PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

**ESCUELA DE GRADUADOS**

# *LA ELECCIÓN DEL INDIVIDUO*

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE**

**MAGISTER EN MATEMÁTICAS**

***Rosa Ysabel Díaz Malaver***

**LIMA – PERÚ**

**2 0 0 6**

*A Dios quien me brindó vida*
*y sabiduría.*

*A mis queridos padres:*
*Julio y Amelia*
*A mi querida hermana:*
*Yovana Edith*
*por su inmenso cariño, comprensión*
*y dedicación.*
*Por ser fuente de inspiración y*
*superación continua*

*AGRADECIMIENTO*

*A mi asesor Dr. Alejandro Lugon Ceruti, por su constante asesoramiento y apoyo incondicional para la realización y culminación del presente trabajo de investigación.*

# Índice general

# Introducción

Los problemas de decisión están presentes en cualquier momento de nuestras vidas, la mayoría de veces que nos enfrentamos a estos utilizamos: la lógica, la intuición o la experiencia para tratar de tomar una decisión acertada. Sin embargo, existen muchas situaciones en las que la incertidumbre, la cantidad de información, los distintos criterios o simplemente la complejidad del problema hacen que la razón, intuición o la experiencia den lugar a decisiones erróneas. Es en estos casos cuando se requiere de un análisis exhaustivo. Una buena comprensión del problema incluye la identificación de los distintos criterios que influyen en la decisión, y una valoración adecuada de estas permitirá al individuo tomar mejores decisiones. El problema que se plantea al individuo es el de decidir cuál de sus alternativas es la óptima.

Que los individuos debemos elegir es un hecho observable. Lo que se trata de plantear es una teoría que explique dicha elección y que a su vez nos permita ir más lejos que la simple observación; es decir, desentrañar qué se esconde detrás de aquella elección. Hoy en día existen dos teorías clásicas que estudian esta problemática: la primera se estudia a partir de las preferencias y la segunda a partir de las reglas de elección.

En el presente trabajo desarrollamos las dos teorías clásicas y su relación. En el primer capítulo definiremos la relación de preferencia, para cuya discusión nos basaremos en el libro "Microeconomic Theory"de Andreu Mas Colell con el fin de explicar cómo las preferencias exactas dan lugar a una regla de elección. El enfoque clásico toma preferencias bien definidas; es decir, A es preferido a B o B es preferido a A o A y B son indiferentes. Esto hace que construir la regla de elección sea un proceso sencillo y directo.

Por el contrario, cuando un individuo no está seguro de qué preferir, sus preferencias se pueden modelar con relaciones de preferencia ajustadas a la lógica difusa. Para designar a estas relaciones seguiremos el concepto dado por Arsenio Pecha y Jaime Villamil respecto a "relaciones de preferencia difusa"; es decir, en lugar de tener dos valores para representar la relación de preferencia, se puede tomar cualquier valor comprendido en el intervalo cerrado [0,1]. Esto significa que si el individuo J no está seguro de preferir B a A, se puede asumir un valor de por ejemplo 0.8. Este es un valor que de todas maneras sigue favoreciendo al candidato B, dicho valor puede ser mayor o menor, dependiendo de cuan fuerte o cuan débil es para el individuo J la relación de preferencia entre A y B.

Si pensamos en preferencias difusas, el problema de determinar la regla de elección a partir de las preferencias está abierto: no tiene una respuesta clara como en el caso clásico. En el capítulo dos desarrollamos esta teoría, basándonos en el documento de Kunal Sengupta, el cual nos proporciona una caracterización axiomática de las reglas de elección que un individuo podría seguir cuando sus preferencias son difusas. Dichas reglas de elección satisfacen ciertas propiedades que se definen en el presente capítulo, tales como: ***Independencia, Monotonicidad, Neutralidad, Chernoff, Betta y Continuidad***.

Para concluir el presente trabajo hemos analizado algunos ejemplos en donde se aplica basicamente la teoría desarrollada en el segundo capítulo, para luego presentar las conclusiones.

# Capítulo 1

# Relación de Preferencia

Las preferencias por un producto varían de un individuo a otro, las cuales son tomadas a partir de un conjunto de alternativas. Para ello el punto de partida para cualquier problema individual de decisiones es un conjunto de alternativas posibles de las cuales el individuo tiene que elegir; por ejemplo, cuando un individuo debe decidir que ciudad visitará en vacaciones, las alternativas podrían ser {Cuzco, Chiclayo, Iquitos, Cajamarca, Piura,... }. Este conjunto de alternativas, el individuo tiene preferencias por una determinada ciudad.

En nuestro estudio las preferencias nos sirven para ordenar las alternativas de elección de los individuos en términos de satisfacción; estas preferencias le permiten al individuo elegir diferentes cestas que se ajusten a sus gustos.

Definimos las relaciones de preferencia de un individuo con respecto a un par de alternativas, así como dos casos particulares que son la preferencia estricta y la relación de indiferencia. Así mismo examinamos sus propiedades, hasta llegar a modelar el comportamiento de elección del individuo. En este último estudio existen dos avances, el primero trata sobre los gustos en la toma de decisiones resumida en su relación de preferencia (característica inicial del individuo); la teoría impone primero el axioma de racionalidad en las preferencias del individuo que toma las decisiones, luego analiza las consecuencias de estas preferencias en su comportamiento de elección (es decir tomar decisiones). Esta preferencia base es la más tradicional de las dos y la que enfatizamos ampliamente; el segundo punto que desarrollamos trata el comportamiento de elección del individuo como el rasgo distintivo original, producto de hacer directamente suposiciones respecto a este comportamiento.

Una suposición central en este acercamiento, el axioma débil de preferencia revelada, que impone un elemento de consistencia en el comportamiento de elección en sentido paralelo a las suposiciones de racionalidad de la preferencia base.

Comprender esta relación entre estos dos avances diferentes para modelar el comportamiento individual, supone un considerable interés. Entonces en esta relación, examinamos primero las implicaciones de las preferencias base para el comportamiento de elección y posteriormente las condiciones bajo las cuales el comportamiento de elección es compatible con la existencia de preferencias fundamentales.

## 1.1. Relación de Preferencia

Técnicamente, la preferencia es una relación binaria: reflexiva, conexa y transitiva; denotada por " $\succsim$ " sobre un Conjunto de Alternativas (Disponibles) $\equiv X$ , que permitirá la comparación de pares de alternativas $(x, y) \in X$. De esta manera $x \succsim y$ se lee " $x$ es al menos tan buena como $y$ ". De $\succsim$ podemos derivar otras dos relaciones importantes en $X$:

i) Preferencia Estricta $(\succ)$

$$\forall\, x, y \in X \text{ se tiene } x \succ y \text{ si y solo si } x \succsim y \ \wedge\ \neg(y \succsim x)$$

se lee "$x$ es estrictamente preferida a $y$ "

Si el individuo puede elegir entre ambas alternativas entonces se decidirá por la primera; es decir elegirá $x$.

ii)Relación de Indiferencia $(\sim)$

$$\forall\, x, y \in X \text{ se tiene } x \sim y \text{ si y solo si } x \succsim y \ \wedge\ y \succsim x$$

se lee " $x$ es indiferente de $y$ "

Ambas combinaciones le proporcionan al individuo la misma satisfacción; es decir, puede elegir $x$ o $y$.

Dentro de la teoría microeconómica, las preferencias del individuo son asumidas como racionales si posee las siguientes dos propiedades: Completitud y Transitividad.

- Completitud : $\forall\, x, y \in X$ se tiene $x \succsim y \ \vee \ y \succsim x$
- Transitividad: $\forall\, x, y, z \in X$ se tiene que : si $x \succsim y \ \wedge \ y \succsim z$ entonces $x \succsim z$

La suposición que $\succsim$ es completa indica que el individuo tiene una preferencia bien definida entre cualquier par de posibles alternativas.
Ejemplo:
Sea
$x$ : Elegir una manzana.
$y$ : Elegir un plátano.
$z$ : Elegir una naranja.
supongamos: $x \succsim y \ \wedge \ y \succsim z$ entonces $x \succsim z$

Considerando que una manzana es preferida a un plátano y que un plátano es preferido a una naranja, entonces, una manzana es preferida a una naranja.

La suposición de que la relación de preferencia ($\succsim$) es completa y transitiva tiene implicaciones para las relaciones de preferencia estricta ($\succ$) e indiferente ($\sim$).

**Proposición 1.1.1.** *Si $\succsim$ es racional entonces:*

*i) $\succ$ es :*
**) Irreflexiva ( $x \succ x$ nunca se cumple)*
**) Transitiva ( si $x \succ y \ \wedge \ y \succ z$ entonces $x \succ z$)*

*ii) $\sim$ es :*
**) Reflexiva ( $x \sim x, \forall x \in X$)*
**) Transitiva ( si $x \sim y \ \wedge \ y \sim z$ entonces $x \sim z$)*
**) Simétrica ($x \sim y$ entonces $y \sim x$)*

*iii) Si $x \succ y \succsim z$ entonces $x \succ z$*

**Demostración**

i) $\succ$

*) Irreflexiva : $x \succ x \equiv x \succsim x \ \wedge \ \neg(x \succsim x)$ es absurdo

$$\textit{Por lo tanto } x \succ x \quad \text{nunca se cumple.}$$

**) Transitiva Por hipótesis

si $x \succ y$ entonces $x \succsim y \ \wedge \ \neg(y \succsim x)$

si $y \succ z$ entonces $y \succsim z \ \wedge \ \neg(z \succsim y)$

Demostramos que $x \succ z$

$$x \succsim y \ \wedge \ y \succsim z \ \Rightarrow \ x \succsim z \tag{1.1.1}$$

$$\neg(y \succsim x) \ \wedge \ \neg(z \succsim y) \qquad \text{Por conmutatividad.}$$

$$\neg(z \succsim y) \ \wedge \ \neg(y \succsim x) \ \Rightarrow \neg(z \succsim x) \tag{1.1.2}$$

de (1.1.1) y (1.1.2) tenemos $x \succsim z \ \wedge \ \neg(z \succsim x)$ entonces $x \succ z$

ii) $\sim$

*) Reflexiva

Como $\succsim$ es reflexivo se tiene $x \succsim x$

$$\text{Por lo tanto } \sim \text{ es reflexivo.}$$

**) Transitiva

$x \sim y$ entonces $x \succsim y \ \wedge \ y \succsim x$

$y \sim z$ entonces $y \succsim z \ \wedge \ z \succsim y$

$$x \succsim y \ \wedge \ y \succsim z \text{ entonces } x \succsim z$$

$$z \succsim y \ \wedge \ y \succsim x \text{ entonces } z \succsim x \tag{1.1.3}$$

de (1.1.1) y (1.1.3) tenemos $x \succsim z \ \wedge \ z \succsim x$ entonces $x \sim z$

***) Simétrica

$$\begin{aligned} x \sim y \ &\Leftrightarrow x \succsim y \ \wedge \ y \succsim x \\ &\Rightarrow y \succsim x \ \wedge \ x \succsim y \\ &\Rightarrow y \sim x \end{aligned}$$

iii) Probar que: Si $x \succ y \succsim z$ *entonces* $x \succ z$

$$x \succ y \text{ entonces } x \succsim y \;\wedge\; \neg(y \succsim x)$$

como $y \succsim z$ por hipótesis

$$x \succsim z$$

supongamos que $z \succsim x$ como $y \succsim z \;\wedge\; z \succsim x$ entonces $y \succsim x$ (contradicción) con $x \succ y$

$$\textit{Por lo tanto } x \succsim z \;\wedge\; \neg(z \succsim x) \Leftrightarrow x \succ z$$

$\blacksquare$

El punto más importante en la proposición es, que la racionalidad de $\succsim$ implica la transitividad de "$\succ$"y "$\sim$ ."

Las preferencias de un individuo pueden no satisfacer la propiedad de transitividad por varias razones. Una dificultad se origina por diferencias visibles, así por ejemplo: Si ofrecemos a un individuo elegir entre dos tipos de pinturas gris similares, él puede ser incapaz de señalar la diferencia entre los colores y por consiguiente su elección será indiferente. Nuevamente le ofrecemos elegir entre dos tipos de pintura gris; una ligeramente más oscura que la otra; él puede ser incapaz de ver la diferencia entre las dos pinturas; es decir, vuelve a expresar indiferencia. Si ofrecemos elegir entre la pintura original (el más oscuro ) y la pintura gris más clara, entonces él podría distinguir entre los colores y elegiría uno de ellos con lo cual invalidaría la transitividad.

Ahora veamos otro comportamiento intransitivo como resultado de la interacción de varias preferencias racionales (y por tanto transitivas).
Presentaremos el siguiente ejemplo basado en [1]
Sea un grupo familiar $X = \{Antonio, Bertha, Carmen\}$, cada uno de ellos con preferencias individuales racionales $\succ_A$, $\succ_B$, $\succ_C$ y un conjunto de alternativas $\{p, u, c\}$, donde:

$p$ : elegir plátanos.

$u$ : elegir uvas.

$c$ : elegir cerezas

¿Qué fruta prefiere Antonio?

* Si se les ofrecen plátanos y uvas, elige plátanos: $p \succ_A u$

* Si se les ofrecen uvas y cerezas, elige uvas: $u \succ_A c$

* Si se les ofrecen cerezas y plátanos, elige plátanos: $p \succ_A c$

En otras palabras, $p \succ_A u \ \wedge \ u \succ_A c \ \ entonces \ \ p \succ_A c$, sus preferencias son transitivas.

Antonio prefiere:

1º plátanos.

2º uvas.

3º cerezas.

¿Qué fruta prefiere Bertha?

* Si se les ofrecen uvas y cerezas, elige uvas: $u \succ_B c$

* Si se les ofrecen cerezas y plátanos, elige cerezas: $c \succ_B p$

* Si se les ofrecen plátanos y uvas, elige uvas: $u \succ_B p$

En otras palabras: $u \succ_B c \ \wedge \ c \succ_B p \ \ entonces \ \ u \succ_B p$. Sus preferencias son transitivas.

Bertha prefiere:

1º uvas.

2º cerezas.

3º plátanos.

¿Qué fruta prefiere Carmen?

* Si se les ofrecen cerezas y plátanos, elige cerezas: $c \succ_C p$

* Si se les ofrecen plátanos y uvas, elige plátanos: $p \succ_C u$

* Si se les ofrecen uvas y cerezas, elige cerezas: $c \succ_C u$

En otras palabras, $c \succ_C p \wedge p \succ_C u$ *entonces* $c \succ_C u$. Sus preferencias son transitivas.

Carmen prefiere:

1º cerezas.

2º plátanos.

3º uvas.

Ahora veamos ¿Qué fruta prefiere la familia?

Sea " $\succ_G$ " definida como la preferencia del grupo obtenida por mayoría de votación.

¿Qué fruta prefiere la familia?

⋆ Si se les ofrecen plátanos y uvas; Antonio y Carmen eligen plátanos.

$$\underline{\underline{p}} \succ_A \underline{\underline{u}} \succ_A c \quad \wedge \quad u \succ_B c \succ_B p \quad \wedge \quad c \succ_C \underline{\underline{p}} \succ_C \underline{\underline{u}} \quad \text{entonces} \quad p \succ_G u$$

(el grupo prefiere plátanos a uvas)

⋆ Si se les ofrecen uvas y cerezas; Antonio y Bertha eligen uvas.

$$p \succ_A \underline{\underline{u}} \succ_A \underline{\underline{c}} \quad \wedge \quad \underline{\underline{u}} \succ_B \underline{\underline{c}} \succ_B p \quad \wedge \quad c \succ_C p \succ_C u \quad \text{entonces} \quad u \succ_G c$$

(el grupo prefiere uvas a cerezas)

⋆ Si se les ofrecen plátanos y cerezas; Bertha y carmen eligen cerezas.

$$p \succ_A u \succ_A c \quad \wedge \quad u \succ_B \underline{\underline{c}} \succ_B \underline{\underline{p}} \quad \wedge \quad \underline{\underline{c}} \succ_C \underline{\underline{p}} \succ_C u \quad \text{entonces} \quad c \succ_G p$$

(el grupo prefiere cerezas a plátanos)

Sus preferencias son intransitivas; por lo tanto las preferencias del grupo familiar son intransitivas, aunque los individuos sean racionales y tengan preferencias transitivas.

## 1.2. Reglas de Elección

El proceso de elección es representado por medio de una estructura de elección $(\beta, C(.))$ que consta de dos componentes:

i) $\beta$ es una familia de subconjuntos no vacíos de $X$, es decir, cada elemento de $\beta$ es un conjunto $B \subset X$. Por analogía con la teoría del consumidor llamamos a los elementos $B \in \beta$ conjuntos presupuestarios en $\beta$.

ii) $C(.)$ es una regla de elección (una correspondencia) que asigna un conjunto de elementos elegidos $\phi \neq C(B) \subset B$ para cada conjunto presupuestario $B \in \beta$. Cuando $C(B)$ contiene un solo elemento, ese elemento es la elección del individuo entre las alternativas en $B$. El conjunto $C(B)$ puede contener más de un elemento; cuando sucede esto los elementos de $C(B)$ son las alternativas en $B$ que la persona que toma las decisiones podría elegir, esto indica alternativas aceptables en $B$. En este caso el conjunto $C(B)$ puede ser considerado como el que contiene las alternativas elegidas. Si el individuo toma decisiones que se repiten varias veces en el tiempo, él confrontará el problema de elección con una alternativa del conjunto $B$.

Ejemplo:
Sea $X = \{x, y, z\}$ y $\beta = \big\{\{x, y\}, \{x, y, z\}\big\}$
Una posible estructura de elección es $(\beta, C_1(.))$ donde la regla de elección $C_1(.)$ es :

$$C_1(\{x, y\}) = \{x\} \quad \text{y} \quad C_1(\{x, y, z\}) = \{x\}$$

En este caso, vemos $x$ elegida sin interesar qué presupuesto confronte la persona que toma las decisiones. Otra estructura de elección posible es $(\beta, C_2(.))$ donde la regla de elección $C_2(.)$ es:

$$C_2(\{x, y\}) = \{x\} \quad \text{y} \quad C_2(\{x, y, z\}) = \{x, y\}$$

En este caso, vemos elegir $x$ cuando la persona que toma las decisiones confronta el presupuesto $\{x, y\}$; pero también podemos elegir entre $x$ o $y$ cuando ella confronta el presupuesto $\{x, y, z\}$

Cuando usamos estructuras de elección para modelar el comportamiento del individuo, podemos querer imponer algunas restricciones razonables estimando el comportamiento de elección del individuo.

**Definición 1.2.1.** La estructura de elección $(\beta, C(.))$ satisface el axioma débil de preferencia revelada si tiene la siguiente característica:

$$\text{Si para algún } B \in \beta \text{ tal que } x, y \in B \text{ se tiene } x \in C(B)\text{; entonces, para cualquier } \\ B' \in \beta \text{ tal que } x, y \in B' \;\wedge\; y \in C(B')\text{; ha de ser que } x \in C(B')$$

El axioma débil de preferencia revelada establece que si elegimos $x$ cuando $y$ está disponible, entonces no puede existir un conjunto presupuestario conteniendo ambas alternativas para las cuales $y$ sea elegida y $x$ no.

**Definición 1.2.2.** Dada una estructura de elección $(\beta, C(.))$ la relación de preferencia revelada $\succsim^*$ es definida:

$$x \succsim^* y \text{ si y solo si } \exists\, B \in \beta \quad \text{tal que } x, y \in B \;\; \wedge \;\; x \in C(B).$$

$$x \succsim^* y \text{ se lee: " } x \text{ es revelada al menos tan buena como } y\text{"}$$

Notemos que la relación de preferencia revelada $\succsim^*$ no es necesariamente completa o transitiva. En particular para cualquier par de alternativas $x$ e $y$ a ser comparadas, es necesario que para algún conjunto $B \in \beta$ se tiene $x, y \in B$ y a la vez $x \in C(B)$ ó $y \in C(B)$ ó ambas.

De manera informal podríamos decir " $x$ es revelado preferido a $y$", si existe algún $B \in \beta$ tal que $x, y \in B$, $x \in C(B)$ e $y \notin C(B)$; es decir, si $x$ es elegida sobre $y$ cuando ambas están disponibles.

Con esta terminología podemos definir el axioma débil como " si $x$ es revelada al menos tan buena como $y$, entonces $y$ no puede ser revelada preferida sobre $x$".

## 1.3. Relación entre las Relaciones de Preferencia y las Reglas de Elección

Nos ocuparemos de dos preguntas fundamentales suponiendo la relación entre los dos temas discutidos hasta ahora:

i) Si el agente que toma decisiones tiene un orden de preferencia racional $\succsim$ ¿necesariamente sus decisiones generan una estructura de elección que satisfacen el axioma débil cuando enfrenta alternativas de elección de los conjuntos presupuestarios toma sus decisiones cuando confronta elecciones de un conjunto presupuestario contenidos en $\beta$?

ii) Si el comportamiento de elección de un individuo para una familia de conjuntos presupuestarios $\beta$ es captado por una estructura de elección $(\beta, C(.))$ que satisface el axioma débil, ¿hay necesariamente una relación de preferencias racionales que sea consistente con estas elecciones?

Las respuestas para estas dos preguntas son, respectivamente, "si" y"quizás". Para contestar la primera pregunta, suponemos que un individuo tiene una relación de preferencia racional $\succsim$ en $x$. Si este individuo confronta un subconjunto de alternativas $\phi \neq B \subset X$, su comportamiento de maximización de preferencias es para elegir cualesquiera de los elementos en el conjunto:

$$C^*(B, \succsim) = \{x \in B: \ x \succsim y, \ \ \forall\, y \in B\}$$

Los elementos del conjunto $C^*(B, \succsim)$ son las alternativas más preferidas del individuo en $B$. En principio podríamos tener $C^*(B, \succsim) = \phi$ para algún $B$; pero si $X$ es finito, o si tiene las condiciones adecuadas entonces $C^*(B, \succsim)$ será no vacío. De ahora en adelante consideraremos solamente preferencias $\succsim$ y familias de conjuntos presupuestarios $\beta$ tal que $C^*(B, \succsim) \neq \phi$, $\forall\, B \in \beta$. Decimos que la relación de preferencia racional $\succsim$ genera la estructura de elección $(\beta, C^*(\ .\ , \succsim))$.

**Proposición 1.3.1.** *Supongamos que $\succsim$ es una relación de preferencia racional, entonces la estructura de elección generada por $\succsim$, $(\beta, C^*(\ .\ , \succsim))$ satisface el axioma débil.*

**Demostración**

Sea $B \in \beta$, $\ x, y \in B$ y $x \in C^*(B, \succsim)$

Por definición de $C^*(B, \succsim)$ tenemos:

$$x \succsim y, \quad \forall\, y \in B \tag{1.3.1}$$

Probaremos que $(\beta, C^*(\ .\ , \succsim))$ satisface el axioma débil

Supongamos que para algún $B' \in \beta$ con $x, y \in B'$ tenemos:

$$y \in C^*(B', \succsim) \text{ entonces } \ y \succsim z, \quad \forall z \in B' \tag{1.3.2}$$

De (1.3.1) y (1.3.2) tenemos $x \succsim y \ \wedge \ y \succsim z$ por transitividad

$$x \succsim z, \quad \forall z \in B'$$

Por lo tanto $x \in C^*(B', \succsim)$

Lo que satisface el axioma débil

■

La Proposición 1.3.1 constituye la respuesta afirmativa para la primera pregunta. Es decir, si el comportamiento es generado por preferencias racionales, entonces satisface los requerimientos de la consistencia que comprende el axioma débil.

Para contestar a la segunda pregunta es útil comenzar con una definición.

**Definición 1.3.1.** Dada una estructura de elección $(\beta, C(.))$ decimos que la relación de preferencia racional $\succsim$ racionaliza $C(.)$ relativo a $\beta$ si :

$$C(B) = C^*(B, \succsim); \quad \forall B \in \beta$$

En otras palabras, la $\succsim$ genera la estructura de elección $(\beta, C(.))$.

La relación de preferencia racional $\succsim$ racionaliza una regla de elección $C(.)$ en $\beta$ si las elecciones óptimas generadas por $\succsim$ coincide con $C(.)$, $\forall\, B \in \beta$. En cierto sentido las preferencias explican el comportamiento del individuo, podemos interpretar estas elecciones como si él fuera el producto de maximizar sus preferencias.

La proposición 1.3.1 implica que el axioma débil debe ser satisfecho, si existe una relación de preferencia racional. En particular, desde que $C^*(\ .,\succsim)$ satisface el axioma débil para cualquier $\succsim$, solamente una regla de elección que satisfaga el axioma débil puede ser racionalizada. Resulta sin embargo que el axioma débil no es suficiente para asegurar la existencia de una relación de preferencia racional.

Ejemplo:

Sea $X = \{x, y, z\}$

Definamos:
Un conjunto presupuestario $\beta = \Big\{\{x,y\},\{y,z\},\{x,z\}\Big\}$
y las reglas de elección

$$\begin{aligned} C(\{x,y\}) &= \{x\} \\ C(\{y,z\}) &= \{y\} \\ C(\{x,z\}) &= \{z\} \end{aligned}$$

Así definidas las reglas de elección satisfacen el axioma débil dado que si elegimos $x$ cuando $y$ está disponible, entonces no existe un conjunto presupuestario que contenga ambas alternativas para las cuales $y$ sea elegida y $x$ no.

Del mismo modo si tenemos $y$ elegida cuando $z$ está disponible, entonces no existe un conjunto presupuestario que contenga ambas alternativas donde $z$ sea elegida y $y$ no.

Por otra parte, si elegimos $z$ cuando $x$ está disponible, no existe un conjunto presupuestario que contenga ambas alternativas donde $x$ sea elegida cuando $z$ esta disponible.

Sin embargo no tenemos preferencias racionales. Para racionalizar las elecciones bajo $\{x,y\}$ y $\{y,z\}$ será necesario tener $x \succ y \quad \wedge \quad y \succ z$, pero por transitividad tendríamos $x \succ z$ lo cual contradice el comportamiento de elección bajo $\{x,z\}$, por lo tanto la relación de preferencia no puede ser racionalizada.

**Proposición 1.3.2.** *Si $(\beta, C(.))$ es una estructura de elección tal que*
*i) Satisface el axioma débil*
*ii) $\beta$ contiene todos los subconjuntos de $X$ de hasta 3 elementos. Entonces existe una única relación de preferencia racional $\succsim$ que racionaliza $C(.)$ relativo a $\beta$ ; es decir, $C(B) = C^*(B, \succsim), \quad \forall\, B \in \beta$.*

**Demostración**

La candidata para racionalizar una relación de preferencia es la relación de preferencia revelada $\succsim^*$ .

Para demostrar esta proposición probaremos primero 2 cosas:
i) $\succsim^*$ es una relación de preferencia racional, y

ii) $\succsim^*$ racionaliza a $C(.)$ en $\beta$

Además, discutiremos como (iii), que $\succsim^*$ es la única relación de preferencia que satisface esto.

i) Verifiquemos que $\succsim^*$ es racional

* ***Completitud***

Por hipótesis (ii) $\{x, y\} \in \beta$

Como $x$ o $y$ debe ser un elemento de la regla de elección $C(\{x, y\})$

Entonces $x \succsim^* y$ ó $y \succsim^* x$ ó ambas

Por lo tanto $\succsim^*$ satisface la completitud.

* ***Transitividad***

Sea $x \succsim^* y \ \wedge y \succsim^* z$ y el conjunto presupuestario $\{x, y, z\} \in \beta$

Es suficiente probar que $x \in C(\{x, y, z\})$, por la definición de esta implicación de $\succsim^*$ tenemos $x \succsim^* z$.

Al menos una de las alternativas $x, y$ ó $z$ debe ser un elemento de $C(\{x, y, z\})$ ya que $C(\{x, y, z\}) \neq \phi$.

Supongamos que $y \in C(\{x, y, z\})$, como $x \succsim^* y$ y por el axioma débil se tiene $x \in C(\{x, y, z\})$ como deseábamos.

Supongamos ahora que $z \in C(\{x, y, z\})$, como $y \succsim^* z$ y por el axioma débil se tiene $y \in C(\{x, y, z\})$ así estamos en el caso previo.

Por lo tanto $\succsim^*$ es racional.

ii) Ahora mostraremos que $C(B) = C^*(B, \succsim^*)$, $\forall B \in \beta$; es decir, la relación de preferencia revelada $\succsim^*$ inferida de $C(.)$ realmente genera a $C(.)$.

a) Demostrar que $C(B) \subset C^*(B, \succsim^*)$

$$\text{Sea } x \in C(B) \textit{ entonces } \; x \succsim^* y\,, \quad \forall\, y \in B$$

$$x \in C^*(B, \succsim^*)$$

$$\textit{Por lo tanto } C(B) \subset C^*(B, \succsim^*)$$

b) Demostrar que $C^*(B, \succsim^*) \subset C(B)$

$$\text{Sea } x \in C^*(B, \succsim^*) \; \textit{ entonces } \; x \succsim^* y\,, \quad \forall\, y \in B$$

Así para cualquier $y \in B$ , debe existir algún conjunto $B_y \in \beta$ tal que

$x, y \in B_y \;\wedge\; x \in C(B_y)$, ya que $C(B) \neq \phi$

Por el axioma débil tenemos $x \in C(B)$

$$\textit{Por lo tanto } \; C^*(B, \succsim^*) \subset C(B)$$

De (a) y (b) se tiene $C(B) = C^*(B, \succsim^*)$.

iii) Establecemos la unicidad de $\succsim^*$

Como $\beta$ incluye a todos los subconjuntos de dos elementos de $X$, entonces el comportamiento de elección de $C(.)$ determina completamente el par de opciones de las relaciones de preferencia sobre $X$ de cualquier preferencia racionalizada. Esto verifica la unicidad.

$\blacksquare$

# Capítulo 2

# Reglas de Elección con Preferencias Difusas: Algunas Caracterizaciones.

Las preferencias de un individuo que no está seguro de qué preferir, se pueden modelar con relaciones de preferencia ajustadas a la lógica difusa; a estas relaciones de ahora en adelante, se les llamará "**Relaciones de Preferencia Difusa**". En lugar de tener 2 valores para representar la relación de preferencia, se puede tomar cualquier valor comprendido en el intervalo cerrado $[0, 1]$; esto quiere decir que si el individuo $J$ no está seguro de preferir $B$ a $A$, se puede asumir un valor de, por ejemplo, 0.8. Este es un valor que de todas maneras sigue favoreciendo al candidato $B$, dicho valor puede ser mayor o menor, dependiendo de que cuan fuerte o que cuan débil sea para el individuo $J$ la relación de preferencia entre $B$ y $A$.

Ahora consideramos un agente con preferencias difusas, que realiza elecciones exactas cuando confronta distintos conjuntos de alternativas factibles ¿Qué regla sigue para efectuar tales elecciones?...Este capítulo pretende proporcionar una respuesta a esta interrogante.

A diferencia del caso exacto de las preferencias donde el conjunto de elección de un agente coincide con los elementos más preferidos; aquí parece no haber ninguna manera natural de definir la regla de elección de un agente cuando sus preferencias son difusas. De ahí que, en base a las preferencias difusas uno puede clasificar las reglas de elección en dos categorías: binarias y no binarias. En las reglas binarias, elegir de un conjunto de alternativas factibles está esencialmente basado en ver el resultado de la comparación del par de opciones de los elementos del conjunto. En las reglas no binarias es posible que las elecciones puedan depender de las preferencias globales y no sólo del par de opciones de preferencias.

Definimos una familia de reglas de elección binarias, para $\alpha \in [0,1]$. Si $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$ es conocida como **La Regla** $M_\alpha$; por otro lado si $\alpha = 1$ nos referimos a ***La Regla de Orlovsky.*** Desde que los valores diferentes de $\alpha$ son consistentes con un orden de preferencia dado de un individuo, es posible que dos agentes con preferencias idénticas puedan terminar haciéndolas diferentes. Esta situación demuestra un resultado interesante.

Por otra parte tratamos tres nociones diferentes de la transitividad de preferencias difusas. Presentaremos una caracterización axiomática de las reglas de elección que un individuo debe seguir cuando sus preferencias son difusas a través de tres teoremas: El teorema 2.1 caracteriza una regla de elección para un dominio de relaciones binarias de preferencia difusa (RBPD) reflexivas y conexas que satisfacen la transitividad T, el teorema 2.2 caracteriza una regla de elección para un dominio de RBPD reflexivas y conexas que satisfacen max-min transitiva y por último el teorema 2.3 caracteriza una regla de elección para un dominio de RBPD reflexivas y conexas que satisfacen la débil T transitividad.

## 2.1. Preferencias Difusas

Sea un conjunto finito de alternativas $X \neq \phi$ tal que $3 < |X| < \infty$; y $\chi$ el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de $X$.

**Definición 2.1.1.** Una relación binaria de preferencia difusa (RBPD) es una función $R : X^2 \longrightarrow [0,1]$.

Esta relación binaria puede cumplir las siguientes definiciones.

**Definición 2.1.1** $R$ exacta si $R(x,y) = 0$ ó $1$, $\quad \forall x, y \in X$
**Definición 2.1.2** $R$ conexa si $R(x,y) + R(y,x) \geq 1$, $\quad \forall x, y \in X$
**Definición 2.1.3** $R$ reflexiva si $R(x,x) = 1$, $\quad \forall x \in X$

Denotemos por $\mathcal{R}$ el conjunto de todas las RBPD reflexivas y conexas.

### 2.1.1. Transitividad en $\mathcal{R}$

Cuando las preferencias son difusas existen varias maneras de definir la noción de transitividad. En este trabajo restringiremos el estudio a tres nociones diferentes de transitividad; todas ellas corresponden a la definición de transitividad para el caso en que las preferencias son exactas, aunque algunas son mas restrictivas que otras.

**Definición 2.1.2.** $R \in \mathcal{R}$ se dice que es máx − mín transitiva si y solo si $\forall x, y, z \in X$ tenemos

$$\min\Big\{R(x,y), R(y,z)\Big\} \leq R(x,z)$$

Ésta definición se verifica para el caso exacto, en efecto:
Sea:$\chi = \{x, y, z\}$ un conjunto de alternativas y $R \in \mathcal{R}$ una relación binaria :

- Si $x \succsim y$, se tiene: $R(x,y) = 1$ y

- Si $y \succsim z$, se tiene: $R(y,z) = 1$

Por demostrar que $x \succsim z$ ; aplicando la definición anterior se tiene:

$$\min\{R(x,y), R(y,z)\} = \min\{1\ ,\ 1\} = 1 \leq R(x,z)$$

$$\Rightarrow R(x,z) = 1$$

$$\therefore\ x \succsim z$$

Denotemos por $H \subset \mathcal{R}$, el conjunto de todas las RBPD reflexivas y conexas que satisfacen máx − mín transitiva.

Max-min transitiva es la definición más comúnmente usada en el análisis de las preferencias difusas, sin embargo esta definición es un poco restrictiva; es decir, bajo la transitividad máx − mín en un conjunto de tres elementos si la relación es exacta sobre al menos un par de ellos, entonces la relación será exacta en al menos dos pares. Veamos un ejemplo que nos ayudara a entender.

Sea: $\chi = \{a, b, c\}$ un conjunto de alternativas y $R \in \mathcal{R}$ una relación binaria.

- Si: $a \sim b$, es decir $R(a,b) = 1 \wedge R(b,a) = 1$,tenemos la misma definición que en el caso exacto

| $R$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 1 | |
| $b$ | 1 | 1 | |
| $c$ | | | 1 |

Aplicando la definición de max-min transitiva a todos los casos tenemos:

$$\text{mín}\Big\{R(a,c), R(c,b)\Big\} \leq R(a,b) \tag{2.1.1}$$

$$\text{mín}\Big\{R(b,c), R(c,a)\Big\} \leq R(b,a) \tag{2.1.2}$$

$$\text{mín}\{R(a,b), R(b,c)\} = \text{mín}\{1\ ,\ R(b,c)\} = R(b,c) \leq R(a,c) \tag{2.1.3}$$

$$\text{mín}\{R(c,b), R(b,a)\} = \text{mín}\{R(c,b)\ ,\ 1\} = R(c,b) \leq R(c,a) \tag{2.1.4}$$

$$\text{mín}\{R(b,a), R(a,c)\} = \text{mín}\{1\ ,\ R(a,c)\} = R(a,c) \leq R(b,c) \tag{2.1.5}$$

$$\text{mín}\{R(c,a), R(a,b)\} = \text{mín}\{R(c,a)\ ,\ 1\} = R(c,a) \leq R(c,b) \tag{2.1.6}$$

De (2.1.3) y (2.1.5) se tiene $R(a,c) \geq R(b,c) \geq R(a,c) \Rightarrow R(a,c) = R(b,c)$

De (2.1.4) y (2.1.6) se tiene $R(c,a) \geq R(c,b) \geq R(c,a) \Rightarrow R(c,a) = R(c,b)$

$\therefore R(a,c) = R(b,c) \wedge R(c,a) = R(c,b)$ la cual es una restricción aunque no muy fuerte.

- En consecuencia si: $a \succ b$ es decir $R(a,b) = 1 \wedge R(b,a) = 0$, ahora tenemos:

| $R$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 1 | |
| $b$ | 0 | 1 | |
| $c$ | | | 1 |

Aplicando la definición max-min transitiva, tenemos:

$$\text{mín}\left\{R(b,c), R(c,a)\right\} \leq R(b,a) = 0$$

$$\text{Además:} \;\; \text{mín}\{R(a,b), R(b,c)\} = \text{mín}\{1\ ,\ R(b,c)\} = R(b,c) \leq R(a,c)$$

De donde se tiene $R(b,c) = 0 \vee R(c,a) = 0$
Por conexidad si $R(b,c) = 0 \Rightarrow R(c,b) = 1$ y si $R(c,a) = 0 \Rightarrow R(a,c) = 1$
Es decir:

$$\begin{array}{c} R(c,b) = 1 \;\wedge\; R(b,c) = 0 \\ \vee \\ R(a,c) = 1 \;\wedge\; R(c,a) = 0 \end{array}$$

Por tanto encontramos un par más que es exacto, con lo que se verifica, que si la relación es exacta y estricta sobre al menos un par de ellos, entonces la relación será exacta en al menos dos pares.

Debido a que la definición anterior es demaciado estricta, debilitaremos la noción de transitividad $\text{máx} - \text{mín}$, con la siguiente definición.

**Definición 2.1.3.** $R \in \mathcal{R}$ se dice que es débilmente $\text{máx} - \text{mín}$ transitiva si y solo si $\forall x, y, z \in X$, si $R(x,y) \geq R(y,x) \;\wedge\; R(y,z) \geq R(z,y)$ entonces

$$\text{mín}\left\{R(x,y), R(y,z)\right\} \leq R(x,z)$$

Esta definición se verifica también para el caso en que las preferencias son exactas ya que la definición 2.1.3 se cumple siempre que $R(x,y) = R(y,z) = 1$, que es el caso que verificaremos:

$$x \succsim y \Leftrightarrow R(x,y) = 1 \Rightarrow R(x,y) \geq R(y,x)$$

$$y \succsim z \Leftrightarrow R(y,z) = 1 \Rightarrow R(y,z) \geq R(z,y)$$

Aplicando la definición de la débil max-min transitiva ya que $R(x,y) \geq R(y,x) \wedge R(y,z) \geq R(z,y)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \min\{R(x,y), R(y,z)\} = \min\{1\ ,\ 1\} = 1 \leq R(x,z) \\ \Rightarrow R(x,z) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto } \ x \succsim z$$

Denotemos por $H_W \subset \mathcal{R}$ el conjunto de todas las RBPD reflexivas y conexas que satisfacen la débil transitividad $\max - \min$. Claramente $H \subset H_W$.

El siguiente lema nos proporciona una propiedad de las preferencias transitivas.

**Lema 2.1.1.** *Supongamos* $R \in H_W$ *y sea* $x, y, z \in X$ *con* $R(x,y) = R(y,x) = n$ *y* $R(y,z) = R(z,y) = m$ *entonces* $R(x,z) = R(z,x)$ *siempre que* $n \neq m$

**Demostración**

Por el absurdo; asumimos sin pérdida de generalidad siempre que $n > m$;

Sea $R(x,z) \neq R(z,x)$ entonces $R(x,z) > R(z,x) \vee R(z,x) > R(x,z)$

**Caso 1 : Si** $R(x,z) > R(z,x)$ (2.1.7)

Como $R(y,x) = R(x,y) \ \wedge \ R(x,z) > R(z,x)$,

Por débil transitividad

$$R(y,z) \geq \min\Big\{R(y,x), R(x,z)\Big\}$$

Pero $R(y,z) = m \ \wedge \ R(y,x) = n$, además $n > m$

*entonces* $R(y,z) = m \geq \min\Big\{\ R(y,x), R(x,z)\ \Big\} = \min\Big\{\ n, R(x,z)\ \Big\}$

Entonces

$$m \geq R(x,z)$$

$$\textit{Por lo tanto } \ R(y,z) \geq R(x,z) \tag{2.1.8}$$

Ahora $R(z,y) = R(y,z) \ \wedge \ R(y,x) = R(x,y)$

Por débil transitividad máx − mín, se tiene

$$R(z,x) \geq \text{mín}\left\{R(z,y), R(y,x)\ \right\} = R(z,y) \tag{2.1.9}$$

Ya que $R(z,y) = m < n = R(y,x)$

Así $R(y,z) \geq R(x,z) > R(z,x) \geq R(z,y)$

Donde la primera desigualdad es de (2.1.8), la segunda de (2.1.7) y la tercera desigualdad de (2.1.9)

Entonces

$$R(y,z) > R(z,y) \quad \text{lo que contradice a } R(y,z) = R(z,y).$$

**Caso 2** : $R(z,x) > R(x,z)$ (2.1.10)

Como $R(z,x) > R(x,z) \quad \wedge \quad R(x,y) = R(y,x)$

Por débil transitividad máx − mín tenemos:

$$m = R(z,y) \geq \text{mín}\left\{R(z,x), R(x,y)\ \right\}$$

Además $R(x,y) = n > m \geq \text{mín}\left\{R(z,x), n\ \right\}$

Entonces

$$m \geq R(z,x)$$

$$\textit{Por lo tanto } \ R(z,y) \geq R(z,x) \tag{2.1.11}$$

Ahora $R(x,y) = R(y,x) \quad \wedge \quad R(y,z) = R(z,y)$

Por débil transitividad máx − mín, se tiene

$$R(x,z) \geq \text{mín}\left\{R(x,y), R(y,z)\ \right\} = R(y,z) \tag{2.1.12}$$

Como $R(x,y) = n > m = R(y,z)$ tenemos

$$R(z,y) \geq R(z,x) > R(x,z) \geq R(y,z)$$

Donde la primera desigualdad es obtenida de (2.1.11), la segunda desigualdad (2.1.10) y la tercera desigualdad de (2.1.12)
Entonces

$$R(z,y) > R(y,z) \quad \text{lo que contradice a } \; R(y,z) = R(z,y).$$

Por tanto, del caso 1 y 2 se tiene $R(x,z) = R(z,x)$.

$\blacksquare$

***Observación 1:*** Como $H \subset H_W$; entonces, para cualquier $R \in H$ satisface el lema 2.1.1. Sin embargo el lema 2.1.1 no se cumple cuando $n = m$. Para ver esto consideremos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1:** Sea $X = \{x,y,z\}$ con $R(x,y) = R(y,x) = R(y,z) = R(z,y) = 0.5$

y $R(x,z) = 0.6 \;\wedge\; R(z,x) = 0.5$

* $R$ es reflexiva,$\forall x,y,z \in X$

$$\begin{aligned} R(x,x) &= 1 \\ R(y,y) &= 1 \\ R(z,z) &= 1 \end{aligned}$$

* $R$ es conexa,$\forall x,y,z \in X$

$$\begin{aligned} R(x,y) + R(y,x) &= 0.5 + 0.5 = 1 \\ R(y,z) + R(z,y) &= 0.5 + 0.5 = 1 \\ R(x,z) + R(z,x) &= 0.6 + 0.5 = 1.1 > 1 \end{aligned}$$

*$R$ satisface la propiedad máx $-$ mín transitiva.

$$\maltese \;\; R(x,z) \geq \text{mín}\Big\{R(x,y), R(y,z)\Big\}$$
$$0.6 \geq \text{mín}\Big\{0.5, 0.5\Big\} = 0.5$$

$$\maltese \;\; R(x,y) \geq \text{mín}\Big\{R(x,z), R(z,y)\Big\}$$

$$0.5 \geq \text{mín}\left\{0.6, 0.5\right\} = 0.5$$

$$✠ \;\; R(y,z) \geq \text{mín}\left\{R(z,x), R(x,y)\right\}$$
$$0.5 \geq \text{mín}\left\{0.5, 0.5\right\} = 0.5$$

De manera similar se demuestran los casos que quedan.

$$\text{Por lo tanto } R \in H, \text{además } H \subset H_W \; entonces \;\; R \in H_W$$

En este ejemplo tenemos que $R(z,y) = R(y,z) \;\wedge\; R(y,x) = R(x,y)$ , mientras que $R(z,x) < R(x,z)$. Lo que contradice a la tesis del lema 2.1.1. Esto contradice la definición de transitividad. Para descartar estas posibilidades definiremos la siguiente condición.

**Definición 2.1.4.** $R \in \mathcal{R}$ se dice que satisface la condición T si $\forall\, x, y, z \;\in X$ tal que $R(x,y) = R(y,x) = R(y,z) = R(z,y)$ *entonces* $R(x,z) = R(z,x)$

La condición T se cumple siempre en el caso en que las preferencias son exactas (transitividad de la indiferencia: si $x \sim y \;\wedge\; y \sim z \;\Rightarrow x \sim z$ )

Denotemos por $\overline{H} \subset H$ el conjunto de todas las RBPD reflexivas y conexas que satisfacen la transitividad T.

**Definición 2.1.5.** $R \in \mathcal{R}$ es llamada débilmente T-transitiva si $R \;\in H_W$($R$ es reflexiva y conexa que satisface la débil transitividad máx − mín ) y satisface la condición T.

Denotemos por $\overline{H}_W$ el conjunto de todas las RBPD reflexivas y conexas que satisfacen la débil T- transitividad.

En el resto del capítulo, los resultados de caracterización usarán $\overline{H}$ (Teorema 2.1.1), $H$ (Teorema 2.1.2) y $\overline{H}_W$ (Teorema 2.1.3) como los dominios respectivos donde las preferencias del agente son definidas.

En la figura 2.1 podemos observar que $\overline{H} \subset H$ y $\overline{H} \subset \overline{H}_W$ sin embargo $H$ y $\overline{H}_W$ no se relacionan de manera clara.

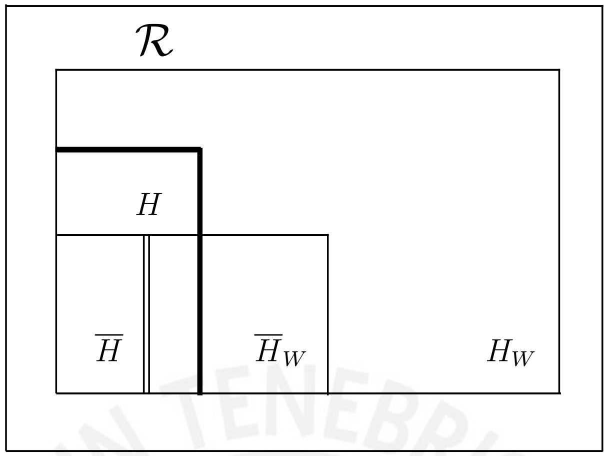


Figura 2.1: Conjunto $\mathcal{R}$ y $H_W$

### 2.1.2. Regla de Elección Binaria $S_\alpha$

**Definición 2.1.6.** Una función de elección basada en preferencias (FEBP) sobre $\Omega \subset \mathcal{R}$ es una función $C : \chi \times \Omega \longrightarrow \chi$
Una FEBP se dice bien definida si $\forall\, R \in \Omega$ y $A \in \chi$, $\phi \neq C(A, R) \subset A$

**Definición 2.1.7.** Dada $R$ y para cualquier $\alpha \in [0, 1]$, decimos que $x$ $\alpha-$domina a $y$ si y solo si

$$R(x, y) > R(y, x) \quad \wedge \quad R(y, x) < \alpha$$

En este caso escribimos $x \succ_\alpha y$.

En base a esto definamos la siguiente regla de elección

$$C(A, R) = S_\alpha(A, R) = \{x \in A / \neg(y \succ_\alpha x),\ \forall y \in A\}$$

Como lo menciona Sengupta en su documento, Orlovsky (1978) propuso la siguiente regla de elección

$$C(A, R) = OV(A, R) = \{x \in A / R(x, y) \geq R(y, x),\ \forall y \in A\}$$

Es fácil demostrar el siguiente lema:

**Lema 2.1.2.** $\forall \alpha \in [0,1]$
*a)* $OV(A,R) \subset S_\alpha(A,R)$
*b)* $OV(A,R) = S_1(A,R)$

**Demostración**

a) Demostrar que $OV(A,R) \subset S_\alpha(A,R)$

Sea $x \in OV(A,R)$, probaremos que $x \in S_\alpha(A,R)$

Por el absurdo

$x \in OV(A,R) \quad \wedge \quad \neg(\ x \in S_\alpha(A,R))$

Como $x \in OV(A,R)$, $x \in A \ \wedge \ R(x,y) \geq R(y,x), \quad \forall y \in A$

Supongamos $y \succ_\alpha x$ si y solo si $R(y,x) > R(x,y) \wedge R(x,y) < \alpha$

Pero $R(x,y) \geq R(y,x) \quad \Big($lo que se contradice a $R(y,x) > R(x,y)\Big)$

$$\textit{Por lo tanto } \ OV(A,R) \subset S_\alpha(A,R)$$

b) Demostrar que $OV(A,R) = S_1(A,R)$

i) $OV(A,R) \subset S_1(A,R)$

Ya esta demostrado en (a)

ii) $S_1(A,R) \subset OV(A,R)$

Sea $x \in S_1(A,R)$ entonces $\forall\ y \in A$ se tiene $\neg(y \succ_\alpha x)$

$$\textit{entonces} \ \ R(y,x) \leq R(x,y) \vee R(x,y) \geq 1, \quad \forall\ y \in A$$

Si

$$R(y,x) \leq R(x,y) \textit{ entonces } \ x \in OV(A,R)\ ; \ \ y \tag{2.1.13}$$

$$R(x,y) \geq 1 \textit{ entonces } \ R(x,y) \geq 1 \geq R(y,x) \tag{2.1.14}$$

En (2.1.13) y (2.1.14) tenemos $R(x,y) \geq R(y,x)$

Luego

$$S_1(A,R) \subset OV(A,R)$$

De (a) (b) se tiene $OV(A,R) = S_1(A,R)$

■

Definamos ahora la siguiente regla de elección, para cualquier $R$ y $A \in \chi$, con $\alpha \in (0, 1/2]$

$$C(A,R) = M_\alpha(A,R) = \{x \in A / R(x,y) \geq \alpha, \ \forall\, y \in A\}$$

Como $\alpha \leq 1/2$ y $R$ es conexa, el procedimiento $M_\alpha$ genera una FEBP bien definida.

**Lema 2.1.3.** *Si* $\alpha \leq 1/2$ *entonces* $M_\alpha(A,R) = S_\alpha(A,R)$

**Demostración**

a) $M_\alpha(A,R) \subset S_\alpha(A,R)$

Sea $x \in M_\alpha(A,R)$ *entonces* $R(x,y) \geq \alpha, \forall y \in A$

Si $x \notin S_\alpha(A,R)$ *entonces* $\exists\, y \in A$ tal que $y \succ_\alpha x$

*Si y solo si* $R(y,x) > R(x,y) \ \wedge \ R(x,y) < \alpha$

Pero $R(x,y) \geq \alpha$ [ *lo que se contradice* ]

Entonces: $x \in S_\alpha(A,R)$.

Es decir: $M_\alpha(A,R) \subset S_\alpha(A,R)$

b) $S_\alpha(A,R) \subset M_\alpha(A,R)$

Sea $x \in S_\alpha(A,R)$ *entonces* $R(y,x) < R(x,y) < \alpha$

Supongamos que $x \notin M_\alpha$ *entonces* $R(x,y) < \alpha$, para algún $y \in A$

Además $R(x,y) + R(y,x) < \alpha + \alpha = 2\alpha$

Pero $\alpha \leq 1/2$ *entonces* $2\alpha \leq 1$

Lo que contradice la conexidad de $R$

Entonces: $\quad x \in M_\alpha(A, R).$

Es decir: $\quad S_\alpha(A, R) \subset M_\alpha(A, R)$

$$De\ (a)\ y\ (b)\ \text{tenemos}\ M_\alpha(A, R) = S_\alpha(A, R).$$

**Lema 2.1.4.** *Supongamos* $R \in H_W \Rightarrow S_\alpha(A, R) \neq \phi$ *para cualquier* $A \in \chi$

Sea $R \in H_W$

Si

$$\begin{array}{l} R(x,y) > R(y,x) \\ \wedge \\ R(y,z) > R(z,y) \end{array} \Rightarrow R(x,z) > R(z,x) \tag{2.1.15}$$

**Demostración**

Por el absurdo: supongamos $\quad R(x,z) \leq R(z,x)$

Como $\quad R(z,x) \geq R(x,z) \quad \wedge \quad R(x,y) > R(y,x)$ (por hipótesis)

Además $R \in H_W$, tenemos $R(z,y) \geq \text{mín}\{R(z,x), R(x,y)\} \geq \text{mín}\{R(x,z), R(x,y)\}$

$$R(x,z) \geq \text{mín}\{R(x,y), R(y,z)\}$$

Entonces

$$R(z,y) \geq \text{mín}\{\text{mín}\{R(x,y), R(y,z)\}\ , R(x,y)\}$$

Luego

$$R(z,y) \geq R(x,y) \quad \vee \underbrace{R(z,y) \geq R(y,z)}_{\text{no ocurre por hipótesis}} \ entonces\ R(z,y) \geq R(x,y) \tag{2.1.16}$$

Análogamente para $R(z,x) \geq R(x,z) \quad \wedge \quad R(y,z) > R(z,y) \geq R(x,y) > R(y,x)$

Entonces $\quad R(y,z) > R(y,x) \quad \wedge \quad R(z,x) \geq R(x,z)$

Pero $R(y,x) \geq \text{mín}\{R(z,x), R(y,z)\} \geq \text{mín}\{\text{mín}\{R(x,y), R(y,z)\}, R(y,z)\}$

$$R(y,x) \geq R(y,z) \vee \underbrace{R(y,x) \geq R(x,y)}_{\text{no ocurre por hipótesis}} \; entonces \; R(y,x) \geq R(y,z) \tag{2.1.17}$$

Luego de (2.1.16) y (2.1.17) tenemos $R(z,y) \geq R(x,y) > R(y,x) \geq R(y,z)$ es una contradicción puesto que en la hipótesis se tiene $R(y,z) > R(z,y)$

$$R(x,z) > R(z,x)$$

Con lo cual hemos demostradola condición (2.9)

Probaremos ahora que si $R \in H_W$, $\forall A \in \chi$ se tiene $OV(A,R) \neq \phi$

Demostramos por inducción sobre el número de elementos

* Sea $|A| = 1$ *entonces* $A = \{x\}$ para algún $x$ claramente se tiene $OV(A;R) \neq \phi$ (obvio)

* Si $|A| = 2$, es decir, $A = \{x,y\}$ y supongamos $\phi = OV(A,R) \subset A = \{x,y\}$

$$x \notin OV(A,R) \; entonces \; \exists w \in A \text{ tal que } R(x,w) < R(w,x)$$

Si

$$w = y \quad \text{tenemos} \quad R(x,y) < R(y,x) \tag{2.1.18}$$

$$y \notin OV(A,R) \; entonces \; R(y,x) < R(x,y) \text{ esto es una contradicción}$$

$$Por\ lo\ tanto\ \ OV(A,R) \neq \phi$$

* Sea $|A| = n$ *entonces* $OV(A,R) \neq \phi$ (hipótesis inductiva)

* Sea $|A| = n+1$ y supongamos que $OV(A,R) = \phi$

Dado $x \in A$ $\exists w \in A$ tal que $R(w,x) > R(x,w)$

$$OV(A \backslash \{x\}, R) \neq \phi \qquad \text{por hipótesis inductiva}$$

Así mismo por la Regla de Orlovsky

$$\exists\, \hat{x} \in A\backslash\{x\} \text{ tal que } R(\hat{x},\hat{y}) \geq R(\hat{y},\hat{x}) \;\; \forall\, \hat{y} \in A\backslash\{x\}$$

En particular para $\hat{y} = w$ se tiene $R(\hat{x},w) \geq R(w,\hat{x})$

Además $R(w,x) > R(x,w)$ *entonces* $R(\hat{x},x) \geq R(x,\hat{x})$

Por tanto $\hat{x} \in OV(A,R)$ (esto contradice a $OV(A,R) = \phi$)

$$\textit{Por lo tanto } \; OV(A,R) \neq \phi$$

Luego $OV(A,R) \subset S_\alpha(A,R)$ ...por lema 2.1.2 parte a)

$$\textit{Por lo tanto } \; S_\alpha(A,R) \neq \phi \; \text{ para cualquier } \; A \in \chi$$

Por tanto para cualquier $\alpha$ el procedimiento $M_\alpha$ genera una FEBP bien definida.

### 2.1.3. Algunas propiedades de una FEBP

Las propiedades de una función de elección basada en preferencias se explican en las siguientes definiciones:

**Definición 2.1.8.** C satisface la **independencia** (I) si y solo si:
Para cualquier $A \in \chi \;\wedge\; R, R' \in \mathcal{R}$ se tiene

$$\Big[\forall\, x, y \in A; \;\; R(x,y) = R'(x,y)\Big] \;\Rightarrow\; \Big[C(A,R) = C(A,R')\Big]$$

**Observación 2.1.1.** Si una FEBP satisface I, dado cualquier $R \in \mathcal{R} \wedge \; A \in \chi$ la elección de $A$ es independiente de la preferencia del agente respecto a cualquier opción que no pertenece a $A$.

**Definición 2.1.9.** Sea $C$ una FEBP que satisface la independencia. C satisface:

**Neutralidad (N)** : $\forall R, R' \in \mathcal{R} \wedge \forall\; x, y, z, w \in X$ (no necesariamente distintos) se tiene:

$$\begin{bmatrix} & R(x,y) = R'(z,w) \\ \wedge & \\ & R(y,x) = R'(w,z) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \in C(\{x,y\},R) \\ \Updownarrow \\ z \in C(\{z,w\},R') \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} y \in C(\{x,y\},R) \\ \Updownarrow \\ w \in C(\{z,w\},R') \end{bmatrix}$$

**Monotonicidad (M)** : $\forall R, R' \in \mathcal{R} \wedge \forall\, x, y \in X$, tenemos

$$\begin{bmatrix} & R(x,y) \leq R'(x,y) \\ \wedge & \\ & R'(y,x) \leq R(y,x) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{si } \{x\} = C(\{x,y\},R) \\ \Downarrow \\ \{x\} = C(\{x,y\},R') \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \text{si } x \in C(\{x,y\},R) \\ \Downarrow \\ x \in C(\{x,y\},R') \end{bmatrix}$$

Apreciamos que los dos axiomas anteriores son impuestos solo para una FEBP que satisface la independencia.

La condición de **neutralidad** consiste en intercambiar la posición de las alternativas $x$ y $y$ en las preferencias de cada individuo que tiene como resultado intercambiar la posición de las alternativas $x$ y $y$ en las preferencias del individuo.

La condición de **monotonicidad** nos dice que si una alternativa $x$ es estrictamente preferida o indiferente a $y$, y $x$ cambia de posición en las preferencias de algún individuo desde debajo de $y$ hasta el mismo nivel de $y$ o un nivel superior, o desde el mismo nivel de $y$ hasta un nivel superior, entonces $x$ pasa a ser estrictamente preferida a $y$ por el individuo.

**Definición 2.1.10.** Sea $C$ una FEBP , $C$ satisface:

**Condición de Chernoff (CC)**:

$\forall\, x, y \in X \wedge A \in \chi$, si $\{x,y\} \subset A$ se tiene que $x \notin C(\{x,y\},R) \Rightarrow x \notin C(A,R)$

**Condición Betta ($\beta$)**:

$\forall\, x, y \in X \ \wedge \ \{x, y\} \subset A \in \chi$, si

$$\Big[C(\{x,y\},R) = \{x,y\}\Big] \ \Rightarrow \ \Big[x \in C(A,R) \Leftrightarrow y \in C(A,R)\Big]$$

De acuerdo al teorema de Herve Moulin( Teorema 11.7, 1988:307), las condiciones Chernoff y Betta son conocidas. Las dos juntas son condiciones necesarias y suficientes para generar racionalización transitiva de una función de elección en los casos cuando las preferencias son exactas. Asi mismo, estas condiciones excluyen a las reglas de elección no binarias.

Consideremos finalmente la siguiente propiedad de la continuidad de una regla de elección.

**Definición 2.1.11.** Una FEBP satisface la continuidad (CON)

$$\begin{bmatrix} 1)\forall \qquad R_1,..,R_i \in \mathcal{R} \wedge x,y \in X \ \text{ se tiene } x \in C(\{x,y\},R_i), \forall R_i \\ 2) Si \lim\limits_{i\to\infty} \langle R_i(x,y), R_i(y,x)\rangle = \big(\overline{R}(x,y), \overline{R}(y,x)\big) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \Big[x \in C(\{x,y\},\overline{R})\Big]$$

### 2.1.4. Resultados de Caracterización

Este análisis puede ser profundizado ligeramente, teniendo en cuenta los siguientes teoremas diferenciándose básicamente en sus dominios y que deben satisfacer las condiciones $(I, CC, M, N.\beta, CON)$ que a continuación presentamos.

**Teorema 2.1.1.** *Consideremos* $C : \chi \times \overline{H} \longrightarrow \chi \Rightarrow C$ *satisface (I,CC,M,N,$\beta$, CON) si y solo si* $\exists\, \alpha \in [0,1]$ *tal que* $\forall\, R \in \overline{H} \wedge A \in \chi, \quad C(A,R) = S_\alpha(A,R)$

**Demostración**

[Condición suficiente ]

Si $\exists\, \alpha \in [0,1]$ tal que $\ \forall\ R \in \overline{H} \ \wedge \ A \ \in \chi, \ C(A,R) = S_\alpha(A,R)$ *entonces* $C$ satisface (I,CC,$\beta$,N,M,CON).

$\overline{H} \subset H_W$

Por lema 2.1.4 $S_\alpha \neq \phi$ esta bien definido para cualquier $R \in \overline{H} \wedge A \in \chi$

**Demostramos que $C$ satisface la condición de Independencia:**

$$R(x,y) = R'(x,y) \; entonces \;\; C(A,R) = C(A,R')$$

$$
\begin{array}{lll}
x \in C(A,R) & si\ y\ solo\ si & \nexists\, y \in A \text{ tal que } y \succ_\alpha x \\
 & si\ y\ solo\ si & \nexists\, y \in A \text{ tal que } R(y,x) > R(x,y) \wedge R(x,y) < \alpha \\
\text{Por hipótesis} & & R(x,y) = R'(x,y) \\
 & entonces & \nexists\, y \in A \text{ tal que } R'(y,x) > R'(x,y) \wedge R'(x,y) < \alpha \\
 & si\ y\ solo\ si & \nexists\, y \in A \text{ tal que } y \succ_\alpha x \\
 & si\ y\ solo\ si & x \in C(A,R')
\end{array}
$$

$$Por\ lo\ tanto\ \; C(A,R) = C(A,R')$$

**Demostramos que $C$ satisface la condición de Chernoff (CC):**
$\forall x,y \in X \ \wedge \ A \in \chi$ si $\{x,y\} \subset A$ se tiene que $x \notin C(\{x,y\},R)$ *entonces* $x \notin C(A,R)$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Si } x \notin C(\{x,y\},R)\ entonces & \exists\, z \in \{x,y\} \text{ tal que } z \succ_\alpha x \\
 & \text{Por hipotesis } \{x,y\} \subset A \\
entonces & \exists\, z \in A \text{ tal que } z \succ_\alpha x \\
Por\ lo\ tanto & x \notin C(A,R)
\end{array}
$$

**Demostramos que $C$ satisface la condición de Monotonicidad (M):**

$\forall R, R' \in \mathcal{R} \wedge \forall\ x, y \in X$, tenemos

$$\begin{array}{ccccc} R(x,y) \leq R'(x,y) & & \text{si } \{x\} = C(\{x,y\},R) & & \text{si } x \in C(\{x,y\},R) \\ \wedge & \Rightarrow & \Downarrow & \wedge & \Downarrow \\ R'(y,x) \leq R(y,x) & & \{x\} = C(\{x,y\},R') & & x \in C(\{z,w\},R') \end{array}$$

**Primero demostramos :** si $x \in C(\{x,y\},R)$ *entonces* $x \in C(\{x,y\},R')$

$$\begin{array}{rl} x \in C(\{x,y\},R)\ entonces & \neg(y \succ_\alpha x) \\ si\ y\ solo\ si & \neg(R(y,x) > R(x,y) \wedge R(x,y) < \alpha) \\ & \sim [p \wedge q] \equiv [\sim p \vee \sim q] \\ entonces & [R(y,x) \leq R(x,y)] \vee [R(x,y) \geq \alpha] \\ \text{Por hipótesis} & R(x,y) \leq R'(x,y)\ \wedge\ R'(y,x) \leq R(y,x) \\ & [R'(y,x) \leq R(y,x) \leq R(x,y)] \vee [R'(x,y) \geq R(x,y) \geq \alpha] \\ entonces & R'(y,x) \leq R(x,y) \vee R'(x,y) \geq \alpha \\ & \neg(R'(y,x) > R(x,y) \wedge R'(x,y) < \alpha) \\ si\ y\ solo\ si & \neg(y \succ_\alpha x) \\ \Leftrightarrow & x \in C(\{x,y\},R') \end{array}$$

Luego demostramos:

$$y \notin C(\{x,z\},R)\ si\ y\ solo\ si\ x \succ_\alpha y\ si\ y\ solo\ si\ R(x,y) > R(y,x) \wedge R(y,x) < \alpha$$

$$
\begin{aligned}
\text{por hipótesis} \quad & R(x,y) \leq R'(x,y) \ \wedge \ R'(y,x) \leq R(y,x) \\
R'(x,y) \geq R(x,y) > R(y,x) \quad & \geq R'(y,x) \ \wedge \ R'(y,x) \ \leq \ R(y,x) < \alpha \\
\textit{entonces} \quad & R'(x,y) > R'(y,x) \ \wedge \ R'(y,x) < \alpha \\
& \textit{si y solo si} \quad x \succ_\alpha y \\
& \textit{si y solo si} \quad y \notin C(\{x,z\}, R')
\end{aligned}
$$

En consecuencia de lo demostrado anteriormente se tiene:

$$\text{Si } C(\{x,y\},R) = \{x\} \quad \textit{entonces} \quad C(\{x,y\},R') = \{x\}$$

**Demostramos que $C$ satisface la Neutralidad (N):**

$\forall R, R' \in \mathcal{R} \ \wedge \ \forall\, x,y,z,w \in X$ se tiene:

$$
\begin{array}{ccccc}
R(x,y) = R'(z,w) & & x \in C(\{x,y\},R) & & y \in C(\{x,y\},R) \\
\wedge & \Rightarrow & \Updownarrow & \wedge & \Updownarrow \\
R(y,x) = R'(w,z) & & z \in C(\{z,w\},R') & & w \in C(\{z,w\},R')
\end{array}
$$

**Primero demostramos:** $x \in C(\{x,y\},R)$ *si y solo si* $z \in C(\{z,w\},R')$

$$
\begin{aligned}
x \in C(\{x,y\},R) \ \textit{si y solo si} \quad & \nexists y \in \{x,y\} \quad \text{tal que} \quad y \succ_\alpha x \\
\Leftrightarrow \quad & \neg(y \succ_\alpha x) \\
\Leftrightarrow \quad & \neg(R(y,x) > R(x,y) \wedge R(x,y) < \alpha) \\
\text{Por hipótesis} \quad & R(x,y) = R'(z,w) \wedge R(y,x) = R'(w,z) \\
\textit{entonces} \quad & \neg\Big(R'(w,z) > R'(z,w) \wedge R'(z,w) < \alpha\Big) \\
\Leftrightarrow \quad & \neg(w \succ_\alpha z) \\
\Leftrightarrow \quad & \nexists w \in \{z,w\} \text{ tal que } w \succ_\alpha z
\end{aligned}
$$

$$Por\ lo\ tanto\ z \in C(\{z,w\},R')$$

Similarmente se prueba que:

$$y \in C(\{x,y\},R)\ si\ y\ solo\ si\ w \in C(\{z,w\},R')$$

**Demostramos que $C$ satisface la condición Betta ($\beta$):**

$\forall\ x,y \in X\ \wedge\ A \in \chi$, si $C(\{x,y\},R) = \{x,y\} \Rightarrow\ x \in C(A,R) \Leftrightarrow y \in C(A,R)$

Demostramos que satisface la condición $\beta$

Sea $S_\alpha(\{x,y\},R) = \{x,y\}$, supongamos que

i) $\{x,y\} \subset A$ para algún $A$

ii) $y \in S_\alpha(A,R)$

Demostramos que $x \in S_\alpha(A,R)$

Por el absurdo: Supongamos que $x \notin S_\alpha(A,R)$ *entonces* $\exists\ z \in A$ *tal que* $z \succ_\alpha x$

Consideremos 2 casos:

<u>caso 1</u>: $R(x,y) \geq R(y,x)$

$z \succ_\alpha x$ *entonces* $R(z,x) > R(x,z) \wedge R(x,z) < \alpha$

Por hipótesis: $R \in \overline{H}$, además $R(z,x) > R(x,z) \wedge R(x,y) \geq R(y,x)$.

Por demostración del Lema 2.1.3, se tiene $R(z,y) \geq R(y,z)$ $\Big($con desigualdad estricta $R(x,y) > R(y,x)\Big)$ (∗)

$$R(x,z) \geq \text{mín}\{R(x,y),R(y,z)\}$$

Por caso 1: $R(x,y) \geq R(y,x)$ *entonces* $R(x,z) \geq \text{mín}\{R(y,x),R(y,z)\}$

Como $R(y,x) \geq \text{mín}\{R(y,x),R(z,x)\}$ y

. $R(x,z) \geq \text{mín}\{\text{mín}\{R(y,x),R(z,x)\},R(y,z)\}$

$$R(x,z) \geq \{\text{mín}\{R(y,x),R(z,x)\},R(y,z)\}$$

$$\begin{cases} R(x,z) \geq R(y,x) \geq \text{mín}\{R(y,x), R(z,x)\} & \begin{cases} R(x,z) \geq R(y,x) \\ R(x,z) \geq R(z,x) (\Rightarrow\Leftarrow) R(z,x) > R(x,z) \end{cases} \\ R(x,z) \geq R(z,x) \end{cases}$$

$$Entonces\ R(x,z) \geq R(y,z)$$

Por tanto: $R(x,z) \geq R(y,z)$, además $R(y,z) \geq \alpha \vee R(y,z) < \alpha$
No se cumple puesto que $R(x,z) < \alpha$, entonces $R(y,z) < \alpha$

$$\Rightarrow R(x,z) \geq R(y,z) \wedge R(y,z) < \alpha$$

$y \in S_\alpha(A,R)$ por hipótesis, entonces $\nexists$ elementos que lo dominan.
Luego sea $z$ el elemento tal que $z \not\succ_\alpha y$

$$Entonces\ R(z,y) \leq R(y,z) \quad \vee \quad \underbrace{R(y,z) \geq \alpha}_{\text{no ocurre porque } R(y,z)<\alpha}$$

$$Entonces\ R(y,z) \geq R(z,y) \wedge R(z,y) \geq R(y,z)$$

$$Entonces\ R(z,y) = R(y,z)$$

Luego por caso 1: $R(x,y) \geq R(y,x) \equiv R(x,y) > R(y,x) \vee R(x,y) = R(y,x)$

Por $(*)$ si $R(x,y) > R(y,x)$ *entonces* $\underbrace{R(z,y) > R(y,z)}_{\text{no se cumple porque } R(z,y)=R(y,z)}$

$$\Rightarrow R(x,y) = R(y,x)$$

Luego:

$R(y,z) = R(z,y) = m \quad \wedge \quad R(x,y) = R(y,x) = n$

Si $m = n$ por la codición $T$ se tiene $R(x,z) = R(z,x)$

Si $m \neq n$ por lema 2.1.1, se tiene que: $R(x,z) = R(z,x)$.

En ambos casos es una contradicción, puesto que $z \succ_\alpha x$

Por tanto $$x \in S_\alpha(A,R)$$

<u>caso 2</u>: $R(y,x) \geq R(z,y)$

como $x \in S_\alpha(\{x,y\},R)$ *entonces* $R(x,y) \geq \alpha$ $\Big(R(x,y) < \alpha \quad \wedge$ como $R(x,y) < R(y,x)$ *entonces* $y \succ_\alpha x$ lo que contradice que $x \in S_\alpha(\{x,y\},R)\Big)$
Consideramos dos subcasos:

2.1) $R(y,z) \geq R(z,y)$
Como $R \in \overline{H}$, $R(x,z) \geq \text{mín}\{R(x,y),R(y,z)\}$

$$R(z,y) \geq \text{mín}\{R(z,x),R(x,y)\}$$

Luego
$$R(x,z) \geq \{\,\text{mín}\,\{\text{mín}\{R(z,x),R(x,y)\},R(x,y)\}$$

$$\Rightarrow R(x,z) \geq \text{mín}\{R(z,x),R(x,y)\}\begin{cases} R(x,z) \geq R(z,x) \text{ [no se cumple } R(x,z) < R(z,x)] \\ R(x,z) \geq R(x,y) \geq \alpha \;\; [(\Rightarrow\Leftarrow)\; R(x,z) < \alpha] \end{cases}$$

2.2) $R(y,z) < R(z,y)$

Como $y \in S_\alpha(A,R)$ *entonces* $R(y,z) \geq \alpha$ $\Big($si $R(y,z) < \alpha \quad \wedge \quad R(y,z) < R(z,y)$ *entonces* $z \succ_\alpha y$ lo que contradice que $y \in S_\alpha(A,R)\Big)$

$$R(x,z) \geq \text{mín}[R(x,y) \geq \alpha, R(y,z) \geq \alpha]$$

$$\textit{Entonces } R(x,z) \geq \alpha \text{ (lo que contradice puesto que } z \succ_\alpha x)$$

$$\textit{Por lo tanto} \text{ en ambos casos } x \in S_\alpha(A,R)$$

Mostramos que $S_\alpha$ satisface la continuidad.
Sea $R_n$ una sucesión de relaciones tal que $x \in S_\alpha(\{x,y\},R_n)$ y
$\{R_n(x,y),R_n(y,x)\} \longrightarrow \{R^o(x,y),R^o(y,x)\}$
Supongamos por contradicción
$x \notin S_\alpha(\{x,y\},R_n)$ *entonces* $y \succ_\alpha x$

$$\textit{Entonces } R^o(y,x) > R^o(x,y) \;\; \wedge \;\; R^o(x,y) < \alpha$$

Como $R_n(x,y) \longrightarrow R^o(x,y)$
$\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq N$ se tiene $R_n(x,y) < \alpha \quad \wedge \quad R_n(x,y) < R_n(y,x)$

$$\Rightarrow y \succ^{n}_{\alpha} x$$

$$Entonces\ x \notin S_\alpha(\{x,y\}, R_n) \ \ \forall n \geq N \qquad \text{(es una contradicción)}$$

$$Por\ lo\ tanto\ S_\alpha \ \text{ satisface la continuidad.}$$

Para probar la condición necesaria necesitamos los siguientes lemas:

**Lema 2.1.5.** *Supongamos que $C(...)$ satisface el axioma $N$ entonces si $R(x,y) = R(y,x)$ implica que $C(\{x,y\}, R) = \{x,y\}$*

Demostración
Sea $(x,y,z,w) = (x,y,y,x)$ es decir $z = y, w = x$
Como $C$ satisface $N$ y sea $R = R'$
Tenemos:

$$x \in C(\{x,y\}, R) \ \Leftrightarrow \ y \in C(\{x,y\}, R)$$

$$y \in C(\{x,y\}, R) \ \Leftrightarrow \ x \in C(\{x,y\}, R)$$

Además $C$ está bien definida

$$Por\ lo\ tanto\ \phi \neq C(\{x,y\}, R) = \{x,y\}$$

**Lema 2.1.6.** *Supongamos que $C(...)$ satisface los axiomas $N$ y $M$, entonces si $R(x,y) > R(y,x)$ implica que $x \in C(\{x,y\}, R)$*

Demostración
Sea $C, R \in \mathcal{R} \ \wedge x, y \in X, \exists\, R' \in \overline{H} : R'(x,y) = R(x,y'(y,x)$
Por lema 2.1.5 $(\{x,y\}, R') = \{x,y\}$, como $R'(y,x) = R(x,y) > R(y,x)$
Se tiene

$$R(x,y) \geq R(x,y) = R'(y,x) = R(x,y)$$

De la condición $M : x \in \{x,y\} \subset C(\{x,y\}, R')$

$$Por\ tanto\ x \in C(\{x,y\}, R)$$

**Lema 2.1.7.** *Supongamos que* $C(...)$ *satisface* $(I, N, M, CC, \beta)$. *Si para algún* $R \in \overline{H}$ $R(x,y) > R(y,x) = m \wedge y \in C(\{x,y\}, R)$, *entonces para cualquier* $R' \in \overline{H}$ *con* $R'(y,x) \geq m$ *tenemos* $y \in C(\{x,y\}, R')$

Demostración

Consideramos $R^* \in \overline{H}$ tal que $R^*(x,y) = 1 \;\; \wedge \;\; R^*(y,x) = m$

Probamos $y \in C(\{x,y\}, R^*)$: supongamos $y \notin C(\{x,y\}, R^*)$

Consideramos cualquier $z \neq x, y \wedge$ sea $A = \{x,y,z\}$

Construimos $R^o$ tal que

$$\begin{aligned} R^o(x,y) &= \;\; 1 \\ R^o(y,x) &= \;\; m \\ R^o(x,z) &= \;\; R^o(z,y) = R(x,y) \\ R^o(y,z) &= \;\; R^o(z,x) = m \\ R^o(w,k) &= \;\; 1 \quad \text{si } w \notin A \\ R^o(k,w) &= \;\; 0 \quad \text{si } k \in A \;\; \wedge \;\; w \notin A \end{aligned}$$

Luego $R^o$ así construida satisface la transitividad $T$, es decir $R^o \in \overline{H}$

Tenemos

$$R^o(x,y) = 1 = R^*(x,y)$$
$$\wedge$$
$$R^o(y,x) = m = R^*(y,x)$$

Como $y \notin C(\{x,y\}, R^*)$ por hipótesis

Por la condición $I$ se tiene $y \notin C(\{x,y\}, R^o)$

Del axioma $CC$ se tiene $y \notin C(\{x,y,z\}, R^o)$ $\qquad (I)$

Similarmente como

$$R^o(x,z) = R(x,y)$$
$$\wedge$$
$$R^o(z,x) = m = R(y,x)$$

Además $y \in C(\{x,y\}, R)$

Tenemos del axioma $N$ $\quad z \in C(\{x,y\}, R^o)$

Luego

$$R^o(x,z) = R(x,y) > m = R^o(z,x)$$

Por el lema 2.1.6 y como $C$ satisface $N$ y $M$ se tiene $x \in C(\{x,z\}, R^o)$
Por el axioma $\beta$ tenemos

$z \in C(\{x,y,z\}, R^o)$ si $x \in C(\{x,y,z\}, R^o)$ (II)
De manera análoga $R^o(z,y) = R(x,y) \;\; \wedge \;\; y \in C(\{x,y\}, R)$ hipótesis del lema
$R^o(y,z) = R(y,x)$ de la construcción de $R^o$
Entonces por el axioma $N$

$$y \in C(\{y,z\}, R^o)$$

como $R^o(z,y) > m = R^o(y,z)$
Por lema 2.1.6 $z \in C(\{y,z\}, R^o)$
Además por el axioma $\beta$, $\quad y \in C(\{x,y,z\}, R^o)$ si $z \in C(\{x,y,z\}, R^o)$ (III)
Luego tenemos:

$y \notin C(\{x,y,z\}, R^o)$ (I)
$z \in C(\{x,y,z\}, R^o)$ si $x \in C(\{x,y,z\}, R^o)$ (II)
$y \in C(\{x,y,z\}, R^o)$ si $z \in C(\{x,y,z\}, R^o)$ (III)

Como la función de elección es diferente del vació, por ser bien definida

$$\phi \neq C(\{x,y,z\}, R^o) \subset \{x,y,z\}$$

Pero esto contradice I, II, III

$$\textit{Por lo tanto} \;\; y \in C(\{x,y\}, R^*)$$

Luego completando la demostración del lema

Sea $R' \in \overline{H}$ tal que $R'(y,x) \geq m$ mostrar que $y \in C(\{x,y\}, R')$
se sabe : $R'(x,y) \leq 1 = R^*(x,y)$ (así se escogió $R^*$)

$$R'(y,x) \geq m = R^*(y,x)$$

Además $y \in C(\{x,y\}, R^*)$
Como $C$ cumple $M$. Se tiene $y \in C(\{x,y\}, R')$

Con los lemas 2.1.5, 2.1.6, 2.1.7 probaremos la condición necesaria del teorema 2.1.1

Condición necesaria]

Sean $m, n \in X$ y definamos $\overline{\mathcal{R}} := \{R \in \overline{H} / \{m, n\}\} = C(\{m, n\}, R)\},$

Definamos $R^* : X \times X \longrightarrow [0, 1]$ tal que

$R^*(x, y) = 1 \quad \forall x, y \in X$

$$Entonces \;\; R^*(x, y) \in \overline{H}$$

Por lema 2.1.5 tenemos $\{m, n\} = C(\{m, n\}, R^*) \quad \forall x, y \in X$

así $R^* \in \overline{\mathcal{R}}$

$$\text{por tanto } \overline{\mathcal{R}} \neq \phi$$

Consideramos:

$$\Delta = \{\alpha_R \in [0, 1] \; tal \; que \; \alpha_R = R(n, m) \;\wedge\; R \in \overline{\mathcal{R}}\} \text{ y } \quad \alpha = \text{ínf} \, \Delta$$

Mostramos que $C(A, R) = S_\alpha(A, R)$ por doble inclusión

a) $C(A, R) \subset S_\alpha(A, R)$

Sea $x \in C(A, R)$ y supongamos $x \notin S_\alpha(A, R)$ *entonces* $\exists \, z \in A$ tal que $z \succ_\alpha x$

$$Entonces \; R(x, z) < \alpha$$

Como $C(A, R)$ satisface $CC$

Si $x \in C(A, R)$ *entonces* $x \in C(\{x, z\}, R)$

Por lema 2.1.7

Si $R \in \overline{H}$ tal que $R(z, x) > R(x, z)$ (pues $z \succ_\alpha x$) $\wedge \, x \in C(\{x, z\}, R)$
*Entonces* $\forall R' \in \overline{H}$ con $R'(x, z) \geq R(x, z)$ se tiene $x \in C(\{x, z\}, R')$ Para cualquier $R' \in \overline{H}$ tal que $R'(z, x) = 1 \;\wedge\; R'(x, z) = R(x, z)$

Sea $R^*$ cualquier elemento de $\overline{H}$ tal que $R^*(m, n) = 1 \;\wedge R^*(n, m) = R(x, z) < \alpha$

Por la condición $N$ como $R'(z, x) = 1 = R^*(m, n) \wedge R'(x, z) = R(x, z) = R^*(n, m)$

*Entonces* si $x \in C(\{x, z\}, R)$ *entonces* $n \in C(\{m, n\}, R^*)$ $\qquad (*)$

Además $R^*(m,n) = 1 \geq \alpha > R^*(n,m)$ tenemos $R^*(m,n) > R^*(n,m)$

Entonces por lema 2.1.6 $\qquad m \in C(\{m,n\}, \ R^*) \qquad$ (** )

De $(*)$ , $(**)$ y como $C$ es bien definida tenemos

$$\{m,n\} = C(\{m,n\}, R^*)$$

$$\text{Así } R^* \in \overline{\mathcal{R}} \ \wedge \ R^*(n,m) < \alpha \qquad \text{[Contradicción]}$$

Con el hecho de que $\alpha$ es el ínfimo

$$\text{Por lo tanto } \ C(A,R) \subset S_\alpha(A,R).$$

b) $S_\alpha(A,R) \subset C(A,R)$

Sea $x \in S_\alpha(A,R) \wedge$ cualquier $z \in C(A,R)$ (pues $C$ es bien definida)

Entonces por la condición $CC$ tenemos $z \in C(\{x,z\}, R)$ $\qquad (*)$

Comparemos $R(x,z)$ con $R(z,x)$

$$\text{Si } \ R(x,z) \geq R(z,x) \ \begin{cases} \text{si } \ R(x,z) > R(z,x) \text{ por lema 2.1.6} \Rightarrow x \in C(\{x,z\}, R) \\ \text{si } \ R(x,z) = R(z,x) \text{ por lema 2.1.5} \Rightarrow x \in C(\{x,z\}, R) \end{cases}$$

Como $z \in C(\{x,z\}, R) \wedge x \in C(\{x,z\}, R)$ *entonces* $\{x,z\} = C(\{x,z\}, R)$

Por la condición $\beta$ $\qquad x \in C(A,R)$ *si y solo si* $z \in C(A,R)$

$$\text{si } R(x,z) < R(z,x) \textit{ entonces } R(x,z) \geq \alpha \ \text{ ya que } \ x \in S_\alpha(A,R)$$

Como $C$ satisface la condición $CON$

Es decir si $\alpha = \text{ínf}\,\Delta \ \ \exists \alpha_{R_K} \in \Delta$ tal que $\ \alpha_{R_K} \longrightarrow \alpha$

Sea $R_K(m,n) = \alpha_{R_K}$ *entonces* $R_K(m,n) \longrightarrow \alpha$

$R_K \in \overline{\mathcal{R}}$ *entonces* $\{m,n\} = C(\{m,n\}, R_K)$

Luego como $R_{_K}(m,n) \in [0,1]$ es compacto, podemos asumir (tomando una subsucesión adecuada) que

$$R_{_K}(m,n) \longrightarrow R^*(m,n) \quad \wedge \quad R_{_K}(n,m) \longrightarrow R^*(n,m) = \alpha$$

Luego para algún $R^* \in \mathcal{R}$ y de la condición $CON$

$$n \in C(\{m,n\}, R^*) \quad \wedge \quad m \in C(\{m,n\}, R^*) \ entonces \ \{m,n\} \in C(\{m,n\}, R^*)$$

Por lo tanto $R^* \in \overline{\mathcal{R}} \quad \wedge \quad R^*(n,m) = \alpha$

Por la condición $M$

Sea cualquier $R' \in \overline{H}$ tal que $R'(m,n) = R(z,x) \quad \wedge \quad R'(n,m) = R(x,z) \geq \alpha$ $Entonces \quad R'(n,m) \geq \alpha = R(x,z) \quad \wedge \quad R^*(m,n) \geq R'(m,n)$

$$Por\ tanto\ n \in C(\{m,n\}, R')$$

Por la condición $N$ tenemos $x \in C(\{x,z\}, R)$ $\big($pues $n \in C(\{m,n\}, R')\big)$ Además por $(*)$ $z \in C(\{x,z\}, R)$

$$\Rightarrow \{x,z\} \subset C(\{x,z\}, R)$$

Luego aplicando la condición $\beta$ $\quad x \in C(A,R)$

$$\Rightarrow S_\alpha(A,R) \subset C(A,R)$$

En efecto de a) y b)

$$S_\alpha(A,R) = C(A,R).$$

Demostramos a continuación el siguiente teorema cuyo dominio es $H$.

**Teorema 2.1.2.** *Supongamos que* $C : \chi \times H \longrightarrow \chi \Rightarrow C$ *satisface (I,CC,M,N,$\beta$,CON) si y solo si* $\exists\ \alpha \leq 1/2$ *tal que* $\forall\ R \in H$ *y* $A \in \chi$, $C(A,R) = S_\alpha(A,R) = M_\alpha(A,R)$

**Demostración**

[Condición suficiente] Si $\exists\, \alpha \leq \dfrac{1}{2}$ tal que $\forall R \in H \ \wedge \ A \in \chi$, $C(A,R) = S_\alpha(A,R) = M_\alpha(A,R)$

$$Entonces \ \ C \text{ satisface } (I, CC, M, N, \beta, CON)$$

Como $C(A,R) = M_\alpha(A,R)$, demostramos que:

* $M_\alpha$ **satisface** $I$
Sea $A \in \chi$, $R, R' \in \mathcal{R}$ tal que

$$R(x,y) = R'(x,y) \; \forall x, y \in A \tag{2.1.19}$$

• $M_\alpha(A,R) \subset M_\alpha(A,R')$
Sea $z \in M_\alpha(A,R)$ Probaremos que $z \in M_\alpha(A,R')$
Como $z \in M_\alpha(A,R)$ implica que $R(z,y) \geq \alpha \; ; \quad \forall y \in A$
Pero por (2.1.19) $R'(z,y) = R(z,y) \quad \wedge \quad R(z,y) \geq \alpha \; ; \quad \forall y \in A$

$$Entonces \;\; R'(z,y) \geq \alpha \; ; \quad \forall \, y \in A$$

Esto implica que $z \in M_\alpha(A,R')$

$$Entonces \;\; M_\alpha(A,R) \subset M_\alpha(A,R')$$

En forma análoga se prueba que $M_\alpha(A,R') \subset M_\alpha(A,R)$

$$\text{Por lo tanto} \quad M_\alpha(A,R') = M_\alpha(A,R)$$

Así $M_\alpha$ satisface $I$.

* $M_\alpha$ **satisface** $N$
Como $M_\alpha$ ya cumple $I$ probaremos que cumple $N$
Sea $R, R' \in \mathcal{R}$ y $x, y, z, w \in \chi$ tal que

$$R(x,y) = R'(z,w) \quad \wedge \quad R(y,x) = R'(w,z) \tag{2.1.20}$$

Probamos que $x \in M_\alpha(\{x,y\},R)$ *si y solo si* $z \in M_\alpha(\{z,w\},R')$

Si $x \in M_\alpha(\{x,y\},R)$ *entonces* $z \in M_\alpha(\{z,w\},R')$

Como $x \in M_\alpha(\{x,y\},R)$ *entonces* $R(x,y) \geq \alpha$

Por (2.1.20) $\quad R'(z,w) = R(x,y) \Rightarrow R'(z,w) \geq \alpha$ y como $\quad R'(z,z) = 1 \geq \alpha$

Se tiene que $z \in M_\alpha(\{z,w\},R')$

Análogamente se prueba que

$$\text{Si } z \in M_\alpha(\{z,w\},R'\,)\ entonces\ \ x \in M_\alpha(\{x,y\},R)$$

Ahora demostramos $\ y \in M_\alpha(\{x,y\},R)\ si\ y\ solo\ si\ \ w \in M_\alpha(\{w,z\},R'\,)$

Si $y \in M_\alpha(\{x,y\},R)\ entonces\ \ w \in M_\alpha(\{w,z\},R'\,)$

Como $\quad y \in M_\alpha(\{x,y\},R)\ entonces\ \ R(y,x) \geq \alpha$

Por (2.1.20) $R'(w,z) = R(y,x) \quad \wedge \quad R(y,x) \geq \alpha$

$$Entonces\ \ R'(w,z) \geq \alpha \quad \text{y como} \quad R'(w,w) = 1 \geq \alpha$$

Se tiene $\quad w \in M_\alpha(\{w,z\},R'\,)$
Análogamente se prueba que

$$\text{Si } \ w \in M_\alpha(\{w,z\},R')\ entonces\ \ y \in M_\alpha(\{x,y\},R)$$

Así $M_\alpha$ satisface $N$.

*** $M_\alpha$ satisface $M$**
Como $M_\alpha$ cumple $I$, probaremos que satisface $M$

Sea $R, R' \in \mathcal{R}$ , $\forall x,y \in \chi$ tal que

$$R(x,y) \leq R'(x,y) \quad \wedge \quad R(y,x) \geq R'(y,x) \tag{2.1.21}$$

Demostramos que si $\{x\} = M_\alpha(\{x,y\},R)\ entonces\ \{x\} = M_\alpha(\{x,y\},R')$

Como $\{x\} = M_\alpha(\{x,y\},R)$ se tiene $R(x,y) \geq \alpha$ y $R(y,x) < \alpha$

(pues si $R(y,x) \geq \alpha$ tendremos que $y \in M_\alpha(\{x,y\},R)$ lo que contradice)

Por (2.1.21) $R'(x,y) \geq R(x,y) \quad \wedge \quad R(x,y) \geq \alpha$

$$Entonces\ \ R'(x,y) \geq \alpha \ \text{ y además } \ R(y,x) < \alpha$$

Se tiene $R'(y,x) < \alpha\ entonces\ \ x \in M_\alpha(\{x,y\},R')$ y $y \notin M_\alpha(\{x,y\},R')$

Así $\{x\} = M_\alpha(\{x,y\}, R')$

Demostramos que si $x \in M_\alpha(\{x,y\}, R)$ *entonces* $x \in M_\alpha(\{x,y\}, R')$

Si $x \in M_\alpha(\{x,y\}, R)$ *entonces* $R(x,y) \geq \alpha$

Por (2.1.21) $R'(x,y) \geq R(x,y) \quad \wedge \quad R(x,y) \geq \alpha$

*Entonces* $R'(x,y) \geq \alpha$ y como $R'(x,x) = 1 \geq \alpha$ (por que $R' \in \mathcal{R}$)

Se tiene $x \in M_\alpha(\{x,y\}, R')$
Así $M_\alpha$ satisface $M$.

* $M_\alpha$ **satisface** $CC$

Probamos que $\forall\, x, y \in A, A \in \chi$ tal que $\{x,y\} \subset A$

Si $x \notin M_\alpha(\{x,y\}, R)$ *entonces* $x \notin M_\alpha(A, R)$

$$\text{Como } x \notin M_\alpha(\{x,y\}, R) \quad \text{se tiene que } R(x,y) < \alpha \tag{2.1.22}$$

Demostramos por el absurdo.

Sea $x \in M_\alpha(A, R)$ *entonces* $R(x,w) \geq \alpha, \quad \forall w \in A$

En particular sea $y = w$ *entonces* $R(x,w) \geq \alpha$ lo que contradice a (2.1.22)

Por tanto $x \notin M_\alpha(A, R)$

Así $M_\alpha$ satisface $CC$.

* $M_\alpha$ **satisface** $\beta$

Probamos que $\forall x, y \in A, A \in \chi$ tal que $\{x,y\} \subset A$

Si $x \notin M_\alpha(\{x,y\}, R)$ *entonces* $x \notin M_\alpha(A, R)$

Sea $M_\alpha(A, R) = S_\alpha(A, R)$ para $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$

Es decir, demostramos que si $M_\alpha(\{x,y\}, R) = \{x,y\}$
*Entonces* $x \in M_\alpha(A, R)$ *si y solo* $y \in M_\alpha(A, R)$
$Sea \{x,y\} = M_\alpha(\{x,y\}, R)$

Supongamos que:

$$x \in M_\alpha(A,R) \ entonces \ \ R(x,z) \geq \alpha \qquad\qquad \forall z \in A \qquad\qquad (2.1.23)$$

Probamos que $\quad y \in M_\alpha(A,R)$, es decir $R(y,w) \geq \alpha \qquad\qquad \forall\ w \in A$

Como $M_\alpha(\{x,y\},R) = \{x,y\}\ entonces\ \ y \in M_\alpha(\{x,y\},R) \Rightarrow R(y,x) \geq \alpha$

Consideramos $z \in A$ y como $R \in H \Rightarrow R(y,z) \geq \text{mín}[R(y,x),R(x,z)] \geq \alpha$

$$\Rightarrow R(y,z) \geq \alpha \qquad\qquad \forall z \in A$$

$$\Rightarrow y \in M_\alpha(A,R)$$

(Que es lo que queríamos probar)

De manera análoga se prueba que

$$\text{si } y \in M_\alpha(A,R)\ entonces\ x \in M_\alpha(A,R) \qquad\qquad (2.1.24)$$

En consecuencia, de (2.1.23) y (2.1.24) se tiene que $C$ satisface la condición $\beta$

* $M_\alpha$ **satisface** $CON$

Si $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathcal{R} \wedge x,y \in X$ tal que:

$x \in M_\alpha(\{x,y\},R_n),\ \forall n$ y la sucesión $(R_n(x,y),R_n(y,x))$ converge a $(R'(x,y),R'(y,x))$

Entonces demostramos que $x \in M_\alpha(\{x,y\},R')$

Como $x \in M_\alpha(\{x,y\},R_n),\ \forall\ n$ se tiene $R_n(x,y) \geq \alpha,\ \forall\ n$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ tenemos $R'(x,y) \geq \alpha$

y como $R'(x,x) = 1 \geq \alpha$ se tiene que $\quad x \in M_\alpha(\{x,y\},R')$

Así $M_\alpha$ satisface $CON$.

■

Ahora demostramos la condición necesaria

Si $C$ satisface (I,CC,M,N,$\beta$,CON) $\Rightarrow \exists\, \alpha \leq \dfrac{1}{2}$ tal que $\forall\, R \in H \ \wedge\ A \in \chi$, $C(A,R) = S_\alpha(A,R) = M_\alpha(A,R)$

$$S_\alpha(A,R) = M_\alpha(A,R) \text{ si } \alpha \leq \frac{1}{2} \qquad\qquad \text{por lema 2.1.3}$$

Como $\overline{H} \subset H$ del teorema 2.1.1 se tiene la existencia de $\alpha \in [0,1]$

Para $C \equiv S_\alpha$

Demostramos que $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$

Supongamos que $\alpha > \dfrac{1}{2}$ y sea $A = \{x,y,z\}$ con $x,y,z$ diferentes

Consideramos una relación $R$ tal que :

$$\begin{aligned}
R(x,y) &= R(y,x) = 0{,}5\\
R(y,z) &= R(z,y) = 0{,}5\\
R(x,z) &= 0{,}8\\
R(z,x) &= 0{,}5\\
R(w,k) &= 1 \quad \text{si } w \notin A\\
R(k,w) &= 0 \quad \text{si } k \in A \ \wedge\ w \notin A\\
R(w,k) &= 0 \quad \text{en otros casos}
\end{aligned}$$

Así definimos $R \in H$

Como $S_\alpha$ cumple la condición $N$ y por el lema 2.1.5 tenemos

$$\{x,y\} = S_\alpha(\{x,y\},R) \quad \wedge \quad \{y,z\} = S_\alpha(\{y,z\},R)$$

De la condición $\beta$ $\qquad A = S_\alpha(A,R)$ donde $A = \{x,y,z\}$

Por la condición $CC$ $\qquad z \in S_\alpha(\{x,z\},R)$ *entonces* $x \not\succ_\alpha z$

$$\Rightarrow R(x,z) \leq R(z,x) \ \vee\ R(z,x) \geq \alpha$$

(es una contradicción, ya que ninguno de los dos casos ocurre)

Es decir

a) $R(x,z) > R(z,x)$ ya que $R(x,z) = 0{,}8 \quad \wedge \quad R(z,x) = 0{,}5$

b) $R(z,x) = 0{,}5 < \alpha$

$$\text{Por tanto, concluimos que } \alpha \leq \frac{1}{2}$$

■

Con esto concluimos la demostración del teorema 2.1.2

Finalmente demostramos el teorema 2.1.3 que define la regla de elección para un dominio $\overline{H}_W$.

**Teorema 2.1.3.** *Consideremos* $C : \chi \times \overline{H}_W \longrightarrow \chi$ *no trivial (es decir* $\exists\ A \in \chi$, $\exists R \in \mathcal{R}$ *tal que* $C(A,R) \neq A$ *). Entonces* $C$ *satisface (I,CC,M,N,β,CON) si y solo si para todo* $R \in \overline{H}_W$ *y* $A \in \chi$, $C(A,R) = S_1(A,R) = OV(A,R)$

**Demostración**

Demostramos la condición suficiente

Si $\forall\ R \in \overline{H}_W \wedge\ A \in \chi, \quad C(A,R) = S_1(A,R) = OV(A,R)$

$$\Rightarrow C \text{ satisface } (I, CC, M, N, \beta, CON)$$

Como $C(A,R) = OV(A,R)$ demostramos :

*** $OV$ satisface $I$**

Sea $A \in \chi$, $R, R' \in \mathcal{R}$ tal que

$$R(x,y) = R'(y,x) \qquad \forall x,y \in A \tag{2.1.25}$$

Probamos que $OV(A,R) = OV(A,R')$

$OV(A,R) \subset OV(A,R')$

Sea $z \in OV(A,R)$ *entonces* $R(z,y) \geq R(y,z) \quad \forall\, y \in A$

Por (2.1.25)

$$R(x,y) = R'(y,x) \Rightarrow R'(z,y) = R(z,y) \geq R(y,z) = R'(y,z), \qquad \forall\, y \in A$$

$$\Rightarrow R'(z,y) \geq R'(y,z)$$

Luego $z \in OV(A,R')$

$$\text{Por tanto } OV(A,R) \subset OV(A,R')$$

Análogamente se prueba que $OV(A,R') \subset OV(A,R)$

$$\text{Así } OV(A,R) = OV(A,R').$$

*** $OV$ satisface $N$**

Como $OV$ ya cumple $I$, veremos que cumpla $N$

$\forall R, R' \in \mathcal{R}$ y $x, y, z, w \in \chi$ tal que

$$R(x,y) = R'(z,w) \quad \wedge \quad R(y,x) = R'(w,z) \tag{2.1.26}$$

Demostramos que $x \in OV(\{x,y\},R)$ *si y solo si* $z \in OV(\{z,w\},R')$

Si $x \in OV(\{x,y\},R)$ *entonces* $z \in OV(\{z,w\},R')$

Como $x \in OV(\{x,y\},R)$ *entonces* $R(x,y) \geq R(y,x)$

Por (2.1.26) $R(x,y) = R'(z,w) \quad \wedge \quad R(y,x) = R'(w,z)$

$$R'(z,w) = R(x,y) \geq R(y,x) = R'(w,z)$$

$$\Rightarrow R'(z,w) \geq R'(w,z)$$

Así $z \in OV(\{z,w\},R')$

Análogamente si $z \in OV(\{z,w\},R')$ se tiene que $x \in OV(\{x,y\},R)$

Demostramos que $y \in OV(\{x,y\},R)$ *si y solo si* $w \in OV(\{z,w\},R')$

Si $y \in OV(\{x,y\},R)$ *entonces* $w \in OV(\{z,w\},R')$

Como $y \in OV(\{x,y\},R)$ *entonces* $R(y,x) \geq R(x,y)$

Además $R(y,x) = R'(w,z) \quad \wedge \quad R(x,y) = R'(z,w)$

Reemplazado

$$R'(w,z) = R(y,x) \geq R(x,y) = R'(z,w)$$

$$\Rightarrow R'(w,z) \geq R'(z,w)$$

Y como $\qquad R'(w,w) \geq 1 \geq R'(w,w)$

Tenemos que $\qquad w \in OV(\{w,z\},R')$

De manera análoga se prueba que si $w \in OV(\{z,w\},R') \Rightarrow y \in OV(\{x,y\},R)$

Entonces $y \in OV(\{x,y\},R)$

Así $OV$ satisface $N$.

*** $OV$ satisface $M$**

$\forall R, R' \in \mathcal{R}$ , $\forall x,y \in \chi$ tal que

$$R(x,y) \leq R'(x,y) \quad \wedge \quad R'(y,x) \leq R(y,x) \tag{2.1.27}$$

Probamos que si $\{x\} = OV(\{x,y\},R)$ *entonces* $\{x\} = OV(\{x,y\},R')$

Como $\{x\} = OV(\{x,y\},R)$ se tiene que $R(x,y) \geq R(y,x) \ \wedge \ R(y,x) < R(x,y)$

$\Big($pues de lo contrario tendríamos que $R(y,x) \geq R(x,y) \Rightarrow y \in OV(\{x,y\},R)\Big)$

Como $R(x,y) \geq R(y,x)$ y por (2.1.27)

Se tiene $R'(x,y) \geq R(x,y) \geq R(y,x) \geq R'(y,x)$

Por consiguiente $R'(x,y) \geq R'(y,x)$ *entonces* $x \in OV(\{x,y\},R')$

Y como $R(y,x) < R(x,y)$ se tiene $R'(y,x) \leq R(y,x) < R(x,y) \leq R'(x,y)$

Así $R'(y,x) < R'(x,y)$ *entonces* $y \notin OV(\{x,y\},R')$

Luego $\{x\} = OV(\{x,y\},R')$.

Demostramos que si $x \in OV(\{x,y\},R)$ *entonces* $x \in OV(\{x,y\},R')$

Como $x \in OV(\{x,y\},R)$ se tiene $R(x,y) \geq R(y,x)$

$$\Rightarrow R'(x,y) \geq R'(y,x), \text{ además } R'(x,x) = 1$$

Por tanto $x \in OV(\{x,y\},R')$

Así $OV$ satisface $M$

*** $OV$ satisface $CC$**

Probamos que $\forall\, x,y \in X, A \in \chi$ tal que si $\{x,y\} \subset A$ se tiene que

$$x \notin OV(\{x,y\},R) \text{ entonces } x \notin OV(A,R)$$

Como $x \notin OV(\{x,y\},R)$ *entonces* $R(x,y) < R(y,x)$

Luego $x \notin OV(A,R)$; pues $y \in A$

Así $OV$ satisface $CC$.

*** $OV$ satisface $\beta$**

Sea $\{x,y\} = OV(\{x,y\},R); \qquad \{x,y\} \subset A$

$$\text{Si } x \in OV(A,R) \quad \text{demostramos que} \quad y \in OV(A,R) \tag{2.1.28}$$

Por el absurdo:
Supongamos que $y \notin OV(A,R)$ *entonces* $\exists\, w \in A$ tal que $R(w,y) > R(y,w)$

$$\text{Como } \{x,y\} = OV(\{x,y\},R) \text{ se tiene } R(x,y) = R(y,x) \tag{2.1.29}$$

Además $x \in OV(A,R) \Rightarrow R(x,w) \geq R(w,x) \qquad \forall\, w \in A$

Si $R(x,w) = R(w,x)$ :

- Si $R(x,w) = R(w,x) = R(x,y) = R(y,x)$ por condición $T$ se tiene
  $R(y,w) = R(w,y)$ [Contradicción]
- Si $R(x,w) = R(w,x) \neq R(x,y) = R(y,x)$ por lema 2.1.1 se tiene
  $R(y,w) = R(w,y)$ [Contradicción]

Así tenemos $R(x,w) > R(w,x) \wedge R(w,y) > R(y,w)$ por lema 2.1.3 (Dasgupta y Deb) se tiene

$R(x,y) > R(y,x)$ [Contradicción]

Por tanto $y \in OV(A,R)$

De manera análoga se prueba que

$$\text{Si } y \in OV(A,R) \textit{ entonces } x \in OV(A,R) \tag{2.1.30}$$

Por lo tanto de (2.1.28) y (2.1.30) se tiene que $C$ satisface la condición $\beta$

* $OV$ **satisface** $CON$

Si $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de $\mathcal{R} \wedge x, y \in X$ tal que: $x \in OV(\{x,y\}, R_n)$,

$\forall n$ y la sucesión $\{R_n(x,y), R_n(y,x)\}$ converge a $\{R'(x,y), R'(y,x)\}$

Entonces demostramos que $x \in OV(\{x,y\}, R')$

Como $x \in OV(\{x,y\}, R_n)$, se tiene $R_n(x,y) \geq R_n(y,x)$, $\forall n$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ tenemos $R'(x,y) \geq R'(y,x)$

Así $x \in OV(\{x,y\}, R')$

Por tanto $OV$ satisface $CON$.

Ahora demostramos la condición necesaria

Si $C$ satisface (I,CC,M,N,$\beta$,CON) entonces, para todo $R \in \overline{H}_W$ y $A \in \chi$, $C(A,R) = S_1(A,R) = OV(A,R)$

Por lema 2.1.2 (parte b) se tiene $OV(A,R) = S_1(A,R)$

Como $\overline{H} \subset \overline{H}_W$ del teorema 2.1.1 $C$ que satisface todos los axiomas debe ser de la forma $S_\alpha$ con $\alpha \in [0,1]$

Probamos que $\alpha = 1$

Por el absurdo, supongamos que $\alpha < 1$

(nuestra contradicción será encontrar un $R \in \overline{H}_W$ tal que $S_\alpha(A,R)$ no cumpla la condición $\beta$)

Consideramos $A = \{x, y, z\}$ y una relación $R$ tal que

$$\begin{aligned}
R(x,y) &= R(y,z) = 1 \\
R(y,x) &= R(z,y) = 0 \\
R(x,z) &= 1 \\
R(z,x) &= \alpha < 1 \\
R(w,k) &= 1 \quad \text{si } w \notin A \\
R(k,w) &= 0 \quad \text{si } k \in A \ \wedge \ w \notin A \\
R(w,k) &= 1 \quad \text{en otros casos}
\end{aligned}$$

Así definida $R \in \overline{H}_W$

De la definición de $S_\alpha$ tenemos que $\{x,z\} = S_\alpha(\{x,z\}, R)$ pues

$z \not\succ_\alpha x$ ya que $\alpha = R(z,x) < R(x,z) = 1$ *entonces* $x \in S_\alpha(\{x,z\}, R)$

y

$x \not\succ_\alpha z$ ya que $R(z,x) \geq \alpha$ *entonces* $z \in S_\alpha(\{x,z\}, R)$

De la condición $\beta$

$$z \in S_\alpha(A,R) \ \text{ si } x \in S_\alpha(A,R) \tag{2.1.31}$$

Como:

$x$ $\alpha-$ domina $y$ , $R(x,y) = 1 > R(y,x) = 0$ $\wedge$ $0 = R(y,x) < \alpha$

$y$ $\alpha-$ domina $z$ , $R(y,z) = 1 > R(z,y) = 0$ $\wedge$ $0 = R(z,y) < \alpha$

Entonces tenemos que $\{x\} = S_\alpha(A,R)$, lo que contradice a (2.1.31)

$z \in S_\alpha(A,R) = \{x\}$

De manera análoga se prueba que

$$\text{Si } x \in S_\alpha(A,R) \quad \textit{entonces} \quad z \in S_\alpha(A,R) \tag{2.1.32}$$

Por tanto de (2.1.31) y (2.1.32) tenemos que $S_\alpha$ contradice la condición $\beta$

$$\textit{Por lo tanto } \alpha = 1$$

■

# Capítulo 3

# Anexos

**Ejemplo 3.0.1.** *Sea*

| $R$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 0.6 | 0.8 |
| $y$ | 0.4 | 1 | 0.5 |
| $z$ | 0.4 | 0.5 | 1 |

- $R$ *exacta si y solo si* $R(x,y) = 0 \vee 1, \ \forall\, x, y \in \chi$

  *Por lo tanto* $R$ *no es exacta.*

- $R$ *reflexiva si y solo si* $R(x,x) = 1, \ \forall\, x \in \chi$

$$R(x,x) = 1$$
$$R(y,y) = 1$$
$$R(z,z) = 1$$

*Por lo tanto* $R$ *es reflexiva.*

- $R$ *conexa si y solo si* $R(x,y)+R(y,x)\geq 1,\ \forall\, x,y,z\in\chi$

$$\begin{aligned} R(x,y)+R(y,x) &= 0.6+0.4 = 1\geq 1\\ R(x,z)+R(z,x) &= 0.8+0.4 = 1.2\geq 1\\ R(y,z)+R(z,y) &= 0.5+0.5 = 1\geq 1 \end{aligned}$$

*Por lo tanto* $R$ *es conexa.*

- $R\in\mathcal{R}$ *se dice max-min transitiva si y solo si* $\forall\, x,y,z\in\chi$

$$\min\{R(x,y),R(y,z)\}\leq R(x,z)$$

*En efecto:*

$$\begin{aligned} \min\{R(x,y),R(y,z)\} &= \min\{0.6\ ,\ 0.5\} = 0.5\leq 0.8 = R(x,z)\\ \min\{R(x,z),R(z,y)\} &= \min\{0.8\ ,\ 0.5\} = 0.5\leq 0.8 = R(x,y)\\ \min\{R(y,x),R(x,z)\} &= \min\{0.4\ ,\ 0.8\} = 0.4\leq 0.5 = R(y,z)\\ \min\{R(y,z),R(z,x)\} &= \min\{0.5\ ,\ 0.4\} = 0.4\leq 0.4 = R(y,x)\\ \min\{R(z,x),R(x,y)\} &= \min\{0.4\ ,\ 0.6\} = 0.4\leq 0.5 = R(z,y)\\ \min\{R(z,y),R(y,x)\} &= \min\{0.5\ ,\ 0.4\} = 0.4\leq 0.4 = R(z,x) \end{aligned}$$

*Por lo tanto satisface max-min transitiva.*

- $R$ *satisface la débil transitividad max-min si y solo si* $\forall\, x,y,z\in\chi$

$$\begin{aligned} &Si\quad R(x,y)\geq R(y,x)\wedge R(y,z)\geq R(z,y)\Rightarrow \min\{R(x,y),R(y,z)\}\leq R(x,z)\\ &\qquad 0.6\geq 0.4 \qquad \wedge \qquad 0.5\geq 0.5 \qquad \Rightarrow\ \min\{0.6\ ,\ 0.5\} = 0.5\ \leq\ 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Si\quad R(x,z)\geq R(z,x)\wedge R(z,y)\geq R(y,z)\Rightarrow \min\{R(x,z),R(z,y)\}\leq R(x,y)\\ &\qquad 0.8\geq 0.4 \qquad \wedge \qquad 0.5\geq 0.5 \qquad \Rightarrow\ \min\{0.8\ ,\ 0.5\} = 0.5\ \leq\ 0.6 \end{aligned}$$

*Por lo tanto satisface la débil transitividad max-min.*

- *R satisface la condición $T$ si y solo si $\forall\, x, y, z \in \chi$ tal que*

$$R(x,y) = R(y,x) = R(y,z) = R(z,y) \Rightarrow R(x,z) = R(z,x)$$

  *R satisface la condición $T$ vaciamente.*

- *$R \in \mathcal{R}$ es llamada $T-$transitiva si es reflexiva, conexa que satisface la transitividad max-min y la condición $T$.*

  *R es reflexiva*
  *R es conexa*
  *R satisface la transitividad max-min*
  *R satisface la condición $T$*

  *Por lo tanto $R$ es $T-$transitiva.*

- *$R \in \mathcal{R}$ es llamada débilmente $T-$transitiva si es reflexiva, conexa que satisface la débil transitividad max-min y satisface la condición $T$.*

  *R es reflexiva*
  *R es conexa*
  *R satisface la transitividad max-min*
  *R satisface la condición $T$*

  *Por lo tanto $R$ es débilmente $T-$transitiva.*

*Definamos:*

$$\chi = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, \{x,y,z\}\}$$

*Veamos si se verifica la siguiente propiedad para $\alpha = 0.3$ y $0.5$*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x \underset{\alpha}{\succ} y$ | $\Longleftrightarrow$ | $R(x,y) > R(y,x)$ | $\wedge$ | $R(y,x) < \alpha$ | |
| | | $0.6 > 0.4$ | $\wedge$ | $0.4 \not< 0.3$ | $x \underset{0,3}{\not\succ} y$ |
| | | $0.6 > 0.4$ | $\wedge$ | $0.4 < 0.5$ | $x \underset{0,5}{\succ} y$ |
| $x \underset{\alpha}{\succ} z$ | $\Longleftrightarrow$ | $R(x,z) > R(z,x)$ | $\wedge$ | $R(z,x) < \alpha$ | |
| | | $0.8 > 0.4$ | $\wedge$ | $0.4 \not< 0.3$ | $x \underset{0,3}{\not\succ} z$ |
| | | $0.8 > 0.4$ | $\wedge$ | $0.4 < 0.5$ | $x \underset{0,5}{\succ} z$ |
| $y \underset{\alpha}{\succ} x$ | $\Longleftrightarrow$ | $R(y,x) > R(x,y)$ | $\wedge$ | $R(x,y) < \alpha$ | |
| | | $0.4 \not> 0.6$ | $\wedge$ | $0.6 \not< 0.3$ | $y \underset{0,3}{\not\succ} x$ |
| | | $0.4 \not> 0.6$ | $\wedge$ | $0.6 \not< 0.5$ | $y \underset{0,5}{\not\succ} x$ |
| $y \underset{\alpha}{\succ} z$ | $\Longleftrightarrow$ | $R(y,z) > R(z,y)$ | $\wedge$ | $R(z,y) < \alpha$ | |
| | | $0.5 \not> 0.5$ | $\wedge$ | $0.5 \not< 0.3$ | $y \underset{0,3}{\not\succ} z$ |
| | | $0.5 \not> 0.5$ | $\wedge$ | $0.5 \not< 0.5$ | $y \underset{0,5}{\not\succ} z$ |
| $z \underset{\alpha}{\succ} x$ | $\Longleftrightarrow$ | $R(z,x) > R(x,z)$ | $\wedge$ | $R(x,z) < \alpha$ | |
| | | $0.4 \not> 0.8$ | $\wedge$ | $0.8 \not< 0.3$ | $z \underset{0,3}{\not\succ} x$ |
| | | $0.4 \not> 0.8$ | $\wedge$ | $0.8 \not< 0.5$ | $z \underset{0,5}{\not\succ} x$ |
| $z \underset{\alpha}{\succ} y$ | $\Longleftrightarrow$ | $R(z,y) > R(y,z)$ | $\wedge$ | $R(y,z) < \alpha$ | |
| | | $0.5 \not> 0.5$ | $\wedge$ | $0.5 \not< 0.3$ | $z \underset{0,3}{\not\succ} y$ |
| | | $0.5 \not> 0.5$ | $\wedge$ | $0.5 \not< 0.5$ | $z \underset{0,5}{\not\succ} y$ |

*Ahora verificaremos la siguiente regla de elección $C_\alpha$, para:*

$$\chi = \{\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\},\ donde\ \alpha = 0.3\ y\ 0.5$$

| $S_\alpha$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ | $\{x,y\}$ | $\{x,z\}$ | $\{y,z\}$ | $\{x,y,z\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha = 0.3$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ | $\{x,y\}$ | $\{x,z\}$ | $\{y,z\}$ | $\{x,y,z\}$ |
| $\alpha = 0.5$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ | $\{x\}$ | $\{x\}$ | $\{y,z\}$ | $\{x\}$ |
| $M_\alpha$ | | | | | | | |
| $\alpha = 0.3$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ | $\{x,y\}$ | $\{x,z\}$ | $\{y,z\}$ | $\{x,y,z\}$ |
| $\alpha = 0.5$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ | $\{x\}$ | $\{x\}$ | $\{y,z\}$ | $\{x\}$ |
| $OV$ | $\{x\}$ | $\{y\}$ | $\{z\}$ | $\{x\}$ | $\{x\}$ | $\{y,z\}$ | $\{x\}$ |

# Algunos Ejemplos de $R \in H, \overline{H}, H_w, \overline{H}_w$

**Ejemplo 3.0.2.**

*Sea:* $\chi = \{x,y,z\}$ *y* $R \in \mathcal{R}$

| $R$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | *1* | *0.5* | *0.7* |
| $y$ | *0.5* | *1* | *0.5* |
| $z$ | *0.5* | *0.5* | *1* |

## $R \in H$

*Veamos si se verifican las siguientes propiedades:*

- $R$ *exacta si* $R(x,y) = 0$ *ó* $1$, $\forall\, x,y,z \in \chi$

$R$ *no es exacta.*

- *$R$ conexa si y solo si* $R(x,y)+R(y,x)\geq 1,\ \ \forall\, x,y,z\in \chi$

$$\begin{aligned} R(x,y)+R(y,x) &= \ 0.5+0.5 = \ 1\geq 1\\ R(x,z)+R(z,x) &= \ 0.7+0.5 = \ 1.2\geq 1\\ R(y,z)+R(z,y) &= \ 0.5+0.5 = \ 1\geq 1 \end{aligned}$$

*Por lo tanto $R$ es conexa.*

- *$R$ reflexiva si y solo si* $R(x,x)=1,\ \ \forall\, x\in \chi$.

$$\begin{aligned} R(x,x)&=1\\ R(y,y)&=1\\ R(z,z)&=1 \end{aligned}$$

*Por lo tanto $R$ es reflexiva.*

- $R\in\mathcal{R}$ *se dice max-min transitiva si y solo si* $\forall\, x,y,z\in\chi$

$$\min\{R(x,y),R(y,z)\}\leq R(x,z)$$

*En efecto:*

$$\min\{R(x,y),R(y,z)\} = \min\{0.5\ ,\ 0.5\} = 0.5\leq 0.7 = R(x,z)$$

$$\min\{R(x,z),R(z,y)\} = \min\{0.7\ ,\ 0.5\} = 0.5\leq 0.5 = R(x,y)$$

$$\min\{R(y,x),R(x,z)\} = \min\{0.5\ ,\ 0.7\} = 0.5\leq 0.5 = R(y,z)$$

$$\min\{R(y,z),R(z,x)\} = \min\{0.5\ ,\ 0.5\} = 0.5\leq 0.5 = R(y,x)$$

$$\min\{R(z,x),R(x,y)\} = \min\{0.5\ ,\ 0.5\} = 0.5\leq 0.5 = R(z,y)$$

$$\min\{R(z,y),R(y,x)\} = \min\{0.5\ ,\ 0.5\} = 0.5\leq 0.5 = R(z,x)$$

*Por lo tanto satisface max-min transitiva.*

*Es decir* $R\in H\subset\mathcal{R}$

**Ejemplo 3.0.3.** $R \in H_w$

| $R$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | *1* | *0.9* | *0.8* |
| $y$ | *0.5* | *1* | *0.5* |
| $z$ | *0.6* | *0.7* | *1* |

- *$R$ reflexiva si y solo si* $R(x,x)=1,\ \ \forall\, x \in \chi$

$$\begin{aligned} R(x,x) &= 1 \\ R(y,y) &= 1 \\ R(z,z) &= 1 \end{aligned}$$

- *$R$ conexa si y solo si* $R(x,y)+R(y,x) \geq 1,\ \ \forall\, x,y,z \in \chi$

$$\begin{aligned} R(x,y)+R(y,x) &= 0.9+0.5 = 1.4 \geq 1 \\ R(x,z)+R(z,x) &= 0.8+0.6 = 1.4 \geq 1 \\ R(y,z)+R(z,y) &= 0.5+0.7 = 1.2 \geq 1 \end{aligned}$$

*Por lo tanto $R$ es conexa.*

- *$R$ satisface la débil transitividad max-min si y solo si* $\forall\, x,y,z \in \chi$

$$Si \quad R(x,y) \geq R(y,x) \wedge R(y,z) \geq R(z,y) \Rightarrow \text{mín}\{R(x,y),R(y,z)\} \leq R(x,z)$$

$$0.9 \geq 0.5 \qquad \wedge \qquad 0.5 \geq 0.7 \qquad \Rightarrow \text{mín}\{0.9\ ,\ 0.5\} = 0.5 \leq \quad 0.8$$

$$Si \quad R(x,z) \geq R(z,x) \wedge R(z,y) \geq R(y,z) \Rightarrow \text{mín}\{R(x,z),R(z,y)\} \leq R(x,y)$$

$$0.8 \geq 0.6 \qquad \wedge \qquad 0.7 \geq 0.5 \qquad \Rightarrow \text{mín}\{0.8\ ,\ 0.7\} = 0.7 \leq \quad 0.9$$

$$Si \quad R(y,x) \geq R(x,y) \wedge R(x,z) \geq R(z,x) \Rightarrow \text{mín}\{R(y,x),R(x,z)\} \leq R(y,z)$$

$$0.5 \geq 0.9 \qquad \wedge \qquad 0.8 \geq 0.6 \qquad \Rightarrow \text{mín}\{0.5\ ,\ 0.8\} = 0.5 \leq \quad 0.5$$

$$Si \quad R(y,z) \geq R(z,y) \wedge R(z,x) \geq R(x,z) \Rightarrow \text{mín}\{R(y,z), R(z,x)\} \leq R(y,x)$$

$$0.5 \geq 0.7 \qquad \wedge \qquad 0.6 \geq 0.8 \qquad \Rightarrow \text{mín}\{0.5\ ,\ 0.6\} = 0.5 \leq \quad 0.5$$

$$Si \quad R(z,x) \geq R(x,z) \wedge R(x,y) \geq R(y,x) \Rightarrow \text{mín}\{R(z,x), R(x,y)\} \leq R(z,y)$$

$$0.6 \geq 0.8 \qquad \wedge \qquad 0.9 \geq 0.5 \qquad \Rightarrow \text{mín}\{0.6\ ,\ 0.9\} = 0.6 \leq \quad 0.6$$

$$Si \quad R(z,y) \geq R(y,z) \wedge R(y,x) \geq R(x,y) \Rightarrow \text{mín}\{R(z,y), R(y,x)\} \leq R(z,x)$$

$$0.7 \geq 0.5 \qquad \wedge \qquad 0.5 \geq 0.9 \qquad \Rightarrow \text{mín}\{0.7\ ,\ 0.5\} = 0.5 \leq \quad 0.6$$

*Por lo tanto R satisface la débil transitividad max-min.*

*Por lo tanto* $R \in H_w$

**Ejemplo 3.0.4.** $R \in \overline{H}$

| $R$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 0.7 | 0.6 |
| $y$ | 0.5 | 1 | 0.5 |
| $z$ | 0.5 | 0.5 | 1 |

- *R reflexiva si y solo si* $R(x,x) = 1, \ \forall\, x \in \chi$

$$R(x,x) = 1$$
$$R(y,y) = 1$$
$$R(z,z) = 1$$

*Por lo tanto R es Reflexiva.*

- *R conexa si y solo si* $R(x,y) + R(y,x) \geq 1, \ \forall\, x,y,z \in \chi$

$$R(x,y) + R(y,x) = 0.7 + 0.5 = 1.2 \geq 1$$
$$R(x,z) + R(z,x) = 0.6 + 0.5 = 1.1 \geq 1$$
$$R(y,z) + R(z,y) = 0.5 + 0.5 = 1.0 \geq 1$$

*Por lo tanto R es conexa.*

- $R \in \mathcal{R}$ *se dice max-min transitiva si y solo si* $\forall\, x, y, z \in \chi$

$$\min\{R(x,y), R(y,z)\} \leq R(x,z)$$

*En efecto:*

$$\min\{R(x,y), R(y,z)\} = \min\{0.7\,,\,0.5\} = 0.5 \leq 0.6 = R(x,z)$$
$$\min\{R(x,z), R(z,y)\} = \min\{0.6\,,\,0.5\} = 0.5 \leq 0.7 = R(x,y)$$
$$\min\{R(y,x), R(x,z)\} = \min\{0.5\,,\,0.6\} = 0.5 \leq 0.5 = R(y,z)$$
$$\min\{R(y,z), R(z,x)\} = \min\{0.5\,,\,0.5\} = 0.5 \leq 0.5 = R(y,x)$$
$$\min\{R(z,x), R(x,y)\} = \min\{0.5\,,\,0.7\} = 0.5 \leq 0.5 = R(z,y)$$
$$\min\{R(z,y), R(y,x)\} = \min\{0.5\,,\,0.5\} = 0.5 \leq 0.5 = R(z,x)$$

*Por lo tanto satisface max-min transitiva.*

- *R satisface la condición T si* $\forall\, x, y, z \in \chi$

$$\begin{array}{ccc} R(x,y) = R(y,x) = R(y,z) = R(z,y) & \Rightarrow & R(x,z) = R(z,x) \\ 0.7 = 0.5 = 0.5 = 0.5 & \Rightarrow & 0.6 = 0.5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R(x,z) = R(z,x) = R(z,y) = R(y,z) & \Rightarrow & R(x,y) = R(y,x) \\ 0.6 = 0.5 = 0.5 = 0.5 & \Rightarrow & 0.6 = 0.5 \end{array}$$

*Por lo tanto R satisface la condición T vaciamente*

*Por lo tanto* $R \in \overline{H}$

**Ejemplo 3.0.5.** $R \in \overline{H}_w$

*Sea:*

| $R$ | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | *1* | *0.5* | *0.6* | *0.6* |
| $y$ | *0.5* | *1* | *0.5* | *0.5* |
| $z$ | *0.6* | *0.5* | *1* | *0.6* |
| $w$ | *0.6* | *0.5* | *0.6* | *1* |

*Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

- $R$ *exacta si* $R = 0$ *ó* $1$, $\forall\, x, y, z, w \in \chi$

  $R$ *no es exacta.*

- $R$ *conexa si y solo si* $R(x,y) + R(y,x) \geq 1,\ \ \forall\, x, y, z, w \in \chi$

$$\begin{aligned}
R(x,y) + R(y,x) &= 0.5 + 0.5 = 1.0 \geq 1\\
R(x,z) + R(z,x) &= 0.6 + 0.6 = 1.2 \geq 1\\
R(x,w) + R(w,x) &= 0.6 + 0.6 = 1.2 \geq 1\\
R(y,z) + R(z,y) &= 0.5 + 0.5 = 1.0 \geq 1\\
R(y,w) + R(w,y) &= 0.5 + 0.5 = 1.0 \geq 1\\
R(z,w) + R(w,z) &= 0.6 + 0.6 = 1.2 \geq 1
\end{aligned}$$

  *Por lo tanto* $R$ *es conexa.*

- $R$ *reflexiva si y solo si* $R(x,x) = 1,\ \ \forall\, x \in \chi$

$$\begin{aligned}
R(x,x) &= 1\\
R(y,y) &= 1\\
R(z,z) &= 1\\
R(w,w) &= 1
\end{aligned}$$

  *Por lo tanto* $R$ *es reflexiva.*

- $R \in \mathcal{R}$ *se dice débilmente transitiva max-min si y solo si* $\forall\, x, y, z, w \in \chi$

$$\text{Si } R(x,y) \geq R(y,x)\ \wedge\ R(y,z) \geq R(z,y) \text{ entonces:}$$
$$\min\{R(x,y)\,,\ R(y,z)\} \leq R(x,z)$$

*En efecto*

$$0.5 \geq 0.5 \ \wedge \ 0.5 \geq 0.5 \ , \ \textit{entonces} \ \ \text{mín}\{0.5 \, , \, 0.5\} = 0.5 \leq 0.6$$

$$\textit{Si} \ \ R(x,z) \geq R(z,x) \ \wedge \ R(z,w) \geq R(w,z) \ \ \textit{entonces:}$$
$$\text{mín}\{R(x,z) \, , \, R(z,w)\} \leq R(x,w)$$

*En efecto*

$$0.6 \geq 0.6 \ \wedge \ 0.6 \geq 0.6 \ , \ \textit{entonces} \ \ \text{mín}\{0.6 \, , \, 0.6\} = 0.6 \leq 0.6$$

- $R \in \mathcal{R}$ *se dice que satisface la condición* $T$ *si:* $\forall \, x, y, z, w \in \chi$ *tal que*

$$R(x,y) = R(y,x) = R(y,z) = R(z,y) \ \ \textit{entonces:} \ R(x,z) = R(z,x)$$

*Se cumple la condición* $T$ *vaciamente.*

*Por lo tanto* $\ \ R \in \overline{H}_w$

# Conclusiones

El presente trabajo presenta los resultados relevantes del documento de Kunal Sengupta, el cual proporciona una caracterización axiomática de las reglas de elección que un individuo podría seguir cuando sus preferencias son difusas; sin embargo, ésta caracterización resulta no ser única, excepto por la última, la regla de Orlovsky.

Resumiendo los resultados presentados, el teorema 2.1 caracteriza una regla de elección para un dominio de **Relaciones Binarias de Preferencias Difusas**(RBPD) reflexivas y conexas que satisfacen la transitividad T; el teorema 2.2 caracteriza una regla de elección para un dominio de RBPD reflexivas y conexas que satisfacen max-min transitiva; y por último el teorema 2.3 caracteriza una regla de elección para un dominio de RBPD reflexivas y conexas que satisfacen la débil T transitividad.

La principal razón para que los resultados de caracterización dependan del requisito de transitividad se debe al axioma $\beta$. La diferencia en el teorema 2.1 y 2.2 es causada por dicho axioma, si en el teorema 2.3 agrandamos nuestro dominio a $H_W$ obtendremos entonces un resultado de no existencia, debiéndose esto a que el procedimiento de Orlovsky no satisface la condición $\beta$ si R no satisface la condición T. Por eso, es de interés caracterizar las reglas de elección bajo el dominio de preferencias max-min transitivas sin el axioma $\beta$. Esto deja una pregunta abierta e interesante.

# Bibliografía

[ 1 ] M. Coll, Juan Carlos. La transitividad de las preferencias . Disponible en: http://www.eumed.net/cursecon//ppp/transitividad_preferencias.ppt. Acceso el: 23 junio 2005.

[ 2 ] Mas - Colell, A y otros. Microeconomic Theory. OXFORD UNIVERSITY. New York: Press, 1995.

[ 3 ] Moulin, Herve. Axioms of Cooperative Decision Making. New York. 1988.

[ 4 ] Pecha, Arsenio y Villamil, Jaime. Relaciones de preferencia y elección en una estructura difusa. Disponible en: http://www.fce.unal.edu.co/download /cuadernos/37/37-02.pdf. Acceso el: 03 de julio 2005.

[ 5 ] Sengupta, Kunal. Choice rules with fuzzy preferences: Some characterizations. Social Choice and Welfare. Springer- Verlag. 1999.Pag: 259-272.