PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ERRORES Y DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN EL PROCEDIMIENTO PARA DESCRIBIR EL ESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES DE $\mathbb{R}^n$

Tesis para obtener el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

PRESENTADO POR:

ERNESTO VALENCIA SEGURA

ASESORA

DRA. NORMA VIOLETA RUBIO GOYCOCHEA

Miembros del jurado

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Mg. Mariano Adán González Ulloa

LIMA - PERÚ

2015

INTRODUCCIÓN

En la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), los alumnos de ingeniería estudian los espacios vectoriales en cuarto ciclo. Por muchos años, los profesores del curso correspondiente han notado que los estudiantes tienen dificultades en un tema en particular: la descripción del espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$. Estas dificultades siempre han sido motivo de discusión puesto que el procedimiento que se enseña es algorítmico y repetitivo y no se deberían esperar tan malos resultados; sin embargo, año tras año se presentan los mismos conflictos.

La presente investigación tiene por objetivo describir y explicar los errores y dificultades que cometen los estudiantes al describir el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$. Se utilizarán estudios e investigaciones de otros autores para dar explicación al porqué se producen dichos errores y dificultades. Se espera que esto sea un primer paso para que futuros investigadores puedan lograr el objetivo más ambicioso de desarrollar una metodología eficaz para que los alumnos superen las dificultades intrínsecas de este objeto matemático.

El paradigma de investigación que se utiliza es el empírico-analítico. La metodología consiste en hacer un análisis exploratorio, determinar las prácticas matemáticas involucradas en el procedimiento para describir el espacio generado por un conjunto de vectores, diseñar una evaluación para un grupo de alumnos seleccionado y, finalmente, identificar, describir y explicar los errores y dificultades que tengan.

Algunos investigadores, como Wawro (2010), Oktaç y Trigueros (2010), Sweeney y Rabin (2011), entre otros, han estudiado la enseñanza y el aprendizaje de temas del álgebra lineal, incluso del mismo espacio generado, pero todos lo han hecho desde otro enfoque. El álgebra lineal requiere un muy elevado nivel de abstracción y, por ello, los investigadores han centrado su atención en aspectos cognitivos que tienen que ver con la comprensión de los conceptos abstractos involucrados en la materia. En esta investigación, nos centramos en el objeto primario: el procedimiento al describir el espacio generado por un conjunto de vectores. Creemos que aparte de los aspectos abstractos del objeto matemático podemos encontrar dificultades en la parte procedimental, que involucra conocimientos previos.

El presente trabajo se divide en cuatro capítulos. El primero describe la problemática que motiva este estudio. Se muestran estudios anteriores y la justificación de la relevancia del problema a investigar. Además, se define el problema de investigación y los objetivos del estudio.

El segundo capítulo contiene las herramientas teóricas que serán utilizadas en la investigación. Se presentan definiciones que serán usadas a lo largo del estudio, tomando en cuenta la perspectiva de distintos autores. Además, se describen herramientas y conceptos de algunas teorías y estudios: Enfoque Ontosemiótico del Conocimento y la Instrucción Matemática, Teoría de Registros de Representación Semiótica y Niveles de Algebrización. Finalmente, se describe la metodología que se empleará en esta investigación.

El tercer capítulo describe los objetos matemáticos involucrados en este estudio. Se definen y explican los sistemas de ecuaciones lineales y los conceptos de espacio vectorial, subespacio vectorial, combinación lineal, independencia lineal y espacio generado.

El cuarto capítulo explica cómo se desarrolló la experiencia según la metodología propuesta. Se describen a los participantes, la evaluación y se brinda un análisis de los resultados de dicha experiencia. En este capítulo se determinan las dificultades de los estudiantes, se clasifican, se describen y se explican en base a resultados anteriores de otros investigadores.

Finalmente, se presentan las conclusiones y aportes de la investigación.

TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1 – LA PROBLEMÁTICA

En el presente capítulo se describen investigaciones anteriores relacionadas con el objeto de este estudio. Además se discute la relevancia de esta investigación a manera de justificación de la misma. Finalmente se establece la pregunta de investigación y los objetivos general y específicos.

1.1 Antecedentes

El álgebra lineal tiene una importancia fundamental por sus aplicaciones en otras disciplinas de la matemática, además de sus aplicaciones a la ingeniería y a la economía (Parraguez y Bozt, 2012).

El concepto de espacio generado se relaciona casi con todos los temas del álgebra lineal, vale decir, espacios vectoriales, independencia lineal, base y dimensión, transformaciones lineales, etc. Se han realizado varias investigaciones acerca de la enseñanza, aprendizaje, razonamiento de los alumnos, etc., en diversos tópicos del álgebra lineal. Por ejemplo, Wawro (2010) analiza la génesis instrumental del razonamiento de los alumnos con respecto al teorema de la matriz invertible, un teorema fundamental del álgebra lineal. Trabaja con estudiantes universitarios de manera individual y colectiva para analizar su razonamiento con respecto a este teorema y concluye que tienen buenas habilidades de razonamiento pero que necesitan más de una herramienta para que se hagan aparentes.

Oktaç y Trigueros (2010) analizan, en general, la forma en que aprenden los estudiantes el álgebra lineal. Hacen un análisis teórico de las construcciones de los diversos conceptos del álgebra lineal mediante la teoría APOS, para luego probar sus hipótesis con estudiantes de distintas carreras (en grupos pequeños). En el estudio, concluyen que la gran mayoría de los estudiantes tiene problemas para interiorizar los conceptos básicos del álgebra lineal y que la descomposición genética es una herramienta útil para estudiar las construcciones mentales involucradas en estos conceptos.

Estudios similares realizan Parraguez y Bozt, (2012) y Kú, Trigueros y Oktaç (2008). Los primeros analizan, desde una postura cognitiva, la forma de entender de los estudiantes los conceptos de solución de un sistema de ecuaciones lineales y la dependencia e independencia lineal; analizan los modos de pensamiento de tres estudiantes de matemática y cuatro estudiantes de pedagogía en matemática mediante un cuestionario de ocho preguntas y el resultado del estudio es que casi ningún estudiante logra analizar los problemas con distintos modos de pensamiento y casi siempre se restringen únicamente a un modo analítico-algebraico. Los segundos estudian las construcciones mentales que desarrollan los estudiantes para comprender el concepto de base de un espacio vectorial; basados en la teoría APOS, realizan una descomposición genética del concepto de base, observan durante un semestre a un grupo de veinticuatro estudiantes y luego aplicaron un cuestionario a seis de ellos; en términos generales, concluyen que los alumnos no llegan a interiorizar el concepto de base.

Otros investigadores que realizan una descomposición genética fueron Roa-Fuentes y Oktaç (2010), esta vez sobre el concepto de transformación lineal. Nuevamente, se basan en la teoría APOS y realizan las descomposiciones genéticas según dos formas de construir el concepto de transformación lineal, una por interiorización y otra por coordinación. Wawro, Sweeney y Rabin (2011) investigan acerca de la imagen concepto[1] de los estudiantes respecto a los subespacios vectoriales en el álgebra lineal. Entrevistan verbalmente a ocho estudiantes universitarios y concluyen, en todos los casos, que su imagen concepto difiere notoriamente respecto a la definición formal y que el uso repetido de dicha definición ayuda a mejorar la imagen concepto de los estudiantes.

El concepto de espacio generado está relacionado con todas estas investigaciones. Por ejemplo, para determinar el espacio generado por un conjunto se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales; los resultados son distintos según el conjunto sea linealmente dependiente o independiente; el conjunto es base del espacio que genera si y solo si es linealmente independiente; para caracterizar una transformación lineal $T : V \to W$, se necesita únicamente saber cómo actúa la transformación sobre un conjunto generador de *V*; un subespacio vectorial se puede describir en base a un conjunto generador del mismo. Se puede apreciar, por los resultados de las investigaciones, que los temas del álgebra lineal son de muy

[1]Tall y Vinner (1981) definen la imagen concepto como la estructura cognitiva total asociada a un concepto, que incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados.

difícil interiorización y que, por ello, serán producto de muchas más investigaciones en el futuro.

Por otro lado, hay un concepto algebraico que pensamos está muy vinculado con esta investigación: la manipulación de literales que tienen usos distintos dentro de un mismo ejercicio. Muchos investigadores han estudiado directamente este tema. Por ejemplo, Bardini, Radford y Sabena (2005) estudian las dificultades cognitivas relacionadas con el uso de literales que representan un valor fijo pero indeterminado (parámetro). Analizan las repuestas de estudiantes de undécimo grado[2] en dos escuelas distintas de Ontario, Canadá ante dos problemas que involucran el uso de variables y parámetros. En su estudio, los estudiantes se muestran cómodos trabajando con variables para generalizar un patrón, pero se topan con una pared cuando se añade al problema un nivel mayor de generalización, cuando se agrega la necesidad del uso de un parámetro junto con la variable ya definida. Muestran serios problemas con la inclusión o manejo de este objeto matemático. Wilhelmi, M., Godino, J. y Lasa, A. (2014) estudian la concepción de estudiantes de maestría en educación matemática de los significados de ecuación y función, que se relacionan directamente con los conceptos de incógnita y variable. A cuarenta y seis estudiantes les proponen tres tareas relacionadas con estos objetos matemáticos y concluyen que hay vacíos en el concepto de variable y, por lo tanto, en la distinción entre ecuación y función. Basurto (2013) se basa en el modelo 3UV de Ursini (1994 citado en Juárez, 2011) y apunta que el uso de la tecnología digital mejora la comprensión de parámetros en funciones polinomiales. Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) definen 3 niveles de algebrización de la actividad matemática en educación primaria y en cada nivel se ve involucrado el uso de los distintos tipos de literales. Godino et al. (2014) continúan este modelo con otros 3 niveles más avanzados que se trabajan en educación secundaria; los niveles 4 y 5 corresponden a la aparición y tratamiento de parámetros. Muchos otros investigadores estudian esta problemática. Entre ellos, Morales y Díaz (2005) estudian el concepto de variables en los libros de texto. Ursini y Trigueros se basan en el modelo 3UV y analizan cómo los estudiantes de secundaria interpretan parámetros en álgebra. Benitez (2004) también utiliza el modelo 3UV en su tesis de maestría en Matemática Educativa para analizar cómo presentan y usan las variables los libros de texto de matemática para secundaria. Escobar (2014) utiliza los niveles de algebrización definidos por Godino et al.

[2] Equivalente a quinto de secundaria en nuestro país.

(2014) para caracterizar el razonamiento algebraico en estudiantes de primaria en su tesis de maestría en Educación Matemática.

Pensamos que una parte importante del procedimiento para describir el espacio generado por un conjunto de vectores requiere del manejo de literales. Es por eso que para la investigación que desarrollamos se necesita estudiar definiciones e investigaciones previas respecto al uso de constantes, variables, parámetros, etc., como las antes mencionadas.

1.2 Justificación del problema

El álgebra lineal tiene una gran gama de aplicaciones dentro de la matemática misma y fuera de ella. Autores como Wawro et al. (2011) y Parraguez y Bozt (2012) resaltan el poder unificador del álgebra lineal dentro de las matemáticas y su aplicabilidad en áreas fuera de la matemática pura, áreas como la ingeniería y la economía; además, mencionan la flexibilidad de esta disciplina para modelar situaciones reales. Programas de maestría y doctorado nacionales e internacionales en diversas disciplinas como la ingeniería, economía, estadística, finanzas, etc. requieren una formación bastante elevada en álgebra lineal. Por ejemplo, el programa de doctorado en ingeniería industrial de la Universidad de Columbia en la ciudad de Nueva York tiene como requisito el dominio del álgebra lineal (http://ieor.columbia.edu/phd-industrial-engineering-operations-research), la maestría en economía en la Pontificia Universidad Católica del Perú tiene cursos avanzados de espacios vectoriales y tópicos de álgebra lineal (http://posgrado.pucp.edu.pe/maestrias/ciencias-sociales/economia/), entre otros programas.

Uno de los conceptos más importantes dentro del álgebra lineal es el de espacio generado por un conjunto de vectores. De hecho, casi todos los tópicos del álgebra lineal están relacionados directamente con este concepto. Un espacio vectorial queda definido completamente con un conjunto generador; un conjunto linealmente independiente, para ser base de un espacio vectorial, tiene que ser generador de dicho espacio; las transformaciones lineales quedan totalmente definidas si se conoce su efecto sobre un conjunto generador, etc.

Es difícil pensar en un cimiento más fuerte para el estudio de los espacios vectoriales (es decir, el álgebra lineal) que el entendimiento de los conceptos de dependencia e independencia lineal y de espacio generado. De estos dos, el segundo es el menos estudiado por los investigadores. Por otro lado, cuando es estudiado, los investigadores se centran en la dificultad de visualización de dicho concepto, mas no en la forma de hallarlo. La presente investigación pretende estudiar no solamente la imagen concepto de los alumnos con respecto al espacio generado por un conjunto de vectores, sino la dificultad que tienen para entender los procedimientos para hallarlo; dificultades que pueden involucrar la falta de entendimiento de la notación, la poca distinción entre los diferentes literales utilizados, y el conflicto que les produce la conversión de un sistema de ecuaciones lineales a otro registro de representación.

El concepto de espacio generado es, además, uno de los más difíciles para los estudiantes, tanto por el concepto en sí como por su procedimiento para hallarlo. El concepto de espacio generado presenta un grado de abstracción que los estudiantes considerados en esta investigación no han visto en cursos anteriores de matemática y, en el procedimiento para hallarlo, se necesita usar en simultáneo herramientas que son en sí complicadas para cualquier estudiante (notación de conjuntos, uso de parámetros y variables en una misma ecuación, cambio de representación de un sistema de ecuaciones).

De esta manera, al estudiar los errores y dificultades de los estudiantes en el procedimiento para describir el espacio generado por un conjunto de vectores intervendrán nuevos objetos y conceptos matemáticos que en un principio parecen ajenos al problema principal. Entre ellos, en esta investigación analizaremos el uso de literales, el concepto de solución de un sistema de ecuaciones y los registros de representación de los sistemas de ecuaciones lineales, conceptos que serán útiles para explicar los errores y dificultades de los estudiantes. Como se vio en la sección anterior, existen muchas investigaciones acerca de estos tópicos en particular. Se espera que el presente trabajo contribuya en futuras investigaciones al respecto.

Comprender cuáles son las dificultades que tienen los estudiantes para entender los procedimientos para hallar el espacio generado por un conjunto de vectores será el aporte principal de esta investigación. A partir de ello, se espera que futuros investigadores puedan ver de qué manera prepararlos mejor para el estudio de este concepto tan importante. Adicionalmente, este trabajo servirá de apoyo para investigaciones en los aspectos mencionados líneas arriba.

1.3 Delimitación del problema de investigación

Como se menciona anteriormente, el álgebra lineal es una herramienta fundamental dentro del área de matemática y fuera de ella. El objeto matemático que se estudiará en esta investigación será el de espacio generado y, específicamente, el procedimiento para determinar el espacio generado por un conjunto de vectores de$\mathbb{R}^n$.

En ese sentido, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué errores y dificultades tienen los estudiantes de ingeniería para determinar el espacio por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$?

Se tienen algunas hipótesis acerca de cuáles son los errores más frecuentes en este procedimiento: los estudiantes tienen problemas al convertir los sistemas de ecuaciones lineales de un registro de representación a otro; los estudiantes no comprenden el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales y no distinguen cuándo el sistema tiene o no solución.

Para poder responder la pregunta de investigación, se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo general

Identificar, describir y explicar los errores y dificultades que tienen los estudiantes de ingeniería cuando describen el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$.

Objetivos específicos

- Determinar las prácticas matemáticas necesarias para describir el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$.
- Identificar las prácticas matemáticas necesarias para describir el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$en las que tienen dificultades los estudiantes.
- Determinar y clasificar los errores y dificultades de los estudiantes al describir el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$.
- Explicar los errores y dificultades de los estudiantes al describir el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$.

En el procedimiento para hallar el espacio generado por un conjunto de vectores, se necesitan realizar algunas prácticas de manera secuencial. En los objetivos específicos se busca determinar en qué parte del procedimiento para determinar el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ existe mayor dificultad y explicar por qué se produce.

CAPÍTULO 2 – MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo se presentan y discuten las herramientas teóricas que serán utilizadas a lo largo de la investigación. Primero, es importante definir qué entenderemos por error y dificultad. Luego, se describen herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), el análisis didáctico y las configuraciones epistémicas y cognitivas, que servirán para analizar el procedimiento utilizado para describir el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$. Posteriormente, se discuten algunas definiciones de distintos autores de los tipos de literales usados en matemática. Como se verá posteriormente, el uso de distintos literales es importante en el procedimiento del problema estudiado. Luego, se describe una investigación acerca de los distintos niveles que puede adquirir un estudiante en el manejo del álgebra. Esta investigación servirá para explicar algunas de las dificultades de los estudiantes para resolver el problema en estudio. A continuación, se presentan términos y definiciones de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, que también será utilizada luego para explicar algunas de las dificultades de los estudiantes para describir el espacio generado por un conjunto de vectores. Finalmente, se describe la metodología de la investigación.

2.1. Errores, dificultades y obstáculos

Es importante definir qué se entiende por error, dificultad y obstáculo. Muchos investigadores han propuesto distintas definiciones de estos conceptos. Se mencionarán algunos.

Godino, Batanero y Font (2003) definen error como una práctica del alumno que no es correcta según el punto de vista de una determinada institución. Por otro lado, para ellos, una dificultad está dada por el grado de éxito que tienen los alumnos al enfrentarse a un determinado problema o tarea; la dificultad será mayor en cuanto un número mayor de alumnos cometan errores en el problema o tarea.

El primero en hablar de obstáculo es Bachelard (2000), quien especifica que un obstáculo no es una condición externa que tenga que ver con la complejidad del objeto en estudio ni la debilidad del sujeto para entenderlo. Para él, un obstáculo se produce en el acto mismo de conocer y en la evolución de ese conocimiento.

Brousseau (1998 citado enBarrantes, 2006) adopta esta noción bachelariana y define obstáculo como un conocimiento que tiene un dominio de validez, es decir, que tiene un campo de éxito restringido; en otras palabras, un obstáculo es un conocimiento útil en algunas situaciones, pero que no funciona en otras. Además, son características de un obstáculo que es persistente en el tiempo, reaparece y se resiste a desaparecer. Un obstáculo es un error que no es producto del azar y, de esta manera, se puede predecir. Brousseau, además, clasifica los obstáculos en ontogénicos (tienen que ver con el sujeto), didáctico (tienen que ver con la enseñanza) y epistemológico (tienen que ver con el objeto en estudio).

De igual manera, Godino et al. (2003) utilizan esta definición, pero solo se limitan a decir que un obstáculo es un error que no se produce por una falta de conocimiento, sino por un conocimiento que es válido en unas circunstancias, pero que, en otras, es aplicado incorrectamente. Para ellos, es lógico pensar que si un error se produce de manera sistemática en un grupo de alumnos en un determinado ejercicio, la causa debe estar escondida en el objeto de estudio en sí y no en los estudiantes.

Otros autores, como Glaeser (1981 citado en Cid, 2000), quien hizo un estudio acerca de los obstáculos en el estudio de los números negativos, consideran innecesario precisar el concepto de obstáculo, y lo confunden simplemente con una dificultad, una traba o un síntoma.

En la presente investigación, se tomarán las definiciones de Godino et al. (2003);es decir,

- Error: práctica no válida según el punto de vista de una institución.
- Dificultad: indica el grado de éxito en una tarea determinada. El índice de dificultad es el porcentaje de respuestas incorrectas en dicha tarea (cuanto mayor sea este índice, mayor será la dificultad).
- Obstáculo: Conocimiento que es válido en algunas situaciones pero que falla en otras (es en las que falla en las que se le llama obstáculo).

2.2. Incógnitas, constantes, parámetros y variables

En el procedimiento para describir el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ se utilizan distintos tipos de literales. En todos los casos, los literales representan números reales, pero se dicen distintos porque tienen usos considerablemente diferentes y, por lo tanto, el tratamiento que se les dé debe serlo también.

Es una práctica común llamar variable a estos literales, independientemente de su naturaleza. No es que esta práctica esté equivocada, pero existen otras posturas al respecto; sin embargo, no hay una convención acerca de cómo deben llamarse los literales, dependiendo del uso que se les dé. Para el mismo término *variable* no hay una definición única y aceptada por toda la comunidad matemática. Por ejemplo, Schoenfeld (1988) recoge 10 definiciones distintas del término *variable* e indica que esa lista es solo una muestra, que podría ser expandida. Muchos autores han dado distintas definiciones o formas de entender los literales en matemática y aquí describiremos algunas de estas posturas.

Collis (1975 citado en Küchemann, 1978) define seis niveles que describen diferentes maneras en las cuales pueden ser usados los literales:

- Letra evaluada: se encuentran en este nivel las personas capaces de visualizar una letra como un valor numérico específico y pueden reemplazar dicha letra por ese valor. Una persona que domina este nivel, es capaz de responder preguntas como: "Si $a - 3 = 4$, ¿cuánto es a?". Aquí basta con reemplazar valores para a hasta dar con el valor correcto, no es necesaria una manipulación algebraica.

- Letra ignorada: alcanzan este nivel aquellos que puedan comparar expresiones sin considerar términos que son comunes y que no afectan la comparación. La siguiente pregunta puede ser contestada por personas en este nivel: "¿Cuál es mayor, $n + 6$ o $n - 7$?".

- Letra como objeto: en este nivel, uno es capaz de conceptualizar que el valor numérico que representa una letra tiene un significado mayor porque representa algún tipo de magnitud. Es el caso, por ejemplo, de cuando b y h representan la base y la altura de un triángulo o de cuando, en un problema contextualizado, se plantea que A es la edad de Antonio y P es la edad de Pedro. Enfedaque (1990) propone la pregunta “una manzana cuesta 6 pesetas y una pera 8 pesetas. Si m es el número de manzanas y p el número de peras compradas, ¿qué representa la expresión $6m + 8p$?”. Él muestra en su estudio que muchos alumnos contestan que la expresión representa 6 manzanas + 8 peras; es claro que estos alumnos no han alcanzado el nivel de letra como objeto.

- Letra como incógnita específica: en este nivel, uno considera a las letras como un número específico, pero desconocido, el cual pueden manipular. Por ejemplo, una persona en este nivel puede resolver una ecuación de una variable e interpretar sus soluciones.

- Letra como número generalizado: quien se encuentre en este nivel puede considerar a la letra como que puede tomar distintos valores dentro de un conjunto, no solo uno, como en la pregunta “qué se puede decir acerca de c si $c + d = 10$ y $c < d$”.

- Letra como variable: es el máximo nivel que considera Collis (1975 citado en Küchemann, 1978). Aquí, además de considerar que la letra puede tomar diversos valores, se establece una relación entre los valores que toma la letra y los valores que toma otra letra o una expresión que depende de la letra. La pregunta “¿cuánto aumenta m si aumentamos 2 a n en la expresión $m = 4n + 1$?” no puede ser contestada si no se tiene el concepto de letra como variable.

Enfedaque (1990) corrobora los resultados de Küchemann con un grupo de estudiantes, pero realiza su análisis desde una perspectiva distinta. En cada pregunta, analiza las respuestas y verifica en qué nivel de los seis definidos se encuentra el estudiante según como contestó. Por ejemplo, en la pregunta “si $e + f = 8$, entonces $e + f + g$………”, que requiere el nivel de letra ignorada para ser contestada, un porcentaje alto de estudiantes que contestaron incorrectamente consideraron el valor de cada letra como 4, con lo cual dieron como respuesta 12. A estos estudiantes los calificó como que se encuentran en el nivel de letra evaluada, debido a que consideran que las letras tienen un valor específico y ya definido.

Por otro lado, Ursini (1994 citado en Juárez, 2011) define tres usos de variables en matemática en un modelo al que denominan 3UV. Considera a las variables como incógnita, como número generalizado o como parte de una relación funcional. Nótese que para cualquiera de estos tres usos de los literales, usa el término variable.

Las definiciones que más se acercan a lo que se necesita para esta investigación son las propuestas por Ely y Adams (2012). Ellos definen cuatro términos: incógnita, variable, *placeholder*[3] y número generalizado, y recalcan que estos términos no son exhaustivos, pero sirven para describir varios usos de los literales en mátematica. Las definiciones que dan se presentan a continuación:

- Incógnita: Se usa este término para describir cuándo una letra representa una cantidad específica que puede ser determinada por la información brindada, aun cuando, de momento, no se sepa cuál es el valor de dicha cantidad. Con este sentido, una incógnita siempre aparece en una ecuación, no simplemente en una expresión. La incógnita puede representar más de un valor, como en la ecuación $x^2 + 5x - 6 = 0$, donde la incógnita es x y representa dos valores, – 6 y 1.

- Variable: Para definir el término variable, mantienen el uso dado por Collis (1975 citado en Küchemann, 1978), y dicen que una letra es usada como variable cuando representa un conjunto de valores y se puede establecer una relación sistemática entre dos conjuntos de este tipo. Además, describen dos características esenciales que tienen las variables: 1) una variable es indeterminada, a diferencia de la incógnita, que es determinada, lo que significa que la variable puede tomar cualquier valor de un conjunto de valores (usualmente el conjunto es relativamente grande); y 2) cuando *varía* la cantidad representada por una variable, lo hace de forma conjunta con otra cantidad, que podría, o no, estar representada por otra variable (se dice que las dos cantidades covarían). Una variable puede aparecer en una ecuación, como $y = 3x - 1$, donde las variables son x y y, y al tomar una de ellas un valor específico, la otra queda determinada por la ecuación resultante y, de este modo, se convierte en incógnita. Las variables también aparecen en relaciones funcionales, como $f(x) = x^2 + 1$, donde la *variación* de la variable x implica una variación de la función f. La relación funcional incluso puede darse de una forma menos explícita, como en la expresión “si sus ventas ascienden a x nuevos soles, recibirá una comisión de $0{,}10x$nuevos

[3] El término *placeholder* se traduce de forma literal como marcador de posición. En este trabajo, se utilizará el término *placeholder*, sin traducción al castellano, porque se piensa que esta traducción literal no es tan buena y pierde riqueza el significado.

soles". Debe notarse que la letra x en una expresión de la forma $3x$, sin una igualdad o significado contextual, no funciona como variable según esta definición, a menos que esta expresión forme parte de algún tipo de relación en donde una cantidad que varía está representada en términos de otra.

- *Placeholder*: los autores definen *placeholder*como una letra que representa a un número que será proporcionado en una segunda instancia en una situación o problema particular. Es lo que se llama comúnmente constante y, en algunos casos, parámetro o coeficiente. Ambos, variable y *placeholder*, son indeterminados, pero la diferencia es la siguiente. Con la variable se espera que una vez que se define un valor para ella, este define un valor para otra variable o expresión con la que la primera covaría. En cambio, cuando se trabaja con parámetros, se entiende que una vez definido un valor para estos, queda determinada una nueva ecuación, función o expresión. Por ejemplo, en la ecuación cuadrática en x, $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales, se entiende que a, b y c funcionan como *placeholders*. Cuando se les dé valores específicos a estos *placeholders*, quedará definida una ecuación cuadrática específica, la cual puede ser distinta si se toman otros valores para los *placeholders*. Vale decir, si $a = 1, b = 3$ y $c = 4$, entonces queda definida la ecuación $x^2 + 3x + 4 = 0$, pero si $a = 2, b = 1$ y $c = 1$, queda definida una ecuación distinta, $2x^2 + x + 1 = 0$.

- Número generalizado: La definición que utilizan Ely y Adams (2012) para número generalizado difiere de la utilizada por Collis (1975 citado en Küchemann, 1978). Para los primeros, números generalizados son las letras que aparecen en una identidad, como por ejemplo, en $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, o en $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

En esta investigación, recogeremos las definiciones propuestas por Ely y Adams (2012) con algunos pequeños cambios, que se dan a continuación.

- Incógnita: El concepto de incógnita se utilizará no solo para ecuaciones de una variable, sino para sistemas de ecuaciones también, independientemente de si el sistema tiene una cantidad finita o infinita de soluciones. De esta forma, llamaremos incógnita a todos los literales sobre los cuales se resuelve una ecuación o sistema de ecuaciones. Esta es una diferencia con respecto a la definición de Ely y Adams (2012). Ellos consideran que en la ecuación $x + y = 5$, x y y son variables, puesto que definen un lugar geométrico y la variación de una de las variables determina una variación en la otra; nosotros, en cambio, les llamaremos incógnitas siempre que esa ecuación se considere como parte de un sistema de ecuaciones, donde x y $y$son los literales sobre los cuales se resuelve el sistema (sistema de una ecuación con dos incógnitas en este caso). Justificamos este cambio porque de la manera planteada por Ely y Adams (2012) no se puede determinar a priori si en el sistema en x, y y z, $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3z = 2 \end{cases}$, los literales son incógnitas o variables, se necesita resolverlo primero para determinar si el sistema tiene solución única o infinitas soluciones.

- Constante: Este término no está definido explícitamente por Ely y Adams (2012). Entenderemos por constante, un valor fijo y bien definido representado por una letra. Por ejemplo, π, e.

- Variable: Se dirá que son variables los literales utilizados en relaciones funcionales, tal cual lo describen Ely y Adams (2012), salvo por el caso comentado líneas arriba, donde se les llamará incógnitas en lugar de variables. También se les llamará variables a los literales en una ecuación cuando el objetivo no sea resolver la ecuación, sino describir un lugar geométrico o la relación de cambio que guarda una variable con respecto a la otra. Por ejemplo, si la ecuación $x + y = 5$ se usa para describir una recta, entonces a los literales x y y los llamaremos variables.

- Parámetro: Se utilizará este término en lugar de *placeholder*, y se usará con el mismo significado dadopor Ely y Adams (2012), salvo porque ellos incluyen el término constante dentro de esta categoría y nosotros hemos dado una nueva definición para lo que es constante. Godino et al. (2014b) dan una definición muy clara de lo que se entiende por parámetro, equivalente a la que explican Ely y Adams (2012): dicen que un parámetro es un literal que aparece en una expresión con otras variables o incógnitas, de modo que para cada valor que se le asigne al parámetro, se obtiene una función o ecuación. Así, un parámetro se puede entender como una variable de segundo orden. Por ejemplo, la expresión $ax^2 + bx + c = 0$ se puede entender como una representación de la imagen de una función $f : \mathrm{IR}^3 \to E$, donde E es el conjunto de todas las ecuaciones cuadráticas con coeficientes reales (f asigna a cada triada $(a; b; c)$ una única ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$). En este caso, las variables de la función, a, b y c, son las que llamamos parámetros, donde, para cada triada de valores de estos parámetros, se tiene una ecuación cuadrática. Cabe resaltar que x funciona como incógnita en esta expresión. Lo mismo ocurre en una expresión de la forma $f(x) = ax$, que puede entenderse no como una función, sino como una familia de funciones, donde la regla de correspondencia de cada función queda definida por el valor del parámetro a; es decir, se aprecia una relación funcional que asigna a cada valor del parámetro a una única función de la forma $f(x) = ax$. En este caso, x funciona como variable de las funciones.

- Número generalizado: Se utilizará este término exactamente de la misma manera como lo definen Ely y Adams (2012).

Nótese que cuando se da un tratamiento a una expresión con parámetros, estos se manipulan como si fueran constantes, pero arbitrarias.

Hay que tomar en cuenta lo ligera que es la línea que separa estas definiciones. Por ejemplo, en la expresión $m = 3x + 5$, ¿es m una incógnita, una constante, una variable o un parámetro? La respuesta depende de cómo se entiende o utiliza la expresión. Si lo que se quiere expresar es la relación funcional entre m y x, o quizás graficar la relación entre ellas en un plano cartesiano, entonces tanto m como x son variables. Si se entiende que esta es una ecuación en m y x, ambas se llaman incógnitas. Si la expresión representa una ecuación con solo una incógnita x, donde m es un número fijo (por ejemplo, si se sabe desde un principio que $m = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$), entonces m es una constante. Por último, si la expresión quiere hacer referencia a una familia de ecuaciones con incógnita x, entonces m se llamaría parámetro. Es decir, depende del contexto matemático en el que se emplea la expresión.

Además, un literal puede cambiar de categoría más de una vez a lo largo de un mismo ejercicio. Para mostrar esto, consideremos el siguiente problema: dada la parábola $y^2 = 4x$, encuentre una ecuación para la circunferencia tangente a la parábola en el punto $(1;\ 2)$ y con centro en el eje x (véase figura 1). Para resolver este problema, tomamos $(a;\ 0)$ como el centro de la circunferencia.
Luego, la ecuación de la circunferencia es $(x - a)^2 + y^2 = (a - 1)^2 + 4$.

(Aquí, x y y son variables, describen un lugar geométrico; y a funciona como parámetro)

Ahora, los puntos de la forma $(x; y)$ que estén en la parábola y en la circunferencia, satisfacen ambas ecuaciones. Si queremos encontrar dichos puntos, debemos resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y^2 = 4x \\ (x-a)^2 + y^2 = (a-1)^2 + 4 \end{cases}$ para x y y.

(En este sistema, x y y son incógnitas, a sigue siendo un parámetro)

Si reemplazamos y^2 de la primera ecuación en la segunda, se obtiene $(x-a)^2 + 4x = (a-1)^2 + 4$. Si se efectúan las potencias y se simplifica, se llega a la ecuación equivalente $x^2 + (4-2a)x + 2a - 5 = 0$. Esta ecuación cuadrática en x debe tener una sola solución, porque la circunferencia es tangente a la parábola; entonces, el discriminante, que es $4a^2 - 24a + 36$, debe ser cero. Se tiene entonces la ecuación $4a^2 - 24a + 36 = 0$.

(En esta ecuación, a es la incógnita)

Luego de resolver esta ecuación, se tiene $a = 3$. Finalmente, la ecuación de la circunferencia es $(x-3)^2 + y^2 = 8$.

(En la respuesta, x y y retoman su categoría de variables)

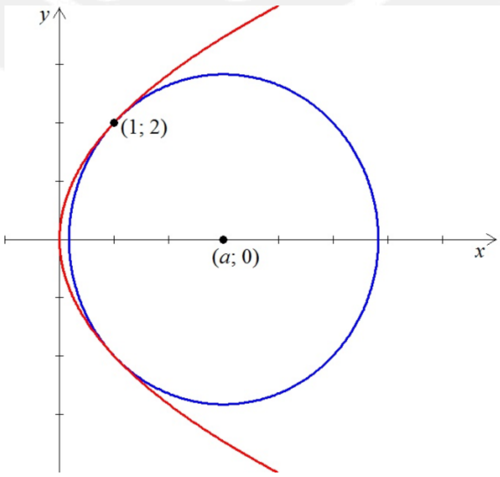


Figura 1

2.3. Niveles de algebrización

Godino, Aké y Gonzato y Wilhelmi (2014a) y Godino et al. (2014b) definieron 6 niveles que pueden alcanzar las personas en su actividad algebraica; les llaman niveles de algebrización. Los primeros cuatro investigadores desarrollaron los 3 primeros niveles y, los segundos, los niveles 4, 5 y 6. Además, Godino et al. (2014a) se preocuparon por definir la ausencia de pensamiento algebraico, a lo cual le asignaron el nivel 0 de algebrización.

Esta clasificación ayudará en este estudio a explicar el porqué de algunos de los errores de los estudiantes al describir el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$, lo cual es uno de los objetivos de esta investigación.

Los investigadores mencionados tomaron en cuenta los siguientes criterios básicos para definir los niveles de algebrización:

> 1. Generalización. Generación o inferencia de intensivos.
> 2. Unitarización. Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.
> 3. Formalización y ostensión. Nombramiento mediante expresiones simbólico-literales.
> 4. Transformación. Utilización de los objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones. (Godino et al., 2014a, p. 8)

2.3.1. Nivel 0 de algebrización

Este nivel representa la ausencia de pensamiento algebraico del estudiante. Godino et al. (2014a) proponen una regla para describir una actividad matemática de nivel 0:

> Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización. (p. 9)

Por ejemplo, se plantea el siguiente problema: Juan tiene 3 canicas más que Pedro. Entre ambos tienen 11 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan?

Un alumno puede razonar del siguiente modo: Si le quito 3 canicas a Juan, tendría igual número de canicas que Pedro y ambos tendrían $11 - 3 = 8$ canicas. De ser así, cada uno tendría 4 canicas. Como le habíamos quitado 3 a Juan, este en realidad tiene $4 + 3 = 7$ canicas.

Si bien el alumno resuelve el problema de una manera muy eficaz, no hay rasgos de pensamiento algebraico; se le asigna nivel 0 de algebrización a esa práctica.

2.3.2. Nivel 1 de algebrización (nivel incipiente)

Godino et al. (2014a) definen el nivel 1 de algebrización mediante la siguiente regla:

> Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal. (p. 10)

Por ejemplo, consideremos el problema: Raúl compra una manzana, dos peras y tres plátanos en un puesto de frutas por 5 nuevos soles. Otro día, en el mismo puesto, compra una manzana y tres plátanos por 3 nuevos soles. ¿Cuánto cuesta cada pera?

Para resolver este problema, un alumno puede emplear el siguiente razonamiento: Si al precio de una manzana, dos peras y tres plátanos, que es 5 nuevos soles, le quito el precio de una manzana y tres plátanos, que es 3 nuevos soles, me queda el precio de dos peras; es decir $5 - 3 = 2$ soles es el precio de dos peras. Luego, cada pera cuesta un nuevo sol.

Al razonamiento empleado se le puede asignar el nivel 1 de algebrización. La resolución involucra que se utilicen y se hagan explícitos objetos intensivos. Se advierte que el precio de una manzana y tres plátanos es de 3 nuevos soles y se generaliza para utilizar esa información en otra situación.

2.3.3. Nivel 2 de algebrización (nivel intermedio)

Este nivel es definido por la siguiente regla por Godino et al. (2014a):

> Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $\mathrm{Ax} \pm \mathrm{B} = \mathrm{C}$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión. (p. 12)

Consideremos el problema planteado en la sección correspondiente al nivel 0 de algebrización (Juan tiene 3 canicas más que Pedro. Entre ambos tienen 11 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan?).

El razonamiento puede ser el siguiente: Sea x el número de canicas de Juan; entonces el número de canicas de Pedro es $x - 3$. Luego, ambos tienen $2x - 3$ canicas. Entonces, $2x - 3 = 11$, o bien, $x = 7$. Juan tiene 7 canicas.

A este razonamiento se le asigna el nivel 2 de algebrización. La cantidad desconocida es representada mediante una incógnita y se plantea una ecuación de la forma $Ax + B = C$.

2.3.4. Nivel 3 de algebrización (nivel consolidado)

Este nivel es descrito por Godino et al. (2014a) de la siguiente forma:

> Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Tomemos como ejemplo nuevamente el problema de la sección 2.3.3 (Juan tiene 3 canicas más que Pedro. Entre ambos tienen 11 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan?). La siguiente resolución del problema supone un nivel consolidado (nivel 3) de algebrización: Sea x el número de canicas que tiene Juan y y el número de canicas de Pedro. Entonces, $x = y + 3$ y $x + y = 11$. Si se sustituye la primera ecuación en la segunda, se tiene $y + 3 + y = 11$, de donde se obtiene $2y = 8$, o bien, $y = 4$. Si se sustituye este valor en la primera ecuación, se obtiene $x = 7$. Juan tiene 7 canicas.

A esta práctica se le asigna el nivel 3 porque se han planteado ecuaciones de forma simbólica (objetos intensivos representados de manera simbólica) y se aplican transfomaciones (sustitución de una ecuación en otra) que conservan la equivalencia de las cantidades.

2.3.5. Nivel 4 de algebrización (uso de parámetros)

Godino et al. (2014b) consideran que hay un mayor grado de pensamiento algebraico (con respecto a los anteriores niveles) cuando un estudiante utiliza parámetros para expresar familias de ecuaciones o funciones. El nivel 4 de algebrización está caracterizado por un "primer encuentro" con este tipo de literales, en donde además se asigne un dominio y un rango a la "función paramétrica" (la función que asigna una ecuación o función específicas a cada valor del parámetro o parámetros).

Como ejemplo, un alumno que alcance este nivel de pensamiento algebraico podría afirmar que las familias de funciones $A = \{f(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} / c_1,\ c_2 \in \Re\}$ y $B = \{f(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^x / c_1,\ c_2,\ c_3 \in \Re\}$ son iguales mediante el siguiente argumento: cada elemento de la familia A, $f(x) = ae^x + be^{-x}$, está en la familia B (basta tomar $c_1 = a,\ c_2 = b\ y\ c_3 = 0$); cada elemento de la familia B, $f(x) = ae^x + be^{-x} + ce^x$, está en la familia A (basta tomar $c_1 = a + c,\ c_2 = b$).

2.3.6. Nivel 5 de algebrización (tratamiento de parámetros)

Según Godino et al. (2014b) existe un nivel de algebrización mayor cuando se hacen cálculos en expresiones que involucran parámetros. Definen a esta práctica como nivel 5 de algebrización.

Como ejemplo, al final del apartado 2.2 de nuestro estudio, en donde se describen los tipos de literales usados en matemática (incógnitas, constantes, parámetros y variables), se resuelve un problema y se llega a la siguiente ecuación en x: $x^2 + (4 - 2a)x + 2a - 5 = 0$. En esta ecuación, a hace las veces de parámetro. En la resolución del problema, además, se argumenta que la ecuación tiene una sola solución y, por lo tanto, el discriminante debe ser cero. Así se llega a la ecuación en a: $4a^2 - 24a + 36 = 0$, que luego se resuelve para encontrar que $a = 3$. Esta práctica involucra no solamente la aparición de parámetros, sino su uso y tratamiento en operaciones de cálculo, distinguiéndolos de los otros tipos de literales presentes y requiere, por lo tanto, un nivel mayor de razonamiento algebraico.

Godino et al. (2014b) también muestran un ejemplo de este nivel de razonamiento: la obtención de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
& ax^2+bx+c=0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(x-\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
\Leftrightarrow\quad & x-\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\
\Leftrightarrow\quad & x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

2.3.7. Nivel 6 de algebrización (estructuras algebraicas)

Este nivel corresponde al uso de estructuras algebraicas como espacios vectoriales, grupos, anillos, etc. Para dar un ejemplo de esta práctica, veremos como incluso otras ramas de las matemáticas se pueden "algebrizar" y trabajar mediante estructuras algebraicas. Según Aroca, J., Fernández, M. y Ortiz, M. (2013), una geometría de incidencia se puede definir de la siguiente manera:

> Partimos de un par $(\mathcal{X},\mathcal{R})$, donde $\mathcal{X}$ es un conjunto a cuyos elementos llamaremos *puntos*, y $\mathcal{R}$ un conjunto de subconjuntos de $\mathcal{X}$, a cuyos elementos llamaremos *rectas*.
> Si P es un punto, r una recta y $P\in r$, diremos que el punto P está en la recta r, o que la recta *$r$pasa por el punto P*; en caso contrario diremos que el punto P es *exterior* a la recta r. Si varios puntos están contenidos en una misma recta, diremos que son *puntos alineados*, y si varias rectas pasan por un punto, diremos que *son rectas concurrentes*.
> *Una* geometría de incidencia es *un par*$(\mathcal{X},\mathcal{R})$*tal que*:
> I.- *Por cada par de puntos distintos pasa una única recta.*
> II.- *Cada recta contiene al menos dos puntos.*
> III.- *Existen tres puntos no alineados.* (p. 5)

Aquí se está definiendo a qué se le debe llamar geometría de incidencia. Este es un claro ejemplo de una estructura algebraica y también debe ser claro que la abstracción necesaria para trabajar con estas estructuras requiere un nivel de razonamiento mayor que el de los cinco niveles antes descritos.

2.4. Teoría de Registros de Representación Semiótica

Según Duval (2004) los objetos matemáticos no son accesibles directamente por la percepción y para acceder a ellos es necesario utilizar alguna representación de dichos objetos. Además, afirma que una persona no puede comprender las matemáticas si no distingue un objeto de su representación.

Este investigador, desarrolla una teoría, la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), e introduce algunos términos:

- Representaciones mentales: son los conceptos o imágenes que un sujeto tiene con respecto a determinado objeto o situación.
- Representaciones semióticas: sonlos medios por los cuales un sujeto exterioriza y hace tangible sus representaciones mentales.

Además, la TRRS presenta los siguientes supuestos:

- Solo si se distingue un objeto de su representación puede haber comprensión en matemática.
- Es mediante diversas formas de representación semiótica que se puede acceder o representar al conocimiento matemático. Este uso de representaciones semióticas es esencial en matemática, en donde, a diferencia de otras ciencias como física, astrología, ciencias sociales, etc., no existen otras maneras de acceder a las representaciones mentales de los objetos matemáticos.
- El cambio de forma de representación semiótica constituye una operación cognitiva básica pero no trivial; la actividad de pasar de un sistema de representación a otro no es evidente ni espontánea para la mayoría de los alumnos.

- Un sujeto demuestra comprensión de un objeto matemático únicamente cuando es capaz de representarlo por más de una forma de representación semiótica. Además, la conversión de una forma de representación a otra debe ser natural, espontánea.

Para Duval (2006), no todo sistema de representación semiótica es un registro de representación semiótica. Para ser considerado registro, en el sistema de representación semiótica se deben poder realizar tres actividades cognitivas: formación, tratamiento y conversión.

- Formación: implica el uso de signos para representar un objeto.

- Tratamiento: es una transformación que se produce en el interior de un mismo registro de representación.

- Conversión: es la transformación que da lugar a un cambio de registro de representación.

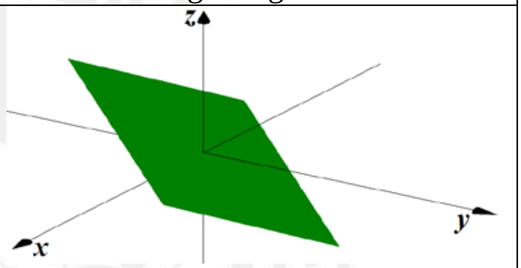
Al final de este apartado, se verán ejemplos de estas actividades cognitivas.

Para Duval existe una dificultad mucho mayor en los estudiantes para realizar una conversión que un tratamiento. Además, afirma que para que exista comprensión de un objeto matemático, el sujeto debe ser capaz de realizar conversiones entre distintos registros de representación de dicho objeto. El investigador afirma que “El problema que la mayoría de estudiantes encuentra es tan profundo que la conversión puede ser considerada como el umbral de la comprensión.” (Duval, 2006, p. 149). Además el mismo autor afirma que se necesita un salto cognitivo para cambiar el registro de representación. A diferencia del tratamiento, no existen reglas ni algoritmos para realizar una conversión.

Es tan grande la importancia de la conversión entre registros de representación que, por ejemplo, para el concepto de función, Janvier (1987 citado en Huapaya, 2006) sustenta que, para que sea integrado, el estudiante debe poder realizar conversiones entre los registros verbal, numérico, gráfico y algebraico de este objeto.

Duval (2004) investiga también la congruencia entre representaciones. Básicamente, afirma que un cambio de registro se considera importante si se pueden realizar tratamientos totalmente diferentes entre un registro y el otro. La dificultad de la conversión entre registros estará determinada por la no congruencia entre el registro original y el de llegada; vale decir, qué tan distintos son los tratamientos entre un registro y el otro.

A continuación, a modo de ejemplo, se muestran algunos registros de representación para el espacio generado por el conjunto $A=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$[4] .

Registro algebraico	Registro gráfico
$\text{gen } A=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in \mathrm{IR}^3 \,/\, -x+y+z=0\right\}$	

En los dos registros presentados se representa el mismo objeto matemático, un plano que pasa por el origen.

A estos sistemas de representación se les puede llamar registros de representación semiótica porque permiten las tres actividades cognitivas que se mencionan líneas arriba: formación, tratamiento y conversión.

La actividad cognitiva de formación se puede apreciar en el registro algebraico, donde se utilizan símbolos y letras para representar a los objetos matemáticos. Un ejemplo de tratamiento podemos darlo también en el registro algebraico, donde se pueden realizar transformaciones para cambiar la forma en que se presenta la ecuación del plano; por ejemplo, se puede sumar x a ambos lados de dicha ecuación, de modo que se obtiene la ecuación equivalente $y+z=x$. Finalmente, fue necesario hacer una conversión para pasar del registro

[4] Para denotar a los vectores de $\mathbb{R}^n$ se utilizarán vectores columna, siguiendo la notación de Poole (2011).

algebraico al gráfico. En los tres casos se representa lo mismo, un plano, que es el espacio generado por los vectores dados.

Para poder explicar algunos de los errores que cometen los estudiantes cuando describen el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ se utilizarán aspectos teóricos y conceptos relativos a la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval.

2.5. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un marco teórico cuyo propósito es articular distintas posturas y teorías de la Didáctica de las Matemáticas, de modo que se tenga una perspectiva global (Godino, 2011). En este enfoque se busca tomar en cuenta las distintas dimensiones que tiene la enseñanza de las matemáticas y sus interacciones. Así, se estudia el proceso de enseñanza-aprendizaje desde los puntos de vista del profesor, estudiantes, contenido y las relaciones que hay entre ellos.

Para desarrollar sus análisis, el EOS proporciona algunas herramientas teóricas y cinco niveles para realizar lo que denominan un análisis didáctico de los procesos de estudio matemático. En esta investigación, se utilizarán las herramientas de configuraciones epistémicas y cognitivas, que servirán para el análisis en los dos primeros niveles propuestos por el EOS. De este modo, se estudiarán los sistemas de prácticas matemáticas requeridas para describir el espacio generado por un conjunto de vectores.

A continuación, se proporcionan algunas definiciones en el marco del EOS:

- Se llama práctica matemática a "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 8).

- Una práctica es significativa si cumple con alguna función en el proceso de resolución de un problema o para su comunicación, validación o generalización.

- Al conjunto de prácticas significativas que se usan para resolver un problema o un conjunto de problemas determinado se le llamará sistema de prácticas (Godino y Batanero, 1994).

- Un objeto o entidad matemática es “todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia” (Godino, 2002).

- Godino, Batanero y Font (2007) definen un conflicto semiótico de la siguiente manera:

> Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales. (p. 15)

D’Amore, Font y Godino, 2007; Font y Contreras, 2008; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009 (citados en Font, Planas y Godino, 2010) proponen 5 niveles para el análisis didáctico:

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4. Identificación del sistema de normas y metanormas.
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Los dos primeros niveles, que son los que competen a la presente investigación, sirven para analizar un problema en particular y determinar cuáles son los objetos y sistemas de prácticas asociados a la resolución de dicho problema. En particular, en nuestra investigación se consideró el problema de describir el espacio generado por un conjunto de vectores y se determinaron los sistemas de prácticas necesarios para resolverlo.

Las herramientas que se utilizaron para el análisis son la configuración epistémica y las configuraciones cognitivas del objeto en estudio. La determinación de la configuraciones requiere la resolución del problema (descripción del espacio generado por un conjunto de vectores) y la descripción, en seis categorías, de los objetos involucrados en dicha resolución. Las categorías son las siguientes:

- Lenguaje: Incluye todas las formas de expresar los objetos utilizados: términos, notaciones, gráficos, símbolos, etc.
- Situaciones: Son los problemas o tareas que inducen la actividad matemática.
- Procedimientos: Son las operaciones, algoritmos, etc. utilizados.
- Conceptos: Son las ideas teóricas y definiciones involucradas.
- Proposiciones: Involucran las propiedades y atributos de los objetos utilizados.
- Argumentaciones: Es lo que se utiliza para justificar las proposiciones (Godino, 2002).

Cuando se describen estas seis categorías para la solución experta (solución dada por la institución) la configuración se llama epistémica. Las descripciones de estas seis categorías para las soluciones dadas por los estudiantes las llamaremos configuraciones cognitivas.

2.6. Metodología de la investigación

Para comprender a qué se deben los errores y dificultades de los estudiantes se plantearon hipótesis que fueron luego contrastadas mediante análisis empíricos. El estudio realizado fue cualitativo y de carácter exploratorio. Se tomó un grupo de estudiantes, mediante una muestra intencional, que rindieron una evaluación y se realizaron entrevistas personales con cada uno de ellos para analizar su proceso en la resolución de problemas relacionados con el objeto matemático en estudio.

El estudio se realizó con alumnos de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), cuyas edades se encuentran entre 18 y 22 años. Se trata de una universidad privada con estudiantes de clase media y media alta, principalmente. Los alumnos que participaron en el estudio son estudiantes de ingeniería que estaban llevando el curso Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal en el ciclo 2014-2. Este curso es de cuarto ciclo, presencial, de 6 horas a la semana (4 de teoría y 2 de práctica); hay 12 secciones y 9 profesores. En el curso, se fomenta el uso de calculadora programable y con CAS (computeralgebraicsystem); todos los estudiantes contaban con la calculadora CasioClassPad 330. La mayoría de estudiantes fueron de sexo masculino, aproximadamente el 70%. El 80% de los estudiantes llevan el curso por primera vez, el resto, lo llevan por segunda o tercera. Para estar cursando Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal, los participantes han llevado previamente un curso de precálculo y dos cursos de cálculo, de una y varias variables.

Se trabajó con un grupo de 28 estudiantes mediante un muestreo intencional, con alumnos de las secciones CI42 e IN41 del curso Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal, dictadas por el investigador. Únicamente fueron convocados para el estudio los estudiantes considerados con nivel de rendimiento académico alto o intermedio por sus resultados en cursos anteriores, prácticas calificadas y participación en clase. No se escogieron estudiantes con notas muy bajas porque se consideró que su razonamiento en estos temas puede ser muy incipiente y podrían no haber aportado mucho al estudio, ya que no responderían a las preguntas planteadas.

Se utilizaron básicamente dos instrumentos: un cuestionario y entrevistas con los estudiantes. Para la elaboración del cuestionario, se hizo un estudio preliminar de los errores que cometen los estudiantes. Para ello se aplicó el primer nivel de análisis didáctico del EOS, en el que se elaboró la configuración epistémica del problema que se deseaba estudiar: la descripción del espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ (véase el Anexo 5). A partir de dicha configuración, se determinaron los objetos matemáticos presentes y las prácticas necesarias para resolver el problema (véase el Anexo 4). Luego, se diseñaron preguntas para comprobar si los estudiantes dominan dichas prácticas matemáticas. Además, gracias a este análisis, se plantearon hipótesis acerca de cuáles serían los errores y dificultades que pueden presentarse en el procedimiento para describir el espacio generado.

El cuestionario contó con seis preguntas (véase Anexo 1); además, las preguntas 5 y 6 constaron de dos partes. Cada pregunta de la prueba tuvo un objetivo específico. Las primeras dos preguntas buscaban determinar si los estudiantes dominan el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales, lo que es indispensable para el éxito en la resolución del problema en estudio, la descripción del espacio generado por un conjunto de vectores. La tercera y cuarta preguntas tuvieron por objetivo comprobar la destreza del alumno en el manejo de distintos tipos de literales, que es una de prácticas matemáticas que se observaron en nuestro análisis; es una pregunta directamente relacionada con una tarea necesaria para realizar el problema en estudio. La quinta pregunta requirió ya del concepto de espacio generado, y demanda todas las habilidades y el manejo de las tareas necesarias para la descripción de un espacio generado, excepto por el uso de parámetros. Por último, en la sexta pregunta se les pidió a los estudiantes que encuentren el espacio generado por un conjunto de vectores. Esta última pregunta involucró todas las prácticas matemáticas necesarias para resolver los ejercicios anteriores. Se entiende que si hay una dificultad en la resolución de los ejercicios anteriores al sexto, también la habría en este último.

Los estudiantes dispusieron de una hora para responder las preguntas de forma individual; no se les permitió utilizar libros ni apuntes de clase pero sí calculadora programable y con CAS.En casi todas las preguntas de la evaluación, los participantes podrían haber necesitado escalonar una matriz por el método de Gauss. Este es un proceso algorítmico que involucra operaciones aritméticas. En algunos casos, estas operaciones involucran cálculos tediosos que pueden conllevar a errores. No es parte de esta investigación estudiar dichos errores de cálculo, puesto que se entiende que no son errores ocasionados por un concepto equivocado, sino errores que se producen al realizar operaciones repetitivas. Para evitar la aparición de estos errores, que pueden alterar los resultados de la investigación, se diseñó un programa, “Echelon”, para calculadora, que realiza el proceso de escalonamiento. Los participantes contaban con una calculadora programable, la CasioClassPad 330, y tenían descargado el programa “Echelon” antes de la realización de la prueba. Para entonces, conocían además su funcionamiento. De esta manera, se esperaba que en la realización de la evaluación, los estudiantes no cometan errores en el proceso de escalonamiento de matrices, si este fuera necesario.

Antes de realizar la experiencia con los estudiantes seleccionados, se hizo una prueba piloto con cinco alumnos que ya han aprobado el curso en ciclos anteriores. Con esta prueba preliminar se pudo ajustar algunas preguntas de la evaluación. En algunos casos, se propusieron ejercicios que requerían menos operaciones pero sin cambiar el tenor de las preguntas. Finalmente, se realizó una triangulación de expertos, las preguntas de la evaluación fueron discutidas con cuatro profesores del curso Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal, quienes consideraron que las preguntas eran apropiadas para medir lo que se buscaba.

Para la aplicación del cuestionario se invitó a los participantes a un aula fuera del horario de clase. Se les repartió el cuestionario y se les dio una hora para que lo resuelvan. En todos los casos, se pidió que las respuestas sean debidamente justificadas por escrito.

Al final de la aplicación de la evaluación, se procedió a una entrevista con cada uno de los estudiantes para conocer cómo es que realizaron sus razonamientos. Se trató de una entrevista abierta, en donde los participantes explicaban el porqué de sus procedimientos, tanto los correctos como los incorrectos.

Luego, se elaboraron las configuraciones cognitivas con las respuestas de los estudiantes y se procedió a compararlas con las configuraciones epistémicas, previamente desarrolladas, de los problemas propuestos.

Finalmente, se realizó una clasificación de los errores y dificultades hallados y una explicación de los mismos, usando las teorías descritas en este capítulo.

CAPÍTULO 3 – ESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES

En este capítulo se presentan las definiciones de los objetos matemáticos involucrados en el estudio, en particular, el espacio generado por un conjunto de vectores. El capítulo comienza con una breve historia del álgebra lineal. Luego, se define un sistema de ecuaciones lineales y se describe un procedimiento para resolver dichos sistemas. Posteriormente, se dan definiciones y ejemplos de los conceptos de espacio vectorial, subespacio vectorial, combinación lineal, independencia lineal y, finalmente, espacio generado.

3.1. Historia del álgebra lineal

Cuando uno piensa en álgebral lineal, inmediatamente se vienen a la cabeza los sistemas de ecuaciones lineales. De hecho, este objeto matemático es fundamental en el álgebra lineal y esta rama de las matemáticas lo estudia a profundidad. Sin embargo, si se le pregunta a un matemático qué es el álgebra lineal, su respuesta será, sin duda: es la rama de las matemáticas que estudia los espacios vectoriales.

Comenzaremos discutiendo los orígenes del estudio de sistemas de ecuaciones para luego describir la evolución del estudio de los espacios vectoriales.

Ya por el año 2000 a.C. los habitantes de Babilonia conocían métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas. Los chinos resolvían sistemas de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas; en su libro "Los nueve capítulos sobre el arte matemático" (una compilación de varios autores de alrededor del año 200 a.C.) se resuelven sistemas de ecuaciones lineales de 3×3 trabajando únicamente con los coeficientes. Hubo un cambio en la forma de estudio de los sistemas de ecuaciones lineales que se originó con la introducción de los determinantes por Gottfried Leibniz en el siglo XVII. En 1750 se publicó "Introducción al análisis de las curvas algebraicas", obra más importante del matemático suizo Gabriel Cramer, en donde se expone la conocida regla que lleva su nombre para resolver sistemas de n ecuaciones lineales en n incógnitas usando determinantes. Euler fue el primero en considerar que para que un sistema de n ecuaciones lineales en n incógnitas tenga solución única debían añadirse algunas condiciones. Tuvo ideas acerca de la dependencia de una ecuación con respecto a las otras, pero no llegó a conclusiones concretas. En el siglo XIX, Carl Friedrich Gauss introdujo un algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones lineales de $m \times n$; el método es conocido como eliminación Gaussiana. (Kleiner, 2007)

Con respecto a los espacios vectoriales, se suele atribuir el origen de este concepto al matemático alemán HermannGrassmann, quien introdujo esta noción, con otro nombre, en 1844. Al parecer, su obra era de muy difícil lectura y no obtuvo la atención que merecía. Sin embargo, el matemático italiano Giuseppe Peano estudió la obra de Grassmann y, en su libro, “CalcoloGeometrico”, publicado en 1888, la clarificó e introdujo los axiomas de un espacio vectorial como los conocemos en la actualidad. Esta definición axiomática propuesta por Peano tuvo poca aceptación por bastante tiempo. Recién en el año 1918, debido a la obra “Space, time, matter” del matemático alemán HermannWeyl, acerca de la teoría de la relatividad general de Einstein, la definición axiomática de espacio vectorial tiene aceptación general. (Poole, 2011)

3.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Se llama sistema de m ecuaciones lineales en las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a una expresión de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

donde a_{ij} y b_i son números reales para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$, y se llaman coeficientes y términos independientes, respectivamente.

Una solución del sistema de ecuaciones es una n-upla de números reales $(p_1;\ p_2; \cdots;\ p_n)$ tal que al sustituir $x_1 = p_1,\ x_2 = p_2, \cdots,\ x_n = p_n$ se verifica cada ecuación del sistema. Se llama conjunto solución al conjunto de todas las soluciones del sistema. Resolver el sistema significa hallar su conjunto solución.

En caso el sistema de ecuaciones lineales tenga al menos una solución, se llama compatible. Caso contrario, se llama incompatible. Los sistemas compatibles se denominan determinados si tienen una única solución, o indeterminados si tienen infinitas soluciones. Se puede probar que si un sistema de ecuaciones lineales tiene más de una solución, entonces tiene infinitas.

Dos sistemas de ecuaciones lineales se denominan equivalentes si tienen el mismo número de incógnitas y las mismas soluciones.

Existes tres operaciones elementales que se pueden efectuar sobre el sistema de ecuaciones de modo que resulte un sistema equivalente. Dichas operaciones son las siguientes:

- Multiplicar una ecuación por un número real distinto de cero
- Intercambiar de posición dos ecuaciones del sistema
- Sumar a una ecuación un múltiplo escalar de otra (sumar a una ecuación el resultado de multiplicar otra por un número real)

La matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ se llamará matriz de coeficientes del sistema (1), y la matriz $\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$, matriz aumentada. Se puede decir que la matriz aumentada es una representación del sistema de ecuaciones lineales (1).

Las mismas operaciones descritas arriba se pueden efectuar en la matriz aumentada, de modo que resulte una matriz que represente un sistema equivalente. Estas operaciones se llaman operaciones elementales por filas:

- Multiplicar una fila por un número real distinto de cero
- Intercambiar de posición dos filas de la matriz
- Sumar a una fila un múltiplo escalar de otra (sumar a una fila el resultado de multiplicar otra por un número real)

Una matriz está en forma escalonada cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- Cualquier fila que consista únicamente de ceros (fila nula) se encuentra en la parte inferior de la matriz.
- En cada fila no nula, el primer elemento distinto de cero (elemento pivote) se encuentra en una columna a la derecha de la de cualquier elemento pivote de una fila superior.

Por ejemplo, las siguientes matrices están en forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

mientras que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ no lo está.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales se puede utilizar el método de Gauss, que consiste en representar el sistema mediante su matriz aumentada y aplicar operaciones elementales por filas para llegar a una matriz que esté en forma escalonada. Luego, se determina el conjunto solución resolviendo desde la última ecuación hasta la primera trabajando una por una.

Sin necesidad de resolver un sistema de ecuaciones lineales, una vez que su matriz aumentada se lleva a su forma escalonada, se pueden hacer inferencias acerca del número de soluciones que tiene el sistema.

En un sistema de ecuaciones lineales ocurre una y sólo una de tres posibilidades siguientes:

1) Que el sistema no tenga solución
2) Que el sistema tenga solución única
3) Que el sistema tenga infinitas soluciones

Solo una de estas tres posibilidades puede ocurrir. Entonces, por ejemplo, no puede suceder que un sistema de ecuaciones lineales tenga exactamente 2 soluciones.

Si el sistema de ecuaciones lineales se representa por su matriz aumentada, y dicha matriz se lleva a su forma escalonada, las tres posibilidades mencionadas arriba se resumen en los siguientes casos:

1) Que el sistema no tenga solución

La única manera de que esto ocurra es que en la forma escalonada aparezcan una o más filas de la forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{array}\right]$, con $c \neq 0$.

Por ejemplo, $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$

2) Que el sistema tenga solución única

Para que ocurra esto, primero, no debe suceder el caso anterior, y segundo, el sistema lineal debe tener igual número de incógnitas que el número de filas no nulas en la forma escalonada de la matriz aumentada.

Por ejemplo, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Aquí, no hay filas de la forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{array}\right]$, con $c \neq 0$. Además, el número de incógnitas es 3 y el número de filas no nulas también es 3. Entonces, hay solución y es única.

3) Que el sistema tenga infinitas soluciones

Para esto, primero, no debe ocurrir el caso 1, y segundo, el sistema lineal debe tener más incógnitas que el número de filas no nulas en la forma escalonada de la matriz aumentada.

Por ejemplo, $\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Aquí, no hay filas de la forma $\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{array}\right]$, con $c \neq 0$. Además, el número de incógnitas es 3, mientras que el número de filas no nulas es 2. Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones.

3.3. Espacios vectoriales, independencia lineal, espacio generado

Los vectores tienen muchas aplicaciones en geometría, física, mecánica, etc. Los vectores cuentan con operaciones bien definidas; en particular, la adición de dos vectores y el producto de un vector por un número real. Además, también se pueden demostrar algunas propiedades de los vectores con respecto a estas dos operaciones, propiedades como la ley conmutativa ($\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$), la ley asociativa ($(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$) y leyes distributivas ($\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$ y $(\alpha+\beta)\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$), entre otras.

Por otro lado, existen otros objetos matemáticos, familiares a los estudiantes, como las matrices, los polinomios, las funciones, entre otros. Para estos objetos matemáticos también se conocen operaciones de adición y multiplicación por un número real, por ejemplo, la operación de adición entre dos polinomios, $\left(1+3x^2\right)+\left(2x+x^2\right)=1+2x+4x^2$, o la operación de multiplicación de una matriz por un número real, $4\times\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & -12 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$. Estas operaciones tienen las mismas propiedades arriba mencionadas para los vectores. De hecho, existe una gran semejanza entre los conjuntos formados por matrices, polinomios, funciones, entre otros, con el conjunto formado por vectores, en el sentido de que en ambos se definen operaciones de adición y de producto por un número real que satisfacen propiedades idénticas.

Estas propiedades se pueden generalizar a una serie de objetos matemáticos. El concepto de *espacio vectorial* permite tal generalización. Esta generalización consiste en librarnos de la naturaleza concreta de los objetos involucrados sin cambiar las propiedades de las operaciones definidas sobre los objetos.

3.3.1. Espacios vectoriales

Sea V un conjunto no vacío, en donde se definen dos operaciones para sus elementos, llamadas adición y multiplicación por un escalar. La adición de dos elementos $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ se denota por $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y la multiplicación de un elemento $\mathbf{u}\in V$ por un escalar $\alpha\in\mathbb{R}$ se denota por $\alpha\mathbf{u}$. Luego, el conjunto V se llama espacio vectorial real si se cumplen los siguientes axiomas:

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in V$ para todo $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ para todo $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$
4. Existe un elemento $\mathbf{0}\in V$, llamado vector nulo, tal que $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u}\in V$
5. Para cada $\mathbf{u}\in V$, existe un elemento $-\mathbf{u}\in V$ tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$
6. $\alpha\mathbf{u}\in V$ para todo $\mathbf{u}\in V$ y para todo $\alpha\in\mathbb{R}$
7. $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ y para todo $\alpha\in\mathbb{R}$
8. $(\alpha+\beta)\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u}\in V$ y para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
9. $\alpha(\beta\mathbf{u})=(\alpha\beta)\mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u}\in V$ y para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
10. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

A los elementos de un espacio vectorial se les llamará vectores, independientemente de que su naturaleza concreta sea muy diferente de la de los segmentos de línea dirigidos.

Algunos ejemplos de espacios vectoriales:

- $\mathbb{R}^n$: espacio vectorial de las n-uplas ordenadas con las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar como se definen habitualmente. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, la adición y multiplicación por escalar se define del siguiente modo:

  Adición: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$

  Multiplicación por un escalar: $\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$

- $M_{m\times n}$: espacio vectorial de matrices de orden $m\times n$, junto con las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar habitualmente definidas.
- P_n: espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n, junto con las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar habitualmente definidas.
- P: espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales, junto con las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar habitualmente definidas.
- $\mathcal{F}$: espacio vectorial de funciones reales con dominio en $\mathbb{R}$, con las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar habitualmente definidas.

Es fácil demostrar que todos estos conjuntos, con las operaciones definidas sobre ellos, satisfacen los 10 axiomas de los espacios vectoriales. Estas demostraciones se pueden encontrar en Grossman (2008) o Poole (2011), por ejemplo.

3.3.2. Subespacios vectoriales

Sea W un subconjunto no vacío del espacio vectorial V. Si W es en sí mismo un espacio vectorial con las mismas operaciones de adición y multiplicación por escalar definidas en V, entonces se dice que W es un subespacio vectorial de V.

Como ejemplo, según esta definición, se puede ver que P_1 es un subespacio vectorial de P_2, ya que P_1 es un espacio vectorial y es un subconjunto de P_2. De igual modo, se puede ver que P_n es un subespacio vectorial de P_m siempre que $n < m$ y P_n es un subespacio vectorial de P para todo entero positivo n.

El siguiente es un resultado para determinar de forma sencilla si el subconjunto W del espacio vectorial V es, o no, un subespacio vectorial de V:

Sea V un espacio vectorial con vector nulo $\mathbf{0}$ y sea W un subconjunto de V. Luego, W es un subespacio vectorial de V si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

i) $\mathbf{0}\in W$

ii) $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in W$ para todo $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$

iii) $\alpha\mathbf{u}\in W$ para todo $\mathbf{u}\in W$ y para todo $\alpha\in\mathbb{R}$

Se puede probar que los únicos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ son los siguientes:

- El subespacio trivial $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$
- Cualquier recta que pasa por el origen
- $\mathbb{R}^2$

De igual modo, los únicos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ son los siguientes:

- El subespacio trivial $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$
- Cualquier recta que pasa por el origen
- Cualquier plano que pasa por el origen
- $\mathbb{R}^3$

3.3.3. Combinación lineal

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores del espacio vectorial V. Se dice que el vector $\mathbf{v}\in V$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si se puede escribir en la forma

$$\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son números reales.

Así, por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, el vector $\begin{bmatrix} 16 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, puesto que $\begin{bmatrix} 16 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3.3.4. Dependencia e independencia lineal

Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de n vectores de un espacio vectorial V. Si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, no todos cero, tales que

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

entonces, se dice que el conjunto es linealmente dependiente. Caso contrario, se dice que el conjunto es linealmente independiente.

Si el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente dependiente, también se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes. De igual manera, si el conjunto es linealmente independiente, se dice que los vectores son linealmente independientes.

Para determinar si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente también se puede utilizar el siguiente resultado:
Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si y solo si uno de los vectores es combinación lineal de los demás.

Por ejemplo, el conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ es linealmente dependiente. En efecto, se puede verificar que

$$2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Otra forma de verificar que el conjunto es linealmente dependiente es advirtiendo que el tercer vector se puede escribir como combinación lineal de los otros dos:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

También es fácil notar que el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ es linealmente independiente. Basta con advertir que los vectores no son paralelos, es decir, ninguno es múltiplo escalar de otro (ninguno es combinación lineal del otro).

3.3.5. Espacio generado

Sea V un espacio vectorial y $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$. Al conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ se le llama espacio generado por A y se denota $\text{gen}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\})$, o bien, $\text{gen}(A)$. En otras palabras, $\text{gen}\, A = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n / \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{IR}\}$. Si, $V = \text{gen}(A)$, se dice que A es un conjunto generador de V, o bien, que A genera a V.

Por ejemplo, el conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$, puesto que cualquier vector $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de los vectores de A:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por supuesto, no es el único conjunto que genera a $\mathbb{R}^3$, de hecho hay infinitos generadores. Por ejemplo, el conjunto $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ también es un generador de $\mathbb{R}^3$, como se puede apreciar por la siguiente igualdad:

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

No es difícil demostrar que cualquier espacio generado por un conjunto de vectores de un espacio vectorial V es un subespacio vectorial de V y, por ende, es un espacio vectorial en sí mismo (véase Grossman (2008) o Poole (2011), por ejemplo).

La dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ nos ayuda a obtener información acerca del espacio generado por el conjunto.

Un conjunto de tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ genera $\mathbb{R}^3$. Un conjunto de dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ genera un plano que pasa por el origen. Un conjunto unitario linealmente independiente (es decir, un conjunto unitario con un vector distinto del vector nulo) genera una recta que pasa por el origen. El conjunto $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ genera el espacio trivial $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$.

Además, en general, si se tiene un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^3$, basta con determinar cuántos vectores linealmente independientes se pueden tomar de ese conjunto como máximo. Si se pueden tomar tres vectores linealmente independientes, el conjunto generará $\mathbb{R}^3$; si se pueden tomar dos como máximo, el conjunto generará un plano que pasa por el origen; y si se puede tomar uno como máximo, se generará una recta que pasa por el origen.

En $\mathbb{R}^3$ es imposible tener un conjunto con más de tres vectores linealmente independientes. En general, en $\mathbb{R}^n$ no existe un conjunto con más de n vectores linealmente independientes.

Ahora se verán dos ejercicios a modo de ejemplo para ilustrar las definiciones y conceptos de este capítulo.

Ejemplo 1: Sea el conjunto $A=\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}3\\0\\-1\\-2\end{bmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^4$. Describa $\text{gen}(A)$.

El $\text{gen}(A)$ está dado por todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}$ que son una combinación lineal de los vectores de A. Entonces:

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\0\\-1\\-2\end{bmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Se forma el sistema: $\begin{cases}-c_2+3c_3=a\\c_1+c_2=b\\2c_2-c_3=c\\c_1-2c_3=d\end{cases}$

Su matriz aumentada es: $\left[\begin{array}{ccc|c}0&-1&3&a\\1&1&0&b\\0&2&-1&c\\1&0&-2&d\end{array}\right]$

Luego de operar, la forma escalonada queda: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 5 & 2a+c \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c+d \end{array}\right]$.................... (2)

Para determinar el $\text{gen}(A)$, sólo nos interesan los vectores $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ para los cuales la ecuación (1) tiene solución (ya sea una solución o infinitas soluciones). Para que eso ocurra, según el análisis anterior, la matriz dada en (2) no debe tener filas de la forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{array}\right]$, con $c \neq 0$. Entonces se concluye que $a-b+c+d=0$.

Finalmente, $\text{gen}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \text{IR}^4 : a-b+c+d=0 \right\}$.

Ejemplo 2: Determine si el subconjunto $B = \left\{ 1+2x-x^2;\ 3+x-5x^2;\ -1+8x+5x^2 \right\}$ de P_2 es linealmente dependiente o linealmente independiente.

Queremos determinar si existen escalares c_1, c_2, c_3, no todos cero, tales que la combinación lineal de los vectores de B $c_1(1+2x-x^2)+c_2(3+x-5x^2)+c_3(-1+8x+5x^2)$ sea el vector nulo de P_2.

Entonces, se forma la ecuación: $c_1(1+2x-x^2)+c_2(3+x-5x^2)+c_3(-1+8x+5x^2)=0$

Y esta ecuación da lugar al sistema: $\begin{cases} c_1 + 3c_2 - c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 8c_3 = 0 \\ -c_1 - 5c_2 + 5c_3 = 0 \end{cases}$

Su matriz aumentada es: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \\ -1 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right]$

Luego de operar, la forma escalonada queda: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

El sistema tiene más incógnitas que filas no nulas. Entonces, el sistema tiene infinitas soluciones.

Por lo tanto, los escalares c_1, c_2, c_3, no necesariamente son todos cero, y el conjunto B es linealmente dependiente.

CAPÍTULO 4 – EVALUACIÓN, ENTREVISTAS Y ANÁLISIS

Este capítulo explica la experiencia que se realizó para determinar los errores y dificultades de los estudiantes para describir el espacio generado por un conjunto de vectores. En primer lugar, se comenta cómo se realizó la experiencia en sí y, luego, se hace un análisis de los resultados y se describen y explican los errores y dificultades encontrados.

4.1. Resultados del cuestionario y de las entrevistas

Se trabajó con estudiantes de ingeniería de la Univesidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC). Los estudiantes seleccionados llevaban el curso Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal, curso de cuarto ciclo, presencial, de seis horas a la semana. Se trabajó con 28 alumnos con rendimiento medio y alto y con edades entre 18 y 22 años mediante un muestreo intencional.

Como se explicó en la metodología de la investigación, las preguntas de la evaluación fueron diseñadas de forma que ayuden a lograr los objetivos de la investigación. Para resolver cada pregunta, los alumnos debían tener claro algún concepto importante relacionado con el problema principal (determinar el espacio generado por un conjunto de vectores) o bien dominar y entender una parte específica del procedimiento involucrado. Las preguntas de la evaluación se encuentran en el Anexo 1 y sus soluciones se pueden consultar en el Anexo 2.

Las preguntas 1 y 2 estaban diseñadas para medir si los alumnos dominan el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales. En ambas preguntas se presentó un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas e infinitas soluciones. En la primera pregunta, se pedía dos soluciones para el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=3 \end{cases}$; hubo 20 respuestas correctas y 8 incorrectas. Dentro de los alumnos que no contestaron correctamente, 7 pudieron calcular el valor de *x*, que es fijo e igual a –2 para todas las soluciones del sistema; sin embargo no pudieron dar valores para *yyz* para completar una solución del sistema.Cuando fueron entrevistados acerca de por qué no pudieron encontrar dos soluciones del sistema, la respuesta preponderante fue que no se podían hallar los valores de *yyz*. Esto muestra que no tienen claro el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales.

En la pregunta 2 sucedió algo similar. La pregunta consistía en encontrar dos soluciones del sistema en *x*, *y*y*z* representado por la matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Aquí, se necesitaban incluso menos operaciones que en la pregunta 1, y menos estudiantes pudieron responder la pregunta correctamente; hubo 18 respuestas correctas y 10 incorrectas. Dentro de los 10 alumnos que respondieron de forma incorrecta, 4 calcularon *x* y *z* pero no *y*. Los demás estudiantes que contestaron incorrectamente, simplemente dejaron en blanco la pregunta; cuando fueron entrevistados, explicaron que no supieron visualizar el sistema en la forma $\begin{cases} x+0y+z=0 \\ 0x+0y+z=0 \end{cases}$.

Las preguntas 3 y 4 estuvieron diseñadas para evaluar el uso de parámetros en un sistema de ecuaciones lineales, de una manera muy similar a la que se usa en el procedimiento para determinar el espacio generado por un conjunto de vectores. En la pregunta 3 se pedía determinar el valor del parámetro *a* de modo que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y+z=3 \\ -x+4y-5z=a \end{cases}$ tenga solución. Para encontrar el valor de *a*, una manera de proceder es trabajar con la matriz aumentada del sistema y escalonarla, de modo que un sistema equivalente se representa por $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{array}\right]$; de aquí se concluye que para que el sistema tenga solución, *a* debe ser igual a –3. Únicamente 5 alumnos de los 28 contestaron incorrectamente esta pregunta, y todos ellos tuvieron errores operativos (copiaron mal el ejercicio o despejaron mal *a* en la ecuación $a+3=0$).

La pregunta 4 era bastante similar a la 3, salvo por el tratamiento que se da al final para concluir. Se pide que encuentren los valores de los parámetros *a* y *b* de modo que el sistema de ecuaciones en *x*, *y*y*z* $\begin{cases} x+3y-2z=3 \\ 2x-y-z=a \\ x+10y+z=b \end{cases}$ tenga solución. De igual manera, se puede proceder a escalonar la matriz aumentada del sistema, cosa que se llega al sistema equivalente

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & a-6 \\ 0 & 0 & 6 & a+b-9 \end{array}\right]$, de donde se puede concluir que a y b pueden tomar cualquier valor real. De los 28 estudiantes que rindieron la evaluación, 20contestaron incorrectamente esta pregunta. De esos 20 alumnos, 7 respondieron que la relación de los parámetros a y b estaba dada por $a+b-9=6$, donde se aprecia que intentan seguir el mismo procedimiento de la pregunta anterior, donde deben igualar $a+3$ a 0; otros 6 regresaron a la forma no matricial del sistema de ecuaciones y escribieron $\begin{cases} a+b-9=6z \\ a-6=3z-7y \end{cases}$, luego dejaron ahí el ejercicio, sin responder nada, o bien trataron de despejar a y b en términos de *yyz*; el resto simplemente escalonaron y dejaron la pregunta sin contestar, no concluyeron nada. Cuando fueron entrevistados los estudiantes que respondieron incorrectamente, no sabían justificar bien su procedimiento; quienes respondieron $a+b-9=6$, decían que estaban repitiendo el procedimiento anterior, pero no podían explicar por qué estaba bien o mal dicho procedimiento; por otro lado, quienes regresaron a la forma no matricial del sistema, argumentaron que se perdieron con las letras y no sabían qué más hacer.

En las preguntas 5a y 5b se pidió determinar si un vector específico pertenece al espacio generado por tres vectores de $\mathbb{R}^3$. Estos problemas eran bastante similares al problema principal (determinar el espacio generado por un conjunto de vectores), pero para resolverlos no es necesario el uso de parámetros. El objetivo de estas preguntas era analizar un proceso muy similar al del problema principal pero sin uso de parámetros. Los estudiantes no tuvieron gran dificultad para responder estas preguntas. Veintitrés estudiantes contestaron correctamente la pregunta 5a y veintidós la pregunta 5b. Los estudiantes que contestan incorrectamente persisten en el mismo error; por ejemplo, en la pregunta 5b, quienes buscan primero el espacio generado por el conjunto de vectores llegan al sistema equivalente $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & -2 & 2 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & c-a \end{array}\right]$ y luego concluyen que $c-a=1$.

En cuanto a la pregunta 6a, únicamente tres estudiantes la contestaron incorrectamente, de los cuales dos tuvieron error al escalonar la matriz. En esta pregunta se pide encontrar el espacio generado por un conjunto de tres vectores de $\mathbb{R}^3$. Una manera de proceder es considerar un vector arbitrario $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ y determinar qué condición deben cumplir a, b y c para que dicho vector se encuentre en el espacio generado. Como se aprecia en el Anexo 2, este proceder conlleva a un sistema de ecuaciones cuya matriz aumentada es equivalente a $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -5 & 10 & b \\ 0 & 0 & 0 & -2a+b+c \end{array}\right]$, de donde se deduce que para que el vector $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ se encuentre en el espacio generado, se debe cumplir que $-2a+b+c=0$. La buena respuesta de los estudiantes ante esta pregunta se explica porque, antes de la evaluación, se resolvieron preguntas similares en clase. Al ser entrevistados los alumnos, la mayoría no justifica adecuadamente su procedimiento, únicamente se limitan a comentar que si aparece una fila de la forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right]$, entonces k debe ser igual a cero, pero no dan razón de por qué. Es claro que el procedimiento lo hicieron por repetición, de otro modo, no hubieran tenido más dificultad para contestar la pregunta 3, que requiere una habilidad necesaria para responder la 6a.

En la pregunta 6b se pidió exactamente lo mismo que en la 6a, determinar el espacio generado por un conjunto de tres vectores de $\mathbb{R}^3$. Esta vez, sin embargo, si se procede del mismo modo, se obtiene la matriz $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & -1 & -6 & b-2a \\ 0 & 0 & 7 & 2a-2b+c \end{array}\right]$. Hubo 15 estudiantes que contestaron de forma incorrecta. Nuevamente aparecieron los errores donde contestan que $7z=2a-2b+c$ o bien $7=2a-2b+c$; además, hubo 5 estudiantes que obtuvieron la matriz final pero no pudieron dar ninguna conclusión. Cabe resaltar que antes de la evaluación, en clase, se trabajaron algunas preguntas similares a la 6a, y se hizo hincapié en el razonamiento que debían seguir, y cuando se planteó una pregunta como la 6b, no hubo siquiera un alumno que pudiera contestarla correctamente; la mayoría no se aventuraba a dar respuesta, y los que lo hacían caían en los errores arriba descritos.

4.2. Análisis de resultados

En general, los resultados de la evaluación muestran que el error más frecuente es el que cometen los alumnos cuando tienen que concluir a partir de un sistema de ecuaciones en donde aparece una fila de la forma $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & k & f(a_1, a_2, ..., a_n) \end{array}\right]$, donde k es un número real distinto de cero, $a_1, a_2, ..., a_n$ son parámetros cuyos valores determinan si el sistema tiene o no solución y $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ es una expresión en esos parámetros.

Cuando se presentó una situación como la descrita, como en las preguntas 3, 4 y 6, los alumnos que no respondieron correctamente concluyeron de forma mayoritaria y casi exclusiva una de dos cosas: 1) $f(a_1, a_2, ..., a_n) = k$, o bien 2) $f(a_1, a_2, ..., a_n) = kx_m$, donde x_m es la *m*-ésima incógnita del sistema de ecuaciones. Si bien la segunda conclusión es correcta, los alumnos que lo plantearon de ese modo no pudieron avanzar más. Debido a la gran cantidad de alumnos que plantearon $f(a_1, a_2, ..., a_n) = k$, se ve que hay una dificultad relacionada con la representación del sistema de ecuaciones de forma matricial, lo que concuerda con los estudios de Duval (2006), donde se ve explica que el cambio de registro de representación no es un proceso elemental. Los alumnos, cuando tienen el sistema de ecuaciones representado por su matriz aumentada, regresan de forma equivocada al sistema de ecuaciones en su representación habitual. Por otro lado, algunos sí pueden regresar correctamente a la representación habitual del sistema de ecuaciones, y escriben $f(a_1, a_2, ..., a_n) = kx_m$, pero demuestran un pobre entendimiento y manejo de los distintos literales utilizados en esa expresión; no pueden avanzar en su razonamiento y no logran dar una respuesta satisfactoria del ejercicio.

De estos dos problemas registrados, se puede inferir que el uso de parámetros es el que genera mayor dificultad. Por la pregunta 5, se ve que la mayoría de alumnos sí son capaces de manejar distintos registros de representación del sistema de ecuaciones lineales, pero cuando tienen que trabajar con parámetros, como en la pregunta 4 o la 6b, la dificultad aumenta. No se debe dejar de lado la pobre concepción que tienen de lo que es una solución de un sistema de ecuaciones, lo que se evidencia en las preguntas 1 y 2.

Tomando en cuentala definición de Godino et al. (2003), dada en el capítulo 2, una dificultad es un índice que determina el grado de éxito en una tarea determinada. Ese índice se medirá con el porcentaje de respuestas incorrectas en las preguntas del estudio. De esta manera, un mayor porcentaje de respuestas incorrectas significará una mayor dificultad de los estudiantes para resolver la pregunta en cuestión.

El siguiente cuadro muestra el porcentaje de dificultad de los estudiantes en las preguntas de la evaluación que rindieron.

Pregunta	**Porcentaje de dificultad** **(porcentaje de estudiantes que contestaron incorrectamente)**
1	29%
2	36%
3	18%
4	71%
5a	18%
5b	21%
6a	11%
6b	54%

Diremos que la dificultad es alta si más del 50% del número de alumnos contestan incorrectamente una pregunta específica. Si la cantidad de alumnos que contestan incorrectamente es menos del 50% pero más del 25%, la dificultad se llamará moderada. Por último, si es menos del 25%, diremos que la dificultad es leve.

Según el cuadro mostrado, las preguntas que tienen dificultad leve son la 3, 5a, 5b y 6a. Las que tienen dificultad moderada son la 1 y 2. Y las que tienen dificultad alta son la 4 y 6b.

Primero realizaremos el análisis de las preguntas con dificultad leve, luego consideraremos las de dificultad moderada y, finalmente las de dificultad alta. Con respecto a las preguntas con dificultad leve, el éxito de los estudiantes en estas, nos ayuda a descartar partes del proceso para describir el espacio generado por un conjunto de vectores donde no tienen dificultad los estudiantes. La buena respuesta de los estudiantes a las preguntas 5a y 5b nos hace ver que la dificultad más grande no está en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Para contestar correctamente estas dos preguntas, los estudiantes han lidiado con la resolución de un sistema de ecuaciones lineales y lo han hecho exitosamente. Se plantearon dos ejercicios para ver cómo enfrentan los alumnos la resolución de un sistema con infinitas soluciones (pregunta 5a) y la de uno con una sola solución (pregunta 5b). En ambos casos, se puede ver que hay una buena respuesta por parte de los participantes. De hecho, los estudiantes que no tuvieron éxito en esta pregunta trataron de describir primero el espacio generado por el conjunto de vectores y, luego, verificar si el vector dado pertenecía a dicho conjunto.En otras palabras, resolvieron un problema con la dificultad de los ejercicios de la parte 6. Eso también explica por qué hubo más estudiantes que fallaron en la pregunta 5b.Esta pregunta sería "equivalente" a la 6b si es que primero se describe el espacio generado, y como se aprecia en la tabla de arriba, la pregunta 6b tiene una dificultad mucho mayor que la 6a. Entonces, según este análisis, reiteramos que la dificultad más grande que tienen los estudiantes en el procedimiento para describir el espacio generado por un conjunto de vectores no está en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

Los alumnos también contestaron exitosamente las preguntas 3 y 6a. Esta buena respuesta a las preguntas se explica fácilmente porque son ejercicios trabajados en clase y que presentan un proceso algorítmico. Es positivo que se haya corroborado el éxito en estas preguntas porque así se puede verificar que dominan el proceso algorítmico y eso ya no es una dificultad para resolver el problema principal, describir el espacio generado por un conjunto de vectores. Las preguntas 6a y 6b, únicamente difieren en la conclusión, todo el procedimiento es el mismo; entonces, la gran diferencia que hay entre el éxito en las preguntas 6a y la 6b está en la conclusión final.

Las preguntas 1 y 2 tienen dificultad moderada, según los resultados. Para ambas preguntas, no se necesita tener habilidades de cálculo, únicamente se requiere tener claro el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales, lo cual es indispensable para resolver el problema principal: describir el espacio generado por un conjunto de vectores. En la pregunta 1 los alumnos debían encontrar dos soluciones del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=3 \end{cases}$. La mayoría de los estudiantes que no contestaron correctamente, sí lograron calcular el valor de x, el cual es determinado ($x=-2$) y fijo en todas las soluciones del sistema; sin embargo, no consiguieron calcular valores para y y z. Aquí se aprecia una dificultad de los estudiantes relacionada con el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Son capaces de encontrar soluciones siempre y cuando esto involucre un procedimiento algorítmico, como el procedimiento que siguieron para calcular x; sin embargo, cuando tienen varias opciones y no pueden calcular de forma algorítmica un valor determinado, hay una mayor dificultad. No se podía calcular "el valor de y" o "el valor de z" porque ambas incógnitas pueden tomar infinitos valores. Bastaba con dar un valor a una de estas incógnitas y calcular la otra a partir de ese valor.

En la pregunta 2, se pide algo similar, dar dos soluciones para el sistema $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$. En esta pregunta, muchos de los alumnos que contestaron incorrectamente, pudieron calcular x y z (que tienen valores determinados), pero no y (que puede tomar infinitos valores). Aquí se aprecia el mismo problema que en el caso anterior, pueden calcular los valores de las incógnitas siempre y cuando estos sean únicos.

En ambas preguntas,la 1 y la 2, se presenta un sistema de ecuaciones con una ecuación menos que el número de incógnitas. Específicamente, son sistemas de dos ecuaciones con tres incógnitas. Normalmente, los alumnos no tienen problemas para resolver un sistema de ecuaciones lineales que tiene solución única, pero parece que se genera un conflicto semiótico cuando el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

Esta dificultad que presentan los alumnos no es inesperada y ya ha habido intentos de explicarla, como en el estudio realizado por Panizza, Sadovsky y Sessa (1999). Estas investigadoras exploran las dificultades que tienen los estudiantes de secundaria para resolver una ecuación lineal con dos incógnitas. En una pregunta muy similar a la planteada en este estudio, solicitan a un grupo de alumnos de cuarto y quinto de secundaria en la Argentina a dar una solución para la ecuación $3x+2y=7$. El resultado fue que el 90% de los estudiantes no pudieron proponer una sola solución de la ecuación. El 10% que sí dieron solución, lo hicieron de una manera inesperada, agregaron una nueva ecuación al sistema, para así tener un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, con solución única, y poder resolverlo como ya sabían. Mediante dinámicas y entrevistas con los participantes, Panizza et al. (1999) identifican distintasconcepciones y procedimientos de los estudiantes al intentar dar respuesta a la pregunta que les plantearon. Algunas de esas concepciones son las siguientes:

- Consideran que el sistema debe tener una sola solución. La razón: es una ecuación lineal y debe haber un valor para x y otro para y. No conciben la idea de más de una solución.

- Conciben a las letras como números determinados, pero desconocidos, lo que contribuye a su concepción de unicidad en la solución.

- Realizan una sustitución en sí misma. Los alumnos despejan una incógnita de la ecuación y luego sustituyen esa expresión en la misma ecuación. Llegan a expresiones de la forma $0 = 0$ o $y = y$, y luego no saben qué concluir. En este caso, los estudiantes están realizando un tratamiento que conserva el signo de igualdad, pero no conlleva a un sistema equivalente.

Los participantes del presente estudio poseen también algunas de estas concepciones. Se puede apreciar que son capaces de calcular el valor de una incógnita cuando este es determinado, pero cuando puede tomar infinitos valores, no saben qué hacer o efectúan procedimientos que no conducen a nada.

Se entiende, entonces que la dificultad que presentan los estudiantes para resolver las preguntas 1 y 2 de la evaluación del presente estudio tiene que ver con las distintas concepciones mostradas por los investigadores Panizza et al. (1999). Muchos alumnos aún no dominan el concepto de solución de un sistema de ecuaciones, concepto que es necesario para que puedan luego describir el espacio generado por un conjunto de vectores.

Finalmente, analizaremos las preguntas que presentan una dificultad alta, preguntas 4 y 6b. En la pregunta 4, como en todas las preguntas, está involucrada la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. A diferencia de las preguntas 1, 2 y 5, el sistema de ecuaciones contiene parámetros. En el trabajo de los alumnos (véanse las configuraciones cognitivas, Anexo 6) se puede apreciar que el trabajo operativo no les causa dificultad; casi en su totalidad, los estudiantes son capaces de plantear un sistema de ecuaciones lineales, representarlo mediante su matriz aumentada y escalonar dicha matriz. Por los resultados de la evaluación, es claro que la dificultad se presenta en el último paso, cuando tienen que interpretar. En este último paso tienen que lidiar con el sistema $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & a-6 \\ 0 & 0 & 6 & a+b-9 \end{array}\right]$ y determinar los valores de los parámetros a y b para que el sistema tenga solución. Se pueden apreciar dos tipos de errores que cometen los alumnos. El primero, escriben $a+b-9=6$, con lo cual se verifica que los estudiantes no visualizan la matriz como un sistema de ecuaciones y no realizan la conversión (ni en el papel ni de forma mental) de la representación por medio de una matriz aumentada a la representación habitual del sistema de ecuaciones. El número 6 que escriben al lado derecho de la igualdad que plantean lo visualizan como un número aislado y no como el coeficiente de la incógnita z del sistema de ecuaciones. Este error se explica por la dificultad intrínseca que implica el cambio de registro de representación. Como se vio en el capítulo 2, Duval (2006) considera que el cambio de registro de representación no es un proceso elemental y que se necesita un cambio cognitivo significativo para adquirir la habilidad de cambiar el registro de representación.

Además, este error puede considerarse como un obstáculo en el sentido de Godinoet al. (2003) descrito en el capítulo 2, ya que puede ser visto como un conocimiento que funciona en una pregunta como la 3, pero falla en la pregunta 4. La pregunta 3 de la evaluación es casi idéntica a la 4, se pregunta lo mismo y el procedimiento es igual; la única diferencia está en la conclusión final. En la pregunta 3 se llega al sistema $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{array}\right]$, y para que tenga solución se concluye que $a+3=0$. Este procedimiento es repetido por los estudiantes en la pregunta 4. Cuando fueron entrevistados, los alumnos que cometieron este error argumentaron que estaban haciendo lo mismo que en la pregunta 3. Debe tomarse en cuenta que procedimientos similares habían sido desarrollados en clase y, sin embargo, el error persiste.

Hay otro grupo de estudiantes que sí pueden realizar la conversión del sistema representado por su matriz aumentada a la representación habitual del sistema de ecuaciones; sin embargo, luego de realizar dicha conversión, no pueden avanzar más. Llegan al sistema $\begin{cases} a+b-9=6z \\ a-6=3z-7y \end{cases}$ y luego o bien no escriben nada más, o bien intentan despejar a y b en términos de y y z. Debido a esto es que se aprecia la dificultad más grande que tienen los alumnos al resolver esta pregunta: el uso de parámetros. Si se toma en cuenta la respuesta que tienen los participantes ante las preguntas 1 y 5, se puede ver que la mayoría de alumnos sí se pueden enfrentar con éxito ante el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones. La cosa cambia en una pregunta como la 4, donde interviene además el uso y tratamiento de parámetros. No hay una diferencia significativa entre los procedimientos que tienen que realizar los estudiantes para resolver el sistema de ecuaciones que plantean en la pregunta 5, por ejemplo, y en la pregunta 4. ¿Por qué, entonces, tanta diferencia en el éxito que tienen al contestar estas preguntas? El 82% de estudiantes contestaron correctamente la pregunta 5a, mientras que únicamente el 29% lo hicieron en la pregunta 4. La respuesta es que la pregunta 4 requiere el manejo de parámetros. SegúnGodino et al. (2014), visto en el capítulo 2,se pueden presentar 6 niveles de algebrización de la actividad matemática. Para poder enfrentarse a la pregunta 4 de la evaluación, se necesita llegar a uno de los niveles más altos, el nivel 5. Para resolver esta pregunta se requiere no solo plantear un sistema de ecuaciones con parámetros, sino manipularlos y además poder sacar conclusiones tomando en cuenta la naturaleza de estos literales. Los literales a y b que aparecen en la pregunta 4, son llamados parámetros. En efecto, para cada pareja de valores que tomen estos literales, se tendría un nuevo sistema de ecuaciones. El objetivo es, entonces, verificar si el sistema tiene solución para cada pareja de valores que puedan tomar a y b. Para ello, es imposible trabajar una por una con las infinitas parejas de valores que puedan tomar estos literales. En cambio, se trabaja con las letras mismas, a y b, y se entiende que estas letras representan valores fijos, pero arbitrarios. Como se dijo, esta concepción de los literales y, más aún, su manipulación e interpretación representan el penúltimo nivel de algebrización; es decir, no es una actividad algebraica elemental. Es superada únicamente por el sexto nivel, que consiste ya en el manejo de estructuras algebraicas. De esta manera, se explica el por qué los estudiantes encuentran tanta dificultad en una pregunta como esta.

La pregunta 6b lidia con exactamente la misma dificultad que la pregunta 4. Es la segunda pregunta menos contestada del estudio. A pesar de que preguntas similares habían sido trabajadas en clases previas a la evaluación, los estudiantes no tuvieron tan buena respuesta ante esta pregunta como la que tuvieron en la 6a. Este mal resultado nuevamente se explica por la aparición de parámetros y la necesidad de un tratamiento de los mismos. Los alumnos plantean bien el problema y manipulan correctamente la matriz que representa al sistema de ecuaciones para llegar finalmente a la matriz $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & -1 & -6 & b-2a \\ 0 & 0 & 7 & 2a-2b+c \end{array}\right]$ y luego caer en los mismos errores descritos en la pregunta 4.

Esta dificultad en el uso de parámetros también ha sido estudiada por otros investigadores. Por ejemplo, Ely y Adams (2012) afirman que tiene que haber ocurrido un cambio conceptual significativo para que los estudiantes se sientan cómodos con el uso de parámetros en lugar de números en expresiones algebraicas. Además, afirman que ese cambio conceptual también ha sido significativo históricamente e incluso marca el origen del álgebra simbólica. De hecho, el origen de esta disciplina se produce recién en el siglo XVI cuando François Viète propone una nueva práctica, la de representar valores dados en un problema mediante letras que tomen su lugar.

Entonces, los resultados de la evaluación muestran tres tipos de dificultades:

- Dificultades con el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales
- Dificultades con el cambio de registro de representación de un sistema de ecuaciones lineales
- Dificultades con el uso de parámetros

De estas tres, la dificultad más grande es el uso de parámetros. En las preguntas en las que no es necesario el uso de este tipo de literales, los alumnos se desenvuelven mejor y llegan, en su mayoría, a contestar correctamente.

CONCLUSIONES Y APORTES DE LA INVESTIGACIÓN

Conclusiones

En este trabajo de investigación se puede afirmar que se cumplieron los objetivos planteados. Se lograron determinar y describir los errores y dificultades de los estudiantes cuando describen el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$. Además, se pudo dar una explicación de todos los errores y dificultades en base a investigaciones anteriores. Tomando en cuenta el análisis hecho, llegamos a las siguientes conclusiones:

- Se utilizaron los dos primeros niveles del análisis didáctico de los procesos de estudio matemático propuestos por el EOS y se desarrolló la configuración epistémica del tema en estudio (la descripción del espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$). Así, se determinaron las prácticas matemáticas necesarias en el procedimiento general para describir el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$, entre ellas:
  1. Hallar la solución de un sistema de ecuaciones lineales.
  2. Resolver sistemas de ecuaciones lineales, ya sea que estos tengan una única solución, infinitas soluciones o no tengan solución.
  3. Determinar si un vector dado pertenece al espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$.
  4. Trabajar con parámetros en los sistemas de ecuaciones.

- En la investigación se determinó que los alumnos sí tienen dificultades en estas prácticas matemáticas. Teniendo como base la definición de dificultad propuesta por Godino et al. (2003), se elaboró la siguiente clasificación:
  - Dificultad leve: Si entre el 0% y el 25% del número total de alumnos cometen algún error.
  - Dificultad moderada: Si entre el 25% y el 50% del número total de alumnos cometen algún error.
  - Dificultad alta: Si más del 50% del número total de alumnos cometen algún error.

  Tomando en cuenta esta clasificación, se observó que para resolver un sistema de ecuaciones lineales y para determinar si un vector dado pertenece al espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ los alumnos tienen una dificultad leve. En cuanto al manejo del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales, los estudiantes presentaron una dificultad moderada; especialmente, tuvieron dificultad para dar soluciones a un sistema con menos ecuaciones que incógnitas. Por último, quedó claro en el estudio que la mayor dificultad se presentaba en el uso de distintos tipos de literales, específicamente, en el trabajo con parámetros (casi las tres cuartas partes de los estudiantes tuvieron problemas con esta práctica), con lo que se puso de manifiesto un grado de dificultad alto.

- Gracias a que se desagregaron las prácticas matemáticasnecesarias para realizar la descripción del espacio generado por un conjunto de vectores, se pudo observar que la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y el poder determinar si un vector dado pertenece al espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ son prácticas queno generan mayor dificultad en los estudiantes.

- Existen varias razones por las cuales los alumnos presentan dificultades en el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Según las investigaciones de Panizza, Sadovsky y Sessa (1999), los estudiantes tienen distintas concepciones que les impiden llegar a una solución. Por ejemplo, conciben a las letras como números determinados, por lo que consideran que solo puede haber una solución, o bien, en su afán de llegar a "la solución", despejan una incógnita y la sustituyen en la misma ecuación.

- Para explicar la dificultad principal de los alumnos, el uso de parámetros, nos remitimos a la clasificación planteada por Godino et. al. (2014a) y Godino et. al. (2014b), donde definen seis niveles de algebrización de la actividad matemática. El uso de parámetros implica un nivel bastante alto de manejo algebraico según estos investigadores; lo ubican en el nivel 5 y es superado únicamente por el uso de estructuras algebraicas propias del álgebra abstracta. Otros investigadores también ayuda a explicar esta dificultad; por ejemplo, Ely y Adams (2012) realizan un estudio histórico de la evolución del uso de literales en matemática. Afirman que el uso de parámetros marca el origen del álgebra simbólica y que se requirió de un cambio conceptual significativo para esta práctica.

- Se utilizó la Teoría de Registros de Representación Semiótica para explicar un error bastante repetitivo que se producía cuando los estudiantes utilizaban la representación de un sistema de ecuaciones con su matriz aumentada. Específicamente, los estudiantes presentaron dificultades al convertir el sistema representado con su matriz aumentada a su representación habitual. Cabe resaltar que dicho error únicamente se presentó en sistemas que involucraban el uso de parámetros.

- Quedan abiertas las siguientes preguntas para nuevas investigaciones: ¿cómo preparar a los alumnos en secundaria o en cursos anteriores para que dominen el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales?, ¿cómo realizar una propuesta didáctica para que los alumnos distingan los distintos tipos de literales en matemática y puedan trabajar con ellos sin dificultades? ¿Cómo determinar en qué nivel de algebrización se encuentran los estudiantes?

- Se espera que si estas preguntas son contestadas adecuadamente, los alumnos mejoren notablemente su desempeño al momento de describir el espacio generado por un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$.

Aportes de la investigación

En esta investigación, nos hemos enfocado en estudiar un problema específico; sin embargo, en el camino ha sido necesario investigar acercade dificultades en el manejo de distintas prácticas matemáticas, que en un principio podrían haber parecido ajenas al problema de investigación.

- En cuanto al manejo del concepto de solución de un sistema de ecuaciones, se ha corroborado que existen dificultades cuando el sistema tiene más incógnitas que ecuaciones. Panizza et al. (1999) investigaron previamente este problema, pero únicamente con sistemas de una ecuación y dos incógnitas. En nuestro estudio, se ha verificado que esta dificultad se extiende a sistemas más grandes.

- Para realizar el análisis de las dificultades con el uso de literales, se han tomado en consideración las investigaciones de diversos autores y sus definiciones y clasificaciones para los distintos tipos de literales. Se verificó que no existe un consenso acerca de cómo llamarlos y que no hay una definición exhaustiva que abarque todos los tipos de usos. En base a las diversas posturas, se consolidó una con aportes propios. En particular, se hizo la distinción entre constante, incógnita, variable y parámetro. Se espera que la clasificación presentada sea útil como referencia para nuevas investigaciones en ese campo.

- Se ha mostrado que hay una dificultad elevada en el uso de parámetros, que es necesario para muchas prácticas matemáticas, no únicamente la estudiada en este trabajo. Nuevos investigadores que quieran estudiar dichas prácticas, pueden utilizar esta investigación como antecedente o como parte de su marco teórico.

- Esta investigación muestra una postura distinta en el estudio del espacio generado por un conjunto de vectores. La mayoría de investigadores centran su atención en aspectos cognitivos que tienen que ver con las dificultades en el manejo del concepto de espacio generado. En este estudio nos enfocamos en el procedimiento para hallarlo. Se entiende que la descripción del espacio generado por un conjunto de vectores mediante únicamente herramientas conceptuales es aún más complicada; requiere del entendimiento claro de estructuras algebraicas (el tratamiento de estructuras algebraicas se encuentra en el nivel más alto de manejo algebraico, nivel de algebrización 6, según Godino et al. (2014b)).

- De manera más personal, esta investigación ayuda a entender mejor, como docentes, por qué los alumnos cometen tantos errores en el procedimiento para hallar el espacio generado por un conjunto de vectores. En lo posterior, antes de abordar este tema, habrá que reforzar las prácticas matemáticas en donde se ha mostrado que tienen más dificultades los estudiantes.

REFERENCIAS

Aroca, J., Fernández, M. y Ortiz, M. (2013). *Geometría*. Notas de clase: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico*. Buenos Aires: Siglo XXI

Bardini, C., Radford, L. y Sabena, C. (2005). Strugglingwith variables, parameters, and indeterminateobjectsorhowtogoinsane in mathematics. En Chick, H. y Vincent, J. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Groupforthe PMEVol. 2.* (pp. 129-136). Melbourne: PME.

Barrantes, H. (2006). Los obstáculos epistemológicos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Recuperado de http://www.matematicassinaloa.com/Informacion/Documentos/25_Obstaculos%20Epidtemologicos%20Barrantes.pdf

Basurto, E. (2013). Uso de la tecnología digital en la comprensión de parámetros en funciones polinomiales. En A. Ramirez y Y. Morales (Eds.), *Memorias I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. Santo Domingo: CEMACYC.

Benitez, E. (2004). *Los usos de la variable en los libros de texto de matemática para secundaria*. (Tesis de maestría en Matemática Educativa). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México. Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/tesis/maestria2004/Eloisa_Ben_tez.pdf

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de la XV Jornada del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Boletín del SI-IDM, 10.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensam*iento Humano. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006) Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.

Ely, R. y Adams, A. (2012). Unknown, placeholder, or variable: whatis$x$? *MathematicsEducationReserchJournal*,24(1), 19-38.

Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *Suma* 5, 25-28.

Escobar, J. (2014). *Caracterización del razonamiento algebraico elemental de estudiantes de primaria según niveles de algebrización*. (Tesis de maestría en Educación Matemática). Universidad de Medellín, Medellín, Colombia. Recuperado de http://repository.udem.edu.co/bitstream/handle/11407/299/Caracterizaci%C3%B3n%20del%20razonamiento%20algebraico%20elemental%20de%20estudiantes%20de%20primaria%20seg%C3%BAn%20niveles%20de%20algebrizaci%C3%B3n.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). *Modelo para el análisis didáctico en educación matemática*. Infancia y Aprendizaje 33(1), 89-105.

Godino, J. D. (2002), Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza yaprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de losobjetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International JournalonMathematicsEducation*, 39, 127-135.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2014). Levels of algebraicreasoning in primary and secondaryeducation. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/Neto_Godino_CERME9_WGAlgebra.pdf

Grossman, S. (2008). *Álgebra lineal*. México D.F.: McGraw-Hill.

Huapaya Gómez, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Juárez, J. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números*, 76, 83-103.

Kleiner, I. (2007). *A history of abstract algebra*. Toronto: York University.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*,20(2), 65-89.

Küchemann, D. (1978). Children'sunderstanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7(4), 23-26.

Lima, E. (1998). *Álgebra lineal*. Lima: IMCA.

Morales, L. y Díaz, J (2003). Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario. *Mosaicos Matemáticos*,11

Morales, L. y Díaz, J. (2005). El concepto de variable en los libros de texto. En H. Leyva, F. Carrillo y J. Díaz (Eds.), *Publicación de la XV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*. (pp. 39-45). México D.F.: Universidad de Sonora.

Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13(4-II), 373-385.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las ciencias*, 17(3), 453-461.

Parraguez, M. y Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R2 y R3 desde el punto de vista de los modos de pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*,7(1), 1-24.

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal. Una introducción moderna*. México D.F.: Cengagelearning.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13(1), 89-112.

Schoenfeld, A. H. y Arcavi, A. (1988). Onthemeaning of variable. *MathematicsTeacher*, 81(6), 420-427.

Shilov, G. (1977). *Linear algebra*. Nueva York: Dover.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematicswith particular referencetolimits and continuity. *EducationalStudies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias*, 14(3), 351-363.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2004). How do highschoolstudentsinterpretparameters in algebra. En M. Johnsen y International GroupforthePsychology of MathematicsEducation (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Groupforthe PMEVol. 4.* (pp. 361-368). Bergen: PME.

Wawro, M. (2010). Individual and collective analysis of the génesis of student reasoning regarding the invertible matrix theorem in linear algebra. Paper presentado en el *annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* de la *Ohio State University, Columbia.*

Wawro, M., Sweeney, G. y Rabin, J. (2011). Subspace in linear algebra: investigating student's concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics*, 78(1), 1-19.

Wilhelmi, M., Godino, J., Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. Gonzáles, M. Codes, D. Amau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII*.(pp. 573-582). Salamanca: SEIEM.

ANEXO 1 - Evaluación

1. Encuentre dos soluciones distintas del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=3 \end{cases}$.

2. La matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales en x, y, z es $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$.

   Encuentre dos soluciones distintas de dicho sistema.

3. Determine qué valor o valores debe tener el parámetro a para que el sistema de ecuaciones en x, y, z $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y+z=3 \\ -x+4y-5z=a \end{cases}$ tenga solución.

4. Determine qué valor o valores deben tener los parámetros a y b para que el sistema de ecuaciones en x, y, z $\begin{cases} x+3y-2z=3 \\ 2x-y-z=a \\ x+10y+z=b \end{cases}$ tenga solución.

5. Determine si el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$ se encuentra en el espacio generado por los conjuntos:

   a. $A=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}\right\}$

   b. $B=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$

6. Describa el espacio generado por los conjuntos:

   a. $A=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix}\right\}$

   b. $B=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

ANEXO 2 – Solución de la evaluación

Pregunta 1

Para hallar soluciones del sistema de ecuaciones, basta asignar valores a una de las incógnitas, por ejemplo, a z.

Solución 1: Sea $z = 0$; como $y + z = 3$, entonces $y = 3$. Como $x + y + z = 1$, entonces $x + 3 + 0 = 1$, o bien, $x = -2$.

Solución 2: Sea Sea$z = 1$; como $y + z = 3$, entonces $y + 1 = 3$, o bien, $y = 2$. Como $x + y + z = 1$, entonces $x + 2 + 1 = 1$, o bien, $x = -2$.

Luego, dos soluciones del sistema son $x = -2,\ y = 3,\ z = 0$ y $x = -2,\ y = 2,\ z = 1$.

Pregunta 2

El sistema asociado a dicha matriz es $\begin{cases} x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Debido a la segunda ecuación, en cualquier solución del sistema se cumple que $z = 0$. Además, $x + z = 0$, entonces $x + 0 = 0$, o bien, $x = 0$. La incógnita y no aparece en las ecuaciones (o está multiplicada por el coeficiente cero); por lo tanto, las ecuaciones del sistema se satisfacen o no independientemente del valor de y.

Solución 1: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

Solución 2: $x = 0,\ y = 1,\ z = 0$

Pregunta 3

La matriz aumentada del sistema es $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & a \end{array}\right]$. Se escalona mediante operaciones por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & a \end{array}\right] \xrightarrow[f_3+f_1]{f_2-2f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & a+1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3+2f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{array}\right]$$

La última matriz representa un sistema equivalente al primero. El sistema tiene solución si y solo si $a+3=0$, o bien, $a=-3$.

Pregunta 4

La matriz aumentada del sistema es $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & a \\ 1 & 10 & 1 & b \end{array}\right]$. Se escalona mediante operaciones por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & a \\ 1 & 10 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-2f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & a-6 \\ 0 & 7 & 3 & b-3 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3+f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & a-6 \\ 0 & 0 & 6 & a+b-9 \end{array}\right]$$

La última matriz representa a un sistema equivalente al primero; de ahí se puede concluir que el sistema siempre tiene solución, independientemente de los valores de a y b.

Entonces, el sistema tiene solución para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$.

Pregunta 5a

El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix} \in \operatorname{gen} A$ si y solo si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que:

$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$. Para que se dé la igualdad, debe cumplirse componente a componente, así se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + 0\alpha_2 + 4\alpha_3 = 5 \\ 2\alpha_1 + 0\alpha_2 + 9\alpha_3 = 14 \end{cases}$$

Este sistema tiene por matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 14 \end{array}\right]$. Se escalona usando operaciones por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow[f_2 - f_1]{f_3 - 2f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3 - 3f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La última matriz representa a un sistema equivalente y se ve que sí tiene solución (no aparece una fila de la forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & c \end{array}\right]$, con $c \neq 0$.

Luego, el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$ sí pertenece al espacio generado por A.

Pregunta 5b

El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix} \in \text{gen}\, A$ si y solo si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que:

$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$. Para que se dé la igualdad, debe cumplirse componente a componente, así se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + 0\alpha_2 + 8\alpha_3 = 5 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 14 \end{cases}$$

Este sistema tiene por matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right]$. Se escalona usando operaciones por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow[f_2-2f_1]{f_3-f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right]$$

La última matriz representa a un sistema equivalente y se ve que sí tiene solución (no aparece una fila de la forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & c \end{array}\right]$, con $c \neq 0$.

Luego, el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$ sí pertenece al espacio generado por B.

Pregunta 6a

El vector $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \text{gen}\, A$ si y solo si existen escalares $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \in \mathbb{R}$ tales que:

$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Esta igualdad es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ -5\alpha_2 + 10\alpha_3 = b \\ 2\alpha_1 + 7\alpha_2 - 8\alpha_3 = c \end{cases}$$

Este sistema tiene por matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & -5 & 10 & b \\ 2 & 7 & -8 & c \end{array}\right]$. Se escalona usando operaciones por filas.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -5 & 10 & b \\ 2 & 7 & -8 & c \end{array}\right] \xrightarrow{f_3-2f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & -5 & 10 & b \\ 0 & 5 & -10 & c-2a \end{array}\right] \xrightarrow{f_3+f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -5 & 10 & b \\ 0 & 0 & 0 & -2a+b+c \end{array}\right]$$

La última matriz representa a un sistema equivalente, y tiene solución si y solo si $-2a+b+c=0$.

Luego, $\operatorname{gen} A = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathrm{IR}^3 / -2a+b+c=0 \right\}$.

Pregunta 6b

El vector $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \operatorname{gen} B$ si y solo si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que:

$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Esta igualdad es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = b \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = c \end{cases}$$

Este sistema tiene por matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$. Se escalona usando operaciones por filas.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow[f_3-2f_1]{f_2-2f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & -1 & -6 & b-2a \\ 0 & -2 & -5 & c-2a \end{array}\right] \xrightarrow{f_3-2f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & -1 & -6 & b-2a \\ 0 & 0 & 7 & 2a-2b+c \end{array}\right].$$

La última matriz representa a un sistema equivalente, y tiene solución para cualquier triada $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$. Luego, $\operatorname{gen} B = \mathbb{R}^3$.

ANEXO 3 – Cuadro de errores en la evaluación

Pregunta 1: 20 respuestas correctas y 8 respuestas incorrectas

Error	Cantidad de alumnos
Calcula x, pero no y ni z	7
No contesta	1

Pregunta 2: 18 respuestas correctas y 10 respuestas incorrectas

Error	Cantidad de alumnos
Calcula x y z, pero no y	2
Solo encuentra la solución trivial $x=0,\ y=0,\ z=0$	2
No contesta	6

Pregunta 3: 23 respuestas correctas y 5 respuestas incorrectas

Error	Cantidad de alumnos
Escalona mal	3
Despeja a incorrectamente	2

Pregunta 4: 8 respuestas correctas y 20 respuestas incorrectas

Error	Cantidad de alumnos
Contesta $\mathrm{a}+\mathrm{b}-9=6$	7
Escribe $a+b-9=6z$ y no concluye	6
Escalona y no concluye	7

Pregunta 5a: 23 respuestas correctas y 5 respuestas incorrectas

Error	Cantidad de alumnos
Determina mal el espacio generado	2
No contesta	2
Escalona mal	1

Pregunta 5b: 22 respuestas correctas y 6 respuestas incorrectas

Error	Cantidad de alumnos
Determina mal el espacio generado	4
Escalona y no concluye	1
No contesta	1

Pregunta 6a: 25 respuestas correctas y 3 respuestas incorrectas

Error	Cantidad de alumnos
Escalona mal	2
No contesta	1

Pregunta 6b: 13 respuestas correctas y 15 respuestas incorrectas

Error	Cantidad de alumnos
Contesta $2a - 2b + c = 7$	5
Contesta $2a - 2b + c = 7z$	4
Escalona y no concluye	5
No contesta	1

ANEXO 4 - Prácticas matemáticas en la evaluación

Pregunta 1: Se asignan valores a una de las incógnitas y se hallan las otras en términos de esos valores.

Pregunta 2: Se asignan valores a una de las incógnitas y se hallan las otras en términos de esos valores.

Pregunta 3: Se representa el sistema mediante su matriz aumentada y se escalona dicha matriz. Luego se analiza si el sistema de ecuaciones lineales tiene solución.

Pregunta 4: Se representa el sistema mediante su matriz aumentada y se escalona dicha matriz. Luego se analiza si el sistema de ecuaciones lineales tiene solución.

Preguntas 5a y 5b: Se plantea una combinación lineal, que conlleva a un sistema de ecuaciones lineales. Se representa el sistema mediante su matriz aumentada, se escalona dicha matriz y se analiza si el sistema tiene o no solución. El vector dado pertenecerá al espacio generado si y solo si el sistema de ecuaciones lineales tiene solución.

Pregunta 6a y 6b: Se plantea una combinación lineal, que conlleva a un sistema de ecuaciones lineales en términos de algunos parámetros. Se representa el sistema mediante su matriz aumentada, se escalona dicha matriz y se analiza cuándo el sistema tiene solución en términos de los parámetros utilizados. El espacio generado dependerá de qué condición deben cumplir los parámetros para que el sistema de ecuaciones lineales tenga solución.

ANEXO 5 - Configuraciones epistémicas

Pregunta 1

Situación problema: Encuentre dos soluciones distintas del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=3 \end{cases}$.

Lenguaje verbal: sistema de ecuaciones, solución.

Lenguaje simbólico: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=3 \end{cases}$

Conceptos: solución de un sistema de ecuaciones.

Procedimientos:

- Sustituir $y+z$ por 3 en la primera ecuación para calcular x.
- Asignar un valor a z.
- Calcular el valor de y para el valor de z asignado.

Argumentación:

- El valor de x es único y se puede calcular.
- Los valores de y y z dependen de una sola ecuación, $y+z=3$, y pueden tomar infinitos valores.

Pregunta 2

Situación problema: La matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales en x, y, z es $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Encuentre dos soluciones distintas de dicho sistema.

Lenguaje verbal: matriz aumentada, sistema de ecuaciones, solución.

Lenguaje simbólico: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$, $\begin{cases} x+z=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Conceptos: solución de un sistema de ecuaciones.

Procedimientos:

- Resolver la segunda ecuación para z.
- Resolver la primera ecuación para x.
- Asignar valores a y.

Argumentación:

- Los valores de x y z son únicos y se pueden calcular. En cambio, y puede tomar cualquier valor.

Pregunta 3

Situación problema: Determine qué valor o valores debe tener el parámetro a para que el sistema de ecuaciones en x, y, z $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y+z=3 \\ -x+4y-5z=a \end{cases}$ tenga solución.

Lenguaje verbal: parámetro, matriz aumentada, sistema de ecuaciones, escalonar, operaciones elementales por filas, sistema equivalente, solución.

Lenguaje simbólico: $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y+z=3 \\ -x+4y-5z=a \end{cases}$, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & a \end{array}\right]$, $\xrightarrow{f_3-2f_1}$.

Conceptos: equivalencia de sistemas de ecuaciones, solución de un sistema de ecuaciones.

Proposición: un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución si y solo si en su forma escalonada por filas aparece una o más filas de la forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{array}\right]$, con $c \neq 0$.

Procedimientos:

- Escribir el sistema de ecuaciones como matriz aumentada.
- Escalonar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.
- Escribir la forma escalonada de la matriz aumentada como un sistema de ecuaciones.
- Determinar si el sistema tiene solución.

Argumentación:

- En el sistema escalonado aparece una fila de la forma $\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & \cdots & 0 & a+3 \end{array}\right]$; por la proposición, para que el sistema tenga solución es necesario y suficiente que $a+3=0$.

Pregunta 4

Situación problema: Determine qué valor o valores deben tener los parámetros a y b para que el sistema de ecuaciones en x, y, z $\begin{cases} x+3y-2z=3 \\ 2x-y-z=a \\ x+10y+z=b \end{cases}$ tenga solución.

Lenguaje verbal: parámetro, matriz aumentada, sistema de ecuaciones, escalonar, operaciones elementales por filas, sistema equivalente, solución.

Lenguaje simbólico: $\begin{cases} x+3y-2z=3 \\ 2x-y-z=a \\ x+10y+z=b \end{cases}$, $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & a \\ 1 & 10 & 1 & b \end{array}\right]$, $\xrightarrow{f_3-2f_1}$.

Conceptos: equivalencia de sistemas de ecuaciones, solución de un sistema de ecuaciones.

Proposición: un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución si y solo si en su forma escalonada por filas aparece una o más filas de la forma $\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{array}\right]$, con $c \neq 0$.

Procedimientos:

- Escribir el sistema de ecuaciones como matriz aumentada.
- Escalonar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.
- Escribir la forma escalonada de la matriz aumentada como un sistema de ecuaciones.

- Determinar si el sistema tiene solución.

Argumentación:

- En el sistema escalonado no aparece una fila de la forma $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & c \end{bmatrix}$, con $c \neq 0$, independientemente de los valores de a y b. Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualesquiera sean los valores de los parámetros a y b.

Pregunta 5a

Situación problema: Determine si el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$ pertenece al espacio generado por el conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$.

Lenguaje verbal: vector, matriz aumentada, sistema de ecuaciones, escalares, si y solo si, existen, igualdad, escalonar, operaciones elementales por filas, sistema equivalente, solución, espacio generado.

Lenguaje simbólico: $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$, gen A, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\in$, $\mathbb{R}$, $\begin{cases} \alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + 0\alpha_2 + 4\alpha_3 = 5 \\ 2\alpha_1 + 0\alpha_2 + 9\alpha_3 = 14 \end{cases}$,

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 14 \end{array}\right]$, $\mathbb{R}^3$, $\xrightarrow{f_3 - 2f_1}$.

Conceptos: combinación lineal, equivalencia de sistemas de ecuaciones, solución de un sistema de ecuaciones, espacio generado.

Proposición: un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución si y solo si en su forma escalonada por filas aparece una o más filas de la forma $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & c \end{bmatrix}$, con $c \neq 0$.

Procedimientos:

- Plantear la igualdad que debe cumplir el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$ para que se encuentre en el espacio generado por el conjunto *A*.
- Plantear un sistema de ecuaciones lineales.
- Escribir el sistema de ecuaciones como matriz aumentada.
- Escalonar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.
- Escribir la forma escalonada de la matriz aumentada como un sistema de ecuaciones.
- Determinar si el sistema tiene solución.

Argumentación:

- El $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$ pertenece al espacio generado por *A* si y solo si es una combinación lineal de los vectores de *A*.
- El sistema escalonado (equivalente al original) tiene solución, no aparece una fila de la forma $\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{array}\right]$, con $c \neq 0$.

Pregunta 5b

Situación problema: Determine si el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$ pertenece al espacio generado por el conjunto $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$.

Lenguaje verbal: vector, matriz aumentada, sistema de ecuaciones, escalares, si y solo si, existen, igualdad, escalonar, operaciones elementales por filas, sistema equivalente, solución, espacio generado.

Lenguaje simbólico: $\begin{bmatrix}1\\5\\14\end{bmatrix}$, gen A, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\in$, $\mathbb{R}$, $\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 1\\ 2\alpha_1 + 0\alpha_2 + 8\alpha_3 = 5\\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 14\end{cases}$,

$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 8 & 5\\ 1 & 1 & 4 & 14\end{array}\right]$, $\mathbb{R}^3$, $\xrightarrow{f_3-2f_1}$.

Conceptos: combinación lineal, equivalencia de sistemas de ecuaciones, solución de un sistema de ecuaciones, espacio generado.

Proposición: un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución si y solo si en su forma escalonada por filas aparece una o más filas de la forma $\left[\begin{array}{cccc:c}0 & 0 & \cdots & 0 & c\end{array}\right]$, con $c \neq 0$.

Procedimientos:

- Plantear la igualdad que debe cumplir el vector $\begin{bmatrix}1\\5\\14\end{bmatrix}$ para que se encuentre en el espacio generado por el conjunto *A*.
- Plantear un sistema de ecuaciones lineales.
- Escribir el sistema de ecuaciones como matriz aumentada.
- Escalonar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.
- Escribir la forma escalonada de la matriz aumentada como un sistema de ecuaciones.
- Determinar si el sistema tiene solución.

Argumentación:

- El $\begin{bmatrix}1\\5\\14\end{bmatrix}$ pertenece al espacio generado por *A* si y solo si es una combinación lineal de los vectores de *A*.
- El sistema escalonado (equivalente al original) tiene solución, no aparece una fila de la forma $\left[\begin{array}{cccc:c}0 & 0 & \ldots & 0 & c\end{array}\right]$, con $c \neq 0$.

Pregunta 6a

Situación problema: Describa el espacio generado por el conjunto $A=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1\\-5\\7\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1\\10\\-8\end{bmatrix}\right\}$.

Lenguaje verbal: vector, matriz aumentada, sistema de ecuaciones, escalares, si y solo si, existen, igualdad, escalonar, operaciones elementales por filas, sistema equivalente, solución, espacio generado.

Lenguaje simbólico: $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$, gen B, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, $\in$, $\mathbb{R}$, $\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=a\\0\alpha_1-5\alpha_2+10\alpha_3=b\\2\alpha_1+7\alpha_2-8\alpha_3=c\end{cases}$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\0 & -5 & 10 & b\\2 & 7 & -8 & c\end{array}\right], \mathbb{R}^3, \xrightarrow{f_3-2f_1}.$$

Conceptos: combinación lineal, equivalencia de sistemas de ecuaciones, solución de un sistema de ecuaciones, espacio generado.

Proposición: un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución si y solo si en su forma escalonada por filas aparece una o más filas de la forma $\left[\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & \cdots & 0 & c\end{array}\right]$, con $c\neq 0$.

Procedimientos:

- Plantear la igualdad que deben cumplir los elementos del espacio generado.
- Plantear un sistema de ecuaciones lineales.
- Escribir el sistema de ecuaciones como matriz aumentada.
- Escalonar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.
- Escribir la forma escalonada de la matriz aumentada como un sistema de ecuaciones.
- Determinar cuándo el sistema tiene solución.

Argumentación:

- El $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ pertenece al espacio generado por A si y solo si es una combinación lineal de los vectores de A.
- En el sistema escalonado aparece una fila de la forma $\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & \cdots & 0 & -2a+b+c \end{array}\right]$; por la proposición, para que el sistema tenga solución es necesario y suficiente que $-2a + b + c = 0$.

Pregunta 6b

Situación problema: Describa el espacio generado por el conjunto $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Lenguaje verbal: vector, matriz aumentada, sistema de ecuaciones, escalares, si y solo si, existen, igualdad, escalonar, sistema equivalente, operaciones elementales por filas, solución, espacio generado.

Lenguaje simbólico: $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, gen B, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\in$, $\mathbb{R}$, $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3 = b \\ 2\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 = c \end{cases}$,

$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$, $\mathbb{R}^3$, $\xrightarrow{f_3 - 2f_1}$.

Conceptos: combinación lineal, equivalencia de sistemas de ecuaciones, solución de un sistema de ecuaciones, espacio generado.

Proposición: un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución si y solo si en su forma escalonada por filas aparece una o más filas de la forma $\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{array}\right]$, con $c \neq 0$.

Procedimientos:

- Plantear la igualdad que deben cumplir los elementos del espacio generado.
- Plantear un sistema de ecuaciones lineales.
- Escribir el sistema de ecuaciones como matriz aumentada.
- Escalonar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.
- Escribir la forma escalonada de la matriz aumentada como un sistema de ecuaciones.
- Determinar cuándo el sistema tiene solución.

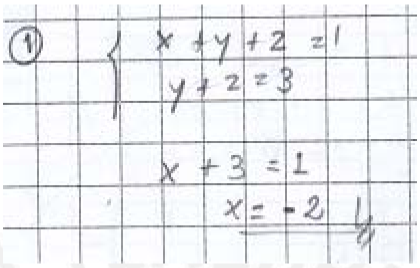
Argumentación:

- El $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ pertenece al espacio generado por A si y solo si es una combinación lineal de los vectores de A.
- En el sistema escalonado no aparece una fila de la forma $[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \mid c]$, con $c \neq 0$, independientemente de los valores de a, b y c. Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualesquiera sean los valores de los parámetros$a$, b y c. Entonces el espacio generado por el conjunto B es $\mathbb{R}^3$.

ANEXO 6 - Configuraciones cognitivas

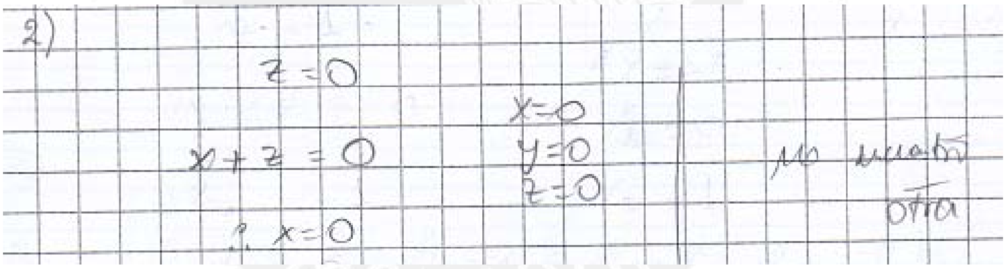
Pregunta 1

Configuración cognitiva 1 (7 alumnos): sustituye adecuadamente la segunda ecuación en la primera y halla el valor de x. No asigna valores a y ni a z.

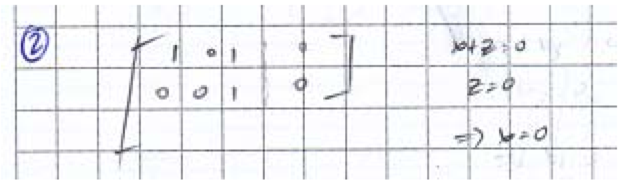


Pregunta 2

- Configuración cognitiva 1 (2 alumnos): Resuelven las ecuaciones para x y z. Fallan en la argumentación, consideran que y puede tomar cualquier valor.



- Configuración cognitiva 2 (2 alumnos): Resuelven las ecuaciones para x y z. Fallan en la argumentación, no asignan ningún valor a y.



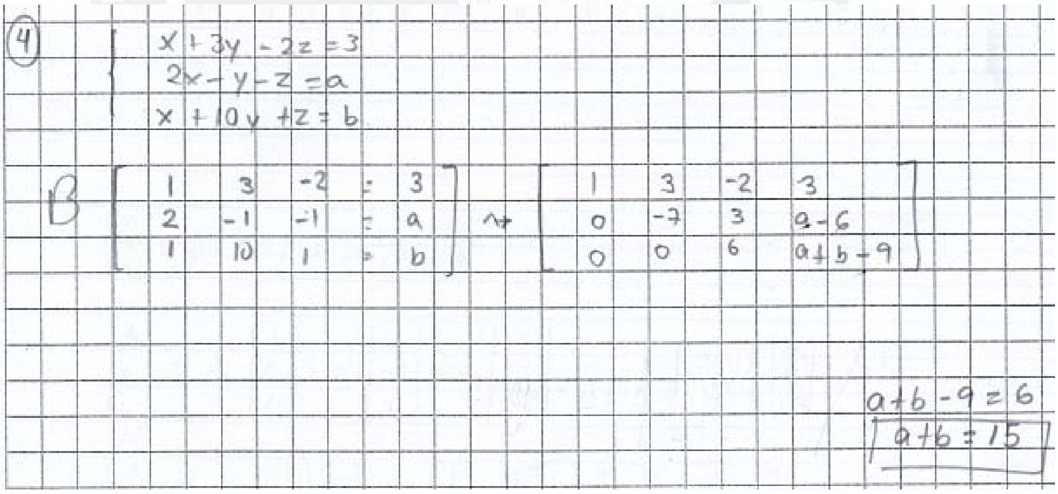
Pregunta 3

En esta pregunta, la gran mayoría de alumnos contesta apropiadamente. Quienes se equivocan, lo hacen al despejar una variable o al escalonar.

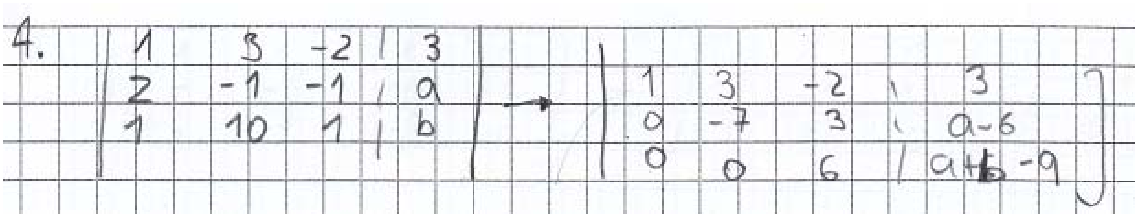
Pregunta 4

- Configuración cognitiva 1 (6 alumnos): Convierten el sistema de ecuaciones en una matriz aumentada, escalonan, y retornan al sistema de ecuaciones. Fallan en la argumentación final, cuando tienen que utilizar la proposición “un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución si y solo si en su forma escalonada por filas aparece una o más filas de la forma $\left[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \mid c\right]$, con $c \neq 0$”

- Configuración cognitiva 2 (7 alumnos): Convierten el sistema de ecuaciones en una matriz aumentada y escalonan. Fallan al convertir la matriz aumentada escalonada nuevamente en un sistema de ecuaciones. Fallan en la argumentación final, cuando tienen que utilizar la proposición “un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución si y solo si en su forma escalonada por filas aparece una o más filas de la forma $\left[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \mid c\right]$, con $c \neq 0$”



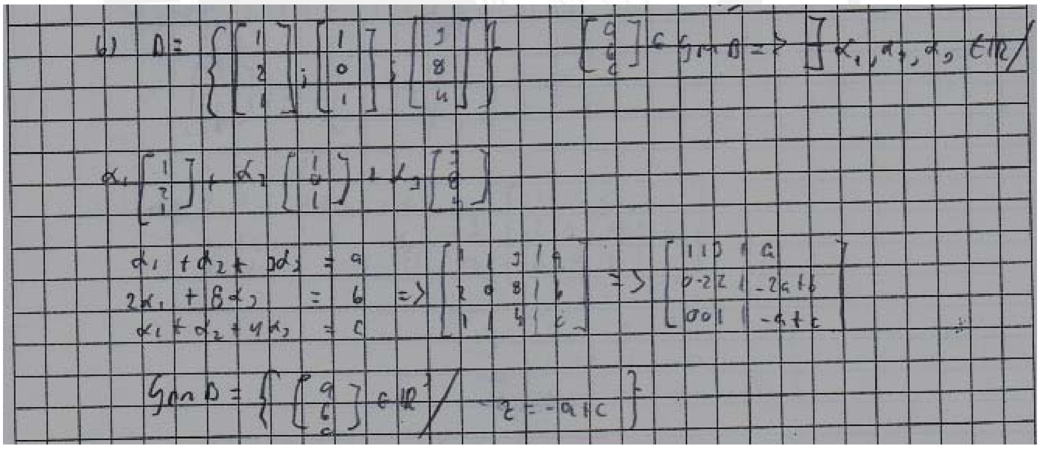
- Configuración cognitiva 3 (7 alumnos): Convierten el sistema de ecuaciones en una matriz aumentada y escalonan. No convierten la matriz aumentada escalonada nuevamente en un sistema de ecuaciones. No concluyen nada.



Pregunta 5 a y b

En ambas preguntas predominan dos configuraciones cognitivas. En la primera, los alumnos no describen el espacio generado por el conjunto dado, únicamente plantean un sistema de ecuaciones con el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$; quienes procedieron así, tuvieron éxito en la pregunta. Otro grupo de alumnos, en cambio, describen el espacio generado y luego verifican si el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$ pertenece a dicho espacio; algunos de estos alumnos sí fallaron al describir el espacio generado. Las configuraciones cognitivas para este último grupo son similares a las que se tiene en la pregunta 6.

- Configuración cognitiva 1 (2 alumnos en la pregunta 5a y 4 en la 5b): Buscan describir el espacio generado, es decir, buscan resolver un problema más general, similar al 6. Cometen el mismo error que los alumnos que fallan en la pregunta 6.

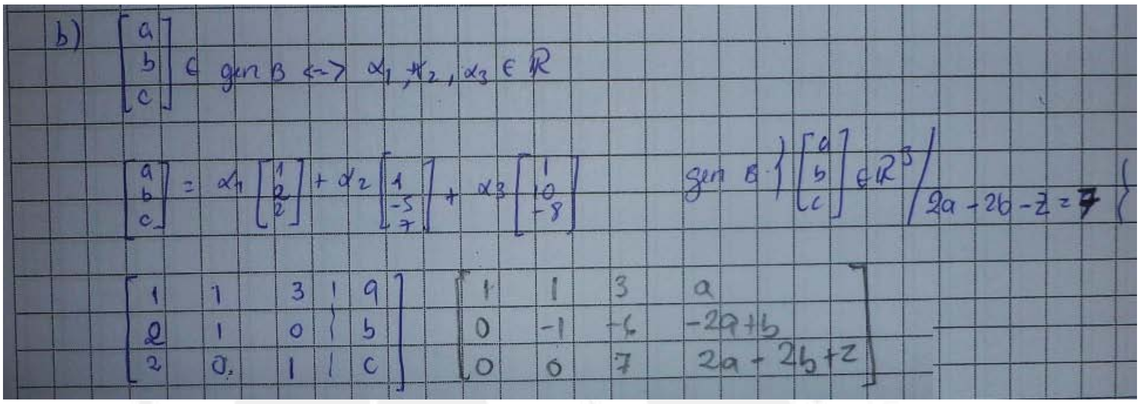


Pregunta 6a

- Configuración cognitiva 1 (1 alumno): Realiza todo el procedimiento, pero no concluye.

Pregunta 6b

- Configuración cognitiva 1 (5 alumnos): Fallan en el procedimiento de “escribir la forma escalonada de la matriz aumentada como un sistema de ecuaciones”. Fallan en la argumentación final, cuando tienen que utilizar la proposición “un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución si y solo si en su forma escalonada por filas aparece una o más filas de la forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{array}\right]$, con $c \neq 0$”



- Configuración cognitiva 2 (4 alumnos): Fallan en la argumentación final, cuando tienen que utilizar la proposición “un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución si y solo si en su forma escalonada por filas aparece una o más filas de la forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{array}\right]$, con $c \neq 0$”