

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD**  
**CATÓLICA**  
DEL PERÚ

**ESTUDIO DE LA MECÁNICA DE FRACTURA EN ENGRANAJES  
CILÍNDRICOS FISURADOS MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA**

Tesis a fin de optar el Título de Ingeniero Mecánico,  
que presenta el bachiller:

**ROBERTO ALFREDO PAREDES HUGO**

**ASESOR(ES):**

**Rosendo Franco Rodríguez**

**Herbert Yépez Castillo**

**Lima, Noviembre de 2014**

## RESUMEN

El presente trabajo consistió en el estudio del efecto de fisuras en la vida útil de engranajes cilíndricos. La solución más apropiada para este problema fue mediante la obtención del factor de intensidad de tensiones, el cual caracteriza el comportamiento de una grieta y la cantidad de energía con la que se propaga. Este factor fue, asimismo, muy importante en el estudio del efecto de las cargas variables que favorecen la propagación de la grieta durante la transmisión de potencia por engranajes. Para determinar este factor se usó el método de los elementos finitos, donde se definió la ubicación y geometría de una grieta en un diente de engranaje modelado en un software de diseño en 3 dimensiones, para así realizar la simulación correspondiente y obtener el factor de intensidad de tensiones según la carga aplicada en el diente. Con la obtención de este factor para grietas con forma semi-elíptica, para distintas medidas de profundidad de grieta, se pudo modelar la curva de vida remanente del engranaje fisurado, mediante la aplicación de criterios que involucran al valor del factor de intensidad de tensiones correspondiente y factores adicionales que otorgan un análisis dinámico a la transmisión por engranajes. Esta curva determina la cantidad de ciclos de trabajo a los que puede someterse al engranaje hasta llegar a un valor límite, que corresponde a la profundidad máxima o crítica a la que puede llegar la grieta para que el engranaje sea descartado. Posteriormente, después de analizar la vida remanente de algunos casos concretos de engranajes cilíndricos fisurados, se pudo comprobar que el valor del tamaño crítico de grieta puede quedar en términos del módulo del engranaje, el cual otorga un valor aproximado al tamaño crítico de grieta del engranaje estudiado de forma más sencilla y directa.



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ  
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

**TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO**

TÍTULO	: ESTUDIO DE LA MECÁNICA DE FRACTURA EN ENGRANAJES CILÍNDRICOS FISURADOS MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA
ÁREA	: Diseño
PROPUESTO POR	: Dr. Rosendo Franco Rodríguez
ASESOR	: Dr. Rosendo Franco Rodríguez Ing. Herbert Yépez Castillo
TESISTA	: Roberto Alfredo Paredes Hugo
CÓDIGO	: 20080235
FECHA	: 26 de noviembre de 2014

**DESCRIPCIÓN Y OBJETIVOS:**

La transmisión de potencia mecánica por medio de engranajes ha sido y continúa siendo una práctica muy usada en la industria, lo cual ha motivado diversos estudios sobre estos elementos de máquina. Durante el funcionamiento de las transmisiones por engranajes se generan grandes esfuerzos en sus dientes, pudiendo producirse la falla después de un determinado período de trabajo. Las dos principales fallas que se producen en los dientes de los engranajes son originadas por la presión de contacto y por los esfuerzos de flexión. La falla producida por los esfuerzos de flexión puede conducir a la fractura parcial o total del diente, aspecto que se plantea estudiar en la presente tesis. Concretamente se pretende utilizar los conceptos y herramientas de la mecánica de fractura para analizar la influencia, en la vida útil de un engranaje cilíndrico, que puede tener la presencia de una fisura en uno de sus dientes, empleando para ello simulación numérica computacional. En tal sentido el objetivo general de esta tesis es estudiar el comportamiento de engranajes cilíndricos fisurados aplicando los conceptos de la mecánica de fractura y la simulación numérica basada en el método de los elementos finitos.



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ  
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

**TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO**

ESTUDIO DE LA MECÁNICA DE FRACTURA EN ENGRANAJES CILÍNDRICOS  
FISURADOS MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA

Introducción

Capítulo 1. Estado del arte de la mecánica de fractura aplicada a engranajes.

Capítulo 2. Validación de los modelos de simulación mediante el análisis de casos típicos de fractura.

Capítulo 3. Particularidades de los modelos de simulación aplicados al análisis de fractura en engranajes cilíndricos.

Capítulo 4. Casos de estudio de engranajes cilíndricos.

Conclusiones

Bibliografía

Anexos

---

Dr. Rosendo Franco Rodríguez

Asesor

---

Ing. Herbert Yépez Castillo

Co-Asesor

## INDICE DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1: ESTADO DEL ARTE DE LA MECÁNICA DE FRACTURA APLICADA A ENGRANAJES	
1.1. Clasificación de las transmisiones por engranajes	4
1.2. Generalidades y funciones de los engranajes cilíndricos de dientes rectos y helicoidales.	6
1.3. Diferentes tipos de fallas comunes en los engranajes	7
1.3.1. Falla por fatiga superficial	7
1.3.2. Falla por deformación plástica	8
1.3.3. Falla por desgaste	9
1.3.4. Falla por fatiga por flexión	9
1.4. Conceptos generales sobre Mecánica de Fractura	10
1.4.1. Etapas de la propagación de una grieta	11
1.4.2. Aspectos geométricos de un cuerpo agrietado	11
1.4.3. Modos de carga en cuerpos agrietados	13
1.4.4. Factor de Intensidad de Tensiones	14
1.4.5. Tenacidad a la Fractura	15
1.4.6. Propagación de una grieta por fatiga	16
1.5. Métodos de detección de fisuras en componentes mecánicos	18
1.5.1. Inspección Visual	19
1.5.2. Líquidos Penetrantes	19
1.5.3. Ultrasonido	20

1.6.	Aplicaciones de simulación numérica en el estudio de elementos de máquinas	21
1.6.1	Aplicaciones en ejes de transmisión	21
1.6.2.	Aplicaciones en soportes	22
1.6.3.	Aplicaciones en engranajes	24

## CAPÍTULO 2: VALIDACIÓN DE LOS MODELOS DE SIMULACIÓN MEDIANTE EL ANÁLISIS DE CASOS TÍPICOS DE FRACTURA

2.1.	Análisis de fractura para Modo I	25
2.1.1.	Estudio para Modo I por Método Analítico	25
2.1.2.	Estudio para Modo I por Simulación Numérica	30
2.2.	Análisis de fractura para Modo II	37
2.2.1.	Estudio para Modo II por Método Analítico	38
2.2.2.	Estudio para Modo II por Simulación Numérica	40
2.3.	Análisis de fractura para Modo III	41
2.3.1.	Estudio para Modo III por Método Analítico	42
2.3.2.	Estudio para Modo III por Simulación Numérica	43

## CAPÍTULO 3: PARTICULARIDADES DE LOS MODELOS DE SIMULACIÓN APLICADOS AL ANÁLISIS DE FRACTURA EN ENGRANAJES CILÍNDRICOS

3.1.	Determinación de la fuerza actuante	46
3.2.	Ubicación de la grieta en la superficie del diente de engranaje	51

3.3.	Determinación del factor de intensidad de tensiones	53
3.3.1.	Análisis por Simulación Numérica	53
3.3.2.	Validación por método Analítico	61
3.4.	Efecto de las cargas cíclicas en la determinación de la vida remanente de engranajes cilíndricos fisurados.	65
<b>CAPÍTULO 4: CASOS DE ESTUDIO DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS</b>		
4.1.	Casos de engranajes cilíndricos rectos.	68
4.2.	Casos de engranajes cilíndricos helicoidales.	84
	<b>CONCLUSIONES</b>	96
	<b>RECOMENDACIONES</b>	97
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	98
	<b>ANEXOS</b>	
A1.	Estudio de la línea de engrane en engranajes con dientes de perfil de evolvente	1A
A2.	Gráficas para seleccionar los factores influyentes en la resistencia a la fatiga por flexión en la raíz del diente	3A
A3.	Tablas para validación de resultados obtenidos por el método de los elementos finitos en especímenes de geometría sencilla	9A
A4.	Tablas para validación de resultados obtenidos por el método de los elementos finitos en casos de engranajes cilíndricos fisurados	11A
A5.	Tablas para la obtención del número de ciclos necesarios para la propagación de una grieta en un engranaje cilíndrico fisurado, partiendo del factor de intensidad de tensiones para cada longitud de grieta	17A

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	mm	Profundidad de grieta.
$a_n$	mm	Profundidad de grieta con una medida inicial “n”.
$a_{n+1}$	mm	Profundidad de grieta con una medida final “n+1”
$b$	mm	Ancho del diente de engranaje.
$C$	--	Constante de Paris dependiente del material
$c$	mm	Radio mayor de la grieta con forma semi-elíptica
$F$	N	Fuerza o carga transmitida en la transmisión por engranajes.
$F(a/b)$	--	Factor geométrico dependiente del tamaño de grieta y ancho del cuerpo agrietado
$f(g)$	--	Factor geométrico dependiente de la estructura del cuerpo fisurado
$F_t$	N	Fuerza o componente tangencial de la carga transmitida.
$F_r$	N	Fuerza o componente radial de la carga transmitida.
$F_a$	N	Fuerza o componente axial de la carga transmitida.
$h$	mm	Altura del componente agrietado.
$h_{Fe}$	mm	Distancia del punto de aplicación de la carga transmitida en un diente de engranaje a la base del mismo.
$K$	MPa $\sqrt{m}$	Factor de intensidad de tensiones.
$K_I$	MPa $\sqrt{m}$	Factor de intensidad de tensiones en Modo I para agrietamiento.
$K_{II}$	MPa $\sqrt{m}$	Factor de intensidad de tensiones para Modo II de agrietamiento.
$K_{III}$	MPa $\sqrt{m}$	Factor de intensidad de tensiones para Modo III de agrietamiento.
$K_C$	MPa $\sqrt{m}$	Tenacidad a la fractura de un material.
$K_{eq}$	MPa $\sqrt{m}$	Factor de intensidad de tensiones equivalente.
$m$	--	Exponente de Paris dependiente del material.
$m_n$	mm	Módulo normal del engranaje.
$S_{Fmin}$	--	Factor de seguridad mínimo.
$Y_{Fa}$	--	Factor de forma.

$Y_{NT}$	--	Factor de duración.
$Y_{R \text{ rel } T}$	--	Factor de acabado superficial en el redondeo de la raíz.
$Y_{Sa}$	--	Factor de concentración de tensión.
$Y_{ST}$	--	Factor de corrección de la tensión para dimensiones de ruedas probadas.
$Y_X$	--	Factor de tamaño.
$Y_\beta$	--	Factor de inclinación de la hélice
$Y_\epsilon$	--	Factor de engrane
$Y_{\delta \text{ rel } T}$	--	Cifra relativa de apoyo, considerando la sensibilidad a la entalla del material.
$Z_n$	--	Número de dientes.
$K_{eq}$	MPa $\sqrt{m}$	Factor de intensidad de tensiones equivalente para un tamaño de grieta "n"
$\Delta N$	--	Número de ciclos necesarios para el crecimiento de grieta de "n" hasta "n+1".
$\alpha_{Fn}$	°	Ángulo de dirección de la carga
$\alpha_n$	°	Ángulo de presión normal.
$\alpha_t$	°	Ángulo de presión tangencial.
B	°	Ángulo de la hélice.
$\rho_{Fp}$	mm	Radio de filete de la raíz
$\sigma$	MPa	Tensión remota aplicada.
$\sigma_b$	MPa	Esfuerzo de flexión.
$\sigma_{F0}$	MPa	Esfuerzo de flexión nominal.
$\sigma_{Flim}$	MPa	Esfuerzo pulsante límite de flexión en la raíz del diente.
$\sigma_m$	MPa	Esfuerzo de membrana.
$\mu$	Pa S	Viscosidad dinámica a la temperatura ambiente.

## INTRODUCCIÓN

La transmisión de potencia mecánica por medio de engranajes es una práctica muy usada e importante en la industria. Esta importancia ha generado muchos estudios de estos elementos, los cuales dieron paso a la normalización de engranajes, tomando en cuenta su geometría y la metodología de cálculo para determinar su capacidad de carga.

Una de las aplicaciones más importantes de los engranajes es la transmisión del movimiento desde el eje de una fuente de energía, como puede ser un motor de combustión interna o un motor eléctrico, hasta otro eje situado a cierta distancia y que ha de realizar un trabajo. De manera que una de las ruedas está conectada por la fuente de energía y es conocida como engranaje motor y la otra está conectada al eje que debe recibir el movimiento del eje motor y que se denomina engranaje conducido. Si el sistema está compuesto de más de un par de ruedas dentadas, se denomina tren de engranajes.

Dentro de su aplicación, las transmisiones por engranajes pueden estar sometidas a un gran esfuerzo y a un funcionamiento a gran velocidad, lo cual puede conllevar al posterior fallo de estos elementos, principalmente en los dientes que entran en contacto directo durante la transmisión de potencia. Las dos principales fuentes de fallo en un diente de engrane son por contacto y por flexión. En el caso de flexión, puede conllevar a la fractura total o parcial del diente; mientras que en el caso de

contacto, a la pérdida de geometría del diente. Este último se puede dividir en casos específicos como picadura, flujo plástico y desgaste.

El fallo que puede tener un engranaje puede deberse a que no haya sido calculado con los parámetros dimensionales y de resistencia adecuados, por lo que no es capaz de soportar el esfuerzo al que está sometido y comienza a deteriorarse con rapidez, llegando incluso a fracturarse. Otra de las principales causas de deterioro o rotura es que por un sobre esfuerzo del mecanismo se superen los límites de resistencia del engranaje. Los esfuerzos variables en elementos mecánicos pueden producir grietas que crecen a medida que las cargas se repiten. El inicio y propagación de estas grietas debido a estas cargas casi siempre tiene lugar sobre la superficie en un punto donde existen concentraciones de tensión. Una vez nucleada la grieta, comienza a extenderse de forma continua mediante deformación hasta que alcanza unas dimensiones críticas para fisuras y finalmente se produce la rotura.

El presente trabajo de tesis busca ser un estudio inicial y referencial de las características que presentan los engranajes cilíndricos fisurados de dientes rectos y helicoidales, que serán los principales objetos de estudio. Para poder realizar este trabajo se propone usar el método de los elementos finitos, debido a que es una de las herramientas más eficaces y usadas para la resolución numérica de la mayoría de los problemas que se plantean en ingeniería, y debido a que permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo o estructura con geometría compleja, como es el caso de un diente de engranaje. Este análisis será usado en casos de engranajes cilíndricos fisurados para obtener uno de los criterios más resaltantes en el estudio de la Mecánica de Fractura: El factor de intensidad de tensiones ( $K$ ). Asimismo, Este resultado deberá de ser comprobado mediante el uso de métodos analíticos establecidos en la Mecánica de Fractura que se usan para obtener el valor de  $K$ , aplicándolos en los mismos casos de engranajes fisurados.

La importancia de realizar este trabajo es el poder determinar si un engranaje fisurado puede seguir empleándose por un tiempo de servicio más y cuántos ciclos más de trabajo puede durar hasta que la grieta alcance un tamaño considerable y ya no sea recomendable su uso. Si bien la presencia de grietas deteriora y le da un aspecto preocupante a cualquier elemento mecánico, como engranajes, estos pueden seguir

con su labor habitual siempre que el agrietamiento no sea severo y su propagación no sea acelerada, lo cual se plantea verificar.

Por lo expuesto anteriormente, el objetivo general de esta tesis es:

**“Determinar la influencia de fisuras en la vida remanente de engranajes cilíndricos mediante simulación numérica basada en el método de los elementos finitos.”**

Para cumplir con este objetivo general, se han establecido objetivos específicos que ayudarán con su cumplimiento, los cuales son:

- Estudiar los aspectos teóricos y métodos analíticos que definen los criterios de la Mecánica de Fractura.
- Desarrollar ejemplos de modelos clásicos de la Mecánica de Fractura de forma analítica y mediante simulación numérica con el software ANSYS MECHANICAL, para demostrar la factibilidad de usar modelos de análisis similares en el presente estudio.
- Establecer las particularidades de los modelos de simulación numérica aplicados a engranajes cilíndricos fisurados para el cálculo del factor de intensidad de tensiones.
- Comparar y validar los resultados obtenidos por simulación numérica con los obtenidos analíticamente en casos concretos de engranajes cilíndricos fisurados.
- Aplicar los modelos de simulación desarrollados en casos de estudio de engranajes cilíndricos fisurados para determinar su vida remanente.

## CAPÍTULO 1

### 1. ESTADO DEL ARTE DE LA MECÁNICA DE FRACTURA APLICADA A ENGRANAJES

#### 1.1. Clasificación de las transmisiones por engranajes

Las transmisiones por engranajes, en la actualidad, son una práctica muy utilizada en la industria en general, debido principalmente a su gran confiabilidad, disposición y exactitud en comparación a otros tipos de transmisiones.

Las principales clasificaciones de los engranajes se efectúan según la disposición de sus ejes de conexión, forma del dentado y tipo de perfil (Niemann 1973):

##### 1) Por la disposición de sus ejes

- Sistema de ejes paralelos
- Sistema de ejes que se cortan
- Sistema de ejes que se cruzan perpendicularmente
- Sistema de ejes que se cruzan en cualquier ángulo.

##### 2) Por su forma

###### • Los más comunes:

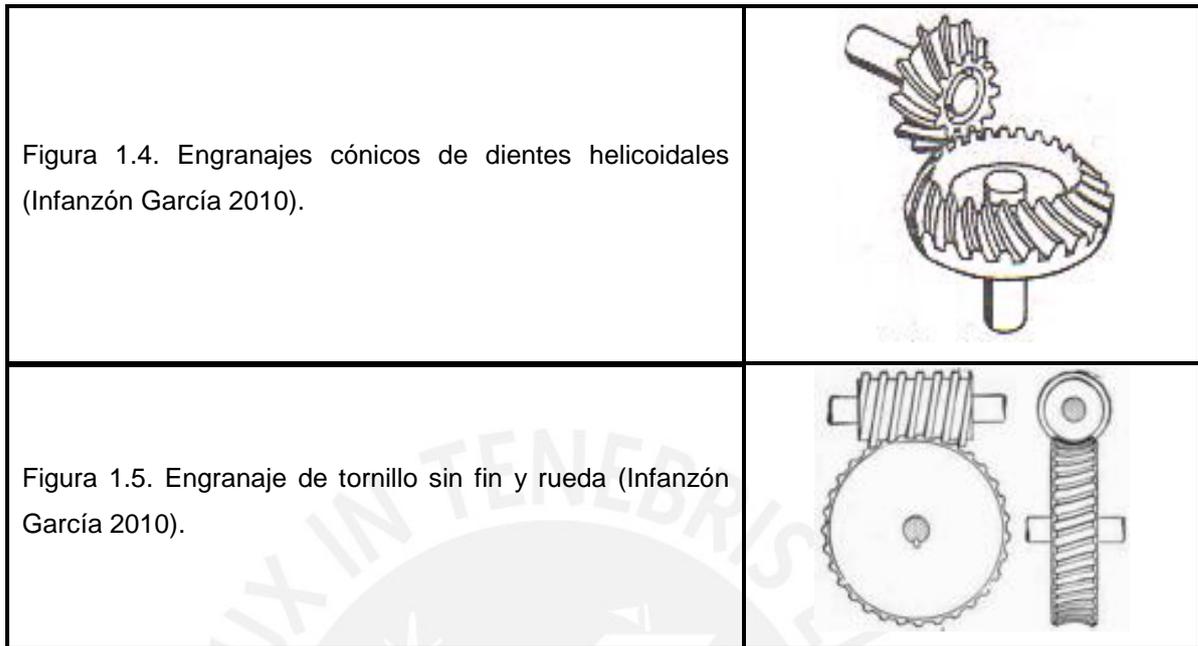
- Engranajes cilíndricos rectos (Fig. 1.1)
- Engranajes cilíndricos helicoidales (Fig. 1.2)
- Engranajes cónicos rectos (Fig. 1.3)
- Engranajes cónicos helicoidales (Fig. 1.4)
- Engranajes de Tornillo sin fin (Fig. 1.5)

- **Los menos comunes:**
  - Engranajes helicoidales dobles
  - Engranajes cónicos hipoides
  - Engranaje intermedio
  - Engranajes interiores
  - Mecanismo de cremallera y piñón
  - Engranaje planetario

**3) Por el tipo de perfil de sus dientes**

- Envolvente (el más común)
- Cicloidal

<p>Figura 1.1. Engranajes cilíndricos de dientes rectos, de ejes paralelos y perfil envolvente (Infanzón García 2010).</p>	
<p>Figura 1.2. Engranajes cilíndricos de dientes helicoidales, de ejes paralelos y perfil envolvente (Infanzón García 2010).</p>	
<p>Figura 1.3. Engranajes cónicos de dientes rectos (Infanzón García 2010).</p>	



En el presente trabajo se analizarán los engranajes cilíndricos, tanto de dientes rectos como helicoidales, y de perfil envolvente. Sin embargo, el estudio que se realizará también será aplicable a otros tipos de engranajes, como engranajes interiores.

## 1.2. Generalidades y funciones de los engranajes cilíndricos de dientes rectos y helicoidales

Un engranaje se define como un órgano dentado destinado a mover otro, o a ser movido por él, por la acción de los dientes al venir en contacto sucesivo.

Los engranajes cilíndricos rectos (Ver figura 1.1) son el tipo de engranaje más simple y corriente que existe. Se utilizan generalmente para velocidades pequeñas y medias. No obstante, cuando trabajan a grandes velocidades, si no son rectificadas, producen ruido cuyo nivel depende de la velocidad de giro que tengan. Entre las principales ventajas que presentan estos engranajes es que son simples y con bajos costos de fabricación y mantenimiento, en comparación con los otros tipos de engranajes vistos en el punto 1.1 (Mott 2006).

Los engranajes cilíndricos de dentado helicoidal (Ver figura 1.2) están caracterizados por su dentado oblicuo con relación al eje de rotación. Una característica importante

de estos engranajes es la silenciosidad de su funcionamiento, a diferencia de los engranajes de dientes rectos que son mucho más ruidosos. Asimismo, los engranajes helicoidales tienen la ventaja de que transmiten más potencia que los rectos, y también pueden operar a mayor velocidad. De sus inconvenientes se puede decir que se desgastan más rápido que los rectos, son más caros de fabricar y necesitan generalmente más engrase para su funcionamiento (Mott 2006).

### 1.3. Diferentes tipos de fallas comunes en los engranajes

Generalmente, las fallas principales de los dientes en engranajes tienen un carácter de fatiga como consecuencia de la acción periódica de la carga, dado el trabajo constante del diente en ciclos de trabajo. Los dos modos de fallas más frecuentes en las transmisiones por engranajes, según los criterios de diseño establecidos por las normas ISO 6336, son la fatiga por contacto (picadura, deformación plástica y desgaste) y por flexión (fractura) (Benítez Hernández 2005).

#### 1.3.1. Falla por Fatiga Superficial

Al producirse el engrane entre dientes de un par de engranajes, se inducen en los flancos de contacto un estado complejo de esfuerzos, por la acción simultánea de fuerzas de contacto y movimiento combinado de deslizamiento y rodadura. Cuando estos esfuerzos superficiales repetitivos superan la resistencia a la fatiga por contacto, se inducen grietas superficiales y/o sub-superficiales, las cuales al propagarse y unirse provocan desprendimiento de partículas de material en la superficie de los flancos de contacto, ocurriendo así una falla conocida como picadura.

Los tipos de picado que se pueden presentar son:

- Picadura Inicial: Se produce en áreas sobre esforzadas debido a irregularidades superficiales o desalineación. Se muestran como hoyos superficiales.
- Picadura destructiva: Se produce por sobrecargas, alta tensión de contacto y a la baja resistencia a la fatiga del material. A comparación con la picadura

inicial, no se pueden aliviar y se presentan con mayor tamaño o número de hoyos superficiales.

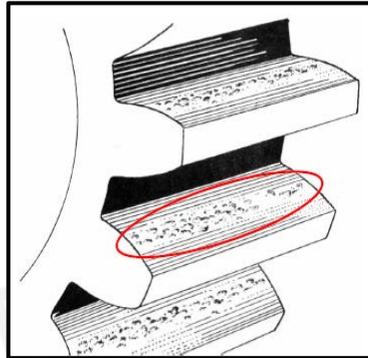


Figura 1.6. Picado inicial en la superficie de diente de engranaje (Palli Pérez y Machado 2008).

### 1.3.2. Falla por Deformación Plástica

En estas fallas la superficie de los flancos puede entrar en fluencia, debido a que las condiciones de trabajo son demasiado severas y la falla es inminente. Consiste en una deformación plástica excesiva en los flancos de contacto. El flujo plástico inicial es en la dirección radial y puede no ser destructivo, ya que el mismo puede atenuarse. Por lo general, este tipo de falla está asociada a cargas muy elevadas o temperaturas altas.

Estas deformaciones plásticas aparecen con más intensidad en los dientes de acero con dureza poco elevada, particularmente con insuficiencia de lubricación y en las transmisiones de pequeña velocidad.

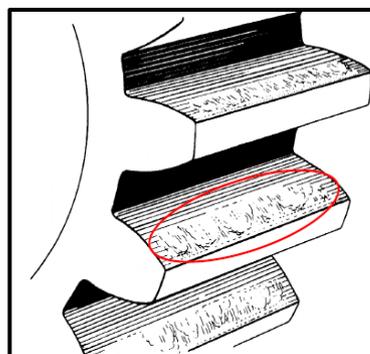


Figura 1.7. Deformación del diente debido a cargas excesivas (Palli Pérez y Machado 2008).

### 1.3.3. Falla por Desgaste

El desgaste en el diente se puede presentar principalmente por dos formas. El desgaste abrasivo se presenta cuando las partículas de un engranaje o suciedades entran dentro de la superficie de contacto. También se da si uno de los engranajes tiene una superficie más rugosa que el otro. Las partículas de la superficie más dura penetran en la superficie más blanda y arrancan pedazos de material de la superficie.

Por otro lado, el desgaste adhesivo se produce cuando el lubricante entre los flancos activos de engrane no es lo suficientemente efectivo para evitar el contacto metal-metal. Este desgaste puede ser tan intenso que puede producir escoria y fuerte rayado.

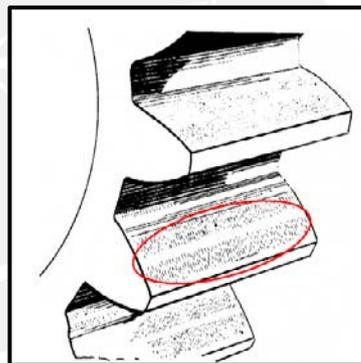


Figura 1.8. Desgaste abrasivo severo en un diente de engranaje (Palli Pérez y Machado 2008).

### 1.3.4. Falla por Fatiga por Flexión

Es la falla por rotura del diente entero o de una buena parte de él. Esta constituye la falla más común de los engranajes, y puede producirse debido a las sobrecargas en los ciclos de tensiones aplicados al diente, las cuales sobrepasan el límite de fatiga del material.

La fractura por fatiga a la flexión de los engranajes tiene casi siempre la misma característica: la grieta comienza en un punto de la zona del pie del diente bajo tensiones de tracción (cuando la carga es unidireccional), progresando hacia adentro e inicialmente hacia abajo, elevándose luego hasta el otro lado de la zona de transición del pie del diente. Estas fracturas pueden ir de forma más o menos curva a una forma

plana. Concentradores de tensión, tales como escalones o entalladuras en la raíz del diente, inclusiones no metálicas, desgarraduras o huellas dejadas por las herramientas de corte, pueden condicionar la aparición de esta falla.

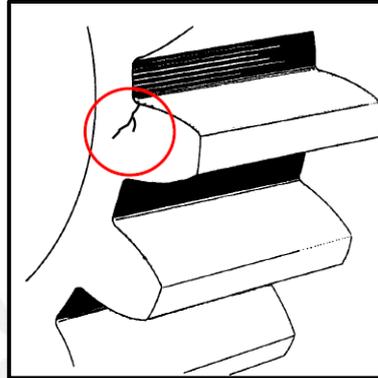


Figura 1.9. Representación de la fractura en la raíz del diente de engranaje (Palli Pérez y Machado 2008).

En el presente trabajo de tesis se estudiará únicamente el fallo por fractura de los dientes de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales.

#### 1.4. Conceptos Generales sobre Mecánica de fractura

Es importante saber que el objetivo fundamental de la Mecánica de Fractura está definido como la predicción de las condiciones bajo las cuales una grieta, en un cuerpo u objeto de forma conocida y bajo la acción de cargas, es inestable y se propaga (Anderson 2005).

Para realizar un análisis completo de la fractura se requieren de otros estudios como:

- Conocimiento de los elementos mecánicos aplicados (métodos numéricos computacionales).
- Conocimiento de las propiedades mecánicas del material en estudio
- Conocimiento de la configuración geométrica de la grieta o defecto.
- Conocimiento de la Mecánica de Fractura.

#### 1.4.1. Etapas de la propagación de la grieta

Para estudiar el problema de agrietamiento en elementos de máquinas se consideran tres etapas durante el crecimiento de la grieta (González Velázquez 2004):

- El **período de iniciación de la grieta** representa la localización y modo de iniciación de la grieta. Los esfuerzos fluctuantes se concentran en un punto sobre la superficie donde existen discontinuidades, que actúan como multiplicadores de tensión pudiendo ocurrir fluencia plástica y crearse la grieta.
- Durante el **período de propagación de la grieta** se distinguen dos fases:
  - La **Fase I** ocurre una vez nucleada la grieta, entonces se propaga muy lentamente hasta que sea lo suficientemente larga como para formar una concentración geométrica de esfuerzos en su extremo.
  - En la **Fase II**, la velocidad de extensión de la grieta aumenta y en este punto la grieta crece por un proceso de enromamiento y agudizamiento de la punta a causa de los ciclos de tensión.
- En la **Rotura** la grieta se propaga a través del componente hasta que la sección remanente intacta es incapaz de sostener los esfuerzos impuestos y ocurre la rotura o fractura súbita del componente.

#### 1.4.2. Aspectos Geométricos de un Cuerpo Agrietado

Cuando se presentan grietas en los elementos estructurales, la resistencia mecánica se ve afectada y reduce su valor, de tal forma que su vida útil también se reduce, debido a la propagación de dicha grieta. Debido a esto, la estructura en cuestión estará propensa a fallar una vez que continúe efectuando las funciones normales para la cual fue diseñada (González Velázquez 2004).

Ante esto, cuando existen defectos o concentraciones de esfuerzos en el elemento mecánico, es necesario realizar un análisis geométrico del defecto.

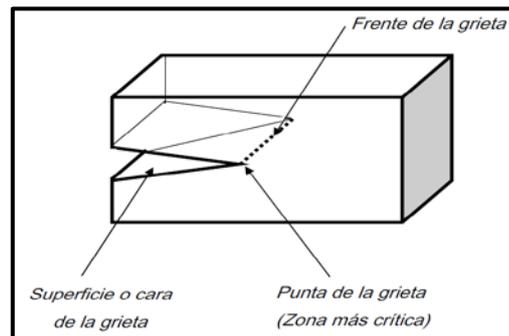


Figura 1.10. Forma general de una grieta (González Velázquez 2004).

Los aspectos que conforman la grieta de una estructura se definen como:

- **Frente de la grieta:** Es la línea que conecta a todos los puntos en donde la separación del cuerpo puede ocurrir. Si se separa totalmente, la línea se movería a lo largo de la superficie, a la cual se conoce como Superficie de Fractura.
- **Zona del proceso de fractura:** Es la región que rodea la grieta y en donde se desarrollará la fractura en etapas sucesivas mediante deslices no homogéneos; es decir, sin un orden específico.

El modelo elástico lineal para los campos de tensiones y deformaciones en la proximidad de una grieta supone un radio de cero en el frente de la grieta (aguda). Las pruebas de fractura en laboratorios por lo general contienen grietas idealizadas, con una entalla con forma terminada en V. Esto debido a que evita la propagación de la grieta fuera del plano central de la probeta o sin desviaciones, así como para poder desarrollarla con niveles de intensidad de tensiones bajos. Sin embargo, las fallas que ocurren naturalmente en estructuras no están obligadas a cumplir con estos ideales. Defectos estructurales son típicamente de forma irregular y se abren camino a través del espesor de la estructura. A menudo en situaciones prácticas surgen los gradientes severos de esfuerzo, mientras que en las muestras de laboratorio experimentan carga relativamente simple (González Velázquez 2004).

En busca de soluciones para estos casos, se han publicado estudios que aproximan grietas enterradas y superficiales como elipses y semi elipses, respectivamente. Estas soluciones se aplican a distribuciones de tensiones lineales, donde las tensiones normales a la falla se pueden resolver en esfuerzos de flexión y de tracción.

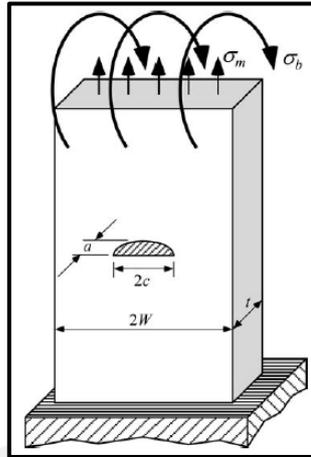


Figura 1.11. Representación de los esfuerzos de flexión ( $\sigma_b$ ) y de membrana (tracción) ( $\sigma_m$ ) en un cuerpo que sufre agrietamiento con forma semi elíptica (Anderson 2005).

### 1.4.3. Modos de Carga en Cuerpos Agrietados

En el estudio del sólido con comportamiento elástico y lineal, se distinguen tres modos básicos de apertura en la fisura (Anderson 2005):

- MODO I o modo de apertura, en el cual la grieta se abre debido a la aplicación de tensiones normales al plano de la grieta.
- MODO II o modo deslizante, en el que los desplazamientos de la superficie de la grieta son perpendiculares al plano de la grieta y los esfuerzos cortantes son paralelos al plano de la grieta.
- MODO III o modo de rotura transversal que ocurre cuando los esfuerzos cortantes son paralelos al plano de la grieta y las superficies de fractura se desplazan en sentidos opuestos. En este caso, el crecimiento de la grieta es por desgarramiento.

De los tres modos presentados en la figura 1.12, el modo I es el que se produce con mayor frecuencia y es el de mayor importancia técnica, pues conlleva roturas más sencillas y se asemeja más a la configuración de una grieta que crece bajo un estado tensional de carga. El modo II, menos frecuente, se produce principalmente cuando se tienen grietas sobre planos que forman ángulos de  $90^\circ$ . Finalmente, el modo III es el menos habitual, y ocurre mayormente en barras con grietas que están sometidas a

esfuerzos de torsión. La situación más compleja corresponde a una combinación de los tres modos de agrietamiento mencionados anteriormente, formando un nuevo modo conocido como modo mixto de fractura. Sin embargo, muchos casos prácticos se pueden clasificar predominantemente en el Modo I.

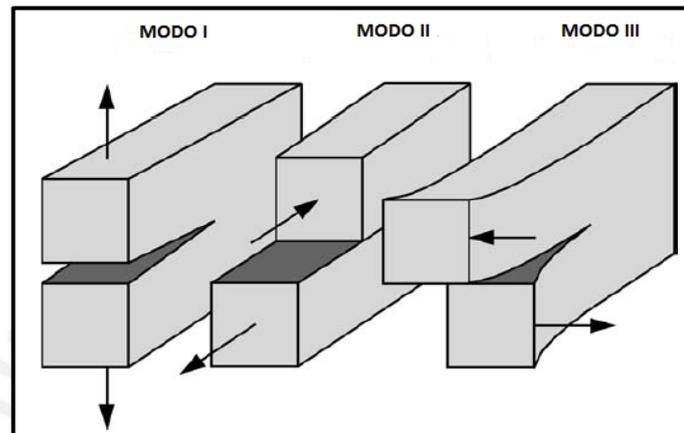


Figura 1.12. Representación gráfica de los modos de fractura (Anderson 2005).

#### 1.4.4. Factor de Intensidad de Tensiones

Dentro de la literatura, se ha desarrollado un criterio significativo para el análisis de la propagación de grietas en cuerpos lineales y elásticos: el criterio basado en el campo de intensidad de tensiones existente en la vecindad de la punta de la grieta o Criterio de Intensidad de Tensiones ( $K_c$ ). Este análisis se centra en el hallazgo de un factor que define la magnitud de las tensiones locales en el entorno del fondo de la fisura: el Factor de Intensidad de Tensiones. Dependiendo del modo de aplicación de la carga (Ver punto 1.4.3), el tamaño y forma de la fisura y de las condiciones de contorno geométrico, este factor se puede expresar como (Anderson 2005):

$$K_I = f(g) * \sigma * \sqrt{\pi * a} \quad (\text{Ec. 1.1})$$

Donde  $K_I$  es el Factor de Intensidad de Tensiones para el Modo I de agrietamiento,  $\sigma$  es la tensión remota aplicada,  $a$  es la profundidad de la fisura y  $f(g)$  es un factor de corrección que depende de la geometría del componente y de la geometría de la fisura.

El factor de intensidad de tensiones determina el comportamiento de una grieta, por ello las soluciones analíticas para su cálculo han sido obtenidas para una amplia variedad de problemas y sus expresiones están recogidas en manuales, aunque están limitadas a un número pequeño de casos generales de agrietamiento, donde los cuerpos fisurados se consideran infinitos. Pero en situaciones prácticas, ocurre de forma contraria, ya que se emplean longitudes finitas con cargas complejas. Por tanto, existe la necesidad de desarrollar técnicas numéricas cada vez mejores que proporcionen otro enfoque para la predicción del comportamiento de una grieta.

Así como se calcula el factor de intensidad de tensiones para Modo I usando la ecuación 1.1, se pueden calcular también para los Modos II y III. Cuando se presenta el caso de modo mixto de fractura, los estudios muestran que los valores del factor de intensidad tensiones pueden ajustarse a un valor equivalente (Alp Esmen 2004):

$$K_{eq} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{1}{1-\mu} * K_{III}^2} \quad (\text{Ec. 1.2})$$

#### 1.4.5. Tenacidad a la Fractura

Se debe resaltar que la fractura ocurre cuando el nivel de tensión aplicada excede un valor crítico. Análogamente, puesto que las tensiones en el entorno del fondo de la grieta quedan definidas en términos del factor de intensidad de tensiones, debe existir un valor crítico de este parámetro, el cual puede utilizarse para especificar las condiciones de fractura frágil. Este valor crítico se denomina Tenacidad a la Fractura ( $K_C$ ), y en general, puede ser expresado en la forma (Anderson 2005):

$$K_C = Y * \sigma * \sqrt{\pi * a} \quad (\text{Ec. 1.3})$$

Donde  $Y$  es un parámetro sin dimensiones que depende de la geometría de la pieza y de la grieta,  $\sigma$  es la tensión aplicada y  $a$  es la profundidad de la fisura. Por definición, la tenacidad a la fractura es una propiedad que es una medida de la resistencia del material a la fractura frágil cuando una grieta está presente. En casos prácticos de agrietamiento, el factor de intensidad de tensiones  $K$  puede tomar muchos valores, dependiendo de la geometría de la grieta y del componente agrietado, mientras que la

tenacidad a la fractura  $K_{1C}$  es único para un material determinado, independiente del modo de aplicación de la carga.

Así como existe un valor de tenacidad a la fractura para el Modo I de agrietamiento ( $K_{IC}$ ), también existen valores para los Modos II y III. Sin embargo, el valor para el Modo I resulta ser el predominante, debido a que los otros otorgan valores pequeños en comparación con este. Es por ello que, al hallar el valor equivalente, la variación sería mínima con respecto a  $K_{IC}$ , por lo que se toma a este valor como el equivalente cuando se requiera hallar el valor de la tenacidad a la fractura de un determinado material cuando existe un modo mixto de fractura (Alp Esmen 2004):

$$K_{c\text{ eq.}}=K_{IC} \quad (\text{Ec. 1.4})$$

#### 1.4.6. Propagación de una grieta por fatiga

Todas las expresiones vistas hasta el momento de la mecánica de fractura son válidas para cargas estáticas. Sin embargo, cuando un elemento de máquina está sometido a esfuerzos variables, es necesario tener en cuenta ciertas consideraciones adicionales, como factores o expresiones matemáticas complementarias, las cuales se abordarán en el siguiente acápite. Este es el caso de la fractura por fatiga que se abordará en el presente estudio.

Durante el crecimiento de una grieta por fatiga en un material se considera la presencia de tensiones cíclicas. Estas cargas pueden afectar la intensidad de tensiones presente a medida que aumenta la grieta, lo cual puede modificar el tiempo de vida remanente de un material agrietado.

Bajo ciertas condiciones, el crecimiento de una grieta por fatiga se puede caracterizar por el factor de intensidad de tensiones. Si se considera la posibilidad de que una grieta crezca por la presencia de una amplitud de intensidad de esfuerzo cíclico, la tasa de crecimiento se caracterizaría por la presencia de un  $K_{min}$  y un  $K_{max}$ . Es conveniente expresar la relación funcional para el crecimiento de grieta de la siguiente forma (Bannantine 1989):

$$\frac{da}{dN} = f_1(\Delta K, R) \quad (\text{Ec. 1.5})$$

Donde:

- $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$
- $R = K_{\min} / K_{\max}$
- $da/dN$  = crecimiento de grieta por ciclo

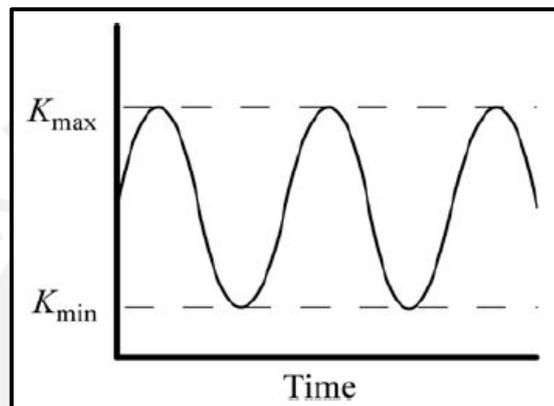


Figura 1.13. Amplitud de intensidad de esfuerzo cíclico en la fatiga (Anderson 2005).

En la figura 1.13 se puede apreciar la variación del valor de  $K$  entre su límite superior ( $K_{\max}$ ) y su límite inferior ( $K_{\min}$ ), cuando se aplica una carga variable. En este trabajo se debe calcular una fuerza y su punto de aplicación donde se pueda interpretar los valores de  $K_{\max}$  y  $K_{\min}$ . Sin embargo, en la transmisión por engranajes se trabajará con un esfuerzo pulsante, por lo que el valor de  $K_{\min}$  sería igual a 0. Por consiguiente, el único valor de interés en el presente estudio sería  $K_{\max}$ , teniendo así  $\Delta K = K_{\max}$ .

La figura 1.14 muestra un gráfico log-log de  $da/dN$  vs  $\Delta K$ , que ilustra el comportamiento del crecimiento de grietas por fatiga típica de los metales. La curva contiene tres regiones distintas. A valores de  $\Delta K$  intermedios, la curva es lineal, pero la tasa de crecimiento de la grieta se desvía de la tendencia lineal en niveles altos y bajos de  $\Delta K$ . En el extremo inferior,  $da/dN$  se aproxima a cero en un  $\Delta K$  con un valor pequeño en el cual se considera que la grieta no crecerá. En la Región III la tasa de crecimiento de la grieta se acelera a medida que  $K_{\max}$  se acerca a  $K_c$ , la tenacidad a la fractura del material. A valores altos de  $K_{\max}$ , la mecánica de la fractura lineal elástica ya no es válida.

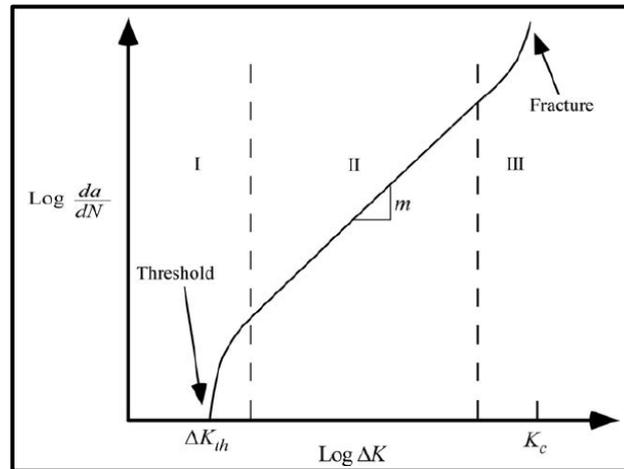


Figura 1.14. Comportamiento de crecimiento de grietas por fatiga típica de los metales.  
 (Anderson 2005).

La región lineal de la gráfica log-log en la figura 1.16 puede ser descrita por una ley de potencia, conocida como la Ley de Paris (Bannantine 1989):

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m \quad (\text{Ec. 1.6})$$

donde  $C$  y  $m$  son constantes del material que se determinan experimentalmente. De acuerdo con lo anterior, la tasa de crecimiento de grietas por fatiga depende sólo de  $\Delta K$ .

En el presente trabajo de tesis, se usará la Ley de Paris para poder determinar los ciclos de vida remanente de un engranaje agrietado y poder determinar si es apto para continuar con su labor por un tiempo adicional antes de ser descartado.

### 1.5. Métodos de detección de fisuras en componentes mecánicos

La principal justificación para el empleo de la Mecánica de Fractura se basa en que una estructura o elemento de máquina puede poseer en su interior o de manera superficial grietas, vacíos, imperfecciones, etc. Para poder detectar tales imperfecciones se puede usar los métodos por ensayos no destructivos:



Actualmente existen 18 variantes de inspección para este método; cada una de ellas desarrollada para una aplicación y sensibilidad específica (siendo un tamaño de aproximadamente medio milímetro la medida más pequeña para este ensayo) (Merino Ponce 2007).



Figura 1.16. Aplicación de líquidos penetrantes para resaltar fisuras (Merino Ponce 2007).

### 1.5.3. Ultrasonido

El ensayo por ultrasonido consiste en vibraciones mecánicas que se transmiten en el material por medio de ondas de la misma naturaleza que el sonido, pero con frecuencia mayor a los 20,000 ciclos/segundo (Hz). Las ventajas principales de esta inspección son la gran velocidad de prueba, debido a que proporciona indicaciones prácticamente instantáneas de la presencia de discontinuidades; y su gran exactitud en la determinación de la posición de discontinuidades, estimando sus tamaños, orientaciones y profundidad.

Para este trabajo, se puede usar el método por ultrasonido para detectar la profundidad de una grieta superficial utilizando un sistema de transmisión pulso-eco, en el cual se inciden impulsos de vibraciones ultrasónicas sobre el engranaje, de tal forma que la energía reflejada en las discontinuidades proporcionen una buena base para poder valorar el tiempo transcurrido en ida y vuelta del impulso y permita así determinar la distancia a la cual se encuentran las discontinuidades desde la superficie o pared posterior. Las herramientas principales para esta inspección son un generador electrónico de señales que produce pulsos eléctricos, y el transductor que emite el haz de ondas ultrasónicas cuando recibe los pulsos eléctricos (Merino Ponce 2007).

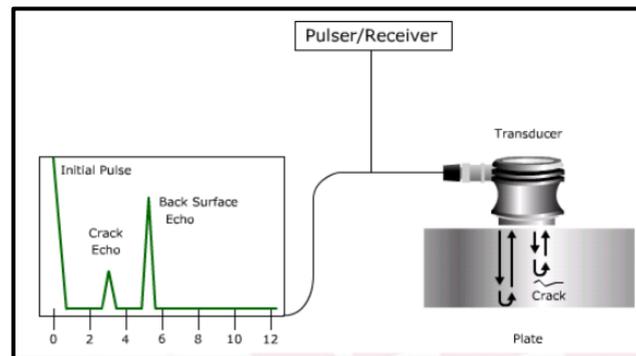


Figura 1.17. Lecturas obtenidas por uso del palpador (Merino Ponce 2007).

## 1.6. Aplicaciones de simulación numérica en el estudio de elementos de máquinas

El método de los elementos finitos es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy utilizado en diversos problemas de ingeniería y física.

### 1.6.1. Aplicaciones en ejes de transmisión

El uso de un software de elementos finitos permite agilizar el proceso de diseño de algunos elementos de máquinas. En el caso de ejes, se puede usar la simulación numérica para determinar el valor de los esfuerzos que siente el elemento y las deformaciones presentes.

El ejemplo que se presenta es la simulación de un eje de piñón utilizado en la transmisión por cadenas de un vehículo (Santos Jaimes 2010). El primer paso consiste en conocer las cargas presentes sobre el elemento, las cuales se obtienen a partir de la potencia transmitida. El segundo paso consiste en mallar el eje, para lo cual se utilizaron una cantidad total de 6099 elementos, lo que representa 28012 nodos como se ve en la Figura 1.18. Lo importante del proceso de mallado es tener una configuración homogénea en todo el eje y refinar aquellas partes donde puedan presentarse los máximos esfuerzos, esta decisión se basa en los valores de cargas y momentos que soporta el sitio donde se encuentran ubicados los concentradores de esfuerzos.

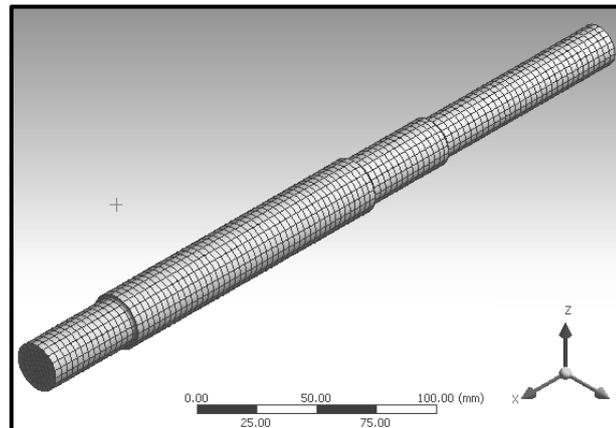


Figura 1.18. Enmallado del eje analizado. (Santos Jaimes 2010).

Una vez habiendo realizado la simulación numérica, se pueden obtener resultados como el esfuerzo equivalente de Von Mises máximo del eje (Ver figura 1.19), criterio que se escoge porque predice la falla causada por la energía elástica asociada con la deformación por esfuerzo cortante.

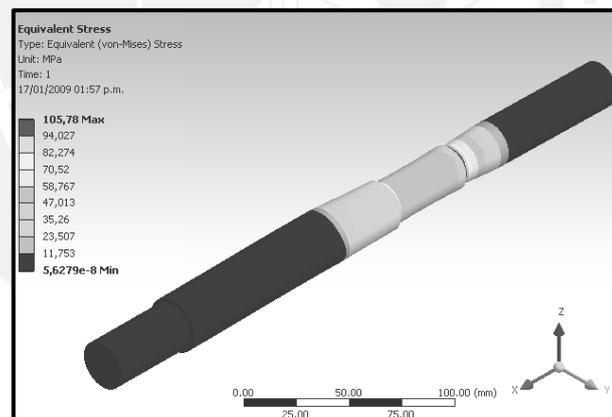


Figura 1.19. Resultados del esfuerzo equivalente de Von Mises sobre el eje estudiado. (Santos Jaimes 2010).

### 1.6.2. Aplicaciones en soportes

El método de los elementos finitos puede usarse también para analizar el comportamiento de soportes donde se pueden alojar piezas fijas o móviles (Palomo Rodríguez 2009).

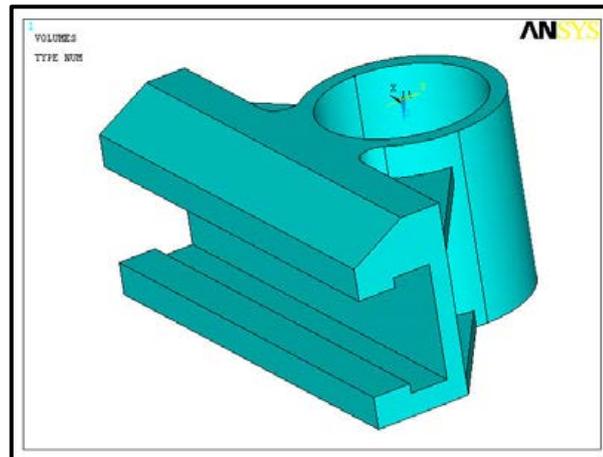


Figura 1.20. Modelado del soporte en 3D para su análisis (Palomo Rodriguez 2009).

Como en el caso anterior, un paso indispensable es generar la malla de la pieza. Asimismo, Deben colocarse las restricciones a las que está sometida. Es evidente que los soportes son piezas de gran importancia en cuanto a su comportamiento y seguridad ante la rotura. Por tanto, cuando se hace la simulación, debe ser considerando la situación más desfavorable. Ésta se produce cuando el soporte está sometido a los esfuerzos producidos por las piezas que aloja.

Ahora tan sólo queda que el programa simule toda la información que se le ha introducido. Un resultado bastante útil es la representación de la deformación de la pieza para ver cómo se comporta y los desplazamientos que se producen. En la figura 1.21 se puede ver como se deforma el soporte. Hay que notar que la deformación producida debe ser coherente con las condiciones impuestas antes de la simulación.

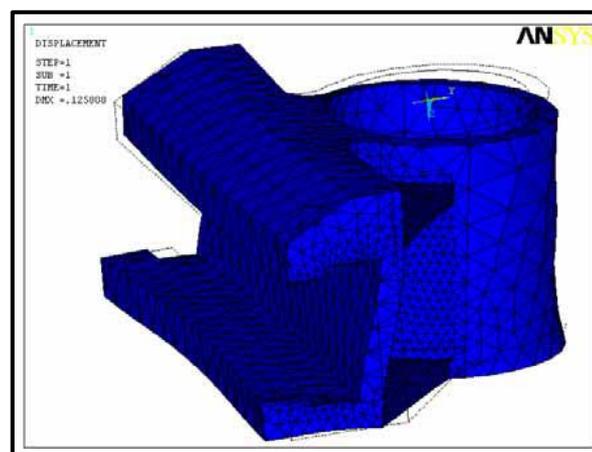


Figura 1.21. Deformación del soporte resultado del análisis por elementos finitos (Palomo Rodriguez 2009).

### 1.6.3. Aplicaciones en engranajes

El método por simulación numérica también es aplicado regularmente en el estudio de engranajes, principalmente en las tensiones de contacto y esfuerzos de flexión.

Estudios centrados en engranajes (Lewicki y Ballarini 1997) utilizan programas de simulación numérica para examinar el contacto entre dientes de engranajes y cómo afecta la carga transmitida sobre la superficie del diente, en respuesta para evitar que se produzcan fallos por picaduras en los flancos de los dientes. Asimismo, se usan para comprobar la máxima capacidad de carga que se puede aplicar al engranaje y la distribución de esfuerzos tensionales en toda su geometría, para verificar en dónde se ubican los máximos esfuerzos de tracción y de compresión. Esto se realiza principalmente para evitar el fallo por fatiga del elemento.

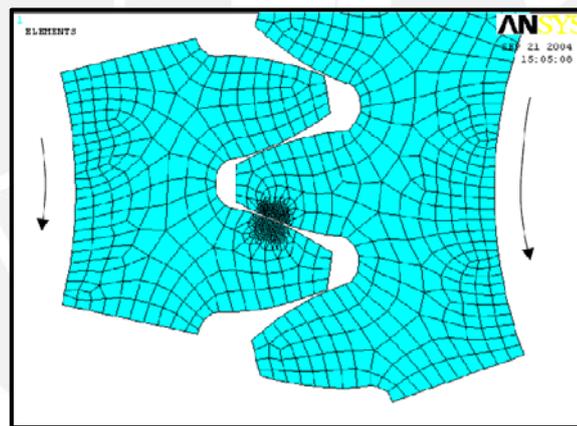


Figura 1.22. Región de contacto entre dos dientes de engranajes (Lewicki y Ballarini 1997).

La figura 1.22 muestra cómo debería ser el enmallado del diente de engranaje que se necesita para poder examinar problemas de fatiga, flexión, contacto, fractura, etc.

Al igual que los estudios expuestos en este acápite, los investigadores utilizan el método de los elementos finitos en estudios de la mecánica de fractura, para poder resolver los problemas de agrietamiento en distintos elementos de máquinas, entre ellos, los engranajes. En los siguientes capítulos se detallará el estudio del problema de propagación de grietas en engranajes, usando el método por elementos finitos. Se elige usar el programa ANSYS para realizar las simulaciones y obtener los resultados que sean requeridos.

## CAPÍTULO 2

### 2. VALIDACIÓN DE LOS MODELOS DE SIMULACIÓN MEDIANTE EL ANÁLISIS DE CASOS TÍPICOS DE FRACTURA

En este capítulo se busca obtener el factor de intensidad de tensiones ( $K$ ) para los diferentes modos de agrietamiento que se pueden presentar en algún caso particular de fractura. Se escoge usar el método de los elementos finitos para realizar este análisis. Sin embargo, el software para el uso del método por simulación numérica tiene una aplicación general, así que para determinar si los modelos planteados y el procedimiento establecido son correctos, es necesario comprobar los resultados obtenidos con el uso de cálculos y metodologías analíticas ya establecidas en la literatura de la mecánica de fractura.

#### 2.1. Análisis de fractura para Modo I

En esta sección se busca determinar el factor de intensidad de tensiones para Modo I de fractura  $K_I$  (tensiones normales al plano de fractura), tanto analíticamente como por simulación numérica. Asimismo, antes de pasar directamente al estudio de engranajes fisurados, se tratará de realizar el estudio por simulación numérica en casos sencillos de agrietamientos en cuerpos con geometría simple, para poder verificar la efectividad del planteamiento propuesto por el método de los elementos finitos, para luego aplicarlos a casos de engranajes fisurados.

### 2.1.1. Estudio para Modo I por Método Analítico

Para poder realizar un estudio más detallado en la aplicación del Modo I, se ha considerado usar un problema de referencia que consiste en un espécimen de 10 cm de alto, 8 cm de ancho y 4 cm de espesor:

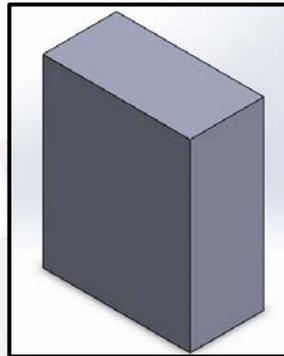


Figura 2.1. Probeta para pruebas de fractura.

Para realizar el análisis se plantea usar un método de cálculo ya estudiado y aplicado a casos sencillos de agrietamientos, con una grieta con forma semi-elíptica:

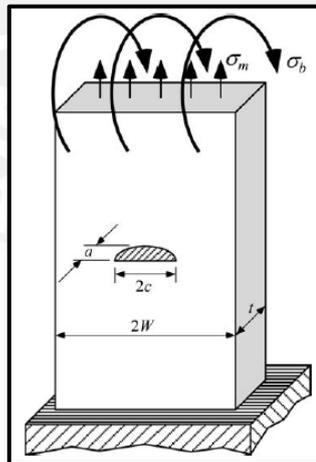


Figura 2.2. Agrietamiento del cuerpo analizado por la aplicación de esfuerzos (Anderson 2005).

Los esfuerzos que se aplican en el estudio son los esfuerzos de tracción y de flexión. A manera de ejemplo, se le aplicará a la probeta un esfuerzo de tracción de 50 MPa. La grieta que se presenta tendrá dimensiones adecuadas para los inicios de una fase de propagación, así que se elige 1 mm de radio menor ( $a$ ) y 1.5 mm de radio mayor ( $c$ ).

Para poder hallar el  $K_I$  correspondiente al frente de la grieta, la expresión matemática que se usa es la siguiente (Anderson 2005):

$$K_I = (\sigma_m + H * \sigma_b) * \sqrt{\frac{\pi * a}{Q}} * F \quad (\text{Ec. 2.1})$$

Para poder resolver la ecuación, se definen los siguientes valores:

$$Q = 1 + 1.464 * \left(\frac{a}{c}\right)^{1.65} = 1 + 1.464 * \left(\frac{1}{1.5}\right)^{1.65} = 1.75 \quad (\text{Ec. 2.2})$$

$$F = \left[ M_1 + M_2 * \left(\frac{a}{t}\right)^2 + M_3 * \left(\frac{a}{t}\right)^4 \right] * f_\theta * f_W * g = 1.071 \quad (\text{Ec. 2.3})$$

$$M_1 = 1.13 - 0.09 * \left(\frac{a}{c}\right) = 1.13 - 0.09 * \left(\frac{1}{1.5}\right) = 1.07$$

$$M_2 = -0.54 + \frac{0.89}{0.2 + \frac{a}{c}} = -0.54 + \frac{0.89}{0.2 + \frac{1}{1.5}} = 0.487$$

$$M_3 = 0.5 - \frac{1}{0.65 + \frac{a}{c}} + 14 * \left(1 - \frac{a}{c}\right)^{24} = 0.5 - \frac{1}{0.65 + \frac{1}{1.5}} + 14 * \left(1 - \frac{1}{1.5}\right)^{24} = -0.259$$

$$f_\theta = \left[ \left(\frac{a}{c}\right)^2 * \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \right]^{1/4} = \left[ \left(\frac{1}{1.5}\right)^2 * \cos^2 90 + \sin^2 90 \right]^{1/4} = 1$$

$$f_W = \left[ \sec \left( \frac{\pi * c}{2 * W} * \sqrt{\frac{a}{t}} \right) \right]^{1/2} = \left[ \sec \left( \frac{\pi * 2}{80} * \sqrt{\frac{1}{40}} \right) \right]^{1/2} = 1$$

$$g = 1 + \left[ 0.1 + 0.35 * \left(\frac{a}{t}\right)^2 \right] * (1 - \sin \phi)^2 = 1 + \left[ 0.1 + 0.35 * \left(\frac{1}{40}\right)^2 \right] * (1 - \sin 90)^2 = 1$$

$$H = H_1 + (H_2 - H_1) * (\sin \phi)^p = 0.9897 + (0.9675 - 0.9897) * (\sin 90)^p = 0.9675 \quad (\text{Ec. 2.4})$$

$$p = 0.2 + \frac{a}{c} + 0.6 * \left(\frac{a}{t}\right) = 0.2 + \frac{1}{1.5} + 0.6 * \left(\frac{1}{40}\right) = 0.882$$

$$H_1 = 1 - 0.34 * \frac{a}{t} - 0.11 * \frac{a}{c} * \left(\frac{a}{t}\right) = 1 - 0.34 * \frac{1}{40} - 0.11 * \frac{1}{1.5} * \left(\frac{1}{40}\right) = 0.9897$$

$$H_2 = 1 + G_1 * \left(\frac{a}{t}\right) + G_2 * \left(\frac{a}{t}\right)^2 = 1 - 1.3 * \left(\frac{1}{40}\right) + 0.0312 * \left(\frac{1}{40}\right)^2 = 0.9675$$

$$G_1 = -1.22 - 0.12 * \left(\frac{a}{c}\right) = -1.22 - 0.12 * \left(\frac{1}{1.5}\right) = -1.3$$

$$G_2 = 0.55 - 1.05 * \left(\frac{a}{c}\right)^{0.75} + 0.47 * \left(\frac{a}{c}\right)^{1.5} = 0.55 - 1.05 * \left(\frac{1}{1.5}\right)^{0.75} + 0.47 * \left(\frac{1}{1.5}\right)^{1.5} = 0.0312$$

Donde:

-Q, M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, M<sub>3</sub>, f<sub>θ</sub>, H<sub>1</sub>, H<sub>2</sub>, G<sub>1</sub>, G<sub>2</sub>: Factores geométricos dependientes de la geometría de la grieta semi-elíptica.

-F, f<sub>w</sub>, g, p: Factores geométricos dependientes del tamaño de grieta y de la geometría del cuerpo agrietado.

De esta forma, se reemplaza todos los valores obtenidos en la ecuación 2.1. En este caso, el valor del esfuerzo de flexión  $\sigma_b$  es cero, debido a que solo existe el esfuerzo de tracción. Así, se obtiene:

$$K_I = (50 + 0.9675 \cdot \sigma_b) \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot 1}{1.75}} \cdot 1.071 = 71.749 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$$

A continuación se hallarán también los valores de  $K_I$  para otros valores de profundidad de grieta, usando las mismas ecuaciones antes descritas, para su posterior análisis: (Ver Anexo A.3-1)

Tabla N°1. Valores del factor de intensidad de tensiones para modo I según longitud de grieta

Profundidad de grieta	Ancho de grieta	Relación a/c	Relación a/t	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ (MPa * $\sqrt{\text{mm}}$ )
a=1 mm	c=1.5 mm	0.67	0.025	71.749
a=2 mm	c=3 mm	0.67	0.05	101.491
a=3 mm	c=4.5 mm	0.67	0.075	124.273

Este estudio realizado corresponde a la etapa de propagación de la grieta. Sin embargo, resulta importante evaluar también los casos cuando la grieta llega a ser pasante por todo el ancho del espécimen de estudio, principalmente para comprobar la efectividad del planteamiento por elementos finitos para estos casos. Para realizar el estudio, se usará el mismo modelo del estudio anterior, pero con una configuración geométrica diferente, aplicada a grietas pasantes:

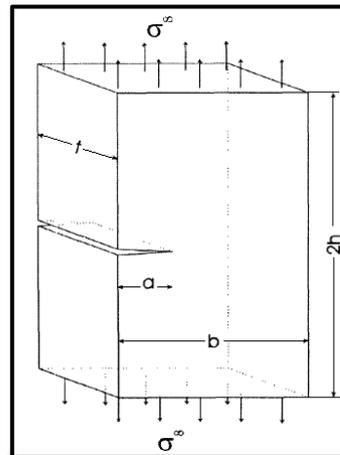


Figura 2.3. Especimen con grieta pasante sometida a tracción (Tada, Paris e Irwin 2000).

Para esta condición se aplica la siguiente expresión para el frente de grieta (Tada, Paris e Irwin 2000):

$$K_I = \sigma * \sqrt{\pi * a} * F\left(\frac{a}{b}\right) \tag{Ec. 2.5}$$

Donde  $F\left(\frac{a}{b}\right)$  es un factor geométrico que para hallarlo se requiere ir a un gráfico que nos otorga ese valor con respecto a la relación entre la medida de la grieta (a) y el ancho del cuerpo de estudio (b), donde la curva esté definida por la ecuación  $(1 - \frac{a}{b})^{3/2} * F\left(\frac{a}{b}\right)$  (Tada, Paris e Irwin 2000):

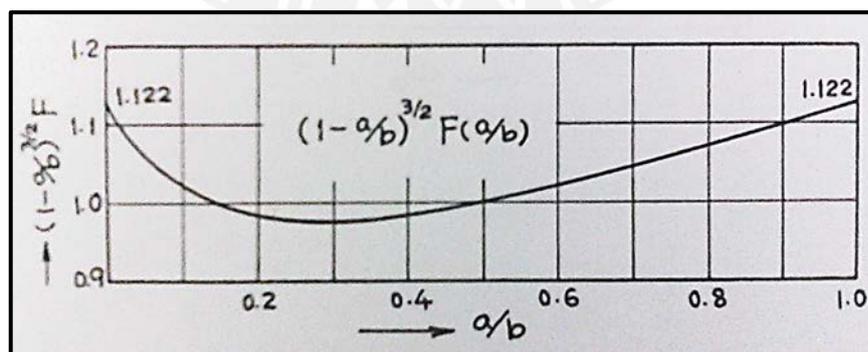


Gráfico N°1. Curva de relación entre el tamaño de grieta y el espesor del cuerpo fracturado (Tada, Paris e Irwin 2000).

Del gráfico N°1 y de la ecuación 2.5, se puede calcular el valor del factor de intensidad de tensiones, para un esfuerzo aplicado de 50 MPa:

- Según el gráfico, para  $a=1$  mm y  $b=40$  mm  $\rightarrow F\left(\frac{a}{b}\right)=1.137$
- $K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot F\left(\frac{a}{b}\right) = 50 \cdot \sqrt{\pi \cdot 1} \cdot 1.237 = 100.798 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$

A continuación se hallarán también los valores de  $K_I$  para otras profundidades de grieta, usando las mismas ecuaciones antes descritas, para su posterior análisis: (Ver Anexo A3-2)

Tabla N°2. Valores del factor de intensidad de tensiones para modo I según longitud de grieta

Profundidad de grieta	Relación $a/b$	Factor geométrico $F\left(\frac{a}{b}\right)$	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ ( $\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$ )
a=1 mm	0.025	1.137	100.798
a=2 mm	0.05	1.153	144.507
a=3 mm	0.075	1.168	179.287

### 2.1.2. Estudio para Modo I por Simulación Numérica

En la presente sección se presenta el método empleado para la simulación de las pruebas de fractura usando ANSYS MECHANICAL y sus resultados para la obtención del factor de intensidad de tensiones  $K$ , con la finalidad de realizar un análisis comparativo entre los métodos analítico y numérico, y así comprobar que el modelo planteado por el método de los elementos finitos sea aceptable.

Para realizar la simulación primero se debe realizar el modelado de la pieza a analizar (Ver figura 2.1), lo cual se puede lograr usando un software de diseño en 3 dimensiones. La metodología analítica ubica la grieta en el centro del modelo de estudio, por lo que en la simulación se debe ubicar también la grieta en el centro de la cara que sufrirá la fractura. La forma de realizar esta labor es definiendo un nuevo origen de coordenadas en el punto donde iniciará el agrietamiento e indicar hacia qué dirección se propagará.

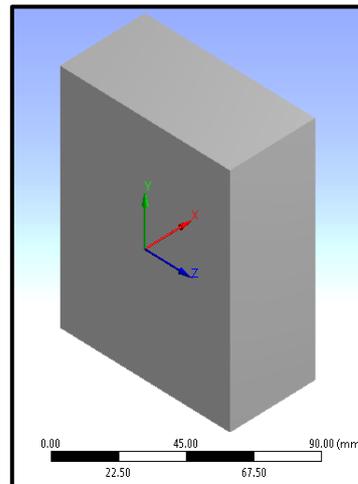


Figura 2.4. Ubicación del origen de coordenadas en el centro del sólido.

En la figura 2.4 se define al eje x como la dirección hacia donde se propagará la grieta, y el eje z la sección transversal de la grieta. La siguiente operación debe ser la generación de la malla. Esta es la operación más importantes en la realización del modelo, debido a que se logra tener una configuración homogénea en todo el cuerpo de estudio, para luego refinar las partes donde se presenten los máximos esfuerzos, de acuerdo a los valores de cargas aplicadas y momentos que soporta la zona donde se ubican los concentradores de esfuerzos.

Para que se realice la función, se debe especificar el tipo de enmallado y seleccionar la porción del elemento que se quiera enmallar.

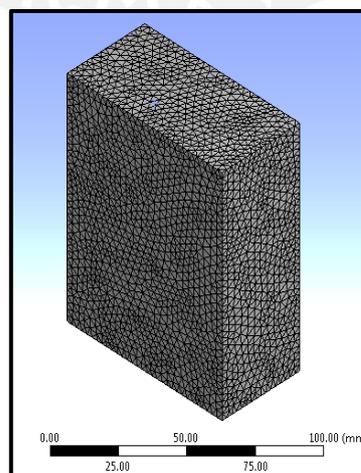
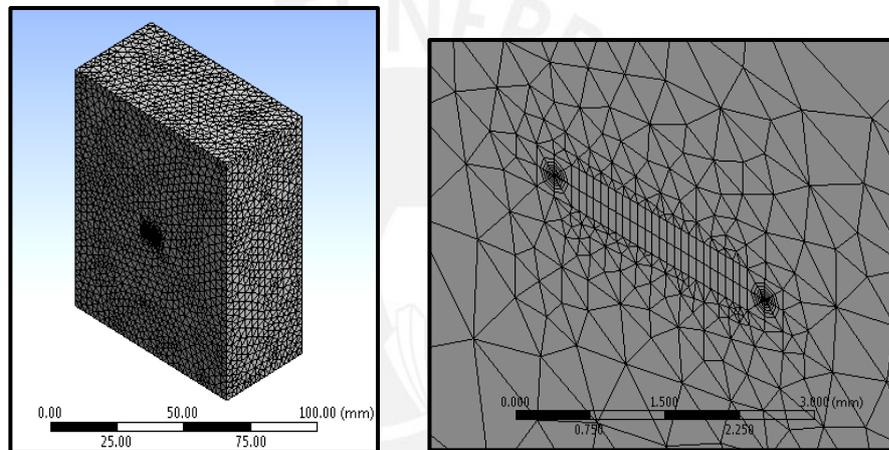


Figura 2.5. Enmallado de todo el espécimen de estudio.

A estas alturas ya se puede generar la grieta que se busca analizar. ANSYS usa una geometría semi-elíptica ya predeterminada para el análisis de fractura, así que solo se debe seleccionar la cara del espécimen donde ocurrirá el agrietamiento y darle la orientación según el nuevo origen de coordenadas ya definido. La forma de determinar la geometría de una elipse es especificando las medidas de sus radios mayor y menor, y en este ejemplo, para definir la fractura se usan como datos un radio mayor de 1.5 mm y un radio menor de 1 mm. Una vez establecidos los parámetros, ya se puede generar la malla de la fractura.



Figuras 2.6 y 2.7. Enmallado de la fractura en el cuerpo de estudio.

El siguiente paso es especificar las cargas aplicadas al cuerpo. En este caso, en la cara superior del espécimen actúa un esfuerzo normal de 50 MPa a modo de tracción, mientras que en la cara inferior se coloca una restricción fija que se oponga a ese esfuerzo.

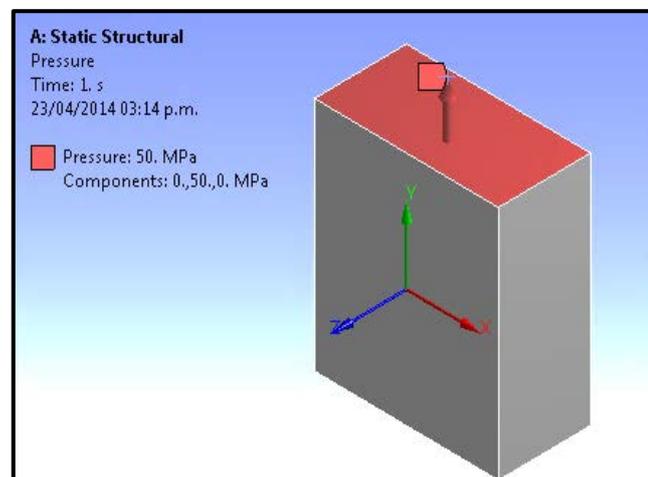


Figura 2.8. Esfuerzo de 50 MPa normal a la cara superior del espécimen de estudio.

Finalmente, se procede a obtener los parámetros de fractura. Para ello, se insertan las herramientas de fractura del programa ANSYS para hallar los factores deseados. En este caso se obtendrá el factor de intensidad de tensiones para MODO I ( $K_I$ ).

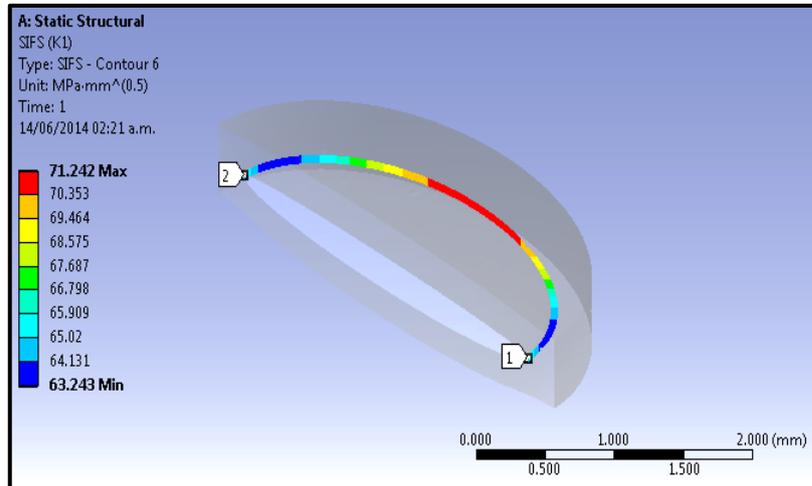


Figura 2.9. Resultado de análisis por fractura, obteniendo el valor de  $K_I$  en el frente de grieta.

Ahora se observa que los valores para  $K_I$  en el frente de grieta, por método analítico hallado en la tabla N°1, y por método por simulación numérica son: (Ver Anexo A.3-1)

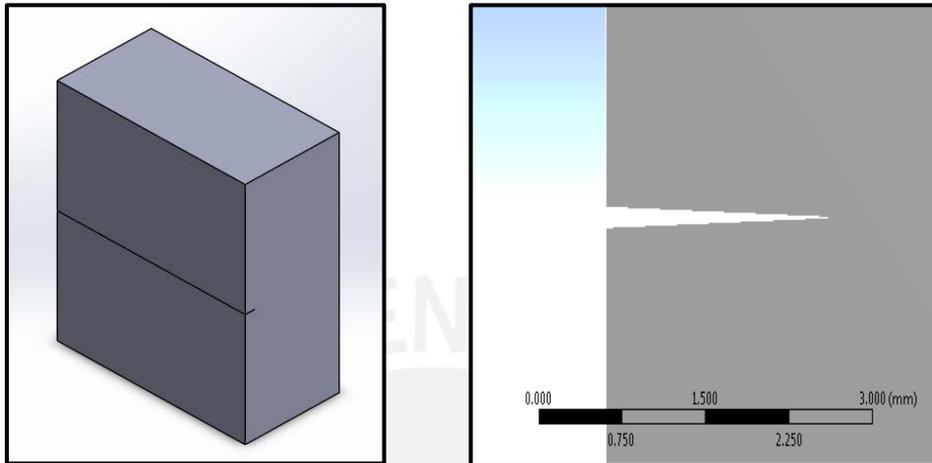
Tabla N°3. Resultados para  $K_I$  mediante método analítico y mediante simulación numérica, obteniendo la diferencia entre ambos valores.

	Tamaño de grieta	Por método analítico	Por simulación numérica	Diferencia (%)
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_I</math> MPa * <math>\sqrt{\text{mm}}</math></b>	a= 1 mm	71.749	71.242	0.786
	a= 2 mm	101.491	102.85	1.321
	a= 3 mm	124.273	126.624	1.857

Al comparar los resultados obtenidos por el método analítico con los obtenidos por simulación numérica, se puede apreciar que los valores para  $K_I$  sufren una variación menor de 5%, uno con respecto al otro, indicando así que el planteamiento propuesto para el análisis por simulación numérica es aceptable para casos de agrietamiento.

Ahora se procede a examinar el caso cuando la grieta abarca todo el ancho del espécimen de estudio (grieta pasante). Para ello se realizará un nuevo modelo con

una entalla que sea pasante por todo el ancho. Esta entalla tendrá forma de V y una profundidad de acuerdo a la profundidad de grieta que se requiera analizar (a) en mm.



Figuras 2.10 y 2.11. Modelado del espécimen con grieta pasante en forma de V.

El procedimiento para el análisis de la grieta será idéntico al caso anterior, iniciando con la definición de un nuevo origen de coordenadas para la ubicación de la grieta y hacia qué dirección se propagará. Como en el procedimiento anterior, se escoge como el origen de coordenadas el punto medio de la abertura ya definida por la entalla.

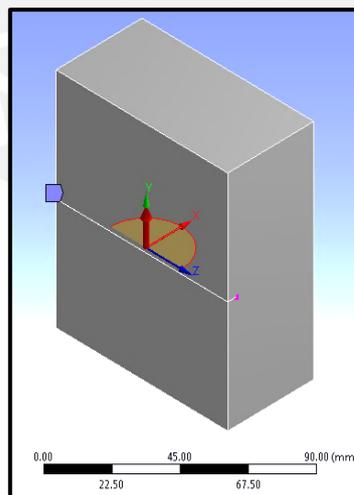


Figura 2.12. Definición de la dirección hacia donde se propagará la grieta.

En la figura 2.12 se observa que la grieta se propagará en dirección del eje x y el eje z es la sección transversal. El proceso de enmallado también será el mismo que en el caso anterior, la variación se dará cuando se genere la fractura. La grieta definida

tiene un frente con forma en V, por lo que la fractura se genera con la opción de pre-enmallado para grietas ya definidas. En este caso se toma como referencia la línea central del frente de grieta y el sistema de coordenadas establecido para el enmallado.

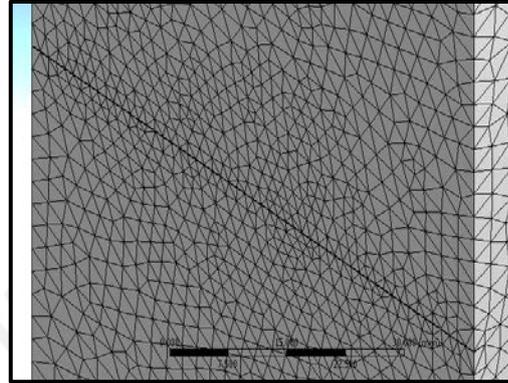


Figura 2.13. Malla generada alrededor de la fisura ya definida.

Al igual que en el ejemplo anterior, se define un esfuerzo de tracción 50 MPa en la cara superior del modelo y en la cara inferior se mantendrá una restricción fija opuesta al esfuerzo. Finalmente, se procede a obtener los parámetros de fractura insertando las herramientas de fractura del programa ANSYS. En este caso se obtendrá el factor de intensidad de tensiones para MODO I ( $K_I$ ).

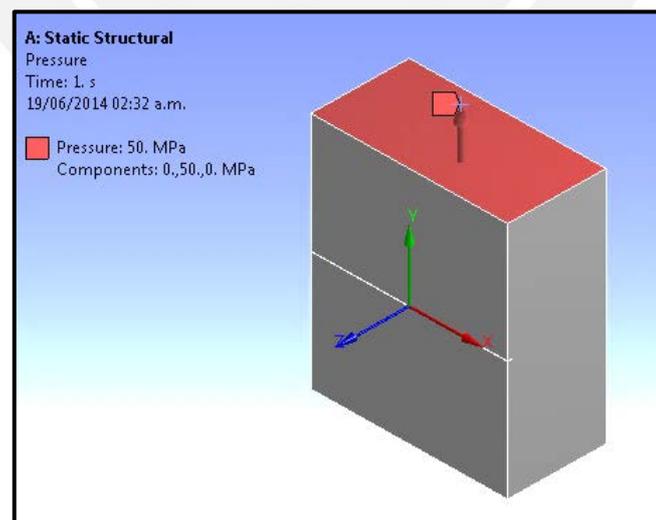


Figura 2.14. Aplicación del esfuerzo de tracción en el espécimen.

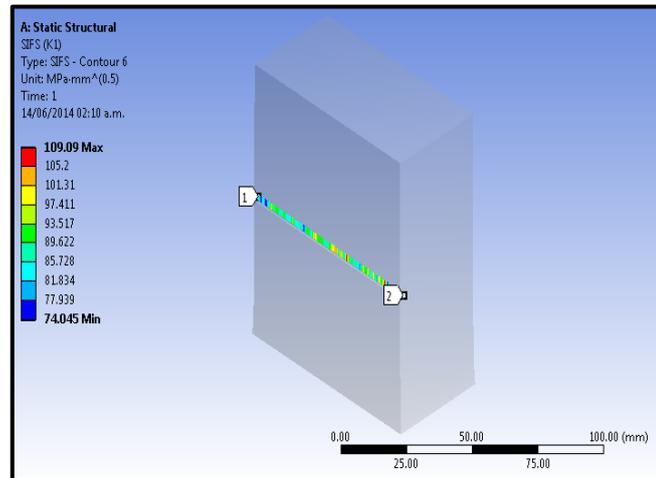


Figura 2.15. Resultado de análisis de fractura, obteniendo el valor de  $K_I$  en el frente de grieta.

Ahora se pueden comparar los resultados obtenidos por el método analítico con los obtenidos por simulación numérica para evaluar el valor de  $K_I$  en el frente de la grieta, para el caso de grietas pasantes por todo el ancho del elemento. (Ver Anexo A3-2)

Tabla N°4. Resultados para  $K_I$  mediante método analítico y mediante simulación numérica.

	Tamaño de grieta	Por método analítico (MPa)	Por simulación numérica (MPa)	Diferencia (%)
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_I</math></b>	a= 1 mm	100.798	109.09	7.601
	a= 2 mm	144.507	154.92	6.721
	a= 3 mm	179.287	193.23	7.216

Al comparar los resultados se observa que la diferencia entre los valores para  $K_I$  obtenidos por simulación numérica, con respecto a los obtenidos por método analíticos, es menor de 8% para los casos planteados. Debido a los resultados obtenidos en las tablas N° 3 y N° 4, se puede comprobar que la propuesta usando elementos finitos otorga resultados aceptables y acordes con la teoría.

## 2.2. Análisis de fractura para Modo II

En esta sección se busca determinar el factor de intensidad de tensiones para el Modo II de fractura  $K_{II}$  (esfuerzos tangenciales que actúan paralelos a la superficie de la

grieta pero en direcciones opuestas), tanto analíticamente como por simulación numérica. Tal como se realizó para el Modo I, se usará un cuerpo agrietado con geometría simple para comprobar la efectividad del planteamiento con simulación numérica, antes de entrar al caso de engranajes fisurados.

### 2.2.1. Estudio para Modo II por Método Analítico

Para el modo de fractura II la información que se tiene en el marco teórico es insuficiente, limitada mayormente para casos de agrietamiento por todo el ancho de un cuerpo. Si bien el presente trabajo de tesis estudia la fase de propagación de grietas, resulta importante validar los resultados que se pueden obtener mediante simulación numérica para este modo de agrietamiento, así que para ello, en este capítulo, se usarán condiciones geométricas para casos de fractura por todo el ancho.

Para realizar el estudio se usará el mismo modelo empleado para el análisis del modo I (ver figura 2.1). La solución planteada será partiendo de una metodología de cálculo sencilla para casos de fractura por esfuerzos cortantes (Tada, Paris e Irwin 2000):

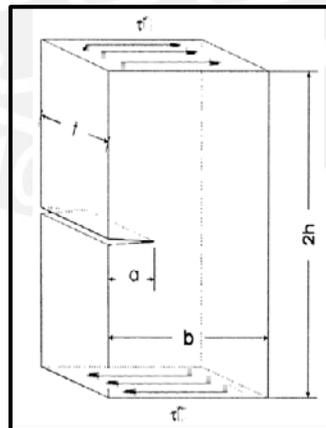


Figura 2.16. Cuerpo que sufre fractura por la aplicación de esfuerzos cortantes (Tada, Paris e Irwin 2000).

Esta condición para modo II utiliza un factor geométrico  $F\left(\frac{a}{b}\right)$  similar al de modo I, obteniéndolo mediante el gráfico N° 2, el cual nos da ese valor con respecto a la relación entre la medida de la grieta (a) y el ancho del cuerpo de estudio (b) (Tada, Paris e Irwin 2000):

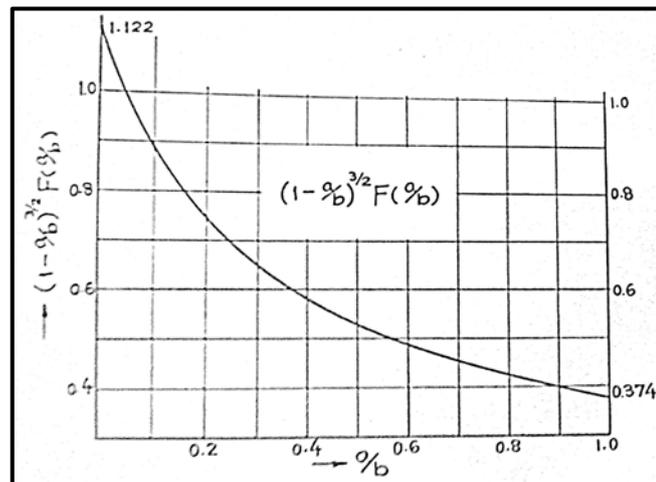


Gráfico N°2. Curva de relación entre el tamaño de grieta y el espesor del cuerpo fracturado (Tada, Paris e Irwin 2000).

Este factor se usa en la expresión matemática aplicada a casos de fractura como el de la figura 2.16 y para el frente de grieta se tiene:

$$K_{II} = \frac{h}{10} * \sigma * \sqrt{\pi * a} * F\left(\frac{a}{b}\right) \quad (\text{Ec. 2.6})$$

Del gráfico N°2 y de la ecuación 2.6 (Tada, Paris e Irwin 2000), se puede calcular el valor del factor de intensidad de tensiones, para un esfuerzo aplicado de 10 MPa:

- Según el gráfico, para  $a=1 \text{ mm}$  y  $b=40 \text{ mm}$   $\rightarrow F\left(\frac{a}{b}\right) = 1.143$
- $K_{II} = \frac{h}{10} * \sigma * \sqrt{\pi * a} * F\left(\frac{a}{b}\right) = 5 * 10 * \sqrt{\pi * 1} * 1.143 = 101.296 \text{ MPa} * \sqrt{\text{mm}}$

De la misma forma, se puede hallar el valor de  $K_{II}$  para otras profundidades de grieta, usando las mismas ecuaciones antes descritas: (Ver Anexo A.3-3)

Tabla N°5. Valores del factor de intensidad de tensiones para modo II según longitud de grieta.

Profundidad de grieta	Relación $a/b$	Factor geométrico $F\left(\frac{a}{b}\right)$	Factor de Intensidad de Tensiones $K_{II}$ ( $\text{MPa} * \sqrt{\text{mm}}$ )
a=1 mm	0.1	1.143	101.296
a=2 mm	0.125	1.079	135.355
a=3 mm	0.15	1.034	158.738

### 2.2.2. Estudio para Modo II por Simulación Numérica

El procedimiento a emplear para obtener el factor de intensidad de tensiones  $K_{II}$  será el mismo que se empleó para el caso de modo I. El proceso varía al momento de definir el esfuerzo que se aplicará para generar la fractura. El sentido del esfuerzo será paralelo al plano de fractura y perpendicular a la parte superior de la cara del espécimen que sufre la fractura, de acuerdo a la figura 2.17, con un valor de 10 MPa.

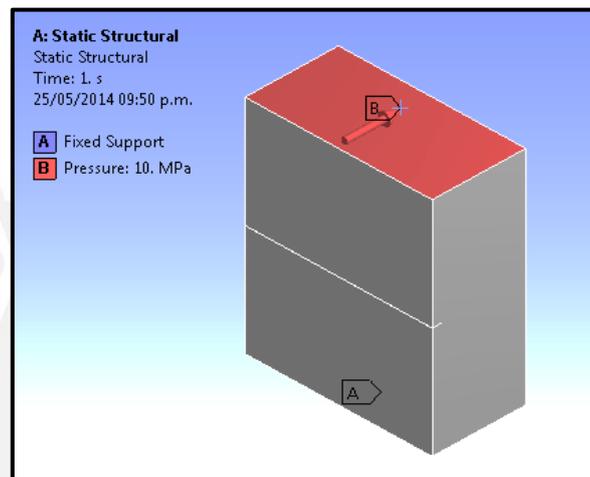


Figura 2.17. Esfuerzo cortante de 10 MPa ubicada la cara superior del espécimen de estudio.

En la cara inferior del espécimen se ubicará una restricción fija. Finalmente, se resuelve el sistema para obtener los parámetros de fractura. Para ello se inserta herramientas de fractura del programa ANSYS para hallar los factores que se requieran, en este caso, el factor de intensidad de tensiones para MODO II ( $K_{II}$ ).

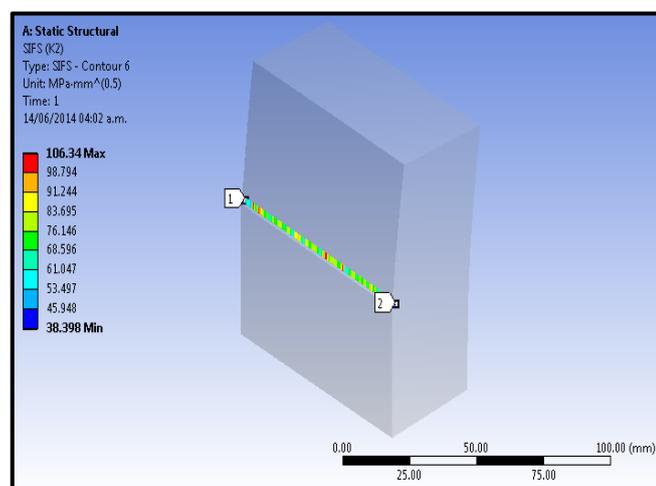


Figura 2.18. Resultado del análisis por fractura, obteniendo el de  $K_{II}$  en el frente de grieta.

A continuación, se realiza la comparación entre los valores para  $K_{II}$  en el frente de grieta, por método analítico hallado en la tabla N° 5, y por método por simulación numérica son: (Ver Anexo A.3-3)

Tabla N°6. Resultados para  $K_{II}$  mediante método analítico y mediante simulación numérica, obteniendo la diferencia entre ambos valores.

	Tamaño de grieta	Por método analítico	Por simulación numérica	Diferencia (%)
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_{II}</math> (MPa * <math>\sqrt{\text{mm}}</math>)</b>	a= 1 mm	101.296	106.34	4.824
	a= 2 mm	135.355	143.5	5.676
	a= 3 mm	158.738	169.99	6.619

Al comparar los resultados se observa que los obtenidos por simulación numérica con respecto a los obtenidos por métodos analíticos son menores a 10%, por lo cual se comprueba que la metodología propuesta usando ANSYS MECHANICAL otorga resultados aceptables para hallar el factor de intensidad de tensiones.

### 2.3. Análisis de fractura para Modo III

En esta sección se busca determinar el factor de intensidad de tensiones para el Modo III de fractura  $K_{III}$  (esfuerzos tangenciales que actúan paralelos a la superficie de fractura pero perpendiculares a la cara de la probeta y opuestos entre sí), tanto analíticamente como por simulación numérica.

#### 2.3.1. Estudio para Modo III por Método Analítico

Dentro de la literatura existe escasa información para analizar el modo de fractura III, debido a que es el menos común de los tres modos estudiados en la mecánica de fractura. Los estudios se centran únicamente cuando la grieta es pasante por todo el ancho del cuerpo, por lo que la comparación de resultados se hará para estos casos.

La solución planteada será similar a la que se usó para el modo II de fractura. La diferencia será en que ahora se le aplica unos esfuerzos cortantes en dirección

paralela al plano de fractura, perpendiculares a las caras laterales del espécimen de estudio y en direcciones opuestas, tal como se muestra en la siguiente figura:

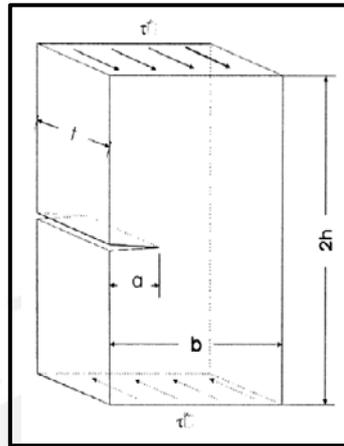


Figura 2.19. Sentido de las fuerzas para fractura por modo III (Tada, Paris e Irwin 2000).

La expresión que define esta condición geométrica es:

$$K_{III} = 20 * \sigma * \sqrt{\pi * a} * \sqrt{\frac{2 * b}{\pi * a}} * \tan \frac{\pi * a}{2 * b} \quad (\text{Ec. 2.7})$$

La ecuación 2.7 es una expresión matemática general que involucra la profundidad de grieta (a) y el ancho del cuerpo fisurado (b). Para un esfuerzo cortante de 10 MPa se tiene:

- $$K_{III} = 20 * \sigma * \sqrt{\pi * a} * \sqrt{\frac{2 * b}{\pi * a}} * \tan \frac{\pi * a}{2 * b} = 20 * 10 * \sqrt{\pi * 1} * \sqrt{\frac{2 * 40}{\pi * 1}} * \tan \frac{\pi * 1}{2 * 40} = 46.832 \text{ MPa} * \sqrt{\text{mm}}$$

A continuación se hallarán también los valores de  $K_{III}$  para otras medidas de profundidad de grieta, usando la misma ecuación antes descrita: (Ver Anexo A.3-4)

Tabla N°7. Valores del factor de intensidad de tensiones para modo III según longitud de grieta.

Profundidad de grieta	Relación $\frac{\pi * a}{2 * b}$	Factor de Intensidad de Tensiones $K_{III}$ (MPa * $\sqrt{\text{mm}}$ )
a=1 mm	0.0393	46.832
a=2 mm	0.0785	66.231
a=3 mm	0.1178	81.116

### 2.3.2. Estudio para Modo III por Simulación Numérica

El procedimiento para realizar este análisis será el mismo que se usó para el modo I y modo II de fractura. La variación será al momento de definir la fuerza que se aplica en el espécimen para generar la fractura. Esta fuerza tendrá un valor de 10 MPa y una orientación diferente, de acuerdo a la figura 2.20. En la cara inferior se ubica una restricción fija para que se oponga a la fuerza tangencial.

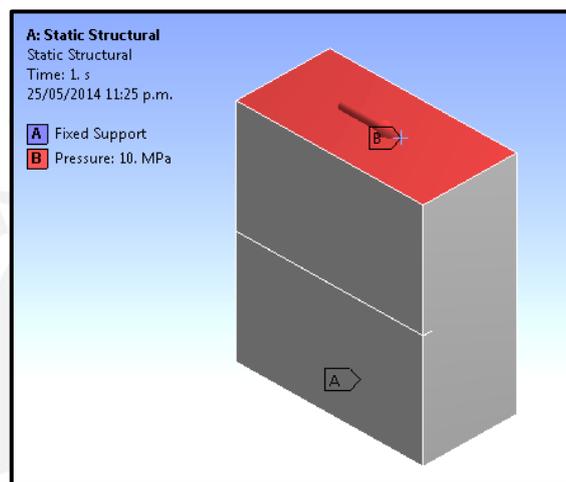


Figura 2.20. Ubicación de la fuerza en la cara superior del espécimen.

Finalmente, se inserta herramientas de fractura del programa ANSYS para hallar los factores que se requieran. En este caso se obtendrá el factor de intensidad de tensiones perteneciente al MODO III ( $K_{III}$ ).

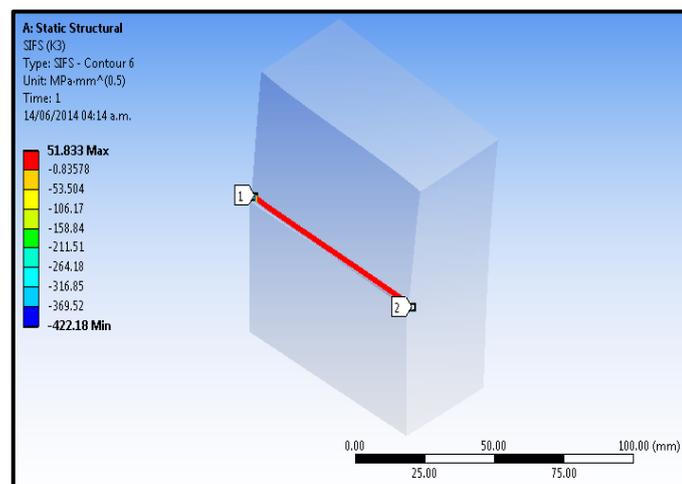


Figura 2.21. Resultado del análisis, obteniendo el valor de  $K_{III}$  en el frente de grieta.

A continuación, se realiza la comparación entre los valores para  $K_{III}$  en el frente de grieta, por método analítico hallado en la tabla N° 7, y por método por simulación numérica son: (Ver Anexo A.3-4)

Tabla N°8. Resultados para  $K_{III}$  mediante método analítico y mediante simulación numérica, obteniendo la diferencia entre ambos valores.

	Tamaño de grieta	Por método analítico (MPa)	Por simulación numérica (MPa)	Diferencia (%)
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_{III}</math></b>	a= 1 mm	46.832	51.833	9.337
	a= 2 mm	66.231	72.45	8.584
	a= 3 mm	81.316	90.02	9.669

Al comparar los resultados obtenidos por simulación numérica, con respecto a los obtenidos por métodos analíticos, se aprecia que los valores para  $K_{III}$  sufren una variación menor de 10% en todos los casos, por lo cual se puede comprobar que la metodología propuesta usando ANSYS MECHANICAL otorga resultados aceptables.

### CAPÍTULO 3

#### 3. PARTICULARIDADES DE LOS MODELOS DE SIMULACIÓN APLICADOS AL ANÁLISIS DE FRACTURA EN ENGRANAJES CILÍNDRICOS

En el presente capítulo se detallará el análisis del diente de engranaje fracturado por simulación numérica usando ANSYS MECHANICAL, para obtener un resultado y aproximarlos con uno obtenido mediante metodologías planteadas según los modelos geométricos mencionados en el capítulo 2, aplicándolos a casos de engranajes fisurados. Dentro de las particularidades se considerará el efecto de la carga variable que actúa en el diente.

##### 3.1. Determinación de la fuerza actuante

La transmisión de potencia por engranajes está dado por el engrane entre los dientes del piñón y la rueda. Por ello, durante este proceso existen entre ellos una fuerza normal a los perfiles en el punto de contacto, producida por el empuje del diente del engranaje conductor sobre el engranaje conducido. En la figura 3.1, la línea "A-A" determina la línea de engrane (Ver Anexo A1) por donde se producirá el contacto entre los perfiles de dientes, y es en este punto donde se transmite la carga de un engranaje a otro.

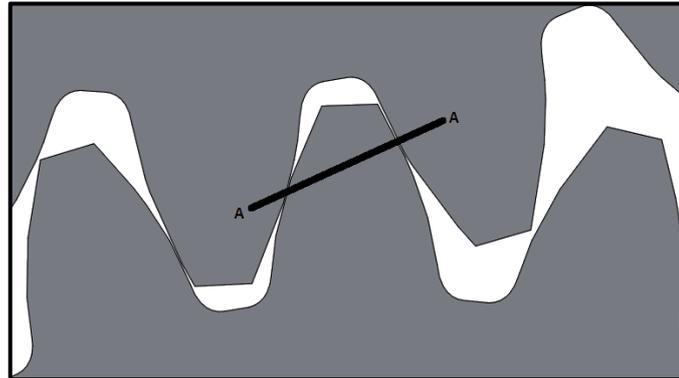
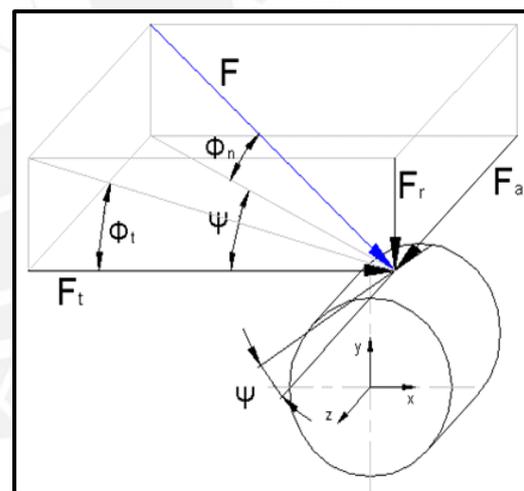
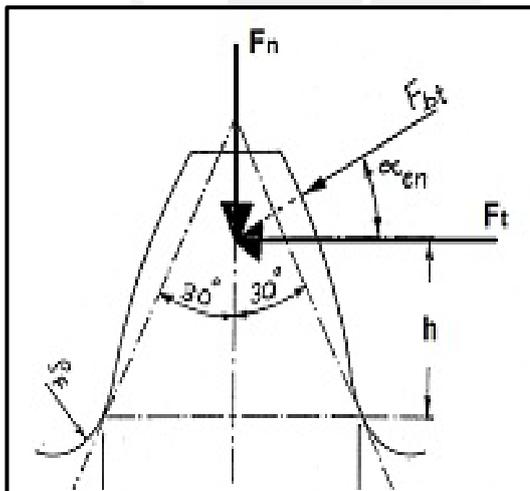


Figura 3.1. Línea de engrane presente en el contacto entre los dientes del piñón y de la rueda.

Asimismo, esta línea determina la dirección que tendrá la carga con respecto al diente de engranaje que se está analizando. Esta fuerza es una resultante que puede ser dividida en sus componentes tangencial y radial, en caso de diente recto; y en sus componentes tangencial, radial y axial, en caso de diente helicoidal.



Figuras 3.2 y 3.3. Componentes de la carga aplicada a dientes de engranaje recto y helicoidal (Pinochet 2007).

Para poder obtener el valor de la fuerza que se transmite se emplea la norma ISO 6336. En ella se distinguen dos partes: la primera evalúa el esfuerzo de flexión actuante en el diente y en la segunda se evalúa el esfuerzo de flexión admisible según el material del engranaje. Al final se comparan los valores obtenidos en ambas partes.

Cabe resaltar que este cálculo es referencial, ya que lo que se desea es hallar una fuerza de referencia que se transmita por el engrane entre dientes. En este caso, la

fuerza máxima que soporta un diente de engranaje sin fisurar, que se halla con la aplicación de las norma ISO 6336, pasaría a ser una fuerza crítica para que la grieta de un engranaje ya fisurado comience a expandirse, debido a que es la carga máxima con la que el engranaje fue diseñado. A continuación se presentan las expresiones de cálculo establecidas en la norma (International Standard ISO 6336 1996):

-Cálculo del esfuerzo de flexión actuante

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} * Y_{Fa} * Y_{Sa} * Y_{\epsilon} * Y_{\beta} \quad (\text{Ec. 3.1})$$

Donde:

- $\sigma_{F0}$  : Esfuerzo de flexión nominal.
- $F_t$  : Fuerza tangencial nominal.
- $b$  : Ancho del diente de engranaje =  $(10-15) * m_n$
- $m_n$  : módulo normal del engranaje.
- $Y_{Fa}$  : Factor de forma.
- $Y_{Sa}$  : Factor de concentración de tensión.
- $Y_{\epsilon}$  : Factor de engrane
- $Y_{\beta}$  : Factor de inclinación de la hélice

-Cálculo del esfuerzo de flexión admisible

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{Flim}}{S_{Fmin}} * Y_{ST} * Y_{NT} * Y_{\delta \text{ rel } T} * Y_{R \text{ rel } T} * Y_X \quad (\text{Ec. 3.2})$$

Donde:

- $\sigma_{Flim}$  : Esfuerzo pulsante de flexión en la raíz del diente.
- $S_{Fmin}$  : Factor de seguridad mínimo.
- $Y_{ST}$  : Factor de corrección de la tensión para dimensiones de ruedas probadas.
- $Y_{NT}$  : Factor de duración.
- $Y_{\delta \text{ rel } T}$  : Cifra relativa de apoyo, considerando la sensibilidad a la entalla del material.
- $Y_{R \text{ rel } T}$  : Factor de acabado superficial en el redondeo de la raíz.
- $Y_X$  : Factor de tamaño.

Los valores para cada uno de estos factores se pueden determinar mediante las gráficas que otorga la norma ISO 6336 (Ver Anexo A2). Al igualar las ecuaciones 3.1 y 3.2 se logra tener una ecuación en función de la fuerza tangencial y del factor de seguridad, el cual para los casos de estudio tendrá un valor de 2:

$$F_t * S_{Fmin} = \frac{\sigma_{FLim} * Y_{ST} * Y_{NT} * Y_{\delta_{rel T}} * Y_{R_{rel T}} * Y_X * b * m_n}{Y_{Fa} * Y_{Sa} * Y_{\epsilon} * Y_{\beta}} \quad (\text{Ec. 3.3})$$

Habiendo hallado la fuerza tangencial ( $F_t$ ), para casos de dientes rectos se pueden hallar los valores de la fuerza radial ( $F_r$ ) y la fuerza resultante ( $F$ ) aplicando simple trigonometría en base en la figura 3.2 con un ángulo de presión normal ( $\alpha_n$ ):

- $F = \frac{F_t}{\cos \alpha_n}$  (Ec. 3.4)

- $F_r = F * \sin \alpha_n$  (Ec. 3.5)

Y para casos de dientes helicoidales, se pueden definir las siguientes ecuaciones en función de la fuerza tangencial, según la figura 3.3, para valores de ángulo de presión normal ( $\alpha_n$ ) y ángulo de hélice igual ( $\beta$ ):

- $\frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} = \tan \alpha_t \rightarrow \alpha_t$ : ángulo de presión tangencial (Ec. 3.6)

- $F_r = F_t * \tan \alpha_t$  (Ec. 3.7)

- $F_a = F_t * \tan \beta$  (Ec. 3.8)

- $F = \frac{F_r}{\sin \alpha_n}$  (Ec. 3.9)

Por otro lado, la norma ISO 6336 también plantea unas fórmulas para determinar la ubicación de la carga sobre la superficie del diente, cuando se produce el máximo estado de tensiones sobre la base del diente. Este dato es importante al momento de usar el método de los elementos finitos. Este cálculo depende de la geometría del diente de engranaje y del ángulo de inclinación de la fuerza que se transmite.



### 3.2. Ubicación de la grieta en la superficie del diente de engranaje

En varios estudios sobre agrietamiento en engranajes, se define a la raíz o pie del diente como la sección más crítica o que sufre la mayor concentración de tensiones, debido a la aplicación de esfuerzos por la transmisión de potencia. Es en esta zona donde se formaría e iniciaría la grieta.



Figura 3.6. Agrietamiento de un diente de engranaje recto, partiendo desde la base del mismo. (Pinochet 2007).

Si bien el agrietamiento se origina en la raíz del diente de engranaje, para poder realizar un buen análisis de elementos finitos, es importante ubicar la posición más exacta posible donde se ubica la grieta en la base del diente.

Para estos casos, es posible usar las herramientas del ANSYS MECHANICAL para obtener este dato. Después de haber calculado los valores de la fuerza transmitida y la ubicación de esta con respecto a la base del diente, según la sección 3.1, se pueden ingresar los valores obtenidos al programa con el objetivo de determinar donde ocurre la mayor concentración de esfuerzos. El análisis debe mostrar resultados como:

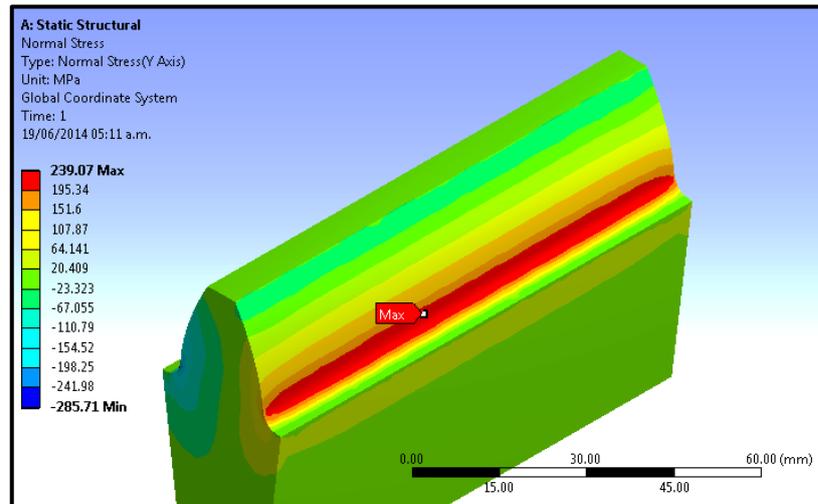


Figura 3.7. Ubicación de la sección donde se produce la mayor concentración de tensiones.

El punto MAX muestra que la zona que sufre la mayor concentración de esfuerzos es efectivamente la del pie del diente, más pegada al límite superior de la trocoide, por lo que en ese lugar se debe ubicar la grieta para realizar el análisis por elementos finitos.

Otro punto importante por aclarar, es la dirección hacia la cual se propaga la grieta. Y es que un diente de engranaje no necesariamente se va a agrietar de forma paralela al plano de fractura. Como en el caso de algunos elementos de máquinas, el agrietamiento de un diente de engranaje puede tener una inclinación que haría que la sección remanente del diente sea mayor, y por tanto, su vida útil también se extienda más. Para verificar este comportamiento, se han realizado estudios en laboratorios, sobre la propagación de grietas en dientes de engranajes y la orientación que éstas toman.

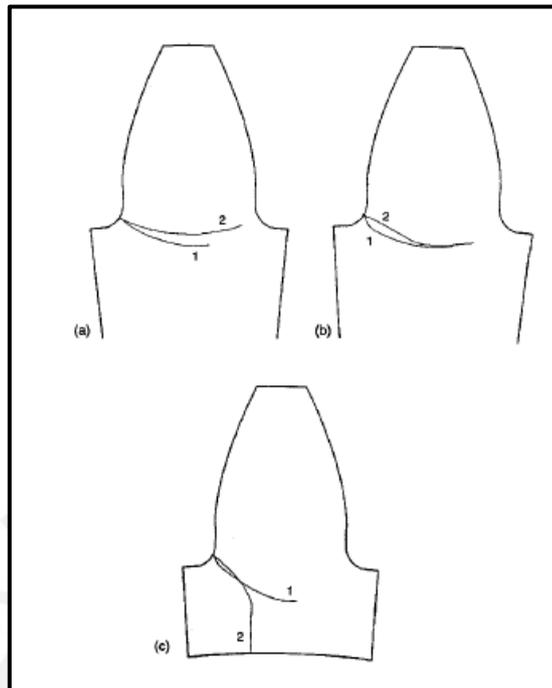


Figura 3.8. Comportamiento de una grieta en dientes de engranajes (Lewicki y Ballarini 1997).

Se puede apreciar en la figura 3.8 que la dirección que toma una grieta en un diente de engranaje tendrá una inclinación hacia adentro del engranaje, para luego cambiar su dirección y retornar a la superficie, donde llegaría a la rotura súbita del diente.

### 3.3. Determinación del factor de intensidad de tensiones

#### 3.3.1. Análisis por Simulación Numérica

En este capítulo se detallará la metodología para el uso del método de los elementos finitos en engranajes agrietados usando ANSYS MECHANICAL. El procedimiento que se plantea será aplicable para diferentes tipos de engranajes, tanto de dientes exteriores como interiores, y para otros tipos de fisuras, tanto en dirección o en forma. Para realizar el procedimiento, se opta por usar el tipo de fisura más común, que es la de forma semi-elíptica en dientes exteriores, alineada en plano paralelo con el eje del engranaje (Lewicki y Ballarini 1997).

Para el análisis se aplica el siguiente proceso:

- Se debe realizar el modelado del diente de engranaje a analizar, el cual se logra usando un software de diseño en 3D o usando una macro especial para diseño de dientes de engranaje (Infanzón García 2010). Luego, se inicia ANSYS WORKBENCH y se procede a importar el modelo antes mencionado para su estudio mediante la opción IMPORT GEOMETRY.

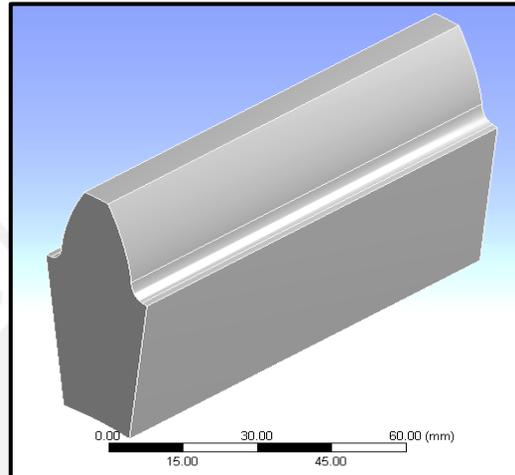


Figura 3.9. Diente de engranaje cilíndrico recto a utilizar en análisis por elementos finitos.

- El siguiente paso es definir el material del cual estará hecho el diente de engranaje. Para definir el material en ANSYS se debe usar la opción ENGINEERING DATA. En esta ventana se debe elegir el material para el modelo a analizar de una biblioteca de materiales ya establecidos en la memoria de ANSYS. Si se da el caso de que no se encuentre el material que se requiere, puede ser definido por el usuario especificando sus propiedades principales como densidad, módulo elástico, coeficiente de expansión térmica, etc. El material a usar es AISI 4140.
- Para empezar el proceso por elementos finitos se usa la opción MODEL, que abre la ventana donde se ingresarán los datos para la simulación. Ya en la ventana de trabajo, se define el origen de coordenadas donde se ubicará la grieta y hacia qué dirección se propagará. Debe seleccionarse la zona más crítica y ubicar el origen de coordenadas lo más próximo al punto crítico, el cual se halla según la figura 3.7. Como se puede apreciar en la figura 3.10, el eje x del origen de coordenadas representa la dirección hacia donde se expandirá la grieta, mientras que el eje z representa la sección transversal o el ancho de la

grieta, que siempre será paralelo a la superficie de la base del diente. Cuando se trate de un diente helicoidal, se debe respetar el ángulo de la hélice, que le dará una inclinación al nuevo origen de coordenadas (Ver figura 3.11).

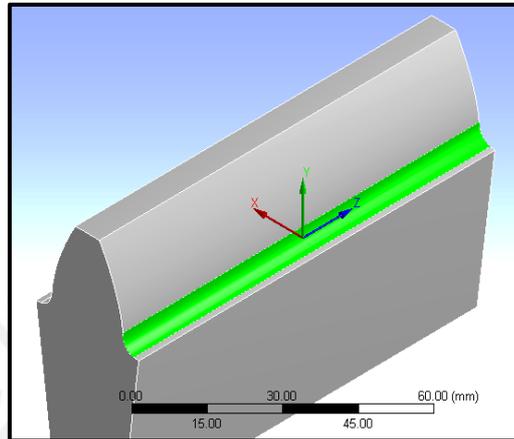


Figura 3.10. Ubicación del origen de coordenadas en la raíz del diente de engranaje recto.

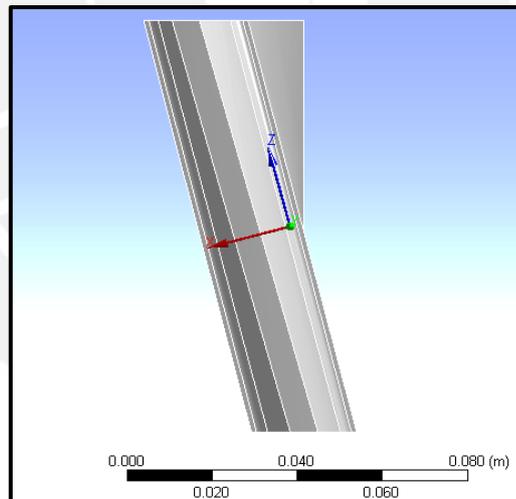


Figura 3.11. Inclinación del origen de coordenadas con respecto al plano transversal del engranaje de dientes helicoidales, de acuerdo al ángulo de la hélice.

- El siguiente paso es generar la malla. En este paso se busca tener una configuración homogénea en todo el diente y refinar las partes donde puedan presentarse los máximos esfuerzos. Se resuelve mediante el ANSYS MESH definiendo los siguientes datos:
  - Se insertará el Patch Conforming Method
  - El método será Tetrahedrons

- El algoritmo a usar será Patch Conforming
- Enmallado fino, alta suavidad
- Transición lenta

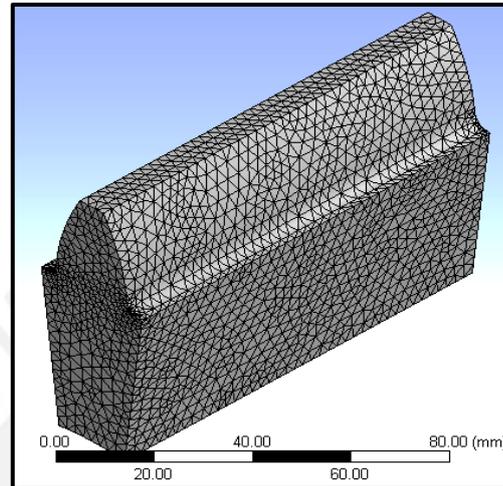


Figura 3.12. Enmallado del diente de engranaje en todo su volumen.

- Se define la fractura mediante la opción FRACTURE, insertando después la opción CRACK para detallar la fractura. Para modelar una grieta en ANSYS se requiere conocer el lenguaje de programación, pero en este estudio se propone usar la forma de grieta que el programa usa por defecto, la forma semi-elíptica. La grieta se coloca en el pie del diente por haber sido definido como la región más crítica, usando el origen de coordenadas ya antes definido.

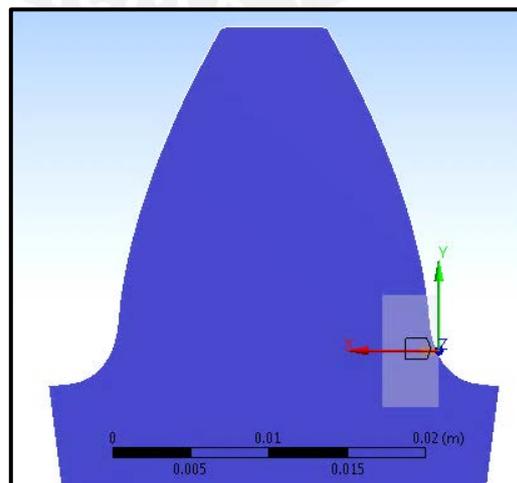


Figura 3.13. Colocación de la grieta en el pie del diente con la opción CRACK.

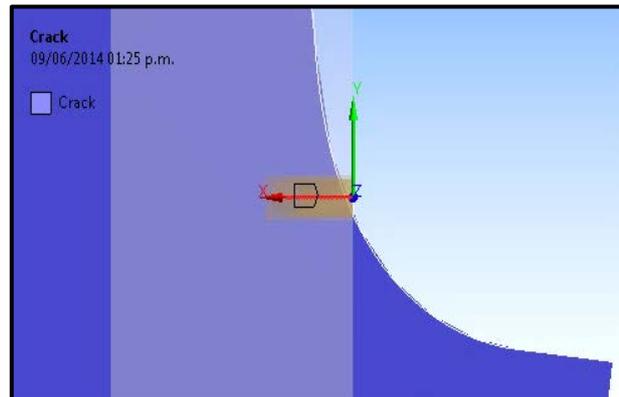


Figura 3.14. Vista en detalle de la colocación de la fractura en el modelo.

Para definir la geometría de la grieta, se usan los siguientes parámetros:

- Major radius (c): la medida indica el ancho o sección transversal de la grieta que se generará. En este estudio, se tomarán distintos valores para esta medida.
- Minor radius (a): la medida indica la profundidad o tamaño de la grieta. Esta medida tendrá valores variables para estudiar las características de la grieta a medida que se vaya propagando.
- Largest contour radius: Es el tamaño de perfil o de contorno de la grieta. Esta medida tendrá efecto en el enmallado, ya que mientras más pequeño sea este valor, la malla de la fractura será más concentrada, es decir, tendrá más elementos y así tendrá mayor precisión. Sin embargo, si es demasiado pequeño, la malla no se generará. Para estos casos de engranajes el radio de contorno será de 0.25 mm.

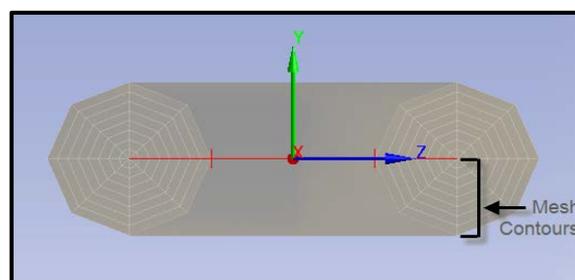


Figura 3.15. Radio de contorno de la grieta semi-elíptica.

- Crack front división: Mientras mayor sea la dimensión de la fractura, o si se requiere un enmallado más fino, se usarán más números de

divisiones. En este caso, el número de divisiones será de 30 para obtener un enmallado lo bastante fino.

- Una vez definidos los parámetros, se pasa a generar el enmallado de la fractura. Cualquier modificación en los valores de estos parámetros afectará al enmallado, pudiendo hacerlo más o menos fino.

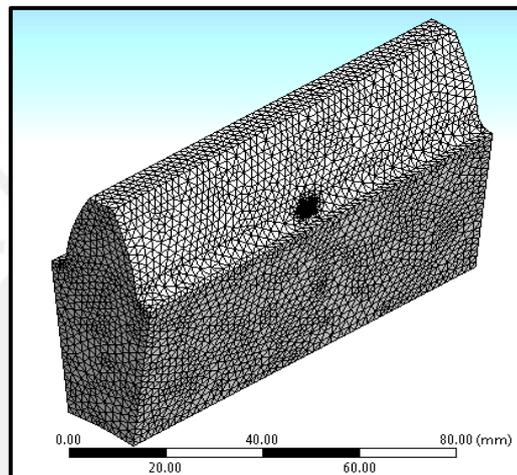


Figura 3.16. Enmallado de la grieta por elementos finitos.

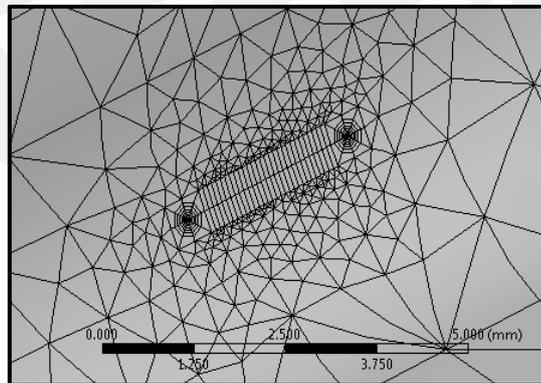


Figura 3.17. Detalle del enmallado de la grieta.

- Una vez definidos el modelo y la fractura, se definen las cargas aplicadas:
  - La carga que se aplica al diente de engranaje es una distribuida por todo el ancho del diente. Para el análisis, primero se debe graficar una línea en la zona donde se ubica la fuerza o donde ocurre el contacto con el otro diente. Posteriormente, se ubica la fuerza con la opción

“FORCE” y se selecciona la línea dibujada antes, para que actúe como una fuerza distribuida, según las figuras 3.18 y 3.19. Las fuerzas actuantes serán las calculadas en la sección 3.1, y deben ingresarse al programa sus componentes tangencial, radial y axial, formando así una fuerza resultante que se graficará sobre el diente de engranaje.

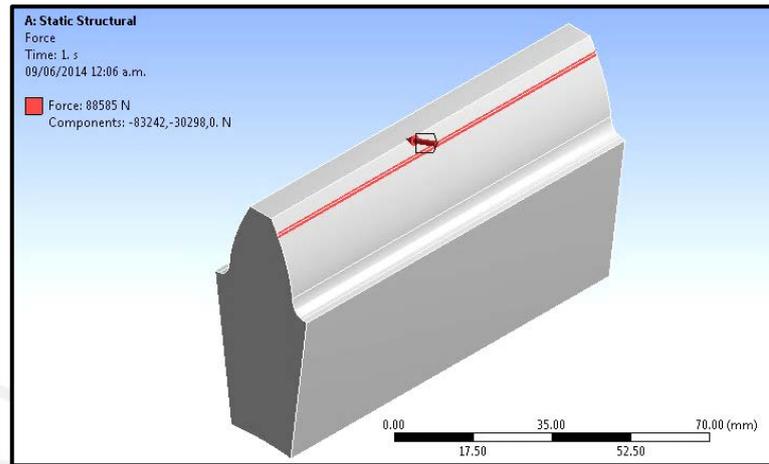


Figura 3.18. Representación de la fuerza transmitida en la zona de contacto de un diente recto.

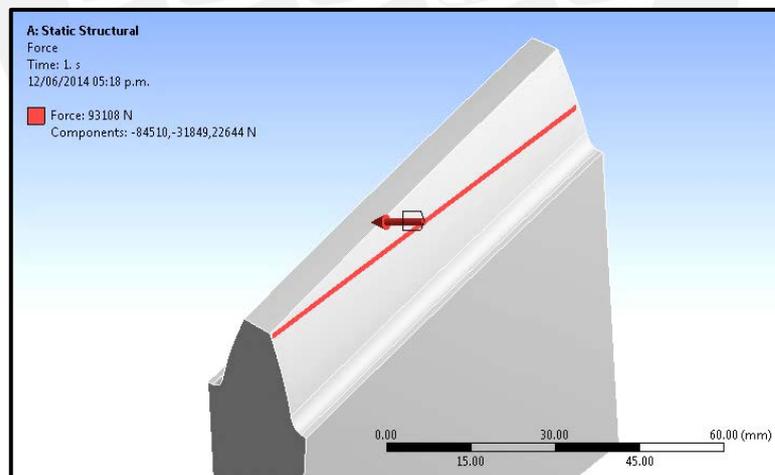


Figura 3.19. Representación de la fuerza transmitida en la zona de contacto de un diente helicoidal.

- Para verificar el grado de libertad cero, se debe colocar una restricción fija aplicada sobre las caras laterales y sobre el cubo de la porción del diente de engranaje para que actúe como una fuerza que se opone a la de contacto. Esta función se logra insertando la opción “FIXED SUPPORT” en las zonas indicadas (Ver figura 3.20).

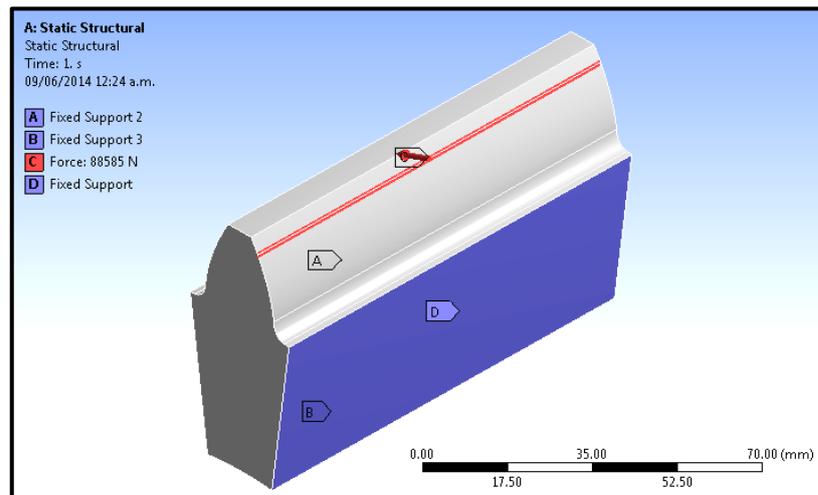


Figura 3.20. Representación de las zonas donde se colocarán la carga aplicada (rojo) y las restricciones fijas (azul).

Una vez que se tengan ingresados todos los parámetros y habiendo definido la malla por completo, se procede a resolver y obtener los parámetros de fractura correspondientes, mediante la opción FRACTURE TOOL. Los estudios de propagación de grietas basados en el enfoque de la mecánica de fractura, se han centrado en los mecanismos de apertura de grieta en modo I. Sin embargo, en el problema de transmisiones por engranajes de dientes rectos o helicoidales, sometidos a cargas complejas, en el extremo de la grieta se experimenta un modo mixto de apertura de grieta en la fase de propagación, correspondiente a los modos de fractura I y II, para dientes rectos; y a los modos I, II y III, para dientes helicoidales. Dependiendo del caso que se esté analizando, se insertan las herramientas de fractura del programa ANSYS para hallar los factores que se requieran. En este caso se obtendrán los factores de intensidad de tensiones pertenecientes al MODO I ( $K_I$ ), MODO II ( $K_{II}$ ) y MODO III ( $K_{III}$ ). Finalmente se resuelve la simulación con la opción SOLVE.

Si bien se debería evaluar cada caso de agrietamiento por separado, en la literatura de mecánica de fractura no se encontrarán estudios detallados para el análisis del Modo II o del Modo III de agrietamiento para la fase de propagación de la grieta. Sin embargo, el Modo de fractura I si ha sido bastante analizado, y como se trata del mismo cuerpo en un modo mixto de fractura, se tomará como correctos los valores de  $K_{II}$  y  $K_{III}$  obtenidos por simulación numérica, en caso de que el valor de  $K_I$  sea correctamente validado mediante los cálculos analíticos.

### 3.3.2. Validación por Método Analítico

Es necesario resaltar que el objetivo que se desea alcanzar con el uso de la metodología analítica es tener un resultado que sirva como referencia para comprobar que los resultados que se hayan obtenido por simulación numérica sean correctos.

Para el caso de engranajes cilíndricos de dientes rectos y helicoidales, la metodología que se usa para comprobar el resultado de los elementos finitos será similar a la usada en el capítulo 2. No obstante, esa metodología se aplica para casos de especímenes con geometría sencilla, como rectangular, por lo que para su uso en dientes de engranaje, se plantea coger una porción de toda la geometría del diente de engranaje, justo en la zona donde se ubica la grieta, correspondiente a la base.

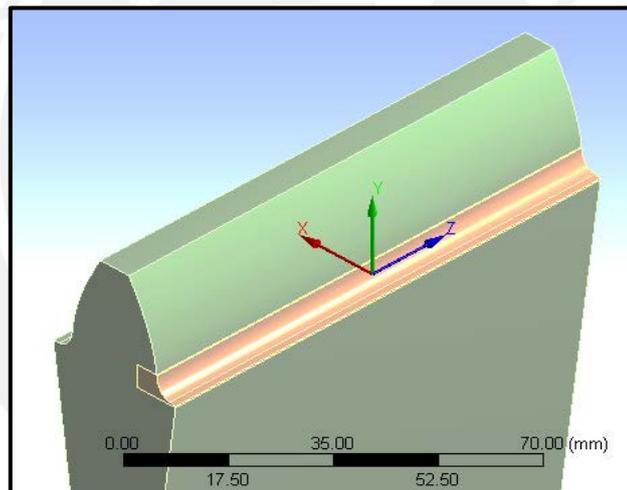


Figura 3.21. Porción del diente de engranaje a ser utilizado en el cálculo analítico.

Debido a que en este caso, la grieta se ubica en la superficie de la trocoide, es decir una superficie curva, lo que se busca es aproximarla a una superficie plana. Para ello se debe identificar la ubicación exacta de la grieta en la superficie, usando ANSYS.

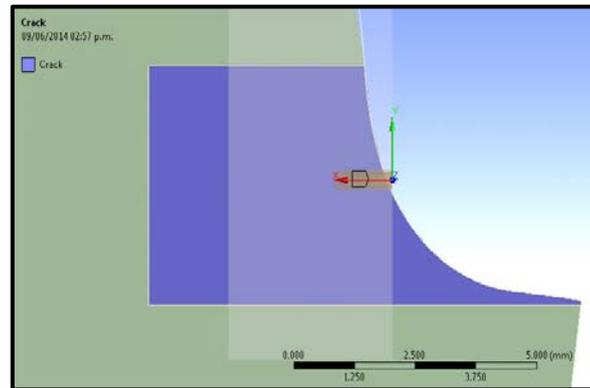


Figura 3.22. Ubicación de la grieta sobre la superficie curva del pie del diente.

Como se aprecia en la figura 3.22, la grieta debe estar ubicada en el centro de la porción de diente tomada para el análisis, para poder asemejarla a un espécimen rectangular como los usados en el capítulo 2. Tomando esta opción, se realiza la aproximación a un bloque rectangular de geometría sencilla para poder utilizar la metodología analítica.

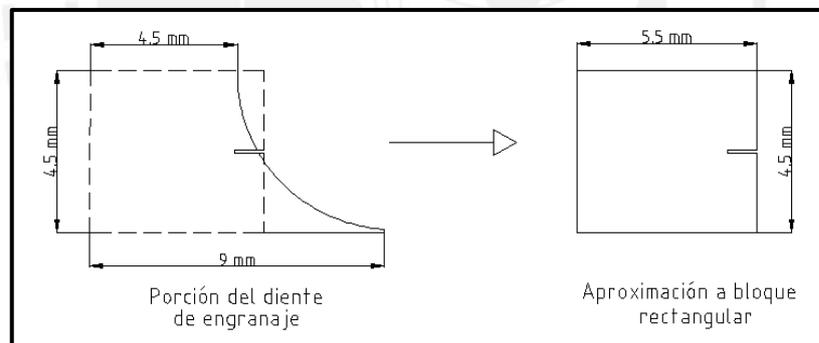


Figura 3.23. Aproximación de la porción de diente tomada a una superficie plana.

Las medidas de la porción de engranaje y del espécimen rectangular de la figura 3.23 son apropiadas para el análisis de la grieta cuando esta abarca tamaños pequeños de longitud (1 a 3mm). Sin embargo, para tamaños más grandes de longitud de grieta será necesario que la porción de engranaje tomada tenga medidas más grandes, y por tanto, el bloque rectangular producto de la aproximación también tendrá medidas más grandes.

Por otro lado, la condición geométrica para el cálculo del factor de intensidad de tensiones propone la aplicación de tensiones normales al plano de fractura (tracción), ubicados en la cara superior del cuerpo de estudio. En este caso se busca obtener los

esfuerzos normales presentes en la cara superior de la porción de diente tomada, por la transmisión de la carga en el contacto entre dientes. Para conseguir este dato se puede usar el mismo procedimiento antes descrito en la sección 3.3.1, hasta el enmallado de todo el diente. La variación será en que ahora se solicitará al ANSYS que muestre como resultado los esfuerzos normales presentes en la cara superior de la porción de diente tomada. El resultado debe ser como el que se muestra a continuación:

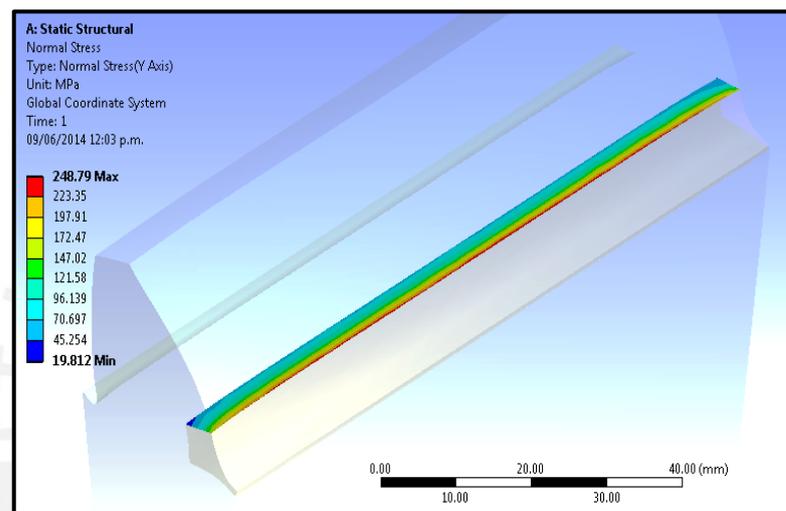


Figura 3.24. Esfuerzos normales presentes en la cara superior. A medida que se acerca a la superficie, el esfuerzo es más grande.

Como se puede ver en la imagen 3.24, los esfuerzos van creciendo de menor a mayor, desde la zona más alejada hasta la más cercana a la superficie del diente, adquiriendo un comportamiento lineal. Este resultado se debe a que existen dos tipos de esfuerzos: esfuerzos de flexión y esfuerzos de tracción. El esfuerzo de tracción es aplicado por las tensiones normales al plano de fractura, mientras que el esfuerzo de flexión es provocado por la aplicación de momentos. Al sumar los efectos de ambos esfuerzos se genera un estado de esfuerzos creciente, desde la zona menos afectada, hasta la zona más crítica. La figura 3.25 muestra la descomposición del estado de esfuerzos actuante en sus componentes de esfuerzos de flexión y tracción.

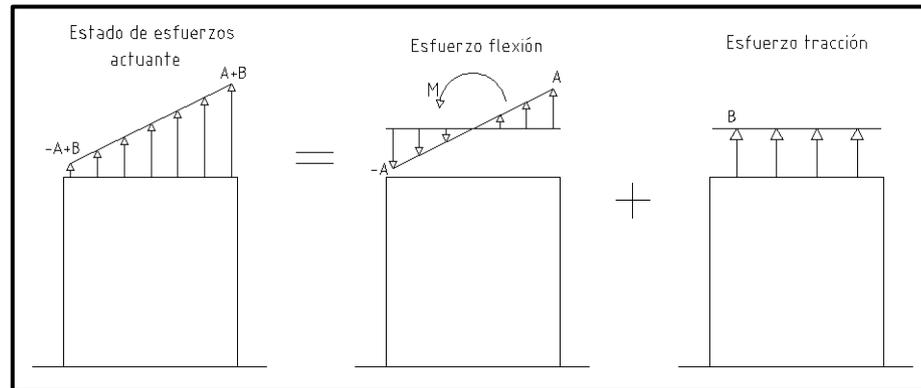


Figura 3.25. Sistema equivalente de esfuerzos en la superficie de la pieza de estudio.

El estado de esfuerzos representados en la figura 3.24 demuestra también el por qué no se decidió usar toda la geometría del diente de engranaje para el análisis por cálculos analíticos. A parte de que el planteamiento analítico se aplica generalmente a casos de geometrías sencillas, al aplicarlo a toda la geometría del diente de engranaje, no solo se estaría tomando el esfuerzo de flexión (que va a ser el mismo para toda la base del diente) y el esfuerzo de tracción presente en el lado donde se aplica la carga, sino que además se estaría tomando el esfuerzo de compresión presente en el otro extremo de la base del diente (extremo opuesto a donde se aplica la carga) (ver figura 3.26), cuyo efecto no es considerado en el cálculo analítico para la determinación del factor de intensidad de tensiones. Estos esfuerzos también afectaban a los resultados obtenidos por simulación numérica, otorgando valores lejanos a los esperados. Con el fin de evitar estos esfuerzos de compresión, se opta por separar la porción del diente de engranaje que sufre esfuerzos de tracción para usarlo en el planteamiento analítico.

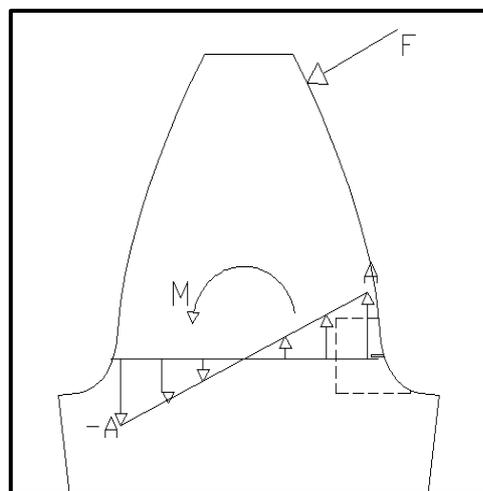


Figura 3.26. Esfuerzos presentes en toda la base del diente debido a la aplicación de la carga.

De esta forma se pueden hallar los esfuerzos de flexión y de tracción presentes en la sección tomada, por lo que es posible usar la metodología aplicada en la sección 2.1.1 para hallar el factor de intensidad de tensiones  $K_t$ , siguiendo la ecuación 2.1.

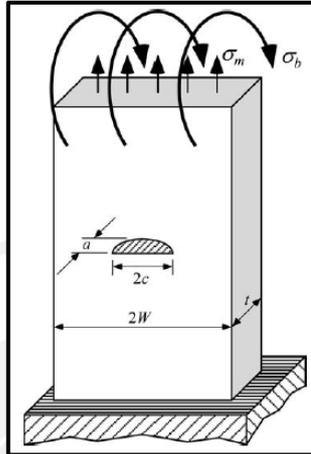


Figura 3.27. Agrietamiento del cuerpo analizado por la presencia de esfuerzos (Anderson 2005)

Los resultados obtenidos de forma analítica deben compararse con los obtenidos por simulación numérica en la sección 3.3.1, para poder comprobar la efectividad de usar el método de los elementos finitos para este estudio de fractura en engranajes cilíndricos.

### 3.4. Efecto de las cargas cíclicas en la determinación de la vida remanente de engranajes cilíndricos fisurados

En esta sección, ahora que se ha estudiado más a profundidad la fractura en engranajes, se busca determinar si un diente de engranaje agrietado es factible o no para poder continuar con su servicio, mediante un análisis más detallado para evaluar su condición.

La vida remanente que tiene un engranaje fisurado estará determinada por la cantidad de ciclos que puede trabajar hasta llegar a un límite. Mientras el engranaje continúe con sus ciclos de trabajo, la grieta puede seguir expandiéndose de forma controlada. Sin embargo, llegará a un nivel en el cual la velocidad de liberación de energía acelere de forma considerable y la grieta siga con su propagación de forma descontrolada.

Según la ley de Paris (Ver sección 1.4.6), este límite será cuando el factor de intensidad de tensiones alcance o esté cercano al valor de la tenacidad a la fractura del material. Es en este momento cuando el engranaje debe ser descartado, ya que no es recomendable su uso.

La solución más apropiada para evaluar la cantidad de ciclos de vida útil de los engranajes de dientes rectos y helicoidales fisurados es mediante la obtención de una curva de vida remanente que relacione el largo de la grieta ( $a$ ) en función del número de ciclos ( $N$ ), como se muestra en la figura 3.27 (Bannantine, Comer y Handrock 1989).

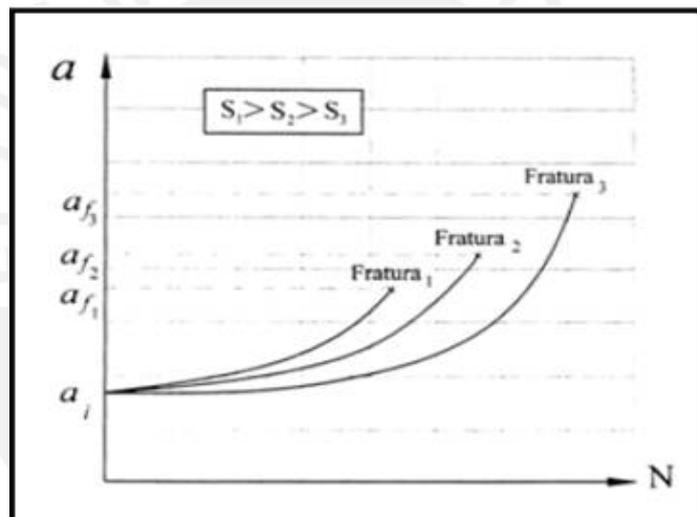


Figura 3.28. Evaluación de la grieta de fatiga durante la acción de cargas cíclicas (Bannantine, Comer y Handrock 1989).

El perfil de las curvas presentadas en la figura 3.27 muestra claramente que la tensión cíclica aplicada es un parámetro importante en el crecimiento de la grieta. Desde la curva  $a$  vs.  $N$  (figura 3.27), la velocidad de propagación de las grietas de fatiga ( $da/dN$ ) puede ser calculada tomando la derivada en cada punto de la curva, donde se puede verificar que  $da/dN$  depende de "a", o sea, el valor de la velocidad de propagación de la grieta aumenta al mismo tiempo con el tamaño de la grieta, pues el valor del factor de intensidad de tensiones ( $K$ ) aumenta con el valor de "a".

La obtención del número de ciclos se hará con las siguientes expresiones para la propagación por fatiga (Bannantine, Comer y Handrock 1989):

$$\bullet \quad \Delta N = \frac{2^{*(a_{n+1}-a_n)}}{\left(\frac{da}{dN}\right)_n + \left(\frac{da}{dN}\right)_{n+1}} \quad (\text{Ec. 3.15})$$

$$\bullet \quad \left(\frac{da}{dN}\right)_n = C * (\Delta K_n)^m \quad (\text{Ec. 3.16})$$

Donde:

- C: constante de Paris dependiente del material
- m: Constante de Paris dependiente del material
- $\Delta K_n$ : Factor de intensidad de tensiones equivalente para un tamaño de grieta "n"
- $a_n$ : Profundidad de grieta con una medida inicial "n".
- $a_{n+1}$ : Profundidad de grieta con una medida final "n+1"
- $\Delta N$ : Número de ciclos necesarios para el crecimiento de grieta de "n" hasta "n+1".

Las ecuaciones planteadas indican que el número de ciclos de vida del engranaje depende únicamente del valor del factor de intensidad de tensiones K. Para el análisis del engranaje fisurado son necesarios los valores del factor de intensidad de tensiones obtenidos por simulación numérica, y como se trata de un modo mixto de fractura, el valor a usar será el equivalente ( $K_{\text{equi.}}$ ). Usando estos valores se puede modelar la curva de vida remanente o de servicio del engranaje fisurado, y determinar la cantidad de ciclos que puede seguir operando.

Estos procedimientos y cálculos serán usados en casos prácticos de engranajes fisurados, para determinar cómo afecta el agrietamiento en la vida remanente de un engranaje cilíndrico recto o helicoidal.

## CAPÍTULO 4

### 4. CASOS DE ESTUDIO DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS

Los procedimientos, detalles y conocimientos empleados en los anteriores capítulos deben ser aplicables a diferentes casos de engranajes cilíndricos. En este capítulo se aplicará la metodología explicada a casos concretos de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales. El objetivo es obtener resultados adecuados y modelar una curva de vida remanente que caracterice el comportamiento de un engranaje fisurado.

#### 4.1. Casos de engranajes cilíndricos rectos

El estudio realizado será aplicado a tres casos de engranajes cilíndricos rectos. Estos engranajes serán del mismo material, pero variarán en sus tamaños y geometrías de sus dientes:

##### CASO 1

- Módulo= 10 mm
- Número de dientes= 25
- Ángulo de presión= 20°
- Ancho de diente= 100 mm
- Rugosidad de material= 5  $\mu\text{m}$
- Material= AISI 4140 (Esfuerzo pulsante en la raíz del diente  $\sigma_F = 290 \text{ N.mm}^2$ )

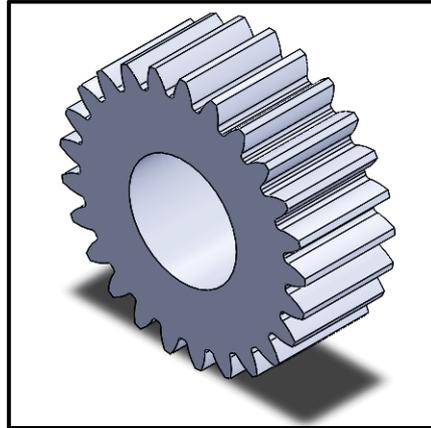


Figura 4.1. Modelo de engranaje cilíndrico recto a usar en el análisis

Ahora se pasa a describir cómo se aplicaría la metodología planteada para este caso concreto de engranaje cilíndrico recto:

-Determinación de la fuerza actuante

El primer paso es calcular la fuerza referencial que recibe el diente de engranaje debido a la transmisión de potencia. Se elige usar la máxima fuerza con la que fue diseñado el engranaje, y se calcula con el uso de la ecuación 3.3 y las tablas otorgadas por la norma ISO 6336 (Ver Anexo A2). Asimismo las demás componentes de la carga se pueden calcular con las ecuaciones 3.4 y 3.5, para un ángulo de presión normal de  $20^\circ$  ( $\alpha_n$ ):

$$F_t = 83242.443 \text{ N}$$

- $F = \frac{F_t}{\cos \alpha_n} = 88584.758 \text{ N}$
- $F_r = F * \sin \alpha_n = 30297.772 \text{ N}$

La ubicación de esta carga sobre la superficie del diente, para el momento más crítico, se puede hallar usando la ecuación 3.10. De acuerdo a la geometría del diente de engranaje estudiado, y para un ángulo de inclinación de la fuerza de  $20^\circ$ , se obtiene:

$$h_{Fe} = 16.906 \text{ mm}$$

### -Ubicación de la fisura en el punto más crítico

Con los datos de carga aplicada y ubicación, es posible determinar el punto donde se concentra la mayor cantidad de tensiones en el diente:

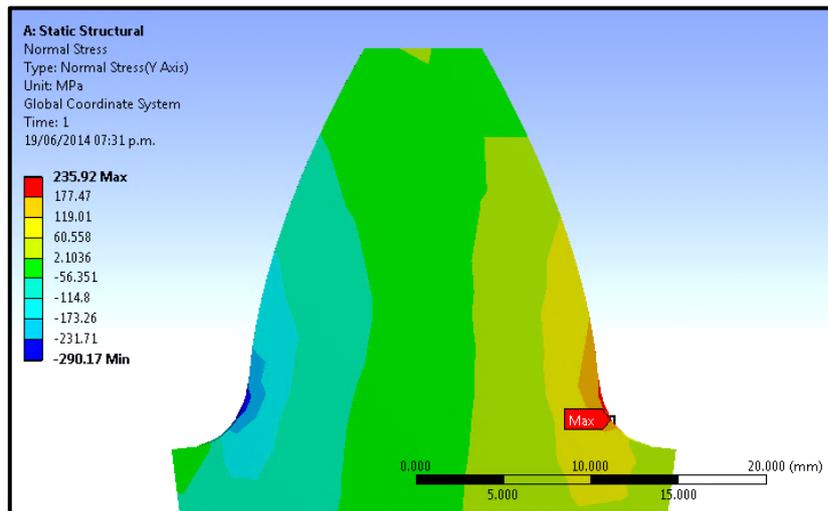


Figura 4.2. Ubicación del punto donde se ubica la máxima concentración de tensiones.

El punto MAX define el lugar donde se ubica la grieta en el análisis de los elementos finitos, al ser donde se produce la mayor concentración de esfuerzos.

### -Determinación del factor de intensidad de tensiones por simulación numérica

Ahora que se conocen los valores de la carga aplicada y la zona donde debe ubicarse la grieta, se procede a ejecutar el método de los elementos finitos explicado en la sección 3.3.1, para poder hallar los valores del factor de intensidad de tensiones para distintos tamaños de grieta. La relación que tendrán el radio menor de la grieta con forma semi-elíptica ( $a$ ) y el radio mayor ( $c$ ) será de  $c/a=1.5$ . Al tratarse de un diente recto, se obtendrán los factores de intensidad de tensiones pertenecientes al MODO I ( $K_I$ ) y MODO II ( $K_{II}$ ).

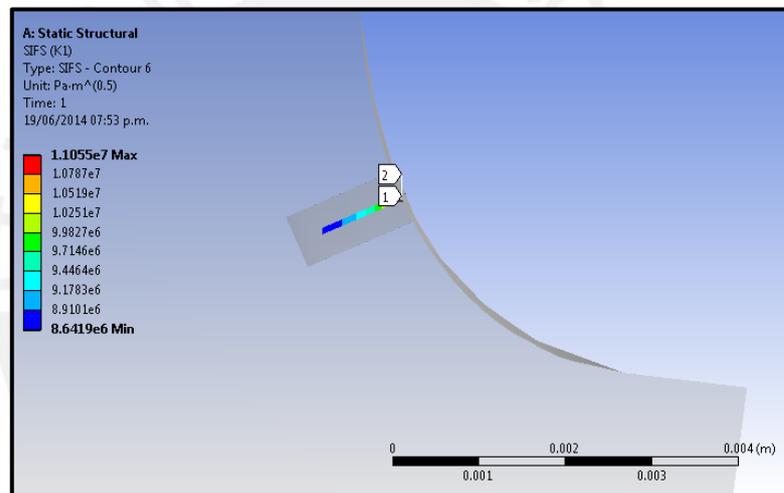
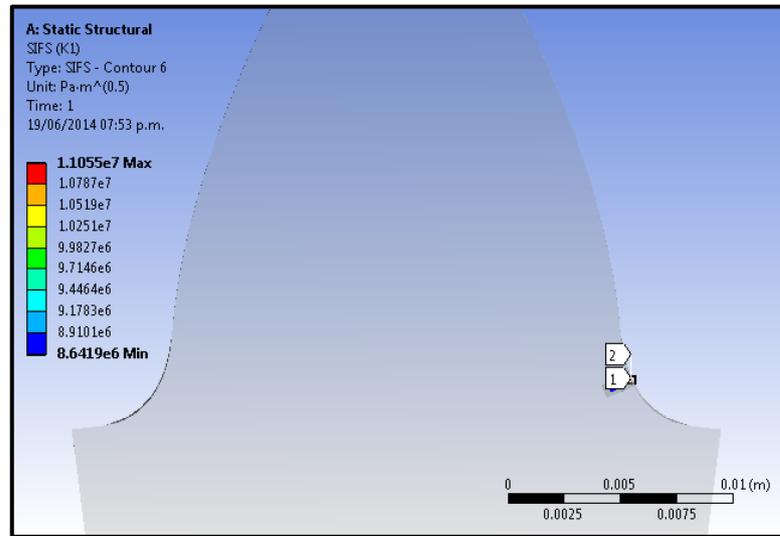


Figura 4.3. Vista de perfil de la grieta cuando  $a=1\text{mm}$ , en el punto donde ocurre la mayor concentración de tensiones.

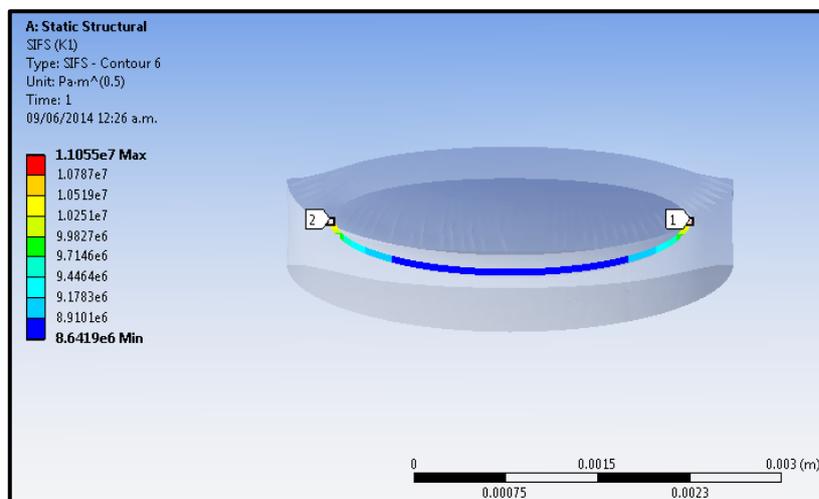


Figura 4.4. Resultado del análisis por fractura, obteniendo los valores máximo y mínimo para  $K_I$

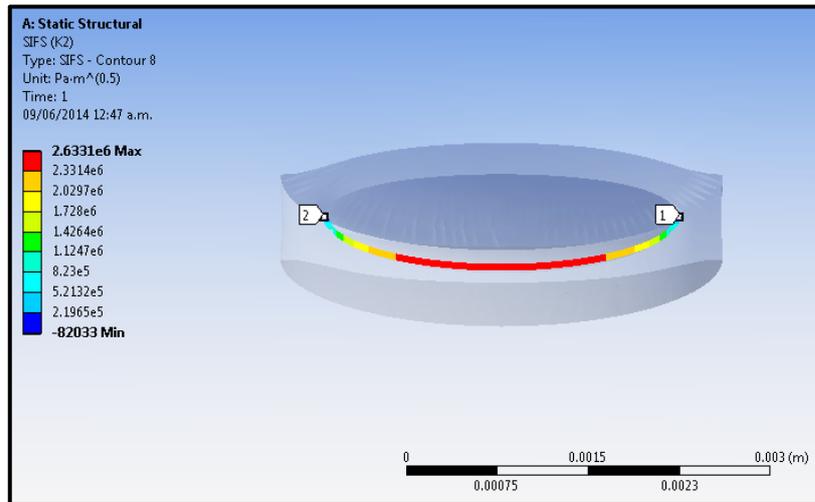


Figura 4.5. Resultado de análisis por fractura, obteniendo los valores máximo y mínimo para  $K_{II}$

El valor del factor de intensidad de tensiones es variable por toda la longitud de la grieta semi-elíptica. Para el estudio, se tomará el máximo valor de  $K$ , por dar la mayor cantidad de energía con la que se propaga la grieta. Ahora se realiza el mismo procedimiento para evaluar el valor de  $K_I$  y  $K_{II}$  en distintos valores de profundidad de fisura: (Ver Anexo A4-1)

Tabla N°9. Factores de intensidad de tensiones para modo I y II según profundidad de grieta

	Valores de profundidad de grieta (mm)				
	a=1	a=1.5	a=2	a=2.5	a=3
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_I (MPa * \sqrt{m})</math></b>	11.055	12.412	13.965	14.623	15.798
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_{II} (MPa * \sqrt{m})</math></b>	2.633	2.594	2.563	2.356	2.276

-Comprobación por método analítico

Los resultados obtenidos por simulación numérica deben ser comparados con los resultados obtenidos mediante métodos analíticos. Para realizar este trabajo, se usa la metodología analítica planteada en la sección 3.3.2, para los tamaños de grieta que se tomaron en el estudio por simulación numérica.

Para este caso, la porción de diente tomada tendrá dimensiones similares a la figura 3.24, para medidas pequeñas de longitud de grieta. Para evaluar medidas más grandes se tomarán porciones de grietas de mayores dimensiones.

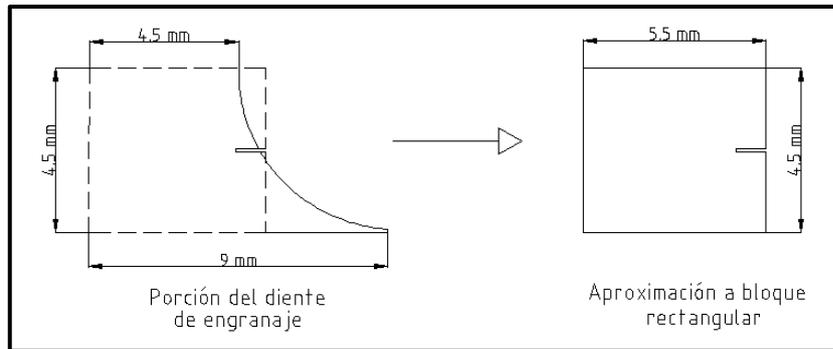


Figura 4.6. Aproximación de la porción de diente tomada a una superficie plana.

El siguiente paso será obtener los esfuerzos normales aplicados en la superficie superior de la porción de diente tomada, debido a la transmisión de la carga en el contacto entre dientes.

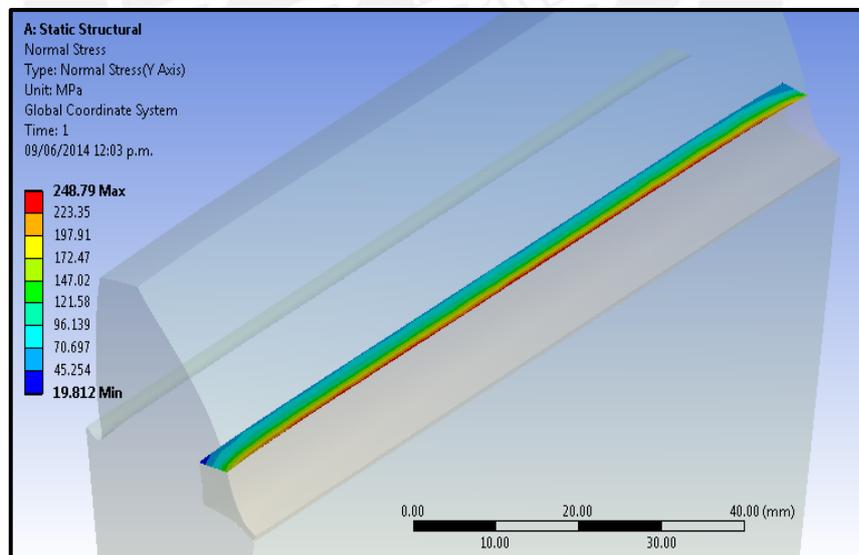


Figura 4.7. Esfuerzos normales presentes en la cara superior de la porción de diente analizada.

La cara superior de la porción tomada del engranaje tiene una longitud de 5.5 mm (Ver figura 4.6). Según los resultados vistos en la figura 4.7, el estado de tensiones creciente presente en la cara superior del cuerpo analizado será:

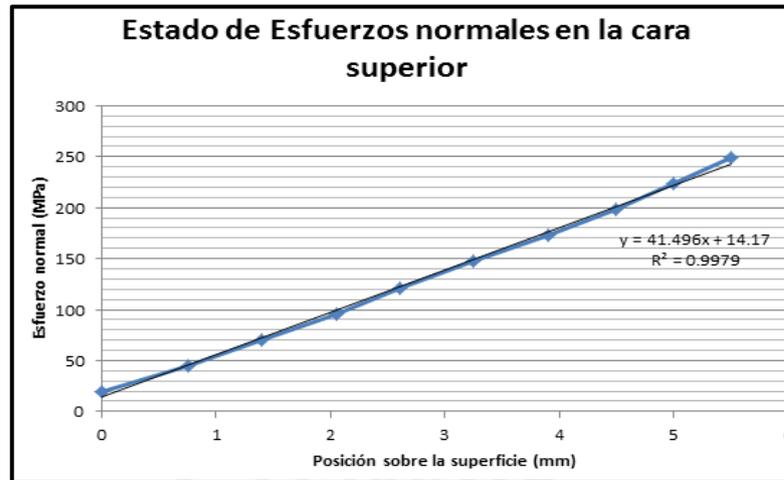


Figura 4.8. Línea que representa el crecimiento de los esfuerzos actuantes en la cara superior de la porción de engranaje analizada, a medida que se acerca a la superficie.

La línea recta obtenida en la imagen 4.8 representa como van creciendo los esfuerzos actuantes en la porción de engranaje tomada por toda su longitud. Según lo expresado en la imagen 3.26, se puede obtener los esfuerzos de tracción y de flexión:

- $-A+B= 14.17 \text{ MPa}$
- $A+B= 242.398 \text{ MPa}$

Obteniendo así el esfuerzo de tracción B igual a 128.284 MPa, y el esfuerzo de flexión A igual 114.114 MPa. Ahora se puede realizar el cálculo para hallar el valor del factor de intensidad de tensiones para Modo I aplicando la ecuación 2.1 de la sección 2.1.1, usando las medidas establecidas en la figura 4.6: (Ver Anexo A4-1)

Tabla N°10. Factor de intensidad de tensiones para modo I según profundidad de grieta por cálculos analíticos

Profundidad de grieta	Ancho de grieta	Relación $c/a$	Relación $a/t$	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ ( $\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$ )
a=1 mm	c=1.5 mm	1.5	0.182	9.788
a=1.5 mm	c=2.25 mm	1.5	0.273	12.098
a=2 mm	c=3 mm	1.5	0.364	14.279
a=2.5 mm	c=3.75 mm	1.5	0.455	16.126
a=3 mm	c=4.5 mm	1.5	0.545	18.032

Finalmente, ahora que se hallaron los valores del factor de intensidad de tensiones para Modo I de agrietamiento, se realiza la comprobación de los resultados obtenidos por simulación numérica comparando los valores obtenidos mediante ANSYS (Tabla N°9) con los obtenidos mediante metodología analítica (Tabla N°10): (Ver Anexo A4-1)

Tabla N°11. Resultados para  $K_I$  mediante método analítico y mediante simulación numérica.

Profundidad de grieta	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ por simulación numérica (MPa * $\sqrt{m}$ )	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ por método analítico (MPa * $\sqrt{m}$ )	Diferencia (%)
a=1 mm	11.055	9.788	11.46
a=1.5 mm	12.412	12.098	2.53
a=2 mm	13.965	14.279	2.19
a=2.5 mm	14.623	16.126	9.32
a=3 mm	15.798	18.032	12.39

Se puede apreciar en la tabla N° 11 que las diferencias entre los resultados obtenidos por simulación numérica con respecto a los obtenidos por método analítico son menores del 15%. Debido a que se realizó una aproximación de la superficie curva del pie del diente a una superficie plana (Ver figura 4.6), ya que la metodología de cálculo para  $K_I$  se aplica a caras planas con agrietamientos, es normal que exista un error más grande de lo esperado. Los resultados obtenidos por simulación numérica se consideran correctos.

#### -Efecto de las cargas cíclicas en la vida remanente del elemento

Para determinar el número de ciclos de vida remanente del engranaje se debe usar el factor de intensidad de tensiones equivalente ( $K_{equi.}$ ), el cual se obtiene usando los valores de intensidad de tensiones  $K_I$  y  $K_{II}$  obtenidos mediante simulación numérica en la ecuación 1.2. Los valores de las constantes de Paris del material AISI 4140 son  $7 \times 10^{-9}$  (C) y 3.4 (m) (Lampman 1996), cuando la relación  $da/dN$  se encuentra en  $mm/ciclo$ .

Aplicando las ecuaciones 3.11 y 3.12, se puede modelar la curva de vida remanente. Asimismo, al tratarse de una grieta con forma semi-elíptica, se deben considerar más de un valor para la relación de radios mayor y menor ( $c/a$ ) de la grieta. Finalmente, la curva obtenida para distintos tamaños de grieta será (Ver Anexo A5-1,2,3):

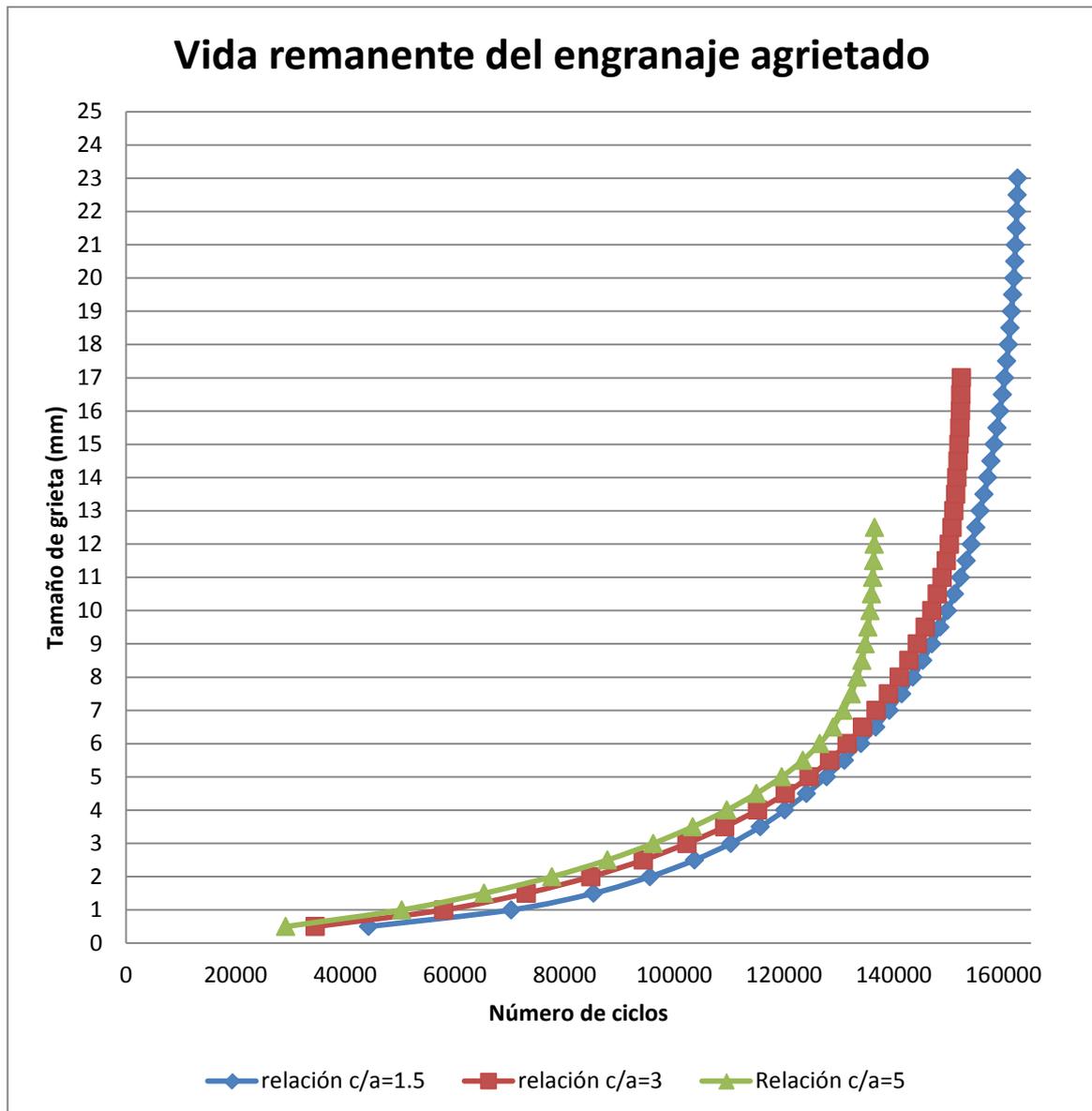


Gráfico N° 3. Curva de vida remanente para el engranaje cilíndrico recto agrietado para distintos tamaños de grieta.

El gráfico N°3 se conocerá como la curva de vida remanente del engranaje en cuestión, a medida que aumenta el tamaño de grieta, el número de ciclos para seguir propagándola se hace menor. Esto se da hasta que el factor de intensidad de

tensiones de la grieta alcance un valor cercano a la tenacidad a la fractura del material ( $60 \text{ MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ ) (Matthews 1973). Una vez llegado a este valor, la grieta seguirá expandiéndose, pero de forma acelerada y descontrolada, por lo que el engranaje ya debe ser descartado.

De la misma forma, al revisar el gráfico se puede apreciar que cada curva llega a un valor de tamaño de grieta límite. Esto se debe a que a ese tamaño el valor de factor de intensidad de tensiones es próximo a la tenacidad a la fractura y no es recomendable su uso. Sin embargo, también puede deberse a que a ese tamaño de profundidad, la grieta haya fracturado por todo el ancho del diente, pudiendo afectar considerablemente el valor del factor de intensidad de tensiones al darle valores más grandes que los esperados.

Resulta importante verificar si para casos grieta pasante, el engranaje aún puede ser utilizado con cierto grado de seguridad. Para lograrlo, a estos casos de fractura por todo el ancho del diente se le aplica el estudio ya detallado, obteniendo:

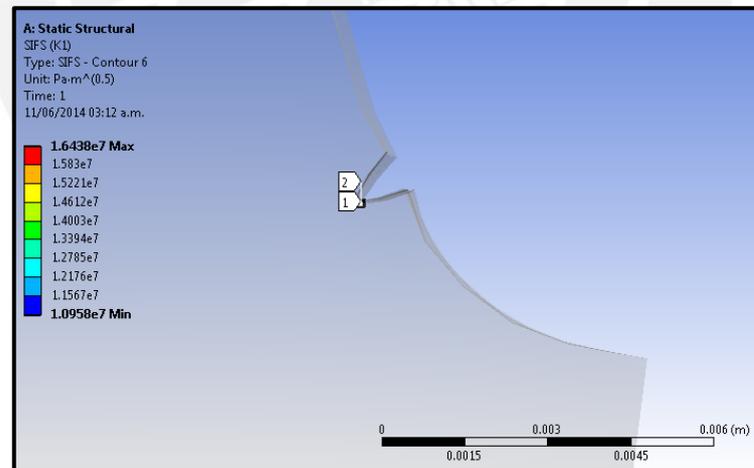


Figura 4.9. Resultado del análisis por fractura, obteniendo los valores para  $K_I$  para grietas pasante por todo el ancho del diente.

Obteniendo los valores de factor de intensidad de tensiones equivalente para distintas profundidades de grietas se puede modelar la curva (Ver Anexo A5-4):

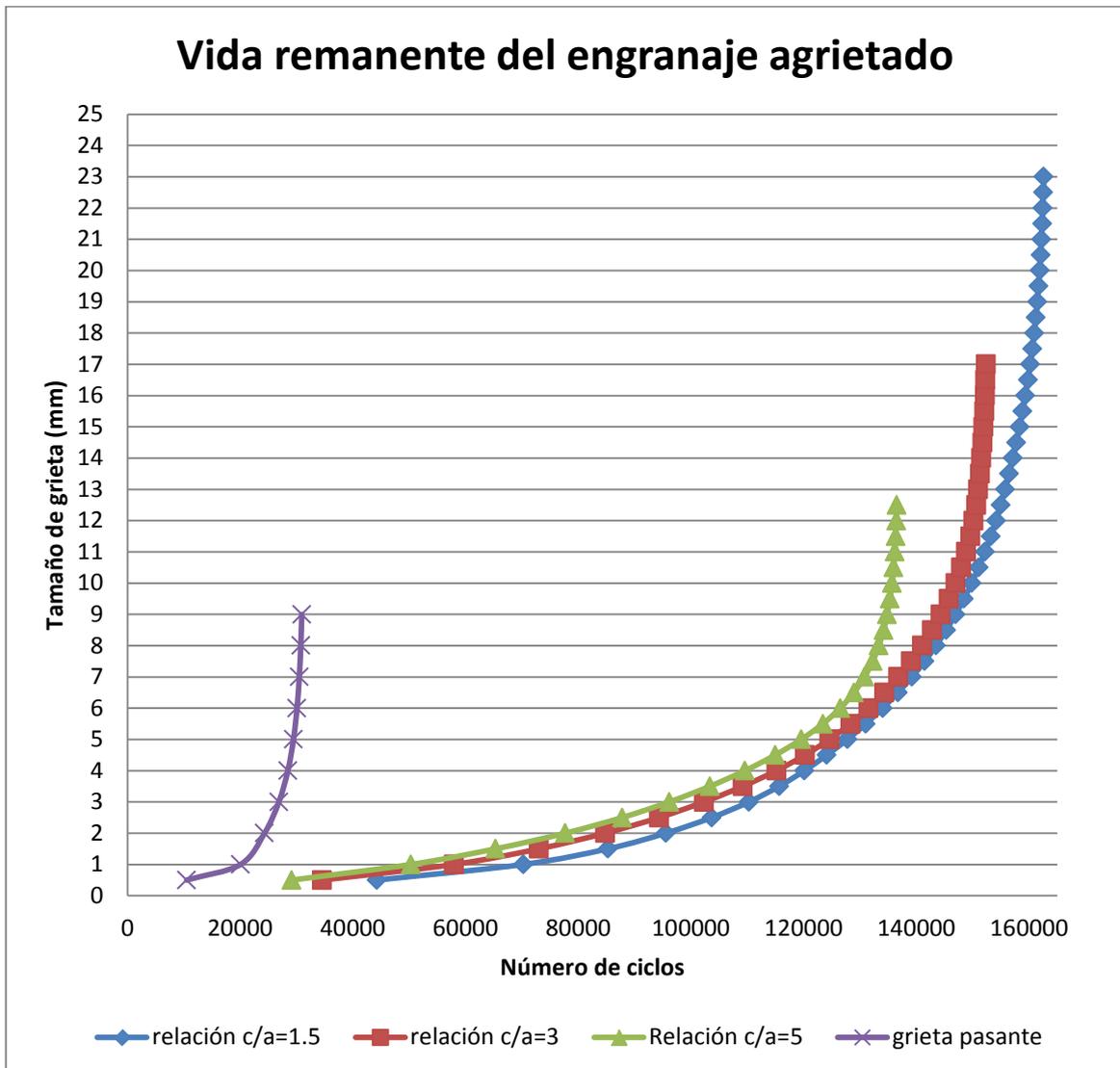


Gráfico N°4. Curva de vida remanente del engranaje con grieta pasante, en comparación con las demás con grieta semi-elíptica.

Los resultados muestran que para el caso de grieta pasante por todo el ancho del diente, el valor del factor intensidad de tensiones equivalente aumenta de forma considerable a medida que crezca la grieta, y que la cantidad de ciclos necesarios para su propagación son menores que en el caso de grieta semi-elíptica. Ante esto, cuando la grieta alcanza esta condición, el engranaje agrietado aún puede seguir operando si es que el factor de intensidad de tensiones equivalentes no ha alcanzado el valor de la tenacidad a la fractura, aunque su uso ya no es recomendable.

**CASO 2**

- Módulo= 16 mm
- Número de dientes= 19
- Ángulo de presión= 20°
- Rugosidad del material= 5 um
- Ancho de diente= 212 mm
- Material= AISI 4140 (Esfuerzo pulsante en la raíz del diente  $\sigma_F = 290 N. mm^2$ )

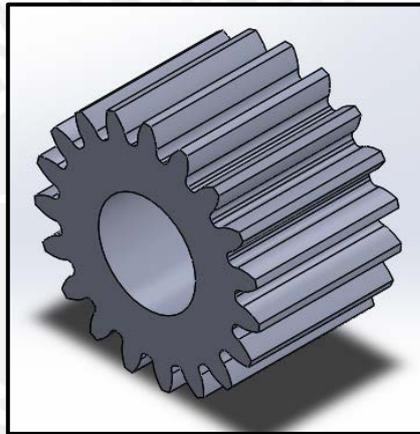


Figura 4.10. Modelo de engranaje cilíndrico recto a usar en el análisis

Al aplicar la metodología planteada, se obtienen los siguientes resultados:

-Determinación del factor de intensidad de tensiones por simulación numérica (Ver Anexo A4-2)

Tabla N°12. Factores de intensidad de tensiones para modo I y II según profundidad de grieta

	Valores de profundidad de grieta (mm)				
	a=1	a=1.5	a=2	a=2.5	a=3
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_I (MPa * \sqrt{m})</math></b>	10.28	12.089	13.63	14.676	15.735
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_{II} (MPa * \sqrt{m})</math></b>	1.674	1.885	2.057	2.152	2.251

-Comprobación por método analítico (Ver Anexo A4-2)

Tabla N°13. Resultados para  $K_I$  mediante método analítico y mediante simulación numérica.

Profundidad de grieta	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ por simulación numérica (MPa * $\sqrt{m}$ )	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ por método analítico (MPa * $\sqrt{m}$ )	Diferencia (%)
a=1 mm	10.28	9.239	10.126
a=1.5 mm	12.089	11.261	6.849
a=2 mm	13.63	12.983	4.747
a=2.5 mm	14.676	14.536	0.755
a=3 mm	15.735	15.971	1.678

Se aprecia en la tabla N° 13 que las diferencias entre los resultados por simulación numérica con respecto a los obtenidos por método analítico son menores del 15%. Los resultados obtenidos por simulación numérica se consideran correctos.

-Efecto de las cargas cíclicas en la vida remanente del elemento

Los valores de las constantes de Paris del material AISI 4140 son  $7 \times 10^{-9}$  (C) y 3.4 (m) (Lampman 1996), cuando la relación  $da/dN$  se encuentra en  $mm/ciclo$ . Finalmente, la curva obtenida para distintos tamaños de longitud de grieta será (Ver Anexo A5-5,6,7,8):

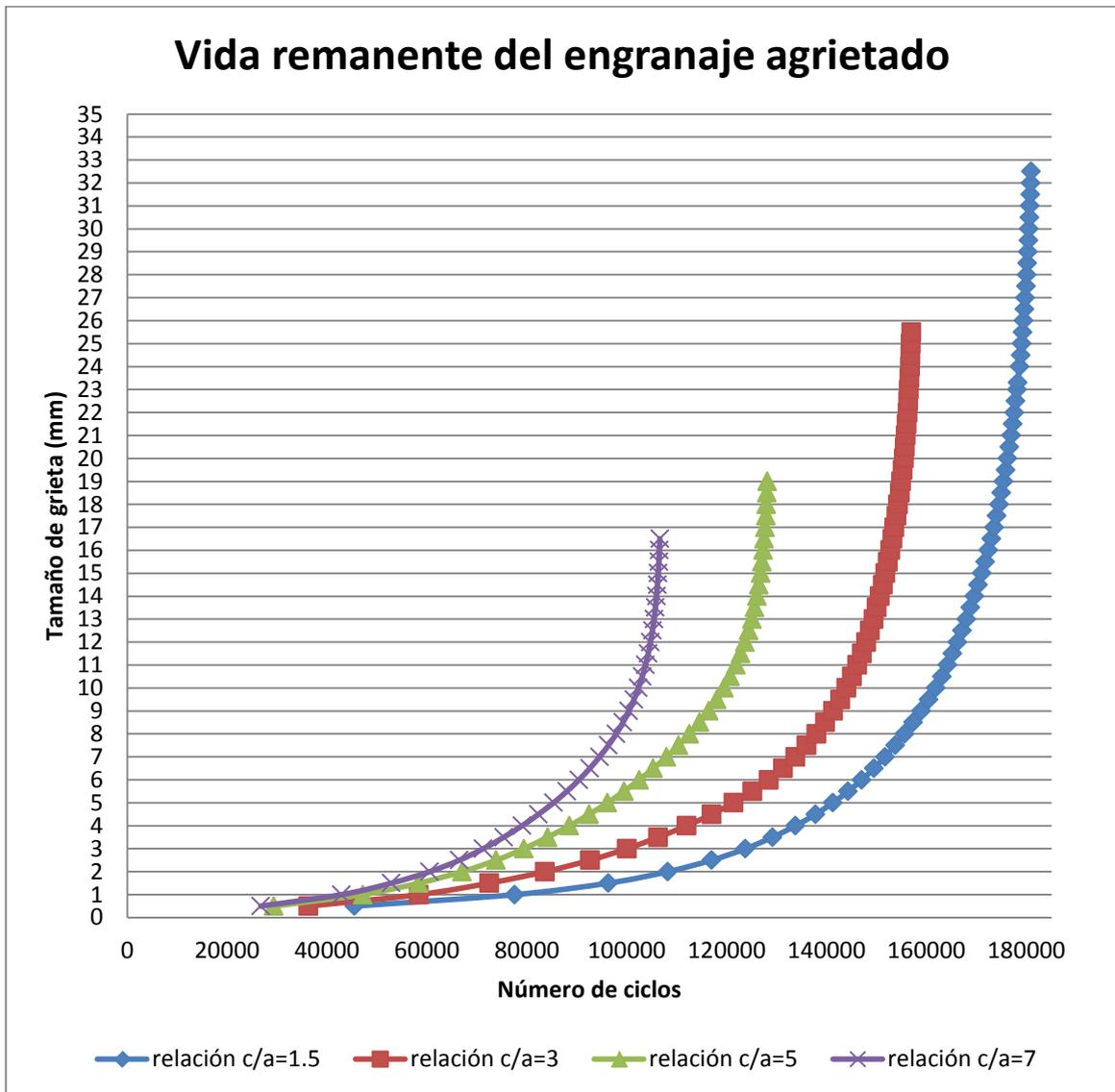


Gráfico N° 5. Curva de vida remanente del engranaje cilíndrico recto agrietado para distintos tamaños de longitud de grieta.

### CASO 3

- Módulo= 4 mm
- Número de dientes= 20
- Ángulo de presión= 20°
- Rugosidad del material= 5  $\mu\text{m}$
- Ancho de diente= 40 mm
- Material= AISI 4140 (Esfuerzo pulsante en la raíz del diente  $\sigma_F = 290 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$ )

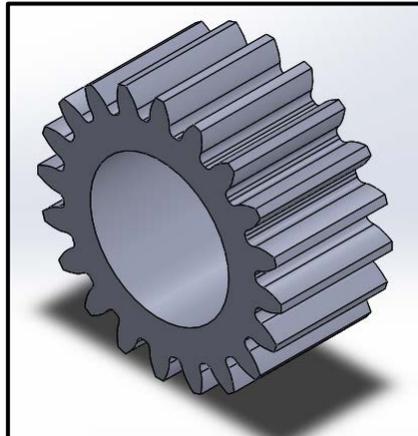


Figura 4.11. Modelo de engranaje cilíndrico recto a usar en el análisis

Al aplicar la metodología planteada, se obtienen los siguientes resultados:

-Determinación del factor de intensidad de tensiones por simulación numérica

Tabla N°14. Factores de intensidad de tensiones para modo I y II según profundidad de grieta

	Valores de profundidad de grieta (mm)				
	a=1	a=1.5	a=2	a=2.5	a=3
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_I</math> (<math>MPa * \sqrt{m}</math>)</b>	9.734	11.489	13.247	15.055	16.697
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_{II}</math> (<math>MPa * \sqrt{m}</math>)</b>	1.858	2.072	2.238	2.461	2.712

-Comprobación por método analítico (Ver Anexo A4-3)

Tabla N°15. Resultados para  $K_I$  mediante método analítico y mediante simulación numérica.

Profundidad de grieta	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ por simulación numérica ( $MPa * \sqrt{m}$ )	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ por método analítico ( $MPa * \sqrt{m}$ )	Diferencia (%)
a=1 mm	9.734	8.644	11.197
a=1.5 mm	11.489	10.672	7.111
a=2 mm	13.247	12.804	3.344

a=2.5 mm	15.055	15.65	3.802
a=3 mm	16.697	18.552	9.998

Se aprecia en la tabla N° 15 que las diferencias entre los resultados obtenidos por simulación numérica con respecto a los obtenidos por método analítico son menores del 15%. Los resultados obtenidos por simulación numérica se consideran correctos.

-Efecto de las cargas cíclicas en la vida remanente del elemento

Los valores de las constantes de Paris del material AISI 4140 son  $7 \times 10^{-9}$  (C) y 3.4 (m) (Lampman 1996), cuando la relación  $da/dN$  se encuentra en mm/ciclo. Finalmente, la curva obtenida para distintos tamaños de longitud de grieta será (Ver Anexo A5-9,10,11):

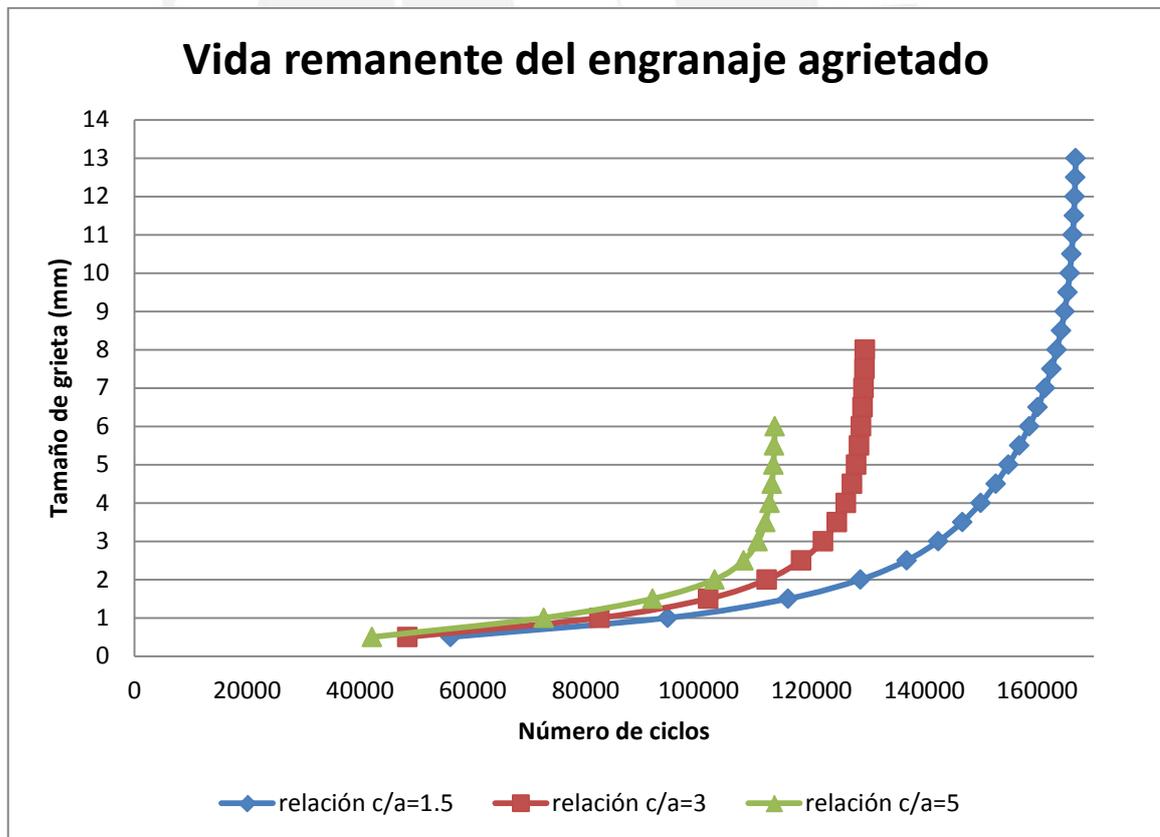


Gráfico N° 6. Curva de vida remanente para el engranaje cilíndrico recto agrietado para distintos tamaños de longitud de grieta.

## 4.2. Casos de engranajes cilíndricos helicoidales

El estudio realizado debe dar resultados aceptables para casos de engranajes de dientes helicoidales. Para ello, será aplicado a tres casos de engranajes cilíndricos helicoidales.

### CASO 1

- Módulo= 8 mm
- Número de dientes= 50
- Ángulo de presión= 20°
- Ángulo de la hélice= 15°
- Ancho de diente= 100 mm
- Material= AISI 4140 ( $\sigma_f = 290 \text{ N.mm}^2$ )

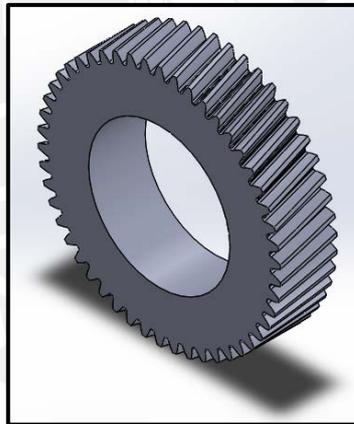


Figura 4.12. Modelo de engranaje cilíndrico helicoidal a usar en el análisis.

Ahora se pasa a describir cómo se aplicaría la metodología planteada:

#### -Determinación de la fuerza actuante

Usando la ecuación 3.3 y las tablas de la norma ISO 3663 (Ver Anexo A.3), se puede hallar la fuerza actuante. Asimismo, se pueden hallar los demás componentes de la fuerza (radial y axial) usando las ecuaciones 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9, para valores de ángulo de presión normal igual a 20° ( $\alpha_n$ ), ángulo de hélice igual a 15° ( $\beta$ ) y un factor de seguridad mínimo aproximadamente de 2. Finalmente, se obtiene:

$$F_t = 84510.202 \text{ N}$$

- $\frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} = \tan \alpha_t \rightarrow \alpha_t = 20.65^\circ$
- $F_r = F_t * \tan \alpha_t = 31849.493 \text{ N}$
- $F_a = F_t * \tan \beta = 22644.441 \text{ N}$
- $F = \frac{F_r}{\sin \alpha_n} = 93121.688 \text{ N}$

Ahora se determina por dónde se transmitirá la carga, es decir, la ubicación de ésta sobre la superficie del diente de engranaje. Mediante el uso de la ecuación 3.10, con un ángulo de inclinación de la fuerza de  $20^\circ$ , se obtiene:

$$h_{Fe} = 14.96 \text{ mm}$$

#### -Ubicación de la fisura en el punto más crítico

Usando los datos de carga aplicada y ubicación, es posible determinar el punto donde se concentra la mayor cantidad de tensiones en el diente:

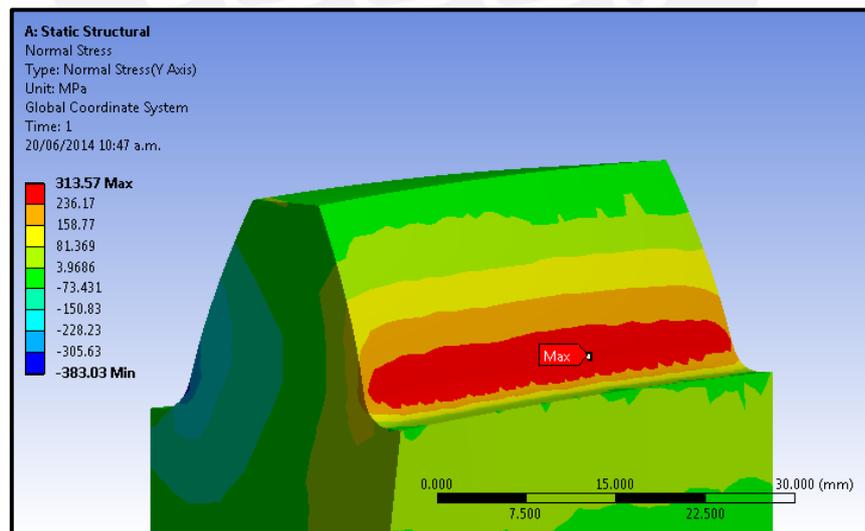


Figura 4.13. Ubicación del punto donde se ubica la máxima concentración de tensiones.

El punto MAX define el lugar donde se ubica la grieta en el análisis de los elementos finitos, al ser donde se produce la mayor concentración de esfuerzos.

-Determinación del factor de intensidad de tensiones por simulación numérica

Habiendo calculado el valor de la carga aplicada y la zona donde debe ubicarse la grieta, se procede a usar el método de los elementos finitos explicado en la sección 3.3.1. Al tratarse de un diente helicoidal, se obtendrán los factores pertenecientes al MODO I ( $K_I$ ), MODO II ( $K_{II}$ ) y MODO III ( $K_{III}$ ).

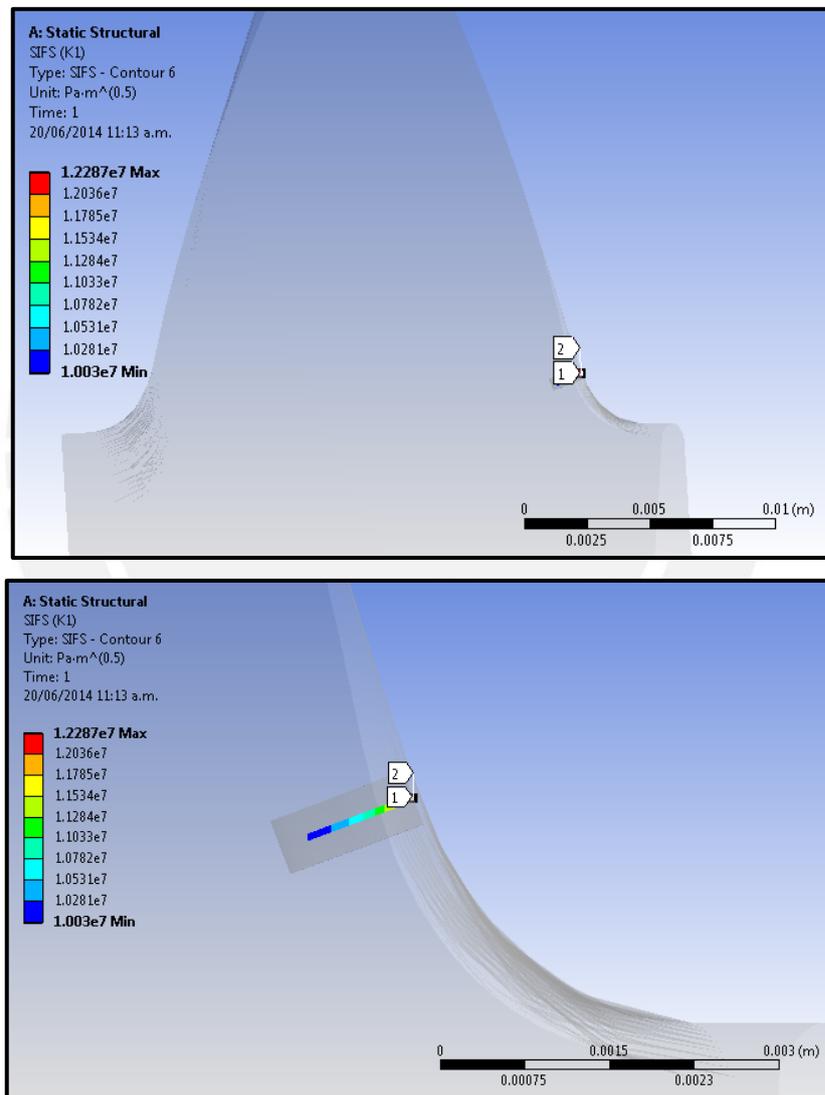


Figura 4.14. Vista de perfil de la grieta cuando  $a=1\text{mm}$ , en el punto donde ocurre la mayor concentración de tensiones.

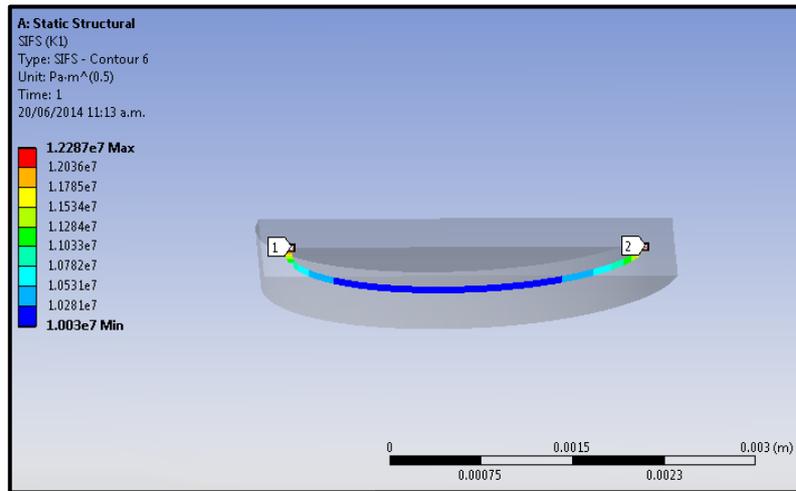


Figura 4.15. Resultado del análisis por fractura, obteniendo los valores para  $K_I$

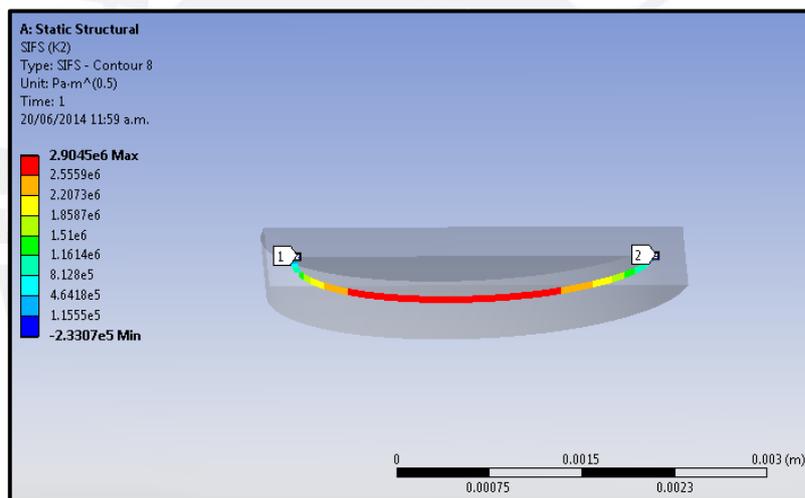


Figura 4.16. Resultado del análisis por fractura, obteniendo los valores para  $K_{II}$

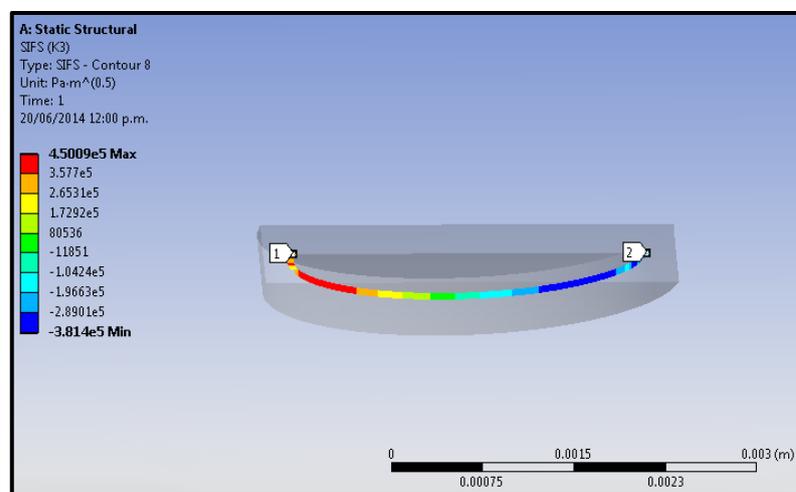


Figura 4.17. Resultado del análisis por fractura, obteniendo los valores para  $K_{III}$ .

El valor del factor de intensidad de tensiones es variable para toda la longitud de la grieta semi-elíptica. Para el estudio a realizar, se tomará el máximo valor de K, por dar la mayor cantidad de energía con la que se propaga la grieta. Ahora se realiza el mismo procedimiento para evaluar el valor de  $K_I$ ,  $K_{II}$  y  $K_{III}$  en distintos valores de profundidad de fisura: (Ver Anexo A4-4)

Tabla N°16. Factores de intensidad de tensiones para modo I, II y III según longitud de grieta.

	Valores de profundidad de grieta (mm)				
	a=0.5	a=1	a=1.5	a=2	a=2.5
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_I</math> (<math>MPa * \sqrt{m}</math>)</b>	10.412	12.287	14.95	15.752	17.033
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_{II}</math> (<math>MPa * \sqrt{m}</math>)</b>	3.242	2.905	2.822	2.684	2.519
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_{III}</math> (<math>MPa * \sqrt{m}</math>)</b>	0.226	0.451	0.695	0.701	0.892

-Comprobación por método analítico

Para realizar la comparación de los resultados obtenidos por simulación numérica, se usa la metodología analítica planteada en la sección 3.3.2. Para este caso, la porción de diente tomada tendrá dimensiones diferentes, para medidas pequeñas de longitud de grieta. Para evaluar medidas más grandes se deben tomar porciones de grietas de mayores dimensiones.

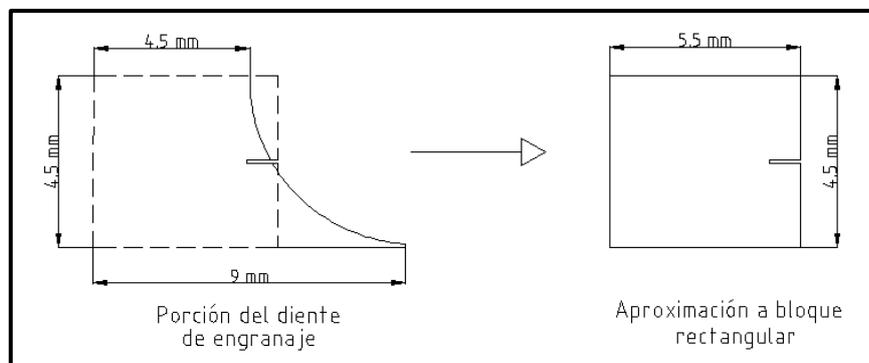


Figura 4.18. Aproximación de la porción de diente tomada a una superficie plana.

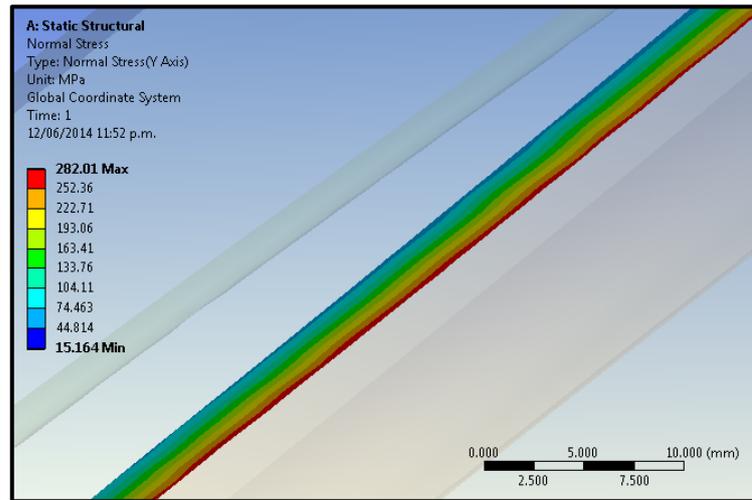


Figura 4.19. Esfuerzos normales presentes en la cara superior de la porción analizada.

La cara superior de la porción tomada del engranaje tiene una longitud de 5.5 mm (Ver figura 4.18). Según los resultados vistos en la figura 4.19, el estado de tensiones presente en la cara superior del cuerpo analizado será:

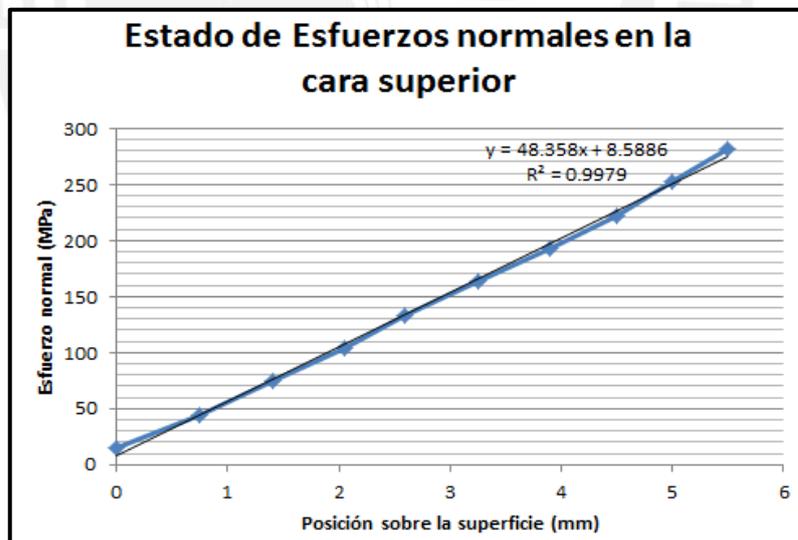


Figura 4.20. Línea que representa el crecimiento de los esfuerzos actuantes en la cara superior de la porción de engranaje analizada, a medida que se acerca a la superficie.

Según lo expresado en la imagen 3.26, se puede obtener los esfuerzos de tracción y de flexión partiendo del estado de esfuerzos anterior:

- $-A+B= 8.589 \text{ MPa}$

- $A+B= 274.558 \text{ MPa}$

De esta forma, se obtiene el esfuerzo de tracción igual a 141.574 MPa, y el esfuerzo de flexión igual 132.985 MPa. Ahora se puede realizar el cálculo para hallar el valor del factor de intensidad de tensiones para Modo I aplicando la ecuación 2.1 de la sección 2.1.1, usando las medidas establecidas en la figura 4.18: (Ver Anexo A4-4)

Tabla N°17. Valores del factor de intensidad de tensiones para modo I según profundidad de grieta por cálculos analíticos

Profundidad de grieta	Ancho de grieta	Relación $c/a$	Relación $a/t$	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ ( $\text{MPa} * \sqrt{\text{m}}$ )
a=1 mm	c=0.75 mm	1.5	0.091	11.147
a=1.5 mm	c=1.5 mm	1.5	0.182	13.681
a=2 mm	c=2.25 mm	1.5	0.273	16.339
a=2.5 mm	c=3 mm	1.5	0.364	18.264
a=3 mm	c=3.75 mm	1.5	0.455	19.948

Ahora que se calcularon los valores del factor de intensidad de tensiones para Modo I de agrietamiento, se realiza la comprobación de los resultados obtenidos por simulación numérica comparando los valores obtenidos mediante ANSYS (Tabla N°16) con los obtenidos mediante la metodología analítica (Tabla N°17): (Ver Anexo A4-4)

Tabla N°18. Resultados para  $K_I$  mediante método analítico y mediante simulación numérica.

Profundidad de grieta	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ por simulación numérica ( $\text{MPa} * \sqrt{\text{m}}$ )	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ por método analítico ( $\text{MPa} * \sqrt{\text{m}}$ )	Diferencia (%)
a=1 mm	12.287	11.147	9.278
a=1.5 mm	14.95	13.681	8.488
a=2 mm	15.752	16.339	3.593
a=2.5 mm	17.333	18.264	5.097
a=3 mm	18.055	19.948	9.489

Se aprecia en la tabla N° 18 que las diferencias entre los resultados obtenidos por simulación numérica con respecto a los obtenidos por método analítico son menores del 15%. Los resultados obtenidos por simulación numérica se consideran correctos.

#### -Efecto de las cargas cíclicas en la vida remanente del elemento

Los valores de las constantes de Paris del material AISI 4140 son  $7 \times 10^{-9}$  (C) y 3.4 (m) (Lampman 1996), cuando la relación  $da/dN$  se encuentra en  $mm/ciclo$ . Finalmente, la curva obtenida para distintos tamaños de longitud de grieta será (Ver Anexo A5-12,13,14):

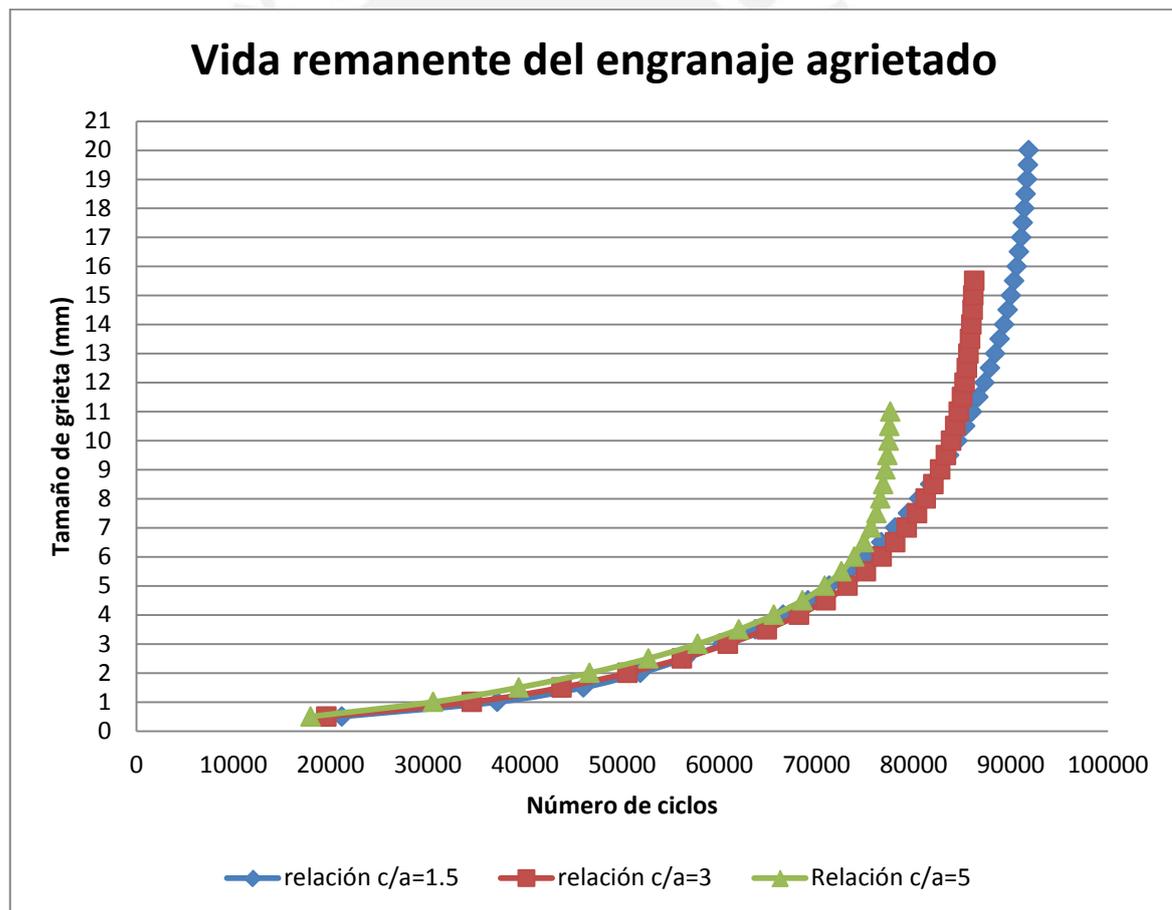


Gráfico N° 7. Curva de vida remanente del engranaje cilíndrico helicoidal agrietado para distintos tamaños de grieta.

El gráfico N°7 representa la curva de vida remanente del engranaje en cuestión, a medida que aumenta el tamaño de grieta, el número de ciclos para seguir

propagándose se hace menor. Esto se da hasta que el factor de intensidad de tensiones de la grieta alcance un valor cercano a la tenacidad a la fractura del material ( $60 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$ ) o la grieta llegue a ser pasante por todo el ancho del diente. Una vez llegado a este límite, la grieta seguirá expandiéndose, pero de forma acelerada y desordenada, por lo que el engranaje ya debe ser descartado.

**CASO 2**

- Módulo= 16 mm
- Número de dientes= 30
- Ángulo de presión=  $20^\circ$
- Ángulo de hélice=  $15^\circ$
- Ancho de diente= 200 mm
- Material= AISI 4140 (Esfuerzo pulsante en la raíz del diente  $\sigma_F = 290 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$ )

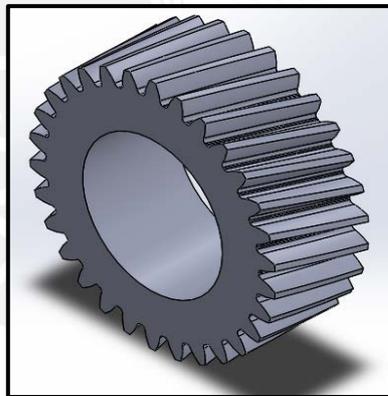


Figura 4.21. Modelo de engranaje cilíndrico helicoidal a usar en el análisis.

**-Determinación del factor de intensidad de tensiones por simulación numérica**

Tabla N°19. Factores de intensidad de tensiones para modo I, II y III según longitud de grieta

	Valores de profundidad de grieta (mm)				
	a=1	a=1.5	a=2	a=2.5	a=3
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_I</math> (<math>\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}</math>)</b>	9.857	11.418	12.783	13.8	14.872

<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_{II}</math> (<math>MPa * \sqrt{m}</math>)</b>	1.461	1.683	1.885	2.062	2.189
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_{III}</math> (<math>MPa * \sqrt{m}</math>)</b>	0.457	0.581	0.705	0.799	0.907

-Comprobación por método analítico (Ver Anexo A4-5)

Tabla N°20. Resultados para  $K_I$  mediante método analítico y mediante simulación numérica, obteniendo la diferencia entre ambos valores.

<b>Profundidad de grieta</b>	<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_I</math> por simulación numérica (<math>MPa * \sqrt{m}</math>)</b>	<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_I</math> por método analítico (<math>MPa * \sqrt{m}</math>)</b>	<b>Diferencia (%)</b>
<b>a=1 mm</b>	9.857	8.723	11.504
<b>a=1.5 mm</b>	11.418	10.465	8.346
<b>a=2 mm</b>	12.783	12.092	5.421
<b>a=2.5 mm</b>	13.8	14.266	3.267
<b>a=3 mm</b>	14.872	16.42	9.428

Se aprecia en la tabla N° 20 que las diferencias entre los resultados obtenidos por simulación numérica con respecto a los obtenidos por método analítico son menores del 15%. Los resultados obtenidos por simulación numérica se consideran correctos.

-Efecto de las cargas cíclicas en la vida remanente del elemento

Los valores de las constantes de Paris del material AISI 4140 son  $7 \times 10^{-9}$  (C) y 3.4 (m) (Lampman 1996), cuando la relación  $da/dN$  se encuentra en  $mm/ciclo$ . Finalmente, la curva obtenida para distintos tamaños de longitud de grieta será (Ver Anexo A5-15,16,17,18):

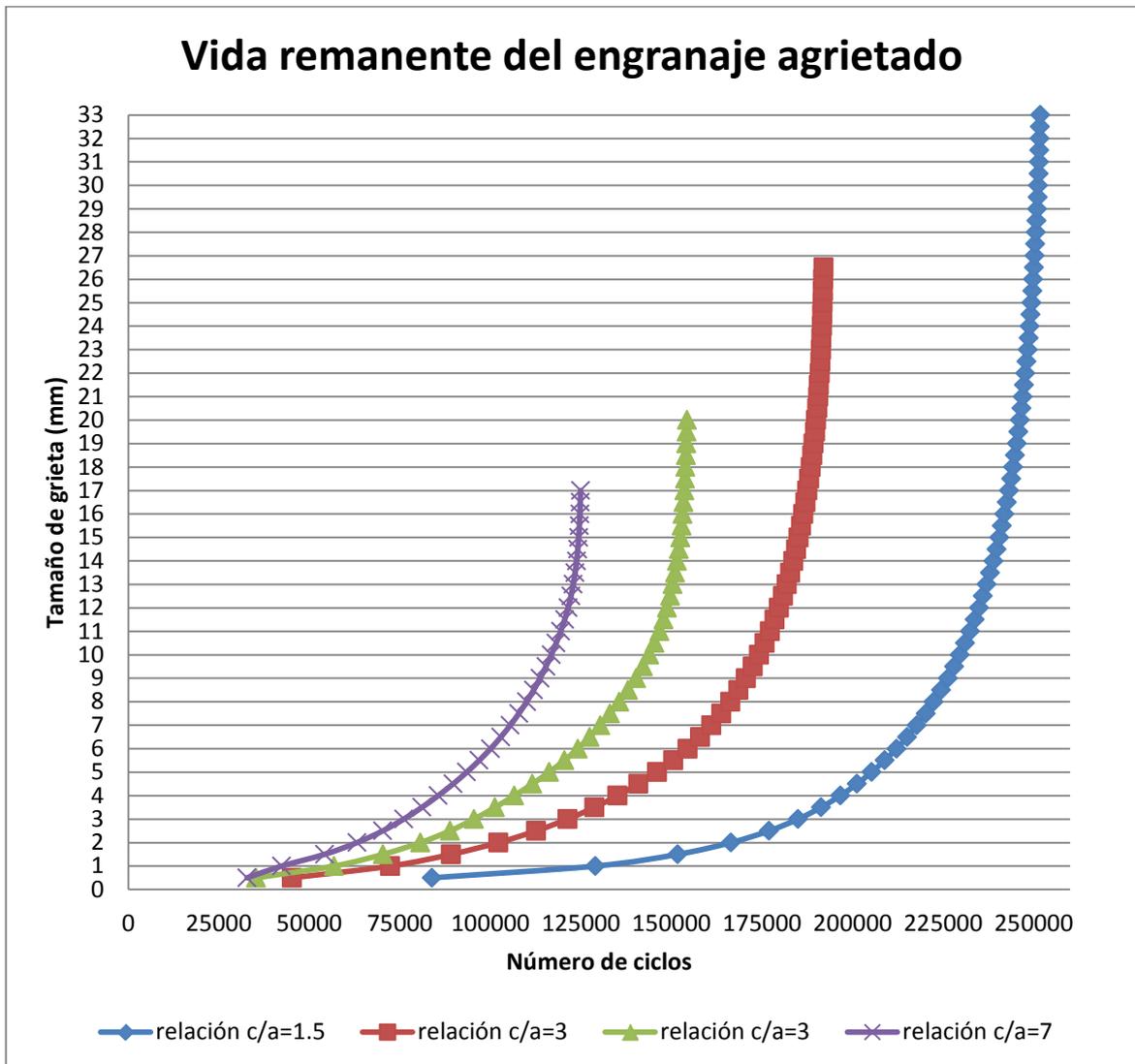


Gráfico N° 8. Curva de vida remanente del engranaje cilíndrico helicoidal agrietado para distintos tamaños de longitud de grieta.

#### CASO 4

- Módulo= 4 mm
- Número de dientes= 30
- Ángulo de presión=  $20^\circ$
- Ángulo de hélice=  $15^\circ$
- Ancho de diente= 45 mm
- Material= AISI 4140 (Esfuerzo pulsante en la raíz del diente  $\sigma_F = 290 \text{ N.mm}^2$ )

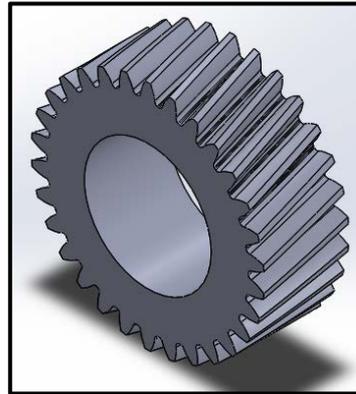


Figura 4.22. Modelo de engranaje cilíndrico helicoidal a usar en el análisis.

-Determinación del factor de intensidad de tensiones por simulación numérica

Tabla N°21. Factores de intensidad de tensiones para modo I, II y III según longitud de grieta

	Valores de profundidad de grieta (mm)				
	a=1	a=1.5	a=2	a=2.5	a=3
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_I</math> (<math>MPa * \sqrt{m}</math>)</b>	9.983	12.138	13.442	14.812	16.035
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_{II}</math> (<math>MPa * \sqrt{m}</math>)</b>	1.102	1.352	1.573	1.981	2.164
<b>Factor de Intensidad de Tensiones <math>K_{III}</math> (<math>MPa * \sqrt{m}</math>)</b>	0.334	0.526	0.748	0.962	1.165

-Comprobación por método analítico

Tabla N°22. Resultados para  $K_I$  mediante método analítico y mediante simulación numérica.

Profundidad de grieta	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ por simulación numérica ( $MPa * \sqrt{m}$ )	Factor de Intensidad de Tensiones $K_I$ por método analítico ( $MPa * \sqrt{m}$ )	Diferencia (%)
a=1 mm	9.983	8.655	13.303
a=1.5 mm	12.138	10.934	9.919
a=2 mm	13.442	13.114	2.441
a=2.5 mm	14.812	15.246	2.845
a=3 mm	16.035	17.308	7.355

Se aprecia en la tabla N° 22 que las diferencias entre los resultados obtenidos por simulación numérica con respecto a los obtenidos por método analítico son menores del 15%. Los resultados obtenidos por simulación numérica se consideran correctos.

#### -Efecto de las cargas cíclicas en la vida remanente del elemento

Los valores de las constantes de Paris del material AISI 4140 son  $7 \times 10^{-9}$  (C) y 3.4 (m) (Lampman 1996), cuando la relación  $da/dN$  se encuentra en  $mm/ciclo$ . Finalmente, la curva obtenida para distintos tamaños de longitud de grieta será (Ver Anexo A5-19,20,21):

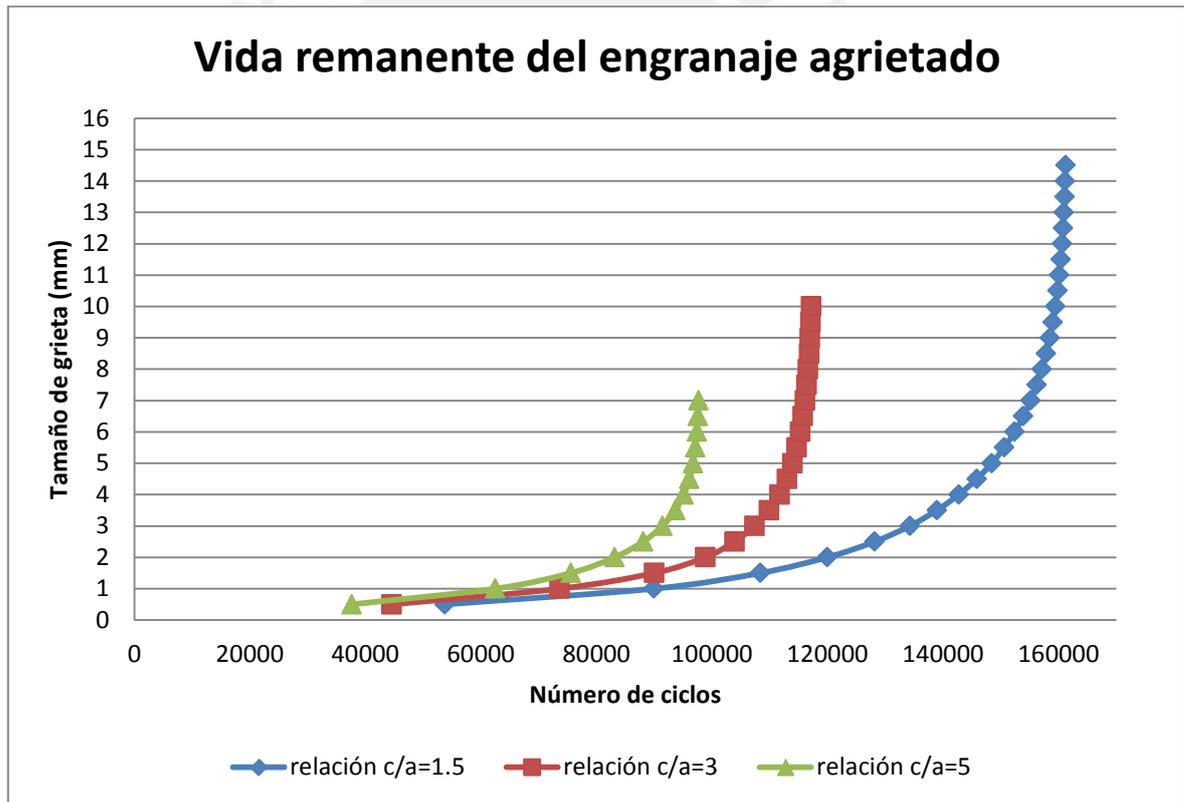


Gráfico N° 9. Curva de vida remanente del engranaje cilíndrico helicoidal agrietado para distintos tamaños de longitud de grieta.

Al interpretar los gráficos obtenidos, se puede observar que las grietas en cada engranaje suelen fracturar por todo el ancho del cuerpo (grieta pasante) antes de llegar al valor de la tenacidad a la fractura. Sin embargo, para las curvas de relación  $c/a = 1.5$  si se alcanza una profundidad de grieta crítica que alcanza el valor de la

tenacidad a la fractura. Estos tamaños críticos aumentan cuando aumenta la geometría del diente, esto se puede apreciar en las gráficas ya que para un engranaje de módulo 4, la profundidad crítica de grieta alcanza a ser 13 mm, mientras que para un engranaje de módulo 16, la profundidad crítica de la grieta alcanza los 32 mm aproximadamente.

De esta forma, el tamaño crítico de grieta puede quedar en términos del módulo del engranaje. Si se relacionan los módulos de los engranajes de cada caso estudiado, rectos y helicoidales, con sus respectivos tamaños de grieta críticos, se obtiene:

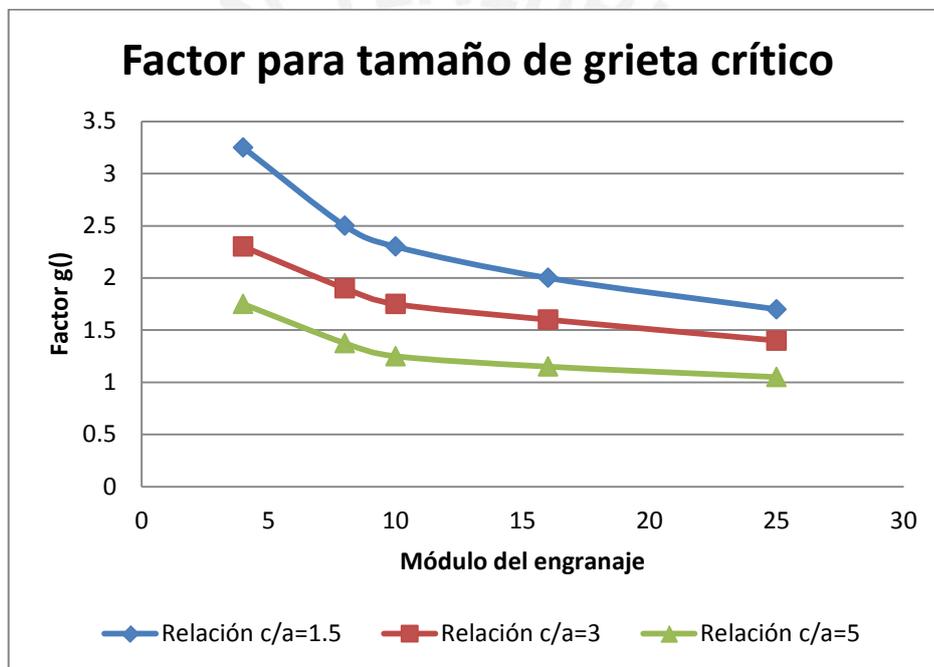


Gráfico N° 10. Curva para determinar el máximo tamaño o profundidad de grieta del engranaje partiendo del valor de su módulo.

Donde  $g$  es un factor que, al ser multiplicado por el módulo, se obtiene el tamaño de grieta crítico hasta el cual el engranaje puede seguir operando, aún si la grieta ya haya alcanzado a ser pasante por todo el ancho del diente de engranaje. El valor de  $g$  se va reduciendo cuando el módulo del engranaje estudiado aumenta. Esta relación otorga la facilidad de poder determinar aproximadamente el máximo tamaño de grieta que puede soportar el diente de engranaje cilíndrico antes de llegar al valor crítico de la tenacidad a la fractura, y de esta forma condicionar su uso para evitar la pérdida total del engranaje.

## CONCLUSIONES

- Se desarrolló un procedimiento para determinar la influencia de fisuras en la vida remanente de engranajes cilíndricos utilizando herramientas computacionales de simulación numérica y comprobando los resultados con cálculos analíticos referenciales. Estas herramientas pueden indicar el número de ciclos de vida remanente a los que puede llegar un engranaje cilíndrico fisurado hasta que la grieta alcance dimensiones críticas y el elemento deba ser descartado. La propagación de la grieta y la variación en los ciclos de vida remanente del engranaje se debió al efecto de las cargas variables presentes en la transmisión por engranajes, haciendo que a medida que la grieta aumente de tamaño, la propagación sea cada vez más acelerada, volviendo inservible al engranaje.
- Se establecieron como principales características en los modelos por simulación numérica aplicados a engranajes a la carga que se transmite entre los engranajes, la ubicación de la grieta en la zona donde ocurre la mayor concentración de tensiones y la geometría del cuerpo agrietado, para poder realizar un adecuado estudio por el método de los elementos finitos y obtener resultados aceptables del valor del factor de intensidad de tensiones.
- La simulación de la fisura en el engranaje permite obtener el número de ciclos necesarios para extender la grieta de una medida a otra y así poder bosquejar una curva de vida remanente del engranaje fisurado. Esta curva revela que el número de ciclos requeridos para la propagación irá decreciendo a medida que aumente el tamaño de grieta, debido a que aumentan también la intensidad de tensiones y la energía de deformación.
- Mediante los resultados obtenidos al analizar los casos concretos de engranajes fisurados, se logra comprobar que el tamaño crítico de la grieta puede quedar en términos del módulo del engranaje fisurado. Después de realizado un análisis dinámico referencial, se puede proponer que solo es necesario un factor que multiplica al módulo del engranaje que se estudia, y determina el máximo tamaño de grieta que podría sostener el engranaje.
- Los resultados obtenidos por el método de elementos finitos se comparan de manera aceptable con los obtenidos por metodologías analíticas, dado que la diferencia generada entre estos valores es menor a 15% en los casos de engranajes fisurados estudiados.

## RECOMENDACIONES

Para poder seguir empleando un engranaje cilíndrico que se encuentre agrietado, es recomendable que se realice un alivio de las condiciones de trabajo a las que se encuentra sometido, como reducir la carga que se transmite o reducir la velocidad a la que se encuentra operando. Estas acciones pueden extender el período de vida remanente del engranaje agrietado, cumpliendo así diferentes funciones para las que fue diseñado.

Este trabajo es un estudio inicial y referencial sobre el efecto que pueden tener las fisuras y el agrietamiento sobre engranajes cilíndricos y en su aplicación. Para realizar un estudio más detallado es recomendable considerar una mayor influencia de las cargas cíclicas en el análisis, tanto por metodologías de cálculo como por el método de los elementos finitos. Asimismo, es recomendable considerar el sobredimensionamiento que se genera durante la fabricación del engranaje, para obtener resultados más precisos y cercanos a la realidad.

## BIBLIOGRAFÍA

ALP ESMEN, Ekrem (2004). *Three-dimensional Mixed-Mode linear elastic fracture mechanics analysis using domain interaction integrals*. U.S.A.: Massachusetts Institute of Technology.

ANDERSON, T.L. (2005). *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. Tercera edición. U.S.A.: Taylor & Francis Group

BANNANTINE, Julie A., Jess J. COMER y James L. HANDROCK (1989). *Fundamentals of metal fatigue analysis*. U.S.A.: University of Illinois.

BENITEZ HERNANDEZ, Luis Eduardo (2005). *Las fallas en los engranajes*. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

BUDYNAS, R. (1998). *Advanced Strength and Applied Stress Analysis (2<sup>nd</sup> edition)*. U.S.A.: McGraw-Hill

COTAQUISPE ZEVALLOS, L.O. (2004). *Perfeccionamiento del diseño de los engranajes cilíndricos de dientes rectos exteriores mediante el método de los elementos finitos. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Técnicas, Departamento de mecánica aplicada y dibujo*. Santa Clara, Cuba: Universidad Central "Martha Abreu" de las Villas.

GONZÁLEZ VELÁZQUEZ, Jorge Luis (2004) *Mecánica de Fractura*. Segunda edición. Limusa. Noriega Editores.

INFANZÓN GARCÍA, H. L. (2010). *Análisis del esfuerzo de contacto en engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil envolvente mediante el método de los elementos finitos. Tesis presentada para optar el título de Ingeniero Mecánico, Facultad de Ciencias e Ingeniería*. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.

INTERNATIONAL STANDARD ISO 6336 (1996). *Calculation of load capacity of spur and helical gears*. Suiza:Geneve.

KLENZ, S. R. (1999). *Finite Element Analysis of A Spur Gear Set*, M.Sc. Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, University of Saskatchewan.

KOBAYASHI, Albert S. (1974). *Stress Intensity Factor for Elliptical Cracks*. U.S.A.: Washington University.

LAMPMAN, S. R. (1996). *ASM Handbook. Volumen 19. Fatigue and Fracture*. ASM International.

LEWICKI, David G. y Roberto BALLARINI (1997). "Rim thickness effects on gear crack propagation life". *International Journal of Fracture*. Países Bajos, número 87, pp. 59-86.

MATTHEWS, William T. (1973). *Plane Strain Fracture Toughness (K<sub>IC</sub>) Data Handbook for Metals*. Massachusetts, U.S.A.: Army Materials and Mechanics Center.

MERINO PONCE, Daniel (2007). *Ensayos No Destructivos*. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú

MOTT, Robert L. (2006). *Diseño de elementos de máquinas*. México, Editorial Prentice Hall Hispanoamericana S.A.

NIEMANN, G. (1973). *Elementos de Máquinas*. Barcelona, Labor. Editorial Springer.

PALLI PEREZ, Osmani y Angel MACHADO (2008). *Fallas superficiales en las transmisiones por engranajes metálicos*. Cuba, Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas.

PINOCHET ESPINOSA, Juan Esteban (2007). *Análisis de la falla de fatiga por flexión en la raíz de un dientes de engranaje recto con PRO/ENGINEER*. Tesis presentada para optar el título de Ingeniero Mecánico, Facultad de Ciencias de la Ingeniería. Valdivia, Chile: Universidad Austral de Chile.

SANTOS JAIMES, Alfonso (2010). *Uso de Software de Elementos Finitos ANSYS, en el diseño estructural de un vehículo todo terreno*. Colombia: Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga.

TADA, Hiroshi, Paul C. PARIS y George R. IRWIN (2000). *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Tercera edición. Asme Press.

Tutorial ANSYS MECHANICAL 14.5