sobre dicho compacto..

Ejemplo 2.8. Sea una sucesión $\{f_{n_i}\}$ de funciones analíticas que converge uniformemente en el compacto Ω a una función f y una subsucesión $\{z_i\} \subset \Omega$, tal que $z_i \to a \in \Omega$. Entonces

$$\lim_{i\to\infty} f_{n_i}(z_i) = f(a).$$

En efecto, por el teorema de Weierstrass f *es analítica en* Ω*, entonces para el valor* $a \in \Omega$ *y cualquier* $\varepsilon > 0$*, existe un* $\delta > 0$*, tal quez* $\in \Omega$*,* $|z - a| < \delta$ *implica que* $|f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ *y por la hipótesis, tenemos que existe un* $i_1 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $i > i_i$ *implica que* $|f_{n_i}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$*, para todo* $z \in \Omega$*. Como* $z_i \to a$ *, escogemos un* δ *y encontramos un* $i_0 \in \mathbb{N}$*, con* $i_0 > i_1$*, tal que* $i > i_0$ *implica que* $|z_n - a| < \delta$*. Entonces podemos acotar lo siguiente* $|f_{n_i}(z_i) - f(a)|$ *con* $i > i_o$*.*

$$\begin{aligned} |f_{n_i}(z_i) - f(a)| &\leq |f_{n_i}(z_i) - f(z_i)| + |f(z_i) - f(a)|, \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

esto termina nuestra prueba.

Teorema 2.7. Teorema de Rouche $f, g : \mathrm{U} :\to \mathbb{C}$ *holomorfa en el dominio* U *y* $\overline{D}$ *un disco cerrado en* U*. Si* $|g(z) - f(z)| < |f(z) - b|$ *para todo* $z \in \partial\Omega$*, entonces el número de soluciones de* $f|_D = b$ *es igual al número de soluciones de* $g|_D = b$*.*

Para la prueba ver Alcides lins neto, funcçoes de uma variável complexa , pág:233 o Serge lang, complex Analysis pág: 182.

Teorema 2.8. Teorema de Hurwitz *Sea* $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$*, funciones analíticas en el dominio* Ω*, donde* $\{f_n\}$*converge normalmente a la función no constante* f*. Si* $f(z_0) = 0$ *para algún* $z_0 \in \Omega$*, entonces para cada* $r > 0$ *suficientemente pequeño, existe un* $N = N(r)$*, tal que para todo* $n > N$*, la función* $f_n(z)$ *tiene el mismo número de ceros en* $D(z_0, r)$ *como lo tiene* $f(z)$*.(los ceros contados con multiplicidad).*

Demostración. Tomemos un disco $D(z_0, r)$ tan pequeño en donde $f(z)$ no posea ningún cero en $K(z_0, r)$, salvo en z_0. Entonces $|f(z)| > m$, para algún $m > 0$, sobre $|z - z_0| = r$ esto es posible por el dominio compacto y la continuidad de f donde además $f(z) \neq 0$ en $|z - z_0| = r$ por lo asumido. Luego como $f_n \to f$ uniformemente sobre $|z - z_0| = r$, entonces para un n suficientemente grande, tenemos que

$$|f_n(z) - f(z)| < m < |f(z)| = |f(z) - 0|, \quad |z - z_0| = r, \tag{2.5.8}$$

ahora aplicando el teorema de Rouche a esto última relación, tenemos que el número de ceros contados con multiplicidad de $f|_{D(z_0;r)}(z) = b$ es el mismo número de los ceros contados con multiplicidad de $f_n|_{D(z_0;r)}(z) = b$. □

Corolario 2.4. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas e inyectivas sobre $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente en Ω a una función analítica f no constante, entonces f es inyectiva en Ω.*

Demostración. Supongamos que $f(z_1) = f(z_2)$ para algún $z_2 \in \Omega$, donde $z_1 \neq z_2$. Consideremos las siguientes funciones

$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1) \quad , \; n = 1, 2, 3, \dots \, .$$

Entonces la función límite $g(z) = f(z) - f(z_1)$ se hace cero en $z = z_2$ por lo supuesto, luego por el teorema anterior tenemos que $g_n(z)$ tiene un cero en alguna vecindad de z_2 lo suficientemente pequeña para un n suficientemente grande. Entonces si $g_n(z) = 0$, tenemos que $0 = f_n(z) - f_n(z_1)$ esto hace que $f_n(z) = f_n(z_1)$ y por la inyectividad de f_n tenemos que $z = z_1$, esto hace que g_n tenga un cero en $z = z_1$, mas no en $z = z_2$ lo que sería una contradicción. □

Lema 2.2. (Lema de Schwarz) Sea $f(z)$ una función analítica en U con $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$.

1. *Se cumple que $|f(z)| \leq |z|$, para todo $z \in U$, con $|f'(0)| \leq 1$.*

2. *Si $|f(z)| = |z|$ para algún $z_0 \in U$, entonces $f(z) \equiv cz$, donde c es una constante de modulo 1.*

Para la prueba ver W. Rudin análisis real y complejo pág: 237.

Definición 2.15. Dados dos discos superpuestos Δ_1 y Δ_2 suponga que existe dos funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$ el cual son meromorfas en Δ_1, Δ_2, respectivamente, y que $f_1(z) = f_2(z)$ para todo $z \in \Delta_1 \bigcap \Delta_2$. El par $(f_i(z), \Delta_i)$ será llamada *elementos de función* y $f_2(z)$ es dicho una continuación analítica directa de $f_1(z)$ en Δ_2 y viceversa de tal modo definimos una función analítica en $\Delta_1 \bigcup \Delta_2$.

Extendemos la idea, supongan se que AB es un segmento de linea cerrada contenida en la unión de una una cadena finita de discos Δ_i, $i = 1, .., n$. Por otro lado asumiremos que hay funciones meromorfas $f_i(z)$ definidas sobre cada Δ_i, de modo que $f_{i+1}(z)$ es una continuación directa de de $f_i(z)$ a Δ_{i+1}. Entonces cualquier par de elementos de funciones en la cadena son continuación meromorfa de cada otro, engendrando un función meromorfa $f(z)$ siendo definida sobre $\bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$.

Teorema. (Teorema de Monodromía) *Sea Ω un dominio simplemente conexo y fijemos un punto $z_0 \in \Omega$. Supongamos que $f_0(z)$ es una función holomorfa definida en una vecindad de z_0, y que $f_0(z)$ puede ser continuado a lo largo de cualquier polígono emitido desde z_0 y situado este camino enteramente en Ω. Entonces la suma de todas las continuaciones analíticas define una función analítica bien definida en todo el conjunto Ω.*

Para la prueba ver W. Rudin análisis real y complejo pág:308

2.6. Familia de funciones acotadas

Hay una generalización del concepto de una función acotada a la de una familia de funciones acotadas el cual juega un papel importante en los temas de familia normales que se tratara el siguiente capítulo.

Definición 2.16. Una familia de funciones $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada sobre un dominio Ω, si existe un M, tal que para todo $z \in \Omega$ y todo $f \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$|f(z)| < M.$$

Definición 2.17. Una familia de funciones $\mathcal{F}$ es localmente acotada sobre un dominio Ω, si para cada $z_0 \in \Omega$, existe un disco abierto $D(z_0; r) \subseteq \Omega$, tal que la familia $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada sobre dicho disco.

Proposición 2.18. *Si $\mathcal{F}$ es localmente acotada sobre Ω entonces*

(a) $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en alguna vecindad de cualquier punto z de Ω

(b) $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en cualquier subconjunto compacto K de Ω.

Demostración. Parte (a). La primera parte es obvia, es por definición.

Parte (b). Por lo parte (a), tenemos que para cada $z \in \Omega$, existe un disco abierto $D(z, r_z) \subset \Omega$, tal que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada sobre dicho disco. Luego tomemos la colección $\mathcal{C}$ conformada por los discos abiertos $D(z, r_z)$ de centro $z \in K$ en el cual $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada. Por tal, $\mathcal{C}$ es un cubrimiento abierto de K, entonces se puede extraer un subcubrimiento finito $\mathcal{C}'$ de K. Luego para cada disco abierto D en $\mathcal{C}'$, existe una cota M , tal que $|f(z)| < M$, para toda $f \in \mathcal{F}$ y todo $z \in D$. Como la colección $\mathcal{C}'$ es finita, podemos tomar el máximo de las cotas, denotada por M_{max}. Entonces para cada $z \in K$, existe un disco en $\mathcal{C}'$ que contiene a z, tal que para todo $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $|f(z)| < M_{max}$. Por tanto $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada sobre K. □

Ejemplo 2.9. La familia

$$\mathcal{F} = \left\{ f_\alpha(z) = \frac{1}{z - e^{i\alpha}} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

es localmente acotada en $\{z : |z| < 1\}$, pero no uniformemente acotado en U.

Teorema 2.9. *Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones analíticas localmente acotadas sobre un dominio Ω, entonces la familia de derivadas $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es una familia localmente acotada en Ω.*

Demostración. Por ser $\mathcal{F}$ localmente acotada en Ω, se cumple que, para cualquier $z_0 \in \Omega$, existe un disco cerrado $\overline{D}(z_0; r) \subset \Omega$ y una constante $M = M(z_0)$, tal que $|f(z)| \leq M$, para todo $f \in \mathcal{F}$ y para todo $z \in \overline{D}(z_0; r)$. Luego aplicaremos la fórmula de Cauchy en cada $f' \in \mathcal{F}$, pues cada f es analítica, entonces para $z \in D\left(z_0; \frac{r}{2}\right)$ y $\zeta \in C_r = \{z : |z - z_0| = r\}$ tenemos que $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$, para luego así acotar a $|f'(z)|$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} |d\zeta|, \text{ por desigualdad integral} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_r} \frac{M}{(r/2)^2} |d\zeta|, \text{ pues } |f(z)| \leq M \text{y } \frac{r}{2} \leq |\zeta - z| \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{M}{(r/2)^2} \int\limits_{C_r} |d\zeta| \\ &= \frac{4M}{r}. \end{aligned}$$

Esto nos dice que para cualquier $z_0 \in \Omega$, existe un disco $D\left(z, \frac{r}{2}\right)$ y un $M(z_0)$, tal que $|f'(z)| < 4M/r$, para todo $z \in D\left(z, \frac{r}{2}\right)$ y para todo $f' \in \mathcal{F}'$. Siendo así $\mathcal{F}'$ localmente acotada en Ω. □

2.7. Equicontinuidad

Otra noción principal en el desarrollo de familias normales y relacionada con las acotaciones locales son las funciones equicontinuas.

Definición 2.18. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones definidas sobre un dominio Ω se llamará equicontinua en el punto $z' \in \Omega$ si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon, z') > 0$, tal que

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon,$$

siempre que $|z - z'| < \delta$, para todo $f \in \mathcal{F}$.

Definición 2.19. $\mathcal{F}$ es equicontinua sobre un subconjunto Ω, si es equicontinua en cada punto de Ω.

Definición 2.20. Una familia $\mathcal{F}$ se dice que es equicontinua esféricamente uniforme en E, si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon, E) > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon,$$

siempre que $z, z' \in E$ con $|z - z'| < \delta$, para todo $f \in \mathcal{F}$.

Una definición análoga a la definición 2.18 es la equicontinuidad esférica dada de la siguiente forma:

Definición 2.21. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones definidas sobre un dominio Ω se llamará esféricamente equicontinua en el punto $z' \in \Omega$ si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon, z') > 0$, tal que

$$\chi(f(z), f(z')) < \varepsilon,$$

siempre que $|z - z'| < \delta$, para todo $f \in \mathcal{F}$.

Definición 2.22. De la misma forma, $\mathcal{F}$ es esféricamente equicontinua sobre un subconjunto $E \subseteq \Omega$, si es esféricamente equicontinua en cada punto de E.

Definición 2.23. Una familia $\mathcal{F}$ se dice que es equicontinua esféricamente uniforme en E, si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon, E) > 0$, tal que

$$\chi(f(z), f(z')) < \varepsilon,$$

siempre que $z, z' \in E$ con $|z - z'| < \delta$, para todo $f \in \mathcal{F}$.

Proposición 2.19. *Sea una familia $\mathcal{F}$ esféricamente equicontinua sobre E. Entonces si E es compacto, se tiene que $\mathcal{F}$ es esféricamente equicontinua uniforme sobre E.*

Demostración. Para un $\varepsilon > 0$, y un punto $z \in E$ es posible encontrar un δ_z tal que si $|z - y| < \delta_z$ implica que $\chi(f(z), f(y)) < \varepsilon/2$, para todo $f \in \mathcal{F}$. Entonces para todo par $w, y \in B_d(z, \delta_z)$ implica que $\chi(f(w), f(y)) < \varepsilon$, para todo $f \in \mathcal{F}$. Sea δ el número de Lebesgue de la cubertura $K = \bigcup_{z \in K} B_d(z, \delta_z)$. Ahora si $y, w \in K$ son tales que $|w - y| < \delta$, entonces existe un z con $y, w \in B_d(z, \delta_z)$, por tanto $|z - y| < \delta$ implica que $\chi(f(y), f(z)) < \varepsilon$, para todo $f \in \mathcal{F}$. $\square$

Observación 2.2. El mismo resultado se obtiene si la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua y E un compacto, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua sobre E.

Proposición 2.20. *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones esféricamente continuas la cual converge esféricamente uniformemente a una función f sobre un subconjunto compacto $E \subseteq \mathbb{C}$, entonces se cumple las siguientes afirmaciones:*

1. La función límite f es esféricamente continuamente uniforme
2. la familia $\{f_n : m \in \mathbb{N}\}$ es esféricamente equicontinua sobre E.

Demostración. (1) Como $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente a f sobre el compacto E, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un n_0, tal que si $n \geq n_0$ implica que

$$\chi(f_n(z), f(z)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall z \in E \tag{2.7.1}$$

Por la continuidad esférica de f_n sobre E y siendo este compacto tenemos f_n es esféricamente continuamente uniforme sobre E en particular para f_{n_0}. Teniendo así la existencia de un $\delta = \delta(\varepsilon, E) > 0$, tal que

$$\chi(f_{n_0}(z), f_{n_0}(z')) < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.7.2}$$

siempre que $z, z' \in E$, $|z - z'| < \delta$. Entonces acotando $\chi(f(z), f(z'))$ tenemos que

$$\begin{aligned}\chi(f(z), f(z')) &\leq \chi(f(z), f_{n_0}(z)) + \chi(f_{n_0}(z), f_{n_0}(z')) + \chi(f_{n_0}(z), f(z')) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

esto es siempre que $z, z' \in E$, $|z - z'| < \delta$ y para n_0. Por tanto decimos que f es esféricamente continuamente uniforme sobre E.

(2) Por último de la parte (1) podemos inferir que f es esféricamente continua sobre E, entonces para cualquier $z' \in E$ y dado un $\varepsilon > 0$ cualquiera, existirá un $\delta_1^* > 0$, tal que si $|z - z'| < \delta$ tenemos que

$$\chi(f(z), f(z')) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.7.3}$$

Entonces para $n \geq n_0$ y $|z - z'| < \delta_1^*$ tenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}\chi(f_n(z), f_n(z')) &\leq \chi(f_n(z), f(z)) + \chi(f(z), f(z')) + \chi(f(z'), f_n(z')) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

Pues, esto es garantía de la ecuación (2.7.1) y (2.7.3). Esto significa que $\{f_n : n \geq n_0\}$, es esféricamente continua. Ahora solo falta analizar para las funciones f_n con $n < n_0$, gracias a que f_n son esféricamente continuas sobre E y en número finito, podemos dar un$\varepsilon > 0$ cualquiera y escoger el menor delta δ_2^*, tal que si $z, z' \in E$, $|z - z'| < \delta_2^*$ implique que $\chi(f_n(z), f_n(z')) \leq \varepsilon$. Por último tomamos $\delta = min\{\delta_1^*, \delta_2^*\}$ teniendo así que $\chi(f_n(z), f_n(z')) < \varepsilon$, siempre que $|z - z'| < \delta$ sea cual fuese $n \in \mathbb{N}$. Por tanto la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es esféricamente equicontinua sobre E. □

Teorema 2.10. *Una familia $\mathcal{F}$ localmente acotada de funciones analíticas sobre un dominio Ω es equicontinua sobre los subconjuntos compactos de Ω.*

Demostración. Que $\mathcal{F}$ sea localmente acotada implica que $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ también lo sea por el teorema 2.9 por ende $\mathcal{F}'$ es uniformemente acotado sobre los subconjuntos compactos de Ω esto es por la proposición 2.18 parte (b). Luego esto nos garantiza, que al tomar un disco cualquiera cerrado $\overline{D} \subseteq \Omega$ podremos encontrar un M, tal que $|f'(z)| \leq M$ para todo $z \in \overline{D}$, $f' \in \mathcal{F}'$. Después para cualquier par de puntos $z, z' \in \overline{D}$, usaremos el teorema fundamental en el camino recto de extremos z y z' y también usaremos la desigualdad integral, teniendo lo siguiente

$$|f(z) - f(z')| \leq \int_{z'}^{z} |f'(\zeta)| \, |d\zeta| \leq M |z - z'|. \tag{2.7.4}$$

De aquí, dado un $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta = \delta\left(\varepsilon, \overline{D}\right) < \frac{\varepsilon}{M}$ con $\delta > 0$, donde la ecuación 2.7.4 queda reducida de tal manera que

$$|f(z) - f(z')| \leq \varepsilon$$

siempre que $z, z' \in \overline{D}, |z - z'| < \delta$. Por tanto $\mathcal{F}$ es equicontinua sobre $\overline{D}$ y por tal sobre cada punto de z en Ω. Luego por la proposición 2.18 parte (b) se tiene que la familia $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada sobre cada compacto K, terminando así la prueba. $\square$

Capítulo 3

Familias normales.

3.1. Normalidad

El trabajo de Montel sobre familias normales fue iniciado con su paper en 1907 sobre sucesiones de funciones, aunque el término *normal* no apareció hasta en 1912.

Definición 3.1. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones analíticas sobre un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es **normal** en Ω, si toda sucesión de funciones $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ contiene, o una subsucesión la cual converge normalmente a f, o a ∞.

En el análisis del primer caso, tenemos que la función límite f es una función analítica, esto es por el teorema de Weierstrass. En el caso posterior tenemos que para cada compacto $K \subseteq \Omega$ y un $M > 0$ existe $n_0 = n_0(M, K)$ en el que se tiene $|f_n(z)| > M$ para todo $z \in K$ y $n \geq n_0$, esto sugiere que n_0 debe de ser suficientemente grande.

Sea una familia normal $\mathcal{F} = \{f_\lambda : \Omega \to \mathbb{C}, \lambda \in L\}$ diremos que $\mathcal{F}$ es normal en $U \subset \Omega$, si la familia $\mathcal{F}|_U = \{f_\lambda|_U : U \to \mathbb{C}, \lambda \in L\}$ es normal en U.

Ejemplo 3.1. Sea $\mathcal{F}$ una familia normal en Ω, entonces la familia

$$\hat{\mathcal{F}} = \left\{\hat{f} / \hat{f}(z) = af(z) + b,\ f \in \mathcal{F} \text{ con } a, b \in \mathbb{C} \text{y } a \neq 0\right\}$$

es normal en Ω. En efecto, sea una sucesión $\left\{\hat{f}_n\right\}$ de $\hat{\mathcal{F}}$, luego hacemos $f_n(z) = \frac{1}{a}\hat{f}_n(z) - \frac{b}{a}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, donde se ve observa que $f_n(z)$ es un elemento de $\mathcal{F}$ esto construye la sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es normal, tenemos que $\{f_n\}$ posee una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge normalmente a f o a ∞. Luego por los ejemplos 2.4 y 2.5 tenemos que $\left\{\hat{f}_n\right\}$ converge normalmente a $af + b$ o a ∞. Por tanto la familia $\hat{\mathcal{F}}$ es normal.

Ejemplo 3.2. Sea Ω, Ω' abiertos de $\mathbb{C}$ y $g : \Omega' \to \Omega$ una función biholomorfa. Entonces la familia $\mathcal{F}$ es normal sobre Ω, si y solo, si la familia $\mathcal{F}' = \{f \circ g / f \in \mathcal{F}\}$ es normal en Ω'.

Definición 3.2. La familia $\mathcal{F}$ se dice normal en un punto $z_0 \in \Omega$ si $\mathcal{F}$ es normal en alguna vecindad abierta de z_0.

Veremos un teorema muy importante

Teorema 3.1. *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones analíticas es normal en un dominio Ω, si y solo, si $\mathcal{F}$ es normal en cada punto de Ω.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es normal en Ω, luego es sabido que Ω es una vecindad abierta de cada punto $z \in \Omega$ y como $\mathcal{F}$ es normal en Ω. Entonces tenemos que $\mathcal{F}$ es normal en cada punto $z \in \Omega$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ es normal en cada punto $z \in \Omega$. Por otro lado, sabemos que el que el conjunto $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ es numerable y denso en $\mathbb{C}$, luego como Ω es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ es posible encontrar un subconjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ numerable y denso en $\nleq$, donde $z_n = x_n + iy_n$, con $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$. Denotemos por $D(z_n, r_n)$ el mayor disco de centro z_n en el cual $\mathcal{F}$ es normal.

Ahora afirmaremos que dada una subsucesión cualquiera $\{z_{n_k}\}$ de $\{z_n\}$ que converge a $\xi \in \Omega$, existe un k_0, tal que $k > k_0$ implica $\xi \in D\left(z_{n_k}, \frac{r_{n_k}}{2}\right)$. En efecto como $\xi \in \Omega$ es posible encontrar un disco $D(\xi, r_\xi)$ de centro en ξ y de radio r_ξ, en el cual la familia $\mathcal{F}$ es normal. Luego, dado que $z_{n_k} \to \xi$, podemos elegir un ε cualquiera con $0 < \varepsilon < \frac{r_\xi}{4}$, para luego encontrar un $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|z_{n_k} - \xi| < \varepsilon$, cuando $k > k_0$. Esto último nos dice también que $\xi \in D(z_{n_k}, \varepsilon)$ siempre que $k > k_0$. Tomemos $y \in D(z_{n_k}, 2\varepsilon)$ con $k > k_0$ y acotemos $|y - \xi|$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |y-\xi| &\leq |y - z_{n_k}| + |z_{n_k} - \xi| \text{ con } k > k_0 \\ &\leq 2\varepsilon + \varepsilon \\ &\leq r_\xi \end{aligned}$$

tenemos que $y \in D(\xi, r_\xi)$, esto significa que $D(z_{n_k}, 2\varepsilon) \subset D(\xi, r_\xi)$ siempre que $k > k_0$. Como $\mathcal{F}$ normal en $D(\xi, r_\xi)$ y $D(z_{n_k}, 2\varepsilon) \subset D(\xi, r_\xi)$ siempre que $k > k_0$, entonces por la restricción tenemos que $\mathcal{F}$ es normal en cada $D(z_{n_k}, 2\varepsilon)$ donde $k > k_0$. Luego como $D(z_{n_k}, r_{n_k})$ es el mayor disco en que la familia $\mathcal{F}$ es normal para cada z_{n_k}, se deduce de inmediato que $D(z_{n_k}, 2\varepsilon) \subset D(z_{n_k}, r_{n_k})$ siempre que $k > k_0$ deduciendo que $D(z_{n_k}, \varepsilon) \subset D\left(z_{n_k} \frac{r_{n_k}}{2}\right)$ solo cuando $k > k_0$, ya que $2\varepsilon < r_{n_k}$,si $k > k_0$. Además es sabido que $\xi \in D(z_{n_k}, \varepsilon)$, siempre que $k > k_0$ y por la última inclusión tenemos que $\xi \in D\left(z_{n_k} \frac{r_{n_k}}{2}\right)$ si, $k > k_0$ lo cual termina de probar nuestra afirmación.

Sabemos que para cada $z \in \Omega$ existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ de $\{z_n\}$, tal que $z_{n_k} \to z$ esto es por ser $\{z_n\}$ denso en Ω, por tanto existe un n_0, tal que si $n > n_0$ se tiene que $z \in D\left(z_{n_k}, \frac{r_{n_k}}{2}\right) \subset \Omega$ de esto tenemos que

$$\Omega \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D\left(z_n, \frac{r_n}{2}\right) \tag{3.1.1}$$

Ahora tomemos una sucesión cualquiera $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ y denotemos $N_0 = \mathbb{N}$. Luego como $\mathcal{F}$ es normal en $D(z_1, r_1)$ podemos extraer una subsucesión $\{f_n\}_{n\in N_1}$, con $N_1 \subset N_0$ y $\min\{N_0\} \notin N_1$, la cual converge uniformemente en $D\left(z_1, \frac{r_1}{2}\right)$ a una función f analítica o a ∞. Nuevamente podemos extraer una subsucesión $\{f_n\}_{n\in N_2}$ de $\{f_n\}_{n\in N_1}$, con $\min\{N_1\} \notin N_2$ y $N_1 \subset N_2$, la cual converge uniformemente en $D\left(z_2, \frac{r_2}{2}\right)$ a una función f analítica o a ∞ y así sucesivamente. Tomemos $N_d = \{n \in \mathbb{N}/n = minN_i,\ n = 1, 2, 3, ...\}$ y formemos la sucesión diagonal $\{f_n\}_{n\in N_d}$, por la construcción de esta sucesión, tenemos que $\{f_n\}_{n\in N_d}$ converge uniformemente en $D\left(z_n, \frac{r_n}{2}\right)$ a una función analítica f o a ∞, para todo $n = 1, 2, 3, ...$. Es claro notar una disyunción, la cual divide el conjunto Ω en dos subconjuntos, denotados por Ω_0 y Ω_∞, y escrito como

$$\Omega_0 = \left\{z \in \Omega / \lim_{n\in N_d} f_n(z) < \infty\right\}$$

y

$$\Omega_\infty = \left\{z \in \Omega / \lim_{n\in N_d} f_n(z) = \infty\right\}$$

Afirmamos que Ω_0 es abierto, en efecto, pues tomamos un $z_0 \in \Omega$ y por la ecuación 3.1.1 existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $z_0 \in D\left(z_{n_0}, \frac{r_{n_0}}{2}\right)$, el cual denotaremos por D_0. Luego es sabido que la sucesión diagonal $\{f_n\}_{n\in N_d}$ converge uniformemente sobre $D\left(z_{n_0}, \frac{r_{n_0}}{2}\right)$ a una función f analítica o a $f \equiv \infty$, pero este último no puede ser porque $f(z_0) = \lim_{n\in N_d} f_n(z_0) < \infty$ por tanto f es solamente analítica en dicho disco y por tal $\lim_{n\in N_d} f_n(z) = f(z) < \infty$ para todo $z \in D_0$. Esto nos dice que el punto arbitrario z_0 es un punto interior , pues $z_0 \in D_0 \subset \Omega$, lo que prueba que Ω_0 es un abierto. Del mismo se puede probar que Ω_∞ es abierto. Note que $\Omega_0 \cap \Omega_\infty \neq \emptyset$ y $\Omega_0 \cup \Omega_\infty = \Omega$ además como Ω es conexo, tenemos que $\Omega_0 = \Omega$ ó $\Omega_\infty = \Omega$, esto significa que la sucesión diagonal $\{f_n\}_{n\in N_d}$ converge uniformemente en cada $D\left(z_n, \frac{r_n}{2}\right)$ a una función analítica f para todo $n \in \mathbb{N}$ o dicha sucesión converge uniformemente a la función infinito en todos los discos $D\left(z_n, \frac{r_n}{2}\right)$, con $n \in \mathbb{N}$.

Ahora tomemos un compacto cualquiera $K \subset \Omega$. Luego de la ecuación 3.1.1 y por ser K compacto, podemos extraer un conjunto finito $J \subset \mathbb{N}$, tal que $K \subset \bigcup_{j\in J} D\left(z_j, \frac{r_n}{2}\right)$. Por otra parte la sucesión diagonal $\{f_n\}_{n\in N_d}$ converge uniformemente en cada $D\left(z_j, \frac{r_n}{2}\right)$, con $j \subset J$ a una función analítica f para todo $j \subset J$ o dicha sucesión converge uniformemente en cada disco a infinito para cada $j \in J$. Luego la sucesión diagonal converge uniformemente sobre $\bigcup_{j\in J} D\left(z_j, \frac{r_n}{2}\right)$, con $j \subset J$, a una función f analítica o $f \equiv \infty$. Por tanto $\{f_n\}_{n\in N_d}$ converge uniformemente sobre $K \subset \Omega$ a una función analítica f o a infinito, ya que $K \subset \bigcup_{j\in J} D\left(z_j, \frac{r_n}{2}\right)$. Por tanto se ha probado que para todo $\{f_n\}$ de $\mathcal{F}$ existe una subsucesión de $\{f_n\}$, tal que converge normalmente en Ω. $\square$

Definición 3.3. Nosotros ahora diremos que la familia de funciones analíticas $\mathcal{F}$ es normal en el infinito, si la correspondiente familia $\mathcal{G} = \left\{g : g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$ fuera normal en $z = 0$.

Por tanto $\mathcal{F}$ es normal en ∞ significa que es normal en alguna vecindad de ∞, una vecindad de ∞ es de la siguiente forma $\Delta(\infty, R) = \{z : |z| > R\} \bigcup \{\infty\}$, $R > 0$. Esto nos lleva a definir $\mathcal{F}$ a ser normal en un dominio Ω sumergido en $\overline{\mathbb{C}}$ y que contiene al punto infinito, si $\mathcal{F}$ es normal $\Omega - \{\infty\}$ en en el sentido usual, así como normal en el ∞ en el sentido anterior.

3.2. Teorema de Montel

Uno de los progenitores de la teoría de Montel de familia normales, fue el siguiente teorema de Ascoli y Arcela.

Teorema de Montel. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones analíticas sobre un dominio Ω. Si $\mathcal{F}$ es localmente acotada en Ω, entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal en Ω.*

Demostración. De la hipótesis y de la la proposición 2.18 parte (b), tenemos que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada sobre los subconjuntos compactos K de Ω. Por tal para toda sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{F}$ que converge a f en K, se tendría que $f(z) \neq \infty$, para todo $z \in K$. Esto nos dice que no $\{f_n\}$ no puede converger normalmente a infinito. Solo nos queda mostrar, que para toda $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ posee una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge normalmente a una función analítica f.

En efecto, al igual que el teorema anterior, escojamos un subconjunto denso

$$Q = \{z_n \in \mathbb{C}/n = 1, 2, ...\}$$

de Ω. Ahora tomemos una sucesión $\{f_n\}$ cualquiera de $\mathcal{F}$, con la cual se procede a construir la siguiente sucesión de números complejos $\{f_n(z_1)\}$. Luego por ser $\mathcal{F}$ localmente acotada existe un $M_{z_1} \in \mathbb{R}$, tal que $|f_n(z_1)| < M_{z_1}$ para todo $n = 1, 2, 3, ..$; por tal dicha sucesión es acotada. Por Bolzano - Weierstrass, esta sucesión de números complejos, la cual es acotada, posee una subsucesión convergente, denotada por $\{f_{n_i}(z_1)\}_{i \in N_1}$, $N_1 = \mathbb{N}$; ahora tomemos la sucesión $\{f_{n_i}\}_{i \in N_1} \subset \mathcal{F}$ y construyamos la siguiente sucesión, $\{f_{n_i}(z_2)\}_{i \in N_1}$ al igual que antes existe un $M_{z_2} \in \mathbb{R}$, tal que dicha sucesión es acotada, entonces por B-W existe una subsucesión $\{f_{n_i}(z_1)\}_{i \in N_2}$, $N_2 \subset N_1$ $min\{N_1\} \notin N_2$, la cual es convergente en $\mathbb{C}$; volvemos a tomar la sucesión $\{f_{n_i}\}_{i \in N_2} \subset \mathcal{F}$ y seguimos construyendo la siguiente sucesión $\{f_{n_i}(z_3)\}_{i \in N_2}$, como en lo anterior, esta es una sucesión de números complejos es acotada, entonces por B-W existe una subsucesión $\{f_{n_i}(z_3)\}_{i \in N_3}$, $N_3 \subset N_2$ $min\{N_2\} \notin N_3$, la cual converge en $\mathbb{C}$. Seguimos así sucesivamente, ahora tomemos la siguiente sucesión

$$\{f_{n_i}\}_{i \in N_d}, \, N_d = \{n \in \mathbb{N}/ \, n = min\{N_i\}, \, i = 1, 2, 3, ...\},$$

denotada como la diagonal, luego para todo $z_j \in Q$ la sucesión $\{f_{n_i}(z_j)\}_{i \in N_d}$ es convergente, pues es una subsucesión de una sucesión convergente en cada $z_j \in Q$.

Procedemos a Mostrar que la diagonal converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos. Vamos a renombrar la sucesión como $\{g_k\} = \{f_{n_k}\}$, donde $g_i = f_{n_k}$, en el cual k es el $i - elemento$ de N_d. Ahora tomemos un compacto cualquiera K que esté en Ω, luego es posible encontrar un abierto U, acotado en la métrica usual, que contiene a K y siendo además su cerradura en Ω, o sea $\overline{U} \subset \Omega$. Por otra parte el teorema 2.10 nos dice que, $\mathcal{F}$ es equicontinua sobre cualquier subconjunto compacto de Ω y a su vez por la observación 2.2, se tiene que $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua sobre dichos compactos de Ω. Entonces si tomamos el subconjunto compacto $\overline{U} \subset \Omega$, tenemos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta\left(\varepsilon, \overline{U}\right) > 0$, tal que

$$|g_n(z) - g_n(z')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{3.2.1}$$

siempre que $z, z' \in \overline{U}$, $|z - z'| < \delta$. Luego para cada $z \in \overline{U}$ es posible encontrar un $z_i \in U \cap Q$, tal que $z \in D(z_i, \delta)$. Entonces $\overline{U} \subset \bigcup\limits_{z_i \in U \cap Q} D(z_i, \delta)$, luego es posible extraer un cubrimiento finito con indices en J, tal que $\overline{U} \subset \bigcup\limits_{i \in J} D(z_i, \delta)$, donde J es finito. Como ya sabemos $\{g_k(z_i)\}$ converge , en especial para $i \in J$, entonces $\{g_k(z_i)\}$ es una sucesión Cauchy en cada $i \in J$, es decir fijado un $i \in J$ y dado un $\varepsilon > 0$, existe un número entero $n_i \in \mathbb{N}$, tal que $m, n \geq n_i$ implica

$$|g_n(z_i) - g_m(z_i)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.2.2}$$

Finalmente tomemos un punto z cualquiera en el compacto K, entonces existe un $i \in J$, tal que $z \in D\left(z_i, \delta\left(\varepsilon, \overline{U}\right)\right)$; pues z también es elemento de $\overline{U}$. Luego acotaremos $|g_n(z) - g_m(z)|$, teniendo en cuenta que $z, z_i \in \overline{U}$,$|z - z_i| < \delta\left(\varepsilon, \overline{U}\right)$ y para cada $n, m > n_0$, donde $n_0 = \max\{n_i : i \in J\}$, entonces

$$\begin{aligned} |g_n(z) - g_m(z)| &\leq |g_n(z) - g_n(z_i)| + |g_n(z_i) - g_m(z_i)| + |g_m(z_i) - g_m(z)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

esto es por la desigualdad 3.2.1 y 3.2.2. Esto concluye que $\{g_n\}$ converge uniformemente sobre K a una función f la cual es analítica. Por tanto eso prueba que $\mathcal{F}$ es normal en Ω. □

Teorema 3.2. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones analíticas sobre un dominio Ω, tal que toda sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ posee una subsucesión que converge normalmente en Ω a una función analítica. Entonces $\mathcal{F}$ es localmente acotada, y por tanto equicontinua sobre los subconjuntos compactos de Ω.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ no es localmente acotada, entonces existe un punto $z_0 \in \Omega$, tal que para todo disco abierto $D(z_0, r) \subset \Omega$, la familia $\mathcal{F}$ no es uniformemente acotada. Luego tomemos en particular un disco $D_0 = D(z_0, r_0)$, tal que su cerrado esté en Ω, es decir, $\overline{D_0} \subset \Omega$. Como sabemos la familia $\mathcal{F}$ no es uniformemente acotada en D_0, entonces podemos tomar un $n \in \mathbb{N}$ y posteriormente encontrar un $z \in D_0$ y una función $f \in \mathcal{F}$, denotadas por z_n y f_n respectivamente, tal que

$$|f_n(z_n)| > n.$$

Por otro lado la sucesión $\{f_n\}$ está en $\mathcal{F}$, entonces por la hipótesis podemos tomar el compacto $\overline{D_0}$ y encontrar una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$, tal que converge uniformemente sobre $\overline{D_0}$ a la función analítica f. Entonces tomando un $\varepsilon = 1$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cualquier $k \geq k_0$ se tiene que

$$|f_{n_k}(z) - f(z)| < 1, \ \ \forall z \in \overline{D_0}. \tag{3.2.3}$$

Aparte podemos hacer $M = max_{z\in\overline{D_0}}\{|f(z)|\} <\infty$, esto es posible porque f es continua sobre el compacto $\overline{D_0}$, la continuidad se debe a que f es analítica. Entonces de la desigualdad 3.2.3 tenemos que $|f_{n_k}(z)| - |f(z)| < 1$, para todo $z \in \overline{D_0}$ implicando que

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(z)| &< 1 + |f(z)| \ \ \forall z \in \overline{D_0}. \\ &\leq 1 + M \ \ \forall z \in \overline{D_0}. \end{aligned}$$

Esto último contradice el hecho que $|f_{n_k}(z_{n_k})| \to \infty$ cuando $k \to \infty$. Por tanto tenemos la prueba del teorema. □

Corolario 3.1. *Sea $\mathcal{F}$ una familia normal de funciones analíticas sobre un dominio Ω. Si para algún punto $z_0 \in \Omega$, y para algún $M < \infty$, se cumple que $|f(z_0)| \leq M$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ es localmente acotada.*

Demostración. Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, luego como $\mathcal{F}$ es normal, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ que converge normalmente a una función analítica f o a ∞. Pero este último no puede ser, ya que la función límite f de $\{f_{n_k}\}$ en z_0 es menor o igual a M, pues $f(z_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(z_0) \leq M$ a razón de la hipótesis, que nos dices $|f_{n_k}(z_0)| \leq M$ para todo $f_{n_k} \in \mathcal{F}$. Entonces tenemos que $\{f_n\}$ posee una subsucesión que solo converge normalmente a la función analítica f. □

Corolario 3.2. *Si $\mathcal{F}$ es una familia normal de funciones analíticas en Ω y si para algún $z_0 \in \Omega$ se cumple que $|f(z_0)| \leq M$, para todo $f \in \mathcal{F}$, con M fijo en $\mathbb{R}$, entonces la familia $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es localmente acotada y normal en Ω.*

Demostración. En efecto, por el corolario anterior $\mathcal{F}$ es localmente acotada en Ω y por el teorema 2.9 tenemos que $\mathcal{F}'$ es localmente acotada en Ω y por el Teorema de Montel, tenemos que $\mathcal{F}'$ es normal en Ω. □

3.3. Teorema de Vitali-Porter

Teorema de Vitali-Porter. *Sea $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de funciones analíticas en Ω, la cual es localmente acotada en dicho dominio. Además el $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ existe para cada $z \in E \subset \Omega$, donde E posee un punto de acumulación. Entonces $\{f_n\}$ converge normalmente en Ω a una función analítica f .*

Demostración. De la hipótesis, tenemos que $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente acotada, luego podemos aplicar el teorema de Monte, que nos garantiza la normalidad de $\mathcal{F}$. Además $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, por tanto posee una subsucesión $\{f_{n_k}\}$, la cual converge uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω a una función f analítica, pues $\mathcal{F}$ es localmente acotada. Entonces note que $\{f_{n_k}\}$ converge en cada punto $z \in \Omega$, esto significa que $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(z) = f(z)$, para cada $z \in \Omega$, en particular para los $z \in E$.

Ahora supongamos que $\{f_n\}$ no converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω a una función f. Entonces en algún compacto $K \subseteq \Omega$, existe un $\varepsilon > 0$, tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ es posible encontrar un $m \geq n$, que a su vez cumpla $|f_m(z) - f(z)| \geq \varepsilon$ en algún $z \in K$. Ahora construyamos la siguiente subsucesión de $\{f_n\}$ de la siguiente manera, para $n = 1$ tomemos un $n_1 \geq 1$, que a su vez cumpla $|f_{n_1}(z) - f(z)| \geq \varepsilon$ en algún $z \in K$,el cual denotaremos por z_1; ahora para $n = m_1 + 1$ tomemos un $n_2 \geq m_1 + 1$, que a su vez cumpla $|f_{n_2}(z) - f(z)| \geq \varepsilon$ en algún $z \in K$, el cual denotaremos por z_2; por tercera para $n = m_2 + 1$ tomemos un $n_3 \geq m_2 + 1$, que a su vez cumpla $|f_{n_3}(z) - f(z)| \geq \varepsilon$ en algún $z \in K$, el cual denotaremos por z_3 y así sucesivamente obtenemos una subsucesión de funciones $\left\{f_{n_j}\right\}$ de $\{f_n\}$ y una subsucesión de puntos $\{z_j\}$ en K, tal que

$$\left|f_{n_j}(z_j) - f(z_j)\right| \geq \varepsilon. \tag{3.3.1}$$

Ahora $\left\{f_{n_j}\right\} \subset \mathcal{F}$ posee una subsucesión $\left\{f_{n_j}\right\}_{j\in N_1}$ la cual converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω a una función analítica g. Luego $\left\{f_{n_j}\right\}_{j\in N_1}$ es una subsucesión de $\left\{f_{n_j}\right\}$, donde ésta a su vez es una subsucesión de $\{f_n\}$, la cual converge en cada $z \in E$ a $f(z)$; por tanto $\left\{f_{n_j}\right\}_{j\in N_1}$ no solo converge a g en Ω, sino que también converge a $f(z)$ en cada $z \in E$, implicando que $g(z) = f(z)$ en todo $z \in E$; pero esto no implica que f y g sean iguales en Ω. Ahora afirmaremos que que $g \neq f$ en K. En efecto, como K es compacto y $\{z_j\}_{j\in N_1} \subset K$ podemos extraer la siguiente subsucesión $\{z_j\}_{j\in N_2}$, donde $N_2 \subset N_1$, la cual converge a un valor $a \in K$ y aplicando el ejemplo 2.8 a la ecuación 3.3.1, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \left|f_{n_j}(z_j) - f(z_j)\right| \\
&= \lim_{j\in N_2} \left|f_{n_j}(z_j) - f(z_j)\right| \\
&= \left|\lim_{j\in N_2} f_{n_j}(z_j) - \lim_{j\in N_2} f(z_j)\right| \\
&= |g(a) - f(a)|
\end{aligned}$$

esto nos dice que $g(a) \neq f(a)$ en el punto $a \in K$.

Ahora podemos aplicar el teorema de identidad, ya que f y g son analíticas sobre Ω y $f(z) = g(z)$ en $z \in E$, donde el conjunto E posee un punto de acumulación. Entonces el teorema de identidad, nos garantiza que $f \equiv g$ sobre Ω, lo cual es una contradicción estableciendo la demostración del teorema. □

3.4. Ceros de Familia Normales

Para la familia normal de funciones analíticas, el número de ceros de la familia resulta ser localmente finita, Más precisamente vemos en el siguiente teorema

Teorema 3.3. *Sea $\mathcal{F}$ una familia normal de funciones analíticas en Ω, y suponga que cada función como límite de alguna sucesión de $\mathcal{F}$ no es igual a una constate a. Entonces para cada subconjunto compacto K de Ω, existe una constante $M = M(K)$, tal que el número de ceros de $f(z) - a$ en K no excede a M, para cada $f \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos que la tesis no es verdadera, es decir, existe un compacto $K \subset \Omega$, tal que para cualquier $M \in \mathbb{N}$ el número de raíces de $f(x) - a$ es mayor o igual a M para algún $f \in \mathcal{F}$. Ahora esto nos ayudará a crear la siguiente sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, de la siguiente manera, dado un $M = n$ es posible encontrar una función $f \in \mathcal{F}$, la cual $f(z) - a$ tiene al menos n raíces en K, denotado a f por f_n. Como $\mathcal{F}$ es normal y $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, podemos extraer una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ que converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω a f analítica ó converge uniformemente a $f \equiv \infty$ sobre cualquier subconjunto compacto de Ω, en particular en K.

Por otro lado Afirmamos que $f \not\equiv \infty$ en $K \in \Omega$, en efecto si $f \equiv \infty$ en $K \subset \Omega$, entonces podríamos tomar un $a > 1$ y encontrar un k_1 suficientemente grande tal que para cada $k > k_1$ se tiene que $|f_{n_k}(z)| > a$, para todo $z \in K$, esto nos dice que $f_{n_k}(z) - a$ no posee ceros en todo $z \in K$ lo que es un contradicción ya que mínimo se espera un número de n_k ceros, no olvidar que $n_k \geq 1$, por tanto la afirmación queda probada. Entonces la última afirmación nos asegura que $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ converge uniformemente a f siendo esta solo analítica en todo Ω , pues $f \not\equiv \infty$. Ahora afirmamos que los ceros en Ωde $f(z) - a$ son puntos aislados de Ω, en efecto caso contrario el conjunto $L = \{z \in \Omega / f(z) - a = 0\}$ tiene un punto de acumulación $a \in \Omega$, además como f es analítica en Ω podemos aplicar entonces el teorema de identidad que nos garantiza que $f(z) = a$ para todo Ω, lo cual contradice la hipótesis, ya que la función límite de $\{f_{n_k}\}$ no puede ser la constante a, por lo que la afirmación queda probada. Como K es compacto, tenemos que los ceros de $f(z) - a$ en K son finitos, pues estos son aislados. Luego podemos suponer que $z_1, z_2, ..., z_l$ son todos ceros de $f(z) - a$ en $K \subset \Omega$ con multiplicidad $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_l$ respectivamente; además es posible la construcción de discos abiertos $D_i = D(z_i, r_i)$ con centros en z_i y algún radio r_i, tal que $f(z) - a$ solo posea un único cero, pues sus ceros en Ω son aislados, estos discos tienen que ser disjuntos y su cerradura de D_i esté en Ω. Ahora podemos aplicar el teorema de Hurwitz, en cada D_i, es decir, que para cada disco $D(z_i, r_i)$, existe un $k_i \in \mathbb{N}$, tal que si $k > k_i$ se puede garantizar que $f_{n_k}(z) - a$ posea α_i ceros, todos ellos contados con multiplicidad.

Lo anterior nos permite afirmar que $f_{n_k}(z) - a$ posee $\sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i$ finitos ceros contados con multiplicidad en $\bigcup\limits_{i=1}^{l} D(z_i; r_i)$, siempre que $k > k_0$, donde

$k' = max\{k_1, ..., k_l\}$.

Por último afirmamos que $f_{n_k}(z) - a$ en $E = K - \bigcup_{i=1}^{l} D(z_i; r_i)$ no pose ceros, en efecto notemos que E sigue siendo compacto y por ser f continua podemos asegurar que existe el número $m = \min_{z\in E}\{|f(z) - a|\}$, luego $m \neq 0$, caso contrario existe un $z_0 \in E \subset K$ el cual hará que $f(z_0) - a = 0$ haciendo que z_0 pertenezca al conjunto de todos los ceros de $f(z) - a$ en K, o sea $z_0 \in \{z_1, ..z_l\} \subset \bigcup_{i=1}^{l} D(z_i; r_i)$, esto nos dice que $z_0 \notin E$ lo cual es una contradicción. Todo lo anterior nos asegura que $m \leq |f(z) - a|$, para todo $z \in E$ con m fijo y mayor a cero. Aprovechando que $\{f_{n_k}\}$ converge uniformemente en K a la función analítica f, podemos escoger un $\varepsilon > 0$, donde $\varepsilon < m$ y encontrar un $k'' \in \mathbb{N}$, tal que $k > k''$ implica que $|f_{n_k}(z) - f(z)| < \varepsilon$, para todo $z \in E$. Luego para $k > k''$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} m &\leq |f(z) - a|, \forall z \in E \\ &= |f(z) - f_{n_k}(z) + f_{n_k}(z) - a|, \forall z \in E \\ &\leq |f(z) - f_{n_k}(z)| + |f_{n_k}(z) - a|, \forall z \in E \\ &< \varepsilon + |f_{n_k}(z) - a|, \forall z \in E \end{aligned}$$

esto nos asegura que $m - \varepsilon < |f_{n_k}(z) - a|$ para todo $z \in E$ y $k > k''$. Esto último nos asegura que no existen ceros de $f_{n_k}(z) - a$ en E cuando $k > k'$'. Las dos últimas afirmaciones, nos aseguran que las funciones $f_{n_k}(z) - a$ poseen $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i$ ceros en K, todos ellos contados con multiplicidad, lo que es contradicción terminando la prueba el teorema. □

3.5. Prueba del Teorema Fundamental de Normalidad (TFN)

En 1992 Montel presento su Criterio Fundamental para la familia de funciones analíticas para que sean estas normales. La idea por la hipótesis de el teorema es implícita en el paper de Caratheodory y Landau, quienes establecieron el teorema de Vitali-Porter para remplazar el requisito de la acotación por la condición de que cada función omite dos valores fijos. La prueba del teorema fundamental de normalidad tiene varios resultados de gran alcance.

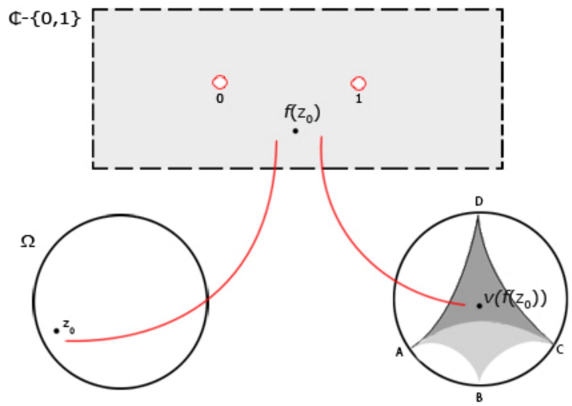
Teorema Fundamental de Normalidad (TFN) *Sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones analíticas sobre un dominio el cual omite dos valores a y b en $\mathbb{C}$. Entonces $\mathcal{F}$ es normal en Ω.*

Demostración. Sabemos que la familia $\mathcal{F}$ es normal, si y solo, si para cada $z_0 \in \Omega$ existe un disco abierto $D(z_0, r_0) \subset \Omega$, tal que la familia

$$\mathcal{F}_{z_0} = \left\{ f_{|D\left(z_0, r_{z_0}\right)} : f \in \mathcal{F} \right\}$$

es normal en $D(z_0, r_0)$. Luego sea $M_1(z) = \frac{z-a}{b-a}$ y $M_2(z) = \frac{z-z_0}{r_{z_0}}$, entonces $\mathcal{F}_{z_0}$ es normal ,si y solo, si $\hat{\mathcal{F}}_{z_0} = \{M_1 \circ f \circ M_2 : f \in \mathcal{F}_{z_0}\}$ es normal en $D(0,1)$. Luego , solo nos bastará probar que la familia $\hat{\mathcal{F}}$ constituida por funciones analíticas en $D(0,1)$ que no toman los valores 0 y 1 sea normal en dicho disco unitario, pues es claro que $\hat{\mathcal{F}}_{z_0} \subset \hat{\mathcal{F}}$. Seguiremos denotando al nuevo dominio $D(0,1)$ como Ω.

Ahora, para cualquier $f \in \hat{\mathcal{F}}$, podemos escoger una función analítica de la rama de $\nu(w) = \mu^{-1}(w)$ en el cual $\nu(f(z_0))$ es un valor principal, es decir un valor que se encuentra en el cuadrilátero ABCDA sin el lado AB y BC, llamada región principal como se muestra en la figura.



Empezando con este valor inicial $\nu(f(z_0))$ es posible definir una función analítica $\nu(f(z))$ en una vecindad suficientemente pequeña de z_0. Luego $\nu(f(z))$ puede ser continuado a través de cualquier curva analítica en Ω. Ahora como Ω es simplemente conexo se puede aplicar el teorema de Monodromia creando éste una aplicación analítica en todo Ω, denotada por $\tilde{f}(z) = \nu_{f(z_0)}(f(z))$, esta aplicación verifica que $\mu\left(\tilde{f}(z)\right) = \mu\left(\nu_{f(z_0)}(f(z))\right) = f(z)$, para todo $f \in \hat{\mathcal{F}}$. Por otro lado la familia $\tilde{\mathcal{F}} = \left\{\tilde{f} = \nu_{f(z_0)}(f(z)) \,/\, f \in \hat{\mathcal{F}}\right\}$ es normal, pues $\left|\tilde{f}(z)\right| < 1$, para todo $z \in \Omega$

Sea $\{f_n\}$ una sucesión arbitraria en $\hat{\mathcal{F}}$, y sea $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$ un punto de acumulación de la sucesión $\{f_n(z_0)\}$. Ahora consideraremos cuatro casos.

Caso (i) : $\alpha \neq 0, 1, \infty$.

Sea $\{f_{n'}\} \subseteq \{f_n\}$ una subsucesión tal que $\{f_{n'}(z_0)\}$ converge a α siempre que $n' \to \infty$. Entonces la sucesión $\left\{\tilde{f}_{n'}\right\}$ posee una subsucesión $\left\{\tilde{f}_{n_k}\right\}$ el cual converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω a una función analítica $F(z)$, además $|F(z)| \leq 1$ esto es por el ejemplo 2.6. Si la igualdad se cumple para algún $z \in \Omega$, entonces aplicamos el principio del módulo máximo que nos garantiza la existencia de un número real θ, tal que $F(z) \equiv e^{i\theta}$ para cada $z \in \Omega$. Esto implica que $\left|\tilde{f}_{n_k}(z)\right| \to 1$, ya que $|F(z)| = 1$ y $\tilde{f}_{n_k}(z) \to F(z)$ para todo $z \in \Omega$, en particular para z_0. Además $\tilde{f}_{n_k}(z_0)$ se encuentra en la región principal luego se cumple que $\left|\overline{\nu}_{f_{n_k}(z_0)}(f_{n_k}(z))\right| = \left|\tilde{f}_{n_k}(z_0)\right| \to 1$, siempre que $f_{n_k}(z_0)$ converge a 0,1 o ∞ lo cual es una contradicción. De esto se concluye que $|F(z)| < 1$ en Ω.

Ahora tomemos un compacto arbitrario $K \subseteq \Omega$. Entonces existe una constante m tal que, $|F(z)| \leq m < 1$ sobre K, por ser F analítica y K compacto. Luego por la convergencia uniforme de $\tilde{f}_{n_k}$ a F sobre K existe m' y un k_0, tal que si $k > k_0$ implica que $\left|\tilde{f}_{n_k}(z)\right| \leq m' < 1$, $z \in K$. Como la función modular $\mu(\zeta)$ es analítica en U, entonces la función μ será acotada en el compacto $|\zeta| \leq m'$, es decir, existe un $M_0 > 0$, tal que $|\mu(\zeta)| \leq M$ en el compacto $|\zeta| \leq m'$. Entonces para un $k > k_0$ y para todo $z \in K$, tenemos que se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(z)| &= |\mu(\overline{\nu}(f_{n_k}(z)))| \\ & \quad \left|\mu\left(\tilde{f}_{n_k}(z)\right)\right| \\ &\leq M_0, \end{aligned}$$

además $f_{n_k}(K)$ es acotada para $k \leq k_0$, por una constante M_k, pues es f_{n_k} es analítica en el compacto K. Luego $\{f_{n_k}\}$ es uniformemente acotada por la constante $M = \min\{M_0, M_1, .., M_{k_0}\}$ en todo K compacto arbitrario en Ω. Consecuentemente aplicamos el teorema de Montel que nos garantiza que, la sucesión $\{f_{n_k}\}$ vista como familia es normal, por ende se puede extraer a $\{f_{n_k}\}$ una subsucesión la cual converge normalmente en Ω a una función analítica f.

Caso (ii) : $\alpha = 1$.

Sea $\{f_{n'}\} \subseteq \{f_n\}$ una subsucesión tal que $f_{n'}(z_0) \to 1$ siempre que $n' \to \infty$, tenemos que Ω es simplemente conexo y dominio de cada $f_{n'}$ sabemos que estas funciones omiten cero, entonces aplicando la parte 5 del teorema 1.23, podemos construir la función raíz cuadrada analítica como

$$g_{n'}(z) = \sqrt{f_{n'}(z)},$$

tenemos que para un n' suficientemente grande las funciones $f_{n'}(z_0)$ se aproximan a 1, luego para estos mismos n' las funciones $g_{n'}(z_0)$ tiene dos opciones, la primera se acerca a 1 y la segunda se acerca a -1. tomaremos las funciones $g_{n'}$ en la cual $g_{n'}(z_0)$ se acerquen a -1. Así podemos construir una sucesión $\{g_{n'}\}$ en la cual$\{g_{n'}(z_0)\}$ converge a -1 además estas funciones $g_{n'}$ omiten el cero y el 1 dado que $f_{n'}$ omite dichos valores. Entonces esta sucesión $\{g_{n'}\}$ se encuentra en el caso (i), lo que podemos inferir que existe una subsucesión de $\{g_{n_k}\} \subseteq \{g_{n'}\}$ el cual converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω a una función analítica se puede deducir que también lo hará $\{g_{n_k}^2\}$, y como $\{g_{n_k}^2\} = \{f_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{f_n\}$ por lo anterior tenemos que esta subsucesión $\{f_{n_k}\}$ converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω a una función analítica,

Caso (iii) : $\alpha = 0$.

Una vez más escogemos una subsucesión $\{f_{n'}\} \subseteq \{f_n\}$ tal que $f_{n'}(z_0) \to 0$ siempre que $n' \to \infty$ y definimos $g_{n'}(z) = 1 - f_{n'}(z)$ para $n' = 1, 2, 3, \ldots$, estas funciones son analíticas en Ω, el cual también omiten el 0 y el pues $f_{n'}(z) \neq 0, 1$. Por otro lado como $\lim\limits_{n' \to \infty} g_{n'}(z_0) = \lim\limits_{n' \to \infty} [1 - f_{n'}(z_0)] = 1 - \lim\limits_{n' \to \infty} [f_{n'}(z_0)]$, teniendo así

$$\lim_{n' \to \infty} g_{n'}(z_0) = 0.$$

Vemos que la subsucesión $\{g_{n'}\}$ se encuentra en el caso (ii) el cual poseerá una subsucesión $\{g_{n_k}\}$ que convergerá uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω. Además teniendo en cuenta que $f_{n_k} = 1 - g_{n_k}$, se puede construir la subsucesión $\{f_{n_k}\}$ la cual está en $\{f_n\}$ el cual converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω.

Caso (iv) : $\alpha = \infty$**.**

Tomemos como en los casos anteriores una subsucesión $\{f_{n'}\} \subseteq \{f_n\}$ tal que $f_{n'}(z_0) \to \infty$ siempre que $n' \to \infty$. Como las funciones $f_{n'}(z)$ son analíticas y no toman el valor cero en Ω, ello nos permite construir las siguientes funciones $g_{n'}(z) = 1/f_{n'}(z)$, $n' = 1, 2, 3, ..$ las cuales son analíticas. Además $g_{n'}(z)$ no toma ni el 0 ni el 1, pues dado que $f_{n'}(z)$ no toma el 1 ni el. Luego tenemos que

$$\lim_{n' \to \infty} g_{n'}(z_0) = 0, \tag{3.5.1}$$

dado que $f_{n'}(z_0) \to \infty$ siempre que $n' \to \infty$. Ahora los $g_{n'}$, recién construidos, forman una sucesión $\{g_{n'}\}$ la cual tiene las mismas propiedades del caso (iii) por esto, existe una subsucesión $\{g_{n_k}\} \subseteq \{g_{n'}\}$ que converge uniformemente sobre los compactos de Ω a una función analítica g. Afirmarnos que $g = 0$ en Ω, en efecto supongamos que g no es constante, por otra parte tenemos que $g(z_0) = \lim\limits_{n' \to \infty} g_{n'}(z_0) = 0$,esto nos dice que g tiene un cero en z_0 por tal hecho podemos aplicar el teorema de Hurwitz en z_0, de la siguiente forma, para una vecindad suficientemente pequeña de z_0, existe un k_0 tal que todas las funciones g_{n_k} donde $k \geq k_0$ poseen el mismo número de ceros que tiene función g en dicha vecindad, pero como no g_{n_k} no posee ceros esto es una contradicción, pues entonces g es constante y como $g(z_o) = 0$ entonces se tiene que $g = 0$ en Ω. y consecuentemente tenemos que $f_{n_k} \to \infty$ uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω, como se requería.

De los cuatro casos, tenemos que tomando una sucesión $\{f_n\}$ podemos extraer una subsucesión el cual converge uniformemente en los subconjuntos compactos Ω a una función analítica f o a $f = \infty$ por tanto la familia $\hat{\mathcal{F}}$ es normal y por consiguiente también es normal la familia $\mathcal{F}$. □

Observación 3.1. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones en Ω en el cual esta el punto $z = \infty$. Si la familia funciones $\mathcal{G} = \{g(z) : g(z) = f(1/z), f \in \mathcal{F}\}$ omite a y b en el disco $|z| < 1/R$ para algún R grande, entonces $\mathcal{G}$ es normal en dicha vecindad luego por la definición 3.3 se puede afirmar que $\mathcal{F}$ es normal en el infinito.

Capítulo 4

Funciones normales de funciones meromorfas

Las familias normales de funciones meromorfas son estudiadas más naturalmente con la métrica esférica. Algunos resultados de las funciones meromorfas, tal como el TFN, son extraídas de forma inmediata de las extensiones de los casos analíticos. La noción de familias normales invariantes es introducidos, y juega esto un rol importante en la discusión de funciones normales en el capítulo de Sistemas Dinámicos.

4.1. Normalidad

Empezaremos con la siguiente definición

Definición 4.1. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones meromorfas en $\Omega \subset \mathbb{C}$. Decimos que $\mathcal{F}$ *es* ***normal*** en Ω, si para toda sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ contiene una subsucesión la cual converge esféricamente normalmente en Ω.

La función límite de la definición es una función meromorfa o idénticamente igual a ∞ en Ω esto es una consecuencia del corolario 4.1 que posteriormente veremos. Ahora veamos un ejemplo donde la función límite de f es idénticamente a ∞.

Ejemplo 4.1. Sea $f_n(z) = \frac{n}{z}$, $n = 1, 2, 3, ...$ sobre U. Entonces cada f_n es meromorfa y $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente a ∞ en U.

El teorema siguiente nos permitirá tener una relación entre entre convergencia esféricamente normal y la convergencia normal en Ω. Además este teorema es usado frecuentemente en los temas sucesivos.

Teorema 4.1. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones meromorfas sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces $\{f_n\}$ converge esféricamente normalmente en Ω a f si y solo si, para cada $z_0 \in \Omega$ hay un disco cerrado $\overline{D}(z_0; r)$ en el cual*

$$|f_n - f| \to 0$$

ó

$$\left|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right| \to 0$$

uniformemente

Demostración. Primero Supongamos que para cada $z_0 \in \Omega$, existe un disco cerrado $\overline{D}(z_0; r)$ en el cual $|f_n - f| \to 0$ ó $\left|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right| \to 0$ uniformemente en dicho disco cerrado. Entonces dado un $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq n_0$ implica que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ ó $\left|\frac{1}{f_n}(z) - \frac{1}{f}(z)\right| < \varepsilon$ par todo $z \in \overline{D}(z_0; r)$. Luego $f_n(z)$y $f(z)$ en el primer caso es diferente de infinito y el segundo caso son diferente de cero, siempre que $n > n_0$, y $z \in \overline{D}(z_0, r)$. Ahora podemos aplicar la proposición 2.3 parte 4 y 5, que nos garantiza $\chi(f_n(z), f(z)) < |f_n(z) - f(z)|$ en el primer caso o $\chi(f_n(z), f(z)) < \left|\frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)}\right|$ en el segundo caso, para todo $n \geq n_0$, con $z \in \overline{D}(z_0; r)$. Luego se infiere que $\chi(f_n(z), f(z)) < \varepsilon$, para todo $z \in \overline{D}(z_0; r)$, siempre que $n > n_0$. Teniendo así que $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente a f en $\overline{D}(z_0; r)$y sin duda alguna también sobre $D(z_0; r)$. Para terminar con esto, tomemos un compacto arbitrario K en Ω y cubramos K de la siguiente manera $K \subset \bigcup\limits_{z \in K} D(z; r)$, donde $D(z, r)$ son discos abiertos en el cual $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente. Luego podemos tomar un cubrimiento finito $K \subset \bigcup\limits_{z \in \Lambda} D(z; r)$ con Λ finito y $z \in K$. Entonces para cada $z \in \Lambda$, podemos escoger un $\varepsilon > 0$, para luego encontrar un $n_z \in \mathbb{N}$, tal que $\chi(f_n(w), f(w)) < \varepsilon$ para todo $w \in D(z, r)$, siempre que $n > n_z$. Si tomamos $n_0 = max\{n_z : z \in \Lambda\}$, entonces se cumple que $\chi(f_n(w), f(w)) < \varepsilon$, para todo $w \in \bigcup\limits_{z \in \Lambda} D(z, r)$. Notamos que $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente sobre $\bigcup\limits_{z \in \Lambda} D(z; r)$ y por ende también sombre K. Por tanto $\{f_n\}$ converge esféricamente normalmente en Ω.

Por último, suponga que $\chi(f_n, f) \to 0$ uniformemente sobre los subconjuntos compactos. Luego para cada z_0, tenemos dos posibilidades para $f(z_0)$, que sea infinito o no.

Caso (i) : $f(z_0) \neq \infty$. Como f_n es meromorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces f_n es esféricamente continua en Ω, esto es por la proposición 2.13. Por hipótesis tenemos que $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω a f , en particular en un disco cerrado arbitrario $\overline{D'}(z_0, r)$ en Ω. Ahora con estos resultados podemos aplicar la proposición 2.20, que nos garantiza que la función límite f de $\{f_n\}$, es esféricamente continuamente uniforme sobre el compacto $\overline{D'}(z_0, r)$. Por tal es note que f es esféricamente continua sobre $\overline{D'}(z_0, r)$, y por ende es posible encontrar un disco suficientemente pequeño cerrado $\overline{D}(z_0, r)$, tal que la función f sea acotada, pues $f(z_0) \neq \infty$. Luego como $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente a una función acota f sobre

$\overline{D}(z_0, r)$, podremos aplicar el teorema 2.1, que nos dice que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre el disco compacto $\overline{D}(z_0; r)$. Esto termina una parte de lo que queremos demostrar veamos el siguiente caso.

Caso (ii) : $f(z_0) = \infty$**.** Como en el caso anterior, como f_n es meromorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$, tenemos que su inversa $g_n = \frac{1}{f_n}$ también es meromorfa en Ω. Además sabemos que $\chi(f_n, f) \to 0$ uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω, entonces$\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ converge esféricamente uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω a la función $\frac{1}{f}$, pues esto es cierto por la proposición 2.3 parte 2 que nos dice $\chi(f_n, f) = \chi\left(\frac{1}{f_n}, \frac{1}{f}\right)$. Luego como $\frac{1}{f}(0) = 0$, entonces nos encontramos en el primer caso, por tanto existe un disco $\overline{D}(z_0, r)$, tal que $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ converge uniformemente a $\frac{1}{f}$ sobre dicho disco, terminando así la demostración. □

Corolario 4.1. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones meromorfas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, el cual converge esféricamente normalmente en Ω a f. Entonces f es una función meromorfa sobre Ω o f es idénticamente igual ∞.*

Demostración. Supongamos primero que $f \not\equiv \infty$. Entonces es posible encontrar un $z_0 \in \Omega$, tal que $f(z_0) \neq \infty$. Ahora que $\{f_n\}$ converge esféricamente normalmente en Ω y que $f(z_0) \neq \infty$, nos lleva al caso (i) del teorema, lo que nos garantiza que existe un disco cerrado $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$, tal que f sea acotada y que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre dichos discos. Por otra parte la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ junto a que f es acotada en el disco $\overline{D}(z_0, r)$ se mantiene en el abierto $D(z_0, r)$, para luego aplicar el corolario 2.3, que nos dice que f es analítica en $D(z_0, r)$.

Como seguimos en el caso que $f \not\equiv \infty$, puede entonces ocurrir que existir un $z_0 \in \Omega$, tal que $f(z_0) = \infty$. Si este fuera el caso afirmamos que z_0, con $f(z_0) = \infty$, es una singularidad aislada. En efecto, caso contrario z_0 sería un punto de acumulación, es decir, podemos encontrar una sucesión $\{z_n\}$ en Ω tal que $z_n \to z_0$, donde $f(z_n) = \infty$. Entonces, que $\{f_n\}$ converge esféricamente normalmente en Ω y que $f(z_0) = \infty$; nos lleva al caso (ii) del teorema, lo que nos garantiza que existe un disco cerrado $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$, tal que $\frac{1}{f}$ es acotada y que $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ converge uniformemente a $\frac{1}{f}$, sobre dicho disco cerrado. Por otra parte la convergencia uniforme de $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ junto a que $\frac{1}{f}$ es acotada ambas en $\overline{D}(z_0, r)$, se mantiene en el abierto $D(z_0, r)$, para luego aplicar el corolario 2.3 que nos garantiza, que $\frac{1}{f}$ es analítica en $D(z_0, r)$. Después debido al teorema de identidad, tenemos que $f \equiv \infty$ en $D(z_0, r)$, pues $\frac{1}{f(z_n)} = 0$ y $z_n \to z_0$ lo que hace que $\frac{1}{f} \equiv 0$ en $D(z_0, r)$. Luego coleccionemos los z, tal que $f(z) = \infty$ en el siguiente conjunto, denotado por S

$$S = \{z \in \Omega : f(z) = \infty\} = f^{-1}(\infty)$$

$S \neq \emptyset$, pues estamos en el caso que existe un z_0, tal que $f(z_0) = \infty$. Probemos ahora que S es cerrado, pues tomemos una sucesión $\{z_n\} \subset S$, tal que $z_n \to z' \in$

Ω y supongamos que $f(z') \neq \infty$. Entonces por lo visto en la primera parte de este corolario, existe un disco abierto $D(z', r)$, tal que f es analítica sobre dicho disco; pero para un n suficientemente grande, tenemos que $z_n \in D(z', r)$, siendo esto una una contradicción , pues $f(z_n) = \infty$. Por tal S es cerrado, pues $z' \in S$. Ahora veamos que S es abierto, sea un $z' \in S$, entonces $f(z') = \infty$, por lo visto más arriba, es posible garantizar la existencia de un disco $D(z', r)$ en el que $f \equiv \infty$ sobre dicho disco, por tal z' es un punto interior de S afirmando así que S es abierto. Entonces se afirma que $S = \Omega$, pues S, es abierto y cerrado en el conexo Ω. Esto afirma también que $f(z) = \infty$, para todo $z \in \Omega$, lo que seria una contradicción a que $f \not\equiv \infty$. Por tanto z_0 es un punto aislado, donde $f(z_0) = \infty$. Esto afirma que el conjunto S es discreto; además por lo visto anteriormente, tenemos $\frac{1}{f}$ es analítica en cada punto $z_1 \in S$, es decir, $(z - z_1)^h f(z)$ es analítica en z_1, para algún $h \in \mathbb{N}$ y como f es analítica en todo $z \in \Omega - S$, esto visto más arriba. Por tanto se concluye que f es Meromorfa. □

Corolario 4.2. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ el cual converge esféricamente normalmente en Ω a f. Entonces f es una función analítica sobre Ω o idénticamente igual a ∞.*

Demostración. Por el corolario anterior f es meromorfa o idénticamente a ∞. Afirmamos que $f \equiv \infty$ en Ω, si existe un $z_0 \in \Omega$, tal que $f(z_0) = \infty$. En efecto, suponga que $f(z_0) = \infty$ para algún $z_0 \in \Omega$. Nuevamente nos pone en caso (ii) del teorema, teniendo como consecuencia, la existencia de un disco $D(z_0; r)$ en el cual, $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ uniformemente y $\frac{1}{f}$ es acotada, para después aplicar el corolario 2.3, lo cual nos garantiza que $\frac{1}{f_n}$ y $\frac{1}{f}$ es analítica, para n suficientemente grande en dicho disco. Afirmamos que $\frac{1}{f} \equiv 0$ en $D(z_0; r)$. En efecto, supongamos que $\frac{1}{f}$ no es constante en $D(z_0; r)$. Como $\frac{1}{f}$ es analítica en el disco $D(z_0; r)$, entonces podemos aplicar el teorema de Hurwitz, que nos dice que $\frac{1}{f}$ y $\frac{1}{f_n}$ poseen el mismo número de ceros en una vecindad suficientemente pequeña V de z_0; pero esto es una contradicción pues $\frac{1}{f}$ posee al menos un cero ya que $\frac{1}{f(z_0)} = 0$, mientras que $\frac{1}{f_n}$ no posee ceros en $z \in \Omega$, ya que $f_n(z) \neq \infty$ por ser analítica, teniendo así que $\frac{1}{f_n}(z) \neq 0$, en todo $z \in \Omega$, para todo $n \in \mathbb{N}$; luego $\frac{1}{f}$ es constante en $D(z_0; r)$ y como $\frac{1}{f(z_0)} = 0$ tenemos que $\frac{1}{f} \equiv 0$ en $D(z_0; r)$, lo cual nos dice que $f \equiv \infty$ en dicho disco $D(z_0; r)$. Por tanto aplicando el corolario anterior tenemos que f es meromorfa o idénticamente a ∞, pero como f no es meromorfa a razón de que $f \equiv \infty$ en el disco $D(z_0; r) \subset \Omega$, entonces tenemos que solamente se cumple el hecho de $f \equiv \infty$ en todo Ω.

Si $f \not\equiv \infty$, entonces nos queda por el corolario anterior que f solo sería meromorfa. Luego el conjunto $S = \{z \in \Omega : f(z) = \infty\}$ es vació, caso contrario podemos tomar un $z \in S$ en el que $f(z) = \infty$ y por la primera parte del corolario, tenemos que $f \equiv \infty$, lo que seria una contradicción. Entonces f no tiene polos, siendo f analítica en todo Ω. □

Proposición 4.1. *Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones analíticas sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ converge normalmente en Ω a f (el cual puede ser $\equiv \infty$), si y solo, si $\{f_n\}$ converge esféricamente normalmente en Ω a f.*

Demostración. De la hipótesis, deducimos que f es analítica por Weierstrass, o simplemente $f \equiv \infty$, en todo Ω. Si f es analítica en Ω, entonces para un compacto cualquiera $K \subset \Omega$ y un $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 = n_0(K, \varepsilon) > 0$, tal que $n > n_0$ implica que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$; luego por ser f_n y f analíticas podemos aplicar la proposición 2.3 que nos dice que $\chi(f_n(z), f(z)) \leq |f_n(z) - f(z)|$. De lo anterior inferimos que $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente sobre $K \subset \Omega$ a f. Si $f \equiv \infty$, entonces, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 = n_0(K, \varepsilon) > 0$, tal que $n > n_0$ implica que $\left|\frac{1}{f_n}(z)\right| < \varepsilon$, para todo $z \in K$, note que $\frac{1}{\varepsilon} \leq |f_n(z)|$ en K; luego, es posible aplicar nuevamente la proposición 2.3, donde tenemos que $\chi(f_n(z), \infty) = \chi\left(\frac{1}{f_n(z)}, 0\right) \leq \left|\frac{1}{f_n}(z)\right|$. Entonces tenemos que $\{f_n\}$ converge esféricamente uniformemente sobre el compacto K a $f \equiv \infty$. Por tanto $\{f_n\}$ converge esféricamente normalmente en Ω a f.

Recíprocamente, Supongamos que $\{f_n\}$ converge esféricamente normalmente en Ω a f. Como $\{f_n\}$ son analíticas, podemos aplicar el corolario 4.2, lo que nos dice que f es analítica o $f \equiv \infty$. Si f es analítica en Ω, entonces para cualquier compacto $K \subset \Omega$, la función f es acotada sobre dicho compacto. Luego podemos aplicar el teorema 2.1 , lo que nos dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente en K, por tanto $\{f_n\}$ converge normalmente a una función analítica f. Si $f \equiv \infty$, entonces por la proposición 2.10, tenemos que $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ converge uniformemente sobre cualquier compacto $K \subset \Omega$ a $\frac{1}{f} \equiv 0$. Ahora aplicamos de nuevo el teorema 2.1 que nos dice que $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ converge uniformemente a la función 0, luego por la proposición 2.9, tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a ∞. Por tanto $\{f_n\}$ converge normalmente a ∞ y con esto se termina la demostración. $\square$

4.2. Teorema de Montel

En la discusión de la normalidad de una familia de funciones meromorfas $\mathcal{F}$, el concepto de acotación local no es suficiente para afirmar que dicha familia sea normal, pues las funciones meromorfas en su mayoría no son acotadas en su totalidad. Sin embargo que la familia $\mathcal{F}$ sea de equicontinuidad esférica puede darnos lo necesario para tener el caso homólogo que se hizo en el capítulo 2 para el teorema de Montel.

Teorema 4.2. *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones meromorfas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es normal, si y solo, si $\mathcal{F}$ es esféricamente equicontinua en Ω.*

Demostración. Comenzamos con el hecho de que $\mathcal{F}$ es normal y supongamos que no es esféricamente equicontinua. Entonces existen un $z' \in \Omega$ y un $\varepsilon > 0$, tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ es posible encontrar un $z \in D\left(z', \frac{1}{n}\right)$ y una función $f \in \mathcal{F}$, denotadas por z_n y f_n, que cumplen lo siguiente $\chi(f_n(z_n), f_n(z')) \geq \varepsilon$. Formando así dos sucesiones, la primera es una sucesión $\{z_n\} \subset \Omega$ que converge a z' y la segunda es $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, tales que

$$\chi(f_n(z'), f_n(z_n)) > \varepsilon, \ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.2.1}$$

Como $\mathcal{F}$ es normal, entonces $\{f_n\}$ posee una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge esféricamente uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω a f, en particular en un disco cerrado de centro z' contenido en Ω, es decir $\overline{D}(z',r) \subset \Omega$, note que existe un $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $k > k_0$ implica que $z_{n_k} \in \overline{D}(z',r)$. Por otra parte las funciones f_{n_k}, con $k \in \mathbb{N}$, son esféricamente continuas ya que son meromorfas. Entonces por lo anterior podemos aplicar la proposición 2.20, que nos garantiza que la sucesión $\{f_{n_k}\}$ vista como familia $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ es esféricamente equicontinua sobre $\overline{D}(z',r)$, en particular en el punto z', lo cual sería una contradicción con la ecuación 4.2.1.

Antes de comenzar con el reciproco, veremos unas premisas (a) $\overline{\mathbb{C}}$ es un espacio métrico con la métrica cordal $\chi(b)$ $\overline{\mathbb{C}}$ es compacto y por ende también es completo (c)Toda sucesión $\{z_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ posee una subsucesión que converge a un $z \in \overline{\mathbb{C}}$ (d)el con junto $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ es numerable y denso en $\overline{\mathbb{C}}$, por tanto para cualquier abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ posee un conjunto $\{z_n\}$ denso y numerable para $\Omega.(e)$ sea $\{z_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$, entonces $\{z_n\}$ converge esféricamente si y solo si $\{z_n\}$ es de Cauchy.

Veamos ahora el reciproco, sea $\mathcal{F}$ una familia esféricamente equicontinua en Ω. Luego por (d) existe un conjunto $Q = \{z_n\}$ denso y numerable de Ω. Ahora tomemos una sucesión cualquiera $\{f_n\}$ en $\mathcal{F}$ y para el punto z_1 construimos la siguiente sucesión $\{f_n(z_1)\}_{n \in N_0 = \mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$, para así aplicar (c) la cual nos garantiza la existencia de una subsucesión $\{f_n(z_1)\}_{n \in N_1 \subset N_0}$, con $\min\{N_1\} \notin N_0$, que converge en $\overline{\mathbb{C}}$; Ahora tomamos la sucesión $\{f_n\}_{n \in N_1}$ y evaluando en z_2, se construye $\{f_n(z_2)\}_{n \in N_1}$ y como esta en $\overline{\mathbb{C}}$, nuevamente por (c), existe una subsucesión $\{f_n(z_2)\}_{n \in N_2 \subset N_1}$, donde $\min\{N_2\} \notin N_1$, que converge en $\overline{\mathbb{C}}$. Así seguimos sucesivamente, teniendo que la siguiente sucesión $\{f_n\}_{n \in N_p}$ converge puntualmente en los puntos z_i, con $i = 1, 2, .., p$. Luego tomamos el conjunto $N_{diag} = \{n \in \mathbb{N} / n = \min\{N_1\}, i = 1, 2, ...\}$ el cual construye la siguiente sucesión $\{f_n\}_{n \in N_{diag}}$, la cual es la sucesión diagonal de $\{f_n\}_{n \in N_p}$, que a su vez converge puntualmente para cada z_i, con $i = 1, 2, ...$

Sea K un compacto cualquiera en $\Omega \subset \mathbb{C}$, luego es posible encontrar un abierto U de $\mathbb{C}$, tal que $K \subset \overline{U} \subset \Omega$, donde $\overline{U}$ es la cerradura de U, respecto a la métrica usual. Ahora como la familia $\mathcal{F}$ es esféricamente equicontinua sobre Ω, entonces también lo será sobre cualquier subconjunto compacto en Ω. Luego por la proposición 2.19 tenemos que $\mathcal{F}$ es esféricamente equicontinuamente uniforme sobre dicho compacto. Entonces para el compacto $\overline{U}$ se cumple lo siguiente: fijado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta\left(\varepsilon, \overline{U}\right) > 0$ tal que

$$\chi\left(f(z), f(z')\right) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall f \in \mathcal{F}$$

siempre que $z, z' \in \overline{U}$, con $|z - z'| < \delta$. En particular se cumple para cada z_i con $i \in \mathbb{N}$ y f_j con $j \in N_{diag}$. Luego cubrimos $\overline{U}$ por discos abiertos en $\overline{\mathbb{C}}$ de la siguiente forma $\overline{U} \subset \bigcup_{z_i \in Q \cap U} D(z_k, \delta)$, ya que $\overline{\{z_n\}} = \Omega$ y como $\overline{U}$ es compacto, podemos extraer un cubrimiento finito, es decir, $\overline{U} \subset \bigcup_{k \in J} D(z_k, \delta)$, donde J finito, siendo además que $z_i \in U$. Luego sabemos que las sucesiones

$\{f_n(z_i)\}_{n\in N_{diag}}$ convergen esféricamente en $\overline{\mathbb{C}}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces podemos aplicar aplicar (e) que nos asegura que $\{f_n(z_i)\}_{n\in N_{diag}}$ es una sucesión de Cauchy, respecto a la métrica esférica, para cada z_i, con $i \in \mathbb{N}$. Es decir, para z_i, se fija un $\varepsilon > 0$, para el cual existe un $n_{0,i} = n_0(z_i, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que $m, n \geq n_0$, con $m, n \in N_{diag}$, implica que

$$\chi(f_n(z_i), f_m(z_i)) < \frac{\varepsilon}{3},$$

en particular para los z_i, con $i \in J$, ahora podemos tomar un $n_0 = min\{n_{0,i}, \text{con } i \in J\}$, donde se observa que $\chi(f_n(z_i), f_m(z_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$, siempre que $m, n \in N_{diag}$, con $m, n \geq n_0$, y $i \in J$. Finalmente por el cubrimiento finito de $\overline{U}$ y por $K \subset \overline{U}$, entonces podemos escoger cualquier $z \in K$ y encontrar un $i \in J$, tal que el disco $z \in D(z_i, \delta)$; es decir, $|z - z_i| < \delta$, con $z, z_i \in \overline{U}$; luego para $i \in J$, $m, n \in N_{diag}$, con $m, n \geq n_0$, pasaremos a acotar lo siguiente $\chi(f_n(z), f_m(z))$, veamos

$$\begin{aligned}
\chi(f_n(z), f_m(z)) &\leq \chi(f_n(z), f_n(z_i)) + \chi(f_n(z_i), f_m(z_i)) \\
&\qquad + \chi(f_m(z_i), f_m(z)) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Esto nos dices que $\{f_n(z)\}_{n\in N_{diag}}$ es de Cauchy en K de manera uniforme pues el n_0 solo depende de K y no de cada punto z en K, y nuevamente por (e) tenemos que la sucesión $\{f_n(z)\}_{n\in N_{diag}}$ converge esféricamente uniformemente en K. Por tanto cualquier sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ posee una subsucesión que converge esféricamente uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω, lo que nos dice que la familia de funciones meromorfas $\mathcal{F}$ es normal en Ω. $\square$

Un teorema parecido al TFN en el capítulo 2, pero más fuerte es el siguiente teorema.

Teorema 4.3. Teorema fundamental de Normalidad *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones meromorfas sobre un dominio Ω el cual omite tres valores distintos. Entonces $\mathcal{F}$ es normal en Ω.*

Demostración. Sea el conjunto

$$\mathcal{G} = \left\{ g(z) = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{f(z)-b}{f(z)-a} : f \in \mathcal{F} \right\}$$

Entonces $\mathcal{G}$ es una familia de funciones analíticas en Ω el cual omite los valores 0 , 1 también omite el ∞. Por tanto del teorema TFN en el capítulo 2 tenemos que $\mathcal{G}$ es normal en la métrica usual y consecuentemente en la métrica esférica y como se definió la familia $\mathcal{G}$ como una correspondencia de un función de Möbius tenemos que $\mathcal{F}$ es normal. $\square$

4.3. Teorema de Marty

Teorema de Marty *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones meromorfas sobre un dominio Ω es normal si y solo si para cada subconjunto compacto de $K \subseteq \Omega$, existe una constate $C = C(K)$ tal que la derivada esférica.*

$$f^{\#}(z) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq C \text{ con } z \in K,\ f \in \mathcal{F},$$

es decir, que $f^{\#}$ es localmente acotada.

Demostración. Supongamos que $f^{\#}(z)$ es uniformemente acotada sobre subconjunto compactos de Ω. Luego para un $z_0 \in \Omega$ arbitrario y cualquier $\varepsilon > 0$, es posible encontrar un disco cerrado $\overline{D}(z_0; r) \subseteq \Omega$ y posteriormente encontrar una constante $C = C_{z_0,r}$, la cual cumple que $f^{\#}(z) < C_{z_o,r}$, para todo $z \in \overline{D}(z_0; r)$ y todo $f \in \mathcal{F}$. Por otro lado es posible construir $\delta = \frac{\varepsilon}{C_{z_0,r}}$, con $\delta < r$, variando si fuera necesario $C_{z_0,r}$ cada vez más grande; tal que $|z - z_0| < \delta$, implica que $\chi(f(z_0), f(z)) \leq \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}$. En efecto, acotamos $\chi(f(z_0), f(z))$ con los datos anteriores y tomando un camino continuo γ recto que une z_0 con z, tenemos que

$$\begin{aligned}
\chi(f(z_0), f(z)) &\leq \int\limits_{\gamma\subset\Omega} f^{\#}(\zeta)\,|d\zeta|, \forall f \in \mathcal{F} \\
&\leq C_{z_o,r} \int\limits_{\gamma\subset\Omega} |d\zeta|, \forall f \in \mathcal{F} \\
&= C_{z_o,r}\,|z - z_0|, \forall f \in \mathcal{F} \\
&< C_{z_o,r}\delta = \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Teniendo así la equicontinuidad esférica de la familia $\mathcal{F}$ en Ω y por tanto se tiene que $\mathcal{F}$ es normal.

Ahora veamos el reciproco el cual lo haremos por contradicción, Comenzamos del hecho que $\mathcal{F}$ es normal y haciendo la respectiva negación de la tesis, tenemos que existe un compacto $K \subset \Omega$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un $z \in K$ y un $f \in \mathcal{F}$, denotados por z_n y f_n, que cumplen $f_n^{\#}(z_n) \geq n$. Vemos que la sucesión $f_n^{\#}(z_n)$ converge a ∞ cuando n converge a ∞. Ahora tomando dicha sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ tenemos que existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge esféricamente en los subconjuntos compactos de Ω a la función límite f. luego alrededor de cada $z_0 \in K$ existe un disco cerrado $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ en el cual $f_{n_k} \to f$ ó $\frac{1}{f_{n_k}} \to \frac{1}{f}$ uniformemente cuando $n \to \infty$, esto es cierto por el teorema 4.1.

Veamos en el primer caso, la función f es analítica y acotada en $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ por el mismo teorema 4.1 del caso (i). Luego por el corolario 2.3 tenemos que la familia $\{f_{n_k}\}$ son analíticas y uniformemente acotadas sobre $\overline{D}(z_0, r)$, para un k suficientemente grande. Luego por el ejemplo 2.7, tenemos que $f_{n_k}^{\#} \to f^{\#}$ uniformemente sobre $\overline{D}(z_0, r)$. Como $f^{\#}$ es continua en Ω, entonces en el compacto $\overline{D}(z_0, r)$, $f^{\#}$ es acotada y por el ejemplo 2.7, la familia $\{f^{\#}_{n_k}\}$ es uniformemente acotada sobre $\overline{D}(z_0, r)$ para un k suficientemente grande.

En el caso que $\frac{1}{f_{n_k}} \to \frac{1}{f}$ uniformemente sobre $\overline{D}(z_0, r)$, tenemos los mismos resultados anteriores. Es decir, que $\left(\frac{1}{f_{n_k}}\right)^{\#} \to \left(\frac{1}{f}\right)^{\#}$ uniformemente, que $\left(\frac{1}{f}\right)^{\#}$ es acotada y que la familia $\left\{\left(\frac{1}{f_{n_k}}\right)^{\#}\right\}$ es uniformemente acotada todos ellos sobre el disco $\overline{D}(z_0, r)$. Luego como $(f)^{\#} = \left(\frac{1}{f}\right)^{\#}$ y $(f_{n_k})^{\#} = \left(\frac{1}{f_{n_k}}\right)^{\#}$ en $\overline{D}(z_0, r)$ podemos, concluir que para cada $z_0 \in K$ existe un disco cerrado $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$, tal que la familia $\left\{(f_{n_k})^{\#}\right\}$ es uniformemente acotada sobre dicho disco. Luego K es cubierta por un discos como los anteriores, es decir, $K \subset \bigcup_{z\in K} \overline{D}(z_0, r)$ donde en cada disco la familia $\left\{(f_{n_k})^{\#}\right\}$ es uniformemente acotada. Entonces se puede extraer una cubertura finita donde la familia $\left\{(f_{n_k})^{\#}\right\}$ es uniformemente acotada sobre dicha cobertura en especial sobre K lo cual es una contradicción pues $f^{\#}_{n_k}(z_n)$ converge a ∞ cuando k converge a ∞. $\square$

Definición 4.2. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones meromorfas es normal en cada punto z , si $\mathcal{F}$ es normal en alguna vecindad abierta de z.

Proposición 4.2. *Una familia de funciones meromorfas es normal en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ si y solo si $\mathcal{F}$ es normal en cada punto $z \in \Omega$.*

Demostración. Es obvio que si $\mathcal{F}$ es normal en $\Omega \subset \mathbb{C}$ entonces es normal en cada punto de Ω.

Ahora veamos el reciproco. Sea $\mathcal{F}$ normal en cada punto $z \in \Omega$. Tomemos cualquier compacto $K \subset \Omega$, luego para cada $z \in K$, existe un disco abierto $D(z, r_z)$, tal que $\mathcal{F}$ es normal en dicho disco. Por el teorema de Marty, existe una constante C_z tal que $f^{\#}(z) < C_z$, para todo $z \in \overline{D}\left(z, \frac{r_z}{2}\right)$ y todo $f \in \mathcal{F}$. Posteriormente pasamos a cubrir el compacto K, con estos discos, es decir $K \subset \bigcup_{z\in K} D\left(z, \frac{r_z}{2}\right)$; para así extraer un subcubrimiento finito , denotado por $K \subset \bigcup_{z\in\Lambda} D\left(z, \frac{r_z}{2}\right)$, con Λ finito . Luego podemos tomar un $C_K = \max\{C_z : z \in \Lambda\}$ y verificar que: $f^{\#}(z) < C_K$, para todo $z \in K$ y todo $f \in \mathcal{F}$; pues $K \subset \bigcup_{z\in\Lambda} \overline{D}(z, r_z)$. Por tanto nuevamente por el teorema de Marty, decimos que $\mathcal{F}$ es normal en Ω. $\square$

Como en el caso de familias analíticas normales en ∞, podemos ahora definir una familia $\mathcal{F}$ de funciones meromorfas normal en ∞, de la siguiente manera:

Definición 4.3. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones meromorfas. Decimos que $\mathcal{F}$ es normal en ∞, si la familia $\mathcal{G} = \left\{g : g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$ es normal en $z = 0$.

Definición 4.4. Sea un abierto en Ω en $\overline{\mathbb{C}}$, con $\infty \in \Omega$. Decimos que $\mathcal{F}$ es normal en Ω, si $\mathcal{F}$ es normal de la forma usual en $\Omega - \{\infty\}$ y $\mathcal{F}$ es normal en el punto ∞.

Proposición 4.3. *La familia $\mathcal{F}$ de funciones meromorfas es normal en el abierto Ω de $\overline{\mathbb{C}}$ si y solo si toda sucesión $\{f_n\}$de $\mathcal{F}$ posee una subsucesión que converge esféricamente uniformemente sobre los subconjuntos compactos $K \subset \Omega$.*

Proposición 4.4. *Sea R una función meromorfa en $\overline{\mathbb{C}}$, con ξ_{-1} , ξ_1 , ξ en $\overline{\mathbb{C}}$, entonces tenemos que:*

1. *Si $\{R^n\}$ converge esféricamente normalmente en una vecindad abierta de $\xi_1 = R(\xi)$, entonces $\left\{R^{n+1}\right\}$ converge esféricamente normalmente en alguna vecindad de ξ .*

2. *Si $\{R^n\}$ converge esféricamente normalmente en una vecindad abierta de $\xi_{-1} \in R^{-1}(\xi)$, entonces $\left\{R^{n-1}\right\}$ converge esféricamente normalmente en alguna vecindad de ξ .*

Demostración. Recuerde un disco de centro z y radio r en $\overline{\mathbb{C}}$, es de la forma $D(z,r) = \{z : |z| < r\}$, si $z \in \mathbb{C}$; caso contrario, es decir, $z = \infty$, el disco se entiende por $D(\infty, r) = \{z : |z| > r\} \cup \{\infty\}$.

(1) Retomando la demostración en el primer iten. Sea U la vecindad abierta que contiene ξ_1, donde $\{R^n\}$ converge esféricamente normalmente a una función f sobre U. Luego para un disco cerrado $K = \overline{D}(\xi_1, \delta_{\xi_1}) \subset U$ en $\overline{\mathbb{C}}$, se cumple que fijado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 = n_0(\varepsilon, K)$ tal que para todo $z \in K$ se tiene $\chi(R^n(z), f(z)) < \varepsilon$, siempre que $n > n_0$. Note que también se cumple para el conjunto abierto $K_0 = D(\xi_1, \delta_{\xi_1})$. Además podemos encontrar un ε tal que $D_\chi(\xi_1, \varepsilon) \subset D(\xi_1, \delta_{\xi_1})$. Por otra parte, como R es meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ entonces R es esféricamente continua sobre $\overline{\mathbb{C}}$ en particular R es esféricamente continua en el punto $z = \xi$. Esto último nos dice que existe un disco abierto $D(\xi, \delta_\xi)$ de centro ξ tal que $R(D(\xi, \delta_\xi)) \subset D_\chi(R(\xi), \varepsilon)$ y como $R(\xi) = \xi_1$, entonces se cumple que $R(D(\xi, \delta_\xi)) \subset D_\chi(\xi_1, \varepsilon)$. Entonces para todo $z \in D(\xi, \delta_\xi)$ tenemos que $R(z) \in D_\chi(\xi_1, \varepsilon)$, luego por lo anterior $R(z) \subset D(\xi_1, \delta_{\xi_1})$ y por la convergencia esféricamente uniforme, tenemos que $\chi(R^n(R(z)), f(R(z))) < \varepsilon$, siempre que $n > n_0$. En resumen existe un disco $D(\xi, \delta_\xi)$, donde para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $z \in D(\xi, \delta_\xi)$ se tiene que $\chi\left(R^{n+1}(z), f \circ R(z)\right) < \varepsilon$, siempre que $n > n_0$. Esto nos dice que existe un disco $D(\xi, \delta_\xi)$ obviamente vecindad abierta de ξ, tal que $\left\{R^{n+1}\right\}$ converge esféricamente uniformemente sobre dicho disco a $f \circ R$, en particular sobre cada compacto del disco $D(\xi, \delta_\xi)$ que es lo que termina la prueba de (1).

(2) Sea U la vecindad abierta que contiene ξ_{-1}, donde $\{R^n\}$ converge esféricamente normalmente a una función f sobre U_{-1}. Luego para un disco cerrado $K = \overline{D}\left(\xi_{-1}, \delta_{\xi_{-1}}\right) \subset U$ se cumple que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 = n_0(\varepsilon, K)$ tal que para todo $z \in K$ se tiene $\chi(R^n(z), f(z)) < \varepsilon$, siempre que $n > n_0$. Por otra parte para todo $y \in R(K)$, existe un z, denotado por z_y en K, tal que $R(z_y) = y$, ahora esto nos permite definir la siguiente función

$$\begin{array}{rccc} g: & R(K) & \to & \overline{\mathbb{C}} \\ & y & \mapsto & f(z_y) \end{array}$$

donde la función está bien definida pues sea $z_y \neq z'_y$ en K, tal que $R(z_y) = R(z'_y) = y$, entonces tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} R^{n-1}(y) \stackrel{\chi}{=} \lim_{n\to\infty} R^{n-1}(R(z_y)) \stackrel{\chi}{=} \lim_{n\to\infty} R^{n}(z_y) \stackrel{\chi}{=} f(z_y)$$

entonces tenemos que $\lim_{n\to\infty} R^{n-1}(y) \stackrel{\chi}{=} f(z_y)$ lo mismo sucede con z'_y, es decir $\lim_{n\to\infty} R^{n-1}(y) \stackrel{\chi}{=} f(z'_y)$ por tal $f(z_y) = f(z'_y)$, entonces con esto la función g está bien definida. Luego como para todo $z \in K$ tenemos que $\chi(R^n(z), f(z)) < \varepsilon$, siempre que $n > n_0$. Entonces tomando cualquier $y \in R(K)$ encontramos un $z_y \in K$ que cumple $R(z_y) = y$ y por lo anterior tenemos que $\chi(R^n(z_y), f(z_y)) < \varepsilon$, siempre que $n > n_0$ y como se cumple la siguiente igualdad

$$\chi\left(R^{n-1}(y), g(y)\right) = \chi\left(R^{n-1}(R(z_y)), f(z_y)\right) = \chi\left(R^{n}(z_y), f(z_y)\right)$$

entonces tenemos que para todo $y \in R(K)$ se cumple que $\chi\left(R^{n-1}(y), g(y)\right) < \varepsilon$, siempre que $n > n_0$. Esto nos dice que existe un compacto $R(K)$ tal que la sucesión $\left\{R^{n-1}\right\}$ converge esféricamente uniformemente sobre dicho compacto. En particular se cumple para $K_0 = R\left(D\left(\xi_{-1}, \delta_{\xi_{-1}}\right)\right)$ y para todos los subconjuntos compactos de K_0 y como R es meromorfa aplicamos el teorema de la aplicación abierta que afirma que $R(K_0)$ es abierto y a su vez contiene a ξ. Por tanto tenemos que existe una vecindad K_0 abierta que contiene a ξ tal que $\left\{R^{n-1}\right\}$ converge esféricamente normalmente sobre dicha vecindad. □

Teorema 4.4. *Sea D un dominio y supóngase que las funciones φ_1 , φ_2 y φ_3 son analíticas en $D \subset \mathbb{C}$ tales que la clausura de los conjuntos $\varphi_j(D)$ son mutuamente disjuntos. Ahora sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones meromorfas en D, tales que para cada z en D y cada f en $\mathcal{F}$, $f(z) \neq \varphi_j(z)$, $j = 1, 2, 3$. Entonces $\mathcal{F}$ es normal en D.*

Demostración. Para cada w en D definimos una aplicación de Möbius g_w, con las siguientes condiciones

$$g_w(0) = \varphi_1(w), \quad g_w(1) = \varphi_2(w), \quad g_w(\infty) = \varphi_3(w)$$

Dado que la clausura de los conjuntos $\varphi_j(D)$ son mutuamente disjuntos respecto a la métrica χ, entonces esto nos garantiza la existencia de un número $m > 0$, tal que $\chi(\varphi_i(z), \varphi_j(z)) \geq m$ para todo $z \in D$ y todo par i, j, con $i \neq j$. Entonces la familia $\mathcal{G} = \{g_w, w \in D\}$ satisface

$$\chi(g_w(0), g_w(1)) \geq m, \;\; \chi(g_w(1), g_w(\infty)) \geq m \;\; \chi(g_w(\infty), g_w(0)) \geq m$$

para lo cual podemos aplicar el teorema 2.5 que nos dice que la familia $\mathcal{G}$ es uniformemente de Lipschitz sobre $\overline{\mathbb{C}}$, con una constante denotada por M

Ahora tomemos una subfamilia $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ de la familia $\mathcal{F}$ y luego pasamos a definir la función F_α, como

$$F_\alpha(w) = g_w^{-1} f_\alpha(w) = \frac{(f_\alpha(w) - \varphi_1(w))(\varphi_2(w) - \varphi_3(w))}{(f_\alpha(w) - \varphi_3(w))(\varphi_2(w) - \varphi_1(w))}, \; w \in D \qquad (4.3.1)$$

note que F_α está formada por funciones analíticas, donde en la parte del denominador jamás toma el cero, por tal F_α es una función analítica en D, además dicha función no toma los valores 0,1 y ∞. Entonces la familia$\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ es una familia de funciones analíticas en D y no toma los valores 0,1 e ∞, luego es posible aplicar el teorema TFN que nos garantiza que la familia $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ es normal en D.

Ahora tomemos una sucesión cualquiera $\{f_n\}$ de $\mathcal{F}$ y sea F_n definido como en 4.3.1, luego la sucesión $\{F_n\}$ es normal en D. Entonces existe una subsucesión $\{F_n\}_{N_1 \subset \mathbb{N}}$, que converge esféricamente uniformemente sobre los subconjuntos compactos de D a una función analítica F. En particular para un compacto K del abierto D, tenemos que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 = n_0(\varepsilon, K)$ tal que $\chi(F_n(w), F(w)) < \frac{\varepsilon}{M}$, siempre que $n > n_0$, con $n \in N_1$. Ahora sobre este mismo compacto K y sobre este mismo ε, acotaremos$\chi(f_n(w), g_w(F(w)))$, para todo $w \in K$

$$\begin{aligned}
\chi(f_n(w), g_w(F(w))) &= \chi(g_w(F_n(w)), g_w(F(w))) \\
&\leq M\chi(F_n(w), F(w)) \\
&< \varepsilon, \text{ siempre que } n > n_0, \text{ con } n \in N_1
\end{aligned}$$

la igualdad es razón que $F_\alpha(w) = g_w^{-1} f_\alpha(w)$, luego primera desigualdad se cumple ya que $\mathcal{G} = \{g_w, w \in D\}$ es uniformemente de Lipschitz con constante M y la última desigualdad es por la convergencia esféricamente uniforme de $\{F_n\}$ a F. Esto nos dices que la subsucesión $\{f_n\}_{n \in N_1}$converge esféricamente uniformemente sobre K. Por tanto para cualquier sucesión $\{f_n\}$ existe una subsucesión que converge esféricamente uniformemente sobre los subconjuntos compactos K de D , lo que nos dices que $\mathcal{F}$ es normal en D. $\square$

Con este último teorema terminamos el capítulo, el objeto de terminar este teorema es que es utilizado para neutro trabajo principal.

Capítulo 5

Sistemas Dinámicos

Una importante aplicación de la teoría de familias normales es el estudio de las iteracciones de una función meromorfa(racional), dando lugar a un sistema dinámicos discretos.

En este último capítulo investigaremos la naturaleza de los sistemas dinámicos discretos generados por una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$. Ahora la proposición 1.32 menciona que toda aplicación Meromorfa R sobre $\overline{\mathbb{C}}$ es una aplicación racional sobre dicho domino, es decir:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},\ P(z), Q(z) \not\equiv 0$$

Donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios con coeficientes complejos sin factores en común. Esto quiere decir que toda aplicación meromorfa R se puede construir por medio de dos polinomios únicos sin factores en común, de ahora en adelante nos referiremos a estos dos polinomios como P y Q para cada R.

Definición 5.1. Sea una aplicación meromorfa R sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y sea su forma racional $R = \frac{P}{Q}$, entonces definimos el grado de R como

$$deg(R) = max\{deg(P), deg(Q)\}$$

donde $deg(P)$ y $deg(Q)$ son los grados de los polinomios P y Q respectivamente. Es decir, si P se escribe de la siguiente forma $P(z) = a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + .. + a_1 z + a_0$, con $a_m \neq 0$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces $deg(P) = m$, es decir el grado del polinomio P es m, siempre que m sea la máxima potencia de los términos de P.

Ejemplo 5.1. En el caso que $deg(R) = 1$, se tiene estos tres casos:

Caso 1. *caso (1)* $R(z) = \frac{az+b}{c}$,$a, c \neq 0$.

Caso 2. *caso (2)* $R(z) = \frac{a}{bz+c}$, $a, b \neq 0$.

Caso 3. *caso (3)* $R(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, c \neq 0$.

Los 3 casos anteriores son transformaciones de Möbius. De ahora en adelante solo trabajaremos con las aplicaciones meromorfas R sobre $\overline{\mathbb{C}}$, con $deg(R) \geq 2$.

Sea v, z_0 en $\overline{\mathbb{C}}$ y R meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$, si z_0 es una raíz de $R(z) - v$, entonces se cumple que $R(z_0) = v$. Con estas característica pasaremos a hacer la siguiente definición.

Definición 5.2. Sea v, z_0 en $\overline{\mathbb{C}}$ y R meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$, con z_0 raíz de $R(z) - v$. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces definimos la multiplicidad de z_0 como el orden de la raíz $R(z) - v$ en z_0; si $z_0 = \infty$, entonces definimos la multiplicidad de z_0 como el orden de la raíz de $g(z) - v$ en $z = 0$, donde $g(z) = R(1/z)$; si $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces definimos la multiplicidad de z_0 como el orden del polo de $R(z)$ en z_0; si $z_0 = \infty$, entonces definimos la multiplicidad de ∞, como el orden del polo de la función $g(z)$ en $z = 0$, donde $g(z) = R(1/z)$.

Observación 5.1. Sea $R(z)$ una aplicación meromorfa sobre $\mathbb{C}$, entonces podemos reescribir R como el cociente de dos polinomios, es decir $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, donde $p(z) = k_p(z - a_1) \times ... \times (z - a_m)$ y $q(z) = k_q(z - b_1) \times ... \times (z - b_n)$. Si $m > n$, entonces R tiene en infinito una raíz de multiplicidad $m - n$. En efecto, vemos que $R(\infty) = \infty$, luego la función $g(z) = R(1/z)$ queda como $g(z) = \frac{1}{z^{m-n}} \frac{k_p(1-za_1)\times...\times(1-za_m)}{k_q(1-zb_1)\times...\times(1-zb_n)}$, donde se infiere que el orden del polo $z = 0$ en g es $m - n$. Si $n > m$, entonces R tiene una raíz en infinito de multiplicidad $n - m$. En efecto, notemos que $R(\infty) = 0$, luego hacemos $g(z) = R(1/z)$ donde luego queda expresado como $g(z) = z^{n-m} \frac{k_p(1-za_1)\times...\times(1-za_m)}{k_q(1-zb_1)\times...\times(1-zb_n)}$, donde se infiere que la raíz de cero de $g(z)$ tiene orden $n - m$, por tal este viene a ser su multiplicidad.

Proposición 5.1. *Sea* $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ *una función meromorfa sobre* $\overline{\mathbb{C}}$*, donde* P *y* Q *son sus respectivos polinomios sin factores en común de grado* m *y* n *respectivamente, además* a_m *y* b_n *son sus coeficientes en el término* m *y* n *respectivamente de* P *y* Q*. Entonces el grado de* R *coincide con el número de raíces contadas con multiplicidad en* $\mathbb{C}$ *de la ecuación* $R(z) - a = 0$ *donde* a *es una constante arbitraria que cumple* $\frac{a_m}{b_n} \neq a$.

Demostración. Escribimos a P, como $P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + .. + a_1 z + a_0$, con $a_m \neq 0$ y $m \in \mathbb{N}$ y también escribimos a Q como $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} +$

$..+bz+b_0$, con $b_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= R(z) - a \\ &= \frac{P(z)}{Q(z)} - a \\ &= \frac{P(z) - aQ(z)}{Q(z)} \\ &= \frac{(a_m z^m - a \times b_n z^n) + \left(a_{m-1} z^{m-1} - a \times b_{n-1} z^{n-1}\right) + ...}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + .. + a_1 z + a_0}, \end{aligned}$$

por tal se infiere que $T(z) = (a_m z^m - a \times b_n z^n) + \left(a_{m-1} z^{m-1} - a \times b_{n-1} z^{n-1}\right) + ... = 0$, notemos que si $m \neq n$, entonces T posee grado $\max\{m, n\}$ y si $m = n$ entonces el grado de T es m, dado que $\frac{a_m}{b_n} \neq a$. Siendo así que el grado del polinomio T es el máximo entre m y n, por tal el número de raíces contadas con multiplicidad de R coincide con el grado de R. $\square$

La siguiente definición es muy importante, porque nos ayudará a resolver de manera más práctica mucho de los resultados que veremos, esta definición es la conjugación por una transformación de Möbius.

Definición 5.3. Sea $R(z)$ y $S(z)$ dos funciones racionales sobre $\overline{\mathbb{C}}$. Entonces decimos que R y S son analíticamente conjugados si existe una transformación de Möbius M, tal que

$$S = M \circ R \circ M^{-1} \text{ para todo } z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Nos referiremos en adelante a R y S como conjugadas(o conjugadas por M) cuando éstas sean analíticamente conjugadas.

Proposición 5.2. *Sea $R(z)$ y $S(z)$ dos funciones racionales sobre $\overline{\mathbb{C}}$, conjugadas por una transformación de Möbius M, entonces R^n y S^n también son conjugadas por M.*

Demostración. Probaremos por inducción, primero para $n = 1$ se cumple pues por hipótesis se tiene que $S = M \circ R \circ M^{-1}$, ahora asumamos que para $n = h$ se cumple, es decir $S^h = M \circ R^h \circ M^{-1}$, entonces verificaremos que también se cumple para $n = h + 1$, en efecto,

$$\begin{aligned} S^{h+1} &= \left(M \circ R \circ M^{-1}\right)^{h+1} \\ &= \left(M \circ R \circ M^{-1}\right) \circ \left(M \circ R \circ M^{-1}\right)^h \\ &= \left(M \circ R \circ M^{-1}\right) \circ \left(M \circ R^h \circ M^{-1}\right) \\ &= M \circ R^{h+1} \circ M^{-1} \end{aligned}$$

La última igualdad es gracias a que la transformación de Möbius cumple que $M^{-1} \circ M(z) = z$. Por tanto tenemos que $S^n = M \circ R^n \circ M^{-1}$. $\square$

5.1. Puntos periódicos.

Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y z_0 un punto en dicho plano complejo extendido. Luego denotaremos a $z_0 = R^0(z_0)$, también hacemos las siguientes denotaciones

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= R(z_n) \\ &= R(R^n(z_0)), \qquad n = 0, 1, 2, .., \end{aligned}$$

donde $R^n = \underbrace{R \circ R \circ ... \circ R}_{n \text{ veces}}$

Definición 5.4. *Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Entonces*

1. Decimos que z_0 es un *punto periódico de R con periodo $n \in \mathbb{N}$,* si $R^n(z_0) = z_0$, donde su vez $R^m(z_0) \neq z_0$, para cada $0 < m < n$,$m \in \mathbb{N}$. Si $n = 1$, diremos que z_0 es un punto fijo de R.

2. Si z_0 no es periódico, pero alguna iteración $R^m(z_0)$ es periódica, entonces z_0 es llamado preperiódico.

Definición 5.5. Sea R una aplicación racional sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Entonces llamaremos *órbita hacia adelante* de R en el punto z_0, al siguiente conjunto

$$O_R^+(z_0) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} / R^m(z_0) = z, \quad m = 0, 1, 2, ..., ..\}$$

Definición 5.6. Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y z_0 en $\overline{\mathbb{C}}$. Entonces llamaremos *órbita hacia atrás* de R en el punto z_0, al siguiente conjunto

$$O_R^-(z_0) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} / R^m(z) = z_0, \quad m = 0, 1, 2, ..., ..\}.$$

Proposición 5.3. Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ *y* z_0 *en* $\overline{\mathbb{C}}$. Entonces se cumple lo siguiente:

1. *Si z_0 es un punto periódico de R, con periodo n, entonces $O_R^+(z_0)$ consiste de n puntos.*

2. *Sea z_0 un punto periódico de R con periodo n, entonces para cada $z \in O_R^+(z_0)$ se garantiza que z es punto fijo de la aplicación R^n.*

3. *Sea S la conjugada de R por la transformación de Möbius M y Sea z_0 un punto periódico de R con periodo n. Entonces el punto $a = M(z_0)$ es un punto periódico de S con periodo n.*

Demostración. (1) Es obvio. (2) Sea $z' \in O_R^+(z_0)$ entonces existe m con $0 \leq m \leq n-1$ tal que $z' = R^m(z_0)$, entonces se desprende lo siguiente

$$\begin{aligned} R^n(z') &= R^n(R^m(z_0)) \\ &= R^{m+n}(z_0) \\ &= R^m(R^n(z_0)) \\ &= R^m(z_0) \\ &= z' \end{aligned}$$

Esto último nos dice que z' es un punto fijo de R^n.

(3) Sea $S(z) = M \circ R \circ M^{-1}(z)$ entonces por la proposición 5.2 se tiene que $S^n(z) = M \circ R^n \circ M^{-1}(z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego como $R^n(z_0) = z_0$ y $M^{-1}(a) = z_0$ entonces se cumple lo siguiente para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S^n(a_1) &= M \circ R^n \circ M^{-1}(a) \\ &= M \circ R^n(z_0) \\ &= M(z_0) \\ &= a \end{aligned}$$

por tanto a es un punto fijo de orden n para S. $\square$

Ejemplo 5.2. Considere la aplicación $R(z) = z^2$, entonces $R(z)$ tiene exactamente tres puntos fijos $0, 1$ y ∞. Luego si $0 \leq |z_0| < 1$, entonces $Or^+(z_0)$ es una sucesión de puntos que converge al origen, es decir, $\lim (z_0)^n = 0$. Si $1 < |z_0| < \infty$, entonces $O_R^+(z_0)$ es una sucesión de puntos que converge siempre al ∞. Si $|z_0| = 1$, entonces $Or^+(z_0)$ se encuentra en el conjunto $|\{z| = 1\}$ y tiene una estructura variada dependiendo de z_0.

Definición 5.7. Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ un punto periódico de R con periodo n. Definimos el multiplicador λ_{z_0} de z_0 como $\lambda_{z_0} = (R^n)'(z_0)$ para $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\lambda_{z_0} = \frac{1}{(R^n)'(z_0)}$, si $z_0 = \infty$. En el caso de ambigüedad por otra aplicación diferente, denotaremos el multiplicador λ_{z_0} de R por $\lambda_{z_0,R}$.

Definición 5.8. Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ un punto periódico de R de periodo n y λ su respectivo multiplicador, entonces se define lo siguiente.

1. Si $0 < |\lambda| < 1$, decimos que z_0 es un punto fijo *atractor*.
2. Si $\lambda = 0$, decimos que z_0 es un punto fijo *superatractor*.
3. Si $|\lambda| > 1$, decimos que z_0 es un punto fijo *repul*sor.
4. Si $|\lambda| = 1$, decimos que z_0 es un punto fijo *indiferente*.

Proposición 5.4. *Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y z_0 un punto periódico de R con periodo n. . Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *El multiplicador λ_{z_0} es invariante por conjugación. Es decir, si M es una transformación de Möbius y $S = M \circ R \circ M^{-1}$, con $M(z_0) = a$, entonces se cumple que $\lambda_{z_0,R} = \lambda_{a,S}$*

2. *Si $z \in O_R^+(z_0)$ entonces $\lambda_z = \lambda_{z_0}$. Es decir, λ depende solo de $O_R^+(z_0)$ y no de z_0.*

Demostración. (1) Primero, veamos el caso en que $z_0 \neq \infty$ y que $M(z_0) = a$, donde $a \in \mathbb{C}$. Por la parte de 3 de la proposición anterior se tiene que que a es un punto periódico de S de periodo n. Ahora pasaremos a hallar $\lambda_{a,S}$, teniendo en cuenta que M y R son analíticas en z_0, veamos:

$$\begin{aligned}
\lambda_{a,S} = (S^n)'(a) &= M'\left(R^n\left(M^{-1}(a)\right)\right)\left[(R^n)'\left(M^{-1}(a)\right)\right]\frac{1}{M'\left(M^{-1}(a)\right)} \\
&= M'(z_0)(R^n)'(z_0)\tfrac{1}{M'(z_0)} \\
&= (R^n)'(z_0) = \lambda_{z_0,R}
\end{aligned}$$

Esto nos dice que $\lambda_{z_0,R} = \lambda_{a,S}$ en el primer caso. Ahora veamos el segundo caso, cuando $z_0 = \infty$ *y* $M(z_0) = a$, *con* $a \in \mathbb{C}$. *Note nuevamente que* por la proposición anterior a es un punto periódico de S de periodo n, además S^n es analítica en dicho punto, pues S es meromorfa y $S^n(a) = a \in \mathbb{C}$. Luego para un z muy cercano al valor de a se cumple lo siguiente:

$$(S^n)'(z) = M'\left(R^n\left(M^{-1}(z)\right)\right)\left[(R^n)'\left(M^{-1}(z)\right)\right]\frac{1}{M'\left(M^{-1}(z)\right)} \tag{5.1.1}$$

Note que $S^n(a) = \lim\limits_{z\to a} S^n(z)$, por tal haremos el siguiente cambio de límite $M\left(\frac{1}{w}\right) = z$, donde $z \to 0$ siempre que $w \to 0$, entonces, luego la ecuación 5.1.1 queda de la siguiente forma

$$(S^n)'(a) = \lim_{w\to 0} M'\left(R^n\left(\frac{1}{w}\right)\right)\left[(R^n)'\left(\frac{1}{w}\right)\right]\frac{1}{M'\left(\frac{1}{w}\right)} \tag{5.1.2}$$

Por otro lado, M puede ser vista como $M(z) = \frac{a_0 z + b_0}{c_0 z + d_0}$, siendo $\frac{a_0}{c_0} = a$. Además vemos que $M^{'}(z) = \frac{a_0 d_0 - b_0 c_0}{(c_0 z + d_0)^2}$ entonces la expresión 5.1.2 queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\left(S^n\right)'(a) &= \lim_{w\to 0}\left[\left(R^n\right)'\left(\frac{1}{w}\right)\right]\left(\frac{c_0\left(\frac{1}{w}\right)+d_0}{c_0R^n\left(\frac{1}{w}\right)+d_0}\right)^2\\ &= \lim_{w\to 0}\left[\left(R^n\right)'\left(\frac{1}{w}\right)\right]\left(\frac{c_0+d_0w}{c_0R^n\left(\frac{1}{w}\right)+d_0}\right)^2\left(\frac{1}{w^2}\right) \qquad (5.1.3)\end{aligned}$$

por otro lado $R^n\left(\frac{1}{w}\right)$ es una aplicación con polo en $w=0$, entonces existe una función h analítica en una vecindad V de cero, con $h(0)\neq 0$, tal que $R^n\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{h(w)}{w^m}$ en V, donde m es el orden del polo. Ahora derivamos R^n

$$[R^n]'\left(\frac{1}{w}\right)=w^2\left(\frac{w^mh'(w)-mw^{m-1}h(w)}{w^{2m}}\right) \qquad (5.1.4)$$

luego llevando este resultado a la ecuación 5.1.3, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\left(S^n\right)'(a) &= \lim_{w\to 0}\left[w^2\left(\frac{w^mh'(w)-mw^{m-1}h(w)}{w^{2m}}\right)\right]\frac{\left(c_0+d_0w\right)^2}{\frac{\left(c_0h(w)+d_0w^m\right)^2}{w^{2m}}}\left(\frac{1}{w^2}\right)\\ &= \lim_{w\to 0}\left[\left(\frac{w^mh'(w)-mw^{m-1}h(w)}{\left(c_0h(w)+d_0w^m\right)^2}\right)\right]\left(c_0+d_0w\right)^2\end{aligned}$$

Ahora si $m=1$, se tiene que $\left(S^n\right)'(a)=-\frac{1}{h(0)}$ y si $m>1$, se tiene que $\left(S^n\right)'(a)=0$. Ahora no-te que en la ecuación 5.1.4, se cumple lo mismo, es decir si $m=1$ se tiene que $\left(R^n\right)(\infty)=\lim\limits_{w\to 0}[R^n]'\left(\frac{1}{w}\right)=-h(0)$ y para $m>1$ se tiene que $\left(R^n\right)(\infty)=\lim\limits_{w\to 0}[R^n]'\left(\frac{1}{w}\right)=\infty$. lo que concluye nuestra prueba

$$\left(S^n\right)'(a)=\frac{1}{\left(R^n\right)'(\infty)}$$

(2) En efecto, primero supongamos que $\infty\notin O_R^+(z_0)$, note que la aplicación R es analítica en cada punto de $O_R^+(z_0)$, por ser estos finitos y R meromorfa. Ahora sea $z=R^m(z_0)$, con $m\in\mathbb{N}$, entonces

$$\lambda_z=\left(R^n\right)'(z)=R'\left(R^{n-1}(z)\right)R'\left(R^{n-2}(z)\right)...R'\left(R^{n-n}(z)\right)$$

Note que $\left\{R^{n-1}(z),R^{n-1}(z),...,z\right\}=\left\{z_0,R^1(z_0),R^2(z_0),...,R^{n-1}(z_0)\right\}$, por tal $\left(R^n\right)'(z)$ es independiente de cada m esto nos dice que $\lambda_z=\lambda_{z_0}$, para todo $z\in O_R^+(z_0)$.

En el caso que $\infty\in O_R^+(z_0)$ se tomará un $a_0\neq\infty$ y $b_0\notin O_R^+(z_0)$ y una transformación de Möbius M, tal que $M^{-1}(a_0)=\infty$ y $M^{-1}(\infty)=b_0$, entonces la órbita $O_S^+(a_0)$, con $S=M\circ R\circ M^{-1}$ no contiene al infinito, pues caso contrario existiría un $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \infty &= S^m(a_0) \\ &= M \circ R^m \circ M^{-1}(a_0) \\ &= M \circ R^m(\infty), \end{aligned}$$

es decir $b_0 = M^{-1}(\infty) = R^m(\infty) \in O_R^+(z_0)$ lo que es una contradicción. Luego como la órbita $O_S^+(a_0)$ no posee al infinito, entonces estamos en el caso anterior de (2) que nos garantiza que $\lambda_{a_m,S} = \lambda_{a_0,S}$, con $a_m = R^m(a_0)$, luego por la parte (1) tenemos que $\lambda_{z_m,R} = \lambda_{a_m,S}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, donde $z_m = R^m(\infty)$ y $a = M(R^m(\infty))$ en cada $m \in \mathbb{N}$. Por tanto $\lambda_{z_0,R} = \lambda_{a_0,S}$, $\lambda_{z_1,R} = \lambda_{a_1,S} = \lambda_{a_0,S}$,...,$\lambda_{z_{n-1},R} = \lambda_{a_{n-1},S} = \lambda_{a_0,S}$, terminando así la prueba.

□

Con esta proposición es posible hacer la siguiente definición:

Definición 5.9. Sea $R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una aplicación meromorfa y z_0 un punto sobre $\overline{\mathbb{C}}$. Decimos que la órbita $O_R^+(z_0)$ es atractora, si $|\lambda_{z_0}| < 1$; es superatractora , si $|\lambda_{z_0}| = 0$ o es repulsora si $|\lambda_{z_0}| > 1$.

Definición 5.10. Sea $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ un punto periódico y R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$, luego denotaremos por γ al conjunto $O_R^+(z_0)$. Llamaremos ciclo atractor al conjunto γ si este posee un punto atractor; se llamará al conjunto γ ciclo superatractor si el conjunto γ posee un punto superatractor; se llamará al conjunto γ ciclo repulsor, si dicho conjunto posee un punto repulsor; se llamará ciclo indiferente al conjunto γ si dicho conjunto posee un punto indiferente.

5.2. El conjunto de Julia y Fatou.

En esta sección requeriremos ciertas propiedades sobre las funciones analítica y ciertos aspectos de la teoría de funciones analíticas y meromorfas ya vistos en capítulos anteriores.

Definición 5.11. Sea R una función meromorfa en $\overline{\mathbb{C}}$. Entonces definiremos el conjunto de Julia en R, como la colección de todos los puntos $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}$, tal que la familia $\{R^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal en el punto ζ, a dicho conjunto lo denotamos por J_R, es decir:

$$J_R = \left\{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} : \{R^n(z) : n \in \mathbb{N}\}\, no\, es\, normal\, en\, \zeta \right\}$$

Definición 5.12. Sea R una función meromorfa en $\overline{\mathbb{C}}$. Entonces definiremos el conjunto de Fatou en R , denotado por F_R , como:

$$F_R = \overline{\mathbb{C}} - J_R$$

Proposición 5.5. *Sea R una función meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$, entonces se cumple lo siguiente:*

1. Para cada punto $\zeta \in F_R$ hay un abierto $N_\zeta \subset F_\zeta$, donde la familia $\{R^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ es normal .
2. F_R es un conjunto abierto y J_R es un conjunto cerrado.

Demostración. *(1)* Como $\zeta \in F_R$, entonces $\zeta \notin J_R$, es decir, $\{R^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en en el punto ζ, luego por la definición 4.2 tenemos que que existe un abierto N_ζ que depende de ζ, en la cual la familia $\{R^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ es normal sobre dicho abierto, luego por la proposición ( ) inferimos que la familia $\{R^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en cada punto $y \in N_\zeta$, esto nos dice que $y \notin J_R$, por tal $N_\zeta \subset F_R$.0

(2) F_R es abierto,dado que lo anterior nos dice que todos sus puntos de F_R, son puntos interiores, por tanto J_R es cerrado.

□

Ejemplo 5.3. Sea $R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, donde $R(z) = z^2$. Si $|z_0| < 1$, entonces existe un número $r_{z_0} > 0$, tal que el disco $D = D(z_0, r_{z_0}) \subset \{z : |z| < 1\}$, luego por el ejemplo 5.2 se infiere que la sucesión $\{R^n(z)\}$ converge esféricamente normalmente sobre D a la función 0, por tanto $\{|z| < 1\} \subset F_R$. De igual forma si $|z_0| > 1$, entonces en cualquier disco $D = D(z_0, r) \subseteq \mathbb{C} - \{z : |z| < 1\}$, la familia $\{R^n(z)\}$ converge esféricamente normalmente sobre D a la función idénticamente infinito, por tanto $\{z > 1\} \subset F_R$. Luego para $|z_0| = 1$ no hay disco sobre z_0 en el cual la familia $\{R^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ sea normal en dichos discos. Entonces el conjunto $\{|z| = 1\} = J_R$ es el conjunto de Julia para R, ya que F_R es todo $\overline{\mathbb{C}}$ salvo $\{|z| = 1\}$.

Proposición 5.6. *Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y M una transformación de Möbius cualquiera, entonces para $S = M \circ R \circ M^{-1}$, se cumple lo siguiente: $\zeta \in F_R$ si y solo si $M(\zeta) \in F_S$.*

Demostración. Sea $\zeta \in F_R$, entonces la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en el punto ζ, es decir por definición , existe una vecindad abierta Δ de ζ, en el cual la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal sobre Δ, luego como M es una transformación de Möbius. Entonces por demostrar que $\mathcal{F} = \left\{R^n \circ M^{-1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es normal en $M(\Delta)$. En efecto, sea $\left\{R^{n_i} \circ M^{-1}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera de funciones de la familia $\mathcal{F}$, luego la sucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in A}$, con $A\subset\mathbb{N}$, tal que converge esféricamente uniformemente a $\overline{R}$ en los subconjuntos compactos de Δ. Ahora sea K un compacto de $M^{-1}(\Delta)$, entonces $M(K)$ es un compacto de Δ, luego todo $a\in K$ se escribe como $a=M^{-1}(x_a)$, con $x_a\in M(K)$, por tanto para todo $a\in K$, se tiene que

$$\begin{aligned}\chi\left(R^{n_i}\circ M(a);\overline{R}\circ M(a)\right) &= \chi\left(R^{n_i}\circ M\left(M^{-1}(x_a)\right);\overline{R}\circ M\left(M^{-1}(x_a)\right)\right)\\ &= \chi\left(R^{n_i}(x_a);\overline{R}(x_a)\right) \qquad (5.2.1)\end{aligned}$$

además de la convergencia esférica normal de $\{R^{n_i}\}_{i\in A}$, tomamos un $\varepsilon>0$, para así encontrar un $n_0\in\mathbb{N}$, tal que si $n>n_0$ implique que $\chi\left(R^{n_i}(x_a);\overline{R}(x_a)\right)<\varepsilon$, para todo x_0 en el compacto $M(K)$. Por tanto de la ecuación 5.2.1, tenemos que la subsucesión $\left\{R^{n_i}\circ M^{-1}\right\}_{i\in A}$ de $\left\{R^{n_i}\circ M^{-1}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge esféricamente sobre cualquier compacto K en $M^{-1}(\Delta)$ a la la función $\overline{R}\circ M^{-1}$.

Por demostrar que $\mathcal{F}=\left\{M^{-1}\circ R^n : n\in\mathbb{N}\right\}$ es normal en Δ. En efecto, sea $\left\{M^{-1}\circ R^{n_i}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{F}$. Note que la sucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in A}$ que converge normalmente en Δ, es decir $R^{n_i}\xrightarrow{\chi}\overline{R}$ uniformemente en todos los compactos K de Δ, ahora como M es un una transformación de Möbius , entonces M es esféricamente continua, es decir continua con la métrica esférica χ, por tanto por espacios métricos tenemos que $M^{-1}(R^{n_i})\xrightarrow{\chi}M^{-1}\left(\overline{R}\right)$ uniformemente en cada compacto K de Δ.

Por tanto la familia $\left\{M\circ R^n\circ M^{-1} : n\in\mathbb{N}\right\}$ es normal sobre $M(\Delta)$ que es una vecindad abierta de $M(\zeta)$. El recíproco es de la misma manera, aprovechando el biholomorfismo de M.

□

Teorema 5.1. *Sea $R:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ es una aplicación meromorfa y z_0 un punto de $\overline{\mathbb{C}}$.*

(i) Si $Or^+(z_0)$ es una órbita periódica atractora (superatractora), entonces $Or^+(z_0)\subset F_R$.

(ii) Si $Or^+(z_0)$ es una órbita periódica repulsora, entonces $Or^+(z_0)\subset J_R$.

Demostración. (i) Primero supongamos que $z_0\neq\infty$ es un punto fijo atractor. Luego pasaremos a mostrar que $Or^+(z_0)\subset F_R$, note que $Or^+(z_0)=\{z_0\}$, pues z_0 es un punto fijo de R, siendo además por la hipótesis z_0 un punto atractor, entonces $R'(z_0)=\lambda_{z_0}<1$. Luego por la definición de derivada de R en el punto z_0 es posible escoger un $\sigma\in(\lambda_{z_0},1)$ y a su vez encontrar un disco $D=D(z_0,r)$ tal que

$$\left|\frac{R(z)-R(z_0)}{z-z_0}\right|<\sigma,\ \text{para todo } z\in D,\text{ con } z\neq z_0. \qquad (5.2.2)$$

Luego vemos que para todo $z \in D$ se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} |R(z) - R(z_0)| &= |R(z) - z_0| \\ &< \sigma |z - z_0| \\ &< \sigma r \\ &< r. \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

La primera igualdad la obtenemos de saber que z_0 es un punto fijo de R. La primera desigualdad es razón de la desigualdad en 5.2.2. La segunda desigualdad se debe a que $z \in D$, es decir, que $|z - z_0| < r$ y la tercera desigualdad es a razón de $\sigma < 1$. Luego Inferimos de la ecuación 5.2.3 que $R(D) \subset D$. Ahora probaremos por inducción que $|R^n(z) - z_0| < \sigma^n r$ en $z \in D$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es válido por la ecuación 5.2.3, ahora supongamos que para $n = h$ es válido, ahora pasaremos a probar que se cumple para $n = h + 1$. En efecto, por hipótesis tenemos que $\left|R^h(z) - z_0\right| < \sigma^h r$ en todo D, además $\sigma < 1$, entonces $\left|R^h(z) - z_0\right| < r$, es decir $R^h(z) \in D$. Luego aplicamos la desigualdad 5.2.2 para $R^n(z) \in D$ y dado que $z_0 = R(z_0)$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \left|\frac{R\left(R^h(z)\right) - z_0}{R^h(z) - z_0}\right| &= \left|\frac{R\left(R^h(z)\right) - R(z_0)}{R^h(z) - z_0}\right| \\ &< \sigma. \end{aligned}$$

Ahora de esta desigualdad junto a la hipótesis inductiva tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \left|R^{h+1}(z) - z_0\right| &< \sigma \left|R^h(z) - z_0\right| \\ &< \sigma \left[\sigma^h r\right] \\ &= \sigma^{h+1} r. \end{aligned}$$

Obteniendo la afirmación de la hipótesis inductiva.

Por otra parte es sabido por los números reales que dado un $\varepsilon > 0$ y un $\sigma < 1$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n > n_0$, se verifica que $\sigma^n r < \varepsilon$, luego junto con la parte inductiva implicará que $|R^n(z) - z_0| < \varepsilon$ para todo $z \in D$, siempre que $n > n_0$, además recuerde que $\chi(R^n(z), z_0) \leq |R^n(z) - z_0|$, para todo $z \in D \subset \mathbb{C}$. Así se obtiene la afirmación en que $\{R^n\}$ converge esféricamente uniformemente en D a z_0. Ahora tomemos una sucesión cualquiera de la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces a dicha sucesión la denotamos por $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, si $A = \{n_i : i \in \mathbb{N}\}$es finito encontraremos un n_{i_0}elemento dentro de A que se repite infinitas veces, por ello es posible encontrar una subsucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in N\subset\mathbb{N}}$, tal que converge esféricamente a $R^{n_{i_0}}$; ahora si A es infinito es posible encontrar una subsucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in N\in\mathbb{N}}$ de $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, tal que para todo $j, i \in N$ se tiene que $n_i < n_j$, siempre que $i < j$. Entonces como $\{R^{n_i}\}_{i\in N\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, tenemos que $\{R^{n_i}\}_{i\in N}$ converge esféricamente uniformemente sobre D y en particular converge esféricamente uniformemente sobre cualquier compacto $K \in D$, por tal la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en D y por consiguiente $z_0 \in F_R$. De lo último tenemos que $\{z_0\} = Or^+(z_0) \subset F_R$.

Continuando con la demostración, supongamos que el punto atractor z_0 esta contenido en $\mathbb{C}$ y es de orden m para R. Entonces es posible definir $S = R^m$ sobre $\overline{\mathbb{C}}$, luego por la parte anterior la familia $\{S^n : n \in \mathbb{N}\} = \{R^{nm} : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en cada punto $z_i \in O_R^+(z_0)$. Ahora terminemos la demostración haciéndola por contradicción, suponiendo que $O_R^+(z_0)$ no está contenida en F_R, entonces existe un punto z' en $O_R^+(z_0)$ tal que la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal en dicho punto. Note que $O_R^+(z') = O_R^+(z_0)$, por tal denotaremos a este punto z' como z_0, solo por fines prácticos y de de notación. Entonces para toda vecindad abierta D de z_0, la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal en D, es decir, que para todo D existe una sucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que no posee subsucesión alguna que converge esféricamente normalmente en D. Luego existe un $j \in \{0, 1, .., m-1\}$, tal que el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : \ n_i \equiv j \operatorname{mod} m\}$, denotado por A_j, es infinito, caso contrario la sucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tendrá una subsucesión convergente esféricamente normalmente . Dado que $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ no posee subsucesiones que convergen esféricamente normalmente, entonces la subsucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in A_j}$ de $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, tampoco posee subsucesiones que convergen esféricamente normalmente sobre D. Ahora observe que la subsucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in A_j}$ de $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ está en la familia $\left\{R^{nm+j} : n \in \mathbb{N}\right\}$, pues $n_i \in \mathbb{Z}m + j$, con $i \in A_j$, Por otro lado como $\{(R^m)^n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en $z_j = R(z_{j-1})$, entonces por la proposición (*), tenemos que $\left\{R^{mn+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es normal en z_{j-1} y así sucesivamente hasta tener que la familia $\left\{R^{mn+j} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sea normal en z_0. Entonces la sucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in A_j}$ de la familia $\left\{R^{mn+j} : n \in \mathbb{N}\right\}$, posee una subsucesión que converge esféricamente normalmente en algún disco D', que contiene a z_0, a una función meromorfa, lo que es una contradicción, pues $\{R^{n_i}\}_{i\in A_j}$ no posee subsucesión alguna que converge esféricamente normalmente sobre ningún disco abierto D. Por tanto $Or^+(z_0) \subset F_R$, terminando así la demostración.

Consideremos ahora el caso $z = \infty$. Tomemos una transformación de Möbius M tal que $M(\infty) = a$, luego $S(z) = M \circ R \circ M^{-1}(z)$ es una conjugada de R. Como el multiplicador es invariante por conjugación entonces se tiene que $\lambda_{\infty,R} = \lambda_{a,S} < 1$. Luego por lo anterior tenemos que $\{S^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en algún disco D centrado en a. Dado que $R^n(z) = M^{-1} \circ S^n \circ M(z)$, donde

M es un biholomorfismo,y debido a la proposición 5.6 se obtiene que la familia $\{R^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en una vecindad de $z = \infty$. Por tanto esto nos dice $Or^+(z_0) \subset F_R$.

(ii) Primero supongamos que $z_0 \neq \infty$ es un punto fijo de R repulsor, entonces se probará que $Or^+(z_0) = \{z_0\}$ está contenida en F_R. Primero afirmaremos que

$$[R^n(z_0)]' = (\lambda_{z_0})^n\,,\ n \in \mathbb{N} \tag{5.2.4}$$

En efecto, para $n = 1$ se cumple por la hipótesis pues $R'(z_0) = \lambda_{z_0}$. Ahora asumiremos que es cierto para $n = h$, para luego probar que también es válido para $n = h+1$, veamos

$$\begin{aligned}
\left[R^{h+1}(z_0)\right]' &= R'\left(R^h(z_0)\right)\left[R^h(z_0)\right]',\ \text{regla de la cadena}\\
&= R'(z_0)\,(\lambda_{z_0})^n,\ \text{por hip de inducción}\\
&= \lambda_{z_0}\,(\lambda_{z_0})^h,\quad \text{remplazando } R'(z_0) = \lambda_{z_0}\\
&= (\lambda_{z_0})^{h+1}
\end{aligned}$$

Esto termina con nuestra afirmación.

Ahora supongamos que $\{R^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en algún disco $D(z_0, r)$. Luego tomemos la sucesión $\{R^n\}$ de la familia $\{R^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$, entonces dicha sucesión posee una subsucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge esféricamente uniformemente a una función meromorfa $\overline{R}$, sobre el compacto $\overline{D}\left(z_0, \frac{r}{2}\right)$. Note que $\overline{R}(z_0) = z_0 \in \mathbb{C}$, ya que $z_0 = R^n(z_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces podemos encontrar un $r_0' < r$, tal que $\overline{R}$ es analítica sobre el disco cerrado $\overline{D'} = \overline{D'}(z_0, r'_0)$ y por ende $\overline{R}$ es acotada sobre dicho disco $\overline{D'}$. Luego por la proposición 2.3 parte (a) garantiza la existencia de un M y un $i_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$|R^{n_i}(z)| < M\ ,\ \text{si } i > i_0 \text{ y } z \in \overline{D'}.$$

Siendo posible aplicar la desigualdad de Cauchy en el punto $z_0 \in \overline{D'}$, y junto a la ecuación 5.2.4 se obtiene lo siguiente

$$(\lambda_{z_0})^{n_i} = [R^{n_i}(z_0)]' =< \frac{M}{r_0'}\ ,\ \text{si } i > i_0.$$

Es decir, $(\lambda_{z_0})^{n_i}$ es uniformemente acotado, además por hipótesis, se sabe que $|\lambda_{z_0}| > 1$ y por propiedad de los números reales, existe un $n_{i'}$, con $i' > i_0$, tal que $|(\lambda_{z_0})|^{n_{i'}} > \frac{M}{r_0'}$, siendo esto una contradicción. Teniendo así que la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal en z_0, Por lo tanto la órbita $\{z_0\} = Or^+(z_0)$ está en

J_R.

Ahora supongamos que el punto repulsor z_0 está en $\mathbb{C}$ y es un punto periódico de R de orden m. Supongamos el caso en que la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en algún disco $D(z_0, r_0)$. Luego por el caso anterior tenemos que la familia $\mathcal{F}_m = \{R^{nm} : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal en todo disco abierto, pues z_0 es un punto fijo repulsor de R^m, en particular familia $\mathcal{F}_m$, no es normal en $D(z_0, r_0)$. Por tal existe una sucesión $\{R^{mn_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ en la familia $\mathcal{F}_m$, tal que no posee subsucesión alguna que converge esféricamente normalmente en $D(z_0, r_0)$. Note que la sucesión $\{R^{mn_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ también es una sucesión de la familia normal $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ en $D(z_0, r_0)$, entonces se desprende el hecho de que la sucesión $\{R^{mn_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, posee una subsucesión que converge esféricamente normalmente en el disco $D(z_0, r_0)$, siendo así una contradicción, pues la sucesión $\{R^{mn_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ no tenía subsucesión alguna que converge esféricamente normalmente. Por lo cual $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal en z_0, lo mismo sucederá para cada $z_i \in O_R^+(z_0)$, pues $O_R^+(z_{0i}) = O_R^+(z_0)$. Por tanto $O_R^+(z_0) \subset J_R$.

Consideremos ahora el caso, en que $z_0 = \infty$. Tomemos una transformación de Möbius M tal que $M(z_0) = a$, luego $S(z) = M \circ R \circ M^{-1}(z)$ es una conjugada de R. Como el multiplicador es invariante por conjugación entonces se tiene que $\lambda_{\infty,R} = \lambda_{a,S} < 1$. Luego por lo anterior tenemos que $\{S^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal en todo disco D centrado en a. Dado que $R^n(z) = M^{-1} \circ S^n \circ M(z)$ con M biholomorfismo y aplicando la proposición 5.6, se obtiene que $\{R^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal en toda vecindad abierta de $z = \infty$. Por tanto esto nos dice $Or^+(z_0) \subset J_R$. □

Definición 5.13. Sea $R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una aplicación meromorfa y $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ un punto fijo de R, atractor. Definiremos la *cuenca atractora de z_0 en R*, denotado por $A_R(z_0)$, al siguiente conjunto.

$$\left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : R^n(z) \to z_0 \, cuando \, n \to \infty\right\}$$

Proposición 5.7. *Sea $R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una aplicación meromorfa y $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ un punto fijo atractor de R. Entonces el conjunto $A_R(z_0)$ es abierto.*

Demostración. Probaremos que todos sus puntos de $A(z_0)$ son puntos interiores. En efecto, Como z_0 es un punto atractor fijo de R , entonces por por la proposición anterior se deduce que existe un disco $D(z_0, r_0)$, tal $R^n(z) \to z_0$ uniformemente sobre dicho disco. Ahora sea $z' \in A(z_0)$, entonces por definición de este conjunto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $R^n(z') \in D(z_0, r_0)$. Luego por la continuidad esférica de R^n, podemos dar un $\varepsilon > 0$, con $D(R^n(z'), \varepsilon) \subset D(z_0, r_0)$ y a su vez encontrar un disco $D(z'; \delta)$, tal que $R^n(D(z'; \delta)) \subset D(R^n(z'), \varepsilon)$. Lo anterior nos dice que $D(z', \delta)$ está contenido en $A(z_o)$, por tal queda probado que z' es un punto interior y por tanto $A(z_0)$ es abierto. □

En general este conjunto $A(z_0)$ consiste de un número contable de dominios abiertos. Note que estos dominios contienen todos los puntos z cuya órbita reenviadora, $Or^+(z)$, se aproximan a z_0, como también están incluida la órbita hacia atrás , $O_R^-(z_0)$.

Note que $z_0 \in A_R(z_0)$, pues $R^n(z_0) = z_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y como $A_R(z_0)$ es abierto entonces existe una componente conexa abierta que contiene a z_0, por lo cual se hace posible la siguiente definición.

Definición 5.14. Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ un punto fijo atractor de R. Entonces definimos la inmediata cuenca atractora, denotada por $A_R^*(z_0)$, a la componente conexa de $A_R(z_0)$ que contiene a z_0.

Definición 5.15. Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ un punto periódico atractor(superatractor) de R, de periodo m y $O_R^+(z_0)$ su respectiva órbita periódica, denotada por γ. Entonces definimos la inmediata cuenca atractora de γ, denotada por $A^*(\gamma)$, al siguiente conjunto.

$$\bigcup_{i=0}^{m-1} A^*(z_i, R^m)$$

Donde $A^*(z_i, R^m)$ denota a la inmediata cuenca atractora $A_{R^m}^*(z_i)$, del punto fijo z_i de la aplicación R^m, pues

$$z_i \in O_R^+(z_0) = \left\{z_0, z_1 = R(z_0), ..., z_{n-1} = R^{m-1}(z_0)\right\}$$

.

Proposición 5.8.

5.3. Puntos Excepcionales.

Una inmediata consecuencia de el **F.N.T** es la proposición 5.9. Antes veamos la siguiente definición.

Definición 5.16. Sea R una función meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y Δ una vecindad en $\overline{\mathbb{C}}$. Entonces llamaremos conjunto de puntos excepcionales de R sobre Δ, denotado por $E_{R,\Delta}$, al siguiente conjunto

$$E_{R,\Delta} = \overline{\mathbb{C}} - \bigcup_{n\geq 1} R^n(\Delta).$$

Proposición 5.9. *Sea R una función meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y $\zeta \in J_R$. Si Δ es una vecindad arbitraria de ζ, entonces el conjunto $E_{R,\Delta}$ contiene a lo más dos puntos.*

Demostración. Sea Δ una vecindad arbitraria de ζ. Como $\zeta \in J_R$, entonces la familia $\{R^n_{|\Delta} : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal en el punto ζ. Luego por el TFN, la familia $\{R^n_{|\Delta} : n \in \mathbb{N}\}$ a lo más omite dos valores sobre $\overline{\mathbb{C}}$, es decir: Se presentan 3 casos, los cuales son

(1) $\bigcup\limits_{n\geq 1} R^n(\Delta) = \overline{\mathbb{C}}$, entonces para este caso inferimos que

$$E_{R,\Delta} = \overline{\mathbb{C}} - \bigcup_{n\geq 1} R^n(\Delta) = \emptyset$$

(2) $\bigcup\limits_{n\geq 1} R^n(\Delta) = \overline{\mathbb{C}} - \{a\}$ para un $a \in \mathbb{C}$, entonces para este segundo caso inferimos que

$$E_{R,\Delta} = \overline{\mathbb{C}} - \bigcup_{n\geq 1} R^n(\Delta) = \{a\}$$

(3) $\bigcup\limits_{n\geq 1} R^n(\Delta) = \overline{\mathbb{C}} - \{a, b\}$ para dos puntos distintos $a, b \in \mathbb{C}$, entonces para este segundo caso inferimos que

$$E_{R,\Delta} = \overline{\mathbb{C}} - \bigcup_{n\geq 1} R^n(\Delta) = \{a, b\}.$$

De estos tres últimos casos se infiere que E_Δ contiene a lo más 2 puntos distintos. □

Definición 5.17. Sea R una función meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y $\zeta \in J_R$, entonces definimos el siguiente conjunto $E_{R,\zeta}$, como :

$$E_{R,\zeta} = \bigcup E_{R,\Delta}$$

Donde la unión se extiende sobre todas la vecindades Δ de ζ.

Proposición 5.10. *Sea R una función meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y $\zeta \in J_R$. Entonces se cumple :*

1. $\overline{\mathbb{C}} - E_{R,\zeta} = \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : \forall \text{ vecindad } \Delta \text{ de } \zeta, \text{ existe un } z_1 \in \Delta \text{ y } z \in O^+_R(z_1)\right\}$

2. Si $\Delta_1 \subset \Delta_2$, entonces $E_{R,\Delta_2} \subset E_{R,\Delta_1}$.

3. $0 \leq n(E_{R,\zeta}) \leq 2$

4. $E_{R,\zeta}$ es independiente de las vecindades Δde ζ, para todo Δ suficientemente pequeño.

Demostración. (1) Es sabido que $\zeta \in J_R$, por tal $E_{R,\zeta}$ es como la definición anterior. Ahora tomemos un $w \in \overline{\mathbb{C}} - E_{R,\zeta}$, es decir; $w \notin E_{R,\zeta}$ lo que por definición significaría que $w \notin E_{R,\Delta}$ para toda vecindad Δ de ζ; que también, por definición de $E_{R,\Delta}$, significa que $w \in \bigcup R^n(\Delta)$ en toda vecindad Δ de ζ; que es lo mismo que decir que en toda vecindad Δ de ζ, existe un $z_1 \in \Delta$, tal que $w = R^n(z_1)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Lo que termina de decir que $w \in \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} \text{ tal que existe } z_1 \in \Delta \text{ vecindad de } \zeta \text{ y } z \in O^+_R(z_1)\right\}$.

(2) Sea Δ_1 y Δ_2 vecindades cualquiera de ζ, tal que $\Delta_1 \subset \Delta_2$, entonces se tiene que $R^n(\Delta_1) \subset R^n(\Delta_2)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, luego note que $\bigcup\limits_{n\geq 1} R^n(\Delta_1) \subset$

$\bigcup\limits_{n\geq 1} R^n(\Delta_2)$ y por propiedad de inclusión tenemos que $\overline{\mathbb{C}} - \bigcup\limits_{n\geq 1} R^n(\Delta_2) \subset \overline{\mathbb{C}} - \bigcup\limits_{n\geq 1} R^n(\Delta_1)$. Esto último significa que $E_{\Delta_2} \subset E_{\Delta_1}$, terminando así la demostración.

(3) Supongamos que $n(E_{\xi,R}) \geq 3$. Luego sean z_1, z_2 y z_3 tres puntos diferentes entre sí de $E_{\xi,R}$. Entonces existen E_{Δ_1}, E_{Δ_2} y E_{Δ_3} que contienen a z_1, z_2 y z_3 respectivamente, donde Δ_1, Δ_2 y Δ_3 son vecindades de de ζ. Ahora interceptemos estas 3 vecindades $\Delta = \Delta_1 \bigcap \Delta_2 \bigcap \Delta_3$. Luego como $\Delta \subset \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ se infiere que E_Δ contiene a z_1, z_2 y z_3, dado que (2) nos garantiza que $E_{\Delta_i} \subset E_\Delta$, para cada $i = 1, 2, 3$. Por tanto $n(E_\Delta) \geq 3$ lo cual contradice la proposición 5.9

(4) De acuerdo a la parte *(2)* tenemos que $E_{\xi,R} = \emptyset, \{z_1\}$ o $\{z_1, z_2\}$ .Si $E_{\xi,R} = \emptyset$, entonces para toda vecindad Δ de ζ se tiene que $E_\Delta = 0$, caso contrario al existir un $E_\Delta \neq 0$, $E_{\zeta,R}$ dejaría de ser vacío y por tal una contradicción. Luego si $E_{\xi,R} = \{z_1\}$, entonces existe una vecindad Δ de ζ, tal que $z_1 \in E_\Delta$, ahora tomemos una vecindad cualquiera Δ' de ζ, tal que $\Delta' \subset \Delta$, entonces por la parte (2) de esta proposición, nos garantiza que $E_\Delta \subset E_{\Delta'}$, luego se tiene que $z_1 \in E_{\Delta'}$, entonces $n(E_{\Delta'}) = 1$ ó 2, pero 2 no puede ser, ya que $E_{\zeta,R}$ tendría dos puntos, lo que sería una contradicción, ya que $E_{\xi,R}$ solo posee un sólo punto, por tal $E_\Delta = E_{\Delta'} = \{z_1\} = E_{\xi,R}$ para cualquier vecindad suficientemente pequeña de ζ. Por último si $E_\zeta = \{z_1, z_2\}$, entonces existe un Δ_1 y Δ_2 vecindad de ζ tal que $z_1 \in E_{\Delta_1}$ y $z_2 \in E_{\Delta_2}$. Luego es sabido que $\Delta_1 \cap \Delta_2 \subset \Delta_1, \Delta_2$ y por 2 tenemos que $E_{\Delta_1}, E_{\Delta_2} \subset E_{\Delta_1 \cap \Delta_2}$, esto nos dice que $\{z_1, z_2\} \subset E_{\Delta_1 \cap \Delta_2}$. Luego tomemos una vecindad cualquiera suficientemente pequeña Δ' de ζ, tal que $\Delta' \subset \Delta_1 \cap \Delta_2$, entonces se infiere por (2) que $E_{\Delta_1 \cap \Delta_2} \subset E_{\Delta'}$ infiriéndose que $\{z_1, z_2\} \subset E_{\Delta'}$. Por tanto como $n(E_{\Delta'}) \leq 2$, se obtiene que $E_{\zeta,R} = E_{\Delta'}$, para toda vecindad cualquiera Δ' suficientemente pequeña de ζ. Terminando así la demostración

□

Proposición 5.11. *Sea, R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y M una transformación de Möbius cualquiera, entonces para $S = M \circ R \circ M^{-1}$ se cumple lo siguiente: $a \in E_{R,\zeta}$ si y solo si $M(a) \in E_{S,M(\zeta)}$.*

Demostración. Primero notemos que por la proposición 5.6 se tiene que $M(\zeta) \in J_S$, pues $\zeta \in J_R$. Ahora tomaremos un $a \notin E_{R,\zeta}$, luego por la proposición 5.10, tenemos que en toda vecindad Δ de ζ , exista un z_1 en dicha vecindad que cumple $R^n(z_1) = a$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Ahora tomemos una vecindad Δ_M de $M(\zeta)$, entonces $M^{-1}(\Delta_M)$ es una vecindad de ζ, por tal existe un un $z_1 \in M^{-1}(\Delta_M)$, tal que $R^n(z_1) = a$, esto también nos dice que en la vecindad Δ_M existe un punto $M(z_1)$, tal que $S^n(M(z_1)) = M \circ R^n \circ M^{-1}(M(z_1)) = M(a)$, lo que nos dice que $M(a) \notin E_{S,M(\zeta)}$. La reciproca se precede de la misma forma, pues M es un biholomorfismo, quedando así probado la proposición. $\square$

Teorema 5.2. *Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$, con $\zeta \in J_R$ y $E_{R,\zeta} \neq \varnothing$, entonces se cumple lo siguiente:*

(i) Si $n(E_{R,\zeta}) = 1$, entonces $R(z)$es la conjugada para un polinomio.

(ii) Si $n(E_{R,\zeta}) = 2$ entonces $R(z)$ es la conjugada para la aplicación $z \to z^{\pm d}$, donde $d = deg(R)$.

Demostración. Primero afirmaremos que $R^{-1}(E_{R,\zeta}) \subseteq E_{R,\zeta}$, en efecto, para ello tomamos $w \in R^{-1}(E_{R,\zeta})$, entonces $R(w) \in E_{R,\zeta}$. Ahora supongamos que $w \notin E_{R,\zeta}$, luego de la proposición 5.10 parte (1) se infiere que: en toda vecindad Δ de ζ, existe un z_1 en Δ, tal que $w \in O_R^+(z_1)$. Como $w \in O_R^+(z_1)$ entonces $R(w) \in O_R^+(z_1)$, implicando que en toda vecindad Δ de ζ, existe un z_1 en Δ, tal que $R(w) \in O_R^+(z_1)$. Luego nuevamente por la proposición 5.10 parte (1) se tiene que $R(w) \in \overline{\mathbb{C}} - E_{R,\zeta}$, es decir $R(w) \notin E_{R,\zeta}$, lo que termina siendo una contradicción, quedando así probada la afirmación.

Segunda afirmación: $R(E_{R,\zeta}) = E_{R,\zeta}$. En efecto, como R no es constante, entonces R es suryectiva esto garantiza que R posea inversa a la derecha en todo $\overline{\mathbb{C}}$, en particular con $E_{R,\zeta} \subset \overline{\mathbb{C}}$, es decir $R\left(R^{-1}(E_{R,\zeta})\right) = E_{R,\zeta}$ y junto con la primera afirmación anterior, que nos dice: $R^{-1}(E_{R,\zeta}) \subset E_{R,\zeta}$ infiriendo así lo siguiente $E_{R,\zeta} \subset R(E_{R,\zeta})$, implicando que $n(E_{R,\zeta}) \leq n(R(E_{R,\zeta}))$. Además como $E_{R,\zeta}$ es finito y R una función entonces se cumple que $n(R(E_{R,\zeta})) \leq n(E_{R,\zeta})$, luego con la desigualdad anterior, se obtiene que $n(R(E_{R,\zeta})) = n(E_{R,\zeta})$, y a su vez notar que $R(E_{R,\zeta}) = E_{R,\zeta}$.

Como $E_{R,\zeta}$ consiste de un punto o dos puntos, entonces esto implica que $E_{R,\zeta}$ consiste de un punto fijo, o dos puntos fijos, o dos puntos periódicos fijos de periodo 2.

(i) Supóngase que $E_{R,\zeta}$ consiste de un punto fijo α de R y M una transformación de Möbius tal que $M(\alpha) = \infty$. Tercera afirmación: $R^{-1}(\alpha) = \alpha$, en efecto, $R^{-1}(\alpha) = R^{-1}(\{\alpha\}) = R^{-1}(E_\zeta) \subset E_\zeta = \{\alpha\}$, la inclusión se da por la primera afirmación, así se deduce que $R^{-1}(\alpha) \in \{\alpha\}$ y como α es un punto fijo de R, se obtiene la tercera afirmación. Cuarta afirmación: la aplicación racional en $\overline{\mathbb{C}}$

$$p(z) = M \circ R \circ M^{-1}(z)$$

no tiene polos en $\mathbb{C}$. En efecto, supongamos que existe un $z_0 \in \mathbb{C}$, tal que $p(z_0) = \infty$, entonces $M \circ R \circ M^{-1}(z_0) = \infty$, para así aplicar M^{-1} y tener que $R \circ M^{-1}(z) = \alpha$, es decir $R\left(M^{-1}(z_0)\right) = \alpha$. De esto último se infiere que $M^{-1}(z_0) \in R^{-1}(\{\alpha\})$ y de la tercera afirmación tenemos que $M^{-1}(z_0) \in \{\alpha\}$, es decir que $M^{-1}(z_0) = \alpha$, para así tener que $M(\alpha) = z_0 \in \mathbb{C}$, lo que es una contradicción, concluyendo que p no posee polo en $\mathbb{C}$. Luego como p es racional sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y no es constante, entonces p es suryectiva sobre todo $\overline{\mathbb{C}}$, teniendo así que $p(z) = \infty$, siempre que $z = \infty$, pues p no posee polo en $\mathbb{C}$. Por lo tanto la aplicación racional $p(z)$ posee un solo polo en $z=\infty$, infiriendo así que $p(z)$ es un polinomio.

(ii) Segundo caso, suponga que $E_{R,\zeta}=\{\alpha,\beta\}$, donde $\alpha\neq\beta$ y M una transformación de Möbius tal que $M(\alpha)=\infty$ y $M(\beta)=0$. Luego hacemos $p(z)=M\circ R\circ M^{-1}(z)$, donde analizaremos los siguientes dos casos (a) y (b) :

a) Primero consideremos el caso en que $E_{R,\zeta}=\{\alpha,\beta\}$ son puntos fijos de R. Quinta afirmación: $R^{-1}(\alpha)=\{\alpha\}$ y $R^{-1}(\beta)=\{\beta\}$, Sabemos que $R(\alpha)=\alpha$ y $R(\beta)=\beta$, y por la primera afirmación, tenemos que $R^{-1}(E_{R,\zeta})\subset E_{R.\zeta}$, entonces tenemos que $R^{-1}(\alpha)\in E_{R,\zeta}$, es decir que $R^{-1}(\alpha)=\alpha$ o $R^{-1}(\alpha)=\beta$, pero esta última no puede ser, pues de la suryectividad de R tenemos que $\alpha=R\left(R^{-1}(\alpha)\right)=R(\beta)=\beta$ siendo así una contradicción, de igual forma se precede para $R^{-1}(\beta)=\beta$. Sexta afirmación: afirmamos que $p(\infty)=\infty$ y $p(0)=0$. En efecto, $p(\infty)=M\circ R\circ M^{-1}(\infty)=M\circ R(\alpha)=M(\alpha)=\infty$, luego $p(0)=M\circ R\circ M^{-1}(0)=M\circ R(\beta)=M(\beta)=0$. Ahora veamos la prueba de que $p(z)$ es un polinomio, como $M(\alpha)=\infty$, $p(z)=M\circ R\circ M^{-1}(z)$ y $p(\infty)=\infty$ y $R^{-1}(\alpha)=\alpha$, siendo estas las hipótesis de la parte (i), entonces tenemos que $p(z)$ es un polinomio, su prueba se precede de la mis forma que en la parte *(i)*. Por otro lado veamos las raíces de $p(z)$, teniendo en cuenta que $M(\beta)=0$ y que $R^{-1}(\beta)=\{\beta\}$.

$$\begin{aligned}
0=p(z) &\iff 0=M\circ R\circ M^{-1}(z) \text{ aplicamos } M^{-1}\\
&\iff \beta=R\circ M^{-1}(z),\ \text{se infiere que } M^{-1}(z)\in R^{-1}(\beta)\\
&\iff \beta=M^{-1}(z),\ \text{ya que} R^{-1}(\beta)=\{\beta\}\\
&\iff z=M(\beta)=0,\ \text{por ser } M \text{ Möbius}
\end{aligned}$$

vemos que la única raíz de $p(z)$ es cuando $z=0$. Como $p(z)=M\circ R\circ M^{-1}(z)$ y el grado de R suponemos que es d, entonces para el polinomio $p(z)$, cero es un raíz con multiplicidad d, esto hace que $p(z)=kz^d$. Ahora tomando una nueva conjugación de $p(z)$ con una transformación de Möbius $M_0(z)=\frac{z}{k^{\frac{1}{d-1}}}$ se consigue un nuevo polinomio $q(z)$ conjugado por $R(z)$ de la siguiente forma $q(z)=z^d$.

b) Segundo caso, sea $E_\zeta=\{\alpha,\beta\}$ con $R(\alpha)=\beta$ y $R\{\beta\}=\alpha$. Afirmamos primeros que $R^{-1}(\alpha)=\{\alpha\}$ y $R^{-1}(\beta)=\{\beta\}$. En efecto, sabemos de la hipótesis que $R(\alpha)=\beta$ y $R\{\beta\}=\alpha$ y por la primera afirmación, tenemos que $R^{-1}(E_{R,\zeta})\subset E_{R.\zeta}$, entonces tenemos que $R^{-1}(\alpha)\in E_{R,\zeta}$, es decir que $R^{-1}(\alpha)=\beta$ o $R^{-1}(\alpha)=\alpha$; pero esta última no puede ser, pues de la suryectividad de R tenemos que $\alpha=R\left(R^{-1}(\alpha)\right)=R(\alpha)=\beta$ siendo así una contradicción, de igual forma se precede para $R^{-1}(\beta)=\alpha$. Ahora afirmamos que $p(0)=\infty$ y $p(\infty)=0$. En efecto $P(\infty)=M\circ R\circ M^{-1}(\infty)=M\circ R(\alpha)=M(\beta)=0$, luego $p(0)=M\circ R\circ M^{-1}(0)=M\circ R(\beta)=M(\alpha)=\infty$. Como $p(z)=M\circ R\circ M^{-1}(z)$ y $R^{-1}(\beta)=\alpha$, entonces $q(z)=1/p(z)$ es un polinomio. Veamos

$$
\begin{aligned}
\infty = 1/p(z) &\iff p(z) = 0 \\
&\iff 0 = M \circ R \circ M^{-1}(z) \ \text{ aplicamos } M^{-1} \\
&\iff \beta = R \circ M^{-1}(z), \ \text{ por ser } M \text{ Möbius} \\
&\iff \alpha = M^{-1}(z), \ \text{ ya que} R^{-1}(\beta) = \{\alpha\} \\
&\iff z = M(\alpha) = \infty, \ \text{ por ser } M \text{ Möbius,}
\end{aligned}
$$

Notemos que la única solución de $1/p(z) = \infty$ es cuando $z = \infty$ de acá inferimos $q(z) = 1/p(z)$ es un polinomio. Por otro lado, como $p(z) = M \circ R \circ M^{-1}(z)$ y $R^{-1}(\alpha) = \beta$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 = 1/p(z) &\iff p(z) = \infty \\
&\iff \infty = M \circ R \circ M^{-1}(z) \ \text{ aplicamos } M^{-1} \\
&\iff \alpha = R \circ M^{-1}(z), \ \text{ por ser } M \text{ Möbius} \\
&\iff \beta = M^{-1}(z), \ \text{ ya que} R^{-1}(\alpha) = \{\beta\} \\
&\iff z = M(\beta) = 0, \ \text{ por ser } M \text{ Möbius}
\end{aligned}
$$

Notemos que $q(z) = 0$ tiene una única raíz en cero y como $q(z) = \frac{1}{M \circ R \circ M^{-1}(z)}$ y R tiene grado d, entonces $q(z)$ tiene una raíz en cero de multiplicidad d, por la multiplicación de grados. Luego $q(z) = kz^d$. Esto dice que $p(z) = \frac{1}{kz^d}$ al igual que el primer caso, entonces escogemos una transformación de Möbius $M_1(z) = \frac{1}{k^{\frac{1}{d+1}} z}$, el cual hace que $r(z) = \frac{1}{z^d}$ sea una conjugada de $R(z)$. $\square$

Ejemplo 5.4. Sea $d \geq 2$ y $p_1(z) = kz^d$ y $p_2(z) = kz^{-d}$ sobre $\overline{\mathbb{C}}$. Entonces J_{p_1} y J_{p_2} están en $\mathbb{C} - \{0, \infty\}$. Luego, para cualquier $\zeta \in J_{p_i}$, con $i = 1, 2$, se cumple que $E_{p_i,\zeta} = \{0, \infty\}$ con $i = 1, 2$. En efecto, es sabido que el 0 y el infinito son puntos fijos de p_1, luego como p_1 es un polinomio de grado $d \geq 2$, se infiere que el multiplicador $\lambda_{0,p_1} = 0$ y $\lambda_{\infty,p_1} = \frac{1}{p_1'(\infty)} = 0$, siendo así que el 0 y el infinito son puntos superatractores, por tal las órbitas $O_p^+(0)$ y $O_p^+(\infty)$ son atractoras, para así aplicar el teorema 5.1, que nos sugiere el hecho que $\{0, \infty\} \subset F_{p_1}$, por tal J_{p_1} no puedo tomar dichos valores. Luego para J_{p_2}, notemos que el 0 y ∞ son puntos fijos de $(p_2)^2$ siendo este a su vez un polinomio de la misma forma que p_1, por tal se infiere que J_{p_2} no toma los valores $\{0, \infty\}$. Ahora veamos que $E_{p_1,\zeta} = \{0, \infty\}$, en efecto, es claro que $\underset{n\geq 0}{\cup} p_1^n(\mathbb{C} - \{0\}) = \mathbb{C} - \{0\}$, pues $p_1(0) = 0$ y p_1 no toma el infinito en $\mathbb{C}$, pues es un polinomio. Por tal si $\Delta = \mathbb{C} - \{0\}$, entonces se cumple que $E_\Delta = \{0, \infty\}$. Luego $E_{p_1,\zeta}$ es la unión de todos los E_Δ, con Δ vecindades arbitrarias de ζ, además $E_{p_1,\zeta}$ consta a lo más de dos puntos, por ello se infiere que $E_{p_1,\zeta} = \{0, \infty\}$, terminando así este ejemplo para $p_1(z) = kz^d$. Por último veamos que $E_{p_2,\zeta} = \{0, \infty\}$, en efecto $\underset{n\geq 0}{\cup} (p_2)^n(\mathbb{C} - \{0\}) = \mathbb{C} - \{0\}$, pues ($p_2(z) = 0$ si y solo si $z = \infty$) y ($p_2(z) = \infty$, si y solo si $z = 0$). Por tal si $\Delta = \mathbb{C} - \{0\}$, entonces se cumple que $E_\Delta = \{0, \infty\}$. Luego $E_{p_2,\zeta}$ es la unión de todos los E_Δ, con Δ vecindades arbitrarias de ζ, además $E_{p_2,\zeta}$ consta a lo más de dos puntos, por ello se infiere que $E_{p_2,\zeta} = \{0, \infty\}$, terminando así este ejemplo para $p_2(z) = kz^{-d}$. Con esto concluimos el ejemplo.

Observación 5.2. Note que en la parte (1) del teorema último, el polinomio conjugado por R, denotado por p, no se conjugada con la aplicación $p_1(z) = kz^{\pm d}$. En efecto, lo haremos por contradicción, es decir suponiendo que p_1 se conjuga con el polinomio p. Como R se conjuga con p, y p se conjuga con p_1, entonces la aplicación R se conjuga con p_1, por medio de una transformación de Möbius M. Luego por la parte (1) del teorema anterior, se tiene que $E_{R,\zeta} = \{a\}$, con $a \in \overline{\mathbb{C}}$, para así aplicar la proposición 5.11, la cual nos garantiza que: $E_{R,\zeta} = \{a\}$, con $\zeta \in J_R$, si y solo, si $E_{p_1,M(\zeta)} = \{M(a)\}$, con $M(\zeta) \in J_{P_1}$; significando que $n\left(E_{p_1,M(\zeta)}\right) = 1$. Además por el ejercicio anterior se cumplirá que $E_{p_1,M(\zeta)} = \{0, \infty\}$, pues $M(\zeta) \in J_{p_1}$, siendo una contradicción ya que $n\left(E_{p_1,M(\zeta)}\right) = 2$, terminando así la afirmación.

Ejemplo 5.5. Sea $p(z)$ un polinomio de grado mayor a 2 que no se puede conjugar con $kz^{\pm d}$, entonces J_p está en $\mathbb{C}$, además para cualquier $\zeta \in J_p$ se tiene que $E_{p,\zeta} = \{\infty\}$. En efecto, es claro que $\lambda_{p,\infty} = 0$, pues como el grado p es mayor a 2, tenemos que $p'(z)$ es de grado mayor a 1 , por tal $p'(\infty) = \infty$. Lo anterior nos dice que la órbita $O_p^+(\infty)$ es superatractora y por el teorema 5.1, se garantiza que dicha órbita está en F_p, es decir que $\infty \notin J_p$, esto infiere que $J_p \in \mathbb{C}$. Note que para todo $\zeta \in J_p$, se cumple que $\infty \in E_{p,\zeta}$, pues $\bigcup_{n\geq 0} P^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ y si tomamos $\Delta = \mathbb{C}$ vecindad para todo ζ, se obtiene que $E_\Delta = \{\infty\}$. Ahora $n(E_{p,\zeta}) \geq 1$ y si $n(E_{p,\zeta}) = 2$ sería una contradicción por el teorema precedente, pues p sería conjugado a $kz^{\pm d}$, lo cual va en contra de las características de $p(z)$, entonces $n(E_{p,\zeta}) = 1$, por tal $E_{p,\zeta} = \{\infty\}$ para todo $\zeta \in J_p$.

Corolario 5.1. *Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$ y $\zeta \in J_\zeta$, entonces se cumple lo siguiente (a) $E_{R,\zeta} \subseteq F_R$; (b) $E_{R,\zeta}$ es independiente del $\zeta \in J_R$ escogido.*

Demostración. (a)En la demostración del teorema anterior vimos que el conjunto $E_{R,\zeta}$ está formado por un punto fijo, o dos punto fijos, o dos puntos periódicos de orden 2, todos en ellos en R.

Supongamos que $E_{R,\zeta}$ consiste de un punto fijo α y M una transformación de Möbius, tal que $M(\alpha) = \infty$. Entonces por la parte (i) de la demostración del teorema anterior, se infiere que $p(z) = M \circ R \circ M^{-1}(z)$ es el polinomio conjugado de $R(z)$. Ahora afirmamos que ∞ es un punto fijo superatractor de $p(z)$. En efecto, $p(z)$ posee grado $d \geq 2$, pues R es de grado $d \geq 2$, Luego la derivada de $p(z)$ es de grado $d-1$, por tanto $p'(\infty) = \infty$, entonces $\lambda_{p,\infty} = \frac{1}{p'(\infty)} = 0$. Ahora aplicamos la invarianza de la conjugación, teniendo así que $0 = \lambda_{p,\infty} = \lambda_{R,\alpha}$, concluyendo así que el punto fijo α de R, es un punto superatractor de $R(z)$, así por el teorema 5.1, tenemos que $E_{R,\zeta} = \{\alpha\} \subset F_R$.

Ahora supongamos que $E_{R,\zeta}$, esté formado por dos puntos fijos de R, los cuales denotaremos por αy β, luego sea M una transformación de Möbius, tal que $M(\alpha)=\infty$ y $M(\beta)=0$. Entonces por la parte (ii) de la demostración del teorema anterior, tenemos dos subcasos. Primer subcaso, cuando estamos en la parte (a) de la demostración de (ii) del teorema anterior, lo cual nos dice que el conjunto $E_{R,\zeta}$ consta de dos puntos fijos de $R(z)$, el cual tiene a $p(z)=kz^d$, con k constante, como conjugado de R a través de M, siendo d el grado de R. Note que $p'(z)=dkz^{d-1}$, y como $d\geq 2$, entonces $\lambda_{p,0}=0$, $\lambda_{p,\infty}=\frac{1}{p'(\infty)}=0$. Nuevamente aplicamos la invarianza de la conjugación teniendo así que $\lambda_{p,0}=\lambda_{R,\beta}=0$ y $\lambda_{p,\infty}=\lambda_{R,\alpha}=0$. Esto nos dice que $E_{R,\zeta}$ está formado por 2 puntos fijos superatractores y por tal el teorema 5.1 nos garantiza que $E_{R,\zeta}\subset F_R$. Segundo subcaso, cuando estamos en la parte (b) de (ii) del teorema anterior, lo cual nos dice que el conjunto E_ζ consta de dos puntos periódicos de R de orden 2, el cual tiene a través de M como conjugado a la aplicación $p(z)=kz^{-d}$, donde k es constante y d el grado de R. Entonces tenemos que $p^2(z)=k^{1-d}\left(z^{d^2}\right)$ es el conjugado de R^2, luego al derivar tenemos que $\left(p^2(z)\right)'=k^{1-d}d^2z^{d^2-1}$, entonces se obtiene que $\lambda_{p^2,\infty}=\frac{1}{(p^2(0))'}=0$, $\lambda_{p^2,0}=\left(p^2(0)\right)'=0$, por ser $d\geq 2$. Nuevamente por la invarianza de la conjugada tenemos que $\lambda_{p^2,0}=\lambda_{R^2,\beta}=0$ y $\lambda_{p^2,\infty}=\lambda_{R^2,\alpha}=0$, esto nos dice que $E_\zeta=\{\alpha,\beta\}$ los puntos fijos de R de orden 2 son superatractores, por tal el teorema 5.1, nos dice que $E_{R,\zeta}\subset F_R$, terminando así la demostración. de la parte (a)

(b) Tomemos ζ_1,ζ_2 en J_R, ambos diferente. Primero supongamos que $E_{R,\zeta_1}=\{a\}$, luego tomemos la transformación de Möbius M, tal que $M(a)=\infty$, luego el teorema 5.2 en la parte (i), garantiza que $p(z)$, el conjugado de $R(z)$ por M, es un polinomio y la observación 5.2 nos dice que $p(z)$ no se conjuga con $kz^{\pm d}$, pudiendo así aplicar el ejemplo 5.5, que nos asegura que para todo $\zeta'\in J_p$, se cumple que $E_{p,\zeta'}=\{\infty\}$. Note la proposición 5.6, nos asegura que $M(\zeta_2)\in J_p$, pues $\zeta_2\in J_R$ y $R=M\circ R\circ M^{-1}$, infiriendo así por lo expuesto anteriormente que $E_{p,M(\zeta_2)}=\{\infty\}$. Por otra parte la proposición 5.11, nos dice que $z_0\in E_{R,\zeta_2}$ si y solo si $M(z)\in E_{p,M(\zeta_2)}=\{\infty\}$, esto nos dice que E_{R,ζ_2}, está formado por un solo elemento, además se tiene que $M(z)=\infty$, por tal $z_0=a$, es decir que $E_{R,\zeta_2}=\{z_0\}=\{a\}$. Pro tanto tenemos que $E_{R,\zeta_2}=E_{R,\zeta_1}$.

Ahora supongamos que $E_{R,\zeta_1}=\{a,b\}$, luego por el teorema 5.2 en la parte (ii), se tiene que $p_1(z)=kz^{\pm d}$ es el conjugado de R, por una transformación de Möbius M. Luego por la proposición 5.11 tenemos que

$$z\in E_{R,\zeta_1}=\{a,b\} \text{ si, y solo si } M(z)\in E_{p_1,M(\zeta_1)}$$

lo mismo sucede, para E_{R,ζ_2}, es decir

$$z\in E_{R,\zeta_2} \text{ si, y solo si } M(z)\in E_{p_1,M(\zeta_2)}$$

Notemos por la proposición 5.6, que $M(\zeta_2)$ y $M(\zeta_1)$ están en J_{p_1} y por el ejemplo 5.4, tenemos que para todo $\zeta\in J_{p_1}$ se cumple que $E_{p_1,\zeta}=\{0,\infty\}$, en particular para $M(\zeta_2)$ y $M(\zeta_1)$, entonces tenemos que $E_{p_1,M(\zeta_1)}=E_{p_1,M(\zeta_2)}=\{0,\infty\}$, de esto inferimos que $M(z)=0$ o $M(z)=\infty$, es decir $z=a$ y $z=b$, es decir que $E_{R,\zeta_1} = E_{R,\zeta_2}$. Por último si $E_{R,\zeta_1} = \emptyset$ entonces $E_{R,\zeta_2} = \emptyset$, pues de ser $n\left(E_{R,\zeta_2}\right) = 1$ ó 2 estaríamos en los casos anteriores en la cual nos aseguraría que $n\left(E_{R,\zeta_1}\right) = 1$ ó 2, lo que sería una contradicción , por tal $E_{R,\zeta_1} = E_{R,\zeta_2}$. $\square$

Como consecuencia de (b) nosotros podemos denotar al conjunto excepcionales de puntos de R por E_R .

5.3.1. Caracterización de J_R.

Ahora estamos en condiciones de afirmar una serie de propiedades que caractericen el conjunto de Julia J_R.

Teorema 5.3. *Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$, no constante, entonces tenemos las siguientes caracterizaciones sobre el conjunto J_R.*

(i) *$R^n\left(J_R\right) = J_R$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.*

(ii) *J_R es un conjunto no vacío y perfecto, es decir, J_R es igual a su conjunto de puntos acumulación.*

(iii) *Si J_R contiene un punto interior, entonces $J_R = \overline{\mathbb{C}}$.*

(iv) *Para cada $z \in J_R$, se cumple que $J_R = \overline{\bigcup_{n\geq 0} R^{-1}(z)}$. De esta igualdad, se infiere que $\infty \in F_R$.*

(v) *Si α es un punto fijo atractor de R, entonces $A(\alpha) \subseteq F_R$ y $\partial A(\alpha) = J_R$.*

(vi) *El conjunto de puntos respulsores fijos de todos los ordenes es denso en J_R.*

Demostración. (i) Primero afirmemos que $R\left(J_R\right) \subseteq J_R$. En efecto, tomemos $\zeta_1 \in R\left(J_R\right)$, entonces existe $\zeta \in J_R$, tal que $\zeta_1 = R(\zeta)$. Ahora supongamos que $\zeta_1 \notin J_R$, entonces por definición de J_R, la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en el punto ζ_1. Por otro lado, de la siguiente familia $\left\{R^{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$, tomaremos una sucesión cualquiera $\left\{R^{n_i+1}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$. Luego note que la siguiente sucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ está en la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$, siendo así posible la existencia de una subsucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in A'}$, con $A' \subset \mathbb{N}$, la cual converge esféricamente normalmente en ζ_1. Entonces podemos aplicar la proposición 4.4 que nos garantiza que la sucesión $\left\{R^{n_i+1}\right\}_{i\in A'}$ converge esféricamente normalmente en ζ, por tal esto nos dice que la familia $\left\{R^{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es normal en ζ , quedando probada la afirmación. En segundo lugar afirmaremos que $R^{-1}\left(J_R\right) \subseteq J_R$. En efecto, tomemos $\zeta_1 \in R^{-1}\left(J_R\right)$, entonces entonces existe $\zeta \in J_R$, tal que $\zeta = R(\zeta_1)$. Nuevamente supongamos que $\zeta_1 \notin J_R$, entonces por definición de J_R, la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en el punto ζ_1. Por otro lado en la siguiente familia $\left\{R^{n-1} : n \in \mathbb{N}\right\}$, tomaremos una sucesión cualquiera de dicha familia $\left\{R^{n_i-1}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$. Luego note que la sucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ está en la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$, siendo así posible la existencia de una subsucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in A'}$, $A' \subset \mathbb{N}$, la cual converge esféricamente normalmente en ζ_1, luego podemos aplicar la proposición 4.4 parte

(2), que nos garantiza que la sucesión $\left\{R^{n_i-1}\right\}_{i\in A'}$ converge esféricamente normalmente en ζ, significando que la familia $\left\{R^{n-1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es normal en ζ, lo que es una contradicción, entonces $\xi_1 \in J_R$, por tal queda probada la afirmación. Ahora apliquemos R a $R^{-1}(J_R) \subseteq J_R$, es sabido que R es suryectiva, entonces se tiene $J_R \subseteq R(J_R)$, luego este resultado junto con la primera afirmación nos da la igualdad $R(J_R) = J_R$. Por último, toda aplicación R cumple que $J_R \subseteq R^{-1}(R(J_R))$ y junto con la segunda afirmación tenemos la siguiente igualdad $J_R = R^{-1}(J_R)$. De lo anterior se obtiene que $R^n(J_R) = J_R$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, terminando la prueba.

Las dos igualdades juntas se denominan la invarianza completa de J_R. Notemos que F_R tiene la misma propiedad. En efecto $R(F_R) = R\left(\overline{\mathbb{C}} - J_R\right) = R\left(\overline{\mathbb{C}}\right) - R(J_R) = \overline{\mathbb{C}} - R(J_R) = \overline{\mathbb{C}} - J_R = F_R$, lo mismo $R^{-1}(F_R) = R^{-1}\left(\overline{\mathbb{C}} - J_R\right) = R^{-1}\left(\overline{\mathbb{C}}\right) - R^{-1}(J_R) = \overline{\mathbb{C}} - R^{-1}(J_R) = \overline{\mathbb{C}} - J_R = F_R$.

(ii) Primero probaremos que $J_R \neq \emptyset$. Supongamos lo contrario, entonces $F_R = \overline{\mathbb{C}}$, luego la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en todos los puntos de $\overline{\mathbb{C}}$. Después tomemos la sucesión $\{R^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces existe una subsucesión $\{R^{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{R^n\}$, que converge esféricamente uniformemente en todo los subconjuntos compactos de $\overline{\mathbb{C}}$, a una función límite S, la cual es meromorfas(racional), por el corolario 4.1. Luego asumiremos que la aplicación racional S posee grado k, entonces también para un n_i suficientemente grande se debe cumplir $deg(R^{n_i}) = k$, por otro lado sabemos que $d^{n_i} = deg(R^{n_i}) \to \infty$, cuando $i \to \infty$, esto será una contradicción, por tanto $J_R = \emptyset$.

En segundo lugar probaremos que J_R es un conjunto perfecto, es decir $J_R = J'_R$. Note que $J_R \subset J'_R$, pues J_R es un conjunto cerrado. Solo nos faltaría probar que $J'_R \subset J_R$. Para probar esta última inclusión probaremos primero la siguiente afirmación: Si $a \in J_R$, entonces existe un $b \in J_R$, tal que $a \in Or^+(b)$ y $b \notin Or^+(a)$. En efecto, en el caso que $a \in J_R$ y no sea punto periódico de R. Note que es posible encontrar un elemento en $\{z : R(z) = a\}$, ya que R es suryectiva, al cual denotaremos por b. Luego $b \notin Or^+(a)$ caso contrario existiría $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $R^{n_0}(a) = b$, infiriendo que $R^{n_0+1}(a) = a$, pues $R(b) = a$. Esto último nos dice que a es un punto periódico, siendo así una contradicción. Por otro lado en el caso que $a \in J_R$ y sea punto periódico de R de periodo n. Denotemos lo siguiente $S = R^n$ y consideremos la siguiente ecuación

$$S(z) = a$$

ahora supongamos que $S^{-1}(a) = \{a\}$, luego escogemos una transformación de Möbius M, con $M(a) = \infty$, además la aplicación conjugada $p(z) = M \circ S \circ M^{-1}(z)$, es un polinomio, pues no tiene polos en $\mathbb{C}$, en efecto. Sea $p(z) = \infty$, entonces $\infty = M \circ S \circ M^{-1}(z)$, luego aplicamos M^{-1}, teniendo así que $a = S \circ M^{-1}(z_a)$, luego como $S^{-1}(a) = \{a\}$, entonces se infiere que $a = M^{-1}(z_a)$, es decir que $z_a = \infty$, por tal la aplicación es un polinomio. Además es sabido que el punto $z_a = \infty$ es un punto fijo superatractor para $p(z)$, pues el grado de p es mayor a 2, del cual tenemos que $\lambda_{p,\infty} = 1/p'(\infty) = 0$. Luego por la parte 2 de la proposición 5.4 tenemos que $\lambda_{S,a} = \lambda_{p,\infty} = 0$ así, a es un punto superatractor, periódico de R con periodo n, para así, aplicar la parte (i) del teorema 5.1, garantizando que $O_R^+(a) \subset F_R$, en particular $a \in F_R$, lo cual contradice que $a \in J_R$. Entonces existe otro punto $b \neq a$, tal que $b \in S^{-1}(a)$, es decir que $R^n(b) = S(b) = a$, implicando que $a \in O_R^+(b)$. A la misma vez se cumple que $b \notin O_R^+(a)$, caso contrario existe un $m \in \mathbb{N}$, tal que $R^m(a) = b$, aplicando R^n a esta última igualdad se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} a = R^n(b) &= R^n(R^m(a)) \\ &= R^m(R^n(a)) \\ &= R^m(a) = b \end{aligned}$$

entonces se obtiene que $a = b$ lo cual es una contradicción. Esto termina nuestra primera afirmación.

Regresando a nuestra demostración, probaremos por último que para todo $a \in J_R$, a es un punto de acumulación de J_R. Tomemos una vecindad arbitraria Δ de a entonces es posible tomar un $b \in J_R$, tal que $b \notin Or^+(a)$ y $a \in Or^+(b)$. Note que $b \notin E_R$, en efecto, por el corolario 5.1 parte (i) se tiene que $E_R \subset F_R$, es decir si tomamos complemento, tenemos que $J_R = \overline{\mathbb{C}} - F_R \subset \overline{\mathbb{C}} - E_R$ y como $b \in J_R$, se infiere que $b \in \overline{\mathbb{C}} - E_R$, es decir que $b \notin E_R$. Ahora afirmamos que $b \in R^k(\Delta)$ para algún $k \in \mathbb{N}$, en efecto, caso contrario $b \notin \bigcup\limits_{k\geq 1} R^k(\Delta)$, es decir, que $b \in E_\Delta$ y como $E_\Delta \subset E_R$, se infiere que $b \in E_R$, siendo esto una contradicción. De la última afirmación junto con la proposición 5.10, nos aseguran que existe un$c \in \Delta$, tal que $R^k(c) = b$, observemos que $c \neq a$, pues caso contrario $b \in Or^+(a)$, siendo una contradicción. Además $c \in J_R$ caso contrario $c \in F_R$ y por la parte (i) de este teorema, tenemos que $b = R^k(c) \in F_R$, siendo así una contradicción, entonces $c \in J_R$. Ahora lo anterior se resume a que para todo elemento $a \in J_R$ y toda vecindad Δ arbitraria de a existe un $c \in \Delta$ tal que $c \in J_R$, por tal a es un punto de acumulación de J_R. Terminando así, la demostración de la parte (ii).

(iii) Supongamos que J_R contiene un punto interior, denotado por a. Luego es posible encontrar un disco abierto Δ que contiene a a, con $\Delta \subset J_R$. Entonces $\{R^n(z)\}$ no es normal en Δ y por el TFN para familias meromorfas, inferimos que $\bigcup\limits_{n>0} R^n(\Delta)$ omite a lo más dos puntos de $\overline{\mathbb{C}}$, implicando así que $\overline{\bigcup\limits_{n>0} R^n(\Delta)} = \overline{\mathbb{C}}$, además por (i) se tiene que $J_R = R^k(J_R)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y como $\Delta \subset J_R$, se obtiene $\bigcup\limits_{n>0} R^n(\Delta) \subset J_R$, esto implica que $\overline{\mathbb{C}} = \overline{\bigcup_{n>0} R^n(\Delta)} \subset \overline{J_R} = J_R$. Terminando así la prueba.

(iv) Fijemos un z cualquiera en J_R y para un w cualquiera en J_R tomemos la vecindad arbitraria Δ de w. Por el corolario 5.1 tenemos que $E_R \subset F_R$, implicando que $J_R = \overline{\mathbb{C}} - F_R \subset \overline{\mathbb{C}} - E_R$ y como $z \in J_R$, se obtiene que $z \in \overline{\mathbb{C}} - E_R$, es decir que $z \notin E_R$, Luego por la parte 1 de la proposición 5.10, aseguramos la existencia de un $\zeta \in \Delta$, tal que $z = R^k(\zeta)$ para algún k, infiriendo así que $\zeta \in \bigcup_{n>0} R^{-n}(z)$. En resumen para cada vecindad Δ de w, existe siempre un punto $\zeta \in \bigcup_{n>0} R^{-n}(z)$, es decir que $w \in \overline{\bigcup_{n>0} R^{-n}(z)}$, implicando que

$J_R \subset \overline{\bigcup_{n>0} R^{-n}(z)}$. Por otro lado de la parte (i) del teorema tenemos que $\bigcup_{n>0} R^{-n}(z) \subset J_R$, pues $z \in J_R$ y como J_R es cerrado entonces se cumple que $\overline{\bigcup_{n>0} R^{-n}(z)} \subset J_R$. Por tanto tenemos lo que queríamos $J_R = \overline{\bigcup_{n>0} R^{-n}(z)}$.

(v) Tomemos un $z \in A(\alpha)$. Como α es un punto fijo atractor de R es posible aplicar la parte (i) del teorema 5.1 que nos garantiza que $\alpha \in F_R$, además por ser F_R abierto existirá un disco $D(\alpha; r) \subset F_R$. Como $z \in A(\alpha)$ entonces se cumple que $R^n(z) \to \alpha$, cuando $n \to \infty$, lo que infiere que $R^n(z) \in D(\alpha; r)$ para todo n suficientemente grande, teniendo así que $R^n(z) \in F_R$ para un n suficientemente grande. Luego afirmamos que $z \in F_R$, en efecto, caso contrario $z \in J_R$ y por la invarianza de J_R, tenemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$ se cumple que $R^k(z) \in J_R$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A(\alpha) \subset F_R$. Por último probaremos que $\partial A(\alpha) = J_R$. En efecto, tomemos un $z \in J_R$ y también tomemos una vecindad cualquiera N de z, la. Como $A(\alpha) \subset F_R$ entonces $J_R = (F_R)^c \subset (A(\alpha))^c$, lo que nos dice que $N \bigcap A^c(\alpha) \neq \emptyset$. Como $z \in J_R$, entonces la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal en N, para así poder aplicar el TFN que nos dice que dicha familia omite a lo mas dos puntos, luego existe algún punto de N al iterarse con R estarán dentro de $A(\alpha)$, caso contrario omitiría más de 2 punto; implicando que $N \bigcap A(\alpha) \neq \emptyset$. Por tanto $z \in \partial A(\alpha)$ teniendo así que $J_R \subset \partial A(\alpha)$. Por otro lado, tomemos un $z \in \partial A(\alpha)$ y supongamos que la familia $\{R^n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en z, es decir, que dicha familia es normal en algún disco abierto N de centro en z. Primero tomaremos un disco disco abierto $D(\alpha, r)$ en $A(\alpha)$, por otro lado existe una subsucesión de $\{R^{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $\{R^n\}$ que converge esféricamente uniformemente sobre el disco $\overline{D}(z, r) \subset N$ a una función f meromorfa. Como $f(z) = \alpha$ y f meromorfa, entonces f es esféricamente continua en z, es decir, que para todo disco abierto $D(\alpha, r') \subset D(\alpha, r)$, existe un abierto $N' \subset \overline{D}(z, r)$ de centro z, tal que $f(N') \subset D(\alpha, r') \subset D(\alpha, r) \subset A(\alpha)$, esto significa que $N' \subset A(\alpha)$, pues $f(z) = \lim R^n(z) \in A(\alpha)$, para cada $z \in N'$, es decir, que para un n suficientemente grande tenemos que $R^n(z) \in A(\alpha)$, en cada $z \in N'$; siendo esto una contradicción, pues $z \in \partial A(\alpha)$, entonces para cada N' vecindad abierta de centro z, existen puntos que no están en $A(\alpha)$. De esto inferimos que $\partial A(z) \subset J_R$ y por tanto $\partial A(z) = J_R$.

(vi) Esta última parte necesita de ciertos resutaldos que desarrollaremos más adelante. □

Para terminar de probar la parte (vi), tenemos que tener en cuenta que el conjunto de puntos periódicos repulsores están en J_R, debido al teorema 5.1, luego como J_R es cerrado se tiene que:

$$\overline{\{puntos\ periodicos\ respulsores\}} \subset J_R,$$

luego el teorema 5.4, el cual se probará más adelante, nos garantiza que:

$$\{puntos\ periodicos\ respulsores\} \subset J_R \subset \overline{\{puntos\ periodicos\}}$$

Note que la diferencia entre conjunto de puntos periódicos y el conjunto de puntos periódicos repulsores es el conjunto de puntos periódicos atractores e indiferentes. Ahora para terminar de probar (vi), solo tenemos que probar que el conjunto de puntos periódicos atractores e indiferentes sea finito. Nos centraremos en probar a continuación que el conjunto de puntos periódicos es finito. La prueba de que el conjunto de puntos periódicos indiferentes sea finito, no se desarrollará en este trabajo, dado que escapa de los alcances de este trabajo, para la prueba ver Alan F. Beardon Iteration of Rational Functions sección 9.6.

Valores críticos y puntos críticos.

Definición 5.18. Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$. Dado un $v \in \overline{\mathbb{C}}$, decimos que el punto $c \in \overline{\mathbb{C}}$ es un *punto crítico de* R, si c es raíz de la ecuación $R(z) - v = 0$ con multiplicidad $m \geq 2$. El número v es llamado valor crítico de R. Denotaremos por C_R al conjunto de puntos críticos de R y por V_R al conjunto de valores críticos de R.

Ahora veamos la siguiente proposición

Proposición 5.12. *Sea R una aplicación meromorfa sobre $\overline{\mathbb{C}}$. Luego el cardinal del conjunto C_R, cumple las siguientes propiedades:*

1. Sea $a \in \mathbb{C}$ un punto analítico de R, entonces a es un punto crítico de R si y solo si $R'(a) = 0$.

2. Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ un polo de R, entonces a es punto crítico de R, si y solo si $\left[\frac{1}{R(z)}\right]' = 0$

3. Sea $R(\infty) \in \mathbb{C} - \{0\}$, entonces infinito es crítico si y solo si $\underset{z\to\infty}{Lim} R'(z) z^2 = 0$ en infinito.

4. $n(C_R) \leq 2(d-1)$, donde $d = deg(R)$.

Demostración. Recordemos que el grado de R es mayor o igual que 2

Prueba de **(1)**. Sea $a \in \mathbb{C}$ un punto analítico de R, con $R(a) = v_a$, entonces R se reescribe como $R(z) - v_c = (z-a)^n h(z)$ donde h es holomorfa en a con $h(a) \neq 0$ y $n \geq 1$. Ahora derivemos R en a, teniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} (R(z) - v_a)' &= ((z-a)^n h(z))' \\ R\text{'}(z) &= n(z-a)^{n-1} h(z) + (z-a)^n h'(z). \end{aligned}$$

Note que $R'(a) = \lim_{z\to a} R'(z)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= R'(a) \\ &= \lim_{z\to a}\left(n(z-a)^{n-1}h(z) + (z-a)^n h'(z)\right) \\ &= \lim_{z\to a}\left(n\frac{(z-a)^n}{(z-a)}h(z) + (z-a)^n h'(z)\right) \\ &= nh(a)\lim_{z\to a}\left(\frac{(z-a)^n}{(z-a)}\right) \end{aligned}$$

note que si $n = 1$, entonces el límite $nh(a)\lim_{z\to a}\left(\frac{(z-a)}{(z-a)}\right) = nh(a) \neq 0$, por tal solo se cumple para $n \geq 2$. Luego el recíproco se prueba de la misma forma. Por tal tenemos la parte 1 probada.

Prueba de **(2)**. Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ un polo de R, si $a \in \mathbb{C}$, entonces R se reescribe como $R(z) = \frac{1}{(z-a)^n}h(z)$, donde h es holomorfa en a con $h(a) \neq 0$ y $n \geq 1$. Ahora derivemos $\frac{1}{[R(z)]}$ en a, teniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{[R(z)]}\right)' &= \left(\frac{(z-a)^n}{h(z)}\right)' \\ &= \frac{n(z-a)^{n-1}h(z) - (z-a)^n h'(z)}{[h(z)]^2}. \end{aligned}$$

ya que $h(a) \neq 0$, entonces podemos inferir al igual que el la prueba (1) que $\left(\frac{1}{[R(a)]}\right)' = 0$ si y solo si $n \geq 2$, es decir a un punto crítico. Si $a = \infty$, entonces reescribimos $g(z) = R(1/z)$ el cual tiene un polo en $a = 0$, por tal

Prueba de **(3).** Sea infinito un punto analítico, para R, entonces $R(\infty) = v \in \mathbb{C}$, luego R se reescribe de la siguiente manera $g(z) = R(1/z)$ teniendo así que $g(z) - v = z^n h(z)$ donde h es holomorfa en 0 con $h(0) \neq 0$ y $n \geq 1$. Ahora derivemos g en 0, teniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} (g(z) - v_a)' &= (z^n h(z))' \\ g'(z) &= nz^{n-1}h(z) + z^n h'(z). \end{aligned}$$

Note que $g'(0) = 0$ si y solo si $n \geq 2$, es decir a un punto crítico. Note que $g'(0) = \underset{z\to\infty}{Lim} R'(z) z^2$.

Prueba de **(4)**. Sea R una función meromorfa entonces R se reescribe como $R = \frac{p}{q}$, el cociente de dos polinomios , donde $p(z) = k(z-a_1) \times .. \times (z-a_n)$ y $q(z) = (z-b_1) \times ... \times (z-b_m)$. Tenemos tres casos. Primer caso si $m > n$, entonces buscaremos los puntos críticos en las siguientes ecuaciones $R'(z) = 0$ y $\left(\frac{1}{R(z)}\right)' = 0$, lo que implica que $p'(z)q(z) - q'(z)p(z) = 0$, para ambas igualdades. Luego la última ecuación implica que a lo más existen $m + n - 1$ soluciones, en $\mathbb{C}$, siendo estos a su vez puntos críticos de acuerdo a la prueba de

(1) y (2) de esta proposición. Si infinito es un punto crítico entonces $R(\infty) = 0$, pues $m > n$, luego por la observación 5.1 el orden del infinito es $m - n \geq 2$, por tal tenemos que a lo más existen $m + n$ puntos críticos, luego por la última desigualdad tenemos que a lo más existen $2(m-1)$ puntos críticos. Si infinito no es punto crítico entonces tenemos que $m - n = 1$, luego como a lo más existen $m + n - 1$ puntos críticos, se infiere de la última igualdad que a lo más existen $2(m-1)$ puntos críticos. Lo mismo sucede con $m < n$. Ahora para $m = n$ tenemos que los puntos críticos en $\mathbb{C}$, se encuentran en la solución de $R'(z) = 0$ y $\left(\frac{1}{R(z)}\right)' = 0$, lo que implica que $p'(z)\,q(z) - q'(z)\,p(z) = 0$ para ambos casos. Ahora a lo más habrá $2(m-1)$ soluciones, es decir, puntos críticos en $\mathbb{C}$. En efecto, note que si ∞ es un punto crítico es posible aplicar la parte (3) infiriendo así que $\frac{p'(z)q(z)-q'(z)p(z)}{q^2(z)} \times z^2 = 0$, luego si $p'(z)\,q(z) - q'(z)\,p(z)$ es de grado $2(n-1)$, sería una contradicción. por tal $p'(z)\,q(z) - q'(z)\,p(z)$ posee un grado menor que $2(n-1)$ infiriendo así, que junto a infinito R posee a lo más $2(n-1)$ puntos críticos . Ahora si ∞ no es crítico se tiene que $p'(z)\,q(z) - q'(z)\,p(z)$ es de grado $2(n-1)$ infiriendo así que a lo más existen $2(n-1)$ puntos críticos en $\mathbb{C}$ sin contar a infinito ya que en este caso infinito no es un punto crítico. Por tanto se infiere que en los tres casos existen a lo más $2(n-1)$ puntos críticos. □

Teorema 5.4. $J_R \subseteq \overline{\{puntos\ periódicos\}}$

Demostración. Definimos el subconjunto K_R de J_R por

$$K_R = J_R - \left(\left\{Valores\ críticos\ de\ R^2\right\} \cup \{\infty\} \cup \left\{R^{-2}(\infty)\right\}\right).$$

Como J_R es un conjunto perfecto y K_R difiere de J_R por solo un subconjuntos finito, entonces será suficiente probar que $K_R \subseteq \overline{\{puntos\ periódicos\}}$. Sea $w \in K_R$ y considere un conjunto abierto V que contiene a w. Afirmamos que $R^{-2}(\{w\})$ posee al menos 4 puntos distintos, en efecto, como $d \geq 2$, entonces $R^2(z) = w \in \mathbb{C}$, posee $2d$ raíces contadas con multiplicidad, además $R^2(\infty) \neq w$, entonces como cada raíz a_w de $R^2(z) - w$ tiene multiplicidad 1, se tiene por tanto que existen al menos 4 raíces, puntos críticos, diferentes. Denotemos tres de estos por $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ los cuales son distintos de w. Luego, es posible encontrar tres vecindades N_1, N_2, N_3 de $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ respectivamente disjuntos dos a dos, tal que $R^2 : N_i \to V' \subseteq V$ sea homeomorfismo , y $S_i : V' \to N_i$ la inversa de $R^2|N_i$, $i = 1, 2, 3$. Ahora supongamos que para todo $z \in V'$

$$R^n(z) \neq S_i(z)\,, \quad n \geq 1,\ i = 1, 2, 3.$$

Entonces $\{R^n\}$ es normal en V' por el teorema 4.4. Luego esto último es una contradicción, pues $w \in J_R$. Como consecuencia existe algún $z \in V'$ y un $m \geq 1$ tal que $R^m(z) = S_i(z)$ para algún $1 \leq i \leq 3$. Por lo tanto

$$R^{m+2}(z) = R^2 \circ S_i(z) = z,$$

además $z \in V' \subseteq V$ es un punto periódico de R; pudiendo concluir que $K_R \subseteq \{puntos\ periódicos\}$ ya que para toda vecindad abierta V de w, se tiene que $V \bigcap \{puntos\ periódicos\} \neq \emptyset$. □

Nosotros necesitamos saber si el si el número de ciclos atractivos de R es finito o no. Para ello está el siguiente teorema.

Teorema 5.5. *El número de ciclos atractores de R es a lo más $2(d-1)$, donde $d = deg(R)$.*

Demostración. Afirmaremos que para cada ciclo atractivo γ , la inmediata cuenca de atracción $A^*(\gamma)$ contiene al menos un punto crítico. Esto nos permitirá terminar la demostración pues solo hay $2(d-1)$ puntos críticos. En efecto, Considere primero el caso donde α es un punto fijo atractor de orden uno y supóngase que $A^*(\alpha)$ no contiene valores críticos, entonces R tiene inversa local en cada punto de $R^{-1}(\alpha)$, pues para cada elemento en $a_w \in R^{-1}(\alpha)$ se cumple que $R'(a_w) \neq 0$, por ser este a su vez un punto crítico. Ahora tomemos un disco abierto N de centro α, tal que $N \subseteq A^*(\alpha)$ y como $R(\alpha) = \alpha$ existe una inversa local $R^{-1}_{|\Omega_\alpha} : \Omega_\alpha \subset N \to V_\alpha$ difeomorfa, donde Ω_α es vecindad abierta de α, denotaremos por R_*^{-1} a dicha inversa. Entonces R_*^{-1} puede ser extendido a una función meromorfa en N, debido a la ausencia de valores críticos en N , que hacen que R^{-1} sea localmente inversa en N, que a su vez es conexo, permitiendo así aplicar el al teorema de Monodromia. Luego como $R \circ R_*^{-1} = id$ para cada $x \in \Omega_\alpha$, entonces por el teorema de identidad, tenemos que $R \circ R_*^{-1} = id$ en todo N de donde se infiere que $R_*^{-1}(N) \subset N \subset A^*(\alpha)$. Similarmente podemos definir las funciones

$$R_*^{-n}(z) = R_*^{-1}\left(R_*^{-(n-1)}(z)\right), \quad n = 2, 3, ..., \quad z \in N,$$

También es note que $R_*^{-n}(z) \subseteq A^*(\alpha)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Todo esto resulta ser una familia $\{R_*^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ de funciones meromorfas definidas sobre N, dicha familia a su vez esta en $A^*(\alpha)$, donde se infiere que la familia $\{R_*^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ omite amenos tres valores distintos, pues por el teorema 5.3 se tiene que $\emptyset \neq J_R \subset \left(\overline{\mathbb{C}} - A^*(\alpha)\right)$ y J_R es un conjunto infinito ya que $J_R = J'_R$. Por tanto decimos que la familia $\{R_*^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en N. Por último afirmamos que o α es un punto fijo repulsor de R_*^{-1}. En efecto, pues $R_*^{-1} = R^{-1}$ en Ω_α con $R'(\alpha) < 1$, teniendo así que $\left[R_*^{-1}(\alpha)\right]' = \left[R^{-1}(\alpha)\right]' = \frac{1}{R'(R^{-1}(\alpha))} = \frac{1}{R'(\alpha)} > 1$, siendo así α un punto fijo repulsor de R_*^{-1} y por el teorema 5.1 iten ii tenemos que $\alpha \in J_{R_*^{-1}}$. Pero la normalidad de $\{R_*^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ en N contradice el hecho que $\alpha \in J_{R_*^{-1}}$. Por tanto $A^*(\alpha)$ contiene al menos un valor crítico.

En el caso que α sea un punto fijo de orden $k+1$ de R , tenemos que α genera un ciclo atractor $O_R^+(\alpha) = \{\alpha, \alpha_1, ...\alpha_k\} \in \mathbb{C}$, el cual denotaremos por γ. Nuevamente supondremos que $A^*(\gamma)$ no posee puntos críticos. Construiremos las funciones R_*^{-n} con $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, tomemos un disco abierto N en $A^*(\gamma)$, el cual contiene a α. Es sabido que α está en N y a su vez no es valor crítico que cumple $R(\alpha_k) = \alpha$, por tal razón α_k es un punto critico, del cual se infiere que $R'(\alpha_k) \neq 0$. Entonces por el T.F.I existe un abierto $\Omega_k \subset A^*\left(\alpha_k, R^k\right)$, que contiene a α_k, y también existe un abierto $V_k \subset N$ tal que $R|_{\Omega_k} : \Omega_k \to V_k$ es un difeomorfismo, luego $\left(R|_{\Omega_k}\right)^{-1} : V_k \subset N \to \Omega_k$ es la inversa del difeomorfismo anterior. Como en N todos sus elementos son valores críticos, entonces estos valores poseen inversa local R^{-1}, cuya preimagen se encuentra en $A^*\left(\alpha_k, R^k\right)$, por tal se puede aplicar el teorema de Monodromia que nos permite extender $\left(R|_{\Omega_k}\right)^{-1}$definida en $V_k \subset N$ a una función meromorfa definida sobre todo N, denotada por R_*^{-1} tal que $R_*^{-1}|_{V_k} = \left(R|_{\Omega_k}\right)^{-1}$ en V_k. Afirmaremos que $R_*^{-1}(N) \subset A^*\left(\alpha_k, R^k\right)$, en efecto, como $R \circ \left(R|_{\Omega_k}\right)^{-1} = id$ sobre V_k, entonces $R \circ R_*^{-1} = id$ sobre V_k; luego por el teorema de la identidad tenemos que $R \circ R_*^{-1} = id$ sobre N, lo que implica que$R_*^{-1}(N) \subset N$ infiriendo así que $R_*^{-1}(N) \subset A^*\left(\alpha_k, R^k\right)$. Ahora construiremos de las misma forma a R_{**}^{-2}, primero tomemos el abierto $R_*^{-1}(N)$ que contiene a su vez a α_k, como $R(\alpha_{k-1}) = \alpha_k$ y α_k no es un valor crítico entonces se tiene que $R'(\alpha_{k-1}) \neq 0$. Luego es posible aplicar el T.F.I al punto α_{k-1}, es decir, existe un abierto $\Omega_{k-1} \subset A^*\left(\alpha_{k-1}, R^k\right)$ con $\alpha_{k-1} \in \Omega_{k-1}$ y también un abierto $V_{k-1} \subset R_*^{-1}(N)$ tal que $R|_{\Omega_{k-1}} : \Omega_{k-1} \to V_{k-1}$ es un difeomorfismo, luego $\left(R|_{\Omega_{k-1}}\right)^{-1} : V_{k-1} \to \Omega_{k-1}$ es la inversa del difeomorfismo anterior. Después como en $R_*^{-1}(N) \subset A^*\left(\alpha_k, R^k\right)$, entonces todos sus elementos no son valores críticos, entonces estos valores poseen inversa local R^{-1}, cuya preimagen se encuentra en $A^*\left(\alpha_{k-1}, R^k\right)$, por tal se puede aplicar el teorema de Monodromia que nos permite extender $\left(R|_{\Omega_{k-1}}\right)^{-1}$definida en V_{k-1} a una función meromorfa definida sobre todo $R_*^{-1}(N)$, denotada por R_{**}^{-2} tal que $R_{**}^{-2}|_{V_{k-1}} = \left(R|_{\Omega_{k-1}}\right)^{-1}$ en V_{k-1}. Afirmaremos que $R_{**}^{-2}(N) \subset A^*\left(\alpha_{k-1}, R^k\right)$, en efecto, como $R \circ R_{**}^{-2} = R \circ \left(R|_{\Omega_{k-1}}\right)^{-1} = id$ sobre V_{k-1}, entonces $R \circ R_{**}^{-2} = id$ sobre V_{k-1}; luego por el teorema de la identidad tenemos que $R \circ R_{**}^{-2} = id$ sobre $R_*^{-1}(N)$, lo que implica que$R_{**}^{-2}\left(R_*^{-1}(N)\right) \subset R^{-1}\left(R_*^{-1}(N)\right)$ y como es sabido que $R_*^{-1}(N) \subset A^*\left(\alpha_k, R^k\right)$se puede inferir que $R_{**}^{-2}\left(R_*^{-1}(N)\right) \subset A^*\left(\alpha_{k-1}, R^k\right)$. Por consiguiente definimos R_*^{-2} como la siguiente composición $R_{**}^{-2} \circ R_*^{-1}$ en N. Luego seguimos así sucesivamente, pudiendo construir la siguiente familia $\{R_*^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ en N , donde siempre tendremos que

$$R_*^{-1}(\alpha) = \alpha_k;\ R_*^{-2}(\alpha) = \alpha_{k-1};\ .....;\ R_*^{-k}(\alpha) = \alpha$$

Ahora afirmaremos que α es un punto repulsor de R_*^{-k}. En efecto, sabemos que $R_*^{-k}(z) = \left(R|_{\Omega_1}\right)^{-1} \circ .. \circ \left(R|_{\Omega_k}\right)^{-1}$ en la vecindad vecindad V_k de α en donde está bien definida como función esto es por la forma en que se construyo R_*^{-k} por consiguiente $\left[R_*^{-k}(\alpha)\right]' = \left[\left(R|_{\Omega_1}\right)^{-1} \circ .. \circ \left(R|_{\Omega_k}\right)^{-1}\right]' = \frac{1}{[R^k(z)]'|_{z=R^{-k}(\alpha)}} = \frac{1}{[R^k(z)]'|_{z=\alpha}} > 1$ ya que $\left[R^k(z)\right]'|_{z=\alpha} < 1$. Afirmaremos también que $\{R_*^{-n}\}$ en N omite al menos 3 puntos. En efecto, pues solo tenemos que verificar que la inmediata cuenca de atracción $A^*(\gamma)$, omite amenos tres puntos, en efecto hallemos las raíces de la siguiente función $f(z) = R^k(z) - z$ tenemos que la función $f(z)$ tiene mínimo 2 raíces diferente, la primera raíz es $z = \alpha$ con multiplicidad 1 pues, $f'(\alpha) = \left[R^k(\alpha)\right]' - 1 \neq 0$ ya que $\left[R^k(\alpha)\right]' \neq 1$; luego

$R^k(z) - z = 0$ posee al menos $2k(k \geq 2)$ raíces contadas con multiplicidad y como α es una con multiplicidad 1, entonces es necesario que exista otra raíz, denotada por $z = \beta \neq \alpha$, note que $\beta \notin A^*(\gamma)$. Por otro lado resolvamos la ecuación $R^k(z) = \beta$ bien tiene como raíz a $z = \beta$ si tiene multiplicidad mayor a uno, entonces sera una vacía de atracción para R^k entonces el problema tendrá infinitos puntos que no pertenecen a $A^*(\gamma)$ de ser que $z = \beta$ posea solo una multiplicidad entonces eso significa que existe un $z = \omega \neq \beta$ y si resolvemos de nuevo la siguiente ecuación $R^k(z) = \omega$ tenemos que tiene al menos una raíz $z = \lambda \notin \{\beta, \omega\}$ así se tiene que la inmediata cuenca de atracción $A^*(\gamma)$ no posee tres puntos, entonces la familia $\{R_*^{-n}\}$ en N, no posee al menos tres puntos, por tanto $\{R_*^{-n}\}$ es normal en N y esto es una contradicción, ya que R_*^{-k} tiene un punto fijo repulsivo por tanto no puede ser normal.

Esto hace referencia que cada inmediata cuenca de atracción $A^*(\gamma)$ contiene al menos un punto critico, y como se ha probado que existen a lo mas $2(d-1)$, pues el teorema queda probado. □

Debido a que cada punto periódico atractor genera un ciclo atractor, y dado que éste es finito, entonces se deduce que los puntos periódicos son finitos.

Corolario 5.2. *El número de puntos periódicos atractores es finito.*

Por tanto este último corolario junto a la prueba de que los puntos periódicos indiferentes sean finitos, referida la prueba en Alan F. Beardon Iteration of Rational Functions sección 9.6, se concluye la prueba (vi) del teorema 5.3, la cual termina la caracterización del con junto de Julia, propuesta en dicho teorema.

Bibliografía

[1] Ahlfors,L. *Complex Analysis*, McGraw Hill, 1978.

[2] Brambila Paz, L. *Geometría de superficies de Riemann y haces lineales holomorfos*, México, 1998.

[3] Beardon, A. *Iteration of ractional functions Complex Analytic.* Springer Velarg, Cambridge England, 1990.

[4] Blanchard, P. *Complex Analytic Dynamics on The Riemann Sphere.* Ed American Mathematical Society, 1984.

[5] Chuang, C. *Normal families of meromorphic functions.* World Scientific Pekin China, 1993.

[6] Fitzgerald, H. *Existence and uniqueness of rectilinear slit maps.* Ed American Mathematical Society, California, 1999.

[7] Gerd Jensen, C. *Univalent functions*, Editorial Vandenhoeck, Germany, 1974.

[8] Hayman, K. *Lectures on Meromorphic Functions. Notes bye KN.* Gowrisankaran, 2009.

[9] Kotaro Oikawa, C. *On the stability of boundary components.* Pacific Journal of Mathematics, 1960.

[10] Lages Lima, E. *Espaços métricos.* Projeto Euclides, Brasilia DF, 1977.

[11] Laudstorfer, M. *Schwarz-Christoffel mapping of multiply connected domains.* Technik Wirtschaft, Regensburg, 2007.

[12] Lins Neto, A. *Funçoes de umavariavel complex.* Projecto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

[13] Myung H, K. *Families of normal maps in several variables and classical theorems in complex analysis.* Ed Howard University Washington. Boston, Massachusetts, 1996.

[14] Nieto Said, J. *Resolución de problemas matemáticos.* Proyecto AFaMaC, Puerto Rico, 2010.

[15] Remmert, R. *Classical topics in complex function theory*. Ed. Springer-Velarg , New York Inc, 1994.

[16] Rudin, W. *Análisis real y complejo*. Editorial Alhambra, Madrid Epaña, 1979.

[17] Schiff, L. *Normal Families*. Editorial Board,Vandehoeck USA, 1991.

[18] Zamorski, J. *About the extremal spiral schlicht functions*. Polonici Mathematici IX, 1961.