PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE GRADUADOS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

"Cambio de fase en el proceso de contacto sobre $\mathbb{Z}^d$"

Tesis para optar al grado de Magister en Matemáticas

presentado por:

David Ricardo Oliveros Ramos

Bachiller en Ciencias

Lima – Perú
2008

L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.

JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830)
Prefacio a la *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822).

Mathematics seems to endow one with something like a new sense.

CHARLES ROBERT DARWIN (1809-1882)

To surrender to ignorance and call it God has always been premature, and it remains premature today.

ISAAC ASIMOV (1920-1992)

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Johel Beltrán por aceptarme como tesista, aún cuando no sabía nada de probabilidad, y darme el impulso necesario para comenzar esta tesis. También quiero agradecer al Dr. Gonzalo Panizo, por haber aceptado tomar la posta como asesor y haberme ayudado a lograr lo más complicado de toda tesis, su finalización.

Deseo expresar también mi agradecimiento a los profesores Dr. Luis Valdivieso y Dr. Roger Metzger, por su buena disposición para revisar el borrador de esta tesis y por sus valiosas sugerencias. Quisiera agradecer además a todos los profesores de la maestría en matemáticas, de quienes he aprendido mucho estos años, y no solamente de matemáticas. También a los profesores con los que he trabajado, por ayudarme a concentrarme en las matemáticas y en desarrollarme académicamente. Quiero agradecer especialmente al Dr. César Carranza, por sus consejos y por todo su apoyo durante mi paso por la maestría, siendo él buenamente responsable de mi paso por la PUCP.

Agradezco también a mis profesores de matemáticas en la Universidad Nacional Agraria La Molina, por haber estimulado mi interés por las matemáticas mientras cursaba el pre–grado en biología. Agradezco particularmente a la profesora Mercedes Flores, mi consejera, por permitirme cursar, virtualmente, todos los cursos de matemáticas que había en la agraria.

Deseo agradecer también a las personas que me han brindado su apoyo y amistad mientras realizaba esta tesis. A todos los CIMOBPers, que me han proporcionado un gran ambiente de trabajo, investigación y amistad; en especial a mi mentor Dr. Jorge Tam, quién siempre estuve pendiente de mis avances. A mis compañeros de la maestría, en especial a José Esparta por su amistad y apoyo. A mi novia Heidi Sánchez, por apoyarme siempre y motivarme a concluir las cosas.

Finalmente, quiero expresar mi profundo agradecimiento a mi familia, por haberme apoyado siempre y alentarme a seguir la vida académica. Agradezco a mis abuelos, Heraclio y Julia, por enseñarme desde pequeño a valorar el estudio y el conocimiento; y a mis padres, Ricardo y María Teresa, por brindarme siempre un ambiente de motivación intelectual y apoyarme sin objeciones en todas los objetivos que he emprendido, entre ellos, hacer una maestría en matemáticas puras.

Para todos ellos, mi más sincera gratitud.

Índice

Resumen

El proceso de contacto en un tipo de proceso de Markov en tiempo continuo para el cual el espacio de estados, también llamados configuraciones, es $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ y en el cual cada coordenada de una configuración del proceso pasa de 1 a 0 a una tasa constante igual a 1, y el paso de 0 a 1 es proporcional a la cantidad de unos en las coordenadas vecinas, siendo λ la constante de proporcionalidad que parametriza el modelo. En este trabajo se muestra que el proceso de contacto puede ser construido formalmente a partir de la descripción anterior de las tasas de transición entre las configuraciones, mostrando además que existe un único proceso de Markov definido por tales tasas. Se utilizaron algunas técnicas básicas para el estudio de sistemas de partículas en interacción (monotonicidad, acoplamiento, dualidad) que permitieron demostrar algunas propiedades del proceso de contacto, como la autodualidad y la monotonía de la ergodicidad con respecto al parámetro del proceso. El resultado principal es mostrar que en una dimensión ($d = 1$) existe un parámetro crítico finito (λ_c) que determina un cambio de fase para la ergodicidad del proceso, siendo ergódico si $\lambda < \lambda_c$ y que existen al menos dos medidas invariantes para el proceso si $\lambda > \lambda_c$. Este resultado se generaliza para el proceso en d dimensiones, mostrando que el parámetro crítico λ_d está acotado por $\frac{1}{2d} \leq \lambda_d \leq \frac{2}{d}$.

Introducción

En este trabajo estudiaremos el *proceso de contacto*, un tipo de proceso de Markov en tiempo continuo sobre la malla de enteros $\mathbb{Z}^d$. En este contexto, definiremos un proceso de Markov como una familia de distribuciones de probabilidad indexadas por las configuraciones de X, su espacio de estados, y que satisfacen la propiedad de Markov, es decir, que la distribución de probabilidad condicional de los estados futuros del proceso depende solamente del estado presente y no de los estados pasados. Formalmente, el proceso de Markov es denotado por $\{\mathbb{P}^\eta, \eta \in X\}$. También nos referiremos a los caminos muestrales η_t como el proceso de Markov, asumiéndo que el proceso comienza en la configuración η, es decir, la distribución inicial del proceso es la delta de dirac en η, δ_η. Mas precisamente, trabajaremos con un tipo especial de procesos de Markov denominados *sistemas de partículas en interacción*, en los cuales el espacio de estados del proceso es de la forma $X = W^S$, con W un conjunto discreto. En nuestro caso, cada coordenada de $S = \mathbb{Z}^d$ puede asumir dos valores ($W = \{0, 1\}$), por lo que el espacio de estados para el proceso de contacto será $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Los elementos de $S = \mathbb{Z}^d$ se denotarán usualmente por x, y, u y v, y los elementos de X serán denotados por η ó ζ. Además, $\eta(x)$ denotará el valor de la coordenada x en la configuración η, que puede ser 0 ó 1.

El proceso de contacto estará determinado por sus tasas de transición, tal que el valor de cada coordenada x de una configuración pasa de 1 a 0 a una tasa constante igual a 1, independiente de las coordenadas vecinas; y el paso de 0 a 1 es proporcional a la cantidad de unos en las coordenadas adyacentes, siendo λ la constante de proporcionalidad que parametriza el modelo. Más formalmente, podemos escribir:

$$c_\lambda(x,\eta) = \begin{cases} \lambda \sum_{|y-x|=1} \eta(y) & \text{si} \quad \eta(x) = 0 \\ 1 & \text{si} \quad \eta(x) = 1 \end{cases}$$

donde $c_\lambda(x,\eta)$ denota a la tasa de transición en la coordenada x de la configuración η y λ es un parámetro no negativo.

En una primera interpretación de este modelo, en un contexto epidemiológico, λ representa la tasa de infección mediante la cual los individuos sanos (0) pasan a estar infectados (1). Existe una tasa de recuperación natural por la que los individuos infectados pasan a estar sanos nuevamente, la cual es normalizada a uno. Finalmente, los individuos sanos son infectados a una tasa que es proporcional al número de sus vecinos infectados, que es justamente la tasa de infección λ.

Otra posible interpretación del modelo considera la dispersión espacial de una cierta especie (una planta, por ejemplo). Así, los individuos de una población (1) se reproducen y su descendencia ocupa, al azar, alguno de los sitios adyacentes al individuo original, sobreviviendo solamente si el sitio se encontraba desocupado (0). Así, la probabilidad de que un sitio vacío sea ocupado por un descendiente es proporcional a la cantidad de individuos que existen a su alrededor. En este contexto, dicha constante de proporcionalidad λ será la tasa de dispersión de la especie en cuestión. Además, los individuos tienen un tiempo de vida finito, siendo la tasa de mortalidad individual normalizada a 1.

En general, si una coordenada x no tiene unos en las coordenadas vecinas, la probabilidad de que el proceso pase a una configuración con $\eta(x) = 1$ es cero. Esto asegura que la configuración $\eta \equiv 0$ sea un estado absorbente por el proceso, lo que es equivalente, en las interpretaciones antes mencionadas, a que una enfermedad no se puede propagar si inicialmente todos los individuos se encuentran sanos o a que una población extinta no puede crecer nuevamente. Así, un primer problema relacionado con el proceso de contacto es determinar cuando la delta de dirac en $\eta \equiv 0$, δ_0, es la única medida invariante por el proceso. Veremos que la respuesta a esta pregunta depende del valor del parámetro λ. Así, para valores pequeños de λ, δ_0 es la única medida invariante (es decir, el proceso siempre se extingue), mientras que para valores grandes de λ existe más de una medida invariante, pues como es fácil de ver intuitivamente, el proceso no debería extinguirse necesariamente si λ es suficientemente grande.

El proceso de contacto posee, además, la propiedad de que si éste tiene una probabilidad positiva de sobrevivencia a largo plazo cuando el parámetro es λ, entonces también la tendrá para un valor mayor del parámetro.

Vemos entonces que dependiendo del parámetro λ, podemos distinguir entre dos estados cualitativamente distintos del comportamiento a largo plazo del proceso. En términos de la primera de las interpretaciones antes mencionadas, el valor del parámetro define un cambio entre un brote epidémico (toda la población se recupera de la infección luego de un cierto tiempo) y una pandemia (siempre existen individuos infectados en la población). Alternativamente, podemos decir que el valor del parámetro determina la extinción (todos los individuos mueren después de un cierto tiempo) o la sobrevivencia de una población.

Este cambio cualitativo en el proceso será el que estudiaremos, probando la existencia de un valor crítico λ_c tal que si $\lambda < \lambda_c$ la única medida invariante por el proceso es δ_0, y que si $\lambda > \lambda_c$ existen al menos dos medidas invariantes, de manera tal que λ_c es el valor del parámetro que determina el cambio de fase entre estos dos comportamientos. Por otra parte, cuando un proceso converge a su única medida invariante sin importar la distribución original, diremos que el proceso es *ergódico*. Así, el cambio de fase que nos interesa puede plantearse como la transición entre la ergodicidad y la no ergodicidad del proceso de contacto.

En síntesis, los objetivos de este trabajo son definir y construir el proceso de contacto, aplicar técnicas para el estudio de sistemas de partículas en interacción tales como monotonicidad, acoplamiento y dualidad; y probar la existencia de un cambio de fase en el proceso de contacto sobre $\mathbb{Z}^d$, así como acotar el valor crítico del parámetro que determina el cambio de fase.

En el capítulo 1, daremos algunas definiciones y teoremas sobre la teoría de procesos de Markov en el contexto de los sistemas de partículas en interacción, los cuales serán necesarios para el trabajo posterior. En particular, sentaremos las bases para la construcción formal del proceso de contacto a partir de la definición informal de sus tasas de transición.

En el capítulo 2, introduciremos las técnicas de monotonicidad estocástica, acoplamiento y dualidad; que serán de gran utilidad para probar propiedades fundamentales del proceso de contacto, las cuales requeriremos para la demostración de nuestro teorema principal, la existencia del cambio de fase en el proceso de contacto con respecto al parámetro del proceso.

En el capítulo 3, aplicaremos los resultados de los dos capítulos anteriores al proceso de contacto, probando formalmente que la ergodicidad del proceso es monótona con respecto al valor del parámetro λ, por lo que, si el cambio de fase existe, es único. También probaremos que el proceso de contacto posee un *dual*, que es a su vez el mismo proceso de contacto pero sobre los estados finitos del proceso. Esta propiedad, denominada *autodualidad*, será muy útil puesto que nos permitirá replantear el problema del parámetro crítico en términos mucho más manejables. Finalizaremos este capítulo construyendo formalmente el proceso de contacto a partir de sus tasas de transición, mostrando que existe un único proceso de Markov definido por tales tasas.

Finalmente, en el capítulo 4, presentamos el teorema principal, en donde se probará la existencia del cambio de fase mostrando que el parámetro crítico del proceso de contacto unidimensional ($d = 1$) es finito y positivo. La parte más difícil de la demostración será mostrar que λ_c es finito, lo que se logrará encontrando una cota superior para el mismo. La estrategia a seguir consiste en redefinir el parámetro crítico en términos de una función $\rho(\lambda)$, tal que el proceso es ergódico si y sólo si $\rho(\lambda) = 0$ y no ergódico si $\rho(\lambda) > 0$. Luego usaremos la autodualidad del proceso de contacto para redefinir $\rho(\lambda)$ en términos de una función σ sobre el proceso dual, la que acotaremos inferiormente por una medida de renovación estacionaria μ, mostrándose que la probabilidad de que el proceso sobreviva según μ es estrictamente positiva si $\lambda \geq 2$, lo que implica que $\rho(\lambda = 2) > 0$ y el proceso no es ergódico, por lo que $\lambda = 2$ representa una cota superior para el parámetro crítico del proceso. Finalmente, este resultado se extenderá al proceso de contacto d-dimensional, mostrando además que el parámetro crítico en dimensión d (λ_d), puede ser acotado por $\frac{1}{2d} \leq \lambda_d \leq \frac{2}{d}$.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

En este trabajo, X será un espacio métrico compacto con una estructura medible dada por la σ-álgebra de los borelianos y $D[0,\infty)$ el conjunto de todas las funciones $\eta_{\cdot}$ en $[0,\infty)$ con valores en X que son continuas por la derecha y tienen límite por la izquierda. Además, $C(X)$ será el conjunto de funciones continuas en X, visto como un espacio de Banach con la norma del supremo,

$$||f|| = \sup_{\eta \in X} |f(\eta)|. \tag{1.1}$$

Además, para $f \in C(X)$ y un proceso de Markov $\{\mathbb{P}^\eta, \eta \in X\}$, definiremos el operador $S(t)$ de la siguiente forma:

$$\left(S(t)f\right)(\eta) = \mathbb{E}^\eta f(\eta_t). \tag{1.2}$$

Ahora definiremos un tipo especial de proceso de Markov, un *proceso de Feller*.

Definición 1.1 (Proceso de Feller). *Un proceso de Markov $\{\mathbb{P}^\eta, \eta \in X\}$ es llamado un* proceso de Feller *si $S(t)f \in C(X)$ para todo $t \geq 0$ y toda $f \in C(X)$.*

Definición 1.2 (Semigrupo de Markov). *Una familia $\{S(t), t \geq 0\}$ de operadores lineales en $C(X)$ es llamada un* semigrupo de Markov *si satisface las siguientes condiciones:*

1. $S(0) = I$, el operador identidad en $C(X)$.

2. *La aplicación* $t \mapsto S(t)f$ *de* $[0, \infty)$ *a* $C(X)$ *es continua por la derecha para toda* f *en* $C(X)$.

3. $S(t+s)f = S(t)S(s)f$ *para toda* f *en* $C(X)$ *y todo* $s, t \geq 0$.

4. $S(t)1 = 1$ *para todo* $t \geq 0$.

5. $S(t)f \geq 0$ *para toda* f *no-negativa en* $C(X)$.

Proposición 1.3. *Supongamos que* $\{\mathbb{P}^\eta, \eta \in X\}$ *es un proceso de Feller en* X. *Entonces, la colección de operadores lineales* $\{S(t), t \geq 0\}$ *en* $C(X)$ *asociados al proceso es un semigrupo de Markov.*

Demostración. Para la demostración ver Liggett (1985). □

El siguiente teorema nos da una relación entre el conjunto de semigrupos de Markov y el conjunto de los procesos de Markov.

Teorema 1.4. *Supongamos que* $\{S(t), t \geq 0\}$ *es un semigrupo de Markov en* $C(X)$. *Entonces, existe un único proceso de Markov* $\{\mathbb{P}^\eta, \eta \in X\}$ *tal que*

$$S(t)f\,(\eta) = \mathbb{E}^\eta f(\eta_t)$$

para toda $f \in C(X), \eta \in X,\ $ *y* $t \geq 0$.

Este teorema nos será de utilidad para construir el proceso de Markov que estudiaremos, el proceso de contacto, reduciendo el problema a la construcción del semigrupo de Markov asociado a él. La demostración de este teorema, que corresponde a la teoría general de procesos de Markov, se puede encontrar en Dynkin (1965).

Denotemos ahora por $\mathcal{P}$ al conjunto de las medidas de probabilidad en X con la topología de la convergencia débil. Definiremos ahora la acción del semigrupo $S(t)$ sobre una $\mu \in \mathcal{P}$.

Definición 1.5. *Supongamos que* $\{S(t), t \geq 0\}$ *es un semigrupo de Markov en* $C(X)$. *Dada* $\mu \in \mathcal{P}$, $\mu S(t) \in \mathcal{P}$ *es definida por la relación*

$$\int f \, d[\mu S(t)] = \int S(t) f \, d\mu$$

Cuando la distribución inicial de un proceso de Markov con semigrupo $S(t)$ es μ, $\mu S(t)$ será la distribución del mismo proceso en el tiempo t. Serán de interés las medidas de probabilidad que son invariantes por la acción del semigrupo de Markov $S(t)$, lo que motiva la siguiente definición:

Definición 1.6. *Una medida* $\mu \in \mathcal{P}$ *se dice* invariante por el proceso *con semigrupo de Markov* $\{S(t), t \geq 0\}$, *si* $\mu S(t) = \mu$ *para todo* $t \geq 0$.

La clase de todas las medidas invariantes $\mu \in \mathcal{P}$ será denotada por $\mathcal{I}$. Ahora enunciaremos el teorema de Krein–Milman que nos será útil en la siguiente proposición, y cuya demostración puede encontrarse en Royden (1988).

Teorema 1.7 (Krein–Milman)**.** *Sea* X *un espacio vectorial topológico localmente convexo, y sea* $K \subset X$ *un subconjunto convexo compacto. Entonces* K *es la envoltura convexa cerrada de sus puntos extremos.*

A continuación demostraremos algunas propiedades de la clase de medidas invariantes por el proceso.

Proposición 1.8. *(a)* $\mu \in \mathcal{I}$ *si y sólo si*

$$\int S(t) f d\mu = \int f d\mu$$

para toda $f \in C(X)$ *y todo* $t \geq 0$.

(b) $\mathcal{I}$ *es un subconjunto compacto y convexo de* $\mathcal{P}$.

(c) Sea $\mathcal{I}_e$ *el conjunto de los puntos extremos de* $\mathcal{I}$. *Entonces* $\mathcal{I}$ *es la* envoltura convexa cerrada *de* $\mathcal{I}_e$.

(d) Si $\nu = \lim_{t\to\infty} \mu S(t)$ *existe para alguna* $\mu \in \mathcal{P}$*, entonces* $\nu \in \mathcal{I}$*.*

(e) Si $\nu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} \mu S(t)dt$ *existe para alguna* $\mu \in \mathcal{P}$ *y alguna* $T_n \uparrow \infty$*, entonces* $\nu \in \mathcal{I}$*.*

(f) $\mathcal{I}$ *no es vacío.*

En donde los límites son tomados en el sentido de la topología de $\mathcal{P}$*.*

Demostración. La parte (a) es inmediata a partir de las definiciones 1.6 y 1.7. Para (b), sean $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{I}$. Definamos $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$, con $\alpha \in [0,1]$. Luego, dada $f \in \mathcal{M}$

$$
\begin{aligned}
\int S(t)f\,d\mu &= \int S(t)f\,d[\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2] \\
&= \int S(t)f\,d[\alpha\mu_1] + \int S(t)f\,d[(1-\alpha)\mu_2] \\
&= \alpha \int S(t)f\,d\mu_1 + (1-\alpha)\int S(t)f\,d\mu_2 \\
&= \alpha \int f\,d\mu_1 + (1-\alpha)\int f\,d\mu_2 \\
&= \int f\,d[\alpha\mu_1] + \int f\,d[(1-\alpha)\mu_2] \\
&= \int f\,d[\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2] \\
&= \int f\,d\mu
\end{aligned}
$$

Luego, $\mu \in \mathcal{I}$ y $\mathcal{I}$ es convexo. Ahora, considerando que si $f \in C(X)$ entonces $S(t)f \in C(X)$, y por ser X compacto ambas son acotadas. Luego, dada $(\mu_n)_{n\geq 0}$ en $\mathcal{I}$ tal que $\mu_n \to \mu$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int S(t)f\,d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int S(t)f\,d\mu_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f\,d\mu_n \\
&= \int f\,d\mu
\end{aligned}
$$

Luego, $\mu \in \mathcal{I}$ y $\mathcal{I}$ es cerrado. Además, por ser $\mathcal{P}$ compacto, $\mathcal{I}$ es compacto. La parte (c) se sigue de (b) por el teorema 1.8. Para la parte (d), consideremos $s \geq 0$ y $f \in C(X)$,

$$\begin{aligned}
\int S(s)f\,d\nu &= \lim_{t\to\infty} \int S(s)f\,d[\mu S(t)] \\
&= \lim_{t\to\infty} \int S(t)S(s)f\,d\mu \\
&= \lim_{t\to\infty} \int S(t+s)f\,d\mu \\
&= \lim_{t\to\infty} \int S(t)f\,d\mu \\
&= \lim_{t\to\infty} \int f\,d[\mu S(t)] = \int f\,d\nu.
\end{aligned}$$

Para (e), dado cualquier $s \geq 0$ y $f \in C(X)$,

$$\begin{aligned}
\int S(s)f\,d\nu &= \lim_{n\to\infty} \int S(s)f\,d\left[\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} \mu S(t)dt\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f\,d\left[\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} \mu S(t)S(s)dt\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int f\,d\left[\int_0^{T_n} \mu S(t+s)dt\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \left[\int f\,d[\mu S(t+s)]\right] dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \left[\int S(t+s)f\,d\mu\right] dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int_s^{T_n+s} \left[\int S(t)f\,d\mu\right] dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \left[\int S(t)f\,d\mu\right] dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int f\,d\left[\int_0^{T_n} \mu S(t)dt\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f\,d\left[\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} \mu S(t)dt\right] \\
&= \int f\,d\nu, .
\end{aligned}$$

en donde la integral de Riemann $\int_0^{T_n} \mu S(t)dt$ existe como límite débil. Además, usamos el hecho de que la diferencia entre $\int_s^{T_n+s} \left[\int S(t)f\,d\mu\right] dt$ y $\int_0^{T_n} \left[\int S(t)f\,d\mu\right] dt$ es a lo más

$2s||f||$, luego

$$\begin{aligned}\left|\int_s^{T_n+s}\left[\int S(t)f\,d\mu\right]dt - \int_0^{T_n}\left[\int S(t)f\,d\mu\right]dt\right| &\leq 2s||f|| \\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{T_n}\int_s^{T_n+s}\left[\int S(t)f\,d\mu\right]dt - \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n}\left[\int S(t)f\,d\mu\right]dt\right| &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{2s||f||}{T_n} = 0.\end{aligned}$$

De donde concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{T_n}\int_s^{T_n+s}\left[\int S(t)f\,d\mu\right]dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n}\left[\int S(t)f\,d\mu\right]dt$$

La parte (f) se sigue de (e) y la compacidad de $\mathcal{P}$, pues existen subsucesiones convergentes de

$$\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n}\mu S(t)dt$$

para toda $\mu \in \mathcal{P}$. $\square$

La última parte de la proposición anterior nos dice que $\mathcal{I}$ es no vacío. Será de interés el caso en que $\mathcal{I}$ es unitario, lo que motiva la siguiente definición:

Definición 1.9. *El proceso de Markov con semigrupo* $\{S(t), t \geq 0\}$ *se denomina* ergódico *si*

(a) $\mathcal{I} = \{\nu\}$ *tiene un sólo elemento, y*

(b) $\lim_{t\to\infty}\mu S(t) = \nu$ *para toda* $\mu \in \mathcal{P}$.

Hablaremos también de *configuraciones invariantes por el proceso*, según la siguiente definición:

Definición 1.10. *Una configuración* $\bar{\eta} \in X$ *se denomina* invariante por el proceso *si para todo* $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}^{\bar{\eta}}[\eta_t = \bar{\eta}] = 1.$$

Equivalentemente, $\bar{\eta}$ es una configuración invariante si $\delta_{\bar{\eta}}$ es una medida de equilibrio (por la proposición 1.9(a)).

La siguiente proposición nos muestra una relación entre las configuraciones invariantes por el proceso y las medidas invariantes por el mismo.

Proposición 1.11. *Sea ν una medida invariante por el proceso de contacto con semigrupo $S(t)$. Si $\bar{\eta}$ es una configuración invariante por el proceso, entonces $\bar{\nu} = \nu(\cdot|\eta \neq \bar{\eta})$ es invariante por el proceso.*

Demostración. Para $t \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int S(t)f\, d\bar{\nu} &= \frac{1}{\nu[\eta \neq \bar{\eta}]} \int_{[\eta\neq\bar{\eta}]} S(t)f\, d\nu \\
&= \frac{1}{\nu[\eta \neq \bar{\eta}]} \left[\int S(t)f\, d\nu - \int_{[\eta=\bar{\eta}]} S(t)f\, d\nu \right] \\
&= \frac{1}{\nu[\eta \neq \bar{\eta}]} \left[\int f\, d\nu - S(t)f(\bar{\eta})\nu[\bar{\eta}] \right] \\
&= \frac{1}{\nu[\eta \neq \bar{\eta}]} \left[\int f\, d\nu - \mathbb{E}^{\bar{\eta}}[f(\eta_t)]\nu[\bar{\eta}] \right] \\
&= \frac{1}{\nu[\eta \neq \bar{\eta}]} \left[\int f\, d\nu - f(\bar{\eta})\nu[\bar{\eta}] \right] \\
&= \frac{1}{\nu[\eta \neq \bar{\eta}]} \int_{[\eta\neq\bar{\eta}]} f\, d\nu \\
&= \int f\, d\bar{\nu}
\end{aligned}$$

lo que completa la demostración. □

Con el objetivo de construir nuestro proceso de Markov, será necesario introducir también la definición de *generador de Markov*.

Definición 1.12. *Un operador lineal Ω en $C(X)$ con dominio $\mathscr{D}(\Omega)$ se denomina* pre-generador de Markov *si satisface las siguientes condiciones:*

(a) $1 \in \mathscr{D}(\Omega)$ *y* $\Omega 1 = 0$.

(b) $\mathscr{D}(\Omega)$ *es denso en* $C(X)$.

(c) Si $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\lambda \geq 0$ *y* $f - \lambda\Omega f = g$, *entonces*

$$\min_{\zeta \in X} f(\zeta) \geq \min_{\zeta \in X} g(\zeta)$$

Definición 1.13. *Un* generador de Markov *es un pregenerador de Markov* Ω *cerrado y que satisface*

$$\mathscr{R}(I - \lambda\Omega) = C(X),$$

para todo λ *positivo suficientemente pequeño, en donde* $\mathscr{R}(I - \lambda\Omega)$ *es el rango del operador* $(I - \lambda\Omega)$.

Ahora presentaremos el teorema de Hille–Yosida, que nos brinda una relación entre los semigrupos de Markov y los generadores de Markov. La demostración del teorema de Hille–Yosida se puede encontrar en Dynkin (1965).

Teorema 1.14 (Hille–Yosida)**.** *Existe una correspondencia biunívoca entre los generadores de Markov en* $C(X)$ *y los semigrupos de Markov en* $C(X)$*. Esta correspondencia es dada por:*

(a)

$$\mathscr{D}(\Omega) = \left\{ f \in C(X) : \textit{tal que existe } \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t} \right\}$$

, y

$$\Omega f = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t} \quad \textit{para } f \in \mathscr{D}(\Omega).$$

(b)

$$S(t)f = \lim_{n \to \infty} \left(I - \frac{t}{n}\Omega \right)^{-n} f, \ \textit{para } f \in C(X) \textit{ y } t \geq 0.$$

Además,

(c) Si $f \in \mathscr{D}(\Omega)$*, se sigue que* $S(t)f \in \mathscr{D}(\Omega)$ *y* $\frac{d}{dt}S(t)f = \Omega S(t)f = S(t)\Omega f$*, y, finalmente,*

(d) Para $g \in C(X)$ y $\lambda \geq 0$, la solución de $f - \lambda\Omega f = g$ es dada por

$$f = \int_0^\infty e^{-t} S(\lambda t) g \, dt.$$

Cuando el espacio de estados del proceso es de la forma $X = W^S$, con S un conjunto discreto, el proceso de Markov asociado será denominado un *sistema de partículas en interacción*. A partir de ahora, $S = \mathbb{Z}^d$ será el conjunto contable de sitios para la dinámica y $W = \{0, 1\}$ determinará el espacio de fase para cada uno de los sitios, por lo que el espacio de estados para el sistema de partículas en interacción será $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, con la topología producto. Los elementos de S se denotarán usualmente por x, y, u y v, y los elementos de X serán denotados por η ó ζ. La dinámica local del sistema estará descrita por una colección de medidas de transición $c_T(\eta, d\zeta)$, en donde η es una configuración en el conjunto $d\zeta$. Para cada $\eta \in X$ y un $T \subset S$ finito. Se asume que $c_T(\eta, d\zeta)$ es una medida positiva finita en W^T.

Para $f \in C(X)$ y $x \in S$, sea

$$\Delta_f(x) = \sup\{|f(\eta) - f(\zeta)| : \eta, \zeta \in X \text{ y } \eta(y) = \zeta(y) \text{ para todo } y \neq x\}$$

Definiremos

$$D(X) = \left\{ f \in C(X) : |||f||| = \sum_x \Delta_f(x) < \infty \right\}.$$

Además, sea $|| \quad ||_T$ la norma de variación total sobre el conjunto T, para $u \in S$ definiremos

$$c_T = \sup\{c_T(\eta, W^T) : \eta \in X\}, \tag{1.3}$$

$$c_T(u) = \sup\{||c_T(\eta_1, d\zeta) - c_T(\eta_2, d\zeta)||_T : \eta_1(y) = \eta_2(y) \text{ para todo } y \neq u\}, \tag{1.4}$$

y η^ζ por

$$\eta^\zeta(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{si} \quad x \notin T \\ \zeta(x) & \text{si} \quad x \in T \end{cases}.$$

A continuación, la proposición 1.16 y el teorema 1.17 nos dan condiciones sobre las tasas $c_T(\eta, W^T)$ del proceso que permiten asegurar la existencia de su generador de Markov.

Proposición 1.15. *Asumamos que*

$$\sup_{x\in S} \sum_{T \ni x} c_T < \infty. \tag{1.5}$$

(a) Para $f \in D(X)$, la serie

$$\Omega f(\eta) = \sum_T \int_{W^T} c_T(\eta, d\zeta)[f(\eta^\zeta) - f(\eta)] \tag{1.6}$$

converge uniformemente y define una función en $C(X)$, Además,

$$||\Omega f|| \leq \left(\sup_{x\in S} \sum_{T\ni x} c_T \right) |||f|||.$$

(b) Ω es un pregenerador de Markov.

Teorema 1.16. *Asumamos que*

$$\sup_{x\in S} \sum_{T\ni x} c_T < \infty, \ \ y \tag{1.7}$$

$$M = \sup_{x\in S} \sum_{T\ni x} \sum_{u \neq x} c_T(u) < \infty. \tag{1.8}$$

Se cumple que

(a) La clausura $\bar{\Omega}$ de Ω es un generador de Markov del semigrupo de Markov S(t), dado por el teorema de Hille–Yosida.

(b) $D(X)$ *es un dominio base de clausura para* $\bar{\Omega}$.

La prueba de la proposición 1.16 y el teorema 1.17 se pueden encontrar en Liggett (1985). Con estos teoremas podremos garantizar la existencia del proceso de Markov.

Definamos ahora

$$\epsilon = \inf_{u\in S} \inf_{\substack{\eta_i=\eta_2 \\ \text{menos en } u \\ \eta_1(u)\neq\eta_2(u)}} \sum_{T\ni u}[c_T(\eta_1, \{\zeta : \zeta(u) = \eta_2(u)\}) + c_T(\eta_2, \{\zeta : \zeta(u) = \eta_1(u)\})]. \tag{1.9}$$

El siguiente teorema nos da una condición sobre las tasas del proceso para asegurar su ergodicidad, y cuya demostración se puede encontrar en Liggett (1985).

Teorema 1.17. *Asumamos* (1.7) *y* (1.8)*. Si* $M < \epsilon$*, el proceso es ergódico.*

En adelante, nos interesará un tipo especial de sistema de partículas en interacción denominado *sistema de espín*, por lo que finalizaremos este capítulo definiéndolo a continuación:

Definición 1.18 (Sistema de espín)**.** *Un sistema de espín es un sistema de partículas en interacción en el que cada coordenada tiene dos posibles valores (0 ó 1), y sólo una coordenada cambia en cada transición. El mecanismo de transición es especificado por una función no–negativa* $c(x, \eta)$ *definida para* $x \in S$ *y para* $\eta \in X = \{0, 1\}^S$.

Definamos η_x por

$$\eta_x(y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{si } y \neq x \\ \eta(y) - 1 & \text{si } y = x \end{cases} \tag{1.10}$$

Desde que en un sistema de espín sólo pueda cambiar una coordenada a la vez, tenemos que $c_T(\eta, d\zeta) = c_{\{x\}}(\eta, \eta_x)$. Es decir, las tasas de transición sólo dependen de la configuración inicial y la coordenada específica de esta en la que se realiza la transición, por lo que las denotaremos por $c(x, \eta)$ como menciona la definición.

Capítulo 2

Técnicas para el estudio de sistemas de partículas

En este capítulo, introduciremos tres técnicas para el estudio de sistemas de partículas en interacción (monotonicidad, acoplamiento y dualidad), que serán útiles para probar diversos resultados y propiedades sobre el proceso de contacto.

2.1. Monotonicidad

Dado S un conjunto numerable, consideraremos el orden parcial natural en $X = \{0,1\}^S$, en donde para $\eta, \zeta \in X$, diremos que $\eta \leq \zeta$ si y sólo si $\eta(x) \leq \zeta(x)$ para todo $x \in S$; y sea $\mathcal{M}$ la clase de todas las funciones continuas en X que son monótonas crecientes en el sentido de que $f(\eta) \leq f(\zeta)$ siempre que $\eta \leq \zeta$. Definiremos ahora la *monotonicidad estocástica* $\mu_1 \leq \mu_2$ entre medidas de $\mathcal{P}$.

Definición 2.1 (Monotonicidad estocástica)**.** *Si μ_1 y μ_2 son dos medidas de probabilidad en X, podemos escribir $\mu_1 \leq \mu_2$ si se cumple que*

$$\int f d\mu_1 \leq \int f d\mu_2$$

para toda $f \in \mathcal{M}$.

Muchas veces será de interés determinar bajo que condiciones el semigrupo de un proceso de Feller, actuando sobre medidas, preserva el orden introducido en la definición anterior. El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra.

Teorema 2.2. *Supongamos que* η_t *es un proceso de Feller en* X *con semigrupo de Markov* $S(t)$*. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) $f \in \mathcal{M}$ *implica que* $S(t)f \in \mathcal{M}$ *para todo* $t \geq 0$.

(b) $\mu_1 \leq \mu_2$ *implica que* $\mu_1 S(t) \leq \mu_2 S(t)$ *para todo* $t \geq 0$.

Demostración. Supongamos que (a) se cumple y $\mu_1 \leq \mu_2$. Dada una $f \in \mathcal{M}$, se tiene que también $S(t)f \in \mathcal{M}$ por hipótesis, luego

$$\begin{aligned} \int f\, d[\mu_1 S(t)] &= \int S(t)f\, d\mu_1 \\ &\leq \int S(t)f\, d\mu_2 \\ &= \int f\, d[\mu_2 S(t)], \end{aligned}$$

por lo que concluimos que $\mu_1 S(t) \leq \mu_2 S(t)$. Para el sentido contrario, asumamos que (b) se cumple y tomemos $f \in \mathcal{M}$. Para $\eta \leq \zeta$ las delta de dirac δ_η y δ_ζ satisfacen $\delta_\eta \leq \delta_\zeta$ y por hipótesis, $\delta_\eta S(t) \leq \delta_\zeta S(t)$ para todo $t \geq 0$. Luego,

$$\begin{aligned} S(t)f(\eta) &= \mathbb{E}^\eta f(\eta_t) \\ &= \int f\, d[\delta_\eta S(t)] \\ &\leq \int f\, d[\delta_\zeta S(t)] \\ &= \mathbb{E}^\zeta f(\eta_t) = S(t)f(\zeta), \end{aligned}$$

lo que completa la demostración. □

Este teorema motiva la siguiente definición:

Definición 2.3. *Un proceso de Feller se denomina* monótono *si se cumplen las condiciones del teorema 2.2.*

Veremos ahora un teorema que brinda una condición equivalente a $\mu_1 \leq \mu_2$, cuya demostración se puede encontrar en Liggett (1985).

Teorema 2.4. *Supongamos que μ_1 y μ_2 son medidas de probabilidad en X. Una condición necesaria y suficiente para $\mu_1 \leq \mu_2$ es que exista una medida de probabilidad ν en $X \times X$ que satisfaga para todo boreliano A de X*

(a) $\nu\{(\eta, \zeta) : \eta \in A\} = \mu_1(A)$,

(b) $\nu\{(\eta, \zeta) : \zeta \in A\} = \mu_2(A)$, *y*

(c) $\nu\{(\eta, \zeta) : \eta \leq \zeta\} = 1$

Las propiedades (a) y (b) dicen que ν tiene marginales μ_1 y μ_2. Una medida ν que satisface las propiedades (a), (b) y (c) del enunciado del teorema 2.4 es comúnmente llamada una *medida de acoplamiento* para μ_1 y μ_2. Sin embargo, ν no está determinada unívocamente, de ninguna manera, por estas propiedades. Como veremos más adelante, para obtener $\mu_1 \leq \mu_2$, una estrategia será construir una ν con tales propiedades.

Corolario 2.5. *Supongamos que $X = \{0, 1\}^S$, con el orden parcial natural, en donde S es un conjunto numerable. Si μ_1 y μ_2 son medidas de probabilidad en X tal que $\mu_1 \leq \mu_2$ y si*

$$\mu_1\{\eta : \eta(x) = 1\} = \mu_2\{\eta : \eta(x) = 1\}$$

para todo $x \in S$, entonces $\mu_1 = \mu_2$.

Demostración. Sea ν la medida de acoplamiento para μ_1 y μ_2, dada por el teorema 2.4. Luego,

$$\nu\{(\eta, \zeta) : \eta(x) = 0, \zeta(x) = 1\} \quad = \quad \nu\{(\eta, \zeta) : \zeta(x) = 1\} - \nu\{(\eta, \zeta) : \eta(x) = 1, \zeta(x) = 1\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_2\{\zeta : \zeta(x) = 1\} - \nu\{(\eta, \zeta) : \eta(x) = 1, \eta \leq \zeta\} \\
&= \mu_2\{\zeta : \zeta(x) = 1\} - \nu\{(\eta, \zeta) : \eta(x) = 1\} \\
&= \mu_2\{\zeta : \zeta(x) = 1\} - \mu_1\{\eta : \eta(x) = 1\} = 0.
\end{aligned}
$$

Luego, $\nu\{(\eta, \zeta) : \eta = \zeta\} = 1$ y $\mu_1 = \mu_2$. □

Finalizaremos esta sección con la siguiente proposición:

Proposición 2.6. *Sea* $(\mu_1^n)_{n\geq 1}$ *y* $(\mu_2^n)_{n\geq 1}$ *dos sucesiones de medidas en* $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$*, tal que* $\mu_1^{(n)} \leq \mu_2^{(n)}$ $\forall n \geq 1$*. Si* $\lim_{n\to\infty} \mu_i^{(n)} = \nu_i$ *para* $i = 1, 2$*, entonces* $\nu_1 \leq \nu_2$*.*

Demostración. Sea f continua, monótona y creciente definida en X. Luego,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int f\, d\mu_1^{(n)} &\leq \lim_{n\to\infty} \int f\, d\mu_2^{(n)} && (2.1) \\
\int f\, d\nu_1 &\leq \int f\, d\nu_2, && (2.2)
\end{aligned}
$$

y $\nu_1 \leq \nu_2$, por definición, como se quería demostrar. □

2.2. Acoplamiento

El *acoplamiento* entre procesos estocásticos es la construcción de estos procesos en un mismo espacio de probabilidad. Este acoplamiento será útil sólo si la forma en que estos procesos están relacionados en el espacio de probabilidad común no es trivial. Comenzaremos esta sección dando un ejemplo de aplicación de la técnica de acoplamiento en la demostración del siguiente teorema, la misma que será utilizada muchas veces en adelante.

Teorema 2.7. *Sea* $X = \{0,1\}^S$*, con el orden parcial natural, en donde* S *es un conjunto finito. Para* $\eta, \zeta \in X$ *definimos* $\eta \vee \zeta$ *y* $\eta \wedge \zeta$ *por*

$$
\begin{aligned}
(\eta \vee \zeta)(x) &= \max\{\eta(x), \zeta(x)\} \\
(\eta \wedge \zeta)(x) &= \min\{\eta(x), \zeta(x)\}.
\end{aligned}
$$

Supongamos que μ_1 y μ_2 son medidas de probabilidad en X que asignan una probabilidad estrictamente positiva a cada punto de X. Si

$$\mu_1(\eta \wedge \zeta)\mu_2(\eta \vee \zeta) \geq \mu_1(\eta)\mu_2(\zeta) \tag{2.3}$$

para todo $\eta, \zeta \in X$, entonces $\mu_1 \leq \mu_2$.

Demostración. La idea de la prueba es definir una cadena de Markov en tiempo continuo (η_t, ζ_t) en $\{(\eta, \zeta) \in X \times X : \eta \leq \zeta\}$ que tenga las siguientes propiedades:

(a) η_t es una cadena de Markov irreducible en X con medida de equilibrio μ_1, y

(b) ζ_t es una cadena de Markov irreducible en X con medida de equilibrio μ_2

Una vez que una (η_t, ζ_t) con estas propiedades es construida, se sigue que para $f \in \mathcal{M}$ y $\eta \leq \zeta$,

$$\mathbb{E}^{(\eta,\zeta)}[1_{\{\eta_t \leq \zeta_t\}}(f(\eta_t) - f(\zeta_t))] \leq 0$$
$$\mathbb{E}^{(\eta,\zeta)}[f(\eta_t)] - \mathbb{E}^{(\eta,\zeta)}[f(\zeta_t)] \leq 0.$$

y de aquí que $\mathbb{E}^{\eta} f(\eta_t) \leq \mathbb{E}^{\zeta} f(\zeta_t)$. Pasando al límite cuando $t \to \infty$, se sigue que $\int f\, d\mu_1 \leq \int f\, d\mu_2$ para $f \in \mathcal{M}$, y de aquí que $\mu_1 \leq \mu_2$.

Con la finalidad de que se satisfagan (a) y (b), los procesos marginales η_t y ζ_t deben ser escogidos para tener tasas de transición (en cada x) definidas por:

$$\left.\begin{array}{lll} \eta \to \eta_x & \text{a tasa } 1 & \text{si } \eta(x) = 0 \\ \eta \to \eta_x & \text{a tasa } \frac{\mu_1(\eta_x)}{\mu_1(\eta)} & \text{si } \eta(x) = 1 \end{array}\right\}$$

para η_t, y

$$\left.\begin{array}{lll} \zeta \to \zeta_x & \text{a tasa } 1 & \text{si } \zeta(x) = 0 \\ \zeta \to \zeta_x & \text{a tasa } \frac{\mu_2(\zeta_x)}{\mu_2(\zeta)} & \text{si } \zeta(x) = 1 \end{array}\right\}$$

para ζ_t.

Ahora debemos escoger las tasas de transición para el proceso acoplado, de tal manera que estas sean consistentes con las tasas de transición de los procesos marginales definidas anteriormente y que preserven la relación $\eta_t \leq \zeta_t$. La elección más natural es la siguiente, para η_ζ:

$$\left.\begin{array}{ll}
(\eta, \zeta) \to (\eta_x, \zeta) \text{ a tasa } 1 & \text{si } \eta(x) = 0 \text{ y } \zeta(x) = 1, \\
(\eta, \zeta) \to (\eta, \zeta_x) \text{ a tasa } \frac{\mu_2(\zeta_x)}{\mu_2(\zeta)} & \text{si } \eta(x) = 0 \text{ y } \zeta(x) = 1, \\
(\eta, \zeta) \to (\eta_x, \zeta_x) \text{ a tasa } 1 & \text{si } \eta(x) = \zeta(x) = 0, \\
(\eta, \zeta) \to (\eta_x, \zeta_x) \text{ a tasa } \frac{\mu_2(\zeta_x)}{\mu_2(\zeta)} & \text{si } \eta(x) = \zeta(x) = 1, \text{ y} \\
(\eta, \zeta) \to (\eta_x, \zeta) \text{ a tasa } \frac{\mu_1(\eta_x)}{\mu_1(\eta)} - \frac{\mu_2(\zeta_x)}{\mu_2(\zeta)} & \text{si } \eta(x) = \zeta(x) = 1.
\end{array}\right\}$$

Esta elección cumple con todas las propiedades. Sin embargo, para que las tasas estén bien definidas, es necesario que

$$\frac{\mu_1(\eta_x)}{\mu_1(\eta)} \geq \frac{\mu_2(\zeta_x)}{\mu_2(\zeta)}$$

siempre que $\eta \leq \zeta$ y $\eta(x) = \zeta(x) = 1$. Como $\eta \wedge \zeta_x = \eta_x$ y $\eta \vee \zeta_x = \zeta$, podemos reescribir la anterior condición como:

$$\mu_1(\eta \wedge \zeta_x)\mu_2(\eta \vee \zeta_x) \geq \mu_1(\eta)\mu_2(\zeta_x).$$

Esta condición es cierta, pues la hipótesis (2.3) la implica. De acuerdo a la discusión anterior, esto prueba que $\mu_1 \leq \mu_2$. □

El acoplamiento usado en la demostración anterior se denomina *acoplamiento básico* o *acoplamiento de Vasershtein* (Liggett, 1985). Lo que se busca con este tipo de acoplamiento es hacer que los procesos coincidan lo más posible conforme transcurre el tiempo. Como vimos, la idea consiste en que los procesos evolucionen independientemente si sus coordenadas son distintas, pero que evolucionen en conjunto una vez que sus coordenadas coinciden. La tasa a las que los procesos evolucionan en conjunto debe ser, necesariamente, la menor de las tasas a las que cada uno puede pasar a la configuración respectiva. A partir de ahora trabajaremos con procesos de spin. Asumiendo que $c_1(x, \eta)$ y $c_2(x, \eta)$

sean las tasas respectivas de los procesos, la tasa para el proceso acoplado será

$$c(x,\eta,\zeta) = \text{mín}\{c_1(x,\eta), c_2(x,\eta)\},$$

siempre que $\eta(x) = \zeta(x)$. Más formalmente, podemos escribir el pre-generador $\tilde{\Omega}$ de dos sistemas de espín acoplados, mediante el acoplamiento básico, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega} f(\eta,\zeta) &= \sum_{x:\eta(x)\neq\zeta(x)} c_1(x,\eta)[f(\eta_x,\zeta) - f(\eta,\zeta)] \\
&\quad + \sum_{x:\eta(x)\neq\zeta(x)} c_2(x,\zeta)[f(\eta,\zeta_x) - f(\eta,\zeta)] \\
&\quad + \sum_{x:\eta(x)=\zeta(x)} c(x,\eta,\zeta)[f(\eta_x,\zeta_x) - f(\eta,\zeta)] \\
&\quad + \sum_{x:\eta(x)=\zeta(x)} [c_1(x,\eta) - c(x,\eta,\zeta)][f(\eta_x,\zeta) - f(\eta,\zeta)] \\
&\quad + \sum_{x:\eta(x)=\zeta(x)} [c_2(x,\eta) - c(x,\eta,\zeta)][f(\eta,\zeta_x) - f(\eta,\zeta)].
\end{aligned} \tag{2.4}$$

En la anterior expresión se observan claramente todas las posibles transiciones para el proceso acoplado, sin embargo, más adelante nos será útil reescribir este (pre)generador como:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega} f(\eta,\zeta) &= \sum_x c_1(x,\eta)[f(\eta_x,\zeta) - f(\eta,\zeta)] \\
&\quad + \sum_x c_2(x,\zeta)[f(\eta,\zeta_x) - f(\eta,\zeta)] \\
&\quad + \sum_{x:\eta(x)=\zeta(x)} c(x,\eta,\zeta)[f(\eta_x,\zeta_x) - f(\eta_x,\zeta) - f(\eta,\zeta_x) + f(\eta,\zeta)]
\end{aligned} \tag{2.5}$$

El siguiente lema nos da una relación entre los generadores del proceso acoplado y de los procesos originales.

Lema 2.8. *Sea $g \in D(X)$.*

(a) Si $f(\eta,\zeta) = g(\eta)$, entonces $\tilde{\Omega} f(\eta,\zeta) = \Omega_1 g(\eta)$, y

(b) *si* $f(\eta,\zeta) = g(\zeta)$, *entonces* $\tilde{\Omega} f(\eta,\zeta) = \Omega_2 g(\zeta)$

en donde Ω_1 *y* Ω_2 *son los generadores correspondientes a las tasas* c_1 *y* c_2.

Demostración. Para la parte (a), si $f(\eta,\zeta) = g(\eta)$, los dos últimos términos de (2.6) desaparecen y

$$\tilde{\Omega} f(\eta,\zeta) = \sum_x c_1(x,\eta)[g(\eta_x) - g(\eta)] = \Omega_1 g(\eta).$$

En donde Ω_1 es el generador del proceso con tasas $c_1(x,\eta)$, definido en (1.6). La prueba de (b) es similar. □

En adelante, se dará una descripción más informal de la forma en que se realiza el acoplamiento, aunque siempre pueden escribirse las tasas del proceso acoplado como hicimos anteriormente, así como definir apropiadamente el generador del proceso acoplado.

Teorema 2.9. *La clausura de* $\tilde{\Omega}$ *en* $C(X \times X)$ *es el generador de un semigrupo de Markov* $\tilde{S}(t)$ *en* $C(X \times X)$. *Sean* $S_i(t)$ *los semigrupos asociados a los generadores* Ω_i, *para* $i = 1, 2$. *Dada* $g \in C(X)$, *si* $f(\eta,\zeta) = g(\eta)$, *entonces* $\tilde{S}(t) f(\eta,\zeta) = S_1(t) g(\eta)$, *mientras que si* $f(\eta,\zeta) = g(\zeta)$, *entonces* $\tilde{S}(t) f(\eta,\zeta) = S_2(t) g(\zeta)$. *En particular, si* (η_t, ζ_t) *es el proceso de Feller con semigrupo* $\tilde{S}(t)$, *entonces* η_t *y* ζ_t *son markovianos separadamente con semigrupos* $S_1(t)$ *y* $S_2(t)$, *respectivamente.*

Demostración. La demostración de este teorema puede encontrarse en Liggett (1985) □

Diremos que un proceso está dominado por otro si dados $\eta \leq \zeta$, entonces $\eta_t \leq \zeta_t$ para todo $t \geq 0$. Ahora probaremos un teorema que nos asegura que la dominación de un proceso por otro se mantiene bajo ciertas condiciones sobre las tasas de ambos procesos. Para esto, haremos uso implícito del acoplamiento básico definido anteriormente.

Teorema 2.10. *Sea* $K = \{(\eta,\zeta) \in X \times X : \eta \leq \zeta\}$. *Supongamos que siempre que* $\eta \leq \zeta$,

$$\begin{aligned} c_1(x,\eta) &\leq c_2(x,\zeta) \quad \textit{si } \eta(x) = \zeta(x) = 0, \quad \textit{y} \\ c_1(x,\eta) &\geq c_2(x,\zeta) \quad \textit{si } \eta(x) = \zeta(x) = 1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Entonces, para todo $(\eta, \zeta) \in K$ *y* $t \geq 0$*,*

$$\mathbb{P}^{(\eta,\zeta)}[(\eta_t, \zeta_t) \in K] = 1$$

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ el conjunto de todas las funciones en $C(X \times X)$ tales que $f \geq 0$ y $f = 0$ en K. Para $\lambda > 0$ y $f \in \mathscr{A}$, definamos $h \in \mathscr{D}(\tilde{\Omega})$, el dominio de $\tilde{\Omega}$, por

$$h - \lambda \tilde{\Omega} h = f.$$

Sea $(\eta, \zeta) \in K$ un punto en que h alcanza su máximo en K. Vamos a mostrar que $\tilde{\Omega} h(\eta, \zeta) \leq 0$, por lo que $h \leq f = 0$ en K. Como $h \geq 0$, por el teorema de Hille-Yosida (teorema 1.15), se seguirá que $h \in \mathscr{A}$. Para mostrar que $\tilde{\Omega} h(\eta, \zeta) \leq 0$, verificaremos que cada uno de los términos de la suma en la definición de $\tilde{\Omega} h$ (ecuación (2.5)) no es positivo. Consideremos los siguientes tres casos:

(a) $\eta(x) \neq \zeta(x)$, en cuyo caso $(\eta, \zeta) \in K$ implica que que $(\eta_x, \zeta) \in K$ y $(\eta, \zeta_x) \in K$, por lo que $h(\eta_x, \zeta) \leq h(\eta, \zeta)$ y $h(\eta, \zeta_x) \leq h(\eta, \zeta)$.

(b) $\eta(x) = \zeta(x) = 0$, en cuyo caso $(\eta, \zeta) \in K$ implica que que $(\eta_x, \zeta_x) \in K$ y $(\eta, \zeta_x) \in K$, por lo que $h(\eta_x, \zeta_x) \leq h(\eta, \zeta)$ y $h(\eta, \zeta_x) \leq h(\eta, \zeta)$. En este caso, $(\eta_x, \zeta) \notin K$, por lo que usaremos la primera parte de (2.6) para obtener $c_1(x, \eta) = c(x, \eta, \zeta)$ y hacer nulos estos términos.

(c) $\eta(x) = \zeta(x) = 1$, en cuyo caso $(\eta, \zeta) \in K$ implica que que $(\eta_x, \zeta_x) \in K$ y $(\eta_x, \zeta) \in K$, por lo que $h(\eta_x, \zeta_x) \leq h(\eta, \zeta)$ y $h(\eta_x, \zeta) \leq h(\eta, \zeta)$. En este caso, $(\eta, \zeta_x) \notin K$, por lo que, similarmente al punto anterior, usaremos la segunda parte de (2.6), para obtener $c_2(x, \eta) = c(x, \eta, \zeta)$ y hacer nulos estos términos.

Esto muestra que el operador $(I - \lambda \tilde{\Omega})^{-1}$ lleva $\mathscr{A}$ sobre si mismo. Por el teorema de Hille–Yosida (teorema 1.15), el semigrupo $\tilde{S}(t)$ también lleva $\mathscr{A}$ sobre si mismo, lo que demuestra el teorema. □

Corolario 2.11. *Bajo las hipótesis del teorema 2.10, si μ_1 y μ_2 son medidas de probabilidad en X que satisfacen $\mu_1 \leq \mu_2$, entonces*

$$\mu_1 S_1(t) \leq \mu_2 S_2(t)$$

para todo $t \geq 0$.

Demostración. Sea ν la medida de acoplamiento definida en el teorema 2.4 y (η_t, ζ_t) el proceso construido mediante el acoplamiento básico con distribución inicial ν. Por el teorema 2.10, $\eta_t \leq \zeta_t$ con probabilidad uno para cada $t \geq 0$. Por el teorema 2.9, η_t tiene distribución $\mu_1 S_1(t)$ y ζ_t tiene distribución $\mu_2 S_2(t)$. Luego, la distribución conjunta de (η_t, ζ_t) provee una medida de acoplamiento para $\mu_1 S_1(t)$ y $\mu_2 S_2(t)$ que asegura que

$$\mu_1 S_1(t) \leq \mu_2 S_2(t).$$

□

Corolario 2.12. *Bajo las hipótesis del teorema 2.10, si el proceso con semigrupo $S_2(t)$ es ergódico con la delta de dirac en $\eta \equiv 0$ como medida invariante, entonces lo mismo se cumple para el semigrupo $S_1(t)$.*

Demostración. Por el corolario 2.11, si μ es una medida de probabilidad en X, entonces $\mu S_1(t) \leq \mu S_2(t)$ para todo $t \geq 0$. Por hipótesis, el límite de $\mu S_2(t)$ cuando $t \to \infty$ es la delta de dirac en $\eta \equiv 0$. Luego, por un argumento similar al que aparece en la demostración del teorema 2.7, lo mismo es cierto para $\mu S_1(t)$ y el proceso asociado a $S_1(t)$ es ergódico la única $\mu \leq \delta_0$ es δ_0, pues $\int f d\mu \leq f(0)$ mínimo de f). □

2.3. Dualidad

Definición 2.13. *Supongamos que η_t y ζ_t son procesos de Markov con espacios de estado X e Y respectivamente, y sea $H(\eta, \zeta)$ una función acotada medible en $X \times Y$. Los procesos*

η_t *y* ζ_t *se denominan* duales *con respecto a* H *si*

$$\mathbb{E}^{\eta}H(\eta_t, \zeta) = \mathbb{E}^{\zeta}H(\eta, \zeta_t) \tag{2.7}$$

para todo $\eta \in X$ *y* $\zeta \in Y$

Dado un proceso de Markov η_t, su proceso dual por la función H puede o no existir, dependiendo de la elección de H. Dicho dual dependerá también de la elección del espacio de estados Y para el proceso dual.

Para el caso de sistemas de espín (en particular, para el proceso de contacto), el espacio de estados para el proceso dual suele ser tomado como

$$Y = \{A : A \text{ es un subconjunto finito de } S \cup \infty\},$$

que es numerable.

Por otro lado, para que los cálculos involucrados sean manejables, es importante escoger una función H con una estructura simple. Para el proceso de contacto en particular, una elección útil para H es

$$H(\eta, A) = \begin{cases} \prod_{x \in A \cap S}[1 - \eta(x)] & \text{si } \infty \notin A \\ -\prod_{x \in A \cap S}[1 - \eta(x)] & \text{si } \infty \in A \end{cases} \tag{2.8}$$

El producto sobre el conjunto vacío se considera 1 ($H(\eta, \varnothing) = 1$). A dos procesos de Markov duales por esta función H se les denomina *duales coalescentes*.

Si las tasas $c(x, \eta)$ del sistema de espín pueden escribirse como

$$c(x, \eta) = c(x)\{[1 - \eta(x)] + [2\eta(x) - 1] \sum_{A \in Y} p(x, A) H(\eta, A)\} \tag{2.9}$$

donde

$$c(x) \geq 0, \quad \sup_x c(x) < \infty \tag{2.10}$$

$$p(x, A) \geq 0, \quad \sum_{A} p(x, A) = b(x) \leq 1, \text{ y}, \tag{2.11}$$

$$\sup_{x} c(x) \sum_{A \in Y} p(x, A)|A| < \infty, \tag{2.12}$$

donde $|A|$ denota la cardinalidad de A, las tasas del proceso dual pueden escribirse explícitamente como

$$q(A, B) = \sum_{x \in A \cap S} c(x) \sum_{F} p(x, F) \geq 0, \tag{2.13}$$

en donde la suma es sobre todos los $F \in Y$ tales que $(A \diagdown x) \cup F = B$ si $\infty \notin A \cap F$ y $((A \diagdown x) \cup F) \diagdown \infty = B$ si $\infty \in A \cap F$.

El siguiente teorema brinda una relación entre dos procesos con tales características:

Teorema 2.14. *Sea $S(t)$ el semigrupo para el sistema de espín η_t con tasas $c(x, \eta)$ de la forma (2.9), satisfaciendo las condiciones (2.10), (2.11) y (2.12), y sea A_t la cadena de Markov en Y con tasas de transición $q(A, B)$ como en (2.13). Entonces, para cada $\eta \in X$, $A \in Y$ y $t \geq 0$, se cumple que*

$$S(t)H(\cdot, A)(\eta) = \mathbb{E}^{A}\left[H(\eta, A_t)\exp\left\{-\int_0^t V(A_s)[[\sum_{x \in A_s \cap S} c(x)(1 - b(x))]]\, ds\right\}\right]. \tag{2.14}$$

Demostración. La demostración de este resultado debida a Holley y Stroock (1979) puede encontrarse en Liggett (1985). □

Para el caso particular en que $b(x) = 1$, podemos presentar el siguiente corolario:

Corolario 2.15. *Bajo las condiciones del teorema 2.14, si $b(x) = 1$ entonces los procesos η_t y A_t son duales coalescentes.*

Demostración. Si $b(x) = 1$, la expresión (2.14) se convierte en

$$\begin{aligned} S(t)H(\cdot, A)(\eta) &= \mathbb{E}^{A}[H(\eta, A_t)] \\ \mathbb{E}^{\eta}[H(\eta_t, A)] &= \mathbb{E}^{A}[H(\eta, A_t)] \end{aligned}$$

Luego, por definición, η_t y A_t son duales, y por la forma escogida de H duales coalescentes.

□

Definamos $\tau = \text{ínf}\{t \geq 0 : A_t = \varnothing \text{ ó } \{\infty\}\}$, y sea $\sigma(A) = \mathbb{P}^A(\tau = \infty)$, para todo $A \in Y$. Notemos que $\sigma(A)$ representa la posibilidad de que el proceso comenzando en A nunca se extinga.

La siguiente propiedad para el dual A_t será útil para el trabajo posterior.

Proposición 2.16. *En el caso de duales coalescentes, si $p(x, A) = 0$ siempre que $\infty \in A$, entonces $\sigma(A)$ es* submodular *en el sentido de*

$$\sigma(A \cup B) + \sigma(A \cap B) \leq \sigma(A) + \sigma(B)$$

siempre que $A, B \subset S$.

Demostración. La demostración se puede encontrar en Liggett (1985). □

Capítulo 3

El proceso de contacto

En este capítulo introduciremos formalmente el proceso de contacto, construyéndolo a partir de sus tasas de transición. Además, aplicando las técnicas vistas en el capítulo anterior, probaremos algunas propiedades importantes sobre este proceso.

Comenzaremos hablando de los sistemas de espín atractivos, del cual el proceso de contacto es un caso particular.

3.1. Sistemas de espín atractivos

Definición 3.1. *Un sistema de espín con tasa $c(x,\eta)$ se dice* atractivo *si, cuando $\eta \leq \zeta$,*

$$\begin{aligned} c(x,\eta) &\leq c(x,\zeta) \quad \textit{si } \eta(x) = \zeta(x) = 0, \quad \textit{y} \\ c(x,\eta) &\geq c(x,\zeta) \quad \textit{si } \eta(x) = \zeta(x) = 1. \end{aligned}$$

Teorema 3.2. *Sea $S(t)$ el semigrupo para un sistema de espín atractivo. Entonces*

(a) $\delta_0 S(s) \leq \delta_0 S(t)$, *para* $0 \leq s \leq t$,

(b) $\delta_1 S(s) \geq \delta_1 S(t)$, *para* $0 \leq s \leq t$,

(c) $\delta_0 S(t) \leq \mu S(t) \leq \delta_1 S(t)$, *para* $t \geq 0$ *y* $\mu \in \mathcal{P}$,

(d) $\underline{\nu} = \lim_{t\to\infty} \delta_0 S(t)$ *y* $\bar{\nu} = \lim_{t\to\infty} \delta_1 S(t)$ *existen,*

(e) si $\mu \in \mathcal{P}$, $t_n \to \infty$, *y* $\nu = \lim_{n\to\infty} \mu S(t_n)$, *entonces* $\underline{\nu} \leq \nu \leq \bar{\nu}$, *y*

(f) $\underline{\nu}, \bar{\nu} \in \mathcal{I}_e$.

Demostración. Para la parte (a), por definición,

$$\delta_0 \leq \delta_0 S(t-s) \quad \text{para } 0 \leq s \leq t,$$

luego, por la atractividad y por el corolario 2.11 con $c_1(x,\eta) = c_2(x,\eta) = c(x,\eta)$ en (2.6), y la propiedad de semigrupo, obtenemos

$$\delta_0 S(s) \leq \delta_0 S(t-s)S(s) = \delta_0 S(t).$$

Para (b), análogamente, para $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned} \delta_1 &\geq \delta_1 S(t-s) \\ \delta_1 S(s) &\geq \delta_1 S(t-s)S(s) = \delta_1 S(t). \end{aligned}$$

Para (c), por definición de monotonicidad, tenemos

$$\delta_0 \leq \mu \leq \delta_1,$$

para toda $\mu \in \mathcal{P}$. Luego, para $t \geq 0$, como antes,

$$\delta_0 S(t) \leq \mu S(t) \leq \delta_1 S(t).$$

Para (d), es suficiente usar (a) y (b) junto con la compacidad de $\mathcal{P}$ con la topología de la convergencia débil, y el hecho de que $\mathcal{M}$ tiene la propiedad de que, dadas dos $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}$, si

$$\int f \, d\mu_1 = \int f \, d\mu_2$$

para toda $f \in \mathcal{M}$, entonces $\mu_1 = \mu_2$.

Para (e), (c) implica que para toda $f \in \mathcal{M}$ y para todo $n \geq 0$

$$\int f\, d[\delta_0 S(t_n)] \leq \int f\, d[\mu S(t_n)] \leq \int f\, d[\delta_1 S(t_n)],$$

y tomando el límite cuando $n \to \infty$,

$$\int f\, d\underline{\nu} \leq \int f\, d\nu \leq \int f\, d\bar{\nu}.$$

Para (f), notemos que $\underline{\nu}, \bar{\nu} \in \mathcal{I}$ en virtud de la proposición 1.9. Ahora, supongamos que

$$\bar{\nu} = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$$

para algún $\alpha \in]0,1[$ y $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{I}$. La parte (e) de este teorema implica que $\mu_1 \leq \bar{\nu}$ y $\mu_2 \leq \bar{\nu}$. Luego, para toda $f \in \mathcal{M}$

$$\int f\, d\mu_1 \leq \int f\, d\bar{\nu}, \qquad \int f\, d\mu_2 \leq \int f\, d\bar{\nu}, \text{ y}$$

$$\int f\, d\bar{\nu} = \alpha \int f\, d\mu_1 + (1-\alpha) \int f\, d\mu_2$$

lo que implica

$$\int f\, d\nu = \int f\, d\mu_1 = \int f\, d\mu_2$$

y $\bar{\nu} \in \mathcal{I}_e$. De manera análoga, $\underline{\nu} \in \mathcal{I}_e$. □

Corolario 3.3. *Para un sistema de espín atractivo, la siguientes tres proposiciones son equivalentes:*

(a) El proceso es ergódico

(b) $\mathcal{I}$ tiene un sólo elemento

(c) $\underline{\nu} = \bar{\nu}$

Demostración. Por la definición 1.10, (a) implica (b). Si $\mathcal{I}$ tiene un solo elemento, necesariamente $\underline{\nu} = \bar{\nu}$, pues ambas pertenecen a $\mathcal{I}$ por la parte (f) del teorema 3.2, por lo que (b) implica (c). Finalmente, si $\mu \in \mathcal{P}$, la familia de medidas de probabilidad $\{\mu S(t),\ t \geq 0\}$ es relativamente compacta en $\mathcal{P}$. Por la parte (e) del teorema 3.2, el límite de toda subsucesión de esta familia cuando $t \to \infty$ es igual a $\nu = \underline{\nu} = \bar{\nu}$. Luego, el límite $\lim_{t\to\infty} \mu S(t)$ existe y es igual a ν. Nuevamente, por la definición 1.10, el proceso es ergódico. □

Dada una configuración $\eta \in X$, definamos la configuración η_x por

$$\eta_x(y) = \begin{cases} \eta(y) & y \neq x \\ 1 - \eta(y) & y = x \end{cases}$$

El siguiente teorema nos da información sobre el conjunto de medidas invariantes extremales de un sistema de espín atractivo.

Teorema 3.4. *Sea un sistema de espín con $S = \mathbb{Z}^1$, atractivo e invariante por traslaciones, en donde las tasas del proceso en la coordenada x dependen únicamente de $\{\eta(x-1), \eta(x), \eta(x+1)\}$. Si $c(x,\eta) + c(x,\eta_x) > 0$ siempre que $\eta(x-1) \neq \eta(x+1)$, entonces $\mathcal{I}_e = \{\underline{\nu}, \bar{\nu}\}$.*

Demostración. La demostración se puede encontrar en Liggett (1978). □

3.2. Proceso de contacto

Definición 3.5 (Proceso de contacto)**.** *Un proceso de contacto es un sistema de espín en el cual $S = \mathbb{Z}^d$ y las tasas están definidas por*

$$c_\lambda(x,\eta) = \begin{cases} \lambda \sum_{|y-x|=1} \eta(y) & si \quad \eta(x) = 0 \\ 1 & si \quad \eta(x) = 1 \end{cases}$$

donde λ es un parámetro no negativo.

Lema 3.6. *Todo proceso de contacto es atractivo.*

Demostración. Sea $\eta \leq \zeta$, entonces $\eta(y) \leq \zeta(y)$, para todo $y \in S$. Si $\eta(x) = \zeta(x) = 0$, en particular se cumple que $\sum_{|y-x|=1} \eta(y) \leq \sum_{|y-x|=1} \zeta(y)$ y, dado $\lambda \geq 0$, tenemos que

$$\lambda \sum_{|y-x|=1} \eta(y) \leq \lambda \sum_{|y-x|=1} \zeta(y).$$

Y, por lo tanto, $c(x,\eta) \leq c(x,\zeta)$ para $\eta(x) = \zeta(x) = 0$. Si $\eta(x) = \zeta(x) = 1$, $c(x,\eta) = c(x,\zeta) = 1$ y se cumple, trivialmente, que $c(x,\eta) \geq c(x,\zeta)$, para todo x. Luego, todo sistema de contacto es atractivo. □ □

Lema 3.7. *Dados $\lambda_1 \leq \lambda_2$ positivos, sean dos procesos de contacto con tasas $c_{\lambda_1}(x,\eta)$ y $c_{\lambda_2}(x,\zeta)$ respectivamente. Si $\eta \leq \zeta$, se cumple que*

$$\begin{aligned} c_{\lambda_1}(x,\eta) &\leq c_{\lambda_2}(x,\zeta) \quad \text{si } \eta(x) = \zeta(x) = 0, \quad y \\ c_{\lambda_1}(x,\eta) &\geq c_{\lambda_2}(x,\zeta) \quad \text{si } \eta(x) = \zeta(x) = 1. \end{aligned}$$

Demostración. Si $\eta(x) = \zeta(x) = 0$ es evidente que $c_{\lambda_1}(x,\eta) \leq c_{\lambda_2}(x,\eta)$, a partir de la definición. Además, $c_{\lambda_2}(x,\eta) \leq c_{\lambda_2}(x,\zeta)$ desde que el proceso de contacto es atractivo. Combinando ambas desigualdades, tenemos que $c_{\lambda_1}(x,\eta) \leq c_{\lambda_2}(x,\zeta)$.

Finalmente, si $\eta(x) = \zeta(x) = 1$, la desigualdad es trivialmente cierta, pues todas las tasas son iguales a 1. □

Teorema 3.8. *Dados $\lambda_1 \leq \lambda_2$ positivos y $\eta \leq \zeta$, sean dos procesos de contacto η_t y ζ_t con tasas $c_{\lambda_1}(x,\eta) \leq c_{\lambda_2}(x,\zeta)$, respectivamente. Entonces, existe un acoplamiento tal que para todo $t \geq 0$*

$$\mathbb{P}^{(\eta,\zeta)}[\eta_t \leq \zeta_t] = 1 \tag{3.1}$$

Demostración. En vista del teorema 2.10, es suficiente probar que se verifican las condiciones (2.6), las cuales se cumplen en virtud del lema 3.7. □

Notemos que si $\eta \equiv 0$, es decir, $\eta(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, y reemplazamos en la definición de proceso de contacto, tenemos que las tasas del proceso se reducen a $c(x, \eta) = 0$. Luego, $\Omega f(0) = 0$ y $S(t)f(0) = f(0)$ por el teorema de Hille-Yosida (b), de donde $\eta \equiv 0$ es una configuración invariante para el proceso de contacto.

Proposición 3.9. *Si ν es una medida invariante por el proceso de contacto, entonces $\tilde{\nu} = \nu(\cdot|\eta \not\equiv 0)$ también lo es.*

Demostración. Es consecuencia de la proposición 1.12 y la observación anterior de que $\eta \equiv 0$ es una configuración invariante por el proceso. □

Sea ν_λ la medida invariante superior para el proceso de contacto unidimensional con parámetro $\lambda \geq 0$

$$\nu_\lambda = \lim_{n\to\infty} \delta_1 S(t), \tag{3.2}$$

en donde el límite existe por el teorema 3.2, desde que el proceso de contacto es atractivo. El siguiente teorema nos da una descripción del conjunto de las medidas invariantes extremales del proceso de contacto.

Teorema 3.10. *Dado un proceso de contacto con parámetro $\lambda \geq 0$, $\mathcal{I}_e = \{\delta_0, \nu_\lambda\}$.*

Demostración. Es consecuencia del teorema 3.4. Basta notar que el proceso de contacto es atractivo y sobre $\mathbb{Z}^1$ es invariante por traslaciones y, para todo x y η, se cumple que $\eta(x) = 1$ ó $\eta_x(x) = 1$. Luego $c(x, \eta) + c(x, \eta_x) \geq 1 > 0$, por lo que se cumplen las hipótesis del teorema. □

En el capítulo 1 introducimos algunas condiciones sobre las tasas de un proceso para la existencia de su generador y para la ergodicidad del mismo. Para ello, se definió M (ecuación (1.8)) y ϵ (ecuación (1.9)). En el siguiente lema calcularemos explícitamente M y ϵ para el proceso de contacto.

Lema 3.11. *En un proceso de contacto, $M = 2\lambda d$ y $\epsilon = 1$.*

Demostración. En un proceso de contacto, si $|T| \geq 2$ entonces $c_T(\eta, d\zeta) = 0$, por ser un sistema de espín. Además, si $T = \{x\}$, entonces $c_T(\eta, d\zeta)$ pone masa 1 en $\{0\}$ si

$\eta(x) = 1$, y masa $\lambda \sum_{y:|x-y|=1} \eta(y)$ en $\{1\}$ si $\eta(x) = 0$. Además, $c_{\{x\}}(u) = 0$ si $|u-x| > 1$ pues η_1 y η_2 en la definición de $c_{\{x\}}(u)$ son iguales en x y sus vecinos. Si $|u-x| = 1$ $||c_{\{x\}}(\eta_1, d\zeta) - c_{\{x\}}(\eta_2, d\zeta)||_{\{x\}} = 0$, salvo para $\eta_1(x) = \eta_2(x) = 0$, donde $||c_{\{x\}}(\eta_1, d\zeta) - c_{\{x\}}(\eta_2, d\zeta)||_{\{x\}} = |c(x, \eta_1) - c(x, \eta_2)| = \lambda$, ya que η_1 y η_2 difieren solo en u, vecino de x. Luego, a partir de (1.8), escribimos

$$\begin{aligned}
M &= \sup_{x\in S} \sum_{T\ni x} \sum_{u\neq x} c_T(u) \\
&= \sup_{x\in S} \sum_{\{x\}} \sum_{y:|x-y|=1} \lambda \\
&= \sup_{x\in S} \sum_{\{x\}} 2\lambda d \\
&= \sup_{x\in S} 2\lambda d \\
&= 2\lambda d.
\end{aligned}$$

Análogamente, a partir de (1.9),

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \inf_{u\in S} \inf_{\substack{\eta_1=\eta_2 \\ \text{menos en } u \\ \eta_1(u)\neq\eta_2(u)}} \sum_{T\ni u} [c_T(\eta_1, \{\zeta : \zeta(u) = \eta_2(u)\}) + c_T(\eta_2, \{\zeta : \zeta(u) = \eta_1(u)\})] \\
&= \inf_{u\in S} \inf_{\substack{\eta_1=\eta_2 \\ \text{menos en } u \\ \eta_1(u)\neq\eta_2(u)}} \sum_{\{u\}} [c_{\{u\}}(\eta_1, \{\eta_2(u)\}) + c_{\{u\}}(\eta_2, \{\eta_1(u)\})] \\
&= \inf_{u\in S} \inf_{\eta} [c(u,\eta) + c(u,\eta_u)] \\
&= \inf_{u\in S} [c(u,0) + c(u,0_u)] \\
&= \inf_{u\in S} [1+0] \\
&= 1
\end{aligned}$$

En donde $\eta_u \equiv \eta$ excepto en u, en donde $\eta_u(u) = 1 - \eta(u)$, recordando además que $d\zeta$ es un diferencial (discreto) en $\{0,1\}^{\{u\}}$. $\square$

3.3. Autodualidad del proceso de contacto

Definamos $c(x) = 1 + 2\lambda d$, $p(x, \varnothing) = (1 + 2\lambda d)^{-1}$, $p(x, \{x, y\}) = \frac{\lambda}{1+2\lambda d}$ si $|x - y| = 1$ y $p(x, A) = 0$ en cualquier otro caso.

Usando (2.9), podemos escribir

$$\begin{aligned}
c(x,\eta) &= (1+2\lambda d)\{[1-\eta(x)] + [2\eta(x)-1]\sum_{A\in Y} p(x,A)H(\eta,A)\} \\
&= (1+2\lambda d)\Big\{[1-\eta(x)] \\
&\quad + [2\eta(x)-1]\Big[\sum_{|x-y|=1} p(x,\{x,y\})H(\eta,\{x,y\}) + p(x,\varnothing)H(x,\varnothing)\Big]\Big\} \\
&= (1+2\lambda d)\Big\{[1-\eta(x)] \\
&\quad + [2\eta(x)-1]\Big[\sum_{|x-y|=1} \tfrac{\lambda}{1+2\lambda d}H(\eta,\{x,y\}) + \tfrac{1}{1+2\lambda d}H(x,\varnothing)\Big]\Big\}.
\end{aligned}$$

Si $\eta(x) = 0$, la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
c(x,\eta) &= (1+2\lambda d)\left\{1 - \left(\sum_{|x-y|=1} \frac{\lambda}{1+2\lambda d}[1-\eta(y)] + \frac{1}{1+2\lambda d}\right)\right\} \\
&= (1+2\lambda d)\left\{1 - \left(\sum_{|x-y|=1} \frac{\lambda}{1+2\lambda d} - \sum_{|x-y|=1} \frac{\lambda}{1+2\lambda d}\eta(y) + \frac{1}{1+2\lambda d}\right)\right\} \\
&= (1+2\lambda d)\left\{1 - \left(\frac{2\lambda d}{1+2\lambda d} - \frac{\lambda}{1+2\lambda d}\sum_{|x-y|=1}\eta(y) + \frac{1}{1+2\lambda d}\right)\right\} \\
&= (1+2\lambda d)\left\{1 - \left(1 - \frac{\lambda}{1+2\lambda d}\sum_{|x-y|=1}\eta(y)\right)\right\} \\
&= \lambda \sum_{|x-y|=1} \eta(y).
\end{aligned}$$

Y para $\eta(x) = 1$ obtenemos

$$c(x,\eta) = (1+2\lambda d)\left\{\sum_{|x-y|=1} \frac{\lambda}{1+2\lambda d}[1-\eta(x)][1-\eta(y)] + p(x,\varnothing)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+2\lambda d)\left(\frac{1}{1+2\lambda d}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Observamos que las tasas coinciden con las del proceso de contacto, por lo que éstas pueden escribirse en la forma (2.9). Además, notemos que

$$
\begin{aligned}
b(x) &= \sum_{A} p(x,A) \\
&= p(x,\varnothing) + \sum_{|x-y|=1} p(x,\{x,y\}) \\
&= \frac{1}{1+2\lambda d} + \sum_{|x-y|=1} \frac{\lambda}{1+2\lambda d} \\
&= \frac{1}{1+2\lambda d} + \frac{2\lambda d}{1+2\lambda d} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Con estas observaciones, podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 3.12. *El proceso de contacto es autodual.*

Demostración. Es fácil ver que se cumplen las condiciones del corolario 2.15, luego tenemos que el proceso de contacto η_t es dual (coalescente) con el proceso A_t definido sobre Y, pues las tasas del proceso η_t se pueden expresar como en (2.9) y $b(x) = 1$. Luego, las tasas de A_t están definidas por (2.13). Por definición,

$$
\begin{aligned}
q(A, A \uplus \{x\}) &= \lambda|\{y \in A : |y-x| = 1\}| \\
q(A, A \setminus \{x\}) &= 1
\end{aligned}
$$

Cualquier otra transición tiene tasa igual a 0, por la definición de $p(x,A)$. Las tasas para estas transiciones básicas corresponden con las del proceso de contacto, por lo que el proceso dual A_t es esencialmente un proceso de contacto, con el mismo parámetro, y podemos decir que este es *autodual.* $\square$

3.4. Construcción del proceso de contacto sobre $\mathbb{Z}^d$

En el capítulo 1 presentamos el teorema de Hille–Yosida (teorema 1.15), el cual establece una correspondencia entre los generadores de Markov y los semigrupos de Markov. Además, el teorema 1.5 establece una correspondencia biunívoca entre los semigrupos de Markov y los procesos de Markov. En conjunto, estos dos teoremas nos permiten construir un proceso de Markov a partir de su generador, el cual depende de las tasas del proceso. En particular, para asegurar que el generador pueda ser bien definido, necesitamos que se cumplan las condiciones del teorema 1.17:

$$\begin{aligned} \sup_{x\in S}\sum_{T\ni x} c_T &< \infty, \text{ y} \\ M &< \infty. \end{aligned}$$

Como vimos, para el proceso de contacto, $M = 2\lambda d$, que es finito. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{x\in S}\sum_{T\ni x} c_T &= \sup_{x\in S}\sum_{T\ni x}\sup\{c_T(\eta, W^T) : \eta \in X\} \\ &= \sup_{x\in S}\sum_{\{x\}}\sup\{c(x,\eta) : \eta\in X\} \\ &= \sup_{x\in S}\text{máx}\{\lambda, 2\lambda, \ldots, 2\lambda d, 1\} \\ &= \text{máx}\{\lambda, 2\lambda, \ldots, 2\lambda d, 1\} < \infty \end{aligned}$$

por lo que se verifican las condiciones del teorema y el operador

$$\begin{aligned} \Omega f(\eta) &= \sum_T \int_{W^T} c_T(\eta, d\zeta)[f(\eta^\zeta) - f(\eta)] \\ &= \sum_x c(x,\eta)[f(x,\eta) - f(x,\eta_x)] \end{aligned} \tag{3.3}$$

es un pregenerador de Markov y su clausura en $C(X)$ está definida en $D(X)$ y es generador de un semigrupo de Markov $S(t)$, y por el teorema 1.5, existe un único proceso de Markov

η_t correspondiente a ese semigrupo $S(t)$. Este proceso de Markov está determinado por las tasas de transición $c(x, \eta)$, y será el proceso de contacto.

Capítulo 4

Cambio de fase en el proceso de contacto

4.1. Valor crítico en una dimensión

4.1.1. Existencia del valor crítico

Teorema 4.1. *Dados $\lambda_1 \leq \lambda_2$ positivos, sean $S_i(t)$ los semigrupos de Markov asociados a los procesos de contacto con parámetros λ_i, para $i = 1, 2$. Si el proceso con semigrupo $S_2(t)$ es ergódico con la delta de dirac en $\eta \equiv 0$ como medida invariante, entonces lo mismo se cumple para el semigrupo $S_1(t)$.*

Demostración. Este teorema es una reformulación del corolario 2.12, considerando que las hipótesis del teorema 2.10 se cumplen para el proceso de contacto si $\lambda_1 \leq \lambda_2$, como se muestra en el lema 3.7. □

No es difícil ver que el proceso de contacto es ergódico para $\lambda = 0$. En este caso, sólo es posible la transición a configuraciones con menos unos, y eventualmente todos los unos deberían extinguirse, por lo que el proceso converge a la medida límite igual a la delta de dirac en la configuración $\eta \equiv 0$.

Teorema 4.2. *Dado un proceso de contacto*

$$c_\lambda(x,\eta) = \begin{cases} \lambda \sum_{|y-x|=1} \eta(y) & si \quad \eta(x) = 0 \\ 1 & si \quad \eta(x) = 1 \end{cases}$$

para $\lambda \geq 0$*, existe un valor crítico* $\lambda_c \in [0, \infty]$*, tal que el proceso es ergódico si* $\lambda < \lambda_c$ *y no es ergódico si* $\lambda > \lambda_c$*.*

Demostración. Sean λ_1 y λ_2 tales que $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$, si el proceso con parámetro λ_2 es ergódico, entonces también lo es el proceso con λ_1. Dado que el proceso es ergódico para $\lambda = 0$, definimos

$$\lambda_c = \sup\{\lambda \geq 0 : \text{el proceso con parámetro } \lambda \text{ es ergódico}\},$$

lo que completa la demostración. □

En principio, el valor crítico puede ser cero y el proceso no es ergódico para todo λ positivo, o puede ser infinito, con lo que el proceso sería ergódico para todo λ positivo. En ambos casos, no habría un cambio de fase con respecto al parámetro del proceso para la ergodicidad, por lo que necesitamos mostrar que el parámetro crítico es finito y positivo.

Para ver que el parámetro es estrictamente positivo, basta notar que $M = 2\lambda d$ y $\epsilon = 1$, por el lema 3.11. En virtud del teorema 1.18, obtenemos que el proceso de contacto es ergódico si $2\lambda d < 1$, es decir, para $\lambda < \frac{1}{2d}$. Luego, $\lambda_c \geq \frac{1}{2d}$, que siempre es positivo. En particular, para el proceso de contacto unidimensional ($d = 1$), esto implica que $\lambda_c \geq \frac{1}{2}$.

En la siguiente sección mostraremos que el parámetro crítico puede ser acotado superiormente, con lo que se probará la existencia del cambio de fase en el proceso de contacto con respecto al parámetro λ. Seguiremos los lineamientos de la demostración original de Holley y Liggett (1978) detallada en Liggett (1985), en donde se muestra que $\lambda_c \leq 2$, lo que representa la mejor cota superior conocida para el parámetro crítico del proceso de contacto (unidimensional).

4.1.2. Cota superior para el valor crítico

Definamos

$$\rho(\lambda) = \nu_\lambda\{\eta : \eta(x) = 1\} \tag{4.1}$$

que es independiente de $x \in \mathbb{Z}^1$ desde que ν_λ es invariante por traslaciones. Para el proceso de contacto con parámetro λ, $\rho(\lambda)$ representa la probabilidad de que el proceso no se haya extinto a largo plazo. En este sentido, la siguiente proposición es bastante evidente:

Proposición 4.3. *El proceso de contacto con parámetro $\lambda \geq 0$ es ergódico si y sólo si $\rho(\lambda) = 0$.*

Demostración. Por el corolario 3.3, el proceso es ergódico si y sólo si $\nu_\lambda = \delta_0$. Luego, $\rho(\lambda) = \nu_\lambda\{\eta : \eta(x) = 1\} = \delta_0\{\eta : \eta(x) = 1\} = 0$. □

Proposición 4.4. *$\rho(\lambda)$ es una función no–decreciente de λ.*

Demostración. Sea $\lambda_1 \leq \lambda_2$ los parámetros de dos procesos de contacto con semigrupos $S_1(t)$ y $S_2(t)$, respectivamente. Por el lema 3.7 y el corolario 2.11, se cumple que $\delta_1 S_1(t) \leq \delta_1 S_2(t)$ para todo $t \geq 0$. Luego, tomando una sucesión y pasando al límite, por la proposición 2.6, se cumple que $\nu_{\lambda_1} \leq \nu_{\lambda_2}$. Luego, $\rho(\lambda_1) \leq \rho(\lambda_2)$. □

Proposición 4.5. $\lambda_c = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \rho(\lambda) > 0\}$.

Demostración. Por definición, $\lambda_c = \sup\{\lambda \geq 0 : \text{ el proceso con parámetro } \lambda \text{ es ergódico}\}$. Si $\rho(\lambda_1) = 0$, entonces $\rho(\lambda) = 0$ para todo $\lambda < \lambda_1$, pues ρ es no–negativa y no–decreciente. Dados $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_c \leq \lambda$, $0 = \rho(\lambda_1) < \rho(\lambda)$ pues el proceso es ergódico para λ_1. Luego, $\lambda_c = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \rho(\lambda) > 0\}$, como se quería demostrar. □

La proposición anterior nos permite redefinir λ_c en función de $\rho(\lambda)$. El siguiente teorema resume las principales características de $\rho(\lambda)$.

Teorema 4.6. *(a) $\rho(\lambda) = 0$ para $\lambda < \lambda_c$.*

(b) $\rho(\lambda) > 0$ para $\lambda > \lambda_c$

(c) Si $\rho(\lambda) > 0$, entonces ν_λ no pone masa en $\eta \equiv 0$.

Demostración. Las partes (a) y (b) son evidentes a partir de las proposiciones anteriores y la definición de λ_c. Para (c), la proposición 3.9 asegura que $\nu_\lambda(\cdot|\eta \not\equiv 0)$ es invariante por el proceso. Luego, $\nu_\lambda(\cdot|\eta \not\equiv 0)$ es combinación convexa de $\{\delta_0, \nu_\lambda\}$. Pero como esta no pone masa en $\eta \equiv 0$, necesariamente $\nu_\lambda(\cdot|\eta \not\equiv 0) = \nu_\lambda$, como queríamos probar. $\square$

Sea Y la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^1$. El proceso de contacto (finito) puede ser visto como una cadena de Markov en Y con la identificación

$$A = \{x \in \mathbb{Z}^1 : \eta(x) = 1\}$$

Como se vio anteriormente, este proceso de contacto es el autodual del proceso de contacto η_t. El siguiente teorema formaliza este resultado para el proceso de contacto.

Teorema 4.7. *Para $\eta \in X$ y $A \in Y$,*

$$\mathbb{P}^\eta[\eta_t(x) = 0 \text{ para todo } x \in A] = \mathbb{P}^A[\eta(x) = 0 \text{ para todo } x \in A_t].$$

En particular,

$$\mathbb{P}^1[\eta_t(x) = 0 \text{ para todo } x \in A] = \mathbb{P}^A[A_t = \varnothing]. \tag{4.2}$$

en donde 1 es la configuración $\eta \equiv 1$.

Demostración. Por el corolario 2.15, considerando que para el proceso de contacto $b(x) = 1$, como se vio en el capítulo anterior, tenemos que

$$\mathbb{E}^\eta\left[H(\eta_t, A)\right] = \mathbb{E}^A\left[H(\eta, A_t)\right]$$

Con A finito fijo, $H(\eta_t, A) = 1$ si $\eta_t(x) = 0$ para todo $x \in A$ y cero en cualquier otro caso. Análogamente, con η fijo, $H(\eta, A_t) = 1$ si $\eta(x) = 0$ para todo $x \in A_t$. Con estas consideraciones, la expresión anterior se convierte en

$$\mathbb{P}^{\eta}[\eta_t(x) = 0 \text{ para todo } x \in A] = \mathbb{P}^{A}[\eta(x) = 0 \text{ para todo } x \in A_t],$$

como queríamos demostrar. Para la parte (b) basta reemplazar $\eta \equiv 1$ en (a). $\square$

Como antes, definamos $\tau_A = \text{ínf}\{t \geq 0 : A_t = \varnothing\}$, y sea $\sigma(A) = \mathbb{P}^A[\tau_A = \infty]$, para todo $A \in Y$. El siguiente teorema da información acerca de la forma en que σ depende de A.

Teorema 4.8. *(a) Si $A \subset B$ entonces $\sigma(A) \leq \sigma(B)$.*

(b) $\sigma(A \cup B) + \sigma(A \cap B) \leq \sigma(A) + \sigma(B)$ para todo $A, B \in Y$

(c) Si $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, y $x_{i+1} - x_i \leq y_{i+1} - y_i$ para cada i, entonces $\sigma(\{x_1, \ldots, x_n\}) \leq \sigma(\{y_1, \ldots, y_n\})$

Demostración. Por el teorema 3.8, A_t y B_t pueden ser acoplados de tal manera que $A_t \subset B_t$ para todo $t \geq 0$, desde que $A = A_0 \subset B_0 = B$. Si existe $t_0 \geq 0$ tal que $B_{t_0} = \varnothing$ entonces $B_t = \varnothing$ para todo $t \geq t_0$, pues $\varnothing$ es un estado absorbente. Además, $\mathbb{P}^{(A,B)}[A_t = \varnothing \mid B_t = \varnothing] = 1$, pues $A_t \subset B_t$ casi ciertamente para todo $t \geq 0$. Definimos $A^\tau = \{t \geq 0, A_t = \varnothing\}$ y $[t_0, \infty) \subseteq B^\tau \subseteq A^\tau$ casi ciertamente. Finalmente,

$$\mathbb{P}^{(A,B)}[\text{ínf } A_\tau \leq \text{ínf } B_\tau] = 1,$$

es decir, $\mathbb{P}^{(A,B)}[\tau_A \leq \tau_B] = 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{(A,B)}[\tau_A = \infty] &\leq \mathbb{P}^{(A,B)}[\tau_B = \infty] \\
\mathbb{P}^{A}[\tau_A = \infty] &\leq \mathbb{P}^{B}[\tau_B = \infty] \\
\sigma(A) &\leq \sigma(B).
\end{aligned}$$

La parte (b) se deduce de la proposición 2.16, considerando que el proceso de contacto tiene un dual coalescente y que si $\infty \in A$ entonces $p(x, A) = 0$, desde que el proceso de contacto es un sistema de spin. Para (c) construiremos un acoplamiento entre tres procesos A_t, B_t y C_t, en donde A_t y C_t son copias del proceso de contacto y $A_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $B_0 = C_0 = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Se construirá el acoplamiento de tal manera que $|A_t| = |B_t|$ para todo $t \geq 0$, en donde $|A|$ representa el cardinal de A, siendo B_t más disperso que A_t en el sentido del enunciado (c). El proceso B_t por si mismo podría no ser markoviano, y ciertamente no es un proceso de contacto. Los puntos en A_t y B_t se aparean en orden creciente, mientras que los puntos de B_t se aparean con los mismos puntos de C_t, lo cual es posible desde que $B_t \subset C_t$. El acoplamiento será como sigue:

1. Las muertes en puntos pareados ocurren simultáneamente.
2. Los nacimientos en espacios vacíos adyacentes a puntos apareados ocurren simultáneamente.
3. Los puntos en $C_t \setminus B_t$ mueren independientemente.

Este acoplamiento tiene las propiedades deseadas y $|A_t| = |B_t| \leq |C_t|$, por lo que $A_0 \neq \varnothing$ implica que $C_0 \neq \varnothing$. Luego, $\sigma(A) \leq \sigma(C)$, lo que completa la demostración. □

No es difícil ver que $\sigma(A)$ tiene una interpretación similar a la de $\rho(\lambda)$, para el proceso A_t partiendo de A. El siguiente teorema nos muestra más claramente la relación entre $\sigma(A)$ y $\rho(\lambda)$.

Teorema 4.9. *(a)* $\sigma(A) = \nu_\lambda\{\eta : \eta(x) = 1$ *para algún* $x \in A\}$ *y, en particular,* $\rho(\lambda) = \sigma(\{x\})$ *para cualquier* $x \in \mathbb{Z}^1$.

(b) $\lambda_c = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \sigma(A) < 0\}$ *para todo* $A \in Y$.

(c) $\rho(\lambda_c) = 0$ *si y sólo si* $\sigma(A) = 0$ *para todo* A *cuando* $\lambda = \lambda_c$.

(d) *Si* $\rho(\lambda) > 0$, *entonces* $\lim_{|A|\to\infty} \sigma(A) = 1$.

Demostración. Para la parte (a), se deduce de (4.2) que

$$\mathbb{P}^1[\eta_t(x) \neq 0 \text{ para algún } x \in A] = \mathbb{P}^A[A_t \neq \varnothing].$$

Tomando el límite cuando $t \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}^1[\eta_t \neq 0 \text{ para algún } x \in A] = \nu_\lambda\{\eta : \eta(x) = 1 \text{ para algún } x \in A\}, \text{ y}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}^A[A_t \neq \varnothing] = \sigma(A).$$

La última igualdad se deduce del hecho de que si A_t es diferente del vacío para algún t_0, lo mismo es cierto para todo $t \leq t_0$. Para el caso de que A tenga un sólo elemento, es fácil ver que $\sigma(A) = \rho(\lambda)$. La parte (b) se sigue de la monotonía de $\sigma(A)$ en el sentido de la parte (a) del teorema 4.8 y la definición de $\rho(\lambda)$. Para la parte (c), de la parte (b) del teorema 4.8 se deduce que

$$\sigma(A) = \sigma(\cup_{x\in A}\{x\}) \leq |A|\sigma(\{x\}), \tag{4.3}$$

para todo $A \neq \varnothing$. Por la parte (a) de este teorema, tenemos que $\rho(\lambda) \leq \sigma(A) \leq |A|\rho(\lambda)$. Por hipótesis, $\rho(\lambda_c) \leq \sigma(A) = 0$, lo que implica que $\rho(\lambda_c) = 0$. El sentido contrario se obtiene haciendo $\rho(\lambda_c) = 0$ en (4.3). Para la parte (d), dado $|A| = n$, la parte (c) del teorema 4.8 implica que $\sigma(A) \geq \sigma(\{1,\ldots,n\})$. Luego, tomando el límite cuando $n \to \infty$ tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sigma(\{1,\ldots,n\}) &= \nu_\lambda\{\eta : \eta(x) = 1 \text{ para algún } x\} \\ 1 - \lim_{n\to\infty} \sigma(\{1,\ldots,n\}) &= 1 - \nu_\lambda\{\eta : \eta(x) = 1 \text{ para algún } x\} \\ &= \nu_\lambda\{\eta : \eta(x) = 0 \text{ para todo } x\} = 0, \end{aligned}$$

esto último porque ν_λ no pone masa en $\eta \equiv 0$. □

El resto de esta sección está dedicado a probar que $\lambda_c \leq 2$. La idea de la prueba consiste en encontrar una función h en Y que satisfaga:

$$h(\varnothing) = 0 \text{ y } 0 < h(A) \leq 1 \text{ para } A \neq \varnothing. \tag{4.4}$$

$$\lim_{|A|\to\infty} h(A) = 1, \text{ y} \tag{4.5}$$

$$\mathbb{E}^A h(A_t) \geq h(A) \text{ para } A \in Y \text{ y } t \geq 0. \tag{4.6}$$

Si se puede encontrar tal función, por (4.4) y (4.5) se sigue que:

$$\sigma(A) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}^A h(A_t).$$

Luego tenemos que $\sigma(A) \geq h(A)$ por (4.6), de manera que $\rho(\lambda) = \sigma(\{x\}) \geq h(\{x\}) > 0$. Así, $\rho(\lambda) > 0$ y el proceso es ergódico para dicho λ. La principal dificultad estará en encontrar una h apropiada y luego probar (4.6) para esa elección. Por otro lado de (4.6) obtenemos,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^A h(A_t) - h(A) &\geq 0 \\ \mathbb{E}^A h(A_t) - \mathbb{E}^A h(A_0) &\geq 0 \\ \frac{\mathbb{E}^A h(A_t) - \mathbb{E}^A h(A_0)}{t} &\geq 0, \end{aligned}$$

para $t \geq 0$, y tomando el límite cuando $t \to 0$ obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}^A h(A_t) \mid_{t=0} \geq 0, \tag{4.7}$$

para todo $A \in Y$. Por definición, (4.7) es equivalente a $\Omega S(0) f(A) = \Omega f(A) \geq 0$, de donde podemos escribir, luego de reordenar los términos:

$$\sum_{x\in A} [h(A) - h(A \setminus x)] \leq \lambda \sum_{x \notin A} (1_A(x-1) + 1_A(x+1))[h(A \cup x) - h(A)] \tag{4.8}$$

para todo $A \in Y$, y en donde $1_A(x)$ es la función indicadora de A.

Para encontrar tal h, usaremos la idea de Holley y Liggett (1978), resumida a continuación:

1. Escoger una h de la forma

$$h(A) = \mu\{\eta : \eta(x) = 1 \text{ para algún } x \in A\} \tag{4.9}$$

para alguna medida de probabilidad μ en x (con $h(\varnothing) = 0$).

2. Escoger μ como la medida de renovación estacionaria correspondiente a cierta densidad de probabilidad $f(n)$ de media finita en $\{1, 2, \dots\}$. Esto significa que $\mu \in \mathcal{I}$ y que si $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, entonces

$$\begin{aligned} \mu\{\eta : \eta(x_i) &= 1 \text{ para } 1 \leq i \leq n \text{ y } \eta(x) = 0 \\ &\quad \text{para todo } x \notin A \text{ tal que } x_i < x < x_n\} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} f(x_{i+1} - x_i)}{\sum_{k=1}^{\infty} k f(k)}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

3. Escoger la densidad de probabilidad f de tal manera que se cumpla la igualdad en (4.8) para todo A de la forma $\{1, 2, \dots, n\}$.

Los siguientes tres lemas no permitirán encontrar una h con las propiedades deseadas.

Lema 4.10. *Si $\lambda \geq 2$, la única densidad de probabilidad f en $\{1, 2, \dots\}$ con media finita, tal que h definida en Y por (4.9) y (4.10) satisface (4.8) cumpliéndose la igualdad para todo A de la forma $A = \{1, \dots, n\}$ está dada por $f(n) = F(n) - F(n+1)$, en donde:*

$$F(n+1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \frac{1}{(2\lambda)^n} \quad \textit{para } n \geq 0. \tag{4.11}$$

Si $0 < \lambda < 2$, no existe tal densidad de probabilidad.

Demostración. Supongamos que f es una densidad de probabilidad con media finita y sea $F(n) = \sum_{k=n}^{\infty} f(k)$. Luego, definamos h y μ como en (4.9) y (4.10). Entonces

$$F(1) = 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} F(k) = \sum_{n=1}^{\infty} nf(n) < \infty,$$

y para $x \in A$,

$$\begin{aligned} h(A) - h(A\setminus x) &= \mu\{\eta : \eta(x) = 1 \text{ para algún } x \in A\} \\ &\quad - \mu\{\eta : \eta(y) = 1 \text{ para algún } y \in A\setminus\{x\}\} \\ &= \mu\{\eta : \eta(x) = 1 \text{ y } \eta(y) = 0 \text{ para todo } y \in A\setminus\{x\}\}. \end{aligned}$$

Además, para $A = \{1, \ldots, n\}$ y $x \in A$ tenemos,

$$\begin{aligned} h(A) - h(A\setminus x) &= \mu\{\eta : \eta(x) = 1 \text{ y } \eta(y) = 0 \text{ para todo } y \in A\setminus x\} \\ &= \frac{1}{\sum_1^{\infty} kf(k)} \left[\sum_{r=x}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} f(r)f(m-x) \right] \\ &= \frac{1}{\sum_1^{\infty} kf(k)} \left[\sum_{r=x}^{\infty} f(r) \sum_{m=n+1}^{\infty} f(m-x) \right] \\ &= \frac{1}{\sum_1^{\infty} kf(k)} \sum_{r=x}^{\infty} f(r) \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty} f(m-x) \\ &= \frac{F(x)F(n+1-x)}{\sum_1^{\infty} kf(k)}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h(A \cup \{0\}) - h(A) &= \mu\{\eta : \eta(x) = 1 \text{ y } \eta(y) = 0 \text{ para todo } y \in A\} \\ &= \frac{1}{\sum_1^{\infty} kf(k)} \sum_{k=1}^{\infty} f(n+k) \\ &= \frac{1}{\sum_1^{\infty} kf(k)} \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = \frac{F(n+1)}{\sum_1^{\infty} kf(k)}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$h(A \cup \{n+1\}) - h(A) = \frac{F(n+1)}{\sum_1^\infty kf(k)}$$

.

Por hipótesis, se cumple que (4.8) coincide con la igualdad para A de la forma $\{1, \ldots .n\}$, de donde obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} F(k)F(n+1-k) = 2\lambda F(n+1), \quad n \geq 1. \tag{4.12}$$

Para resolver esta ecuación con $F(1) = 1$, introducimos la función generadora

$$\phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} F(n)u^n. \tag{4.13}$$

Multiplicando (4.12) por u^{n+1} y sumando para $n \geq 1$ obtenemos

$$\phi^2(u) = 2\lambda[\phi(u) - u]$$

lo que implica que $\phi(u) = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2u\lambda}$, pero como $\phi'(0) = F(1) = 1$, la solución es

$$\phi(u) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 2u\lambda}.$$

Esta solución es real y analítica para $u < \lambda/2$ por lo que el radio de convergencia de (4.13) es $\lambda/2$. Luego, $F(n)$ no es sumable si $\lambda < 2$. Por otro lado, si $\lambda \geq 2$, podemos expandir $\phi(u)$ en series de potencias. Para esto, calculamos la derivada $(n+1)$-ésima de $\phi(u)$, que es igual a

$$\phi^{(n+1)}(u) = \lambda^{n+1}\frac{(2n)!}{2^n n!}(\lambda^2 - 2\lambda u)^{\frac{-1-2n}{2}},$$

de donde $\phi^{(n+1)}(0)$ es igual a

$$\phi^{(n+1)}(0) = \lambda^{n+1}\frac{(2n)!}{2^n n!}(\lambda^2)^{\frac{-1-2n}{2}} = \frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{(2\lambda)^n}.$$

Así, considerando que $\phi(0) = 0$, podemos desarrollar ϕ en serie de potencias y obtener

$$\phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(2\lambda)^n} u^{n+1}.$$

Igualando término a término con (4.13), obtenemos

$$F(n+1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \frac{1}{(2\lambda)^n},$$

que nos da (4.11), como se quería. Para terminar, debemos mostrar que $F(n)$ es decreciente para que $f(n)$ esté bien definida. Para esto, basta mostrar que $F(n+1) \geq F(n+2)$ lo que es equivalente a

$$\lambda \geq \frac{2n+1}{n+2},$$

que se cumple para $\lambda > 2$ y $n \geq 0$, con lo que terminamos la demostración. □

Lema 4.11. *Supongamos que f es una densidad de probabilidad estrictamente positiva en $\{1, 2, \dots\}$ con media finita, y sea μ la correspondiente medida de renovación definida en (4.10). Para $n \geq 1$, sea μ_n la medida en $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^+}$ definida por*

$$\mu_n(\cdot) = \mu(\cdot \mid \eta(-n) = 1).$$

Si $\frac{f(n)}{f(n+1)}$ es decreciente en n, entonces $\mu_{n+1} \leq \mu_n$ para todo $n \geq 1$.

Demostración. Desde que μ es invariante por traslaciones, es suficiente probar que $\mu_2 \leq \mu_1$. Además, por ser μ una medida de renovación, se tiene que

$$\mu(\cdot|\eta(-2) = 1, \eta(-1) = 1) = \mu(\cdot|\eta(-1) = 1),$$

como medida en $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^+}$, pues

$$\mu(\cdot|\eta(-2) = 1, \eta(-1) = 1) \quad = \quad \frac{\mu(\cdot, \eta(-2) = 1, \eta(-1) = 1)}{\mu(\eta(-2) = 1, \eta(-1) = 1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{f(1)\mu(\cdot, \eta(-1) = 1)}{f(1)\mu(\eta(-1) = 1)} \\
&= \mu(\cdot|\eta(-1) = 1)).
\end{aligned}
$$

Considerando esto, es suficiente probar que

$$\mu(\cdot|\eta(-2) = 1, \eta(-1) = 0) \leq \mu(\cdot|\eta(-1) = 1),$$

como medidas en $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^+}$. Por el teorema 2.7 es suficiente mostrar que

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu\{\eta : \eta(-2) = 1, \eta(-1) = 0, \eta(u) = \zeta(u)\, \forall u \in A \diagdown \{x,y\}, \eta(x) = 0, \eta(y) = 0\}}{\mu\{\eta : \eta(-2) = 1, \eta(-1) = 0, \eta(u) = \zeta(u)\, \forall u \in A \diagdown \{x,y\}, \eta(x) = 0, \eta(y) = 1\}} \\
&\qquad \geq \frac{\mu\{\eta : \eta(-1) = 0, \eta(u) = \zeta(u)\, \forall u \in A \diagdown \{x,y\}, \eta(x) = 1, \eta(y) = 0\}}{\mu\{\eta : \eta(-1) = 0, \eta(u) = \zeta(u)\, \forall u \in A \diagdown \{x,y\}, \eta(x) = 1, \eta(y) = 1\}},
\end{aligned}
$$

siempre que $x \neq y$, $x, y \in A = \{1, \dots, n\}$ y $\zeta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^+}$.

Denotemos por $u_1, \dots, u_k$, $u_i < u_{i+1}$ para $i = 1, \dots, k$ a las coordenadas de η con valor 1 tal que $u_k < x$; $v_1, \dots, v_n$, $v_i < v_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n$ a las coordenadas de η con valor 1 tal que $v_1 > x$ y $v_k < y$ y $w_1, \dots, w_m$, $w_i < w_{i+1}$ para $i = 1, \dots, m$ a las coordenadas de η con valor 1 tal que $w_1 > y$.

Asumiendo que existe al menos un v_k y aplicando la definición de μ, el lado izquierdo de la desigualdad es equivalente a

$$\frac{f(u_1+2)\prod_{i=2}^{k} f(u_i-u_{i-1}) f(v_1-u_k) \prod_{i=2}^{n} f(v_i-v_{i-1}) f(w_1-v_n) \prod_{i=2}^{m} f(w_i-w_{i-1})}{f(u_1+2)\prod_{i=2}^{k} f(u_i-u_{i-1}) f(v_1-u_k) \prod_{i=2}^{n} f(v_i-v_{i-1}) f(y-v_n) f(w_1-y) \prod_{i=2}^{m} f(w_i-w_{i-1})},$$

que simplificando nos da

$$\frac{f(w_1 - v_n)}{f(y - v_n) f(w_1 - y)}.$$

Análogamente, el lado derecho es equivalente a

$$\frac{f(u_1+1)\prod_{i=2}^{k} f(u_i-u_{i-1}) f(x-u_k) f(v_1-x) \prod_{i=2}^{n} f(v_i-v_{i-1}) f(w_1-v_n) \prod_{i=2}^{m} f(w_i-w_{i-1})}{f(u_1+1)\prod_{i=2}^{k} f(u_i-u_{i-1}) f(x-u_k) f(v_1-x) \prod_{i=2}^{n} f(v_i-v_{i-1}) f(y-v_n) f(w_1-y) \prod_{i=2}^{m} f(w_i-w_{i-1})},$$

que simplificando nos da

$$\frac{f(w_1 - v_n)}{f(y - v_n)f(w_1 - y)},$$

por lo que la desigualdad es trivialmente cierta.

En caso de que no existan unos entre x e y, con cálculos similares obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{f(w_1 - u_n)}{f(y - u_n)f(w_1 - y)} &\leq \frac{f(x - u_n)f(w_1 - x)}{f(x - u_n)f(y - x)f(w_1 - y)}\\ \frac{f(w_1 - u_n)}{f(y - u_n)} &\leq \frac{f(w_1 - x)}{f(y - x)},\end{aligned}$$

lo cual es cierto por la hipótesis de monotonicidad sobre $\frac{f(n)}{f(n+1)}$, por lo que se verifica la relación deseada. □

Lema 4.12. *Supongamos que* $\lambda \geq 2$ *y sea* f *una densidad de probabilidad en* $\{1, 2, \dots\}$ *con media finita dada por* $f(n) = F(n) - F(n+1)$*, en donde* F *es como en* (4.11)*. Sean* h *la función definida en* (4.9) *y* μ *la medida de renovación definida en* (4.10)*, ambas sobre* Y*. Entonces, se satisface* (4.8) *para todo* $A \in Y$*.*

Demostración. Sea $A \in Y$, escribimos $A = \cup_{i=1}^{k} A_i$, en donde los $A_i = [l_i + 1, r_i - 1]$ son los componentes conexos maximales ordenados de A. Luego $r_i \leq l_{i+1} \leq r_{1+1} - 1$ para todo i. Para $x \in \mathbb{Z}^1$, definimos

$$R(x) = \mu\{\nu : \nu = 0 \text{ en } A \cap (x, \infty) | \eta(x) = 1\}, \text{ y} \tag{4.14}$$

$$L(x) = \mu\{\nu : \nu = 0 \text{ en } A \cap (-\infty, x) | \eta(x) = 1\}. \tag{4.15}$$

Por (4.12), si $x \in A$ tenemos

$$h(A) - h(A \setminus x) = L(x)R(x)\mu\{\eta : \eta(x) = 1\}.$$

Usando esta última expresión, la ecuación (4.8) puede escribirse como

$$\sum_{x\in A} L(x)R(x) = \lambda \sum_{i=1}^{k} [L(l_i)R(l_i) + L(r_i)R(r_i)]. \tag{4.16}$$

La principal dificultad en probar esta desigualdad está en que el lado izquierdo involucra a L y R en A, mientras que el lado derecho involucra a L y R en A^c. Así, para poder probar (4.16) es necesario encontrar algunas identidades que relaciones los valores de L y R en A y A^c. Escribamos

$$\begin{aligned}
&\mu\{\eta : \eta(x) = 1, \eta = 0 \text{ en } A \cap (x,\infty)\} \\
&= \sum_{\substack{y>x \\ y\in A^c}} \mu\{\eta : \eta(x) = \eta(y) = 1, \eta = 0 \text{ en } [A \cup (x,y)] \cap (x,\infty)\} \\
&= \sum_{\substack{y>x \\ y\in A^c}} f(y-x)\mu\{\eta : \eta(y) = 1, \eta = 0 \text{ en } [A \cap (y,\infty)\},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\mu\{\eta : \eta(x) = 1, \eta = 0 \text{ en } A \cap (-\infty,x)\} \\
&= \sum_{\substack{y<x \\ y\in A^c}} \mu\{\eta : \eta(x) = \eta(y) = 1, \eta = 0 \text{ en } [A \cup (y,x)] \cap (-\infty,x)\} \\
&= \sum_{\substack{y<x \\ y\in A^c}} f(x-y)\mu\{\eta : \eta(y) = 1, \eta = 0 \text{ en } [A \cap (-\infty,y)\}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$R(x) = \sum_{\substack{y>x \\ y\in A^c}} f(y-x)R(y) \tag{4.17}$$

$$L(x) = \sum_{\substack{y<x \\ y\in A^c}} f(x-y)L(y). \tag{4.18}$$

Luego, por (4.12)

$$2\lambda f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} F(k)f(n-k) - F(n) \tag{4.19}$$

para $n \geq 2$. Y por (4.17) y (4.19),

$$2\lambda R(l_i) = \sum_{\substack{y>l_i \\ y\in A^c}} R(y) \left[\sum_{k=1}^{y-l_i-1} F(k)f(y-l_i-k) - F(y-l_i) \right]. \tag{4.20}$$

Nuevamente por (4.17),

$$\sum_{\substack{y>l_i \\ y\in A^c}} R(y)F(y-l_i) = \sum_{\substack{y>z>l_i \\ y,z\in A^c}} R(y)F(z-l_i)f(y-z). \tag{4.21}$$

Sumando (4.20) y (4.21) y usando (4.17) se obtiene

$$\begin{aligned} 2\lambda R(l_i) &= \sum_{\substack{y>z>l_i \\ y\in A^c, z\in A}} R(y)F(z-l_i)f(y-z) \\ &= \sum_{\substack{z>l_i \\ z\in A}} F(z-l_i)R(z). \end{aligned}$$

Similarmente, obtenemos

$$2\lambda L(r_i) = \sum_{\substack{z<r_i \\ z\in A}} F(r_i - z)L(z). \tag{4.22}$$

Por lo tanto, el lado derecho de (4.16) puede escribirse como

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \left\{ L(l_i) \sum_{\substack{z>l_i \\ z\in A}} F(z-l_i)R(z) + R(r_i) \sum_{\substack{z<r_i \\ z\in A}} F(r_i-z)L(z) \right\}.$$

Y por (4.17) y (4.18), el lado izquierdo de (4.16) puede escribirse como

$$\frac{1}{2}\sum_{x\in A}\left\{L(x)\sum_{\substack{z>x\\ z\in A^c}} f(z-x)R(z)+R(x)\sum_{\substack{z<x\\ z\in A^c}} f(x-z)L(z)\right\}.$$

Luego, (4.16) se sigue de mostrar que $i\leq j\leq k$ y $u\in A$ implican

$$\begin{aligned}\sum_{z=r_m}^{l_{m+1}} R(z)f(z-u) &\leq R(r_m)F(r_m-u), \text{ y}\\ \sum_{z=r_{i-1}}^{l_i} L(z)f(u-z) &\leq L(l_i)F(u-l_i).\end{aligned}$$

Para obtener estos resultados, es suficiente mostrar que

$$\begin{aligned} R(z)\leq R(r_m) &\quad \text{para} \quad r_m\leq z\leq l_{m+1}, \text{ y}\\ L(z)\leq L(l_i) &\quad \text{para} \quad r_{i-1}\leq z\leq l_i.\end{aligned}$$

Estas desigualdades se siguen del lema 4.11. La asunción de que $f(n)/f(n+1)$ es decreciente en n es verificada por cálculo directo usando (4.11), de donde se obtiene

$$\frac{f(n)}{f(n+1)}=\frac{\lambda(n+2)}{2n-1}\frac{\lambda(n+1)-(2n-1)}{\lambda(n+2)-(2n+1)}.$$

□

Finalmente, estamos listos para probar el teorema principal:

Teorema 4.13.

(a) $\lambda_c\leq 2$

(b) *Para* $\lambda\geq 2$,

$$\sigma(A) = \nu_\lambda\{\eta:\eta(x)=1 \textit{ para algún } x\in A\} \tag{4.23}$$

$$\geq \quad \mu\{\eta : \eta(x) = 1 \text{ para algún } x \in A\}, \tag{4.24}$$

en donde μ *es la medida de renovación definida en* (4.11)*, y*

(c) $\rho(\lambda) \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\lambda}}$*, si* $\lambda \geq 2$*.*

Demostración. La partes (a) y (b) son consecuencia de los lemas 4.10–4.12, como se discutió previamente. La parte (c) es un caso particular de (b), para $A = \{x\}$, considerando que para $\lambda \geq 2$

$$\mu\{\eta : \eta(x) = 1\} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} nf(n)} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} F(k)} = \frac{1}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\lambda}}$$

□

Es importante notar que incluso para $\lambda = 2$, la medida invariante superior tiene una densidad sustancial, pues $\rho(\lambda) \geq \frac{1}{2}$.

En la siguiente sección, generalizaremos este resultado para dimensiones mayores.

4.2. Parámetro crítico en dimensiones mayores

Denotemos ahora por λ_d al parámetro crítico del proceso de contacto d-dimensional. En particular, ahora λ_1 representa al parámetro crítico para el proceso de contacto unidimensional.

Teorema 4.14. *(a) Sea* A_t *el proceso de contacto d-dimensional (finito) con parámetro* λ*, y* B_t *el proceso de contacto unidimensional (finito) con parámetro* λd*. Entonces*

$$\mathbb{P}^{\{0\}}(A_t \neq \varnothing) \geq \mathbb{P}^{\{0\}}(B_t \neq \varnothing) \tag{4.25}$$

para todo $t \geq 0$*.*

(b) $d\lambda_d \leq \lambda_1$ *para todo* $d \geq 1$*.*

Demostración. Definamos $\pi_d : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{Z}^1$ definida por

$$\pi_d(x_1, \ldots, x_d) = x_1 + \cdots + x_d$$

Para todo $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito, sea

$$\pi_d(A) = \{\pi_d(x) : x \in A\} \subset \mathbb{Z}^1.$$

Para probar la parte (a), supongamos que $A \subset \mathbb{Z}^d$ y $B \subset \mathbb{Z}^1$ son subconjuntos finitos tales que $B \subset \pi_d(A)$. Esto implica que para cada $y \in B$ existe un $x = (x_1, \ldots, x_d) \in A$ tal que $y = \pi_d(A)$. Construyamos el siguiente acoplamiento entre A_t y B_t:

1. Cada muerte en $x \in A_t$ está asociada con una muerte en $y = \pi_d(x) \in B_t$.

2. Cada nacimiento en $y-1$ debido a una partícula $y \in B_t$ está asociado a cualquiera de los d nacimientos en el proceso A_t en los puntos $(x_1-1, x_2, \ldots, x_d)$,..., $(x_1, \ldots, x_d-1)$.

3. Cada nacimiento en $y+1$ debido a una partícula $y \in B_t$ está asociado a cualquiera de los d nacimientos en el proceso A_t en los puntos $(x_1+1, x_2, \ldots, x_d)$,..., $(x_1, \ldots, x_d+1)$.

4. Los puntos $x \in A_t$ que no se necesitan para la anterior correspondencia mueren y generan nacimientos independientemente del proceso B_t

Los puntos (2) y (3) son consistentes con el hecho de que el parámetro del proceso B_t es d veces mayor que el de A_t. Este acoplamiento conserva la propiedad de que

$$B_t \subset \pi_d(A_t), \text{ para todo } t \geq 0, \tag{4.26}$$

desde que $B \subset \pi_d(A)$. Esto implica que

$$\mathbb{P}^{(\{0_d\},\{0\})}(A_t \neq \varnothing) \quad \geq \quad \mathbb{P}^{(\{0_d\},\{0\})}(B_t \neq \varnothing) \tag{4.27}$$

$$\mathbb{P}^{\{0_d\}}(A_t \neq \varnothing) \quad \geq \quad \mathbb{P}^{\{0\}}(B_t \neq \varnothing), \tag{4.28}$$

para todo $t \geq 0$, como se quería mostrar. Para la parte (b), notemos que

$$\mathbb{P}^{\{0\}}(B_t \neq \varnothing) \geq \mathbb{P}^{\{0\}}(B_t \neq \varnothing, \forall t \geq 0) = \mathbb{P}^{\{0\}}(\tau = \infty) = \sigma(\{0\}) = \rho(\lambda d)$$

Dado $\epsilon > 0$, tomamos $\lambda = \frac{\lambda_1}{d} + \epsilon$. Por (a), y considerando que el proceso es ergódico para este λ, obtenemos

$$\mathbb{P}^{\{0_d\}}(A_t \neq \varnothing) \geq \mathbb{P}^{\{0\}}(B_t \neq \varnothing) \geq \rho(\lambda d) > 0$$

Es decir, con parámetro λ tenemos que $\mathbb{P}^{\{0_d\}}(A_t \neq \varnothing) > 0$, por lo que necesariamente $\lambda_d < \lambda$ y por ser ϵ arbitrario, concluimos que $\lambda_d < \frac{\lambda_1}{d}$, lo que prueba (b). □

Corolario 4.15.

$$\frac{1}{2d} \leq \lambda_d \leq \frac{2}{d}.$$

Demostración. Por el teorema 4.13, sabemos que $\lambda_1 \leq 2$, de donde junto con la parte (b) del teorema 4.14 obtenemos la cota superior $\lambda_d \leq \frac{2}{d}$. La cota inferior $\lambda_d \geq \frac{1}{2d}$ la obtenemos de la observación del final de la subsección 4.1.1. □

Conclusiones

1. El proceso de contacto puede ser construido formalmente a partir de la definición de las tasas de transición del proceso.

2. Las técnicas de monotonicidad, acoplamiento y dualidad son útiles para la demostración de resultados acerca de los sistemas de partículas en general y el proceso de contacto en particular.

3. Existe un cambio de fase en el proceso de contacto para el parámetro del proceso λ, que determina el cambio cualitativo entre la ergodicidad del proceso (una sola medida invariante, la delta de dirac en $\eta \equiv 0$) y la no ergodicidad (existen dos medidas invariante extremales).

4. El parámetro crítico del proceso en dimensión d (λ_d), puede ser acotado por

$$\frac{1}{2d} \leq \lambda_d \leq \frac{2}{d}.$$

Referencias

Durrett, R. 1981. An introduction to infinite particle systems. Stochastic Processes and their Applications 11, 109–150.

Dynkin, E.B. 1965. Markov Processes, I. Academic Press, New York.

Griffeath, D. 1981. The basic contact process. Stochastic Processes and their Applications 11, 151–185.

Harris, T. E. 1972. Nearest–Neighbor Markov Interaction Processes on Multidimensional Lattices. Advances in mathematics 9, 66–89.

Harris, T. E. 1974. Contact interactions in a lattice. The Annals of Probability 2, 969–988.

Holley, R., Liggett, T.M. 1978. The Survival of Contact Processes. The Annals of Probability 6(2), 198–206.

Holley, R., Stroock, D. 1979. Dual processes and their application to infinite interacting systems. Advances in mathematics 32, 149–174.

Liggett, T.M. 1978. Attractive nearest-neighbor spin systems on the integers. The Annals of Probability 6, 629–636.

Liggett, T. 1985. Interacting particle systems. New York, Springer–Verlag.

Royden, H. L. 1988 . Real Analysis. Third edition. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 434p.