

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

“Webs planos y foliaciones Galois”

Tesis para optar el grado de doctor en matemáticas

AUTOR

Andrés William Beltrán Cortez

DIRIGIDA POR:

David Marín Pérez
Maycol Falla Luza

JURADO

Maycol Falla Luza
Thiago Fassarella do Amaral
Percy Fernández Sánchez
David Marín Pérez
Rudy Rosas Bazán

LIMA-PERÚ

2014



Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a mi director de tesis David Marín Pérez, por aceptar dirigir esta tesis, compartir sus ideas y conocimientos conmigo, los que han sido de incalculable valor en el desarrollo de este trabajo; por su disponibilidad cuando tuve alguna duda, su apoyo constante e incondicional durante mis estancias en Barcelona, por toda su paciencia, consejos y por abrir las puertas de su hogar para conocer su familia y brindarme su amistad.

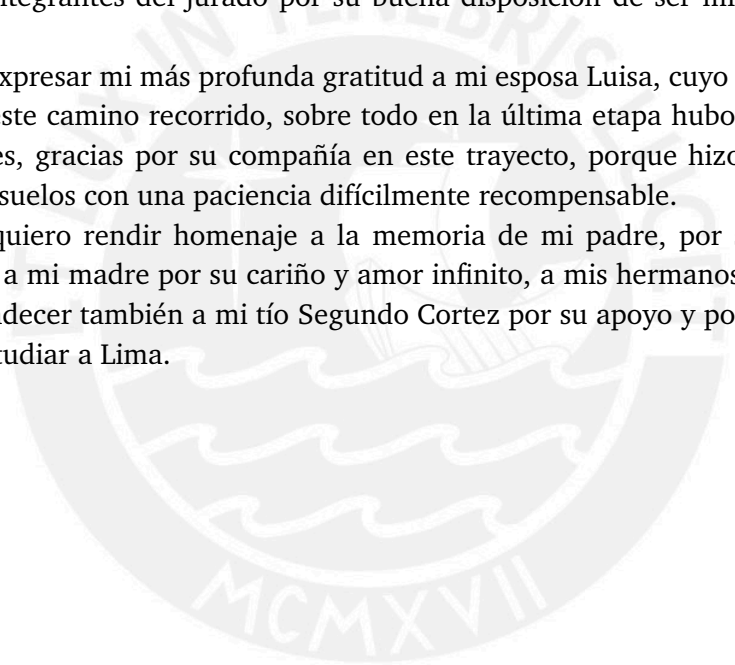
Quiero también agradecer a mi codirector de Tesis, Maycol Falla Luza por su orientación paciente y estímulo constante durante el desarrollo de esta tesis, por brindarme su apoyo durante mi estancia en Brasil donde pude conocer a toda su familia y compartir gratos momentos.

Agradecer también a Percy Fernández por invitarme a realizar los estudios de doctorado en la PUCP y por su interés permanente en los avances de mi tesis.

A todos los integrantes del jurado por su buena disposición de ser miembros del mismo.

Me gustaría expresar mi más profunda gratitud a mi esposa Luisa, cuyo amor siempre brilló sobre este camino recorrido, sobre todo en la última etapa hubo momentos y tiempos difíciles, gracias por su compañía en este trayecto, porque hizo tuyas mis alegrías y desconsuelos con una paciencia difícilmente recompensable.

Finalmente, quiero rendir homenaje a la memoria de mi padre, por su apoyo y buenos consejos, a mi madre por su cariño y amor infinito, a mis hermanos Luis, Rosa y Genoveva; agradecer también a mi tío Segundo Cortez por su apoyo y por acogerme cuando vine a estudiar a Lima.



Índice general

Agradecimientos	2
Introducción	4
1. Preliminares	9
1.1. Foliaciones	9
1.2. Teoría local y global de webs	13
1.3. Recubrimientos, monodromía y automorfismos de recubrimiento	22
1.4. Recubrimientos Galois	29
2. Webs planos en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$	32
2.1. Rectas duales a singularidades	34
2.2. Caso homogéneo:	36
2.3. Teoremas principales	39
3. Foliaciones, webs y transformaciones biracionales sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$	47
3.1. Foliaciones, webs y foliaciones Galois	47
3.2. Ejemplos de foliaciones Galois	52
3.3. Monodromía local	56
3.4. Foliaciones con grupo continuo de automorfismos	62
3.5. Aplicaciones racionales de la recta proyectiva en si misma	71
3.6. Foliaciones homogéneas	72
3.7. Hexagonalidad y estructura transversalmente afin	75

Introducción

Un k -web \mathcal{W} viene dado por una ecuación diferencial ordinaria de primer orden definida de forma implícita por un polinomio de grado k que puede entenderse como una estructura geométrica descrita localmente por k -foliaciones en posición general. La geometría de webs es el estudio de invariantes de familias finitas de foliaciones y fue iniciado por Blaschke y su escuela a inicios de la década de 1920 en Hamburgo. Uno de los resultados emblemáticos obtenido por él junto con Dubordieu, es el que caracteriza la equivalencia local de un germen de un 3-web \mathcal{W} en el plano complejo con el 3-web definido por $dx \cdot dy \cdot d(x+y)$ a través del anulamiento de un covariante diferencial: la curvatura $K(\mathcal{W})$ del web \mathcal{W} , que es una 2-forma meromorfa con polos en su discriminante $\Delta(\mathcal{W})$, este último conjunto es el lugar donde las tangentes a las hojas de las foliaciones que conforman el web dejan de ser transversales. La estructura local de un k -web no es rígida como sucede en los casos $k = 1, 2$ sino que admiten invariantes analíticos no triviales: el **rango de un web**, que no es sino la dimensión de un espacio que relaciona las integrales primeras de las foliaciones que definen a un web, y su **curvatura**. El estudio de webs desde el punto de vista local ha sido tratado por diferentes autores, ver [2, 11]. Un ejemplo de un k -web proveniente de la geometría algebraica proyectiva es obtenido al considerar una curva algebraica reducida C sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ de grado k , la curva dual $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ de C es la curva formada por las tangentes a C . Como \check{C} es de clase k entonces por un punto genérico $\ell \in \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ pasan exactamente k tangentes a \check{C} . Podemos considerar estas k rectas como hojas de foliaciones sobre un abierto Zariski de $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$, de esta manera obtenemos un k -web, llamado web algebraico asociado a la curva C , denotado por \mathcal{W}_C . Como consecuencia de un teorema clásico de Abel, el rango del k -web \mathcal{W}_C es maximal, en el sentido que coincide con la cota superior $(k-1)(k-2)/2$. Para un k -web con $k > 3$ la curvatura es definida como la suma de las curvaturas de todos los 3-subwebs extraídos de un web \mathcal{W} . Mihăileanu obtiene un resultado donde demuestra que el anulamiento de la curvatura de un k -web es una condición necesaria para la maximalidad del rango de \mathcal{W} , ver [32]. Los webs de rango máximo que no son localmente equivalentes a ningún web algebraico \mathcal{W}_C han sido denominados **excepcionales**. En [25] los autores demuestran que para cada $k > 4$ existe una familia infinita de k -webs excepcionales contenidos en el espacio de k -webs de grado 1.

Los webs holomorfos globalmente definidos en superficies complejas compactas han comenzado recientemente a estudiarse, ver [26, 25, 24]. La construcción realizada con los webs algebraicos puede generalizarse para foliaciones: Si \mathcal{F} es una foliación de grado k sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, usando la extensión de la dualidad proyectiva obtenemos un k -web $\text{Leg}\mathcal{F}$ de grado 1, llamado **web dual de \mathcal{F}** o **transformado de Legendre de \mathcal{F}** , sobre $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$. Decimos que un web es **plano** si su curvatura asociada es idénticamente nula. Nos interesa estudiar los webs $\text{Leg}\mathcal{F}$ planos. La clasificación analítica local de 3-webs planos sobre \mathbb{C}^2 está completamente resuelto gracias al teorema de Blaschke y Dubordieu, sin embargo la clasificación global de estos objetos sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ aún es un problema abierto. Los k -webs planos sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ forman un cerrado Zariski en el conjunto de k -webs de grado d en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

El primer resultado que obtenemos caracteriza la plitud del web dual de una foliación \mathcal{F} de grado 3 en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ mediante la holomorfía de su curvatura a lo largo de ciertas componentes irreducibles de su discriminante. Para lograr esto analizamos dos tipos de objetos asociados a una foliación que generan componentes en el discriminante del web dual: las singularidades con tangencia alta, y las componentes no invariantes de la curva de inflexión. Un criterio importante para obtener este resultado es el siguiente: La curvatura de un 3-web \mathcal{W} sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es idénticamente nula si y solo si es holomorfa en un punto genérico de cualquier componente irreducible de su discriminante $\Delta(\mathcal{W})$.

La superficie donde trabajamos es el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y sobre este espacio consideramos foliaciones \mathcal{F} cuyo conjunto singular lo denotamos por $\Sigma_{\mathcal{F}}$ y su divisor de inflexión $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ es dado por el anulamiento del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ X(x) & X(y) & X(z) \\ X^2(x) & X^2(y) & X^2(z) \end{vmatrix},$$

donde X es el campo vectorial homogéneo en \mathbb{C}^3 que define la foliación \mathcal{F} . Asimismo, la aplicación de Gauss asociada a \mathcal{F} es la aplicación racional $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ definida por $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(p) = T_p\mathcal{F}$, donde $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ denota el plano proyectivo dual y $T_p\mathcal{F}$ es la recta tangente a la hoja de \mathcal{F} que pasa por p .

A continuación presentamos el primer resultado:

Teorema 0.1. *Sea \mathcal{F} una foliación de grado 3 sobre $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ tal que su conjunto singular $\Sigma_{\mathcal{F}}$ no tiene componentes múltiples. Entonces $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ si y solo si $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa sobre puntos genéricos de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}})$.*

El segundo resultado caracteriza los webs $\text{Leg}\mathcal{F}$ planos en términos de la geometría del divisor de inflexión, siendo \mathcal{F} una foliación saturada.

Corolario 0.2. *Sea \mathcal{F} una foliación saturada de grado 3 sobre $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ con divisor de inflexión transversal $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$ reducido. Una condición necesaria y suficiente para que $\text{Leg}\mathcal{F}$ sea plano es que para cada componente irreducible \mathcal{C} de $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$ la curva de terceras tangencias \mathcal{C}^{\perp} sea \mathcal{F} -invariante, donde $\mathcal{C}^{\perp} = \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 : \text{Tang}(\mathcal{F}, T_p\mathcal{F}) = 2p + q, q \in \mathcal{C}\}$.*

El tercer resultado que obtenemos clasifica las foliaciones homogéneas \mathcal{F} de grado 3 sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con divisor de inflexión reducido y cuyo transformado de legendre $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano. Esta proposición nos dice que salvo automorfismos proyectivos existe una única foliación que es descrita de manera explícita.

Proposición 0.3. *Sea \mathcal{F} una foliación homogénea de grado 3 sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ hexagonal tal que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ es reducido. Entonces salvo conjugación por un automorfismo de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, \mathcal{F} es una de las siguientes foliaciones*

$$X = \left(\frac{1}{4}\nu x^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu\right)x^2y + \frac{3}{4}xy^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{3}{4}\nu x^2y + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu\right)xy^2 - \frac{1}{4}y^3 \right) \frac{\partial}{\partial y},$$

donde $\nu = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$.

Por otro lado, en [7] los autores describen una forma de asociar a una foliación \mathcal{F} de grado 3 una transformación biracional: si ℓ es una recta genérica entonces es tangente a \mathcal{F} en tres puntos, una aplicación que permute estos tres puntos es, en general, multivaluada, sin embargo ellos dan un criterio para que esta sea una transformación biracional. Asimismo, se interesan en escribir el conjunto (algebraico) de aquellas foliaciones de grado 3 admitiendo una tal trivolución biracional, centrándose especialmente en el caso de foliaciones homogéneas que genéricamente (si el cono tangente en el origen de coordenadas es reducido) admiten la siguiente forma normal

$$\mathcal{F}_{\alpha,\lambda,\mu,\nu} : \frac{dx}{x} + \lambda \frac{dy}{y} + \mu \frac{(dy - dx)}{y - x} + \nu \frac{(dy - \alpha dx)}{y - \alpha x} = 0,$$

donde los parámetros complejos $(\alpha, \lambda, \mu, \nu)$ admisibles verifica la condición:

$$\alpha(\alpha - 1)\lambda\mu\nu(1 + \lambda + \mu + \nu) \neq 0.$$

En particular, D. Cerveau y J. Deserti en [7] consideran el conjunto \mathcal{T} de parámetros admisibles $(\alpha, \lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^4$ tales que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\alpha,\lambda,\mu,\nu}$ admite una trivolución biracional $\tau : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tal que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \tau = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ y muestran los siguientes resultados:

- a) \mathcal{T} es una superficie compleja de \mathbb{C}^4 ,
- b) el punto $(-1, 1, 1, 1)$ en \mathcal{T} admite una vecindad U tal que $U \cap \mathcal{T}$ es una superficie suave,
- c) la traza de \mathcal{T} con el hiperplano $\alpha = -1$ consiste de dos curvas irreducibles que se encuentran en el punto $(-1, 1, 1, 1)$.

Además, presentan los siguientes problemas:

- i) ¿Es el conjunto algebraico descrito anteriormente racional, es irreducible?
- ii) ¿Existe alguna relación entre las trivoluciones no triviales asociadas a una foliación y la hexagonalidad de su web dual?

En [7] también se observa que la restricción de la aplicación de Gauss a un abierto Zariski es un recubrimiento, y que la existencia de una tal trivolución biracional para una foliación de grado 3 implica que ese recubrimiento es Galois. Este hecho motiva la definición de foliación Galois como aquella cuya aplicación de Gauss restringe a un recubrimiento Galois. Sea \mathbb{G}_d el conjunto formado por las foliaciones Galois de grado d en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Los siguientes resultados de este trabajo constituyen respuestas parciales a las interrogantes planteadas por Cerveau y Deserti a un contexto más general:

Teorema 0.4. *El subconjunto de $\mathbb{H}_d \cap \mathbb{G}_d \subset \mathbb{H}_d$ formado por las foliaciones homogéneas Galois de grado d es un conjunto constructible y sus componentes consisten en las órbitas de las foliaciones*

1. $x^d \frac{\partial}{\partial x} + y^d \frac{\partial}{\partial y}$, para cada d ,
2. $(x^n + y^n)^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x^n - y^n)^2 \frac{\partial}{\partial y}$ si $d = 2n$ es par,
3. $(-x^4 - 2\sqrt{3}ix^2y^2 + y^4)^3 \frac{\partial}{\partial x} + (-x^4 + 2\sqrt{3}ix^2y^2 + y^4)^3 \frac{\partial}{\partial y}$, si $d = 12$,
4. $(xy^5 - x^5y)^4 \frac{\partial}{\partial x} + (x^8 + 14x^4y^4 + y^8)^3 \frac{\partial}{\partial y}$, si $d = 24$,
5. $(xy(-x^{10} + 11x^5y^5 + y^{10}))^5 \frac{\partial}{\partial x} + (x^{20} + 228x^{15}y^5 + 494x^{10}y^{10} - 228x^5y^5 + y^{20})^3 \frac{\partial}{\partial y}$, si $d = 60$

por una acción explícita $\varphi : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{H}_d \rightarrow \mathbb{H}_d$. La clausura de cada órbita es una variedad uniracional. La primera componente es 5-dimensional y las restantes 6-dimensional. Cada componente irreducible corresponde a un grupo de Galois diferente: cíclico C_d , diedral D_n , tetraedral A_4 , octaedral S_4 y icosaedral A_5 respectivamente.

Finalmente, antes de dar el último resultado damos la definición de estructura transversalmente afin singular. Una **estructura transversalmente afin singular** para una foliación \mathcal{F} sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ consiste de un par (ω, η) de 1-formas meromorfas verificando las siguientes condiciones

- a) ω define \mathcal{F} ,
- b) $d\omega = \omega \wedge \eta$,
- c) $d\eta = 0$.

El resultado principal en esta sección está referida a que la hexagonalidad del web $\mathrm{Leg}\mathcal{F}$ implica que la foliación \mathcal{F} sea transversalmente afín.

Proposición 0.5. *Sea \mathcal{F} una foliación de grado d sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Si el web $\mathrm{Leg}\mathcal{F}$ es hexagonal entonces \mathcal{F} admite una estructura singular transversalmente afín. En particular, \mathcal{F} admite integral primera liouviliana.*

Recientemente en Cousin y Pereira probaron que existe una dicotomía para foliaciones transversalmente afines singulares en variedades complejas con primer número de Betti cero.

Teorema 0.6 (Cousin-Pereira). *Sea X una variedad compleja proyectiva tal que $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$ y \mathcal{F} una foliación singular transversalmente afin sobre X . Entonces al menos una de las siguientes afirmaciones se cumple:*

1. *Existe un morfismo Galois finito $p : Y \rightarrow X$ tal que $p^*\mathcal{F}$ es definida por una 1-forma racional cerrada; o*
2. *Existe una foliación Ricatti \mathcal{R} transversalmente afin sobre una superficie reglada S y una aplicación racional $q : X \dashrightarrow S$ tal que $\mathcal{F} = q^*\mathcal{R}$.*

En el primer capítulo damos las definiciones de foliaciones, webs, curvatura de un webs y algunos resultados sobre estos objetos (ver [24]). Asimismo, recordamos la definición de recubrimientos, monodromía y resultados vinculados a estos temas que usaremos en los siguientes capítulos. En el segundo capítulo probamos los teoremas 0.1 y 0.2. Finalmente, en el tercer capítulo empezamos con la definición de foliación Galois y presentamos ejemplos explícitos de foliaciones Galois que generalizan los dados en [7]. Además, describimos completamente la geometría del conjunto de foliaciones homogéneas Galois. Posteriormente, generalizamos la situación homogénea considerando foliaciones que admiten un grupo continuo de automorfismos. Y terminamos el capítulo presentando un resultado donde se muestra que la hexagonalidad del web $\text{Leg}\mathcal{F}$ implica que la foliación \mathcal{F} sea transversalmente afin.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Foliaciones

Una foliación \mathcal{F} holomorfa sobre una superficie compleja \mathbf{S} es dada por un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de \mathbf{S} y 1-formas ω_i definidas sobre cada U_i , tales que sobre cada intersección no vacía $U_i \cap U_j$ existe una función holomorfa g_{ij} no nula verificando la relación

$$\omega_j = g_{ij} \omega_i \quad (1.1)$$

El conjunto singular $\Sigma_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} es el subconjunto de \mathbf{S} definido por $\Sigma_{\mathcal{F}} \cap U_i = \text{Sing } \omega_i$, para todo $i \in I$, donde $\text{Sing } \omega_i = \{p \in U_i : \omega_i(p) = 0\}$. La foliación \mathcal{F} es **saturada** si la codimensión de $\Sigma_{\mathcal{F}}$ es ≥ 2 . En caso contrario, decimos que la foliación es no saturada.

El **grado de una foliación** \mathcal{F} en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es el número de puntos de tangencia de \mathcal{F} con una recta proyectiva genérica en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

La superficie donde trabajaremos a partir de ahora es el plano proyectivo complejo $\mathbf{S} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Sean \mathcal{F} una foliación holomorfa sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ de grado d y $\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ la proyección canónica natural y denotemos por \mathcal{F}^* el pullback $\pi^* \mathcal{F}$ de \mathcal{F} por π , entonces \mathcal{F}^* es definida por la 1-forma $\pi^* \omega_i$ sobre $\pi^{-1}(U_i)$. Teniendo en cuenta que, $H^1(\mathbb{C}^3, \mathcal{O}^*) = \{1\}$, existe una 1-forma global holomorfa ω sobre $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ que define \mathcal{F}^* sobre $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. El teorema de Hartogs garantiza que ω puede extenderse holomórficamente en 0. Por construcción se tiene $\iota_R \omega = 0$, donde $R = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ es el campo radial, ver [9].

De la secuencia de Euler

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(1)^{\oplus 3} \rightarrow T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow 0$$

se sigue que las secciones $\omega \in H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \Omega_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}^1(d+2))$ y $X \in H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2(d-1))$ que definen la misma foliación pueden ser presentadas en coordenadas homogéneas por

- i) Un campo vectorial homogéneo con coeficientes de grado d de la forma

$$X = A(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + C(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

ii) Una 1-forma homogénea con coeficientes de grado $d + 1$

$$\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

verificando la relación $\iota_R \omega = \omega(R) = 0$, donde $R = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ es el campo vectorial radial.

La relación entre X y ω viene dada por

$$\omega = \iota_R \iota_X (\Omega), \quad \text{donde } \Omega = dx \wedge dy \wedge dz \quad (1.2)$$

Sea \mathcal{F} una foliación saturada de grado d sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, supongamos que X denota el campo que define \mathcal{F} y $s \in \Sigma_{\mathcal{F}}$. Definimos

1. El **orden de anulaci3n** de \mathcal{F} en $s \in \Sigma_{\mathcal{F}}$, llamado tambi3n **multiplicidad algebraica**, por

$$\nu_s(\mathcal{F}) := \min\{k \geq 0 : J_s^k X \neq 0\},$$

donde $J_s^k X$ denota el k -jet de X en s ,

2. El **orden de tangencia o multiplicidad de tangencia** entre \mathcal{F} y una recta gen3rica pasando por s por

$$\tau_s(\mathcal{F}) := \min\{k \geq \nu_s(\mathcal{F}) : \det(J_s^k X, R_s) \neq 0\},$$

donde R_s es el campo radial centrado en s ,

3. \mathcal{F} tiene **singularidad radial** en s de orden $\nu - 1$ si el campo que define \mathcal{F} es de la forma

$$X = C_{\nu} \cdot R + X_{\nu} + \text{t.o.s.},$$

donde C_{ν} es un polinomio de grado $\nu - 2$ tal que $C_{\nu}(s) \neq 0$, X_{ν} es un campo homog3neo de grado ν y $X_{\nu} \nparallel R$. Es claro que este tipo de singularidades tienen parte lineal no nula. Asimismo, el orden de tangencia $\tau_s(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} con una recta gen3rica pasando por s es ν . Las singularidades radiales de orden 1 son tambi3n llamadas singularidades radiales simples.

4. El **conjunto de singularidades especiales** de \mathcal{F} ,

$$\Sigma_{\mathcal{F}}^e = \{s \in \Sigma_{\mathcal{F}} : \tau_s(\mathcal{F}) \geq 2\}.$$

Observemos que los elementos de $\Sigma_{\mathcal{F}}^e$, pueden ser tambi3n caracterizados de la siguiente manera,

$$\Sigma_{\mathcal{F}}^e = \{s \in \Sigma_{\mathcal{F}} : \nu_s(\mathcal{F}) \geq 2 \text{ o } s \text{ es singularidad radial}\}.$$

Observacion 1.1.

1. $\text{Tang}(\mathcal{F}, \ell) \geq \tau_s$, para toda recta ℓ pasando por s .

2. $\tau_s = \text{Tang}(\mathcal{F}, \ell)$ para una recta genérica ℓ .

Ejemplo 1.2. Sea \mathcal{F} la foliación dada por $X(x, y) = (x^2 + xy + x^3)\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + xy^2)\frac{\partial}{\partial y}$. Es claro que $s_1 = (0, 0)$, $s_2 = (-1, 0) \in \Sigma_{\mathcal{F}}$. Se cumple

$$J_{s_1}^1 X = 0, \quad J_{s_1}^2 X = (x^2 + xy)\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} \neq 0$$

$$\text{y } \det(J_{s_1}^2 X, R_{s_1}) = \begin{vmatrix} x^2 + xy & y^2 \\ x & y \end{vmatrix} = x^2 y \neq 0. \text{ Luego, } \nu_{s_1}(\mathcal{F}) = 2 \text{ y } \tau_{s_1}(\mathcal{F}) = 2.$$

Por otro lado, $J_{s_2}^1 X = (1 + x - y)\frac{\partial}{\partial x} \neq 0$ y $\det(J_{s_2}^1 X, R_{s_2}) = y(1 + x - y)$, entonces $\nu_{s_2}(\mathcal{F}) = 1$ y $\tau_{s_2}(\mathcal{F}) = 1$. |

Ejemplo 1.3. Si $X = X_1 + X_2 + X_3 + H \cdot R$, donde X_i es un campo homogéneo de grado i y $X_1 = H_1 \cdot R \neq 0$, $X_2 = H_2 \cdot R$ y $X_3 \nparallel R$, entonces $\nu_s(\mathcal{F}) = 1$ y $\tau_s(\mathcal{F}) = 3$, siendo $s = (0, 0) \in \Sigma_{\mathcal{F}}$. |

Ejemplo 1.4. Supongamos que \mathcal{F} admite una singularidad radial simple en $s = (0, 0)$. El campo que induce \mathcal{F} es de la forma

$$X = aR_s + X_2 + X_3 + H \cdot R_s,$$

donde $X_2 \nparallel R_s$, $a \neq 0$ y R_s es el campo vectorial pasando por s . Se tiene que $\nu_s(\mathcal{F}) = 1$, y $\tau_s(\mathcal{F}) = 2$, pues

$$\det(J_s^1 X, R_s) = 0 \quad \text{y} \quad \det(J_s^2 X, R_s) = a_{0,2}y^3 + (a_{2,0} - b_{1,1})x^2y + (a_{1,1} - b_{0,2})xy^2 - b_{2,0}x^3,$$

$$\text{donde } X_2 = \sum_{i+j=2} (a_{ij}x^i y^j \frac{\partial}{\partial x} + b_{ij}x^i y^j \frac{\partial}{\partial y}) \quad |$$

Sea (x, y) una carta afín de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tal que $s = (0, 0)$ es un punto singular de la foliación \mathcal{F} definida por la forma $A dx + B dy$, el número de Milnor $\mu_s(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} en s se define por

$$\mu_s(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle A, B \rangle},$$

donde $\langle A, B \rangle$ denota el ideal generado por A y B .

Lema 1.5. Sean \mathcal{F} una foliación dada por el campo vectorial $X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}$ y $s \in \Sigma_{\mathcal{F}}$. Se cumple

$$\mu_s(\mathcal{F}) \geq \nu_s(A) \cdot \nu_s(B),$$

donde $\nu_s(A)$ y $\nu_s(B)$ son los órdenes de anulación de A y B respectivamente en el punto s .

Para la prueba ver [14, Pág. 158]

Teorema 1.6 (Teorema de Darboux). Si \mathcal{F} es una foliación saturada sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ de grado $d = \text{deg}(\mathcal{F})$, entonces el número de puntos singulares, contando multiplicidades, es

$$\sum_{p \in \Sigma_{\mathcal{F}}} \mu_p(\mathcal{F}) = d^2 + d + 1 \tag{1.3}$$

Para la prueba ver [38, Cap. 10].

Es importante notar que a partir de este resultado se deduce que no existen foliaciones regulares sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Una curva algebraica \mathcal{C} es llamada **invariante** por la foliación \mathcal{F} si es unión de hojas de \mathcal{F} . Una hoja H unidimensional es llamada **algebraica** si su clausura topológica forma una curva algebraica invariante.

Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ de grado d , el **divisor de inflexión** $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} es dado por la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ X(x) & X(y) & X(z) \\ X^2(x) & X^2(y) & X^2(z) \end{vmatrix} = 0, \tag{1.4}$$

donde $X(x, y, z)$ es el campo vectorial que define \mathcal{F} . Este divisor ha sido introducido y estudiado en [29], donde se demuestran las siguientes propiedades:

- 1) $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ no depende de una elección particular de un sistema de coordenadas $(x : y : z)$ sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$,
- 2) Sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Sigma_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ coincide con la curva descrita por los puntos de inflexión de las hojas de \mathcal{F} ,
- 3) Si \mathcal{C} es una curva algebraica irreducible e invariante de \mathcal{F} , entonces $\mathcal{C} \subset \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ si y solo si \mathcal{C} es una recta invariante,
- 4) $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ puede descomponerse $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} + \mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{inv}}$, donde el soporte de $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$ es la clausura de los puntos de inflexión a lo largo de las hojas de \mathcal{F} que no son rectas y $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{inv}}$ es formado por la unión de rectas invariantes por \mathcal{F} ,
- 5) El grado del divisor $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ es $3d$.

Decimos que \mathcal{F} es una **foliación convexa** si su divisor de inflexión $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ es totalmente invariante, es decir $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ es producto de rectas invariantes.

Ejemplo 1.7. La foliación \mathcal{F} definida por el campo $X(x, y) = (x^3 - x)\frac{\partial}{\partial x} + (y^3 - y)\frac{\partial}{\partial y}$ es una foliación convexa, pues el soporte del divisor de inflexión es

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{xy(y-1)(y+1)(x-1)(x+1)(x-y)(x+y)z = 0\}.$$

Ejemplo 1.8. La foliación \mathcal{F} definida por el campo $X(x, y) = x^3 \frac{\partial}{\partial x} - (x^2 y + y) \frac{\partial}{\partial y}$ no es una foliación convexa, pues el soporte del divisor de inflexión

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{xy(x-1)(x+1)z = 0\}$$

tiene parte transversa $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} = \{(x+1)(x-1) = 0\}$ no vacía. |

Sea \mathcal{F} una foliación saturada sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y denotemos por $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ el plano proyectivo dual. **La aplicación de Gauss** asociada a \mathcal{F} es la aplicación racional $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ definida por $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(p) = T_p \mathcal{F}$, donde $T_p \mathcal{F}$ denota el espacio tangente a la hoja de \mathcal{F} en p , cuyo conjunto de indeterminación coincide con el conjunto singular $\Sigma_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} . Si la foliación \mathcal{F} es dada por una 1-forma $\omega = a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz$, la aplicación de Gauss es dada por

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(p) = [a(p) : b(p) : c(p)].$$

Si \mathcal{F} es una foliación no saturada la aplicación de Gauss asociada es $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} := \mathcal{G}_{\mathcal{F}'}$, donde \mathcal{F}' es el saturado de \mathcal{F} .

Observacion 1.9. Consideremos una carta afín (x, y) sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y una carta afín (p, q) sobre $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ cuyas coordenadas corresponden a la recta $y = px + q$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Si \mathcal{F} es una foliación definida por el campo vectorial $X = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$, la recta tangente a \mathcal{F} en un punto $(x_0, y_0) \notin \Sigma_{\mathcal{F}}$ es $B(x_0, y_0)x - A(x_0, y_0)y + (A(x_0, y_0)y_0 - B(x_0, y_0)x_0) = 0$, por lo tanto la aplicación de Gauss $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ asociada a \mathcal{F} en estas coordenadas se escribe

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{B(x, y)}{A(x, y)}, y - \frac{B(x, y)}{A(x, y)}x \right).$$

Ejemplo 1.10. Si \mathcal{F} es la foliación definida por el campo vectorial $X = x^3 \frac{\partial}{\partial x} + y^3 \frac{\partial}{\partial y}$, entonces la aplicación de Gauss asociada es $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(x, y) = \left(\frac{y^3}{x^3}, y - \frac{y^3}{x^2} \right)$. Se tiene que

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\{y = kx\}) = \{(p, q) = (k, 0)\}, \quad \text{si } k^3 = k,$$

que son las imágenes de las rectas invariantes de \mathcal{F} que pasan por el origen de coordenadas. |

Observacion 1.11. Se cumple $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{\det d\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = 0\}$.

1.2. Teoría local y global de webs

En esta parte desarrollamos la teoría local y global de webs extraída de [31]. Un germen de un k -web $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_k$ suave de codimensión uno sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$ es una colección de k gérmenes de foliaciones holomorfas suaves \mathcal{F}_i cuyos espacios tangentes en el origen se encuentran en posición general, esto significa que para cualquier número m de estas foliaciones, con $m \leq k$, los espacios tangentes correspondientes en el origen tienen intersección de codimensión m . El germen de web $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_k$ es **cuasi-suave** sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$ si cada una de las foliaciones \mathcal{F}_i es suave y se cumple $T_0 \mathcal{F}_i \neq T_0 \mathcal{F}_j$ cuando $i \neq j$.

Ejemplo 1.12. El teorema de inversa local implica que el modelo local para un d -web suave sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$ para $d = 1$ y $d = 2$, es dado por las siguientes familias de rectas: $\{x = Cte\}$ y $\{x = Cte \text{ y } y = Cte\}$

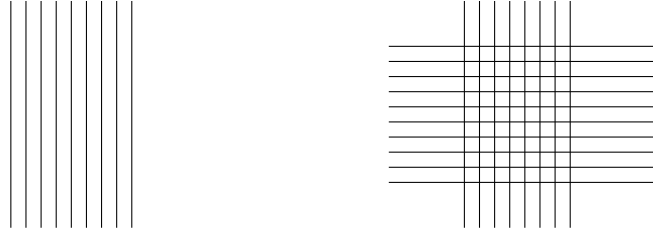


Figura 1.1: Familia de rectas

Esto significa que el estudio de webs resulta interesante para $d \geq 3$.

Webs hexagonales

Supongamos que sobre una vecindad pequeña alrededor del origen $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^2$ tenemos un 3-web $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3$. Denotemos por H_1, H_2, H_3 las hojas que pasan por $\mathbf{0}$ de $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ y \mathcal{F}_3 respectivamente. Sea $p = p_1$ un punto sobre H_1 suficientemente próximo de $\mathbf{0}$, entonces por la transversalidad de las intersecciones de las tangentes a las hojas, la hoja de \mathcal{F}_3 que pasa por p intersecta H_2 en un único punto p_2 , cercano a $\mathbf{0}$. La aplicación $h_{1,2} : (H_1, \mathbf{0}) \rightarrow (H_2, \mathbf{0})$, que a p le asocia el punto p_2 es un biholomorfismo. Este procedimiento puede generalizarse, cuando i, j, k son tales que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, esto es podemos asociar a todo punto $p \in H_j$, suficientemente cercano de $\mathbf{0}$ un punto $h_{j,k}(p)$ de H_k . Esto permite definir un biholomorfismo $h : (H_1, \mathbf{0}) \rightarrow (H_1, \mathbf{0})$, llamado **holonomía de \mathcal{W}** , dado por

$$H = h_{3,1} \circ h_{2,3} \circ h_{1,2} \circ h_{3,1} \circ h_{2,3} \circ h_{1,2}.$$

Para $p \in H_1$, la imagen $h(p)$ es obtenida al trazar un hexágono alrededor del origen $\mathbf{0}$ al desplazarse sobre las hojas del web \mathcal{W} . Decimos que un 3-web \mathcal{W} es **hexagonal** si el germen h es la identidad, geoméricamente esto significa que todo hexágono trazado a partir de puntos p cercanos al origen se cierran en p .

Blaschke y Dubourdieu muestran como asociar a todo 3-web una 2-forma $K(\mathcal{W})$, conocido como la curvatura de Blaschke: Existe una 1-forma η tal que $d\omega_i = \eta \wedge \omega_i$, donde ω_i son las formas que definen las foliaciones que forman el web \mathcal{W} y $\sum_{i=1}^3 \omega_i = 0$.

La 2-forma $K(\mathcal{W}) = d\eta$ es un invariante del web \mathcal{W} .

El siguiente teorema clasifica analíticamente los 3-webs locales que tienen curvatura nula.

Teorema 1.13 (Blaschke, Dubourdieu). *Para un 3-web $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3$ sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

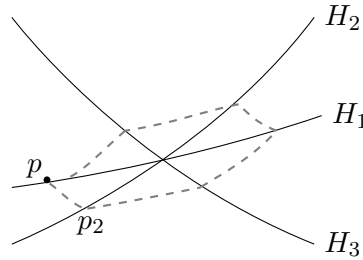


Figura 1.2: Holonomia del web

1. \mathcal{W} es hexagonal,
2. \mathcal{W} es equivalente a $\mathcal{W} = \{x, y, x + y\}$,
3. Existen una 1-formas cerradas η_i que definen \mathcal{F}_i tales que $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$,
4. La curvatura de Blaschke $K(\mathcal{W})$ de \mathcal{W} es idénticamente nula.

Webs

Un **germen de k -web singular** de codimensión uno sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$ es una clase de equivalencia $[\omega]$ de gérmenes de k -formas simétricas, esto es secciones de $\text{Sym}^k \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ módulo multiplicación por $\mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n, 0)$, anillo de gérmenes de funciones holomorfas, tal que un representante ω definido en una vecindad conexa U del origen verifica las siguientes propiedades:

1. El conjunto de ceros de ω tiene codimensión ≥ 2 ,
2. ω puede ser vista como un polinomio homogéneo de grado k en el anillo $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)[dx_1, \dots, dx_k]$ libre de cuadrados,
3. Para un punto genérico $p \in U$, $\omega(p)$ es un producto de k -formas lineales,
4. Para un punto genérico $p \in U$, el germen de ω en p es el producto de k -gérmenes de 1-formas integrables

Un k -web global \mathcal{W} de codimensión uno sobre una superficie compleja \mathbf{S} es dado por un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de \mathbf{S} y k -formas simétricas $\omega_i \in \text{Sym}^k \Omega^1_{\mathbf{S}}(U_i)$ verificando las siguientes condiciones

- a) Para cada intersección no vacía $U_i \cap U_j$ de elementos de \mathcal{U} , existe una función no nula $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ tal que $\omega_i = g_{ij} \omega_j$,
- b) El conjunto singular $\text{Sing}(\omega_i)$ de ω_i tiene codimensión al menos dos,
- c) Para cada $U_i \in \mathcal{U}$ y para cada punto p genérico de U_i , el germen de ω_i en p es producto de k gérmenes de 1-formas integrables que no son colineales dos a dos.

Cuando $k = 1$ recuperamos la definición de foliación singular de codimensión uno.

El subconjunto de \mathbf{S} donde la condición (c) falla es llamado **discriminante** de \mathcal{W} y se denota por $\Delta(\mathcal{W})$. Asimismo, el conjunto singular $\Sigma_{\mathcal{W}}$ de \mathcal{W} es definido por $\Sigma_{\mathcal{W}} \cap U_i = \text{Sing}(\omega_i)$ y está contenido en $\Delta(\mathcal{W})$.

Si la superficie \mathbf{S} es compacta, entonces un k -web global es un elemento del espacio $H^0(\mathbf{S}, \text{Sym}^k \Omega_{\mathbf{S}}^1 \otimes \mathcal{N})$, para un fibrado lineal $\mathcal{N} \in \text{Pic}(\mathbf{S})$, cuyo germen de cualquier representante en cualquier punto de \mathbf{S} verifica las condiciones (1-4).

Las funciones de transición g_{ij} determinan un fibrado lineal \mathcal{N} , llamado fibrado normal de \mathcal{W} , sobre \mathbf{S} y las k -formas simétricas ω_i se pegan para formar una sección de $\text{Sym}^k \Omega_{\mathbf{S}}^1 \otimes \mathcal{N}$. Dos secciones globales $\omega, \omega' \in H^0(\mathbf{S}, \text{Sym}^k \Omega_{\mathbf{S}}^1 \otimes \mathcal{N})$ determinan el mismo web si y solo si ellos difieren por la multiplicación de un elemento de $g \in H^0(\mathbf{S}, \mathcal{O}_{\mathbf{S}}^*)$. En particular, si \mathbf{S} es compacta entonces $g \in H^0(\mathbf{S}, \mathcal{O}_{\mathbf{S}}^*) = \mathbb{C}^*$

Sea $\mathcal{W} \in \mathbb{P}H^0(\mathbf{S}, \text{Sym}^k \Omega_{\mathbf{S}}^1 \otimes \mathcal{N})$ un k -web global. Decimos que \mathcal{W} es **descomponible**, si existen web globales $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ sobre \mathbf{S} , los cuales no contienen subwebs en común tal que \mathcal{W} es superposición de \mathcal{W}_1 y \mathcal{W}_2 , y se escribe por $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \boxtimes \mathcal{W}_2$. Un k -web \mathcal{W} es llamado **totalmente descomponible** si sobre \mathbf{S} puede escribirse en la forma

$$\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_k, \quad \text{para foliaciones } \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k.$$

Un germen $[\omega]$ de un k -web singular de codimensión uno sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$ es irreducible si cualquier representante ω , vista como un polinomio homogéneo de grado k en el anillo $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)[dx_1, \dots, dx_n]$ es irreducible.

Ejemplo 1.14 (Webs algebraicos). Sea C una curva algebraica de grado k sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ reducida. A esta curva vamos asociarle un k -web que lo denotaremos por \mathcal{W}_C . En efecto, sea $\ell_0 \in \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ una recta que intersecta C transversalmente a la parte regular de C en k -puntos diferentes $p_i(\ell_0)$. Como esta última condición es abierta, existe una vecindad V_0 de ℓ_0 en $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ donde la condición de transversalidad se cumple. Por lo tanto, tenemos k -aplicaciones holomorfas $p_i : V_0 \rightarrow C'$, donde C' denota la parte regular de C , verificando la siguiente condición:

$$\text{Para toda recta } \ell \in V_0 : \quad C \cdot \ell = p_1(\ell) + \cdots + p_k(\ell).$$

Denotemos por \mathcal{F}_i la foliación holomorfa sobre V_0 , cuyas hojas son los niveles $\{p_i = \text{Cte.}\}$. Para $\ell \in V_0$, la hoja de \mathcal{F}_i pasando por ℓ es el segmento de recta

$$\{\ell \in V_0 : p_i(\ell) \in \ell\}.$$

Luego, $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k\}$ es un k -web lineal sobre V_0 , es decir sus hojas son rectas. Esta construcción puede llevarse a cabo en la vecindad de toda recta $\ell_0 \in \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{C}$, donde \check{C} denota la curva dual de C . Los webs descritos se pegan para formar un k -web lineal singular sobre $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$, llamado **web algebraico** y denotado por \mathcal{W}_C . En este caso, el discriminante del web \mathcal{W} es dado por la curva dual \check{C} de C .

Sea \mathcal{W} un k -web singular sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y $\ell \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ una recta genérica, decimos que $p \in \ell$ es un punto de tangencia de \mathcal{W} con ℓ si algunas de las tangentes de las hojas de \mathcal{W} pasando por p coincide con ℓ en p . Si (x, y) es una carta afín de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, el web puede ser descrito por la expresión

$$\omega = \sum_{i=0}^k a_j(x, y) dx^i dy^{k-i} = 0$$

Suponga que ℓ es descrita por la función $\phi(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$, donde $p = (x_0, y_0)$. Luego, p es un punto de tangencia de \mathcal{W} con ℓ , si y solo si $t = 0$ es una raíz del polinomio

$$P(t) = \sum_{j=0}^k a_j(\phi(t)) a^j b^{k-j},$$

y el orden de tangencia de \mathcal{W} con ℓ en p es la multiplicidad de $t = 0$ como raíz de la función $P(t)$.

Ejemplo 1.15. El web \mathcal{W} dado por $y dx dy - x dy^2 = 0$ es completamente descomponible, pues $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2$, donde \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 son foliaciones definidas por las 1-formas $\omega_1 = dy$, $\omega_2 = y dx - x dy$, respectivamente. En este caso, su discriminante es $\Delta(\mathcal{W}) = \{(x, y) : y = 0\}$. |

Ejemplo 1.16. Sea \mathcal{W} el web definido por la ecuación diferencial

$$\omega = xy dy^3 - y^2 dy^2 dx + x dy dx^2 - y dy^3 = 0.$$

\mathcal{W} es descomponible, pues $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2 \boxtimes \mathcal{F}$, donde \mathcal{W}_2 es el 2-web irreducible dado por la forma $dx^2 + y dy^2$ y \mathcal{F} la foliación dada por $y dx - x dy$. Asimismo, su discriminante de \mathcal{W} es $\Delta(\mathcal{W}) = \{\Delta_p F = 0\} = \{y(x^2 + y^2)^2 = 0\}$, donde $F(x, y, p) = -xp^2 + yp$, con $p = \frac{dy}{dx}$. |

Ejemplo 1.17. Sea \mathcal{W} el web definido por la ecuación diferencial

$$\omega = dy^3 - y(x dy^2 dx + y dy dx^2) + (x - 2) dx^3 = 0.$$

El web \mathcal{W} es irreducible y su discriminante es

$$\Delta(\mathcal{W}) = \{y^2(4y^4 + x^2y^4 + 4x^4y^2 + 8x^3y^2 + 18x^2y^2 + 36xy^2 - 27x^2 - 108x - 108) = 0\}. |$$

Baricentro de un web

Ahora definimos el **baricentro de un web**. Supongamos que \mathcal{W} es un k -web sobre una superficie compleja S y \mathcal{F} una foliación sobre S transversa a \mathcal{W} en algún abierto U de S . Para cada punto p de U se tienen $k + 1$ direcciones: k direcciones corresponden a las rectas tangentes a \mathcal{W} en p y la otra corresponde a la recta tangente a \mathcal{F} en p .

Estas rectas pueden ser consideradas como puntos del espacio $\mathbb{P}T_p U$. Si a este espacio le quitamos la dirección dada por la foliación \mathcal{F} tenemos $\mathbb{P}T_p U \setminus \{[T_p \mathcal{F}]\} \simeq \mathbb{C}$. Luego, las rectas tangentes a \mathcal{W} en p pueden ser tratadas como k puntos de \mathbb{C} , por lo tanto podemos tomar su baricentro. Cuando p varía sobre U obtenemos una distribución de rectas que determinan una foliación $\beta_{\mathcal{F}}(\mathcal{W})$ sobre U , llamada **baricentro** de \mathcal{W} con centro en \mathcal{F} . Esta noción se extiende cuando el centro es un web \mathcal{W}' ; esto es, si $\mathcal{W}' = \mathcal{F}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_\ell$, el baricentro de \mathcal{W} respecto a \mathcal{W}' es

$$\beta_{\mathcal{W}'}(\mathcal{W}) = \beta_{\mathcal{F}_1}(\mathcal{W}) \boxtimes \cdots \boxtimes \beta_{\mathcal{F}_\ell}(\mathcal{W}).$$

Pull-back de un web

Sea \mathcal{F} una foliación sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ y $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$ su aplicación de Gauss asociada, representada por un morfismo $\mathcal{G}_{\mathcal{F},V} : V \rightarrow \check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$ definida sobre un subconjunto abierto maximal denso Zariski de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Sea \mathcal{W} un k -web sobre $\check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$ dado como en la definición de web global. Consideremos el cubrimiento abierto $\{V_i = \mathcal{G}_{\mathcal{F},V}^{-1}(U_i)\}$ de V y el pull-back $\eta_i = \mathcal{G}_{\mathcal{F},V}^* \omega_i \in \text{Sym}^k \Omega_V(V_i)$ de formas k -simétricas ω_i . Puesto que $d\mathcal{G}_{\mathcal{F}} \neq 0$ tenemos que η_i no son idénticamente nulas y podemos escribir $\eta_i = f_i \eta'_i$ con $f_i \in \mathcal{O}_V(V_i)$ y $\text{Cod}(\text{Sing}(\eta'_i)) \geq 2$. De esta manera, la colección $\{V_i, \eta'_i\}$ define un k -web sobre V . Además, puesto que el conjunto de indeterminación $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus V$ de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ tiene codimensión ≥ 2 , una aplicación del teorema de extensión de Levi permite extender \mathcal{W}' a un k -web $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \mathcal{W}$ sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, llamado **pull-back** o **imagen inversa** de \mathcal{W} por $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

Curvatura de webs

Sea \mathcal{W} un k -web completamente descomponible sobre una superficie S , esto es $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_k$. Supongamos que cada foliación \mathcal{F}_i es definida por la 1-forma ω_i con singularidades aisladas. Siguiendo [31] para cada terna (r, s, t) con $1 \leq r < s < t \leq k$ definimos $\eta_{rst} = \eta(\mathcal{F}_r \boxtimes \mathcal{F}_s \boxtimes \mathcal{F}_t)$ como la única 1-forma meromorfa verificando las siguientes relaciones:

$$d(\delta_{st}\omega_r) = \eta_{rst} \wedge \delta_{st}\omega_r, \quad d(\delta_{tr}\omega_s) = \eta_{rst} \wedge \delta_{tr}\omega_s, \quad d(\delta_{rs}\omega_t) = \eta_{rst} \wedge \delta_{rs}\omega_t. \quad (1.5)$$

donde la función δ_{ij} es caracterizada por la relación $\omega_i \wedge \omega_j = \delta_{ij} dx \wedge dy$. Las 1-formas η_{rst} están bien definidas módulo la suma de una 1-forma holomorfa cerrada. La curvatura del web \mathcal{W} es entonces dada por

$$K(\mathcal{W}) = d\eta(\mathcal{W}), \quad \text{donde} \quad \eta(\mathcal{W}) = \sum_{1 \leq r < s < t \leq k} \eta_{rst},$$

es decir, la curvatura de \mathcal{W} es la suma de las curvaturas de todos los 3-subwebs de \mathcal{W} . Se verifica que $K(\mathcal{W})$ es una 2-forma meromorfa intrínsecamente asociada a \mathcal{W} ; esto es, para cualquier aplicación holomorfa dominante φ se tiene $K(\varphi^* \mathcal{W}) = \varphi^*(K(\mathcal{W}))$. Esta propiedad de la curvatura permite extender la definición de curvatura a un k -web

arbitrario, no necesariamente completamente descomponible. Si pasamos a un recubrimiento ramificado Galois, donde el web se convierte en totalmente descomponible, entonces la curvatura de este nuevo web resulta ser invariante por la acción del grupo de Galois y desciende a una 2–meromorfa sobre la superficie original S .

A continuación presentamos un algoritmo realizado en Maple por O. Ripoll [32] para calcular la curvatura de un 3–web \mathcal{W} conociendo los coeficientes de la función que lo define,

$$\mathcal{W} : \omega = a_0(x, y)p^3 + a_1(x, y)p^2 + a_2(x, y)p + a_3(x, y) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

```
restart:with(LinearAlgebra):
kw:=proc(F) local a0,a1,a2,a3,R,alpha0,alpha1,alpha2,k:
a3:=coeff(F,p,0):a2:=coeff(F,p,1):a1:=coeff(F,p,2):a0:=coeff(F,p,3):
R:=Determinant(Matrix([[a0,a1,a2,a3,0],[0,a0,a1,a2,a3],[3*a0,2*a1,a2,0,0],[0,3*a0,2*a1,a2,0],
[0,0,3*a0,2*a1,a2]]));
alpha0:=[diff(a0,y),diff(a0,x)+diff(a1,y),diff(a1,x)+diff(a2,y),diff(a2,x)+diff(a3,y),diff(a3,x)];
alpha1:=Determinant(Matrix([alpha0,[a0,a1,a2,a3,0],[-a0,0,a2,2*a3,0],[0,-2*a0,-a1,0,a3],
[0,0,-3*a0,-2*a1,-a2]]));
alpha2:=Determinant(Matrix([alpha0,[0,a0,a1,a2,a3],[-a0,0,a2,2*a3,0],[0,-2*a0,-a1,0,a3],
[0,0,-3*a0,-2*a1,-a2]]));
k:=simplify(diff(alpha2/R,x)-diff(alpha1/R,y)):
end proc:
```

Ejemplo 1.18. Si \mathcal{W} es el 3–web dado por $F(x, y, p) = p^3 + p - y = 0$, entonces su curvatura es

$$K(\mathcal{W}) = \frac{216y}{(27y^2 + 4)^2} dx \wedge dy.$$

Ejemplo 1.19. Si \mathcal{W} es el 3–web dado por $F(x, y, p) = p^3 - yp^2 + x = 0$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$, entonces su curvatura es

$$K(\mathcal{W}) = \frac{-108x^3y^2 - 54x^2y^2 + 108xy^2 - 8y^5}{x^2(4y^3 - 27x)^2} dx \wedge dy.$$

Webs asociados a una foliación

De la secuencia de Euler podemos deducir la siguiente secuencia exacta

$$0 \rightarrow \text{Sym}^{k-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 3}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \text{Sym}^k(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 3}) \rightarrow \text{Sym}^k T\mathbb{P}^2 \rightarrow 0.$$

De esto se sigue que un k –web de grado d sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ es determinado por un polinomio bihomogéneo $P(x, y, z; a, b, c)$ de grado d en las coordenadas (x, y, z) y grado k en las coordenadas (a, b, c) respectivamente. Estas coordenadas homogéneas naturales en el plano dual proyectivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ asocia al punto $(a : b : c) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ la recta $\{ax + by + cz = 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Además, puesto que

$$\begin{aligned} T_{(x:y:z)}^* \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 &= \{\omega = a dx + b dy + c dz \in T^* \mathbb{C}^3 : \omega(R) = 0\} \\ &= \{a dx + b dy + c dz : ax + by + cz = 0\} \end{aligned}$$

existe una identificación natural de $\mathbb{P}T^*\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con la variedad de incidencia

$$\mathcal{I} = \{((x : y : z), (a : b : c)) : ax + by + cz = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \times \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2.$$

Sean \mathcal{W} un k -web de grado d sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y $P(x, y, z; a, b, c)$ un polinomio bihomogéneo que define \mathcal{W} . Entonces $\mathbf{S}_{\mathcal{W}} \subset \mathbb{P}T^*\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, **gráfico de \mathcal{W}** sobre $\mathbb{P}T^*\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, es dado por

$$\mathbf{S}_{\mathcal{W}} = \{((x : y : z); (a : b : c)) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \times \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 : ax + by + cz = 0, P(x, y, z; a, b, c) = 0\}$$

bajo la identificación entre \mathcal{I} y $\mathbb{P}T^*\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Supongamos que \mathcal{W} es un web irreducible de grado $d > 0$ y consideremos las restricciones π y $\tilde{\pi}$ a $\mathbf{S}_{\mathcal{W}}$ de las proyecciones naturales de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \times \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ respectivamente. La distribución de contacto \mathcal{D} sobre $\mathbb{P}T^*\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es dada por

$$\mathcal{D} = \ker(a dx + b dy + c dz) = \ker(x da + y db + z dc).$$

La foliación $\mathcal{F}_{\mathcal{W}}$ inducida por \mathcal{D} sobre $\mathbf{S}_{\mathcal{W}}$ se proyecta, a través de π , sobre un k -web \mathcal{W} y se proyecta, a través de $\tilde{\pi}$ sobre un d -web $\check{\mathcal{W}}$ en $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$. El d -web es llamado **transformado de Legendre** de \mathcal{W} y será denotado por $\text{Leg}\mathcal{W}$.

En los libros clásicos de ecuaciones diferenciales ordinarias uno encuentra que el transformado de Legendre es una transformación involutiva que envía una ecuación diferencial polinomial de la forma $F(x, y, p)$ a otra de la forma $F(P, XP - Y, X)$, donde $p = \frac{dy}{dx}$ y $P = \frac{dY}{dX}$, ver por ejemplo [22, pág. 40].

Consideremos una carta afín (x, y) de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y una carta afín (p, q) de $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ cuyas coordenadas corresponden a la recta $\{y = px + q\}$. Si un web \mathcal{W} es definido por una ecuación diferencial implícita $F(x, y, p) = 0$, con $p = \frac{dy}{dx}$ entonces el web $\text{Leg}\mathcal{W}$ es definido por la ecuación implícita afín

$$\check{F}(p, q; x) = F(x, px + q, p) = 0, \quad \text{donde } x = -\frac{dq}{dp}. \quad (1.6)$$

y su discriminante es el divisor dado por $\check{\Delta}_{\mathcal{F}} = \{\text{disc}(\check{F}) = 0\}$, donde $\text{disc}(\check{F})$ es el x -discriminante.

Observacion 1.20. Si $\mathcal{F} : X = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ es una foliación no saturada pero libre de cuadrados, esto es A y B libre de cuadrados, entonces su transformado de Legendre está bien definido.

Sea \mathcal{W} un web y C una componente irreducible de su discriminante $\Delta(\mathcal{W})$. Decimos que

1. C es **invariante** por \mathcal{W} si $TC \subset TW|_C$ sobre la parte regular de C ,
2. C es **totalmente invariante** por \mathcal{W} si $TC = TW|_C$ sobre la parte regular de la curva C .

Supongamos que \mathcal{W} es un web definido por una ecuación diferencial implícita de la forma $F(x, y, p) = 0$, donde $p = \frac{dy}{dx}$, y sea $C = \{f(x, y) = 0\}$ una curva. Entonces C es invariante por \mathcal{W} si la pendiente de la recta tangente a C satisface la ecuación que define a \mathcal{W} sobre C ; esto es $f(x, y, -\frac{f_x}{f_y}) = 0$.

Ejemplo 1.21. Sea \mathcal{W} el web dado por $\omega = dy^3 - y(dy^2 dx - dy dx - 2 dx^2) = 0$. La curva $C = \{y = 0\}$ es totalmente invariante, pues $TC = TW|_C$. |

Ejemplo 1.22. La curva $C = \{y = 0\}$ es invariante por el web \mathcal{W} dado por $\omega = y dy^3 + dy dx^2 = 0$, pero no es totalmente invariante, es decir $TC \neq TW|_C$, pues TW restringida a C además de tener la dirección $\frac{\partial}{\partial x}$ tiene otras direcciones. |

En [24] los autores demuestran los siguientes resultados:

Teorema 1.23. Sea \mathcal{W} un germen de un $(k+2)$ -web sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$ con discriminante suave y no vacío (no necesariamente reducido). Suponga que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2 \boxtimes \mathcal{W}_k$ donde \mathcal{W}_2 es un 2-web verificando $\Delta(\mathcal{W}_2) = \Delta(\mathcal{W})$, y \mathcal{W}_k un k -web. La curvatura de \mathcal{W} es holomorfa sobre $\Delta(\mathcal{W})$ si y solo si $\Delta(\mathcal{W})$ es invariante por \mathcal{W}_2 o por $\beta_{\mathcal{W}_2}(\mathcal{W}_k)$, donde $\beta_{\mathcal{W}_2}(\mathcal{W}_k)$ denota el \mathcal{W}_2 baricentro de \mathcal{W}_k .

En particular, resulta el siguiente corolario.

Corolario 1.24. Si \mathcal{W} es un 3-web y $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2 \boxtimes \mathcal{F}$, donde \mathcal{W}_2 es un 2-web verificando $\Delta(\mathcal{W}_2) = \Delta(\mathcal{W})$ y \mathcal{F} es una foliación, entonces la curvatura de \mathcal{W} es holomorfa sobre $\Delta(\mathcal{W})$ si y solo si $\Delta(\mathcal{W})$ es invariante por \mathcal{W}_2 o por \mathcal{F} .

Proposición 1.25. Sea \mathcal{W}_m un m -web y $C \subset \Delta(\mathcal{W}_m)$ una componente irreducible y totalmente invariante por \mathcal{W}_m y teniendo multiplicidad minimal $m - 1$. Sea \mathcal{W}_{d-m} un $(d - m)$ -web transverso a C , entonces la curvatura de $\mathcal{W} = \mathcal{W}_m \boxtimes \mathcal{W}_{d-m}$ es holomorfa sobre C .

Ejemplo 1.26. El 3-web dado por $\omega = dy^3 - 6y dy^2 dx + 11 dy dx^2 - 6y^3 dx^3$ tiene discriminante $\Delta(\mathcal{W}_3) = 4y^6$. La curva $C = \{y = 0\} \subset \Delta(\mathcal{W}_3)$ es totalmente invariante por \mathcal{W}_3 , pero no tiene multiplicidad minimal $\nu - 1$, siendo $\nu = 3$. Y su curvatura es $K(\mathcal{W}) \equiv 0$, por lo tanto es holomorfa. |

Observación 1.27. Supongamos que \mathcal{F} es una foliación de grado d sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y $\text{Leg}\mathcal{F}$ su web dual correspondiente. Deseamos ver qué sucede con las componentes provenientes del divisor de inflexión de \mathcal{F} . Para esto, supongamos que C es una curva irreducible contenida en el soporte del divisor de inflexión $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} .

1. Si C es invariante por \mathcal{F} entonces C es una recta y por lo tanto su dual correspondiente es un punto sobre $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$, que es una singularidad del web $\text{Leg}\mathcal{F}$.
2. Si C no es invariante por \mathcal{F} , la imagen de C mediante la aplicación de Gauss $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ es una curva D en $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$. En general, esta nueva curva no es invariante por el web $\text{Leg}\mathcal{F}$. Sin embargo, si D es invariante por $\text{Leg}\mathcal{F}$ se cumple una de las siguientes situaciones:
 - i) La curva D es una recta en $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ y la tangente de \mathcal{F} en un punto genérico p de C es la recta que une p con el punto determinado por la recta D ,
 - ii) La curva D no es una recta, entonces su curva dual \check{D} es \mathcal{F} -invariante y la recta tangente en un punto genérico de él es tangente a \mathcal{F} en algún punto de C . Además, en este caso, se tiene que en una vecindad de un punto genérico de C' el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ se descompone como producto de una foliación tangente a D y un $(d - 1)$ -web transverso a D .

Observación 1.28. Sean \mathcal{F} una foliación sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y $s \in \Sigma_{\mathcal{F}}$. Se cumple

1. El dual \check{s} de s es invariante por el web $\text{Leg}\mathcal{F}$.
2. \check{s} está contenido en el discriminante $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}$ de $\text{Leg}\mathcal{F}$ si y solo si $\tau_s(\mathcal{F}) \geq 2$ o $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} \supset C$, siendo C una componente irreducible no invariante del lugar geométrico dado por la tangencia entre \mathcal{F} y el pencil de rectas que pasan por el punto s .

Una situación especial que se presenta en la proposición (1.25) es cuando consideramos una foliación \mathcal{F} que tiene una singularidad radial de orden $\nu - 1$, pues en tal caso, su transformado de Legendre $\text{Leg}\mathcal{F}$ posee las mismas condiciones que el descrito en la proposición (1.25), de esta manera se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 1.29. Si s es una singularidad radial de orden $\nu - 1$ de una foliación \mathcal{F} , entonces en una vecindad de un punto genérico de la recta ℓ dual a s , el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ puede escribirse como el producto $\mathcal{W}_1 \boxtimes \mathcal{W}_2$, donde \mathcal{W}_1 es un ν -web irreducible dejando la recta ℓ invariante y \mathcal{W}_2 es un web transverso a ℓ . Además, en una vecindad de un punto genérico de ℓ se cumple

$$\check{\Delta}_{\mathcal{F}} = (\nu - 1)\ell + \Delta(\mathcal{W}_2).$$

1.3. Recubrimientos, monodromía y automorfismos de recubrimiento

Sean X y B espacios topológicos. Un **recubrimiento** (topológico) es una aplicación continua $\rho : X \rightarrow B$ tal que cada punto $b \in B$ admite un vecindad conexa U tal que $\rho^{-1}(U)$ es unión disjunta de abiertos U_j tal que la restricción $\rho|_{U_j} : U_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo. X es llamado **espacio de recubrimiento**, B **espacio base**, y para cada $b \in B$ el conjunto $\rho^{-1}(b)$, que denotaremos por X_b , es llamado **fibra** sobre b del recubrimiento.

Proposición 1.30. Para cualquier $b \in B$ y $x \in X_b$, el homomorfismo inducido

$$\begin{aligned} \rho_* : \pi_1(X, x) &\longrightarrow \pi_1(B, b) \\ [\gamma] &\longmapsto [\rho \circ \gamma] \end{aligned}$$

es inyectivo. La imagen de $\pi_1(X, x)$ por ρ_* será denotada por $G(x)$; esto es $G(x) = \rho_*\pi_1(X, x)$.

Prueba.

El hecho que ρ_* es un homeomorfismo es inmediato. Supongamos ahora que $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ se encuentra en el núcleo de ρ_* . Esto significa que $\rho_*([\gamma]) = [c_b]$, con $b = \rho(x)$; es decir $\rho \circ \gamma$ y c_b son homotópicamente equivalentes. De la propiedad de levantamiento de homotopías se tiene que, cualquier levantamiento de $\rho \circ \gamma$ y c_b que empiezan en el mismo punto deben ser homotópicos en X . Puesto que γ es un levantamiento de $(\rho \circ \gamma)$ con punto inicial en x , y el lazo constante c_x es un levantamiento de c_b empezando en el mismo punto x , entonces, $\gamma \sim c_x$ en X , esto es $[\gamma] = 1$. \square

Propiedades del recubrimiento:

Sea $\rho : X \rightarrow B$ un recubrimiento. Se cumple

1. Si B es conexo, entonces cada fibra X_b , con $b \in B$, tiene el mismo cardinal, llamado **grado del recubrimiento**,
2. ρ es un homeomorfismo local,
3. Sean $\gamma, \beta : [0, 1] \rightarrow B$ dos caminos que empiezan en el mismo punto a y terminan en el mismo punto b , y $\tilde{\gamma}, \tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow X$ sus respectivos levantamientos que empiezan en $x \in X$. Una condición necesaria y suficiente para que $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\beta}(1)$ es que $[\gamma \cdot \beta^{-1}] \in G(x)$.

La aplicación $\rho : X \rightarrow B$ es un **recubrimiento finito** de grado d si para todo $b \in B$, el cardinal de la fibra X_b es d .

Acción del grupo fundamental sobre una fibra y el grupo de monodromía

Sea $\rho : X \rightarrow B$ un recubrimiento entonces el grupo fundamental $\pi_1(B, b)$ actúa por la derecha sobre la fibra X_b mediante $x \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$, donde $\tilde{\gamma}$ es el levantamiento de γ con punto inicial en $x \in X_b$. En efecto, si x es cualquier punto de la fibra X_b , de la propiedad de levantamiento de caminos se tiene que cualquier camino γ con punto inicial b tiene un levantamiento $\tilde{\gamma}$ con punto inicial en x . El teorema de monodromía garantiza que el punto final $\tilde{\gamma}(1)$ depende solamente de la clase de homotopía de γ , por lo tanto la aplicación

$$\begin{aligned} X_b \times \pi_1(B, b) &\longrightarrow X_b \\ (x, [\gamma]) &\longmapsto x \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1) \end{aligned}$$

esta bien definida y se prueba que es una acción de grupos; esto es,

- i) $x \cdot [c_x] = x$, donde c_x es el camino constante,
- ii) $(x \cdot [\gamma]) \cdot [\beta] = x \cdot ([\gamma] \cdot [\beta])$

Si X es conexo entonces dicha acción es transitiva. Esta construcción permite obtener un homomorfismo del grupo fundamental de la base en el grupo de automorfismos de la fibra, llamado **representación de monodromía**; esto es,

$$\begin{aligned} \mu_\rho : \pi_1(B, b) &\longrightarrow \text{Aut}(X_b) \\ [\gamma] &\longmapsto \sigma_{[\gamma]} \end{aligned}$$

donde $\sigma_{[\gamma]}(x) = x \cdot [\gamma]$. La imagen de μ_ρ es el **grupo de monodromía** del recubrimiento ρ en el punto b , que denotaremos por $M_\rho(b)$ o simplemente por M_ρ .

Propiedades de la monodromía:

Sea $\rho : X \longrightarrow B$ un recubrimiento conexo, $b \in B$ y $x \in X$. Entonces se cumple

- M1) La acción de $\pi_1(B, b)$ sobre la fibra es transitiva,
- M2) Para cualquier $b \in B$ y cada $x \in X_b$, el grupo de isotropía o estabilizador $\text{Stab}(x)$ de x por la acción de $\pi_1(B, b)$ sobre X_b es $G(x)$,
- M3) Sea $b \in B$ fijo, el conjunto $\{G(x) : x \in X_b\}$ es una clase de conjugación en el subgrupo $\pi_1(B, b)$,
- M4) Para cualquier $x \in X_b$ existe una correspondencia biunívoca entre la fibra X_b y el conjunto $\pi_1(B, b)/G(x)$ de todas las clases del subgrupo $G(x)$ en el grupo $\pi_1(B, b)$; por lo tanto, el grado de ρ es igual al índice de $G(x)$ en $\pi_1(B, b)$.
- M5) Si X es simplemente conexo, el grado de ρ es igual al orden de $\pi_1(B, b)$,
- M6) El grupo de monodromía $M_\rho(b)$ es isomorfo a $\pi_1(B, b)/\bigcap_{x \in X_b} \text{Stab}(x)$, para todo $b \in B$.

Prueba.

- M1) Ya fue mencionado anteriormente.
- M2) Sean $x \in X_b$ fijo. Sea γ un lazo en B con base en b y supongamos que $\tilde{\gamma}$ sea la elevación de γ con punto inicial x . La condición $[\gamma] \in \text{Stab}(x)$ es equivalente a que el punto final de $\tilde{\gamma}$ sea x . Luego, $[\tilde{\gamma}] \in \pi_1(X, x)$ y $\gamma = \rho \circ \tilde{\gamma}$; es decir, $[\gamma] = \rho_*([\tilde{\gamma}]) \in G(x)$.
Recíprocamente, sea $[\beta] \in G(x)$, entonces $\beta = \rho_*([\tilde{\beta}])$. Luego, $\tilde{\beta}$ es un lazo homotópico a un levantamiento de β con punto inicial en x . Pero sabemos que dos de tales levantamientos tienen el mismo punto terminal, esto significa que $x \cdot [\beta] = \tilde{\beta}(1) = x$. Luego, $[\beta] \in \text{Stab}(x)$.

M3) Supongamos que $x, y \in X_b$ y β un camino tal que $\beta(0) = x$ y $\beta(1) = y$. Este camino induce un isomorfismo $\varphi_\beta : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ dado por $[\alpha] \mapsto [\beta\alpha\beta^{-1}]$. Asimismo, es claro que $\rho \circ \beta$ es un lazo con punto base b . Este lazo permite definir un homomorfismo $\phi_\beta : \pi_1(B, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ dado por $\phi_\beta([\delta]) = [\rho \circ \beta][\delta][\rho \circ \beta^{-1}]$. De esta manera, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\varphi_\beta} & \pi_1(X, y) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(B, b) & \xrightarrow{\phi_\beta} & \pi_1(B, b) \end{array}$$

es conmutativo. Esto último implica que

$$G(y) = \rho_*\pi_1(X, y) = [\rho \circ \beta]\rho_*\pi_1(X, x)[\rho \circ \beta^{-1}] = [\gamma]G(x)[\gamma]^{-1},$$

donde $\gamma = \rho \circ \beta$ y $\gamma^{-1} = \rho \circ \beta^{-1}$.

Recíprocamente, sea H un subgrupo de $\pi_1(B, b)$ en la clase de conjugación de $G(x)$, esto significa que existe $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ tal que $H = [\gamma]G(x)[\gamma]^{-1}$. Asimismo, γ se eleva en una aplicación $\tilde{\gamma}$ tal que $\rho \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ y $\tilde{\gamma}(0) = x$. Sea $y = \tilde{\gamma}(1)$. Luego, de la primera parte tenemos

$$G(y) = [\gamma]G(x)[\gamma]^{-1} = H.$$

M4) Sabemos que el grupo $\pi_1(B, b)$ actúa transitivamente sobre X_b y se cumple $\text{Stab}(x) = \rho_*\pi_1(X, x) = G(x)$. Luego, definimos la aplicación $\phi : \pi_1(B, b)/G(x) \rightarrow X_b$ por $G(x) \cdot [\gamma] \mapsto x \cdot [\gamma]$. La aplicación ϕ está bien definida,

$$x \cdot [\gamma] = x \cdot [\beta] \Leftrightarrow x \cdot [\gamma][\beta]^{-1} = x \Leftrightarrow [\gamma][\beta]^{-1} \in \text{Stab}(x) = G(x),$$

y de esta manera $G(x)[\gamma] = G(x)[\beta]$. Este proceso demuestra también que ϕ es inyectiva.

Ahora probaremos la suryección de ϕ : sea $y \in X_b = \mathcal{O} = (x)$, entonces existe $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ tal que $y = x \cdot [\gamma] = \phi(G(x)[\gamma])$.

Por lo tanto, ϕ es biyectiva y $[\pi_1(B, b) : G(x)] = |X_b| = \text{deg}(\rho)$.

M5) Si X es simplemente conexo entonces $\pi_1(X) = 1$, entonces $G(x) = 1$. Luego, de (M4) se obtiene el resultado.

M6) Consideremos la aplicación $\phi : \pi_1(B, b) \rightarrow M_\rho(b) \subset M_\rho \subset X_b$, dada por la acción de $\pi_1(B, b)$ sobre la fibra X_b . Luego, ϕ es biyectiva y es un homomorfismo de grupos. Asimismo,

$$\ker(\phi) = \{[\gamma] \in \pi_1(B, b) : \phi([\gamma]) = \text{Id}_X\}.$$

Entonces si $x \in X_b$ tenemos

$$x \cdot [\gamma] = x \Leftrightarrow [\gamma] \in \text{Stab}(x).$$

Por lo tanto, $\ker(\phi) = \bigcap_{x \in X_b} \text{Stab}(x)$. En consecuencia, el resultado se obtiene a partir del primer teorema de isomorfismos para grupos.

Automorfismos de recubrimiento

En esta parte asumiremos que X es conexo y localmente arco conexo. Sea $\rho : X \rightarrow B$ un recubrimiento. Un homeomorfismo $\tau : X \rightarrow X$ es llamado **automorfismo de recubrimiento** de ρ si $\rho \circ \tau = \rho$. El conjunto formado por estas transformaciones denotado por D_ρ constituye un grupo con la operación de composición de funciones, llamado **grupo de automorfismos** de ρ .

Observacion 1.31. Sea H un subgrupo de G , el normalizador $N(H)$ de H en G es el subgrupo definido por

$$N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\},$$

es decir $N(H)$ es el subgrupo mas grande que contiene a H como subgrupo normal. H es un subgrupo normal si, y solo si $N(H) = G$.

Un grupo G actúa libremente sobre un conjunto X si $\tau \in G$ y $\tau(x) = x$ para cualquier $x \in X$, entonces $\tau = Id_X$.

Propiedades de los automorfismos de recubrimiento:

Sean $\rho : X \rightarrow B$ un recubrimiento, $b \in B$ y $x \in X_b$. Se verifica

- R1) Si $\tau \in D_\rho$ tal que $\tau_1(x) = x$, para algún $x \in X$, entonces $\tau_1 = Id_{X_b}$,
- R2) D_ρ actúa libremente por la izquierda sobre X_b ,
- R3) Para cualquier $\tau \in D_\rho, [\gamma] \in \pi_1(B, b)$ y $x \in X_b$ se cumple $\tau(x) \cdot [\gamma] = \tau(x \cdot [\gamma])$,
- R4) Si $x, y \in X_b$, entonces existe $\tau \in D_\rho$ tal que $\tau(x) = y$ si y solo si los subgrupos inducidos $G(x)$ y $G(y)$ son iguales,
- R5) $D_\rho(b)$ actúa transitivamente sobre la fibra X_b si y solo si el subgrupo $G(x)$ es normal en $\pi_1(B, b)$
- R6) Existe $[\gamma] \in N(G(x))$ tal que $x \cdot [\gamma] = y$ si y solo si $G(x) = G(y)$, donde $N(G(x))$ denota el normalizador del subgrupo $G(x)$ en $\pi_1(B, b)$,
- R7) D_ρ es isomorfo al cociente $N(G(x))/G(x)$,
- R8) Si D_ρ actúa transitivamente sobre X_b , entonces para todo $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ existe un único $\tau_{[\gamma]} \in D_\rho$ tal que $x \cdot [\gamma] = \tau_{[\gamma]}(x)$. Además, se cumple que $M_\rho \simeq \pi_1(B, b)/G(x)$.

Prueba.

- R1) Supongamos que $\tau(x) = x$, para algún $x \in X_b$. Sea y un punto arbitrario de X_b y consideremos el camino $\tilde{\beta}$ de punto inicial x y punto final y . El camino $\tilde{\beta}$ es un levantamiento de $\beta = \rho \circ \tilde{\beta}$ con punto inicial x . Asimismo, $\tau \circ \tilde{\beta}$ es también un

levantamiento de β , luego por unicidad del levantamiento de caminos $\tilde{\beta} = \tau \circ \tilde{\beta}$.
Por lo tanto,

$$y = \tilde{\beta}(1) = (\tau \circ \tilde{\beta})(1) = \tau(y),$$

y como y es arbitrario, $\tau = \text{Id}_{X_b}$.

R2) Sea $x \in X_b$, el grupo de isotropía de x , respecto a D_ρ es dado por

$$\text{Stab}(x) = \{\tau \in D_\rho : \tau(x) = x\}.$$

De (R1) se sigue que $\tau = \text{Id}_{X_b}$, por lo tanto $\text{Stab}(x) = \{\text{Id}_X\}$, para todo $x \in X_b$.
Luego, D_ρ actúa libremente sobre X_b .

R3) Sean $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ y $\tilde{\gamma}$ el levantamiento de γ con punto inicial x . Entonces $x \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$ es el punto final de $\tilde{\gamma}$. Por otro lado, si $\tau \in D_\rho$ entonces $\tau \circ \tilde{\gamma}$ es un camino en X con punto inicial $\tau(x)$ y punto final en $\tau(x \cdot [\gamma])$. Luego, como

$$\rho \circ (\tau \circ \tilde{\gamma}) = (\rho \circ \tau) \circ \tilde{\gamma} = \rho \circ \tilde{\gamma} = \gamma,$$

entonces $(\tau \circ \tilde{\gamma})$ es un levantamiento de γ con punto inicial en $\tau(x)$ y punto final $\tau(x) \cdot [\gamma]$. Por lo tanto, $\tau(x \cdot [\gamma]) = \tau(x) \cdot [\gamma]$.

R4) Suponga que existe $\tau \in D_\rho$ tal que $\tau(x) = y$. Como X es arco-conexo la aplicación $\tau_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ es un isomorfismo. Asimismo, se tiene que τ es un levantamiento de ρ , entonces

$$G(x) = \rho_* \pi_1(X, x) = \rho_* \circ \tau_* \pi_1(X, x) = \rho_* \pi_1(X, y) = G(y).$$

Supongamos ahora que $G(x) = G(y)$, entonces del criterio de levantamiento existe un levantamiento $\tilde{\rho}_1 : X \rightarrow X$ de ρ tal que $\rho \circ \tilde{\rho}_1 = \rho$ y $\tilde{\rho}_1(x) = y$. Invertimos los roles de x e y y obtenemos un levantamiento $\tilde{\rho}_2$ tal que $\rho \circ \tilde{\rho}_2 = \rho$ y $\tilde{\rho}_2(y) = x$. Notemos que $\tilde{\rho}_2 \circ \tilde{\rho}_1$ y Id_X son levantamientos de ρ llevando x en sí mismo. De esta manera, de la unicidad de la propiedad de levantamiento resulta que $\tilde{\rho}_2 \circ \tilde{\rho}_1 = \text{Id}_X$. Por lo tanto, existe $\tilde{\rho}_1 \in D_\rho$ tal que $\tilde{\rho}_1(x) = y$.

R5) Sean $x, y \in X_b$ arbitrarios y supongamos que $G(x) = G(y)$. Sabemos que cualquier subgrupo conjugado a un subgrupo normal es el mismo, entonces $G(x) = G(y)$, para cualquier $x, y \in X_b$. Luego, (R4) garantiza la existencia de $\tau \in D_\rho$ tal que $\tau(x) = y$.

Recíprocamente, supongamos que D_ρ actúa transitivamente sobre X_b , entonces (R4) garantiza que $G(x) = G(y)$, para todo $x, y \in X_b$. Es decir, $G(x)$ es normal en $\pi_1(B, b)$ cualquiera sea $x \in X_b$.

R6) Observemos que

$$\text{Stab}(x \cdot [\gamma]) = [\gamma] \text{Stab}(x) [\gamma]^{-1},$$

respecto a $\pi_1(B)$, pues si $[\delta] \in \text{Stab}(x)$ entonces

$$(x \cdot [\gamma]) \cdot [\delta] = x \cdot [\gamma] \Leftrightarrow x \cdot [\gamma] [\delta] [\gamma]^{-1} = x \Leftrightarrow [\gamma] [\delta] [\gamma]^{-1} \in \text{Stab}(x).$$

Por lo tanto, si $y = x \cdot [\gamma]$ y $[\gamma] \in N(G(x))$ entonces

$$G(y) = \text{Stab}(x \cdot [\gamma]) = [\gamma]\text{Stab}(x)[\gamma]^{-1} = \text{Stab}(x) = G(x).$$

R7) Definamos la aplicación $\phi : N(G(x)) \rightarrow D_\rho$ que a cada $[\gamma] \in N(G(x))$ se le asigna $\phi([\gamma]) = \tau$ el único automorfismo definido por $\tau(x) = x \cdot [\gamma]$.

a) ϕ es un homomorfismo de grupos: Supongamos que $\phi([\gamma]) = \tau_1$ y $\phi([\beta]) = \tau_2$, donde $\tau_1(x) = x \cdot [\gamma]$ y $\tau_2(x) = x \cdot \beta$. Luego,

$$(\tau_1 \circ \tau_2)(x) = \tau_1(x \cdot [\beta]) = \tau_1(x) \cdot [\beta] = (x \cdot [\gamma]) \cdot [\beta] = x \cdot [\gamma\beta].$$

Es decir, $\phi([\gamma \cdot \beta]) = \tau_1 \circ \tau_2 = \phi([\gamma]) \circ \phi([\beta])$.

b) $\ker(\phi) = G(x)$: Sean $[\gamma] \in N(G(x))$ tal que $\phi([\gamma]) = \tau$ y sea $\tilde{\gamma}$ un levantamiento de γ con punto inicial x . Luego,

$$[\gamma] \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \tau = \text{Id}_X \Leftrightarrow \tau(x) = \tilde{\gamma}(1) = x.$$

Es decir,

$$\tau = \text{Id}_X \Leftrightarrow [\gamma] = [\rho \circ \tilde{\gamma}] = \rho_*([\tilde{\gamma}]) \in G(x).$$

c) ϕ es suryectiva: Sea $\tau \in D_\rho$ tal que $y = \tau(x)$. Como $\pi_1(B, b)$ actúa transitivamente sobre X_b , existe $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ tal que $y = x \cdot [\gamma]$. Y como τ es un automorfismo $[\gamma] \in N(G(x))$. Y puesto que $\tau(x) = y = x \cdot [\gamma]$, entonces $\tau = \phi([\gamma])$, pues D_ρ actúa libremente (R1).

R8) Existencia de $\tau_{[\gamma]}$: Sea $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$, entonces existe un levantamiento $\tilde{\gamma}$ con punto inicial $x \in X_b$. Sea $y = \tilde{\gamma}(1) = x \cdot [\gamma]$. Como D_ρ actúa transitivamente sobre X_b entonces existe $\tau_{[\gamma]} \in D_\rho$ tal que $\tau_{[\gamma]}(x) = y = x \cdot [\gamma]$.

Unicidad de $\tau_{[\gamma]}$: Supongamos que $\tau_{[\gamma]}(x) = \tau_{[\beta]}(x)$, entonces $x \cdot [\gamma] = x \cdot [\beta]$. Luego, del hecho que D_ρ actúa libremente sobre X_b concluimos que $\tau_{[\gamma]} = \tau_{[\beta]}$.

Definimos, la aplicación $\phi : \pi_1(B, b) \rightarrow D_\rho(X_b)$ por $[\gamma] \mapsto \tau_{[\gamma]}$. Luego, si $\tilde{\gamma}$ es el levantamiento de γ con punto inicial x , entonces su punto final es el punto $x \cdot [\gamma]$. Asimismo, es claro que $\tau \circ \tilde{\gamma}$ es el levantamiento de γ de origen $\tau(x)$ y extremo final $\tau(x \cdot [\gamma])$. Luego, de la unicidad se sigue

$$\tau_{[\gamma\beta]}(x) = x \cdot [\gamma\beta] = (x \cdot [\gamma])[\beta] = \tau_{[\gamma]}(x)[\beta] = \tau_{[\gamma]}(x \cdot [\beta]) = \tau_{[\gamma]} \circ \tau_{[\beta]}(x),$$

es decir, ϕ es un homomorfismo de grupos. La suryectividad de ϕ se sigue del hecho que $\pi_1(B, b)$ actúa transitivamente sobre la fibra X_b . Por lo tanto, $\ker(\phi) = \text{Stab}(x) = G(x)$, entonces $M_\rho \simeq \pi_1(B, b)/G(x)$.

1.4. Recubrimientos Galois

Consideremos un recubrimiento $\rho : X \rightarrow B$ de d -hojas sobre un espacio topológico conexo B . Sean $b \in B$ y $x \in X_b = \rho^{-1}(b) = \{x_1, \dots, x_d\}$ fijos. El siguiente resultado relaciona el grupo $D_\rho = \{\tau : X \rightarrow X : \rho \circ \tau = \rho\}$ de automorfismos del recubrimiento ρ y el grupo de monodromía M_ρ asociado a ρ . Asimismo, μ denota la representación de monodromía de ρ .

Teorema 1.32. *Sea $\rho : X \rightarrow B$ un recubrimiento conexo finito de grado d . Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. $G(x) = \ker(\mu)$ (o equivalentemente $G(x) \subset \ker(\mu)$),
2. $G(x)$ es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b)$,
3. D_ρ actúa transitivamente sobre la fibra,
4. $|D_\rho| = d$ (o equivalentemente $|D_\rho| \geq d$),
5. M_ρ actúa libremente sobre la fibra,
6. $|M_\rho| = d$ (o equivalentemente $|M_\rho| \leq d$),
7. $D_\rho \simeq M_\rho$,

donde $G(x)$ denota $\rho_*\pi_1(X, x)$.

Prueba.

(1 \Rightarrow 2) Es inmediata, pues el núcleo es un subgrupo normal.

(2 \Rightarrow 1) Sabemos que $\ker(\mu) = \bigcap_{x \in X_b} \text{Stab}(x)$, siendo $\text{Stab}(x) = \rho_*\pi_1(X, x)$. De (M3) sabemos que $\{G(x) : x \in X_b\}$ es una clase de conjugación de $\pi_1(B, b)$. Y de (R4) tenemos que: si $x_1, x_2 \in X_b$ entonces existe $\tau \in D_\rho$ tal que $\tau(x_1) = x_2$ si y solo si $G(x_1) = G(x_2)$. En consecuencia, todos los estabilizadores son iguales y por lo tanto se obtiene de manera inmediata el resultado.

(2 \Leftrightarrow 3) Es la propiedad (R5) de la sección 1.3, capítulo 1.

(3 \Leftrightarrow 4) Supongamos que D_ρ actúa transitivamente sobre la fibra X_b , entonces para cualquier $x \in X_b$ su órbita es $\mathcal{O}(x) = X_b = \{x_1, \dots, x_d\}$. Asimismo, para cada $x_i \in X_b$ existe una biyección entre la órbita $\mathcal{O}(x_i)$ y el conjunto de clases laterales $D_\rho/\text{Stab}(x_i)$ de $\text{Stab}(x_i)$, por lo tanto $[D_\rho(b) : \text{Stab}(x_i)] = |\mathcal{O}(x_i)| = d$. El teorema de Lagrange implica que este valor es un divisor del orden de $D_\rho(b)$, luego $|D_\rho(b)| \geq d$.

Recíprocamente, supongamos que $D_\rho(b) = \{\tau_1, \dots, \tau_d\}$ y $X_b = \{x_1, \dots, x_d\}$. Puesto que las aplicaciones τ_i diferentes de la aplicación identidad no tienen puntos fijos se deduce que $\tau_i(x_1) \neq \tau_j(x_1)$, para $i \neq j$. Luego, para todo j existe i tal que $\tau_i(x_1) = x_j$, es decir $D_\rho(b)$ es transitivo sobre X_b .

- (2 \Leftrightarrow 7) El resultado se sigue fácilmente de las propiedades (M6) y (R7) de la sección 1.3, capítulo 1.
- (5 \Rightarrow 7) Se deduce de la propiedad (M6) y (R7) de la sección 1.3, capítulo 1. El recíproco es inmediato.
- (6 \Rightarrow 5) Puesto que $M_\rho = \{\tau_1, \dots, \tau_d\}$ actúa transitivamente sobre $X_b = \{1, \dots, d\}$, para cada i existe un único $\tau_j \in M_\rho$ tal que $\tau_j(1) = i$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $i = j$. Si $\tau_k(i) = i$ entonces $\tau_k \circ \tau_i(1) = i$ y consecuentemente $\tau_k \circ \tau_i = \tau_i$. Por lo tanto, $\tau_k = \text{Id}$ y M_ρ actúa libremente sobre la fibra.
- (2 \Rightarrow 6) Si $G(x)$ es normal de $\pi_1(B, b)$ entonces $M_\rho \simeq \pi_1(B, b)/G(x)$, entonces $[\pi_1(B, b) : G(x)] = |\mathcal{O}(x)| = d$. \square

Si cualquiera de las afirmaciones (1)–(7) se verifican, diremos que el recubrimiento ρ es **Galois, normal o regular**. En tal caso, se tiene

$$D_\rho \simeq M_\rho \simeq \pi_1(B, b)/G(x) \quad \text{y} \quad X/D_\rho \simeq B$$

Corolario 1.33. Si $\rho : X \rightarrow B$ es un recubrimiento conexo de d -hojas con grupo de monodromía $M_\rho \subset \mathfrak{S}_d$ abeliana, entonces ρ es Galois, donde \mathfrak{S} denota el grupo simétrico de grado d . En particular, si M_ρ es cíclico entonces $M_\rho \simeq \mathbb{Z}_d$.

Prueba.

Teniendo en cuenta el teorema (1.32) bastará demostrar que el grupo M_ρ actúa libremente sobre la fibra X_b . En efecto, sea $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ tal que $x \cdot [\gamma] = x$, para algún $x \in X_b$. Consideremos ahora $y \in X_b$ con $y \neq x$. La transitividad de M_ρ sobre X_b garantiza la existencia de $[\beta] \in \pi_1(B, b)$ tal que $y \cdot [\beta] = x$, que es equivalente a la condición $y = x \cdot [\beta]^{-1}$. Luego,

$$x \cdot [\gamma] = x \quad \Rightarrow \quad x \cdot [\gamma] = y \cdot [\beta] \quad \Rightarrow \quad x \cdot [\gamma][\beta]^{-1} = y$$

La abelianidad de M_ρ implica que $x \cdot [\beta]^{-1}[\gamma] = y$, entonces $y \cdot [\gamma] = y$ y puesto que $x, y \in X_b$ son arbitrarios, $[\gamma] = 1$, es decir M_ρ actúa libremente sobre X_b .

Finalmente, si M_ρ es cíclico entonces ρ es Galois y $|M_\rho| = d$, luego $M_\rho = \mathbb{Z}_d$. \square

Observacion 1.34. El recíproco del corolario (1.33) no siempre se cumple como se ilustra en el ejemplo (3.11); sin embargo, este resultado se cumple cuando d es primo como se muestra en el teorema (3.13).

Corolario 1.35. Sea ρ un recubrimiento de grado $d = \text{deg}(\rho)$ primo. Entonces, ρ es Galois si y solo si M_ρ es cíclico.

Prueba.

(\Rightarrow) Suponga que ρ es Galois, entonces $|M_\rho| = d$ y como d es primo, el teorema de Cauchy garantiza la existencia de $\tau \in M_\rho$ de orden d tal que $|\langle \tau \rangle| = d$, por lo tanto $M_\rho \simeq \mathbb{Z}_d$.

(\Leftarrow) Sea $M_\rho \simeq \mathbb{Z}_d$, entonces M_ρ es abeliano. El corolario (1.33) permite concluir que ρ es Galois. \square



Capítulo 2

Webs planos en $\check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$

Las foliaciones \mathcal{F} con las que trabajaremos en este capítulo son definidas sobre el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Por medio de la transformada de Legendre el estudio de d -webs de grado 1 corresponde al estudio de foliaciones de grado d . Decimos que un web $\text{Leg}\mathcal{F}$ es **plano** si la curvatura de su transformado de Legendre $\text{Leg}\mathcal{F}$ es idénticamente nula en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Un primer objetivo es probar que para cualquier foliación \mathcal{F} de grado 3, su transformado de legendre $\text{Leg}\mathcal{F}$ sea plano basta dar condiciones necesarias y suficientes sobre las componentes irreducibles de su discriminante $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}$. Este resultado es válido para foliaciones saturadas y no saturadas.

Sabemos que la curvatura de un web \mathcal{W} es una 2-forma meromorfa con polos contenidos en su discriminante. Para lograr nuestro objetivo usaremos el siguiente criterio: la curvatura del web $\text{Leg}\mathcal{F}$ sobre $\check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$ es idénticamente nula si y solo si es holomorfa sobre puntos genéricos de las componentes irreducibles de su discriminante $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}$.

Empezamos el capítulo viendo la relación entre los divisores de una foliación saturada y no saturada.

Lema 2.1. *Sea \mathcal{F} una foliación no saturada de grado 3 inducida por una campo vectorial $X = HX'$, donde D denota al divisor definido por H y por \mathcal{F}' la foliación saturada inducida por X' . Se cumple*

- a) $I_{\mathcal{F}} = I_{\mathcal{F}'} + 3D$,
- b) $\mathcal{G}_{\mathcal{F}'}(D) = \text{Tang}(\text{Leg}\mathcal{F}', \text{Leg}D)$.

Prueba.

a) Si $X' = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y}$, entonces

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{F}} &= \begin{vmatrix} HA & X(HA) \\ HB & X(HB) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} HA & H^2(\frac{\partial A}{\partial x} + B \frac{\partial A}{\partial y}) \\ HB & H^2(\frac{\partial B}{\partial x} + B \frac{\partial B}{\partial y}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} HA & HA(A \frac{\partial H}{\partial x} + HB \frac{\partial H}{\partial y}) \\ HB & HB(A \frac{\partial H}{\partial x} + HB \frac{\partial H}{\partial y}) \end{vmatrix} \\ &= H^3 \begin{vmatrix} A & X'(A) \\ B & X'(B) \end{vmatrix} = H^3 I_{\mathcal{F}'}. \end{aligned}$$

b) Sea $F(x, y, p) = B(x, y) - pA(x, y)$. Usando la definición de la aplicación de Gauss tenemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{F}'}(D) &= \overline{(p, q) : \exists (x, y) \notin \Sigma_{\mathcal{F}'}, H(x, y) = 0, y = px + q, F(x, y, p) = 0} \\ &= \overline{(p, q) : \exists x, (x, px + q) \notin \Sigma_{\mathcal{F}'}, H(x, px + q) = 0, F(x, px + q, p) = 0} \\ &= \{(p, q) : \text{Result}(H(x, px + q), F(x, px + q, p)) = 0\} \setminus T, \end{aligned}$$

donde T denota el conjunto formado por los duales de las singularidades de \mathcal{F}' .

□

En el siguiente lema se prueba que las componentes del discriminante de $\text{Leg}\mathcal{F}$ provienen de las singularidades especiales de la foliación y de su divisor de inflexión.

Lema 2.2. *Sea \mathcal{F} una foliación no necesariamente saturada. Se cumple*

$$\check{\Delta}_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(I_{\mathcal{F}}) + \check{\Sigma}_{\mathcal{F}}^e, \quad (2.1)$$

donde $\Sigma_{\mathcal{F}}^e = \{s \in \Sigma_{\mathcal{F}'} : \tau_s(\mathcal{F}') \geq 2\}$, siendo \mathcal{F}' el saturado de \mathcal{F} , $\check{\Sigma}_{\mathcal{F}}^e$ denota la unión de los duales de los elementos de $\Sigma_{\mathcal{F}}^e$.

Prueba.

Primero consideramos el caso cuando \mathcal{F} es una foliación saturada. Se presentan dos situaciones:

- i) **Cuando s es una singularidad no radial de \mathcal{F} con orden de anulaci3n $\nu_s(\mathcal{F}) = 1$** , bastará identificar que tipo de singularidades producen componentes en el discriminante del web $\text{Leg}\mathcal{F}$. En este caso, se tiene que el orden de tangencia $\tau_s = \min\{k \geq \nu_s(\mathcal{F}) : \det(J_s^k X, R_s) \neq 0\}$ entre \mathcal{F} y una recta genérica pasando por s es 1, donde X denota el campo local que define \mathcal{F} . Luego, para que \check{s} se encuentre en $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}$ la única posibilidad es que $\check{s} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(C)$, para alguna componente C del divisor $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$.
- ii) **cuando s es una singularidad radial de \mathcal{F}** . En este caso, se tiene que $\tau_s(\mathcal{F}) \geq 2$, por lo tanto, \check{s} está contenido en $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}$.

Veamos ahora el caso cuando \mathcal{F} es una foliación no saturada. Supongamos que \mathcal{F} es definida por el campo vectorial $X = HX'$, donde X' define la foliación saturada \mathcal{F}' y $D = \{H = 0\}$. Del lema (2.1) se sigue

$$\begin{aligned} \check{\Delta}_{\mathcal{F}} &= \Delta(\text{Leg}D) + \check{\Delta}_{\mathcal{F}'} + \text{Tang}(\text{Leg}D, \text{Leg}\mathcal{F}') \\ &= \check{D} + \mathcal{G}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}'}) + \check{\Sigma}_{\mathcal{F}'}^e + \mathcal{G}_{\mathcal{F}'}(D) \\ &= \mathcal{G}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}) + \check{\Sigma}_{\mathcal{F}'}^e. \end{aligned}$$

□

2.1. Rectas duales a singularidades

Para que el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ sea plano debemos probar que la curvatura de su web dual $\text{Leg}\mathcal{F}$ sea idénticamente nula o equivalentemente probar que es holomorfa sobre puntos genéricos de las componentes irreducibles de su discriminante $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}$. De acuerdo con el lema (2.2) debemos probar que la curvatura de $\text{Leg}\mathcal{F}$ es holomorfa sobre la parte proveniente de la parte transversa del divisor de inflexión, (la parte invariante de $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ son rectas, y por tanto sus duales constituyen puntos sobre $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}$, en consecuencia no afecta la holomorficidad de la curvatura de $\text{Leg}\mathcal{F}$) y la parte del discriminante proveniente de algunas singularidades de \mathcal{F} .

Consideremos una foliación \mathcal{F} de grado $\deg(\mathcal{F}) = 3$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que en coordenadas afines $\mathbf{0} = (0, 0) \in \Sigma_{\mathcal{F}}$ y el campo que define \mathcal{F} es

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + H \cdot R,$$

donde X_i denota un campo vectorial homogéneo de grado i , H un polinomio homogéneo de grado 3 y R el campo radial.

La primera proposición demuestra que si el orden de anulaci3n $\nu_s(\mathcal{F})$ de una foliaci3n \mathcal{F} de grado 3 en un punto $s \in \Sigma_{\mathcal{F}}$ es menor o igual a 2, entonces la curvatura de su transformado de Legendre $\text{Leg}\mathcal{F}$ es holomorfa en un punto genérico de $\check{\Delta}$.

Proposici3n 2.3. *Sea \mathcal{F} una foliaci3n de grado 3 sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y $\mathbf{0} \in \Sigma_{\mathcal{F}}$. Si $\nu_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) \leq 2$ entonces la curvatura $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa en un punto genérico del dual $\check{\mathbf{0}}$ de $\mathbf{0}$.*

Prueba.

- i) Supongamos que $X_1 \neq 0$ y $\check{\mathbf{0}} \subseteq \check{\Delta}_{\mathcal{F}}$. Si $\mathbf{0}$ no es una singularidad radial, $\tau_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) = 1$ y por lo tanto alrededor de un punto genérico de $\check{\mathbf{0}}$ podemos escribir $\text{Leg}\mathcal{F} = \mathcal{W}_1 \boxtimes \mathcal{W}_2$, donde \mathcal{W}_1 es una foliaci3n tangente a $\check{\mathbf{0}}$ y \mathcal{W}_2 es un 2-web transverso a $\check{\mathbf{0}}$ tal que $\Delta(\mathcal{W}_2) = \check{\mathbf{0}}$. Luego, del teorema (1.23) concluimos que $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa sobre $\check{\mathbf{0}}$. En el caso que $\mathbf{0}$ sea una singularidad radial tenemos $\tau_{\mathbf{0}}(\mathcal{F}) \geq 2$. Las proposiciones (1.29) y (1.25) implican que $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa sobre $\check{\mathbf{0}}$.

ii) Supongamos ahora que $X_1 = 0$ y $X_2 \neq 0$. Si X_2 no es un múltiplo del campo radial, entonces el orden de tangencia $\tau_0(\mathcal{F})$ con una recta genérica pasando por $\mathbf{0}$ es 2. Luego, alrededor de un punto genérico de $\check{\mathbf{0}}$ el web se escribe $\text{Leg}\mathcal{F} = \mathcal{W}_1 \boxtimes \mathcal{W}_2$, donde \mathcal{W}_1 es una foliación transversa a $\check{\mathbf{0}}$ y \mathcal{W}_2 es un 2-web cuyo discriminante $\Delta(\mathcal{W}_2) = \check{\mathbf{0}}$ es totalmente invariante. Por lo tanto, del teorema (1.23) se concluye que $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa sobre un punto genérico de $\check{\mathbf{0}}$.

Si $X_2 = (\alpha x + \beta y)R$, para algunos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces el campo que define \mathcal{F} es de la forma

$$X = (\alpha x + \beta y)R + \left(\sum_{i+j=3} a_{ij} x^i y^j \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{i+j=3} b_{ij} x^i y^j \right) \frac{\partial}{\partial y} + H \cdot R,$$

donde $H = h_0 x^3 + h_1 x^2 y + h_2 x y^2 + h_3 y^3$, y el web $\text{Leg}\mathcal{F}$, en coordenadas locales (p, q) de $\check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$, es dado por la forma simétrica

$$\omega = c_3(p, q) dq^3 + qc_2(p, q) dq^2 dp + qc_1(p, q) dq dp^2 + q^2 c_0(p, q) dp^3,$$

donde

$$\begin{aligned} c_3 &= -a_{0,3} p^4 + h_3 p^3 q + (b_{0,3} - a_{1,2}) p^3 + h_2 p^2 q + (b_{1,2} - a_{2,1}) p^2 + h_1 p q + \\ &\quad + (b_{2,1} - a_{3,0}) p + h_0 q + b_{3,0}, \\ c_2 &= 3a_{0,3} p^3 - 3h_3 p^2 q + (2a_{1,2} - 3b_{0,3}) p^2 - 2h_2 p q + (a_{2,1} - 2b_{1,2}) p - h_1 q - b_{2,1}, \\ c_1 &= -3a_{0,3} p^2 q + 3h_3 p q^2 + (3b_{0,3} - a_{1,2}) p q + h_2 q^2 + b_{1,2} q + \beta p + \alpha, \\ c_0 &= a_{0,3} p q - b_{0,3} q - h_3 q^2 - \beta. \end{aligned}$$

Notemos que si $q|c_3(p, q)$ obtenemos $X = P_3 \cdot R$ y $\text{Leg}\mathcal{F}$ es un 3-web algebraico, siendo P_3 es algún polinomio de grado 3. Por lo tanto, $K(\text{Leg}\mathcal{F}) \equiv 0$ de acuerdo al criterio de Mihăileanu, ver [32]. De esta manera, podemos asumir que $q \nmid C_3(p, q)$. Al considerar el recubrimiento ramificado $\pi : \tilde{U} \rightarrow U, \pi(p, s) = (p, s^2) = (p, q)$ resulta

$$\pi^* \omega = 8c_3(p, s^2) ds^3 + 4sc_2(p, s^2) ds^2 dp + 2c_1(p, s^2) ds dp^2 + sc_0(p, s^2) dp^3,$$

entonces

$$\pi^* \omega \Big|_{\{s=0\}} = 2 ds(3c_3(p, 0) ds^2 + c_1(p, 0) dp^2),$$

es decir, el web $\pi^*(\text{Leg}\mathcal{F})$ es regular en $\{s = 0\}$, pues existen 3 direcciones diferentes sobre un punto genérico de $\{s = 0\}$. Esto último implica que $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa en un punto genérico de $\check{\mathbf{0}}$, pues si $K(\text{Leg}\mathcal{F})_{\infty} \subset \{q = 0\}$ y $q \nmid T$ tendríamos la expresión $K(\text{Leg}\mathcal{F}) = \frac{T(p, q)}{q^m} dp \wedge dq$, con $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $T(p, q)$ es un germen holomorfo. Luego,

$$K(\pi^*(\text{Leg}\mathcal{F})) = \pi^*(K(\text{Leg}\mathcal{F})) = \pi^* \left(\frac{T(p, q)}{q^m} dp \wedge dq \right) dp \wedge dq = 2 \frac{T(p, s^2)}{q^{2m-1}} dp \wedge ds,$$

y desde que $K(\pi^*(\text{Leg}\mathcal{F}))$ no tiene polos, entonces $m \leq \frac{1}{2}$. \square

El siguiente paso es analizar singularidades de la forma $X = X_3 + H \cdot R$.

Observacion 2.4. Se cumple, $\nu_p(f) \leq \deg(f)$, para todo polinomio f , donde $\nu_p(f)$ denota el orden de anulación de f en p .

Proposicion 2.5. Sea \mathcal{F} una foliación de grado 3. Si $p \in \Sigma_{\mathcal{F}}$ es tal que $\nu_p(\mathcal{F}) \geq 3$ entonces para cualquier $s \in \Sigma_{\mathcal{F}} \setminus \{p\}$ se tiene que $\nu_s(\mathcal{F}) \leq 2$

Prueba.

Supongamos que \mathcal{F} es una foliación saturada: Si $\nu_p(\mathcal{F}) \geq 3$, del lema (1.5) se sigue que $\mu_p(\mathcal{F}) \geq 9$, por lo tanto $\nu_s(\mathcal{F}) \leq 2$, para todo $s \in \Sigma_{\mathcal{F}} \setminus \{p\}$; pues si $\nu_s(\mathcal{F}) \leq 3$ del lema (1.5) se tendría $\mu_s(\mathcal{F}) \geq 9$, lo cual contradice el teorema de Darboux.

Cuando \mathcal{F} es una foliación no saturada: supongamos que \mathcal{F} es definida por un campo vectorial de la forma $X = GX'$, donde X' define una foliación saturada \mathcal{F}' y $C = \{G = 0\}$, presentándose las siguientes situaciones:

i) Si $\deg(G) = 1$ entonces $\nu_p(\mathcal{F}') \geq 2$, pues

$$3 \leq \nu_p(\mathcal{F}) = \nu_p(C) + \nu_p(\mathcal{F}') \leq 1 + \nu_p(\mathcal{F}').$$

Luego, $\mu_p(\mathcal{F}') \geq 4$. El teorema de Darboux aplicado a \mathcal{F}' implica que $\mu_s(\mathcal{F}') \leq 3$ y de esta manera, $\nu_s(\mathcal{F}') \leq 1$. Por lo tanto,

$$\nu_s(\mathcal{F}) = \nu_s(C) + \nu_s(\mathcal{F}') \leq 2.$$

ii) Si $\deg(G) = 2$ entonces $\deg(\mathcal{F}') = 1$. Del teorema de Darboux se sigue que $\nu_p(\mathcal{F}') \leq 1$. Luego, de la relación

$$3 \leq \nu_p(\mathcal{F}) = \nu_p(C) + \nu_p(\mathcal{F}') \leq \nu_p(C) + 1$$

se obtiene $\nu_p(C) \geq 2$, esto implica que el polinomio G que define C es homogéneo de grado 2, es decir C representa dos rectas diferentes pasando por p , y por lo tanto $\nu_s(C) \leq 1$.

iii) Si $\deg(G) = 3$, supongamos primero que $p \in \Sigma_{\mathcal{F}'}$ entonces $\nu_p(C) \geq 2$, y por lo tanto $\nu_s(C) \leq 2$ para cualquier $s \neq p$, de lo contrario tendríamos que C sería productos de tres rectas diferentes pasando por s y $\nu_p(C) \leq 1$. Supongamos ahora que $p \notin \Sigma_{\mathcal{F}'}$, entonces $\nu_p(C) = 3$ y C representa la unión de tres rectas diferentes pasando por el punto p . Observe que $\nu_s(C) \leq 1$ para cualquier $s \neq p$.

□

2.2. Caso homogéneo:

En esta sección nos centramos en el estudio de la curvatura del transformado de Legendre $\text{Leg}\mathcal{F}$ de una foliación \mathcal{F} de grado 3 en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ inducida por un campo de la forma $X = X_3$, donde X_3 tiene componentes homogéneas de grado 3.

Lema 2.6. Sea \mathcal{F} una foliación homogénea de grado d sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tal que $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa sobre $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\mathbf{0}}$. Entonces $K(\text{Leg}\mathcal{F}) \equiv 0$.

Prueba.

Comenzamos fijando coordenadas (a, b) en $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ asociada a la recta $\{ax + by = 1\}$. Puesto que \mathcal{F} es una foliación homogénea, \mathcal{F} es invariante por homotecias $h_{\lambda}(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ y $\text{Leg}\mathcal{F}$ es invariante por la aplicación dual $\check{h}_{\lambda}(a, b) = (\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda})$ de h_{λ} . Luego,

$$\check{h}_{\lambda}^*(K(\text{Leg}\mathcal{F})) = K(\check{h}_{\lambda}^*\text{Leg}\mathcal{F}) = K(\text{Leg}\mathcal{F}).$$

Por hipótesis $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ tiene polos a lo más en $\check{\mathbf{0}}$, entonces $K(\text{Leg}\mathcal{F}) = f(p, q) dp \wedge dq$, siendo f una función racional con polos en $\check{\mathbf{0}}$; sin embargo, en las coordenadas (a, b) , la recta $\{q = 0\}$ corresponde a la recta al infinito ℓ_{∞} . Por lo tanto, la curvatura $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ en las coordenadas (a, b) es de la forma $f(a, b) da \wedge db$, siendo f holomorfa.

Por otro lado,

$$\check{h}_{\lambda}^*(K(\text{Leg}\mathcal{F})) = \check{h}_{\lambda}^*(f(p, q) dp \wedge dq) = \frac{1}{\lambda^2} f\left(\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}\right) da \wedge db$$

De las cuentas realizadas se tiene $\lambda^2 f(a, b) = f(\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda})$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$, lo cual se cumple si $f \equiv 0$. Por lo tanto, $K(\text{Leg}\mathcal{F}) \equiv 0$. \square

Proposición 2.7. Sea \mathcal{F} una foliación homogénea de grado 3 sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Si $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa en un punto genérico de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}})$ entonces $K(\text{Leg}\mathcal{F}) \equiv 0$.

Prueba.

Si \mathcal{F} es homogénea de grado 3, entonces $\nu_0(\mathcal{F}) = 3$. De la proposición (2.5) se sigue que $\nu_s(\mathcal{F}) \leq 2$ para todo $s \in \Sigma_{\mathcal{F}} \setminus \{\mathbf{0}\}$. La proposición (2.3) implica que $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa sobre un punto genérico de \check{s} y por lo tanto holomorfa en $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\mathbf{0}}$. Finalmente, el lema (2.6) permite llegar al resultado. \square

En esta parte describimos todas las foliaciones homogéneas de grado 3 con divisor de inflexión $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ reducido cuyo web $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano, módulo automorfismos proyectivos. Previamente damos los siguientes lemas.

Lema 2.8. Suponga que \mathcal{F} es una foliación homogénea de grado 3. Si $\ell^2|\text{Tang}(\mathcal{F}, R) = \{yA - xB = 0\}$ entonces $\ell^2|\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$, donde \mathcal{F} es dada por el campo vectorial $X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}$

Prueba.

Supongamos que \mathcal{F} es inducida por un campo de la forma $X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}$, donde A y B son polinomios homogéneos de grado 3. Por un cambio lineal de coordenadas podemos suponer que $\ell : x = 0$, entonces la condición $\{x = 0\} \subset \text{Tang}(\mathcal{F}, R)$ implica que el campo que induce la foliación \mathcal{F} es de la forma $X = x\tilde{A}\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}$. Si

$\ell^2 | \text{Tang}(\mathcal{F}, R)$ entonces $x|(y\tilde{A} - B)$, por lo tanto $B = y\tilde{A} + xH$, para algún polinomio H . Luego, $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = x^2G(x, y)$, donde

$$G(x, y) = x\tilde{A}^2\partial_x(H) + xH\tilde{A}(\partial_y(H) - \partial_x(\tilde{A})) - xH^2\frac{\partial}{\partial y}\tilde{A} + \tilde{A}^2H - y\tilde{A}H\frac{\partial}{\partial y}\tilde{A} + y\tilde{A}^2\frac{\partial}{\partial y}H.$$

en consecuencia, $\ell^2 |_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}}}$. \square

Corolario 2.9. *Sea \mathcal{F} una foliación homogénea de grado 3 tal que su divisor de inflexión $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ es reducido. Entonces, salvo conjugación, el cono tangente $\text{Tang}(\mathcal{F}, R)$ es reducido.*

Prueba.

Si razonamos por el absurdo tendríamos que $\ell^2 | \text{Tang}(\mathcal{F}, R)$, y el lema (2.8) implicaría que $\ell^2 |_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}}}$ lo cual contradice el hecho que el divisor de inflexión es reducido. \square

Proposición 2.10. *Sea \mathcal{F} una foliación homogénea de grado 3 sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tales que $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ es reducido y $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano. Entonces salvo automorfismos proyectivos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, existe una única foliación dada por*

$$X = \left(\frac{1}{4}\nu x^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu\right)x^2y + \frac{3}{4}xy^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{3}{4}\nu x^2y + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu\right)xy^2 - \frac{1}{4}y^3 \right) \frac{\partial}{\partial y},$$

donde $\nu = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$.

Prueba.

Sea \mathcal{F} una foliación homogénea inducida por el campo $X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}$, donde A y B son polinomios homogéneos de grado 3. Luego, la traza afin del divisor $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ viene dada por un polinomio de grado 8 y como $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ es reducido,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \ell_1 \cup \dots \cup \ell_8 \cup \ell_{\infty},$$

donde ℓ_1, \dots, ℓ_4 son rectas invariantes por \mathcal{F} que pasan por $\mathbf{0}$, y ℓ_5, \dots, ℓ_8 son rectas que forman la parte transversa $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$ de $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$. Estas rectas verifican las siguientes propiedades

1. Para cada $i \in \{5, 6, 7, 8\}$ la restricción $T\mathcal{F}|_{\ell_i}$ son rectas paralelas y por lo tanto determinan un punto $p_i \in \ell_{\infty}$.

Pues si suponemos que $\ell_i : y = \xi_i x$, para $i = 5, 6, 7, 8$ entonces

$$X|_{\ell_i} = x^3 \left(A_3(1, \xi_i) \frac{\partial}{\partial x} + B_3(1, \xi_i) \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

2. El punto $p_i \in \Sigma_{\mathcal{F}}$, para cada $i \in \{5, 6, 7, 8\}$.

Si L es una recta genérica pasando por un punto $a \in \ell_i$ entonces $\text{Tang}(\mathcal{F}, L) = 2a + b$, siendo b un punto perteneciente a la curva de terceras tangencias ℓ_i^{\perp} . Por dualidad proyectiva esto significa que en un punto genérico de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\ell_i)$ el

3–web $\text{Leg}\mathcal{F}$ se descompone como producto de un 2–web \mathcal{W}_2 y una foliación \mathcal{F}_1 verificando $\Delta(\text{Leg}\mathcal{F}) = \Delta(\mathcal{W}_2) = \check{p}_i$. Por condición $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa en $\check{\Delta}_{\mathcal{F}} = \Delta(\text{Leg}\mathcal{F})$, el teorema (1.23) implica que \check{p}_i es \mathcal{F} –invariante, en consecuencia $b = p_i$ y por lo tanto $p_i \in \Sigma_{\mathcal{F}}$.

3. La recta que une p_i y $\mathbf{0} = (0, 0)$ es invariante por \mathcal{F} , de esta manera podemos asumir que esta línea es ℓ_{i-4} , para $i = 5, 6, 7, 8$.

Después de conjugar con un automorfismo de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ podemos asumir que el cono tangente es de la forma

$$\text{Tang}(\mathcal{F}) = \{yA - xB = xy(y - x)(y - \nu x) = 0\}, \quad \text{con } \nu \in \mathbb{C}, \nu \neq 0, 1, \infty,$$

es decir, las rectas invariantes que pasan por el punto $\mathbf{0}$ son

$$\ell_1 = \{x = 0\}, \quad \ell_2 = \{y = 0\}, \quad \ell_3 = \{y = x\}, \quad \ell_4 = \{y = \nu x, \text{ con } \nu \neq 0, 1, \infty\}$$

Teniendo en cuenta las últimas relaciones, el campo que induce la foliación \mathcal{F} es de la forma

$$X = ((\alpha_1 + \nu)x^3 + (\alpha_2 - \nu - 1)x^2y + (\alpha_3 + 1)xy^2) \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha_1x^2y + \alpha_2xy^2 + \alpha_3y^3) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ definimos el polinomio $P_i(t) = B(1, t) - m_iA(1, t)$, donde m_i es la pendiente de ℓ_i , la misma que coincide con la pendiente del campo $X|_{\ell_{i+4}}$. Además, como P_i tiene raíz doble en la pendiente ξ_i de ℓ_{i+4} tenemos que $\Delta(P_i(t), t) = 0$ y $P'_i(m_i) = 0 \neq 0$ resulta el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + (2\nu + 2)\alpha_2 + 4\nu\alpha_3 = (\nu - 1)^2 \\ 2\alpha_2 + 4\nu\alpha_3 = 1 \\ 2\nu\alpha_2 + 4\nu\alpha_3 = \nu^2 \end{cases}$$

cuya solución es

$$\alpha_1 = -\frac{3}{4}\nu, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(\nu + 1), \quad \alpha_3 = -\frac{1}{4}, \quad \nu = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

de esta manera obtenemos las foliaciones \mathcal{F} , cuyos transformado de legendre $\text{Leg}\mathcal{F}$ son planos. □

2.3. Teoremas principales

En esta sección probaremos los resultados principales de este capítulo. Iniciamos esta sección viendo algunos lemas previos

Lema 2.11. Dadas las 1–formas $\omega_i = dy + y^a h_i(x, y) dx$, para $i = 1, 2, 3$, con $a \in \mathbb{N}$ tal que y no divide $h_{ij}(x, y) := h_i(x, y) - h_j(x, y)$, para $i \neq j$, siendo h_{ij} gérmenes de

funciones holomorfas. Entonces la curvatura del 3-web dado por $\prod_{i=1}^3 \omega_i = 0$ es holomorfa sobre $\{y = 0\}$ si y solo si y^a divide

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_{12}(x, y) \partial_x h_{23}(x, y) - h_{23}(x, y) \partial_x h_{12}(x, y)}{h_{12}(x, y) h_{23}(x, y) h_{31}(x, y)} \right).$$

Prueba.

Sabemos que la curvatura $K(\mathcal{W}) := d\eta$, donde $\eta = C(x, y) dx + D(x, y) dy$ es la única 1-forma verificando $\omega_i \wedge \omega_j = \delta_{ij} dx \wedge dy$ tal que para cada permutación cíclica $\{i, j, k\}$ de $(1, 2, 3)$ se cumple $d(\delta_{ij}\omega_k) = \delta_{ij}\omega_k \wedge \eta$.

De la relación $\omega_i \wedge \omega_j = \delta_{ij} dx \wedge dy$ obtenemos $\delta_{ij} = y^a h_{ij}$, donde $h_{ij} = h_i - h_j$. Además, de las relaciones relación $d(\delta_{ij}\omega_k) = \delta_{ij}\omega_k \wedge \eta$ se obtiene el siguiente sistema lineal de incógnitas C y D :

$$\begin{aligned} h_{12}C - h_{12}h_3y^aD &= 2ay^{a-1}h_{12}h_3 + y^a\partial_y(h_{12}h_3) - \partial_x h_{12} \\ h_{23}C - h_{23}h_1y^aD &= 2ay^{a-1}h_{23}h_1 + y^a\partial_y(h_{23}h_1) - \partial_x h_{23} \end{aligned}$$

cuya única solución es

$$\begin{aligned} C(x, y) &= \frac{1}{h_{12}h_{23}h_{31}} \left(y^a(h_3h_{12} \frac{\partial(h_1h_{23})}{\partial y} - h_1h_{23} \frac{\partial(h_3h_{12})}{\partial y}) + (h_1h_{23} \frac{\partial h_{12}}{\partial x} - h_3h_{12} \frac{\partial(h_{23})}{\partial x}) \right) \\ D(x, y) &= -\frac{2a}{y} + \frac{1}{h_{12}h_{23}h_{31}} \left(h_{12} \frac{\partial(h_1h_{23})}{\partial y} - h_{23} \frac{\partial(h_3h_{12})}{\partial y} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{y^a h_{12}h_{23}h_{31}} \left(h_{23} \frac{\partial h_{12}}{\partial x} - h_{12} \frac{\partial h_{23}}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Es claro que C es holomorfa sobre $\{y = 0\}$. Asimismo, sabemos que

$$K(\text{Leg}\mathcal{F}) = d\eta = \left(\frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Luego, $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa sobre $\{y = 0\}$ si y solo si $\frac{\partial D}{\partial x} = 0$, es decir

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_{12}(x, y) \partial_x h_{23}(x, y) - h_{23}(x, y) \partial_x h_{12}(x, y)}{h_{12}(x, y) h_{23}(x, y) h_{31}(x, y)} \right).$$

□

Lema 2.12. Sea \mathcal{F} una foliación de grado 3 inducida por un campo vectorial de la forma $X = X_3 + H \cdot R$, donde X_3 define la foliación homogénea \mathcal{F}_h . Suponga que el conjunto singular $\Sigma_{\mathcal{F}_h}$ de $\Sigma_{\mathcal{F}_h}$ no tiene componentes múltiples, alrededor de la singularidad $\mathbf{0} = (0, 0)$, entonces $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa sobre un punto genérico de $\check{\mathbf{0}}$ si y solo si $K(\text{Leg}\mathcal{F}_h)$ es holomorfa sobre un punto genérico de $\check{\mathbf{0}}$.

Prueba.

En este caso el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ es dado por la ecuación diferencial implícita $G(p, q; x) := G_3(p, q; x) + qH(p, q; x)$, donde $x = -\frac{dq}{dp}$, $G_3(p, q; x) = B_3(x, px + q) - pA_3(x, px + q)$ es la ecuación diferencial implícita que define $\text{Leg}\mathcal{F}_h$. Asimismo, como X_3 es homogéneo $G_3(p, q; \lambda q) = q^3 \tilde{G}_3(p, \lambda)$. De la propiedad de libre de cuadrados sobre X_3 se sigue que el discriminante de $\tilde{G}_3(p, \lambda)$ con respecto a λ no es idénticamente nulo, $\tilde{G}_3(p, \lambda) = c(p) \prod_{i=1}^3 (\lambda - \lambda_i(p))$, con $\lambda_i(p) \neq \lambda_j(p)$ si $i \neq j$. De esta manera, $G_3(p, q; x) = c(p) \prod_{i=1}^3 (x - q\lambda_i(p))$ o equivalentemente

$$\omega = \tilde{c}(p) \prod_{i=1}^3 (dq + q\lambda_i(p) dp)$$

la misma que define el web $\text{Leg}\mathcal{F}_h$.

Procediendo de forma análoga al caso anterior y teniendo en cuenta que X es libre de cuadrados obtenemos $G(p, q; x) = c(p, q) \prod_{i=1}^3 (x - qh_i(p, q))$, o equivalentemente

$$\omega = \tilde{c}(p, q) \prod_{i=1}^3 (dq + qh_i(p, q) dp),$$

que es la ecuación diferencial que define $\text{Leg}\mathcal{F}$, con $h_i(p, 0) = \lambda_i(p)$. Luego, podemos aplicar el lema (2.11) con $a = 1$ para deducir que $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa sobre $\tilde{\mathbf{O}} = \{q = 0\}$ si y solo si

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{h_{12}(p, 0)\partial_p h_{23}(p, 0) - h_{23}(p, 0)\partial_p h_{12}(p, 0)}{h_{12}(p, 0)h_{23}(p, 0)h_{31}(p, 0)} \right) = 0$$

que es exactamente la condición para la holomorfía de $K(\text{Leg}\mathcal{F}_h)$ sobre un punto genérico de $\tilde{\mathbf{O}}$. \square

Lema 2.13. *Sea \mathcal{F} una foliación de grado 3 inducida por un campo vectorial de la forma $X = X_3 + H \cdot R$, siendo \mathcal{F}_h la foliación homogénea definida por X_3 . Si el conjunto singular $\Sigma_{\mathcal{F}_h}$ de \mathcal{F}_h no tiene componentes múltiples y $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa sobre un punto genérico de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}})$, entonces $K(\text{Leg}\mathcal{F}_h)$ es holomorfa sobre un punto genérico de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_h}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}_h})$*

Prueba.

Para cualquier $c \in \mathbb{C}$ consideremos $h_c(x, y) = (cx, cy)$, entonces la foliación $\mathcal{F}_c = h_c^*(\mathcal{F})$ es dada por el campo $X_3 + c \cdot H \cdot R$. Combinando nuestras hipótesis con las proposiciones (2.3) y (2.5) deducimos que $K(\text{Leg}\mathcal{F}_c)$ es holomorfa en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \tilde{\mathbf{O}}$, cuando $c \neq 0$.

Si cada componente de $\mathcal{I}_{\mathcal{F}_h}$ es \mathcal{F}_h -invariante la imagen por $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_h}$ de una componente irreducible de $\mathcal{I}_{\mathcal{F}_h}$ es un punto. Y siendo holomorfa en una vecindad de este punto la curvatura de $\text{Leg}\mathcal{F}$ se extiende holomórficamente, debido al teorema de extensión de

Hartogs. De manera que tomamos una recta no invariante ℓ de $\mathcal{I}_{\mathcal{F}_h}$. Puesto que X_3 es homogéneo, vimos en la proposición (2.10) que las direcciones tangentes de $\mathcal{F}_h|_{\ell}$ son todas paralelas, así $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_h}(\ell)$ es una recta de la forma $\{p = p_0\}$ en coordenadas locales (p, q) sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (aún si ℓ es una recta de singularidades). Tome un punto genérico $B \in \{p = p_0\}$ y un disco transversal \mathbb{D} pasando por B . Tomando los coeficientes de la 2-forma $K(\text{Leg}\mathcal{F}_c)|_{\mathbb{D}}$ tenemos una familia $f_c(z)$ de funciones tal que f_c es holomorfa en \mathbb{D} si $c \neq 0$, y f_0 es holomorfa en $\mathbb{D} \setminus \{B\}$. Por el teorema de Cauchy podemos escribir

$$f_c(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\epsilon} \frac{f_c(w)}{z-w} dw,$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $|z| < \frac{\epsilon}{2}$ y $0 < |c| \leq 1$. Observemos que el lado derecho es una familia uniformemente acotada aún considerando el caso $c = 0$ y usamos el teorema de Montel para concluir que f_0 es holomorfa en B . \square

Lema 2.14. Dada una 2-forma meromorfa $\omega = \frac{P(p,q)}{Q(p,q)} dp \wedge dq$ sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Si $q \nmid P$ y $(\omega)_{\infty} \subseteq \check{\mathbf{0}} = \{q = 0\}$ entonces $q^3 \mid Q$.

Prueba.

De las condiciones dada podemos escribir $\omega = \frac{T(p,q)}{q^m} dp \wedge dq$. Después de realizar el cambio de coordenadas $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{1}{q}$ tenemos $\omega = b^{m-n-3} \tilde{T}(a,b) da \wedge db$, donde $n = \deg(T)$. Y puesto que ω no tiene polos en la recta en el infinito tenemos $m \geq n + 3 \geq 3$. \square

Ahora procedemos a enunciar y demostrar los resultados principales de este capítulo.

Teorema 2.15. Sea \mathcal{F} una foliación de grado 3 sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que $\Sigma_{\mathcal{F}}$ no tiene componentes múltiples. Entonces $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano si y solo si $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa sobre puntos genéricos de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}})$.

Prueba.

Sabemos que $\check{\Delta}_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}) + \check{\Sigma}_{\mathcal{F}}^e$. Luego, $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano si la curvatura $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ de $\text{Leg}\mathcal{F}$ es holomorfa sobre puntos genéricos de las componentes de $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}$. Si suponemos que la curvatura $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa sobre $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}})$ bastará analizar su holomorfía sobre las componentes del conjunto $\check{\Sigma}_{\mathcal{F}}^e$. Si $s \in \Sigma_{\mathcal{F}}^e$, entonces $\nu_s(\mathcal{F}) \geq 2$, esto sucede cuando la singularidad tiene parte lineal nula o cuando s es una singularidad radial. En cualquiera de los casos, las proposiciones (2.5) y (2.3) implican la holomorfía de la curvatura de $\text{Leg}\mathcal{F}$ sobre puntos genéricos de \check{s} . Por lo tanto, para obtener la holomorfía de la curvatura de $\text{Leg}\mathcal{F}$ en un punto singular de la forma $X = X_3 + H \cdot R$, el cual suponemos es $\mathbf{0} = (0, 0)$. Se presentan dos situaciones:

- a) Cuando el conjunto singular $\Sigma_{\mathcal{F}_h}$ de la foliación homogénea \mathcal{F}_h dada por X_3 no tiene componentes múltiples. Teniendo en cuenta que $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa en

un punto genérico de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}})$, el lema 2.13 y la proposición 2.7 implican que $K(\text{Leg}\mathcal{F}_h) \equiv 0$. El lema 2.12 implica que $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfo sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y de esta manera debe ser cero, esto es $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano.

- b) Si $\Sigma_{\mathcal{F}_h}$ tiene una componente múltiple, sin pérdida de generalidad podemos escribir

$$X_3 = y^2 \cdot \left[(a_1x + b_1y) \frac{\partial}{\partial x} + (a_2x + b_2y) \frac{\partial}{\partial y} \right], \quad H(x, y) = \sum_{i=0}^3 h_i x^{3-i} y^i.$$

Ripoll, ver [32], usando Maple, implementa un programa para calcular la curvatura de un web, usando esto obtenemos que la curvatura $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ toma la forma siguiente

$$K(\text{Leg}\mathcal{F}) = \frac{P_0(p, q)}{q Q_0(p, q)^2} dp \wedge dq, \quad \text{donde } q \nmid P_0$$

Usando el lema (2.14) se tiene que $q \mid Q_0$; es decir

$$Q_0(p, 0) = 16h_0^2(a_1p - a_2)^6 = 0.$$

De esta manera, llegamos a las dos situaciones siguientes:

- i) Si $h_0 \neq 0$. Entonces $a_1 = a_2 = 0$ y maple nos da

$$K(\text{Leg}\mathcal{F}) = \frac{P_1(p, q)}{q Q_1(p, q)^2} dp \wedge dq, \quad \text{con } q \nmid P_1,$$

aplicando nuevamente el lema (2.14) obtenemos

$$Q_1(p, 0) = 729h_0^4(b_1p - b_2)^4 = 0.$$

Luego, $b_1 = b_2 = 0$ y $X_3 = 0$.

- ii) Si $h_0 = 0$. Maple nos da la igualdad

$$K(\text{Leg}\mathcal{F}) = \frac{P_2(p, q)}{q Q_2(p, q)^2} dp \wedge dq, \quad \text{con } q \nmid P_2.$$

Aplicando el lema (2.14) resulta $Q_2(p, 0) = (a_1p - a_2)^4 = 0$ y necesariamente $a_1 = a_2 = 0$. Usando Maple obtenemos

$$K(\text{Leg}\mathcal{F}) = \frac{P_3(p, q)}{q Q_3(p, q)^2} dp \wedge dq, \quad \text{con } q \nmid P_3.$$

Nuevamente aplicando el lema (2.14) resulta

$$Q_3(p, 0) = 16h_1^2(b_1p - b_2)^2 = 0.$$

Puesto que $\Sigma_{\mathcal{F}}$ no tiene componentes múltiples $h_1 \neq 0$. En consecuencia, $b_1 = b_2 = 0$ y por lo tanto $X_3 = 0$.

En ambas situaciones llegamos en $X_3 = 0$, esto finaliza la prueba. \square

Damos una caracterización geométrica de los 3-webs genéricos. Si C es una componente irreducible no invariante del divisor de inflexión de una foliación \mathcal{F} de grado 3 foliación sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ entonces consideramos la curva C^\perp formada por los puntos q para los cuales existe $p \in C$ tal que $\text{Tang}(\mathcal{F}, T_p\mathcal{F}) = 2p + q$.

Corolario 2.16. *Sea \mathcal{F} una foliación saturada de grado 3 sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con divisor de inflexión transverso $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$ reducido. Una condición necesaria y suficiente para que $\text{Leg}\mathcal{F}$ sea plano es que para cada componente irreducible C de $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$ la curva de terceras tangencias C^\perp sea \mathcal{F} -invariante.*

Prueba.

Supongamos que $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano y C una componente irreducible de $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$. Como $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$ es reducido el orden de tangencia de \mathcal{F} en un punto genérico de C es 2, esto permite descomponer el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ en una vecindad de un punto genérico de $D = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(C) \subset \check{\Delta}_{\mathcal{F}}$ como un producto: $\text{Leg}\mathcal{F} = \mathcal{W}_1 \boxtimes \mathcal{W}_2$, donde \mathcal{W}_1 es una foliación transversa a \mathcal{W}_2 y \mathcal{W}_2 es un 2-web con $\Delta(\mathcal{W}_2) = D$. Del teorema (1.23) se sigue que $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa en D si D es invariante o por \mathcal{W}_2 o por \mathcal{W}_1 . En el primer caso, de acuerdo a la segunda parte de la observación (1.27) parte (2i), C^\perp es un punto singular de \mathcal{F} , y en el segundo caso, C^\perp es la envolvente de la familia $\{T_p\mathcal{F} : p \in C\}$, por lo tanto C^\perp es \mathcal{F} -invariante. Por otro lado, supongamos que C^\perp es \mathcal{F} -invariante y como $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$ es reducido, entonces $\check{\Delta}_{\mathcal{F}} = D$ es invariante por \mathcal{W}_1 , y por tanto el teorema (1.23) garantiza que $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa en un punto genérico de D . Asimismo, el teorema (2.15) implica que $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa en un punto genérico de $\Delta(D)$. En consecuencia, $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano. \square

Otra aplicación del teorema (2.15) es el siguiente resultado.

Corolario 2.17. *Si \mathcal{F} es una foliación convexa saturada de grado 3 sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, entonces $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano.*

Prueba.

Sabemos que el discriminante del web $\text{Leg}\mathcal{F}$ es dado por $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}})$ y el dual de algunas singularidades de \mathcal{F} . Si \mathcal{F} es una foliación convexa entonces el divisor de inflexión $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ esta formado por algunas rectas invariantes cuyos duales correspondientes son, en número finito, puntos en $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$. Por lo tanto, $K(\text{Leg}\mathcal{F})$ es holomorfa en un punto genérico de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}})$. Finalmente el teorema (2.15) permite concluir que $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano. \square

El recíproco de este corolario no siempre se cumple, por ejemplo si consideramos la foliación \mathcal{F} inducida por el campo $X = y^3 \frac{\partial}{\partial x} - x^3 \frac{\partial}{\partial y}$, se prueba que $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano; sin embargo la foliación dada no es convexa, pues su divisor de inflexión

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{x^2y^2(x^4 + y^4)xy = 0\}$$

tiene parte transversa $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} = \{xy = 0\}$.

Ejemplo 2.18. Sea \mathcal{F} la foliación de grado 3 inducida por el campo

$$X(x, y) = (x^3 + xy^2)\partial_x + \left(x^3 + \frac{2}{3}y^3\right)\partial_y.$$

Es claro que $s = (0, 0) \in \Sigma_{\mathcal{F}}$ y $\nu_s(\mathcal{F}) = 3$. Asimismo, el divisor de inflexión de \mathcal{F} es dado por $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : xy(y^3 + 3x^2y - 3x^3)^2 = 0\}$, con parte transversa $C = \mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} = \{y = 0\}$ y parte invariante $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{inv}} = \{x(y^3 + 3x^2y - 3x^3)^2 = 0\}$. La curva de terceras tangencias C^{\perp} correspondiente a C es dada por

$$\begin{aligned} C^{\perp} &= \{(x, y) : \exists p = (x_0, y_0) \in C : \text{Tang}(\mathcal{F}, T_p\mathcal{F}) = 2p + (x, y)\} \\ &= \{(x, y) : 3x - 2y = 0\}. \end{aligned}$$

La curva C^{\perp} no es \mathcal{F} -invariante.

Por otro lado, el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ es dado por

$$\omega = (p^3 + 3p - 3) dq^3 - 3pq^2 dq dp^2 + 2q^3 dp^3.$$

El discriminante y curvatura de $\text{Leg}\mathcal{F}$ vienen dados respectivamente por

$$\check{\Delta}_{\mathcal{F}} = \{(p, q) : 4(p - 1)(p^3 + 3p - 3)q^6 = 0\},$$

$$K(\text{Leg}\mathcal{F}) = \frac{1}{6q(p - 1)^2} dp \wedge dq.$$

Es decir, $(K(\text{Leg}\mathcal{F}))_{\infty} = \{q(p - 1)^2 = 0\}$, donde la componente $q = 0$ proviene de la singularidad de \mathcal{F} , y la componente $p - 1 = 0$ proviene de la parte transversa del divisor de inflexión; esto es

$$\check{s} = \{q = 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\{y = 0\}) = p - 1$$

De esta manera, el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ no es plano. Es importante remarcar que en este caso no se tiene que la curvatura del web $\text{Leg}\mathcal{F}$ es holomorfa sobre $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}$. Note que este ejemplo no contradice el teorema (2.15). I

Ejemplo 2.19. Sea \mathcal{F} la foliación inducida por el campo $X(x, y) = x\partial_x + \left(\frac{5}{12}x^3 + \frac{y}{3}\right)\partial_y$.

El punto $s = (0, 0)$ es una singularidad de \mathcal{F} . El divisor de inflexión de \mathcal{F} es $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : \frac{x}{36}(35x^3 - 8y) = 0\}$, con parte invariante

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{inv}} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x = 0\} \text{ y parte transversa } \mathcal{C} = \mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : 35x^3 = 8y\}.$$

La curva de terceras tangencias correspondiente a C es $C^{\perp} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = \frac{5}{32}x^3\}$, la cual es \mathcal{F} -invariante. El corolario 1) permite concluir que el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano.

Por otro lado, el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ es definido por la forma polinomial

$$\omega = -5 dq^3 + 8p dq dp^2 + 4q dp^3,$$

con discriminante $\check{\Delta}_{\mathcal{F}} = \{(p, q) : -\frac{40}{81}p^3 + \frac{25}{48}q^2 = 0\}$. El dual \check{s} de s es dado por $\{(p, q) : q = 0\}$, el mismo que no está contenido en el discriminante $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}$. Se verifica, usando el algoritmo de Ripoll, que $K(\text{Leg}\mathcal{F}) \equiv 0$. Es decir, $\text{Leg}\mathcal{F}$ es un web plano. I

Ejemplo 2.20. Sea \mathcal{F} la foliación inducida por el campo vectorial $X(x, y) = x^3 \frac{\partial}{\partial x} + y^3 \frac{\partial}{\partial y}$. Es claro que $s = (0, 0) \in \Sigma_{\mathcal{F}}$. En esta caso, el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ es definido por la ecuación diferencial implícita

$$F(p, q; x) = (p^3 - p)x^3 + 3p^2qx^2 + 3pq^2x + q^3$$

Se verifica que $K(\text{Leg}\mathcal{F}) \equiv 0$; esto es, $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano. Asimismo, su divisor de inflexión es $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : -3x^3y^3(x - y)(x + y) = 0\}$, es totalmente invariante, por lo tanto \mathcal{F} es una foliación convexa, pero $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ es no reducido. Es importante notar que a pesar que las condiciones del corolario (2.17) no se cumplen el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ es plano. **|**



Capítulo 3

Foliaciones, webs y transformaciones biracionales sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

3.1. Foliaciones, webs y foliaciones Galois

En [7] se observa que la restricción de la aplicación de Gauss de una foliación a un abierto Zariski es un recubrimiento y se preguntan cuando éste admite automorfismos biracionales. Esta cuestión motiva la última parte de este trabajo.

Sea \mathcal{F} una foliación de grado d sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y consideremos los siguientes objetos y definiciones asociados a la foliación \mathcal{F} y su transformado de Legendre $\text{Leg}\mathcal{F}$, algunos de ellos ya introducidos en los capítulos anteriores:

1. La aplicación de Gauss $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ está bien definida fuera del conjunto singular $\Sigma_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} ,
2. el conjunto de las singularidades especiales $\Sigma_{\mathcal{F}}^e = \{s \in \Sigma_{\mathcal{F}} : \tau_s(\mathcal{F}) \geq 2\}$, donde $\tau_s(\mathcal{F})$ es el orden de tangencia en s de \mathcal{F} con una recta genérica pasando por s ,
3. El gráfico cerrado $\mathbf{S}_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ contenido en la variedad de incidencia

$$\mathcal{I} := \{(p, \ell) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \times \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 : p \in \ell\} \simeq \mathbb{P}T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \simeq \mathbb{P}T^*\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2,$$

y las restricciones $\pi_{\mathcal{F}}$ y $\check{\pi}_{\mathcal{F}}$ a $\mathbf{S}_{\mathcal{F}}$ de las proyecciones naturales $\pi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y $\check{\pi} : \mathcal{I} \rightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$.

Se cumple $\pi^{-1}(\Sigma_{\mathcal{F}}) \subset \mathbf{S}_{\mathcal{F}}$ y las componentes irreducibles de codimensión uno del conjunto singular de $\mathbf{S}_{\mathcal{F}}$ es $\pi^{-1}(\{s \in \Sigma_{\mathcal{F}} : \nu_s(\mathcal{F}) \geq 2\})$,

4. Para las curvas $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ definimos,

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(C) := \check{\pi}_{\mathcal{F}}(\pi_{\mathcal{F}}^{-1}(C)) \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{-1}(\check{C}) := \pi_{\mathcal{F}}(\check{\pi}_{\mathcal{F}}^{-1}(\check{C})),$$

5. El divisor de inflexión $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ introducido y estudiado por [29] es definido por el anulamiento del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ X(A) & X(B) & X(C) \end{vmatrix},$$

donde $X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + C\frac{\partial}{\partial z}$ es el campo que define \mathcal{F} en coordenadas homogéneas. Asimismo, el divisor $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ puede descomponerse $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} + \mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{inv}}$, donde el soporte de $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$ es la clausura de los puntos de inflexión de las hojas de \mathcal{F} que no son rectas y $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{inv}}$ es formado por la unión de rectas invariantes por \mathcal{F} ,

6. $\Delta_{\mathcal{F}}$ y $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}$ denotan los discriminantes de los webs $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \text{Leg} \mathcal{F}$ y $\text{Leg} \mathcal{F}$ respectivamente, donde $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}$ se descompone en dos partes $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}^{\text{inf}} = \overline{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} \setminus \Sigma_{\mathcal{F}})}$ y $\check{\Sigma}_{\mathcal{F}}^e = \tilde{\pi}(\pi^{-1}(\Sigma_{\mathcal{F}}^e))$, que es unión de las rectas duales de las singularidades especiales $\Sigma_{\mathcal{F}}^e$ de \mathcal{F} .

7. Definimos las siguientes curvas

$$\check{\Lambda}_{\mathcal{F}} := \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}), \quad \Lambda_{\mathcal{F}} := \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}})),$$

la curva co-inflexión,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\perp} := \overline{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} \setminus \Sigma_{\mathcal{F}}))} \setminus \mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}},$$

y la curva co-singular

$$\Sigma_{\mathcal{F}}^{\perp} := \bigcup_{s \in \Sigma_{\mathcal{F}}} \text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{R}_s),$$

donde \mathcal{R}_s es la foliación radial centrada en s .

Lema 3.1. *Tenemos la siguiente igualdad de divisores,*

$$\det(D\mathcal{G}_{\mathcal{F}}) = \frac{1}{A^3} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ A & B & 0 \\ X(A) & X(B) & 0 \end{vmatrix}.$$

Prueba.

Sea $X = A(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ un campo vectorial que define \mathcal{F} en la carta afín (x, y) de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y consideremos la carta afín (p, q) en $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ correspondiente a la recta $y = px + q$. En estas coordenadas la aplicación de Gauss es dada por

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(x, y) = (p(x, y), y - xp(x, y)), \quad \text{donde} \quad p(x, y) = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \det(d\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(x, y)) &= \begin{vmatrix} p_x & p_y \\ -p - xp_x & 1 - xp_y \end{vmatrix} = p_x + pp_y \\
 &= \frac{1}{A^3} [(B_x A - B A_x)A + B(B_y A - B A_y)] \\
 &= \frac{1}{A^3} \begin{vmatrix} A & A A_x + B A_y \\ B & A B_x + B B_y \end{vmatrix} = \frac{1}{A^3} (A(A B_x + B B_y) - B(A A_x + B A_y)) \\
 &= \frac{1}{A^3} (A X(B) - B X(A)) = \frac{1}{A^3} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ A & B & 0 \\ X(A) & X(B) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{A^3} \mathcal{I}_{\mathcal{F}}.
 \end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *Se cumple*

- a) $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{\det(D\mathcal{G}_{\mathcal{F}}) = 0\}$,
- b) $\check{\Delta}_{\mathcal{F}} = \check{\Delta}_{\mathcal{F}}^{\text{inf}} \cup \check{\Sigma}_{\mathcal{F}}^e \subset \check{\Lambda}_{\mathcal{F}} = \check{\Delta}_{\mathcal{F}} \cup \check{\Sigma}_{\mathcal{F}}$,
- c) $\Delta_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{-1}(\check{\Delta}_{\mathcal{F}}) \cup \mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \mathcal{I}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\perp} \cup \Sigma_{\mathcal{F}}^e \subset \Lambda_{\mathcal{F}} = \mathcal{I}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\perp} \cup \Sigma_{\mathcal{F}}^{\perp}$.

Prueba.

- a) Se obtiene de inmediato del lema (3.1).
- b) Es inmediata a partir del lema (2.2).
- c) Se cumple que $\Delta_{\mathcal{F}} = \Delta(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \text{Leg}\mathcal{F}) = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{-1}(\check{\Delta}_{\mathcal{F}}) \cup \{\det D\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = 0\}$. Asimismo, se verifica que

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{-1}(\check{\Lambda}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{-1}(\check{\Delta}_{\mathcal{F}}^{\text{inf}}) \cup \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{-1}(\check{\Sigma}_{\mathcal{F}}).$$

Y de la definición $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\perp}$ y $\Sigma_{\mathcal{F}}^{\perp}$ se obtiene, $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{-1}(\check{\Delta}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{I}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\perp}$ y $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{-1}(\check{\Sigma}_{\mathcal{F}}) = \Sigma_{\mathcal{F}}^{\perp}$. A partir de esto el resultado es inmediato.

Proposición 3.3. *Sea \mathcal{F} una foliación de grado d sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. La restricción a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}$,*

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}} \longrightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Lambda}_{\mathcal{F}}$$

de la aplicación de Gauss $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ es un recubrimiento de grado finito d y su grupo de automorfismos del recubrimiento es obtenido por restricción a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}$ del grupo de transformaciones biracionales

$$D_{\mathcal{F}} = \{\tau \in \text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2) : \mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \tau\}. \quad (3.1)$$

Además, la representación de monodromía $\mu_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$ es dada por la composición

$$\pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Lambda}_{\mathcal{F}}) \longrightarrow \pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\check{\mu}_{\mathcal{F}}} \mathfrak{S}_d, \quad (3.2)$$

donde $\check{\mu}_{\mathcal{F}}$ es la representación de monodromía del web $\text{Leg}\mathcal{F}$.

Prueba.

$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$ es un recubrimiento: El lema (3.1) implica que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$ es un difeomorfismo local. En particular, $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$ es un homeomorfismo local. Consideremos un punto arbitrario $\check{\ell}$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}$,

$$(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda})^{-1}(\check{\ell}) = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}} : \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}(x) = \check{\ell}\} = \{x_1, \dots, x_d\},$$

y como $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$ es un homeomorfismo local, para cada punto x_i existe una vecindad abierta conexa V_i de $\check{\ell}$ tal que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \rightarrow V_i$ es un homeomorfismo. Definimos

$$V := \cap_{i=1}^d V_i, \quad U_i := (\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}|_{\tilde{U}_i})^{-1}(V) \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}|_{U_i} : U_i \rightarrow V$$

Es claro que V es una vecindad abierta de $\check{\ell}$, U_i es una vecindad abierta de x_i y $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}|_{U_i}$ es un homeomorfismo.

El grupo de transformaciones de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$ es obtenido por restricción del grupo de transformaciones biracionales $D_{\mathcal{F}} = \{\tau \in \text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2) : \mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \tau\}$: Para esto demostraremos que la función

$$\begin{aligned} \phi : D_{\mathcal{F}} &\longrightarrow D \\ \tau &\longmapsto \tau|_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}} \end{aligned}$$

donde $D = \{T : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}} \text{ homeomorfismo} : \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda} \circ T\} \subset D_{\mathcal{F}}$, tiene las siguientes propiedades

- a) ϕ está bien definida: Sea $\tau \in D_{\mathcal{F}}$ entonces $\tau|_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}}$ es biyectiva, pues sabemos que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda} \circ \tau|_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}}$ y como $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}|_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}}$ es un homeomorfismo local entonces $\tau|_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}} = (\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda})^{-1} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$, donde $(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda})^{-1}$ denota la inversa local de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$.
- b) ϕ es inyectiva: Sea $T = \tau|_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}}$. De la relación $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda} \circ T = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$ se deduce que T tiene la misma regularidad que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$ (holomorfa). Luego, si $T = \text{Id}$ por prolongación analítica se sigue que $\tau = \text{Id}$.
- c) ϕ es suryectiva: Sea $\tau : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}$ una transformación de recubrimiento univaluada cualquiera, debemos demostrar que τ se extiende a una aplicación biracional de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Supongamos que la foliación \mathcal{F} es definida por un campo vectorial X en coordenadas (x, y) . Siguiendo [7] sabemos que cualquier transformación de recubrimiento τ de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$ puede, localmente, escribirse en la forma

$$\tau(x, y) = (x, y) + t(x, y)X(x, y),$$

donde $t(x, y)$ es una raíz univaluada del polinomio

$$P(x, y, t) = \det(X(x, y), X((x, y) + tX(x, y))) \in \mathbb{C}[x, y, t].$$

Para llegar al resultado bastará probar que una raíz univaluada de P es necesariamente racional. Para esto consideramos el conjunto $\mathbb{C}^2 \setminus \nabla$, donde $\nabla = \{(x, y) : \text{Result}(P, \frac{\partial P}{\partial t}) = 0\}$. Luego, para todo $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \nabla$ podemos resolver la ecuación $P(x, y, t) = 0$ resultando $t = t(x, y)$. Sean

$$S = \{(x, y, t) \in (\mathbb{C}^2 \setminus \nabla) \times \mathbb{C} : t = t(x, y)\} = \text{Gr}(t) \quad y$$

$$\pi : S \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \nabla, \quad (x, y, t) \longmapsto (x, y)$$

la proyección natural. Se prueba que $\pi : P^{-1}(0) \setminus \pi^{-1}(\nabla) \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \nabla$ es un recubrimiento con una sección $t = t(x, y)$, pues basta definir $s(x, y) = (x, y, t(x, y))$ sobre una vecindad abierta conexa \tilde{V} de un punto (x_0, y_0) en $\mathbb{C}^2 \setminus \nabla$ verificando $\pi \circ s(x, y) = (x, y)$, para todo $(x, y) \in \tilde{V}$; esto significa que π es inversa local de s , en consecuencia $s : \tilde{V} \longrightarrow \pi^{-1}(\tilde{V})$ es biyectiva. Esto último implica que existe un elemento en la fibra $F = \pi^{-1}(x_0, y_0)$ de $\pi : (P^{-1}(0) \setminus \nabla) \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \nabla$ que es fijo por la monodromía de π . Luego, $(P^{-1}(0) \setminus \nabla)$ es disconexo.

Por otro lado, la componente conexa de $(P^{-1}(0) \setminus \nabla)$ que contiene a la imagen de $t(x, y)$ corresponde a un factor irreducible Q del polinomio P cuyo grado respecto a t es menor que d . Si procedemos de manera análoga para Q se llega a obtener que $\text{deg}(Q) = 1$; es decir, $t(x, y)$ es una raíz de $Q(x, y, t) = a(x, y)t + b(x, y)$, con $a, b \in \mathbb{C}[x, y]$. Por lo tanto, $t(x, y) = -\frac{b(x, y)}{a(x, y)} \in \mathbb{C}(x, y)$.

Finalmente, la inclusión $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}} \subset \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}$ induce el homomorfismo

$$\check{i}_* : \pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}) \longrightarrow \pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}).$$

Por el teorema tipo Lefschetz [17] \check{i}_* es suryectivo. Y desde que los elementos de las fibras de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta}$ corresponden a las direcciones de $\text{Leg}\mathcal{F}$ es claro que $\check{\mu} \circ \check{i} = \mu_{\mathcal{F}}$. Por lo tanto, la representación de monodromía $\mu_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta}$ es composición de $\check{\mu}_{\mathcal{F}}$ con \check{i}_* y de esta manera el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{F}}} & \mathfrak{S}_d \\ \check{i}_* \downarrow & \nearrow \check{\mu}_{\mathcal{F}} & \\ \pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}) & & \end{array}$$

□

Proposición 3.4. *Sea \mathcal{F} una foliación de grado d sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ entonces el web $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \text{Leg}\mathcal{F}$ contiene la foliación $\tau^* \mathcal{F}$ para cada $\tau \in D_{\mathcal{F}}$.*

Prueba.

Sean $\tau \in D_{\mathcal{F}}$ arbitrario y H una hoja de \mathcal{F} entonces $\tau^{-1}(H)$ es una hoja de la foliación $\tau^* \mathcal{F}$. Por otro lado, de la parte (3.1) del teorema (3.3) se sigue que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\tau^{-1}(H)) = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(H)$ es una hoja de $(\mathcal{G}_{\mathcal{F}})_* \mathcal{F} = \text{Leg}\mathcal{F}$, y por lo tanto $\tau^{-1}(H)$ es una hoja de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^*(\text{Leg}\mathcal{F})$.

□

Teorema 3.5. *Sea \mathcal{F} una foliación de grado d sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *La aplicación de Gauss restringida $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}} \rightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Lambda}_{\mathcal{F}}$ es un recubrimiento Galois,*
2. *El web $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \text{Leg} \mathcal{F}$ es totalmente descomponible.*

Prueba.

(1 \Rightarrow 2) Si $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta}$ es un recubrimiento Galois, $|D_{\mathcal{F}}| = d$ y por lo tanto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \text{Leg} \mathcal{F} = \boxtimes_{\tau \in D_{\mathcal{F}}} \tau^* \mathcal{F}$.

(2 \Rightarrow 1) De la parte (1) del teorema (1.32) demostrar que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta}$ es un recubrimiento Galois es equivalente a demostrar que $(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_*(\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}})) \subset \ker(\mu_{\mathcal{F}})$, siendo $\mu_{\mathcal{F}}$ la representación de monodromía asociada a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. En efecto, si $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \text{Leg} \mathcal{F}$ es completamente descomponible, su representación de monodromía $\check{\mu}_{\mathcal{F}}$ es trivial. Asimismo, de la parte (3.2) del teorema (3.3) se sigue que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_*} & \pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Lambda}_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{F}}} & \mathfrak{S}_d \\
 \downarrow \iota_* & & \downarrow \check{\iota}_* & & \downarrow Id \\
 \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Delta_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_*} & \pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{\check{\mu}_{\mathcal{F}}} & \mathfrak{S}_d
 \end{array}$$

es conmutativo, donde $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta}$ denota la restricción de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Delta_{\mathcal{F}}$, $\iota : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Lambda_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Delta_{\mathcal{F}}$ y $\check{\iota} : \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Lambda}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}$ son las inclusiones naturales.

Por otro lado, del teorema tipo Lefschetz [17], el morfismo ι_* es suryectivo. De la conmutatividad del diagrama anterior se sigue que $\text{Im}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_* \subset \check{\iota}_*^{-1}(\text{Im}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_*)$, y de la trivialidad del web $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^* \text{Leg} \mathcal{F}$, que es exactamente la composición $(\check{\mu} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_*$ resulta $\check{\iota}_*^{-1}(\text{Im}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_*) \subset \check{\iota}_*^{-1}(\ker(\check{\mu}_{\mathcal{F}}))$. Las dos últimas inclusiones permiten concluir que la aplicación $\text{Im}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Delta})_* \subset \ker(\mu_{\mathcal{F}})$. \square

Diremos que una **foliación \mathcal{F} es Galois** si se verifican cualquiera de las afirmaciones (1) – (2) del teorema (3.5).

3.2. Ejemplos de foliaciones Galois

El criterio descrito en [7] usado para probar si \mathcal{F} una foliación sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es Galois puede ser reformulado tal y como se describe en la siguiente proposición

Proposición 3.6. *Una foliación \mathcal{F} sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ dada por el campo vectorial polinomial $X = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ es Galois si y solo si el polinomio*

$$P(x, y, t) = \det \begin{pmatrix} A(x, y) & A(x + tA(x, y), y + tB(x, y)) \\ B(x, y) & B(x + tA(x, y), y + tB(x, y)) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}[x, y, t]$$

descompone totalmente sobre el campo $\mathbb{C}(x, y)$. En tal caso, cada una de sus raíces $t = t(x, y) \in \mathbb{C}(x, y)$ determina una transformación de recubrimiento biracional

$$\tau : (x, y) \mapsto (x + tA(x, y), y + tB(x, y)) \quad \text{de } \mathcal{G}_{\mathcal{F}}.$$

Observacion 3.7. $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda}$ es Galois si y solo si la extensión de cuerpos L/K es Galois, donde $L = k(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ y $K = (\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\Lambda})^* k(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$, donde $k(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ es el cuerpo de funciones racionales.

Ejemplo 3.8. Toda foliación \mathcal{F} de grado $d = 1$ o $d = 2$ sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es Galois. En efecto, supongamos que \mathcal{F} es dada por el campo vectorial $X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}$ y siguiendo [7] consideremos el polinomio de grado d en t definido por

$$P(x, y, t) = \det(X(x, y), X((x, y) + tX(x, y))).$$

Las transformaciones de recubrimiento de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ se forman a partir de las raíces de $P(x, y, t)$ respecto a la variable t :

$$\tau : (x, y) \mapsto (x + tA(x, y), y + tB(x, y)).$$

Es claro que $t = 0$ es siempre una raíz del polinomio $P(x, y, t)$, cuya transformación de recubrimiento asociada es la identidad. En el caso que $\deg(\mathcal{F}) = 1$, esta es la única transformación que obtenemos. En el caso que $\deg(\mathcal{F}) = 2$ el polinomio es de la forma $P(x, y, t) = t(a(x, y) + tb(x, y))$, $a, b \in \mathbb{C}[x, y]$. De esto se obtienen las transformaciones de recubrimiento

$$\tau_1(x, y) = (x, y), \quad \tau_2(x, y) = (x + t_1A(x, y), y + t_1B(x, y)), \quad \text{con } t_1 = -\frac{a}{b}.$$

Como, $\tau_1 \neq 0$ se obtiene que $\tau_1 \neq \tau_2$.

Luego, en cualquiera de los casos se tiene que $|D_{\mathcal{F}}| = \deg(\mathcal{F})$, por lo tanto \mathcal{F} es Galois. La afirmación en este ejemplo puede justificarse también diciendo que toda extensión de cuerpos de grado ≤ 2 es Galois. ■

Observacion 3.9. Existe una forma equivalente para obtener las transformaciones biracionales anteriores considerando la pendiente $p(x, y)$ del campo vectorial X :

$$P(x, y, t) = \det(X(x, y), X(x + t, y + tp(x, y))).$$

Es claro que en este caso P es una función racional.

Proposicion 3.10. La foliación \mathcal{F} definida por el campo vectorial

$$Z(x, y) = (\alpha u^d + \beta v^d)\frac{\partial}{\partial x} + (\gamma u^d + \delta v^d)\frac{\partial}{\partial y}$$

es Galois con grupo de monodromía es cíclico, donde $u, v \in \mathbb{C}[x, y]$ son \mathbb{C} -linealmente independientes cuyos grados $\deg(u), \deg(v) \leq 1$ y los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ verifican la condición $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Prueba.

La pendiente del campo vectorial Z es de la forma $p(x, y) = h(f(x, y))^d$, donde $f(x, y) = \frac{u(x, y)}{v(x, y)}$ y $h(z) = \frac{\gamma z + \delta}{\alpha z + \beta} \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Si $X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} + p(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ entonces las raíces del polinomio

$$P(x, y, t) = \det(X(x, y), X(x + t, y + tp(x, y))) \quad (3.3)$$

son las soluciones de la ecuación $h \circ f^d(x + t, y + tp(x, y)) = h \circ f^d(x, y)$. Pues teniendo en cuenta que $h \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ de la última relación se obtiene

$$\left(\frac{f(x + t, y + tp(x, y))}{f(x, y)} \right)^d = 1.$$

Si denotamos por $\xi = e^{\frac{2i\pi}{d}}$ entonces las raíces de (3.3) son las soluciones $t = t(x, y)$ de las d -ecuaciones lineales en la variable t ,

$$f(x + t, y + tp(x, y)) = \xi^k f(x, y), \quad \text{para } k \in \{1, \dots, d\}.$$

Cada solución $t = t_k(x, y)$ determina una aplicación de recubrimiento

$$\tau_k : (x, y) \mapsto (x + t_k(x, y), y + t_k(x, y)p(x, y))$$

verificando $f \circ \tau_k(x, y) = \xi^k f(x, y)$. Luego, si $\tau_k \circ \tau_\ell = \tau_{m(k, \ell)}$ entonces

$$\xi^{k+\ell} = f \circ \tau_k \circ \tau_\ell(x, y) = f \circ \tau_{m(k, \ell)} = \xi^{m(k, \ell)} f(x, y),$$

es decir, $m(k, \ell) = (k + \ell) \pmod{d}$. De esta manera, $D_{\mathcal{F}} = \{\tau_1, \dots, \tau_d\} = \langle \tau_1 \rangle$. Esto implica que $M_{\mathcal{F}} \simeq D_{\mathcal{F}} = \mathbb{Z}_d$, pues $|D_{\mathcal{F}}| = d$. \square

En los siguientes ejemplos se presentan foliaciones Galois con grupo de monodromía no cíclica.

Ejemplo 3.11. La foliación \mathcal{F} definida por el campo vectorial

$$X(x, y) = (x^3 + y^3)^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x^3 - y^3)^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

es Galois y tiene monodromía $M_{\mathcal{F}}$ no cíclica:

$$M_{\mathcal{F}} \simeq \{\text{Id}, (12)(36)(45), (13)(25)(46), (14)(26)(35), (156)(234), (165)(243)\}.$$

En efecto, \mathcal{F} es Galois, pues el polinomio $P(x, y, t) = \det(X(x, y), X((x, y) + t(1, p)))$, tiene 6 raíces diferentes, siendo $p = p(x, y)$ la pendiente del campo X . Estas raíces determinan las aplicaciones biracionales τ_i , $i = 1, \dots, 6$ y de esta manera $|D_{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}}^{\Delta}| = 6 = \deg(\mathcal{F})$. Luego, de acuerdo al teorema (1.32) \mathcal{F} es Galois. Estas aplicaciones se caracterizan porque permutan los puntos de tangencia de \mathcal{F} con una recta genérica ℓ . Consideremos la recta $\ell : y = -x + 1$, entonces los puntos de tangencia de \mathcal{F} con ℓ buscados se caracterizan porque la pendiente del campo X y la pendiente de la recta ℓ coinciden, esto decir

$$\left(\frac{x^3 + (-x + 1)^3}{x^3 - (-x + 1)^3} \right)^2 = -1.$$

Resultando las siguientes soluciones

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, & x_2 &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, & x_3 &= \frac{1}{2} - i - \frac{\sqrt{3}i}{2}, \\ x_4 &= \frac{1}{2} - i + \frac{\sqrt{3}i}{2}, & x_5 &= \frac{1}{2} + i - \frac{\sqrt{3}i}{2}, & x_6 &= \frac{1}{2} + i + \frac{\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

Al evaluar cada una de las aplicaciones birracionales τ_i sobre los puntos $r_i = (x_i, y_i)$, siendo $y_i = -x + 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \text{Id}, & \tau_2 &= (12)(36)(45), & \tau_3 &= (156)(234), \\ \tau_4 &= (165)(243), & \tau_5 &= (13)(25)(46), & \tau_6 &= (14)(26)(35). \end{aligned}$$

Luego, $M_{\mathcal{F}} \simeq D_{\mathcal{F}} = \{\text{Id}, (12)(36)(45), (13)(25)(46), (156)(234), (165)(243)\}$. Es claro que este grupo no es abeliano. |

Ejemplo 3.12. Una situación más general que el ejemplo anterior es dado por la foliación \mathcal{F} de grado $d = 2n$ definida por el campo vectorial

$$X(x, y) = (x^n + y^n)^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x^n - y^n)^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

\mathcal{F} es Galois y su grupo de monodromía $M_{\mathcal{F}}$, como veremos más adelante en la proposición (3.36) y en el teorema (3.34), es isomorfo al grupo diedral D_n de orden $2n$, en consecuencia $M_{\mathcal{F}}$ no es abeliano. |

Sin embargo, en el caso en que el grado d de la foliación es primo las únicas foliaciones Galois son aquellas cuyo grupo de monodromía es cíclica.

Teorema 3.13. *Sea \mathcal{F} una foliación sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ de grado primo d . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. \mathcal{F} es Galois,
2. $M_{\mathcal{F}}$ es cíclico,
3. $D_{\mathcal{F}} \simeq M_{\mathcal{F}} \simeq \mathbb{Z}_d$.

Prueba.

(1 \Leftrightarrow 2) Es el corolario (1.33).

(1 \Leftrightarrow 3) Es el teorema (1.32).

3.3. Monodromía local

Sea \mathcal{W} un k -web global de codimensión uno sobre $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$. Como ya hemos apuntado antes, existe una representación de monodromía $\mu_{\mathcal{W}} : (\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Delta(\mathcal{W})) \rightarrow \mathfrak{S}$ de \mathcal{W} , que controla los subwebs irreducibles de \mathcal{W} y cuya trivialidad es equivalente a la descomponibilidad total de \mathcal{W} . En esta sección estudiamos la monodromía local del web $\text{Leg}\mathcal{F}$ alrededor de cada componente irreducible de su discriminante. Empezamos con los siguientes dos lemas.

Lema 3.14. *Sea U es un subconjunto abierto de \mathbb{C}^2 . Suponga que \mathcal{W} es un d -web irreducible en U tal que su discriminante $\Delta(\mathcal{W})$ es una curva suave irreducible entonces la monodromía de \mathcal{W} es cíclica.*

Prueba. Si pérdida de generalidad podemos suponer que $U = \mathbb{C}^2$ y $\Delta(\mathcal{W}) = \{y = 0\}$. Luego,

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \Delta(\mathcal{W})) = \pi_1(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) = \pi_1(\mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, la monodromía de \mathcal{W} es cíclica. \square

Lema 3.15. *Suponga que en un abierto U de \mathbb{C}^2 y \mathcal{W}_i un web de grado d_i en U tal que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \boxtimes \mathcal{W}_2$. Sean las proyecciones canónicas $\pi_i : \mathbf{S}_{\mathcal{W}_i} \rightarrow U$ y $\pi : \mathbf{S}_{\mathcal{W}} \rightarrow U$, para $i = 1, 2$. Entonces $\mathbf{S}_{\mathcal{W}} = \mathbf{S}_{\mathcal{W}_1} \cup \mathbf{S}_{\mathcal{W}_2}$ y $\pi|_{\mathbf{S}_{\mathcal{W}_i}} = \pi_i$, y para todo $\gamma \in \pi_1(U \setminus \Delta(\mathcal{W}))$ se cumple*

$$\sigma_{\gamma} = \sigma_{\gamma}^1 \cdot \sigma_{\gamma}^2 = \sigma_{\gamma}^2 \cdot \sigma_{\gamma}^1,$$

donde σ_{γ}^i pertenece a la monodromía de \mathcal{W}_i y actúa trivialmente sobre la fibra de π_j , con $j \neq i$.

Prueba. Sea $z \notin \Delta(\mathcal{W})$ entonces $\pi^{-1}(z) = \pi_1^{-1}(z) \amalg \pi_2^{-1}(z)$, donde $\pi_1^{-1}(z)$ y $\pi_2^{-1}(z)$ tienen d_1 y d_2 elementos respectivamente. Si $\gamma \in \pi_1(U \setminus \Delta(\mathcal{W}))$ entonces $\gamma \in \pi_1(U \setminus \Delta(\mathcal{W}_1))$ y $\gamma \in \pi_2(U \setminus \Delta(\mathcal{W}_2))$ y a la vez asociamos la permutación correspondiente

$$\sigma_{\gamma}^1 : \pi_1^{-1}(z) \rightarrow \pi_1^{-1}(z), \quad \sigma_{\gamma}^2 : \pi_2^{-1}(z) \rightarrow \pi_2^{-1}(z).$$

Luego, definimos $\sigma_{\gamma} = \sigma_{\gamma}^1 \cdot \sigma_{\gamma}^2$. Es claro, que $\sigma_{\gamma}^1 \cdot \sigma_{\gamma}^2 = \sigma_{\gamma}^1 \cdot \sigma_{\gamma}^2$, donde σ_{γ}^i pertenece a la monodromía de \mathcal{W}_i . \square

Proposición 3.16 (monodromía alrededor de una componente proveniente de $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$). *Sean \mathcal{F} una foliación de grado d sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y C una componente irreducible del divisor $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$ con multiplicidad $m - 1$. Entonces en una vecindad de un punto genérico de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(C \setminus \Sigma_{\mathcal{F}})$ localmente podemos descomponer $\text{Leg}\mathcal{F}$ como un producto $\mathcal{W}_m^i \boxtimes \mathcal{W}_{d-m}^t$, donde \mathcal{W}_m^i es un m -web irreducible transverso a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(C)$ y \mathcal{W}_{d-m}^t es un $(d - m)$ -web transverso a \mathcal{W}_m^i . Además, si \mathcal{W}_{d-m}^t es regular, la monodromía de $\text{Leg}\mathcal{F}$ alrededor de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(C)$ es generada por un m -ciclo.*

Prueba.

Mediante un cambio de coordenadas podemos suponer que el campo X que define \mathcal{F} y la curva C son de la forma siguiente

$$X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} + x^m g(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{y} \quad C : x = 0, \text{ con } g(0, y) \neq 0.$$

De esta manera, $\text{Leg}\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(C)$ son dados respectivamente por

$$\begin{aligned} F(x, y, p) &= x^m g(x, px + q) - p, \quad \text{y} \\ \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(C) &: p = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

El teorema de preparación de Weierstrass aplicado a F garantiza la existencia de un polidisco $\Delta = \Delta((a, 0); r_1, r_2, r_3) \subset V$, con $a = (0, q_0)$, tal que

$$F(p, q; x) = U(p, q; x) P_{\mathcal{W}}(p, q; x), \tag{3.5}$$

donde

$$P_{\mathcal{W}}(p, q; x) = x^m + c_1(p, q)x^{m-1} + c_2(p, q)x^{m-2} + \dots + c_m(p, q),$$

$U(p, q; x)$ es una función analítica que no se anula en Δ , las funciones c_j son analíticas en $\Delta' = \Delta(a; r_1, r_2)$ y $c_j(a) = 0$ para $j = 1, \dots, m$. De esta manera, $\text{Leg}\mathcal{F} = \mathcal{W}_{d-m}^t \boxtimes \mathcal{W}_m^i$, donde \mathcal{W}_{d-m}^t es generado por $U(p, q; x)$ y \mathcal{W}_m^i es generado por $P_{\mathcal{W}}(p, q; x)$. Además, notemos que $P_{\mathcal{W}}|_{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(C \setminus \Sigma_{\mathcal{F}})} = x^m$; esto es \mathcal{W}_m^i es transverso a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(C)$.

Probaremos ahora que \mathcal{W}_m^i es irreducible: denotemos por A el dominio integral $\mathbb{C}\{p, q\}$ y por \mathfrak{B} el ideal primo $(p) \subseteq A$. Al usar el desarrollo de Taylor de $g(x, px + q)$ alrededor de $x = 0$ comparamos las expresiones de $F(p, q, x)$ y vemos que los coeficientes $c_i(p, q) \in \mathfrak{B}$, para $i = 1, \dots, m$ y $c_m \notin \mathfrak{B}^2$. En efecto, como g es analítica en una vecindad de $(0, q_0)$ se tiene

$$\begin{aligned} g(x, px + q) &= g(0, q_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(0, q_0) + p \frac{\partial g}{\partial y}(0, q_0) \right) \cdot x + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, q_0) + 2p \frac{\partial^1 g}{\partial x \partial y}(0, q_0) + p^2 \frac{\partial^1 g}{\partial y^2}(0, q_0) \right) x^2 + \dots \end{aligned}$$

Al sustituir esta expresión en (3.4) resulta

$$\begin{aligned} F(p, q; x) &= -p + g(0, q)x^m + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(0, q) + p \frac{\partial g}{\partial y}(0, q) \right) x^{m+1} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, q) + 2p \frac{\partial^1 g}{\partial x \partial y}(0, q) + p^2 \frac{\partial^1 g}{\partial y^2}(0, q) \right) x^{m+2} + \dots \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por otro lado de (3.5) se tiene,

$$\begin{aligned} F(p, q; x) &= u_0 c_m + (u_0 c_{m-1} + u_1 c_m)x + (u_0 c_{m-2} + u_1 c_{m-1} + u_2 c_m)x^2 + \\ &+ (u_0 c_{m-3} + u_1 c_{m-2} + u_2 c_{m-1} + u_3 c_m)x^3 + \dots + \\ &+ (u_0 c_1 + u_1 c_2 + u_2 c_3 + \dots + u_{m-1} c_m)x^{m-1} + \\ &+ (u_0 + u_1 c_1 + u_2 c_2 + \dots + u_m c_m)x^m + \dots \end{aligned} \tag{3.7}$$

Al comparar (3.6) y (3.7) obtenemos

$$\begin{aligned} c_m &= -\frac{p}{u_0}, & c_{m-1} &= \left(\frac{u_1}{u_2}\right)p, & c_{m-2} &= -\frac{1}{u_0^3}(u_1^2 - u_0u_2)p, \\ c_{m-3} &= \frac{1}{u_0^4}(u_1^3 - 2u_0u_1u_2 + u_0^2u_3)p \\ c_{m-4} &= -\frac{1}{u_0^5}(u_1^4 - 3u_0u_1^2u_2 + 2u_0^2u_1u_3 + u_0^2u_2^2 - u_0^3u_4)p \\ &\vdots \\ c_{m-j} &= (-1)^{j+1} \frac{1}{u_0^{j+1}} h(u)p, \end{aligned}$$

donde $h(u)$ es una función que depende de los u_i . Los coeficientes c_j verifican $c_j(0, q) = 0$, para $j = 1, \dots, m$. De esta manera, $\text{Leg}\mathcal{F} = \mathcal{W}_{d-m}^t \boxtimes \mathcal{W}_m^i$, donde \mathcal{W}_{d-m}^t es generado por $U(p, q; x)$ y \mathcal{W}_m^i es generado por $P_{\mathcal{W}}(p, q; x)$. Además, notemos que $P_{\mathcal{W}}|_{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(C \setminus \Sigma_{\mathcal{F}})} = x^m$; esto es \mathcal{W}_m^i es transverso a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(C)$. Es claro entonces que $c_k \in \mathfrak{B}$, para $k = 1, \dots, m$ y $c_m \notin \mathfrak{B}^2$. Por lo tanto, el criterio de Eisenstein garantiza la irreducibilidad de $P_{\mathcal{W}}$ en $A[x]$.

Supongamos ahora que \mathcal{W}_{d-m}^t es regular. Puesto que la monodromía de $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}^i$ es cíclica y transitiva el lema (3.15) implica que la monodromía de $\text{Leg}\mathcal{F}$ relativa a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(C \setminus \Sigma_{\mathcal{F}})$ es un m -ciclo. \square

Corolario 3.17. *Si \mathcal{F} es una foliación Galois de grado d sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tal que $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} = G^{d-1}$ entonces $M_{\mathcal{F}} \simeq \mathbb{Z}_d$*

Prueba.

Si $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} = G^{d-1}$, de la proposición (3.16) se sigue que su grupo de monodromía $M_{\mathcal{F}}$ es generado por un d -ciclo, y como $|D_{\mathcal{F}}| = d$, el teorema (3.13) implica que $M_{\mathcal{F}} \simeq \mathbb{Z}_d$. \square

Proposición 3.18 (Monodromía local alrededor de una componente proveniente de una singularidad). *Sea \mathcal{F} una foliación de grado d sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ dado por X y $s \in \Sigma_{\mathcal{F}}^e$ una singularidad especial de \mathcal{F} tal que $J_{\nu}^s X$ es un campo vectorial libre de cuadrados. Entonces en una vecindad de un punto genérico de la recta $\check{s} \subset \check{\Delta}_{\mathcal{F}}$, podemos descomponer localmente el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ en la forma siguiente*

$$\text{Leg}\mathcal{F} = \begin{cases} \mathcal{W}_{\nu_s}^d \boxtimes \mathcal{W}_{d-\tau_s}^t, & \text{si } \tau_s = \nu_s \\ \mathcal{W}_{\nu_s-1}^d \boxtimes \mathcal{W}_{\tau_s-\nu_s+1}^i \boxtimes \mathcal{W}_{d-\tau_s}^t, & \text{si } \tau_s > \nu_s, \end{cases}$$

donde \mathcal{W}_k^d denota un k -web totalmente descomponible, con $k \in \{\nu_s, \nu_s - 1\}$, $\mathcal{W}_{\tau_s-\nu_s+1}^i$ un $(\tau_s - \nu_s + 1)$ -web irreducible para el cual $\check{s} = \Delta(\mathcal{W}_k^d) = \Delta(\mathcal{W}_{\tau_s-\nu_s+1}^i)$ es totalmente invariante y $\mathcal{W}_{d-\tau_s}^t$ es un $(d - \tau_s)$ -web transverso a \check{s} . Además, si $\mathcal{W}_{d-\tau_s}^t$ es regular, entonces la monodromía local de $\text{Leg}\mathcal{F}$ alrededor de la recta \check{s} es cíclica de orden $\tau_s - \nu_s + 1$.

Prueba.

Tomando $s = (0, 0)$. Observemos que si X_k es un campo vectorial homogéneo de grado k , su transformado de Legendre tiene la forma

$$T_k(p, q, x) = C_k^k(p) + qC_{k-1}^k(p)x^{k-1} + \dots + q^k C_0^k.$$

Se presentan dos situaciones teniendo en cuenta si X_k es o no paralelo al campo radial R :

i) Cuando $X_k = Q_{k-1}R$, para algún polinomio homogéneo de grado $k - 1$, entonces

$$T_k(p, q, x) = qQ_{k-1}(x, px + q),$$

donde $C_k^k(p) \equiv 0$ y $C_{k-1}^k(p) = Q_{k-1}(1, p) \neq 0$.

ii) Cuando X_k no es paralelo al campo radial R , se obtiene que $C_k^k(p) \neq 0$.

Por otro lado, si $\tau_s = \nu_s$ entonces la foliación \mathcal{F} es dada por el campo vectorial $X(x, y) = X_\nu(x, y) + X_{\nu-1}(x, y) + \dots + X_d(x, y)$, donde $\nu = \nu_s$ y X_ν no es paralelo al campo radial. En consecuencia, el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ es dado por

$$F(p, q, x) = T_\nu(p, q, x) + \dots + T_d(p, q, x).$$

Fijando un p genérico y explotando la curva en el punto $(0, 0)$ haciendo $x = \lambda q$ obtenemos

$$F(p, q, \lambda q) = q^\nu G(p, q, \lambda).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} F(p, q, \lambda q) &= T_\nu(p, q, \lambda q) + T_{\nu+1}(p, q, \lambda q) + \dots + T_d(p, q, \lambda q) \\ &= q^\nu \left(C_\nu^\nu(p)\lambda^\nu + C_{\nu-1}^\nu(p)\lambda^{\nu-1} + \dots + C_0^\nu(p) \right) + \\ &\quad + q^{\nu+1} \left(C_{\nu+1}^{\nu+1}(p)\lambda^{\nu+1} + C_\nu^{\nu+1}(p)\lambda^\nu + \dots + C_0^{\nu+1}(p) \right) + \\ &\quad + \dots + q^d \left(C_d^d(p)\lambda^d + C_{d-1}^d(p)\lambda^{d-1} + \dots + C_0^d(p) \right) \\ &= q^\nu G(p, q, \lambda), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} G(p, q, \lambda) &= \left(C_\nu^\nu(p)\lambda^\nu + C_{\nu-1}^\nu(p)\lambda^{\nu-1} + \dots + C_0^\nu(p) \right) + \\ &\quad + q \left(C_{\nu+1}^{\nu+1}(p)\lambda^{\nu+1} + C_\nu^{\nu+1}(p)\lambda^\nu + \dots + C_0^{\nu+1}(p) \right) + \dots + \\ &\quad + q^{d-\nu} \left(C_d^d(p)\lambda^d + C_{d-1}^d(p)\lambda^{d-1} + \dots + C_0^d(p) \right) \\ &= T_\nu(p, 1, \lambda) + q[\dots] \end{aligned}$$

representa el transformado estricto de la curva. Por lo tanto,

$$G(p, q, \lambda) \Big|_{q=0} = T_\nu(p, 1, \lambda) = C_\nu^\nu(p)\lambda^\nu + C_{\nu-1}^\nu(p)\lambda^{\nu-1} + \dots + C_0^\nu$$

y como X_ν es libre de cuadrados existen ν raíces distintas $\lambda_i(p)$. Luego, podemos escribir,

$$G(p, q, \lambda) = C_\nu^\nu(p) \prod_{j=1}^{\nu} (\lambda - \lambda_j(p)) + q[\cdots],$$

en particular, G es suave y transversal al divisor excepcional sobre cada $\lambda_i(p)$. En consecuencia, la curva inicial tiene ν ramas suaves que pasan por $(0, 0)$ y esto conduce a la descomponibilidad del web \mathcal{W}_ν^d .

Supongamos ahora que $\tau := \tau_s > \nu := \nu_s$. En este caso, la foliación \mathcal{F} es dada por un campo vectorial de la forma

$$X = X_\nu + \cdots + X_{\tau-1} + X_\tau + \cdots + X_d,$$

donde $X_\nu \neq 0$ es libre de cuadrados, X_j es paralelo al campo radial R , para $j = \nu, \dots, \tau - 1$, y X_τ no es paralelo a R . En particular, $X_j = Q_{j-1}R$ para $j = 1, \dots, \tau - 1$ con $Q_{\nu-1}$ reducido y homogéneo. Luego, el cono tangente de $F(p, q, x)$ en $(q, x) = (0, 0)$, una vez fijado p genérico, es formado por $\nu - 1$ rectas distintas y $\{q = 0\}$. Como en el caso anterior, explotamos en la carta $x = \lambda q$ encontrando $\nu - 1$ ramas pasando por $(0, 0)$ que corresponde a un $(\nu - 1)$ -web.

Por otro lado, usando la carta $q = \mu x$ vemos que el transformado estricto tiene la forma

$$G(p, \mu, x) = \mu A(p, \mu, x) + x^{\tau-\nu} B(p, \mu, x),$$

donde $A(p, 0, 0) = Q_{\nu-1}(1, p) \neq 0$ y $B(p, 0, 0) = T_\tau(p, 0, 1) = C_\tau^\tau(p) \neq 0$. Por lo tanto, el blow-down es una curva irreducible de la forma $q = (xr(p, q, x))^{\tau-\nu+1}$, con $r(p, 0, 0) \neq 0$, el cual da $\mathcal{W}_{\tau-\nu_s+1}^i$. \square

Ejemplo 3.19. Sea \mathcal{F} la foliación dada por el campo vectorial

$$X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} + (y - x^3) \frac{\partial}{\partial y}.$$

El soporte del divisor de inflexión es $\{x = 0\}$. Es claro que la foliación \mathcal{F} es convexa. Además, $s = (0, 0) \in \Sigma_{\mathcal{F}}$ y como $\nu_s(\mathcal{F}) = 1$, $\tau_s(\mathcal{F}) = 3$ entonces $s \in \Sigma_{\mathcal{F}}^c$. Luego la proposición (3.18) implica que en una vecindad de un punto de \check{s} , el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ dado por $x^3 - q = 0$ se descompone como producto $\text{Leg}\mathcal{F} = \mathcal{W}_3^i \boxtimes \mathcal{W}_0^t$, donde \mathcal{W}_0^d es un 0-web, \mathcal{W}_3^i es un 3-web irreducible, y la monodromía local de $\text{Leg}\mathcal{F}$ alrededor de la recta \check{s} es cíclica de orden 3. Además, usando la proposición (3.6) se comprueba que \mathcal{F} es Galois.

Ejemplo 3.20. Sea \mathcal{F} la foliación dada por el campo $X(x, y) = y^3 \frac{\partial}{\partial x} - x^3 \frac{\partial}{\partial y}$. El soporte de su divisor de inflexión es $\{xy(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = 0\}$ y el soporte de su parte transversa es $\{xy = 0\}$. Cada una de las curvas de la parte transversa aparece en el divisor $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ con multiplicidad 2. La proposición (3.16) garantiza que en un punto genérico de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\{x = 0\} \setminus \Sigma_{\mathcal{F}})$ localmente podemos descomponer $\text{Leg}\mathcal{F} = \mathcal{W}_3^i \boxtimes \mathcal{W}_0^t$, es decir $\text{Leg}\mathcal{F}$ es generado por un 3-ciclo. En forma similar, se procede para el caso $\{y = 0\}$.

Por otro lado, $s = (0, 0) \in \Sigma_{\mathcal{F}}$, y se verifica que $\nu_s(\mathcal{F}) = \tau_s(\mathcal{F}) = 3$ y $J_s^{\nu_s} X$ es libre de cuadrados. Luego, la proposición (3.18) implica que un entorno de un punto genérico de \check{s} , el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ dado por

$$(p^4 + 1)x^3 + 3p^3qx^2 + 3p^2q^2x + pq^3 = 0$$

puede descomponerse como producto $\text{Leg}\mathcal{F} = \mathcal{W}_3^d \boxtimes \mathcal{W}_0^t$, esto es $\text{Leg}\mathcal{F}$ es totalmente descomponible en un entorno de un punto genérico de $\check{s} = \{q = 0\}$ y por lo tanto su monodromía correspondiente es trivial. Además, en este caso también se verifica que \mathcal{F} es Galois.

Corolario 3.21. *Sea \mathcal{F} una foliación sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tal que todas sus singularidades tienen primer jet no nulo libre de cuadrados. Entonces la representación de monodromía $\check{\mu} : \pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathfrak{S}_d$ de $\text{Leg}\mathcal{F}$ se factoriza a través del epimorfismo*

$$\pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}) \rightarrow \pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (\check{\Delta}_{\mathcal{F}}^{\text{inf}} \cup \check{\Sigma}_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}))$$

inducido por la inclusión $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}} \subset \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (\check{\Delta}_{\mathcal{F}}^{\text{inf}} \cup \check{\Sigma}_{\mathcal{F}}^{\text{rad}})$, donde $\Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}} := \{s \in \Sigma_{\mathcal{F}} : \tau_s > \nu_s\}$.

Prueba. *La única parte que no es una consecuencia directa de la proposición (3.18) es el hecho que la inclusión $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}} \subset \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (\check{\Delta}_{\mathcal{F}}^{\text{inf}} \cup \check{\Sigma}_{\mathcal{F}}^{\text{rad}})$ induce un epimorfismo a nivel de grupo fundamental, que se sigue de [17].* \square

Corolario 3.22. *Sea \mathcal{F} una foliación sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tal que todas sus singularidades tienen primer jet no nulo libre de cuadrados. Si la curva $\check{\Delta}_{\mathcal{F}}^{\text{inf}} \cup \check{\Sigma}_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}$ tiene cruzamientos normales entonces \mathcal{F} es Galois.*

Prueba.

De la expresión (3.2) en el teorema (3.3) y del corolario (3.21) el grupo de monodromía $M_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} es la imagen de $\pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \check{\Delta}_{\mathcal{F}}^{\text{inf}} \cup \check{\Sigma}_{\mathcal{F}}^{\text{rad}})$,

$$M_{\mathcal{F}} = \pi_1(\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (\check{\Delta}_{\mathcal{F}}^{\text{inf}} \cup \check{\Sigma}_{\mathcal{F}})),$$

como el divisor $C = \check{\Delta}_{\mathcal{F}}^{\text{inf}} \cup \check{\Sigma}_{\mathcal{F}}$ tiene cruzamientos normales, ver [12], el grupo $M_{\mathcal{F}}$ es abeliano. Luego, el corolario (1.33) permite concluir que \mathcal{F} es Galois. \square

Corolario 3.23. *Si \mathcal{F} es una foliación homogénea de grado d tal que $\Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}} = \emptyset$ y $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} = G^{d-1}$ para algún polinomio G , entonces \mathcal{F} es Galois y tiene grupo de monodromía cíclico.*

Prueba.

Puesto que \mathcal{F} es una foliación homogénea, los elementos asociados a \mathcal{F} son invariantes por homotecias y por lo tanto se verifica

$$\Lambda_{\mathcal{F}} = \mathcal{I}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\perp} \cup \Sigma_{\mathcal{F}}^{\perp}.$$

Además, puesto $\deg(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{inv}}) = d+2$, entonces $\deg(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}) \leq 2d-2$. De esto se deduce que $\deg(G) \leq 2$, en consecuencia G es unión de dos rectas. Luego, $\Lambda_{\mathcal{F}}$ representa rectas que

pasan por el origen de coordenadas y la recta al infinito ℓ_∞ . Asimismo, como $\Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}} = \emptyset$ se tiene que

$$\check{\Delta}_{\mathcal{F}}^{\text{inf}} \cup \check{\Sigma}_{\mathcal{F}}^{\text{rad}} = \overline{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} \setminus \Sigma_{\mathcal{F}})}$$

está contenido en la unión de dos rectas en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. El corolario (3.23) implica que \mathcal{F} es Galois. Finalmente, el corolario (3.22) permite concluir que el grupo de monodromía de \mathcal{F} es cíclico. \square

Observacion 3.24. Después de la proposición (3.16) la igualdad $I_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} = G^{d-1}$ significa que en un punto de inflexión aislado a lo largo de una hoja H , el orden de tangencia de H con su recta tangente $T_p H$ alcanza su máximo, es decir el grado de la foliación. El ejemplo (3.12) proporciona una familia de foliaciones homogéneas Galois de grado $d = 2n$ para el cual $I_{\mathcal{F}} \neq G^{d-1}$. Por otro lado, la hipótesis $\Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}} = \emptyset$ no puede ser eliminada del corolario (3.23) tal y como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.25. La foliación \mathcal{F} dada por el campo vectorial $X(x, y) = x^2(x + 3y)\frac{\partial}{\partial x} + y^2(y + 3x)\frac{\partial}{\partial y}$ tiene las siguientes propiedades:

- i) Su divisor de inflexión no tiene parte transversa, es decir \mathcal{F} es una foliación convexa,
- ii) $\tau_s(\mathcal{F}) = \nu_s(\mathcal{F}) = 3$. En consecuencia, $s = (0, 0) \notin \Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}$, pero existe una singularidad radial en la recta del infinito,
- iii) \mathcal{F} no es Galois.

Ejemplo 3.26. Hemos visto que la foliación \mathcal{F} de grado 6 inducida por el campo vectorial

$$X(x, y) = (x^3 + y^3)^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x^3 - y^3)^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

es Galois y su grupo de monodromía no es cíclico. Asimismo, obtenemos que la parte transversa $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$ del divisor de inflexión es

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}} = \{x^2 y^2 (x^6 - y^2) = 0\} \neq G^5.$$

Además, puesto que $\tau_s(\mathcal{F}) = \nu_s(\mathcal{F}) = 6$ entonces $\Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}} = \emptyset$. Luego, $s = (0, 0) \notin \Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}$. La misma situación sucede con las foliaciones dadas en el ejemplo (3.12).

3.4. Foliaciones con grupo continuo de automorfismos

Un marco natural que generaliza las foliaciones homogéneas es considerar foliaciones \mathcal{F} sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ que admiten un grupo continuo de automorfismos $\text{Aut}(\mathcal{F}) \subset \text{PSL}_3(\mathbb{C})$. Teniendo en cuenta que cada foliación de grado 1 o 2 es Galois, podemos asumir que \mathcal{F} es una foliación de grado ≥ 3 sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Sean $0 \neq R \in \text{Lie}(\text{Aut}(\mathcal{F})) \subset \mathcal{X}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2) \simeq \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Existen cuatro tipos de formas de Jordan posibles cuando la traza de una matriz asociada a R es cero:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha + \beta) \end{pmatrix} & \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

En la carta afin (x, y) el campo vectorial correspondiente R toma una de las formas normales siguientes:

- a) $R(x, y) = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y}$, con $\alpha \in \mathbb{C}^*$ y $\beta \in \mathbb{C}$,
- b) $R(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x}$,
- c) $R(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$,
- d) $R(x, y) = (x + y) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$.

Sea $X(x, y) = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ un campo vectorial polinomial saturado que define \mathcal{F} . Si $R \in \text{Lie}(\text{Aut}(\mathcal{F}))$ entonces

$$L_R X = \varepsilon X, \quad \text{para alguna función } \varepsilon \in \mathbb{C}(x, y),$$

donde $L_R X$ denota la derivada de Lie de X con respecto a R . En efecto, usando el hecho que los polos de ε están contenidos en los ceros de los coeficientes del campo X y teniendo en cuenta que X es saturado obtenemos que $\varepsilon \in \mathbb{C}[x, y]$. Finalmente, como $\deg(R) = 1$ concluimos que ε debe ser una constante.

El siguiente resultado describe las foliaciones de grado $d \geq 2$ que admiten un grupo continuo de automorfismos.

Proposición 3.27. *Sea $X = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ un campo vectorial polinomial saturado de grado $d \geq 2$ verificando $L_R X = \varepsilon X$, para algún $\varepsilon \in \mathbb{C}$.*

- a) *Si $R(x, y) = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y}$ entonces $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}$, de manera que podemos asumir que $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ son coprimos y*

$$A(x, y) = \sum_{\alpha i + \beta j = \varepsilon + \alpha} a_{ij} x^i y^j \quad \text{y} \quad B(x, y) = \sum_{\alpha i + \beta j = \varepsilon + \beta} b_{ij} x^i y^j$$

son polinomios cuasi-homogéneos de pesos (α, β) .

- b) *Si $R = y \frac{\partial}{\partial x}$ entonces $\varepsilon = 0$ y $X = (xQ(y) + P(y)) \frac{\partial}{\partial x} + yQ(y) \frac{\partial}{\partial y}$, para algunos polinomios coprimos $P, Q \in \mathbb{C}[y]$.*
- c) *Si $R = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ entonces $X = (yP(y^2 - 2x) + Q(y^2 - 2x)) \frac{\partial}{\partial x} + P(y^2 - 2x) \frac{\partial}{\partial y}$, para algunos polinomios coprimos $P, Q \in \mathbb{C}[z]$.*

d) Si $R = (x + y)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, la relación $L_RX = \varepsilon X$ no se cumple para cualquier campo vectorial polinomial saturado X .

Prueba.

a) Sean $A = \sum a_{ij}x^i y^j$ y $B = \sum b_{ij}x^i y^j$. De la condición $L_RX = \varepsilon X$ se deduce

$$\left(\alpha x \frac{\partial A}{\partial x} + \beta y \frac{\partial A}{\partial y} - \alpha A - \varepsilon A\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\alpha x \frac{\partial B}{\partial x} + \beta y \frac{\partial B}{\partial y} - \beta B - \varepsilon B\right) \frac{\partial}{\partial y} = 0,$$

y por lo tanto

$$\left(\sum a_{ij}(\alpha i + \beta j - \alpha - \varepsilon)x^i y^j\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum b_{ij}(\alpha i + \beta j - \beta - \varepsilon)x^i y^j\right) \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

De esta última ecuación obtenemos

$$\alpha i + \beta j = \alpha + \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \in \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta. \quad (3.8)$$

Luego,

$$A = \sum_{\alpha i + \beta j = \varepsilon + \alpha} a_{ij}x^i y^j \quad \text{y} \quad B = \sum_{\alpha i + \beta j = \varepsilon + \beta} b_{ij}x^i y^j$$

Si $\frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbb{Q}$ y $\deg(X) \geq 2$, se prueba que X no puede ser saturado.

b) Sea $R = y\frac{\partial}{\partial x}$, entonces

$$L_RX - \varepsilon X = \left(y \frac{\partial A}{\partial x} - B - \varepsilon A\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(y \frac{\partial B}{\partial x} - \varepsilon B\right) \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

De la ∂_y -componente de $L_RX - \varepsilon X$ obtenemos $B = e^{\frac{\varepsilon x}{y}} \overline{Q}(y)$ y teniendo en cuenta que $B \in \mathbb{C}[x, y]$ resulta que $\varepsilon = 0$ y $B = \overline{Q}(y)$. Y de la ∂_x -componente resulta que $A(x, y) = \frac{x}{y} \overline{Q}(y) + P(y) \in \mathbb{C}[x, y]$. Por lo tanto, $\overline{Q}(y) = yQ(y)$, para algún $Q \in \mathbb{C}[y]$.

c) Si $R = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ entonces

$$L_RX - \varepsilon X = \left(y \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} - B - \varepsilon A\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} - \varepsilon B\right) \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

La ∂_y -componente de $L_RX - \varepsilon X$ implica que $B = e^{\varepsilon y} P(y^2 - 2x) \in \mathbb{C}[x, y]$ y necesariamente $\varepsilon = 0$. De la ∂_x -componente de $L_RX - \varepsilon X = 0$ obtenemos que $A(x, y) = yP(y^2 - 2x) + Q(y^2 - 2x)$ para algunos polinomios $P, Q \in \mathbb{C}[z]$.

d) Si $R = (x + y)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ y $X = \sum_n X_n$, donde $X_n = A_n \frac{\partial}{\partial x} + B_n \frac{\partial}{\partial y}$ son campos homogéneos de grado n . Entonces la componente homogénea de grado n de $L_RX - \varepsilon X$ es

$$\begin{aligned} 0 &= L_R X_n - \varepsilon X_n \\ &= \left((x+y) \frac{\partial A_n}{\partial x} + y \frac{\partial A_n}{\partial y} - (1+\varepsilon)A_n - B_n \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left((x+y) \frac{\partial B_n}{\partial x} + y \frac{\partial B_n}{\partial y} - (1+\varepsilon)B_n \right) \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Asimismo, se verifica que

$$x \frac{\partial A_n}{\partial x} + y \frac{\partial A_n}{\partial y} = nA_n \quad \text{y} \quad x \frac{\partial B_n}{\partial x} + y \frac{\partial B_n}{\partial y} = nB_n,$$

estas relaciones permite reescribir la expresión anterior

$$\left(y \frac{\partial A_n}{\partial x} - (1+\varepsilon-n)A_n - B_n \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(y \frac{\partial B_n}{\partial x} - (1+\varepsilon-n)B_n \right) \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

De la ∂_y -componente de $L_R X_n - \varepsilon X_n$ se tiene que $B_n = Q(y)e^{\frac{(1+\varepsilon)x}{y}}$ y como $B_n \in \mathbb{C}[x, y]$ es homogéneo de grado n se deduce que $\varepsilon = n - 1$ y $B_n = qy^n$. Asimismo, de la ∂_x -componente $L_R X_n - \varepsilon X_n$ y teniendo en cuenta lo anterior resulta, $A = qxy^{n-1} + py^n$, para algún $p \in \mathbb{C}$. Luego,

$$X(x, y) = X_n(x, y) = y^{n-1} \left((py + qx) \frac{\partial}{\partial x} + qy \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

el cual no es saturado, pues $\deg(X) = n \geq 2$. □

Lema 3.28. Sea ϕ_t el flujo del campo R por transformaciones homográficas de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y denotemos por $\check{\phi}_t$ el flujo dual del campo vectorial dual \check{R} de R . Se cumple

a) Si $R(x, y) = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y}$, entonces

$$\check{R}(a, b) = -(\alpha a \frac{\partial}{\partial a} + \beta b \frac{\partial}{\partial b}), \quad \phi_t(x, y) = (xe^{\alpha t}, ye^{\beta t}), \quad \check{\phi}_t(a, b) = (ae^{-\alpha t}, be^{-\beta t}).$$

b) Si $R(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x}$,

$$\check{R}(a, b) = -a \frac{\partial}{\partial b}, \quad \phi_t(x, y) = (x + ty, y), \quad \check{\phi}_t(a, b) = (a, b - at) \quad \text{y}.$$

c) Si $R(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ entonces

$$\check{R}(a, b) = -\left(ab \frac{\partial}{\partial a} + (a + b^2) \frac{\partial}{\partial b} \right), \quad \phi_t(x, y) = (x + ty + t^2/2, y + t),$$

$$\text{y} \quad \check{\phi}_t(a, b) = \left(\frac{a}{1 + bt - at^2/2}, \frac{b - at}{1 + bt - at^2/2} \right).$$

Prueba.

Consideremos una carta afín (x, y) en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y una carta afín en $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ cuyas coordenadas (a, b) corresponden a la recta $\{ax + by = 1\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Los flujos ϕ_t se obtienen de manera inmediata resolviendo la ecuación diferencial definida por el campo correspondiente. Para obtener $\check{\phi}$ basta tener en cuenta que $\frac{a}{e^{\alpha t}}(xe^{\alpha t}) + \frac{b}{e^{\beta t}}(ye^{\beta t}) = 1$, por lo tanto $\check{\phi}_t(a, b) = (ae^{-\alpha t}, be^{-\beta t})$. En forma análoga se procede con el otro caso. \square

Teniendo en cuenta la identificación $\mathcal{I} = \{(p, \ell) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \times \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 : p \in \ell\} \simeq \mathbb{P}T^*\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \simeq \mathbb{P}T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con la variedad de incidencia se obtiene el siguiente resultado.

Lema 3.29. *Se cumple $\check{\phi}_t \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \phi_t$, donde ϕ_t es el flujo de R , $\check{\phi}_t$ su flujo dual.*

Prueba.

La acción $\check{\phi}_t$ puede ser descrita por las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned} \mathbb{P}D\phi_t : \quad \mathbb{P}T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ (p, [X(p)]) &\longmapsto (\phi_t(p), (D\phi_t)(p)(X(p))) \end{aligned}$$

y por

$$(\phi_t, \check{\phi}_t) : \mathbb{P}T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbb{P}T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2.$$

La relación $L_R X = \varepsilon X$ implica que $(D\phi_t)(p)(X(p))$ es paralelo al $X(\phi_t(p))$, la cual es equivalente

$$\check{\phi}_t(p, [X(p)]) = (\phi_t(p), [X(\phi_t(p))]),$$

donde $\check{\phi}_t$ denota la acción inducida por las acción ϕ_t . En términos intrínsecos $\check{\phi}_t \circ \pi_{\mathcal{F}}^{-1} = \pi_{\mathcal{F}}^{-1} \circ \phi_t$, donde $\pi_{\mathcal{F}} : \mathbf{S}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es la proyección natural, donde $\mathbf{S}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{I}$ es el gráfico de la foliación \mathcal{F} definida por X

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 & \xrightarrow{\check{\phi}_t} & \mathbb{P}T\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ \pi_{\mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \check{\pi}_{\mathcal{F}} \\ \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 & \xrightarrow{\mathcal{G}_{\mathcal{F}}} & \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \end{array}$$

Puesto que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \check{\pi}_{\mathcal{F}} \circ \pi_{\mathcal{F}}^{-1}$ y $\check{\phi}_t \simeq (\phi_t, \check{\phi}_t)$, componiendo la relación anterior a la izquierda con $\check{\pi}_{\mathcal{F}}$ obtenemos $\check{\phi}_t \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \phi_t$.

Observacion 3.30. *La relación $\check{\phi}_t \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \phi_t$ nos dice que la aplicación de Gauss lleva las hojas de la foliación \mathcal{R} definida por el campo R en hojas de la foliación $\check{\mathcal{R}}$ definida por el campo \check{R} .*

Ejemplo 3.31. Si $R(x, y) = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y}$ y $\check{R}(a, b) = -(\alpha a \frac{\partial}{\partial a} + \beta b \frac{\partial}{\partial b})$ entonces existen integrales primeras racionales

$$\rho(x, y) = \frac{y^\alpha}{x^\beta}, \quad \check{\rho}(a, b) = \frac{b^\alpha}{a^\beta}.$$

Asimismo, existen secciones

$$\rho \circ \sigma = \check{\rho} \circ \check{\sigma} = \text{Id}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}.$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores y la carta afín z para $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ resulta

$$\sigma(z) = (z^\gamma, z^\delta), \quad \check{\sigma}(z) = (z^\gamma, z^\delta), \quad \text{con } \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Ejemplo 3.32. Si $R(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x}$, al proceder en forma análoga al caso anterior se obtiene

$$\rho(x, y) = y, \quad \sigma(z) = (0, z), \quad \check{\rho}(a, b) = a, \quad \check{\sigma}(z) = (z, 0).$$

Ejemplo 3.33. Si $R(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, entonces

$$\rho(x, y) = y^2 - 2x, \quad \sigma(z) = (-z/2, 0), \quad \check{\rho}(a, b) = \frac{b^2 + 2a}{a^2}, \quad \check{\sigma}(z) = (2/z, 0).$$

Teorema 3.34. Para cada foliación \mathcal{F} de grado $d \geq 2$ sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ que admite grupo continuo de automorfismos existe una aplicación racional $\widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ verificando las siguientes propiedades

1. $\widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} \circ \rho = \check{\rho} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}}$,
2. Para cada $\tau \in D_{\mathcal{F}}$, existe una homografía $\widehat{\tau} : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tal que
 - i) $\widehat{\tau} \circ \rho = \rho \circ \tau$,
 - ii) $\widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} \circ \widehat{\tau} = \widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}$.
3. La aplicación $\kappa : D_{\mathcal{F}} \rightarrow D(\widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}) \subset \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ definida por $\tau \mapsto \widehat{\tau}$ es un isomorfismo de grupos.

En particular, \mathcal{F} es Galois si y solo si $\widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}$ es un recubrimiento ramificado Galois.

Prueba.

En los casos (a) y (b) las foliaciones definidas por campos vectoriales R y sus duales \check{R} admiten integrales primeras racionales explícitas

$$\rho : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \quad \text{y} \quad \check{\rho} : \check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

respectivamente y secciones

$$\sigma : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \quad \text{y} \quad \check{\sigma} : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$$

tal que $\rho \circ \sigma = \check{\rho} \circ \check{\sigma} = \text{Id}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$. En las cartas afines (x, y) , (a, b) y $z \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $\check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ considerados anteriormente son descritas en los ejemplos (3.31), (3.32).

Teniendo en cuenta que $\rho \circ \sigma = \text{Id}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$, siendo ρ integral primera de R obtenemos que para un punto genérico $p \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, existe un $u(p) \in \mathbb{C}$ tal que $(\sigma \circ \rho)(p) = \phi_{u(p)}(p)$.

1. Definimos $\widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} := \check{\rho} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \sigma$. Para $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ genérico se cumple

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} \circ \rho)(p) &= (\check{\rho} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \sigma \circ \rho)(p) = (\check{\rho} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \phi_{u(p)})(p) \\ &= (\check{\rho} \circ \check{\phi}_{u(p)} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}})(p) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\check{\phi}_t \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \phi_t$, si $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es genérico existen $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ tal que si

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\phi_{t_1}(p)) = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\phi_{t_2}(p)) \quad \Rightarrow \quad \check{\phi}_{t_1}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(p)) = \check{\phi}_{t_2}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(p)).$$

Puesto que p y $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(p)$ son puntos genéricos de la descripción analítica explícita de los flujos ϕ_t y $\check{\phi}_t$ en los casos (i), (ii) y (iii) deducimos que $\check{\phi}_{t_1-t_2} = \text{Id}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}$, por lo tanto $\phi_{t_1-t_2} = \text{Id}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}$. De esto deducimos que la restricción de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ a una hoja genérica de la foliación \mathcal{R} es inyectiva, y por consiguiente $\widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}$ tiene el mismo grado topológico que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

2. Para cada $\tau \in D_{\mathcal{F}}$ definimos $\widehat{\tau} := \rho \circ \tau \circ \sigma$. Para cada $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ genérico se cumple

$$\begin{aligned} (\widehat{\tau} \circ \rho)(p) &= (\rho \circ \tau \circ \sigma \circ \rho)(p) = (\rho \circ \tau \circ \phi_{u(p)})(p) \\ &= (\rho \circ \phi_{u(p)})(p) \stackrel{(1)}{=} (\rho \circ \tau)(p), \end{aligned}$$

Ahora probamos (1) : $\tau \circ \phi_t = \phi_t \circ \tau$: De la relación $\check{\phi}_t \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \phi_t$ se sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \phi_t \circ \tau &= \check{\phi}_t \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \tau = \check{\phi}_t \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \\ &= \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \phi_t = \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \tau \circ \phi_t, \end{aligned}$$

el resultado se sigue de la inyectividad de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ a una hoja genérica de la foliación \mathcal{R} .

Por otro lado, para $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ genérico se verifica

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} \circ \widehat{\tau})(p) &= (\check{\rho} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \sigma) \circ (\rho \circ \tau \circ \sigma)(p) \\ &= (\check{\rho} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}}) \circ (\sigma \circ \rho) \circ (\tau \circ \sigma)(p) \\ &= \check{\rho} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \phi_{u(\tau(\sigma(p)))}(\tau(\sigma(p))) \\ &= (\check{\rho} \circ \check{\phi}_{u(\tau(\sigma(p)))} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \tau \circ \sigma)(p) \\ &= (\check{\rho} \circ \check{\phi}_{u(\tau(\sigma(p)))} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \sigma)(p) \\ &= (\check{\rho} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \sigma)(p) = \check{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(p). \end{aligned}$$

3. Ahora probaremos que κ es un morfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \kappa(\tau_1 \circ \tau_2) &= \widehat{\tau_1 \circ \tau_2} = \rho \circ (\tau_1 \circ \tau_2) \circ \sigma = \rho \circ \phi_u \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \sigma \\ &= \rho \circ \tau_1 \circ \phi_u \circ \tau_2 \circ \sigma = (\rho \circ \tau_1 \circ \sigma) \circ (\rho \circ \tau_2 \circ \sigma) \\ &= \widehat{\tau_1} \circ \widehat{\tau_2} = \kappa(\tau_1) \circ \kappa(\tau_2). \end{aligned}$$

Solo resta probar que $\kappa : D_{\mathcal{F}} \rightarrow D(\widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}})$ es biyectiva. Para lo cual daremos una expresión explícita de su inversa $\xi : D(\widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}) \rightarrow D_{\mathcal{F}}$.

Primero, para cada $h \in D(\widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}})$ definimos la aplicación racional \bar{h}

$$\bar{h} := \sigma \circ h \circ \rho : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2.$$

Se cumple

$$\begin{aligned} \check{\rho} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \bar{h} &= (\check{\rho} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}}) \circ (\sigma \circ h \circ \rho) = \widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} \circ \rho \circ \sigma \circ h \circ \rho \\ &= \widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} \circ h \circ \rho = \widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} \circ \rho = \check{\rho} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Debemos definir $\xi(h)(p) = \tilde{h}(p) := \phi_{v_h(p)}(\bar{h}(p))$, para una elección adecuada de $v_h(p) \in \mathbb{C}$.

En las cartas afines (x, y) y (a, b) de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ la aplicación de Gauss de una foliación dado por un campo vectorial es dado por

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(x, y) = \left(\frac{B}{xB - yA}, \frac{-A}{xB - yA} \right).$$

Para que $\tilde{h} = \phi_{v_h} \circ \bar{h}$ cumpla $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \tilde{h} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ debemos tomar las expresiones siguientes para la función v_h en cada caso de acuerdo al lema (3.28):

- a) Si $R = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y}$ y $X = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$, incluyendo el caso cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ tenemos que

$$v_h := \log \left[\left(\frac{B \circ \bar{h}}{C} \right)^{\delta} \left(\frac{A \circ \bar{h}}{C} \right)^{-\gamma} \right], \quad \text{donde } C = xB - yA. \quad (3.9)$$

- b) Si $R = y \frac{\partial}{\partial x}$ y $X = (xQ(y) - P(y)) \frac{\partial}{\partial x} + yQ(y) \frac{\partial}{\partial y}$ entonces

$$v_h := \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{y} \right) \frac{P}{Q} + \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{h} \right) \quad (3.10)$$

- c) Si $R = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ y $X = (yP(y - x^2) + Q(y^2 - x)) \frac{\partial}{\partial x} + P(y^2 - 2x) \frac{\partial}{\partial y}$ entonces

$$v_h := y + \frac{Q}{P}(y^2 - 2x) - \left(\frac{Q}{P} \circ h \right)(y - x^2). \quad (3.11)$$

De la definición, es claro que ξ es una aplicación racional. El hecho que es birracional es una consecuencia de la relación $\tilde{h}_1 \circ \tilde{h}_2 = \widetilde{h_1 \circ h_2}$, la cual se sigue de

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 \circ \tilde{h}_2 &= \phi_{v_{h_1} \circ \tilde{h}_2} \circ \bar{h}_1 \circ \phi_{v_{h_2}} \circ \bar{h}_2 = \phi_{v_{h_1} \circ \tilde{h}_2} \circ \sigma \circ h_1 \circ h_2 \circ \rho \\ &= \phi_{v_{h_1} \circ \tilde{h}_2} \circ \overline{h_1 \circ h_2} \end{aligned}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(p)$ y $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\bar{h}(p))$ se encuentran en una misma hoja de \tilde{R} se tiene

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(p) = \check{\phi}_{v_h(p)}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\bar{h}(p))) = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\phi_{v_h(p)}(\bar{h}(p))). \quad (3.12)$$

Luego, teniendo en cuenta que $\check{\phi} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \phi_t$ y usando (3.12) resulta

$$\begin{aligned} \check{\phi}_{v_{h_1}(\tilde{h}_2(p))}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\bar{h}_1(\tilde{h}_2(p)))) &= \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\tilde{h}_2(p)) = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\phi_{v_{h_2}(p)}(\bar{h}_2(p))) \\ &= \check{\phi}_{v_{h_2}(p)}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\bar{h}_2(p))) = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(p). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Además, se cumple

$$\begin{aligned} \bar{h}_1(\tilde{h}_2(p)) &= \sigma \circ h_1 \circ \phi_{v_{h_2}(p)}(\bar{h}_2(p)) \\ &= \sigma \circ h_1 \circ \rho \circ \phi_{v_{h_2}(p)}(\bar{h}_2(p)) = \sigma \circ h_1 \circ \rho(\bar{h}_2(p)) = \bar{h}_1 \circ \bar{h}_2 = \overline{h_1 \circ h_2}(p) \end{aligned}$$

Debemos probar que $v_{h_1} \circ \tilde{h}_2(p) = V_{h_1 \circ h_2}(p)$. En efecto, aplicando la ecuación (3.12) a $h_1 \circ h_2$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(p) &= \check{\phi}_{v_{h_1 \circ h_2}(p)}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\overline{h_1 \circ h_2}(p))) \\ &= \check{\phi}_{v_{h_1 \circ h_2}(p)}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\bar{h}_1 \circ \tilde{h}_2(p))) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Las relaciones (3.13) y (3.14) implican que $v_{h_1} \circ \tilde{h}_2 = v_{h_1 \circ h_2}$.

Resta probar las igualdades $(\kappa \circ \xi)(h) = h$ y $(\xi \circ \kappa)(\tau) = \tau$, para cada $h \in D(\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}})$ y $\tau \in D_{\mathcal{F}}$. En efecto,

$$\begin{aligned} (\kappa \circ \xi)(h) &= \kappa(\tilde{h}) = \rho \circ \tilde{h} \circ \sigma = \rho \circ \phi_{v_h} \circ \bar{h} \circ \sigma \\ &= \rho \circ \phi_{v_h} \circ \sigma \circ h \circ \rho \circ \sigma \\ &= (\rho \circ \sigma) \circ h \circ (\rho \circ \sigma) = h. \end{aligned}$$

De esta igualdad se sigue que κ es un morfismo suryectivo.

Para probar que $(\xi \circ \kappa)(\tau) = \tau$ podemos probar que κ es inyectivo. En efecto, si $\kappa(\tau) = \hat{\tau} = \text{Id}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ entonces τ debe ser la identidad sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, pues $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \tau = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ y tenemos ya demostrado que la restricción de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ a una hoja genérica de \mathcal{R} es inyectivo. \square

Observacion 3.35. Teniendo en cuenta que la aplicación de Gauss de la foliación \mathcal{F} dada por el campo vectorial R -invariante $A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ se escribe como

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(x, y) = \left(\frac{B(x, y)}{C(x, y)}, \frac{-A(x, y)}{C(x, y)} \right), \quad \text{con } C(x, y) = xB(x, y) - yA(x, y),$$

obtenemos expresiones explícitas para la aplicación $\hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} = \check{\rho} \circ \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \sigma : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ en cada uno de los casos descritos (a), (b) y (c) desarrollados en el lema (3.28):

$$a) \hat{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(z) = [-A(z^\gamma, z^\delta)^\alpha] [B(z^\gamma, z^\delta)^{-\beta}] [C(z^\gamma, z^\delta)^{\beta-\alpha}],$$

$$b) \widehat{G}_{\mathcal{F}}(z) = \frac{B(0, z)}{C(0, z)} = -\frac{Q(z)}{P(z)}$$

$$c) \widehat{G}_{\mathcal{F}}(z) = \frac{Q^2(z)}{P^2(z)} + z,$$

donde A y B toman la forma dada por la proposición (3.27) en cada caso.

3.5. Aplicaciones racionales de la recta proyectiva en si misma

Si consideramos $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ como la esfera unitaria \mathbb{S}^2 , entonces el grupo de automorfismos de una aplicación racional $\widehat{G} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es un subgrupo finito de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ que siempre es conjugado a un subgrupo de su compacto maximal $\text{SO}_3 = \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ cuyos subgrupos finitos son bien conocidos: cíclico, diedral, tetraedral, octaedral e icosaedral. Además, para cada subgrupo finito G de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ existe un recubrimiento Galois ramificado $\widehat{G} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ cuyo grupo de automorfismos, llamado también grupo de Galois, es exactamente G . Más precisamente, tenemos la siguiente clasificación, ver [35, Teorema 3.6.2].

Proposición 3.36 (Klein). *Sea $\widehat{G} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ una aplicación racional Galois con grupo de automorfismo G . Entonces G (respectivamente \widehat{G}) es conjugado (respectivamente es izquierda-derecha equivalente) a uno de los siguientes grupos triangulares de $\text{SO}_3 \subset \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ (respectivamente a las aplicaciones racionales):*

Grupo	orden	Presentación de G	\widehat{G}	$r(z)$	$s(z)$
cíclico	n	$C_n = \langle r : r^n = 1 \rangle$	\widehat{G}_C	$\xi_n z$	z
diedral	$2n$	$D_n = \langle r, s : r^n = s^2 = (rs)^2 = 1 \rangle$	\widehat{G}_D	$\xi_n z$	$\frac{1}{z}$
tetraedral	12	$A_4 = \langle r, s : r^3 = s^2 = (rs)^3 = 1 \rangle$	\widehat{G}_T	$\frac{-iz+1}{iz+1}$	$-\frac{1}{z}$
octaedral	24	$S_4 = \langle r, s : r^3 = s^2 = (rs)^4 = 1 \rangle$	\widehat{G}_O	$\frac{-iz+1}{iz+1}$	$\frac{-iz-1}{z+i}$
icosaedral	60	$A_5 = \langle r, s : r^3 = s^2 = (sr)^5 = 1 \rangle$	\widehat{G}_I	$\frac{(\phi-z)\xi_5}{\phi z+1}$	$\frac{\phi-z}{\phi z+1}$

donde $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y

$$\widehat{G}_C(z) = z^n, \quad \widehat{G}_D(z) = \frac{(z^n + 1)^2}{4z^n}, \quad \widehat{G}_T(z) = \left(\frac{z^4 + 2i\sqrt{3}z^2 + 1}{z^4 - 2i\sqrt{3}z^2 + 1} \right)^3,$$

$$\widehat{G}_O(z) = \frac{(z^8 + 14z^4 + 1)^3}{108z^4(z^4 - 1)^4}, \quad \widehat{G}_I(z) = \frac{(z^{20} - 228z^{15} + 494z^{10} + 228z^5 + 1)^3}{-1728z^5(z^{10} + 11z^5 - 1)^5}.$$

3.6. Foliaciones homogéneas

Otra de las cuestiones que se plantean los autores en [7] es describir el conjunto algebraico de foliaciones homogéneas de grado 3 que son Galois. Ellos trabajan con una forma normal genérica (suponiendo que el cono tangente en el origen es reducido), que depende de 4 parámetros complejos. Es decir, salvo conjugación este tipo de foliaciones son descritas por 1–formas racionales del tipo

$$\mathcal{F}_{\alpha;\lambda,\mu,\nu} : \frac{dx}{x} + \lambda \frac{dy}{y} + \mu \frac{(dy - dx)}{y - x} + \nu \frac{(dy - \alpha dx)}{y - \alpha x}, \quad (3.15)$$

verificando la condición de admisibilidad

$$\alpha(\alpha - 1)\lambda\mu\nu(1 + \lambda + \mu + \nu) \neq 0,$$

para obtener una foliación saturada de grado 3. Sea \mathcal{T} el conjunto de parámetros admisibles $(\alpha; \lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^4$ tales que la foliación $\mathcal{F}_{\alpha;\lambda,\mu,\nu}$ admite trivolución birracional $\tau : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ que conmuta con su aplicación de Gauss. En [7] se prueba los siguiente

- i) Demuestran que el punto $(-1, 1, 1, 1) \in \mathcal{T}$ admite una vecindad U tal que $\mathcal{T} \cap U$ es una superficie suave,
- ii) la traza de \mathcal{T} con el hiperplano $\alpha = -1$ está formado por dos componentes irreducibles que se encuentran en $(-1; 1, 1, 1)$.

Además, Cerveau y Deserti plantean la cuestión sobre la irreducibilidad y racionalidad del conjunto algebraico formado por las foliaciones homogéneas Galois de grado 3. En esta sección responderemos a estas preguntas para el conjunto de foliaciones homogéneas Galois de grado d .

Denotemos por \mathbb{G}_d el conjunto de foliaciones Galois de grado d y por \mathbb{H}_d el conjunto de foliaciones homogéneas de grado d dadas por campos vectoriales homogéneos saturados $A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$.

Lema 3.37. \mathbb{H}_d es un subconjunto abierto Zariski de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_d[x, y]^{\otimes 2}) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2d+1}$.

Prueba. Pues, $\mathbb{H}_d = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2d+1} \setminus \{R(A, B) = 0\}$, donde $R(A, B)$ denota la resultante de los polinomios homogéneos $A(x, y)$ y $B(x, y)$. \square

Lema 3.38. Las acciones derecha-izquierda de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ sobre el conjunto de funciones racionales induce una acción natural φ de $\text{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ sobre \mathbb{H}_d por medio de

$$\varphi([\alpha_{ij}], [\beta_{ij}], [A_1, A_2]) = [\beta_{11}A_1^\alpha + \beta_{12}A_2^\alpha, \beta_{2,1}A_1^\alpha + \beta_{22}A_2^\alpha],$$

donde $A_i^\alpha(x, y) = A_i(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y, \alpha_{21}x + \alpha_{22}y)$.

Teorema 3.39. El subconjunto $\mathbb{G}_d \cap \mathbb{H}_d \subset \mathbb{H}_d$ formado por las foliaciones homogéneas Galois de grado d es un conjunto constructible y sus componentes son las órbitas por $\varphi : \text{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{H}_d \longrightarrow \mathbb{H}_d$ de las foliaciones

1. $x^d \frac{\partial}{\partial x} + y^d \frac{\partial}{\partial y}$, para cada d ,
2. $(x^n + y^n)^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x^n - y^n)^2 \frac{\partial}{\partial y}$, si $d = 2n$,
3. $(-x^4 - 2\sqrt{3}ix^2y^2 + y^4)^3 \frac{\partial}{\partial x} + (-x^4 + 2\sqrt{3}ix^2y^2 + y^4)^3 \frac{\partial}{\partial y}$, si $d = 12$,
4. $(xy^5 - x^5y)^4 \frac{\partial}{\partial x} + (x^8 + 14x^4y^4 + y^8)^3 \frac{\partial}{\partial y}$, si $d = 24$,
5. $(xy(-x^{10} + 11x^5y^5 + y^{10}))^5 \frac{\partial}{\partial x} + (x^{20} + 228x^{15}y^5 + 494x^{10}y^{10} - 228x^5y^{15} + y^{20})^3 \frac{\partial}{\partial y}$, si $d = 60$.

La clausura de cada órbita es una variedad unirracional. La primera componente tiene dimensión 5 y el resto 6. Cada componente irreducible corresponde a un grupo Galois diferente según la lista descrita en la proposición (3.36).

Prueba.

Como consecuencia del teorema (3.34), la proposición (3.36) y la equivalencia izquierda derecha obtenemos la clasificación de las foliaciones homogéneas Galois descritas en el teorema.

Por otro lado, sabemos que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ es una variedad cuasiproyectiva irreducible y racional. Puesto que toda variedad cuasiproyectiva es un conjunto constructible, del teorema de Chevalley deducimos que cada órbita

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}) = (\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})) \cdot \mathcal{F}$$

es también un conjunto constructible irreducible y su clausura es una variedad unirracional. Ahora nos centramos en calcular las dimensiones de cada componente. Para esto consideremos la función $\phi : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{F})$ definida por

$$\phi([\alpha_{ij}], [\beta_{ij}]) = [\beta_{11}A_1^\alpha + \beta_{12}A_2^\alpha; \beta_{21}A_1^\alpha + \beta_{22}A_2^\alpha],$$

donde $A_i^\alpha = A_i(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y, \alpha_{21}x + \alpha_{22}y)$ son las componentes del campo que define la foliación \mathcal{F} . Es claro que $\phi(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) = \mathcal{F}$. Sean $\gamma(t) = (\mathrm{Id} + t[\alpha_{ij}], \mathrm{Id} + t[\beta_{ij}])$ y $\delta(t) = (\phi \circ \gamma)(t)$ caminos respectivamente sobre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ y $\mathcal{O}(\mathcal{F})$. Se cumple

- i) La función $d\phi(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) : T_{(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})) \rightarrow T_{\mathcal{F}}\mathcal{O}(\mathcal{F})$ es suryectiva,
- ii) $\gamma'(0) = ([\alpha_{ij}], [\beta_{ij}]) \in T_{\gamma(0)}\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, y
- iii) $d\phi(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) \cdot \gamma'(0) = \left. \frac{d\delta}{dt} \right|_{t=0}$.

De (i) se deduce que

$$\dim(T_{\mathcal{F}}\mathcal{O}(\mathcal{F})) = \dim T_{(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})}(\mathrm{PSL}_2 \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})) - \dim \ker(d\phi(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})), \quad (3.16)$$

donde

$$\begin{aligned} T_{(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})) &= T_{\mathrm{Id}}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})) \times T_{\mathrm{Id}}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})) \\ &= \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^6, \end{aligned}$$

con $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{(a_{ij})_{2 \times 2} : a_{11} + a_{22} = 0\}$.

En el primer caso, se tiene que

$$d\phi(\text{Id}, \text{Id}) = [(\beta_{11} + \alpha_{11}d)x^d + \alpha_{12}dx^{d-1}y + \beta_{12}y^d, \beta_{21}x^d + \alpha_{21}dxy^{d-1} + (\beta_{22} + \alpha_{22}d)y^d],$$

cuyo núcleo es un subespacio unidimensional de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. De esta manera usando la relación (3.16) resulta que $\dim T_{\mathcal{F}}\mathcal{O}(\mathcal{F}) = 5$, en consecuencia $\dim \mathcal{O}(\mathcal{F}) = 5$.

En el segundo caso, se tiene que $d\phi(\text{Id}, \text{Id}) = [R1, R2]$, donde

$$R1 = \beta_{11}x^{2n} + 2\beta_{11}x^ny^n + \beta_{11}y^{2n} + 2x^{2n}n\alpha_{11} + 2x^{2n-1}n\alpha_{12}y + 2x^{n+1}y^{n-1}n\alpha_{21} + \\ + 2x^ny^n n\alpha_{22} + 2y^nx^n n\alpha_{11} + 2y^{n+1}x^{n-1}n\alpha_{12} + 2y^{2n-1}n\alpha_{21}x + 2y^{2n}n\alpha_{22} + \\ + \beta_{12}x^{2n} - 2\beta_{12}x^ny^n + \beta_{12}y^{2n},$$

$$R2 = \beta_{21}x^{2n} + 2\beta_{21}x^ny^n + \beta_{21}y^{2n} + \beta_{22}x^{2n} - 2\beta_{22}x^ny^n + \beta_{22}y^{2n} + 2x^{2n}n\alpha_{11} + \\ + 2x^{2n-1}n\alpha_{12}y - 2x^{n+1}y^{n-1}n\alpha_{21} - 2x^ny^n n\alpha_{22} - 2y^nx^n n\alpha_{11} - 2y^{n+1}x^{n-1}n\alpha_{12} + \\ + 2y^{2n-1}n\alpha_{21}x + 2y^{2n}n\alpha_{22}.$$

cuyo núcleo es un subespacio de dimensión cero, por lo tanto, $\dim \mathcal{O}(\mathcal{F}) = 6$.

En forma similar se procede con los otros casos. □

Observacion 3.40.

1. Para cada grado, la primera componente consiste de las foliaciones homogéneas que aparecen en la proposición (3.10) y la segunda componente contiene las foliaciones consideradas en los ejemplos (3.11), (3.12).
2. Podemos describir completamente la geometría de cada transformación birracional

$$\tau(x, y) = \left[\frac{x B(x, y) - y A(x, y)}{B(x, y) - \hat{\tau}(y/x) A(x, y)} \right] (1, \hat{\tau}(y/x)),$$

donde $\tau(z) \in \text{Bir}(B(1, z)/A(1, z)) \subset \text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Particularmente, para el caso $d = 3$ deducimos que el conjunto $\mathbb{H}_3 \cap \mathbb{G}_3$ de foliaciones homogéneas Galois de grado 3 es la φ -órbita del campo $x^3 \frac{\partial}{\partial x} + y^3 \frac{\partial}{\partial y}$, la cual tiene dimensión 5 dentro del espacio 7-dimensional \mathbb{H}_3 y que está saturado por las órbitas del grupo lineal de $\text{GL}_2(\mathbb{C}) \subset \text{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Corolario 3.41. *La porción 4-dimensional $\mathbf{S} := \{\mathcal{F}_{\alpha; \lambda, \mu, \nu}\}$ es transversa a las $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ -órbitas y $\mathcal{T} = \mathbf{S} \cap \mathbb{G}_3$ es una superficie racional, donde $\mathcal{F}_{\alpha; \lambda, \mu, \nu}$ es dada por la forma normal (3.15).*

Prueba. Se cumple que el subconjunto

$$\Gamma := \{(\alpha, \beta) \in \text{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PSL}_2(\mathbb{C}) : (\alpha, \beta) \cdot [x^3, y^3] \in \mathbf{S}\}$$

es el gráfico del morfismo $\gamma : U_{\mathbf{S}} \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, donde

$$U_{\mathbf{S}} = \{\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) : \det \alpha \neq 0 \text{ y } \alpha_{ij} \neq 0, a \neq 0, b \neq 0\},$$

es un subconjunto abierto Zariski, donde

$$\begin{aligned} a &= \alpha_{12}^2 \alpha_{21}^2 + \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{21} \alpha_{22} + \alpha_{11}^2 \alpha_{22}^2, \\ b &= \alpha_{12}^2 \alpha_{21}^2 + \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{21} \alpha_{22} + 3\alpha_{12}^2 \alpha_{21} \alpha_{22} + \alpha_{11}^2 \alpha_{22}^2 + 3\alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{22}^2 + 3\alpha_{12}^2 \alpha_{22}^2. \end{aligned}$$

En efecto, si $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ es fijo y usamos la condición $[\alpha, \beta] \cdot [x^3, y^3] \in \mathcal{S}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \beta_{1,1} &= \frac{N}{D} \alpha_{22}^3, & \beta_{1,2} &= -\frac{N}{D} \alpha_{12}^3, \\ \beta_{2,1} &= -\frac{\alpha_{21}^3}{\alpha_{11}^3 \alpha_{22}^3 - \alpha_{12}^3 \alpha_{21}^3}, & \beta_{2,2} &= \frac{\alpha_{11}^3}{\alpha_{11}^3 \alpha_{22}^3 - \alpha_{12}^3 \alpha_{21}^3}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} N &= \alpha_{11}^2 \alpha_{22}^2 + 3\alpha_{11}^2 \alpha_{21} \alpha_{22} + 3\alpha_{11}^2 \alpha_{21}^2 + \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{21} \alpha_{22} + 3\alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{21}^2 + \alpha_{12}^2 \alpha_{21}^2, \\ D &= ab(\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21})(\alpha_{12}^2 \alpha_{21}^2 + \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{21} \alpha_{22} + \alpha_{11}^2 \alpha_{22}^2). \end{aligned}$$

El cálculo anterior implica que $\mathcal{T} = \Gamma \cdot [x^3, y^3] \subset \mathbf{S}$ tiene dimensión 2. Por lo tanto, \mathcal{T} es una superficie unirracional. Y puesto que en dimensión ≤ 2 , racional y unirracional son conceptos equivalentes, se concluye que \mathcal{T} es una superficie racional. \square

3.7. Hexagonalidad y estructura transversalmente afin

Existe una noción geométrica de hexagonalidad de un 3-web \mathcal{W} en \mathbb{C}^2 introducida por Blaschke y Dubourdieu, caracterizada por la equivalencia de \mathcal{W} con el 3-web trivial dado por $dx \cdot dy \cdot d(x+y) = 0$. Otra forma de caracterizar dicha noción es también a través del anulamiento de su curvatura, que como hemos descrito anteriormente es una 2-forma meromorfa con polos contenidos en el discriminante del web \mathcal{W} . La hexagonalidad para un d -web \mathcal{W} , con $d > 3$, se analiza viendo la hexagonalidad de todos sus 3-subwebs.

En [7] los autores asocian a foliaciones de grado 3 sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ una trivolución birracional: Toda recta genérica ℓ es tangente a \mathcal{F} en tres puntos, la aplicación buscada que intercambia estos puntos en general es multivaluada. Ellos dan un criterio para que dicha aplicación sea birracional y construyen ejemplos de 3-webs hexagonales a partir de foliaciones que admiten trivoluciones birracionales. Una de las preguntas que se hacen es si hay alguna relación entre la existencia de trivoluciones no triviales asociada a una foliación \mathcal{F} de grado 3 y la hexagonalidad del web $\mathrm{Leg} \mathcal{F}$. En esta sección demostramos que la hexagonalidad de $\mathcal{G}_* \mathcal{F}$ implica que \mathcal{F} sea transversalmente afin.

Una **estructura transversalmente afin singular** para una foliación \mathcal{F} sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ consiste de un par (ω, η) de 1-formas meromorfas verificando las siguientes condiciones

- a) ω define \mathcal{F} ,
- b) $d\omega = \omega \wedge \eta$,
- c) $d\eta = 0$.

Un criterio para determinar cuando una foliación admite una estructura transversalmente afin es el criterio de Singer, ver [30].

Teorema 3.42 (Criterio de Singer). *Sea ω una forma racional en \mathbb{C}^2 . Entonces ω tiene una integral primera liouvilliana si y solamente si \mathcal{F} admite una estructura transversalmente afin.*

Proposicion 3.43. *Sea \mathcal{F} una foliación de grado d sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Si el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ es hexagonal entonces \mathcal{F} admite una estructura transversalmente afin singular.*

Prueba.

El hecho que $\text{Leg}\mathcal{F}$ sea hexagonal es equivalente a $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^*\text{Leg}\mathcal{F} = \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{W}^{\perp}$ sea hexagonal. Aplicando [1, teorema 18.2] al cubrimiento topológico asociado al núcleo de la monodromía del web \mathcal{W}^{\perp} deducimos que existe una superficie algebraica normal \mathbf{S}^{\perp} irreducible y un recubrimiento ramificado $\rho : \mathbf{S}^{\perp} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tal que $\rho^*\mathcal{W}^{\perp}$ es totalmente descomponible. De esta manera,

$$\mathcal{W} = \rho^*(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}^*\text{Leg}\mathcal{F}) = \rho^*(\mathcal{F}) \boxtimes \rho^*(\mathcal{W}^{\perp}) = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{F}_d,$$

siendo $\mathcal{F}_1 = \rho^*\mathcal{F}$. Asimismo, la curvatura de \mathcal{W} es definida por $K(\mathcal{W}) = d\eta(\mathcal{W})$, donde

$$\eta(\mathcal{W}) = \eta(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{F}_d) = \sum_{1 \leq r < s < t \leq d} \eta_{rst}.$$

Supongamos ahora que ω_i es una forma racional que define \mathcal{F}_i . Puesto que \mathcal{W} es hexagonal entonces existe $f_i \in \mathbb{C}(\mathbf{S}^{\perp})$ y una 1-forma racional sobre η sobre \mathbf{S}^{\perp} verificando

$$\sum_{i=1}^3 f_i \omega_i = 0, \quad d(f_i \omega_i) = f_i \omega_i \wedge \eta, \quad d\eta = 0.$$

Por lo tanto, la foliación $\mathcal{F}_1 = \rho^*\mathcal{F}$ admite una estructura transversalmente afin. Del teorema [6, Teorema 1.4] o [8, teorema 2.21] se concluye que \mathcal{F} admite una estructura transversalmente afin. \square

El recíproco de la proposición (3.43) no es cierta, aún en el caso Galois, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.44. La foliación \mathcal{F} dada por el campo vectorial

$$X(x, y) = x^3 \frac{\partial}{\partial x} + \left(1 + x + \frac{x^2}{3}\right) \frac{\partial}{\partial y}$$

admite estructura transversalmente afin, puesto posee una integral primera liouvilliana dada por $y - \frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$. Sin embargo, el web $\text{Leg}\mathcal{F}$ dado por

$$\omega = p dq^3 + \frac{1}{3} dq^2 dp - dq dp^2 + dp^3 = 0$$

no es hexagonal, pues su curvatura es $K(\text{Leg}\mathcal{F}) = \frac{81}{(1+27p)^2} dp \wedge dq$.

Por otro lado, se tiene $D_{\mathcal{F}} = \langle \tau \rangle = \mathbb{Z}_3$, donde

$$\tau(x, y) = \left(x + \frac{1}{2} \frac{x(x+3)(-2x-3+\sqrt{3}i)}{(x^2+3x+3)}, y + \frac{1}{2} \frac{(x+3)(1+x+\frac{x^2}{3})(-2x-3+\sqrt{3}i)}{x^2(x^2+3x+3)} \right),$$

es decir, \mathcal{F} es Galois.

El resultado principal de [10, Teorema A] da una dicotomía para cada foliación transversalmente afin sobre una variedad compleja proyectiva cuyo primer número de Betti es cero.

Teorema 3.45 (Cousin-Pereira). *Sea X una variedad compleja proyectiva tal que $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$ y \mathcal{F} una foliación singular transversalmente afin sobre X . Entonces al menos una de las siguientes afirmaciones se cumple:*

1. *Existe un morfismo Galois finito $p : Y \rightarrow X$ tal que $p^*\mathcal{F}$ es definida por una 1-forma racional cerrada; o*
2. *Existe una foliación Ricatti \mathcal{R} transversalmente afin sobre una superficie reglada S y una aplicación racional $q : X \dashrightarrow S$ tal que $\mathcal{F} = q^*\mathcal{R}$.*

Particularizando este resultado al caso $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ obtenemos una descripción bastante precisa de las foliaciones \mathcal{F} transversalmente afines en el plano proyectivo que, por la proposición (3.43) son las únicas candidatas a verificar la condición $\text{Leg}\mathcal{F}$ hexagonal.

Corolario 3.46. *Sea \mathcal{F} una foliación sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ cuyo web dual $\text{Leg}\mathcal{F}$ es hexagonal. Entonces o existe un morfismo Galois genéricamente finito $p : S \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tal que $p^*\mathcal{F}$ es definida por una 1-forma racional cerrada o existe una foliación Ricatti $\mathcal{R} : dy + (a(x) + yb(x)) dx = 0$ transversalmente afin y una aplicación racional $q : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ tal que $\mathcal{F} = q^*\mathcal{R}$, donde $a(x), b(x) \in \mathbb{C}(x)$.*

Bibliografía

- [1] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)4. Springer-Verlag, Berlin (1984).
- [2] W. Blaschke, J. Dubourdieu. *Invarianten von Kurvengeweben*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar des Universität Hamburg 6(1928):199-215.
- [3] A. Beltrán, M. Falla, D. Marín, *Flat 3-webs of degree one on the projective plane*, to appear in Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (2013).
- [4] W. Bars, C. Peters, A. Van de Ven *Compact Complex Surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrder Grenzgebiete (3)4, Springer-Verlag, Berlin (1984).
- [5] M. Brunella, *Birational Geometry of Foliations*. First Latin American Congress of Mathematicians, IMPA, 2000.
- [6] G. Casale, *Suites de Godbillon-Vey et intégrales premières*, C.R. Math Acad. Sci. Paris **335** (2002), 1003-1006.
- [7] D. Cerveau and J. Deserti, *Feuilletagues et transformations périodiques*, Experiments. Math. **19** (2010), 447-464.
- [8] D. Cerveau, A.Lins-Neto, F. Loray, J. V. Pereira and F. Touzet *Complex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences*, Mosc. Math. J. **7**(2007), 21-54.
- [9] D. Cerveau and L. Neto, *Irreducible components of the space of foliations of the degree two in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, $n \geq 3$* . The Annals of Mathematics. Second Series Vol.143 No 3(1996) pp.577-612.
- [10] G. Cousin and J. V. Pereira, *Transversaly affine foliations on proyective manifolds*, arXiv:1305.2175v2 [math.DS] (2013)
- [11] S. S. Chern y P.A. Griffiths, *Abel's theorem and webs*, Jahresber. Deutsch. Math. Verein. **80** (1978), pp 13-110.
- [12] P. Deligne, *Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles est abélien (d'après W. Fulton)*, Bourbaki Seminar, Vol. 1979/80, Lecture Notes in Math. **842**,1-10.

- [13] I.V. Dolgachev, *Mckay's Correspondence for compact discret subgroups of $SU(1,1)$, Groups and symmetries*, CRM Proc. Lecture Notes **47**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2009), 111-133.
- [14] G. Fischer, *Plane Algebraic Curves*. Volume 15 of Student Mathematical Library. American Mathematical Society, 2001.
- [15] H. Grauert, R. Remmert, *Komplexe Räume*, Math. Ann. **136**(1958).
- [16] L. Greenberg, *Maximal groups and signatures*, Discontinuous Groups and Riemann Surfaces, Princeton University Press, Princeton (1974), 207-226.
- [17] H. Hamm and L. Dung Trang, *Un théorème de Zariski du type Lefschetz*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **6**(1973), 317-366.
- [18] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, N.Y. (1977).
- [19] A. Hénaut, *Planar web geometry through abelian relations and singularities*. Inspired by S. S. Chern, 269–295, Nankai Tracts Math., **11**, 2006.
- [20] E. Hironaka, *Abelian Coverings of the Complex Projective Plane Branched along Configurations of Real Lines*, Memoirs of the Am. Math. Soc. **502** (1993).
- [21] H. Hochstadt, *The Functions of Mathematical Physics*, John Wiley & Sons Publ. (1977).
- [22] E. Ince, *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, 1944.
- [23] S.L. Krushkal', B.N. Apanasov and Gusevskii, *Kleinian Groups and Uniformization in Examples and Problems*, Translations of Mathematical Monographs **62**, AMS (1986).
- [24] D. Marín and J.V. Pereira, *Rigid flat webs on the projective plane*. To appear in The Asian Journal of Mathematics.
- [25] D. Marín, J.V. Pereira, Pirio, *On planar webs with infinitesimal automorphisms*. Inspired by S. S. Chern: A memorial volume in honour of a great mathematician ch. 14. (2006)
- [26] A. Hénaut, *Planar web geometry through abelian relations and singularities*. Inspired by S. S. Chern, 269–295, Nankai Tracts Math., **11**, 2006.
- [27] B. Maskit, *Kleinian groups*. Springer-Verlag (1988)
- [28] M. Namba, *Branched coverings and algebraic functions*. Pitman Research Notes in Mathematics Series **161** (1987).
- [29] J. V. Pereira, *Vector fields, invariant varieties and linear systems*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 51 (2001), no. 5, 1385–1405.

- [30] J. V. Pereira, *Integrabilidad de Folheações holomorfas*. 24° Colóquio Brasileiro de Matemática. Publicações Matemáticas, IMPA, 2009.
- [31] J.V. Pereira and L. Pirio, *An invitation to web geometry*. Publicações Matemáticas, IMPA, 2009.
- [32] O. Ripoll, *Géométrie des tissus du plan et équations différentielles*. Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux 1, 2005.
- [33] O. Ripoll, *Properties of the connection associated with planar webs and applications*. Preprint (2007) arXiv:math/0702321v2.
- [34] W. Scott, *Groups Theory*. Prentice-Hall, N.J. (1964).
- [35] J. Shurman, *Geometry of the Quintic*. Jhon Wiley & Sons Publ. (1997).
- [36] C.T.C Wall, *Singular Points of Plane Curves*. Cambridge University Press, New York, 2004.
- [37] H. Zoladek *Note on the Deck Transformations group and the monodromy group*. Topological Methods in Nonlinear Analysis. Journal of the Juliusz Schauder Center, Vol 19, 2002, 237-256.
- [38] H. Zoladek *The monodromy group*. Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences. Mathematical Monographs (New Series), Vol 67, Birkäuser Verlag Basel. 2006.