



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ



Universidad de Valladolid

ESCUELA DE POSTGRADO DE LA PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL
PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, ANÁLISIS MATEMÁTICO, GEOMETRÍA Y
TOPOLOGÍA

TESIS DOCTORAL:

CLASIFICACIÓN ANALÍTICA DE CIERTOS TIPOS DE
FOLIACIONES CUSPIDALES EN $(\mathbb{C}^3, 0)$

Tesis presentada por **Hernán Neciosup Puican** para optar el grado de Doctor
en Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica del Perú y la Universidad
de Valladolid-España.

Sustentada ante el jurado compuesto por:

Aroca Hernández - Roz, José Manuel
Fernández Sánchez, Percy Braulio (Director)
Luengo Velasco, Ignacio María
Mozo Fernández, Jorge (Director)
Rosas Bazan, Rudy José

Lima – Perú

2014



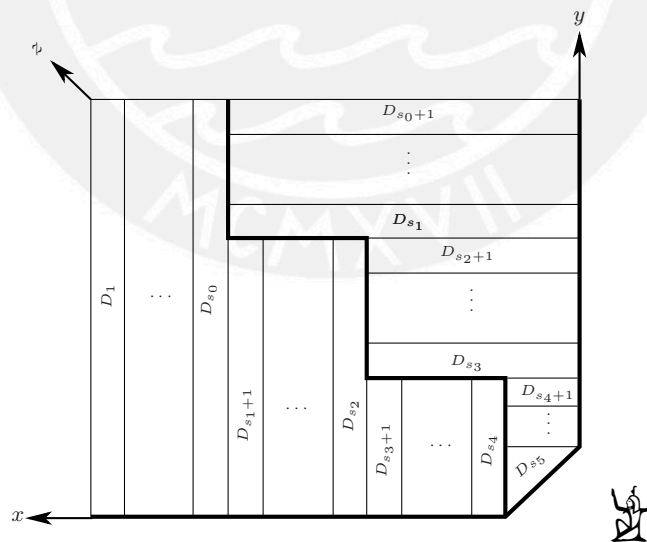


PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ



Universidad de Valladolid

TESIS DOCTORAL:
CLASIFICACIÓN ANALÍTICA DE CIERTOS TIPOS DE
FOLIACIONES CUSPIDALES EN $(\mathbb{C}^3, 0)$



Hernán Necisup Puican

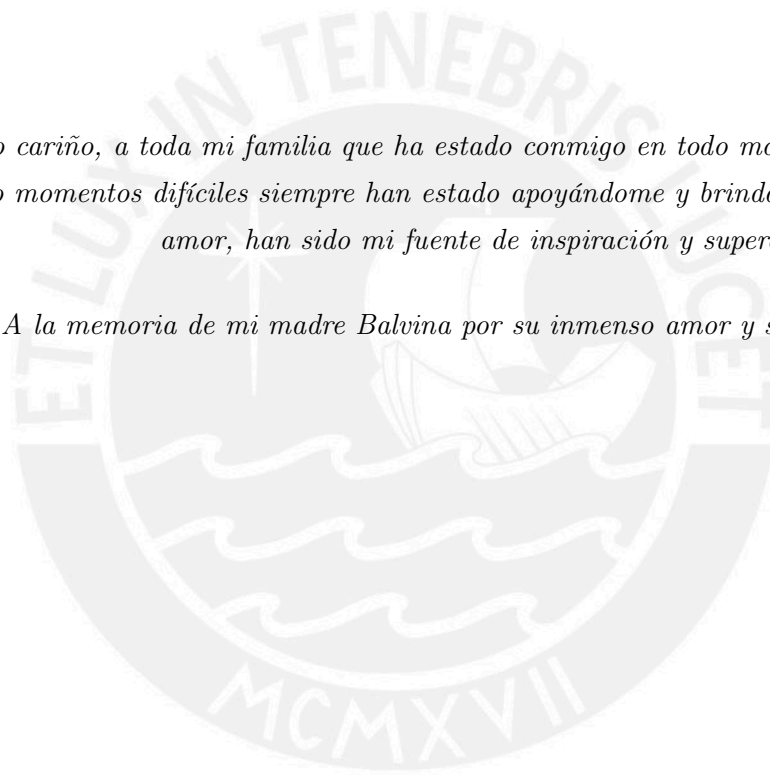


Dedicatoria

Dedicado:

Con mucho cariño, a toda mi familia que ha estado conmigo en todo momento, aunque hemos pasado momentos difíciles siempre han estado apoyándome y brindándome todo su amor, han sido mi fuente de inspiración y superación continua.

A la memoria de mi madre Balvina por su inmenso amor y sabios consejos.





Agradecimientos

Quiero expresar mis más sincero agradecimiento a los directores de este trabajo. Al Dr. Jorge Mozo Fernández por su paciencia, dedicación, y el apoyo recibido durante el desarrollo de este trabajo, en la universidad de Valladolid-España. Al Dr. Percy Fernández Sánchez por sus sugerencias en todo momento, y la oportunidad brindada durante mis estudios de posgrado.

A todas aquellas personas que hicieron todo cuanto estuvo en sus manos para motivarme y darme la mano en los momentos cuando sentía que el camino se terminaba; a ustedes por siempre mi corazón y mi agradecimiento.

Agradecer también, el apoyo económico del programa de becas FPI-UVa - Ayudas de la UVa para la formación del personal investigador. Finalmente destacar la participación en el grupo de investigación ECSING de la UVa.



Índice general

Introducción	3
English summary	13
1. Resolución de superficies singulares y topología del divisor	23
1.1. Resolución inmersa de superficies	25
1.2. Superficies casi ordinarias	35
1.3. Superficies cuspidales casi-homogéneas.	42
1.3.1. Descripción del divisor excepcional	58
1.4. Topología del complemento de una curva singular plana. Cálculo en casos particulares	66
2. Singularidades de foliaciones en dimensión tres	73
2.1. Singularidades pre-simples y simples	76
2.2. Hipersuperficies generalizadas	82
2.3. Forma normal de foliaciones con separatriz cuspidal prefijada	86
2.3.1. Foliaciones cuspidales casi-homogéneas (FCCH)	94
2.4. Reducción de singularidades de las FCCH.	96
2.4.1. Topología del divisor	124
2.5. Fibración de Hopf	127
3. Problema de clasificación analítica	131
3.1. Holonomía de la componente esencial	133
3.1.1. Extensión de la holonomía excepcional	134
3.2. Clasificación analítica	136
Conclusiones	145



Introducción

Sin duda, uno de los problemas ubicuos de las matemáticas es el de la clasificación de objetos, una vez definido un criterio de equivalencia. Así pues, se clasifican estructuras algebraicas, objetos geométricos, o ecuaciones, siguiendo criterios de isomorfismo, conservación de ciertas estructuras geométricas, o relación entre los espacios de soluciones. Uno de los objetivos de estudiar estas clasificaciones es hallar un representante “sencillo” a cada una de las clases de equivalencia, cuyas propiedades, fáciles de estudiar, permiten deducir por analogía propiedades de los objetos más generales. Mencionamos algunos ejemplos conocidos.

1. Toda matriz cuadrada es equivalente a una matriz en forma de Jordan. Así deducimos por ejemplo, la descomposición de un endomorfismo en su parte semisimple y nilpotente.
2. Todo grupo abeliano finito es isomorfo a una suma directa de grupos cíclicos. Un problema de equivalencia similar para grupos simples finito ocupó la labor de numerosos matemáticos durante décadas.
3. Toda superficie topológica compacta es homeomorfa a uno de los siguientes modelos: una esfera, una suma conexa de toros, o una suma conexa de un plano proyectivo y una de las anteriores. Problemas análogos en dimensión superior han resultado mucho más difíciles de abordar. Así, la célebre conjetura de Poincaré está relacionada con la clasificación de 3-variedades topológicas compactas. En particular, se puede mostrar que si una tal variedad tiene la homología de una 3-esfera \mathbb{S}^3 , es homeomorfo a ella. La importancia de resolver este tipo de problemas muestra que la resolución de dicha conjetura en cualquier dimensión ha sido merecedora de tres Medallas Fields (Stephen Smale en 1966, Michael Freedman en 1986 y Grigori Perelman en 2006).

La presente memoria se enmarca dentro de los problemas de clasificación. Más específicamente, nos proponemos estudiar la clasificación analítica, mediante la holonomía proyectiva, de ciertos tipos de foliaciones holomorfas singulares de codimension uno en

$(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$. En concreto, el estudio que presentamos en esta tesis se escoge con la finalidad de establecer, hasta qué punto, una técnica sencilla, nos permite clasificar analíticamente las foliaciones cuspidales en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$. De este modo, el desarrollo de esta tesis se fundamenta en una interrogante fundamental que da sentido y forma a todos nuestros planteamientos. Esta interrogante es el siguiente ¿hasta qué punto la técnica de clasificación analítica usada por R. Moussu [Mou2], D. Cerveau y R. Moussu [CMou], R. Meziani [Me], M. Berthier, R. Meziani y P. Sad [BMS], entre otros, nos permite clasificar analíticamente las foliaciones cuspidales en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$?. Esta pregunta, se presta a múltiples respuestas y a variados planteamientos, pero en el caso que nos ocupa cabe destacar un planteamiento que posteriormente pasaremos a describir.

Un germen de foliación holomorfa viene definido por una 1-forma diferencial holomorfa $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, que satisface la condición de integrabilidad de Frobenius: $\omega \wedge d\omega = 0$. Los puntos \mathbf{p} en los que $\omega(\mathbf{p}) \neq 0$ se llamarán regulares, y singulares aquellos en los que $\omega(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Si escribimos la 1-forma en coordenadas locales, $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x})dx_i$, supondremos además que los coeficientes $a_i(\mathbf{x})$ carecen de factor común, lo que implica que el lugar singular es un germen de espacio analítico de codimensión al menos 2. Dos 1-formas ω, ω' con estas condiciones, que verifican $\omega \wedge \omega' = 0$, definen el mismo germen de foliación. Dos germenes de foliación, definidos por dos 1-formas ω_1, ω_2 , se dirán analíticamente equivalentes si existe un germen de biholomorfismo $\varphi : (\mathbb{C}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ tal que $\omega_1 \wedge \varphi^* \omega_2 = 0$. Si el origen es un punto regular, existen coordenadas (x_1, \dots, x_n) en las que $\omega \wedge dx_1 = 0$, esto significa que, ω, dx_1 son analíticamente equivalentes, lo que completa la clasificación analítica en ese caso.

En el caso singular, si $n = 2$, el caso más simple se da cuando la foliación tiene parte lineal no nula, esto es, está generado por una 1-forma

$$\omega = (a_1x + a_2y + \dots) dx + (b_1x + b_2y + \dots) dy.$$

En esta situación, consideramos el campo de vectores dual

$$\mathcal{X} = (b_1x + b_2y + \dots) \frac{\partial}{\partial x} - (a_1x + a_2y + \dots) \frac{\partial}{\partial y},$$

y λ_1, λ_2 los autovalores de la matriz de la parte lineal, es decir, de

$$M_\omega = \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \\ b_2 & -a_2 \end{pmatrix}.$$

La foliación se dice linealizable si es analíticamente conjugada a su parte lineal. El primer resultado importante, en este sentido, es el siguiente

Teorema (Poincaré, [Po79]). Si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{N} \cup \frac{1}{\mathbb{N}}$, la foliación es linealizable.

Siguiendo en el caso $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, y ahora suponiendo $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Q}_-$, la situación se complica. Desde un punto de vista algebraico, considerando ω como una 1-forma con coeficientes en $\mathbb{C}[[x, y]]$, la foliación es formalmente linealizable, esto es, existe un isomorfismo de \mathbb{C} -álgebras $\widehat{\varphi} : \mathbb{C}[[x, y]]^2 \rightarrow \mathbb{C}[[x, y]]^2$ tal que $\varphi^*\omega$ define la misma foliación que su parte lineal. Sin embargo, la existencia de una linealización analítica queda más comprometida. El resultado más relevante al respecto, es el siguiente Teorema de A. D. Brjuno:

Teorema (A.D Brjuno [Br71]). Denotemos por $\omega_k = \min\{|\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 - \lambda_i|; |Q| = q_1 + q_2 < 2^k\}$. Si se verifica la condición

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \log \frac{1}{\omega_k} < +\infty,$$

la foliación es analíticamente linealizable. En ausencia de dicha condición, existen foliaciones que no son analíticamente linealizables.

Consideremos ahora el caso $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}_-$. Distinguiamos dos situaciones

- a) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ (caso silla-nodo).
- b) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_{<0}$, ($p, q \neq 0$) (caso resonante).

En ambos casos, son pioneros los trabajos de J. Martinet y J.P Ramis [MR1], [MR2], en los que construyen, a partir de ciertos grupos de cohomología, espacios clasificadores en los casos anteriores. Las técnicas básicas que se usan en dichos trabajos son:

1. La representación sectorial de las conjugaciones formales, en forma de desarrollo asintótico. Esta representación sectorial define ciertos espacios de cohomología en la categoría de grupos no abelianos, que representan el llamado espacio de moduli formal-analítico. Este se usa de manera decisiva, sobre todo, en el caso silla-nodo.
2. La clasificación a través de la holonomía de una variedad invariante (separatriz).

Decimos que $f = 0$ define una separatriz de la foliación definida por ω si $\omega \wedge df = f\eta$ para alguna 2-forma η . Una foliación de tipo resonante resulta tener dos separatrices lisas y transversales, que podemos suponer definidas por $x.y = 0$. A cada una de estas separatrices se le asocia un grupo de holonomía, definido de la manera siguiente: cada camino γ sobre la separatriz se levanta, fijada una fibración transversal a la foliación, en un camino que sigue las hojas. Si el camino es un lazo, y $(\Sigma, 0)$ es una transversal a la foliación (una fibra de la fibración antes mencionada), este levantamiento define un difeomorfismo $h_\gamma : (\Sigma, 0) \rightarrow (\Sigma, 0)$. Este no depende de la clase de homotopía de γ , con lo que hay una representación

$$\begin{aligned} H : \pi_1(L, x_0) &\longrightarrow \text{Diff}(\Sigma, 0), \\ [\gamma] &\longmapsto h_\gamma \end{aligned}$$

donde L representa la separatriz, y x_0 el punto base de la transversal Σ . Identificando la transversal $(\Sigma, 0)$ con $(\mathbb{C}, 0)$ la imagen de H es el un subgrupo (cíclico en este caso) de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Martinet y Ramis “reducen” el problema de clasificar las foliaciones a clasificar los grupos de holonomía, esto es, los gérmenes de difeomorfismos de $(\mathbb{C}, 0)$. La clasificación analítica de estos objetos es realizada de manera independiente por varios autores: J. Écalle en 1975 [É75] y S. Voronin en 1981 [Vo81].

Un estudio detallado de la holonomía es el objeto de estudio de J.F Mattei y R. Moussu en [MM]. Con respecto a estas foliaciones resonantes, ellos muestran el siguiente resultado, que será de importancia en nuestro trabajo.

Teorema. *Para una foliación definida por una 1-forma resonante ω , son equivalentes:*

- a) *La foliación es analíticamente linealizable.*
- b) *ω admite una integral primera holomorfa.*
- c) *La holonomía de una de sus separatrices es periódica.*

Así, la holonomía proporciona un criterio de linealización y de existencia de integral primera.

Las formas consideradas anteriormente (silla-nodo, resonante) son ejemplos de las llamadas singularidades simples de foliaciones. Dada una 1-forma ω en $(\mathbb{C}^2, 0)$, existe un proceso de reducción de singularidades, consistente en una cadena de explosiones con centros puntuales, al final de la cual se obtiene una foliación cuyos puntos singulares son simples: si λ_1, λ_2 son los autovalores de su parte lineal se tiene que $\lambda_2 \neq 0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}_{>0}$. Este tipo de singularidades no puede destruirse por posteriores explosiones.

Consideremos ahora el caso de foliaciones con singularidades no simples. Entre las conjeturas planteadas por René Thom en los seminarios del IHES en los años 70, figuraba aquella que afirmaba que en caso de foliaciones con un número finito de separatrices, la holonomía de estas es un invariante que caracteriza la foliación. Ésta conjetura, hemos visto que, es cierta en el caso de singularidades simples, pero que R. Moussu muestra que no es correcta en el caso que él llama degenerado-transverso [Mou2]. Se trata de un caso particular de las llamadas foliaciones cuspidales, aquellas cuya parte lineal es nilpotente y no nula. Concretamente, Moussu llama foliaciones degeneradas-transversas a aquellas generadas por una 1-forma ω , tal que existen coordenadas en las cuales su 2-jet es

$$j^2\omega = d(y^2 + x^3) + \lambda x^2 dy,$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$. Estas formas admiten una desingularización muy simple, y tienen una única separatriz analíticamente equivalente a $y^2 + x^3 = 0$. Moussu define la llamada holonomía

evanescente, la cual no es más que el grupo de holonomía de una componente del divisor excepcional que surge en el proceso de reducción de singularidades; precisamente la componente sobre la que reposa la transformada estricta de la separatriz. La extensión de la conjugación dada por el grupo de holonomía a todo un entorno del divisor excepcional hace uso del resultado de Mattei y Moussu [MM] antes mencionado, que permite generalizar la existencia de integral primera holomorfa en torno a las otras componentes del divisor excepcional.

Las singularidades nilpotentes han sido posteriormente estudiadas por diversos autores. Entre los principales hitos debemos mencionar:

- D. Cerveau y R. Moussu [CMou]: extienden el resultado anterior a las foliaciones que admiten una escritura formal (forma normal de Takens)

$$d(y^2 + x^n) + x^p u(x) dy,$$

con $n < 2p$, $u(0) \neq 0$, $u(x) \in \mathbb{C}[[x]]$.

En este caso, la foliación tiene una curva invariante analíticamente equivalente a $y^2 + x^n = 0$ (por esta razón estas foliaciones a veces son llamadas *cuspidales*). En el estudio de estas foliaciones, es interesante escribir explícitamente la foliación teniendo exactamente a $y^2 + x^n = 0$ como separatriz. D. Cerveau y R. Moussu [CMou] muestran que estas foliaciones pueden ser definidas por una 1-forma holomorfa

$$\omega = d(y^2 + x^n) + A(x, y)(nydx - 2xdy).$$

- R. Meziani [Me]: estudia el caso $n = 2p$, bajo condiciones genéricas sobre $u(0)$. En caso de no darse estas condiciones, la foliación tiene silla-nodo en su reducción de singularidades. Se trata de una foliación que, usando la terminología de C. Camacho, L. Neto y P. Sad [CLS], no es una curva generalizada, esto es, la reducción de singularidades de la foliación requiere mayor número de explosiones que las necesarias para reducir la separatriz.
- El caso $2p < n$ es considerado por M. Berthier, R. Meziani y P. Sad [BMS], en el caso en que la silla-nodo que aparece tras la reducción de singularidades admite dos separatrices analíticas. Si dicha silla-nodo sólo admite una separatriz analítica (y una formal), el caso es estudiado por E. Stróżyńska [Str], empleando de manera fuerte el trabajo de Martinet y Ramis [MR1].
- Por último, R. Meziani y P. Sad [MS] estudian el caso dicrítico.

En todos estos resultados, la clasificación analítica a través de la holonomía proyectiva resulta ser el ingrediente básico. Lo es también en el trabajo de Y. Genzmer [Ge2] sobre las foliaciones de tipo curva generalizada cuya separatriz es una función casi homogénea. No obstante, en este trabajo, Y. Genzmer emplea técnicas muy diferentes de las anteriores, basadas en un estudio de las deformaciones de foliaciones, al no poder hallar una fibración transversal a la foliación que tenga a las separatrices como fibras, y poder aplicar los resultados sobre la existencia de integrales primeras de Mattei y Moussu [MM].

Consideremos ahora el caso 3-dimensional. Existen pocos trabajos relativos al estudio de la clasificación analítica de foliaciones en un espacio ambiente de dimensión tres, debido, entre otras cosas, a la complejidad del estudio de una reducción de singularidades global y de la geometría del divisor excepcional que se obtiene. En el caso de singularidades simples, de tipo resonantes, D. Cerveau y J. Mozo [CMo] muestran que la holonomía de una de las separatrices permite clasificar analíticamente la singularidad. En el caso no simple, el único trabajo al respecto es el de P. Fernández y J. Mozo [FM] sobre las singularidades de foliaciones cuspidales casi ordinarias: se trata de foliaciones cuya única separatriz es una cúspide casi ordinaria, es decir, una superficie dada, en coordenadas adecuadas, por $z^2 + x^p y^q = 0$.

Para las superficies casi ordinarias se dispone de una reducción de singularidades combinatoria, la cual, siguiéndola, permite localizar una componente particular del divisor excepcional en la cual se encuentra la separatriz, y cuya holonomía proyectiva permite clasificar la singularidad.

En el marco del problema anterior se encuentra la presente tesis. Se pretende proseguir el trabajo de P. Fernández y J. Mozo [FM], localizando ciertas foliaciones en dimensión tres, de tipo cuspidal, cuya clasificación analítica puede estudiarse a través de la holonomía de una componente particular del divisor excepcional. Llamamos cuspidales a foliaciones cuya separatriz es del tipo $z^2 + \varphi(x, y) = 0$, con $\varphi(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $\nu(\varphi) \geq 2$. Nos centramos en aquellas foliaciones del tipo que en P. Fernández y J. Mozo [FM2] llaman superficies generalizadas, esto es, foliaciones no dicriticas cuya reducción de singularidades coincide con una reducción de su conjunto de separatrices, y en la cual no aparecen sillan-nodos. Más concretamente, nos centramos en un tipo de foliaciones que hemos llamado foliaciones cuspidales casi homogéneas (FCCH) de tipo admisible: su separatriz tiene ecuación, en coordenadas adecuadas, de la forma

$$z^2 + \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d_i} = 0.$$

Si todos los d_i son iguales a 1, el lugar singular de la foliación es el origen, y en consecuencia es de codimensión tres. El teorema de Frobenius singular de B. Malgrange [Ma] nos dice que la foliación admite integral primera holomorfa. Así, su estudio equivale al de funciones. Denotaremos como $\Sigma_{pq}^{(d_1, \dots, d_l)}$ al conjunto de FCCH de tipo admisible con $d_i > 1$, para algún i . Los ingredientes que emplearemos en la tesis son:

1. Un estudio detallado de la reducción de singularidades de una tal foliación, y de su divisor excepcional. Esta reducción se lleva a cabo por el método de Weierstrass-Jung, según el cual, después de un número finito de transformaciones cuadráticas, todas las singularidades son casi ordinarias. A continuación, proseguimos con el método de reducción de estas.
2. Un estudio de las componentes del divisor excepcional y de su topología. En particular localizar una componente cuya topología, después de quitar la parte singular de la transformada estricta de la foliación, resulta ser de la forma $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}$, siendo \mathcal{C} una curva algebraica afín del tipo

$$z^2 + \prod_{i=1}^l (y^\delta - a_i)^{d_i} = 0.$$

El estudio del grupo fundamental de $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}$ se hace a través del método de Zariski-Van Kampen, en su versión moderna, la cual emplea la monodromía de trenzas.

3. La obtención de una forma pre-normal para las foliaciones que estamos considerando. Esta forma permite construir una fibración transversal a la foliación, de tal manera que la separatriz es una unión de fibras. Esta foliación permite el levantamiento de los difeomorfismos de holonomía. Mencionamos en este punto que este resultado ha sido publicado en:

- P. FERNÁNDEZ, J. MOZO, AND H. NECIOSUP. *On codimension one foliations with prescribed cuspidal separatrix*. J. Differential Equations 256(2014) 1702-1717.

Se establece asimismo una condición suficiente para que las foliaciones que consideramos sean superficies generalizadas, al estilo del trabajo de F. Loray en dimensión dos [Lo1].

Pasaremos a continuación a detallar el contenido de la memoria: en el Capítulo 1, describimos el proceso de resolución inmersa de superficies de forma breve y esquemática. Organizamos este capítulo de forma siguiente: en la Sección 1.1 exponemos los conceptos generales de los algoritmos de resolución de singularidades, en la Sección 1.2 se estudia

las singularidades casi ordinarias de superficies, siguiendo a J. Lipman. En la Sección 1.3 introducimos el tipo de superficies que nos interesan en la presente memoria, superficies cuspidales casi homogéneas de tipo admisible, estudiamos con detalle su reducción inmersa de singularidades de manera global, y presentamos una descripción de la geometría de las componentes del divisor excepcional. Destacamos esta parte como la más original del presente capítulo. No existen en la bibliografía apenas trabajos que estudian el comportamiento y la estructura global del divisor excepcional en la reducción de variedades algebraicas de dimensión mayor que uno. Por último, y en el caso que llamamos esencial, estudiamos la topología de cada componente del divisor excepcional una vez retirada la intersección con las otras componentes y la intersección con el transformado estricto de la superficie.

En el Capítulo 2, presentamos nuestros primeros resultados principales. Este capítulo es organizado como sigue: en la Sección 2.1 describimos brevemente las formas normal formal de las singularidades simples de foliaciones holomorfas de codimensión uno en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$, debido a F. Cano y D. Cerveau. En la Sección 2.2, presentamos nuestro primer resultado a manera de generalización del resultado principal debido a P. Fernández y J. Mozo en [FM2]:

Teorema 2.1. *Sea \mathfrak{F} una hipersuperficie generalizada en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, y $S := (f = 0)$ la ecuación reducida del conjunto de sus separatrices. Dado $\pi : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, el morfismo de una resolución de singularidades inmersa de S , entonces $\pi^*(\mathfrak{F})$ tiene singularidades simples adaptadas al divisor E .*

En la Sección 2.3 determinamos la forma pre-normal de las foliaciones de tipo hipersuperficie generalizada con separatriz prefijada, obtenemos como resultado esencial de la tesis, el siguiente teorema:

Teorema 2.2. *Sea \mathfrak{F} un germen de foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0})$, con separatriz definida por la ecuación analítica $f = z^2 + \varphi(\mathbf{x}) = 0$. Entonces existen coordenadas analíticas tal que un generador de \mathfrak{F} es*

$$\omega = d(z^2 + \varphi') + G(\Psi, z)z\Psi\left(\frac{d\varphi'}{\varphi'} - 2\frac{dz}{z}\right),$$

donde $\varphi' = \varphi u = \Psi^r$, u una unidad, Ψ no es una potencia y G es un germen de función holomorfa en dos variables.

Como consecuencia, en el caso casi homogéneo obtenemos

Corolario 2.5. *Sea \mathfrak{F} una foliación, tipo hipersuperficie generalizada, con separatriz casi homogénea $z^2 + \varphi(\mathbf{x}) = 0$. Entonces, existen coordenadas tales que un generador de \mathfrak{F} es*

$$\Omega = d(z^2 + \varphi) + G(\Psi, z) \cdot z \cdot \Psi \left(\frac{d\varphi}{\varphi} - 2 \frac{dz}{z} \right)$$

donde $\varphi = \Psi^r$, Ψ no es una potencia, y G es un germen de función holomorfa en dos variables.

En la Sección 2.4, describimos en detalle la reducción de singularidades de las FCCH de tipo admisible, obteniendo una condición suficiente para que una foliación holomorfa generada por una 1-forma $\Omega \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$ sea superficie generalizada, la cual se refleja en el siguiente teorema

Teorema 2.6 *Considere un germen de foliación holomorfa de codimensión uno en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$, generada por una 1-forma diferencial*

$$\omega = d(z^2 + \varphi(x, y)) + G(\Psi, z) \cdot \Psi z \left(\frac{d\varphi}{\varphi} - 2 \frac{dz}{z} \right),$$

donde $\Psi = \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d'_i}$, $p, q \geq 2$, $a_i \neq 0$, $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, d'_i primos relativos, y $\varphi = \Psi^r$; $r \in \mathbb{N}^*$. Escribiendo $G = \sum G_{ij} \Psi^i z^j$, función holomorfa en dos variables, y denotemos por

$$\nu_{(2,r)}(\Psi^i z^j) := \frac{(2i + rj)}{\text{mcd}(2, r)},$$

$$\nu_{(2,r)}(G) := \text{mín} \left\{ \nu_{2,r}(\Psi^i z^j); G_{ij} \neq 0 \right\}.$$

Entonces si $\nu_{(2,r)}(G) \geq \frac{2i+rj}{\text{mcd}(2,r)}$, la foliación \mathfrak{F}_ω es de tipo superficie generalizada.

En la Sección 2.4.1, exhibimos una fibración de Hopf adaptada a las FCCH de tipo admisible. Finalizamos el capítulo con la Sección 2.5, en la describimos la topología de las componentes del divisor excepcional una vez quitado el lugar singular.

El Capítulo 3, está dedicado a presentar el resultado principal de la tesis. En la Sección 3.1 presentamos de manera introductoria la definición de holonomía y holonomía proyectiva de una hoja de foliación y demostramos que la conjugación del grupo de holonomía de dos FCCH de tipo admisible \mathfrak{F}_{Ω_j} , en los casos considerados, implica la conjugación de estas en un entorno la componente esencial del divisor excepcional, \tilde{D} .

Sea $\Omega \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$, diremos que la foliación \mathfrak{F}_Ω :

- Si d -par (**Caso i**), cumple la propiedad \wp_1 : las holonomías de las hojas $\tilde{D}' \setminus \mathcal{S}$, $\tilde{D}'' \setminus \mathcal{S}$, son linealizables.
- Si d -impar (**Caso ii.1**), cumple la propiedad \wp_2 : la holonomías de la hoja $\tilde{D}'' \setminus \mathcal{S}$, es linealizable.

La técnica de la holonomía proyectiva permite clasificar las FCCH de tipo admisible que satisfacen una de las propiedad \mathcal{P}_i , es decir:

Teorema 3.1 Sean $\Omega_i \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)_i}$ satisfaciendo la propiedad \mathcal{P}_j y considere las foliaciones \mathfrak{F}_{Ω_i} con holonomías proyectivas $H_{\Omega_i, \tilde{D}} = \langle h_{g_1}^i, h_{g_2}^i, h_{\alpha}^i \rangle$, $i = 1, 2$. Entonces las foliaciones son analíticamente conjugadas si y solo si $(h_{g_1}^i, h_{g_2}^i, h_{\alpha}^i)$ son analíticamente conjugadas



English summary

Classification of objects may be considered among the most important problems in mathematics, once we have defined some equivalence relation. Mathematicians classify algebraic structures, geometrical objects or equations, following isomorphism criteria, or some relation between the solution spaces. One of the objectives is to find some “relatively simple” representative in each of these equivalence classes, whose properties, easier to study, allow to deduce properties of more general objects. Let us mention here some well-known examples:

1. Every square matrix is equivalent to a matrix in Jordan form. We can deduce from this fact that every endomorphism of a finite dimensional vector space can be decomposed in semisimple and nilpotent part.
2. Every finite abelian group is isomorphic to a direct sum of cyclic groups. A similar equivalence problem for finite simple groups has been object of study during decades.
3. Every compact topological surface is homeomorphic to a sphere, a connected sum of tori, or a connected sum of a projective plane and some of the preceding ones. Analogous problems in higher dimensions are much more difficult to study. The famous Poincaré conjecture is related with the classification of compact topological 3-manifolds. In particular, this conjecture asserts that every homological 3-sphere is a topological 3-sphere. The importance of the problem is strengthened by the fact that three Medal Fields have been awarded in relation with his problem (Stephen Smale in 1966, Michael Freedman in 1986, and Grigori Perelman in 2006).

This memoir concerns classification problems. More precisely, we want to study the analytic classification, through projective holonomy, of certain types of singular codimension one holomorphic foliations in $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$. The study we present in this work pretends to establish if this tool may be used in order to classify analytically cuspidal foliation in $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$. Concretely, the main question is: how far this technique, already used by R. Moussu [Mou2], D. Cerveau and R. Moussu [CMou], R. Meziani [Me], M. Berthier, R.

Meziani and P. Sad [BMS], among others, can be used to classify analytically cuspidal foliations in $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$? This question can be answered differently, so let us describe our setting.

A germ of holomorphic foliation is defined by a holomorphic 1-form $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, satisfying Frobenius integrability condition $\omega \wedge d\omega = 0$. The points \mathbf{p} in which $\omega(\mathbf{p}) \neq 0$ will be called regular, and singular if $\omega(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Writing in local coordinates, $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x})dx_i$, we will suppose, moreover, that the coefficients $a_i(\mathbf{x})$ have no common factor. This implies that the singular locus is an analytic germ of codimension at least two. Two such forms ω, ω' , verifying $\omega \wedge \omega' = 0$, define the same germ of foliation. Two such germs, defined by ω_1, ω_2 , will be called analytically equivalent if there exist a germ of biholomorphism $\varphi : (\mathbb{C}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ such that $\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2 = 0$. If the origin is a regular point, there exist coordinates (x_1, \dots, x_n) such that $\omega \wedge dx_1 = 0$, so, ω, dx_1 are analytically equivalent, which completes the analytic classification in this case

In the singular case, if $n = 2$, the simplest case is when the foliation have a non-zero linear part, i.e., it is generated by a 1-form

$$\omega = (a_1x + a_2y + \dots) dx + (b_1x + b_2y + \dots) dy.$$

Let us consider the dual vector field

$$\mathcal{X} = (b_1x + b_2y + \dots) \frac{\partial}{\partial x} - (a_1x + a_2y + \dots) \frac{\partial}{\partial y},$$

and λ_1, λ_2 the eigenvalues of the linear part matrix, i.e., of the matrix

$$M_\omega = \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \\ b_2 & -a_2 \end{pmatrix}.$$

The foliation is called linearizable if it is analytically equivalent to its linear part. Historically, the first main result in the context appears to be the following one:

Theorem (Poincaré, [Po79]). *If $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{N} \cup \frac{1}{\mathbb{N}}$, the foliation is linearizable.*

Let us continue in the case $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Now, assuming that $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Q}_-$. The situation turns more difficult. From an algebraic point of view, considering ω as a 1-form with coefficients in $\mathbb{C}[[x, y]]$, the foliation is formally linearizable, i.e., there exists a \mathbb{C} -algebras isomorphism $\widehat{\varphi} : \mathbb{C}[[x, y]]^2 \rightarrow \mathbb{C}[[x, y]]^2$ such that $\varphi^*\omega$ defines the same foliation as its linear part. The existence of an analytic linearization is not evident. One of the most relevant results is the following theorem of A. D. Brjuno:

Theorem (A.D Brjuno [Br71]). *Let us denote $\omega_k = \min\{|\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 - \lambda_i|; |Q| = q_1 + q_2 < 2^k\}$. If the condition*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \log \frac{1}{\omega_k} < +\infty$$

is verifies, the foliation is analytically linearizable. In its absence, there are foliations not analytically linearizable.

Let us consider now the case $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}_-$. Two different situations will arise:

- a) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ (saddle-node case).
- b) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_{<0}, (p, q \neq 0)$ (resonant case).

In any of these cases, the pioneering works of J. Martinet and J.P Ramis [MR1], [MR2] construct, from certain cohomology groups, classifying spaces in the preceding cases. The main techniques used are the following:

1. A sectorial representation of formal conjugations, as asymptotic expansions. This representation defines certain cohomology spaces in the category of non-abelian groups, that represent the formal-analytic moduli space. This technique is mainly used in the saddle-node case.
2. The classification from the holonomy of a separatrix.

We will say that $f = 0$ defines a separatrix for the foliation defined by ω if $\omega \wedge df = f\eta$ for some 2-form η . A resonant foliation has always two smooth and transversal separatrices, that we can assume they are defined by $x \cdot y = 0$. We associate to each of these separatrices a holonomy group, roughly defined as follows: every path γ over the separatrix can be lifted, once a transversal fibration is fixed, following the leaves. If the path is a loop, and $(\Sigma, 0)$ is a transversal to the foliation (a fiber of the previously considered fibration), this lifting defines a diffeomorphism $h_\gamma : (\Sigma, 0) \rightarrow (\Sigma, 0)$ independent of the homotopy class of γ . There is a representation

$$\begin{aligned} H : \pi_1(L, x_0) &\longrightarrow \text{Diff}(\Sigma, 0), \\ [\gamma] &\longmapsto h_\gamma \end{aligned}$$

where L is the separatrix, and x_0 the base point of the transversal Σ . Identifying $(\Sigma, 0)$ with $(\mathbb{C}, 0)$, the image of H is a subgroup (cyclic in this case) of $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Martinet and Ramis “reduce” the classification problem of the foliations to the classification of their holonomy group, i.e., to classify germs of diffeomorphisms of $(\mathbb{C}, 0)$. The analytic classification of these objects has been done independently by J. Écalle in 1975 [É75] and S. Voronin in 1981 [Vo81].

A detailed study of the holonomy is done by J.-F. Mattei and R. Moussu in [MM]. Concerning resonant foliations, the following result, basic in our work, is shown:

Theorem. *If a germ of foliation is defined by a resonant 1-form ω , the following conditions are equivalent:*

- a) *The foliation is analytically linearizable.*
- b) *ω has a holomorphic first integral.*
- c) *The holonomy of one of its separatrices is periodic.*

So, the holonomy provides a linearization criterion and existence of first integral.

Previously considered forms (saddle-node, resonant) are examples of simple singularities. Given a 1-form ω in $(\mathbb{C}^2, 0)$, there is a reduction of singularities process, consisting in a sequence of blow-ups centered in points, and at the end it is obtained a foliation with simple singular points: if λ_1, λ_2 are the eigenvalues of its linear part, we have $\lambda_2 \neq 0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}_{>0}$. This kind of singularities cannot be destroyed by further blow-ups.

Let us consider non-simple singularities. Among the conjectures proposed by René Thom at the IHES seminars in the seventies, one of them stated roughly that, for foliations with a finite number of separatrices, the holonomy is a classifying invariant. This conjecture turns out to be true for simple singularities, but R. Moussu showed that it fails in the so-called degenerate-transverse case [Mou2]. This is a particular case of foliations called cuspidal, with nilpotent, non-null, linear part. More precisely, R. Moussu calls degenerate-transverse to the foliations generated by a 1-form ω , such that, in appropriate coordinates, its 2-jet is

$$j^2\omega = d(y^2 + x^3) + \lambda x^2 dy,$$

with $\lambda \in \mathbb{C}$. These foliations admit a particularly simple desingularization, and there is only one separatrix analytically equivalent to $y^2 + x^3 = 0$. Moussu defines the evanescent holonomy, which is the holonomy group of one of the components of the exceptional divisor that appears in the desingularization process: the component over which the separatrix lies. The conjugation between the holonomies lifts to a neighbourhood of the exceptional divisor thanks to Mattei-Moussu result previously mentioned, which guarantees the existence of a holomorphic first integral in a neighbourhood of the other components of the exceptional divisor.

Nilpotent singularities have been study by different authors. Let us mention here the main achievements:

- D. Cerveau and R. Moussu [CMou] extend the aforementioned result to foliations admitting a formal expression (Takens' normal form)

$$d(y^2 + x^n) + x^p u(x) dy,$$

with $n < 2p$, $u(0) \neq 0$, $u(x) \in \mathbb{C}[[x]]$.

In this case, the foliation has an invariant curve analytically equivalent to $y^2 + x^n = 0$ (this is the reason of the name *cuspidal*). In the study of these foliations, it is useful to write explicitly the foliation having $y^2 + x^n = 0$ as a separatrix. D. Cerveau and R. Moussu [CMou] show that these foliations can be written, in appropriate coordinates, as

$$\omega = d(y^2 + x^n) + A(x, y)(nydx - 2xdy).$$

- R. Meziani [Me] studies the case $n = 2p$, under generic conditions on $u(0)$. If these conditions fail, the foliation has a saddle-node in its reduction of singularities. Using the terminology introduced by C. Camacho, L. Neto and P. Sad [CLS], it is not a generalized curve. That is, the reduction of singularities of the foliation requires greater number of explosions needed to reduce the separatrix.
- The case $2p < n$ is considered by M. Berthier, R. Meziani and P. Sad [BMS], when the saddle-node that appears after reduction of singularities admits two analytic separatrices. E. Stróżyńska [Str] studied the case when there is only one analytic separatrix (and a formal one), using strongly Martinet-Ramis moduli space [MR1]. If there is only one analytic separatrix (and a formal one), it has been studied by E. Stróżyńska [Str], using strongly Martinet-Ramis moduli space [MR1].
- Finally, R. Meziani and P. Sad [MS] study the dicritical case.

In all these cases, analytic classification through projective holonomy plays an important role. It is still the case in Y. Genzmer's work [Ge2] about generalized curves foliations having a quasi-homogeneous separatrix. Nevertheless, here, Y. Genzmer uses also different techniques, based on a study of the deformations of foliations, as Mattei and Moussu [MM] results on the existence of first integrals can not be applied here.

Let us consider now the three-dimensional case. Few works regarding the analytic classification of three-dimensional foliations exist, due, among other reasons, to the complexity of the study of the global desingularization and of the geometry of the exceptional divisor. Concerning resonant, simple singularities, D. Cerveau and J. Mozo [CMo] show that the

holonomy of one of the separatrices allows to analytically classify the singularity. In the non-reduced case, the only work in this context is due to P. Fernández and J. Mozo [FM], who study cuspidal, quasi-ordinary foliations: these are foliations with only one quasi-ordinary cup as separatrix, i.e., a surface given in appropriate coordinates by $z^2 + x^p y^q = 0$.

There is a well-known combinatorial reduction of singularities for quasi-ordinary surfaces. Following it, a certain component of the exceptional divisor can be found, whose projective holonomy allows to classify the singularity.

The present memoir is written in the framework of the preceding problem. We attempt to continue the aforementioned work of P. Fernández and J. Mozo [FM], trying to find certain three-dimensional foliations, of cuspidal type, whose analytic classification can be studied using the holonomy of a certain component of the exceptional divisor. We will call cuspidal to those foliations, having the surface $z^2 + \varphi(x, y) = 0$, with $\varphi(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $\nu(\varphi) \geq 2$, as a separatrix. We will focus in the generalized surface type [FM2], i.e., non-dicritical foliations, without saddle-nodes, and whose reduction of singularities agrees with the reduction of its separatrix set. More precisely, the foliations we are studying will be called admissible cuspidal quasi-homogeneous foliations (FCCH). Their separatrix is defined by a surface that in appropriate coordinates is

$$z^2 + \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d_i} = 0.$$

If every d_i is equal to 1, the singular locus turns out to be the origin, of codimension three. Malgrange's Frobenius Singular Theorem [Ma] tells us in this case that there is a holomorphic first integral: the study of these foliations reduces to the study of analytic functions. So, we will denote as $\Sigma_{pq}^{(d_1, \dots, d_l)}$ the set of permissible type FCCH with $d_i > 1$, for some i . The main ingredients we will use are:

1. The global reduction of the singularities of such a foliation, and of the exceptional divisor. The desingularization is done by means of Weierstrass-Jung method: the singularities are reduced to quasi-ordinary ones after a finite number of point blow-ups. After that, we will reduce these quasi-ordinary singularities.
2. A detailed study of the topology of the components of the exceptional divisor. It is necessary to find a component whose topology, after eliminating the singular part of the strict transform of the foliation, turns out to be of the form $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}$, where \mathcal{C} is an affine algebraic curve as

$$z^2 + \prod_{i=1}^l (y^\delta - a_i)^{d_i} = 0.$$

The study of the fundamental group of $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}$ is done through Zariski-Van Kampen method, in a modern version, which uses braid monodromy.

3. A pre-normal form of the considered foliations. This form allows to find a transversal fibration, such that the separatrix is a union of fibers, and to lift the holonomy. Let us mention that this result has already been published in:

- P. FERNÁNDEZ SÁNCHEZ, J. MOZO FERNÁNDEZ, AND H. NECIOSUP. *On codimension one foliations with prescribed cuspidal separatrix*. J. Differential Equations 256 (2014) 1702-1717.

A sufficient condition in order that the considered foliations are generalized surfaces, following F. Loray's work in dimension two [Lo1] is also given.

Let us now detail the content of this memoir. In Chapter 1, we will sketch the immerse desingularization of surfaces. More concretely, Section 1.1 is devoted to expound the general ideas behind the desingularizations algorithms. In Section 1.2, quasi-ordinary singularities of surfaces are studied, following J. Lipman. In Section 1.3, cuspidal quasi-homogeneous surfaces are introduced, and their immerse desingularization is studied with more detail. We will describe the geometry of the components of the exceptional divisor. Let us mention that this is the most original part of the present chapter, as very few results exist previously studying the global structure and topology of the exceptional divisor appearing in the reduction of algebraic varieties of dimension greater than one. Finally, in the *essential* case (to be defined), the topology of each component of the exceptional divisor minus the intersection with the other components and the strict transform of the surface, is studied in detail.

In Chapter 2 we will present some of our main results. In Section 2.1 we will briefly describe formal normal forms for simple singularities of codimension one holomorphic foliations, following F. Cano and D. Cerveau. In Section 2.2, the following result generalizes the similar one obtained for generalized surfaces by P. Fernández and J. Mozo in [FM2]:

Theorem 2.1. *Let \mathfrak{F} be a generalized hypersurface in $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, and $S := (f = 0)$ the reduced equation of its set of separatrices. If $\pi : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ is an immerse resolution of the singularities of S , then $\pi^*(\mathfrak{F})$ has only simple singularities adapted to the divisor E .*

In Section 2.3, pre-normal forms for generalized surfaces with a certain cuspidal surface as a separatrix is determined. This is one of the main results on this Thesis:

Theorem 2.2. *Let \mathfrak{F} be a holomorphic foliation in $(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0})$, with separatrix defined by the analytic equation $f = z^2 + \varphi(\mathbf{x}) = 0$. Then, there exist analytic coordinates such that a generator of \mathfrak{F} is*

$$\omega = d(z^2 + \varphi') + G(\Psi, z)z\Psi\left(\frac{d\varphi'}{\varphi'} - 2\frac{dz}{z}\right),$$

where $\varphi' = \varphi u = \Psi^r$, u a unit, Ψ not a power, and G a two-variables holomorphic germ.

As a consequence, in the quasi-homogeneous case we have

Corollary 2.5. *Let \mathfrak{F} be a foliation, of generalized surface type, with quasi-homogeneous separatrix $z^2 + \varphi(\mathbf{x}) = 0$. Then, there exists coordinates such that a generator of \mathfrak{F} is*

$$\Omega = d(z^2 + \varphi) + G(\Psi, z).z.\Psi\left(\frac{d\varphi}{\varphi} - 2\frac{dz}{z}\right),$$

where $\varphi = \Psi^r$, Ψ is not a power, and G a two-variables holomorphic germ.

In Section 2.4, the reduction of singularities of admissible FCCH is described. We obtain a sufficient condition for a foliation generated by a 1-form $\Omega \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$ is a generalized surface. This condition is stated in the following theorem:

Theorem 2.6. *Let us consider a germ of codimension one holomorphic foliation in $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$, generated by a 1-form*

$$\omega = d(z^2 + \varphi(x, y)) + G(\Psi, z).\Psi z\left(\frac{d\varphi}{\varphi} - 2\frac{dz}{z}\right),$$

where $\Psi = \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d'_i}$, $p, q \geq 2$, $a_i \neq 0$, $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, d'_i relatively primes, and $\varphi = \Psi^r$; $r \in \mathbb{N}^*$. Let us write $G = \sum G_{ij} \Psi^i z^j$, two-variables holomorphic germ, and

$$\nu_{(2,r)}(\Psi^i z^j) := \frac{(2i + rj)}{\text{mcd}(2, r)},$$

$$\nu_{(2,r)}(G) := \min \left\{ \nu_{2,r}(\Psi^i z^j); G_{ij} \neq 0 \right\}.$$

Then, if $\nu_{(2,r)}(G) \geq \frac{2i+rj}{\text{mcd}(2,r)}$, the foliation \mathfrak{F}_ω is a generalized surface.

In Section 2.4.1, we will exhibit a Hopf fibration adapted to the admissible FCCH. We will end this chapter in Section 2.5, describing the topology of the components of the exceptional divisor minus the singular set.

In Chapter 3, the main results of this Thesis are presented. In Section 3.1, we will introduce holonomy and projective holonomy, and we will show that if two admissible foliations

of type FCCH, belonging to a same class $\Omega_j \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$, have conjugated projective holonomies, then they are conjugated in a neighbourhood of the essential component of the exceptional divisor \tilde{D} .

Let be $\Omega \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$, we will say that the foliation \mathfrak{F}_Ω :

- If d -even (**Case i**), satisfies the property \wp_1 : the holonomy of the leaves $\tilde{D}' \setminus \mathcal{S}$, $\tilde{D}'' \setminus \mathcal{S}$, is linearizable.
- If d -odd (**Case ii.1**), satisfies the property \wp_2 : the holonomy of the leaf $\tilde{D}'' \setminus \mathcal{S}$, is linearizable.

The technique of projective holonomy allows the classifications of FCCH permissible type that satisfies a of the property \mathcal{P}_i , i.e.:

Theorem 3.1. *Let $\Omega_i \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)_i}$ satisfy property \mathcal{P}_i and let us consider the foliations \mathfrak{F}_{Ω_i} with projective holonomies $H_{\Omega_i, \tilde{D}} = \langle h_{g_1}^i, h_{g_2}^i, h_\alpha^i \rangle$, $i = 1, 2$. Then, the foliations are analytically conjugated if and only if the groups $(h_{g_1}^i, h_{g_2}^i, h_\alpha^i)$ are analytically conjugated.*



Capítulo 1

Resolución de superficies singulares y topología del divisor

Las singularidades de superficies algebraicas o analíticas son mucho más complicadas que las de curvas, y resolverlas es un problema bastante sutil. Este ha sido uno de los problemas más importantes de la Geometría Algebraica por más de cien años.

La resolución de superficies se ha obtenido por diferentes métodos. La primera demostración rigurosa y completa, es debida a R. Walker en 1936. En 1939 O. Zariski dio la primera demostración puramente algebraica de la existencia de la desingularización de superficies sobre un cuerpo de característica cero y la extendió, un año más tarde, al caso analítico local. El resultado crucial no se obtuvo hasta 1964, año en que Heisuke Hironaka da una demostración de la resolución de singularidades para variedades de dimensión arbitraria sobre cuerpos de característica cero en su extenso artículo [Hi], resultado que le valió la Medalla Fields. La demostración de Hironaka, además de ser compleja, es existencial, es decir, no especifica un método constructivo para encontrar su resolución. Desde entonces se han obtenido resultados importantes en un contexto más general (esquemas excelentes). La primera prueba constructiva se debe a O. Villamayor en 1989 [Vil]: da un algoritmo que establece qué explosiones de una variedad singular dan como resultado una variedad lisa. Posteriormente esta prueba se ha simplificado significativamente en trabajos de H. Hauser, O. Villamayor, Bierstone-Milman, S. Encinas, entre otros.

En lo que concierne a característica positiva, existen una serie de resultados parciales, debidos a S. S. Abhyankar y J. Lipman, pero el problema en el caso general aún continúa abierto.

Dirigimos a los lectores interesados a ver [CGO], para mayor información y estudio

riguroso del mismo, así como [Hau] donde se explica cuales son los ingredientes que intervienen en la resolución de singularidades y por qué son necesarios.

Vamos a dedicar este primer capítulo de la memoria a revisar una serie de resultados relativos a superficies y a su desingularización que nos serán de utilidad en lo sucesivo. El método utilizado es el de Weierstrass-Jung: una sucesión previa de transformaciones cuadráticas permiten suponer que el lugar discriminante de una proyección adecuada tiene cruzamientos normales, y posteriormente, utilizar los algoritmos existentes para la reducción de superficies casi ordinarias.

La Sección 1.1 se dedicará a exponer una serie de conceptos generales que se usan en los algoritmos de resolución de singularidades, en especial las explosiones y los centros permitidos. La Sección 1.2 estudia las singularidades casi ordinarias de superficies, siguiendo a J. Lipman [L1]. El tipo de superficies que nos interesan en la presente memoria son las de un tipo particular a las que llamaremos cuspidales casi homogéneas de tipo admisible, introducidas en la Sección 1.3. Se dedica esta sección a un estudio detallado de su reducción inmersa de singularidades global, empleando lo descrito en las Secciones 1.1 y 1.2. Mencionemos que, si bien hay numerosos trabajos sobre la reducción local de superficies, son mucho más escasos aquellos que se ocupan de la resolución global, y de una descripción detallada del divisor excepcional. Una tal descripción se hace en la Sección 1.3.1, aunque la misma no es necesaria para el desarrollo del resto de la memoria. Por último, y en el caso que nos ocupa, es de especial interés para nosotros conocer la topología de cada componente del divisor excepcional al que se le retira la intersección con las otras componentes y la intersección con el transformado estricto de la superficie. Esta topología se calcula por medio de las técnicas de monodromía de trenzas. Dedicamos la Sección 1.4 a la descripción de esta técnica, así como al cálculo del grupo fundamental en los casos de interés de esta memoria.

1.1. Resolución inmersa de superficies

En esta sección describiremos algunas de las ideas que permiten mostrar la existencia de una resolución inmersa de singularidades de superficies analíticas. No es nuestro objetivo probar la existencia de dicha resolución inmersa con toda generalidad (ver [Hi],[CGO]), más bien, siguiendo el esquema de [Gon] y [C4], dar una descripción explícita en un caso muy particular, con el único objetivo de ilustrar los argumentos y técnicas de O. Zariski, H. Hironaka y S. Abhyankar, entre otros.

Sea S una superficie compleja localmente dada, en un entorno $U_{\mathbf{p}}$ de un punto $\mathbf{p} \in S$, en el espacio ambiente de dimensión tres, con coordenadas analíticas (x, y, z) , por $f = 0$, donde $f \in \mathbb{C}\{x, y, z\}$ sin factores múltiples y que admite un desarrollo en serie convergente

$$f(x, y, z) = \sum f_{ijk} x^i y^j z^k.$$

Llamamos **multiplicidad** de S en \mathbf{p} , y lo denotamos por $\nu_{\mathbf{p}}(S)$ a

$$\nu_{\mathbf{p}}(S) := \min \{i + j + k : f_{ijk} \neq 0\}.$$

Observe que para todo $\mathbf{p} \in S$, $\nu_{\mathbf{p}}(S) \geq 1$. Diremos que \mathbf{p} es un punto singular de S siempre que $\nu_{\mathbf{p}}(S) \geq 2$. El conjunto de puntos singulares de S , $\text{Sing}(S)$, es un conjunto analítico tal que $\dim(\text{Sing}(S)) \leq 1$, es decir, está formado por una cantidad finita de curvas y puntos aislados.

La multiplicidad define una función semicontinua superiormente, esto es, los puntos de multiplicidad superior a una dada forman un cerrado analítico del espacio ambiente.

Sea

$$d = \max \{ \nu_{\mathbf{p}}(S) : \mathbf{p} \in \text{Sing}(S) \}.$$

En [C4], d es llamado el **invariante de Samuel** y denotado por $\text{ISam}(S)$. Así, el conjunto formado por todos los puntos de multiplicidad máxima, **estrato de samuel** de S , denotado por

$$\text{Sam}(S) = \{ \mathbf{p} \in \text{Sing}(S) : \nu_{\mathbf{p}}(S) = \text{ISam}(S) \},$$

es un cerrado analítico de S .

Definición 1.1. Una **resolución o desingularización** de S es un morfismo analítico propio $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ tal que

1. \tilde{S} es una superficie lisa (es decir, sin puntos singulares),
2. $\tilde{S} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } S)$ es denso en \tilde{S} ,
3. y la restricción $\pi : \tilde{S} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } S) \rightarrow S \setminus \text{Sing } S$ es un isomorfismo analítico.

Consideremos una inmersión de S en una variedad lisa V , $S \hookrightarrow V$.

Definición 1.2. Se llama *resolución inmersa* de S a un morfismo analítico propio

$$\pi : \tilde{V} \rightarrow V$$

tal que

1. \tilde{V} es una variedad lisa,
2. $\tilde{V} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } S)$ es denso en \tilde{V} ,
3. la restricción $\pi : \tilde{V} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } S) \rightarrow V \setminus \{\text{Sing } S\}$ es un isomorfismo y
4. π induce una resolución de S con cruzamientos normales.

La condición (4) significa, más precisamente, lo siguiente:

- La restricción de π a \tilde{S} , $\pi|_{\tilde{S}}$, donde $\tilde{S} := \overline{\pi^{-1}(S \setminus \{\text{Sing } S\})}$ es el **transformado estricto** de S , es una resolución de S .
- $\pi^{-1}(\text{Sing } S)$, es unión de hipersuperficies lisas irreducibles D_α , $1 \leq \alpha \leq r$, y
- La familia $\{\tilde{S}, D_1, D_2, \dots, D_r\}$ es con cruzamientos normales.

La propiedad de cruzamientos normales de la familia $\{\tilde{S}, D_1, D_2, \dots, D_r\}$ quiere decir, que para cada punto $\mathbf{p} \in \pi^{-1}(\text{Sing } S)$, existe un sistema local de coordenadas de \tilde{V} en un entorno de \mathbf{p} tal que las variedades de la familia $\{\tilde{S}, D_1, D_2, \dots, D_r\}$ que contengan a \mathbf{p} son subespacios lineales, en posición general (es decir, las funciones que aparecen dentro de las ecuaciones locales de las variedades de la familia que contienen a \mathbf{p} forman un sistema local de coordenadas o pueden ser completadas para formar tal sistema). Así tenemos $\pi^{-1}(S) = \tilde{S} \cup D_1 \cup \dots \cup D_r$ (descomposición en componentes irreducibles de $\pi^{-1}(S)$), y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\pi^{-1}(S \setminus \{\text{Sing } S\})} = \tilde{S} & \hookrightarrow & \tilde{V} \longleftarrow \pi^{-1}(\text{Sing } S) = D_1 \cup \dots \cup D_r \\ \pi|_{\tilde{S}} \downarrow & & \downarrow \pi \\ S & \hookrightarrow & V \end{array}$$

El divisor $D := \pi^{-1}(\text{Sing } S) = D_1 \cup \dots \cup D_r$ de \tilde{V} , es llamado el **divisor excepcional** de π .

Además de la condición de cruzamientos normales obtenemos las siguientes propiedades:

1. Por cada punto $\mathbf{p} \in \pi^{-1}(\text{Sing } S) \cap \tilde{S}$ pasan a lo sumo dos componentes irreducibles de $\pi^{-1}(\text{Sing } S)$.

2. Las componentes irreducibles de la fibra excepcional $(\pi|_{\tilde{S}})^{-1}(\text{Sing } S)$ de la restricción $\pi|_{\tilde{S}}$ son lisas y con cruzamientos normales en \tilde{S} . La resolución de S inducida por π es lo que se llama una **buena resolución** de S .

Nota 1.1. Las definiciones precedentes han sido dadas en el contexto analítico complejo. Definiciones análogas existen en el contexto algebraico (ver [CGO]).

Una clase especial de morfismos propios son los que se construyen por medio de explosiones con centros subvariedades lisas. A continuación vamos a precisar brevemente esta noción.

Sea $V = \mathbb{C}^3$ el espacio vectorial complejo de dimensión 3, \mathbb{D}_3 un polidisco centrado en $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^3$, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ el espacio proyectivo de dimensión 2, y $\pi_0 : \mathbb{C}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ la aplicación natural. Denotemos por $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, $l = [y_1 : y_2 : y_3] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y consideremos el conjunto

$$V' = \tilde{\mathbb{C}}^3 := \left\{ (\mathbf{x}, l) \in \mathbb{D}_3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 : \mathbf{x} \in l \right\} \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2,$$

donde $\mathbf{x} \in l$ significa que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathbf{x} = \lambda(y_1, y_2, y_3)$.

Se tiene que

$$V' = \left\{ (\mathbf{x}, l) \in \mathbb{D}_3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 : x_i y_j = x_j y_i \right\} \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2.$$

De manera natural se puede dotar a V' de una estructura de variedad analítica compleja de dimensión 3 inducida por la de $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Consideremos la primera proyección

$$\begin{aligned} \pi : V' &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (\mathbf{x}, l) &\longmapsto \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\pi^{-1}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, [\mathbf{x}])$, y $\pi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. La restricción

$$\pi_{V' \setminus \pi^{-1}(\mathbf{0})} : V' \setminus \pi^{-1}(\mathbf{0}) \longrightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

es un isomorfismo.

Llamaremos a π , **la transformación cuadrática** de \mathbb{C}^3 con centro en el origen, y a $\pi^{-1}(\mathbf{0})$ el **divisor excepcional**.

La variedad V' se recubre por tres cartas locales (V'_j, φ_j) , definidas por,

$$V'_j = \left\{ (\mathbf{x}, l) \in V'; y_j \neq 0 \right\},$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 : V'_1 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (\mathbf{x}, l) &\longmapsto \left(x_1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 : V'_2 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (\mathbf{x}, l) &\longmapsto \left(\frac{y_1}{y_2}, x_2, \frac{y_3}{y_2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 : V'_3 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (\mathbf{x}, l) &\longmapsto \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}, x_3 \right). \end{aligned}$$

En dichas cartas, el morfismo π se describe por

$$\pi \circ \varphi_1^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1x_2, x_1x_3),$$

$$\pi \circ \varphi_2^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2, x_2x_3),$$

$$\pi \circ \varphi_3^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3, x_2x_3, x_3).$$

Considere ahora V una variedad analítica compleja de dimensión 3. Dado un punto $\mathbf{p} \in V$, existe un entorno U de \mathbf{p} isomorfo a un disco centrado en $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^3$. La construcción anterior puede, pues, localizarse, y definir así un morfismo propio $\pi : V' \longrightarrow V$, tal que

$$\pi_{V' \setminus \pi^{-1}(\mathbf{p})} : V' \setminus \pi^{-1}(\mathbf{p}) \longrightarrow V' \setminus \{\mathbf{p}\}$$

es un isomorfismo, y $\pi^{-1}(\mathbf{p}) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$: es la transformación cuadrática, o explosión de \mathbf{p} en V .

Supongamos ahora que tenemos S un subespacio analítico de V que contiene al punto \mathbf{p} . Sea $\pi : V' \longrightarrow V$ transformación cuadrática de V con centro en \mathbf{p} . En este caso, el transformado estricto de S por π , denotamos por \tilde{S} , es el mínimo subespacio analítico de $\pi^{-1}(S)$ tal que π induce el isomorfismo

$$\tilde{S} \setminus \pi^{-1}(\mathbf{p}) \simeq S \setminus \{\mathbf{p}\}.$$

Si S es un germen de superficie analítica con $\mathbf{p} \in S$, entonces \tilde{S} puede ser calculado localmente de forma muy sencilla: sea (x_1, x_2, x_3) un sistema de coordenadas locales de V en torno de \mathbf{p} y sea $(f = 0)$ una ecuación de S . Entonces, alrededor de $\pi^{-1}(\mathbf{p})$, \tilde{S} es unión de piezas

$$\tilde{S} = \bigcup_{i=1}^3 \tilde{S}_i$$

donde cada \tilde{S}_i está definida en una de las cartas locales por

$$\tilde{S}_1 := \frac{f(x_1, x_1x_2, x_1x_3)}{x_1^{\nu_{\mathbf{p}}(f)}},$$

$$\tilde{S}_2 := \frac{f(x_1x_2, x_2, x_2x_3)}{x_2^{\nu_{\mathbf{p}}(f)}},$$

$$\tilde{S}_3 := \frac{f(x_1x_3, x_2x_3, x_3)}{x_3^{\nu_{\mathbf{p}}(f)}}.$$

Sea ahora $V = \mathbb{C}^2$ y $\pi_0 : V' \rightarrow V$ la explosión del origen en V . Sea $Z = V \times \mathbb{C}$, $Z' = V' \times \mathbb{C}$. La aplicación

$$\pi := \pi_0 \times id_{\mathbb{C}} : Z' \rightarrow Z$$

es llamada explosión de \mathbb{C} en Z o **transformación monoidal** de Z con centro en $\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{C}$.

Consideremos ahora Z una variedad analítica compleja de dimensión 3, Y un subespacio complejo de Z liso de dimensión uno. Dado un punto $\mathbf{p} \in Y$, localizando Z e Y alrededor de \mathbf{p} se puede suponer la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} Z_{\mathbf{p}} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ Y_{\mathbf{p}} & \hookrightarrow & \{\mathbf{0}\} \times \mathbb{C} \end{array}$$

donde las flechas horizontales son aplicaciones abiertas.

La transformación monoidal de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ induce una transformación

$$\pi_{\mathbf{p}} : Z'_{\mathbf{p}} \rightarrow Z$$

alrededor de \mathbf{p} , que es biyectiva fuera de Y . Esta transformación se llama transformación monoidal de Z con centro Y alrededor de \mathbf{p} . La construcción anterior es funtorial, y puede globalizarse: se puede definir una transformación $\pi : Z' \rightarrow Z$ tal que $\pi = \pi_{\mathbf{p}}$, alrededor de todos los puntos $\mathbf{p} \in Y$, que induce un isomorfismo

$$\pi|_{Z' \setminus \pi^{-1}(Y)} : Z' \setminus \pi^{-1}(Y) \rightarrow Z \setminus Y.$$

A esta transformación π se la llama transformación monoidal de Z con centro Y .

Ahora, si S es un subespacio analítico de Z que contiene a Y , el mínimo subespacio analítico \tilde{S} de $\pi^{-1}(S)$ tal que π induce el isomorfismo

$$\tilde{S} \setminus (\pi^{-1}(Y) \cap \tilde{S}) \simeq S \setminus Y$$

es el transformado estricto de S por π . Si S es, localmente alrededor de un punto $\mathbf{p} \in Y$, un germen de superficie, tomando un sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) tal que Y esté definido por las ecuaciones $x_1 = x_2 = 0$, y considerando la ecuación $(f(x_1, x_2, x_3) = 0)$ de S alrededor de \mathbf{p} , se tiene que, alrededor de $\pi^{-1}(\mathbf{p})$, \tilde{S} se escribe en coordenadas locales en

las dos diferentes cartas de la explosión por

$$\frac{f(x_1, x_2x_1, x_3)}{x_1^{\nu_p(f)}},$$

resp. $\frac{f(x_1x_2, x_2, x_3)}{x_2^{\nu_p(f)}}.$

Las explosiones son el instrumento básico para la construcción de las resoluciones de singularidades. Así, uno de los métodos efectivos para el cálculo de una resolución inmersa, reposa en la utilización de explosiones con centro puntos o curvas lisas en las que la superficie considerada y el divisor excepcional no tienen cruzamientos normales. Los centros de las explosiones son subvariedades de la superficie, pero las explosiones son realizadas en la variedad ambiente. Los centros de explosión que inducen una buena resolución de la superficie son elegidos de acuerdo a la definición de centro permitido que a continuación precisamos.

Sea $S \subset V \simeq (\mathbb{C}^3, \mathbf{p})$ un germen de superficie analítica. Un subespacio analítico $C \subset V$ es un **centro permitido** para S si es no singular y la multiplicidad de S es constante a lo largo de C . En particular, si C interseca a $\text{Sam}(S)$, C está totalmente contenido en $\text{Sam}(S)$.

Utilizaremos, de manera sistemática, centros permitidos en el proceso de la resolución o desingularización de S mediante explosiones.

Definición 1.3. *El cono tangente de S en \mathbf{p} , denotado por $CT_{\mathbf{p}}(S)$, es el espacio definido por la forma inicial de f , es decir:*

$$\text{In}(f) := \left(\sum_{i+j+k=\nu_p(S)} f_{ijk}x^i y^j z^k = 0 \right).$$

Definición 1.4. *El espacio tangente estricto de Hironaka de S en \mathbf{p} es el mayor subespacio lineal $T_{\mathbf{p}}S$ de $T_{\mathbf{p}}V$ que deja invariante al cono tangente por traslaciones.*

$T_{\mathbf{p}}S$ coincide con $CT_{\mathbf{p}}S$, si y sólo si $CT_{\mathbf{p}}(S)$ es un espacio lineal. La codimensión de $T_{\mathbf{p}}(S)$ es el mínimo número de coordenadas necesarias para expresar la forma inicial; en general $T_{\mathbf{p}}(S) \subset CT_{\mathbf{p}}(S)$.

Un estudio detallado del comportamiento de $\text{ISam}(S), \text{Sam}(S), T_{\mathbf{p}}S, T_{\mathbf{p}}C$, tras explosiones con centros permitidos, permite definir una estrategia global para la resolución de singularidades, la cual consiste en ir bajando poco a poco el invariante de Samuel de S , modificando, en un momento u otro, todos los puntos del estrato de Samuel inicial. La prueba de que el proceso finaliza pasa por identificar un invariante numérico que desciende en cada paso y no pueda descender indefinidamente, los detalles pueden leerse en [C4],

[CGO] entre otros sitios.

Es posible que una componente irreducible del estrato de Samuel sea una curva singular y en cuyo caso el centro permitido estaría contenido en ella, es decir el centro permitido sería el punto singular de la curva.

El estrato de Samuel tiene cruzamientos normales en un punto $\mathbf{p} \in \text{Sam}(S)$, siempre que se cumpla una de las consideraciones siguientes.

1. \mathbf{p} es un punto aislado de $\text{Sam}(S)$.
2. $\text{Sam}(S)$ es una curva lisa, localmente en \mathbf{p} .
3. $\text{Sam}(S)$ consiste de dos curvas lisas y transversales en \mathbf{p} .

El conjunto de puntos en los que $\text{Sam}(S)$ no tiene cruzamientos normales es un conjunto finito de puntos aislados. Tomando como centros de explosión a estos puntos se tiene que $\text{Sam}(\tilde{S})$ tiene cruzamientos normales (ver [C4], Proposición 2).

El caso más “accesible” de superficies singulares para obtener una resolución inmersa, es el de las superficies con singularidades absolutamente aisladas. Para este tipo de superficies, se obtiene una resolución no inmersa por medio de transformaciones cuadráticas. Una vez obtenida dicha resolución, se podrá considerar la condición de transversalidad o de cruzamientos normales del divisor excepcional con el transformado estricto de la superficie.

Ejemplo 1.1. Sea S la superficie de ecuación $f = z^2 + x(x^2 + y^3) = 0$ inmersa en $V = \mathbb{C}^3$. El origen de coordenadas es el único punto singular de S , $\text{ISam}(S) = 2$ y $\text{Sam}(S) = \{\mathbf{0}\}$. La resolución inmersa de S es obtenida después de 7 transformaciones cuadráticas, seguido de 6 transformaciones monoidales.

En efecto. Fijamos las siguientes notaciones: para cada sucesión de transformaciones cuadráticas π_α , $\alpha = 1, \dots, r$, denotemos por \tilde{S}_α la transformada estricta de S tras las α primeras explosiones, D_α el divisor excepcional de la variedad ambiente de dimensión tres generado por π_α , y por $d_\alpha := D_\alpha \cap \tilde{S}_\alpha$, traza de \tilde{S}_α en D_α .

Denotemos también por $(x_{\alpha,i}, y_{\alpha,i}, z_{\alpha,i})$ el sistema local de coordenadas, en la carta $U_{\alpha,i}$ de la explosión π_α , en las cuales el centro de explosión de $\pi_{\alpha+1}$ es el origen de coordenadas. Ahora pasamos a describir, brevemente, la resolución inmersa de S .

Observe que el centro permitido de π_1 es el origen de coordenadas. Tras esta explosión

obtenemos, en $U_{1,2} \approx (\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$.

$$\begin{aligned} \pi_1^{-1}(S) &= y_{1,2}^2 \tilde{S}_1 \\ \tilde{S}_1 &= z_{1,2}^2 + x_{1,2} y_{1,2} (x_{1,2}^2 + y_{1,2}) = 0 \\ D_1 &= (y_{1,2} = 0) \\ d_1 &= D_1 \cap \tilde{S}_1 = (y_{1,2} = z_{1,2} = 0). \end{aligned}$$

Observemos que, el único punto singular de \tilde{S}_1 es el origen de $U_{1,2}$, $\text{ISam}(\tilde{S}_1) = 2$ y $\text{ISam}(\tilde{S}_1) = \{\mathbf{0}\}$.

Ahora, el centro permitido de π_2 es el origen de coordenadas de $U_{1,2}$. Tras realizar esta explosión obtenemos:

$$\begin{aligned} \pi_2^{-1}(\tilde{S}_1) &= \begin{cases} x_{2,1}^4 y_{2,1}^2 (z_{2,1}^2 + x_{2,1} y_{2,1} (x_{2,1} + y_{2,1})), & \text{en } U_{2,1} \approx \mathbb{C}^3 \\ y_{2,2}^2 (z_{2,2}^2 + x_{2,2} y_{2,2} (x_{2,2}^2 y_{2,2} + 1)), & \text{en } U_{2,2} \approx \mathbb{C}^3 \end{cases} \\ D_2 &:= \begin{cases} (x_{2,1} = 0) & \text{en } U_{2,1} \\ (y_{2,2} = 0) & \text{en } U_{2,2} \end{cases} \\ d_2 &:= \begin{cases} (z_{2,1} = x_{2,1} = 0) & \text{en } U_{2,1} \\ (z_{2,2} = y_{2,2} = 0) & \text{en } U_{2,2} \end{cases} \end{aligned}$$

\tilde{S}_2 posee dos puntos singulares, el origen de coordenadas en $U_{2,1}$ y en $U_{2,2}$ respectivamente. Por otro lado, $\text{ISam}(\tilde{S}_2) = 2$ y $\text{Sam}(\tilde{S}_2) = \{\mathbf{0}\}$.

Tras la explosión π_3 con centro el origen de $U_{2,2}$, el transformado estricto de S es regular y tangente a D_2 , $d_3 = D_3 \cap \tilde{S}_3 = z_{3,1}^2 + y_{3,1} = 0$, $\text{ISam}(\tilde{S}_3) = 1$ y $\text{Sam}(\tilde{S}_3) = \emptyset$.

La explosión π_4 con centro el origen de $U_{3,1} \approx \mathbb{C}^3$, permite obtener la superficie \tilde{S}_4 con tres puntos singulares en $d_4 \cap d_1$, $d_4 \cap d_2$ y un tercero en d_4 que son resueltos con las explosiones π_5, π_6 y π_7 respectivamente.

A \tilde{S}_7 es posible asociar un grafo dual representando como en la figura 1.1. Cada vértice representa una componente d_α y cada arista un punto de intersección entre las componentes, d_α, d_β , tal que $d_\alpha \cap d_\beta \neq \emptyset$. El orden de los índices en las componentes d_α respeta el orden de aparición de las mismas al realizar las transformaciones cuadráticas π_α .

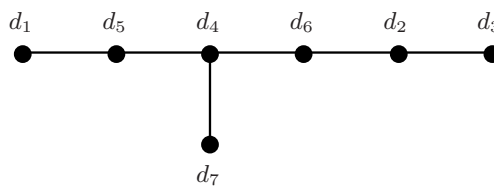


Figura 1.1: Grafo dual de \tilde{S}

Denotemos por (α, β) la curva intersección de D_α con D_β , para $\alpha \neq \beta$ si $D_\alpha \cap D_\beta \neq \emptyset$. Esto permite construir el diagrama de incidencia de \tilde{S} y los divisores D_α (ver Fig. 1.2). Este diagrama es conocido, en [Gon], como el *diagrama de incidencia conjuntista* asociado a la resolución.

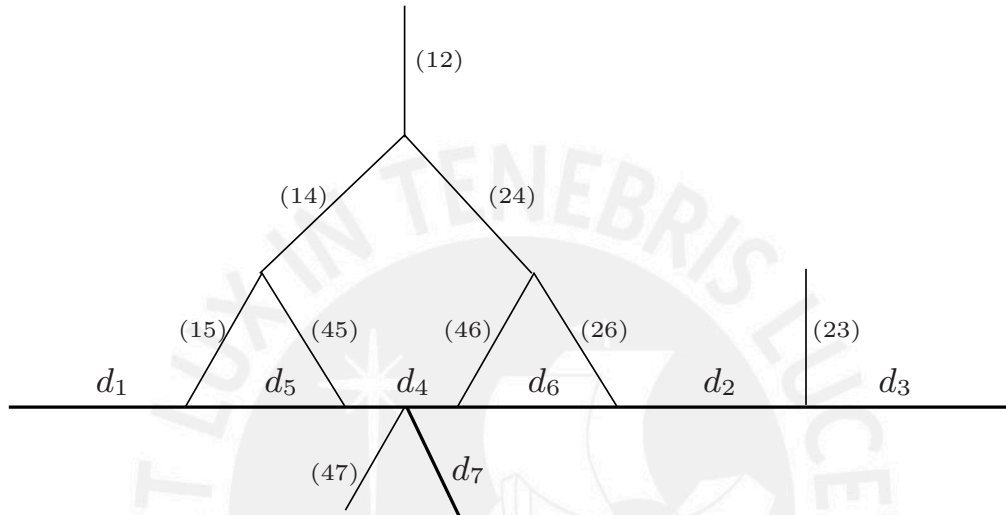


Figura 1.2: Diagrama de incidencia

Observe que para los índices $\alpha \in \{1, 2, 4\}$, la curva racional $d_\alpha \approx \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ es tangente a D_α y en consecuencia la condición de cruzamientos normales no es satisfecha, el tipo de tangencia es el mismo, con orden de contacto 2. Después de realizar dos explosiones con centro permitido d_α para cada $\alpha \in \{1, 2, 4\}$, obtenemos una resolución inmersa de S : denotemos por $\pi_{d_{\alpha 1}}$ la explosión de centro permitido d_α , $\pi_{d_{\alpha 1}}$ genera una superficie reglada denotado por $D_{\alpha 1}$. La superficie $D_{\alpha 1}$ y los transformados estrictos de D_α, \tilde{S}_7 tienen una intersección común a lo largo de la curva $d_{\alpha 1} := D_{\alpha 1} \cap \tilde{S}_8$, la cual será el centro permitido de la siguiente explosión, produciendo otra superficie reglada como divisor $D_{\alpha 2}$. Las cuatro superficies $D_{\alpha 2}, D_{\alpha 1}, D_\alpha$ y \tilde{S} presentan cruzamientos normales (\tilde{S} denota la transformada estricta final de S); la única intersección no vacía de \tilde{S} con los otros tres divisores, $\tilde{S} \cap D_{\alpha 2}$, será denotado por $d_{\alpha 2}$. Los divisores $D_{\alpha 1}$ y D_α son disjuntos y sus intersecciones con $D_{\alpha 2}$ son denotados por $(\alpha 1, \alpha 2)$ y $(\alpha, \alpha 2)$ respectivamente.

Por otro lado, teníamos d_β tangente a $(\alpha\beta) = D_\alpha \cap D_\beta$, después de efectuar las explosiones $\pi_{d_{\alpha 1}}$ y $\pi_{d_{\alpha 2}}$, las intersecciones de D_β con $D_{\alpha 1}$ y $D_{\alpha 2}$ son denotadas por $(\alpha 1, \beta)$, $(\alpha 2, \beta)$ respectivamente. Precisamos todo lo anterior en la Fig 1.3. El diagrama de incidencia final asociado a la *resolución inmersa* de S es representado en la figura 1.4.

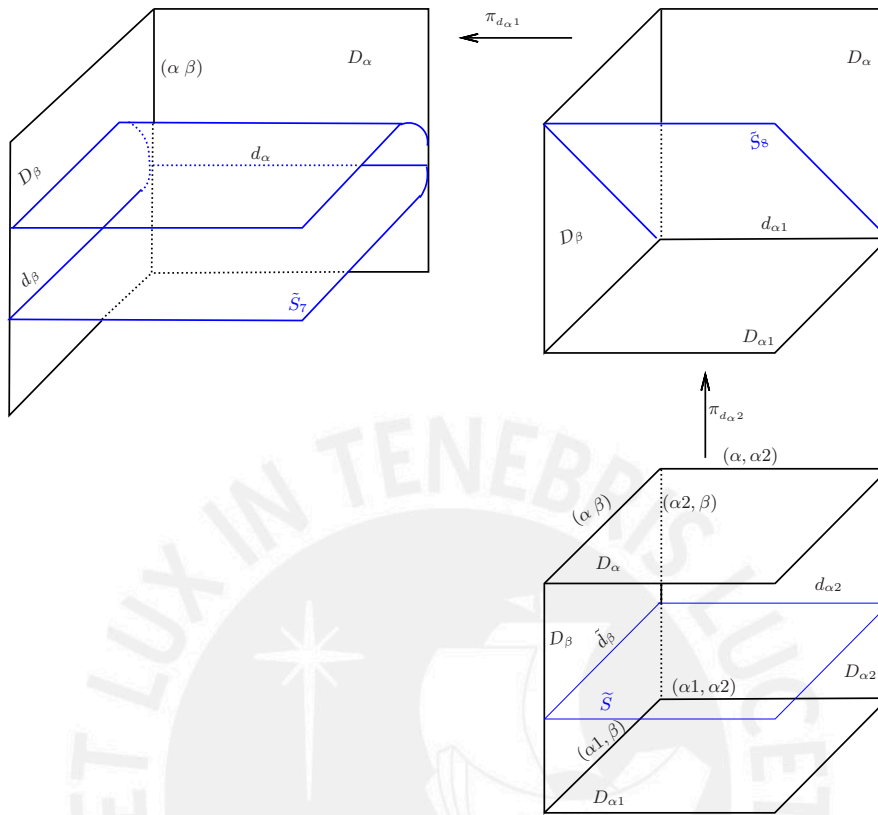


Figura 1.3: Transformaciones monoidales

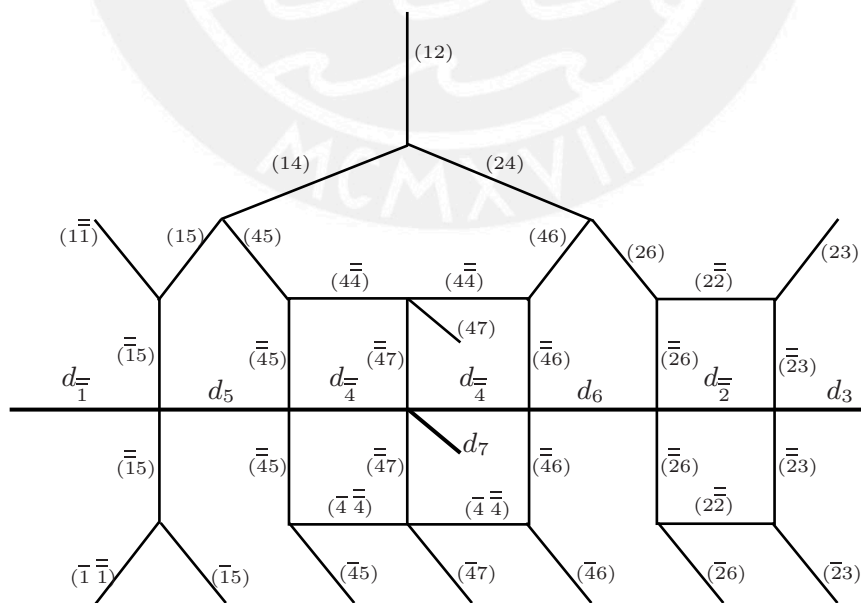


Figura 1.4: Diagrama de incidencia asociada a la resolución inmersa de S . Aquí $\bar{\alpha} := \alpha_1$ y $\bar{\alpha} := \alpha_2$



1.2. Superficies casi ordinarias

En esta sección estudiamos, brevemente, las singularidades casi ordinarias de superficies introducidas por Jung en 1908. Estas juegan un rol muy importante en los problemas de uniformización y resolución de singularidades (Walker, Zariski, Abhyankar). Fue Lipman, en su tesis [L1], quién hace un estudio más profundo. Introduce el concepto de rama casi ordinaria normalizada y demuestra que todo polinomio casi ordinario irreducible admite una parametrización que posee una rama normalizada.

Un enfoque para la comprensión de una singularidad casi ordinaria es el estudio de su resolución. En [L1], Lipman describe un procedimiento definitivo para la resolución de una superficie casi ordinaria irreducible inmersa en \mathbb{C}^3 (para una descripción del mismo, consulte [L2]). Lipman prueba que en cada etapa de la resolución, las singularidades que aparecen siguen siendo casi ordinarias. Además, dada una superficie casi ordinaria le asocia un par de números fraccionarios a los que denomina, pares característicos, y que en cada etapa de la resolución, estos son determinados por los de la etapa anterior y el proceso empleado. Estos resultados son extendidos por Ignacio Luengo en el caso reducible, siempre que la superficie en cuestión sea una superficie casi ordinaria respecto a un sistema transversal de parámetros (es decir, según [Lu], Def. 1.2, si $f(x_1, \dots, x_d) = 0$ es la ecuación local de la superficie, y $\nu = \nu_0(f)$, se tiene que f es regular de orden ν en x_d). Para más detalles, ver [Lu].

Aunque estemos interesados en el caso de superficies, haremos la mayor parte de la exposición en dimensión arbitraria. Denotemos por $R_d := \mathbb{C}\{\mathbf{x}\} = \mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ al anillo de series de potencias convergentes con d indeterminadas, L_d al cuerpo de fracciones de R_d . Asimismo, fijado $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $R_{d,n} := \mathbb{C}\left\{x_1^{\frac{1}{n}}, x_2^{\frac{1}{n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{n}}\right\}$ al anillo de series de potencias fraccionarias en d indeterminadas con denominador n y por $L_{d,n}$ su cuerpo de fracciones. La inclusión natural de $R_d \hookrightarrow R_{d,n}$ permite considerar a $R_{d,n}$ como extensión de R_d , y a $L_{d,n}$ como extensión de L_d .

Consideremos $f \in R_d[y]$ un polinomio de Weierstrass,

$$f = y^n + a_1(\mathbf{x})y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(\mathbf{x})y + a_n(\mathbf{x}),$$

y denotaremos por $\Delta_y(f)$ el discriminante de f respecto a y .

Definición 1.5. Decimos que un polinomio de Weierstrass f es casi ordinario si $\Delta_y(f) = x_1^{\mu_1} \dots x_d^{\mu_d} \cdot U$, con $\mu_i \in \mathbb{N}$ y $U \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$ una unidad.

Proposición 1.1. Si $f = \prod_{i=1}^r f_i$ es un polinomio de Weierstrass casi ordinario con r componentes, entonces cada una de ellas es un polinomio de Weierstrass casi ordinario.

El recíproco de la proposición anterior es falso. Basta tomar los polinomios casi ordinarios $f_1 = y^2 + x_1$ y $f_2 = y^2 - x_2$. Se tiene $\Delta(f_1, f_2) = -16x_1x_2(x_1 + x_2)^4$.

Definición 1.6. Un germen $(S, \mathbf{0}) \subset (\mathbb{C}^{d+1}, \mathbf{0})$ de hipersuperficie singular, es llamada **casi-ordinaria** si es definido localmente por un polinomio de Weierstrass f y existe un germen de aplicación finita $\pi : (S, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^d, \mathbf{0})$ cuyo lugar discriminante (hipersuperficie en \mathbb{C}^d sobre el cual π es ramificado) tiene cruzamientos normales o equivalentemente que f es un polinomio de Weierstrass casi ordinario.

- El punto $\mathbf{0} \in S$, es denominado **singularidad casi-ordinaria**.

Ejemplo 1.2. La hipersuperficie de ecuación $y^k - x_1^{r_1}x_2^{r_2} \cdots x_d^{r_d} = 0$ es una hipersuperficie casi ordinaria. ■

Ejemplo 1.3. Cualquier curva plana es casi ordinaria: después de un cambio de coordenadas y aplicando el Teorema de preparación de Weierstrass, podemos asumir que una curva plana es definida por un polinomio de Weierstrass

$$f = y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_n \in R_1[y],$$

donde los $a_i \in R_1$ no son unidades y que $\Delta_y f$ es una suma de productos de los a_i . Se sigue entonces que $\Delta_y f$ es no invertible en R_1 , es decir, podemos escribir $\Delta_y f = x^a u(x)$, con $a \in \mathbb{N}^*$ y $u(x)$ una unidad en R_1 . ■

Definición 1.7. Sea $\zeta \in R_{d,n}$ una serie de potencias fraccionarias que no es una unidad. Decimos que ζ es una **rama casi-ordinaria** si el polinomio mínimo de ζ sobre L_d es un polinomio de Weierstrass casi ordinario.

El Teorema de Jung-Abhyankar (Teorema 2 en [A]) garantiza que las raíces de un polinomio casi ordinario f son elementos del anillo de series de potencias fraccionarias $R_{d,n}$ para algún $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

Teorema 1.1 (Jung-Abhyankar). Sea $f \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}[y]$ un polinomio de Weierstrass y L el cuerpo de descomposición de f sobre L_d en \bar{L}_d (clausura algebraica). Si $\Delta(f) = x_1^{\mu_1} \cdots x_h^{\mu_h} \cdot U$ con $h \in \{1, \dots, d\}$, $\mu_i \in \mathbb{N}$ para todo i y $U \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$ una unidad, entonces existen $e_1, \dots, e_h \in \mathbb{N}$ tal que $L \subset L_d \left[x_1^{\frac{1}{e_1}}, \dots, x_h^{\frac{1}{e_h}} \right]$.

En el caso de una hipersuperficie casi ordinaria irreducible $f \in R_d[y]$, el Teorema de Jung-Abhyankar garantiza que si ζ es tal que $f(x_1, \dots, x_d, \zeta) = 0$ (es decir ζ es una raíz de f), entonces $\zeta \in R_{d,k}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. En contraste con el caso de curvas, k no necesariamente es $\deg_y(f)$.

Consideremos $P(t) = (t^n - x_1) \cdots (t^n - x_d) \in L_d[t]$. Como $L_{d,n}$ es el cuerpo de descomposición de P sobre L_d , se sigue que la extensión $L_{d,n}/L_d$ es de Galois, es más, el grado de dicha extensión es $[L_{d,n} : L_d] = n^d$.

Por otro lado, para cualquier $s = (\sigma_1, \dots, \sigma_d) \in \mathbb{Z}^d$ sea $\phi_s \in G := \text{Gal}(L_{d,n}/L_d)$ (grupo de Galois de la extensión $L_d \subset L_{d,n}$) definido por $\phi_s \left(x_i^{\frac{1}{n}} \right) = \epsilon^{\sigma_i} x_i^{\frac{1}{n}}; \forall i \in \{1, \dots, d\}$, donde ϵ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}^d &\longrightarrow G \\ s &\longmapsto \phi_s \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupo. Observe que ϕ tiene como núcleo a $n\mathbb{Z}^d$ y como $\text{Card}G = n^d = \text{Card}(\mathbb{Z}^d/n\mathbb{Z}^d)$, el homomorfismo ϕ induce el isomorfismo $\mathbb{Z}^d/n\mathbb{Z}^d \rightarrow G$. Por lo tanto, hemos demostrado:

Lema 1.1. *La extensión $L_d \subset L_{d,n}$ es de Galois y su grupo de Galois G es isomorfo a $\mathbb{Z}^d/n\mathbb{Z}^d$.*

Sean $\{\zeta_j\}_{j=1}^m$ las raíces de $f \in R_d[y]$ y suponga que $\zeta = \zeta_1 = H \left(x_1^{\frac{1}{n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{n}} \right)$ es una de ellas. Para $j = 2, \dots, m$ existe $s_j = (\sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,d}) \in \mathbb{Z}^d$ tal que

$$\zeta_j = \phi_{s_j}(\zeta) = \phi_j \left(H \left(x_1^{\frac{1}{n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{n}} \right) \right) = H \left(\epsilon_{j,1} x_1^{\frac{1}{n}}, \dots, \epsilon_{j,d} x_d^{\frac{1}{n}} \right)$$

con $\epsilon_{j,k} = \epsilon^{\sigma_{j,k}}$ y ϵ una raíz m -ésima primitiva de la unidad. Se sigue que las raíces del polinomio f son los elementos del conjunto

$$\left\{ H \left(\epsilon_1 x_1^{\frac{1}{n}}, \dots, \epsilon_d x_d^{\frac{1}{n}} \right) \right\}$$

donde $\epsilon_1, \dots, \epsilon_d$ son raíces m -ésimas de la unidad.

A partir de ahora, consideramos una superficie singular casi ordinaria irreducible e inmersa en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$. En este caso, podemos elegir coordenadas locales (x, y, z) tal que $\pi(x, y, z) = (x, y)$ y tal que $(S, \mathbf{0})$ es definido por un polinomio de Weierstrass irreducible $f \in \mathbb{C}\{x, y\}[z]$

$$f(x, y, z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m,$$

donde los a_i no son unidades. Entonces ser casi ordinaria significa que $\Delta_z(f)$ es de la forma

$$\Delta_z f = x^a y^b \cdot u$$

donde $a, b \in \mathbb{N}$ y $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$ una unidad.

Si f es de grado uno (como un polinomio en z) consideramos, al igual que Lipman [L1], que f tiene discriminante igual a la identidad. Así, en este caso f es un polinomio casi ordinario si y sólo si el término a_1 no es una unidad.

Sea $\zeta \in R_{2,k}$ una raíz de f . Como las otras raíces de f son conjugadas de ζ , haciendo $\zeta_1 = \zeta$, tenemos

$$f(x, y, z) = \prod_{i=1}^m \left(z - H \left(\epsilon_{i1} x^{\frac{1}{k}}, \epsilon_{i2} y^{\frac{1}{k}} \right) \right).$$

Observación 1.1. *La existencia de raíces en $L_{d,k}$ de una hipersuperficie no garantiza que la hipersuperficie sea casi ordinaria. Basta considerar la hipersuperficie definida por la ecuación*

$$f(x, y, z) = z^4 - 2(x+y)z^2 + (x-y)^2 = 0$$

la cual tiene raíces $\zeta = \pm x^{\frac{1}{2}} \pm y^{\frac{1}{2}}$, sin embargo esta no es casi ordinaria, pues

$$\Delta f = 4096x^2y^2(x-y)^2.$$

Por otro lado, ya que

$$x^a y^b u(x, y) = \Delta f = \prod_{i \neq j} (\zeta_i - \zeta_j),$$

y como $\mathbb{C}[[x, y]] \subset \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}}]]$ son dominios de factorización única, tenemos

$$\zeta_i - \zeta_j = x^{\frac{u}{n}} y^{\frac{v}{n}} u_{ij} \left(x^{\frac{1}{k}}, y^{\frac{1}{k}} \right),$$

para algún $u, v \in \mathbb{Z}$ (dependiendo de i, j) y $u_{ij} \in \mathbb{C} \left[\left[x^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}} \right] \right]$ una unidad. Los monomios fraccionarios $M_{ij} := x^{\frac{u}{k}} y^{\frac{v}{k}}$ son llamados **monomios característicos** de f y los exponentes $(\lambda_i, \mu_i) := \left(\frac{u}{k}, \frac{v}{k} \right) \in \mathbb{Q}_k \times \mathbb{Q}_k$ **pares característicos** de f , donde

$$\mathbb{Q}_k = \left(\frac{1}{k} \right) \mathbb{Z}.$$

Estos pares satisfacen ciertas condiciones (ver [L1] Proposición 1.5); por ejemplo, ellos son totalmente ordenados por $(\lambda_1, \mu_1) \leq (\lambda_2, \mu_2)$ si y solo si, $x^{\lambda_1} y^{\mu_1}$ divide a $x^{\lambda_2} y^{\mu_2}$ (es decir $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\mu_1 \leq \mu_2$). Estos pares determinan la geometría y la topología de (S, p) (ver [L1], [L2], [L3] y [Ga]).

Definición 1.8. *Una parametrización*

$$\zeta = x^{\frac{a}{n}} y^{\frac{b}{n}} H \left(x^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}} \right)$$

donde $H(0,0) \neq 0$ es **normalizada** si

- (1.) a y b no son ambos divisibles por n .
- (2.) Si $a + b < n$, entonces $a > 0$ y $b > 0$.

- (3.) Etiketando los pares característicos $(\lambda_i, \mu_i)_{1 \leq i \leq s}$ de ζ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_s$ y $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_s$, tenemos $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \leq (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$ (lexicográficamente).
- (4.) Ningún término de ζ tiene ambos exponentes enteros.

El lema de inversión de Lipman ([L1], Lema 2.3) garantiza que toda singularidad de una hipersuperficie casi ordinaria irreducible puede ser parametrizada por una rama casi ordinaria normalizada, y determina los monomios característicos de ésta a partir de los monomios característicos de la rama de partida mediante fórmulas de inversión. En este sentido Gau [Ga] demuestra que el tipo topológico de la singularidad de una hipersuperficie casi ordinaria es equivalente a la información proporcionada por el conjunto de monomios característicos de una rama casi ordinaria normalizada. Así, podemos decir que aunque una singularidad casi ordinaria puede tener diferentes pares característicos los cuales dependen de la elección de ζ , los pares característicos de una parametrización normalizada determinan y son determinados por el tipo topológico local de (S, \mathbf{p}) ; es decir, hay un conjunto de pares característicos que son independientes de la elección de ζ .

Lema 1.2. *Cualquier parametrización $\zeta = x^{\frac{u}{n}} y^{\frac{v}{n}} H \left(x^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}} \right)$ de una superficie casi ordinaria (S, \mathbf{p}) puede ser elegida normalizada por los siguientes tipos de cambios de coordenadas.*

$$\begin{array}{lll} x' = x & x' = z & x' = x \\ y' = y & y' = y & y' = z \\ z' = z - p(x, y) & z' = x & z' = y \end{array}$$

Demostración. Sea ζ una rama casi ordinaria. De [L1] (Corolario 1.6) o bien $\zeta \in \mathbb{C}\{x, y\}$ ó $\zeta = H_0(x, y) + x^\lambda y^\mu H \left(x^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}} \right)$, donde $H_0 \in \mathbb{C}\{x, y\}$; $H(0, 0) \neq 0$ y (λ, μ) es el menor par distinguido de ζ . Haciendo el cambio $\zeta' = \zeta - H_0$, de [L1] (Proposición 1.5) el monomio característico $x^\lambda y^\mu$ divide a cualquier término de $\zeta' = x^\lambda y^\mu H \left(x^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}} \right)$ para algún H . Así podemos asumir que $\zeta = x^\lambda y^\mu H \left(x^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}} \right)$ y (1) y (4) en la Definición 1.8 se cumplen. Sí (2) en la Definición 1.8 no se cumple, es decir $u = 0$ ó $v = 0$, entonces de la prueba del Lema de inversión [L1] (Lema 2.3), el cambio del tipo $x' = z, y' = y, z' = x$ puede hacerse. Tras un cambio del tipo $x' = x, y' = z, z' = y$, (3) en la Definición 1.8 se puede obtener [Ga]. \square

De la prueba del Lema 1.2, deducimos: sí ζ es una rama casi ordinaria, entonces o bien $\zeta = 0$ ó $\zeta = x^\lambda y^\mu H \left(x^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}} \right)$, donde (λ, μ) es el menor par distinguido y $H(0, 0) \neq 0$.

Lipman da una descripción precisa del cono tangente y del lugar singular de un germen de superficie casi ordinaria así como la relación de estos y los pares característicos (ver [L1], [L2]).

Sea $\zeta = x^\lambda y^\mu H\left(x^{\frac{1}{n}}, y^{\frac{1}{n}}\right)$, $H(0,0) \neq 0$ una parametrización normalizada de una singularidad casi ordinaria $(S, \mathbf{0})$. El siguiente lema demuestra como cambian los pares característicos después de explosiones por centros permitidos (ver [L1] tabla 4.4) o después que se realiza una inversión ([L1], Lema 2.3).

Lema 1.3. *Sea S una superficie casi ordinaria. Cualquier transformación por explosión, S' , con centro permitido, de S , es de nuevo una superficie casi ordinaria. Si ζ es una rama normalizada que parametriza S , entonces por uno de los procesos dado en [L1] (Sección 3), podemos encontrar una rama casi ordinaria “estándar” ζ' (no necesariamente normalizada) que parametriza S' , y cuyos pares distinguidos dependen únicamente de los de ζ y del proceso empleado. La naturaleza exacta de la dependencia es dada en la tabla siguiente (omitir $i = 1$ si el par correspondiente consiste de enteros.)*

Transformaciones	Pares característicos de ramas resultantes
Inversión	$\frac{\lambda_i + 1 - \lambda_1}{\lambda_1}, \mu_i$
Transformación Monoideal:	
Centro (x, z)	$\lambda_i - 1, \mu_i$
Centro (y, z)	$\lambda_i, \mu_i - 1$
Transformación Cuadrática	
“Caso transversal” ($\lambda_1 + \mu_1 \geq 1$)	
Dirección $(1 : 0 : 0)$	$\lambda_i + \mu_i - 1, \mu_i$
Dirección $(0 : 1 : 0)$	$\lambda_i, \lambda_i + \mu_i - 1$
“Caso no transversal” ($\lambda_1 + \mu_1 < 1$)	
Dirección $(1 : 0 : 0)$	$\lambda_i + \frac{(1+\mu_i)(1-\lambda_1)}{\mu_1} - 2, \frac{1+\mu_i}{\mu_1} - 1$
Dirección $(0 : 1 : 0)$	$\mu_i + \frac{(1+\lambda_i)(1-\mu_1)}{\lambda_1} - 2, \frac{1+\lambda_i}{\lambda_1} - 1$
Dirección $(0 : 0 : 1)$	$\frac{\lambda_i(1-\mu_1)+\mu_1\lambda_1}{1-\lambda_1-\mu_1}, \frac{\lambda_i\mu_1+\mu_i(1-\lambda_1)}{1-\lambda_1-\mu_1}$

En [L1] (Definición 5.1) Lipman, describe una resolución estricta de un germen de superficie casi ordinaria, el cual determina y es completamente determinado por los pares característico de cualquier rama casi ordinaria normalizada, parametrizando un germen de superficie $(S, \mathbf{0})$. El dato importante demostrado por Lipman es que la transformada estricta de una superficie casi ordinaria por explosiones con centro permitido, es casi ordinaria, irreducible y los correspondientes pares característicos son determinados por los de ζ tal como refleja el Lema 1.2.

La propiedad de que la transformada estricta de una superficie casi ordinaria por explosiones con centro permitido, es nuevamente casi ordinaria, no es verdad en dimensión arbi-

1.2. *Superficies casi ordinarias*

41

traría tal como lo refleja la hipersuperficie casi ordinaria dada por la ecuación $w^4 - xyz = 0$ [Go].



1.3. Superficies cuspidales casi-homogéneas.

Consideramos una familia de superficies singulares del tipo

$$f = z^k + \varphi(x, y) = 0, \quad k \geq 2$$

donde φ es una función analítica de dos variables. Este tipo de superficie fue introducido por O. Zariski, denominadas como *superficies de Zariski* por Piotr Blass en 1970, y estudiado con detalle en los años 70 por Joseph Blass, Piotr Blass y Jeff Lang. Existen estudios en el caso de que φ es la ecuación de una curva singular plana e irreducible, debidos a Anne Pichon [Pi], Robert Mendris y András Némethi [MN]. Estamos interesados en el caso $k = 2$ y φ la ecuación de una curva singular plana no necesariamente irreducible, con la condición $\nu_0(\varphi) \geq 2$, a los que llamaremos *superficies cuspidales* y cuyo proceso de resolución inmersa describiremos en un caso especial.

Definición 1.9. Sea $S^n \subset (\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0})$ un germen de hipersuperficie n -dimensional con coordenadas $(\mathbf{x}, z) := (x_1, \dots, x_n, z)$. S^n será llamada *hipersuperficie cuspidal* si es definida por una ecuación analítica $f = z^2 + \varphi(\mathbf{x})$, con la condición $\nu_0(\varphi) \geq 2$.

- Si f es una función analítica casi-homogénea, S es llamada una hipersuperficie *cuspidal casi-homogénea* (CCH).

Nota 1.2. Recordemos que, siguiendo a Saito [Sa], un germen de función holomorfa $h : (\mathbb{C}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es *casi-homogénea* si y sólo si h pertenece a su ideal jacobiano, es decir

$$h \in J(h) = \left\langle \frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right\rangle.$$

Si h es casi-homogénea, existen coordenadas (X_1, X_2, \dots, X_n) y enteros positivos, primos relativos p_1, p_2, \dots, p_n , tal que el campo vectorial casi-radial

$$\mathcal{X}_p = \sum_{i=1}^n p_i X_i \frac{\partial}{\partial X_i},$$

satisface $\mathcal{X}_p(h) = k.h$, donde el entero k es el grado casi-homogéneo de h (ver [Sa]).

Si $n = 2$, existen coordenadas tales que h tiene r ramas cuspidales y tal vez también tenga a los ejes coordenados como ramas, es decir, h se puede escribir

$$h(x, y) = x^{n_1} y^{n_2} \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d_i},$$

donde $n_1, n_2 \geq 0$, $d_i > 0$, y $p, q \geq 2$. Los números complejos a_i son no nulos y distintos dos a dos. En particular la curva $(h = 0)$ tiene $n_1 + n_2 + d$ ramas, contadas con sus multiplicidad, $d = d_1 + d_2 + \dots + d_l$.

Con las consideraciones anteriores, existen coordenadas analíticas en las que una superficie cuspidal casi-homogénea $S \subset (\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$, está definida por la ecuación

$$f = z^2 + \varphi(x, y) = z^2 + x^{n_1} y^{n_2} \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d_i} = 0.$$

Denominaremos **parte distinguida** de la expresión anterior al término $x^{n_1} y^{n_2}$ y diremos que S es **admisibile** si S no admite parte distinguida, es decir, si la curva $(\varphi = 0)$ no admite a $x = 0$, $y = 0$ y/o a $xy = 0$ como ramas. En buenas coordenadas estas superficies están definidas por una ecuación

$$f(x, y, z) = z^2 + \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d_i} = 0. \quad (1.1)$$

con $p, q \geq 2$. El lugar singular de S , $\text{Sing}(S)$ es de uno de los tipos siguientes.

I. Si $d_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, l$: $\text{Sing}(S) = \{(0, 0, 0)\}$.

II. Si $d_i > 1$ para algún $i = 1, \dots, l$:

$$\text{Sing}(S) = \left\{ (x, y, 0) \in (\mathbb{C}^3, \mathbf{0}) : \exists i \in \{1, \dots, l\}, d_i > 1, y^p - a_i x^q = 0 \right\}.$$

En ambas situaciones, tenemos $\text{ISam}(S) = 2$ y $\text{Sam}(S) \equiv \text{Sing}(S)$. Un método de resolución inmersa de las superficies cuspidales, puede ser visto en [BMN]. Allí los autores presentan una descripción explícita de una “resolución inmersa” de las superficies cuspidales normales, así como una descripción topológica del divisor excepcional, usando la estrategia de Jung [L1], [L2]. Sin embargo tal proceso difiere del que nos interesa en esta memoria: la restricción de la modificación birracional

$$\pi : M \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(S)) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, \mathbf{0}) \setminus \text{Sing}(S)$$

no es un isomorfismo y en consecuencia, π no cubre la definición de resolución inmersa que precisamos en la Definición 1.1. A continuación, describimos la resolución inmersa del modelo (1.1) siguiendo el esquema descrito en la Sección 1.1 con el fin de presentar una resolución que respeta todos los requerimientos de la Definición 1.1. Además, en nuestro caso, S no necesariamente es normal. Este nos permite preparar el escenario óptimo que nos facilita el camino hacia la meta de esta tesis. Por comodidad describimos el proceso de resolución en tres etapas:

- En la primera etapa realizamos explosiones con centro puntos, “siguiendo el esquema habitual de la reducción de singularidades de la curva” $\prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d_i} = 0$.

- Tras este proceso, todas las transformadas estrictas de las ramas cuspidales de $\text{Sing}(S)$ cortan a una misma componente del divisor excepcional con cruzamientos normales. Y en consecuencia el estrato de Samuel, $\text{Sam}(S)$, tiene cruzamientos normales.
- En la segunda etapa se sigue el esquema de la reducción de singularidades de una superficie casi ordinaria: es preciso realizar explosiones con centro en curvas lisas, concretamente en las intersecciones de las componentes del divisor excepcional con la transformada estricta de $z = 0$. Nos interesará especialmente la imagen inversa de la recta proyectiva que corresponde a la componente del divisor excepcional interceptada por las transformadas estrictas de las ramas cuspidales.
- En la tercera etapa: Si $d_i > 1$ para algún $i \in \{1, \dots, l\}$. Explotamos, en algunos casos, líneas que corresponden a las transformadas estrictas de las ramas cuspidales contenidas en $\text{Sing}(S)$, que en un buen sistema de coordenadas están dadas por $z = 0, y = a_i^{\frac{1}{d_i}}$, con $d_i > 1$, estas explosiones son realizadas de acuerdo al esquema de la resolución de singularidades de curvas planas $z^2 + Y^{d_i} = 0$. Y en otros casos explotamos, puntos o líneas según corresponda, con el fin de resolver las superficies del tipo $z^2 + xY^{d_i} = 0$. Este último caso, también es evitado en [BMN].
Si $d_i = 1$ para todo i , la transformada estricta de la superficie, en algunos casos, es regular y transversal a divisor excepcional y por tanto la resolución inmersa termina en la segunda etapa. En otros casos, es necesario realizar una transformación cuadrática seguido de dos transformaciones monoidales con el fin de resolver las superficies cónicas $z^2 + xY = 0$.

Describimos este proceso con más detalle, para el cual vamos a suponer $p > q$:

Primera etapa. Sean $r = \text{mcd}(d_1, \dots, d_l)$, $\delta = \text{mcd}(p, q)$, $p' = \frac{p}{\delta}$, $q' = \frac{q}{\delta}$. A partir del algoritmo de Euclides para (p', q') ,

$$\left\{ \begin{array}{l} p' = c_0 q' + r_1 \\ q' = c_1 r_1 + r_2 \\ r_1 = c_2 r_2 + r_3 \\ \vdots \\ r_{i-1} = c_i r_i + r_{i+1}; \quad 0 \leq r_{i+1} < r_i \\ \vdots \\ r_{N-2} = c_{N-1} r_{N-1} + r_N \\ r_{N-1} = c_N r_N + 0, \end{array} \right.$$

obtenemos el desarrollo en fracción continua de

$$\frac{p'}{q'} = c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3 + \dots + \frac{1}{c_N}}}}$$

Si $\frac{p_k}{q_k}$ es el k -ésimo aproximante, se verifica que

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1}c_k + p_{k-2}}{q_{k-1}c_k + q_{k-2}}$$

Es clásico que se tienen igualdades

$$p_{k-1}q_k - q_{k-1}p_k = (-1)^k. \tag{1.2}$$

En particular si $k = N$

$$p_{N-1}q' - q_{N-1}p' = (-1)^N,$$

y $m := q_{N-1}, n := p_{N-1}$ son enteros positivos minimales verificando

$$nq - mp = (-1)^N \delta.$$

En particular, si $N = 0$, q divide a p .

Supongamos por un instante que $N = 1$, entonces

$$\begin{cases} p = c_0q + \delta, \\ q = c_1\delta. \end{cases}$$

Tras c_0 transformaciones cuadráticas, siguiendo la dirección tangente común a las curvas

$$z = 0, y^p - a_i x^q = 0,$$

se crea una cadena, \mathcal{C}_0 , de componentes del divisor, D_1, D_2, \dots, D_{c_0} , tales que en las vecindades $U_{\alpha i}$ (carta local de la componente D_α) de los puntos

$$p_\alpha := D_{\alpha-1} \cap D_\alpha \cap (\text{transformada estricta de } z = 0),$$

con coordenadas $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, la transformada estricta de S está dada por

$$S_\alpha := \pi^{-1}(S) \cap U_\alpha = \left\{ (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) : z_\alpha^2 + x_\alpha^{m_1^\alpha} y_\alpha^{m_2^\alpha} u_\alpha = 0 \right\},$$

donde $u_\alpha \in \mathbb{C}\{x_\alpha, y_\alpha\}$ es una unidad y m_i^α enteros positivos:

$$u_\alpha = \prod_{i=1}^l \left(x_\alpha^{(c_0-\alpha)q} y_\alpha^{(c_0-\alpha+1)q} - a_i \right)^{d_i},$$

$$m_1^\alpha = \alpha(qd - 2),$$

$$m_2^\alpha = (\alpha - 1)(qd - 2).$$

En la última componente, D_{c_0} , con coordenadas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, el transformado estricto de S está dado por

$$\hat{S} := \hat{z}^2 + \hat{y}^{(qd-2)c_0} \prod_{i=1}^l (\hat{y}^{p-c_0q} - a_i \hat{x}^q)^{d_i} = 0.$$

A continuación, realizamos c_1 transformaciones cuadráticas siguiendo la dirección tangente a las curvas

$$\hat{z} = 0, \hat{y}^{p-c_0q} - a_i \hat{x}^q = 0,$$

creando la cadena \mathcal{C}_1 de componentes $D_{c_0+1}, \dots, D_{c_0+c_1}$ tal que la última componente de \mathcal{C}_0 , interseca a todas las componentes de \mathcal{C}_1 . Observe que $c_1 \geq 2$, por otro lado en las vecindades $U_{\alpha i}$ (carta local de la componente D_{α}) de los puntos

$$\mathbf{p}_{\alpha} = D_{\alpha-1} \cap D_{\alpha} \cap (\text{transformada estricta de } \hat{z} = 0); \alpha \in \{c_0 + 2, \dots, c_0 + c_1\}$$

con coordenadas $(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha})$, la transformada estricta de \hat{S} está dada por

$$S_{\alpha} := \pi^{-1}(S) \cap U_{\alpha} = \left\{ (x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}) : z_{\alpha}^2 + x_{\alpha}^{n_1^{\alpha}} y_{\alpha}^{n_2^{\alpha}} v_{\alpha} = 0 \right\},$$

donde $v_{\alpha} \in \mathbb{C}\{x_{\alpha}, y_{\alpha}\}$ y n_i^{α} enteros positivos, tal que para cada $j = \{1, \dots, c_1\}$:

$$v_{\alpha} = \prod_{i=1}^l \left(1 - a_i x_{\alpha}^{(c_1-(j-1))\delta} y_{\alpha}^{\delta(c_1-j)} \right)^{d_i},$$

$$n_1^{\alpha} = (j-1)(pd - 2(c_0 + 1)),$$

$$n_2^{\alpha} = j(pd - 2(c_0 + 1)).$$

Observe que v_{α} es una unidad para todo $j \neq c_1$, esto nos lleva a destacar, en $D_{c_0+c_1}$, los puntos $\mathbf{p}_{c_0+c_1}$ y $\tilde{\mathbf{p}} := D_{c_0} \cap D_{c_0+c_1} \cap (\tilde{z} = 0)$, tal que en una vecindad de $\tilde{\mathbf{p}}$, con coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, la transformada estricta de \hat{S} está dada por

$$\tilde{S} := \tilde{z}^2 + \tilde{x}^{c_1(pd-2(c_0+1))} \tilde{y}^{c_0(qd-2)} \prod_{i=1}^l (\tilde{y}^{\delta} - a_i)^{d_i} = 0.$$

En general, si $N > 1$ realizamos:

(1°) c_0 transformaciones cuadráticas siguiendo la dirección tangente común a las curvas

$$z = 0, y^p - a_i x^q = 0$$

(2°) c_1 transformaciones cuadráticas siguiendo la dirección tangente común a las curvas

$$\tilde{z} = 0, \tilde{y}^{p-c_0q} - a_i \tilde{x}^q = \tilde{y}^{r_1\delta} - a_i \tilde{x}^q$$

(3°) c_2 transformaciones cuadráticas siguiendo la dirección tangente común a las curvas

$$\tilde{z} = 0, \tilde{y}^{p-c_0q} - a_i \tilde{x}^{q-c_1 r_1 \delta} = \tilde{y}^{r_2\delta} - a_i \tilde{x}^{r_2\delta} = 0$$

1.3. *Superficies cuspidales casi-homogéneas.*

(4°) c_3 transformaciones cuadráticas siguiendo la dirección tangente común a las curvas

$$\tilde{z} = 0, \tilde{y}^{r_3\delta} - a_i \tilde{x}^{r_2\delta} = 0$$

⋮

(N°) c_{N-1} transformaciones cuadráticas siguiendo la dirección tangente común a las curvas:

$$\begin{cases} \tilde{z} = 0, \tilde{y}^{r_{N-1}\delta} - a_i \tilde{x}^{r_{N-2}\delta} = 0, & \text{si } N \text{ par;} \\ \tilde{z} = 0, \tilde{y}^{r_{N-2}\delta} - a_i \tilde{x}^{r_{N-1}\delta} = 0, & \text{si } N \text{ impar.} \end{cases}$$

Finalmente realizamos c_N transformaciones cuadráticas siguiendo la dirección tangente de las curvas:

$$\begin{cases} \tilde{z} = 0, \tilde{y}^{r_{N-1}\delta} - a_i \tilde{x}^{r_N\delta} = 0, & \text{si } N \text{ par;} \\ \tilde{z} = 0, \tilde{y}^{r_N\delta} - a_i \tilde{x}^{r_{N-1}\delta} = 0, & \text{si } N \text{ impar.} \end{cases}$$

De esta manera, tras $k = \sum_{\nu=0}^N c_\nu$ transformaciones cuadráticas se genera $N + 1$ cadenas de divisores

$$\mathcal{C}_\nu : D_{s_{\nu-1}+1}, D_{s_{\nu-1}+2}, \dots, D_{s_{\nu-1}+c_\nu} = D_{s_\nu}$$

con $s_\nu = \sum_{i=0}^{\nu} c_i$ para cada $\nu \in \{0, \dots, N\}$. Estas se comportan según el esquema de la figura 1.5.

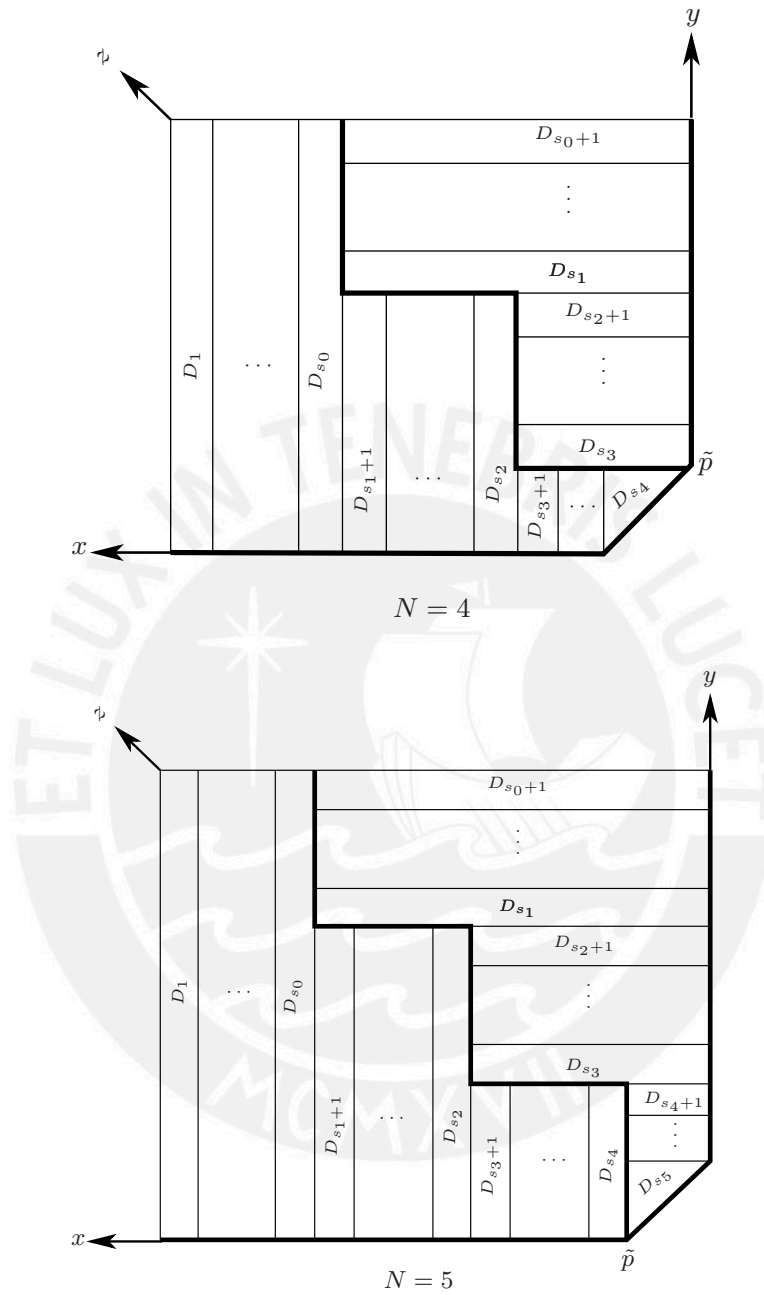


Figura 1.5: Comportamiento de las cadenas \mathcal{C}_i , $\nu = 0, \dots, k$

Sea $\nu \in \{0, \dots, N\}$ y $j_\nu \in \{1, \dots, c_\nu\}$. Defina

$$\alpha = \alpha(\nu, j_\nu) = \sum_{i=0}^{\nu-1} c_i + j_\nu = s_{\nu-1} + j_\nu ;$$

$$m(\nu, j_\nu) = j_\nu p_{\nu-1} + p_{\nu-2} ;$$

$$n(\nu, j_\nu) = j_\nu q_{\nu-1} + q_{\nu-2} ;$$

$$\mathbf{p}_\alpha = D_{\alpha-1} \cap D_\alpha \cap (z_\alpha = 0).$$

Para cada ν , obtenemos los siguientes datos

- Si ν es par y $\nu \neq N$.

$$u_\alpha := \prod_{i=1}^l \left(u^{n(\nu, j_\nu)p - m(\nu, j_\nu)q} v^{n(\nu, j_\nu-1)p - m(\nu, j_\nu-1)q} - a_i \right)^{d_i},$$

$$m_1^\alpha := m(\nu, j_\nu)qd - 2(m(\nu, j_\nu) + n(\nu, j_\nu) - 1),$$

$$m_2^\alpha := m(\nu, j_\nu - 1)qd - 2(m(\nu, j_\nu - 1) + n(\nu, j_\nu - 1) - 1).$$

y en este caso, la transformada estricta de S , en una vecindad de los puntos \mathbf{p}_α , está definida por:

$$S_\alpha = z_\alpha^2 + x_\alpha^{m_1^\alpha} y_\alpha^{m_2^\alpha} u_\alpha = 0$$

- Si ν es impar y $\nu \neq N$.

$$v_\alpha := \prod_{i=1}^l \left(1 - a_i u^{m(\nu, j_\nu-1)q - n(\nu, j_\nu-1)p} v^{m(\nu, j_\nu)q - n(\nu, j_\nu)p} \right)^{d_i},$$

$$n_1^\alpha := n(\nu, j_\nu - 1)pd - 2(m(\nu, j_\nu - 1) + n(\nu, j_\nu - 1) - 1),$$

$$n_2^\alpha := n(\nu, j_\nu)pd - 2(m(\nu, j_\nu) + n(\nu, j_\nu) - 1).$$

y la transformada estricta de S , en una vecindad de \mathbf{p}_α , está definida por:

$$S_\alpha = z_\alpha^2 + x_\alpha^{n_1^\alpha} y_\alpha^{n_2^\alpha} v_\alpha = 0$$

- Si $\nu = N$.

$$P := \frac{pq}{\delta}d - 2\left(\frac{p+q}{\delta} - 1\right)$$

$$Q_1 := mpd - 2(m+n-1)$$

$$\tilde{Q}_1 := \left(\frac{pq}{\delta} - nq\right)d - 2\left(\frac{p+q}{\delta} - (m+n+1)\right)$$

$$Q_2 := nqd - 2(m+n-1)$$

$$\tilde{Q}_2 := \left(\frac{pq}{\delta} - mp\right)d - 2\left(\frac{p+q}{\delta} - (m+n+1)\right).$$

En este caso la transformada estricta de la superficie, en una vecindad de ρ_{s_N} y $\tilde{\rho}$ respectivamente, está dada por:

$$\left. \begin{array}{l} N - \text{par} \\ N - \text{impar} \end{array} \right\} \begin{cases} S_{s_N} = z_{s_N}^2 + x_{s_N}^P y_{s_N}^{\tilde{Q}_1} \prod_{i=1}^l (y_{s_N}^\delta - a_i)^{d_i} = 0, \\ \tilde{S} = \tilde{z}^2 + \tilde{x}^{Q_1} \tilde{y}^P \prod_{i=1}^l (1 - a_i \tilde{x}^\delta)^{d_i} = 0. \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} N - \text{par} \\ N - \text{impar} \end{array} \right\} \begin{cases} S_{s_N} = z_{s_N}^2 + x_{s_N}^{\tilde{Q}_2} y_{s_N}^P \prod_{i=1}^l (1 - a_i x_{s_N}^\delta)^{d_i} = 0, \\ \tilde{S} = \tilde{z}^2 + \tilde{x}^P \tilde{y}^{Q_2} \prod_{i=1}^l (\tilde{y}^\delta - a_i)^{d_i} = 0. \end{cases}$$

Con las consideraciones anteriores, se sigue el siguiente resultado.

Lema 1.4. *Tras la secuencia de $\sum_{i=1}^N c_i$ transformaciones cuadráticas, la transformada estricta de S , en una vecindad de los puntos \mathbf{p}_α con coordenadas $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ tiene ecuación,*

$$S_\alpha = z_\alpha^2 + x_\alpha^{a_\alpha} y_\alpha^{b_\alpha} u_\alpha(x_\alpha, y_\alpha),$$

donde u_α es una unidad para todo $\alpha \neq \sum_{i=1}^N c_i$ y a_α, b_α enteros positivos, dados por las expresiones anteriores m_i^α, n_i^α según corresponda.

Diremos que $(S_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)$, es:

1. De tipo I, si ν es par y $\alpha \neq \sum_{i=1}^N c_i$;

2. De tipo II, si ν es impar y $\alpha \neq \sum_{i=1}^N c_i$;

3. De tipo III, si $\alpha = \sum_{i=1}^N c_i$.

Del Lema 1.4, los gérmenes de superficies del tipo I y II, son casi ordinarias, y su lugar singular, está dado por líneas proyectivas localmente definidas por $z_\alpha = x_\alpha = 0$, $z_\alpha = y_\alpha = 0$. Por otro lado, las superficies del tipo III, tienen lugar singular formado por la línea proyectiva, localmente dado por

$$\begin{cases} \tilde{z} = \tilde{y} = 0, & \text{si } N \text{ par;} \\ \tilde{z} = \tilde{x} = 0, & \text{si } N \text{ impar.} \end{cases}$$

junto con el conjunto de líneas $L_{\kappa i}$:

$$L_{\kappa i} = \begin{cases} \tilde{z} = 0 \\ \tilde{x} = x_{\kappa i} \end{cases} \quad N - \text{par} \qquad L_{\kappa i} = \begin{cases} \tilde{z} = 0 \\ \tilde{y} = y_{\kappa i} \end{cases} \quad N - \text{impar}$$

donde

$$x_{i\kappa} = \left| \frac{1}{a_i} \right|^{\frac{1}{\delta}} \exp(\tilde{\beta}_\kappa), \quad y_{i\kappa} = |a_i|^{\frac{1}{\delta}} \exp(\beta_\kappa).$$

$$\tilde{\beta}_\kappa = \frac{\tilde{\alpha}_i + 2\kappa\pi\sqrt{-1}}{\delta}, \quad \beta_\kappa = \frac{\alpha_i + 2\kappa\pi\sqrt{-1}}{\delta}.$$

$$\tilde{\alpha}_i = \arg\left(\frac{1}{a_i}\right), \quad \alpha_i = \arg(a_i).$$

para cada $i \in \{1, \dots, l\}$, $\kappa \in \{0, \dots, \delta - 1\}$.

Por otro lado, a cada cadena \mathcal{C}_i se le asocia el grafo dual G_i^d , cuyas componentes $d_\alpha := D_\alpha \cap S_\alpha$, forman una subcadena: $G_i^d : d_{s_{i-1}+1}, \dots, d_{s_i}$.

Para cada i par o impar tenemos que la primera (respectivamente la última) componente del grafo dual G_i^d , está unida a la última componente de G_{i-2}^d (respectivamente de G_{i-1}^d). En el último paso, se une d_{s_N} con $d_{s_{N-1}}$, según se muestra en las figuras 1.6, 1.7.

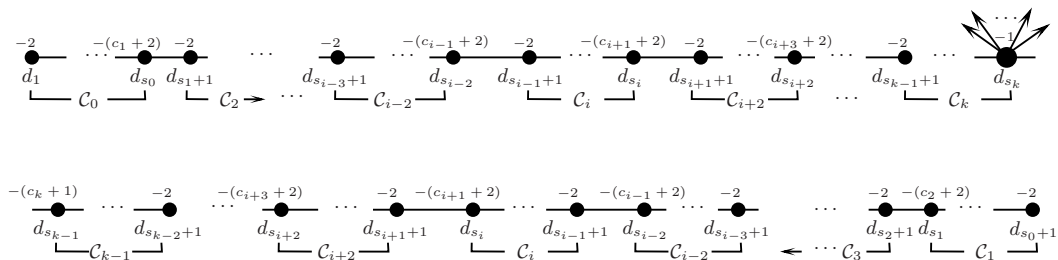


Figura 1.6: grafo dual: N-par

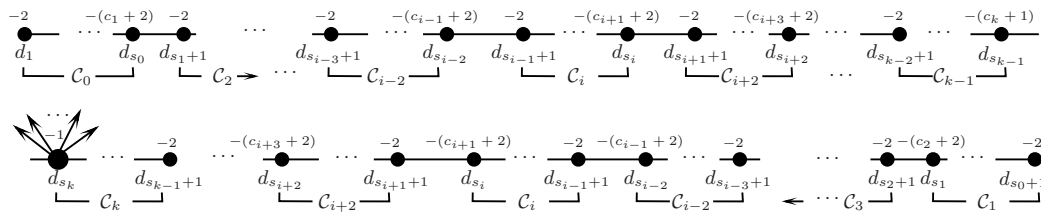


Figura 1.7: grafo dual: N-impar

Los enteros $-2, -(c_j + 2)$ representan la auto-intersección de d_α como curva contenida en la transformada estricta de $z = 0$. Además, $\text{Sam}(S') = \bigcup_{\alpha, i, k} d_\alpha \cup L_{i, k}$ tiene cruzamientos normales y $\text{ISam}(S') = \text{ISam}(S) = 2$, donde $S' = \cup S_\alpha$, es la transformada estricta de S después de las $k = \sum_{\nu=0}^N c_\nu$ transformaciones cuadráticas.

La **segunda etapa** de la desingularización de S , depende de la casuística de los enteros $m_i^\alpha, n_i^\alpha, P, Q_i, \tilde{Q}_i$ según la naturaleza de p, q y d . La casuística es repetitiva y la desingularización muy simple, como la de curvas planas, con centros de explosión las curvas excepcionales d_α . Analizamos los casos especiales y con detalle el caso N impar (el caso N par no presenta diferencias esenciales).

Caso i. Supongamos d par, entonces los enteros $m_i^\alpha, n_i^\alpha, P, Q_2, \tilde{Q}_2$, son pares. Del Lema 1.4, las superficies del tipo I, II y III son de la forma.

$$S_\alpha := z_\alpha^2 + x_\alpha^{a_\alpha} y_\alpha^{b_\alpha} u_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) = 0;$$

con $u_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ una unidad para todo $\alpha \neq s_N$, Los enteros a_α, b_α son pares; para todo α . La resolución inmersa de S_α , es obtenida después de $\frac{a_\alpha + b_\alpha}{2}$ transformaciones monoidales:

- $\frac{a_\alpha}{2}$ a lo largo de la línea $z_\alpha = x_\alpha = 0$ y
- $\frac{b_\alpha}{2}$ a lo largo de la línea $z_\alpha = y_\alpha = 0$, en las coordenadas antes definidas.

El orden (no único) en el que resolvemos las singularidades de S_α es el siguiente: primero, realizamos $\frac{P}{2}$ transformaciones monoidales a lo largo de d_{s_N} . Este proceso modifica, al mismo tiempo, a las curvas $d_{s_{N-1}}$ y $d_{s_{N-1}}$. Denotemos a estas modificaciones por $d'_{s_{N-1}}$ y $d''_{s_{N-1}}$ respectivamente. Además, existen vecindades $U, U_\alpha; \alpha = s_N$, con coordenadas locales $(\tilde{x}, \tilde{y}, \hat{t})$ y (x_α, y_α, t) en las que las superficies del tipo III están representadas por

$$\tilde{S}_\alpha := \left\{ (x_\alpha, y_\alpha, t) : t^2 + x_\alpha^{\tilde{Q}_2} \prod_{i=1}^l (1 - a_i x_\alpha^\delta)^{d_i} = 0 \right\} \subset U_\alpha,$$

$$\hat{S} := \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}, \hat{t}) : \hat{t}^2 + \tilde{y}^{Q_2} \prod_{i=1}^l (\tilde{y}^\delta - a_i)^{d_i} = 0 \right\} \subset U.$$

A continuación, realizamos $\frac{Q_2}{2}$ transformaciones monoidales, a lo largo de la curva $d'_{s_{N-1}}$. Tras este proceso, se modifica la curva $d_{s_{N-1}-1}$ a $d'_{s_{N-1}-1}$ y existen vecindades $\tilde{U}_\alpha, \tilde{U}$; $\alpha = s_{N-1}$, con coordenadas (x_α, y_α, t) , $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$, en las que las superficies de los tipos I y III, son representadas, respectivamente por

$$\tilde{S}_\alpha := \left\{ (x_\alpha, y_\alpha, t) : t^2 + y_\alpha^{m_2^\alpha} u_\alpha = 0 \right\} \subset \tilde{U}_\alpha,$$

$$\tilde{S} := \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) : \tilde{t}^2 + \prod_{i=1}^l (\tilde{y}^\delta - a_i)^{d_i} = 0 \right\} \subset \tilde{U}.$$

Ahora, realizamos $\frac{m_2^\alpha}{2}$ transformaciones monoidales a lo largo de $d'_{s_{N-1}-1}$. Tras este proceso hemos modificado la curva $d_{s_{N-1}-2}$ a $d'_{s_{N-1}-2}$, obteniendo representaciones locales de las superficies del tipo I:

$$\tilde{S}_\alpha := \left\{ (x_\alpha, y_\alpha, t) : t^2 + u_\alpha = 0 \right\},$$

$$\tilde{S}_{\alpha-1} := \left\{ (x_{\alpha-1}, y_{\alpha-1}, \tilde{t}) : \tilde{t}^2 + y_{\alpha-1}^{m_2^{\alpha-1}} u_{\alpha-1} = 0 \right\}.$$

En este momento, tenemos la resolución inmersa de S_α ; $\alpha = s_{N-1}$. A continuación procedemos a resolver $S_{\alpha-1}$ y repetimos el proceso para todo α con $\nu \in \{N-1, N-3, \dots, 2, 0\}$, obteniendo una resolución inmersa de las superficies del tipo I. Finalizamos esta etapa, repitiendo el proceso anterior para cada α con $\nu \in \{N-2, N-4, \dots, 3, 1\}$, obteniendo una resolución inmersa de las superficies del tipo II. Por otro lado, se ha construido un divisor excepcional, cuyas componentes son superficies regladas, que serán descritas en la sección 1.3.1.

La **tercera etapa** de la resolución, está dedicada a resolver las superficies del tipo III. Observe que después de la segunda etapa, estas superficies han sido “parcialmente” resueltas. En coordenadas adecuadas estas modificaciones son representadas por las ecuaciones

$$\tilde{S} = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) : \tilde{t}^2 + \prod_{i=1}^l (\tilde{y}^\delta - a_i)^{d_i} = 0 \right\} \subset \tilde{U},$$

$$\tilde{S}_\alpha = \left\{ (x_\alpha, y_\alpha, t) : t^2 + \prod_{i=1}^l (1 - a_i x_\alpha^\delta)^{d_i} = 0; \alpha = s_N \right\} \subset \tilde{U}_\alpha,$$

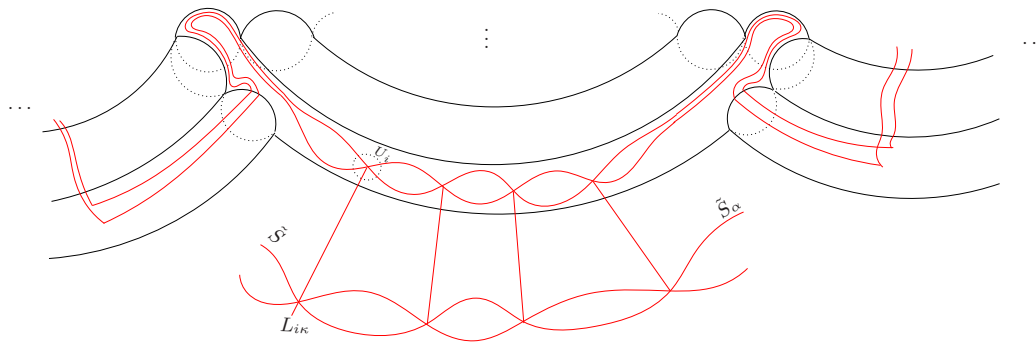


Figura 1.8: Superficies tipo III-caso i

Estas superficies tienen como lugar singular $\mathcal{L} = \bigcup L_{i\kappa}; d_i > 1$ y su resolución inmersa sigue el esquema de la reducción de singularidades de curvas planas cuspidales $(t^2 + Y^{d_i} = 0) \subset U_i \approx (\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, U_i es un entorno del punto de intersección de las líneas $L_{i\kappa}$ con el divisor excepcional (ver Fig. 1.8). Tras esta modificación, la componente del divisor excepcional que interseca a la superficie $\tilde{S} \cup \tilde{S}_\alpha$ es modificada. A esta modificación, en [BMN], se le llama superficie reglada no-minimal. Esta será descrita en la Sección 1.3.1.

Caso ii. Supongamos d impar. En este caso, tenemos las siguientes opciones:

- Si p, q son pares, entonces se sigue que $m_i^\alpha, n_i^\alpha, P, Q_2, \tilde{Q}_2$ son pares, por tanto la resolución de S_α es como en el caso i.
- Si p par y q impar (o viceversa). Entonces $P, \tilde{Q}_2, n_i^\alpha$ son pares, Q_2 es impar y m_i^α dependen de la naturaleza de los enteros $m(\nu, j_\nu)$.
- Si p, q son impares, entonces P es impar, Q_2, \tilde{Q}_2 dependen de los enteros mínimos m, n tales que $mp - nq = \delta$ y m_i^α, n_i^α dependen de la naturaleza de $m(\nu, j_\nu)$ y $n(\nu, j_\nu)$ respectivamente.

Nosotros destacamos los siguientes casos:

Caso ii.1 Suponga p par y q impar (o viceversa) y m_i^α alternados (respectivamente n_i^α alternados). Iniciamos el proceso de resolución tal como en el caso i: $\frac{P}{2}$ transformaciones monoidales a lo largo de d_{s_N} , a continuación resolvemos las superficies del tipo II tras $\frac{n_1^\alpha + n_2^\alpha}{2}$ transformaciones monoidales, tal como en el caso i. Ahora pasamos a resolver las superficies del tipo I. Por comodidad, explotamos las curvas d_α para las cuales n_i^α es par y finalmente realizamos $\frac{n_i^\alpha + 3}{2}$ transformaciones monoidales a lo largo de d_α para las cuales n_i^α es impar. Obtenemos así una resolución inmersa de las superficies del tipo I. La descripción del divisor excepcional en esta etapa, será descrito en la sección 1.3.1.

La tercera etapa de la resolución, en este caso, es dedicada a resolver las modificaciones de las superficies del tipo III, tras la segunda etapa. Estas modificaciones, en coordenadas adecuadas están dadas por:

$$\left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}, t) : \tilde{y}t^2 + \prod_{i=1}^l (\tilde{y}^\delta - a_i)^{d_i} = 0 \right\},$$

$$\left\{ (x_\alpha, y_\alpha, t) : t^2 + \prod_{i=1}^l (1 - a_i x_\alpha^\delta)^{d_i} = 0; \alpha = s_N \right\},$$

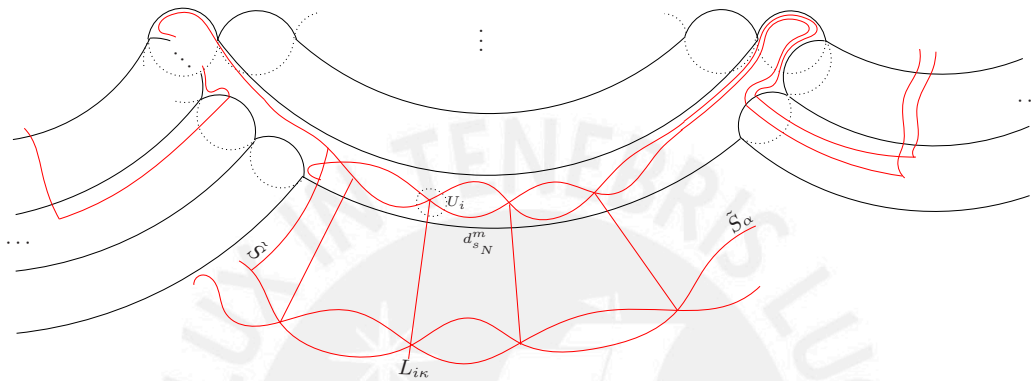


Figura 1.9: Superficies tipo III-caso ii.1

Estas superficies tienen como lugar singular $\mathcal{L} = \bigcup L_{ik}; d_i > 1$. Y su resolución inmersa sigue exactamente el esquema del caso i.

Caso ii.2 Suponga p y q impares, $Q_2, \tilde{Q}_2, m_i^\alpha, n_i^\alpha$ son impares. En este caso, para cada α con $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ realizamos, $\frac{a_\alpha + b_\alpha - 2}{2}$ transformaciones monoidales:

- $\frac{a_\alpha - 1}{2}$ a lo largo de la línea $x_\alpha = z_\alpha = 0$ y
- $\frac{b_\alpha - 1}{2}$ a lo largo de la línea $y_\alpha = z_\alpha = 0$ en las coordenadas antes definidas,

exactamente igual como en el caso i. Tras este proceso, existen coordenadas locales (x_α, y_α, t) tales que las transformadas estrictas de S_α representan superficies cónicas tangentes a los ejes x_α, y_α :

$$\tilde{S}_\alpha = \{(x_\alpha, y_\alpha, t) : t^2 + x_\alpha y_\alpha u_\alpha = 0\}.$$

A continuación realizamos, en cada sistema coordenado (x_α, y_α, t) , una transformación cuadrática con centro el origen de coordenadas. Las transformadas estrictas de \tilde{S}_α , en coordenadas adecuadas (ver Fig 1.10), vienen dadas por las ecuaciones:

$$z_{\alpha 1}^2 + y_{\alpha 1} u(x_\alpha, x_\alpha y_{\alpha 1}) = 0$$

$$z_{\alpha 2}^2 + x_{\alpha 2} u(x_{\alpha 2}, y_\alpha) = 0.$$

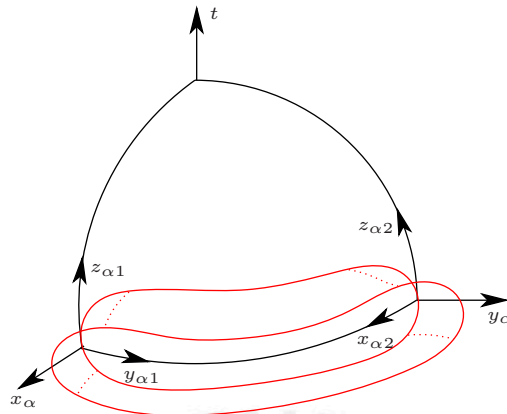


Figura 1.10

Notemos que ahora, las transformadas estrictas son tangentes a la línea proyectiva de ecuación local $x_\alpha = y_{\alpha 1} = 0$ (respectivamente a la línea proyectiva de ecuación local $y_\alpha = x_{\alpha 2} = 0$).

Con el fin de tener cruzamientos normales, es necesario realizar, en un orden adecuado, dos transformaciones monoidales a lo largo de la línea proyectiva, localmente dada por $z_{\alpha 1} = y_{\alpha 1} = 0$ (respectivamente $z_{\alpha 2} = x_{\alpha 2} = 0$). Obteniendo de esta manera una resolución inmersa de las superficies de tipo I y II.

La tercera etapa, en este caso, está dedicada a resolver las modificaciones de las superficies de tipo III después de la etapa anterior; que en coordenadas adecuadas (ver Fig.1.11) están representadas por:

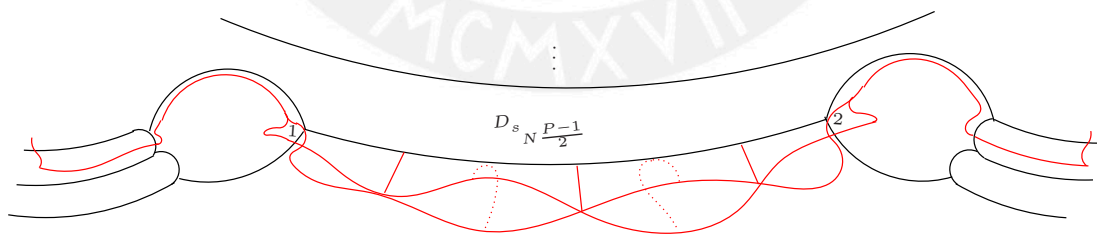


Figura 1.11: Modificación de Superficies tipo III, en la segunda etapa

$$S^1 := t^2 + x \prod_{i=1}^l (y^\delta - a_i)^{d_i} = 0$$

$$S^2 := t^2 + y \prod_{i=1}^l (1 - a_i x^\delta)^{d_i} = 0.$$

1.3. Superficies cuspidales casi-homogéneas.

57

La resolución inmersa de S , se obtiene después de resolver, con cruzamientos normales, las superficies S^1, S^2 .



1.3.1. Descripción del divisor excepcional

Describiremos el divisor excepcional E , producido en la desingularización de superficies cuspidales casi-homogéneas del tipo 1.1. Este divisor, es unión $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, donde cada E_i es unión de componente excepcionales irreducibles creado en la 1°, 2° y 3° etapa de la resolución. Cada E_i es unión de superficies racionales, birationalmente equivalentes a una superficie reglada sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. De [Har] (Proposición 2.2 pág. 370) y de [Gr] (Teorema 2.1), cualquier componente de E_i es de la forma $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n))$ para algún entero n . Habitualmente la superficie $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n))$ es denotado por Σ_n y llamada la n -ésima superficie de Hirzebruch. Una referencia general para el estudio de superficies regladas es [Har].

El divisor excepcional E_1 resulta de s_N transformaciones cuadráticas y es una unión

$$E_1 = \bigcup_{\alpha=1}^{s_N} D_{\alpha},$$

donde, cada D_{α} es de la siguiente forma:

- Para cada $\alpha = s_{\nu-1} + j_{\nu} \neq s_{\nu}, \nu \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. D_{α} es el resultado de la explosión, con centro un punto, de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Las fibras del morfismo inducido a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ son las transformaciones propias de las líneas pasando por el centro de explosión, así todas las fibras son isomorfas a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, la curva excepcional corta de manera transversal, en un único punto, a cada fibra y por tanto es una sección con autointersección -1 , en consecuencia (ver [Har, pág. 374])

$$D_{\alpha} \approx \Sigma_1 = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)).$$

- Las componentes $D_{s_{\nu}}$ para cada $\nu \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, resultan de realizar $c_{i+1} + 1$ transformaciones cuadráticas (explosiones de $c_{i+1} + 1$ puntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$). Después de realizar transformaciones elementales (ver [F, pág. 114]), obtenemos

$$D_{s_i} \approx \Sigma_{e_i} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(e_i)); \text{ para algún } e_i \in \mathbb{Z}.$$

- $D_{s_{N-1}}$ resulta de realizar c_N transformaciones cuadráticas (explosiones de c_N puntos en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$). Análogamente como en el item anterior

$$D_{s_{N-1}} \approx \Sigma_e = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(e)); \text{ para algún } e \in \mathbb{Z}.$$

- $D_{s_N} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

La construcción de E_2 resulta de una serie de transformaciones monoidales con centro las líneas $d_{\alpha} = D_{\alpha} \cap S_{\alpha} \approx \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Del Lema 1.4, para cada punto

$$\mathbf{p}_{\alpha} = D_{\alpha-1} \cap D_{\alpha} \cap \{z_{\alpha} = 0\}$$

existen coordenadas locales en una vecindad de \mathbf{p}_α , U_α , tal que

$$\pi^*(S) \cap U_\alpha = \left\{ (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) : z_\alpha^2 + x_\alpha^{a_\alpha} y_\alpha^{b_\alpha} u_\alpha = 0 \right\},$$

donde $u_\alpha \in \mathbb{C}\{x_\alpha, y_\alpha\}$ es una unidad, para todo $\alpha \neq s_N$.

Sea

$$\pi := \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_k : (M_1, E_1) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$$

el morfismo construido en la primera etapa de la resolución y denotemos por \tilde{E} a la transformada estricta por π del plano $z = 0$. Observe que la curva excepcional d_α , vista como una curva racional contenida en \tilde{E} es tal que $N_{d_\alpha|\tilde{E}} = \mathcal{O}(d_\alpha^2)$. Por otro lado, las curvas racionales d_α vistas en D_α son:

- a. Fibras de D_α , para cada $\alpha \neq s_\nu$, con $\nu \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ y por tanto

$$N_{d_\alpha|D_\alpha} = \mathcal{O}(0) =: \mathcal{O}.$$

Así,

$$N_{d_\alpha} := N_{d_\alpha|M_1} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(d_\alpha^2) = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2).$$

- b. Fibras, modificadas $c_{\nu+1} + 1$ veces, de D_{s_ν} para cada $\nu \in \{0, 1, \dots, N-2\}$ y por tanto

$$N_{d_{s_\nu}}|D_{s_\nu} = \mathcal{O}(-c_{\nu+1}).$$

Así,

$$N_{d_{s_\nu}} := N_{d_{s_\nu}|M_1} = \mathcal{O}(-c_{\nu+1}) \oplus \mathcal{O}(d_{s_\nu}^2) = \mathcal{O}(-c_{\nu+1}) \oplus \mathcal{O}(-c_{\nu+1} - 2).$$

- c. Fibra, modificadas c_N veces, de $D_{s_{N-1}}$ y por tanto

$$N_{d_{s_{N-1}}}|D_{s_{N-1}} = \mathcal{O}(1 - c_N).$$

Así,

$$N_{d_{s_{N-1}}} := N_{d_{s_{N-1}}|M_1} = \mathcal{O}(1 - c_N) \oplus \mathcal{O}(d_{s_{N-1}}^2) = \mathcal{O}(1 - c_N) \oplus \mathcal{O}(-1 - c_N).$$

- d. Una línea proyectiva de D_{s_N} , y por tanto

$$N_{d_{s_N}}|D_{s_N} = \mathcal{O}(1).$$

Así,

$$N_{d_{s_N}} := N_{d_{s_N}|M_1} = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(d_{s_N}^2) = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1).$$

Nota 1.3. Los resultados precedentes también se pueden verificar con cálculos locales y funciones de transición: se construye un entorno de d_α en M_1 , este estará compuesto por los primeros abiertos de π_α y $\pi_{\alpha+1}$, cada uno isomorfo a $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$, se calculan las funciones de transición respectivas (cambios de coordenadas) y nos fijamos en los ideales que definen d_α en cada abierto.

El divisor excepcional E_2 es unión

$$E_2 = \bigcup_{\alpha} \left(\bigcup_j D_{\alpha j} \right),$$

donde cada $D_{\alpha j}$ son superficies de Hirzebruch, cuya construcción depende de la naturaleza de los enteros positivos a_α, b_α . Analizamos los casos especiales (casos **i**, **ii.1**, **ii.2**):

Caso i. Por comodidad vamos a escribir $a_\alpha = 2l_1^\alpha$ y $b_\alpha = 2l_2^\alpha$.

En este caso se inicia la resolución, realizando $\frac{P}{2} = l_2^{s_N}$ transformaciones monoidales a lo largo de la curva excepcional $d_{s_N} \approx \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Después de esta modificación, $D_{s_{N-1}}$ y D_{s_N-1} son automáticamente transformados a $D'_{s_{N-1}}, D'_{s_N-1}$ respectivamente. Del mismo modo ocurre con las curvas excepcionales $d_{s_{N-1}}, d_{s_N-1}$, denotemos, a sus modificaciones, por $d'_{s_{N-1}}, d'_{s_N-1}$. Entonces $d'_{s_{N-1}}, d'_{s_N-1}$ tienen fibrados normales:

$$N_{d'_{s_{N-1}}} = \mathcal{O}(1 - c_N - l_2^{s_N}) \oplus \mathcal{O}(-1 - c_N).$$

$$N_{d'_{s_N-1}} = \mathcal{O}(-l_2^{s_N}) \oplus \mathcal{O}(-2).$$

Tras esta secuencia de transformaciones monoidales a lo largo de d_{s_N} obtenemos una torre de superficies regladas, $\Sigma_e := D_{s_N, j}; j \in \{1, \dots, l_1^{s_N}\}$, sobre d_{s_N} como se muestra en la Fig.1.12. En esta figura, la imagen esquemática:

$$\Sigma_n \quad \begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{array}$$

$-n$
 n

representa la superficie reglada Σ_n , las líneas horizontales denotan a las dos curvas distinguidas C_1 y $C_0 \subset \Sigma_n$ con autointersección $\pm n$ (ver [Har],[BMN], para más detalles).

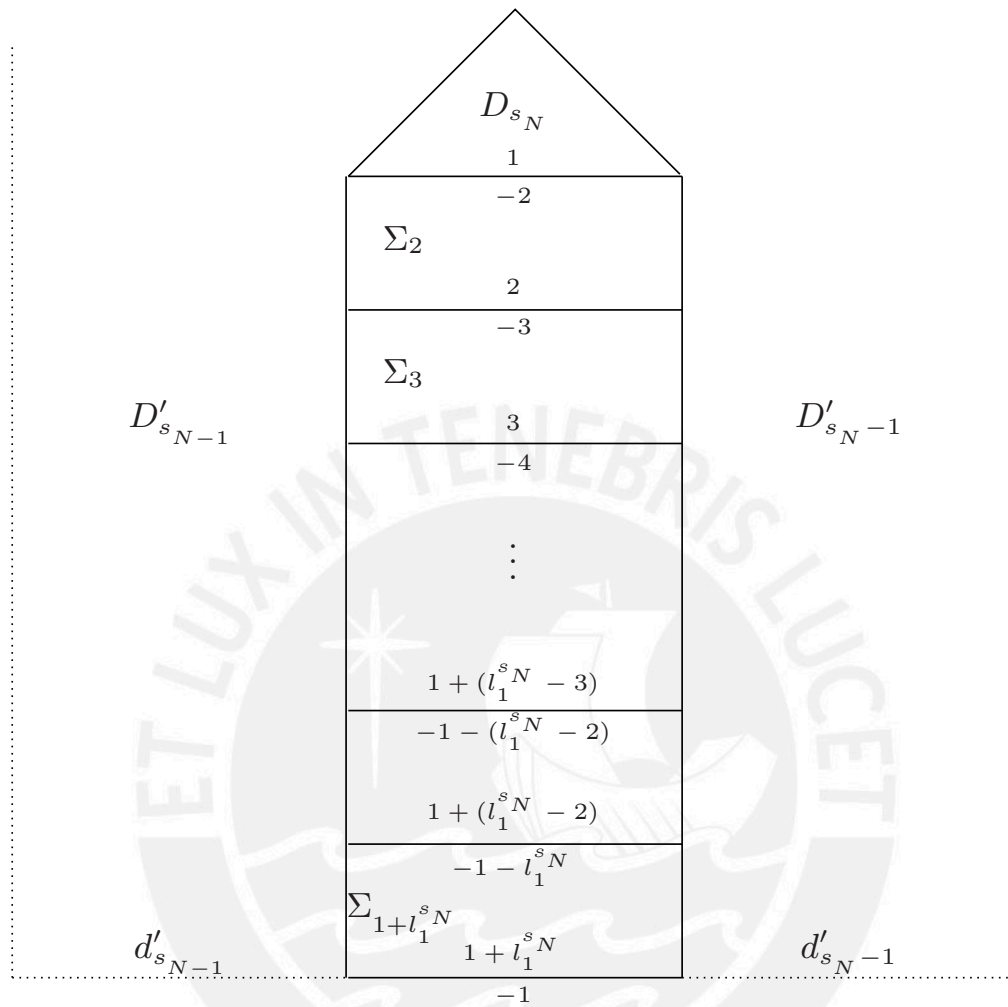


Figura 1.12: Torre de superficies tras $\frac{P}{2}$ transformaciones monoidales

Luego pasamos a resolver las singularidades transversales en cada extremo, el lado izquierdo corresponde a las superficies de tipo I y el lado derecho a las del tipo II, que tras l_2^α (respectivamente l_1^α) transformaciones monoidales a lo largo de las curvas d'_α correspondientes, son de la forma

$$\left\{ (x_\alpha, y_\alpha, t) : t^2 + y_\alpha^{b_\alpha} u_\alpha = 0 \right\}, \left\{ (x_\alpha, y_\alpha, t) : t^2 + x_\alpha^{a_\alpha} u_\alpha = 0 \right\}$$

respectivamente. Tras esta modificación $D_{\alpha-1}$ (respectivamente $D_{\alpha+1}$) son automáticamente transformados a $D'_{\alpha-1}$ (respectivamente $D'_{\alpha+1}$). Denotando por $d'_{\alpha-1}$ (respectivamente $d'_{\alpha+1}$) a la modificación de $d_{\alpha-1}$ (respectivamente $d_{\alpha+1}$). Obtenemos los fibrados normales:

$$N_{d'_{\alpha-1}} = \mathcal{O}(k_\alpha - l_2^\alpha) \oplus \mathcal{O}(e_\alpha), \quad N_{d'_{\alpha+1}} = \mathcal{O}(k_\alpha - l_1^\alpha) \oplus \mathcal{O}(e_\alpha),$$

donde $k_\alpha \in \{0, -c_{\nu+1}, 1 - c_N, 1\}$, $e_\alpha \in \{-2, -c_{\nu+1} - 2, -1 - c_N, -1\}$ según corresponda. Después de esta secuencia de transformaciones monoidales a lo largo de d'_α , obtenemos,

para cada α , una torre de superficies regladas sobre cada d'_α tal como se muestra en la figura 1.13. En la figura 1.14 se muestra la intersección entre Σ_n, Σ_m a lo largo de una curva distinguida codificada por la líneas horizontal en común, las fechas corresponden a la transformada estricta de la superficie $(S_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)$. Repetimos el proceso para todo α, ν .

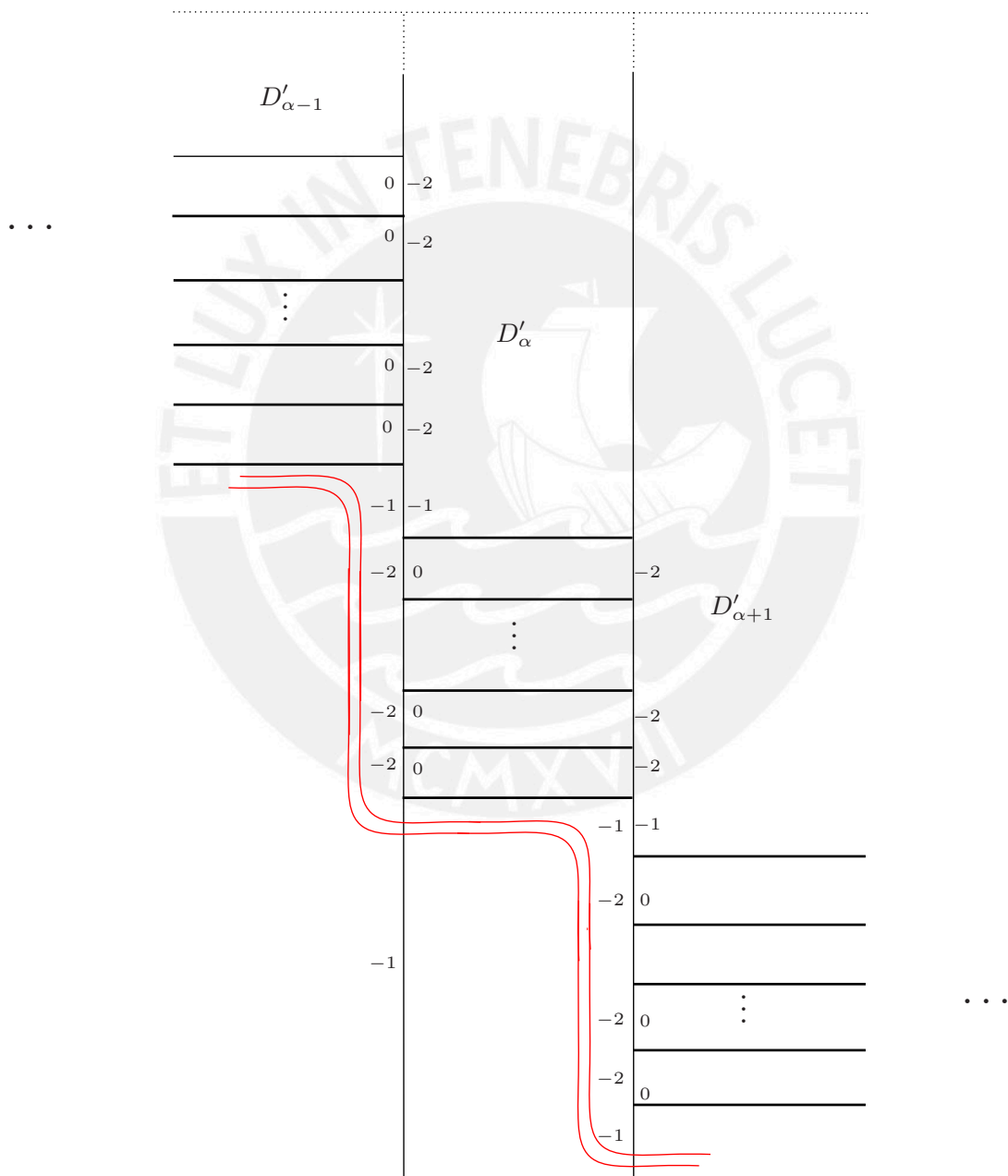


Figura 1.13: Pegado entre torres de superficies regladas Σ_* (tras la resolución del tipo II), caso $n_i^\alpha = 2l_i^\alpha$

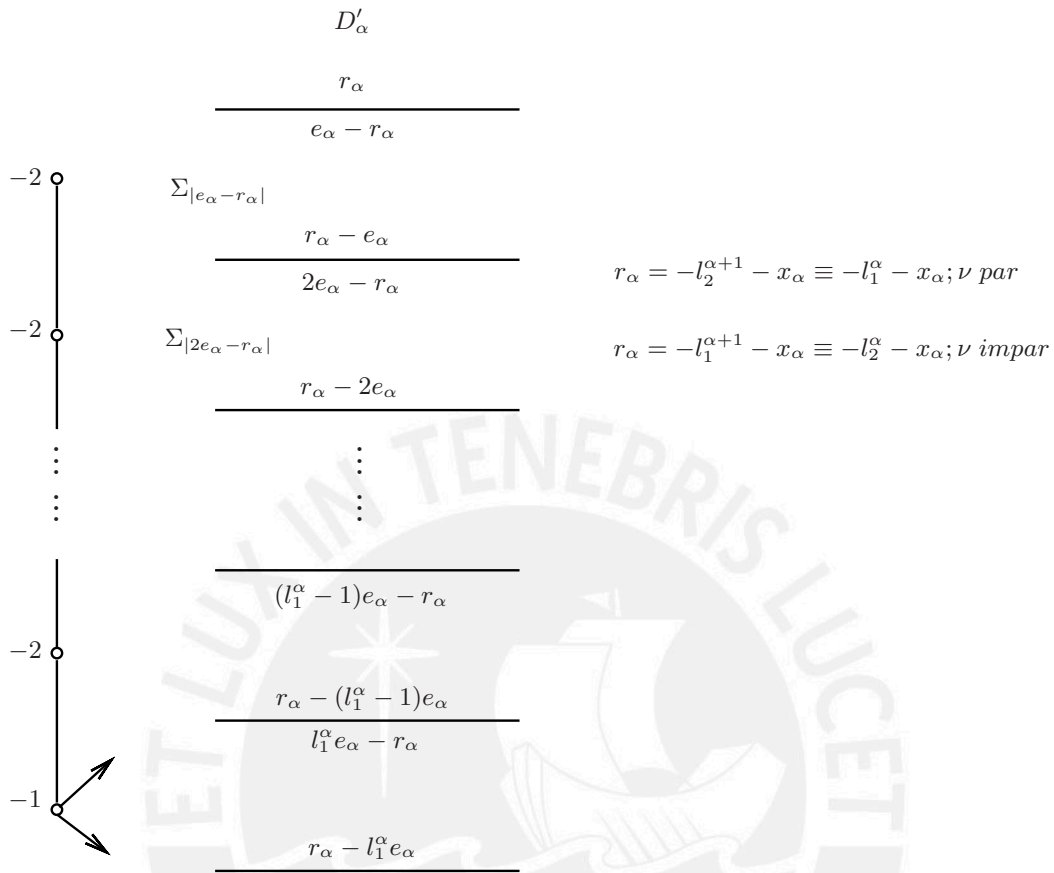


Figura 1.14: Torre de superficies regladas, tras l_1^α transformaciones monoidales

Observe que, tras las transformaciones monoidales a lo largo de las líneas proyectivas $d'_{s_{N-1}}$ y $d'_{s_{N-1}}$, $\Sigma_{1+l_2^{s_N}}$ es modificada a $\tilde{\Sigma}_{1+l_2^{s_N}}$ con curvas distinguidas \tilde{C}_0, \tilde{C}_1 verificando:

$$\begin{aligned} (\tilde{C}_0)^2 &= -1 - l_2^{s_N}; \\ (\tilde{C}_1)^2 &= 1 + l_2^{s_N} - l_1^{s_N-1} - l_1^{s_N}. \end{aligned}$$

Ahora, el lugar singular de las superficies de tipo III es $\mathcal{L} = \bigcup L_{i\kappa}; d_i > 1$ y su resolución inmersa sigue el esquema de la reducción de singularidades de curvas planas cuspidales $(t^2 + Y^{d_i} = 0) \subset U_i \approx (\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, U_i es un entorno del punto de intersección de las líneas $L_{i\kappa}$ con el divisor excepcional (ver Fig. 1.8). Tras la resolución de estas superficies, $\tilde{\Sigma}_{1+l_2^{s_N}}$ es modificada y denotada por $\tilde{\Sigma}_{1+l_2^{s_N}}^m$, con curvas distinguidas $\tilde{C}_0^m, \tilde{C}_1^m$ satisfaciendo:

$$\begin{aligned} (\widetilde{C}_0^m)^2 &= -1 - l_2^{s_N} = -1 - \frac{P}{2}. \\ (\widetilde{C}_1^m)^2 &= 1 + l_2^{s_N} - l_1^{s_{N-1}} - l_1^{s_N} - \sum_{\substack{d_i \text{ par} \\ i, \kappa}} \frac{d_i}{2} - \sum_{\substack{d_i \text{ impar} \geq 3 \\ i, \kappa}} \frac{d_i + 1}{2}; \\ &= 1 + \frac{P}{2} - \frac{Q}{2} - l_1^{s_N} - \sum_{\substack{d_i \text{ par} \\ i, \kappa}} \frac{d_i}{2} - \sum_{\substack{d_i \text{ impar} \geq 3 \\ i, \kappa}} \frac{d_i + 1}{2}. \end{aligned}$$

La nueva superficie $\widetilde{\Sigma}_{1+l_2^{s_N}}^m$ y la proyección $\pi^m : \widetilde{\Sigma}_{1+l_2^{s_N}}^m \rightarrow \mathbb{P}^1$ ($\pi_1 = \pi \circ$ secuencia de explosiones y $\pi : \Sigma_{1+l_2^{s_N}} \rightarrow \mathbb{P}^1$), se ve como en la figura 1.15. La descripción del divisor E_2 para el **Caso ii.1** es análogo.

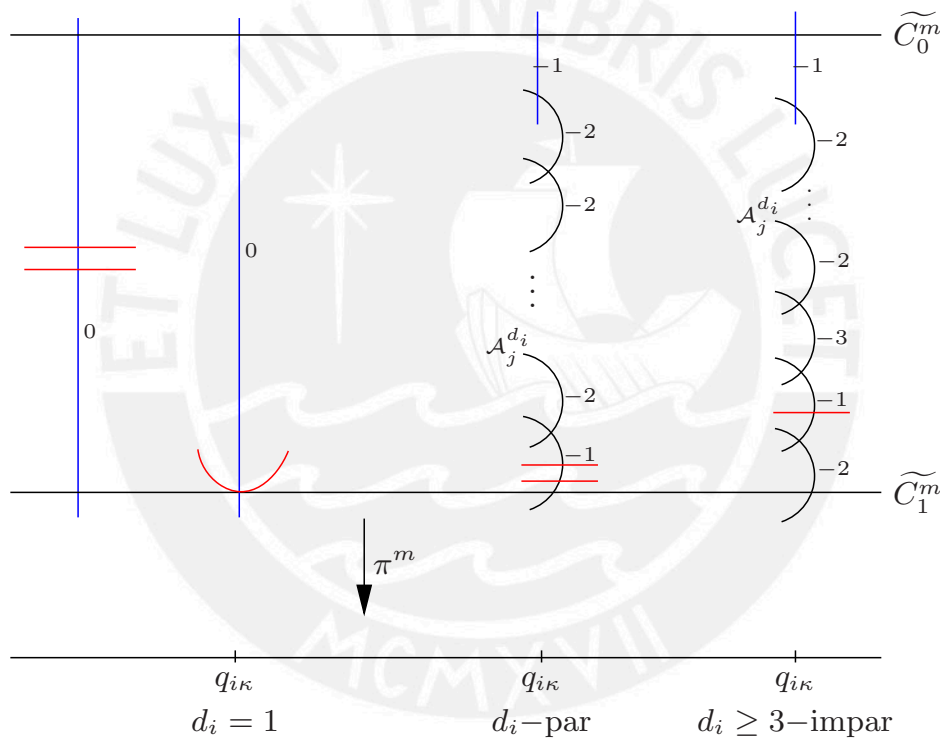


Figura 1.15: La superficie $\widetilde{\Sigma}_{1+l_2^{s_N}}^m$ (casos i y ii.1)

Observe que al resolver las superficies de tipo III, hemos generado el divisor E_3 , el cual es unión de divisores $\mathcal{A}_j^{d_i} \times \mathbb{C}$ topológicamente equivalente a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$, es decir

$$E_3 = \bigcup_i \mathcal{A}_i \times \mathbb{C},$$

donde $\mathcal{A}_i = \bigcup_j \mathcal{A}_j^{d_i}$.

En el **Caso ii.2**, tras la reducción de singularidades de las superficies del tipo III, $\pi^m : \widetilde{\Sigma}_e^m \rightarrow \mathbb{P}^1$, se ve como en la figura 1.16. En este caso la reducción de singularidades finaliza tras dos transformaciones monoidales a lo largo de \widetilde{C}_1^m .

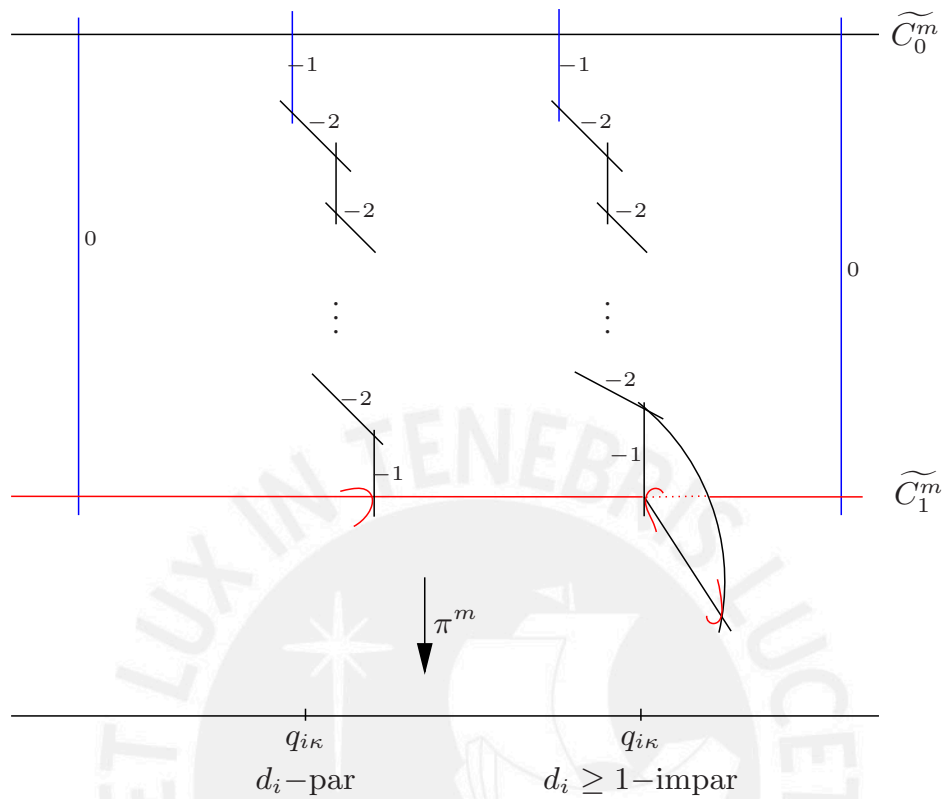


Figura 1.16: La superficie $\tilde{\Sigma}_e^m$ (caso ii.2)

1.4. Topología del complemento de una curva singular plana. Cálculo en casos particulares

Como parte del estudio de la holonomía proyectiva para una foliación cuspidal, tenemos necesidad de calcular posteriormente de manera explícita el grupo fundamental del complemento de una curva afín plana, por lo cual discutiremos en esta sección el método de Zariski-Van Kampen: este proporciona una presentación de dicho grupo, empleando la monodromía de trenzas, que introducimos más adelante.

Si $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ es una curva plana afín, llamaremos a $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C})$ (sin precisar el punto base) **el grupo de \mathcal{C}** . El estudio de los grupos de curvas planas, es un problema clásico que se remonta a los trabajos de O. Zariski, una prueba rigurosa se debe a Van Kampen [VK] (existen otros métodos propuestos por V.S. Kullikov e I. Shimada). En los años 80 y 90 Moishezon y Teicher [Moi], [Te] introducen la noción de monodromía de trenza, la cual es usada para recuperar la presentación de Van Kampen, obteniendo una versión moderna de este grupo. A continuación describiremos brevemente la monodromía de trenza.

Denotemos por

$$P^n = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_i \neq z_j \text{ si } i \neq j\}.$$

El grupo fundamental de este espacio, P_n , es el grupo de trenzas puras de n hilos. En P^n consideramos la relación de equivalencia: $(z_1, \dots, z_n) \sim (z'_1, \dots, z'_n)$ si y solo si existe $\sigma \in S_n$, grupo simétrico de orden n , con $z_i = z'_{\sigma(i)}$. El espacio cociente, P^n / \sim , es denotado por B^n y su grupo fundamental, denotado por $\mathbb{B}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$, es llamado **grupo de trenzas** de n hilos [Bi]. La proyección natural $P^n \rightarrow B^n$ es un recubrimiento topológico de $n!$ hojas, y en consecuencia, $\mathbb{B}_n / P_n \cong S_n$. Existe una descripción alternativa de este grupo: considere $\mathbb{C}[z]_n^1$ el espacio afín de los polinomios mónicos de grado n , el cual se identifica de manera natural con \mathbb{C}^n . Si Δ_n es el lugar discriminante, $\mathbb{C}^n \setminus \Delta_n \cong B^n$ (ver [Bi] para detalles). Esto nos permite dar una descripción explícita del grupo fundamental de $\mathbb{C}^n \setminus \Delta_n$.

Ahora, considere una curva afín plana $\mathcal{C} : (f(x, y) = 0)$, de grado n , y en posición general (es decir, cada fibra de la proyección vertical $\pi(x, y) = x$ contiene a lo más un punto singular o un punto tangente a la curva). Sea $\Delta_f = \{x_1, \dots, x_s\}$ el lugar discriminante de f , $\mathcal{L}_k = \pi^{-1}(x_k)$ y $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_s$.

La restricción

$$\rho := \pi|_{\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}} : \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Delta_f,$$

es una fibración localmente trivial, en virtud del Teorema de fibración de Ehresmann (ver [CH], Lemas 1.1, 1.3), con fibras isomorfas a $\mathbb{C}_n := \mathbb{C} \setminus \{n \text{ puntos}\}$. Denotemos por $\mathbb{C}_{n,p}$

1.4. Topología del complemento de una curva singular plana.

a la fibra $\pi^{-1}(p)$ para todo $p \in \mathbb{C} \setminus \Delta_f$. De [Ste] (17.3, 17.4), existe una secuencia exacta de grupos:

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}_{n,p}) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}) \xrightarrow{\rho_*} \pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f) \longrightarrow 1, \quad (1.3)$$

$\swarrow \scriptstyle s_*$
 $\searrow \scriptstyle s_*$

donde i_* , s_* son las aplicaciones inducidas en homotopía a partir de la inclusión y la sección de ρ respectivamente

$$i : \mathbb{C}_{n,p} \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}.$$

$$s : \mathbb{C} \setminus \Delta_f \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}.$$

Observe que i_* y s_* son inyectivas y se tiene que $\pi_1(\mathbb{C}_{n,p})$ es un subgrupo normal de $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L})$, mientras que $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f)$ no lo es. Entonces la secuencia exacta (1.3) implica que $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L})$ es el producto semi directo de $\pi_1(\mathbb{C}_{n,p})$ y $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f)$ (ver [Sc], III.4). Para precisar esto: fijemos un subconjunto $Y = \{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{C}$, consistiendo de n elementos diferentes. Sea $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disco cerrado suficientemente grande tal que Y esté contenido en su interior. Elegimos un punto $x \in \partial\Delta$, tome un pequeño disco D_i centrado en $t_i \in Y$ y que no contenga a otro elemento de Y , elija un punto $\hat{x}_i \in \partial D_i$. Considere un camino $\alpha_i \subset \mathbb{C} \setminus Y$ que une a \hat{x}_i y a x , denote por $\eta_{\hat{x}_i, D_i}$ al camino cerrado con base en \hat{x}_i que gira en sentido anti-horario a lo largo de ∂D_i . La clase de homotopía del lazo $\gamma_i := \alpha_i^{-1} \eta_{\hat{x}_i, D_i} \alpha_i$ es llamado un **meridiano** de t_i en $\pi_1(\mathbb{C} \setminus Y, x)$. Si el punto base es sobreentendido, entonces simplemente hablaremos de un meridiano de t_i en $\mathbb{C} \setminus Y$. Observe que el conjunto de meridianos de $t_i \in Y$ coincide con una clase de conjugación en $\pi_1(\mathbb{C} \setminus Y, x)$ completamente determinado por t_i . Por otro lado se conoce que una colección adecuada de n meridianos de $\mathbb{C} \setminus Y$ (uno por cada punto de Y) define una base de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus Y, x)$. Esta construcción de meridianos también es aplicable para el grupo fundamental del complemento de un divisor en una superficie (ver Fig.1.17).

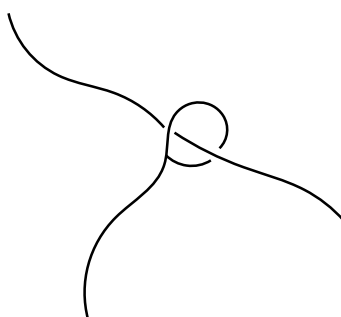


Figura 1.17: Un meridiano

Definición 1.10. Sea Δ y x como antes. Una **base geométrica** de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus Y, x)$ es una base ordenada $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus Y, x)$ consistiendo de meridianos tales que $\gamma_n \cdot \gamma_{n-1} \cdots \gamma_1$

es homotópico al lazo γ_* , camino cerrado de base en x que gira en sentido anti-horario a lo largo de $\partial\Delta$.

Podemos elegir bases geométricas de $\pi_1(\mathbb{C}_{n,p})$ y $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f)$ tal como se muestra en la Fig.1.18.

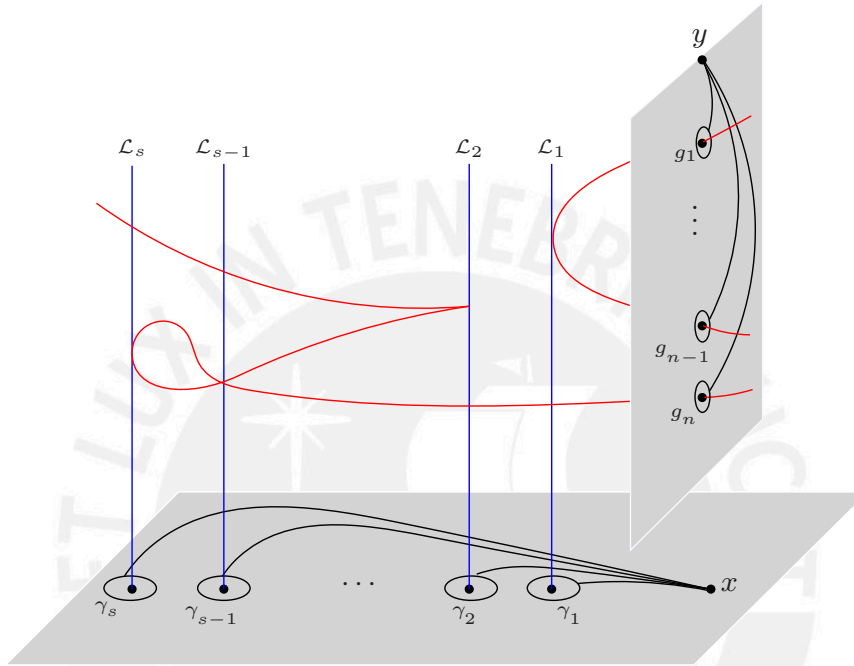


Figura 1.18: Elección de meridianos

Ahora, como ρ es una fibración localmente trivial con fibras difeomorfas a \mathbb{C}_n , el polinomio f induce una aplicación algebraica

$$\tilde{f} : \mathbb{C} \setminus \Delta_f \longrightarrow \mathbb{C}_n \cong \mathbb{C}[z]_n^1 \setminus \{P(z) : \Delta(P(z)) = 0\} \cong B^n$$

definida por $x_0 \mapsto \tilde{f}(x_0) = f(x_0, y)$. Esta aplicación induce el homomorfismo

$$\tilde{f}_* : \mathbb{F}_s \rightarrow \mathbb{B}_n$$

donde \mathbb{F}_s es el grupo libre de s generadores, que se identifica con el grupo fundamental de $\mathbb{C} \setminus \Delta_f$. Este homomorfismo es llamado la **monodromía de trenza**.

Considere la base geométrica (g_1, \dots, g_n) del grupo fundamental de la fibra $\mathbb{C}_{n,p}$, y $(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ base geométrica de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f)$. La acción de γ_i sobre g_j es tal que en $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L})$ tenemos $\gamma_i * g_j = \gamma_i^{-1} g_j \gamma_i$, que es un elemento de $\pi_1(\mathbb{C}_n)$ ya que es un subgrupo normal (ver [CH, Lema 2.4]). En consecuencia se tiene

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}) = \langle g_1, \dots, g_n, \gamma_1, \dots, \gamma_s : \gamma_i^{-1} g_j \gamma_i = \tilde{f}_*(\gamma_i)(g_j) \rangle$$

Por otro lado, dado cualquier base geométrica $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$ de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f)$, la s -upla $(\tilde{f}_*(\gamma_1), \tilde{f}_*(\gamma_2), \dots, \tilde{f}_*(\gamma_s)) \in (\mathbb{B}_n)^s$ es llamada una **factorización de monodromía de trenza**.

\mathbb{B}_n actúa de manera natural sobre \mathbb{F}_n por la derecha, de la manera siguiente

$$\Phi(g_j, \sigma_i) = g_j^{\sigma_i} := \begin{cases} g_{j+1}, & \text{si } j = i; \\ g_j g_{j-1} g_j^{-1}, & \text{si } j = i + 1; \\ g_j, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, n - 1$ y $j = 1, \dots, n$.

Bajo estas consideraciones y usando la secuencia (1.3), se tiene el siguiente resultado (ver [ACC, Prop. 3.4], [ACT, Prop. 1.10]).

Teorema 1.2. *Sea $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s) \in (\mathbb{B}_n)^s$ una factorización de monodromía de trenza y sea (g_1, g_2, \dots, g_n) una base geométrica de $\pi_1(\mathbb{C}_n)$. Entonces*

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}) = \langle g_1, \dots, g_n, \gamma_1, \dots, \gamma_s : g_j^{\rho_i} = \gamma_i^{-1} g_j \gamma_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n \rangle.$$

Como consecuencia, se sigue

Corolario 1.3 (Teorema de Zariski-Van Kampen [VK]). *Bajo las hipótesis anteriores se tiene la siguiente presentación:*

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}) = \langle g_1, \dots, g_n : g_j^{\gamma_i} = g_j, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n \rangle.$$

Demostración. Ver [ACT]. □

A continuación, describimos algunos casos que aparecen en nuestro objeto de estudio.

Ejemplo 1.4. Calcular el grupo de la curva $\mathcal{C} := y^2 + x^n = 0$.

En efecto. Consideremos la proyección $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\pi(x, y) = x$. Observe que $\Delta_f = \{0\}$, $\mathcal{L} = \pi^{-1}(0)$.

La restricción

$$\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Delta_f$$

es una fibración localmente trivial, con fibras isomorfas a $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C} \setminus \{2 \text{ puntos}\}$. Para todo $p \in \mathbb{C} \setminus \Delta_f$, se tiene la secuencia exacta (1.3).

Observe que $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f) = \langle \gamma \rangle = \mathbb{Z}$ y la factorización de monodromía de trenza $\in \mathbb{B}_2$, donde $\gamma(t) = \exp(2\pi it)$, es tal que la acción sobre los g_j viene dada por

$$\tilde{f}_*(\gamma)(g_j) = \begin{cases} g_1^{\sigma_1^n} = \begin{cases} (g_2 g_1)^{\frac{n}{2}} g_1 (g_2 g_1)^{-\frac{n}{2}}, & n - \text{par.} \\ (g_2 g_1)^{\frac{n-1}{2}} g_2 (g_2 g_1)^{-\frac{n-1}{2}}, & n - \text{impar} \end{cases} \\ g_2^{\sigma_1^n} = g_1^{\sigma_1^{n+1}}. \end{cases}$$

donde $\tilde{f}_*(\gamma) = \pi^{-1}(\gamma(t)) \cap \mathcal{C} = (t, \pm \exp(n\pi it)) := \sigma_1^n \in \mathbb{B}_2$.
Luego $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}) = \langle g_1, g_2, \gamma : g_j^{\sigma_1^n} = \gamma^{-1} g_j \gamma \rangle$ y en consecuencia

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}) = \{g_1, g_2 : g_j^{\sigma_1^n} = g_j\} = \{g_1, g_2 : \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$$

Donde

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} (g_2 g_1)^{\frac{n}{2}} g_1 = g_1 (g_2 g_1)^{\frac{n}{2}}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ (g_2 g_1)^{\frac{n-1}{2}} g_2 = g_1 (g_2 g_1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{cases} (g_2 g_1)^{\frac{n}{2}} g_2 = g_2 (g_2 g_1)^{\frac{n}{2}}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ (g_2 g_1)^{\frac{n+1}{2}} g_1 = g_2 (g_2 g_1)^{\frac{n+1}{2}}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

■

Ejemplo 1.5. Calcular el grupo de la curva $\mathcal{C} := y^2 + \prod_{j=1}^l (x - a_j)^{d_j} = 0$, con $a_j \in \mathbb{C}, a_j \neq a_i$ si $j \neq i$ y $d_j > 1$, para algún j .

En efecto. Considere la proyección $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \pi(x, y) = x$.
Observe que

$$\Delta_f = \{a_1, a_2, \dots, a_l\};$$

$$\mathcal{L} := \bigcup_{j=1}^l \mathcal{L}_j; \quad \mathcal{L}_j = \pi^{-1}(a_j).$$

La restricción

$$\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Delta_f$$

es una fibración localmente trivial, con fibras isomorfas a $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C} \setminus \{2 \text{ puntos}\}$. Para todo $p \in \mathbb{C} \setminus \Delta_f$, se tiene la secuencia exacta (1.3).

Sea $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_l \rangle$; con $\gamma_j = \alpha_j^{-1} \eta_{\hat{x}, D_j} \alpha_j$ meridianos de a_j . Observe que la factorización de monodromía de trenza $\in (\mathbb{B}_2)^l$ y es tal que la acción de los γ_i sobre los g_j está dada por $\tilde{f}_*(\gamma_i)(g_j) = g_j^{\sigma_1^{d_i}}$, donde

$$\tilde{f}_*(\gamma_i) = \pi^{-1}(\gamma_j) \cap \mathcal{C} \equiv \pi^{-1}(\eta_{\hat{x}, D_j}) \cap \mathcal{C} = \sigma_1^{d_j} := (t, \varepsilon_j \exp(d_j \pi it)) \in \mathbb{B}_2.$$

Observe que la monodromía a lo largo de α_j únicamente produce una contracción de los puntos sobre las fibras y la monodromía a lo largo de $\eta_{\hat{x}, D_i}$ es dada como en el ejemplo anterior para cada d_j . Luego

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}) = \langle g_1, g_2, \gamma : g_i^{\sigma_1^{d_j}} = \gamma^{-1} g_i \gamma; i = 1, 2; j = 1, \dots, l \rangle$$

1.4. Topología del complemento de una curva singular plana.

y en consecuencia

$$G := \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}) = \{g_1, g_2 : g_i^{\sigma_1^{d_j}} = g_i\} = \{g_1, g_2 : \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$$

Donde $\sigma_1^{d_j}, \mathcal{R}_j$ es como en el ejemplo anterior, para cada d_j .

Notemos que para todo $g \in G$ tenemos $g^{\sigma_1^{d_j}} = g, \forall j = 1, \dots, l$. Por otro lado, sea $r = \text{mcd}\{d_1, \dots, d_l\}$, entonces

$$r = \sum_{i=1}^l m_i d_i, m_i \in \mathbb{Z}$$

Luego, $g^{\sigma^b} = g$ para todo $b \in \langle d_1, \dots, d_l \rangle = r\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} g^{\sigma^b} &= g^{\sigma^{a_1 d_1 + \dots + a_l d_l}} \\ &= \left((g^{\sigma^{a_1 d_1}}) \dots \right)^{\sigma^{a_l d_l}} \\ &= \left(\left(\left((g^{\sigma^{d_1}}) \dots \right)^{\sigma^{d_1}} \right) \dots \right)^{\sigma^{a_l d_l}} = g \end{aligned}$$

En consecuencia

$$G = \langle g_1, g_2 : g_i^{\sigma_1^{d_i}} = g_i \ i = 1, 2 \rangle = \{g_1, g_2 : \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$$

Donde

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} (g_2 g_1)^{\frac{r}{2}} g_1 = g_1 (g_2 g_1)^{\frac{r}{2}}, & \text{si } r \text{ es par;} \\ (g_2 g_1)^{\frac{r-1}{2}} g_2 = g_1 (g_2 g_1)^{\frac{r-1}{2}}, & \text{si } r \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{cases} (g_2 g_1)^{\frac{r}{2}} g_2 = g_2 (g_2 g_1)^{\frac{r}{2}}, & \text{si } r \text{ es par;} \\ (g_2 g_1)^{\frac{r+1}{2}} g_1 = g_2 (g_2 g_1)^{\frac{r+1}{2}}, & \text{si } r \text{ es impar.} \end{cases}$$

■

Observación 1.2.

- Si r es impar, escribimos $r := 2k + 1$. Cambiando de generadores

$$\alpha := g_2 g_1, \quad \beta := (g_2 g_1)^k g_2,$$

con inversa

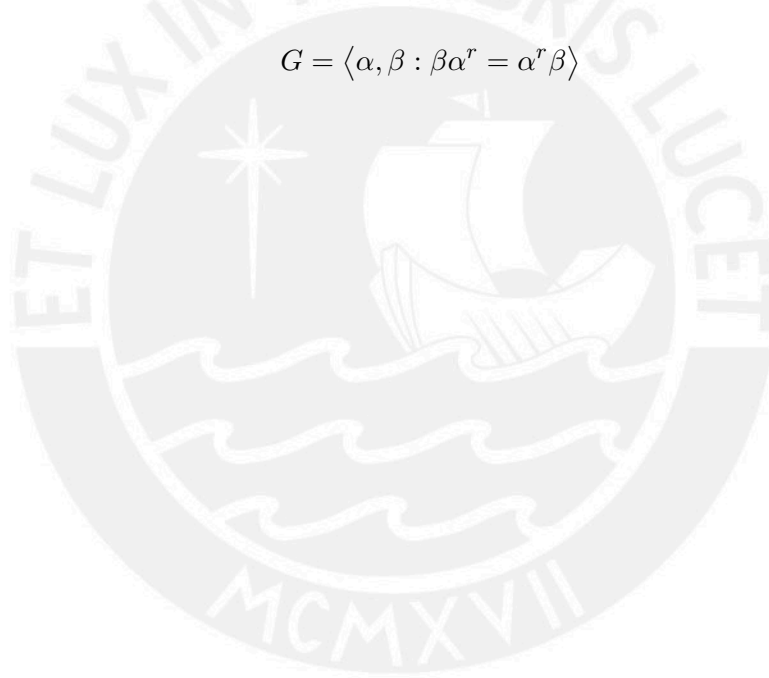
$$g_2 = \alpha^{-k} \beta, \quad g_1 = \beta^{-1} \alpha^{k+1},$$

obtenemos, con los nuevos generadores, $\mathcal{R}_1 \equiv \mathcal{R}_2 \equiv \alpha^k = \beta^2$. Luego

$$G = \langle \alpha, \beta : \alpha^r = \beta^2 \rangle$$

- Si r es par, escribimos $r := 2k$. Realizando el mismo cambio de generadores anterior, obtenemos la representación

$$G = \langle \alpha, \beta : \beta \alpha^r = \alpha^r \beta \rangle$$



Capítulo **2**

Singularidades de foliaciones en dimensión tres

Estamos interesados en el estudio local de las foliaciones holomorfas en torno a sus singularidades. En un espacio ambiente de dimensión dos, el tipo más sencillo de singularidades son aquellas definidas por un campo lineal. En otros casos, si la parte lineal del campo que define la foliación verifica ciertas condiciones (los autovalores se encuentran sobre el llamado dominio de Poincaré, o de Siegel) el campo es linealizable: existen coordenadas analíticas en las cuales el campo es lineal. Por otro lado a las foliaciones, en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, sin parte lineal se les puede aplicar un proceso de reducción de singularidades, que transforma a sus singularidades a un número finito de singularidades con parte lineal y de comportamiento relativamente simple.

En dimensión dos, una singularidad es *simple*, si la parte lineal del campo es no nula y tiene autovalores λ_1, λ_2 que satisfacen:

- $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}_+$.
- $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$ ó $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 = 0$ (silla nodo).

Por el Teorema de Seidenberg [Se] toda singularidad se puede reducir a singularidades simples mediante un número finito de explosiones. Las singularidades simples han sido estudiadas muchos años antes de la publicación del Teorema de Seidenberg, lográndose formas normales para muchos tipos (formas normales de Poincaré, Dulac y Siegel). Cuando el espacio ambiente es de dimensión tres, se conoce la existencia de una reducción de singularidades para foliaciones de codimensión uno: este resultado es debido a F. Cano y D. Cerveau [CC] en el caso no-dicrítico y por F. Cano [C2] en el caso dicrítico. No se conoce un resultado análogo en dimensión superior. El concepto de foliación dicrítica ha sido estudiado en [C1] y actualizado en [C3], como a continuación precisamos:

Sea \mathfrak{F} una foliación en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ definida por una 1-forma integrable ω . Una aplicación $\varphi : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, es llamada **genéricamente transversal** a \mathfrak{F} si $\varphi^*(\mathfrak{F}) \neq 0$; geoméricamente esto significa que la imagen de φ es no invariante (ver [C3]).

Por otro lado, una inmersión $i : (\mathbb{C}^l, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ se dice **transversal** a \mathfrak{F} si se cumplen las siguientes condiciones

1. $\text{Sing}(i^*\omega) = i^{-1} \text{Sing}(\omega)$;
2. $\text{codim Sing}(i^*\omega) = \text{mín} \left\{ l - \text{mín} \{0, \text{dim Sing}(\omega)\}, \text{codim Sing}(\omega) \right\}$.

Para más detalles ver [MM] y [CCD], con el convenio: $\text{dim}(\emptyset) = -1$ para el caso de foliaciones regulares. Cuando $l = 2$, la condición (2) es equivalente a $\text{Sing}(i^*\omega) \subseteq \{0\}$. Así, la inmersión $i : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ es transversal a \mathfrak{F} si y solo si

- $\nu_0(i^*\omega) = \nu_0(\omega)$, donde ν_0 denota el orden en $\mathbf{0}$;
- $\text{Sing}(i^*\omega) \subseteq \{0\}$.

Observe que cualquier inmersión transversal a \mathfrak{F} es genéricamente transversal, lo recíproco es falso.

Considere H un germen de hipersuperficie en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, definida por una ecuación reducida $f = 0$. H es una **separatriz** de \mathfrak{F}_ω si existe una 2-forma η tal que $\omega \wedge df = f \cdot \eta$. Esto significa que el conjunto regular de $f = 0$ es unión de hojas de la foliación \mathfrak{F}_ω .

Un germen de función analítica en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, h , es una **integral primera** de \mathfrak{F}_ω si $\omega \wedge dh = 0$.

En $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ una foliación holomorfa singular \mathfrak{F} , está dado por $\omega = 0$, donde ω una 1-forma holomorfa. Se dice que \mathfrak{F} es **dicrítica**, si tiene una infinidad de curvas analíticas invariantes (separatrices). Por otro lado, la reducción de singularidades de \mathfrak{F} permite dar una formulación equivalente del concepto de dicriticidad, en el sentido siguiente: la foliación \mathfrak{F} es dicrítica en el origen si y solo si existe una reducción de singularidades tal que el divisor excepcional tenga una componente irreducible genéricamente transversal.

En dimensión tres, una foliación holomorfa singular \mathfrak{F} , está dada por una 1-forma holomorfa ω tal que $\omega \wedge d\omega = 0$. En este caso, existen varias definiciones equivalentes de dicriticidad (ver [C1], [CC], [CMa]). Nosotros adoptamos la noción debida a F. Cano en [C3]: una foliación holomorfa singular \mathfrak{F} sobre $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ es llamada **dicrítica** si existe $\varphi : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, germen de aplicación analítica, tal que

1. $\varphi^*\mathfrak{F} = (dx = 0)$.
2. $\varphi(y = 0)$ es invariante para \mathfrak{F} .

Se dice que \mathfrak{F} es *estrictamente dicrítica* en el origen si existe un germen de aplicación analítica no invariante para \mathfrak{F} , $\varphi : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ tal que $\varphi^*\mathfrak{F}$ tiene una infinidad de curvas analíticas invariantes que se acumulan en el origen. Estos conceptos coinciden en el caso 2-dimensional y son equivalentes a decir que la foliación tiene infinidad de curvas analíticas invariantes en el origen (ver los detalles de esta equivalencia en [C3]).



2.1. Singularidades pre-simples y simples

En esta sección, describimos brevemente las singularidades pre-simples y simples de una foliación de codimensión uno en un espacio ambiente de dimensión tres, que generalizan las singularidades pre-simples y simples de dimensión dos. Definiremos las singularidades simples a partir de los modelos formales de las singularidades pre-simples. Estas son deducidas directamente de la Jordanización formal de álgebras conmutativas de campos de vectores, y de una forma normal formal de una 1-forma integrable. Las ideas principales son debidas a Martinet [M]. Para más detalles ver [C2, C1]. En [C2] se prueba, que después de un número finito de explosiones (composición de transformaciones cuadráticas y monoidales), las singularidades del transformado estricto de la foliación son simples.

A continuación describimos la noción de singularidades simples y pre-simples para espacios de dimensión arbitraria, siguiendo a [CC, C2].

Sea V una variedad compleja no singular de dimensión n . Denotemos por:

$\mathcal{O}_{V,\mathbf{p}}$ (respectivamente $\hat{\mathcal{O}}_{V,\mathbf{p}}$) el anillo local de gérmenes de funciones holomorfas (respectivamente su completado formal) sobre la variedad V en el punto $\mathbf{p} \in V$.

$\mathfrak{X}_{V,\mathbf{p}}$ (respectivamente $\hat{\mathfrak{X}}_{V,\mathbf{p}}$) el espacio de gérmenes de campos holomorfos (respectivamente formales) sobre V en el punto \mathbf{p} .

$\mathcal{M} := \mathcal{M}_{V,\mathbf{p}}$ (respectivamente $\hat{\mathcal{M}} := \hat{\mathcal{M}}_{V,\mathbf{p}}$) el ideal maximal del anillo $\mathcal{O}_{V,\mathbf{p}}$ (respectivamente del anillo $\hat{\mathcal{O}}_{V,\mathbf{p}}$).

Una **foliación holomorfa singular de codimensión uno** en V , es un objeto \mathfrak{F} dado por las colecciones $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, y $\{g_{\alpha,\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ tales que:

- (1) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es un cubrimiento abierto de V .
- (2) $\omega_\alpha = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{x}) dx_i$ es una 1-forma diferencial holomorfa integrable ($\omega_\alpha \wedge d\omega_\alpha = 0$) no idénticamente nula en U_α , tal que los coeficientes a_i no tienen factor común.
- (3) $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$ (función holomorfa no nula en $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$).
- (4) Si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, entonces $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta} \omega_\beta$ en $U_{\alpha\beta}$.

Para cada forma ω_α consideramos el conjunto singular dada por

$$\text{Sing}(\omega_\alpha) = \left\{ \mathbf{p} \in U_\alpha : \omega_\alpha(\mathbf{p}) = 0 \right\}.$$

Es claro que $\text{Sing} \omega_\alpha$ es un subconjunto analítico cerrado de codimensión al menos 2 de U_α de (3) y (4) se sigue que

$$\text{Sing}(\omega_\alpha) \cap U_{\alpha\beta} = \text{Sing}(\omega_\beta) \cap U_{\alpha\beta}.$$

Así la unión de los conjuntos $\text{Sing}(\omega_\alpha)$ es un subconjunto analítico cerrado de codimensión al menos 2 de V el cual lo denotaremos por $\text{Sing } \mathfrak{F}$, y será llamado el *conjunto singular* de \mathfrak{F} .

Nosotros adoptamos la notación \mathfrak{F}_ω , para referirnos a la foliación localmente generada por ω , en torno de un punto $\mathbf{p} \in V$.

Consideremos el subespacio vectorial

$$\mathcal{D}(\omega)(\mathbf{p}) = \left\{ \mathcal{X}(\mathbf{p}) : \mathcal{X} \in \mathfrak{X}_{V,\mathbf{p}} \text{ y } \omega(\mathcal{X}) = 0 \right\} \subset T_{\mathbf{p}}V.$$

La codimensión de $\mathcal{D}(\omega)(\mathbf{p})$, en $T_{\mathbf{p}}V$, es llamado el *tipo dimensional* de \mathfrak{F}_ω en \mathbf{p} y denotado por $t = \tau(\mathfrak{F}_\omega, \mathbf{p})$. Este número representa la mínima cantidad de coordenadas necesarias para expresar un generador local de \mathfrak{F} . Así, ω puede ser escrito únicamente en las primeras t coordenadas

$$\omega = \sum_{i=0}^t a_i(x_1, \dots, x_t) dx_i.$$

Sea $E \subset V$ un divisor con cruzamientos normales tal que las componentes irreducibles de E son no dicríticas, es decir, cada componente irreducible de E es invariante por \mathfrak{F} .

Denotemos por $e = e(E, \mathbf{p})$ el número de componentes irreducibles de E a través de \mathbf{p} . Claramente $e \leq t$. Así, podemos tomar coordenadas (x_1, \dots, x_n) en torno del punto \mathbf{p} y $A \subset \{1, \dots, t\}$ tal que

$$E = \left\{ \prod_{i \in A} x_i = 0 \right\}$$

y entonces ω es escrito como

$$\omega = \left(\prod_{i \in A} x_i \right) \left(\sum_{i \in A} b_i(x_1, \dots, x_t) \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i \in \{1, \dots, n\} - A} b_i(x_1, \dots, x_t) dx_i \right), \quad (2.1)$$

donde los coeficientes b_i son gérmenes de funciones sin factor común. Está presentación de ω , facilita el control de las singularidades en el problema de reducción [C2].

Definimos el *orden adaptado*:

$$\nu(\mathfrak{F}_\omega, E, \mathbf{p}) = \min\{\nu_{\mathbf{p}}(b_i) : i, \dots, t\},$$

donde $\nu_{\mathbf{p}}(b_i)$ es la multiplicidad algebraica de b_i en \mathbf{p} . Definimos también la *multiplicidad adaptada*

$$\mu(\mathfrak{F}_\omega, E, \mathbf{p}) = \min\{\nu_{\mathbf{p}}(b_i)\}_{i \in A} \cup \{\nu_{\mathbf{p}}(b_i) + 1\}_{i \notin A}.$$

Por definición tenemos las siguientes desigualdades

$$\nu(\mathfrak{F}_\omega, E, \mathbf{p}) \leq \mu(\mathfrak{F}_\omega, E, \mathbf{p}) \leq \nu(\mathfrak{F}_\omega, E, \mathbf{p}) + 1.$$

Definición 2.1. Una singularidad $\mathbf{p} \in \text{Sing}(\mathfrak{F}_\omega)$ es llamada **pre-simple** adaptada a E si y solo si una de las siguientes propiedades se cumple:

1. $\nu(\mathfrak{F}_\omega, E, \mathbf{p}) = 0$
2. $\nu(\mathfrak{F}_\omega, E, \mathbf{p}) = \mu(\mathfrak{F}_\omega, E, \mathbf{p}) = 1$ y existe un i tal que la parte lineal b_i^1 de b_i no depende únicamente de las variables $\{x_i : i \in A\}$.

Sea $\mathbf{p} \in \text{Sing}(\mathfrak{F}_\omega)$ una singularidad pre-simple adaptada a E y supongamos que el tipo dimensional de \mathfrak{F}_ω en \mathbf{p} es $n = \dim(V)$. Entonces E tiene o bien $n - 1$ ó n componentes irreducibles en torno de \mathbf{p} . Suponga además que $b_n(\mathbf{0}) \neq 0$, es fácil encontrar $n - 1$ gérmenes de campos de vectores formal del tipo

$$\mathcal{X}_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - c_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n},$$

$1 \leq i \leq n - 1$; $c_i(\mathbf{0}) = 0$, que son tangentes a \mathfrak{F}_ω . La condición de integrabilidad de ω permite que los gérmenes \mathcal{X}_i conmuten. Un calculo elemental muestra que

$$[\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j] = 0.$$

Considere por un momento, un campo vectorial formal $\mathcal{X} \in \hat{\mathcal{M}}_{\hat{\mathfrak{X}}_{V, \mathbf{p}}}$ y un entero $k \geq 1$, tenemos una derivación inducida:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^k : \mathcal{M}/\mathcal{M}^{k+1} &\rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}^{k+1} \\ f + \mathcal{M}^{k+1} &\mapsto D(f) + \mathcal{M}^{k+1}. \end{aligned}$$

De la igualdad $\hat{\mathcal{M}}/\hat{\mathcal{M}}^{k+1} = \mathcal{M}/\mathcal{M}^{k+1}$, no hay inconveniente en sustituir \mathcal{M} por $\hat{\mathcal{M}}$ en la definición de \mathcal{X}^k . Por la forma normal de Jordan, existe un único par de operadores lineales \mathcal{X}_S^k y \mathcal{X}_N^k , semisimple y nilpotente respectivamente, tal que

$$\mathcal{X}^k = \mathcal{X}_S^k + \mathcal{X}_N^k \quad \text{y} \quad [\mathcal{X}_S^k, \mathcal{X}_N^k] = \mathcal{X}_S^k \mathcal{X}_N^k - \mathcal{X}_N^k \mathcal{X}_S^k = 0$$

Así, \mathcal{X}_S^k y \mathcal{X}_N^k son derivaciones del espacio $\mathcal{M}/\mathcal{M}^{k+1}$ como un $\hat{\mathcal{O}}_{V, \mathbf{p}}$ -módulo. Por la unicidad de la descomposición de Jordan podemos tomar límites

$$\mathcal{X}_S = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{X}_S^k, \quad \mathcal{X}_N = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{X}_N^k.$$

y obtener campos vectoriales formales de \mathcal{X} en \mathbf{p} , es decir, $\mathcal{X}_S, \mathcal{X}_N \in \hat{\mathfrak{X}}_{V, \mathbf{p}}$ tal que

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_S + \mathcal{X}_N; \quad [\mathcal{X}_S, \mathcal{X}_N] = 0$$

- \mathcal{X} es llamado *semisimple* si $\mathcal{X}_N = 0$.
- \mathcal{X} es llamado *nilpotente* si $\mathcal{X}_S = 0$.

Proposición 2.1 ([CC], Proposición 1.1). *Sea $\mathcal{X} \in \hat{M}\hat{\mathcal{X}}_{V,\mathbb{P}}$ un campo vectorial semisimple y $n = \dim V$. Supongamos que existe una secuencia (x'_1, \dots, x'_s) , $1 \leq s \leq n$, \hat{M} -regular en $\hat{\mathcal{O}}_{V,\mathbb{P}}$ tal que*

$$\mathcal{X}(x'_i) = \lambda'_i x'_i, \quad \lambda'_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Entonces existe un sistema regular de parámetros (x_1, \dots, x_n) de $\hat{\mathcal{O}}_{V,\mathbb{P}}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(x_i) &= \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n \\ x_i &= x'_i; \quad \lambda_i = \lambda'_i, \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

De la Proposición 2.1, dado $\mathcal{X} \in \hat{M}\hat{\mathcal{X}}_{V,\mathbb{P}}$. Existe un sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) formales, que linealiza \mathcal{X}_S con autovalores $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ respectivamente. Adoptando las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} Q &= (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n, \quad x^Q = x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n} \\ \langle \lambda, Q \rangle &= \sum_{j=1}^n \lambda_j q_j, \quad |Q| = \sum_{j=1}^n q_j, \end{aligned}$$

podemos escribir, $\mathcal{X}_S = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Luego,

$$\left[\mathcal{X}_S, x^Q \frac{\partial}{\partial x_i} \right] (f) = \mathcal{X}_S \left(x^Q \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) - x^Q \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad (2.2)$$

Y en consecuencia

$$\left[\mathcal{X}_S, x^Q \frac{\partial}{\partial x_i} \right] (f) = (\langle \lambda, Q \rangle - \lambda_i) x^Q \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (2.3)$$

De esto se desprende que $x^Q \frac{\partial}{\partial x_i}$ representan a los autovectores de \mathcal{X}_S con autovalores $\langle \lambda, Q \rangle - \lambda_i$. Escribiendo \mathcal{X}_N como una serie formal

$$\mathcal{X}_N = \sum_{j=1}^n \sum_{|Q| \geq 1} a_{Q,j} x^Q \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Ahora, la condición $[\mathcal{X}_S, \mathcal{X}_N] = 0$, implica

$$0 = [\mathcal{X}_S, \mathcal{X}_N] = \sum_{j=1}^n \sum_{|Q| \geq 1} a_{Q,j} [\mathcal{X}_S, x^Q \frac{\partial}{\partial x_j}] = \sum_{j=1}^n \sum_{|Q| \geq 1} a_{Q,j} (\langle \lambda, Q \rangle - \lambda_j) x^Q \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.4)$$

entonces $a_{Q,j}(\langle \lambda, Q \rangle - \lambda_j) = 0$ para $j = 1, \dots, n$ y $|Q| \geq 1$ de esto tenemos que si $(\langle \lambda, Q \rangle - \lambda_j) \neq 0$ entonces $a_{Q,j} = 0$. Luego

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_S + \mathcal{X}_N = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|Q| \geq 1 \\ \langle \lambda, Q \rangle = \lambda_j}} a_{Q,j} x^Q \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (2.5)$$

Esta fórmula puede ser generalizada para álgebras abelianas finitamente generadas por campos vectoriales formales, (ver Proposición 1.4 en [CC]).

De lo anterior, cada \mathcal{X}_i es descompuesto en parte semisimple y nilpotente

$$\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{iS} + \mathcal{X}_{iN},$$

de tal manera que $[\mathcal{X}_{iS}, \mathcal{X}_{jS}] = 0$ y $[\mathcal{X}_{iS}, \mathcal{X}_{jN}] = 0$ para cualquier índice i, j . Además existe un sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) tal que la parte semisimple tiene una expresión diagonal (ver [M]):

$$\mathcal{X}_{iS} = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \lambda_i x_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

A partir de los $n - 1$ campos vectoriales anteriores, se reconstruyen un generador ω para la foliación \mathfrak{F} . El resultado es resumido en la siguiente proposición.

Proposición 2.2 ([C2]). *Sea \mathbf{p} una singularidad pre-simple de \mathfrak{F} adaptada a E de tipo dimensional t . Entonces existe un sistema formal de coordenadas (x_1, \dots, x_t) en \mathbf{p} tal que $E \subset \left(\prod_{i=1}^t x_i \right)$ y un generador ω de \mathfrak{F} , el cual es escrito en una de las siguientes formas*

A. *Existen números complejos $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$, $i = 1, \dots, t$ tal que*

$$\omega = \left(\prod_{i=1}^t x_i \right) \left(\sum_{i=1}^t \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} \right).$$

B. *Existe un entero $k \geq 1$, una k -upla $(p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{N}^k$, números complejos $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, t$ con $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$ para $i = k + 1, \dots, t$, y una serie formal no nula de una variable $\Phi(T)$, con $\Phi(0) = 0$ tal que*

$$\omega = \left(\prod_{i=1}^t x_i \right) \left(\sum_{i=1}^k p_i \frac{dx_i}{x_i} + \Phi(x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k}) \sum_{i=2}^t \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} \right).$$

C. *Existe un entero $k \geq 2$, una $(k - 1)$ -upla $(p_2, \dots, p_k) \in \mathbb{N}^{k-1}$, y números complejos $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 2, \dots, t$, con $\lambda_t \neq 0$ y $\lambda_i \neq 0$ para $i = k + 1, \dots, t$ tal que*

$$\omega = \left(\prod_{i=2}^t x_i \right) \left(dx_1 - x_1 \sum_{i=2}^k p_i \frac{dx_i}{x_i} + x_2^{p_1} \cdots x_k^{p_k} \sum_{i=2}^t \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} \right).$$

Definición 2.2. Sea \mathbf{p} una singularidad pre-simple de \mathfrak{F} adaptada a E , de tipo dimensional t . \mathbf{p} es llamada una singularidad **simple** de \mathfrak{F} adaptada a E si y solo si estamos en el caso A ó B de la Proposición 2.2 y el vector $\lambda = (\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_t)$ es estrictamente no resonante en el sentido siguiente

$$\sum_{j=k+1}^t \varphi(j)\lambda_j \neq 0$$

para cualquier función distinto de cero $\varphi : \{k+1, \dots, t\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ (ver [C1, pág. 1000]).

Sea $\mathbf{p} \in \text{Sing}(\mathfrak{F}_\omega)$ una singularidad simple de \mathfrak{F} adaptada a E de tipo dimensional t , se tiene [C1]:

- Si $e = t$ entonces, las componentes irreducibles de E son las únicas separatrices (hipersuperficies integrales) de \mathfrak{F} en \mathbf{p} . En este caso \mathbf{p} es llamado *esquina*.
- Si $e = t - 1$ entonces, existe exactamente una hipersuperficie transversal formal \hat{H} en \mathbf{p} tal que $E \cup \hat{H}$ tiene cruzamientos normales, y las únicas separatrices de \mathfrak{F} en \mathbf{p} son \hat{H} y las componentes irreducible de E . En este caso \mathbf{p} es llamado *traza*.
- Las singularidades simples son invariantes por explosiones con centros permitidos.

2.2. Hipersuperficies generalizadas

La noción de *curva generalizada* fue introducida por C. Camacho, A. Lins Neto y P. Sad en [CLS]: foliación holomorfa singular de codimension uno en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ que no admite sillan-nodos en su reducción de singularidades. Sea $(f = 0)$ la ecuación analítica del conjunto de separatrices de una curva generalizada \mathfrak{F} , y ω la 1-forma que genera \mathfrak{F} . En [CLS] demuestran, para el caso no dicrítico:

(1). $\nu_0(\omega) = \nu_0(df)$;

(2). La reducción de singularidades de \mathfrak{F} coincide con la reducción de $(f = 0)$.

En el caso dicrítico, la condición (1) anterior, tiene la siguiente expresión (ver [Ge], [He], [CaCo])

$$\nu_0(\omega) = \nu_0(S) - 1 + \sum_{D \in \mathcal{D}, \nu_E(D) \geq 2} (2 - \nu_E(D)) m(D),$$

donde S es la curva de separatrices que intersecan a los divisores no dicríticos, tras la reducción de singularidades, \mathcal{D} es el conjunto de divisores dicríticos del divisor excepcional E , $\nu_E(D)$ es la valencia de D en E , es decir, el número de componentes D' con $D' \neq D$ tal que $D \cap D' \neq \emptyset$, y $m(D)$ es la multiplicidad en el origen de una curva cuyo transformado estricto, por la reducción de singularidades, es lisa y transversal a D en un punto no singular de E .

Además, todas las curvas invariantes formales de una curva generalizada son convergentes, ya que la existencia de una curva invariante no convergente implica la aparición de sillan-nodos en la reducción de singularidades.

Cuando el espacio ambiente es tres, en el caso no dicrítico P. Fernández y J. Mozo usan la terminología de superficie generalizada y demuestran que la reducción de singularidades de una superficie generalizada coincide con una reducción de singularidades del conjunto de su separatriz [FM2]. Si el espacio ambiente es $n > 3$, la noción de genéricamente transversal y el de no degenerada transversa debido a [MM] junto con un trabajo de existencia de separatriz, debido a [CMa], permiten demostrar que el resultado en [FM2] se sigue verificando.

Aunque en este trabajo nos interesan las singularidades de foliaciones sobre espacios ambientes de dimensión tres, describiremos la noción de hipersuperficie generalizada para espacios de dimensión arbitraria. Esta noción ha sido introducida en [FMN], cuyos resultados se reproducirán aquí.

Definición 2.3. Sea \mathfrak{F} una foliación holomorfa de codimension uno definida por una 1-forma integrable ω in $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$. Diremos que \mathfrak{F} es una *hipersuperficie generalizada* si se satisfacen las siguientes condiciones

1. \mathfrak{F} es no dicrítica.
2. Para cada aplicación $\varphi : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, genéricamente transversal a \mathfrak{F} , $\varphi^*\mathfrak{F}$ es una curva generalizada.

Lema 2.1. Sea \mathfrak{F} una hipersuperficie generalizada generada por una 1-forma holomorfa ω y $S := (f = 0)$ la ecuación reducida del conjunto de sus separatrices. Entonces $\nu_{\mathbf{0}}(\omega) = \nu_{\mathbf{0}}(df)$.

Demostración. Dada una inmersión $i : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ transversal a \mathfrak{F} . De la definición 2.3, $i^*\mathfrak{F}$ es curva generalizada con $(f \circ i = 0)$ como separatriz. Debido a [CC] y [CMa], cualquier separatriz de $i^*\mathfrak{F}$ se extiende a una separatriz de \mathfrak{F} . Por transversalidad se sigue

$$\nu_{\mathbf{0}}(\omega) = \nu_{\mathbf{0}}(i^*\omega).$$

Como $i^*\mathfrak{F}$ es curva generalizada, entonces

$$\nu_{\mathbf{0}}(i^*\omega) = \nu_{\mathbf{0}}(d(f \circ i)) = \nu_{\mathbf{0}}(df).$$

Así, $\nu_{\mathbf{0}}(\omega) = \nu_{\mathbf{0}}(df)$. □

Lema 2.2. Sea \mathfrak{F} una hipersuperficie generalizada en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$. Si \mathfrak{F} tiene exactamente n hipersuperficies regulares transversales como separatriz, entonces \mathfrak{F} es simple.

Demostración. Por hipótesis, podemos elegir coordenadas locales tales que el conjunto de separatrices de \mathfrak{F} está dado por

$$S := \left(\prod_{i=1}^n x_i = 0 \right).$$

Entonces \mathfrak{F} está generada por una 1-forma

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{dx_i}{x_i} \right), \quad (2.6)$$

donde $f_i, a_i \in \mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Dada cualquier inmersión transversal a \mathfrak{F} en torno del origen, $i : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, $i^*\mathfrak{F}$ es una curva generalizada con n curvas regulares transversales como separatriz, así $\nu_{\mathbf{0}}(i^*\omega) = n - 1$, y además

$$\nu_{\mathbf{0}}(i^*\omega) = \nu_{\mathbf{0}}(\omega) = n - 1. \quad (2.7)$$

De (2.6) y (2.7) se sigue, $\nu_{\mathbf{0}}(f_i) = n - 1$ para algún i , así $\nu_{\mathbf{0}}(a_i) = 0$ para algún i y por tanto el origen es una singularidad pre-simple. Además tenemos que el origen es una esquina. Por otro lado, la hipótesis de la no dicriticidad de \mathfrak{F} , implica la no resonancia estricta de la singularidad, por tanto $\mathbf{0}$ es simple (Ver [C2, Def. 13]).

Otra forma de ver esto es: dada cualquier inmersión transversal a \mathfrak{F} ,

$$i_{\mathbf{p}} : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{p}),$$

en torno de un punto $\mathbf{p} \in \text{Sing}(\mathfrak{F})$, con $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, entonces $i_{\mathbf{p}}^*(\mathfrak{F})$ es una curva generalizada con $n - 1$ curvas regulares transversales como separatriz, por tanto

$$\nu_{\mathbf{0}}(i^*\omega) = n - 2.$$

Luego por transversalidad se tiene

$$\nu_{\mathbf{0}}(i^*\omega) = \nu_{\mathbf{p}}(\omega) = n - 2. \tag{2.8}$$

Por otro lado, en torno de \mathbf{p} , \mathfrak{F} está generado por una 1-forma $\omega_{\mathbf{p}}$

$$\omega_{\mathbf{p}} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \tilde{x}_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{a}_i \frac{d\tilde{x}_i}{\tilde{x}_i} \right).$$

Entonces $\nu_{\mathbf{0}}(\tilde{a}_i) = 0$ para algún $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ y en consecuencia \mathbf{p} es una singularidad pre-simple.

Ahora tomamos una inmersión transversal a \mathfrak{F} en torno de un punto $\mathbf{q} \in \text{Sing}(\mathfrak{F})$ cerca de \mathbf{p} . Prosiguiendo como antes, \mathbf{q} es una singularidad pre-simple.

Por recurrencia, secciones transversales en torno de puntos \mathbf{p} cerca del origen son simples y por tanto, el origen es singularidad simple de \mathfrak{F} . \square

Observación 2.1. *La condición de no dicriticidad en el Lema 2.2, permite pasar de pre-simple a simple. Lo que no ocurre en el ejemplo siguiente: para $n = 3$ la foliación \mathfrak{F} generada por la 1-forma ω*

$$\omega = \frac{dx}{x} + p \frac{dy}{y} - (1 + p) \frac{dz}{z},$$

donde p es un número racional. El origen es una singularidad pre-simple, además es una esquina, sin embargo no podemos concluir que sea simple (no satisface la condición de no resonancia estricta). Este ejemplo es debido a F. Cano.

Teorema 2.1. *Sea \mathfrak{F} una hipersuperficie generalizada en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, y $S := (f = 0)$ la ecuación reducida del conjunto de sus separatrices. Dado $\pi : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, el morfismo de una resolución de singularidades inmersa de S , entonces $\pi^*(\mathfrak{F})$ tiene singularidades simples adaptadas al divisor E .*

Demostración. Sea

$$\pi : (M_n, D_n) \xrightarrow{\pi_n} (M_{n-1}, D_{n-1}) \longrightarrow \dots \xrightarrow{\pi_1} (M_0, \mathbf{0}).$$

Con $(M_0, \mathbf{0}) = (U, \mathbf{0}) \subset (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, una reducción de singularidades de S . Después de esto, en M_n tenemos la foliación $\mathfrak{F}_n = \pi^*(\mathfrak{F})$, transformado estricto de \mathfrak{F} por π . Cualquier $\mathbf{p} \in \text{Sing}(\mathfrak{F}_n)$ se encuentra en la intersección de por lo menos dos hipersuperficies H_i regulares invariantes por \mathfrak{F}_n .

Sea $\mathbf{p} \in \bigcap_{i=2}^k H_i$ para cada $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ e $i_{\mathbf{p}} : \mathcal{P} \simeq (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \mathbf{p})$ una inmersión, en torno de \mathbf{p} , transversal a \mathfrak{F}_n , $i^*\mathfrak{F}_n$ tiene k curvas regulares transversales como separatriz ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$, cuando $k = n$). Por el Lema 2.2, \mathbf{p} es simple de tipo dimensional k y por tanto \mathfrak{F}_n es simple. \square



2.3. Forma normal de foliaciones con separatriz cuspidal pre-fijada

Dedicamos esta sección a la determinación de una expresión en coordenadas adecuadas, que llamaremos forma pre-normal, de las foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$ de tipo superficie generalizada, que admiten determinadas superficies algebraicas como conjunto invariante.

Daremos una expresión explícita del germen de 1-forma holomorfa que define a esta familia de foliaciones, y como alternativa discutiremos el caso donde la superficie es casi-homogénea. Como una aplicación, en el Capítulo 3, estos tipos de foliaciones admitiendo como separatriz a ciertas superficies cuspidales casi homogéneas de tipo genérico son caracterizadas.

Aunque estemos interesados en el caso 3-dimensional, en este capítulo los resultados son dados de manera general (dimensión arbitraria).

Generalizando la noción 2-dimensional de foliaciones cuspidales, en dimensión arbitraria tenemos la siguiente definición:

Definición 2.4. Una foliación, \mathfrak{F} , en $(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0})$ es llamada **foliación cuspidal**, si \mathfrak{F} admite separatriz definida, en coordenadas apropiadas, por una hipersuperficie cuspidal y además es de tipo hipersuperficie generalizada.

Estamos interesados en encontrar una forma pre-normal para foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0})$ de tipo hipersuperficie generalizadas, con una separatriz analíticamente equivalente a $z^2 + \varphi(\mathbf{x}) = 0$; $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. La diferencia con el caso 2-dimensional es la condición de integrabilidad: mientras que una 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ define un germen de foliación. En dimensión superior la condición de integrabilidad de Frobenius $\omega \wedge d\omega = 0$ no es trivial. Esta restricción será tratada desde el punto de vista geométrico, utilizando un resultado de Frank Loray [Lo2].

Un germen de foliación holomorfa \mathfrak{F}_ω , de codimension 1 en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, es definido por una 1-forma holomorfa

$$\omega = \sum_{i=1}^n A_i dx_i$$

donde los $A_i \in \mathcal{O}_n$, satisfaciendo la condición de integrabilidad de Frobenius: $d\omega \wedge \omega = 0$. Nosotros suponemos A_i sin factor común. El conjunto singular de \mathfrak{F}_ω , $\text{Sing}(\mathfrak{F}_\omega)$, es el conjunto analítico definido por el ideal generado por los A_i . La condición impuesta sobre los A_i implica que la codimension de $\text{Sing}(\mathfrak{F}_\omega)$ es al menos 2.

El resultado principal de este capítulo, y uno de los centrales de esta tesis, es el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Sea \mathfrak{F} un germen de foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0})$, con separatriz definida por la ecuación analítica $f = z^2 + \varphi(\mathbf{x}) = 0$. Entonces existen coordenadas analíticas tal que un generador de \mathfrak{F} es*

$$\omega = d(z^2 + \varphi') + G(\Psi, z)z\Psi\left(\frac{d\varphi'}{\varphi'} - 2\frac{dz}{z}\right),$$

donde $\varphi' = \varphi u = \Psi^r$, u una unidad, Ψ no es una potencia y G es un germen de función holomorfa en dos variables.

En la prueba haremos uso del siguiente Teorema de preparación para foliaciones de codimension uno de Frank Loray:

Teorema 2.3 ([Lo2]). *Sea \mathfrak{F} una foliación holomorfa singular de codimension uno en $(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0})$, definida por la 1-forma holomorfa integrable*

$$\Theta = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{z}, w)dz_i + g(\mathbf{z}, w)dw.$$

donde $f_i, g \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}, w\}$.

Supongamos que $g(\mathbf{0}, w)$ se anula hasta el orden $k \in \mathbb{N}^*$ en $\mathbf{0}$. Entonces tras un cambio analítico, de tipo fibrado, de la w -coordenada $w := \phi(\mathbf{z}, w) = w + h(\mathbf{z})$, la foliación \mathfrak{F} es definida por la 1-forma

$$\tilde{\Theta} = \sum_{i=1}^n P_i(\mathbf{z}, w)dz_i + Q(\mathbf{z}, w)dw.$$

donde $P_i, Q \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}[w]$ de grado $\leq k$ y Q mónico.

Para $k = 1$, el Teorema 2.3 especifica lo siguiente:

Corolario 2.4. *Sean Θ y \mathfrak{F} como en el Teorema 2.3 y asuma que la parte lineal de Θ no es tangente al campo radial. Entonces existen coordenadas analíticas locales (z, w) en las cuales la foliación \mathfrak{F} es definida por*

$$\tilde{\Theta} = df_0 + wdf_1 + wdw.$$

donde $f_i \in \mathbb{C}\{z\}$, satisfaciendo $df_0 \wedge df_1 = 0$.

Antes de demostrar el Teorema 2.2, establecemos el siguiente resultado, en un contexto más general.

Lema 2.3. *Sea ω un germen de 1-forma holomorfa e integrable en $(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0})$ de tipo hipersuperficie generalizada, que tenga a S como separatriz, S una hipersuperficie definida por la ecuación $f = z^k + \varphi(\mathbf{x}) = 0$. Entonces, existe una unidad $U \in \mathcal{O}_{n+1}$ tal que*

$$U.\omega = \omega_1 + H.\omega_2 + (z^k + \varphi).\omega_3,$$

donde

$$\omega_1 = d(z^k + \varphi),$$

$$\omega_2 = zd\varphi - k\varphi dz,$$

$$\omega_3 = \sum_{i=2}^n g_i dx_i.$$

Demostración.

Denotemos por $\omega = \sum_{i=1}^n A_i dx_i + Adz$. Como $\omega, \omega_1, \omega_2$ tienen a S como separatriz, entonces tenemos las igualdades

$$\omega \wedge \omega_1 = (z^k + \varphi) \cdot \left(\sum_{i<j} H_{ij} dx_i \wedge dx_j + \sum_{i=1}^n H_i dx_i \wedge dz \right). \quad (2.9)$$

$$\omega \wedge \omega_2 = (z^k + \varphi) \cdot \left(\sum_{i<j} G_{ij} dx_i \wedge dx_j + \sum_{i=1}^n G_i dx_i \wedge dz \right). \quad (2.10)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega_1 &= \left(\sum_{i=1}^n A_i dx_i + Adz \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} dx_i + kz^{k-1} dz \right) \\ &= \sum_{i=1}^n A_i dx_i \wedge \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} dx_i + kz^{k-1} \sum_{i=1}^n A_i dx_i \wedge dz - A \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} dx_i \wedge dz, \end{aligned}$$

expresión en la que, como es habitual, hemos denotado φ_{x_i} la derivada parcial de φ respecto a la variable x_i .

Agrupando convenientemente, obtenemos

$$\omega \wedge \omega_1 = \sum_{i<j} (A_i \varphi_{x_j} - A_j \varphi_{x_i}) dx_i \wedge dx_j + \sum_{i=1}^n (kz^{k-1} A_i - A \varphi_{x_i}) dx_i \wedge dz. \quad (2.11)$$

Análogamente

$$\omega \wedge \omega_2 = \sum_{i<j} (A_i z \varphi_{x_j} - A_j z \varphi_{x_i}) dx_i \wedge dx_j - \sum_{i=1}^n (k A_i \varphi + A z \varphi_{x_i}) dx_i \wedge dz. \quad (2.12)$$

- Identificando los coeficientes de $dx_i \wedge dx_j$, de las ecuaciones (2.9) y (2.11), para $i < j$:

$$A_i \varphi_{x_j} - A_j \varphi_{x_i} = (z^k + \varphi) \cdot H_{ij}. \quad (2.13)$$

Por otro lado, de las ecuaciones (2.10) y (2.12), si $i < j$:

$$z(A_i \varphi_{x_j} - A_j \varphi_{x_i}) = (z^k + \varphi) \cdot G_{ij}. \quad (2.14)$$

Las ecuaciones (2.13) y (2.14), implican z divide a G_{ij} .

- Identificando los coeficientes de $dx_i \wedge dz$: las ecuaciones (2.9), (2.10), (2.11) y (2.12) arrojan las siguientes relaciones

$$kz^{k-1}A_i - A\varphi_{x_i} = (z^k + \varphi)H_i$$

$$-(k\varphi A_i + Az\varphi_{x_i}) = (z^k + \varphi)G_i.$$

En notación matricial, para cada i tenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} kz^{k-1} & -\varphi_{x_i} \\ -k\varphi & -z\varphi_{x_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ A \end{pmatrix} = (z^k + \varphi) \begin{pmatrix} H_i \\ G_i \end{pmatrix}.$$

Pre-multiplicando por la matriz adjunta, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} A_i \\ A \end{pmatrix} = \frac{1}{k\varphi_{x_i}(z^k + \varphi)} \begin{pmatrix} z\varphi_{x_i} & -\varphi_{x_i} \\ -k\varphi & -kz^{k-1} \end{pmatrix} (z^k + \varphi) \begin{pmatrix} H_i \\ G_i \end{pmatrix},$$

Así,

$$kA_i = zH_i - G_i. \tag{2.15}$$

$$-\varphi_{x_i}A = \varphi H_i + z^{k-1}G_i. \tag{2.16}$$

Luego, podemos escribir

$$\omega = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} (zH_i - G_i) dx_i - \frac{1}{\varphi_{x_i}} (\varphi H_i + z^{k-1}G_i) dz.$$

De la ecuación (2.16), se sigue

$$-\varphi_{x_1}A = \varphi H_1 + z^{k-1}G_1.$$

$$\Rightarrow \varphi_{x_1}(-A\varphi_{x_i}) = \varphi_{x_i}(\varphi H_1 + z^{k-1}G_1).$$

De esta manera obtenemos la siguiente relación

$$\varphi_{x_1}(\varphi H_i + z^{k-1}G_i) = \varphi_{x_i}(\varphi H_1 + z^{k-1}G_1). \tag{2.17}$$

Así, usando (2.17), podemos escribir

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} \left(z \left[\frac{\varphi_{x_i}(\varphi H_1 + z^{k-1}G_1) - z^{k-1}\varphi_{x_1}G_i}{\varphi\varphi_{x_1}} \right] - G_i \right) dx_i - \frac{1}{\varphi_{x_1}} (\varphi H_1 + z^{k-1}G_1) dz. \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{z\varphi_{x_i}H_1}{\varphi_{x_1}} + \frac{z^k\varphi_{x_i}G_1}{\varphi\varphi_{x_1}} - \frac{z^kG_i}{\varphi} - G_i \right) dx_i - \frac{1}{\varphi_{x_1}} (\varphi H_1 + z^{k-1}G_1) dz. \end{aligned}$$

Agrupando y completando términos convenientemente, se tiene

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{H_1}{k\varphi_{x_1}} \left(\sum_{i=1}^n z\varphi_{x_i} dx_i - k\varphi dz \right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k\varphi} \left(\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi_{x_1}} z^k G_1 - (z^k + \varphi) G_i \right) dx_i \\ &\quad - \frac{G_1}{k\varphi_{x_1}} \left(kz^{k-1} dz + \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} dx_i - \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} dx_i \right). \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{H_1}{k\varphi_{x_1}} \omega_2 - \frac{G_1}{k\varphi_{x_1}} \omega_1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k\varphi} \left(\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi_{x_1}} G_1 (z^k + \varphi) - (z^k + \varphi) G_i + \right) dx_i. \\ &= \frac{H_1}{k\varphi_{x_1}} \omega_2 - \frac{G_1}{k\varphi_{x_1}} \omega_1 + \frac{(z^k + \varphi)}{k\varphi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi_{x_1}} G_1 - G_i \right) dx_i. \\ &= \frac{H_1}{k\varphi_{x_1}} \omega_2 - \frac{G_1}{k\varphi_{x_1}} \omega_1 + \frac{(z^k + \varphi)}{k\varphi} \sum_{i=2}^n \left(\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi_{x_1}} G_1 - G_i \right) dx_i. \end{aligned}$$

Ahora, como $\nu_0(\omega) = k - 1$ necesariamente $\frac{G_1}{\varphi_{x_1}}$ es una unidad, así

$$\left(-\frac{k\varphi_{x_1}}{G_1} \right) \omega = \omega_1 - \frac{H_1}{G_1} \omega_2 + (z^k + \varphi) \frac{\varphi_{x_1}}{\varphi_{x_1}} \sum_{i=2}^n \left(\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi_{x_1}} G_1 - G_i \right) dx_i,$$

expresión con coeficientes holomorfas por las consideraciones previas. \square

Retornando al caso $k = 2$. Consideramos un germen de foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0})$, generado por una 1-forma integrable (ver Lema 2.3)

$$\omega = \omega_1 + H\omega_2 + (z^2 + \varphi)\omega_3.$$

Sea $\varphi = \sum_{i \geq 2} \varphi_i$, donde φ_i es un polinomio homogéneo de grado i . La parte lineal de ω está dada por $\omega_L = d(z^2 + \varphi_2)$.

Considere el campo radial

$$\mathcal{X}_R = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + z \frac{\partial}{\partial z}$$

y observe que

$$\omega_L(\mathcal{X}_R) = 2z^2 + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \neq 0$$

esto significa que la parte lineal de ω no es tangente al campo radial y en consecuencia, aplicando el Teorema 2.3 y Corolario 2.4, existe un cambio fibrado de variable

$$\phi_1(\mathbf{x}, z) = (\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, z)),$$

tal que el pull-back de \mathfrak{F} , $\phi_1^*\mathfrak{F}$, es generado por

$$\omega' = df_0(\mathbf{x}) + zdf_1(\mathbf{x}) + zdz,$$

para ciertos gérmenes de funciones $f_0, f_1 \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$.

Un segundo cambio de variable: $\xi : (\mathbf{x}, z) \mapsto (\mathbf{x}, z - f_1(\mathbf{x}))$, transforma ω' en

$$\omega'' = d\left(\frac{z^2}{2} + f_0(\mathbf{x})\right) - f_1(\mathbf{x})dz.$$

La condición de integrabilidad se traduce a $df_0 \wedge df_1 = 0$. Esto significa que f_0 y f_1 son funcionalmente dependientes. Usando el resultado de Moussu ([Mou1], Capítulo II), existen funciones $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$ y $h_0(t), h_1(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ tales que

$$f_0(\mathbf{x}) = h_0(f(\mathbf{x}))$$

$$f_1(\mathbf{x}) = h_1(f(\mathbf{x}))$$

Así, si $\rho(\mathbf{x}, z) = (f(\mathbf{x}), z) = (t, z) \Rightarrow \omega'' = \rho^*\omega_0$, con

$$\omega_0 = d(z^2 + h_0(t)) - h_1(t)dz.$$

Sea $r = \nu_0(h_0)$. Entonces $z^2 + t^r + \dots$ es separatriz de la foliación 2-dimensional \mathfrak{F}_{ω_0} .

Salvo multiplicación por una unidad, por el teorema de preparación de Weierstrass, la separatriz de ω_0 es

$$z^2 + a(t)z + b(t) = 0 \text{ con } a(0) = b(0) = 0.$$

El cambio de coordenadas: $\Phi_1 : (t, z) \mapsto (t, z - \frac{a(t)}{2})$ (Transformación de Tschirnhausen), transforma la ecuación de la separatriz de ω_0 en

$$z^2 + c(t) := z^2 + \left(b(t) - \frac{a(t)^2}{4}\right) = 0.$$

Observe que $c(0) = b(0) + \frac{a(0)^2}{4} = 0 \Rightarrow c(t) = t^r \cdot u_0(t)$, para algún $r \in \mathbb{N}^*$ y $u_0(0) \neq 0$.

Un nuevo cambio de variable $\Phi_2 : (t, z) \mapsto (t, zu_0(t)^{\frac{1}{2}})$, permite escribir la separatriz como $z^2 + t^r = 0$. En este caso, es conocido, por Cerveau-Moussu [CMou], que la foliación es generada por la forma

$$\omega'_0 = d(z^2 + t^r) + z \cdot tA(t, z) \left(r \frac{dt}{t} - 2 \frac{dz}{z} \right).$$

Así vemos que existe un cambio de variable

$$\Phi := \Phi_2 \circ \Phi_1 : (t, z) \longrightarrow \left(t, z s_1(t) + s_0(t) \right) := \left(t, \left(z - \frac{a(t)}{2} \right) u_0^{\frac{1}{2}}(t) \right),$$

con $s_1(0) \neq 0$ tal que $\omega_0 \wedge \Phi^*\omega'_0 = 0$.

Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0}) & \xrightarrow{\rho} & (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \\ F \downarrow & & \downarrow \Phi \\ (\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0}) & \xrightarrow{\rho} & (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \end{array}$$

queremos encontrar un difeomorfismo $F = (F_1, \dots, F_n, F_{n+1})$ que haga conmutativo el diagrama, es decir, que

$$\rho \circ F = \Phi \circ \rho$$

$$\left(f(F_1(\mathbf{x}, z), \dots, F_n(\mathbf{x}, z)), F_{n+1}(\mathbf{x}, z) \right) = \left(f(\mathbf{x}), z s_1(f(\mathbf{x})) + s_0(f(\mathbf{x})) \right).$$

En efecto podemos elegir

$$F(\mathbf{x}, z) = \left(\mathbf{x}, z s_1(f(\mathbf{x})) + s_0(f(\mathbf{x})) \right).$$

Note que $|J_0 F| \neq 0$, lo que implica que F es biholomorfa. Entonces se tiene que

$$\Omega := (F^{-1})^* \omega'' = d(z^2 + f(\mathbf{x})^r) + z f(\mathbf{x}) A(z, f(\mathbf{x})) \left(r \frac{df}{f} - 2 \frac{dz}{z} \right).$$

que induce una foliación analíticamente equivalente a \mathfrak{F}_ω y con separatriz $z^2 + f(\mathbf{x})^r = 0$.

Resta probar que $f^r = u\varphi$, para u una unidad.

Notemos que la aplicación χ , que transforma ω en Ω es de la forma:

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0}) & \xleftarrow{\phi_1} & (\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0}) & \xleftarrow{\xi} & (\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0}) & \xrightarrow{\rho} & (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \\ & & & & F \downarrow & & \downarrow \Phi \\ & & & & (\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0}) & \xrightarrow{\rho} & (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \\ & \searrow \chi & & & & & \end{array}$$

$$\chi : (\mathbf{x}, z) \mapsto (\mathbf{x}, Z(\mathbf{x}, z))$$

y es tal que

$$Z(\mathbf{x}, z) = \left(\varphi_1(\mathbf{x}, z) - f_1(\mathbf{x}) \right) s_1(f(\mathbf{x})) + s_0(f(\mathbf{x})) = \varphi_1(\mathbf{x}, z) v_0(\mathbf{x}) + v_1(\mathbf{x}),$$

donde

$$\begin{aligned} v_0(\mathbf{x}) &:= s_1(f(\mathbf{x})), \\ v_1(\mathbf{x}) &:= s_0(f(\mathbf{x})) - f_1(\mathbf{x}) s_1(f(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Así, junto con el cambio fibrado del Teorema 2.3, podemos escribir

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{x}, z) &= U(\mathbf{x}, z)(z + h(\mathbf{x})).v_0(\mathbf{x}) + v_1(\mathbf{x}), \\ &= \left(\sum_{i \geq 0} U_i(\mathbf{x})z^i \right) (zv_0(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x})v_0(\mathbf{x})) + v_1(\mathbf{x}), \\ &= a_0(\mathbf{x}) + \sum_{i \geq 1} a_i(\mathbf{x})z^i, \end{aligned}$$

donde $U(\mathbf{0}, 0) \neq 0$ y

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{x}) &:= v_0(\mathbf{x}).U_0(\mathbf{x}).h(\mathbf{x}) + v_1(\mathbf{x}), \\ a_i(\mathbf{x}) &:= v_0(\mathbf{x}).\left(U_{i-1}(\mathbf{x}) + U_i(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) \right). \end{aligned}$$

Observe que a_1 es una unidad. Por otro lado, χ respeta la proyección sobre las n primeras coordenadas de $(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0})$. Entonces existe una unidad $\tilde{U}(\mathbf{x}, z)$ tal que

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\mathbf{x}, z)(z^2 + \varphi(\mathbf{x})) &= Z(\mathbf{x}, z)^2 + f(\mathbf{x})^r, \\ \left(\sum_{i \geq 0} \tilde{U}_i(\mathbf{x})z^i \right) (z^2 + \varphi(\mathbf{x})) &= \left(a_0(\mathbf{x}) + \sum_{i \geq 1} a_i(\mathbf{x})z^i \right)^2 + f^r(\mathbf{x}) \\ \tilde{U}_0\varphi + \tilde{U}_1\varphi z + \sum_{i \geq 2} (\tilde{U}_{i-2} + \tilde{U}_i\varphi)z^i &= (a_0 + f^r(\mathbf{x})) + 2a_0(\mathbf{x}).a_1(\mathbf{x})z + \dots \end{aligned}$$

Comparando coeficientes obtenemos:

$$f^r(\mathbf{x}) = \tilde{U}_0(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) - a_0^2(\mathbf{x}). \tag{2.18}$$

$$a_0(\mathbf{x}) = \frac{\tilde{U}_1(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})}{2a_1(\mathbf{x})}. \tag{2.19}$$

Por tanto, de (2.18) y (2.19),

$$f^r(\mathbf{x}) = \tilde{U}_0(\mathbf{x}).\varphi(\mathbf{x}) - \frac{\tilde{U}_1(\mathbf{x})^2\varphi(\mathbf{x})^2}{4a_1(\mathbf{x})^2} = \left(\tilde{U}_0(\mathbf{x}) - \frac{\tilde{U}_1(\mathbf{x})^2\varphi(\mathbf{x})}{4a_1(\mathbf{x})^2} \right) \varphi(\mathbf{x}),$$

donde la expresión entre paréntesis es una unidad. □

Observación 2.2. Si φ es reducida, $\text{codim}(\text{Sing}(\mathfrak{F}_\omega)) \geq 3$. Esto implica, por el Teorema de Frobenius Singular [Ma], que \mathfrak{F}_ω tiene integral primera.

2.3.1. Folioaciones cuspidales casi-homogéneas (FCCH)

Del Teorema 2.2, un germen de foliación cuspidal, \mathfrak{F} , en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ está generado por la 1-forma integrable

$$\omega = d(z^2 + \varphi') + G(\Psi, z)z\Psi\left(\frac{d\varphi'}{\varphi'} - 2\frac{dz}{z}\right), \quad (2.20)$$

donde $\varphi' = \varphi u = \Psi^r$, u una unidad, Ψ no es una potencia y G es un germen de función holomorfa en dos variables.

Una foliación \mathfrak{F} en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ es llamada casi homogénea si la unión de sus separatrices es un germen de hipersuperficie dada, en algunas coordenadas, por una función polinomial casi-homogénea. Así, \mathfrak{F} es llamada **foliación cuspidal casi-homogénea** si su separatriz es una hipersuperficie cuspidal casi-homogénea (ver Definición 1.9). A continuación veremos que, en este caso, el factor unidad de φ' , en (2.20), se puede obviar.

Por K. Saito [Sa], existe un campo vectorial

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^n X_i(\mathbf{x}, z) \frac{\partial}{\partial x_i} + Z(\mathbf{x}, z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.21)$$

tal que $X(z^2 + \varphi(\mathbf{x})) = z^2 + \varphi(\mathbf{x})$. Si, en esta expresión, imponemos $z = 0$, vemos que $\sum_{i=1}^n X_i(\mathbf{x}, 0)\varphi_{x_i} = \varphi(\mathbf{x})$, así φ es casi-homogéneo. En [CeMa], el siguiente resultado es demostrado:

Lema 2.4. *Si $\varphi(\mathbf{x})$ es casi homogéneo y $u(\mathbf{x})$ es una unidad con $u(\mathbf{0}) = 1$, entonces existe un biholomorfismo Φ tal que $\varphi \circ \Phi = u\varphi$.*

Observación 2.3. *La condición $u(\mathbf{0}) = 1$ no es necesaria: si φ es casi homogéneo y $c \in \mathbb{C}^*$, existe un biholomorfismo Φ tal que $\varphi \circ \Phi = c\varphi$, basta tomar $\Phi = (c^{\frac{1}{d}}x_1, \dots, c^{\frac{1}{d}}x_n)$, donde d es el grado casi homogéneo de φ .*

Así, el Teorema (2.2), en el caso casi-homogéneo, implica:

Corolario 2.5. *Sea \mathfrak{F} una foliación, tipo hipersuperficie generalizada, con separatriz casi homogénea $z^2 + \varphi(\mathbf{x}) = 0$. Entonces, existen coordenadas tales que un generador de \mathfrak{F} es*

$$\Omega = d(z^2 + \varphi) + G(\Psi, z).z.\Psi\left(\frac{d\varphi}{\varphi} - 2\frac{dz}{z}\right)$$

donde $\varphi = \Psi^r$, Ψ no es una potencia, y G es un germen de función holomorfa en dos variables.

Demostración. Por el Teorema 2.2, la foliación está definida por

$$d(z^2 + \varphi') + G(\Psi, z).z.\Psi\left(\frac{d\varphi'}{\varphi'} - 2\frac{dz}{z}\right),$$

donde φ y φ' difieren por un factor unitario. Como φ es casi homogénea, por el Lema 2.4 y la observación 2.3, existe un biholomorfismo ψ tal que $\varphi \circ \psi = u\varphi = \varphi'$, se sigue entonces que $\varphi' \circ \psi^{-1} =: \varphi' \circ \Phi = \varphi$. Aplicando este cambio de variable obtenemos

$$d(z^2 + \varphi) + G(\Psi \circ \Phi, z).z.\Psi \circ \Phi \left(\frac{d\varphi}{\varphi} - 2\frac{dz}{z} \right)$$

□

Como consecuencia, existen coordenadas (\mathbf{x}, z) de $(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0})$, tales que la separatriz de la forma normal \mathfrak{F}_Ω es exactamente $z^2 + \varphi(\mathbf{x}) = 0$.

Observe que hemos establecido una forma pre-normal para un generador de una foliación holomorfa de codimensión uno teniendo como separatriz $z^2 + \varphi(x, y) = 0$, pero esta foliación puede eventualmente ser dicrítica o tener más separatrices. Nosotros daremos una versión análoga del resultado debido a F. Loray en [Lo1] (Proposición en la pág. 163), para un caso especial, en el que se exhiben condiciones suficientes para que la foliación con la que estamos trabajando sea del tipo superficie generalizada. En la prueba de este resultado, se hace necesario el uso de la reducción de singularidades (Teorema 2.6).

2.4. Reducción de singularidades de las FCCH.

Dedicaremos esta sección a la descripción de la reducción de singularidades de un tipo especial de FCCH, descritas en la Sección 2.3.1, en dimensión 3. Más concretamente describiremos la desingularización de las FCCH con separatriz una superficie cuspidal casi-homogénea de tipo admisible, descrita por la Ecuación 1.1. Así, del Corolario 2.5, este tipo de foliaciones es generada por

$$\Omega_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)} := d(z^2 + \varphi) + G(\Psi, z).z.\Psi\left(\frac{d\varphi}{\varphi} - 2\frac{dz}{z}\right),$$

donde $\varphi = \Psi^r = \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d_i}$ con $p, q \geq 2$, $r = \text{mcd}(d_1, \dots, d_l)$.

Después del Teorema 2.1, la reducción de singularidades de este tipo de foliaciones sigue el esquema de una desingularización de su separatriz, la cual fue descrita en la Sección 1.3 (pág. 19-30). No obstante, como habíamos comentado en la Sección 2.3.1, la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}}$ puede eventualmente ser dicrítica o tener más separatrices. En este sentido nosotros damos una condición suficiente para que una foliación generada por una 1-forma integrable $\Omega_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$ sea superficie generalizada, Teorema 2.6.

Notemos que si $d_i = 1$ para todo i , φ es reducida y el lugar singular de $\mathfrak{F}_{\Omega_{p,q}^{d_i}}$ es el origen de coordenadas. De la observación 2.2, la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}}$ admite integral primera holomorfa y el estudio de estas foliaciones se reduce al de las superficies: no consideraremos ese caso en esta memoria.

Nosotros suponemos, en todo momento, que $d_i > 1$ para algún i , y denotaremos por $\Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$ al conjunto de elementos Ω analíticamente conjugada a una 1-forma del tipo $\Omega_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$, con $d_i > 1$ para algún i .

La reducción de singularidades de la foliación \mathfrak{F}_{Ω} , con $\Omega \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$, es descrita en tres etapas. Estas etapas son exactamente iguales a las descritas en el proceso de reducción de una superficie cuspidal casi-homogénea de tipo admisible, descritas en la Sección 1.3. Describimos este proceso con más detalle:

1º Etapa. A partir del algoritmo de Euclides para (p', q') y la descomposición en fracciones continuas de $\frac{p'}{q'}$ (ver Sección 1.3), existen m, n enteros positivos minimales tales que

$$nq - mp = (-1)^N \delta,$$

donde el entero N , es, como antes, el número de etapas de la descomposición en fracción continua de $\frac{p'}{q'}$.

En lo que sigue vamos a suponer N impar (el caso N par no presenta diferencias esenciales).

2.4. Reducción de singularidades de las FCCH.

Sea $\nu \in \{0, \dots, N\}$ y $j_\nu \in \{1, \dots, c_\nu\}$. Defina

$$\alpha = \alpha(\nu, j_\nu) = \sum_{i=0}^{\nu-1} c_i + j_\nu = s_{\nu-1} + j_\nu ;$$

$$m(\nu, j_\nu) = j_\nu p_{\nu-1} + p_{\nu-2} ;$$

$$n(\nu, j_\nu) = j_\nu q_{\nu-1} + q_{\nu-2} .$$

Tras $k = \sum_{\nu=0}^N c_\nu$ transformaciones cuadráticas

$$\pi_1 := \pi_1 \circ \dots \circ \pi_\alpha \circ \dots \circ \pi_k : (M_1, E_1) \rightarrow (\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$$

se genera $N + 1$ cadenas de divisores

$$\mathcal{C}_\nu : D_{s_{\nu-1}+1}, D_{s_{\nu-1}+2}, \dots, D_{s_{\nu-1}+c_\nu} = D_{s_\nu},$$

cuyo comportamiento se muestra en la Fig. 2.1

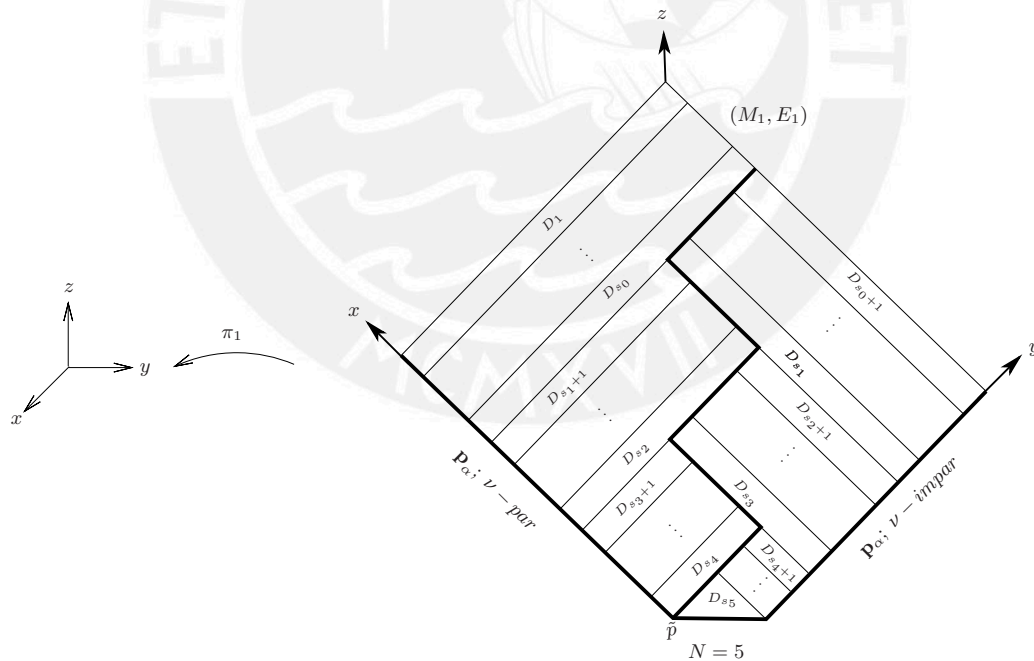


Figura 2.1: Comportamiento de las cadenas \mathcal{C}_ν , $\nu = 0, \dots, N$

El divisor E_1 , generado tras las k transformaciones cuadráticas, está dado por la unión de los D_α , descritos en la Sección 1.3.1

$$E_1 = \bigcup_{\alpha=1}^k D_\alpha .$$

Denotemos por \tilde{E} a la transformada estricta de $z = 0$ por la aplicación π_1 . Luego existen coordenadas analíticas $(x_{\alpha i}, y_{\alpha i}, z_{\alpha i})$; $i \in \{1, 2, 3\}$, tales que la imagen inversa de la foliación \mathfrak{F}_Ω , por la aplicación π_1 , admite las siguientes expresiones locales:

A. Si $\nu \in \{0, 2, 4, \dots, N-1\}$, en torno de los puntos $\mathbf{p}_\alpha = D_{\alpha-1} \cap D_\alpha \cap \tilde{E}$ con coordenadas $(x_{\alpha 1}, y_{\alpha 1}, z_{\alpha 1})$, que en las expresiones que siguen denotaremos por (x, y, z) para simplificar, π_1 tiene representación local

$$\pi_1(x, y, z) = (x', y', z'),$$

donde

$$x' = x^{m(\nu, j_\nu)} y^{m(\nu, j_\nu - 1)},$$

$$y' = x^{n(\nu, j_\nu)} y^{n(\nu, j_\nu - 1)},$$

$$z' = x^{m(j_\nu) + n(\nu, j_\nu) - 1} y^{m(\nu, j_\nu - 1) + n(\nu, j_\nu - 1) - 1} z.$$

Haciendo

$$m_1^\alpha := m(\nu, j_\nu) qd - m_\nu;$$

$$m_2^\alpha := m(\nu, j_\nu - 1) qd - n_\nu.$$

donde

$$m_\nu := 2(m(\nu, j_\nu) + n(\nu, j_\nu) - 1);$$

$$n_\nu := 2(m(\nu, j_\nu - 1) + n(\nu, j_\nu - 1) - 1).$$

La imagen inversa de la foliación \mathfrak{F}_Ω , tiene representación local

$$\pi_1^*(\Omega) = x^{m_\nu - 1} y^{n_\nu - 1} \Omega_\alpha,$$

con transformada estricta

$$\Omega_\alpha = \left(z^2 + x^{m_1^\alpha} y^{m_2^\alpha} u_\alpha(x, y) \right) \omega_{\alpha 1} + xy \eta_{\alpha 1},$$

donde

$$\omega_{\alpha 1} = m_\nu y dx + n_\nu x dy;$$

$$\eta_{\alpha 1} = d\left(z^2 + x^{m_1^\alpha} y^{m_2^\alpha} u_\alpha(x, y) \right) + \Delta_{\alpha 1} \cdot \left(m_1^\alpha \frac{dx}{x} + m_2^\alpha \frac{dy}{y} + \frac{du_\alpha}{u_\alpha} - 2 \frac{dz}{z} \right);$$

$$\Delta_{\alpha 1} = x^{\frac{2m_1^\alpha + (2-r)m_\nu}{2r}} y^{\frac{2m_2^\alpha + (2-r)n_\nu}{2r}} z \cdot u' G_1;$$

$$G_1 = G\left(x^{\frac{m_1^\alpha + m_\nu}{r}} y^{\frac{m_2^\alpha + n_\nu}{r}} u', x^{\frac{m_\nu}{2}} y^{\frac{n_\nu}{2}} z \right).$$

$u' = u_\alpha^{\frac{1}{r}}$ es una unidad en torno de \mathbf{p}_α .

Observación 2.4. Si escribimos $G(\Psi, z) = \sum G_{ij \geq 0} \Psi^i z^j$, el término $\Psi^i z^j$ es transformado, por π_1 , en

$$\left(x^{\frac{m_1^\alpha + m_\nu}{r}} y^{\frac{m_2^\alpha + n_\nu}{r}} u' \right)^i \left(x^{\frac{m_\nu}{2}} y^{\frac{n_\nu}{2}} z \right)^j.$$

Con el fin de que las potencias que aparecen en $\Delta_{\alpha_1} \cdot \left(m_1^\alpha \frac{dx}{x} + m_2^\alpha \frac{dy}{y} + \frac{du_\alpha}{u_\alpha} - 2 \frac{dz}{z} \right)$ sean positivas, es necesario que

$$\begin{aligned} \frac{2m_2^\alpha + (2-r)n_\nu}{2r} + \left(\frac{m_2^\alpha + n_\nu}{r} \right) i + \left(\frac{n_\nu}{2} \right) j &\geq 0, \\ \frac{2m_1^\alpha + (2-r)m_\nu}{2r} + \left(\frac{m_1^\alpha + m_\nu}{r} \right) i + \left(\frac{m_\nu}{2} \right) j &\geq 0, \end{aligned}$$

estas condiciones son satisfechas si $2i + rj \geq r - 2$.

Por otro lado, el comportamiento local de la transformada estricta de la foliación \mathfrak{F}_Ω , en este caso, es tal que

- El lugar singular $\text{Sing}(\mathfrak{F}_{\Omega_\alpha})$, está compuesto por la intersección de los divisores junto con la intersección de la superficies $z^2 + x^{m_1^\alpha} y^{m_2^\alpha} u_\alpha = 0$ con los divisores.

Es fácil verificar que cualquier punto

$$\mathbf{p} = (0, 0, c) \in \text{Sing}(\mathfrak{F}_{\Omega_\alpha}),$$

con $c \in \mathbb{C}^*$, es simple de tipo dimensional 2.

- Los puntos $\mathbf{p}_\alpha = (x, y, 0) \in \text{Sing}(\mathfrak{F}_{\Omega_\alpha})$; con $\alpha > 1$ (respectivamente $\mathbf{p}_\alpha = (0, y, 0)$; $\alpha = 1$), son puntos singulares no simples. Estos serán resueltos en la 2º etapa.

- La separatriz, en torno de cada punto \mathbf{p}_α , está dada por

$$\left(z^2 + x^{m_1^\alpha} y^{m_2^\alpha} u_\alpha = 0 \right) \cup (x = 0) \cup (y = 0),$$

salvo en el extremo, cuando $\nu = 0$ y $j_0 = 1$, la separatriz está dada por:

$$(z^2 + x^{qd-2} u_1 = 0) \cup (x = 0).$$

B. Si $\nu \in \{1, 3, \dots, N\}$, en torno de los puntos $\mathbf{p}_\alpha = D_{\alpha-1} \cap D_\alpha \cap \tilde{E}$ con coordenadas $(x_{\alpha 2}, y_{\alpha 2}, z_{\alpha 2})$, que en las expresiones que siguen denotaremos por (x, y, z) para simplificar, π_1 tiene representación local

$$\pi_1(x, y, z) = (x', y', z'),$$

donde

$$x' = x^{m(\nu, j_\nu - 1)} y^{m(\nu, j_\nu)},$$

$$y' = x^{n(\nu, j_\nu - 1)} y^{n(\nu, j_\nu)},$$

$$z' = x^{m(\nu, j_\nu - 1) + n(\nu, j_\nu - 1) - 1} y^{m(\nu, j_\nu) + n(\nu, j_\nu) - 1} z).$$

Haciendo

$$n_1^\alpha := n(\nu, j_\nu - 1)pd - n_\nu;$$

$$n_2^\alpha := n(\nu, j_\nu)pd - m_\nu.$$

La imagen inversa de la foliación \mathfrak{F}_Ω tiene representación local

$$\pi_1^*(\Omega) = x^{n_\nu-1}y^{m_\nu-1}\Omega_\alpha,$$

con transformada estricta

$$\Omega_\alpha = \left(z^2 + x^{n_1^\alpha}y^{n_2^\alpha}v_\alpha(x, y) \right)\omega_{\alpha_2} + xy\eta_{\alpha_2},$$

donde

$$\omega_{\alpha_2} = n_\nu y dx + m_\nu x dy;$$

$$\eta_{\alpha_2} = d\left(z^2 + x^{n_1^\alpha}y^{n_2^\alpha}v_\alpha(x, y) \right) + \Delta_{\alpha_2} \cdot \left(n_1^\alpha \frac{dx}{x} + n_2^\alpha \frac{dy}{y} + \frac{dv_\alpha}{v_\alpha} - 2\frac{dz}{z} \right);$$

$$\Delta_{\alpha_2} = G_1 x^{\frac{2n_1^\alpha + (2-r)n_\nu}{2r}} y^{\frac{2n_2^\alpha + (2-r)m_\nu}{2r}} z v'(x, y);$$

$$G_1 = G\left(x^{\frac{n_1^\alpha + n_\nu}{r}} y^{\frac{n_2^\alpha + m_\nu}{r}} v'(x, y), x^{\frac{n_\nu}{2}} y^{\frac{m_\nu}{2}} z \right).$$

$v' = v_\alpha^{\frac{1}{r}}$ es una unidad en torno de \mathbf{p}_α .

Observación 2.5. Es fácil verificar: que si $G(\Psi, z) = \sum G_{ij \geq 0} \Psi^i z^j$, las potencias que aparecen en $\Delta_{\alpha_2} \cdot \left(n_1^\alpha \frac{dx}{x} + n_2^\alpha \frac{dy}{y} + \frac{dv_\alpha}{v_\alpha} - 2\frac{dz}{z} \right)$ son positivas si se cumple la desigualdad $2i + rj \geq r - 2$.

El comportamiento local de la transformada estricta de la foliación \mathfrak{F}_Ω , es tal que

- El lugar singular $\text{Sing}(\mathfrak{F}_{\Omega_\alpha})$, está compuesto por la intersección de los divisores junto con la intersección de la superficies $z^2 + x^{n_1^\alpha}y^{n_2^\alpha}u_\alpha = 0$ con los divisores.

Es fácil verificar que cualquier punto

$$\mathbf{p} = (0, 0, c) \in \text{Sing}(\mathfrak{F}_{\Omega_\alpha}),$$

con $c \in \mathbb{C}^*$, es simple de tipo dimensional 2.

- Los puntos $\mathbf{p}_\alpha = (x, y, 0) \in \text{Sing}(\mathfrak{F}_{\Omega_\alpha})$; con $\alpha \geq c_0 + 1$ (respectivamente $\mathbf{p} = (x, 0, 0)$), son puntos singulares no simples. Estos serán resueltos en la 2º etapa.

- La separatriz, en torno de cada punto \mathbf{p}_α ; $\alpha > c_0 + 1$, está dada por

$$\left(z^2 + x^{n_1} y^{n_2} \cdot v_\alpha = 0 \right) \cup (x = 0) \cup (y = 0),$$

salvo en el extremo, cuando $\nu = 1$ y $j_1 = 1$, que está dada por

$$(z^2 + y^{pd-2(c_0+1)} \cdot v = 0) \cup (y = 0).$$

C. Si $\nu = N$ y $j_\nu = c_N$, $\alpha = s_N = k$, entorno del punto $\tilde{\mathbf{p}}$ (ver Fig.2.1) con coordenadas (x_{N1}, y_{N1}, z_{N1}) , que en las expresiones que siguen vamos a denotar por (x, y, z) para simplificar, π_1 tiene representación local

$$\pi_1(x, y, z) = \left(x^{\frac{p}{\delta}} y^n, x^{\frac{q}{\delta}} y^m, x^{\left(\frac{p+q}{\delta}-1\right)} y^{m+n-1} z \right).$$

Haciendo

$$P = \frac{pq}{\delta} d - 2 \left(\frac{p+q}{\delta} - 1 \right);$$

$$Q_2 = nqd - (m + n - 1).$$

La imagen inversa de la foliación \mathfrak{F}_Ω tiene representación local

$$\pi_1^*(\Omega) = x^{2\left(\frac{p+q}{\delta}-1\right)-1} y^{2(m+n-1)-1} \Omega_N.$$

Con transformada estricta

$$\Omega_N = \left(z^2 + x^P y^{Q_2} h^r \right) \omega_1 + xy\omega_2$$

donde

$$\omega_1 = 2 \left(\frac{p+q}{\delta} - 1 \right) y dx + 2(m + n - 1) x dy;$$

$$\omega_2 = d \left(z^2 + x^P y^{Q_2} h^r \right) + \Delta_N \left(P \frac{dx}{x} + Q_2 \frac{dy}{y} + r \frac{dh}{h} - 2 \frac{dz}{z} \right);$$

$$\Delta_N = x^{\frac{pq}{\delta} d' - \left(\frac{p+q}{\delta}-1\right)} y^{nqd' - (m+n-1)} z h G_1;$$

$$G_1 = G \left(x^{\frac{pq}{\delta} d'} y^{nqd'} h, x^{\frac{p+q}{\delta}-1} y^{m+n-1} z \right);$$

$$h = \prod_{i=1}^l (y^\delta - a_i)^{d'_i}.$$

Observación 2.6. Si escribimos $G = \sum G_{ij \geq 0} \Psi^i z^j$, en estas coordenadas, el término $\Psi^i z^j$ es transformado en

$$\left(x^{\frac{pq}{\delta} d'} y^{nqd'} h \right)^i \left(x^{\frac{p+q}{\delta}-1} y^{m+n-1} z \right)^j.$$

Con el fin de que las potencias que aparecen en $\Delta_N \left(P \frac{dx}{x} + Q_2 \frac{dy}{y} + r \frac{dh}{h} - 2 \frac{dz}{z} \right)$ sean positivas, es necesario que

$$\frac{pq}{\delta} d' - \left(\frac{p+q}{\delta} - 1 \right) + \frac{pq}{\delta} d'i + \left(\frac{p+q}{\delta} \right) j = \frac{P}{2}(i+1) + \frac{1}{r} \left(\frac{p+q}{\delta} - 1 \right) (2i + rj + 2 - r) \geq 0,$$

$$nqd' - (m+n-1) + nqd'i + (m+n-1)j = \frac{Q_2}{r}(i+1) + \frac{(m+n-1)}{r}(2i + rj + 2 - r) \geq 0.$$

Estas condiciones son satisfechas, de nuevo, si $2i + rj \geq r - 2$.

Observe que, en torno del punto $\tilde{\mathbf{p}}$, el comportamiento de la transformada estricta de la foliación \mathfrak{F}_Ω , es tal que

- El lugar singular $\text{Sing}(\mathfrak{F}_{\Omega_N})$, está compuesto por la intersección de los divisores junto con la intersección de la superficies $z^2 + x^P y^{Q_2} h^r = 0$ con los divisores.

Es fácil verificar que cualquier punto

$$\mathbf{p} = (0, 0, c) \in \text{Sing}(\mathfrak{F}_{\Omega_\alpha}),$$

con $c \in \mathbb{C}^*$, es simple de tipo dimensional 2.

- Los puntos $\mathbf{p} = (x, y, 0) \in \text{Sing}(\mathfrak{F}_{\Omega_N})$; son puntos singulares no simples. Estos serán resueltos en la 2^o etapa.
- La separatriz, en torno del punto $\tilde{\mathbf{p}}$, está dada por

$$\left(z^2 + x^P y^{Q_2} . h^r = 0 \right) \cup (x = 0) \cup (y = 0).$$

D. En torno de los puntos \mathbf{p} con coordenadas $(x_{\alpha 3}, y_{\alpha 3}, z_{\alpha 3})$, que en las expresiones siguientes denotaremos por (x, y, z) para simplificar, aparecen singularidades simples de tipo dimensional dos y tres, con más detalle tenemos:

D.1 Si $\nu \in \{0, 2, \dots, N - 1\}$, para cada α

$$\pi_1(x, y, z) = (x', y', z'),$$

donde

$$x' = x^{p\nu-1} y^{m(\nu, j_\nu-1)} z^{m(\nu, j_\nu)};$$

$$y' = x^{q\nu-1} y^{n(\nu, j_\nu-1)} z^{n(\nu, j_\nu)};$$

$$z' = x^{p\nu-1+q\nu-1-1} y^{m(\nu, j_\nu-1)+n(\nu, j_\nu-1)-1} z^{m(\nu, j_\nu)+n(\nu, j_\nu)-1}.$$

Haciendo

$$a' = 2(p_{\nu-1} + q_{\nu-1} - 1);$$

$$b' = 2(m(\nu, j_{\nu} - 1) + n(\nu, j_{\nu} - 1) - 1);$$

$$c' = 2(m(\nu, j_{\nu}) + n(\nu, j_{\nu}) - 1).$$

La imagen inversa de la foliación \mathfrak{F}_{Ω} , tiene representación local

$$\pi_1^*(\Omega) = x^{a'-1}y^{b'-1}z^{c'-1}\Omega_{\alpha},$$

con transformada estricta

$$\Omega_{\alpha} = \omega + \Phi\omega + \Delta_{\alpha} \frac{d\Phi}{\Phi},$$

donde

$$\omega = a'yzdx + b'xzd y + c'xydz;$$

$$\Delta_{\alpha} = x^{qd'p_{\nu-1} - \frac{a'}{2}}y^{qd'm(\nu, j_{\nu}-1) - \frac{b'}{2}}z^{qd'm(\nu, j_{\nu}) - \frac{c'}{2}}G_1;$$

$$\Phi = x^{qd'p_{\nu-1} - a'}y^{qd'm(\nu, j_{\nu}-1) - b'}z^{qd'm(\nu, j_{\nu}) - c'}u_{\alpha}(x, y, z).$$

u_{α} una unidad en torno de \mathbf{p} , para cada α y $G_1 = \pi_1^{-1} \circ G$.

Observación 2.7. Si escribimos $G = \sum G_{ij \geq 0} \Psi^i z^j$, en estas coordenadas, el término $\Psi^i z^j$ es transformado en

$$\left(x^{p_{\nu-1}qd'} y^{m(\nu, j_{\nu}-1)qd'} z^{m(\nu, j_{\nu})qd'} u_{\alpha} \right)^i \left(x^{\frac{a'}{2}} y^{\frac{b'}{2}} z^{\frac{c'}{2}} \right)^j.$$

Con el fin de que las potencias que aparecen en $\Delta_{\alpha} \frac{d\Phi}{\Phi}$ sean positivas, es necesario que

$$p_{\nu-1}qd'(i+1) + \frac{a'}{2}(j-1) - 1 = \frac{1}{r}(p_{\nu-1}qd - a')(i+1) - 1 + \frac{a'}{2r}(2i+rj+2-r) \geq 0,$$

$$m(\nu, j_{\nu}-1)qd'(i+1) + \frac{b'}{2}(j-1) - 1 = \frac{1}{r}(m(\nu, j_{\nu}-1)qd - b')(i+1) - 1 + \frac{b'}{2r}(2i+rj+2-r) \geq 0.$$

$$m(\nu, j_{\nu})qd'(i+1) + \frac{c'}{2}(j-1) - 1 = \frac{1}{r}(m(\nu, j_{\nu})qd - c')(i+1) - 1 + \frac{c'}{2r}(2i+rj+2-r) \geq 0.$$

Estas condiciones son satisfechas, una vez más, si $2i + rj \geq r - 2$.

Observe que después de factorizar xyz y saturar, Ω_{α} tiene parte inicial

$$\omega = a' \frac{dx}{x} + b' \frac{dy}{y} + c' \frac{dz}{z}; \quad a', b', c' \in \mathbb{Z}.$$

El lugar singular, $\text{Sing}(\Omega_\alpha)$, está compuesto por los ejes coordenados, los puntos \mathbf{p} es resonante de tipo dimensional 3; y cualquier otro punto singular cercano a \mathbf{p} es simple de tipo dimensional 2.

D.2 Si $\nu \in \{1, 3, \dots, N - 1\}$, para cada α , π_1 tiene representación local

$$\pi_1(x, y, z) = (x', y', z'),$$

donde

$$x' = x^{m(\nu, j_\nu - 1)} y^{p_{\nu-1}} z^{m(\nu, j_\nu)};$$

$$y' = x^{n(\nu, j_\nu - 1)} y^{q_{\nu-1}} z^{n(\nu, j_\nu)};$$

$$z' = x^{m(\nu, j_\nu - 1) + n(\nu, j_\nu - 1) - 1} y^{p_{\nu-1} + q_{\nu-1} - 1} z^{m(\nu, j_\nu) + n(\nu, j_\nu) - 1}.$$

En este caso, la imagen inversa de la foliación \mathfrak{F}_Ω , tiene representación local

$$\pi_1^*(\Omega) = x^{b'-1} y^{a'-1} z^{c'-1} \Omega_\alpha,$$

con transformada estricta

$$\Omega_\alpha = \omega + \Psi\omega + \Delta_\alpha \frac{d\Psi}{\Psi},$$

donde

$$\omega = b' y z dx + a' x z dy + c' x y dz;$$

$$\Delta_\alpha = x^{pd'm(\nu, j_\nu - 1) - \frac{b'}{2}} y^{pd'p_{\nu-1} - \frac{a'}{2}} z^{pd'm(\nu, j_\nu) - \frac{c'}{2}} G_1;$$

$$\Psi = x^{pdm(\nu, j_\nu - 1) - b'} y^{pdp_{\nu-1} - a'} z^{pdm(\nu, j_\nu) - c'} v_\alpha(x, y, z).$$

v_α una unidad en torno de D_α , para cada α y $G_1 = \pi_1^{-1} \circ G$.

Observación 2.8. Análogamente como en la Observación 2.7, es fácil verificar: que si $G(\Psi, z) = \sum G_{ij \geq 0} \Psi^i z^j$, las potencias que aparecen en $\Delta_\alpha \frac{d\Psi}{\Psi}$ son positivas si se cumple la desigualdad $2i + rj \geq r - 2$.

Observemos que, después de factorizar xyz y saturar, Ω_α tiene parte inicial

$$\omega = b' \frac{dx}{x} + a' \frac{dy}{y} + c' \frac{dz}{z}; \quad a', b', c' \in \mathbb{Z}.$$

El lugar singular, $\text{Sing}(\Omega_\alpha)$, está compuesto por los ejes coordenados, los puntos \mathbf{p} son resonantes de tipo dimensional 3; y cualquier otro punto singular cercano a \mathbf{p} es simple de tipo dimensional 2.

Observación 2.9. En torno de los puntos \mathbf{p}_α , la transformada estricta de la foliación \mathfrak{F}_Ω , obtenidas en **A**, **B**, **C**, puede ser escrita como sigue:

$$\Omega_\alpha = (z^2 + x^a y^b U_\alpha) \omega_\alpha + xy \eta_\alpha,$$

donde

$$\omega_\alpha = Mydx + Nxdy;$$

$$\eta_\alpha = d(z^2 + x^a y^b U_\alpha) + \Delta_\alpha \left(a \frac{dx}{x} + b \frac{dy}{y} + \frac{dU_\alpha}{U_\alpha} - 2 \frac{dz}{z} \right);$$

$$\Delta_\alpha = x^{\frac{2a+(2-r)M}{2r}} y^{\frac{2b+(2-r)N}{2r}} z U'_\alpha G_1;$$

$$G_1 = G \left(x^{\frac{a+M}{r}} y^{\frac{b+N}{r}} U'_\alpha, x^{\frac{M}{2}} y^{\frac{N}{2}} z \right).$$

$$a = \begin{cases} m_1^\alpha, & \text{si } \nu - \text{par}; \\ n_1^\alpha, & \text{si } \nu - \text{impar} \wedge \alpha \neq k; \\ P, & \text{si } \nu = N \wedge \alpha = k. \end{cases} \quad b = \begin{cases} m_2^\alpha, & \text{si } \nu - \text{par}; \\ n_2^\alpha, & \text{si } \nu - \text{impar} \wedge \alpha \neq k; \\ Q_2, & \text{si } \alpha = k. \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} m_\nu, & \text{si } \nu - \text{par}; \\ n_\nu, & \text{si } \nu - \text{impar} \wedge \alpha \neq k; \\ 2\left(\frac{p+q}{\delta} - 1\right), & \text{si } \nu = N \wedge \alpha = k. \end{cases}$$

$$N = \begin{cases} n_\nu, & \text{si } \nu - \text{par}; \\ m_\nu, & \text{si } \nu - \text{impar} \wedge \alpha \neq k; \\ 2(m+n-1), & \text{si } \alpha = k. \end{cases}$$

Además, si $G = \sum_{ij} G_{ij} \Psi^i z^j$, la condición $2i + rj \geq r - 2$ implica que no aparezcan potencias negativas en $\Delta_\alpha \left(a \frac{dx}{x} + b \frac{dy}{y} + \frac{dU_\alpha}{U_\alpha} - 2 \frac{dz}{z} \right)$.

2º Etapa. En esta etapa, reducimos las singularidades de las foliaciones $\mathfrak{F}_{\Omega_\alpha}$, obtenidas en **A**, **B** y **C**. Este proceso, después de la Observación 2.9, depende de los enteros a, b , y estos a su vez de la naturaleza de p, q y d . Recordemos que las coordenadas en **A**, **B** y **C** son $(x_{\alpha 1}, y_{\alpha 1}, z_{\alpha 1})$, $(x_{\alpha 2}, y_{\alpha 2}, z_{\alpha 2})$, y (x_{N1}, y_{N1}, z_{N1}) respectivamente, estas fueron denotadas por (x, y, z) para simplificar y en lo que sigue adoptamos la misma notación.

Caso i. Supongamos d par. Para cada α con $\nu \in \{0, 1, \dots, N\}$ se tiene que a y b son pares.

La aplicación de desingularización

$$\pi_2 : (M_2, E_2) \rightarrow (\mathbb{C}^3, \mathbf{0}),$$

$$E_2 = \bigcup_{\alpha} \left(\bigcup_j D_{\alpha j} \right),$$

tiene representación local dado por las coordenadas

$$\pi_2(x, s_{\epsilon}, t_{\epsilon-1}) = \left(x, s_{\epsilon} t_{\epsilon-1}, s_{\epsilon}^{\epsilon-1} t_{\epsilon-1}^{\epsilon} \right); \quad 1 \leq \epsilon < \frac{b}{2} - 1$$

$$\pi_2\left(s_{\frac{b}{2}+\epsilon}, y, t_{\frac{b}{2}+\epsilon-1}\right) = \left(s_{\frac{b}{2}+\epsilon} t_{\frac{b}{2}+\epsilon-1}, y, s_{\frac{b}{2}+\epsilon}^{\epsilon-1} t_{\frac{b}{2}+\epsilon-1}^{\epsilon} y^{\frac{b}{2}} \right); \quad 1 \leq \epsilon < \frac{a}{2} - 1$$

$$\pi_2(x, y, t_{\frac{a+b}{2}}) = \left(x, y, x^{\frac{a}{2}} y^{\frac{b}{2}} t_{\frac{a+b}{2}} \right).$$

donde $t_0 = z_{\alpha i}$. El pull-back de Ω_{α} , en las coordenadas $(x, y, t_{\frac{a+b}{2}})$ aporta información importante para nuestro objetivo; no obstante este será descrito en todas las coordenadas como sigue:

- i. Si $1 \leq \epsilon < \frac{b}{2} - 1$, haciendo $s := s_{\epsilon}$, $t := t_{\epsilon-1}$.

$$\pi_2^*(\Omega_{\alpha}) = s^{2(\epsilon-1)} t^{2\epsilon} \Omega_{\epsilon},$$

con transformada estricta

$$\Omega_{\epsilon} = (1 + \Psi_{\epsilon}) \omega_{\epsilon} + xst\eta_{\epsilon},$$

donde

$$\Psi_{\epsilon} = x^a s^{b-2(\epsilon-1)} t^{b-2\epsilon} u_{\epsilon}; \quad u_{\epsilon} = U_{\alpha}(x, st)$$

$$\omega_{\epsilon} = Mstdx + (N + 2(\epsilon - 1))xtds + (N + 2\epsilon)sxdt$$

$$\eta_{\epsilon} = d\Psi_{\epsilon} + \Delta_{\epsilon} \left(a \frac{dx}{x} + (b - 2(\epsilon - 1)) \frac{ds}{s} + (b - 2\epsilon) \frac{dt}{t} + \frac{du_{\epsilon}}{u_{\epsilon}} \right)$$

$$\Delta_{\epsilon} = x^{\frac{2a+(2-r)M}{2r}} s^{\frac{2b+(2-r)N}{2r}} t^{-(\epsilon-1)} t^{\frac{2b+(2-r)N}{2r}} - \epsilon u'_{\epsilon} G_{1\epsilon}$$

$$G_{1\epsilon} = G \left(x^{\frac{a+M}{r}} s^{\frac{b+N}{r}} t^{\frac{b+N}{r}} u'_{\epsilon}, x^{\frac{M}{2}} s^{\frac{N}{2}+(\epsilon-1)} t^{\frac{N}{2}+\epsilon} \right).$$

Observación 2.10. Observe que si $G = \sum G_{ij} \Psi^i z^j$, el termino $\Psi^i z^j$ es transformado, por $\pi_1 \circ \pi_2$, en

$$\left(x^{\frac{a+M}{r}} s^{\frac{b+N}{r}} t^{\frac{b+N}{r}} u'_{\epsilon} \right)^i \left(x^{\frac{M}{2}} s^{\frac{N}{2}+(\epsilon-1)} t^{\frac{N}{2}+\epsilon} \right)^j.$$

Con el fin de que en la expresión de Δ_{ϵ} , no aparezcan potencias negativas, es necesario que

$$\frac{a}{r}(i+1) + \frac{M}{2r}(2i+rj+2-r) \geq 0,$$

$$\frac{b}{r}(i+1) + \frac{N}{2r}(2i+rj+2-r) + (\epsilon-1)(j-1) = \frac{1}{r}(b-2(\epsilon-1))(i+1) + \frac{1}{2r}(N+2(\epsilon-1))(2i+rj+2-r) \geq 0,$$

$$\frac{b}{r}(i+1) + \frac{N}{2r}(2i+rj+2-r) + (\epsilon)(j-1) = \frac{1}{r}(b-2\epsilon)(i+1) + \frac{1}{2r}(N+2\epsilon)(2i+rj+2-r) \geq 0.$$

Estas condiciones son satisfechas si $2i+rj \geq r-2$.

Por otro lado:

- Observe que, después de factorizar xst y saturar, la parte inicial de Ω_ϵ está definida por

$$M \frac{dx}{x} + (N+2(\epsilon-1)) \frac{ds}{s} + (N-2\epsilon) \frac{dt}{t},$$

lo que significa que la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_\epsilon}$, entorno del origen $(x, s, t) = (0, 0, 0)$, es: reducida, de tipo resonante y tipo dimensional 3.

- ii. Si $1 \leq \epsilon < \frac{a}{2} - 1$, haciendo $s := s_{\frac{b}{2}+\epsilon}$, $t := t_{\frac{b}{2}+\epsilon-1}$. El pull back de Ω_α está dada por:

$$\pi_2^*(\Omega_\alpha) = s^{2(\epsilon-1)} t^{2\epsilon} y^b \Omega_\epsilon,$$

con transformada estricta

$$\Omega_\epsilon = (1 + \Phi_\epsilon)\omega_\epsilon + syt\eta_\epsilon,$$

donde

$$\Phi_\epsilon = s^{a-2(\epsilon-1)} t^{a-2\epsilon} u_\epsilon; \quad u_\epsilon = U_\alpha(st, y)$$

$$\omega_\epsilon = (M+2(\epsilon-1))ytds + (N+b)stdy + (M+2\epsilon)sydt$$

$$\eta_\epsilon = d\Phi_\epsilon + \Delta_\epsilon \left((a-2(\epsilon-1)) \frac{ds}{s} + (a-2\epsilon) \frac{dt}{t} + \frac{du_\epsilon}{u_\epsilon} \right)$$

$$\Delta_\epsilon = s^{\frac{2a+(2-r)M}{2r} - (\epsilon-1)} y^{\frac{(2-r)(b+N)}{2r}} t^{\frac{2a+(2-r)M}{2r} - \epsilon} u'_\epsilon G_{1\epsilon}$$

$$G_{1\epsilon} = G \left(s^{\frac{a+M}{r}} y^{\frac{b+N}{r}} t^{\frac{a+M}{r}} u'_\epsilon, s^{\frac{M}{2} + (\epsilon-1)} y^{\frac{N+b}{2}} t^{\frac{M}{2} + \epsilon} \right).$$

Observación 2.11. Análogamente como en la Observación 2.10, es fácil de verificar: que si $G(\Psi, z) = \sum G_{i,j \geq 0} \Psi^i z^j$, las potencias que aparecen en Δ_ϵ son positivas si se cumple $2i+rj \geq r-2 \wedge j \geq 1$.

Por otro lado:

- Observe que, después de factorizar xst y saturar, la parte inicial de Ω_ϵ está definida por

$$(M + 2(\epsilon - 1))\frac{ds}{s} + (N + b)\frac{dy}{y} + (M + 2\epsilon)\frac{dt}{t}$$

Lo que significa que la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_\epsilon}$, en torno del origen $(x, s, t) = (0, 0, 0)$, es: reducida, de tipo resonante y tipo dimensional 3.

- En los extremos: cuando $\nu = 0$ y $j_0 = 1$ (respectivamente $\nu = 1$ y $j_1 = c_0 + 1$), $a = qd - 2$, $b = 0$ (respectivamente $a = 0$, $b = pd - 2(c_0 + 1)$). Y por tanto, entorno del origen de coordenadas $(x, s, t) = (0, 0, 0)$ la foliación es reducida, simple y de tipo dimensional 2.

- iii. $z = x^{\frac{a}{2}}y^{\frac{b}{2}}t^{\frac{a+b}{2}}$, haciendo $t := t_{\frac{a+b}{2}}$. El pull-back de Ω_α , en estas coordenadas, está dada por:

$$\pi_2^*(\Omega_\alpha) = x^a y^b \Omega_{ab},$$

con transformada estricta

$$\Omega_{ab} = (t^2 + U_{ab})\omega_{ab} + xy\eta_{ab},$$

donde

$$\omega_{ab} = (M + a)ydx + (N + b)xdy$$

$$\eta_{ab} = d(t^2 + u_{ab}) + \Delta_{ab} \left(\frac{dU_{ab}}{U_{ab}} - 2\frac{dt}{t} \right)$$

$$\Delta_{ab} = x^{\frac{(2-r)(a+M)}{2r}} y^{\frac{(2-r)(b+N)}{2r}} tU'_{ab} G_{1ab}$$

$$G_{1ab} = G \left(x^{\frac{a+M}{r}} y^{\frac{b+N}{r}} U'_{ab}, x^{\frac{M+a}{2}} y^{\frac{N+b}{2}} t \right).$$

Observación 2.12. *Es fácil ver que, la condición $2i + rj \geq r - 2$, implica que en la expresión de Δ_{ab} no aparezcan potencias negativas.*

Por otro lado:

- El lugar singular $\text{Sing}(\Omega_{ab})$, está compuesto por la intersección de los divisores junto con la intersección de $(t^2 + U_{ab} = 0)$ con los divisores.
- En torno del origen de coordenadas $(x, y, t) = (0, 0, 0)$, Ω_{ab} tiene parte inicial

$$U_{ab}(0, 0) \left((M + a)\frac{dx}{x} + (N + b)\frac{dy}{y} \right)$$

Lo que significa que la foliación es simple de tipo dimensional dos.

- En torno de los puntos $\mathbf{p} = \left(0, 0, \pm U_{ab}^{\frac{1}{2}}(0, 0)\right) = \left(0, 0, \pm (U'_{ab})^{\frac{r}{2}}(0, 0)\right)$:

$$t^2 + U_{ab} = t^2 + (U'_{ab})^r = (t - if)(t + if); \quad f^2 = (U'_{ab})^r.$$

Sea $w = t - if$ y denotemos por $F := 2if$, haciendo el cambio de variable en Ω_{ab} , podemos escribir, entorno de \mathbf{p}

$$\Omega_{ab\mathbf{p}} = xyw \left((w + F) \left((M + a) \frac{dx}{x} + (N + b) \frac{dy}{y} \right) + (2w + F) \frac{dw}{w} + dF + \Delta_{ab\mathbf{p}} \left(rdU'_{ab} - 2U'_{ab} \frac{dw}{w} \right) \right),$$

donde

$$\Delta_{ab\mathbf{p}} = x^{\frac{(2-r)(a+M)}{2r}} y^{\frac{(2-r)(b+N)}{2r}} G_{1ab}.$$

Después de saturar, $\Omega_{ab\mathbf{p}}$ tiene parte inicial

$$F(0, 0) \left((M + a) \frac{dx}{x} + (N + b) \frac{dy}{y} + \frac{dw}{w} \right).$$

Lo que significa que, en torno de \mathbf{p} la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_{ab}}$ es reducida de tipo resonante y tipo dimensional 3.

- Como resaltamos antes, en las coordenadas $(x, y, t_{\frac{a+b}{t}})$, el pull-back de Ω_{α} contiene información importante para nuestro objetivo, una de las razones es que cuando $\alpha = s_N$, $U_{ab} = h^r(x) = \prod_{i=1}^l (1 - a_i x^{\delta})^{d_i}$ no es una unidad (respectivamente en \mathbf{C} , $U_{ab} = h^r(\tilde{y}) = \prod_{i=1}^l (\tilde{y}^{\delta} - a_i)^{d_i}$ no es una unidad).

El lugar singular de Ω_{ab} esta compuesto por: la intersección de los divisores, la intersección de la superficie $t^2 + h^r = 0$ con los divisores y la unión de las líneas $L_{i\kappa}$. El análisis de la desingularización, en estos casos, se realizará en la tercera etapa.

Caso ii.1. Supongamos d impar, además p par y q impar. En este caso tenemos dos tipos de formas Ω_{α} :

- Si ν es impar. Para todo α , Ω_{α} es tal que a, b son pares. En este caso la desingularización es exactamente igual al **Caso i**.
- Si ν es par. Para cada α , Ω_{α} es tal que a, b son alternados y la desingularización se sigue como a continuación.

Supongamos entonces a par, b impar. En este caso, la aplicación de desingularización π_2 tiene representación local dada por las coordenadas

$$\pi_2(s_\epsilon, y, t_{\epsilon-1}) = (s_\epsilon t_{\epsilon-1}, y, s_\epsilon^{\epsilon-1} t_{\epsilon-1}^\epsilon); 1 \leq \epsilon < \frac{a}{2} - 1.$$

$$\pi_2(x, s_{\frac{a}{2}+\epsilon}, t_{\frac{a}{2}+\epsilon-1}) = \left(x, s_{\frac{a}{2}+\epsilon} t_{\frac{a}{2}+\epsilon-1}, x^{\frac{a}{2}} s_{\frac{a}{2}+\epsilon}^{\epsilon-1} t_{\frac{a}{2}+\epsilon-1}^\epsilon\right); 1 \leq \epsilon < \frac{b-1}{2} - 1.$$

$$\pi_2(x, s_{\frac{a+b+3}{2}} t_{\frac{a+b-1}{2}}) = \left(x, s_{\frac{a+b+3}{2}} t_{\frac{a+b-1}{2}}^2, x^{\frac{a}{2}} s_{\frac{a+b+3}{2}}^{\frac{b-1}{2}} t_{\frac{a+b-1}{2}}^b\right).$$

$$\pi_2(x, s_{\frac{a+b+1}{2}}, t_{\frac{a+b+3}{2}}) = \left(x, s_{\frac{a+b+1}{2}}^2 t_{\frac{a+b+3}{2}}, x^{\frac{a}{2}} s_{\frac{a+b+1}{2}}^b t_{\frac{a+b+3}{2}}^{\frac{b-1}{2}+1}\right).$$

$$\pi_2(x, y, t_{\frac{a+b+1}{2}}) = (x, y, x^{\frac{a}{2}} y^{\frac{b+1}{2}} t_{\frac{a+b+1}{2}}).$$

donde $t_0 = z_{\alpha i}$. El pull-back de Ω_α , esta dado por:

i. Si $1 \leq \epsilon < \frac{a}{2} - 1$ (respectivamente $1 \leq \epsilon < \frac{b-1}{2} - 1$). El proceso de desingularización es el mismo que en i y ii del **Caso i**.

ii. En las coordenadas $(x, s_{\frac{a+b+1}{2}}, t_{\frac{a+b+3}{2}})$, haciendo

$$s = s_{\frac{a+b+1}{2}}, t = t_{\frac{a+b+3}{2}}.$$

El pull-back de Ω_α esta dado por

$$\pi_2^*(\Omega_\alpha) = x^a s^{2b+1} t^b \Omega_{ab3}$$

con transformada estricta

$$\Omega_{ab3} = (t + U_{ab3})\omega_{ab3} + xst\eta_{ab3},$$

donde

$$\omega_{ab3} = (M + a)stdx + 2(N + b)xtds + 2(n_\nu + b)xsd t$$

$$\eta_{ab3} = d(t + U_{ab3}) + \Delta_{ab3} \left(\frac{dU_{ab3}}{U_{ab3}} - \frac{dt}{t} \right)$$

$$\Delta_{ab3} = G_{1ab3} x^{\frac{(2-r)(a+M)}{2r}} s^{\frac{(2-r)(b+N)}{r}} t^{\frac{(2-r)(b+N)+r}{2r}} U'_{ab3}$$

$$G_{1ab3} = G \left(x^{\frac{M+a}{r}} s^{\frac{2(N+b)}{r}} t^{\frac{N+b}{r}} U'_{ab3}, x^{\frac{M+a}{2}} s^{N+b} t^{\frac{N+b+1}{2}} \right).$$

$$U_{ab3} = U_\alpha(x, s^2 t).$$

Además:

- Después de factorizar xst y saturar, la parte inicial de Ω_{ab3} es

$$(M + a) \frac{dx}{x} + 2(N + b) \frac{ds}{s} + 2(n + b) \frac{dt}{t}$$

lo que significa que en torno del origen $(0, 0, 0) = (x, s, t)$, la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_{ab3}}$, es reducida, de tipo resonante y tipo dimensional 3.

- El lugar singular $\text{Sing}(\Omega_{ab3})$, está compuesto por la intersección de los divisores junto con la intersección de la superficie $(t + U_{ab3} = 0)$ con los divisores.
- Cualquier punto $\mathbf{p} \in \text{Sing}(\Omega_{ab3}) \setminus \left\{ (0, 0, -u_{ab3}(0, 0)) \right\}$ es simple de tipo dimensional 2.

En torno del punto $(0, 0, -U_{ab3}(0, 0))$ la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_{ab3}}$ es reducida, de tipo resonante y tipo dimensional 3.

- iii. En las coordenadas $\left(x, s \frac{a+b+3}{2}, t \frac{a+b-1}{2}\right)$ la reducción de singularidades de Ω_α es equivalente a ii. Basta hacer el cambio de variable

$$\left(x, s \frac{a+b+1}{2}, t \frac{a+b+3}{2}\right) \mapsto \left(x, s \frac{a+b+3}{2} t \frac{a+b-1}{2}, \frac{1}{t \frac{a+b-1}{2}}\right).$$

- iv. $z = x^{\frac{a}{2}} y^{\frac{b+1}{2}} t^{\frac{a+b-1}{2}+1}$, haciendo $t = t \frac{a+b-1}{2}+1 = t \frac{a+b+1}{2}$
- $$\pi_2^*(\Omega_\alpha) = x^a y^b \Omega_{ab}$$

con transformada estricta

$$\Omega_{ab} = (yt^2 + U_{ab})\omega_{ab} + xy\eta_{ab},$$

donde

$$\omega_{ab} = (M + a)ydx + (N + b)xdy$$

$$\eta_{ab} = d(yt^2 + U_{ab}) + \Delta_{ab} \left(\frac{dU_{ab}}{U_{ab}} - \frac{dy}{y} - 2\frac{dt}{t} \right)$$

$$\Delta_{ab} = G_{1ab} x^{\frac{(2-r)(a+M)}{2r}} y^{\frac{(2-r)(b+N)+r}{2r}} t u'_{ab}$$

$$G_{1ab} = G \left(x^{\frac{M+a}{r}} y^{\frac{(N+b)}{r}} u'_{ab}, x^{\frac{M+a}{2}} y^{\frac{N+b+1}{2}} t \right).$$

$$U_{ab} = U_\alpha(x, y).$$

- Después de factorizar xy y saturar, la parte inicial de Ω_{ab} es

$$U_{ab}(0, 0) \left((M + a) \frac{dx}{x} + (N + b) \frac{dy}{y} \right)$$

lo que significa que entorno del origen $(0, 0, 0) = (x, y, t)$, la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_{ab3}}$, es reducida, simple y tipo dimensional 2.

- El lugar singular $\text{Sing}(\Omega_{ab3})$, está compuesto por la intersección de los divisores.
- Observe que cuando $\alpha = s_N$, $U_{ab} = h^r(x)$ no es una unidad (respectivamente en \mathbf{C} , $U_{ab} = h^r(\tilde{y})$ no es una unidad). Además $a = P$ impar, $b = Q_2$ par. El lugar singular de Ω_{ab} esta compuesto por: la intersección de los divisores junto con la unión de las líneas $L_{i\kappa}$. El análisis de este caso se realizará en la tercera etapa.

Observación 2.13. *Es fácil ver que la condición $2i + rj \geq r - 2$, implica que en las expresiones $xst\Delta_{ab3}\left(\frac{dU_{ab3}}{U_{ab3}} - \frac{dt}{t}\right)$, $\Delta_{ab}\left(\frac{dU_{ab}}{U_{ab}} - \frac{dy}{y} - 2\frac{dt}{t}\right)$ no aparezcan potencias negativas.*

caso ii.2. Supongamos que para todo α , a, b son impares. En este caso primero realizamos $\frac{b-1}{2}$ explosiones con centro la línea proyectiva con ecuación local $z = y = 0$, luego $\frac{a-1}{2}$ explosiones con centro la línea proyectiva de ecuación local $z = x = 0$. A continuación realizamos una explosión con centro en un punto y finalmente 2 explosiones con centro en líneas proyectivas:

- i. Si $1 \leq \epsilon < \frac{b-1}{2} - 1$. La desingularización es la misma que i del **Caso1**, las coordenadas son las mismas y la forma también.
- ii. $1 \leq \epsilon < \frac{a-1}{2} - 1$. La desingularización es la misma que ii del caso **Caso1**, las coordenadas son las mismas y la forma también.
- iii. $z = x^{\frac{a-1}{2}} y^{\frac{b-1}{2}} t^{\frac{a+b-2}{2}}$. Haciendo $t := t^{\frac{a+b}{2}}$. El pull back de Ω_α , en estas coordenadas, está dada por:

$$\pi_2^*(\Omega_\alpha) = x^a y^b \Omega_{ab},$$

con transformada estricta

$$\Omega_{ab} = (t^2 + xyU_{ab})\omega_{ab} + xy\eta_{ab},$$

donde

$$\omega_{ab} = (M + a - 1)ydx + (N + b - 1)xdy$$

$$\eta_{ab} = d(t^2 + xyU_{ab}) + \Delta_{ab}\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \frac{dU_{ab}}{U_{ab}} - 2\frac{dt}{t}\right)$$

$$\Delta_{ab} = x^{\frac{(2-r)(a+M)+r}{2r}} y^{\frac{(2-r)(b+N)+r}{2r}} tU'_{ab} G_{1ab} U'_{ab}$$

$$G_{1ab} = G\left(x^{\frac{a+M}{r}} y^{\frac{b+N}{r}} U'_{ab}, x^{\frac{M+a-1}{2}} y^{\frac{N+b-1}{2}} t\right).$$

$U_{ab} = U_\alpha(x, y)$ una unidad entorno del divisor.

- El lugar singular $\text{Sing}(\Omega_{ab})$, está compuesto por la intersección de los divisores junto con la intersección de $(t^2 + xyU_{ab} = 0)$ con los divisores.
- Cualquier punto $\mathbf{p} = (0, 0, c) \in \text{Sing}(\Omega_{ab})$ con $c \in \mathbb{C}^*$, es simple de tipo dimensional 2, ya que después de factorizar xy y saturar la parte inicial de $\Omega_{ab\mathbf{p}}$ es

$$U_{ab}(0, 0) \left((M + a - 1) \frac{dx}{x} + (N + b - 1) \frac{dy}{y} \right).$$

- Los puntos de la forma $(c, 0, 0), (0, c, 0) \in \text{Sing}(\Omega_{ab}), c \in \mathbb{C}$ aún no son simples, estas se resuelven en los pasos v y vi.

iv. Explosión con centro el origen de las coordenadas $(x, y, t_{\frac{a+b-2}{2}}) =: (x, y, t)$. La representación local de la aplicación de desingularización esta dada por

$$(x, y_1, t_1) \mapsto (x, xy_1, xt_1)$$

$$(x_2, y, t_2) \mapsto (x_2y, y, yt_2)$$

$$(x_3, y_3, t) \mapsto (x_3t, y_3t, t).$$

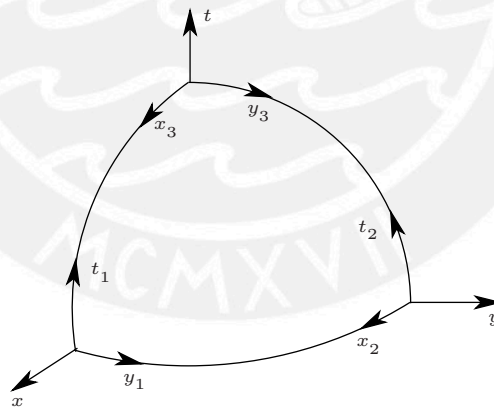


Figura 2.2: Transformación cuadrática con centro el origen de coordenadas $(x, y, t_{\frac{a+b-2}{2}})$

- En las coordenadas (x_3, y_3, t) , es fácil verificar que la foliación es reducida, simple de tipo dimensional 3.
- En las coordenadas (x, y_1, t_1) . Haciendo $y = y_1$ y $t = t_1$, el pull back de Ω_{ab} está dada por la ecuación $x^3\Omega_{ab1}$, con transformada estricta

$$\Omega_{ab1} = (t^2 + yu_{ab1})\omega_{ab1} + xy\eta_{ab1}.$$

donde

$$\omega_{ab1} = (M + N + a + b)ydx + (N + b - 1)xdy$$

$$\eta_{ab1} = d(t^2 + yu_{ab1}) + \Delta_{ab1} \left(\frac{dy}{y} + \frac{du_{ab1}}{u_{ab1}} - 2\frac{dt}{t} \right)$$

$$\Delta_{ab1} = G_{1ab1} x^{\frac{(2-r)(M+N+a+b)}{2r}} y^{\frac{(2-r)(b+N)+r}{2r}} t u'_{ab1}$$

$$G_{1ab1} = G \left(x^{\frac{M+N+a+b}{r}} y^{\frac{N+b}{r}} u'_{ab1}, x^{\frac{M+N+a+b}{2}} y^{\frac{N+b-1}{2}} t \right)$$

$u_{ab1} = u_\alpha(x, xy_1)$ una unidad entorno del divisor.

- En las coordenadas (x_2, y, t_2) . Haciendo $x = x_2$ y $t = t_2$, el pull-back de Ω_{ab} está dada por $y^3\Omega_{ab2}$ con transformada estricta

$$\Omega_{ab2} = (t^2 + xu_{ab2})\omega_{ab2} + xy\eta_{ab2}.$$

donde

$$\omega_{ab2} = (M + a - 1)ydx + (M + N + a + b)xdy$$

$$\eta_{ab2} = d(t^2 + xu_{ab2}) + \Delta_{ab2} \left(\frac{dx}{x} + \frac{du_{ab2}}{u_{ab2}} - 2\frac{dt}{t} \right)$$

$$\Delta_{ab2} = G_{1ab2} x^{\frac{(2-r)(a+M)+r}{2r}} y^{\frac{(2-r)(M+N+a+b)}{2r}} t u'_{ab2}$$

$$G_{1ab2} = G \left(x^{\frac{M+a}{r}} y^{\frac{M+N+a+b}{r}} u'_{ab2}, x^{\frac{M+a-1}{2}} y^{\frac{M+N+a+b}{2}} t \right)$$

$u_{ab2} = u_\alpha(x_2y, y)$ unidad entorno del divisor para cada $\alpha \neq s_N$.

- v. Explosiones con centro la línea proyectiva localmente dada por $t_1 = y_1 = 0$. La aplicación de desingularización está dada locamente por

$$(x, s_{\frac{a+b+4}{2}}, t_1) \longmapsto (x, s_{\frac{a+b+4}{2}} t_1^2, t_1)$$

$$(x, s_{\frac{a+b+2}{2}}, t_{\frac{a+b+4}{2}}) \longmapsto (x, s_{\frac{a+b+2}{2}}^2 t_{\frac{a+b+4}{2}}, s_{\frac{a+b+2}{2}} t_{\frac{a+b+4}{2}})$$

$$(x, y_1, t_{\frac{a+b+2}{2}}) \longmapsto (x, y_1, y_1 t_{\frac{a+b+2}{2}}).$$

- En las coordenadas $(x, s_{\frac{a+b+4}{2}}, t_1)$, haciendo $s = s_{\frac{a+b+4}{2}}$ y $t = t_1$, el pull-back de Ω_{ab1} , está representada por la ecuación $t^3\Omega_{ab1}^*$, con transformada estricta

$$\Omega_{ab1}^* = (1 + su)\omega_{ab1}^* + xst\eta_{ab1}^*,$$

donde

$$\omega_{ab1}^* = (M + N + a + b)stdx + (N + b - 1)xt ds + 2(N + b)x s dt$$

$$\eta_{ab1}^* = d(1 + su) + \Delta_{ab1}^* \left(\frac{ds}{s} + \frac{du}{u} \right)$$

$$\Delta_{ab1}^* = G_{1ab1}^* x^{\frac{(2-r)(M+N+a+b)}{2r}} s^{\frac{(2-r)(N+b)+r}{2r}} t^{\frac{(2-r)(N+b)}{r}} u'$$

$$G_{1ab1}^* = G \left(x^{\frac{M+N+a+b}{r}} s^{\frac{N+b}{r}} t^{\frac{2(N+b)}{r}} u', x^{\frac{M+N+a+b}{2}} s^{\frac{N+b-1}{2}} t^{N+b} \right).$$

$u = u_\alpha(x, xst^2)$ unidad entorno del divisor para cada α .

- En las coordenadas $(x, s_{\frac{a+b+2}{2}}, t_{\frac{a+b+4}{2}})$, haciendo $s = s_{\frac{a+b+2}{2}}$ y $t = t_{\frac{a+b+4}{2}}$, el pull-back de Ω_{ab1} está dado por la ecuación $s^3 t \Omega_{ab1}^*$

$$\Omega_{ab1}^* = (t + u)\omega_{ab1}^* + xst\eta_{ab1}^*,$$

donde

$$\omega_{ab1}^* = (M + N + a + b)stdx + 2(N + b)xt ds + (N + b)x s dt$$

$$\eta_{ab1}^* = d(t + u) + \Delta_{ab1}^* \left(\frac{du}{u} - \frac{dt}{t} \right)$$

$$\Delta_{ab1}^* = G_{1ab1}^* x^{\frac{(2-r)(M+N+a+b)}{2r}} s^{\frac{(2-r)(N+b)}{r}} t^{\frac{(2-r)(N+b)+r}{2r}} u'$$

$$G_{1ab1}^* = G \left(x^{\frac{M+N+a+b}{r}} s^{\frac{2(N+b)}{r}} t^{\frac{N+b}{r}} u', x^{\frac{M+N+a+b}{2}} s^{N+b} t^{\frac{N+b+1}{2}} \right).$$

$u = u_\alpha(x, xs^2t)$ unidad entorno del divisor para cada α .

- En las coordenadas $(x, y_1, t_{\frac{a+b+2}{2}})$, haciendo $y = y_1$ y $t = t_{\frac{a+b+2}{2}}$, el pull-back de Ω_{ab1} es $y\Omega_{ab1}^*$

$$\Omega_{ab1}^* = (yt^2 + u)\omega_{ab1}^* + xy\eta_{ab1}^*,$$

donde

$$\omega_{ab1}^* = (M + N + a + b)ydx + (N + b)xy dy$$

$$\eta_{ab1}^* = d(yt^2 + u) + \Delta_{ab1}^* \left(\frac{du}{u} - \frac{dy}{y} - 2\frac{dt}{t} \right)$$

$$\Delta_{ab1}^* = G_{1ab1}^* x^{\frac{(2-r)(M+N+a+b)}{2r}} y^{\frac{(2-r)(N+b)+r}{2r}} t u'$$

$$G_{1ab1}^* = G \left(x^{\frac{M+N+a+b}{r}} y^{\frac{N+b}{r}} u', x^{\frac{M+N+a+b}{2}} y^{\frac{N+b+1}{2}} t \right).$$

$u = u_\alpha(x, xy_1)$ unidad en torno del divisor para cada α .

vi. Explosiones con centro la línea proyectiva localmente dada por $t_2 = x_2 = 0$. La aplicación de desingularización está representada localmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (s_{\frac{a+b+4}{2}}, y, t_2) &\longmapsto (s_{\frac{a+b+4}{2}} t_2^2, y, t_2) \\ (s_{\frac{a+b+2}{2}}, y, t_{\frac{a+b+4}{2}}) &\longmapsto (s_{\frac{a+b+2}{2}}^2 t_{\frac{a+b+4}{2}}, y, s_{\frac{a+b+2}{2}} t_{\frac{a+b+4}{2}}) \\ (x_2, y, t_{\frac{a+b+2}{2}}) &\longmapsto (x_2, y, x_2 t_{\frac{a+b+2}{2}}). \end{aligned}$$

- En las coordenadas $(s_{\frac{a+b+4}{2}}, y, t_2)$, haciendo $s = s_{\frac{a+b+4}{2}}$ y $t = t_2$, el pull-back de Ω_{ab2} está dada por $t^3 \Omega_{ab2}^*$, con transformada estricta

$$\Omega_{ab2}^* = (1 + su)\omega_{ab2}^* + syt\eta_{ab2}^*,$$

donde

$$\omega_{ab2}^* = (M + a - 1)ytds + (M + a)sydt + (M + N + a + b)stdy$$

$$\eta_{ab2}^* = d(1 + su) + \Delta_{ab1}^* \left(\frac{ds}{s} + \frac{du}{u} \right)$$

$$\Delta_{ab2}^* = G_{1ab2}^* s^{\frac{(2-r)(M+a)+r}{2r}} y^{\frac{(2-r)(M+N+a+b)}{2r}} t^{\frac{(2-r)(M+a)}{r}} u'$$

$$G_{1ab2}^* = G \left(s^{\frac{M+a}{r}} y^{\frac{M+N+a+b}{r}} t^{\frac{2(M+a)}{r}} u', s^{\frac{M+a-1}{2}} y^{\frac{M+N+a+b}{2}} t^{M+a} \right).$$

$u = u_\alpha(st^2y, y)$ unidad en torno del divisor para cada $\alpha \neq s_N$.

- En las coordenadas $(s_{\frac{a+b+2}{2}}, y, t_{\frac{a+b+4}{2}})$, haciendo $s = s_{\frac{a+b+2}{2}}$ y $t = t_{\frac{a+b+4}{2}}$, el pull-back de Ω_{ab2} es $s^3 t \Omega_{ab2}^*$, con transformada estricta

$$\Omega_{ab2}^* = (t + u)\omega_{ab2}^* + syt\eta_{ab2}^*,$$

donde

$$\omega_{ab2}^* = 2(M + a)ytds + (M + N + a + b)stdy + (M + a)ysdt$$

$$\eta_{ab2}^* = d(t + u) + \Delta_{ab2}^* \left(\frac{du}{u} - \frac{dt}{t} \right)$$

$$\Delta_{ab2}^* = G_{1ab2}^* s^{\frac{(2-r)(M+a)}{r}} y^{\frac{(2-r)(M+N+a+b)}{2r}} t^{\frac{(2-r)(M+a)+r}{2r}} u'$$

$$G_{1ab2}^* = G \left(s^{\frac{2(M+a)}{r}} y^{\frac{M+N+a+b}{r}} t^{\frac{M+a}{r}} u', s^{M+a} y^{\frac{M+N+a+b}{2}} t^{\frac{M+a+1}{2}} \right).$$

$u = u_\alpha(ys^2t, y)$ unidad en torno del divisor para cada α .

- En las coordenadas $(x_2, y, t_{\frac{a+b+2}{2}})$, haciendo $x = x_2$ y $t = t_{\frac{a+b+2}{2}}$, el pull-back de Ω_{ab2} , está dada por $x\Omega_{ab2}^*$, con transformada estricta

$$\Omega_{ab2}^* = (xt^2 + u)\omega_{ab2}^* + xy\eta_{ab2}^*,$$

donde

$$\omega_{ab2}^* = (M + a)ydx + (M + N + a + b)xdy$$

$$\eta_{ab2}^* = d(xt^2 + u) + \Delta_{ab2}^*\left(\frac{du}{u} - \frac{dx}{x} - 2\frac{dt}{t}\right)$$

$$\Delta_{ab2}^* = G_{1ab2}^* x^{\frac{(2-r)(M+a)+r}{2r}} y^{\frac{(2-r)(M+N+a+b)}{2r}} tu'$$

$$G_{1ab2}^* = G\left(x^{\frac{M+a}{r}} y^{\frac{M+N+a+b}{r}} u', x^{\frac{M+a+1}{2}} y^{\frac{M+N+a+b}{2}} t\right).$$

$u = u_\alpha(x_2y, y)$ unidad entorno del divisor para cada $\alpha \neq s_N$.

Observación 2.14. *En cualquier coordenada local, la condición $2i + rj \geq r - 2$, implica que no aparezcan potencias negativas, en las expresiones correspondientes.*

Después del proceso anterior, la foliación es reducida en el sentido de [CC].

Observe que cuando $\alpha = s_N$, después de la transformación cuadrática con centro el origen de coordenadas, $u_{ab1} = h^r(x)$ no es una unidad (respectivamente en \mathbf{C} , $u_{ab2} = h^r(\tilde{y})$ no es una unidad). El lugar singular de Ω_{ab1} (respectivamente Ω_{ab2}) está compuesto por la intersección de los divisores, la intersección de la separatriz dada por la ecuación, $t_1^2 + y_1h^r(x) = 0$ (respectivamente $t_2^2 + x_2h^r(\tilde{y}) = 0$) con el divisor y la unión de las líneas $L_{i\kappa}$. Para continuar el procedimiento de desingularización, realizamos transformaciones monoidales, con centro permitido las líneas $L_{i\kappa}$, de acuerdo a la naturaleza de d_i . Será necesario, realizar una transformación cuadrática y finalmente dos transformaciones monoidales con centro la línea proyectiva \widetilde{C}_1^m (modificación de d_{s_N} , ver sección 1.3, figura 1.16). El análisis de este caso se realizará en la tercera etapa.

3º Etapa. En el **Caso i** (respectivamente en el caso **Caso ii.1**) después de la secuencia de explosiones en la segunda etapa, en la coordenadas $(x, y, t) := (x_{N1}, y_{N1}, t)$ (respectivamente en las coordenadas $(x, y, t) := (x_{N2}, y_{N2}, t)$) tenemos que la transformada estricta de la foliación está dada por 1-forma integrable Ω_{PQ_2} (respectivamente $\Omega_{P\tilde{Q}_2}$), dado por la ecuación.

$$\Omega_{PQ} = (t^2 + h^r)\omega_{PQ} + xy\eta_{PQ}.$$

En la que sigue nos centramos en el **Caso i** (el **Caso ii.1** es análogo). Así, tenemos

$$t = t_{\frac{P+Q}{2}}$$

$$\omega_{PQ} = \left(\frac{pq}{\delta}d\right)ydx + (nqd)xdy$$

$$\eta_{PQ} = d(t^2 + h^r) + x^{\frac{pq}{\delta}d'(1-\frac{r}{2})}y^{nqd'(1-\frac{r}{2})}th.G_{1PQ} \left(r\frac{dh}{h} - 2\frac{dt}{t} \right)$$

$$G_{1PQ} = G\left(x^{\frac{pq}{\delta}d'}y^{nqd'}h, x^{\frac{pq}{\delta}\frac{d}{2}}y^{nq\frac{d}{2}}t\right).$$

Expresando $\Omega_{PQ} = Adx + Bdy + Cdt$, donde

$$A = y(t^2 + h^r)\left(\frac{pq}{\delta}d\right)$$

$$B = x \left((t^2 + h^r)(nqd) + rh^{r-1}h'y + rx^{\frac{pq}{\delta}d'(1-\frac{r}{2})}y^{nqd'(1-\frac{r}{2})+1}th'G_2 \right)$$

$$B = x \left((t^2 + h^r)(nqd) + rh'y \left[h^{r-1} + x^{\frac{pq}{\delta}d'(1-\frac{r}{2})}y^{nqd'(1-\frac{r}{2})}tG_2 \right] \right)$$

$$C = 2xy\left(t - x^{\frac{pq}{\delta}d'(1-\frac{r}{2})+1}y^{nqd'(1-\frac{r}{2})+1}h'G_2\right)$$

la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_{PQ}}$, en torno del origen y de los puntos $\mathbf{p} = (0, 0, \pm h^{\frac{r}{2}}(0))$ es: reducida, de tipo resonante y de tipo dimensional 2 y 3 respectivamente. En efecto.

$$d\Omega_{PQ} = (B_x - A_y)dx \wedge dy + (C_y - B_t)dy \wedge dt + (A_t - C_x)dt \wedge dx$$

es tal que

$$d\Omega_{PQ}(\mathbf{0}) = h^r(0)\left(nqd - \frac{pq}{\delta}\right)dx \wedge dy \neq 0$$

esto significa que, en torno del origen de coordenadas, estamos en presencia de un fenómeno tipo Kupka, en consecuencia existe un biholomorfismo f tal que $f^*\Omega_{PQ} \wedge \eta = 0$, donde η es una forma en dos variables. De hecho junto con la condición de integrabilidad de Ω_{PQ} , el campo no singular

$$X = (B_x - A_y)\frac{\partial}{\partial x} + (C_y - B_t)\frac{\partial}{\partial y} + (A_t - C_x)\frac{\partial}{\partial t}$$

es tal que $\Omega_{PQ}(X) = 0$ y en consecuencia existe un cambio de coordenadas en las que Ω_{PQ} se expresa como un una 1-forma de tipo dimensional 2.

2.4. Reducción de singularidades de las FCCH.

Por otro lado en los puntos $\mathbf{p} = (0, 0, \pm h^{\frac{r}{2}}(0))$:

$$t^2 + h^r = (t - if(y))(t + if(y)); f^2 = h^r.$$

Sea $w = t - if$ y denotemos por

$$F(y) := 2if(y).$$

Realizando el cambio de variable, en torno de \mathbf{p} , podemos escribir:

$$\begin{aligned} \Omega_{PQP} = & xyw(w + F) \left(\left(\frac{pq}{\delta} d \right) \frac{dx}{x} + (nqd) \frac{dy}{y} \right) + xyw \left\{ (2w + F) \frac{dw}{w} + \right. \\ & \left. + F' dy + x^{\frac{pq}{\delta} d' (1 - \frac{r}{2})} y^{nqd' (1 - \frac{r}{2})} G_2 \left(r dy - 2h \frac{dw}{w} \right) \right\} \end{aligned}$$

Factorizando xyw y saturando, la parte inicial de la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_{PQP}}$ está definida por

$$F(0) \left(\left(\frac{pq}{\delta} d \right) \frac{dx}{x} + (nqd) \frac{dy}{y} + \frac{dw}{w} \right)$$

Lo que significa que la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_{PQP}}$, en los puntos $\mathbf{p} = (0, 0, \pm h^{\frac{r}{2}}(0))$ es: reducida, de tipo resonante y tipo dimensional 3.

Finalmente, analizamos las singularidades entorno de los puntos $(0, y_{i\kappa}, 0)$. Tomando la traslación $y \mapsto Y + y_{i\kappa}$. Denote $h^r(Y + y_{i\kappa}) := Y^{d_i} h_{i\kappa}^r(Y)$, $h_{i\kappa}(0) \neq 0$. En estas nuevas coordenadas la 1-forma Ω_{PQ} tiene la siguiente expresión

$$\Omega_{i\kappa} = \left(t^2 + Y^{d_i} \cdot h_{i\kappa}^r \right) \omega_{i\kappa} + x(Y + y_{i\kappa}) \eta_{i\kappa}$$

con

$$\omega_{i\kappa} = \left(\frac{pq}{\delta} d \right) (Y + y_{i\kappa}) dx + (nqd) x dY$$

$$\eta_{i\kappa} = d \left(t^2 + Y^{d_i} \cdot h_{i\kappa}^r \right) + \Delta_{i\kappa} \left(d_i \frac{dY}{Y} + r \frac{dh_{i\kappa}}{h_{i\kappa}} - 2 \frac{dt}{t} \right)$$

$$\Delta_{i\kappa} = x^{\frac{pq}{\delta} d' (1 - \frac{r}{2})} (Y + y_{i\kappa})^{nqd' (1 - \frac{r}{2})} Y^{d_i} t h_{i\kappa} G_{2i\kappa}$$

$$G_{2i\kappa} = G \left(x^{\frac{pq}{\delta} d'} (Y + y_{i\kappa})^{nqd'} Y^{d_i} h_{i\kappa}, x^{\frac{pq}{\delta} \frac{d}{2}} (Y + y_{i\kappa})^{nq \frac{d}{2}} t \right).$$

Ahora la reducción de singularidades, depende de la naturaleza de d_i . Supongamos que d_i es par (en el caso impar el análisis es similar). Son necesarias $\frac{d_i}{2}$ explosiones, la aplicación de desingularización tiene representación local dado por las coordenadas

$$(x, s_{\frac{P+Q}{2} + \epsilon}, t_{\frac{P+Q}{2} + \epsilon - 1}) \mapsto \left(x, s_{\frac{P+Q}{2} + \epsilon} t_{\frac{P+Q}{2} + \epsilon - 1}, s_{\frac{P+Q}{2} + \epsilon}^{\epsilon - 1} t_{\frac{P+Q}{2} + \epsilon - 1}^\epsilon \right); 1 \leq \epsilon \leq \frac{d_i}{2} - 1.$$

$$(x, Y, t_{\frac{P+Q+d_i}{2}}) \mapsto \left(x, Y, Y^{\frac{d_i}{2}} t_{\frac{P+Q+d_i}{2}} \right).$$

- i. Si $1 \leq \epsilon \leq \frac{d_i}{2} - 1$. Haciendo $s = s_{\frac{P+Q}{2}+\epsilon}$, $t = t_{\frac{P+Q}{2}+\epsilon-1}$, el pull-back de $\Omega_{i\kappa}$ está dado por

$$s^{2(\epsilon-1)-1}t^{\epsilon-1}\Omega_{i\kappa}^*$$

con transformada estricta

$$\Omega_{i\kappa}^* = (1 + \Phi_{i\kappa})\omega_{i\kappa}^* + xst\eta_{i\kappa}^*$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_{i\kappa} &= s^{d_i-2(\epsilon-1)}t^{d_i-2\epsilon}h_{i\kappa}^r \\ \omega_{i\kappa}^* &= \left(\frac{pq}{\delta}d\right)(st + y_{i\kappa})stdx + \left((nqd + 2(\epsilon - 1))st + 2y_{i\kappa}(\epsilon - 1)\right)xtds + \\ &\quad + \left((nqd + 2\epsilon)st + 2y_{i\kappa}\epsilon\right)xstdt \\ \eta_{i\kappa}^* &= (st + y_{i\kappa})\left(d\Phi_{i\kappa} + \Delta_{i\kappa}^*\left((d_i - 2(\epsilon - 1))\frac{ds}{s} + (d_i - 2\epsilon)\frac{dt}{t} + r\frac{dh_{i\kappa}^*}{h_{i\kappa}^*}\right)\right) \end{aligned}$$

Factorizando xst y saturando, la parte inicial de $\Omega_{i\kappa}^*$ es

$$\left(\frac{pq}{\delta}d\right)\frac{dx}{x} + 2(\epsilon - 1)\frac{ds}{s} + 2\epsilon\frac{dt}{t}$$

lo que significa que en torno del origen de coordenadas

$$(0, 0, 0) = (x, s_{\frac{P+Q}{2}+\epsilon}, t_{\frac{P+Q}{2}+\epsilon-1}),$$

para cada ϵ , la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_{i\kappa}^*}$ es reducida, de tipo resonante y simple de tipo dimensional 3.

- ii. $z = Y^{\frac{d_i}{2}}t_{\frac{P+Q+d_i}{2}}$, haciendo $t := t_{\frac{P+Q+d_i}{2}}$. El pull-back de $\Omega_{i\kappa}$ en este caso es

$$Y^{d_i-1}\Omega_{i\kappa}^*$$

con transformada estricta

$$\Omega_{i\kappa}^* = (t^2 + h_{i\kappa}^r)\omega_{i\kappa}^* + xY\eta_{i\kappa}^*,$$

donde

$$\omega_{i\kappa}^* = \left(\frac{pq}{\delta}d\right)(Y + y_{i\kappa})Y dx + \left((nqd + d_i)Y + y_{i\kappa}d_i\right)xdy$$

$$\eta_{i\kappa}^* = (Y + y_{i\kappa}) \left(d(t^2 + h_{i\kappa}^r) + \Delta_{i\kappa}^* \left(r \frac{dh_{i\kappa}}{h_{i\kappa}} - 2 \frac{dt}{t} \right) \right)$$

$$\Delta_{i\kappa}^* = x^{\frac{pq}{\delta}d'(1-\frac{r}{2})}(Y + y_{i\kappa})^{nqd'(1-\frac{r}{2})}Y^{\frac{d_i}{2}}th_{i\kappa}G_{3i\kappa}$$

$$G_{3i\kappa} = G\left(x^{\frac{pq}{\delta}d'}(Y + y_{i\kappa})^{nqd'}Y^{d_i}h_{i\kappa}, x^{\frac{pq}{\delta}\frac{d}{2}}(Y + y_{i\kappa})^{nq\frac{d}{2}}Y^{\frac{d_i}{2}}t\right).$$

Observación 2.15. *Es fácil verificar, una vez más, que la desigualdad $2i + rj \geq r - 2$, implica que en las expresiones correspondientes de $\Omega_{i\kappa}^*$ no aparecen potencias negativas.*

El lugar singular $\text{Sing}(\mathfrak{F}_{\Omega_{i\kappa}^*})$, está dado por los ejes coordenados y la intersección de la superficie $(t^2 + g := t^2 + h_{i\kappa}^r = 0)$ con los divisores. El origen representa un punto singular simple de tipo dimensional 2 y $(0, 0, \pm ig^{\frac{1}{2}})$ son puntos singulares simples de tipo dimensional 3. En efecto: simplificando la expresión de $\Omega_{i\kappa}^*$, podemos escribir

$$\Omega_{i\kappa}^* = Adx + Bdy + Cdt.$$

donde

$$A = \left(\frac{pq}{\delta}d\right)(t^2 + g)(y + y_{i\kappa})(y - y_{i\kappa})$$

$$B = \left((t^2 + g) \left((nqd + d_i)(y - y_{i\kappa}) + y_{i\kappa}d_i \right) + (y + y_{i\kappa})(y - y_{i\kappa}) \left(g' + x^{\frac{pq}{\delta}d'(1-\frac{r}{2})}(y + y_{i\kappa})^{nqd'(1-\frac{r}{2})}(y - y_{i\kappa})^{\frac{d_i}{2}}G_{3i\kappa}rth'_{i\kappa} \right) \right) x$$

$$C = 2x(y - y_{i\kappa})(y + y_{i\kappa}) \left(t - x^{\frac{pq}{\delta}d'(1-\frac{r}{2})}(y + y_{i\kappa})^{nqd'(1-\frac{r}{2})}(y - y_{i\kappa})^{\frac{d_i}{2}}G_{3i\kappa}h_{i\kappa} \right)$$

Así,

$$d\Omega_{i\kappa}^* = (B_x - A_y)dx \wedge dy + (C_y + B_t)dy \wedge dt + (A_t - C_x)dt \wedge dx$$

es tal que

$$d\Omega_{i\kappa}^*(\mathbf{0}) = \left(g(0)y_{i\kappa} \left(d_i - \frac{pq}{\delta}d \right) \right) dx \wedge dy \neq 0$$

esto significa que, entorno del origen de coordenadas, estamos en presencia de un fenómeno tipo Kupka, en consecuencia existe un biholomorfismo f tal que $f^*\Theta_{i\kappa} \wedge \eta = 0$, donde η

es una forma en dos variables. De hecho junto con la condición de integrabilidad de $\Omega_{i\kappa}^*$, el campo no singular

$$X = (B_x - A_y) \frac{\partial}{\partial x} + (C_y - B_t) \frac{\partial}{\partial y} + (A_t - C_x) \frac{\partial}{\partial t}$$

es tal que $\Omega_{i\kappa}^*(X) = 0$ y en consecuencia existe un cambio de coordenadas en las que $\Omega_{i\kappa}^*$ se expresa como una 1-forma de tipo dimensional 2.

Por otro lado

$$t^2 + h_{i\kappa}^r(y) = (t + if(y))(t - if(y)); f^2 = h_{i\kappa}^r.$$

Sea $w = t - if$ y denotemos por

$$F(y) := 2if(y).$$

Haciendo el cambio de variable, $\Omega_{i\kappa}^*$ se transforma en

$$\Omega_{i\kappa}^* = xyw \left\{ \left(\frac{pq}{\delta} d \right) (y + y_{i\kappa}) \frac{dx}{x} + \left((nqd + d_i)(y - y_{i\kappa}) + y_{i\kappa} d_i \right) \frac{dy}{y} \right\} (w + F) + xyw (y + y_{i\kappa}) \left[(2w + F) \frac{dw}{w} + F' dy + x^{\frac{pq}{\delta} d' (1 - \frac{r}{2})} (y + y_{i\kappa})^{nqd' (1 - \frac{r}{2})} (y - y_{i\kappa})^{\frac{d_i}{2}} G_{3i\kappa} \left(rh'_{i\kappa} dy - 2h_{i\kappa} \frac{dw}{w} \right) \right]$$

Factorizando xyw , y saturando la parte inicial de $\Omega_{i\kappa}^*$ es

$$F(0)y_{i\kappa} \left(\left(\frac{pq}{\delta} d \right) \frac{dx}{x} + d_i \frac{dy}{y} + \frac{dw}{w} \right).$$

Lo que significa que en torno de los puntos $(0, 0, \pm h_{i\kappa}^{\frac{r}{2}}(0))$, la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_{i\kappa}^*}$ es reducida, de tipo resonante y tipo dimensional 3.

En el **Caso ii.2** el procedimiento es análogo, con la observación de que después de realizar las explosiones adecuadas con centro permitido los puntos $(0, y_{i\kappa}, 0)$ hay que realizar dos transformaciones monoidales a lo largo de la curva \widetilde{C}_1^m (ver figura 1.16).

Recopilando los cálculos anteriores y de las observaciones, 2.4 al 2.15, hemos encontrado una condición suficiente, para que una foliación generada por la una 1-forma diferencial integrable,

$$\omega = d(z^2 + \varphi(x, y)) + G(\Psi, z) \cdot \Psi z \left(\frac{d\varphi}{\varphi} - 2 \frac{dz}{z} \right),$$

sea una foliación de tipo superficie generalizada. Resumimos esta condición en el siguiente teorema:

Teorema 2.6. *Considere un germen de foliación holomorfa de codimensión uno en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$, generada por una 1-forma diferencial*

$$\omega = d(z^2 + \varphi(x, y)) + G(\Psi, z) \cdot \Psi z \left(\frac{d\varphi}{\varphi} - 2 \frac{dz}{z} \right),$$

2.4. Reducción de singularidades de las FCCH.

123

donde $\Psi = \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d_i}$, $p, q \geq 2$, $a_i \neq 0$, $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, d_i primos relativos, y $\varphi = \Psi^r$; $r \in \mathbb{N}^*$. Escribiendo $G = \sum G_{ij} \Psi^i z^j$, función holomorfa en dos variables, y denotemos por

$$\nu_{(2,r)}(\Psi^i z^j) := \frac{(2i + rj)}{\text{mcd}(2, r)},$$

$$\nu_{(2,r)}(G) := \min \left\{ \nu_{2,r}(\Psi^i z^j); G_{ij} \neq 0 \right\}.$$

Entonces, si $\nu_{(2,r)}(G) \geq \frac{r-2}{\text{mcd}(2,r)}$, la foliación \mathfrak{F}_ω es de tipo superficie generalizada.



2.4.1. Topología del divisor

La foliación $\tilde{\mathfrak{F}}$, transformada estricta de una FCCH con separatriz distinguida S vía el morfismo $\pi : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ de una resolución inmersa S , es reducida con lugar singular $\text{Sing}(\tilde{\mathfrak{F}}) =: \mathcal{S}$.

El lugar singular \mathcal{S} , es un espacio analítico de codimensión $n - 1$ y con cruzamientos normales. De la Sección 1.1, \mathcal{S} representa el diagrama de incidencia asociada a la resolución inmersa de la separatriz S , más precisamente \mathcal{S} está dado por la intersección de las componentes del divisor, junto con la intersección del transformado estricto de S con el divisor, es decir, para cada punto $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$, existe un sistema local de coordenadas de M en un entorno de \mathbf{p} tal que las componentes del divisor excepcional que contengan a \mathbf{p} son subespacios lineales en posición general, en consecuencia \mathbf{p} es un punto singular simple de tipo dimensional dos o bien un punto singular simple de tipo dimensional tres.

De acuerdo a la reducción de singularidades de S (ver Sección 1.3),

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

con componentes $D_\alpha, D_{\alpha_j}, \mathcal{A}_j^{d_i} \times \mathbb{C} \approx \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{C}$, respectivamente. Estas componentes, son tales que $D_\alpha \setminus \mathcal{S}$ y $D_{\alpha_j} \setminus \mathcal{S}$ son:

$$D_\alpha \setminus \mathcal{S} \approx \begin{cases} \mathbb{C} \times \mathbb{C}, & \text{si } \alpha = 1; \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, & \text{si } 1 < \alpha \leq c_0 + 1; \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si d es par. Para $j \neq \frac{m_i^\alpha}{2}, \frac{n_i^\alpha}{2}$

$$D_{\alpha_j} \setminus \mathcal{S} \approx \begin{cases} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, & \text{si } \alpha \in \{1, c_0 + 1\}; \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, & \text{si } \alpha \notin \{1, c_0 + 1\}. \end{cases}$$

cuando $j = \frac{m_i^\alpha}{2}, \frac{n_i^\alpha}{2}$

$$D_{\alpha_j} \setminus \mathcal{S} \approx \begin{cases} \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{2 \text{ puntos}\}), & \text{si } \alpha \in \{1, c_0 + 1\}; \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}, & \text{si } \alpha \notin \{1, c_0 + 1\}. \end{cases}$$

Si d, q impar y p par. En este caso, recordemos que $\alpha = \alpha(\nu, j_\nu)$, así:

Para $\nu \in \{0, 2, \dots, N-1\}$

$$\text{si, } \alpha = 1, D_{\alpha j} \setminus \mathcal{S} \approx \begin{cases} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, & \text{si } 1 \leq j \leq \frac{m_1^\alpha - 1}{2}; \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C}, & \text{si } j = \frac{m_1^\alpha + 1}{2}; \\ \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{2 \text{ pts}\}), & \text{si } j = \frac{m_1^\alpha + 3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{si, } \alpha \neq 1; \text{ y } m_i^\alpha \text{ es impar, } D_{\alpha j} \setminus \mathcal{S} \approx \begin{cases} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, & \text{si } 1 \leq j \leq \frac{m_i^\alpha - 1}{2}; \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, & \text{si } j = \frac{m_i^\alpha + 1}{2}; \\ \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C} \setminus \{2 \text{ puntos}\}), & \text{si } j = \frac{m_i^\alpha + 3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{si, } \alpha \neq 1 \text{ y } m_i^\alpha \text{ es par, } D_{\alpha j} \setminus \mathcal{S} \approx \begin{cases} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, & \text{si } 1 \leq j < \frac{m_i^\alpha}{2}; \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}, & \text{si } j = \frac{m_i^\alpha}{2}. \end{cases}$$

Para $\nu \in \{1, 3, \dots, N\}$

$$\text{si } j \neq \frac{n_i^\alpha}{2}, D_{\alpha j} \setminus \mathcal{S} \approx \begin{cases} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, & \text{si } \alpha = c_0 + 1; \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \text{si } \alpha \neq c_0 + 1. \end{cases}$$

$$\text{si } j = \frac{n_i^\alpha}{2}, D_{\alpha j} \setminus \mathcal{S} \approx \begin{cases} \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{2 \text{ puntos}\}), & \text{si } \alpha = c_0 + 1; \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}, & \text{si } \alpha \neq c_0 + 1. \end{cases}$$

Por otro lado, es fácil ver que para cada i , $\mathcal{A}_j^{d_i} \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$ es topológicamente equivalente a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, o bien $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, o bien $(\mathbb{C} \setminus \{2 \text{ puntos}\}) \times \mathbb{C}$.

De acuerdo a lo anterior, nosotros tenemos toda la información acerca del grupo fundamental de las componentes $D_\alpha \setminus \mathcal{S}$, $D_{\alpha j} \setminus \mathcal{S}$ y $\mathcal{A}_j^{d_i} \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$ respectivamente. Estos son topológicamente equivalentes a uno de los tipos siguientes:

1. $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, simplemente conexa.
2. $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, cuyo grupo fundamental es \mathbb{Z} .
3. $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, cuyo grupo fundamental es \mathbb{Z}^2 .
4. $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{2 \text{ puntos}\})$, cuyo grupo fundamental es el grupo libre de rango dos \mathbb{F}_2 .

5. $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$, \mathcal{C} es la curva singular plana definida, en coordenadas adecuadas (y, t) , por una de las siguientes ecuaciones

$$f = t^2 - y^a(\text{unidad}) = 0$$

$$f = t^2 - \prod_{i=1}^l (y^\delta - a_i)^{d_i} = 0$$

En este caso, $\pi_1(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{C})$ es el grupo escrito en termino de generadores y relaciones como en los Ejemplos 1.4, 1.5 respectivamente: observe que

$$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{C} = \mathbb{C}^2 \setminus C \cup L; L = \{x = 0\}.$$

Sea γ un meridiano en $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f)$ de $\mathbf{0} \in \Delta_f$ (meridiano de L). Del Teorema 1.2, Corolario 1.3, y los Ejemplos 1.4, 1.5 se sigue

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C \cup L) = \langle g_1, g_2, \gamma : g_j^{\sigma^r} = g_j \wedge g_j^{\sigma^b} = \gamma^{-1} g_j \gamma \rangle.$$

Después de la observación 1.2

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C \cup L) = \langle \alpha, \beta, \gamma : \beta \alpha^r = \alpha^r \beta \wedge \gamma \alpha = \alpha \gamma \rangle; r - \text{par}$$

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C \cup L) = \langle \alpha, \beta, \gamma : \alpha^r = \beta^2 \wedge \gamma \alpha = \alpha \gamma \rangle; r - \text{impar}.$$

Nota 2.1. *Nosotros vamos a denotar \tilde{D} , a la componente del divisor excepcional E para el cual $\tilde{D} \setminus \mathcal{S} \approx \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$, donde \mathcal{C} es la curva algebraica dada por la ecuación*

$$t^2 - \prod_{i=1}^l (y^\delta - a_i)^{d_i} = 0 \quad \text{ó} \quad t^2 - \prod_{i=1}^l (1 - a_i x^\delta)^{d_i} = 0,$$

y nos referiremos a ella como la “componente especial”.

*Observe que \tilde{D} sería la modificación, en la tercera etapa, de la última componente que se genera en la segunda etapa de la reducción de singularidades, en los casos **i**, **ii.1** (ver Figura 1.15).*

2.5. Fibración de Hopf

Nos hemos interesado por una clase de foliaciones en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$ que fueran transversales a una fibración, fuera de un conjunto (unión de fibras) invariante. Esto nos permite reducir el estudio de dichas foliaciones al de su estructura transversa, es decir, al de su representación de holonomía. En nuestro caso, los gérmenes de foliaciones holomorfas singulares, de codimensión uno en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$ son tales que después de efectuar un número finito de explosiones la foliación inducida es transversal a la *fibración de Hopf adaptada a la foliación* fuera de un conjunto invariante (el conjunto invariante es la separatriz, la cual es unión de fibras). A continuación detallamos esta idea.

Sea \mathfrak{F}_Ω un germen de foliación singular en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$ definida por la 1-forma integrable Ω y $\pi : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$ la reducción minimal de singularidades en el sentido de Cano-Cerveau [CC]. Sea $\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega$ la transformada estricta de \mathfrak{F} por π y D_i una componente del divisor excepcional E .

Definición 2.5. Una *fibración de Hopf*, $\mathcal{H}_{\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega}$, adaptada a $\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega$ es una fibración holomorfa $f : M \rightarrow D_i$ transversa a la foliación $\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega$, es decir,

1. f es una submersión y $f|_{D_i} = Id_{D_i}$.
2. Las fibras $f^{-1}(p)$ de $\mathcal{H}_{\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega}$ están contenidas en las separatrices de $\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega$, para todo $p \in D_i \cap \text{Sing}(\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega)$.
3. Las fibras $f^{-1}(p)$ de $\mathcal{H}_{\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega}$ son transversas a la foliación $\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega$, para todo $p \in D_i \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega)$.

Con las notaciones de la Sección 2.4, consideremos $\Omega \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$. Buscamos una fibración de Hopf adaptada a la foliación $\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega$ relativa a una componente particular del divisor excepcional. Esta componente es portadora de la información relevante de la holonomía proyectiva del divisor excepcional.

La fibración de Hopf $\mathcal{H}_{\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega}$ es encontrada, a partir de un campo de vectores holomorfo \mathcal{X} satisfaciendo las siguientes condiciones

- S es invariante por \mathcal{X} , es decir, si $S = (f = 0)$, entonces $X(f) = \lambda_1 \cdot f$, $\lambda_1 \in \mathcal{O}_3^*$.
- \mathcal{X} es transversa a la foliación $\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega$, es decir, $\Omega(\mathcal{X}) \neq 0$.

La fibración $\mathcal{H}_{\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega}$ puede ser encontrada, en coordenadas adecuadas, después de la reducción de singularidades, por el campo de vectores $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}$ (o múltiplo escalar del mismo).

Volviendo por medio de la secuencia de explosiones de la 1^o, 2^o y 3^o etapa (ver Sección 2.4) se puede considerar el campo vectorial

$$\mathcal{X} = px \frac{\partial}{\partial x} + qy \frac{\partial}{\partial y} + \frac{pqd}{2} z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Un cálculo sencillo muestra que $\Omega(\mathcal{X}) = pqd \cdot (z^2 + \varphi)$, así este campo de vectores define la fibración deseada. En efecto: la resolución minimal de la foliación \mathfrak{F}_Ω , viene dada por la aplicación $\pi := \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$, donde π_1, π_2, π_3 representan las secuencias de explosiones en la 1^o, 2^o, 3^o etapa respectivamente. En coordenadas adecuadas π está definida de la siguiente manera:

1. Si d es par. Para cada i tal que d_i es par, tomando la traslación $\tilde{y} \rightarrow \tilde{y} + \tilde{y}_{i\kappa}$ y haciendo $t := t_{\frac{P+Q_2+d_i}{2}}$, la aplicación de desingularización π en coordenadas $(x_{s_{N-1}}, y_{s_{N-1}}, t)$, que en las expresiones que siguen vamos a denotar por $(\tilde{x}, \tilde{y}, t)$, está definida por

$$\pi(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \left(\tilde{x}^{\frac{p}{\delta}} (\tilde{y} + \xi)^n, \tilde{x}^{\frac{q}{\delta}} (\tilde{y} + \xi)^m, \tilde{x}^{\frac{pqd}{2\delta}} (\tilde{y} + \xi)^{\frac{nqd}{2} + \frac{d_i}{2} t} \right).$$

El campo de vectores tangente a la transformada estricta de la separatriz,

$$\tilde{S} := t^2 + H_i(y) = 0; H_i(0) \neq 0,$$

es $\tilde{\mathcal{X}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$, que en las coordenadas iniciales (x, y, z) está dado por

$$\mathcal{X} = px \frac{\partial}{\partial x} + qy \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dpq}{2} z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Por otro lado para cada i tal que $d_i > 1$ es impar, tomando la traslación $\tilde{y} \rightarrow \tilde{y} + \tilde{y}_{i\kappa}$ y haciendo $s := s_{\frac{P+Q_2+d_i+1}{2}}; t := t_{\frac{P+Q_2+d_i+3}{2}}$, la aplicación de desingularización π en coordenadas (\tilde{x}, s, t) , está definida por

$$\pi(\tilde{x}, s, t) = \left(\tilde{x}^{\frac{p}{\delta}} (\tilde{y} + \xi)^{2n} t^n, \tilde{x}^{\frac{q}{\delta}} (\tilde{y} + \xi)^{2m} t^m, \tilde{x}^{\frac{pqd}{2\delta}} (\tilde{y} + \xi)^{nqd+d_i} t^{\frac{nqd+d_i+1}{2}} \right).$$

El campo de vectores tangente a la transformada estricta de la separatriz,

$$\tilde{S} := t + H_i(s^2 \cdot t) = 0; H_i(0) \neq 0,$$

es $\tilde{\mathcal{X}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$, que en las coordenadas iniciales (x, y, z) , está dado por

$$\mathcal{X} = px \frac{\partial}{\partial x} + qy \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dpq}{2} z \frac{\partial}{\partial z}.$$

En el caso $d_i = 1$, tomando la traslación $\tilde{y} \rightarrow \tilde{y} + \tilde{y}_{i\kappa}$, la aplicación de desingularización π en coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y}, t)$, está definida por

$$\pi(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \left(\tilde{x}^{\frac{p}{\delta}} (\tilde{y} + \xi)^n, \tilde{x}^{\frac{q}{\delta}} (\tilde{y} + \xi)^m, \tilde{x}^{\frac{pqd}{2\delta}} (\tilde{y} + \xi)^{\frac{nqd}{2}} t \right).$$

El campo de vectores tangente a la transformada estricta de la separatriz,

$$\tilde{S} := t^2 + y.H_i(y) = 0; H_i(0) \neq 0,$$

es $\tilde{\mathcal{X}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$, que en las coordenadas iniciales (x, y, z) está dado por

$$\mathcal{X} = px \frac{\partial}{\partial x} + qy \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dpq}{2} z \frac{\partial}{\partial z}.$$

2. Si d impar, p par y q impar. Para cada i tal que d_i es par, tomando la traslación $x_{s_N 2} \rightarrow x_{s_N 2} + x_{i\kappa}$, la aplicación π , en las coordenadas $(x_{s_N 2}, y_{s_N 2}, t)$; $t := t \frac{p+q_2+d_i}{2}$, que en las expresiones que siguen vamos a denotar por (x, y, t) , está dada por

$$\begin{aligned} x &= (x + x_{i\kappa})^{\frac{p}{\delta} - n} y^{\frac{p}{\delta}} \\ y &= (x + x_{i\kappa})^{\frac{q}{\delta} - m} y^{\frac{q}{\delta}} \\ z &= (x + x_{i\kappa})^{p(\frac{q}{\delta} - m)d - (\frac{p+q}{\delta} - (m+n+1)) + \frac{d_i}{2}} y^{\frac{pqd}{2\delta}} t \end{aligned}$$

El campo de vectores tangente a la transformada estricta de la separatriz es $\tilde{\mathcal{Y}} = \frac{\partial}{\partial y}$, y que en coordenadas iniciales (x, y, z) viene dado por

$$\mathcal{Y} = px \frac{\partial}{\partial x} + qy \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dpq}{2} z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Por otro lado para cada i tal que $d_i > 1$ es impar (respectivamente $d_i = 1$) se procede de manera análoga.

3. Supongamos que d, p, q impar. En este caso la componente adecuada para construir la fibración de Hopf es la que resulta en las dos últimas transformaciones monoidales a lo largo de \widetilde{C}_1^m (ver figura 1.16). Es fácil verificar que el campo que buscamos es exactamente el mismo que en los casos anteriores.

De todo lo anterior vemos que la componente adecuada donde se puede construir la fibración de Hopf $\mathcal{H}_{\mathfrak{F}\Omega}$, en los casos **i**, **ii.1**, es \tilde{D} : aquella a la que nos referimos como “componente especial” (ver Nota 2.1).



Capítulo 3

Problema de clasificación analítica

En este capítulo abordaremos el problema principal de la presente tesis: la clasificación analítica de ciertos tipos de foliaciones cuspidales casi homogéneas en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$, que hemos denominado FCCH en el Capítulo 2. La técnica es la de extensión de la holonomía proyectiva de una de las componentes del divisor excepcional que aparece en la reducción de singularidades, más concretamente en la última componente que se genera en la reducción de singularidades que hemos descrito anteriormente. Esta componente resulta ser aquella en la que la separatriz corta al divisor excepcional. Pero, a diferencia del caso de foliaciones en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$, es frecuente que la transformada estricta de la separatriz no corte a una única componente del divisor excepcional. Ello resulta ser un obstáculo para desarrollar la técnica en la que se basa el presente trabajo, puesto que no es posible aplicar los resultados de Mattei y Moussu [MM] sobre existencia de integrales primeras holomorfas y proceder así a la extensión de la holonomía. En consecuencia, en dichos casos impondremos una condición adicional que implique la linealización de algunas de las singularidades simples resultantes del proceso de reducción, que nos permite llevar adelante el desarrollo.

Para la obtención de los resultados de este Capítulo, debemos hacer un uso efectivo de las distintas técnicas presentadas en el Capítulo 1 y 2: reducción de singularidades de manera global de una superficie casi homogénea de tipo admisible, la forma pre-normal de una FCCH de tipo admisible, topología de la componente “especial” del divisor, a la que se le ha retirado el lugar singular. Como hemos visto anteriormente, la forma pre-normal y su reducción permiten construir una fibración de Hopf, transversal a la foliación de manera que las separatrices son unión de fibras, para levantar la conjugación entre las holonomías a una conjugación analítica entre las foliaciones.

Vamos a dedicar este capítulo a introducir el concepto del grupo de holonomía debido a

Mattei-Moussu [MM], y el del grupo de holonomía proyectiva introducida por R. Moussu en [Mou2], extendiendo este último en los casos que nos ocupa la presente memoria. Finalizamos este capítulo presentando el resultado principal de la tesis: la clasificación analítica, vía la holonomía proyectiva, de las FCCH de tipo admisible, en los casos considerados (**caso i** y **caso ii.1**).



3.1. Holonomía de la componente esencial

El comportamiento dinámico de una foliación, puede ser estudiado en una vecindad de una hoja por la representación de holonomía de su grupo fundamental. Esta representación fue introducida por Ehresmann en 1950, y estudiada posteriormente por muchos autores, nosotros seguiremos fundamentalmente a Mattei y Moussu [MM] para construir esta representación: tomamos un punto \mathbf{p} sobre la hoja L y un germen de sección transversal Σ en \mathbf{p} . El levantamiento del camino cerrado γ iniciando en \mathbf{p} a lo largo de la hoja de la foliación, induce gérmenes de difeomorfismos

$$h_\gamma : (\Sigma, \mathbf{p}) \longrightarrow (\Sigma, \mathbf{p}),$$

los cuales no dependen de la clase de homotopía del camino. La aplicación h_γ es llamada *holonomía* de la hoja L , la *representación de holonomía* de $\pi_1(L, \mathbf{p})$ es el morfismo definido por

$$\begin{aligned} Hol(L) : \pi_1(L, \mathbf{p}) &\longrightarrow \text{Diff}(\Sigma, \mathbf{p}) \\ \gamma &\longmapsto h_\gamma, \end{aligned}$$

y el *grupo de holonomía* de la foliación a lo largo de L es la imagen de esta aplicación $Hol(L)$ (que muchas veces se confunde con la propia aplicación). Diferentes puntos en la hoja y diferentes secciones transversales dan lugar a representaciones conjugadas por gérmenes de difeomorfismos holomorfos.

En [Mou2], R. Moussu introduce el concepto de holonomía proyectiva, el cual es utilizado posteriormente por D. Cerveau y R. Moussu [CMou], R. Meziani [Me], M. Berthier, R. Meziani y P. Sad [BMS], y otros autores con el fin de clasificar analíticamente las foliaciones nilpotentes en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$. En dimensión tres, este concepto es adaptado y usado en [FM], para clasificar analíticamente las foliaciones singulares casi ordinarias, más concretamente: sea \mathfrak{F} un germen de foliación singular en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$, y $\pi : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$ la reducción minimal de las singularidades de \mathfrak{F} en el sentido de Cano-Cerveau, descrito en la Sección 2.1. Denotemos por $\tilde{\mathfrak{F}}$ a la transformada estricta de la foliación \mathfrak{F} por π . Después de definir una fibración de Hopf adaptada a \mathfrak{F} , $\mathcal{H}_{\mathfrak{F}}$, definida por la fibración holomorfa $f : M \rightarrow \tilde{D}$, se puede definir la holonomía de la hoja $\tilde{D} \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathfrak{F}})$ respecto a está fibración como sigue. Fijamos un punto $\mathbf{p} \in \tilde{D} \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathfrak{F}})$, sobre este punto tenemos una transversal $f^{-1}(\mathbf{p})$. El levantamiento del camino cerrado γ iniciando en \mathbf{p} a lo largo de la hoja $\tilde{D} \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathfrak{F}})$, induce gérmenes de difeomorfismos

$$h_\gamma : (f^{-1}(\mathbf{p}), \mathbf{p}) \longrightarrow (f^{-1}(\mathbf{p}), \mathbf{p}),$$

los cuales no dependen de la clase de homotopía del camino. La aplicación h_γ es llamada *holonomía excepcional* de la hoja $\tilde{D} \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathfrak{F}})$. Además, después de identificar

$(f^{-1}(\mathbf{p}), \mathbf{p})$ con $(\mathbb{C}, 0)$ (esta identificación es no canónica: diferentes identificaciones dan lugar a grupos conjugados), el levantamiento de camino determina, una representación del grupo fundamental de $\tilde{D} \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathfrak{F}})$ en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ y que denotaremos por $\mathcal{H}_{\Omega, \tilde{D}}$

$$\mathcal{H}_{\Omega, \tilde{D}} : \pi_1(\tilde{D} \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathfrak{F}}), \mathbf{p}) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0),$$

donde Ω es una 1-forma diferencial e integrable que define $\tilde{\mathfrak{F}}$. La imagen de esta aplicación es llamada el **grupo de holonomía excepcional** del divisor \tilde{D} y lo denotamos por $H_{\Omega, \tilde{D}}$. En los casos que nos ocupa esta memoria, \tilde{D} es como en la Nota 2.1.

3.1.1. Extensión de la holonomía excepcional

Con las notaciones de la Sección 2.4, considere el germen de foliación generada por una 1-forma $\Omega \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$. De la Sección 2.4.1 (Ejemplos 1.4, 1.5) se conoce el grupo de homotopía

$$\pi_1(\tilde{D} \setminus \text{Sing}(\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega)).$$

Este grupo puede ser generado por tres elementos g_1, g_2 y γ en los casos considerados (**caso i** y **caso ii.1**). Si ϖ es un elemento del grupo de homotopía, denote por h_ϖ su imagen por la aplicación $\mathcal{H}_{\Omega, \tilde{D}}$ en el grupo de holonomía excepcional. Este grupo puede ser generado por $h_{g_1}, h_{g_2}, h_\gamma$.

Supongamos que los grupos de holonomía excepcional de $\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_1}, \tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_2}; \Omega_j \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$,

$$H_{\Omega_1, \tilde{D}} = \langle h_\alpha^1, h_\beta^1, h_\gamma^1 \rangle, H_{\Omega_2, \tilde{D}} = \langle h_\alpha^2, h_\beta^2, h_\gamma^2 \rangle,$$

representados sobre la transversal $\Sigma_j := (\mathbb{C}, \mathbf{p}_j)$, son analíticamente conjugados por un elemento $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tal que $\psi^*(h_{\alpha_i}^1) := \psi^{-1}h_{\alpha_i}^1\psi = h_{\alpha_i}^2; \alpha_i \in \{g_1, g_2, \gamma\}$. Entonces tenemos el siguiente resultado, análogo al caso 2-dimensional.

Lema 3.1. *Existe un difeomorfismo fibrado $\phi, \phi(x, \mathbf{p}) = (\varphi(x, \mathbf{p}), \mathbf{p})$ entre dos vecindades abiertas V_j de \tilde{D} dentro del espacio (M, E) tal que*

1. ϕ envía hojas de la foliación $\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_1}|_{V_1}$ sobre las hojas de la foliación $\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_2}|_{V_2}$.
2. La restricción de ϕ a la transversal Σ es ψ .

Demostración. Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{L} = \tilde{D} \setminus \mathcal{S}$ y $\gamma_{\mathbf{p}} \subset \mathcal{L}$ un camino de \mathbf{p} a \mathbf{p}_j .

Tenemos que la foliación $\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_j}$ es genéricamente transversal a la fibrición de Hopf relativa a \tilde{D} , $\mathcal{H}_{\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_j}}$, fuera de la transformada estricta de la separatriz \tilde{S} y de las componentes $D_{\alpha_j}, \mathcal{A}_j$, tales que $\tilde{D} \cap D_{\alpha_j} \neq \emptyset, \tilde{D} \cap \mathcal{A}_j \neq \emptyset$ (ver Fig. 1.15).

Fijando x , la proyección $(x, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{p})$ es localmente una aplicación de recubrimiento. Entonces para cada punto $(x, \mathbf{p}) \in \mathbb{C} \times \mathcal{L}$, con módulo de x suficientemente pequeño,

podemos considerar el levantamiento $\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}^1$, dentro de la foliación $\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_1}$, del camino $\gamma_{\mathbf{p}}$ tal que $\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}^1(0) = (x, \mathbf{p})$.

Si $(x_1, \mathbf{p}_1) = \tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}^1(1)$ es el extremo de $\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}^1$, levantamos el camino $\gamma_{\mathbf{p}}^{-1}$ a $\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}^2$ dentro de la foliación $\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_2}$ tal que $\tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}^2(0) = (\psi(x_1), \mathbf{p}_2)$.

Sea $(x_2, \mathbf{p}) = \tilde{\gamma}_{\mathbf{p}}^2(1)$; definimos

$$\phi(x, \mathbf{p}) = (x_2, \mathbf{p})$$

como $\phi|_{\Sigma_1} = \psi$, $\phi(x, \mathbf{p})$ es independiente del camino elegido.

Observemos que podemos acercarnos tanto como queramos a los puntos $\mathbf{q} \in \mathcal{S}$, dentro de \tilde{D} . En efecto, recordemos que $\tilde{D} \setminus \mathcal{S} \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$ (ver Sección 2.4.1), así $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$ ó $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^*$. Podemos considerar un meridiano $\alpha_{\mathbf{q}}$ relativo a \mathbf{q} , con punto base \mathbf{p} y definir el camino $\beta_{\mathbf{p}} = \alpha_{\mathbf{p}} \gamma_{\mathbf{p}}$ con punto inicial \mathbf{p} y punto final \mathbf{p}_j . Notemos que $\gamma_{\mathbf{p}}^{-1} \beta_{\mathbf{p}}$ es un meridiano relativo a \mathbf{q} con punto base \mathbf{p}_j , así

$$\gamma_{\mathbf{p}}^{-1} \beta_{\mathbf{p}} \in \pi_1(\mathcal{L}, \mathbf{p}_j),$$

y

$$h_{\gamma_{\mathbf{p}}^{-1} \beta_{\mathbf{p}}}^1 = \psi^*(\gamma_{\mathbf{p}}^{-1} \beta_{\mathbf{p}})$$

Por tanto ϕ se extiende a una vecindad de $\tilde{D} \setminus \mathcal{S}$.

Por otro lado, los puntos singulares $\mathbf{q} \in \mathcal{S}$ son puntos de intersección de \tilde{D} con las otras componentes del divisor, y con la separatriz. Todos estos puntos son de tipo dimensional dos o tres y para todos ellos, \tilde{D} es una separatriz fuerte (ver Fig. 1.15). De [CMo], se sigue que la conjugación de la holonomía de \tilde{D} implica la conjugación de las foliaciones reducidas en una vecindad de estos puntos, esta conjugación coincide, fuera de la separatriz, con el difeomorfismo ϕ y en consecuencia ϕ se extiende a un difeomorfismo en torno de \tilde{D} .

□

3.2. Clasificación analítica

Nos hemos interesado por los gérmenes de foliaciones holomorfas cuspidales casi homogéneas en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$. Por el Teorema 2.2 y Corolario 2.5, estas foliaciones admiten forma pre-normal dada por la 1-forma integrable

$$\Omega = d(z^2 + \varphi(x, y)) + G(\Psi, z)(rz d\Psi - 2\Psi dz)$$

cuya reducción de singularidades coincide con una reducción de singularidades de su separatriz,

$$S := z^2 + \varphi(x, y) = z^2 + x^{n_1} y^{n_2} \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d_i} = 0,$$

descrita en tres etapas:

- (1°) Un número finito, digamos k , de transformaciones cuadráticas con centro el origen de coordenadas. Obteniendo una foliación \mathfrak{F}_{Ω_1} , localmente dada por las 1-formas integrables $\Omega_{\alpha i}$, definidas en cada abierto $U_{\alpha i} \approx (\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$ de la componente del divisor excepcional D_α , con coordenadas locales $(x_{\alpha i}, y_{\alpha i}, z_{\alpha i})$, a las que denotaremos por (x_i, y_i, z_i) para simplificar. Para cada $i \in \{1, 2\}$, $\mathfrak{F}_{\Omega_{\alpha i}}$ admite como separatriz la unión de las superficies: $y_i = 0, x_i = 0$ y

$$(S_{\alpha i}, \mathbf{p}_{\alpha i}) = z_i^2 + x_i^{a_\alpha} y_i^{b_\alpha} u_{\alpha i}(x_i, y_i) = 0,$$

donde $u_{\alpha i}$ es una unidad para todo $\alpha \neq k$.

Para $i = 3$, la foliación $\mathfrak{F}_{\Omega_{\alpha i}}$ tiene singularidades simples resonantes, de tipo dimensional 2 ó 3, correspondientes a la intersección de las componentes del divisor.

- (2°) Un número finito de transformaciones monoidales según la naturaleza de los enteros a_α, b_α (estos a su vez dependen de n_1, n_2), con el fin de obtener una resolución inmersa de las superficies $(S_{\alpha i}, \mathbf{p}_{\alpha i})$ y que $\mathfrak{F}_{\tilde{\Omega}_{\alpha i}}$ tenga singularidades simples en el sentido de Cano-Cerveau [CC]. Al final de este proceso se obtienen foliaciones con singularidades simples de tipo dimensional dos y tres correspondientes a la intersección de las componentes del divisor excepcional y a la intersección del divisor con la transformada estricta de la separatriz, salvo en el caso en que $\alpha = k$, donde la separatriz, de la foliación correspondiente, es de una de las formas siguientes

$$t^2 + u_{ki}(y_i) = 0,$$

$$y_i t^2 + u_{ki}(y_i) = 0,$$

$$t^2 + x_i u_{ki}(y_i) = 0,$$

donde $u_{ki}(y_i) = \prod_{j=1}^l (y_i^\delta - a_j)^{d_i}$; y en consecuencia existen puntos singulares no simples de la forma $(0, \xi_{j\kappa}, 0)$; $\xi_{j\kappa}^\delta = a_j$.

3º Finalmente hay que realizar un número finito de transformaciones cuadráticas (respectivamente monoidales), según la naturaleza de d_j con el fin de resolver las singularidades $(0, \xi_{j\kappa}, 0)$.

Sea π la aplicación de una resolución inmersa de S y denotemos por $\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega$ a la resolución de singularidades de \mathfrak{F}_Ω por π . Denotemos también por $\mathcal{S} := \text{Sing}(\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega)$.

La técnica de clasificación analítica de foliaciones en la que nos hemos interesado durante este tiempo es la descrita por R. Moussu en [Mou2] y usada por D. Cerveau y R. Moussu [CMou], R. Meziani [Me], M. Berthier, R. Meziani y P. Sad [BMS], entre otros, para clasificar las singularidades nilpotentes en $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$. Posteriormente esta técnica es extendida a dimensión 3 para clasificar las foliaciones cuspidales casi-ordinarias [FM]. La pregunta que nos hacemos es, ¿hasta qué punto es posible aplicar esta técnica para clasificar analíticamente las foliaciones cuspidales casi homogéneas?. El método de resolución, nos permite obtener como primera componente del divisor excepcional a D_1 , esta componente es tal que

- $D_1 \setminus \mathcal{S} \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, si la separatriz de $\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega$ es definida por la ecuación

$$z^2 + x^{n_1} y^{n_2} \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d_i} = 0; \quad n_1 > 0 \text{ y/ó } n_2 > 0.$$

- $D_1 \setminus \mathcal{S} \cong \mathbb{C}^2$, si la separatriz de $\tilde{\mathfrak{F}}_\Omega$ es definida por la ecuación

$$z^2 + \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d_i} = 0.$$

La propiedad de que $D_1 \setminus \mathcal{S}$ sea simplemente conexa, en la demostración del Teorema 3.1 veremos que, permitirá garantizar la existencia de la integral primera, en torno de todas las componentes del divisor excepcional E , salvo en las componentes en las que la transformada estricta de la separatriz interseca, y en consecuencia es necesario identificar una o posiblemente más componentes, a las que llamaremos **componentes especiales**, y dar condiciones que nos permitan garantizar la existencia de integral primera en un entorno de las componentes del divisor excepcional restantes.

En consecuencia, del párrafo anterior, nos interesaremos por los tipos de foliaciones a las que se les puede aplicar la técnica de R. Moussu para clasificarlas analíticamente, son las generadas por $\Omega \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$. En este caso, las candidatas a ser las componentes

especiales son las que surgen al final de las transformaciones monoidales a lo largo de las líneas proyectivas $d_1 := D_1 \cap S_1$, $d_{c_0+1} := D_{c_0+1} \cap S_{c_0+1}$ y que denotaremos por \tilde{D}' , \tilde{D}'' respectivamente. Observe que de la Sección 2.4.1, es fácil deducir que

$$\tilde{D}' \setminus \mathcal{S} \approx \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{2pts\}) \approx \tilde{D}'' \setminus \mathcal{S}.$$

Sea $\Omega \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$, diremos que la foliación \mathfrak{F}_Ω :

- Si d -par (**Caso i**), cumple la propiedad \wp_1 : las holonomías de las hojas $\tilde{D}' \setminus \mathcal{S}$, $\tilde{D}'' \setminus \mathcal{S}$, son linealizables.
- Si d -impar (**Caso ii.1**), cumple la propiedad \wp_2 : la holonomía de la hoja $\tilde{D}'' \setminus \mathcal{S}$, es linealizable.

En la Sección 2.5 hemos construido la fibración de Hopf $\mathcal{H}_{\mathfrak{F}_\Omega}$ adaptado a \mathfrak{F}_Ω , esta es encontrada relativo a una componente en particular del divisor excepcional. En nuestro caso esta componente es la componente “especial” \tilde{D} , descrita en la Nota 2.1. En cualquiera de los casos, $\mathcal{H}_{\mathfrak{F}_\Omega}$ es determinado por el campo de vectores holomorfo singular $\mathcal{X} = px \frac{\partial}{\partial x} + qy \frac{\partial}{\partial y} + \frac{pqd}{2} z \frac{\partial}{\partial z}$. Ahora podemos definir la holonomía de la hoja $\tilde{D} \setminus \mathcal{S}$ respecto a esta fibración (ver Sección 3.1). Nosotros mostramos que si los grupos de holonomía de dos foliaciones \mathfrak{F}_Ω ; $\Omega \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$, en los casos **i**, **ii.1**, satisfaciendo las propiedades \wp_1, \wp_2 , son conjugadas, entonces las foliaciones son analíticamente conjugadas:

Teorema 3.1. Sean $\Omega_i \in \Sigma_{p,q}^{(d_1, \dots, d_l)}$ satisfaciendo una de las propiedades \wp_1, \wp_2 , descritas anteriormente, y considere las foliaciones \mathfrak{F}_{Ω_i} con grupos de holonomías proyectivas $H_{\Omega_i, \tilde{D}} = \langle h_{g_1}^i, h_{g_2}^i, h_\alpha^i \rangle$, $i = 1, 2$. Entonces las foliaciones son analíticamente conjugadas si y solo si $(h_{g_1}^i, h_{g_2}^i, h_\alpha^i)$ son analíticamente conjugadas

Demostración. Si las foliaciones son conjugadas entonces sus holonomías excepcionales son conjugadas. Los argumentos son exactamente los mismos de [CMou].

Consecuentemente, supongamos que las holonomías son conjugadas vía Ψ , y sean $\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_i}$ las respectivas transformadas estrictas de las foliaciones \mathfrak{F}_{Ω_i} , después de su desingularización. De la existencia de la fibración de Hopf relativa a \tilde{D} (ver Fig. 1.15) y del Lema 3.1, Ψ puede ser extendida a una vecindad $V_i \subset (M, E)$ de \tilde{D} y en consecuencia, tenemos que $\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_i}$ son conjugadas en V_i . Ahora necesitamos conjugar las foliaciones en una vecindad de todas las demás componentes del divisor. Para ello primero debemos garantizar la existencia de integral primera en torno de los puntos singulares fuera de \tilde{D} . En efecto: observe que de la Sección 2.4.1, se tiene $D_1 \setminus \mathcal{S}$ simplemente conexa, entonces su holonomía es trivial. Así la holonomía de la hoja $D_2 \setminus \mathcal{S} \approx \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, generada por un lazo en torno de $L_1 := D_1 \cap D_2$,

es periódica (ver [MM]). Los mismos argumentos demuestran que $D_\alpha \setminus \mathcal{S}$ tiene holonomía periódica, para todo $1 < \alpha \leq c_0 + 1$. Así, $\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_i}$ tienen integral primera, entorno de

$$L_\alpha := D_\alpha \cap D_{\alpha+1}, \quad 1 \leq \alpha \leq c_0 + 1; \quad (\text{los puntos de } L_\alpha \text{ son de tipo dimensional } 2).$$

Por otro lado las hojas $D_\alpha \setminus \mathcal{S} \approx \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ tienen holonomía periódica y están generadas por dos lazos en torno de las líneas

$$L_\alpha = D_\alpha \cap D_{\alpha+1};$$

$$L_{s_\nu}^\alpha = D_\alpha \cap D_{s_\nu}.$$

Los argumentos anteriores, también permiten garantizar la existencia de integral primera entorno de las líneas

$$L_{\alpha j} := D_{\alpha j} \cap D_{\alpha(j-1)}$$

donde α, j son tales que $D_{\alpha j} \setminus \mathcal{S} \approx \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ o bien $\approx \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.

Finalmente nos falta garantizar la existencia de integral primera en torno de los puntos que representan la intersección del divisor con la transformada estricta de la separatriz. Estos puntos se encuentran en las componentes $D_{\alpha j}$ para los cuales ocurre que:

- $D_{\alpha j} \setminus \mathcal{S} \approx \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{2 \text{ puntos}\})$
- $D_{\alpha j} \setminus \mathcal{S} \approx \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C} \setminus \{2 \text{ puntos}\})$
- $D_{\alpha j} \setminus \mathcal{S} \approx \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}.$

Denotemos por $\mathcal{D} := D_{\alpha j}$ tal que $D_{\alpha j} \setminus \mathcal{S} \approx \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{2 \text{ puntos}\})$. Observe que $\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ o bien $\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{L}$, donde $\tilde{\mathcal{S}}$ representa la transformada estricta de la separatriz, y $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ son líneas proyectivas.

Supongamos ahora d es par, entonces existen exactamente dos componentes del divisor excepcional tal que $\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Los puntos de $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ son puntos singulares de tipo dimensional dos.

Dado que $\Omega_j \in \Sigma_{pq}^{(d_1, \dots, d_i)}$, $\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_j}$ satisface la propiedad \wp_1 . Es decir, la holonomía de las hojas $\mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$, es linealizable, esto garantiza la existencia de integral primera en torno de $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$.

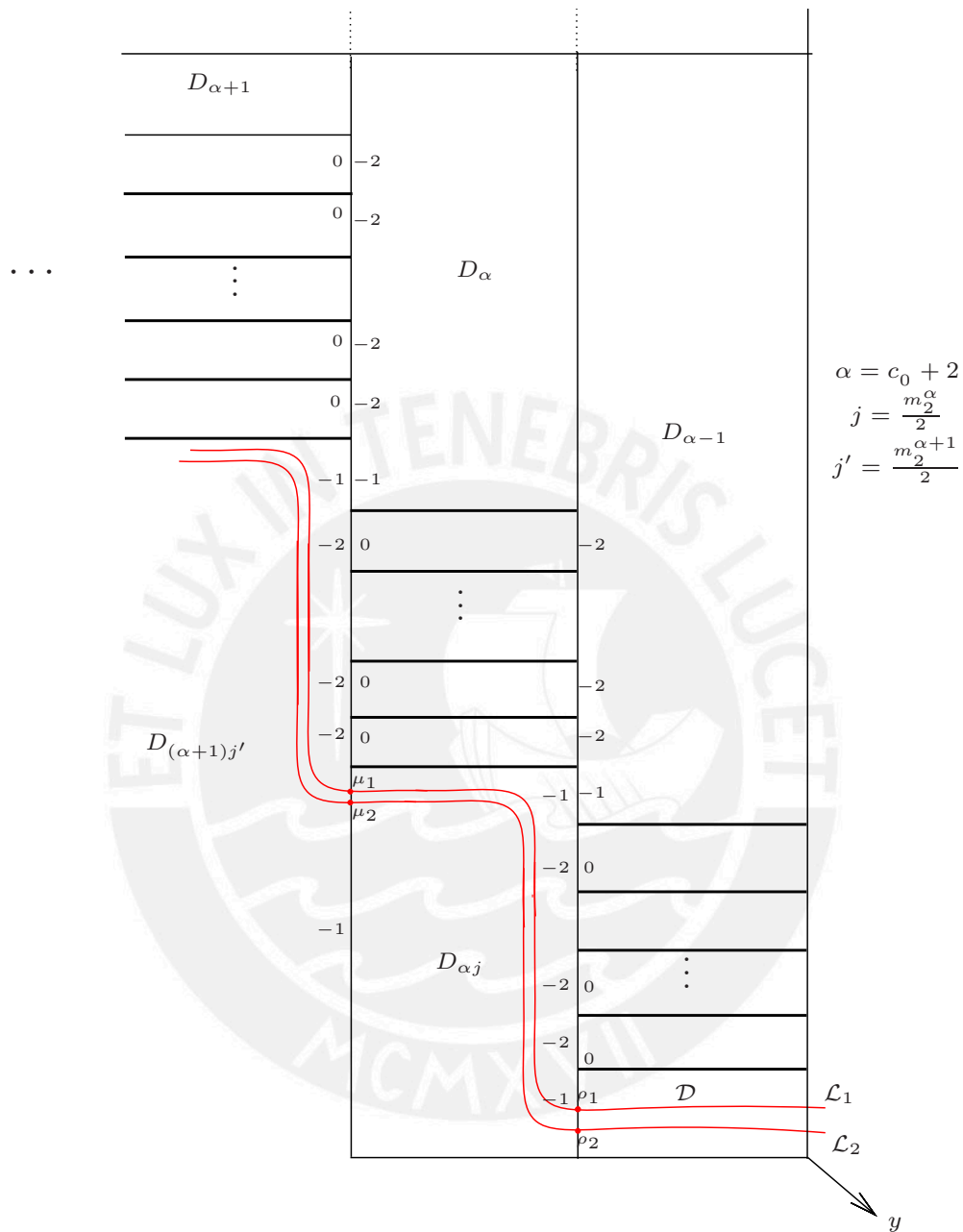


Figura 3.1

Ahora vamos a garantizar la existencia de integral primera en torno de los puntos ρ_i (ver Fig3.1). Sea h_{α_i} la holonomía asociada a α_i , lazo alrededor de \mathcal{L}_i , h_{α_i} es linealizable. Ahora considere $\beta \subset \mathcal{D} \setminus \mathcal{S} \approx \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{2 \text{ puntos}\})$, un lazo alrededor de $D_{\alpha_j} \cap \mathcal{D}$. Observe que $\beta \subset \mathbb{C} \times \{1 \text{ punto}\} \approx \mathbb{C}$, y en consecuencia la holonomía asociada a β , $h_\beta = 1_{\mathbb{C}}$. Luego el grupo de holonomía de $D_{\alpha_j} \setminus \mathcal{S}$ es linealizable y por tanto, entorno de ρ_i , $\tilde{\Omega}_i$ es linealizable. Así, existe integral primera en torno de ρ_i . Veamos ahora la existencia de integral

primera en torno de los puntos μ_i (ver Fig. 3.1). Considere h_γ la holonomía asociada a γ , lazo en torno de la línea proyectiva $D_{(\alpha+1)j'} \cap D_{\alpha j}$. Observe que γ es tal que γ^{-1} es un lazo en torno de $D_{\alpha-1} \cap D_{\alpha j}$, así $h_{\gamma^{-1}}$ es la holonomía de la hoja $D_{\alpha-1} \setminus \mathcal{S}$, el cual es periódica. Luego en torno de μ_i existe integral primera. De manera análoga, se garantiza la existencia de integral primera en torno de $E \cap \tilde{\mathcal{S}}$.

Supongamos ahora que d, q impar y p par, existe exactamente una componente para la cual $\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ y un número finito de componentes para los cuales se tiene $\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{L}$. Es fácil ver que en torno de \mathcal{L} existe integral primera. La existencia de integral primera en torno de las líneas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ se sigue por la propiedad \wp_2 . La existencia de integral primera en torno de $E \cap \tilde{\mathcal{S}}$ se sigue como en el caso anterior.

Veamos ahora la extensión de Ψ en torno de todo el divisor excepcional. La idea es, primero lograr extender a una vecindad de todas las componentes del divisor en las que la separatriz interseca y finalmente extender al resto de componentes. En ambas situaciones debemos respetar tanto la fibración como la integral primera que hemos construido anteriormente. Tenemos que $\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_j}$ son analíticamente conjugadas, vía Ψ , en un entorno de \tilde{D} . Queremos extender Ψ a una vecindad del divisor excepcional

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3.$$

Observe que $E_3 = \cup \mathcal{A}^{d_i}$, donde $\mathcal{A}^{d_i} = \cup_j \mathcal{A}_j^{d_i}$, topológicamente equivalentes a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{C}$. Como $\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_j}$ son analíticamente conjugadas en un vecindad de \tilde{D} , se sigue que Ψ es extendida a una vecindad de $\tilde{D} \cup E_3$

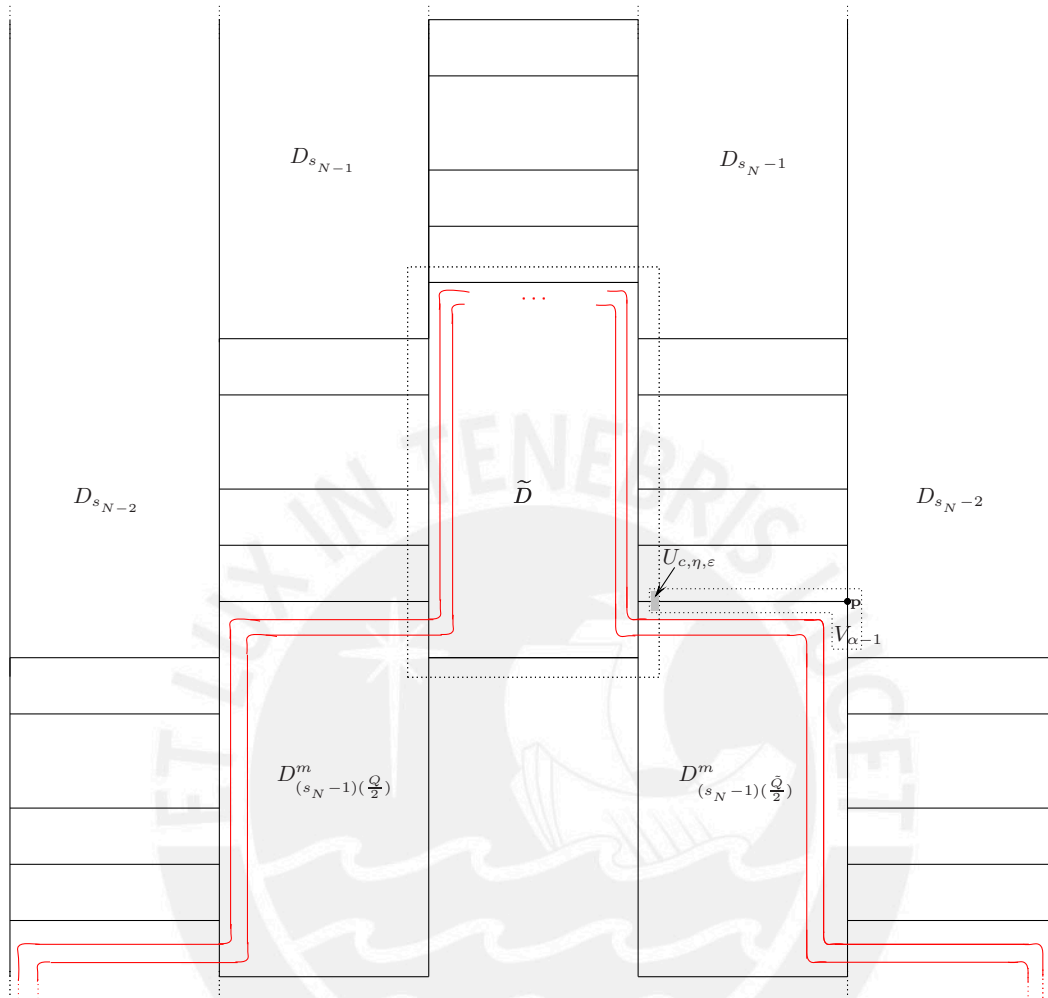


Figura 3.2

Por otro lado, en el caso d par, en torno de $\mathbf{p} := D_{\alpha-2} \cap D_{(\alpha-1)\beta} \cap D_{(\alpha-1)(\beta-1)}$, con $\alpha = s_N$ y $\beta = \frac{Q_2}{2}$ (ver Fig. 3.2) una integral primera está dada por la ecuación

$$F_j := x^{m_\nu} s^{n_\nu+2(\epsilon-1)} t^{n_\nu-2\epsilon} U_j(x, s, t) ; U_j(\mathbf{0}) \neq 0$$

donde $x := x_{\alpha-1}$; $\epsilon = \beta - 1$, $\nu = N$; $j_\nu = c_\nu - 1$.

Sea

$$V_c = \{x \in \mathbb{C} : |x| < c\},$$

para $c \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande, y

$$D_\epsilon := \{s \in \mathbb{C} : |s| < \epsilon_1\} \times \{t \in \mathbb{C} : |t| < \epsilon_2\}.$$

Para todo V_c , las foliaciones $\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_j}$ poseen integral primera holomorfa F_j definida en el abierto $V_{\alpha-1} := V_c \times D_\epsilon$. En las coordenadas (x, s, t) , Ψ está definida en un abierto $U_{c,\eta,\epsilon} :=$

$A_{c,\eta} \times D_\epsilon$, donde

$$A_{c,\eta} := \{x \in \mathbb{C} : \eta < |x| < c\}.$$

Definamos el difeomorfismo $\Psi_j := (\Psi_{j1}, \Psi_{j2}, \Psi_{j3})$, definido sobre un abierto $V_c \times D_\epsilon$ y que transforma la integral primera en $x^{m_\nu} s^{n_\nu+2(\epsilon-1)} t^{n_\nu-2\epsilon}$ y respeta la fibración, es decir:

$$\Psi_{j1}^{m_\nu} \Psi_{j2}^{n_\nu+2(\epsilon-1)} \Psi_{j3}^{n_\nu-2\epsilon} = x^{m_\nu} s^{n_\nu+2(\epsilon-1)} t^{n_\nu-2\epsilon} U_j \quad (3.1)$$

$$\Psi_{j3} \Psi_{j1}^{\frac{P}{2}-\tilde{Q}_2+2} = t x^{\frac{P}{2}-\tilde{Q}_2+2} \quad (3.2)$$

$$\Psi_{j2} \Psi_{j1}^{\tilde{Q}_2-\frac{P}{2}} = s x^{\tilde{Q}_2-\frac{P}{2}}$$

De (3.1) y (3.2) se sigue

$$\Psi_j = \left(x U_j^{\frac{1}{A}}, s U_j^{-\frac{1}{B}}, t U_j^{-\frac{1}{C}} \right)$$

donde

$$A = m_\nu + \left(\frac{P}{2} - \tilde{Q}_2\right) \cdot (4\epsilon - 2) + (4\epsilon - 2n_\nu)$$

$$B = A \cdot \left(\frac{P}{2} - \tilde{Q}_2 + 2\right)$$

$$C = A \cdot \left(\tilde{Q}_2 - \frac{P}{2}\right)$$

Ahora considere el difeomorfismo $\Theta := \Psi_2 \circ \Psi \circ \Psi_1^{-1}$, definido en el abierto $U_{c,\eta,\epsilon}$. Observe que Θ , respeta la fibración, puesto que Ψ_1, Ψ_2, Ψ lo hacen. Escribiendo $\Theta := (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$, esto significa que

$$\Theta_3 \Theta_1^{\frac{P}{2}-\tilde{Q}_2+2} = t x^{\frac{P}{2}-\tilde{Q}_2+2},$$

$$\Theta_2 \Theta_1^{\frac{\tilde{Q}_2-P}{2}} = s x^{\frac{\tilde{Q}_2-P}{2}}.$$

Como además, Θ envía $\Psi_1(\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_1})$ sobre $\Psi_2(\tilde{\mathfrak{F}}_{\Omega_2})$, y respeta la integral primera $x^{m_\nu} s^{n_\nu+2(\epsilon-1)} t^{n_\nu-2\epsilon}$, existe una unidad $g \in \mathcal{O}_1$ tal que

$$\Theta_1^{m_\nu} \Theta_2^{n_\nu+2(\epsilon-1)} \Theta_3^{n_\nu-2\epsilon} = x^{m_\nu} s^{n_\nu+2(\epsilon-1)} t^{n_\nu-2\epsilon} g(x^{m_\nu} s^{n_\nu+2(\epsilon-1)} t^{n_\nu-2\epsilon}).$$

En consecuencia

$$\Theta_1 = x g^{\frac{-1}{A}}.$$

$$\Theta_2 = s g^{-\frac{1}{B}}.$$

$$\Theta_3 = t g^{-\frac{1}{C}},$$

donde A, B, C son como antes.

La aplicación Θ es definida, en las cartas consideradas, sobre un conjunto del tipo $|x^{m_\nu} s^{n_\nu+2(\epsilon-1)} t^{n_\nu-2\epsilon}| < \varepsilon$ y este conjunto interseca el dominio de definición de Ψ . Así $\Psi = \Psi_2 \Theta \Psi_1^{-1}$ puede ser extendido a una vecindad de $D_{(\alpha-1)\beta} \cap D_{(\alpha-1)(\beta-1)}$. Repetimos el mismo argumento para extender Ψ a una vecindad de $(D_{(\alpha-1)\beta} \cap D_{\alpha_2}) \cup (D_{(\alpha-1)\beta} \cap (\cup D_{(\alpha-2)j})) \cup (D_{(\alpha-1)\beta} \cap \tilde{S})$ y en consecuencia, podemos extender Ψ a una vecindad de $D_{(\alpha-1)\beta}$. Este proceso lo podemos repetir y conseguir extender Ψ a una vecindad del divisor excepcional E . Así \mathfrak{F}_{Ω_i} son analíticamente conjugadas, fuera del lugar singular, el cuál es de codimensión dos. Finalmente, usando el Teorema de Hartogs se tiene obtiene la extensión de la conjugación en un entorno del origen.

En el caso d, q impares y p par, se procede de manera análoga. □



Anexo: Conclusiones

En este apartado resumimos las principales conclusiones de esta tesis, tal y como ha sido reflejada en la introducción y a lo largo del cuerpo de la misma.

Se han establecido condiciones suficientes para la clasificación analítica, vía la holonomía de una componente excepcional, de las foliaciones cuspidales casi homogéneas que admiten como conjunto de separatriz, una superficie de tipo admisible, definido en la Sección 1.3. Dichas condiciones están reflejadas en el Teorema 3.1.

Con vista al objetivo anterior, se ha encontrado una expresión analítica de las foliaciones de tipo hipersuperficie generalizada que admiten como conjunto de separatriz, una hipersuperficie cuspidal casi homogénea. Esta forma, que denominaremos pre-normal, es necesaria para construir una fibración, transversal a la foliación fuera de la separatriz, y que permite hallar una conjugación analítica de las foliaciones a partir de una conjugación de los difeomorfismos de holonomía. El Corolario 2.5 contiene la forma pre-normal mencionada.

Se ha hecho un estudio detallado de la reducción global de singularidades de las foliaciones que estamos considerando. Dicho estudio, para superficies, constituye el núcleo del Capítulo 1 de la memoria, y para las foliaciones cuspidales casi homogéneas, con separatriz una superficie de tipo admisible, la Sección 2.4.

Mencionamos finalmente que para estudiar el grupo de holonomía de las componentes excepcionales del divisor, es preciso estudiar de manera fina la topología (más precisamente la homotopía) de cada una de las componentes del mismo, una vez retirada la parte singular de la foliación. Una descripción geométrica del divisor excepcional constituye la Sección 1.3.1, y la topología se halla descrito en las Secciones 1.4 y 2.4.1. Para el cálculo, ha sido preciso detallar el método, en la versión moderna, de Zariski-Van Kampen; el cual usa grupos de trenzas, tal como se desarrolla en la Sección 1.4.



Bibliografía

- [A] S. S. ABHYANKAR. *On ramification of algebraic functions*. Amer. J. Math. 77(1955). 575-592.
- [ACC] E. ARTAL, J. CARMONA, AND J. I. COGOLLUDO. *Braid monodromy and topology of plane curves*, Duke Math. J., 118 (2003), 261-278.
- [ACT] E. ARTAL, J. I. COGOLLUDO, AND H.-O TOKUNAGA. *A survey on Zariski Pairs*, in Algebraic geometry in East Asia-Hanoi 2005. Avanced Studies in Pure Math., vol 50, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008, p. 1-100.
- [Ar] E. ARTIN. *Theory of braids*. Annals of Math. 48 (1946), 93-114.
- [BMN] C. BAN, L. J. MCEWAN, AND A. NÉMETHI. *The embedded resolution $f(x, y) + z^2 : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$* . Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 38 (2001), 51-71.
- [BMS] M. BERTHIER, R. MEZIANI, AND P. SAD. *On the classification of nilpotent singularities*. Bull. Sci. Math. **123** (1999), 351–370.
- [Bi] J.S.BIRMAN. *Braids, links, and mapping class group*. Princeton Uni. Press, Princeton, N.J., 1974, Ann. of Math. Stud.
- [Br71] A. D. BRJUNO *Analytic forms differential equations*. Trans. Moscow Math. Soc. Vol 25 (1971), 131-288.
- [CLS] C. CAMACHO, A. LINS NETO, AND P. SAD. *Topological invariants and equide-singularization for holomorphic vector fields*. J. Differential Geom., 20 (1984), no. 1, 143-174
- [C1] F. CANO. *Dicriticalness of a singular foliations*. pp. 73-94 Holomorphic Dymamics (México 1986), Lecture Notes in Mathematics 1345, Springer-Verlag, 1988.

- [C2] F. CANO. *Reduction of the singularities of codimension one holomorphic foliations in dimension three*. Annals of Math. 160(2004), 907–1011.
- [C3] F. CANO. *Dicriticidad de foliaciones holomorfas de codimensión uno*. Seminario Iberoamericano de Matemáticas. Vol. 3. FAsículo V-VI (2008).
- [C4] F. CANO. *Introducción a la Geometría Analítica Local*. Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú (2011).
- [CC] F. CANO AND D. CERVEAU. *Desingularization of non-dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices.*, Acta Math., 169 (1992), p. 1-103.
- [CCD] F. CANO, D. CERVEAU, AND J. DÉSERTEI. *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Collection Echelles, Belin (2013).
- [CaCo] F. CANO, N. CORRAL. *Absolutely Dicritical Foliations*. International Mathematics Research Notices, Vol. 2011, N° 8, 1926-1934. doi: 10.1093/imrn/rnq142.
- [CMa] F. CANO AND J.-F. MATTEI. *Hypersurfaces Intégrales des feuilletages holomorphes*. Ann. Inst. Fourier 42, (1992), p.49-72.
- [CeMa] D. CERVEAU AND J.-F. MATTEI. *Formes intégrables holomorphes singulières*. Astérisque, vol. 97, 1982.
- [CMou] D. CERVEAU AND R. MOUSSU. *Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $ydy + \dots = 0$* , Bull. Soc. Math. France 116 (1988) 459-488.
- [CMo] D. CERVEAU AND J. MOZO FERNÁNDEZ. *Classification analytique des feuilletages singuliers réduits de codimension 1 en dimension $n \geq 3$* , Ergod. Th. Dynam. Sys. (2002), 22, 1041-1060.
- [CH] D. CHENIOT. *Le théorème de Van Kampen sur le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe algébrique projective plane*, 395-417 Lecture Notes in Math., Vol 904, 1974.
- [Co] J.I. COGOLLUDO. *Braid Monodromy of Algebraic Curves*, Annales Mathématiques Blaise Pascal. Vol. 18, n°1 (2011), p. 141-209.
- [CGO] V. COSSART, J. GIRAUD, AND U. ORBANZ. *Resolution of surface singularities*. Lecture Notes in Mathematics, 1101, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1984. MR 87e:14032.
- [É75] J. ÉCALLE. *Théorie itérative : introduction à la théorie des invariants holomorphes*. J. Math. Pures et Appl. vol. 54 (1975), 183-258.

- [FM] P. FERNÁNDEZ AND J. MOZO. *Quasi ordinary cuspidal foliations in $(\mathbb{C}^3, 0)$* . Journal of Differential Equations 226 (2006), 250–268.
- [FM2] P. FERNÁNDEZ AND J. MOZO. *On generalized surfaces in $(\mathbb{C}^3, 0)$* . Astérisque 323 (2009), 261–268.
- [FMN] P. FERNÁNDEZ, J. MOZO, AND H. NECIOSUP. *Hipersuperficies generalizadas en $(\mathbb{C}^n, 0)$* . Pro Mathematica (2013) 71-82.
- [FMN2] P. FERNÁNDEZ, J. MOZO, AND H. NECIOSUP. *On codimension one foliations with prescribed cuspidal separatrix*. J. Differential Equations 256 (2014) 1702-1717.
- [F] R. FRIEDMAN. *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundle*. Springer Verlag, 1998.
- [Ga] Y.-N. GAU. *Embedded topological classification of quasi-ordinary singularities*. Mem. Amer. Math. Soc. 74 (1988), 109-129
- [Ge] Y. GENZMER. *Rigidity for dicritical germ of foliation in \mathbb{C}^2* . International Mathematics Research Notices 19 (2007), 14pp. doi:10.1093/imrn/rnm072.
- [Ge2] Y. GENZMER. *Analytical and Formal Classifications of quasi-homogeneous foliations in $(\mathbb{C}^2, 0)$* . Journal of Differential Equations 245 (2008) 1656-1680.
- [Go] P. D. GONZÁLES PEREZ. *Quasi-ordinary Singularities via toric Geometry*. PhD. Universidad de Laguna 2000.
- [Gon] G. GONZÁLES SPRINBERG. *Quelques descriptions de désingularisations plongées de surfaces*. Kodai Math. J. 14 (1991), 181-193.
- [Gr] A. GROTHENDIECK. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*. Aw. J. Math. 79 (1957), 121-138.
- [Har] R. HARTSHORNE. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52. Springer Verlag 1977.
- [Hau] H. HAUSER. *The Hironaka theorem on resolution of singularities (or: A proof we always wanted to understand)*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S), 40(3):323-403 (electronic), 2003.
- [He] C. HERTLING. *Formules pour la multiplicité et le nombre de Milnor d'un feuilletage sur $(\mathbb{C}^2, 0)$* . Ann. Fact. Sci. Toulouse, Vol. IX, 4 (2000), 655-670.

- [Hi] H. HIRONAKA. *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II*. Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109-203, 205-326. MR 33 # 7333.
- [KK] V. KHARLAMOV AND V. KULLIKOV. *On braid monodromy factorizations*. Izvestia. Math. 67 (2003), 79-118 (math. AG/0302113).
- [L1] J. LIPMAN. *Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces*. Ph.D. thesis, Harvard University, 1965.
- [L2] J. LIPMAN. *Quasi-ordinary singularities of surfaces in \mathbb{C}^3* . Singularities (Proc. Symp. PureMath. 40), Amer. Math. Soc. Providence 1983, Part 2, 161-171.
- [L3] J. LIPMAN. *Topological invariants of quasi-ordinary singularities*. Mem. Amer. Soc. 74 (1988), 1-107.
- [Lo1] F. LORAY. *Réduction formelle des singularités cuspidales de champs de vecteurs analytiques*. J. Differential Equations 158 (1999) 152-173.
- [Lo2] F. LORAY. *A preparation theorem for codimension one foliations*, Ann. of Math. 163 (2006), 709–722.
- [LM] F. LORAY AND R. MEZIANI. *Classification de certains feuilletages associés à un cusp*. Bol. Soc. Brail. Math. 25 (1994), 93–106.
- [Lu] I. LUENGO. *Sobre la estructura de las singularidades de las superficies algebroides sumergidas*. PhD Thesis, Universidad Complutense de Madrid, 1979.
- [Ma] B. MALGRANGE. *Frobenius avec singularités. I. Codimension un*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 46 (1976), 163-173.
- [M] J. MARTINET. *Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après Brujno)*. Séminaire Bourbaki 33e année, N° 564, 1980/81, en Séminaire Bourbaki vol 1980/81. Exposés 561-578. Springer LNM 901 (1981).
- [MR1] J. MARTINET AND J.-P. RAMIS. *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*. Publ. Math. I.H.É.S. 55 (1982), 63–164.
- [MR2] J. MARTINET AND J.-P. RAMIS. *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*. Ann. Sci.École Normale Sup. 16 (1983) 571–621.
- [MM] J.F. MATTEI AND R. MOUSSU. *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Normale Sup. 13 (1980) 469–523.

- [MN] R. MENDRIS AND ANDRÁS NÉMETHI. *The link of $\{f(x, y) + z^n = 0\}$ and Zariski's conjecture*, Compositio Math. 141 (2005) 502-524.
- [Me] R. MEZIANI. *Classification analytique d'équations différentielles $ydy + \dots = 0$ et espaces de modules*. Bol.Soc.Brasil Mat. **27** (1996), 23–53.
- [MS] R. MEZIANI AND P. SAD. *Singularités nilpotentes et intégrales premières*. Publ. Mat. **51** (2007), 143–161.
- [Moi] B. MOISHEZON. *Stable branch curva and braid monodromies*. Algebraic Geometry. Chicago, 1980. Lecture Notes in Math. 862. Springer, Heidelberg. 1981, pp. 107-192.
- [Mou1] R. MOUSSU. *Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff*. Ann. Inst. Fourier 26(2) (1976), 171-220.
- [Mou2] R. MOUSSU. *Holonomie évanescence des équations différentielles dégénérées transverses*. In singularities and Dynamical systems. North Holland 1985, pp 151-173.
- [Pa] E. PAUL. *Formal normal forms for the perturbation of a quasi-homogeneous hamiltonian vector field*. Journal Dyn. Control Systems, Vol. 10, no. 4 (2004), 545–575.
- [Pi] A. PICHON. *Singularities of complex surfaces with equations $z^k + f(x; y) = 0$* . Math. Res. Notices (1997), no. 5, 241-246.
- [Po79] H. POINCARÉ. *Prémière Thèse.-Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles, en Thèses présentées à la faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences Mathématiques*. Gauthier-Villars (1879) .
- [Sa] K. SAITO. *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 27 (2) (1980) 265-291.
- [Sc] E. SCHENKMANN. *Group theory*. Van Nostrand 1965.
- [Se] A. SEIDENBERG. *Reduction of the singularities of the differentiable equation $Ady = Bdx$* . Amer. J. Math., 90 (1968), 248-269.
- [Ste] N. STEENROD. *Topology of fibre bundles*. Princeton University Press, Princeton, 1965.
- [Str] E. STRÓŻYNA. *The analytic and formal normal form for the nilpotent singularity. The case of generalized saddle-node*. Bull. Sci. Math. **126** (2002), 555–579.

- [Ta] F. TAKENS. *Singularities of vector fields*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **43** (1974) 47–100.
- [Te] M. TEICHER. *Braid group, algebraic surfaces and fundamental groups of complements of branch curves*. Algebraic Geometry. Santa Cruz, 1995. Proc. Sympos. Pure Math. 62 (part 1). Amer. Math. Soc. Providence, 1997, pp. 127-150.
- [VK] E. VAN KAMPEN. *On the fundamental group of an algebraic curve*. Amer. J. Math. Vol. 55 (1933).
- [Vi] O. VILLAMAYOR. *Constructiveness of Hironaka's resolutions*; Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 22(1):1-32, 1989.
- [Vo81] S. VORONIN. *Analytic Clasification of Germs of conformal Mappings $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ with Identity linear part*. Funct. Analysis and its Appl. 15 n° 1 (1981).
- [Za] O. ZARISKI. *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*. Amer. J. Math. 51 (1929), 305-328.