PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE DIVISIÓN Y DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES, MEDIADA POR JUSTIFICACIONES, EN ALUMNOS DE TERCER GRADO DE NIVEL PRIMARIA

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTADA POR:

CANDY CLARA ORDOÑEZ MONTAÑEZ

ASESOR DE TESIS:

MG. ESTELA VALLEJO VARGAS

MIEMBROS DEL JURADO:

MG. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

MG. ELIZABETH ADVÍNCULA CLEMENTE

Lima – Perú

2014

DEDICATORIA

A la memoria de ***Clara****, mi adorada madre, en recuerdo de su ejemplo por salir adelante.*

A ***Hermán****, mi querido padre, que con su sacrificio y amor lo hace todo posible.*

A ***Magaly****, mi querida hermana, que siempre me transmite fuerzas para ser cada vez mejor.*

AGRADECIMIENTOS

*A **Dios** por estar conmigo, por cuidarme y darme fortaleza en cada paso que doy en la vida. Gracias por ponerme en mi camino a las personas que tuvieron un rol importante para que se hiciera realidad esta meta anhelada.*

*A mí querida asesora, la **Mg. Estela Vallejo Vargas**, por su gran paciencia, por su motivación, por su tiempo y por su dedicación que contribuyeron a tener este apreciado trabajo. Estaré siempre agradecida por el apoyo brindado desde inicio a fin de este trabajo.*

A los 24 estudiantes que participaron en este trabajo, por su colaboración y entusiasmo mostrado en cada una de las sesiones.

*A todos los **profesores de la Maestría de Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP** que contribuyeron en mi formación académica.*

RESUMEN

En este trabajo nos proponemos investigar las condiciones con las que es posible lograr que los alumnos de tercer grado de primaria sean capaces de construir, en forma progresiva, los conocimientos de división y divisibilidad de números naturales. La presente investigación contiene: (i) un análisis sobre los significados de la división y de las consideraciones que se hacen sobre las justificaciones en los documentos oficiales elaborados por el Ministerio de Educación del Perú, entre los que se estudia el libro de texto que es distribuido por el Estado Peruano; (ii) un análisis de las producciones de alumnos de tercer grado de primaria en la construcción de los conocimientos de división y divisibilidad de los números naturales y las justificaciones que estos presenten; así como el producto final, que es (iii) una propuesta para la enseñanza de la división y divisibilidad de números naturales que incluye las condiciones que permiten la construcción de estos conocimientos por parte de estudiantes de tercer grado de primaria.

Palabras claves: *Justificación, repartición, división y divisibilidad.*

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Actualmente, todavía es muy frecuente observar a profesores de nivel primario dar prioridad al uso de algoritmos de las operaciones con números naturales, específicamente en el caso de la división de los números naturales. Creemos que esto se debe principalmente a que la referencia básica, y muchas veces única, de los profesores de la Educación Básica Regular es el libro de texto asignado para su curso, en los que es usual todavía encontrar planteamientos de enseñanza tradicionales cualquiera que sea la razón, esta enseñanza tradicional conlleva a que los estudiantes memoricen procedimientos de manera mecánica. Es por ello que este trabajo de investigación tiene como objetivo determinar las condiciones que permita a alumnos de tercer grado de primaria construir conocimientos de división y divisibilidad de números naturales. Para determinar estas condiciones se han diseñado actividades en base a las nociones de repartición equitativa y máxima propuestas en Vallejo (2012) y a las justificaciones como mediadoras de la construcción de estos conocimientos.

Este trabajo de investigación se presenta en cinco capítulos:

En el capítulo 1, presentamos la problemática de la investigación, esto es, mostramos la importancia de esta investigación, así como también los objetivos y la metodología empleada en esta investigación.

En el capítulo 2, presentamos los elementos teóricos que regirán el desarrollo de la presente investigación.

En el capítulo 3, mostramos los resultados del análisis de los documentos oficiales elaborados por el Ministerio de Educación del Perú en la búsqueda de los significados de la división de los de números naturales que estos documentos sugieren, así como las consideraciones que se hacen acerca de las justificaciones. También presentamos el análisis del libro que es distribuido por el Estado Peruano para el nivel en cuestión, en el que incluimos algunas sugerencias con el fin que los problemas y/o situaciones que se proponen en el texto sean enriquecidos.

En el capítulo 4, presentamos el análisis de las producciones de los 24 alumnos de tercer grado de primaria en la construcción de su conocimiento de división y divisibilidad de números naturales a través de las justificaciones que estos presenten.

En el capítulo 5, mostramos las conclusiones finales del estudio respecto a los objetivos planteados en el Capítulo 1. Asimismo, explicitamos algunas sugerencias para una próxima investigación relacionada con el presente trabajo.

En el apéndice, presentamos la propuesta en el que incluyen las condiciones para que alumnos de tercer grado de primaria construyan sus propios conocimientos sobre división y divisibilidad de números naturales.

CAPÍTULO 1

El problema de investigación

1.1 Relevancia del problema de investigación

A lo largo de la Educación Primaria se espera que los estudiantes aprendan la utilización de las operaciones básicas de los números naturales como la adición, la sustracción, la multiplicación y la división, así como la utilización de manera comprensiva de estos algoritmos. Sin embargo, en la actualidad, observamos que en las clases de matemática suele enseñarse los algoritmos de las operaciones básicas de manera mecánica, y esto consiste principalmente en hacer que los estudiantes memoricen algoritmos. Más aún, se piensa que el aprendizaje de estas operaciones, y el avance a nuevos conocimientos, se garantiza con el dominio de algoritmos, como sucede en particular para el caso de la división de números naturales. Esta forma de enseñanza tradicional conlleva a que nuestros alumnos acepten siempre de forma pasiva los conocimientos impartidos por el maestro en clase.

Por otro lado, esto resulta ser bastante contradictorio con lo propuesto por el Ministerio de Educación, el cual demanda que al concluir la Educación Básica Regular nuestros alumnos se caractericen por ser estudiantes críticos, reflexivos y racionales. Pensamos que una forma de desarrollar estas características en nuestros estudiantes es con una formación en matemática rica en justificaciones, como propone Vallejo (2012), quien abre paso a la presente investigación a través de los planteamientos "pendientes" que sugiere, y quien además muestra una serie de resultados positivos inmersos en una enseñanza de las matemáticas mediada por justificaciones, lo que sugiere a su vez mostrar a nuestros alumnos la satisfacción por convencerse acerca de la veracidad de las proposiciones presentadas, inducidas o deducidas en clase y no simplemente aceptarlas sin poder cuestionarlas, así como el ser conscientes de que ellos mismos pueden ser capaces de construir su propio conocimiento matemático.

Las justificaciones matemáticas de un estudiante de nivel primaria o secundaria, desde la perspectiva presentada por la investigadora, se entienden en *"un sentido más amplio que la demostración puesto que esta incluye aquellos primeros argumentos que son* *proporcionados por estudiantes que son nuevos en los procesos demostrativos"* (Vallejo, 2012, p.19). Además, aclara que una demostración matemática correspondería al nivel más alto (nivel 3) de los niveles de producción de demostración matemática propuestos por Bieda, Choppin y Knuth (citado en Vallejo, 2012).

Existen investigaciones que muestran la relevancia de las justificaciones y temas afines que aportarán a este trabajo de investigación, siendo uno de ellos la de Saénz (2001), quien trabaja sobre el sistema de conjeturas y la naturaleza de las demostraciones en la enseñanza de las matemáticas, como también muestra la diferencia y la importancia de desarrollar en el estudiante el razonamiento demostrativo y razonamiento plausible. Además de esto, Saénz (2001) y Recio (2001) explican el papel importante de la intuición, la conjetura intuitiva, la validación empírico-inductiva, la formulación de conjeturas, los ejemplos y contraejemplos, etc., procesos fundamentales para el desarrollo de estos razonamientos (demostrativo y plausible). Sobre el razonamiento demostrativo, De Villiers (2001) manifiesta que la demostración cumple varias funciones, no sólo consiste en la verificación de proposiciones matemáticas, sino contribuye a la creación de nuevos resultados. Por otro lado, en el trabajo de Hanna y De Villiers (2012) se trata acerca de por qué y cómo los educadores matemáticos podrían acercarse a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración.

Investigaciones como las mencionadas muestran el papel importante de la demostración, la argumentación y la estrecha relación con las justificaciones, siendo de sumo interés para la comunidad de la Educación Matemática y para la comunidad Matemática.

En nuestro país y a la fecha contamos con la investigación realizada por Vallejo (2012) en el contexto de las demostraciones y justificaciones, para el nivel secundario. La presente investigación busca mostrar que las justificaciones sí pueden ser desarrolladas desde el nivel primario, para lo cual recogemos la propuesta de la investigadora – la enseñanza de la división de números naturales como repartición equitativa y máxima – la cual avanza gradualmente hacia la comprensión de la divisibilidad de números naturales.

El presente trabajo de investigación podría tener importantes repercusiones en la enseñanza de las matemáticas, y en particular, en la enseñanza de la divisibilidad de números naturales a partir de la enseñanza de la división de números naturales.

Específicamente, pensamos que la propuesta de construcción de conocimiento a la que lleguemos, podría ser recogida por el Ministerio de Educación de nuestro país para incluirla como una propuesta concreta de cómo profesores de nivel primaria podrían plantear en forma natural el tema de la división de números naturales a sus alumnos, y que además este planteamiento contribuya a la construcción de nuevo conocimiento relacionado con la divisibilidad de números naturales, en particular desde el tercer grado de primaria. Es importante que tomemos en cuenta que aunque esta última noción actualmente no se encuentra contemplada en el Diseño Curricular Nacional (DCN) de Educación Básica Regular (EBR) del Perú (2009) para este nivel, creemos que su enseñanza es posible gracias a las condiciones que determinemos.

Adicionalmente, consideramos que es muy valioso y ambicioso intentar encontrar maneras en que alumnos de nivel escolar, y específicamente desde el nivel primaria, desarrollen su razonamiento demostrativo, tomando en cuenta que el "edificio" de la matemática ha sido y sigue siendo así construido, de manera coherente a través de sus justificaciones.

Por todo lo expuesto, y por la relevancia ya evidenciada del tema, nos proponemos investigar bajo qué condiciones es posible lograr que alumnos del tercer grado de nivel primaria sean capaces de construir, en forma gradual, conocimientos de divisibilidad de números naturales, y a su vez que en este proceso sean capaces de desarrollar su razonamiento demostrativo.

1.2 Objetivos y pregunta de la investigación

Nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

1.2.1 Pregunta de investigación

¿Qué condiciones permiten a los alumnos de tercer grado de primaria construir conocimientos de división y divisibilidad de números naturales?

De lo anterior, se desprenden los siguientes objetivos de investigación:

1.2.2 Objetivo general

Determinar bajo qué condiciones alumnos del tercer grado de nivel primaria pueden construir conocimientos de división y divisibilidad de números naturales.

1.2.3 Objetivos específicos

- Identificar los significados de la división de números naturales en documentos oficiales elaborados por el Ministerio de Educación del Perú, así como también en el libro de texto distribuido por el Estado Peruano.
- Adaptar la propuesta de Vallejo, de tal modo que alumnos de tercer grado de primaria puedan construir conocimientos de división y divisibilidad de números naturales, a partir de la noción de repartición equitativa y máxima.
- Analizar las producciones de los alumnos de tercer grado de primaria en la construcción de su conocimiento de división y divisibilidad de números naturales a través de las justificaciones que estos presenten.
- Generar una propuesta donde se incluyan las condiciones para que alumnos de tercer grado de primaria construyan sus propios conocimientos sobre división y divisibilidad de números naturales.

1.3 Metodología

La metodología que será empleada en el presente trabajo es Investigación – Acción Colaborativa. Este método tiene como foco investigar el interés común de un grupo, investigador y participantes, con la finalidad de realizar un plan (construir y formular alternativas) de acción para lograr un cambio o mejora de una práctica educativa.

En un contexto educativo, Segal (2009) explica que:

> Investigación-acción colaborativa puede incluir tan sólo dos profesores o un grupo de varios profesores, junto con otras personas interesadas en el tratamiento de un aula, un departamento, o el problema de toda una escuela. Este problema puede consistir en un aula o un problema común compartido por muchas clases. Los profesores pueden tener el apoyo de las personas fuera de la escuela, como una universidad o un socio de la comunidad (p.18).

Existen diversos modelos en la Investigación-Acción; en nuestro estudio emplearemos uno de los modelos presentados en Segal (2009), el que adaptado a nuestro estudio presenta las siguientes fases:

- ***Identificar el problema***, lo que respecta a encontrar la idea general o inicial.
- ***Evaluar el problema,*** trabajaremos en los antecedentes y, asimismo, haremos la identificación de las diferentes concepciones del objeto matemático división de números naturales en documentos oficiales elaborados por el Ministerio de Educación del Perú; y en el libro de texto distribuido por el Estado Peruano.

- ***Hacer una recomendación***, diseñaremos una secuencia de actividades para la enseñanza del tema de división de números naturales, en base a la propuesta de Vallejo, que sea adecuada para que alumnos del tercer grado de primaria puedan construir gradualmente el tema divisibilidad de números naturales. Asimismo, las justificaciones se tratarán de manera implícita y/o explícita en estas actividades para la construcción del conocimiento sobre división y divisibilidad de números naturales.
- ***Practicar la recomendación***, la secuencia diseñada en la etapa anterior será puesta en práctica con 24 estudiantes del tercer grado de primaria de un colegio estatal de Lima. En esta fase detallaremos la caracterización de los sujetos de la investigación. Cabe resaltar que los estudiantes para nuestra investigación no cuentan con conocimientos previos de división y/o divisibilidad de números naturales.
- ***Reflexionar sobre la práctica***, analizaremos el proceso de puesta en práctica de la secuencia de actividades. A su vez, analizaremos las justificaciones de los alumnos tanto individuales como grupales, y lo obtenido de las grabaciones y cuestionarios, que conjuntamente con el diario de clase, permitirán recoger la mayor cantidad de información posible del proceso de construcción de conocimiento. En esta fase presentaremos nuestras conclusiones respecto al objetivo general y a los objetivos específicos planteados, dentro de los cuales se contempla una propuesta que permita dar las condiciones para que alumnos del tercer grado de primaria construyan su propio conocimiento de divisibilidad de números naturales. Finalmente mostraremos sugerencias para próximas investigaciones.
- Si es necesario, ***reevaluaremos***, y pondremos nuevamente en práctica la propuesta diseñada en la fase anterior.

CAPÍTULO 2

Elementos teóricos empleados en la investigación

En este capítulo se presentan algunas definiciones y categorizaciones realizadas por Fischbein (1994), Vallejo (2012), Blanton, Stylianou y Knuth (2011) y otros, que nos permitirán analizar las respuestas de los estudiantes. Asimismo, en este apartado, incluiremos las nociones que se han definido y las que se han tomado, en este caso de la propuesta de Vallejo (2012), para diseñar las actividades que serán aplicadas en las sesiones.

2.1 Fases previas a la demostración matemática

En nuestra investigación, consideramos y detallamos como fases previas al razonamiento demostrativo los siguientes procesos: la intuición, la identificación de patrones, el razonamiento plausible y las conjeturas.

2.1.1 La intuición

Sáenz (2001) destaca la importancia de la intuición, pues considera que hay que aprender a intuir para luego aprender a probar. Por otro lado, Fischbein (1994) presenta la “teoría de la intuición” en el ámbito del razonamiento matemático, en el cual considera el término *intuición* como “equivalente al conocimiento intuitivo; en otros términos no como una fuente, no como un método, sino, más bien, como un tipo de conocimiento” (p. 13). El investigador ejemplifica su definición con las siguientes afirmaciones: *que cada número tiene un sucesor, que el todo es mayor que las partes*; estas afirmaciones son aceptadas intuitivamente dado que son un tipo de conocimiento que se caracteriza por ser *inmediato y auto-evidente*. En cambio la afirmación: *la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos*, según el autor, no se acepta intuitivamente ya que no es auto-evidente.

Además, el investigador diferencia entre intuición y percepción. Aclara que este último es un conocimiento inmediato; mientras que la intuición va más allá de la información que se tiene de manera directa. La percepción no requiere de la intuición, aunque de la percepción de casos se puede hacer una generalización de una propiedad que sea aceptada mediante la intuición. Para ilustrar esta idea se toma este ejemplo: de percibirse que dos segmentos de recta que se intersectan determinan dos pares de ángulos opuestos de igual medida, puede intuirse que al intersecarse dos rectas cualesquiera quedan determinados dos pares de ángulos de igual medida; está propiedad general se acepta intuitivamente.

Asimismo, Fischbein (1994) aclara que la intuición es una idea que posee dos propiedades fundamentales: *inmediatez y certidumbre*. La primera es entendida como evidencia intrínseca, y la segunda se entiende como aquella que no requiere demostración.

La intuición es un tipo de conocimiento con el que sentimos que las afirmaciones son aceptadas como verdaderas por sí mismas, no requieren de una justificación para que estas sean aceptadas. Esta idea es entendida cuando el autor menciona que la intuición se caracteriza por ser *auto-evidencia e inmediatez*; esto es, "un conocimiento intuitivo que aparece subjetivamente para el individuo como directamente aceptable, sin la necesidad de una justificación extrínseca - una prueba formal o un soporte empírico" (p. 200).

Por otra parte, en cuanto nuestro objeto matemático podemos dar los siguientes ejemplos:

- Si un alumno afirma que existen infinitos números que son divisibles entre 3 entonces consideraremos que esta afirmación está basada en un conocimiento intuitivo para un alumno de este nivel. Un alumno puede formular esta afirmación y considerar innecesaria una justificación general pues su idea del conjunto de los números naturales lo lleva a pensar automáticamente en un conjunto de infinitos elementos de donde siempre podrá encontrar números divisibles entre 3.
- En cambio, si el alumno afirma que el residuo es menor que el divisor en la división de los números naturales entonces consideraremos que esta afirmación está basada en un conocimiento no intuitivo; ya que la aceptación de esta afirmación no es inmediata para un alumno de este nivel, en este caso se tiene la necesidad de una justificación.

2.1.2. Identificación de patrones

El NCTM (2000) considera que el reconocimiento de patrones, en alumnos de nivel escolar, es uno de los elementos más importantes en el desarrollo del razonamiento matemático puesto que crear y descubrir patrones proporciona oportunidades importantes para que los alumnos formulen conjeturas y den razones de su validez.

Siendo evidente la importancia de esta fase previa a la demostración, tomamos los aportes de Blanton, et al. (2011 citado en Vallejo, 2012), quienes definen un patrón como:

> a general mathematical relation that fits a given set of data. Asimismo, los autores diferencian entre dos tipos de patrones teniendo en cuenta la forma en cómo estos se determinan – definite and plausible patterns. Respecto al primero de ellos – definite patterns – nos dicen que, it is possible mathematically for a solver (given the information in a task) to provide conclusive evidence for the selection of a specific pattern; entre tanto, respecto al segundo de ellos – plausible patterns – nos dicen que,“it is not possible mathematically for a solver (given the information in a task) to provide conclusive evidence for the selection of a specific pattern over other patterns that also fit the data (e.g. one might select the pattern that he/ she considers to be the simplest pattern that fits the given set of data). (p.8)

Además, Vallejo (2012) afirma que “los patrones plausibles (plausible patterns) no pueden ser determinados de forma única, mientras que los patrones definidos (definite patterns) sí” (p.8).

2.1.3. Razonamiento plausible y formulación de conjeturas

Polyá (1953 citado en Godino & Recio, 2001) “studied intuitive reasoning in mathematics, considering it to be the reasoning we use to formulate our mathematical conjectures and calling it *plausible reasoning*” (p. 93).

De igual manera, Sáenz (2001) señala que el razonamiento plausible es el medio por el cual apoyamos nuestras conjeturas y nuestras intuiciones.

Por otro lado, según Vallejo (2012) la conjetura “es una afirmación cuya verdad puede estar originada en un convencimiento intuitivo del que la formula; sin embargo su verdad o falsedad tiene que ser demostrada” (p.10).

2.2 Demostración matemática y Justificación matemática

2.2.1 Demostración matemática

Recio (2001) considera a la demostración matemática como un objeto complejo que admite diferentes interpretaciones y dimensiones. El autor revisa el carácter formal de la demostración que se le atribuye en la comunidad matemática y en la comunidad educativa; y propone ampliar el significado de la demostración matemática en la comunidad educativa con el propósito de dar cabida a otras formas de argumentación dadas en las prácticas habituales de los estudiantes y también usadas por los matemáticos en sus procesos argumentativos. En ese sentido el autor amplía su interpretación de la demostración y considera que:

> tanto la argumentación intuitiva, como la prueba empírico-inductiva, como la demostración deductiva informal, como la demostración deductiva formal constituyen aspectos complementarios de la demostración matemática, que representa un proceso activo, vivo, que comparta distintas fases, desde la formulación inicial de las primeras conjeturas hasta los procesos finales de expresión formalizada de la demostración. (p.36)

Notemos que el significado de demostración matemática que propone Recio es más flexible, más cercano a los usos argumentativos de los estudiantes. Sin embargo, Vallejo (2012) señala que flexibilizar el significado de la demostración matemática, vista desde la comunidad matemática es quitarle el rigor y la esencia que implica la demostración. El presente trabajo coincide y toma la postura de la investigadora, la cual considera a la demostración matemática como el nivel más alto de justificación que se puede alcanzar, en este caso; el nivel 3 de producción de la demostración matemática, que más adelante detallaremos.

Por otra parte, en esta investigación presentamos una definición para la justificación matemática que se explicará en el siguiente apartado. Esta definición es necesaria para el posterior análisis de las producciones de los estudiantes de tercer grado de primaria en la construcción del conocimiento de divisibilidad de números naturales.

2.2.2 Definición de justificación matemática adoptada en el presente trabajo

Nuestra postura acerca de las justificaciones matemáticas es la siguiente:

Llamaremos justificación matemática a todos aquellos argumentos que permiten validar la veracidad o falsedad de una afirmación matemática, ya sea que se haya planteado como tal, o que esté involucrada en una pregunta. Un ejemplo de esto último es el siguiente caso que muestra dos maneras “equivalentes” de plantear un mismo problema.

- Planteado como una afirmación:

Determine el valor de verdad de la siguiente afirmación y justifique su respuesta: “26 es divisible entre 4”

- Planteado como pregunta:

  ¿26 es divisible entre 4? Justifique su respuesta

Observamos que para justificar la veracidad o falsedad de ambos problemas se requerirán básicamente de los mismos argumentos ya que es, en esencia, el mismo problema.

Por otro lado, entre los argumentos que se pueden emplear para una justificación tenemos por ejemplo: definiciones, resultados previamente justificados, contraejemplos, ejemplos, etc. La elección del argumento adecuado dependerá básicamente del tipo de problema que nos planteen: dependerá específicamente de si un problema es particular o general.

En el caso particular en el que debamos justificar la veracidad de un problema general, se requerirá también de argumentos generales. El análisis de las respuestas para este tipo de problemas se hará tomando como referencia los niveles de producción de la demostración matemática que detallamos a continuación.

2.2.2.1 Niveles de producción de demostración matemática

Presentamos la descripción de los niveles de producción de demostración matemática de Bieda, Choppin y Knuth (2011 citado en Vallejo, 2012). Estos son:

Nivel 0

Los estudiantes en este nivel parecen no ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación matemática para demostrar la verdad de una proposición o afirmación. Por ejemplo, un estudiante podría aceptar una proposición como verdadera porque un profesor, un papá o mamá, o un texto “dice” que es verdadera; en este caso, la justificación no es matemática. En otros casos, un estudiante podría simplemente establecer que una proposición es verdadera sin referencia alguna del por qué es así (por ejemplo, “la suma de dos números pares es par porque así es como es,” “sí, los números serán iguales porque siempre serán iguales”).

Nivel 1

Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de proporcionar una justificación matemática, pero sus justificaciones no son generales; en la mayoría de los casos, las justificaciones de los estudiantes están basadas empíricamente. Entre las justificaciones basadas empíricamente, reconocemos distinciones (en subniveles) entre estudiantes que consideran comprobar unos pocos casos, estudiantes que consideran comprobar sistemáticamente unos pocos casos (por ejemplo, números pares e impares), estudiantes que consideran comprobar casos extremos o casos “aleatorios”, y estudiantes que consideran el uso de un ejemplo genérico (demostración por una clase de objetos).

> **Nivel 2**
>
> Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de un argumento general, e intentan producir tales argumentos por ellos mismos; los argumentos, sin embargo, no llegan a ser demostraciones aceptables. Esto puede suceder en una de dos maneras: (1) Los estudiantes expresan el reconocimiento de la necesidad de proporcionar un argumento general e intentan producir tal argumento, sin embargo, el argumento proporcionado no es un argumento viable (es decir, el argumento es o bien incorrecto matemáticamente o bien no nos conduciría a una demostración aceptable). (2) Los estudiantes expresan el reconocimiento de la necesidad de proporcionar un argumento general e intentan producir tal argumento, sin embargo, el argumento está incompleto (si se completara, el argumento sería una demostración aceptable). En ambas situaciones, el punto es que los estudiantes intentan tratar con el caso general. Además, el Nivel 2 de justificaciones incluye respuestas de aquellos estudiantes que demuestran una consciencia de que la evidencia empírica no es suficiente como demostración – o bien al expresar reconocimiento de la necesidad de tratar con todos los casos o bien al expresar reconocimiento de la limitación de la presentación de ejemplos como demostración – pero no han logrado producir un argumento general.
>
> **Nivel 3**
>
> Los estudiantes en este nivel parecen ser conscientes de la necesidad de un argumento general, y son capaces de producir exitosamente tales argumentos por ellos mismos. Consideramos que los argumentos que los estudiantes producen en este nivel son demostraciones aceptables; esto es, sus argumentos demuestran que una proposición o afirmación es verdadera en todos los casos. Los argumentos categorizados en este nivel usualmente hacen referencia a suposiciones o hechos, una cadena de deducciones usada para construir el argumento, y finalmente una afirmación concluyente explícita. Aunque los argumentos producidos por los estudiantes podrían carecer del rigor o formalidad típicamente asociada a la demostración, sus argumentos, sin embargo, demuestran el caso general. (pp. 16 - 18).

En este mismo contexto (de los problemas generales), la autora menciona que un estudiante realiza una ***justificación matemática*** *si sus argumentos se ubican en alguno de los* ***niveles 1, 2 o 3 de la demostración matemática***, presentados anteriormente.

Adicionalmente, a estos niveles Vallejo (2012) considera una clasificación más para el análisis de las respuestas de los alumnos el que es llamado "*No codificable*", aquí serán considerados aquellos argumentos incorrectos y/o sin sentido.

En el siguiente esquema mostramos los argumentos que según su clasificación serán considerados como una Justificación matemática, Demostración matemática y los que no serán considerados Justificación matemática.

- Nivel 1
- Nivel 2 } ***Justificación matemática***
- Nivel 3 ------> ***Demostración matemática***

- Nivel 0
- No codificable } ***No es justificación matemática***

La justificación matemática, desde la perspectiva presentada por Vallejo (2012), se caracteriza por:

> […] una justificación matemática presenta un sentido más amplio que la demostración puesto que esta incluye aquellos primeros argumentos que son proporcionados por estudiantes que son nuevos en los procesos demostrativos. De aquí que la relación existente entre ellas (entre la demostración y la justificación) es que toda demostración es una justificación matemática, aunque no toda justificación sea una demostración. […] una justificación matemática nos puede indicar el nivel alcanzado por el estudiante, sus dificultades, sus errores, sus conflictos, sus concepciones, etc. (p.19).

A continuación describimos dichas clasificaciones teniendo en cuenta nuestro objeto matemático.

Tabla 1. Niveles de producción de demostración matemática en cuanto a nuestro objeto matemático.

<table>
<tr><td colspan="2">Por ejemplo, al pedido de una justificación matemática en relación a la propiedad de la divisibilidad de los números naturales:
“Todo número natural es divisible entre sí mismo”.</td></tr>
<tr><td>Nivel 0</td><td>Ejemplos de argumentos que serían categorizados en este nivel:
- “Sí, todo número es divisible entre sí mismo porque así dijo el profesor la clase pasada”
- “Sí, porque así me dijo mi papá”
- “Sí, porque así lo leí en un libro”
- “Sí, porque siempre es así”
- “Sí, es así porque sí”.
En cualquiera de estos casos, los argumentos presentados no pueden ser considerados como justificaciones matemáticas de la proposición dada.</td></tr>
<tr><td>Nivel 1</td><td>Ejemplos de argumentos que serían categorizados en este nivel:
- “Sí, porque 3 es divisible entre 3; 8 es divisible entre 8 y 5 es divisible entre 5”
- “Sí, porque al repartir 6 objetos entre 6 personas; a cada persona le tocaría 1 objeto y sobrarían 0 objetos después de la repartición. También, al repartir 10 objetos entre 10 personas; a cada persona le tocaría 1 objeto y sobrarían 0 objetos después de la repartición”.
Sin embargo los argumentos permanecen en una categoría particular, lo que no viene a constituir una justificación de por qué todo número es divisible entre sí mismo, que es una proposición general. Por otro lado, cabe resaltar que en todos los ejemplos de esta tabla el término “repartición” hace referencia al tipo específico de repartición equitativa y máxima (que más adelante detallaremos).</td></tr>
</table>

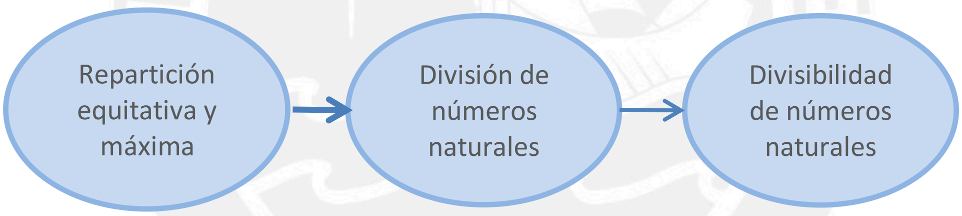
Nivel 2	Ejemplos de argumentos que serían categorizados en este nivel: - “Sí, porque 7 es divisible entre 7; 8 es divisible entre 8 y 10 es divisible entre 10. Entonces siempre sucederá así”. - “Sí, porque cuando reparto 9 objetos entre 9 personas tengo una repartición exacta. Además, cuando reparto 100 objetos entre 100 personas es una repartición exacta. Puedo seguir dando más ejemplos en los que todos serán reparticiones exactas”. Notemos que en estos dos casos se intenta producir un argumento general. En el primer caso el argumento es incompleto pues la expresión “siempre sucederá así” no se considera como justificación para los otros casos. Mientras que en el segundo caso da a entender que el empleo de un número grande como 100 garantiza la propiedad para todos los casos; y su intento por dar un argumento general lo notamos en su última expresión.
Nivel 3	Ejemplos de argumentos que serían categorizados en este nivel: - Sí, porque sea “n” un número natural cualquiera $n \,\lfloor\, \underline{n}$ $1 \in \mathbb{N}$ Residuo $\rightarrow (0)$ Esto quiere decir que: “n” entre “n” es una división exacta, o equivalentemente n es divisible entre n. - Sí, porque un número X de objetos pueden ser repartidos de manera exacta entre X personas ya que le daré 1 objeto a cada persona y me sobrarán 0 objetos después de la repartición”. Los argumentos en este nivel son demostraciones aceptables, según la categorización adoptada ya que podrían carecer del rigor o formalidad; sin embargo, demuestran el caso general.
No codificable	Ejemplos de argumentos que serían clasificados como no codificable: - “No se puede saber porque no me dan los números.” - “No, algunos números no son divisibles entre sí mismos” - “No, porque si reparto 5 objetos entre 3 niños me sobran algunos objetos”. Estos argumentos no serán considerados una justificación matemática puesto que son incorrectos y/o no tiene sentido con lo que se solicita. En ninguno de estos casos se consideran como argumentos aceptables.

Por otro lado, en el siguiente apartado mostramos las definiciones sobre repartición libre, equitativa, máxima, equitativa y máxima, así como también de división y divisibilidad de los números naturales que se tomaron en cuenta para el diseño de las actividades.

2.3. Definición de repartición equitativa, máxima, equitativa y máxima que se adoptan en la secuencia de actividades.

Lay (2009) considera que las pruebas (o justificaciones) dependen de buenas definiciones, ya que si estas últimas son inadecuadas no podemos esperar que los estudiantes puedan construir pruebas válidas.

Esta investigación toma de la propuesta de Vallejo las nociones de repartición equitativa y máxima, quien define la división y divisibilidad de números naturales en función de estos tipos específicos de reparticiones (equitativas y máximas). Diseñamos las actividades individuales y grupales en base a dichas nociones:



Hemos tomado de la propuesta de Vallejo (2012) las siguientes nociones:

- ***Repartición equitativa:*** es aquella repartición en la que cada persona recibe un mismo número de objetos.
- ***Repartición máxima:*** es aquella repartición en la que se reparte la mayor cantidad de objetos.
- ***Repartición equitativa y máxima:*** es aquella repartición en la que cada persona le corresponde una misma cantidad de objetos y a la vez recibe la mayor cantidad posible de objetos.
- ***Repartición natural:*** es aquella repartición en la que el número de objetos que le corresponde a cada persona es un número natural.

Asimismo, la autora propone algunos ejemplos relacionados con reparticiones que no presentan algunas de las condiciones anteriores. Nosotros llamaremos a estas reparticiones con el nombre de “Reparticiones libres”.

- ***Repartición libre:*** es aquella repartición que no presenta condición alguna.

A continuación, mostramos algunos ejemplos para ilustrar estas nociones:

Tabla 2. Ejemplos de los tipos de reparticiones.

Imaginemos que tenemos 15 canicas para repartirlas entre 2 hermanos. ¿Cuántas canicas le corresponde a cada hermano? si nos da el encargo de repartir dan el encargo de repartir estas canicas mediante una:
Repartición libre Por ejemplo podríamos repartir, al primer hermano: 8 canicas y al segundo hermano: 7 canicas. Otro ejemplo de repartición libre podría ser darle al primer hermano 5 canicas y al segundo hermano: 10 canicas. O también, al primer hermano 4 canicas y al segundo hermano 6 canicas, sobrando 5 canicas después de la repartición, etc.
Repartición equitativa (equitativa y no máxima) Por ejemplo podríamos repartir al primer hermano 4 canicas y al segundo hermano 4 canicas, sobrando 7 canicas después de la repartición. Otro ejemplo de repartición equitativa podría ser darle al primer hermano 6 canicas, al segundo hermano 6 canicas, sobrando 3 canicas después de la repartición; etc.
Repartición máxima (máxima y no equitativa) Por ejemplo podríamos repartir al primer hermano 11 canicas y al segundo hermano 4 canicas. O también, al primer hermano 5 canicas y al segundo hermano 10 canicas, etc. En cualquiera de estos ejemplos nos debe sobrar 0 canicas.

<u>Repartición equitativa y máxima</u>

A cada hermano le correspondería 7 canicas y sobraría 1 canica después de la repartición.

Notemos que con este tipo de repartición tendríamos una **única respuesta**.

Las reparticiones libres, reparticiones equitativas, reparticiones máximas por sí solas se caracterizan por tener más de una respuesta. Mientras que las reparticiones del tipo equitativas y máximas a la vez admiten una única respuesta.

En base a la noción de repartición equitativa, y máxima la autora define división y divisibilidad (ver Vallejo, 2012, p. 153-157). Observemos que la idea general de la autora sobre la división de números naturales es la siguiente:

Ver la división de X entre Y como una repartición equitativa, máxima y natural de X objetos entre Y sujetos.

Y definir la divisibilidad de números naturales como un caso especial de división: como el caso de una división exacta, que a su vez se puede entender como una **repartición exacta** (que debe ser entendida como una repartición equitativa y máxima que deja 0 objetos sobrantes al finalizar la repartición).

CAPÍTULO 3

Análisis de los significados de la división de los números naturales en el tercer grado de primaria

En este capítulo identificamos los significados de la división de números naturales en documentos oficiales elaborados por el Ministerio de Educación del Perú, como son el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular, los Mapas de Progreso, las Rutas del aprendizaje y el libro de texto distribuido por el estado peruano.

3.1 Análisis en los documentos oficiales elaborados por el Ministerio de Educación del Perú.

3.1.1 Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular

En el Diseño Curricular Nacional, DCN, (2009) de Educación Básica Regular (EBR) se incluye el programa curricular por nivel educativo, es decir, contiene los aprendizajes que debe desarrollar el estudiante en la educación inicial, primaria y secundaria en el Perú. Estos niveles se organiza en ciclos, y estos a su vez se organiza en grados. En este caso nos centraremos en el IV ciclo dado que es ahí donde se ubica el tercer grado de primaria, con el propósito de identificar la propuesta de trabajo que hace el DCN para abordar el tema de la división de números naturales para ese grado. Por otro lado, las capacidades para el área de matemática en el nivel primario involucran los procesos transversales de Razonamiento y demostración, Comunicación matemática y Resolución de problemas. Sin embargo, nuestro estudio se centrará en razonamiento y demostración, ya que este proceso guarda estrecha relación con el proceso de justificación. A continuación, mostraremos los hallazgos encontrados en el DCN respecto lo que se dice de división y de las justificaciones.

Tabla 3. Tratamiento de la división y la justificación en el DCN

Sobre el tema de División de números naturales	**En relación a la Justificación**
En el Tercer grado: - CONOCIMIENTOS ▪ **Significado de la división exacta**: resta sucesiva y reparto. ▪ CAPACIDADES ▪ Interpreta y representa la división exacta de números naturales. ▪ Resuelve problemas con operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división exacta de números naturales. (p. 195)	En el Nivel Primario: El proceso de Razonamiento y demostración implica desarrollar ideas, explorar fenómenos, **justificar resultados**, formular y analizar conjeturas matemáticas, expresar conclusiones e interrelaciones entre variables de los componentes del área y en diferentes contextos. (p. 186)

Notemos que en el DCN (2009) indica que los estudiantes del tercer grado de primaria trabajen divisiones, concretamente de tipo exacta. Asimismo, este documento propone que la división de este tipo sea trabajada a partir de restas sucesivas y repartos.

En cuanto a la justificación, hemos observado que para el nivel primario se plantea que se debe desarrollar capacidades de justificación, pero también que deben ser desarrolladas lo que nosotros llamamos las fases previas a la demostración. Sin embargo en este documento no se hace mención explícita de cómo un profesor de este nivel podría lograr esto.

3.1.2 Mapas de Progreso del Aprendizaje

Este documento, describe de manera progresiva los aprendizajes que se espera que aprendan los estudiantes de nivel primaria y secundaria en cada ciclo; estos aprendizajes están enunciados como los estándares de aprendizajes nacionales. Particularmente, en el área de matemática se han organizado cuatro mapas de progreso: Números y Operaciones, Cambio y Relaciones, Geometría, Estadística y Probabilidad; cada uno de ellos están presentados en fascículos distintos. En nuestro caso, nos centramos en el fascículo "Matemática: Números y operaciones" ya que ahí indican lo que se espera que aprendan los estudiantes de IV ciclo (3° y 4° grado de primaria) en relación al tema de la división. Por otro lado, el Mapa de Progreso de Matemática: Números y operaciones (MP) señala que los estándares de aprendizaje "son metas de aprendizajes claras que se espera que alcancen los estudiantes del país a lo largo de su escolaridad básica" (MP, 2013, p.6). Es decir, indica a los docentes qué aprendizajes deben lograr los estudiantes en cada ciclo. Adicionalmente, en este documento encontraremos: ejemplos de indicadores de desempeño (son problemas que un estudiante podría resolver sí ha logrado las expectativas de un determinado estándar), ejemplos de trabajos de los estudiantes (son respuestas de estudiantes que han logrado los aprendizajes señalados en un ciclo) y un glosario (explican o definen algunos términos).

Enseguida mostramos todo lo relacionado al tema de división, particularmente, para el IV ciclo. Así como también, mostramos los hallazgos encontrados en relación a las justificaciones.

Tabla 4. Tratamiento de la división y la justificación en el Mapa de Progreso

<table>
<tr><th>Sobre el tema de la división de los números naturales</th><th>En relación a las justificaciones</th></tr>
<tr><td>-El Estándar de Aprendizaje en el Mapa de Números y Operaciones (2013), señala que al término del IV ciclo se espera que un estudiante haya aprendido lo siguiente:

[…] Resuelve, modela y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de agregar, quitar, igualar o comparar dos cantidades o de <u>repetir una cantidad para aumentarla o repartirla en partes iguales</u> empleando diversas estrategias y explicando por qué las usó. Relaciona la <u>división</u> y la multiplicación <u>como procesos inversos</u> y a la <u>división como un reparto en partes iguales</u>. (p. 6)

- Ejemplos de indicadores de desempeño para estudiantes del IV ciclo. En relación al tema de la división muestran un problema el cual presentamos a continuación:

Giordano observa en la mesa 36 botones y, además, 6 paquetes de botones vacíos. ¿Cuántos botones vienen en cada paquete? (Partición)

Figura 1. Ejemplos de indicadores de desempeño. Fuente: Mapas de progreso en Números y Operaciones(2013, p. 38)</td><td>- La progresión de los aprendizajes del Mapa de Números y operaciones (2013) se describe considerando dos aspectos:
▪ Comprensión y uso de los números naturales.
▪ Comprensión y uso de las operaciones.

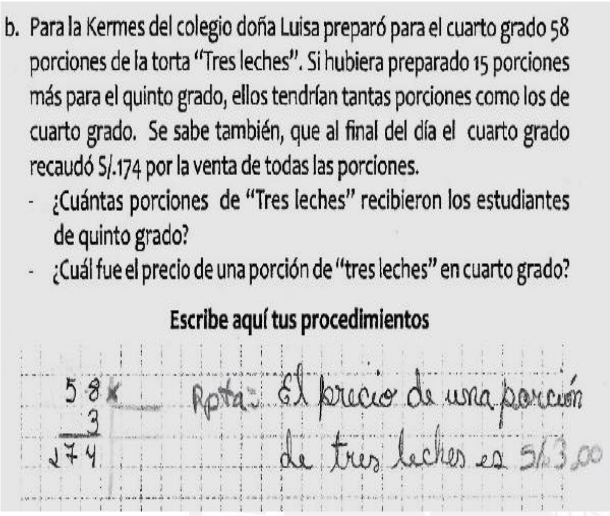
En nuestro estudio, nos centramos en la última de ellas ya que se relaciona con los procesos justificativos. En el fascículo explica la Comprensión y uso de las operaciones, de la siguiente manera:

Implica el desarrollo de capacidades para comprender y usar los distintos significados de las operaciones aritméticas en situaciones problemáticas en las que se requiere seleccionar, adaptar, elaborar y aplicar estrategias de solución; <u>justificar sus procedimientos</u>; y evaluar sus resultados (p. 8)

En el Glosario del fascículo Mapa de Números y operaciones (2013),</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

- Ejemplos de trabajos de los estudiantes del IV ciclo. En estos ejemplos hemos observado que una de las preguntas de uno de los dos ejemplos mostrados, incluye a la división como parte de la solución del problema. Es por ello que de este fascículo mostramos el siguiente problema, el cual nos centramos en la segunda pregunta y en su respuesta.



b. Para la Kermes del colegio doña Luisa preparó para el cuarto grado 58 porciones de la torta "Tres leches". Si hubiera preparado 15 porciones más para el quinto grado, ellos tendrían tantas porciones como los de cuarto grado. Se sabe también, que al final del día el cuarto grado recaudó S/.174 por la venta de todas las porciones.

- ¿Cuántas porciones de "Tres leches" recibieron los estudiantes de quinto grado?
- ¿Cuál fue el precio de una porción de "tres leches" en cuarto grado?

Escribe aquí tus procedimientos

58 x 3 = 174

Rpta: El precio de una porción de tres leches es S/.3.00

Figura 2. Ejemplos de trabajos de los estudiantes. Fuente: Mapas de progreso en Números y Operaciones (2013, p. 21)

Asimismo, en este fascículo presentan un comentario a la respuesta dada por el alumno, en el que señalan que la segunda pregunta "está referida a una acción de reparto, en la que el estudiante aplica la operación inversa al reparto porque reconoce que tres veces 58 es igual a 174." (Mapas de Progreso, 2013, p. 21).

- **En el Glosario** de este fascículo, explican que los *Problemas de estructura multiplicativa* son "situaciones que se pueden resolver con la multiplicación o la división" (Mapas de progreso, 2013, p.39). Este tipo de problemas presenta 3 estructuras, siendo de nuestro interés la de *Proporcionalidad simple*, está a su vez presenta 3 casos de situaciones, sin embargo nos centramos en los 2 siguientes casos: **<u>partición</u>** y **<u>cuotición o medida</u>**, ya que se relacionan con la división.

</td>
<td>

muestran los siguientes significados:

- **<u>Argumentar</u>:** Dar razones lógicas o matemáticas que permiten sustentar, probar o demostrar una proposición o idea planteada.
- **<u>Explicar</u>:** Describir o exponer las razones o procedimientos seguidos para la solución de un problema, el alumno establece conexiones entre sus ideas (p.36).

</td>
</tr>
</table>

A continuación, mostramos los ejemplos dados en este fascículo para estos dos casos.

CASO	Ejemplos	N° de grupos	N° de elementos por grupo	N° total
Partición	Ana observa en la mesa 40 galletas y, además, 5 paquetes de galletas vacíos. ¿Cuántas galletas vienen en cada paquete?	5	desconocido	40
Cuotición o medida	Hay 40 galletas en la mesa. En cada paquete vienen 8 galletas. ¿Cuántos paquetes se compraron?	desconocido	8	40

Figura 3. Situaciones de división.
Fuente: Mapas de progreso en Números y Operaciones (2013, p. 39)

Veamos que, en el fascículo de los Mapas de Progreso de Números y operaciones (2013) se indica que al finalizar el IV ciclo (3° y 4° grado de primaria) se espera que el alumno deba haber logrado comprender la división como la repartición en partes iguales, y como la operación inversa a la multiplicación. Asimismo, en el glosario del fascículo observamos que presentan dos casos de situaciones, en relación a la división, repartición y cuotición. En ese sentido, podemos mencionar que los Mapas de Progreso de Números y operaciones sugieren que el tema de la división se ha trabajado como: repartición en partes iguales, la operación inversa a la multiplicación y cuotición. Por otro lado, notemos que los ejemplos de los indicadores del desempeño y los trabajos de los estudiantes están dirigidos para que trabajen la división como repartos en partes iguales, aunque observemos que la respuesta del estudiante al ejemplo de la fig.2 trabaja la división como la operación inversa a la multiplicación. Pensamos que son relevantes estos ejemplos ya que marcan pautas al docente de cómo conocer si los alumnos del IV ciclo han logrado los aprendizajes mostrados en aquel estándar. Sin embargo, creemos que también sería valioso que en el fascículo mostraran algún trabajo de un estudiante que no han logrado las expectativas dadas en los estándares de aprendizaje, ya que así de esa manera nos permite saber, por ejemplo, qué dificultad muestran los alumnos en la comprensión de la división.

En cuanto a las justificaciones, concretamente, uno de los aspectos del Mapa de Números y operaciones señala que emplear las operaciones aritméticas ($+, -, \times$ y $\div$) en las situaciones problemáticas implica a su vez desarrollar en los estudiantes el proceso justificativo, específicamente en la justificación de sus procedimientos. De esto deducimos que, particularmente en los estudiantes de tercer grado de primaria se debe pretender desarrollar las justificaciones en las operaciones aritméticas, como es el caso de la división. Por otro parte, notamos que en el glosario de este fascículo nos aclaran que el significado de los términos de argumentación y explicación son diferentes, aunque en estos dos términos se pretende que los estudiantes dé sus razones ya sean matemáticas o de sus procedimientos para la solución de un problema.

3.1.3 Rutas del Aprendizaje

Es un material de apoyo para el trabajo pedagógico del docente que, según el documento, ofrece pautas para enseñar lo que demanda el DCN. Es decir, trata de orientar al docente en cómo deben de aprender los estudiantes de nivel inicial, primaria y secundaria. Las rutas del aprendizaje, RA, (2013) están organizadas en fascículos. El presente trabajo, se detendrá en el fascículo 1 dado que es ahí donde se ubica el grado que nos interesa, tercer grado de primaria. En este fascículo encontraremos las competencias, capacidades, indicadores y los estándares de aprendizajes que los estudiantes deben lograr al concluir el IV y el V ciclo (3er al 6to grado de primaria), vinculados a estos dos dominios: Número y operaciones y Cambio y relaciones. Además, el fascículo señala que toman un enfoque centrado en la resolución de problemas, el que a partir de una situación problemática busca desarrollar en los estudiantes 6 capacidades matemáticas: *Matematiza; representa; utiliza expresiones simbólicas, técnicas y formales; comunica; argumenta y elabora diversas estrategias para resolver problemas.* Aclaramos que en este fascículo nos centramos en el *IV ciclo* y en el dominio de *Número y operaciones*. El IV ciclo, ya que es ahí donde ubicamos al tercer grado de primaria. Dominio de Número y Operaciones dado que es, en este dominio, donde proponen respecto a la enseñanza de la división de números naturales. Asimismo, nuestro foco de estudio en relación a las justificaciones será una de las seis capacidades matemáticas, en este caso, la capacidad *argumenta* puesto que se relaciona con los procesos justificativos.

En la siguiente tabla mostramos todo lo relacionado a nuestro estudio.

Tabla 5. Tratamiento de la división y la justificación en las Rutas del aprendizaje

Sobre el tema de División de números naturales	En relación a la Justificación
▪ En este fascículo muestran **los Estándares de Aprendizaje** del IV ciclo, tal cual se presenta en los MP (2013). ▪ **Rango numérico para los números naturales.** Tome en cuenta que en el Fascículo 1 de las RA indica que el rango numérico está referido al número de cifras que debe trabajar las operaciones ($+, -, \times$ y $\div$) en cada grado, particularmente para la operación de la división y para el tercer grado de primaria se dice que los alumnos deben trabajar con "**<u>números de hasta tres cifras"</u>** (RA, 2013, p.33). ▪ **Números naturales y operaciones** El fascículo 1 propone que las operaciones ($+, -, \times$ y $\div$) de los números naturales deban ser trabajadas con "problemas aritméticos de enunciado verbal" PAEV (RA, 2013, p.33), las que presentan en dos clases: 1. Problemas aditivos (en los que se requiere sumar y restar). 2. **<u>Problemas multiplicativos</u>** (en los que se requiere multiplicar y **<u>dividir).</u>** En este caso nos ubicaremos en esta última clase de los PAEV, ya que hace referencia al tema de división de números naturales; estos *problemas multiplicativos* a su vez se subdividen en 3 situaciones, siendo la que nos interesa la *situación de proporcionalidad simple o razón;* éstas a su vez presenta 3 tipos, en nuestro caso nos centraremos en 2 de estos tipos pues son ahí donde propone las situaciones sobre el tema de división, las cuales son: ▪ **<u>De reparto equitativo (división)</u>** ▪ **<u>De agrupación (división)</u>.**	- En torno a **<u>la Capacidad: Argumenta</u>,** el fascículo 1, explícitamente dice lo siguiente: Argumentar y razonar implica reflexionar sobre cómo conectar diferentes partes de la información para llegar a una solución, además de analizar la información para seguir o para crear un argumento de varios pasos, así como establecer vínculos o respetar restricciones entre distintas variables. Supone, asimismo, cotejar las fuentes de información relacionadas, o hacer generalizaciones y combinar múltiples elementos de información. (p. 45) - Para desarrollar esta **capacidad**, en este fascículo, se plantea **estrategias,** donde textualmente dice lo siguiente**:** ▪ *De exposición y de discusión* Característica: una manera de eficaz de estructurar los conocimientos para una exposición o discusión son los organizadores visuales: esquemas gráficos y diagramas. ▪ *De indagación* Característica: plantear interrogantes, seguidas de respuestas tentativas, implica el establecimiento de conjeturas para su posterior validez (justificación), a partir de procedimientos experimentales y formulación de contraejemplos. ▪ *Que promueven prácticas inductivas* Característica: propiciar una serie de situaciones que lleven al establecimiento de relaciones para la generalización o particularización.

A continuación, presentamos ejemplos de estas dos situaciones dadas en este fascículo.

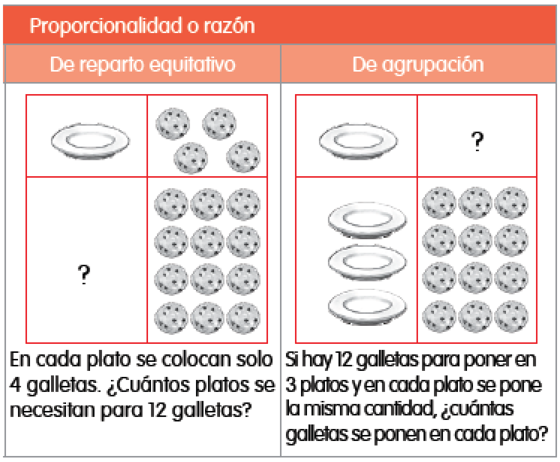


Figura 4. Situaciones de PAEV
Fuente: RA (2013, p 38)

Van a repartir 450 lápices entre los 150 niños de la escuela. Todos los niños reciben el mismo número de lápices. ¿Cuántos le dan a cada uno?
Se van a guardar 48 panes en bolsas. En cada bolsa caben 6 panes. ¿Cuántas bolsas se necesitan?

Figura 5. Situaciones de PAEV
Fuente: RA (2013, p 39)

Estas pueden ser:

-Modelos que posibilitan la visualización de lo que no podemos observar directamente-Simulaciones como formas de ejemplificar.

- *De integración*

Característica: gran parte de los conocimientos matemáticos están organizados de forma integral, en los cuales se combinan hechos, procedimientos, formas de representación, conceptos y relaciones entre ellos. Una actividad propia de este desarrollo son los mapas mentales. (p. 46)

- De acuerdo con el fascículo 1 de las RA la **capacidad argumentativa**, se encuentra "a lo largo de todo el proceso de resolución de problemas" (RA, 2013, p.101) a través de la indagación e inducción, lo que mostramos a manera de resumen.

- **Indagación**, en este proceso el docente orienta e interactúa con el estudiante a través de preguntas y respuestas tentativas que, serán guiadas para buscar que los estudiantes establezcan las razones o justificaciones de la situación a las que se enfrenta. En ese sentido, los estudiantes comunican sus argumentos al presentarles preguntas e indicaciones tales como ¿por qué?, explica, ¿cómo harías?, etc.
- **Inducción**, lo denominan como la forma de generalizar un patrón (numérico o gráficos); para ello el docente guía a los estudiantes a seguir los pasos para encontrar una generalización del patrón que les permita calcular el término desconocido de un problema. (RA, 2013).

Observemos que en los MP (2013) y en el fascículo 1 de las RA (2013) señalan que al concluir el IV ciclo (3° y 4° grado de primaria) el alumno debe lograr comprender la división como la repartición en partes iguales, y como la operación inversa a la multiplicación. Sin embargo, de manera explícita orienta al docente a que propongan a sus alumnos situaciones en los que requieran dividir como repartos equitativos y *agrupamientos*. Más aún, en el ejemplo que muestran como modelo para el docente (Fig. 4) notamos que la primera situación planteada como ejemplo de reparto equitativo, estaría más bien referida a una situación de *agrupamiento* ya que para resolverlo haríamos lo siguiente: agrupamos de 4 en 4 teniendo en total 3 grupos de 4 galletas, en el que cada grupo sería colocado en un plato, entonces la respuesta sería 3 galletas por plato. Mientras que la segunda situación estaría referida a una situación de *reparto equitativo* y no a un ejemplo de agrupamiento como lo propone las RA ya que, de manera natural repartiríamos las 12 galletas en los 3 platos, para así conocer el número de galletas que hay en cada plato. Asimismo, notemos que las situaciones de las fig. 4 y fig. 5 podrían ser tomadas o adaptadas por el docente de matemática, en particular, los que trabajan con alumnos de tercer grado de primaria puesto que los números dados en ambas situaciones están dentro del rango numérico para ese grado. Entonces, identificamos que, en este fascículo proponen que el tema de la división sea trabajado de tres modos: como reparto en partes iguales (o reparto equitativo), como operación inversa a la multiplicación y como agrupamiento. Veamos que estas 3 maneras de enseñanza de la división son también sugeridas en los MP.

En cuanto a las justificaciones, hemos notado que las estrategias que se están planteando para desarrollar la capacidad “Argumenta” se relacionan con el proceso justificativo desarrollado en el marco teórico de este trabajo de investigación. Concretamente en lo referido a las estrategias de indagación y las que promueven prácticas inductivas, que vienen a ser parte de las fases previas del proceso de justificación (ver Capítulo2, p. 14).

Cabe resaltar que en el fascículo 1 de las RA muestran actividades de aprendizaje, estos se organizan en: proyectos, laboratorios y talleres matemáticos. Notamos que, algunas de estas actividades guían al docente para que propicie el uso de las estrategias (se detalló en la tabla 4) de la capacidad argumentativa en sus alumnos. Sin embargo, observamos que no hay muestras concretas que orienten al docente a propiciar el uso de la estrategia de la indagación a partir de contraejemplos, es decir, el fascículo no presenta actividades que guie al docente a propiciar como estrategia de argumentación el uso de contraejemplos. Pensamos que es importante que en el fascículo muestren actividades que sean diseñadas con este fin, ya que de esa manera permite que el docente conozca esta estrategia y pueda orientar correctamente a la construcción de contraejemplos. Por otro lado, también creemos que este fascículo debería presentar los significados de términos como argumentación, procedimientos experimentales, contraejemplos, etc.; con el fin de aclarar y conocer qué implican estos términos.

3.2 Análisis del Libro de texto del Estado Peruano

El libro que se analiza es “Matemática 3” (2012), de la Editorial Santillana. El uso de este texto lo recomienda y distribuye el Ministerio de Educación del Perú. A continuación mostramos el siguiente esquema que presenta la organización del libro y, a su vez, el análisis de la unidad 5 del libro ya que, aborda el tema de división, que es nuestro foco de estudio.

8 unidades →

Cada unidad se organiza en 5 secciones: *Apertura* (para explorar y comentar), *inicio* (para recordar lo aprendido), *proceso* (para descubrir y aprender), *cierre* (para jugar y aprender) y *evaluación* (para comprobar lo aprendido).

→ **Unidad 5**

→ **Sección de apertura**

- Presenta una situación real (p. 108 y 109).

→ **Sección de inicio**

- Presenta seis problemas (p. 110 y 111).

→ **Sección de proceso**

- Se organiza en 7 partes:
  - Primera parte: **Repartimos en partes iguales**
  - Segunda parte: **Descubrimos la división exacta**
  - Tercera parte: **Hallamos mitad, tercia y cuarta**
  - Cuarta parte: **Calculamos cocientes**
  - Quinta parte: Reconocemos sólidos geométricos
  - Sexta parte: Interpretamos pictogramas
  - Séptima parte: Busco datos en una tabla (p. 114 hasta 129)

En esta sección nos centraremos en las **cuatro primeras partes**, ya que se relacionan a nuestro tema de estudio.

→ **Sección de cierre**

- Presentan dos partes:

Primera parte: Jugamos y aprendemos (juego que involucra el tema de división exacta)

Segunda parte: Organizamos nuestros conocimientos (resumen o ideas principales a manera de esquemas) (p. 130 y 131).

→ **Sección de evaluación**

Se presenta con el título “Compruebo lo que aprendí” y muestra una serie de ejercicios y problemas (8 en total) en relación a los temas tratados en la sección de proceso (p. 132 y 133).

A continuación presentamos el análisis detallado de la unidad 5: “Danzas y Tradiciones”.

a) Análisis de las concepciones de la división de números naturales

Tabla 6. Significados de la división en el libro “Matemática 3”

<u>En la sección de proceso</u>:

Observamos que se hace referencia a la división de números naturales, y particularmente al caso de la división exacta de números naturales.

- El significado de la división de los números naturales

Figura en la primera parte de la sección de proceso, inmediatamente después de una situación real (que más adelante detallaremos). En concreto, se muestra lo siguiente:

> La división es la operación que consiste en repartir en partes iguales una cantidad determinada. Para resolverla pueden usarse restas sucesivas.

Figura 6. Definición dada en la parte “Repartimos en partes iguales”
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 112)

Observamos que la concepción de división aquí dada está basada en reparticiones en partes iguales (reparticiones equitativas según nuestro marco teórico, ver p.30)

Otra observación es que con solo ver esta definición, no nos queda claro que se trate de una repartición máxima (ver capítulo 2, p. 30); sin embargo, la situación real planteada antes de presentar la concepción de división (fig.12) nos lleva a pensar que las reparticiones realizadas deben ser entendidas como reparticiones de *la mayor cantidad de objetos* en partes iguales (reparticiones máximas según nuestro marco teórico, ver p.30).

Además, notemos que en el libro indican que un medio de resolución de una división es a través de restas sucesivas. Por otro lado, pensamos que el libro de texto y el DCN (2009) guardan relación ya que en ambos documentos sugieren la enseñanza de la división en función de repartos y restas sucesivas.

- El significado de la división exacta de números naturales

Se ubica en la segunda parte de esta sección, después de un problema resuelto de dos maneras distintas: una de ellas por medio de repartos iguales, y en la otra introducen la notación matemática de la división, así como los elementos de esta operación (dividendo, divisor, cociente y residuo).

A continuación definen la división exacta como sigue:

Una división es exacta cuando el residuo es cero.

Figura 7. Definición dada en la parte “Descubrimos la división exacta”.
Fuente: Matemática 3 (2013, p. 114)

Notemos que la definición de la división exacta está en términos del valor del residuo, en este caso nos dicen que el residuo debe ser igual a cero.

Pensamos que la división exacta podría haber sido definida en términos de repartos iguales siguiendo el trabajo ya empleado, agregando la condición adicional que al finalizar la repartición no deben quedar elementos sin ser repartidos. Observemos que para esto no es necesario aún introducir notaciones y términos que podrían, más allá de ayudar a los estudiantes, podría confundirlos, más aun tomando en cuenta que la definición aparece inmediatamente después de haber presentado un solo ejemplo con esta notación.

<u>Sección de cierre</u>

En la segunda parte de esta sección se muestran tres esquemas a manera de resumen o ideas principales, siendo el primero de ellos el de nuestro interés.

En este primer esquema se explica, sobre la división: ¿qué es?, ¿Cuáles son sus términos? y ¿Cómo se comprueba?

A continuación mostramos este esquema:

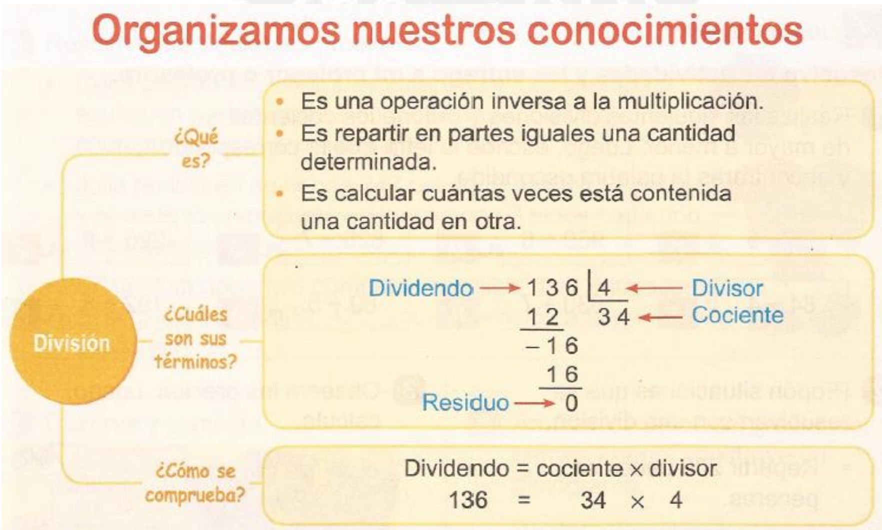


Figura 8. Esquema 1 dado en la sección de Cierre.
Fuente: Matemática 3 (2013, p. 131)

En cuanto a la primera de estas tres preguntas, notemos que se presentan tres significados de la división de números naturales. En el DCN (2009) está contemplada solo una de ellas, que es la de repartición; mientras que en el fascículo 1 de las RA (2013) y los MP (2013) sugieren la enseñanza de la división en base a las dos primeras nociones mostradas en el esquema. Asimismo, hemos observado que dentro de sus definiciones no hacen referencia a la división como restas sucesivas ni como agrupamiento; sin embargo en el libro presentan ejemplos para trabajar el tema de división exacta por medio de esas dos maneras. Por otro lado, pensamos que se podría hacer la aclaración que el esquema es respecto a la división exacta. Deducimos que es así ya que las definiciones y los ejemplos dados hacen referencia a este tipo de división. Creemos que es importante hacer esta aclaración, puesto que el alumno podría pensar que todas las divisiones (tanto exactas como inexactas) tienen residuo igual a cero.

b) Análisis de los problemas sobre división de números naturales

A continuación presentamos un análisis de los ejercicios y problemas, resueltos y planteados, dados para el tema de división de números naturales. Este análisis se hará para cada una de las secciones en la que está organizada la unidad 5.

b.1) <u>Sección de Apertura</u>

Introducen esta unidad con una situación real, en el contexto de la fiesta de la Virgen de Candelaria en la región Puno. A partir de los datos dados en esa situación presentan cuatro interrogantes, de las cuales tres de ellas están relacionadas con el tema de división. Asimismo, en esta sección de manera explícita se indica que el alumno al concluir la unidad logrará:

- Resolver divisiones de números naturales con divisores de un dígito.
- Proponer situaciones problemáticas para resolverlas con la división exacta.
- Interpretar y aplicar estrategias para resolver problemas de división exacta. (p. 109).

Además, el libro de texto señala que los aprendizajes que logrará el alumno están en función de: Resolución de problemas, Comunicación matemática y Razonamiento y demostración, que son los procesos transversales propuestos en el DCN (2009).

Por otro lado, hemos notado que las cantidades presentadas en la situación (3 000 nuevos soles y 30 000 turistas), según las rutas del aprendizaje no corresponden al rango numérico sugerido para el trabajo con alumnos de tercer grado de primaria (donde sugieren que se trabaje con números de hasta tres cifras). Observamos que la propuesta de las RA plantea que estudiantes de este grado empleen números de hasta tres cifras puesto que son más accesibles para el trabajo con estudiantes de este nivel educativo. No obstante, creemos que el aprendizaje de los estudiantes en esta etapa debería estar centrado principalmente en la comprensión de nuevos conceptos matemáticos y su construcción, mas no en la cantidad de cifras de los números con los que se trabaje.

En cuanto a los problemas aquí planteados:

Figura 9. Información y pregunta de la situación dada en la sección de apertura

Fuente: Matemática 3 (2012, p. 108)

Considerando la información tal y como se presenta, se tiene que el problema es ambiguo ya que admitiría más de una respuesta (por ejemplo: que un traje cueste 1000 nuevos soles, el segundo traje cueste 800 soles, y el tercero 1200 soles. Otra posible respuesta sería: dos trajes a 1300 nuevos soles, mientras que un tercer traje 400 nuevos soles). Creemos que este dato podría ser redactado de la siguiente manera: "Por 3 trajes de luces para la diablada, **todos del mismo precio**, se pagaron S/. 3000". Este nuevo planteamiento conduciría a que tengamos una única interpretación y respuesta. Por otro lado, pensamos que la palabra "aproximado" no debería ser considerada en la pregunta (fig. 9), ya que esta palabra admite tener más de una respuesta y en este caso se puede precisar con exactitud dicho precio. El replanteamiento de esta pregunta podría ser: "*¿Cuál es el costo de un traje de luces para la diablada?*".

Figura 10. Información y pregunta de la situación dada en la sección de apertura
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 109)

Notemos que, en el problema se emplea la expresión “tercera parte”, sin embargo, este no ha sido definido previamente. Pensamos que, no se debería plantear este problema en la sección de apertura porque los alumnos desconocen aun lo que significa tercera parte. En consecuencia, el alumno al desconocer este nuevo término no podría resolver el problema y tampoco el problema serviría como motivación, pues es uno de los propósitos de los problemas que se presenta en esta sección.

b.2) <u>Sección de Inicio</u>

En esta sección se presentan 6 problemas: 3 de estos están en relación con el tema de multiplicación - ya sea con el uso de las regletas de Cuisenaire y completando una tabla; un problema relacionado con el tema de repartición en partes iguales; un problema en el que solicita la mitad de 8 figuras y 12 chapitas, y un sexto problema relacionado con un tema diferente al de división (el cual no es nuestro foco de atención).

Cabe resaltar que el libro sugiere que los problemas de esta sección sean trabajados individualmente.

En cuanto a los dos primeros problemas relacionados con la multiplicación (el uso de las regletas), no se presenta explicación alguna sobre el trabajo con este material y tampoco se han desarrollado actividades con el uso de estas regletas. Esto lo hemos constatado en las unidades anteriores, incluida la unidad 3 donde es tratado el tema de multiplicación.

A continuación mostramos el primer problema planteado en esta sección:

Figura 11. Primer problema de la sección de apertura
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 110)

Pensamos que las preguntas aquí planteadas podrían ser fácilmente comprendidas y desarrolladas. Por ejemplo, en la segunda pregunta se tendría como respuesta: 4 regletas de color rojo (cada regleta representa 2 unidades) igualan a una marrón (representa 8 unidades). Sin embargo, en la parte en la que deben completar creemos que los estudiantes podrían presentar dificultades si no se ha definido previa y adecuadamente en este contexto la expresión "está contenido" para números, ya que la relación "está contenido" en general está definida entre conjuntos y este no es el caso que aquí se trata. Por esta razón, desde nuestro punto de vista esta tarea tal y como está aquí presentada no es clara, ni es fácil de ser completada. De aquí que proponemos el siguiente replanteamiento, en particular para el caso de Humberto:

i. ¿Cuántas regletas de color rojo igualan a una marrón?
ii. ¿Cuántas regletas de color rojo están contenidas en una regleta de color marrón?
iii. Esto quiere decir que ___ regletas de color rojo están contenidas en una regleta de color marrón, o que
iv. El número _2_ está contenido ___ veces en el número 8.

Notemos que los ítems i, ii y iii, hacen referencia a las regletas como objeto, es decir, vemos la cantidad de regletas rojas que igualan a una marrón y respondemos en función de eso. Mientras que, el ítem iv hace referencia a las regletas como los números que representan. Por ejemplo, la regleta rojo representa el número 2 (que es el valor que representa cada una de las regletas rojas).

Con el fin de "explotar" al máximo la situación planteada en el contexto de las regletas de Cuisenaire, se podrían plantear nuevos problemas, como los que proponemos a continuación:

a) ¿Cuántas regletas de color blanco igualan a **una regleta verde oscuro**?

   ____

   - Esto quiere decir que ____ regletas de color blanco están contenidas en 1 regleta de color verde oscuro.
   - O también, quiere decir que el número ____ está contenido 6 veces en el número 6.

b) ¿Cuántas regletas de color rojo igualan a **una regleta verde oscuro**?

   ____

   - Esto quiere decir que 3 regletas de color rojo están contenidas en ___ regleta de color verde oscuro.
   - O también, quiere decir que el número 2 está contenido ____ veces en el número 6.

c) ¿Cuántas regletas de color verde claro igualan a **una regleta verde oscuro**?

   ____

   - Esto quiere decir que ____ regletas de color verde claro están contenidas en 1 regleta de color verde oscuro.
   - O también, quiere decir que el número ____ está contenido ____ veces en el número 6.

d) Si no se deben romper las regletas, ¿cuántas regletas de color rosado claro igualan a **una regleta verde oscuro**? ¿Se podrá encontrar un número de regletas rosadas que igualen a una regleta verde oscuro?

   ____

e) Si no se deben romper las regletas, ¿cuántas regletas de color rosado igualan a **una regleta marrón**? ¿Se podrá encontrar un número de regletas rosadas que igualen a una regleta verde oscuro?

   ____

En cuanto a los problemas 3, 4 y 5, pensamos que estos podrían ser fácilmente resueltos por los alumnos ya que las imágenes que se les muestran ahí, ayudarían a resolver el problema. Cabe resaltar que en la indicación del problema 4 se emplea el término "mitad", asumimos que este término es conocido por los alumnos de tercer grado ya que; en el DCN (2009) proponen la enseñanza de este término, concretamente, con los alumnos de primer grado.

b.3) <u>Sección de Proceso</u>

En la tabla 5 mostramos las sugerencias que el libro, "Matemática 3", hace respecto a las formas de trabajo en los que deben ser abordados los problemas planteados en cada una de las partes de esta sección.

Tabla 7. Sugerencia del libro respecto a los problemas planteados.

Partes de la sección de Proceso	**El libro sugiere que los problemas se han trabajados en:**
Repartimos en partes iguales	- Grupo clase - Solo o sola
Descubrimos la división exacta	- Grupos - Solo o sola - En parejas
Hallamos la mitad, tercia y cuarta	- Grupos - Solo o sola.
Calculamos cocientes	- Grupo clase - En parejas.

A continuación presentamos el análisis de los problemas teniendo en cuenta las formas de trabajo que sugiere el libro.

Tabla 8. Problemas de la primera parte de la sección de proceso

<table>
<tr><th>Formas de trabajo</th><th>Repartimos en partes iguales</th></tr>
<tr><td>Grupo clase</td><td>Presenta 1 problema de situación real con dos interrogantes. Vea la siguiente figura:

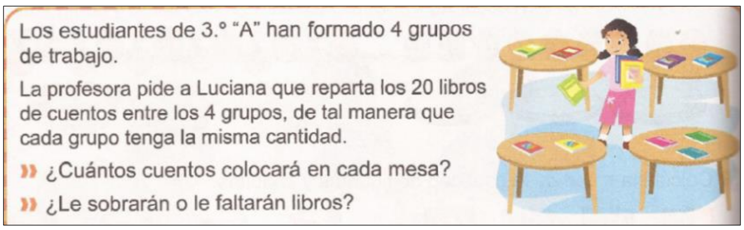


Figura 12. Situación para ser trabajada en grupo clase
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 112)</td></tr>
</table>

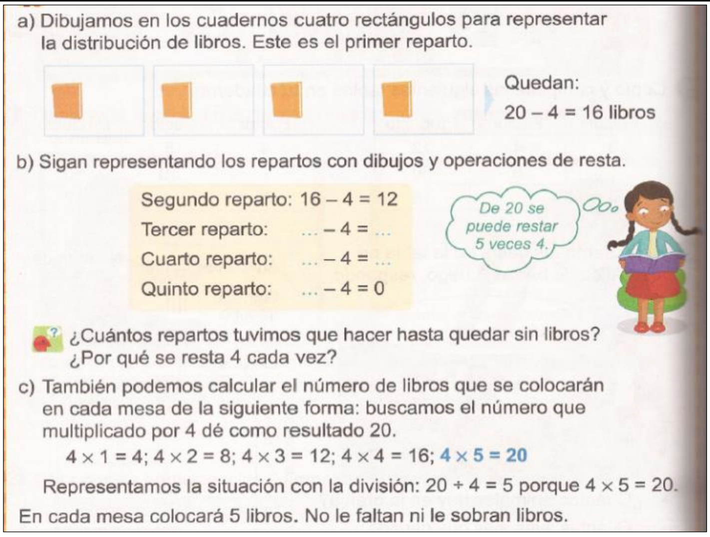
Notemos que el contexto de la situación (Fig. 12), antes de las interrogantes, se desarrolla entorno a cuentos y grupos de alumnos; sin embargo, la primera interrogante de la situación hace referencia *al número de cuentos que se colocará en cada* ***mesa.*** Pensamos que la primera interrogante y la imagen que se presenta deberían guardar relación con el contexto de dicha situación, ya que esto podría crear conflicto de información en los alumnos. Es por ello que sugerimos agregar en el contexto de la situación lo siguiente: *"… La profesora pide a Luciana que reparta los 20 libros de cuentos entre los 4 grupos, de tal manera que cada grupo* ***ubicado en su propia mesa*** *tenga la misma cantidad* ***de libros.*** *¿Cuántos cuentos colocará en cada mesa? ¿Le sobrarán o le faltarán cuentos?"*

Es más, proponemos que la situación sea replantada para evitar que los alumnos posicionen su realidad en la situación que se les plantea. Por ejemplo, los alumnos podrían pensar o decir si nosotros somos 12 alumnos y formamos 4 grupos tendremos 3 alumnos por grupo, entonces la respuesta a las dos preguntas sería: en cada mesa colocaré 3 libros ya que hay 3 alumnos por grupo y, sobrarán 8 libros después de la repartición. Pensamos que, la situación tal y como se presenta en el texto conduce a que se desvíe las intenciones de la situación que, en este caso, es la repartición de 20 cuentos entre 4 mesas. Es por ello que sugerimos que se replante de esta manera:

"La profesora tiene 4 mesas y 20 libros, que quiere que sea distribuido en estas 4 mesas de tal manera que cada mesa tenga una misma cantidad de libros. Ayuda a la profesora a que se haga esta distribución. ¿Cuántos cuentos colocará en cada mesa? ¿Le sobrarán o le faltarán cuentos?"

Aclaramos que en la resolución de este y otros problemas que presentan en el libro de texto, dan entender que las reparticiones son equitativas y máximas. Aunque de manera explícita hacen referencia a la condición de repartición equitativa. Es por eso que los problemas que replanteamos solo hacemos explícito a este tipo de repartición (equitativa).

Inmediatamente después de la situación, se presentan los ítems a), b) y c) que detallamos enseguida:



a) Dibujamos en los cuadernos cuatro rectángulos para representar la distribución de libros. Este es el primer reparto.

Quedan:
20 – 4 = 16 libros

b) Sigan representando los repartos con dibujos y operaciones de resta.

Segundo reparto: 16 – 4 = 12
Tercer reparto: ... – 4 = ...
Cuarto reparto: ... – 4 = ...
Quinto reparto: ... – 4 = 0

De 20 se puede restar 5 veces 4.

¿Cuántos repartos tuvimos que hacer hasta quedar sin libros? ¿Por qué se resta 4 cada vez?

c) También podemos calcular el número de libros que se colocarán en cada mesa de la siguiente forma: buscamos el número que multiplicado por 4 dé como resultado 20.

4 × 1 = 4; 4 × 2 = 8; 4 × 3 = 12; 4 × 4 = 16; **4 × 5 = 20**

Representamos la situación con la división: 20 ÷ 4 = 5 porque 4 × 5 = 20.

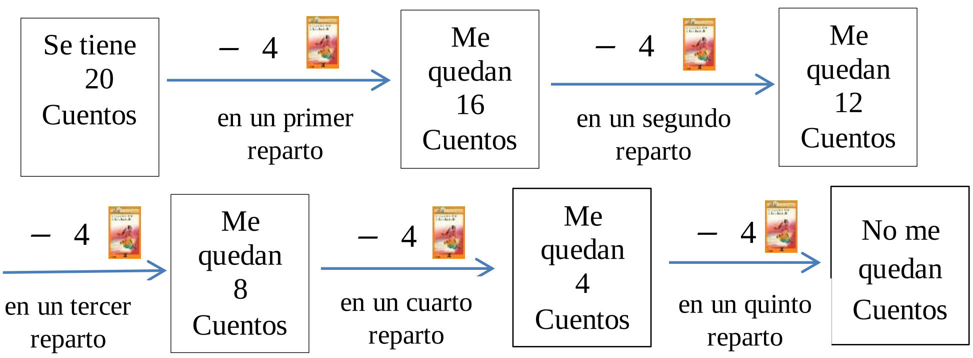
En cada mesa colocará 5 libros. No le faltan ni le sobran libros.

Figura 13. Ítems a), b) y c) de la situación grupo clase.
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 112)

Notemos que los ítems a) y b) se complementan, pues presentan la resolución de la situación como, solo, un procedimiento. Es decir, el ítem b) es la continuación del procedimiento mostrado en el ítem a). En ese sentido, sugerimos que:

- Los ítems a) y b) se muestren como un solo ítem, en este caso, sería solo el ítem a) y;
- las dos interrogantes, que están antes del ítem c), podría ser considerado como el ítem b).

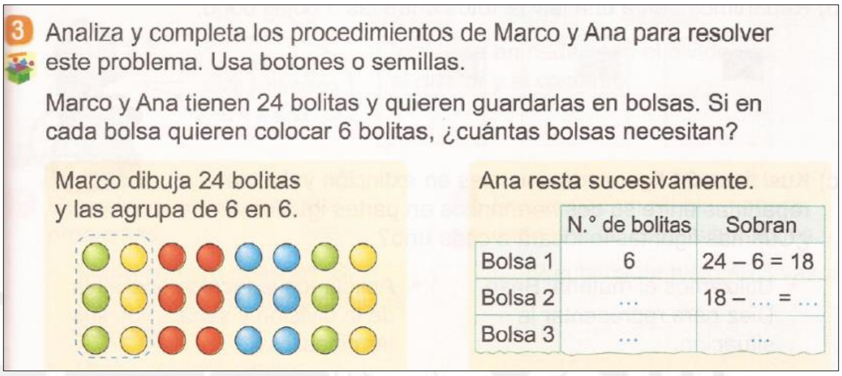
Además, pensamos que el procedimiento de las restas sucesivas como es presentada en el texto no es la más adecuada, concretamente nos referimos al cuadro que se muestra en el ítem b); ya que el alumno podría completar de manera mecánica, sin encontrar el sentido de la resta sucesiva en relación al reparto que realiza. Es por ello que proponemos que cuando se trabaje la división como resta sucesiva al menos en su introducción, sea presentada de la siguiente manera:



	Responde: - *¿Cuántos repartos tuvimos que hacer hasta quedar sin libros?* - *¿Por qué se resta 4 cada vez?* Asimismo, vemos que el comentario “De 20 se puede restar 5 veces 4” que se muestran en el ítem b) no es adecuado dado que, también al 20 se le puede restar 3 veces 5 o 2 veces 4, etc. Pensamos que, lo correcto es *“De 20 se puede restar 5 veces 4 como máximo o de tal manera que no me quede cuentos después de hacer la repartición”*. Por otro lado, observemos que en el ítem c) se introduce la notación de la división, la que es justificada en términos de la multiplicación. Creemos que este ítem no debería ser considerado en esta parte (Repartimos en partes iguales) ya que, este ítem no muestra un procedimiento por medio de reparticiones. En todo caso, sugerimos que dicho ítem sea ubicado en la siguiente parte de la sección la que es llamada “División exacta”, dado que ahí se da el tratamiento de la notación de la división de tipo exacta.
Solo o sola	Presenta 4 problemas: - Problemas 1 y 2: sobre repartos - Problema 3: sobre agrupamientos y restas sucesivas - Problema 4: sobre agrupamiento Pensamos que el problema 1 podría ser resuelto sin dificultad por los alumnos, dado que las imágenes que se muestran en el problema permitirían que el alumno haga la repartición en partes iguales fácilmente. A continuación mostramos el problema 2:  **Figura 14.** Problema 2 de “Repartimos en partes iguales” Fuente: Matemática 3 (2012, p. 113) En cuanto al problema 2, hemos observado que se emplea por primera y única vez a lo largo del desarrollo de esta unidad la expresión “reparto **equitativo”**; sin embargo el término “**equitativo**” no ha sido definido

previamente. Este nuevo término hace referencia a los repartos iguales con los que se está trabajando en el libro. Destacamos la introducción del término reparto “equitativo” puesto que permite que el alumno conozca otra manera de llamar a los repartos iguales. No obstante, en el libro se debería mostrar su definición, asociando la noción de repartición equitativa con los repartos iguales, con el fin de evitar que el término reparto “equitativo” pase desapercibido por los alumnos.

Por otro lado, se propone que el problema 3 sea trabajado de dos maneras: como agrupamiento y como restas sucesivas. Véase en la siguiente figura:



3 Analiza y completa los procedimientos de Marco y Ana para resolver este problema. Usa botones o semillas.

Marco y Ana tienen 24 bolitas y quieren guardarlas en bolsas. Si en cada bolsa quieren colocar 6 bolitas, ¿cuántas bolsas necesitan?

Marco dibuja 24 bolitas y las agrupa de 6 en 6.

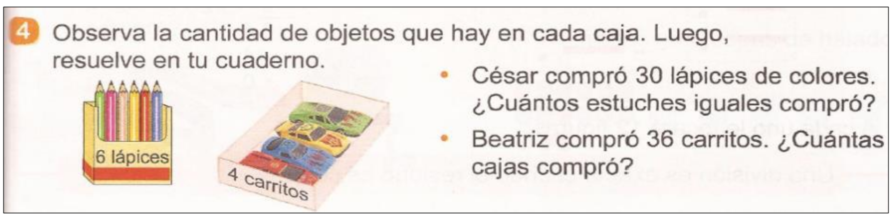
Ana resta sucesivamente.

	N.° de bolitas	Sobran
Bolsa 1	6	24 – 6 = 18
Bolsa 2	…	18 – … = …
Bolsa 3	…	…

Figura 15. Problema 3 de “Repartimos en partes iguales”
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 113)

Notemos que en el cuadro de las restas sucesivas, específicamente en el procedimiento de Ana, es incompleta puesto que falta una fila que en su primera columna debería enunciarse como “Bolsa 4”. Aunque, podría darse el caso que el libro pretenda que el alumno complete el cuadro, pero no hay indicios de que esto pueda ser entendido por todos los estudiantes.

El problema 4 presenta dos imágenes. Al lado derecho, se muestran dos interrogantes. Concretamente, observemos el problema en la siguiente figura:



4 Observa la cantidad de objetos que hay en cada caja. Luego, resuelve en tu cuaderno.

6 lápices

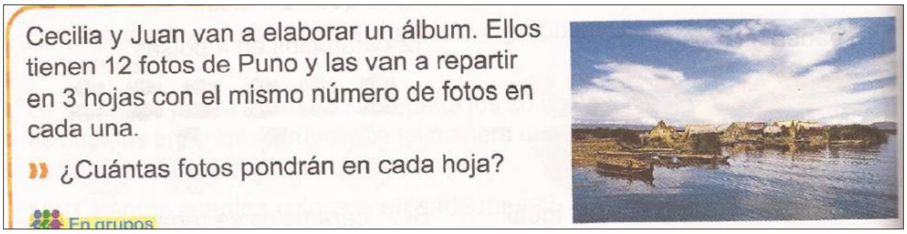
4 carritos

- César compró 30 lápices de colores. ¿Cuántos estuches iguales compró?
- Beatriz compró 36 carritos. ¿Cuántas cajas compró?

Figura 16. Problema 4 de Repartimos en partes iguales
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 113)

	En este caso sugerimos que la situación podría ser replanteada de esta manera: *"Si César* ***solo compra estuches*** *de lápices de colores* ***como el mostrado en la figura****, ¿cuántos estuches iguales compró César si en total tiene 30 lápices de colores?".* Consideramos importante agregar lo que resaltamos en "negritas", ya que con este dato adicional se admitiría una única respuesta. Análogamente, el problema de Beatriz y los carritos se puede replantear como se muestra a continuación: *"Si Beatriz* ***solo compra cajas*** *de carritos* ***como el mostrado en la figura****, ¿cuántos cajas iguales compró Beatriz si en total tiene 36 carritos?".* Por otro lado, notemos que en esta parte "Repartimos en partes iguales" se espera que todos los problemas sean de reparto. No obstante, vemos que los problemas 3 y 4 están dirigidos para que el estudiante lo trabaje como agrupamientos. En ese sentido, pensamos que los problemas 3 y 4, no deberían ser planteados en esta parte, quizás podrían presentarse en otra parte de la sección de proceso, que podría ser llamada "Agrupamientos".

Tabla 9. Problemas de la segunda parte de la sección de proceso

Formas de trabajo	**Descubrimos la división exacta**
Grupos	Presenta 1 problema de situación real con una interrogante, lo que mostramos en la siguiente figura:  **Figura 17.** Problema de "Descubrimos la división exacta" Fuente: Matemática 3 (2012, p. 114) Inmediatamente después, se presentan los ítems a), b) y c) que detallamos a continuación:

El ítem a) muestra indicaciones para la entrega del material concreto a los estudiantes: 12 fotos y 3 hojas por grupo. Mientras que el ítem b) presenta indicaciones para que la situación sea trabajada como reparticiones de una a una de las 12 fotos entre las 3 hojas. Además en el ítem b) se muestra un comentario anticipado a la respuesta que deberían presentar los alumnos, en términos de multiplicación (En cada hoja pondrán 4 fotos. 12 = 4 × 3).

Notemos que el ítem b) es el complemento del ítem a) así es que, sugerimos que los ítems a) y b) se muestren como un solo ítem, en este caso pasaría a ser el ítem a).

Además creemos que dicha situación (Fig. 16) tiene como propósito descubrir la división, ya que está propuesta en la parte de la sección que es llamada "Descubrimos la división exacta". Sin embargo, observamos que en ninguno de estos dos ítems se evidencia que se busca descubrir la división exacta o repartición exacta. En todo caso, sugerimos que después de finalizar estos ítems se podría mencionar lo siguiente: *"Repartir 12 figuritas entre 3 hojas es una repartición exacta, porque no sobra figurita alguna después de la repartición"*. Para más tarde, reemplazar el término repartición exacta por división exacta.

Por otro lado, el ítem c) presenta una situación real que trata sobre la repartición de 24 figuritas entre 2 hermanos. Dicha situación se muestra resuelta por medio de dos métodos. Esto es mostrado a continuación.

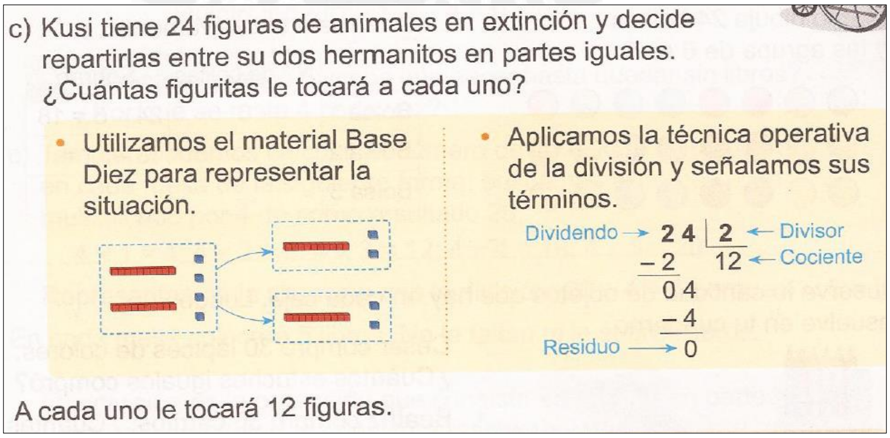
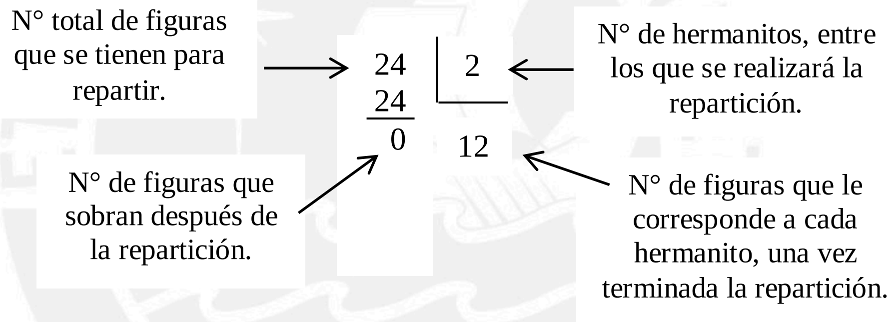


Figura 18. Introducción del algoritmo de la división.
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 114)

Desde nuestro punto de vista, el ítem c) debería plantearse como un segundo problema, ya que no guarda relación directa a lo propuesto inicialmente. Además creemos que al iniciar el uso de la notación del algoritmo de la división, los estudiantes deberían tener claro cómo se “lee” esta información, o equivalentemente su interpretación; caso contrario, el estudiante no entenderá que los elementos de la división (dividendo, divisor, cociente y residuo) se relacionan directamente con los datos de la situación, y qué es lo que se obtiene. Asimismo consideramos que en la presentación de la notación del algoritmo de la división, no deberían mostrarse los pasos intermedios (pasos realizados entre el dividendo y el residuo, véase en la fig. 18) ya que, estos no son explicados en esta parte si no en la siguiente sección “Calculamos cocientes”. En ese sentido, sugerimos que el algoritmo de la división sea presentado, al menos, en su introducción de la siguiente manera:



Por otro lado, proponemos que el problema resuelto del ítem c) de la parte “Repartimos en partes iguales” (véase en la fig. 13) sea incluido en esta sección, exactamente, después de la presentación del algoritmo de la división dado que, en dicho problema se emplea la notación de la división. Sugerimos que el problema sea planteado de la siguiente manera:

La profesora tiene 4 mesas y 20 libros, que quiere que sea distribuido en estas 4 mesas de tal manera que cada mesa tenga una misma cantidad de libros. Ayuda a la profesora a que se haga esta distribución. ¿Cuántos cuentos colocará en cada mesa? ¿Le sobrarán o le faltarán cuentos?

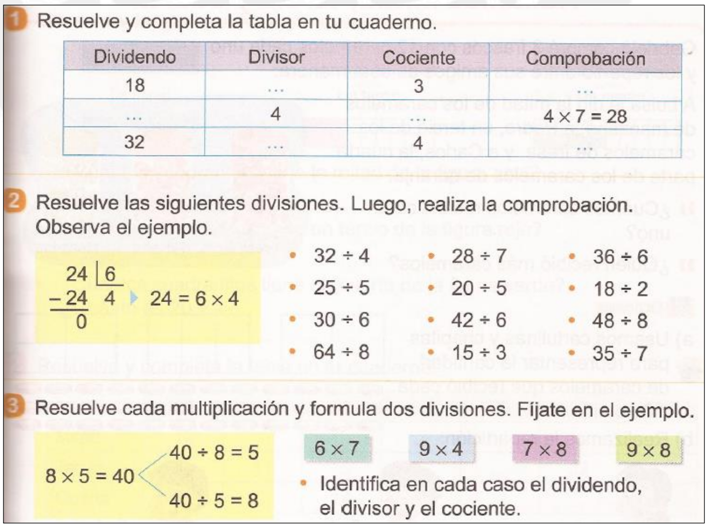
Podemos calcular el número de libros que se colocarán en cada mesa de la siguiente forma: buscamos el número que multiplicado por 4 dé como resultado 20.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
N° total de mesas
N° total de cuentos
$4 \times 1 = 4, \;\; 4 \times 2 = 8, \;\; 4 \times 3 = 12, \;\; 4 \times 4 = 16, \;\; 4 \times 5 = 20$
N° de cuentos que se colocará en cada mesa

En cada mesa colocará 5 libros. No le faltan ni le sobran libros. Representamos la situación con la división:

$20 \div 4 = 5 \quad porque \quad 4 \times 5 = 20$

<u>Dividendo</u>: representa el número total de cuentos que serán repartidos
$\begin{array}{r|l} 20 & 4 \\ \underline{20} & 5 \\ 0 & \end{array}$
<u>Divisor</u>: representa el número de mesas.
<u>Residuo</u>: representa el número de cuentos que sobran después de la repartición.
<u>Cociente</u>: representa el número de cuentos que se colocará en cada mesa.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Solo o sola</td>
<td>
Presenta 3 problemas, los que mostramos a continuación:


1 Resuelve y completa la tabla en tu cuaderno.
<table>
<tr><th>Dividendo</th><th>Divisor</th><th>Cociente</th><th>Comprobación</th></tr>
<tr><td>18</td><td>…</td><td>3</td><td>…</td></tr>
<tr><td>…</td><td>4</td><td>…</td><td>4 × 7 = 28</td></tr>
<tr><td>32</td><td>…</td><td>4</td><td>…</td></tr>
</table>
2 Resuelve las siguientes divisiones. Luego, realiza la comprobación. Observa el ejemplo.
$\begin{array}{r|l} 24 & 6 \\ -24 & 4 \\ 0 & \end{array}$ 24 = 6 × 4
• 32 ÷ 4 • 28 ÷ 7 • 36 ÷ 6
• 25 ÷ 5 • 20 ÷ 5 • 18 ÷ 2
• 30 ÷ 6 • 42 ÷ 6 • 48 ÷ 8
• 64 ÷ 8 • 15 ÷ 3 • 35 ÷ 7
3 Resuelve cada multiplicación y formula dos divisiones. Fíjate en el ejemplo.
8 × 5 = 40 → 40 ÷ 8 = 5; 40 ÷ 5 = 8
6 × 7   9 × 4   7 × 8   9 × 8
• Identifica en cada caso el dividendo, el divisor y el cociente.
Figura 19. Problema 1,2 y 3 de "Descubrimos la división exacta".
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 115)

Creemos que el problema 1 podría estar ubicado como último problema de este grupo; es decir que pase a ser el problema 3, ya que consideramos que
</td>
</tr>
</table>

	es de mayor dificultad respecto a los otros dos problemas. Creemos que el problema 1 es pertinente cuando el alumno ya se ha familiarizado con los elementos de esta operación. En este caso los problemas 2 y 3 ayudarían a este fin. Asimismo, sugerimos que los problemas de este grupo sean presentados en el siguiente orden: problema 3, problema 2 y problema 1. Pensamos que, presentar inicialmente el problema 3 el alumno tendría la oportunidad de relacionar la división con la multiplicación e identificar los elementos de la división. Mientras que el problema 2 como segundo problema permitiría que el alumno se ejercite en el algoritmo y en la comprobación de la división así como también, que identifique en sus procedimientos los elementos de la división. Como último problema del grupo sugerimos al problema 1 ya que, ahí el alumno mostraría si logra relacionar la notación o el algoritmo de la división con sus elementos esto se refleja cuando se pide que completen los elementos de la división y, también en este problema mostraría si logra relacionar la división con la multiplicación esto se refleja cuando se solicitan la comprobación de la operación, notemos que son aspectos tratados en los problemas 3 y 2. En cuanto al problema 2, creemos que el ejemplo modelo que los estudiantes deben seguir para el desarrollo de este problema no es preciso (cuadro de color amarillo), ya que no se identifica con claridad qué parte de todo el procedimiento que se muestra viene a ser la comprobación de la división. Pensamos que es importante que el alumno identifique cuándo está resolviendo una división y cuándo está haciendo su comprobación. En el problema 3, consideramos que concretamente el ejemplo modelo que se muestra en el cuadro de color amarillo está incompleto, según los requerimientos del problema. Esto, ya que en el ejemplo no se identifican los 3 elementos de la división. Más aún, sugerimos que se replantee la forma de presentar este problema. A continuación mostramos el replanteamiento del problema en el que incluimos además ambas notaciones de la división. *Resuelve cada multiplicación y formula dos divisiones. Fíjate en el ejemplo. Identifica en cada caso el dividendo, divisor, cociente y el residuo.*

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
$40 \div 8 = 5$
$8 \times 5 = 40$
Dividendo → 40 | 8 ← Divisor
40
Residuo → 0   5 ← Cociente
$40 \div 5 = 8$
Dividendo → 40 | 5 ← Divisor
40
Residuo → 0   8 ← Cociente

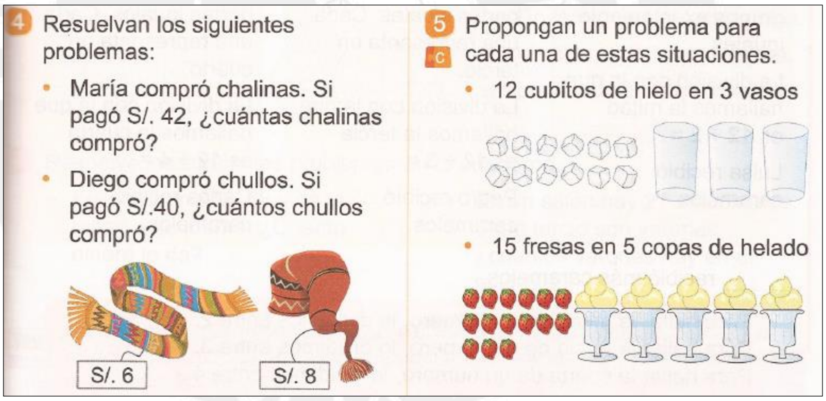
Ahora tú debes hacer lo mismo con los siguientes casos.
6×7 9×4 7×8 9×8
</td>
</tr>
<tr>
<td>En parejas</td>
<td>
Presenta 2 problemas, que mostramos a continuación.


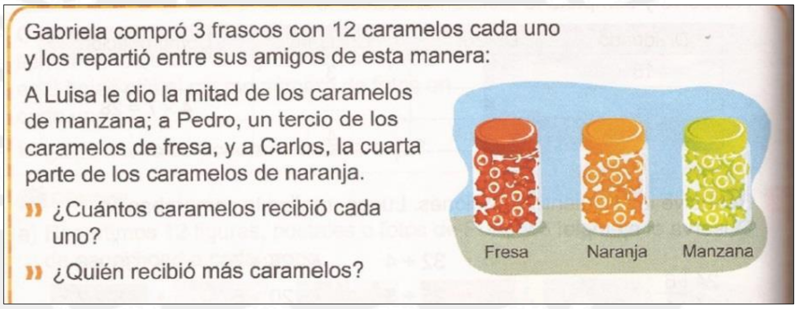
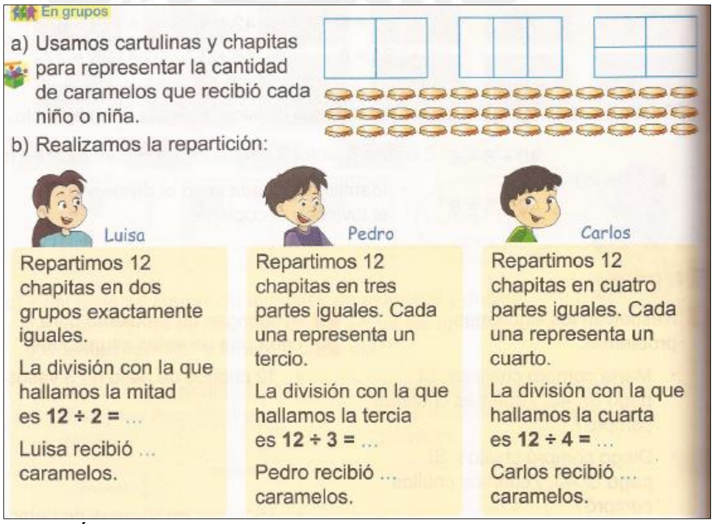
Figura 20. Problema 4 y 5 de “Descubrimos la división exacta”.
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 115)

Creemos que las situaciones tal y como están planteadas en el texto del problema 4 podrían ser ambiguas. Por ejemplo, en la primera situación **no** necesariamente deberíamos asumir que: María compró chalinas que cuestan S/. 6 cada una, o que María compró solo chalinas de un mismo precio. En ese sentido, pensamos que estas dos situaciones deberían asociarse con su respectiva imagen y que las situaciones podrían ser replanteadas de la siguiente manera:

- *Si María **solo compra chalinas como la mostrada en la figura**, ¿cuántas*
</td>
</tr>
</table>

	chalinas iguales compró María si en total pagó S/. 42? *- Si Diego* ***solo compra chullos como el mostrado en la figura****, ¿cuántos chullos iguales compró Diego si en total pagó S/. 40?* Notemos que las situaciones replanteadas admiten solo una única respuesta. Por otra parte, desde nuestro punto de vista el problema 5 es interesante ya que el alumno al proponer o crear un problema posibilita el desarrollo de su capacidad creativa.

Tabla 10. Problemas de la tercera parte de la sección de proceso

Formas de trabajo	**Hallamos mitad, tercia y cuarta**
Grupos	Presentan una situación real con dos interrogantes. Vea la siguiente figura:  **Figura 21.** Problema de Hallamos mitad, tercia y cuarta. Fuente: Matemática 3 (2012, p. 116) Posteriormente a esto, el texto muestra dos ítems:  **Figura 22.** Ítems a) y b) del problema de "Hallamos mitad, tercia y cuarta". Fuente: Matemática 3 (2012, p. 116)

	El ítem a) presenta indicaciones respecto al empleo de material concreto. Observemos que no se precisa exactamente cómo se empleará este material y esto puede crear confusión en el desarrollo de la experimentación, y así conllevar a diferentes respuestas. Esto ya que, por ejemplo, un alumno podría pensar que las 36 chapitas que le entregan debería repartirlas de manera igual entre cada uno de los espacios de las 3 cartulinas (9 espacios en total), obteniendo 4 chapitas en cada espacio, lo que no guarda relación con lo solicitado en la situación. A cambio, se debería plantear que la primera cartulina junto con 12 chapitas servirán para resolver la situación de Luisa; mientras que la segunda cartulina junto con 12 chapitas, servirán para resolver la situación de Pedro; y finalmente la tercera cartulina, con las 12 chapitas sobrantes, servirán para resolver la situación de Carlos. Por otra parte, pensamos que los ítems a) y b) deberían ser mostrados como un solo ítem, ya que el ítem b) es el complemento del ítem a). Destacamos la importancia que se le da al material concreto, en este caso, las cartulinas y las chapitas ya que, pensamos que este permite visualizar y comprender la noción de mitad, tercia y cuarta, inicialmente en términos de repartición. Es más, el alumno podría notar que: la mitad de las 12 chapitas es mayor a la tercera parte de las 12 chapitas, o que la cuarta parte de 12 chapitas es menor que la mitad de ese mismo número de chapitas. Además, notemos que con este problema se está trabajando la noción de fracciones, concretamente, con un medio, un tercio y un cuarto; aunque vemos que de manera explícita pretenden relacionar con la división. Cabe aclarar que por primera se trabaja la noción de fracciones a lo largo del desarrollo de esta unidad.
Solo o Sola	Presentan 4 problemas. En cada uno de ellos se pide que determinen la mitad, tercia y cuarta de distintas cantidades. A continuación, vea el problema 1.

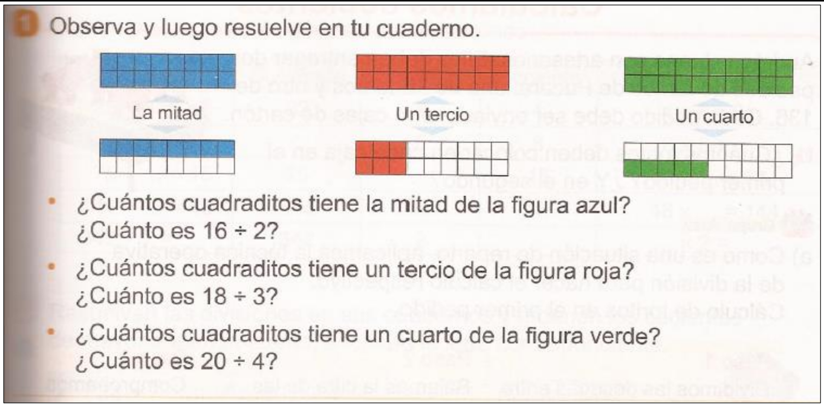


Figura 23. Problema 1 de “Hallamos mitad, tercia y cuarta”.
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 117)

Respecto al problema 1, pensamos que las representaciones que se muestra para la mitad, un tercio y un cuarto en cada uno de los casos falta precisar que dichas representaciones son una forma o manera de que estas nociones sean presentadas ya que, el alumno podría crear la idea de que es la única manera por ejemplo de pintar (colorear) la mitad del total dado de cuadraditos. Además, notemos que en las representaciones se prevalece la noción de la fracción como parte-todo; mientras que la división corresponde a la noción de repartición. Asimismo, consideramos que las dos preguntas que se presentan en cada caso no se relacionan entre sí; creemos que la idea es que el alumno logre relacionar las representaciones con la división. Es por ello que sugerimos que se podría escribir por ejemplo para el primer ítem:

¿Cuántos cuadraditos tiene la mitad de la figura azul? _______________

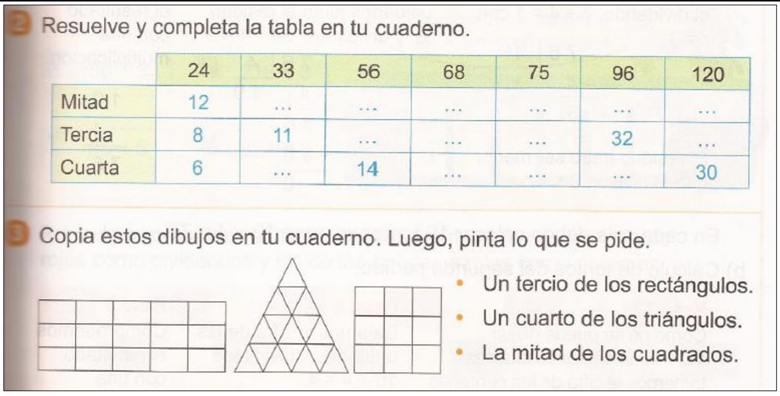
Esto se puede hallar también mediante la siguiente operación:

16 ÷ 2, que es igual a: ____

Porque de un total de 16 cuadraditos yo quiero solo la mitad, que son ___ *cuadraditos.*

Análogamente, se puede escribir para los otros dos casos.

A continuación, mostramos el problema 2.



2 Resuelve y completa la tabla en tu cuaderno.

	24	33	56	68	75	96	120
Mitad	12	…	…	…	…	…	…
Tercia	8	11	…	…	…	32	…
Cuarta	6	…	14	…	…	…	30

3 Copia estos dibujos en tu cuaderno. Luego, pinta lo que se pide.

- Un tercio de los rectángulos.
- Un cuarto de los triángulos.
- La mitad de los cuadrados.

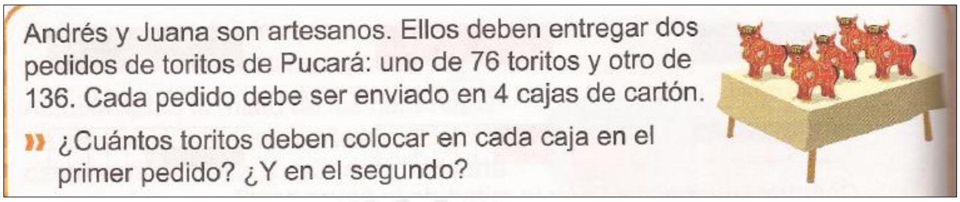
Figura 24. Problemas 2 y 3 de “Hallamos mitad, tercia y cuarta”.
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 117)

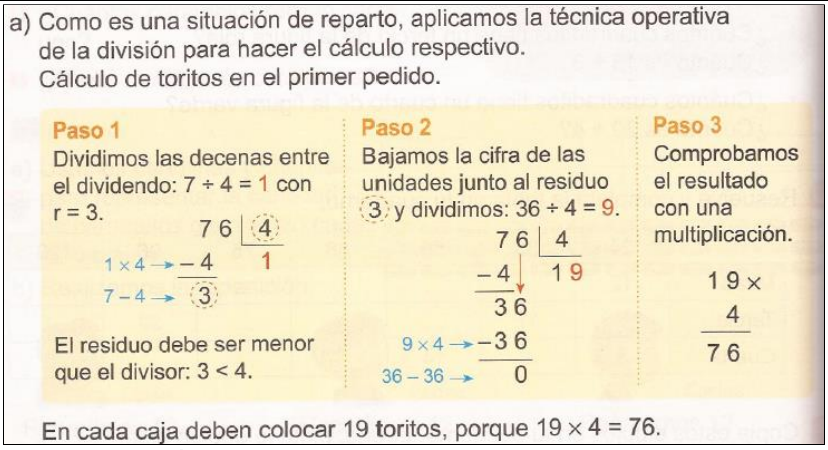
Observamos que el problema 2 podría crear confusión en los alumnos ya que algunos ejemplos de números no tienen mitad, tercia o cuarta exacta. Por ejemplo, en la columna que se da el número 33 no podría completarse la mitad y tampoco la cuarta. En ese sentido, pensamos que se debería tener mayor cuidado con los ejemplos de números que se presentan en la tabla, ya que los alumnos podrían presentar respuestas incorrectas como la mitad de 33 es 17 ó 16; aunque en el mejor de los casos podrían decir que es 16 y medio, pero creemos que no será tan fácil si se pide la cuarta de 33. Notemos además que en el texto, hasta el planteamiento de este problema, no se ha trabajado previamente con casos de divisiones inexactas. De aquí que el alumno puede presentar dificultades justificadas en el desarrollo de este problema, más aun tomando en cuenta que se sugiere que sea trabajado de manera individual.

En cuanto al problema 3, notemos que de manera directa no se relaciona a la división, puesto que este problema tiene como importancia el trabajo de la noción de la fracción como parte-todo. Además, observemos que en su indicación pide que los alumnos pinten, por ejemplo, “un tercio de los rectángulos”. Pero observemos que esto podría ser interpretado como que los estudiantes deben pintar la tercera parte de cada rectángulo, pensamos que no es la idea que se piensa transmitir. En todo caso la indicación podría ser como sigue: *“Pinta la cantidad de rectangulitos que representen la tercera parte del número total de rectangulitos presentes en la figura”, o también “Pinta un tercio del número total de rectangulitos”*.

De manera similar deberían ser replanteados los otros dos ítems.

Tabla 11. Problemas de la cuarta parte de la sección de proceso

Formas de trabajo	**Calculamos cocientes**
Grupo clase	Presenta 1 situación real con dos interrogantes, que mostramos a continuación:  **Figura 25.** Problema de la parte "Calculamos cocientes" Fuente: Matemática 3 (2012, p.118) Notemos que las respuestas de esta situación podrían ser ambiguas ya que no mencionan que en cada una de las cajas debe haber igual número de toritos. Por ello sugerimos que se agregue esta condición con el propósito de tener una única respuesta. Posteriormente a la situación, se presentan los ítems a) y b) en los que se muestra la resolución de la primera y segunda interrogante de la situación, respectivamente. Notemos que en los dos ítems (en a y b) emplean el algoritmo de la división para responder las interrogantes planteadas en la situación. Además dan una explicación detallada paso a paso de la parte operativa del algoritmo de la división; **sin embargo no relaciona este procedimiento con lo trabajado en términos de repartición**. En este sentido hay un punto de quiebre entre lo que se ha venido trabajando en el texto, con el algoritmo que se propone para la división de números naturales. A continuación, presentamos el ítem a).



a) Como es una situación de reparto, aplicamos la técnica operativa de la división para hacer el cálculo respectivo.
Cálculo de toritos en el primer pedido.

Paso 1
Dividimos las decenas entre el dividendo: 7 ÷ 4 = 1 con r = 3.

$$\begin{array}{r|l} 76 & 4 \\ -4 & 1 \\ 3 & \end{array}$$

1 × 4 → −4
7 − 4 → 3

El residuo debe ser menor que el divisor: 3 < 4.

Paso 2
Bajamos la cifra de las unidades junto al residuo 3 y dividimos: 36 ÷ 4 = 9.

$$\begin{array}{r|l} 76 & 4 \\ -4\downarrow & 19 \\ 36 & \\ -36 & \\ 0 & \end{array}$$

9 × 4 → −36
36 − 36 → 0

Paso 3
Comprobamos el resultado con una multiplicación.

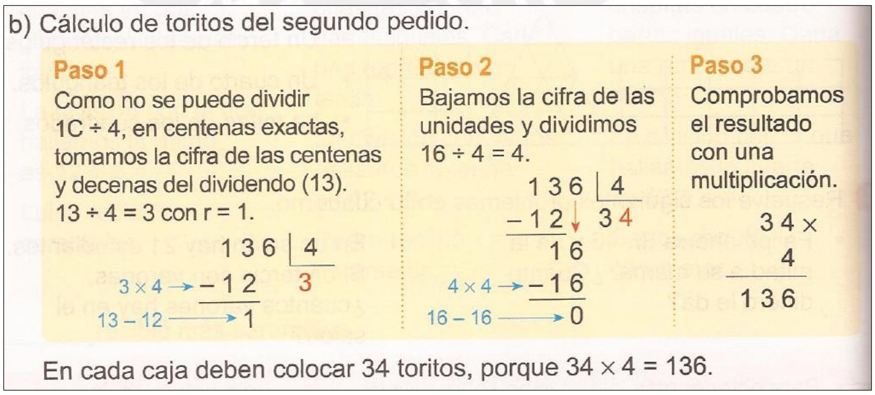
$$\begin{array}{r} 19\times \\ 4 \\ \hline 76 \end{array}$$

En cada caja deben colocar 19 toritos, porque 19 × 4 = 76.

Figura 26. Ítem a) del problema de la parte "Calculamos cocientes"
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 118)

Observemos que en el paso 1 se presenta esta división 7÷4= 1 la cual consideramos no adecuada ya que, la notación ($a \div b = c$) solo debe ser utilizado para las divisiones de tipo exacta. Asimismo notemos que se muestra r = 3, pero no dan a conocer que representa el símbolo "r" en toda la unidad. Además, indican que el residuo debe ser menor que el divisor, pero no explica por qué debe ser así. Desde nuestra perspectiva, la explicación de dicha relación estaría dada en función de la noción de repartición máxima (repartición de la mayor cantidad posible de objetos). En todo caso, se podría plantear algunos problemas previos con el fin de que sean los mismos estudiantes los que descubran este resultado, como hacemos en nuestra propuesta (ver Capítulo 4).

A continuación, mostramos el desarrollo del ítem b).



b) Cálculo de toritos del segundo pedido.

Paso 1
Como no se puede dividir 1C ÷ 4, en centenas exactas, tomamos la cifra de las centenas y decenas del dividendo (13).
13 ÷ 4 = 3 con r = 1.

$$\begin{array}{r|l} 136 & 4 \\ -12 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

3 × 4 → −12
13 − 12 → 1

Paso 2
Bajamos la cifra de las unidades y dividimos 16 ÷ 4 = 4.

$$\begin{array}{r|l} 136 & 4 \\ -12\downarrow & 34 \\ 16 & \\ -16 & \\ 0 & \end{array}$$

4 × 4 → −16
16 − 16 → 0

Paso 3
Comprobamos el resultado con una multiplicación.

$$\begin{array}{r} 34\times \\ 4 \\ \hline 136 \end{array}$$

En cada caja deben colocar 34 toritos, porque 34 × 4 = 136.

Figura 27. Ítem b) del problema de la parte "Calculamos cocientes"
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 118)

Vemos que la expresión "no se puede dividir 1C÷4, *en centenas exactas*", del paso 1, es correcta; sin embargo, en el primer ejemplo (ítem a) no sea

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
trabajado de la misma manera en el sentido que no se interpretó la división de $7 \div 4$ como la división de 7 decenas entre 4, en decenas exactas.
De aquí que nos planteemos las siguientes preguntas al respecto: ¿qué importancia tiene que al dividir 1 centena entre 4, tengamos que obtener un número exacto de centenas? ¿Por qué no puedo dividir 1 centena entre 4 y decir que son 25 unidades? ¿Qué representa el número 13 que se procede a dividir entre 4? Siguiendo este mismo razonamiento vemos que serían 13 decenas, y en todo caso, ¿por qué no se menciona esto? ¿Por qué no se preguntó cuántas decenas exactas se obtienen al dividir 13 decenas entre 4?
Además, notemos que en el paso 1 una vez más presentan una división la cual consideramos no adecuada nos referimos a la división $13 \div 4 = 3$; sabemos que esta división es de tipo inexacta, la cual no puede ser denotada por la notación $a \div b = c$ dado que esta notación solo se emplea para las divisiones de tipo exacta.
</td>
</tr>
<tr>
<td>En parejas</td>
<td>
Presenta 4 problemas:
Problema 1 y 2: uso de la notación de la división.
Problema 3: proponer ejemplos de divisiones exactas
Problema 4: situaciones de división exacta.
Pensamos que los problemas 1 y 2 podrían ser resueltos por los alumnos sin dificultad ya que anteriormente se han planteado problemas en el que se emplea la notación de la división. A continuación mostramos el problema 3 y 4 de esta parte.

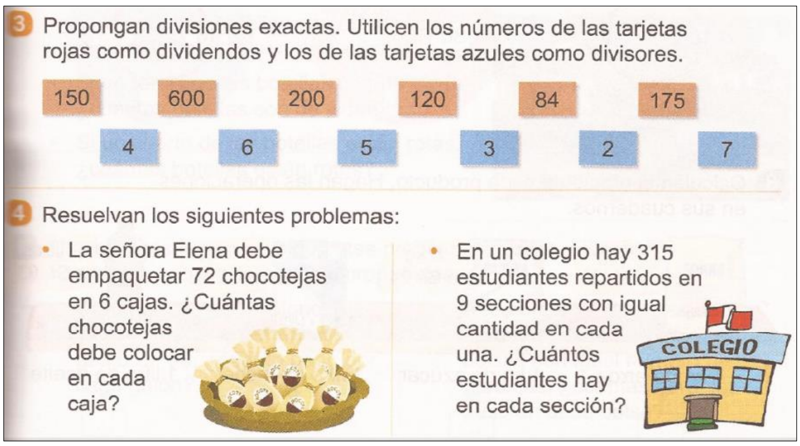


Figura 28. Problemas 3 y 4 de la parte “Calculamos cocientes”
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 119)
</td>
</tr>
</table>

	Respecto al problema 3, proponemos que como parte de su indicación también se solicite al alumno que muestre una explicación de por qué los ejemplos que han propuesto son divisiones exactas. Pensamos que esa indicación permite que el alumno argumente en función de la definición que le han presentado para la división exacta. Por otro lado, consideramos que la primera situación del problema 4 es ambigua, puesto que falta precisar que en cada una de las 6 cajas se debe colocar un mismo número de chocotejas. Es por ello que sugerimos que la situación sea replanteada de la siguiente manera: *“La señora Elena debe empaquetar 72 chocotejas en 6 cajas. En cada caja debe colocar una misma cantidad de chocotejas. ¿Cuántas chocotejas debe colocar en cada caja?”.*

Formas de trabajo	**Practico**
En parejas	Presenta 8 problemas: Problema 1: sobre reparticiones. Problema 2 y 4: la división como operación inversa de la multiplicación. Problema 3, 5 y 6: uso de la notación o el algoritmo de la división. Problema 7: sobre mitad, tercia y cuarta. Problema 8: situaciones de división exacta. Pensamos que los problemas 1, 4, 6 y 8 no presentarían dificultad en los alumnos ya que estos problemas son semejantes a los problemas que se han planteado en secciones previas. Por otro lado, mostraremos algunos comentarios para los problemas 2, 3 y 5. A continuación se muestra los problemas 2 y 3.

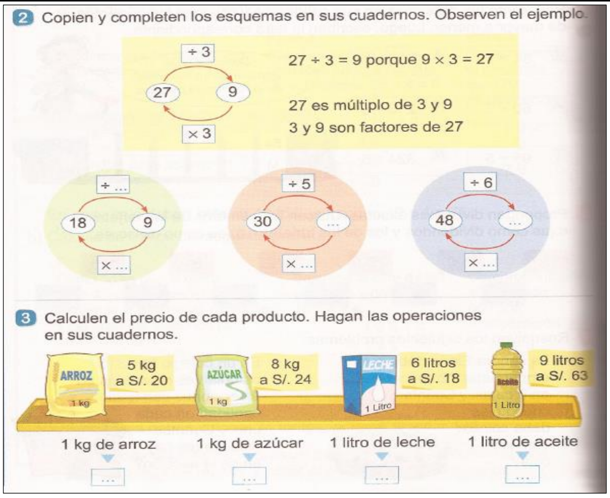


Figura 29. Problemas 2 y 3 de la parte “Practico”
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 120)

Notemos que en el problema 2 se emplea el término “múltiplo” por primera y única vez, a largo de toda la unidad, sin ser definido antes. Creemos que para el aprendizaje de la noción “múltiplo” no basta solo con emplear dicho término, es necesario que se den las condiciones suficientes y necesarias para hablar de este nuevo término. Además, pensamos que la introducción de este término no es pertinente en la parte “Practica” ya que, de manera implícita se entiende que en dicha parte los alumnos refuerzan, practican lo que han trabajado anteriormente.

En cuanto al problema 3 pensamos que las respuestas son ambiguas ya que faltaría la condición que permite tener una única respuesta. Por ejemplo, sugerimos que en el primer caso se considere lo siguiente: “*5 Kg de arroz a S/. 20. El precio de cada uno de estos 5Kg de arroz* ***es el mismo.*** *Entonces, el precio de 1 Kg de arroz es……”.* Análogamente se podrían replantear los otros casos con la finalidad de tener una única interpretación y respuesta.

A continuación mostramos el problema 5.

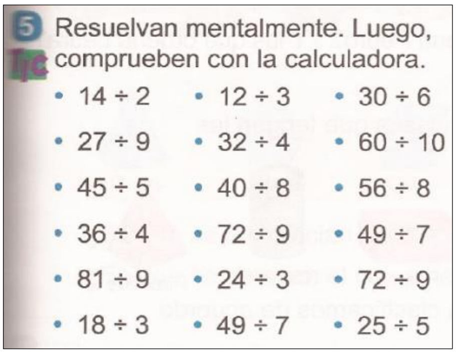
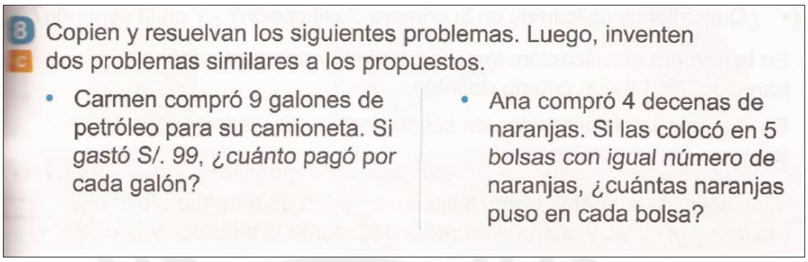


Figura 30. Problema 5 de la parte “Practico”
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 121)

Notemos que en el problema 5 hacen referencia al uso de un recurso tecnológico, en este caso la calculadora. Destacamos la importancia que se les da a los recursos tecnológicos; ya que los alumnos tienen la oportunidad de interactuar y conocer que hay herramientas que nos puede facilitar ciertos cálculos.

A continuación mostramos el problema 8:



B C Copien y resuelvan los siguientes problemas. Luego, inventen dos problemas similares a los propuestos.

- Carmen compró 9 galones de petróleo para su camioneta. Si gastó S/. 99, ¿cuánto pagó por cada galón?
- Ana compró 4 decenas de naranjas. Si las colocó en 5 bolsas con igual número de naranjas, ¿cuántas naranjas puso en cada bolsa?

Figura 31. Problema 8 de la parte "Practico"
Fuente: Matemática 3 (2012, p. 121)

Consideramos que el problema que se tiene como personaje a Carmen es ambiguo ya que, no muestra como condición que los 9 galones de petróleo son de un mismo precio; sugerimos que se agregue esta condición para que dicho problema presente una única respuesta.

b.4) <u>Sección de Cierre</u>

En esta sección se muestra un juego llamado "Rompecabezas". En donde se presentan divisiones de tipo exacta para que sean trabajadas individualmente. Consideramos que, en base a lo que los estudiantes han venido trabajando, las divisiones serán fácilmente resueltas por ellos dado que adicionalmente los dividendos son solo números de dos cifras, mientras que los divisores son números de una cifra.

b.5) <u>Sección de Evaluación</u>

Presenta 8 problemas:

Problema 1: sobre la notación de la división.

Problema 2: proponer situaciones

Problema 3: situación en la que se emplea la división.

Problema 4: división como operación inversa a la multiplicación.

Problema 5: una situación de división inexacta.

Problema 6: sobre reparto y agrupamiento

Problema 7 y 8: problemas relacionados a un tema diferente al de la división.

Consideramos que los problemas 1 y 4 podrían ser resueltos sin dificultad por los alumnos puesto que los problemas son similares a los que han trabajado en la sección de proceso. Por el contrario, pensamos que los problemas 2, 3, 5 y 6 podrían ser interpretados de una manera diferente de lo que se propone en el libro o crear ambigüedad en los alumnos. A continuación mostramos estos problemas.

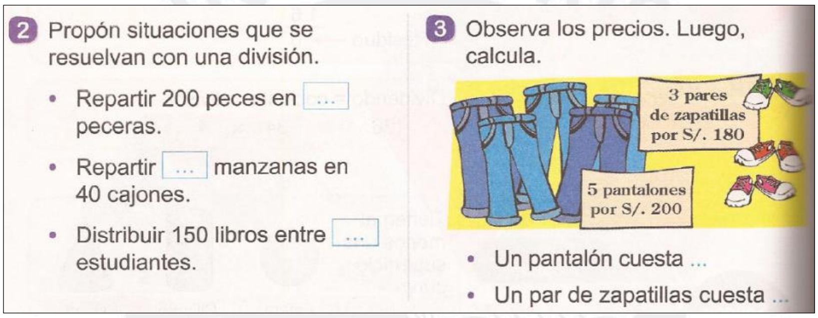


Figura 32. Problemas 2 y 3 de "Compruebo lo que aprendí"
Fuente: Matemática 3 (2012, p 132)

Observemos que en el problema 2 se solicita al alumno que proponga situaciones en base a los contextos y los datos que se presentan. Sin embargo un alumno podría proponer, por ejemplo, la siguiente situación para el primer ítem: "Repartir 200 peces en 3 peceras". Para lo que se podría tener como respuesta: 130 peces en una pecera, 50 en otra, y 20 en una tercera pecera. Para evitar estos casos, sugerimos que faltaría adicionar la condición de **divisiones exactas** en la indicación dada, quedando de la siguiente manera:

Propón situaciones que se resuelvan con divisiones exactas.

Por otro lado, pensamos que si se considera el problema 3 tal y como se presenta en el libro este admitiría más de una respuesta ya que no se está explicitando que cada par de zapatillas tiene un mismo precio. Análogamente sucede con el caso de los pantalones.

En lo que respecta al problema 5:

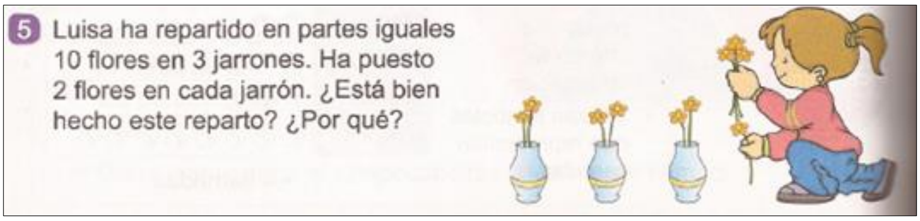


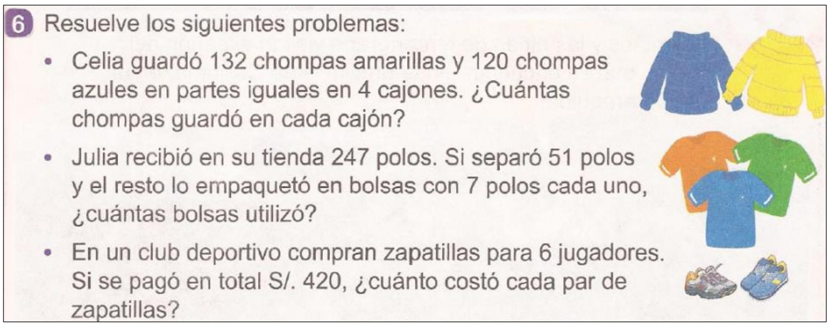
Figura 33. Problema 5 de "Compruebo lo que aprendí"
Fuente: Matemática 3 (2012, p.132)

Vemos que el problema 5 es un ejemplo de división inexacta y este tipo de división no ha sido trabajada previamente. Pensamos que esta situación no debería mostrar cantidades con los que se tendrán divisiones de tipo inexacta, ya que el alumno basado en los tipos de repartos que ha visto hasta el momento en que se le presenta este problema solo ha visto casos en los que después del reparto le quedan 0 objetos. En este sentido algunos alumnos podrían forzar sus respuestas y decir: *que no está bien hecho el reparto porque en un jarrón colocaría tres flores, en un segundo jarrón colocaría tres flores y en el tercer jarrón cuatro flores, para que no le queden flores fuera de los jarrones*.

Obviamente no creemos que esta sea la intención de quien ha planteado el problema; no obstante, la forma en la que ha sido planteado este problema y tomando como referencia todo lo que se ha visto previamente, puede crear confusión. No descartamos que este problema sea considerado para originar la discusión sobre el tratamiento de las divisiones inexactas; sin embargo, al presentarse en la sección de evaluación vemos que esta no es la intención del autor del libro, debido a que al finalizar esta sección empiezan una nueva unidad, la que no aborda el tema de las divisiones inexactas.

Por otro lado, destacamos la forma diferente en que se ha planteado el problema 5. Es decir, no es un problema semejante a los que se han presentado anteriormente en los que por ejemplo se pedían de manera indirecta que empleen el algoritmo de la división. En este caso se pide que analice si cierta situación ha sido resuelta correctamente y que justifique además su respuesta (esto último al preguntarles ¿Por qué?).

En lo que respecta al problema 6:



6 Resuelve los siguientes problemas:

- Celia guardó 132 chompas amarillas y 120 chompas azules en partes iguales en 4 cajones. ¿Cuántas chompas guardó en cada cajón?
- Julia recibió en su tienda 247 polos. Si separó 51 polos y el resto lo empaquetó en bolsas con 7 polos cada uno, ¿cuántas bolsas utilizó?
- En un club deportivo compran zapatillas para 6 jugadores. Si se pagó en total S/. 420, ¿cuánto costó cada par de zapatillas?

Figura 34. Problema 6 de "Compruebo lo que aprendí"
Fuente: Matemática 3 (2012, p 133)

Creemos que el último ítem del problema tal y como está planteado en el libro podría ser ambiguo dado que, faltar precisar que cada par de zapatillas tiene un mismo precio.

En resumen, en lo referido al análisis de los problemas del libro de texto "Matemática 3" del Ministerio de Educación:

- En las tres primeras partes de la sección de proceso, se plantean situaciones que involucran la experimentación con material concreto. Sin embargo, estas experimentaciones no guardan relación directa con lo planteado en tales situaciones, ya que no se experimenta la situación tal y como es planteada en los problemas. Por ejemplo, véase las figuras 21 y 22.
- Notemos que más de uno de los problemas propuestos los hemos considerado como ambiguos, en el sentido que si no se agregaba una condición adicional podría presentar más de una respuesta. Por ejemplo, véase las figuras 16, 20, 28, 31, 32 y 34.
- En la unidad 5 emplean los términos "equitativo" y "múltiplo" una sola vez, que además no llegan a definirse en el desarrollo de toda la unidad (véase las figuras 14 y 19). También, se da el caso en que proponen un problema en el que se usa la expresión "tercera parte" (vea la fig. 10) y sin embargo lo introducen y explican recién en una sección posterior.
- La mitad de los problemas propuestos y resueltos que se han mostrado antes del algoritmo de la división están en relación al contexto de repartos. Sin embargo, el algoritmo de la división no presenta relación alguna con el enfoque presentando inicialmente como son los repartos. Creemos que se debería dar la relación entre el algoritmo de la división y el enfoque de la repartición ya que, el alumno podría

estar propenso a que dé un salto abrupto de lo que ha venido trabajando, las reparticiones, con lo que se introduce como es el algoritmo de la división.

- Finalmente, hemos propuesto que más de un problema sea replanteado, o que el problema pase a otra sección, o que los problemas cambien el orden de su presentación. Todas estas sugerencias son con el propósito de que el alumno no muestre dificultad o se evite que desarrolle ideas erradas cuando trabaje con el libro.

A continuación mostramos a manera de resumen las concepciones que se sugieren que se han trabajadas o que se plantean al trabajar el tema de la división de números naturales en los documentos oficiales del Ministerio de Educación.

Tabla 12. Resumen de los significados de la división.

Significados	**Diseño Curricular Nacional (2009)**	**Mapas de progreso (2013)**	**Rutas del aprendizaje (2013)**	**Libro “Matemática 3” (2012) del Estado**
Repartos en partes iguales	✓	✓	✓	✓
Operación inversa a la multiplicación		✓	✓	✓
Como el cálculo de cuantas veces una cantidad está contenida en otra.				✓
Restas sucesivas	✓			✓
Agrupamiento		✓	✓	✓

Notemos que en el DCN se sugiere la enseñanza de la división de dos maneras: como reparto y como restas sucesivas. Esta primera concepción que muestra el DCN para la división, reparto, es la que también se sugiere en los Mapas de Progreso y en las Rutas de Aprendizaje y como se trabaja en el libro de texto. Mientras que la división como restas sucesivas, como propone el DCN solo es tomada en cuenta en el libro de texto distribuido por el estado peruano. Asimismo, observamos que los Mapas de Progreso coinciden con las Rutas de Aprendizaje ya que proponen que la división sea vista de tres maneras: como reparto, como operación inversa a la multiplicación y como agrupamiento. Creemos que esto es debido a que este último considera los estándares de aprendizaje presentados en su forma extensa en los Mapas de Progreso. También observamos que el libro de texto analizado ha tomado las propuestas hechas por el DCN, los Mapas de Progreso y las Rutas de Aprendizaje, para el tratamiento de la división de números naturales. Además el libro de texto analizado considera un significado adicional de la división, el que no es sugerido por los otros documentos oficiales del Ministerio de Educación.

Por otro lado, hemos observado que en el DCN, los Mapas de Progreso y las Rutas de Aprendizaje hace mención explícita al desarrollo de los procesos justificativos, así como también a lo que nosotros llamamos las fases previas de la demostración. Sin embargo el libro "Matemática 3", en la unidad 5, propone solo un problema (Fig. 33) el cual busca desarrollar la capacidad de justificación.

CAPÍTULO 4

Las sesiones llevadas a cabo con alumnos de tercer grado de primaria y su análisis

En el presente capítulo caracterizamos a los sujetos de la investigación, explicamos el desarrollo de la puesta en práctica y el análisis de las producciones de los estudiantes ante la secuencia de actividades planteada.

4.1 La muestra

La puesta en práctica se llevó a cabo con estudiantes del tercer grado de educación primaria de un colegio estatal de nuestro país, en el año electivo 2013. En esta institución, al área de matemática le corresponde un dictado de un total de 10 horas pedagógicas (cada hora pedagógica consta de 45 minutos). El desarrollo del trabajó tuvo lugar con una sección conformada por 24 estudiantes matriculados (de entre 8 y 9 años). Sin embargo, en nuestras sesiones la asistencia de los estudiantes ha ido variando como observaremos más adelante.

Es importante señalar, además, que cuando empezamos a desarrollar el trabajo con los estudiantes, ellos no tenían conocimiento alguno sobre división o divisibilidad de números naturales. Sin embargo, a la fecha del inicio de nuestras sesiones ellos habían trabajado con la adición, sustracción y multiplicación de números naturales.

4.2 Diseño de las sesiones y actividades puestas en práctica

En cuanto al diseño de las actividades nos hemos basado en las nociones que presenta Vallejo (2012) en su propuesta de la enseñanza de la divisibilidad por medio de justificaciones. Cabe mencionar que no hemos tomado las actividades tal y como se presentan en la propuesta de la investigadora, dado que las investigaciones se sitúan en diferentes niveles (secundaria y primaria respectivamente).

Asimismo, el análisis de los significados de la división que detallamos en el capítulo anterior (ver Capítulo 3) nos muestra un panorama de lo que se podría tomar en cuenta para trabajar el tema de división. Concretamente, hacemos referencia a la noción de repartición que, según nuestro análisis, tiene un rol importante en el desarrollo del tema de división, dado que como hemos observado en las situaciones y problemas que se proponen o sugieren en los diferentes documentos analizados están en función de esta noción. Además, otro aspecto que tomamos en cuenta de los análisis realizados previamente, y particularmente en el libro de Matemática 3 (2012) es el énfasis al trabajo con material concreto.

De aquí que para el diseño de nuestras sesiones hayamos tomado en cuenta los tres puntos de partida detallados anteriormente, así como los diferentes tipos de repartición detallados en el capítulo 2.

Hemos puesto en práctica 14 sesiones. Todas estas sesiones han sido diseñadas con el propósito de construir gradualmente las nociones de división y divisibilidad de números naturales a partir de la noción de repartición equitativa y máxima (nuestro concepto primitivo).

En la *Tabla 13* mostramos las nociones que hemos ido construyendo a lo largo de las 14 sesiones; así como los momentos en los que hemos ido reemplazando una noción por otra durante la puesta en práctica.

Por otro lado, en la Tabla 13 también incluimos los nombres de las actividades que han sido propuestas (las que podían ser situaciones y/o fichas), cada una de las cuales presentan propósitos específicos los que señalamos también en esta tabla. Las sesiones se han desarrollado en base a tres tipos de actividades: *Trabajo de clase* (todos los estudiantes con la guía del profesor), *Trabajo en grupos* (los estudiantes de manera grupal sin la guía del profesor) y *Trabajo individual*. Las situaciones se han desarrollado como Trabajo de clase y algunas situaciones se han realizado como Trabajo en grupos; mientras que las fichas fueron aplicadas como Trabajo individual.

Vale la pena mencionar que inicialmente habíamos diseñado una secuencia de actividades (fichas y situaciones), las que hemos ido modificando a lo largo de la puesta en práctica tomando en cuenta los avances y dificultades presentes de cada sesión. También, las diferentes actividades consideradas en el diseño han sido todas necesarias para nuestro planteamiento de construcción del objeto matemático divisibilidad en niños de esta edad.

Tabla 13. Resumen de diseño de sesiones y actividades

<table>
<tr><th rowspan="2">Sesiones (N° de alumnos asistentes a la sesión)</th><th rowspan="2">Nociones trabajadas</th><th colspan="2">Actividades propuestas</th></tr>
<tr><th>Nombre de las actividades</th><th>Propósitos de la(s) actividad(es)</th></tr>
<tr><td>1°
(20 alumnos)</td><td>Repartición libre
Repartición equitativa
Repartición máxima</td><td>Situación 1:
“El álbum de frutas”</td><td>Trabajo de clase
Caso: división con divisor fijo 2.
- Determinar la noción intuitiva de repartición que tienen los estudiantes.
- Introducir las nociones de repartición libre, repartición equitativa, repartición máxima, y repartición equitativa y máxima.
-</td></tr>
<tr><td>2°
(24 alumnos)</td><td rowspan="2">Repartición equitativa y máxima</td><td>Situación 2:
“La promesa de las canicas”</td><td>Trabajo de clase
Caso: división con divisor fijo 3.
- Afianzar la noción de repartición equitativa y máxima.
- Determinar si los estudiantes son capaces de identificar los posibles valores del residuo en este caso particular de división de números naturales.
- Dar (oralmente) ejemplos de reparticiones equitativas y máximas entre 3 personas, con residuo igual a 0.
Trabajo en grupos
Caso: división con divisor fijo 3.
- Por escrito, crear ejemplos de reparticiones equitativas y máximas entre 3 personas, con residuo igual a 1.</td></tr>
<tr><td>3°
(23 alumnos)</td><td>Ficha 1:
“La promesa de las canicas”</td><td>Trabajo individual
Caso: división con divisor fijo 3.
- Medir cuantitativamente el avance de los alumnos en la comprensión de lo que es una repartición equitativa y máxima.
- Determinar si los estudiantes son capaces de conjeturar que existen infinitos números naturales que son divisibles entre 3, así como que hay infinitos números que no son divisibles entre 3.
- Determinar si los estudiantes son capaces de justificar por qué ni 3, ni 4, pueden ser valores del residuo cuando se tiene como divisor a 3.</td></tr>
</table>

4° (21 alumnos)		Ficha 2: *"Repartición es equitativas y máximas"*	**Trabajo individual** *Caso:* división con divisor fijo 3 - Determinar si los estudiantes son capaces de hacer correctamente la repartición equitativa y máxima a partir de la identificación de valores adecuados para el dividendo, el cociente y el residuo. - Determinar si los estudiantes son capaces de identificar las razones por las que 3 no puede ser un valor del residuo en una división con divisor igual a 3.
			Trabajo de clase *Caso:* división con divisor fijo 3 - Identificar, como clase, todos los posibles valores del residuo en una división con divisor 3. *Caso:* división con divisor fijo 4 y división con divisor fijo 5 - Identificar los posibles valores del residuo en cada caso.
5° (23 alumnos)			**Trabajo de clase** *Casos:* divisiones en las que el valor del divisor va variando. - Determinar si los estudiantes son capaces de identificar los posibles valores del residuo, en divisiones en las que solo se conoce el valor del divisor. -
	Repartición exacta y Repartición no exacta	Situación 3: *"Goles con premio"*	**Trabajo de clase** *Caso:* división, con dividendo fijo 24. - Introducir las nociones "Repartición exacta" y "Repartición No exacta", en función de las nociones que los alumnos ya conocen (Repartición equitativa y máxima). - Determinar los divisores de 24, en función de la noción recién introducida: repartición exacta.
6° (23 alumnos)			**Trabajo de clase** *Casos:* divisiones exactas y divisiones inexactas. - Reforzar las nociones de repartición exacta y repartición no exacta.

	Repartición exacta y Repartición inexacta	Situación 4: *"La radio"*	**Trabajo de clase** *Casos:* división con dividendo fijo 6 - Analizar dos casos especiales de la división: cuando el dividendo y el divisor son iguales, y cuando el divisor es igual a 1. *Casos:* división con dividendo fijo 12 - Determinar los divisores de 12. - Dar ejemplos de números que no son divisores de 12. *Casos:* división con dividendo fijo 40 - Determinar los divisores de 40.
7° (24 alumnos)		Ficha 3: *"Repartiendo entradas en forma equitativa y máxima"*	**Trabajo individual** - Identificar el tipo de repartición (exacta o inexacta) en cada caso. - Justificar por qué, en los ejemplos en los que se plantea esta pregunta, las reparticiones son del tipo elegido. - Identificar cuáles son los procedimientos llevados a cabo por los estudiantes para hacer sus reparticiones (divisiones).
		Ficha 4: *"¡A repartir se ha dicho!"*	**Trabajo individual** - Determinar los divisores de 9. - Determinar los divisores de 14. - Determinar los divisores de 35. - Dar un ejemplo de un número que no sea divisor de 48. - Dar libremente 2 ejemplos de divisiones exactas y 2 ejemplos de divisiones inexactas.
8° (24 alumnos)		Ficha 5: *"Repartiendo panes"*	**Trabajo individual** - Determinar los divisores de 7 - Determinar los divisores de 6 - Dar el ejemplo de un número que no sea divisor de 9 - Determinar los divisores de 10 - Determinar los divisores de 20
9° (24 alumnos)		Situación 5: *"En el supermercado"*	**Trabajo de clase** - Determinar qué números son divisibles entre 2 (múltiplos de 2) y qué números no son divisibles entre 2 (no son múltiplos de 2).

		Ficha 6: *“Comprando en el supermercado”*	**Trabajo individual** - Determinar si los estudiantes toman en cuenta las condiciones de la situación 5. - Determinar si 23 es múltiplo de 2 (o equivalentemente: determinar si 23 es divisible entre 2). - Dar 2 ejemplos que son múltiplos de 2. - Conjeturar que existen infinitos múltiplos de 2. - Dar 2 ejemplos de números que no son múltiplos de 2. - Conjeturar que existen infinitos números que no son múltiplos de 2.
10° (22 alumnos)			**Trabajo de clase** - Determinar qué números son divisibles entre 3 (múltiplos de 3) y qué números no son divisibles entre 3 (no son múltiplos de 3). - Dar ejemplos de números divisibles y números no divisibles entre 3.
	División exacta y División inexacta		**Trabajo de clase** - Introducir las expresiones: “División”, “División Exacta”, “División Inexacta” - Introducir la notación de la división de números naturales. **Trabajo individual** - Dar ejemplos de divisiones empleando la nueva notación.
11° (24 alumnos)		Ficha 7: *“División exacta e inexacta”*	**Trabajo individual** - Determinar el valor del cociente y del residuo empleando la notación de la división. - Identificar el tipo de división (exacta o inexacta).
	Divisibilidad		**Trabajo de clase** - Introducir la noción de la divisibilidad a partir de la noción de la división exacta y usando ejemplos concretos. - Dar ejemplos de divisibilidad.
12° (23 alumnos)		Ficha 8: *“Divisibilidad”*	**Trabajo individual** - Orientar al estudiante en el proceso de justificación en el tema divisibilidad.

			- Determinar si los estudiantes son capaces de justificar sí es divisible o no es divisible en ciertos casos concretos. **Trabajo de clase** - Trabajar tres casos concretos de divisibilidad - Determinar si los estudiantes son capaces de conjeturar propiedades de la noción de divisibilidad.
13° (24 alumnos)			**Trabajo de clase** - Afianzar la idea de divisibilidad con diferentes casos concretos, así como también que logren notar ciertas propiedades de esta noción.
14° (22 alumnos)		Ficha 9: *¿Es divisible?*	**Trabajo individual** - Determinar el valor del cociente y del residuo empleando la notación de la división e identificar el tipo de división (exacta o inexacta) en cuatro casos concretos.
		Ficha10: *"Criterio de divisibilidad por 5"*	- Dar ejemplos de cantidades divisibles entre 5. - Determinar si los estudiantes son capaces de conjeturar que existen infinitos números que son divisibles entre 5. - Reconocer el criterio de divisibilidad por 5.
		Tres preguntas en relación a propiedades de Divisibilidad	- Justificar 3 propiedades de la divisibilidad.

Por otro lado, cabe señalar que la recolección de información se hizo a través de: grabaciones (en video) para cada una de las catorce sesiones. Estas grabaciones han sido transcritas para su análisis. Presentaremos dos tipos de análisis:

- Análisis de los trabajos grupales: análisis cualitativo de las transcripciones.
- Análisis de los trabajos individuales: análisis cuantitativo de las respuestas (escritas) de los alumnos a planteamientos presentados por escrito.

4.3 Análisis de las sesiones

4.3.1 Análisis de la sesión 1

- **Actividades trabajadas:** en esta primera sesión hemos desarrollado la situación: ***"El álbum de frutas"***
- **Tipo de actividad:** Trabajo de clase
- **Propósitos de la sesión:** señalados en la Tabla 13 (ver p.79)
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** a esta sesión asistieron 20 alumnos, formándose 5 grupos de 4 estudiantes cada grupo.
- **Materiales:** entregamos a cada grupo un álbum con dos páginas en blanco, el mismo que hemos empleado en todas las etapas de esta sesión. También hemos repartido a cada grupo una cantidad definida de figuritas, cuyo número ha ido variando de acuerdo a las etapas que conforman esta sesión. Además, en esta sesión se ha llevado un papelote que ha sido colocado en la pizarra (que más adelante detallaremos).
- **Requerimientos:** hemos solicitado a los estudiantes repartir y pegar las figuritas en las dos páginas en blanco del álbum de frutas de acuerdo a las indicaciones presentadas en cada etapa.
- **Caso de división trabajado:** en todas las etapas que conforman el desarrollo de esta sesión, trabajamos el caso particular de "divisiones" de números naturales con divisor fijo igual a 2 (para nuestro caso el número de páginas) y variamos el dividendo (para nuestro caso, el número de figuritas a ser repartidas en las páginas).
- **Etapas que conforman esta sesión:** Presentamos a continuación un esquema resumen de las etapas que conforman la sesión 1:

ETAPA 1

Entregamos solo **cuatro** figuritas a cada grupo

Exploramos la idea intuitiva de repartición en los estudiantes

Exploramos la noción de repartición "libre" en el caso de un número par de objetos.

*En la página 1 se pegan: 0 figuritas y en la página 2 se pegan: 4 figuritas; o viceversa.
* En la página 1 se pega: 1 figurita y en la página 2 se pegan: 3 figuritas; o viceversa.
*En la pág. 1 se pega: 1 figurita y en la pág. 2 se pegan: 2 figuritas, o viceversa, y sobra 1 figurita; etc.

Introducimos la condición para una repartición "equitativa", y observamos la respuesta de los alumnos.

* En la pág. 1 se pegan: 0 figuritas y en la pág. 2 se pegan: 0 figuritas, y que queden 4 figuritas sin ser pegadas.
* En la pág. 1 se pega: 1 figurita y en la pág. 2 se pega: 1 figurita, y que queden 2 figuritas sin ser pegadas.
* En la pág. 1 se pegan: 2 figuritas y en la pág. 2 se pegan: 2 figuritas, y que queden 0 figuritas sin ser pegadas.

Posibles Respuestas

ETAPA 2

Entregamos solo **cinco** figuritas a cada grupo

Exploramos la noción de repartición "libre" en el caso de un número impar de objetos.

*En la pág. 1 se pega: 0 figuritas y en la pág. 2 se pegan: 5 figuritas; o viceversa.
*En la pág. 1 se pega: 1 figurita y en la pág. 2 se pegan: 4 figuritas; o viceversa.
*En la pág. 1 se pegan: 2 figuritas y en la pág. 2 se pegan: 3 figuritas; o viceversa.
*En la pág. 1 se pega: 1 figuritas y en la pág. 2 se pegan: 2 figuritas, o viceversa, y sobra 2 figuritas, etc.

Introducimos las condiciones para una repartición "equitativa y máxima".

2 figuritas se pegan en cada página, sobrando 1 figurita sin ser pegada.

Posibles Respuestas

ETAPA 3

- Entregamos solo **seis** figuritas a cada grupo
- Reforzamos la noción de repartición "equitativa".
  - Posibles Respuestas
  - * En la pág. 1 se pegan: 0 figuritas y en la pág. 2 se pegan: 0figuritas, y que queden 6 figuritas sin ser pegadas.
    * En la pág. 1 se pega: 1 figurita y en la pág. 2 se pega: 1figurita, y que queden 4 figuritas sin ser pegadas.
    * En la pág. 1 se pegan: 2 figuritas y en la pág. 2 se pegan: 2figuritas, y que queden 2 figuritas sin ser pegadas.
    * En la pág. 1: 3 figuritas En la pág. 2: 3figuritas, y que queden 0 figuritas sin ser pegadas.
- Reforzamos la noción de repartición "equitativa y máxima"
  - 3 figuritas se pegan en cada página, sobrando 0 figuritas.

ETAPA 4

- Entregamos solo **siete** figuritas a cada grupo
- Reforzamos la noción de repartición "equitativa", y repartición "equitativa y máxima".

ETAPA 5

- Entregamos solo **nueve** figuritas a cada grupo
- Resumen de la sesión 1

A continuación, presentamos el análisis del desarrollo de cada una de las etapas que conforman la sesión 1.

<u>ETAPA 1</u>

Empezamos planteando respectivamente las siguientes preguntas:

¿Cuántas figuritas tendremos en cada página?, ¿quedaron figuritas sin ser pegadas?

¿Cómo podemos repartir de manera diferente las cuatro figuritas de tal manera que en cada página tenga un mismo número de figuritas?

El propósito de la primera pregunta es básicamente explorar la noción intuitiva de repartición que tienen los estudiantes y que logren identificar las diferentes formas de repartición para el caso particular de las 4 figuritas.

En cuanto a esta pregunta, los cinco grupos habían realizado la misma repartición de las 4 figuritas: dos figuritas en cada página, sin que queden figuritas sueltas. De estas respuestas podemos concluir que la idea intuitiva de los estudiantes sobre lo que es una repartición viene a ser, de manera natural (y para este caso particular de las 4 figuritas), una repartición equitativa y máxima desde la perspectiva tomada en este trabajo (ver Capítulo 2, p.30).

Por otro lado, la segunda pregunta tiene como propósito trabajar reparticiones equitativas y que el estudiante logre proporcionar las tres posibles respuestas para este tipo de repartición cuando se tienen 4 figuritas.

A continuación incluimos la transcripción del desarrollo de este planteamiento:

> ***Profesora:*** *Lo que me doy cuenta es que han pegado las figuritas de manera diferente [en cuanto a las imágenes en las figuritas]. Pero todos han pegado 2 figuritas en cada página. Una pregunta, a ver: ¿Podemos repartir de manera diferente las cuatro figuritas de tal manera que en cada página tenga un mismo número de figuritas?*

Esta pregunta tiene como propósito que los estudiantes se den cuenta de que sus respuestas iniciales no son las únicas formas de realizar una repartición que cumple la condición de ser solo equitativa.

> ***Alumnos:*** *sí*

Profesora: *¿cómo?*

Orlando y Hugo: *poniendo 2 en cada página*

Nicolás: *O también poniendo una [figurita] acá [refiriéndose a la primera página], una [figurita] acá [refiriéndose a la segunda página], una [figurita] acá [refiriéndose a la primera página], y una [figurita] acá [refiriéndose a la segunda página].*

Notemos que Nicolás busca explicar la repartición de las figuritas de una a una, pero llega a la misma respuesta de Hugo en el sentido que a cada página le corresponderían dos figuritas. En realidad, ninguno de los 5 grupos pudo concebir un ejemplo diferente al de 2 figuritas en cada página para la repartición según los requerimientos dados.

Nicolás: *o también, pero si quieres… que uno esté más aquí…, debería ser por ejemplo uno acá [refiriéndose a la segunda página] y tres [refiriéndose a la primera página].*

Profesora: *se puede hacer también…*

Yolanda: *cuatro pueden ir en una página.*

Profesora: *también las cuatro pueden ir en una sola página.*

Alumnos: *Sí…*

Podemos observar que estas últimas respuestas de los alumnos correspondían en realidad a la primera pregunta. La primera intervención de Nicolás despertó en sus demás compañeros el mencionar algunas de las diferentes formas de repartición “libre” (de acuerdo a nuestro referencial teórico ver Capítulo 2, p. 31) que podían darse con las 4 figuritas, ya que en este caso no dimos condiciones para la repartición.

Profesora: *Les dijimos que podían pegar [las figuritas] como ustedes desearan. Sí, pero, ¿cuántas formas hay para pegar las cuatro figuritas de tal manera que tenga un mismo número de figuritas en cada página?*

Jeffrie: *muchas*

Nicolás: *tres*

Profesora: *¿muchas o tres formas? A ver, ¿cómo?*

Nicolás: *dos en cada página; una acá [refiriéndose a la primera página] y tres acá [refiriéndose a la segunda página]…*

Notemos que a continuación la profesora pone énfasis nuevamente en la segunda pregunta, con el propósito que los estudiantes lleguen a respuestas correctas.

Profesora: *lo que yo he dicho es cómo puedo repartir las figuritas… ¿Cómo puedo pegarlas en las dos páginas de tal manera que en cada página tenga UN*

MISMO NÚMERO DE FIGURITAS? [La profesora pone énfasis en la última parte de su pregunta]

***Nicolás:** dos y dos*

***Profesora:** ¿de cuántas formas? ¿De cuántas formas puedo hacer eso?*

***Orlando**: muchas*

***Profesora:** ¿muchas? A ver, dime una forma.*

***Orlando:** aquí [refiriéndose como si colocara una figurita en la primera página], aquí [refiriéndose como si colocara una figurita en la segunda página], aquí [refiriéndose como si colocara una figurita en la primera página] y aquí [refiriéndose como si colocara una figurita en la segunda página].*

***Profesora:** pero, ¿cuántas figuritas tendría en cada página?*

***Jhosetp:** ¡dos!*

***Profesora:** dos… ¿De cuántas formas podría hacer eso?*

***Orlando:** ¡una nada más!*

Observemos que Orlando y sus demás compañeros consiguen mencionar solo un ejemplo de repartición que es solo equitativa. Los estudiantes no logran darse cuenta de las diferentes formas de repartición con la única condición dada. Creemos que esto es debido a que al darles una cantidad par de figuritas, los estudiantes creen que necesariamente todas las figuritas deben ser pegadas; es decir que no pueden quedar figuritas (sueltas).

Por esta razón la profesora decide pasar a la siguiente etapa en la que se tiene que trabajar con un número impar de figuritas.

<u>ETAPA 2</u>

Planteamos , una a una, las siguientes preguntas a los estudiantes:

¿De cuántas formas, estas cinco figuritas, se pueden repartir en las dos páginas del álbum?

¿Cómo se puede hacer que estas cinco figuritas las pueda repartir en las dos páginas, de tal manera que en cada página tengamos la misma cantidad de figuritas, pero que además hayamos repartido el mayor número de figuritas?

El propósito de la primera pregunta es básicamente que los estudiantes refuercen la noción de repartición "libre", experimentando las diferentes posibilidades de repartición (libre) para esta cantidad de figuritas.

La segunda pregunta, por otro lado, tiene como propósito introducir dos condiciones para nuestras reparticiones – que éstas sean equitativas y máximas. El estudiante debe llegar a darse cuenta de que al agregar estas dos condiciones, los posibles casos de repartición se reducen a una única respuesta.

A continuación, mostramos algunos fragmentos del diálogo que se ha dado en esta etapa:

> ***[…]***
>
> ***Profesora:*** *¿De cuántas formas, estas cinco figuritas, se pueden repartir en las dos páginas del álbum?*
>
> ***Anayely:*** *tres y dos*
>
> ***Profesora:*** *esa es una forma, otra forma es…en una página van…*
>
> ***Orlando:*** *es cinco y cero*
>
> ***Profesora:*** *otra forma es…*
>
> ***Jeffrie:*** *cuatro y uno*
>
> ***Profesora:*** *¿habrá otra forma…?*

Notemos que, a diferencia de la etapa anterior, en esta etapa los estudiantes no muestran dificultades al mencionar sus ejemplos de reparticiones "libres", particularmente con los casos en los que todas las figuritas son pegadas. Al notar esto la profesora pasa a plantear la siguiente pregunta.

> ***[…]***
>
> ***Profesora:*** *una pregunta: ¿Cómo se puede hacer que estas cinco figuritas las pueda repartir en las dos páginas, de tal manera que en cada página tengamos la misma cantidad de figuritas, pero que además hayamos repartido el mayor número de figuritas?*
>
> ***Alumnos:*** *¡No se puede!*
>
> ***Profesora:*** *¿por qué?*
>
> ***Jeffrie:*** *no Miss, porque no tiene mitad el número cinco.*
>
> ***Profesora:*** *¿no?*
>
> ***Hugo:*** *no, porque no tiene pares.*

Orlando: *no, porque es un número impar*

Nicolás: *puede ser… dos y medio*

Observemos que las diferentes respuestas de los estudiantes están asociadas a sus conocimientos sobre números pares e impares. Creemos que ellos consideraron que esas 5 figuritas no se pueden agrupar en parejas de figuritas sin que sobre alguna figurita, y en consecuencia en las dos páginas no podrían tener una misma cantidad de figuritas. Por otro lado, Nicolás identifica que en cada una de las páginas corresponden dos figuritas pero él considera que la figurita faltante, de algún modo, debe ser colocada en las dos páginas del álbum empleando así el término "*medio*". Con esto evidenciamos que, hasta el momento, ninguno de los alumnos considera la posibilidad de una repartición en la que puedan sobrar figuritas sin ser pegadas en el álbum.

[…]

Jeffrie: *no se puede*

Luis: *pero tendría que cortar una figurita*

Profesora: *no vamos a cortar nada*

Nicolás: *ponerlo en la mitad [refiriéndose a que una figurita deba ser pegada entre las dos páginas del álbum]*

Profesora: *no vamos a hacer eso Nicolás. No vamos a considerar ese caso.*

Mikeley: *si me das una figurita más…*

Profesora: *ah, su compañera dice: si me dan una figurita más, puede ser. Pero, ¿con las cinco figuritas yo puedo hacer eso?*

Alumnos: *no*

Orlando: *no, es un número impar Miss*

Notemos que una vez más Nicolás, y ahora Luis, están entendiendo que en una repartición (con o sin condiciones) se tienen que pegar todas las figuritas (repartición máxima). Ellos se han dado cuenta de que en cada una de las páginas serían pegadas dos figuritas, pero están buscando la manera de pegar o colocar la figurita que quedó "suelta". Mientras que, Mikeley y otra alumna sugieren cantidades pares de figuritas como 6 y 10, con la idea que no les sobren figuritas después de la repartición.

Profesora: *intenten hacer la repartición de uno a uno para ver cómo sería. En una página una, en la otra página otra, de tal manera que me quede la misma cantidad de figuritas en cada página, no importa si me sobran.* ***Me pueden sobrar figuritas por si acaso.***

[Los estudiantes vuelven a experimentar la repartición de estas cinco figuritas en el álbum de frutas. Al poco rato responden…]

Alumnos: *dos figuritas en cada página y sobra uno.*

En esta etapa los estudiantes han mostrado dificultades al hacer la repartición equitativa y máxima de las cinco figuritas en las dos páginas del álbum. Creemos que esto se debe principalmente a que de alguna manera los estudiantes asumen de manera implícita en una repartición cualquiera que se deben repartir todas las figuritas. Otro de los retos estaba en repartir una cantidad impar de figuritas entre un número par de páginas, lo que condujo a respuestas que escapaban de la intención inicial, como: romper o cortar la figurita, etc. Esto es justamente lo que percibió la profesora, siendo así su intervención pertinente para aclarar que podían sobrar figuritas después de una repartición equitativa y máxima. En todo caso, se debería haber mencionado esta posibilidad desde un inicio.

ETAPA 3

Para reforzar la idea de repartición "equitativa", mostramos a los estudiantes que existen diferentes formas de repartir equitativamente seis figuritas en dos páginas. Y para reforzar la noción de repartición "equitativa y máxima", les planteamos la siguiente pregunta:

¿Cómo podremos repartir estas 6 figuritas, de tal manera que hayamos repartido el mayor número de figuritas y que en cada página tengamos la misma cantidad de figuritas?

Mostramos a continuación la discusión originada en esta etapa:

[…]

[Después de haber dado un tiempo prudente a los alumnos para responder a esta pregunta…]

Profesora: *A ver, ahora vamos a compartir sus ideas… En este grupo, Mía, ¿cómo hiciste?… Miren, ¿qué cosa dije?… ¿Cómo vamos a repartir? ¿La misma cantidad de figuritas en cada página? ¿Sólo eso? ¿Solamente dije igual cantidad de figuritas en cada página…?*

Nicolás: *que también puede sobrar*

Profesora: *puede sobrar,… pero ¿solamente igual cantidad y que puede sobrar? ¿Qué más?... ¡Voy a repartir la mayor cantidad de figuritas! ¡LA MAYOR CANTIDAD! Entonces, yo puedo tener así [dirigiéndose al álbum que está colocado en la pizarra]… si yo quiero repartir la mayor cantidad de figuritas y en* *cada página tener igual cantidad de figuritas, ¿puedo tener así: dos aquí [pegando dos figuritas en la primera página] y dos acá [pegando dos figuritas en la segunda página] y me sobran dos [colocando dos figuritas fuera del álbum]? ¿Puedo tener esto?*

Vemos que la profesora pone énfasis en las condiciones para la repartición. Para ello da un ejemplo de repartición equitativa no contemplado por los alumnos en las etapas anteriores. Notemos que éste no es un ejemplo de una repartición equitativa y máxima a la vez. La profesora presenta este ejemplo con el fin de mostrar la diferencia que puede marcar una condición de repartición de otra.

Alumnos: *sí*

Profesora: *¿sí Chris? ¿Puedo tener eso?*

Nicolás: *nosotros hicimos eso… sí se puede hacer, porque sí te puede sobrar.*

Profesora: *puede haber sido, pero tenemos dos páginas. A ver, ¿puedo tener dos en una página y dos en la otra página y que me sobren dos? Pero yo digo, ¡voy a repartir la mayor cantidad de figuritas!*

Hasta el momento, Chris y Nicolás no han teniendo en cuenta la condición de repartición máxima; es por ello que la profesora nuevamente pone énfasis cuando dice: "*repartir la mayor cantidad", * lo que llamamos *repartición máxima*. A continuación observamos que la intervención de la profesora ha dirigido a los alumnos a la única respuesta que se tiene cuando se trabajan las dos condiciones de repartición equitativa y máxima.

Nicolás: *¡tres, tres!*

Profesora: *¿estoy repartiendo la mayor cantidad de figuritas ahí [señalando a lo que ya estaba en la pizarra: dos fig. en cada pág. y dos fig. fuera del álbum]?*

Alumnos: *¡no!*

Profesora: *¿por qué no?, que alguien me diga…*

Luis: *porque sobran algunas [refiriéndose a las dos figuritas que están fuera del álbum]*

Profesora: *porque sobran algunas… Pero esas algunas, ¿puedo seguir repartiéndolas?*

Alumnos: *¡sí!*

Profesora: *¿cómo? ¿Cómo las puedo seguir repartiendo?*

[Todos levantan la mano]

Ana Lucía: *en una página tres y en la otra página tres*

Profesora: *O sea, ¿cómo reparto estas dos figuritas más [señalando en la pizarra a la dos figuritas que no están pegadas en las páginas del álbum]?*

Luis: *pongo una aquí [refiriéndose a que una figurita debe ser colocada en una página] y otra aquí [refiriéndose a que una figurita debe ser colocada en la otra página]*

Profesora: *agrego, muy bien. Estas dos que sobraban en realidad puedo volver a repartirlas. ¿Cierto? ¿Cómo hago? Pongo aquí una [colocando una figurita en la primera página] y aquí la otra [colocando una figurita en la segunda página]. ¿Ahora sí está bien mi repartición…?*

Alumnos: *sí*

Los estudiantes han notado que la condición de repartición máxima les permite hacer la redistribución de estas dos figuritas "sobrantes", llegando a dar como única respuesta el caso de repartición dado por Nicolás y Ana Lucía.

ETAPA 4

Para reforzar la noción de repartición "equitativa", damos ejemplos específicos de este tipo de repartición. Y para reforzar la noción de repartición "equitativa y máxima", pedimos lo siguiente a los estudiantes:

Hagan la repartición de las siete figuritas, de tal manera que se reparta el mayor número de figuritas y que se tenga la misma cantidad de figuritas en cada página

A continuación mostramos algunos extractos del diálogo correspondiente a esta etapa:

[Los estudiantes hacen el experimento con siete figuritas. Después de unos minutos, la profesora interviene…]

Profesora: *a ver, hagamos el experimento al frente [en la pizarra]. ¿Cuántas figuritas tienen?*

Alumnos: *siete*

Profesora: *¿cómo tenemos que hacer las reparticiones?*

Nicolás: *tres y tres*

Profesora: *yo todavía no he pedido la solución*

Notemos que la pregunta hecha por la profesora busca que el estudiante mencione las condiciones de repartición, no tanto el resultado que se pueda tener de esta repartición.

Nicolás: *igual cantidad*

Profesora: *igual cantidad de figuritas en cada página. ¿Qué más?*

Nicolás: *mayor cantidad*

Profesora: *y voy a repartir la mayor cantidad de figuritas en cada página. La mayor cantidad que yo pueda repartir, voy a repartir, y pueden sobrar. ¿Cómo hago eso?*

Nicolás: *poniendo tres y sobra una. Tres y tres, y sobra una.*

Nicolás ya tiene la respuesta correcta de la repartición equitativa y máxima de las siete figuritas en las 2 páginas del álbum. Observamos incluso que él mismo hace una precisión de su propia respuesta.

Profesora: *vamos a repartir como si estuviésemos repartiendo caramelos a nuestros amiguitos. Bien, ¿cómo hacemos? Es decir, ¿cuántas pongo acá?… una para ti y otra para ti [colocando una figurita en cada una de las dos páginas del álbum]… ¿Tengo igual cantidad de figuritas?*

[Hasta el momento cada una de las páginas del álbum tiene una figurita, sobrando cinco figuritas que se encuentran al costado del álbum]

Alumnos: *sí*

Profesora: *¿acabé con mi repartición?*

Alumnos: *¡no!*

Profesora: *¿por qué no?*

Hugo: *tiene que tener la mayor cantidad*

Profesora: *claro, todavía no he repartido la mayor cantidad, ¿puedo seguir repartiendo?*

Alumnos: *¡sí!*

Profesora: *vamos a repartir más a mis compañeros. Puedo repartir una más para ti [colocando una figurita más en la primera página], otra para ti [colocando una figurita más en la segunda página]. ¡Acabé!*

[Hasta el momento cada una de las páginas del álbum tiene dos figuritas, sobrando tres figuritas que se encuentra al costado del álbum]

Observemos que la repartición realizada por la profesora cumple solo la condición de ser equitativa, más no es máxima. La profesora termina diciendo: *"¡Acabé!"*, como una estrategia para determinar si los estudiantes están atentos y pendientes del cumplimiento de las dos condiciones de repartición dadas. En este caso la profesora pretendía ser corregida por los estudiantes. Veamos algunas de las reacciones de los alumnos:

Alumnos: *¡no!*

Profesora: *¿por qué no?*

Anayely: *Tiene que tener igual*

Profesora: *pero ya tengo igual [2 figuritas en cada página]. ¿Acabé?*

Hugo: *sí, pero tiene que tener la mayor cantidad*

Profesora: *¿Ya acabé? Manuel dice que ya acabé*

Alumnos: *¡¡no!!*

Renzo: *Le falta repartir tres frutas más [haciendo referencia a los dibujos en las figuritas]*

Profesora: *¿por qué? ¿Todavía no he acabado? A ver, Nicolás.*

Nicolás: *porque deberían ser tres, tres; entonces ahí hay dos, dos [señalando al álbum de la pizarra que tiene dos figuritas en cada página]*

Profesora: *pero, ¿por qué?*

Nicolás: *porque es siete y no tiene mitad, debería sobrarle uno*

Vemos que Renzo está sugiriendo la redistribución de las tres figuritas sobrantes, mientras que Nicolás ha notado que después de la repartición de una cantidad impar de figuritas (7) entre un número par de páginas (2), *"debería sobrarle uno"*. Pensamos además que Nicolás podría haberse dado cuenta de que cuando se intente repartir una cantidad impar de figuritas en las 2 páginas del álbum el residuo máximo debería ser 1. Esto lo vemos reflejado en la respuesta del alumno.

Profesora: *porque todavía no hemos repartido la mayor cantidad… A ver, ¿qué hago entonces? Le doy…*

Alumnos: *dos*

Profesora: *¿aquí dos? [Tratando de colocar dos de las tres figuritas sobrantes en solo una página]*

Observemos que la profesora hace esto con la finalidad de que los estudiantes puedan corregirla.

Alumnos: *¡no!*

Nicolás: *uno para cada página*

Profesora: *uno para cada página [colocando en total dos figuritas más en el álbum]. A ver…*

[Hasta el momento el álbum tiene tres figuritas en cada página, sobrando una figurita que se encuentra al costado del álbum]

Nicolás: *y la otra te sobra*

Profesora: *y me está sobrando esta de aquí…*

Alumnos: *sí*

Profesora: *¿cumplimos con las condiciones?*

Alumnos: *sí*

Cabe resaltar que el ejemplo dado por la profesora ha permitido que los estudiantes puedan notar que una repartición bajo estas dos condiciones exige tener una única respuesta.

ETAPA 5

Para reforzar la idea de repartición equitativa y máxima, damos la siguiente indicación a los estudiantes:

Hagan la repartición de las nueve figuritas, de tal manera que se reparta el mayor número de figuritas y que se tenga la misma cantidad de figuritas en cada página

A continuación mostramos el diálogo correspondiente a esta etapa:

Profesora: *Condiciones... ¿qué condiciones tenemos? ¿Qué condiciones hemos dado para la repartición?*

Hugo: *que tenga la mayor cantidad*

Profesora: *reparto la mayor cantidad de figuritas,... ¿qué más?*

Luisa: *y que sobre uno*

Profesora: *¿nos debe sobrar uno? Pero, la otra condición es que reparta la misma cantidad de figuritas. A ver, repartamos las figuritas [en el álbum que está en la pizarra con 9 figuritas], una para cada página [colocando una figurita para cada página], otra repartición [colocando una figurita más en cada página]. A ver Chris [lo invita para que participe en pizarra], corre a hacer otra repartición más. Su compañero va a ser otra repartición más.*

[Chris, coloca una figurita más en cada página. Hasta el momento el álbum tiene tres figuritas en cada página y tres figuritas sueltas]

Observamos que la profesora plantea la pregunta "¿nos debe sobrar uno?" con el propósito de que los estudiantes noten que esta no es una condición que debe ser cumplida en una repartición equitativa y máxima, aunque sabe que la respuesta de Luisa es parcialmente cierta ya que después de la repartición sí sobra 1 figurita. Es importante la intervención de la profesora, puesto que permite evitar más adelante dificultades con los siguientes aprendizajes.

Profesora: *muy bien. ¿Terminé?*

Alumnos: *¡no!*

Profesora: *¿por qué no?*

Alumnos: *porque faltan…*

Profesora: *ah… a ver, ayúdame [diciéndole a Renzo]*

[Renzo coloca una figurita más en cada página, teniendo en el álbum un total de cuatro figuritas en cada página y sobrando una figurita]

Profesora: *muy bien. ¿Acabé?*

Alumnos: *¡sí!*

Profesora: *ahora sí,… ¡Qué bueno! Sí, muy bien. ¿Qué hemos hecho? A ver, alguien que me cuente qué hemos hecho en resumen. Vamos a resumir lo que hemos hecho…*

[Para realizar el resumen la profesora utilizó un papelote que había sido colocado en la pizarra. Este papelote mostraba una tabla con espacios en blanco que debían ser completados con cantidades adecuadas de figuritas. A continuación podemos observar el modelo de la tabla]

Se tienen	A cada página le correspondería	Le sobrarían
____*figuritas* ____*figuritas* . . .	____*figuritas* ____*figuritas* . . .	____*figuritas* ____*figuritas* . . .

En cuanto a la primera parte del resumen, los estudiantes no mostraron dificultades al completar la tabla con las cantidades de figuritas con las que ya habían trabajado. Así también, trabajamos de manera fluida con cantidades con las que no habían experimentado, como el caso particular de ocho figuritas. Observemos a continuación la forma en que la profesora motiva el trabajo de los alumnos con nuevos ejemplos de cantidades de figuritas, ejemplos que retan a muchos de los estudiantes:

[…]

Profesora: *una pregunta, ¿si tuviesen 10 figuritas?*

Alumnos: *cinco, sobran cero*

Profesora: *cinco figuritas en cada página y sobrarían cero [anotando en el papelote]. Y, a ver, alguien me puede decir… Vamos a poner una pregunta, un poquito más difícil. ¿Qué pasa si yo tengo 13 figuritas?*

Alumnos: *¡trece! [En tono de sorpresa]*

Profesora: *trece figuritas, sí. A ver, ¿podríamos tener cinco figuritas en cada página y que me sobra tres figuritas si tengo dos páginas?*

Alumnos: *¡no!*

Profesora: *¿podríamos tener eso?*

Hugo: *no, porque no hemos repartido todas las figuritas*

Los alumnos se dan cuenta que la repartición sugerida por la profesora con las 13 figuritas no es correcta ya que NO es un ejemplo de repartición máxima. Asimismo, notamos que Hugo intenta justificar su respuesta haciendo referencia a que todavía se puede seguir repartiendo las figuritas; sin embargo su respuesta no es del todo precisa ya que el alumno dice que se deben repartir todas las figuritas. Observemos que a continuación la profesora valora el comentario de Hugo, aunque lo replantea enunciándolo esta vez de manera precisa.

Profesora: *muy bien. Miren, su compañero dice que todavía nos faltaban repartir figuritas, y eso es lo que estábamos pidiendo, ¿verdad? Y en realidad nos sobrarían… ¿cuántas figuritas?*

Alumnos: *una*

Profesora: *entonces, ¿cuántas figuritas tenemos en total?*

Renzo: *13*

Profesora: *si tengo 13 figuritas entonces, ¿cómo hacemos? ¿Cuántas en cada página? Si tengo 13, ¿cuántas figuritas en cada página?*

Alumnos: *6*

Profesora: *6, y ¿cuántas me sobraron?*

Alumnos: *una*

Profesora: *¿alguien tiene otro ejemplo?*

[La profesora no espera mucho tiempo para escuchar de los alumnos ejemplos de cantidades de figuritas que puedan ser repartidas en el álbum de dos páginas]

Hugo: *¡100!*

Profesora: *¡100! ¿Podrán hacerlo con 100? A ver, colocamos puntos suspensivos [escribiendo en el papelote para pasar de trece figuritas a cien figuritas] ¡Wow! … no nos van alcanzar las figuritas, pero ustedes…*

[Renzo contesta, rápidamente, sin dejar que la profesora termine su comentario]

Renzo: *50 y me sobran cero figuritas…*

Profesora: *ah… ¿puedo hacer eso?*

Alumnos: *¡sí!*

Profesora: *¡Renzo!, pensé que iban a demorar un poquito. Su compañero nos dijo, ¿cuántas figuritas en cada página?*

Observamos que la profesora se admira por la respuesta correcta e inmediata de Renzo ya que a pesar de la cantidad "*grande*" de figuritas para hacer la repartición y, en comparación con los números pequeños trabajados en las etapas de esta sesión, él realizó rápidamente las cuentas, llegando a la respuesta correcta sin tener conocimientos previos de división de números naturales.

Alumnos: *¡50!*

Profesora: *50, ¿y me sobran…?*

Alumnos: *cero*

Profesora: *¿Qué pasa ahora si yo tengo 101 figuritas?*

Alumnos: *¡50!, y me sobra uno*

Profesora: *¿todos están de acuerdo? ¿Alguien tiene otra respuesta?*

Alumnos: *¡no!*

Profesora: *entonces es así, ¿verdad? 50 en cada página y me sobra 1. ¡Otro ejemplo!*

Vemos que la profesora ha dado a los alumnos una cantidad diferente de números de figuritas con la intención de verificar si todos han comprendido la noción de repartición equitativa y máxima.

Orlando: *16 000*

Profesora: *A ver, ¿cómo reparto 16 00?*

Orlando: *8 000 y 8 000*

Profesora: *¿y sobran…?*

Orlando: *cero*

Profesora: *¿está bien?*

Alumnos: *sí*

[…]

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 1

El propósito principal de esta primera sesión ha sido introducir las nuevas nociones de repartición y que los estudiantes se familiaricen con ellas. Esta sesión ha resultado particularmente importante ya que nos ha permitido trabajar con la terminología que emplearemos para definir “división de números naturales” y posteriormente “divisibilidad de números naturales”. Con este fin hemos empleado diferentes estrategias para que los estudiantes entiendan básicamente las diferencias entre las reparticiones libres, equitativas, y las reparticiones equitativas y máximas.

En cuanto al primer propósito, hemos identificado que la idea intuitiva que los estudiantes tienen de repartición es el tipo de repartición “equitativa y máxima”; que es el tipo de reparticiones en el que nos centraremos para conseguir nuestro objetivo general.

Creemos que si los estudiantes llegan a manejar adecuadamente los conceptos introducidos en esta sesión, será más sencillo para ellos que puedan adquirir nuevos conocimientos relacionados con la división de números naturales; pero no solo eso, sino también podremos lograr que justifiquen cada uno de sus razonamientos a partir de estas definiciones.

Asimismo, hemos observado que aquí ya se ha comenzado a fomentar la justificación de las respuestas dadas por los estudiantes. Esto ha sido logrado a través de la presencia constante de la pregunta “¿Por qué?” en el trabajo de la profesora, quien ha dirigido este trabajo con los estudiantes.

4.3.2 Análisis de la sesión 2

- **Actividades trabajadas:** en esta sesión hemos desarrollado la situación: ***"La promesa de las canicas"***.
- **Tipo de actividad:** Trabajo de clase y Trabajo en grupos.
- **Propósitos de la sesión:** indicados en la Tabla 13 (ver p. 79)
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** a esta sesión asistieron 24 alumnos, con los que se formaron 6 grupos de 4 estudiantes cada grupo.
- **Materiales:** a cada grupo le entregamos 3 bolsitas, las que han sido usadas en todas las etapas de esta sesión. También hemos entregado a cada grupo una cantidad específicas de canicas, la que ha ido variando de acuerdo a las etapas planteadas para esta sesión. Además, en esta sesión se ha llevado un papelote que ha sido colocado en la pizarra (que más adelante detallaremos).

  Empezamos esta sesión narrando la siguiente situación, que es la situación que regirá el desarrollo de toda la sesión:

> Luis es un niño que adora jugar a las canicas con sus amigos del colegio durante los recreos. Cierto día, como ya es de costumbre, Luis y sus amigos juegan un partidito de canicas. Esta vez Luis tiene presente que el día anterior había prometido a sus tres primos que les obsequiaría las canicas que gane en su próximo juego.
>
> Luis ha pensado en detalle cómo hará la repartición de las canicas que gane entre sus tres primos:
>
> *"Repartiré entre ellos la mayor cantidad de canicas que pueda, respetando que cada uno de ellos tenga una misma cantidad de canicas, así todos quedan contentos. Yo me quedaré con las canicas que sobren después de la repartición".*

- **Requerimientos:** En todas las etapas que conforman el desarrollo de esta situación, elegimos en cada grupo un alumno que asumía el papel de "Luis", y los otros 3 estudiantes jugaban el papel de los primos de Luis.
- **Caso de división trabajado:** a diferencia de la sesión 1, en esta sesión trabajamos el caso particular de una división de números naturales, con divisor fijo igual a 3 (para nuestro caso el número de primos a quienes se les hace la repartición), y vamos variando el dividendo (para nuestro caso el número de canicas a ser repartidas).
- **Etapas que conforman esta sesión:**

A continuación presentamos un esquema resumen de las etapas que conforman la sesión 2:

ETAPA 1

- Entregamos solo **12** canicas a cada grupo.
- Reforzamos la noción de repartición equitativa y máxima.
- Analizamos si después de una repartición equitativa y máxima de **12** canicas entre **3** personas nos pueden sobrar **3** canicas.

ETAPA 2

- Entregamos solo **7** canicas a cada grupo.
- Reforzamos la noción de repartición equitativa y máxima.
- Analizamos si después de una repartición equitativa y máxima de **7** canicas entre **3** personas nos pueden sobrar **4** canicas.

ETAPA 3

- Entregamos solo **11** canicas a cada grupo.
- Reforzamos la noción de repartición equitativa y máxima.
- Analizamos si después de una repartición equitativa y máxima de **11** canicas entre **3** personas nos pueden sobrar **8** canicas.
- Los estudiantes proponen oralmente ejemplos de reparticiones equitativas y máximas

ETAPA 4

- Reforzamos la noción de repartición equitativa y máxima.
- Los estudiantes proponen oralmente ejemplos de cantidades de canicas que pueden ser repartidas en forma equitativa y máxima entre 3 personas sin que sobren canicas después de la repartición.
- Los estudiantes crean, en grupos, sus propios ejemplos de cantidades de canicas que pueden ser repartidas en forma equitativa y máxima entre **3** personas, pero que además sobre **1** canica después de la repartición.

En esta sesión la profesora ha utilizado un papelote, el que ha sido colocado desde el inicio de la sesión en la pizarra. Este papelote mostraba una tabla cuyos espacios en blanco debían ser completados con cantidades adecuadas. La intención de este trabajo es que los alumnos puedan observar los posibles valores del residuo después de una repartición equitativa y máxima para diferentes números de canicas entre 3 personas.

A continuación observamos el modelo de la tabla presentado a los estudiantes.

Si Luis ganara	*Cada primo recibiría*	*A Luis le sobrarían*
12 canicas *7 canicas* *11 canicas* . .	___ *canicas*	___ *canicas* . . . .

A continuación incluimos el análisis del desarrollo de cada una de las etapas que conforman la sesión 2.

<u>ETAPA 1</u>

Para reforzar la noción de repartición equitativa y máxima tratada inicialmente en la sesión anterior, y para analizar si 3 es un posible valor del residuo en una división con divisor igual a 3, planteamos respectivamente las siguientes preguntas:

¿Cuántas canicas tiene cada uno de los primos de Luis? ¿Cuántas canicas sobraría a Luis después de la repartición equitativa y máxima de las 12 canicas?

¿Pueden sobrar 3 canicas?

En cuanto a la primera pregunta, después de la repartición equitativa y máxima de las doce canicas, 5 de los 6 grupos habían respondido que a cada primo le correspondía 4 canicas, y un solo grupo había respondido que a cada primo le correspondía tres canicas. Lo que pudimos observar es que este último grupo había dado una respuesta incorrecta ya que había incluido a Luis en la repartición de las canicas, lo que iba en contra de las condiciones dadas en la situación. Al notar esto la profesora explica nuevamente las condiciones dadas en la situación. Esta explicación es importante puesto que buscamos que los estudiantes eviten tener errores en las posteriores reparticiones equitativas y máximas de las canicas.

Observemos ahora la transcripción de algunos fragmentos de la discusión llevada a cabo en esta etapa, en relación a la segunda pregunta planteada:

> ***[…]***
>
> ***Profesora:*** *una pregunta: ¿pueden sobrar tres canicas?*
>
> ***Alumnos:*** *¡no!*
>
> ***Profesora:*** *A ver, Hugo [pidiéndole su participación]…*
>
> ***Hugo:*** *no, porque Luis tiene que repartir la mayor (cantidad de canicas).*

Observamos que Hugo ya empieza a presentar justificaciones basadas en el cumplimiento de las condiciones necesarias para el caso de una repartición equitativa y máxima (que son parte de las condiciones de la situación dada). El alumno se da cuenta de que la repartición sugerida por la profesora no cumple con la condición de ser una repartición máxima (aunque no hayamos usado esta terminología). De aquí que el alumno descarta que ésta sea una repartición equitativa y máxima a la vez.

Es importante resaltar que Hugo ha justificado indirectamente que en una división, con divisor igual a 3, el residuo no puede ser 3. Para ello el alumno se ha basado en las condiciones dadas para la repartición, que son las condiciones que deben cumplirse en cualquier repartición equitativa y máxima, en función de los cuales posteriormente definiremos la división de los números naturales.

> ***Profesora:*** *entonces cuando me han sobrado estas 3 canicas quiere decir que no he repartido la mayor cantidad de canicas... Entonces, ¿qué puede hacer Luis con las 3 canicas que tiene hasta el momento?*
>
> ***Manuel:*** *le puede repartir a cada primo.*
>
> ***Profesora:*** *¿cuántas les daría?*
>
> ***Alumnos:*** *una más*
>
> ***Profesora:*** *a ver, una vez más ¿No le pueden quedar 3 canicas?*

[Cada grupo vuelve a repartir las canicas, y después de unos minutos…]

> ***Profesora:*** *¿cuántas canicas le corresponde a cada primo?*
>
> ***Alumnos:*** *cuatro*

[La profesora verifica que en cada uno de los grupos cada uno de los primos tenga 4 canicas]

Profesora: *entonces cada primo recibirá….*

Alumnos: *cuatro*

[La profesora ha completado esta y las siguientes respuestas en el papelote]

Profesora: *cuatro canicas, y a Luis le sobrarían…*

Alumnos: *¡cero, cero canicas!*

Profesora: *¿todos están de acuerdo?*

Alumnos: *sí*

En esta etapa los alumnos han llegado a la misma conclusión de Hugo, notando que el valor del residuo no puede ser 3 ya que de lo contrario no tendríamos una repartición máxima, que es una de las dos condiciones de repartición solicitada (que sea equitativa y máxima a la vez).

ETAPA 2

Para reforzar la noción de repartición equitativa y máxima, y para analizar si 4 es un posible valor del residuo en una división con divisor igual a 3, planteamos respectivamente las siguientes preguntas:

¿Cuántas canicas tiene cada uno de los primos de Luis? ¿Cuántas canicas le sobrarían a Luis después de la repartición equitativa y máxima de las 7 canicas?

¿Se puede quedar Luis con 4 canicas?

En cuanto a la primera pregunta, Orlando presenta una respuesta correcta a la repartición equitativa y máxima de las siete canicas. Cabe resaltar que la profesora pide la intervención de los demás alumnos solicitando la corrección del trabajo realizado por su compañero, y así conocer si hay respuestas diferentes a la de Orlando. En vista de que todos coincidían con la respuesta de Orlando, la profesora realiza la siguiente repartición con el fin de generar la situación de la segunda pregunta: a Orlando (quien juega el papel de Luis en la situación) le damos 4 canicas y a cada una de sus primas le damos 1 canica.

A continuación veremos las reacciones de los alumnos originadas en relación al ejemplo de repartición dado por la profesora:

> ***[…]***
>
> ***Profesora:*** *¿puede haber sido así la repartición? [Refiriéndose al ejemplo de repartición que ha dado]*
>
> ***Alumnos:*** *¡no!*
>
> ***Profesora:*** *pero…cada una de sus primas tiene una misma cantidad…*
>
> ***Hugo:*** *Miss, pero Luis no ha repartido la mayor cantidad*

Vemos que Hugo justifica que esta repartición no es correcta ya que esta no satisface la condición de repartición máxima. Creemos que los demás alumnos tenían la misma idea de Hugo ya que respondieron todos con un ¡No! rotundo a la pregunta de la profesora.

> ***Profesora:*** *ah… no ha repartido la mayor cantidad todavía. Luis tiene 4 canicas, ¿se puede quedar con 4 canicas? Si no, ¿qué puede hacer con esas 4 canicas?*
>
> ***Alumnos:*** *¡repartirlas!*
>
> ***Profesora:*** *¡verdad! Entonces, ¿cuántas canicas más le damos a Mía [quien hace el papel de una de las 3 primas]?*
>
> ***Alumnos:*** *una*
>
> ***Profesora:*** *¿Luis se queda con 3? ¿Qué más? ¿Le da una más a quién?*
>
> ***Alumnos:*** *Mikeley [quien hace el papel de otra prima]*
>
> ***Profesora:*** *¿cuántas tendría Mikeley?*
>
> ***Alumnos:*** *dos*
>
> ***Profesora:*** *Mikeley tendría 2 canicas y Luis se quedaría con 2. ¿Qué más?*
>
> ***Alumnos:*** *a Luisa [los alumnos se refieren a que a ella también deben darle una canica más]*
>
> ***Profesora:*** *a Luisa le daría una más, y Luis se quedaría con una canica. ¿Se acabó la repartición?*
>
> ***Alumnos:*** *¡sí!*
>
> ***Profesora:*** *¿cuántas canicas le corresponde a cada prima?*
>
> ***Alumnos:*** *dos*
>
> ***Profesora:*** *¿cuántas sobraban?*
>
> ***Alumnos:*** *una*

Notemos que el proceso de redistribución de las 4 canicas se ha llevado a cabo correctamente con la participación de los alumnos y con la guía de la profesora. Este proceso de redistribución es necesario, de lo contrario no se trataría de una repartición máxima.

ETAPA 3

Para reforzar la noción de repartición equitativa y máxima, y para analizar si 8 es un posible valor del residuo en una división con divisor igual a 3, planteamos respectivamente las siguientes preguntas:

¿Cuántas canicas tiene cada uno de los primos de Luis?
¿Cuántas canicas sobrarían a Luis después de la repartición equitativa y máxima de las 11 canicas?

¿Se puede quedar Luis con 8 canicas?

Adicionalmente, en esta etapa mostramos (en los diálogos) la activa participación de los estudiantes al dar sus propios ejemplos de reparticiones equitativas y máximas.

En lo referido a la primera pregunta, Luis Miguel participa dando una respuesta correcta para la repartición equitativa y máxima de las 11 canicas, mientras que Felipe menciona una repartición diferente a la de Luis Miguel. A continuación veremos que la repartición hecha por Felipe cumple solo la condición de repartición equitativa, surgiendo de esta manera la segunda pregunta planteada para esta etapa.

> ***Profesora:*** *¿Habrá otra forma de repartición que cumpla con las condiciones que nos daban para la repartición de Luis? ¿Puede haber otra forma, o no la hay? A ver, ¿qué nos dice Felipe?*
>
> ***Felipe:*** *sí*
>
> ***Profesora:*** *¿cómo sería la otra forma de repartición?*
>
> ***Felipe:*** *una para cada uno [refiriéndose a cada uno de los primos] y me sobra… uhm… [Tome en cuenta que Felipe está jugando el papel de Luis]*

Notemos que Felipe no está tomando en cuenta que la repartición debe ser no solo equitativa sino además máxima. No obstante, es importante señalar que la condición obviada por el alumno permite propiciar un debate con sus demás compañeros con el fin de seguir aclarando que las reparticiones que estamos trabajando son del tipo equitativa y máxima simultáneamente.

> ***Profesora:*** *a ver, su compañero Felipe nos dice que a cada primo le va a dar una canica, ¿con cuántas canicas se quedaría él?*
>
> ***Alumnos:*** *ocho*

Profesora: *ocho canicas, verdad. Pero… uhm… ¿eso cumple con las condiciones que hemos dado de repartición?*

Alumnos: *¡no!*

Profesora: *¿por qué no?*

Jamil: *porque dice que tenemos que repartir la mayor cantidad y ¡esa nos es la mayor cantidad!*

Profesora: *y, ¿esa no es la mayor cantidad? A ver Manuel, ¿puede ser esa repartición: ocho canicas para Luis y una para cada primo?*

Manuel: *¡no!, no se ha repartido la mayor cantidad*

Profesora: *eso nos decía su compañero [Jamil], ¿verdad? No se ha repartido la mayor cantidad de canicas, y… ¿todos los primos tienen la misma cantidad de canicas?*

Joseph: *sí, pero… cada uno debe tener la mayor cantidad*

Observemos que los estudiantes tienen en cuenta que en nuestra noción de repartición están ahora implícitas dos condiciones: que esta sea equitativa y máxima a la vez. Por ello los estudiantes son conscientes de que en una repartición de once canicas entre tres primos, no pueden sobrar ocho canicas. Su justificación viene dada en función de la condición que la repartición sea además máxima.

Profesora: *ah…entonces falta que Luis reparta. ¿Cómo podemos repartir esas 8 canicas?*

Mikeley: *podemos repartirlos dos más [refiriéndose aumentar dos canicas a cada primo]*

Profesora: *entonces, ¿esas ocho canicas no le pueden quedar a Luis?*

Vanesa: *tiene que repartirle dos y a él (Luis) también le quedan dos*

Profesora: *a ver, de estas 8 se tiene que redistribuir, repartir. ¿Cuántas más le da a cada uno? ¿Cuántas más?*

Alumnos: *dos*

Profesora: *más 2, más 2, más 2 [entregando 2 canicas más a cada uno de los primos]. ¿Cuántas repartió hasta ahorita?*

Alumnos: *seis*

Profesora: *¿con cuántas se está quedando él (Luis)?*

Alumnos: *dos*

Profesora: *dos canicas. Entonces, ¿cuántas canicas le corresponde a cada primo?*

Alumnos: *tres*

Profesora: *¿se podrá repartir más?*

Alumnos: *¡no!*

Notemos que los estudiantes han llevado a cabo correctamente la redistribución de las 8 canicas, la que no hubiera sido necesaria sino se tenía en cuenta la condición: repartición máxima de las once canicas.

A continuación observemos que los alumnos dan ejemplos de reparticiones equitativas y máximas.

[…]

Profesora: *está bien… ¿Alguien me puede dar otra cantidad de canicas… un ejemplito…?*

Mikeley: *10 canicas*

Profesora: *su compañera dice, ¿qué pasaría si me dan 10 canicas? ¿Cuántas canicas le correspondería a cada primo? A ver, Julio César, ¿qué pasa si tienes que repartir 10 canicas a tus 3 primos? ¿Cuántas canicas le corresponden a cada primo? Recuerden…vamos a repartir la mayor cantidad de canicas y además cada primo debe tener una misma cantidad.*

Julio César: *tres (a cada primo) y sobra uno (a Luis)*

Profesora: *Muy bien. ¿Se entendió?*

Alumnos: *sí*

[…]

Profesora: *otro ejemplito, Chris*

Chris: *20 canicas*

Profesora: *20 canica. A ver Luis, ¿cómo repartirías 20 canicas?¿Cuántas canicas le das a cada primo?*

Luis: *cinco y me quedan cinco canicas*

Creemos que la respuesta de Luis está basada en el caso general de una repartición equitativa y máxima de veinte canicas entre cuatro personas. Pensamos que no está considerando las condiciones de la situación dada.

Profesora: *a ver su compañero dice que van a ser cinco canicas y le sobran a él cinco. A cada uno de sus primos le da cinco canicas y él se queda con cinco. ¿Está bien?*

[La profesora escribe en la pizarra la respuesta de Luis]

> ***Joseph:*** *está mal, porque 6 cada uno y 2 se queda… Luis*
>
> ***Profesora:*** *ah. A ver, su compañero dice que no debe ser esto [refiriéndose a la respuesta de Luis escrita en pizarra]. Debe ser seis canicas para cada uno y sobran dos canicas, dice su compañero. Y, ¿por qué no podrían sobrar cinco canicas?*
>
> ***Joseph:*** *porque dice [en la situación] que va a repartir la mayor cantidad*

Cabe resaltar que son los mismos alumnos quienes verifican y corrigen sus propios resultados, como lo hace Joseph al corregir la respuesta de Luis. Observemos que la respuesta de Joseph cumple con las condiciones de una repartición equitativa y máxima para estas veinte canicas entre los tres primos. A su vez justifica por qué cinco no puede ser el residuo en esta repartición. La razón principal que da se basa en la noción de repartición máxima.

> ***Profesora:*** *la mayor cantidad… No pueden quedar cinco ¿Verdad? Porque esas cinco se pueden repartir en otra vuelta, ¿verdad? Entonces esta no puede ser la respuesta [refiriéndose a la respuesta de Luis]. Muy bien,… ¿alguien tiene otro ejemplito?... ¿Hugo?*
>
> ***Hugo:*** *300 canicas*
>
> ***Profesora:*** *300 canicas dice Hugo… uhm… vamos a pensar en el ejemplito de Hugo*

[Todos levantan la mano, mientras que Renzo responde inmediatamente]

> ***Renzo:*** *a cada uno 100 canicas y a Luis le sobra cero*
>
> ***Profesora:*** *a cada primo le da 100 canicas y a Luis le sobran cero canicas, ¿está bien?*
>
> ***Alumnos:*** *sí*

Notemos que a pesar de que el ejemplo dado (300 canicas) también es un número que termina en cero, como los otros dos ejemplos dados (10 y 20 respectivamente), para los alumnos parece ser un ejemplo mucho más sencillo de trabajar. Creemos que esto se debe a que 300 es una cantidad de la forma $3000\ldots0$ (3 seguida de tantos ceros como sea posible), cuya repartición, según el contexto dado, es simple de realizar.

Al detectar esto la profesora da un ejemplo diferente (un número que no termina en cero) con el fin de verificar que los alumnos están entendiendo lo trabajado.

> ***Profesora:*** *muy bien, ahora yo les voy a dar un ejemplito… uhm… ¡Ya sé! Vamos a pensar en el ejemplito de 92 canicas. Luis va repartir las 92 canicas entre sus tres primos. Entonces, ¿cuántas le corresponde a cada primo? La repartición*

máxima y que a cada primo le corresponda una cantidad igual de canicas. A ver Ericka, ¿cuántas canicas le van a corresponder a cada uno de tus primos?

Ericka: *uhm...*

Profesora: *a ver, Luis…*

Luis: *30 para cada uno y me sobra 2*

Profesora: *a ver, su compañero dice 30 canicas para cada uno y sobran 2 canicas. ¿Estará bien? Manuel, ¿qué dices?*

Manuel: *sí y me sobran dos*

Profesora: *muy bien. He repartido la mayor cantidad de canicas y de manera igual. Sí, ¡muy bien! Ahora vamos a pensar en otros casos.*

[…]

ETAPA 4

Los estudiantes crean sus propios ejemplos de divisiones entre tres, unos con residuo igual a cero y otros con residuo igual a uno. En otras palabras, pretendemos que ellos den casos de números divisibles entre tres (o equivalentemente ejemplos de múltiplos de 3), y también casos de números que al ser divididos entre tres, den como residuo uno (o equivalentemente ejemplos de múltiplos de 3, más 1).

Con este propósito, planteamos a los estudiantes las siguientes preguntas respectivamente:

¿Cuántas canicas tendría que ganar Luis para que pueda repartir todas las canicas y no le queden canicas para él?

¿Cuántas canicas tendría que ganar Luis para que él se pueda quedar con una canica?

La primera pregunta ha sido trabajada de manera oral con la participación de todos los alumnos, y con la guía de la profesora.

Por otro lado, la segunda pregunta ha sido trabajo en grupos (los estudiantes de manera grupal) y por escrito.

A continuación incluimos la transcripción de la discusión llevada a cabo en esta etapa, para el desarrollo de la primera pregunta:

Profesora: *¿cuántas canicas tendría que ganar Luis para que pueda repartir todas las canicas y no le queden canicas para él? O sea, ¿le queden para él cero canicas? Denme diferentes ejemplos…*

Mikeley: *12*

Profesora: *Mikeley dice 12 canicas. ¿Está bien?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *otro ejemplito, Julio César*

Julio César: *15*

Profesora: *15 canicas. ¿Está bien?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *otro ejemplo*

Jeffrie: *150*

Profesora: *150 canicas. ¿Está bien?*

Alumnos: *sí*

Anayely: *35*

Profesora: *¿esto es verdad? ¿Está bien 35 canicas?*

[Las opiniones de los alumnos están repartidas. Algunos dicen “sí”, y otros dicen “no”.]

Profesora: *no, ¿por qué?*

Luis: *no, porque si les reparte diez a cada uno… y entonces le sobrarían cinco y entonces está mal.*

Luis trata de justificar dando un ejemplo de repartición que, como podemos observar, satisface la condición de ser una repartición equitativa; sin embargo no es máxima. Es decir Luis no está tomando en cuenta las dos condiciones de repartición de la situación dada en esta sesión (que sea equitativa y máxima a la vez). Algunos de sus compañeros se percatan de esto, como podemos notar a continuación:

Profesora: *pero, ¿podría sobrar cinco?*

Yolanda: *no, tendría que repartir la mayor cantidad*

Profesora: *ah… tendría que repartir la mayor cantidad; pero si tengo 35 canicas, ¿cuántas les corresponden a cada uno de mis primos?…*

[Las opiniones de los alumnos están divididas. Algunos dicen “treinta”, otros “diez”, y algunos otros “doce”]

Notemos que Yolanda justifica que cinco no es un posible valor del residuo a partir de la noción de repartición máxima. Por otro lado, los estudiantes reflejan dudas respecto a la cantidad de canicas que le corresponderá a cada primo en una repartición equitativa y máxima de las 35 canicas.

> ***[…]***
>
> ***Thalía:*** *a cada primo le damos diez y él (Luis) le sobra cinco*
>
> ***Profesora:*** *¿puedo repartir así?*
>
> ***Jeffrie:*** *¡no!*
>
> ***Profesora:*** *¿no? ¿Por qué no?*
>
> ***Jeffrie:*** *porque, uhm, es un número más avanzado y hasta el número dos nada más nos puede quedar*

Destacamos la intervención de Jeffrie, puesto que él ha notado que dos canicas es la cantidad máxima de canicas con la que Luis se podría quedar después de la repartición a sus tres primos. Observamos que su afirmación responde a lo que hemos considerado como una conjetura (ver Capítulo 2, p. 24). Esto, como sabemos, en términos de una división con divisor 3, hace referencia al valor del residuo máximo. En realidad es a partir de esta intervención que los estudiantes empiezan a darse cuenta de que si hacemos reparticiones, los posibles valores de lo que puede sobrar después de la repartición dependen del número de personas u objetos entre los que se hace la repartición. Pensamos que cuando Jeffrie dice "*un número más avanzado*", hace referencia al número cinco; mientras que cuando dice "*hasta el número 2 nada más nos puede quedar*", se refiere a que cinco se pasa del residuo máximo dos, por lo que no se puede considerar como un posible valor del residuo.

> ***Profesora:*** *Jeffrie nos ha dicho: "como repartimos entre tres primos, nos puede quedar como máximo…" ¿Cuántas canicas?*
>
> ***Jeffrie:*** *dos*
>
> ***Profesora:*** *sí, como máximo nos pueden quedar dos canicas. Entonces ¿cuántas canicas para cada primo?*
>
> ***Jeffrie****: uhm…no se puede repartir 35 canicas entre tres primos*

De la última intervención de Jeffrie, pensamos que él hace referencia a que una repartición de 35 canicas haría que a Luis le sobren canicas; es decir, esta cantidad no sería un ejemplo en el que Luis se quede con 0 canicas después de la repartición equitativa y máxima entre 3 primos.

> ***Profesora:*** *no, pero estas 5 canicas puedes volver a repartirlas entre los tres primos, ¿cuántas canicas más daríamos a los tres primos?*

Jeffrie: *una*

Profesora: *le das una más, tendría 11 para uno de los primos. ¿Con cuántas se está quedando Luis?... Ya no le quedarían 5 a Luis, ¿verdad? ¿Con cuántas se queda [Luis]? ¿Mía?*

Mía: *dos*

Profesora: *claro, no me puedo quedar con 5 porque puedo volver a repartir estas cinco. Las vuelvo a repartir entre mis 3 primos, una para él, una para él y otra para él. ¿Con cuántas me quedo Jeffrie?*

[Haciendo una repartición de las cinco canicas entre tres alumnos]

Jeffrie: *con dos*

Profesora: *y ¿cuántas tiene cada uno de tus tres primos?*

Jeffrie: *una [él era un primo]*

Profesora: *no, pero tenían 10 cada uno de ustedes…*

Jeffrie: *ah…ahora tenemos 11*

Profesora: *ahora tienen 11. Sí, muy bien. Entonces, ¿éste puede ser un ejemplo en el que Luis se quede sin ninguna canica?*

Alumnos: *¡no!*

Profesora: *no puede ser un ejemplo*

Rescatamos que la respuesta dada por Luis (a cada primo diez canicas y a Luis cinco canicas) originó que sus compañeros justifiquen por qué cinco no puede ser un valor del residuo en una división con divisor 3, y que se empiecen a plantear conjeturas sobre el valor del residuo máximo en una división con divisor 3. Todo esto se pudo lograr en términos de reparticiones equitativas y máximas.

Es importante resaltar que una respuesta errada como la de Luis, no debe pasar desapercibida. Aquí tratamos de aprovechar estos errores para propiciar críticas, correcciones y debates por parte de sus compañeros. Asimismo, es relevante mencionar que en la corrección de una respuesta, no solo se debe aceptar que el estudiante diga “sí está bien” o “no está bien” como respuesta, si no pedir una justificación de *“¿por qué sí?* o *¿por qué no?*” con el propósito de que los estudiantes nos garanticen que entienden. Por otro lado, muchas veces las críticas, debates y justificaciones surgen gracias a los resultados erróneos de los alumnos, lo que permite reforzar y aclarar ideas, y finalmente un avance para todos.

En cuanto al desarrollo de la segunda pregunta, los ejemplos presentados por los 6 grupos por escrito son correctos en general. Del análisis de sus propuestas hemos podido percibir que los alumnos realizan el siguiente razonamiento: reparten una misma cantidad de canicas a cada uno de los tres primos y luego le agregan una canica más (lo que le quedaría a Luis), resultando un número múltiplo de tres, más uno. Es importante resaltar que el procedimiento de los alumnos reflejaba una especie de “razonamiento inverso” dado que ellos buscaban números múltiplo de tres, más uno.

A continuación mostramos ejemplos dados por dos de los seis grupos de estudiantes para el desarrollo de la segunda pregunta:

Grupo A:

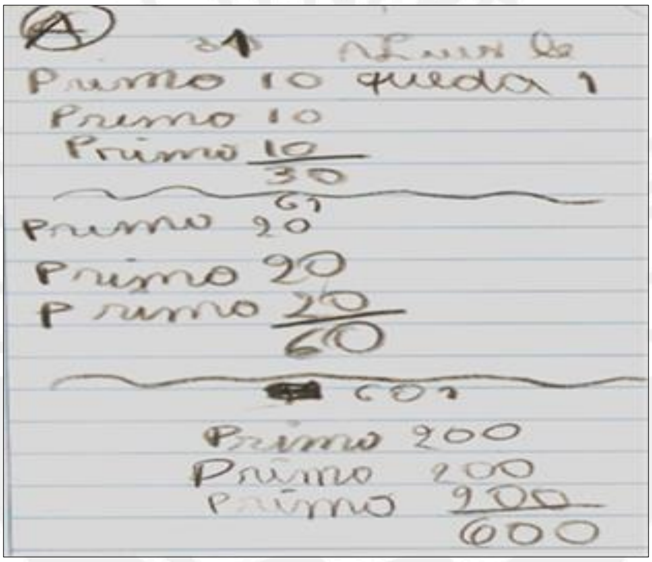


Figura 35. Hoja “borrador” de los ejemplos de repartición solicitados (Grupo A)

Notemos que estos ejemplos reflejan el razonamiento mencionado anteriormente. Los alumnos han dado una cantidad igual de canicas a cada primo, obteniendo entre ellos un número de canicas que es múltiplo de tres, para finalmente sumarle una unidad más. El grupo A estuvo trabajando inicialmente en una hoja aparte, como borrador (Fig. 35), material que solicitamos al grupo también. Lo que hacían los estudiantes era repartir a cada primo una misma cantidad de canicas, pero que además esta cantidad termine en “0”, y luego a este total le sumaban “1”, que vendría a ser lo que recibiría Luis (o equivalentemente lo que le quedaba a Luis después de la repartición). De manera indirecta (si tener conocimiento explícito de ello), podemos observar que los alumnos estaban trabajando con el algoritmo de la división.

Observemos los otros ejemplos presentados por este grupo, en lo que hemos llamado la Hoja “en limpio”.

Grupo A:

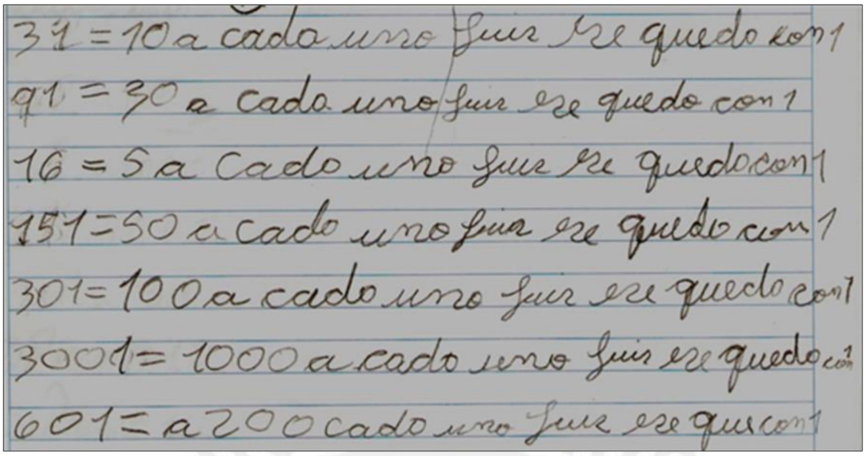


Figura 36. Hoja “en limpio” de los ejemplos de repartición solicitados (Grupo A)

Notamos además que los ejemplos presentados por el grupo A son todos correctos.

Grupo D:

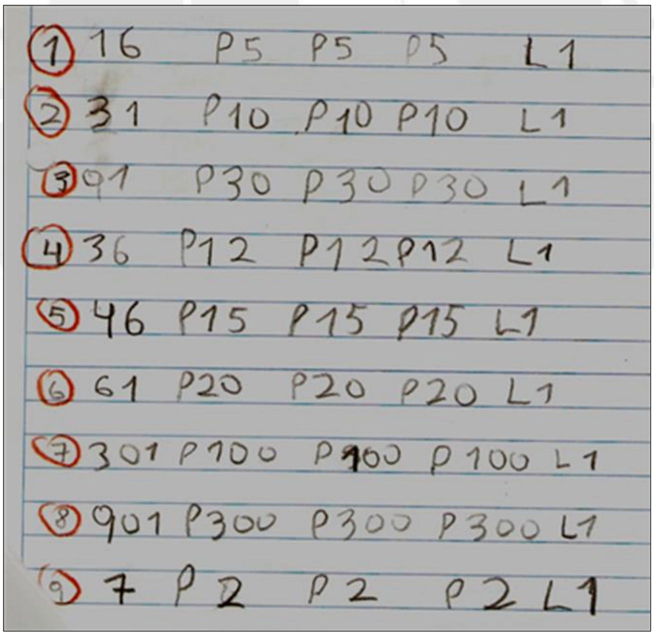


Figura 37. Ejemplos de reparticiones con residuo 1 (Grupo D)

Al igual que los ejemplos dados por el grupo A, este grupo presenta ejemplos de cantidades que cumplen las condiciones dadas para este tipo de repartición y a su vez presenta el argumento de por qué tal cantidad es un ejemplo adecuado para el tipo de repartición requerida (mediante la repartición explícita de las canicas). Sin embargo, observamos que el ejemplo 4 no es correcto. Creemos que, como el caso del grupo A, los alumnos partieron de la repartición equitativa de cierta cantidad de canicas para cada primo, para luego sumar la canica “sobrante” de Luis, obteniendo sus diferentes ejemplos. Particularmente en el ejemplo 4 pensamos que los estudiantes olvidaron sumar la canica “sobrante” (de Luis) ya que es el único ejemplo errado.

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 2

En esta sesión buscamos que los alumnos justifiquen por qué en una repartición equitativa y máxima el residuo no puede tomar ciertos valores, en base al valor específico del divisor (que en este caso es 3) y a partir de la definición de repartición máxima. Notamos que, en efecto, los alumnos logran hacer justificaciones en base a las nociones dadas de repartición, conocimientos introducidos en la sesión anterior.

Un logro importante en esta sesión ha sido el “sutil” planteamiento de una conjetura por parte de uno de los estudiantes (ver p. 115). El alumno llega a darse cuenta de que cuando se trabajan con reparticiones equitativas y máximas entre 3 sujetos (divisiones con divisor igual a 3), el valor del residuo máximo es 2.

Además, los alumnos han propuesto sus propios ejemplos de reparticiones, teniendo en cuenta los requerimientos dados en la etapa cuatro, ya sea en forma oral como en forma escrita. En esta etapa de trabajo hemos podido destacar también una observación importante. La mayoría de los grupos de trabajo desarrollan un tipo de trabajo que es compatible con el algoritmo de la división. Lo curioso es que los estudiantes NO han trabajado previamente este conocimiento.

4.3.3 Análisis de la sesión 3

- **Actividades trabajadas:** en esta sesión hemos aplicado la Ficha 1: ***"La promesa de las canicas"*** (ver Apéndice)
- **Caso de división trabajado:** esta ficha mantiene las condiciones de repartición trabajadas en la sesión anterior (división con divisor fijo 3).
- **Tipo de actividad:** individual
- **Propósitos de la sesión:** indicados en la Tabla 13 (ver pp. 79 - 80)
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** 23 alumnos.
- **Materiales:** a cada alumno se le entrega por escrito la Ficha 1.
- **Requerimientos:** esta ficha está compuesta de cinco ítems, cada uno de los cuales presenta los siguientes propósitos:

Tabla 14. Estructura de la Ficha 1

ÍTEM	PROPÓSITOS
Ítem a)	**Primera parte:** Dar 3 ejemplos de cantidades que al ser repartidas entre 3, el residuo sea igual a 0. **Segunda parte:** Determinar el número de ejemplos posibles para este tipo de repartición.
Ítem b)	**Primera parte:** Dar 3 ejemplos de cantidades que al ser repartidas entre 3, el residuo sea igual a 1. **Segunda parte:** Determinar el número de ejemplos posibles para este tipo de repartición.
Ítem c)	**Primera parte:** Dar 3 ejemplos de cantidades que al ser repartidas entre 3, el residuo sea igual a 2. **Segunda parte:** Determinar el número de ejemplos posibles para este tipo de repartición.
Ítem d)	Determinar y justificar si es posible que a Luis le queden 3 canicas después de la repartición de las canicas entre sus tres primos.
Ítem e)	Analizar y justificar si se puede dar el caso en el que a Luis le queden 4 canicas después de la repartición de las canicas entre sus tres primos.

- **Organización del análisis de las respuestas de los alumnos para la Ficha 1:** debido a la estructura que guardan los problemas propuestos, hemos organizado el análisis de la siguiente manera:

Análisis de las respuestas para los *ítems a), b) y c)*

Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 23 alumnos *(Tabla 15)*

Análisis Cualitativo de las respuestas de 5 alumnos

Análisis de las respuestas para el *ítem d)*

Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 23 alumnos *(Tabla 16)*

Análisis Cualitativo de las respuestas de 3 alumnos

Análisis de las respuestas para el *ítem e)*

Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 23 alumnos *(Tabla 17)*

Análisis Cualitativo de las respuestas de 2 alumnos

A continuación presentamos el desarrollo de estos análisis.

Análisis de las respuestas para los ítems a), b) y c)

Análisis Cuantitativo

La siguiente tabla resume el análisis cuantitativo llevado a cabo.

Tabla 15. Análisis cuantitativo para los ítems a), b) y c) de la Ficha 1

Ítem	**Primera parte**				**Segunda parte**			
	0 ejemplos correctos	**1 ejemplo correcto**	**2 ejemplos correctos**	**3 ejemplos correctos**	**Finito o algo parecido**	**Infinito o algo parecido**	**No respondió**	**Total (N° de alumnos)**
a)	0	0	0	23	2	19	2	24
b)	2	2	5	14	0	19	4	24
c)	2	3	2	16	0	16	7	24

De acuerdo a este análisis, observamos que:

- *En la primera parte* del ítem a), observamos que el 100% de los estudiantes crearon 3 ejemplos correctos para la repartición requerida. De esto podemos considerar que los estudiantes no tuvieron dificultad en reconocer los números que son divisibles entre 3. Asimismo,
- *En la segunda parte* del ítem a), observamos que 19 de los 23 alumnos (casi el 83% de los estudiantes) parecen percibir que existe una cantidad infinita de ejemplos para este caso de repartición. Los estudiantes manifiestan de diferentes maneras que existen infinitos ejemplos. Estas son algunas de las expresiones que ellos emplean y que hemos aceptado como tal tomando en cuenta el nivel eduactivo en el que se

encuentran: *muchos, un montón, muchísimos más, bastantes, infinitos, muchos y no se acaban, no sé cuántos pero hay muchos, nunca se acaban, etc*. Mientras que las respuestas de 2 de los 23 alumnos están asociadas a que hay un número finito de ejemplos para el requerimiento planteado. Estas son las expresiones que emplean: *"algunas la que se pueda"* y *"30,300,900,1500,10 y otro 60"*.

- *En la primera parte del ítem b)* observamos que 14 de los 23 alumnos (casi el 61% de los estudiantes) crearon de manera correcta los 3 ejemplos pedidos. Una obseravción importante sobre el desarrollo de este ítem es que 10 de estos 14 alumnos (poco más del 71%) crean más de un ejemplo usando números que se caracterizan por terminar en la cifra "1". Una de las razones que podemos atribuir a este tipo de razonamiento es el señalado en la etapa final de la sesión anterior. Los estudiantes pueden haber pensado en dar a cada primo una misma cantidad de canicas, que se carateriza por terminar en la cifra cero; luego, pueden haber sumado estas 3 cantidades iguales de canicas (es evidente que la suma es un número que terminará en cero); y después pueden haber agregado 1 canica al final, ya que sería la canica que le sobraría a Luis después de la repartición, que es requerimiento de este ítem (ver por ejemplo la Fig. 40). En otras palabras estos alumnos aceptan de manera intuitiva que éste es un mecanismo (que como hemos mencionado en la sesión anterior: lo relacionamos con el algoritmo de la división) para obtener ejemplos de cantidades de canicas que al ser repartidas entre 3 personas, sobre 1 canica al finalizar la repartición. Esto, como sabemos, no es otra cosa sino ejemplos de múltiplos de 3, más 1.
- *En la segunda parte* del ítem b), 19 de los 23 alumnos (casi el 83% de los estudiantes) parecen percibir que existe una cantidad infinita de ejemplos para este caso de repartición. Estos alumnos emplean expresiones similares a las usadas para la segunda parte del ítem a).
- *En la primera parte del ítem c),* 16 de los 23 alumnos (casi el 70% de los estudiantes) crearon correctamente los 3 ejemplos solicitados. Cabe resaltar que 12 de estos 16 alumnos (el 75%) crearon más de un ejemplo con cantidades (de canicas) que se caracterizan por terminar en la cifra "2". Creemos que una de las razones es el uso de un razonamiento análogo al empleado para dar ejemplos como los dados para el ítem b).
- *En la segunda parte* del ítem c), 16 de los 23 alumnos (casi el 70% de los estudiantes) afirman, de diferentes maneras, que existe una cantidad infinita de ejemplos para este

caso de repartición. Esto se ve reflejado en sus respuestas, en las que emplean expresiones similares a las presentadas para los ítems a) y b).

Análisis cualitativo

A continuación incluimos un comentario general, así como las respuestas de algunos alumnos:

Hemos observado que los estudiantes han empleado, para sus ejemplos, cantidades (de canicas) de dos, tres o cuatro cifras sin que resulte difícil para ellos hacer reparticiones equitativas y máximas con estos números.

Mía:

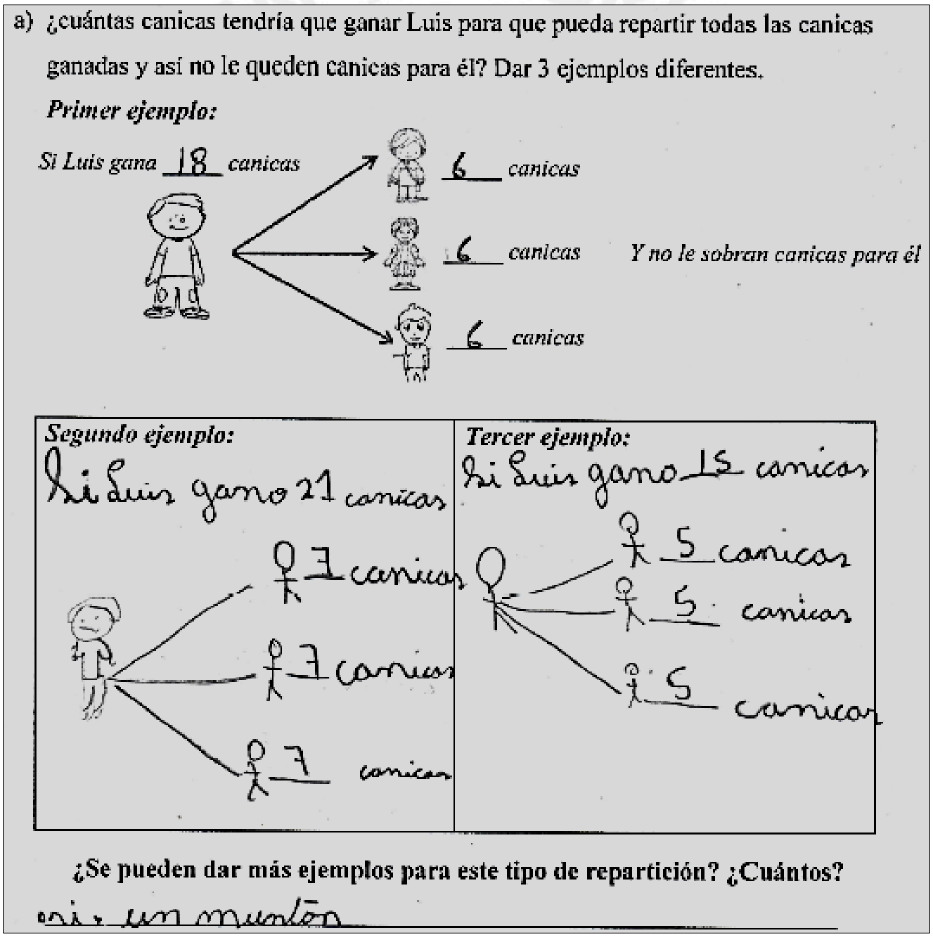


Figura 38. Respuesta de Mía para el ítem a)

Esta es la muestra de una alumna que da los 3 ejemplos correctos de repartición equitativa y máxima para el ítem a), y que además mantiene el modelo de presentación propuesto en el primer ejemplo para crear su segundo y tercer ejemplo. Mía es uno de los 19 alumnos que perciben que hay infinitos ejemplos para este caso concreto de repartición.

Jeffrie:

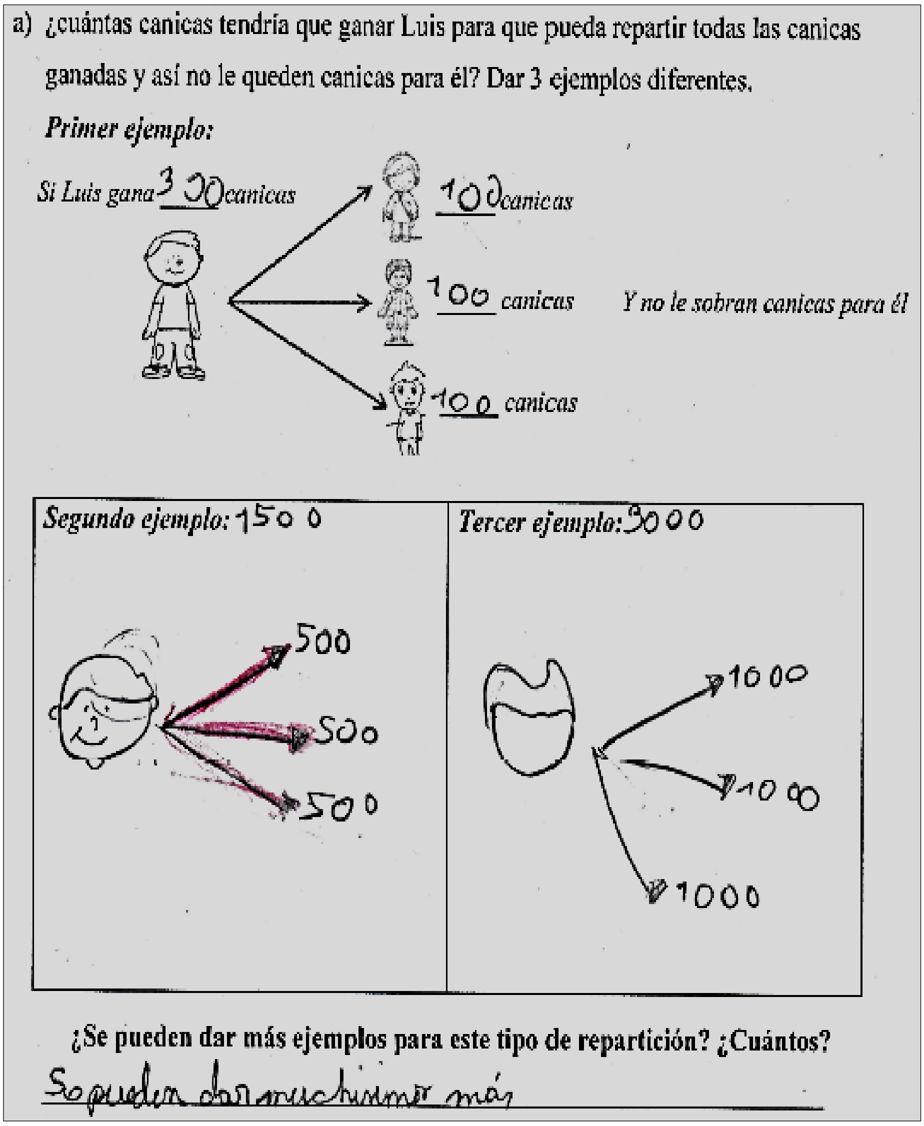
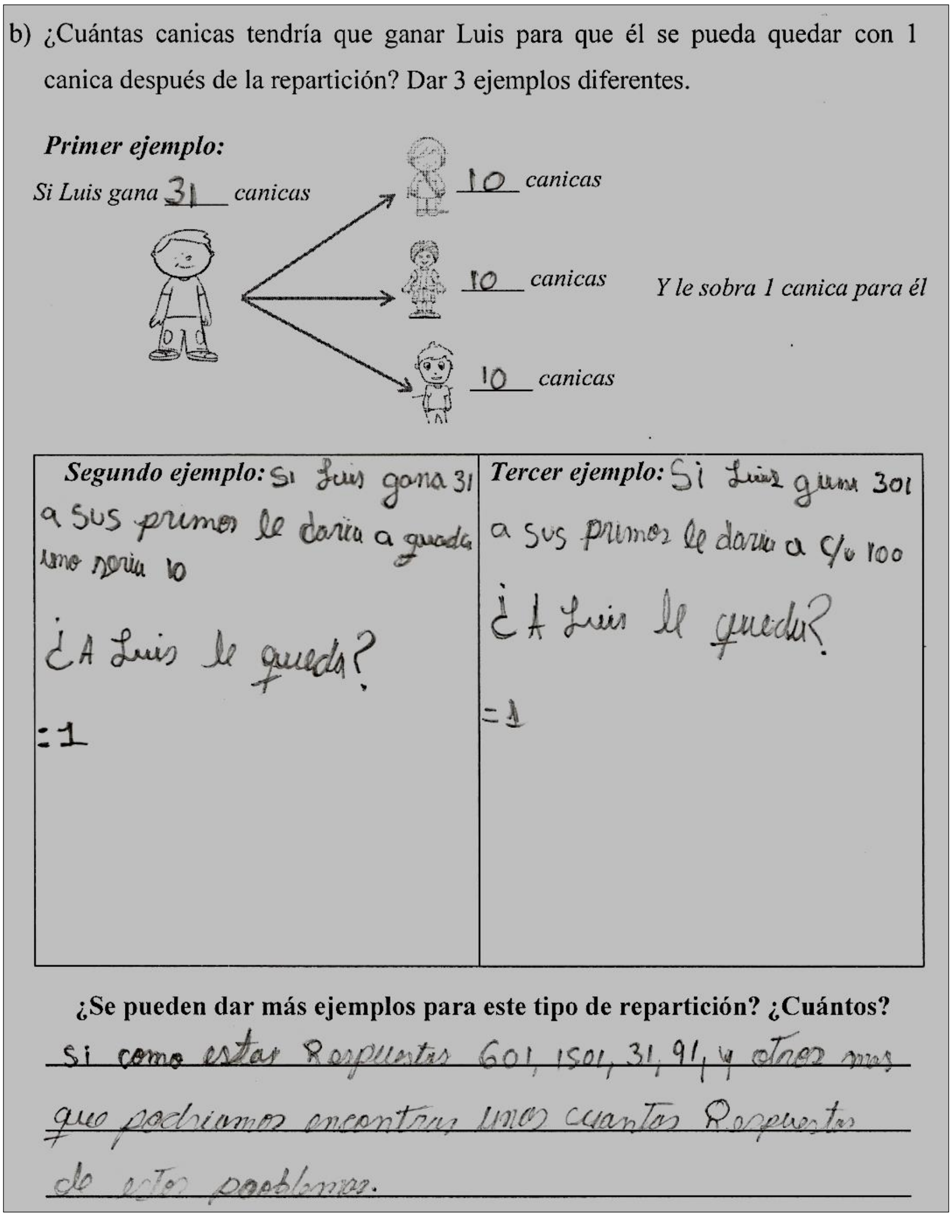


Figura 39. Respuesta de Jeffrie para el ítem a)

Notamos que el alumno presenta ejemplos correctos de repartición equitativa y máxima para el ítem a). En particular emplea números que se caracterizan por tener como últimas cifras ceros. Creemos que Jeffrie se ha dado cuenta de que como 3 y 15 son cantidades, divisibles entre 3, si él agrega ceros a la derecha de estos números él seguirá obteniendo números divisibles entre 3. Esto puede haber permitido que el alumno conjeture que existen infinitos ejemplos para este tipo de repartición, ya que puede agregar cuantos ceros desee y siempre seguirá obteniendo diferentes números divisibles entre 3.

Chris:



b) ¿Cuántas canicas tendría que ganar Luis para que él se pueda quedar con 1 canica después de la repartición? Dar 3 ejemplos diferentes.

Primer ejemplo:

Si Luis gana 31 *canicas*

10 *canicas*

10 *canicas*

10 *canicas*

Y le sobra 1 canica para él

Segundo ejemplo: Si Luis gana 31 a sus primos le daria a guada uno seria 10

¿A Luis le queda?

=1

Tercer ejemplo: Si Luis gana 301 a sus primos le daria a c/u 100

¿A Luis le queda?

=1

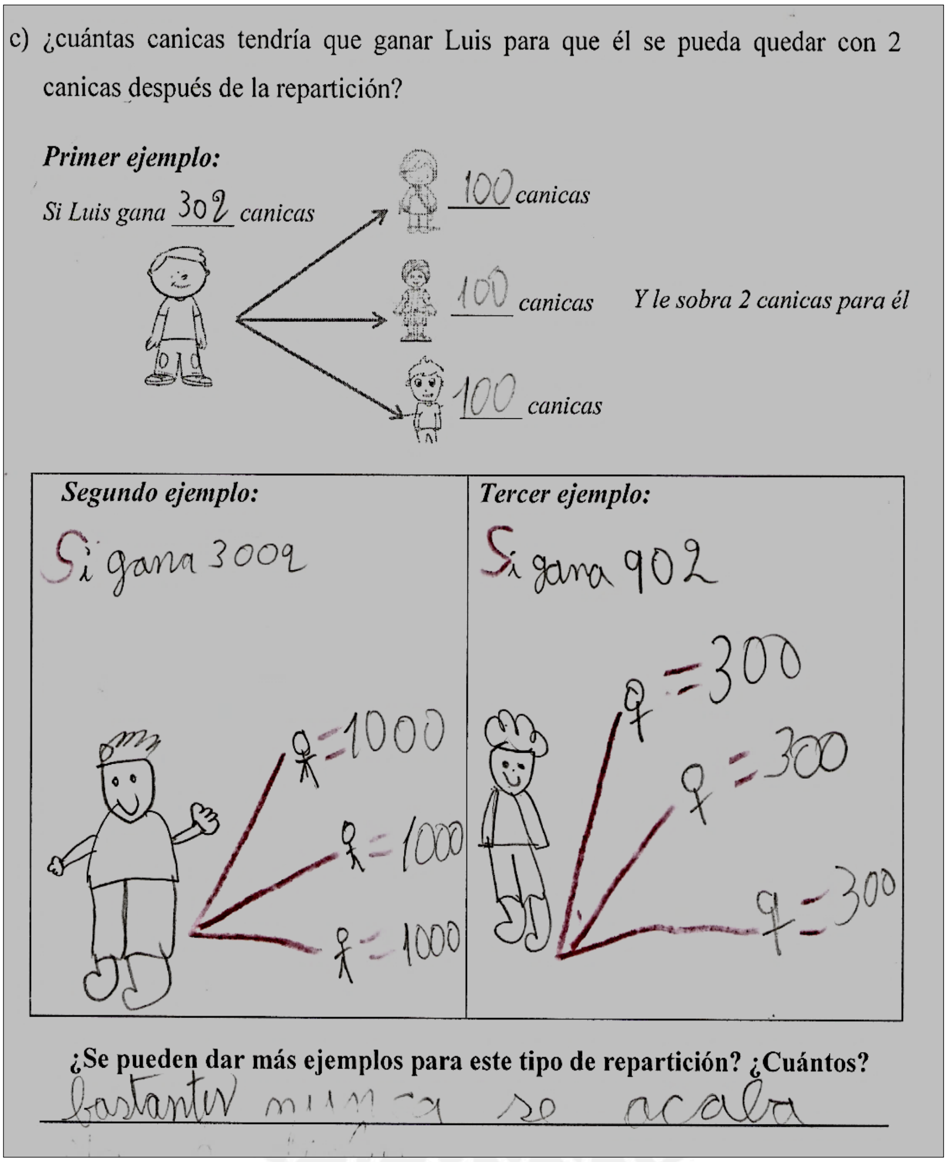
¿Se pueden dar más ejemplos para este tipo de repartición? ¿Cuántos?

si como estas Respuestas 601, 1501, 31, 91, y otros mas que podriamos encontrar unos cuantos Respuestas de estos problemas.

Figura 40. Respuesta de Chris para el ítem b)

El alumno muestra ejemplos correctos para este tipo de repartición. Observemos que Chris es original en la presentación de sus ejemplos ya que su segundo y tercer ejemplo tienen un modelo diferente al de la muestra dada. El alumno incluso plantea preguntas que él mismo responde. Notemos que Chris es uno de los 10 alumnos que presentan ejemplos con números que se caracterizan por tener como última cifra "1". Por esta razón pensamos que la respuesta de Chris para la segunda parte de este ítem hace referencia a un número infinito de ejemplos para este tipo de repartición.

Anayely:



c) ¿cuántas canicas tendría que ganar Luis para que él se pueda quedar con 2 canicas después de la repartición?

Primer ejemplo:

Si Luis gana 302 *canicas*

100 *canicas*

100 *canicas*

100 *canicas*

Y le sobra 2 canicas para él

Segundo ejemplo:	*Tercer ejemplo:*
Si gana 3002	Si gana 902
=1000	=300
=1000	=300
=1000	=300

¿Se pueden dar más ejemplos para este tipo de repartición? ¿Cuántos?

bastantes nunca se acaba

Figura 41. Respuesta de Anayely para el ítem c)

Observemos que los 3 ejemplos dados por la alumna son correctos. Anayely es una de los 12 alumnos que, para dar sus ejemplos, emplea números que se caracterizan por tener como última cifra “2”. Notemos que la respuesta de Anayely para la segunda parte de este ítem evidencia que la alumna percibe que existen infinitos ejemplos para este tipo de repartición ya que escribe *“bastantes nunca se acaba”*.

Felipe:

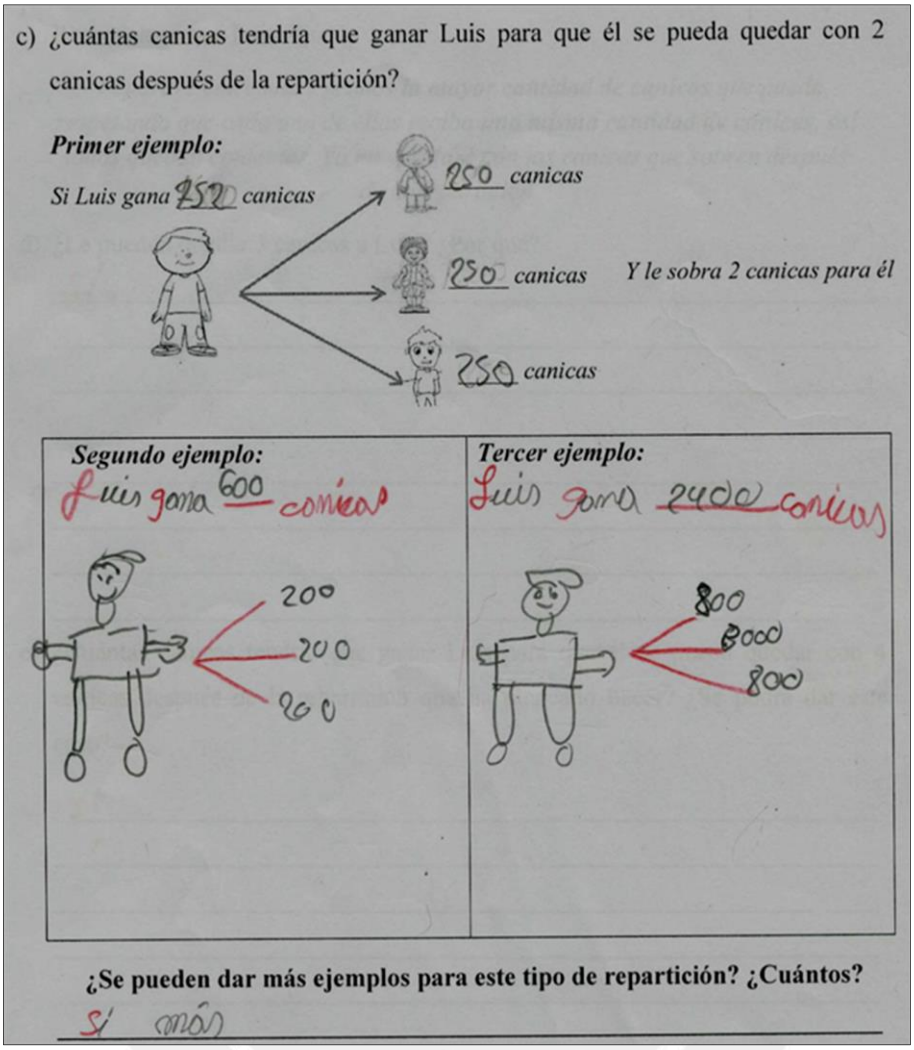


Figura 42. Respuesta de Felipe para el ítem c)

Observemos que Felipe empieza dando un ejemplo correcto, considerando el caso de repartición solicitado en este ítem. Sin embargo, en el segundo y el tercer ejemplo que da no parece percatarse de que el requerimiento es sobre este mismo tipo de repartición, y trabaja tomando en cuenta las condiciones dadas en el ítem a).

Análisis de las respuestas para el ítem d)

Análisis Cuantitativo

Tabla 16. Análisis cuantitativo para el ítem d) de la Ficha 1

Respuestas								
No respondió (en blanco)	**Respuesta correcta** (el alumno escribió NO)				**Respuesta incorrecta** (el alumno escribió SÍ)			**Total (N° de alumnos)**
	No justifica	No codificable	Su justificación se basa en un ejemplo (Nivel 1)	Su justificación se basa en la definición de repartición máxima (Nivel 3)	Solo responde que sí	No codificable	Hacen referencia de manera equivocad a a la repartición máxima	
6	**1**	**1**	**1**	**6**	**3**	**2**	**3**	**23**

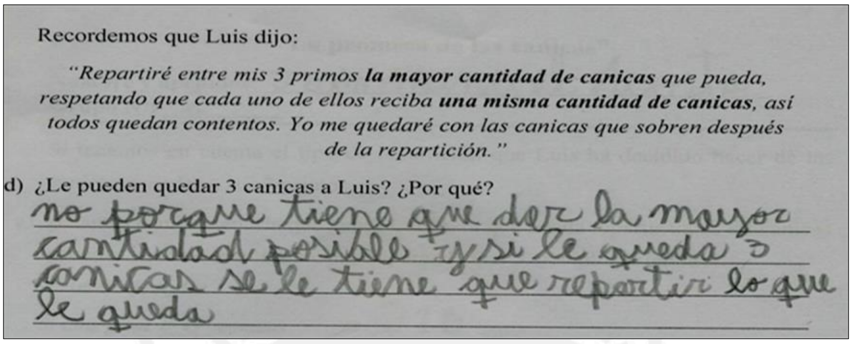
Ampliando la información de esta tabla, hemos observado que:

- 9 de los 23 alumnos (poco más del 39% de los estudiantes) muestran respuestas correctas: 7 de ellos proporciona una justificación para su respuesta, ya sea con un ejemplo (1 alumno) o de manera general (6 alumnos), nivel 1 y nivel 3 respectivamente según los niveles de producción de demostración matemática del capítulo 2. Mientras que el argumento de 1 de estos 9 alumnos se clasifica como no codificable, ya que éste no tiene sentido.
- Por otro lado, 8 de los 23 estudiantes (casi el 35% de los estudiantes) han manifestado de manera equivocada que sí, Luis se puede quedar con tres canicas después de la repartición. 3 de estos 8 alumnos tratan de explicar su respuesta dando ejemplos de reparticiones que cumplen solo con la condición de repartición equitativa, pero no con la condición de repartición máxima. Mientras que 2 de estos 8 alumnos muestran argumentos que son clasificados como no codificables, debido a que presentan argumentos correctos, (es decir que hacen referencia a la condición de repartición máxima); sin embargo, la respuesta (sí) y los argumentos dados son contradictorios. Aunque esto nos podría llevar a pensar que estos 2 alumnos podrían haber entendido este ítem (por sus argumentos), esta suposición se ve también contradicha ya que en sus argumentos para el siguiente ítem (e) no tienen en cuenta la condición de repartición máxima.

- Además, 6 de los 23 estudiantes (un poco más del 26% de los estudiantes) no muestra respuesta alguna en este ítem. Consideramos que esto se ha debido principalmente a que los estudiantes no contaron con tiempo suficiente para estos cuestiones de tiempo.

Análisis cualitativo

Manuel:


Recordemos que Luis dijo:

*"Repartiré entre mis 3 primos **la mayor cantidad de canicas** que pueda, respetando que cada uno de ellos reciba **una misma cantidad de canicas**, así todos quedan contentos. Yo me quedaré con las canicas que sobren después de la repartición."*

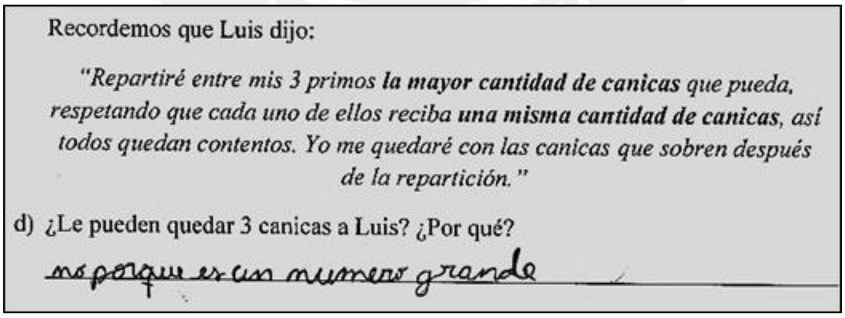
d) ¿Le pueden quedar 3 canicas a Luis? ¿Por qué?

no porque tiene que dar la mayor cantidad posible y si le queda 3 canicas se le tiene que repartir lo que le queda

Figura 43. Respuesta de Manuel para el ítem d).

Manuel es uno de los 6 alumnos que presenta una respuesta correcta y cuya justificación es general, ya que argumenta que Luis no puede quedarse con 3 canicas en base a su definición de repartición máxima. Asimismo, consideramos que la respuesta del alumno es completa puesto que hace referencia a la redistribución que se puede realizar de las 3 canicas "sobrantes". La justificación de Manuel, de acuerdo a los niveles de demostración presentados en el capítulo 2 de la tesis, estaría categorizada en el nivel 3.

Jeffrie:


Recordemos que Luis dijo:

*"Repartiré entre mis 3 primos **la mayor cantidad de canicas** que pueda, respetando que cada uno de ellos reciba **una misma cantidad de canicas**, así todos quedan contentos. Yo me quedaré con las canicas que sobren después de la repartición."*

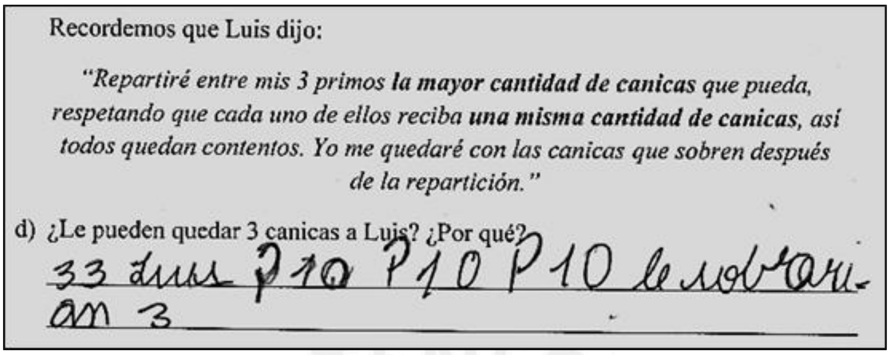
d) ¿Le pueden quedar 3 canicas a Luis? ¿Por qué?

no porque es un numero grande

Figura 44. Respuesta de Jeffrie para el ítem d).

Notemos que la respuesta de Jeffrie es correcta (Jeffrie escribe "no"), pero en su argumento no explica exactamente por qué Luis no puede quedarse con 3 canicas. Creemos que la expresión "es un número grande" no guarda sentido con el argumento correcto para esta pregunta, en el que se espera que la explicación esté dada en términos de la noción de repartición máxima. Jeffrie es 1 de los 9 alumnos que presenta una respuesta correcta, pero su argumento se considera no codificable.

Renzo:


Recordemos que Luis dijo:

*"Repartiré entre mis 3 primos **la mayor cantidad de canicas** que pueda, respetando que cada uno de ellos reciba **una misma cantidad de canicas**, así todos quedan contentos. Yo me quedaré con las canicas que sobren después de la repartición."*

d) ¿Le pueden quedar 3 canicas a Luis? ¿Por qué?

33 luis P10 P10 P10 le sobrarian 3

Figura 45. Respuesta de Renzo para el ítem d).

Notemos que el alumno no escribe un sí como respuesta, pero se puede deducir que este es el caso ya que presenta un ejemplo concreto de esta posibilidad. Renzo es 1 de los 3 alumnos que muestra una respuesta incorrecta y cuyo argumento no contempla que la repartición ha de ser máxima.

Análisis de las respuestas para el ítem e)

Análisis cuantitativo

Tabla 17. Análisis cuantitativo para el ítem e) de la Ficha 1

Respuestas					
No respondió (en blanco)	**Respuesta correcta** (el alumno escribió NO)		**Respuesta incorrecta** (el alumno escribió SÍ)		**Total (N° de alumnos)**
	Justifica (Su justificación se basa en la definición de repartición máxima) Nivel 3	No justifica	Solo responde que sí	Da un ejemplo equivocado	
10	**3**	**1**	**1**	**8**	**23**

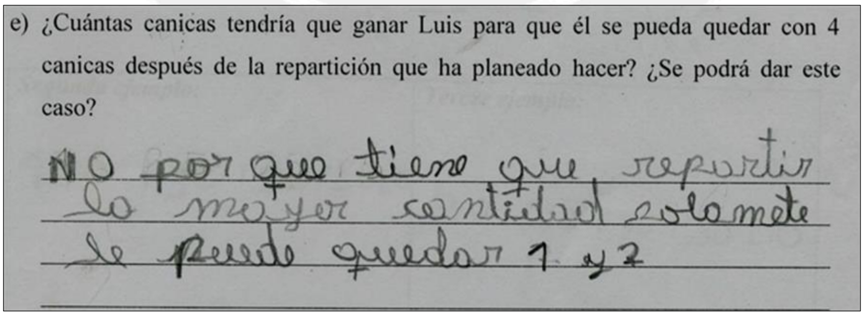
A partir de esta tabla, observamos que:

- Solo 4 de los 23 alumnos dan una respuesta correcta (un poco más del 17% de los estudiantes). Cabe resaltar que 3 de estos 4 alumnos (el 75% de estos alumnos) proporcionan además una justificación para sus respuestas, aunque este no sea un requerimiento explícito para este ítem. Estos argumentos pueden ser considerados justificaciones matemáticas puesto que se ubican en el nivel 3 de los niveles de producción de demostración matemática presentados en el capítulo 2.

- Por otro lado, 9 de los 23 alumnos (poco más del 39 % de los alumnos) han considerado de manera equivocada que sí es posible dar ejemplos para este caso concreto de repartición. 8 de estos 9 alumnos proporcionan ejemplos de número de canicas con sus respectivas reparticiones, que satisfacen la condición de una repartición equitativa, pero no la condición de una repartición máxima.
- A diferencia del ítem d), en este ítem ha habido un incremento en el número de respuestas en blanco. Observamos que 10 de los 23 alumnos (poco más del 43% de los estudiantes: una cantidad considerable) no ha proporcionado respuesta alguna para este ítem. Pensamos que esto se debe básicamente a que los alumnos no contaron con el tiempo suficiente para culminar con su trabajo.
- Es importante notar que de los 6 alumnos que presentan una respuesta y justificación correcta para el ítem (d), 3 de ellos cometen error luego en este ítem (e) al colocar un ejemplo concreto de una repartición equitativa y máxima en la que pueden sobrar 4 canicas. Creemos que el factor tiempo podría haber llevado a los alumnos a presentar una respuesta rápida y errada.

Análisis cualitativo

Luis:

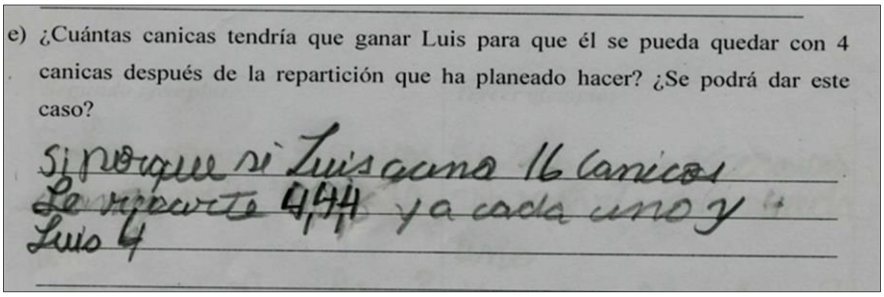

e) ¿Cuántas canicas tendría que ganar Luis para que él se pueda quedar con 4 canicas después de la repartición que ha planeado hacer? ¿Se podrá dar este caso?

NO por que tiene que repartir
lo mayor cantidad solomete
se puede quedar 1 y 2

Figura 46. Respuesta de Luis para el ítem e).

Notemos que la justificación dada por Luis es correcta. Su argumento está basado en la condición de repartición máxima. A su vez vemos que el estudiante muestra dos (1 y 2) de los tres posibles valores (0, 1 y 2) para el residuo en una división con divisor igual a 3, que en este caso hace referencia a la cantidad de canicas con las que Luis se podría quedar después de la repartición.

Jhosetp:


e) ¿Cuántas canicas tendría que ganar Luis para que él se pueda quedar con 4 canicas después de la repartición que ha planeado hacer? ¿Se podrá dar este caso?

Si porque si Luis gana 16 canicos
Le reparte 4,4,4 y a cada uno y
Luis 4

Figura 47. Respuesta de Jhosetp para el ítem e)

Notemos que la respuesta dada por el alumno, así como su argumento, son incorrectos dado que presenta un ejemplo de repartición que cumple la condición de repartición equitativa, pero no la condición de repartición máxima. Jhosetp es 1 de los 8 alumnos que muestra una respuesta incorrecta en el que propone como argumento un ejemplo equivocado.

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 3

En esta sesión hemos podido concluir lo siguiente:

- Para medir el avance de los estudiantes en lo que respecta a la comprensión de lo que es una repartición equitativa y máxima hemos considerado los resultados de la primera parte de los ítems a), b) y c). Este análisis refleja que más del 60% (en los 3 casos) parece haber entendido y aplicado estas nuevas nociones correctamente.
- Más del 65% de los estudiantes parece haber percibido la existencia de infinitos ejemplos para los casos de repartición involucrados en la actividad. Observemos que esto hace referencia indirecta a la existencia de infinitos múltiplos de 3, así como la existencia de infinitos números que no son múltiplos de 3.
- Solo un poco más del 39% de los alumnos responde correctamente que a Luis no le pueden quedar 3 canicas. Esto, como sabemos, hace referencia a que 3 no es un posible valor del residuo cuando el divisor es 3. Casi el 78% de estos alumnos presentan una justificación válida.
- Asimismo solo un poco más del 17% de los alumnos responde correctamente que a Luis NO le pueden quedar 4 canicas. Esto, como sabemos, hace referencia a que 4 no es un posible valor del residuo cuando el divisor es 3.
- Consideramos que en el desarrollo de esta actividad interfirieron diferentes factores, tales como:
  - El número de hojas que forma parte de esta ficha (4 hojas), lo que resultó tedioso a los estudiantes y por lo que algunos alumnos mostraban una mala disposición al trabajar.
  - El tiempo reducido con el que contaban los alumnos para el desarrollo de los dos últimos ítems, ya que los estudiantes invirtieron demasiado tiempo en el desarrollo de los tres primeros ítems (en los dibujos, en crear sus ejemplos, etc.).

Creemos que es principalmente debido a estos factores que se incrementa de manera considerable (de 6 a 10) el número de alumnos que no responde a los ítems d) y e) respectivamente.

Esta experiencia nos sirvió para replantear lo propuesto inicialmente para las fichas siguientes.

4.3.4 Análisis de la sesión 4

- **Actividades trabajadas:** indicadas en la Tabla 13 (ver p. 80).
- **Tipo de actividad:** Trabajo individual y Trabajo de clase.
- **Propósitos de la sesión:** indicados en la Tabla 13.
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** 21 estudiantes.
- **Caso de división trabajado:** división con divisor fijo 3, 4 y 5.
- **Materiales:** a cada alumno se le entrega por escrito la Ficha 2.
- **Etapas que conforman esta sesión:**

Etapa 1	→	Aplicamos la ficha 2: "*Reparticiones equitativas y máximas*" (Trabajo individual)
Etapa 2	→	Trabajo de clase

Es importante resaltar que de manera indirecta, en estas dos etapas, estamos evaluando el manejo de las nociones de repartición equitativa y máxima, ya que si un estudiante no logra reconocer los posibles valores del residuo es porque con seguridad no ha logrado asimilar alguna de estas nociones que son básicas para nuestro trabajo.

ETAPA 1

- **Requerimientos:** la ficha aplicada en esta etapa está compuesta de 2 ítems, cada uno de los cuales presenta los siguientes propósitos:

Tabla 18. Estructura de la Ficha 2

ÍTEM	PROPÓSITOS
Ítem a)	**Primera parte:** dado un número específico de canicas a ser repartidas en forma equitativa y máxima, determinar la cantidad de canicas: - que le corresponderá a cada uno de los 3 primos de Luis (cociente), - que le sobrará a Luis después de la repartición (residuo). **Segunda parte:** se presentan tres tipos diferentes de reparticiones equitativas y máximas incompletas: - dado el cociente y el residuo, determinar el número de canicas que Luis debía ganar (debían llegar a la respuesta: 31 canicas, que viene a ser el dividendo); - dado únicamente el valor del residuo, proponer uno de los infinitos ejemplos que pueden ser dados para el dividendo y cociente; y - dado únicamente el valor del cociente, dar cualquiera de los tres posibles ejemplos para el residuo (0, 1 o 2) y el dividendo (que en función del valor del residuo solo podría tomar uno de los valores: 96, 97 o 98, respectivamente).
Ítem b)	Analizar si en una repartición equitativa y máxima con divisor igual a 3, el valor del residuo puede ser igual a 3.

- **Organización del análisis de las respuestas de los alumnos para la Ficha 2:** seguiremos el orden del siguiente esquema:

Análisis de las respuestas para el *ítem a)*

- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 21 alumnos para la primera parte del ítem a) *(Tabla 19)*
- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 21 alumnos para la segunda parte del ítem a) *(Tabla 20)*
- Análisis Cualitativo de las respuestas de 3 alumnos para el ítem a)

Análisis de las respuestas para el *ítem b)*

- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 21 alumnos para la primera pregunta del ítem b) *(Tabla 21)*
- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 21 alumnos para la segunda pregunta del ítem b) *(Tabla 22)*
- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 21 alumnos para la tercera pregunta del ítem b) *(Tabla 23)*
- Análisis Cualitativo de las respuestas de 3 alumnos para el ítem b)

A continuación mostramos el desarrollo de estos análisis.

<u>Análisis de las respuestas para el ítem a)</u>

Análisis Cuantitativo

Tabla 19. Análisis cuantitativo para la primera parte del ítem a) de la Ficha 2

Primera parte del ítem a)								
Casos	**Dividendo**	**Cociente**			**Residuo**			**Total (N° de alumnos)**
		En blanco	**Correcto**	**Incorrecto**	**En blanco**	**Correcto**	**Incorrecto**	
1°)	**18** canicas	0	20	1	0	20	1	21
2°)	**19** canicas	0	20	1	0	20	1	21
3°)	**20** canicas	1	14	6	1	15	5	21
4°)	**21** canicas	1	14	6	1	14	6	21
5°)	**22** canicas	1	15	5	1	13	7	21
6°)	**23** canicas	2	13	6	2	6	13	21
7°)	**35** canicas	2	10	9	2	10	9	21

A partir de esta tabla, observamos que:

- Para los dos primeros casos de repartición (18 y 19 canicas respectivamente), observamos que un poco más del 95% de los alumnos han podido completar correctamente la cantidad de canicas que le corresponde a cada primo (el cociente) y la cantidad de canicas que le sobran a Luis (el residuo) después de la repartición.
- Para el tercer y cuarto caso de repartición (20 y 21 canicas respectivamente), notamos que casi el 67% de los alumnos han completado correctamente el valor del cociente y del residuo. Observemos que curiosamente el número de alumnos que da correctamente el valor del residuo en el tercer caso se incrementa en uno. Es decir que hay un alumno que aunque da incorrectamente el valor del cociente, muestra el valor correcto del residuo. Esto puede deberse a la secuencia de los valores de la columna de los residuos (0, 1 y 2).
- Para el quinto caso de repartición (22 canicas respectivamente) el porcentaje de respuestas correctas se ve ligeramente incrementado donde se solicita el valor del cociente (poco más del 71%). Sin embargo, vemos que esto NO se ve igualmente reflejado donde se solicita el valor del residuo, donde este porcentaje decae a casi el 62%.
- Asimismo podemos observar un incremento en el número de respuestas incorrectas en los dos últimos casos de repartición (reparticiones de 23 y 35 canicas respectivamente). Estos parecen ser para los estudiantes casos más retadores de repartición en comparación con los casos anteriores (reparticiones de 18, 19, 20, 21 y 22 canicas). Curiosamente notamos que los estudiantes tienen mayor dificultad al completar de manera correcta el valor del residuo en el caso particular de la repartición de las 23 canicas ya que de los 13 alumnos que dan correctamente el valor del cociente, solo 6 de ellos dan el valor correcto del residuo.

La siguiente tabla muestra el análisis para la segunda parte del ítem a)

Tabla 20. Análisis cuantitativo para la segunda parte del ítem a) de la Ficha 2

Segunda parte del ítem a)									
Dividendo			**Cociente**			**Residuo**			
En blanco	**Correcto**	**Incorrecto**	**En blanco**	**Correcto**	**Incorrecto**	**En blanco**	**Correcto**	**Incorrecto**	**TOTAL (N° de alumnos)**
2	18	1	**10 canicas**			**1 canica**			21
3	15	3	3	15	3	**2 canicas**			21
3	18	0	3	18	0	**0 canicas**			21
4	16	1	**32 canicas**			4	16	1	21
4	16	1	4	16	1	**1 canica**			21

Ampliando la información de esta tabla, hemos observado que:

- De manera general, más del 71% de los alumnos responde de manera correcta a los cinco casos que conforman la segunda parte del ítem a).
- Asimismo, menos del 20% de los estudiantes deja en blanco alguno de estos cinco casos de repartición.
- De este análisis podemos pensar que este tipo de problemas (segunda parte del ítem a) permite a los alumnos coordinar el valor del dividendo, con el valor del cociente y del residuo a la vez. Esto lo vemos reflejado en la coherencia en el número de respuestas correctas e incorrectas para cada pedido de los 4 últimos ítems (Por ejemplo para el último ítem hay 16 alumnos que dan valores correctos para el dividendo y el cociente, así como 1 alumno que se equivoca en estos 2 rubros).

Análisis cualitativo

Ana Lucía:

a) Completa la siguiente tabla con datos adecuados para que Luis haga reparticiones equitativas y máximas de las canicas ganadas entre sus 3 primos.

Si Luis gana...	a cada primo le corresponden...	Sobran para Luis...
18 canicas	6	0
19 canicas	6	1
20 canicas	6	2
21 canicas	7	0
22 canicas	7	1
23 canicas	7	2
35 canicas	11	2
31 canicas	10 canicas	1 canica
11 canicas	3 canicas	2 canicas
15 canicas	5 canicas	0 canicas
97 canicas	32 canicas	1 canicas
7 canicas	2 canicas	1 canica

Figura 48. Respuesta de Ana Lucía para el ítem a).

La alumna ha completado correctamente la primera y segunda parte de este ítem con cantidades de canicas que satisfacen los datos y los requerimientos dados. Desde nuestra perspectiva, la alumna ha podido identificar los posibles valores del residuo ya que concretamente ha considerado en la penúltima fila uno de los tres únicos valores posibles que puede tomar el residuo en este caso, después de una repartición equitativa y máxima.

Luis Miguel:

a) Completa la siguiente tabla con datos adecuados para que Luis haga reparticiones equitativas y máximas de las canicas ganadas entre sus 3 primos.

Si Luis gana…	a cada primo le corresponden…	Sobran para Luis…
18 canicas	6 canicas	0 canica
19 canicas	6 canicas	1 canica
20 canicas	6 canicas	2 canica
21 canicas	7 canicas	0 canicas
22 canicas	6 canicas	4 canicas
23 canicas	6 canicas	0 canica
35 canicas	7 canicas	0 canica
31 canicas	10 canicas	1 canica
92	30 canicas	2 canicas
300 canicas	100 canicas	0 canicas
92	32 canicas	2 canicas
901	90	1 canica

Figura 49. Respuesta de Luis Miguel para el ítem a).

Luis Miguel ha completado correctamente los cuatro primeros casos de repartición de la primera parte del ítem a): reparticiones de 18, 19, 20 y 21 canicas. Sin embargo, en los tres casos siguientes (22, 23 y 35 canicas) ha completado los espacios en blanco con cantidades incorrectas para el cociente y el residuo. Notemos que el alumno no considera la condición de repartición máxima, por ejemplo, para el caso de repartición de 22 canicas. En cuanto a la segunda parte de este ítem, observamos que el alumno ha completado las primeras tres filas con cantidades correctas. Mientras que en los dos últimos casos da ejemplos incorrectos. Cabe resaltar que Luis Miguel es el único alumno que comete error en el penúltimo caso del ítem a).

Julio César:

a) Completa la siguiente tabla con datos adecuados para que Luis haga reparticiones equitativas y máximas de las canicas ganadas entre sus 3 primos.

Si Luis gana...	a cada primo le corresponden...	Sobran para Luis...
18 canicas	6	0
19 canicas	6	1
20 canicas	6	2
21 canicas	6	3
22 canicas	6	4
23 canicas	6	5
35 canicas	10	5
31	10 canicas	1 canica
32	10	2 canicas
30	10	0 canicas
96	32 canicas	0
97	32	1 canica

Figura 50. Respuesta de Julio César para el ítem a)

Notemos que las respuestas dadas por el alumno en cuanto a la primera parte del ítem a) son correctas cuando tiene en cuenta que Luis gana 18, 19 y 20 canicas respectivamente. Sin embargo, para los cuatro casos siguientes (reparticiones de 21, 22, 23 y 35 canicas), el alumno ha completado los espacios en blanco con cantidades incorrectas tanto para el cociente, como para el residuo. Creemos que específicamente para los casos de repartición de las 21, 22 y 23 canicas, el estudiante ha mantenido "el patrón" que había identificado erróneamente para los tres casos anteriores (el cociente es 6, y el residuo iba aumentado de uno en uno). No obstante, cuando el alumno pasa al caso de la repartición de las 35 canicas, al darse cuenta de que el número de canicas a ser repartidas no era el número entero inmediato posterior a 23, el alumno "rompe su patrón" y coloca un ejemplo de repartición equitativa, que no es máxima. Curiosamente en la segunda parte del ítem a), el alumno da ejemplos correctos de reparticiones equitativas y máximas, completando adecuadamente lo que se le indica. Creemos que como la estructura de la segunda parte del ítem a) es diferente a la estructura de los casos de la primera parte (todos los problemas tienen el mismo requerimiento: determinar el valor del cociente y del residuo), el alumno se ve obligado a pensar mejor en los ejemplos concretos que propondrá para que las reparticiones equitativas y máximas sí guarden coherencia.

<u>**Análisis de las respuestas para el ítem b)**</u>

Análisis Cuantitativo

Tabla 21. Análisis cuantitativo para la primera pregunta del ítem b) de la Ficha 2

Respuestas							
No respondió (en blanco)	No codificable	**Respuesta correcta** (el alumno escribió CARLITA)				**Respuesta incorrecta** (el alumno escribió JOSELITO)	**TOTAL** **(N° de alumnos)**
		Su justificación es no codificable	Su justificación se basa en los posibles valores del residuo	Su justificación se basa en la redistribución	Su justificación se basa en la definición de repartición máxima		
1	**1**	**1**	**3**	**7**	**8**	**0**	**21**

Tabla 22. Análisis cuantitativo para la segunda pregunta del ítem b) de la Ficha 2

Respuestas							
No respondió (en blanco)	No codificable	**Respuesta correcta** (el alumno escribió SÍ)			**Respuesta incorrecta** (el alumno escribió NO)	**TOTAL** **(N° de alumnos)**
		En cuanto a la redistribución				
		Es claro que se debe dar una canica más a cada primo	El alumno da directamente el número de canicas que le corresponde a cada primo después de la redistribución	El alumno dice que sí aunque no muestra cómo se debe hacer la redistribución		
1	**1**	**12**	**5**	**2**	**0**	**21**

Tabla 23. Análisis cuantitativo para la tercera pregunta del ítem b) de la Ficha 2

Respuestas					
No respondió (en blanco)	No codificable	**Respuesta correcta**		**Respuesta incorrecta**	
		Respuesta Completa	**Respuesta Incompleta**		
		El alumno escribió: 5 canicas a cada primo y 0 canicas a Luis	El alumno escribió únicamente: 5 canicas a cada primo		**TOTAL (N° de alumnos)**
1	**1**	**16**	**3**	**0**	**21**

De acuerdo a estos análisis, notamos que:

- *Para la primera pregunta* del ítem b), 19 de los 21 alumnos (un poco más del 90%) han dado una respuesta correcta, ya que han considerado que Carlita tiene la razón con respecto a la repartición hecha por Luis. Cabe resaltar que 18 de estos 19 alumnos, un número considerable de estudiantes, han presentado sus argumentos correctos en función de las nociones trabajadas. Es importante mencionar que ningún alumno ha considerado que Joselito tenía la razón en lo referido a este tipo particular de repartición.
- *Para la segunda pregunta* del ítem b), 19 de los 21 alumnos afirman que sí es posible hacer una redistribución de las tres canicas. 17 de estos 19 estudiantes presentan respuestas variadas, pero todas ellas hacen referencia a que se debe aumentar una canica más a cada primo.
- *Para cuanto a la tercera pregunta* del ítem b), 16 de los 21 alumnos (un poco más del 76%) han dado respuestas correctas y completas según el requerimiento planteado; mientras que 3 de los 21 alumnos han dado respuestas correctas respecto a la cantidad de canicas que le corresponde a cada primo después de la redistribución, mas no dicen cuántas canicas le deben quedar a Luis. Por esta razón se considera estas respuestas como correctas, pero incompletas.

Análisis cualitativo

Orlando:

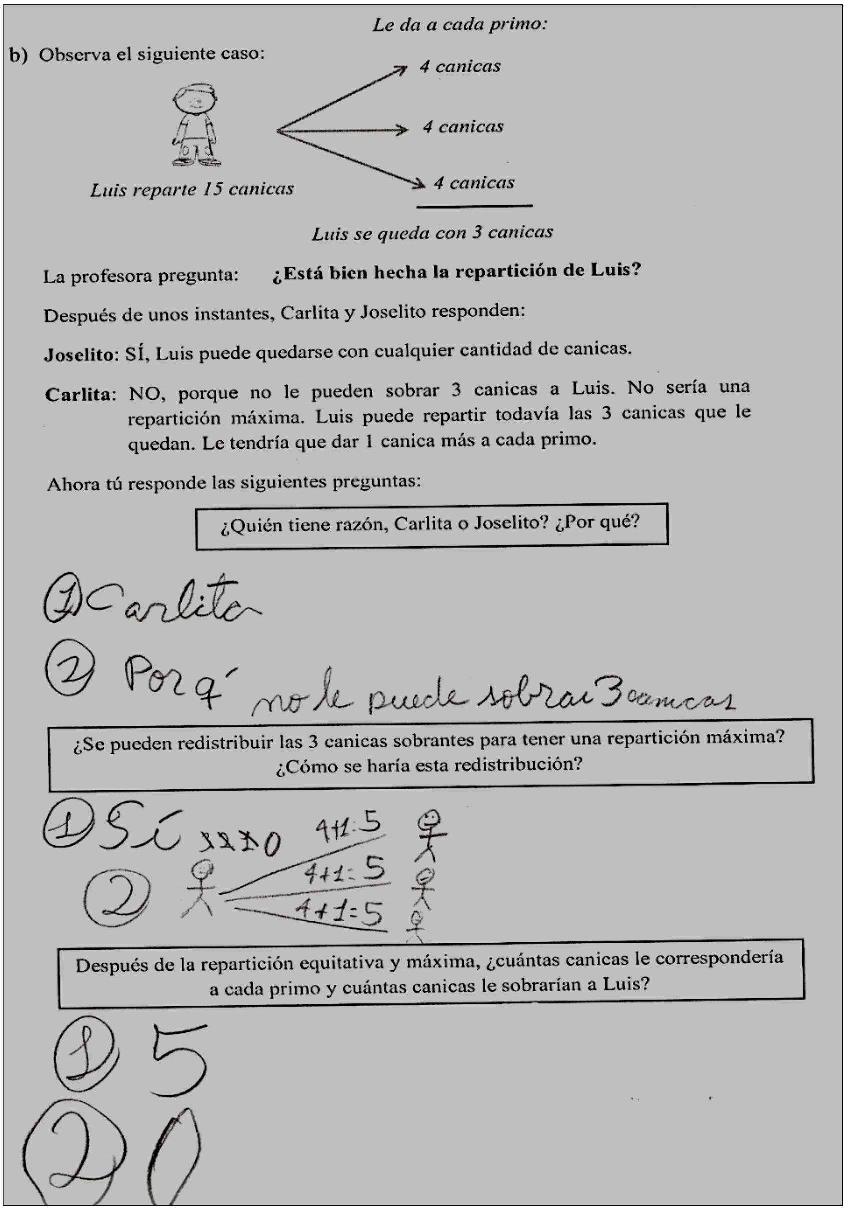
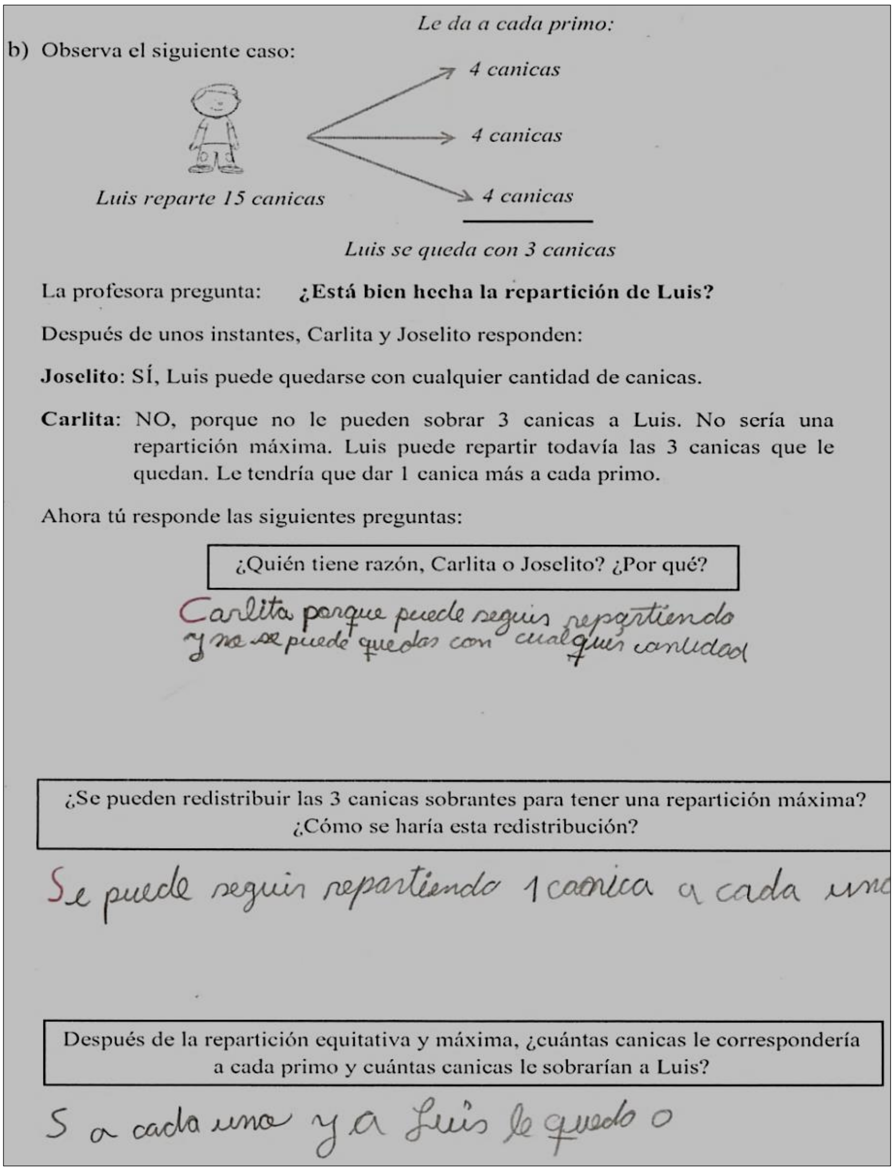


Figura 51. Respuesta de Orlando para el ítem b)

La respuesta del alumno a la primera pregunta sugiere que no es posible que Luis se quede con 3 canicas después de una repartición máxima de 15 canicas entre 3 primos. Es decir hace referencia a que 3 no es un posible valor del residuo para este caso de repartición. Asimismo observamos que para responder a la segunda pregunta el alumno hace uso de un dibujo en el que refleja la redistribución que se debe realizar: disminuye la cantidad de canicas que supuestamente le sobraban a Luis (3, 2, 1 y 0) hasta quedarse con 0 canicas y hace el aumento de una canica a cada uno de los primos de Luis. Para la última pregunta presenta respuestas correctas, con respecto a la cantidad de canicas que le corresponde a cada uno de los primos y la cantidad de canicas que le sobra a Luis.

Nicolás:



b) Observa el siguiente caso:

Le da a cada primo:

4 canicas

4 canicas

4 canicas

Luis reparte 15 canicas

Luis se queda con 3 canicas

La profesora pregunta: **¿Está bien hecha la repartición de Luis?**

Después de unos instantes, Carlita y Joselito responden:

Joselito: SÍ, Luis puede quedarse con cualquier cantidad de canicas.

Carlita: NO, porque no le pueden sobrar 3 canicas a Luis. No sería una repartición máxima. Luis puede repartir todavía las 3 canicas que le quedan. Le tendría que dar 1 canica más a cada primo.

Ahora tú responde las siguientes preguntas:

¿Quién tiene razón, Carlita o Joselito? ¿Por qué?

Carlita porque puede seguir repartiendo y no se puede quedar con cualquier cantidad

¿Se pueden redistribuir las 3 canicas sobrantes para tener una repartición máxima? ¿Cómo se haría esta redistribución?

Se puede seguir repartiendo 1 canica a cada uno

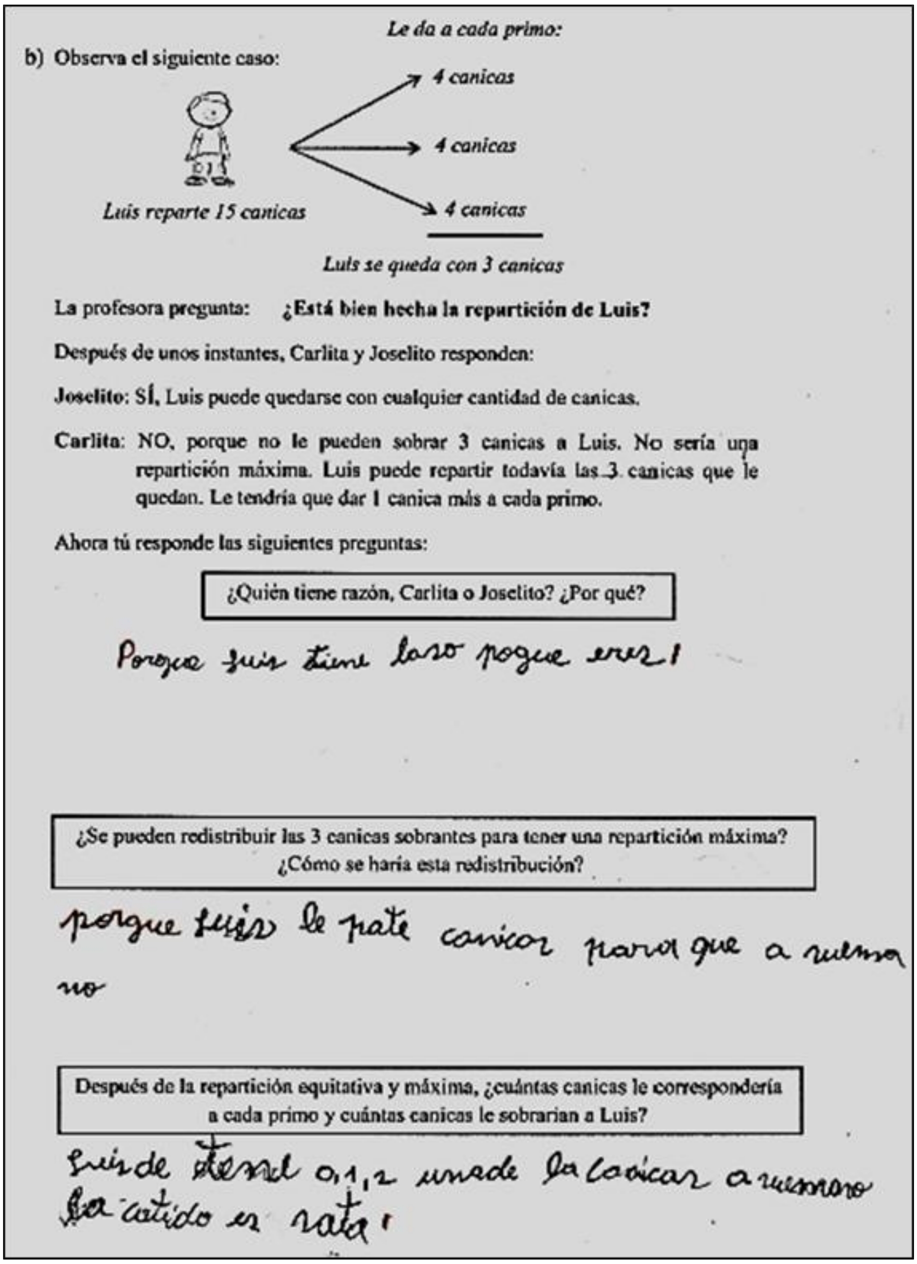
Después de la repartición equitativa y máxima, ¿cuántas canicas le correspondería a cada primo y cuántas canicas le sobrarían a Luis?

5 a cada uno y a Luis le quedo 0

Figura 52. Respuesta de Nicolás para el ítem b)

Notemos que para la primera pregunta, la justificación que da Nicolás está en función a la noción de repartición máxima. También observamos que él considera que en la redistribución que se debe realizar, se debe agregar una canica más a cada uno de los 3 primos, obteniendo así la respuesta correcta para la tercera pregunta.

Luis Miguel:



b) Observa el siguiente caso:

Le da a cada primo:

4 canicas

4 canicas

4 canicas

Luis reparte 15 canicas

Luis se queda con 3 canicas

La profesora pregunta: **¿Está bien hecha la repartición de Luis?**

Después de unos instantes, Carlita y Joselito responden:

Joselito: SÍ, Luis puede quedarse con cualquier cantidad de canicas.

Carlita: NO, porque no le pueden sobrar 3 canicas a Luis. No sería una repartición máxima. Luis puede repartir todavía las 3 canicas que le quedan. Le tendría que dar 1 canica más a cada primo.

Ahora tú responde las siguientes preguntas:

¿Quién tiene razón, Carlita o Joselito? ¿Por qué?

Porque Luis tiene laso pogue eres 1

¿Se pueden redistribuir las 3 canicas sobrantes para tener una repartición máxima? ¿Cómo se haría esta redistribución?

porque Luis le pate canicos para que a ruelma no

Después de la repartición equitativa y máxima, ¿cuántas canicas le correspondería a cada primo y cuántas canicas le sobrarian a Luis?

Luis de tene 0,1,2 unade la canicas a ruemoro la catido es rata.

Figura 53. Respuesta de Luis Miguel para el ítem b)

Hemos considerado las tres respuestas dadas por Luis Miguel como no codificables, puesto que no comprendemos lo redactado. En cuanto a la última pregunta, el alumno escribe los números 0, 1 y 2, y creemos que se refiere a los posibles valores del residuo, aunque no es claro dado que la pregunta está dirigida a la cantidad de canicas que le corresponde a cada primo y a Luis.

ETAPA 2

Después de la aplicación de la Ficha 2 en la Etapa 1, desarrollamos esta etapa a nivel de salón (como trabajo de clase). En esta etapa inicialmente se dieron ejemplos de repartición equitativa, pero que no satisfacen la condición de repartición máxima, con el fin de ir afianzando conceptos.

A continuación presentamos la transcripción de algunos fragmentos del diálogo que se llevó a cabo en esta sesión:

> *[…]*
>
> ***Profesora:*** *Una pregunta, ¿qué pasa si Luis tiene…uhm…40 canicas y hace una repartición equitativa y máxima, en la que Luis dice: les voy a dar 10 canicas a cada uno de mis tres primos y sobran 10 canicas para mí…? ¿Está bien la repartición equitativa y máxima que ha hecho Luis de las 40 canicas?*
>
> ***Alumnos:*** *¡no!*

Los estudiantes parecen estar unánimemente convencidos de que la repartición dada por la profesora no es correcta. Para que la profesora se pueda convencer de que los estudiantes entienden por qué esta repartición no es correcta bajo las condiciones dadas, les plantea la siguiente pregunta:

> ***Profesora:*** *¿por qué?*
>
> ***Hugo:*** *porque no he repartido la mayor cantidad*
>
> ***Profesora:*** *¿Luis no ha repartido la mayor cantidad? ¿Está bien eso? ¿Cómo tiene que ser entonces?*
>
> ***Luis:*** *no está bien, le quedan algunas. Tiene que repartir la mayor cantidad para sus primos*

Hugo y Luis se han dado cuenta de que el ejemplo de repartición dado por la profesora no cumple la condición de repartición máxima, ya que han notado que Luis no puede quedarse con diez canicas después de la repartición.

> ***Profesora:*** *ah…. Luis tiene que repartir la mayor cantidad y ¿cómo se tiene que hacer eso?*
>
> ***Jamil:*** *le damos 3 canicas más a cada primo*

Notemos que Jamil hace referencia a la redistribución de las 10 canicas "sobrantes", dando una respuesta correcta respecto a la cantidad de canicas que le correspondería adicionalmente a cada primo después de la redistribución.

> ***Profesora:*** *¿Está bien lo que dice su compañero?*
>
> ***Alumnos:*** *¡sí!*
>
> ***Profesora:*** *dice que le va a dar 3 (canicas) más a cada primo. Si le da 3 (canicas) más a cada primo, ¿con cuántas se queda Luis?*
>
> ***Alumnos:*** *una*
>
> ***Profesora:*** *¿se puede quedar con una canica?*
>
> ***Alumnos:*** *¡sí!*

La profesora con esta pregunta busca que los estudiantes se den cuenta de que 1 sí es un posible valor del residuo en este caso particular cuando se tiene a 3 como divisor fijo.

> *[…]*
>
> ***Profesora:*** *muy bien, otro ejemplo… uhmmm… ¡Ya sé! 72 canicas. A ver, ¿quién me dice cómo es la repartición equitativa y máxima de 72 canicas? ¿Cuántas canicas le da a cada primo?… A ver, a trabajar…*

[Después de unos instantes de trabajo, Jhosetp responde]

> ***Jhosetp:*** *¡24!*
>
> ***Profesora:*** *muy bien, ¿puedes explicarnos Jhosetp?*

[La profesora se acerca a su carpeta y el alumno le dice el procedimiento que ha empleado para dar una respuesta correcta]

> ***Profesora:*** *A ver, su compañero Jhosetp dice: ¿qué pasa si le doy a cada uno 23 canicas? [Haciendo en la pizarra el dibujo empleado en segunda parte de la ficha de la etapa anterior de esta misma sesión y asignando a cada primo 23 canicas]… y… ¿cuántas sobrarían para Luis?*
>
> ***Jhosetp:*** *3*
>
> ***Profesora:*** *¿le pueden quedar a Luis estas 3 canicas?*
>
> ***Alumnos:*** *¡no! Luis tiene que repartir*
>
> ***Profesora:*** *¿cuántas canicas más le doy a cada primo?*
>
> ***Alumnos:*** *una*

> ***Profesora:*** *¡una más!.... así consiguió Jhosetp que le salga veinticuatro… Y Luis, ¿con cuántas canicas se queda?*
>
> ***Alumnos:*** *con cero*
>
> ***Profesora:*** *muy bien, con cero*
>
> ***Chris:*** *también puede ser 24 por 3*

La respuesta dada por Jhosetp es correcta. Vemos que él ha seguido un procedimiento interesante ya que primero hace una repartición equitativa (23 canicas a cada primo), y luego hace una redistribución de las 3 canicas "restantes" para tener una repartición máxima.

Por otro lado, observemos que Chris sugiere la multiplicación como otro tipo de procedimiento para llegar a la misma respuesta de Jhosetp (72 = 24 x 3). Esto nos hace pensar que el alumno está relacionando intuitivamente la división exacta de números naturales con la multiplicación.

De aquí en adelante se empiezan a analizar de manera explícita cuáles son los posibles valores del residuo para casos particulares de reparticiones equitativas y máximas entre 3 personas. Observemos cómo se plantea esto de manera activa en clase.

> ***Profesora:*** *una preguntita, ¿con cuántas canicas se puede quedar Luis después de cualquier repartición equitativa y máxima [entre sus tres primos]?*
>
> ***Jamil:*** *con una y dos*
>
> ***Profesora:*** *¿con una y dos? En algunos casos hemos visto que se puede quedar con una canica; en otros casos se puede quedar…*
>
> ***Alumnos:*** *con dos*
>
> ***Profesora:*** *y en otros casos…*
>
> ***Hugo:*** *en otros casos con cero*

Notemos que los estudiantes a través de los ejemplos previos y con la guía de la profesora han identificado los tres posibles valores que puede tomar el residuo (0, 1 y 2) después de una repartición equitativa y máxima entre 3 personas (los primos de Luis). Tengamos presente que en nuestro caso el residuo indica la cantidad de canicas con las que se puede quedar Luis después de la repartición.

Observemos a continuación que la profesora plantea una pregunta con el fin de que los alumnos estén seguros de que no existen otros valores (diferentes a 0, 1 o 2) para el residuo en una repartición equitativa y máxima entre 3 personas.

> ***Profesora:*** *¿con qué otra cantidad (de canicas) se puede quedar Luis?*
>
> ***Orlando:*** *con 5*
>
> ***Profesora:*** *¿y en otros casos con 5?*
>
> ***Alumnos (menos Orlando):*** *¡no!*
>
> ***Profesora:*** *¿se puede quedar Luis con 5 canicas?*
>
> ***Alumnos:*** *¡no!*
>
> ***Profesora:*** *y ¿por qué no?*
>
> ***Nicolás:*** *con 3 (canicas) tampoco*
>
> ***Profesora:*** *¿qué? ¿Con tres tampoco? ¿Por qué?*
>
> ***Nicolás:*** *Porque puede repartir a cada primo una (canica) más*

Notemos que la respuesta incorrecta dada por Orlando refleja que él aún tiene dudas al respecto. Nicolás interviene aclarando que 3 tampoco puede ser un valor del residuo para este caso concreto de repartición, lo que nos da la idea de que él piensa que si 3 no puede ser un valor del residuo, se deben descartar automáticamente cantidades mayores de canicas como valores del residuo. Para reforzar su punto de vista, el alumno argumenta que no es posible que Luis se quede con 3 canicas después de la repartición ya que se puede hacer una redistribución de estas canicas.

Es importante resaltar nuevamente que en cada sesión no aceptamos solo un sí o un no como respuesta sino que adicionalmente solicitamos que los estudiantes justifiquen el por qué de sus afirmaciones. De esta manera estamos midiendo si los alumnos realmente están comprendiendo lo trabajado, y si estamos consiguiendo que incremente el nivel de seguridad en la adquisición de sus conocimientos sobre división de números naturales.

A continuación empezamos a variar el número de primos (lo que representa el divisor), entre los cuales se deben realizar reparticiones equitativas y máximas.

> *[…]*

> ***Profesora:*** *(…) A ver, ahora vayan pensando en reparticiones entre 4 primos. ¿Cuántas canicas le pueden quedar a Luis si ahora tiene 4 primos? A ver, piensen en eso.*
>
> ***Alumnos:*** *¡qué fácil!*
>
> ***Profesora:*** *¿fácil?*
>
> ***Jhosetp:*** *le puede quedar 0, 1, 2 y 3*

Notemos que la expresión "qué fácil" dada por los estudiantes refleja que ellos han notado que la cantidad de canicas que le pueden sobrar a Luis (valores del residuo) no puede ser igual o mayor a la cantidad de primos (divisor), en este caso es 4. Asimismo, observemos que los diferentes ejemplos de repartición equitativa y máxima han permitido que los estudiantes se den cuenta de la relación que existe entre el divisor y el residuo, y den los posibles valores del residuo en cada caso.

> ***Profesora:*** *¿no me pueden quedar 4?*
>
> ***Jhosetp:*** *no*
>
> ***Profesora:*** *¿no?, ¿por qué no?*
>
> ***Jhosetp:*** *porque así tendría que repartir uno a sus primos, uno cada uno…*
>
> ***Profesora:*** *Si Luis tiene 4 primos, ¿no le puede quedar 4 canicas a Luis?*
>
> ***Luis:*** *le pueden quedar 3 nada más [queriendo decir "a lo más"]*
>
> ***Profesora:*** *su compañero ya nos lo explicó y nos ha explicado muy bien [refiriéndose a la explicación dada por Jhosetp]*
>
> ***Nicolás:*** *porque si se tiene 4 significa que le tiene que repartir una canica a un primo*

Notemos que los estudiantes descartan que 4 sea un posible valor del residuo ya que con esta cantidad se puede hacer aún una redistribución, como lo manifiestan Jhosetp y Nicolás. Cabe resaltar que ha sido importante el tiempo invertido en trabajar la noción de repartición equitativa y máxima ya que los estudiantes, como Nicolás, muestran seguridad y respuestas correctas pues tienen en cuenta ambas condiciones de repartición.

> ***Profesora:*** *muy bien, le tiene que dar 1 canica más a cada primo…Ahora Luis tiene 4 primos… ¿Luis se puede quedar con 5 canicas?*

Alumnos: *¡no!*

Profesora: *y, ¿por qué no se puede quedar con 5 canicas?*

Orlando: *porque tiene que repartir la mayor cantidad*

Profesora: *y, ¿con cuántas canicas se queda Luis?*

Orlando: *con 1*

Profesora: *y ¿cuántas para cada primo?*

Orlando: *una*

Profesora: *y, ¿le pueden quedar 9 canicas?*

Vanesa: *no, porque no ha repartido la mayor cantidad*

Profesora: *ya, bien. ¿Y qué hace Luis con las 9 canicas entonces?*

Vanesa: *las reparte*

Profesora: *¿cómo las reparte si Luis tiene 4 primos? ¿Cuántas más le da a cada uno de sus primos?*

Orlando: *le da 2 más a cada uno*

Profesora: *le da 2 más a cada uno… y, ¿con cuántas canicas se queda Luis entonces?*

Mikeley: *se queda con 1 (canica)*

Observamos que los estudiantes justifican por qué 5 y 9 no pueden ser valores del residuo cuando el divisor es 4 (que es el número de primos entre los que se hace la repartición). Vemos que sus argumentos hacen referencia a la noción de repartición máxima, así como a la redistribución que se debería hacer de estas canicas.

Profesora: *Chicos, ¿qué pasa si Luis tiene 5 primos? ¿Qué pasaría? ¿Cuántas canicas le pueden quedar a Luis?*

Jamil: *hasta cuatro… Puede quedar 0, 1, 2,3 y 4 canicas*

Nuevamente, observamos que Jamil da una respuesta correcta sobre los posibles valores del residuo en una división con divisor 5.

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 4

- Respecto a la Etapa 1:

Respecto al ítem (a) de la Etapa 1 de esta sesión hemos observado que la mayoría de los estudiantes en general (más del 60% de los estudiantes) logra hacer correctamente reparticiones equitativas y máximas, aunque todavía un grupo de estudiantes muestra errores al hacer reparticiones de este tipo (esto lo vemos reflejado sobre todo en el análisis cuantitativo de la primera parte de este ítem), lo que nos propusimos ir superando luego en la segunda Etapa 2 de esta sesión (trabajo de clase).

Respecto al ítem (b) hemos notado que la mayoría de los estudiantes (más del 80%) logra identificar las razones por las que 3 no puede ser un valor del residuo en una división con divisor 3. Sus justificaciones se basan, por ejemplo, en los posibles valores del residuo, en la redistribución que es posible realizar y en la definición de repartición máxima.

- Respecto en la Etapa 2:

Podemos decir que en esta sesión los estudiantes ya empiezan a notar cuáles son los valores que pueden tomar el residuo (la cantidad de canicas que le puede quedar a Luis después de una repartición equitativa y máxima) de acuerdo a los valores concretos que tome el divisor (la cantidad de primos entre los que se hace la repartición). Es importante destacar que algunos alumnos incluso ya son capaces de justificar por qué el valor del residuo no puede ser mayor o igual que el valor del divisor, para los ejemplos concretos dados (divisor 4 y 5 respectivamente). Esto lo seguiremos midiendo de manera general y objetiva en las sesiones posteriores, a través de los trabajos individuales asignados a los estudiantes.

4.3.5 Análisis de la sesión 5

- **Actividades trabajadas:** indicadas en la Tabla 13 (ver p. 80).
- **Tipo de actividad:** Trabajo de clase.
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** a esta sesión asistieron 23 alumnos.
- **Propósitos de la sesión:** indicados en la Tabla 13.
- **Caso de división trabajado:** divisiones en las que el valor del divisor va variando, y división, con dividendo fijo 24.
- **Etapas que conforman esta sesión:**

Etapa 1	→	Retomamos la situación: *"La promesa de las canicas"* (Trabajo de clase)
Etapa 2	→	Trabajamos la situación: *"Goles con premio"* (Trabajo de clase)

ETAPA 1

En esta etapa hemos seguido trabajando en el contexto de la situación: "La promesa de las canicas", la que se empezó a trabajar en la sesión 2. En esta sesión, como ya empezamos a trabajar en la Etapa 2 de la sesión anterior, variamos el divisor (el número de primos de Luis). Con el fin de que los estudiantes identifiquen todos los posibles valores del residuo, así como el valor máximo del residuo en una división de los números naturales, planteamos respectivamente las siguientes preguntas adecuándolas a números específicos de primos:

¿Cuántas canicas podría quedarle a Luis, si él tiene___ primos?

¿Cuántas canicas como máximo le pueden quedar a Luis?

A continuación incluimos la transcripción de algunos fragmentos de la discusión llevada a cabo en la Etapa 1, en relación a las dos preguntas planteadas:

> ***Profesora:*** *a ver….sigamos con la repartición de Luis y sus 3 primos. ¿Cuántas canicas podrían quedarle a Luis?*

Orlando y Jamil: *0, 1 y 2*

[…]

Profesora: *muy bien… Ahora cambiemos la cantidad de primos. ¿Qué pasaría si Luis tiene 4 primos? ¿Con cuántas canicas podría quedarse Luis? ¿Qué sucedería?*

Nicolás: *0, 1, 2 y 3*

Profesora: *si tengo 4 primos, ¿me pueden quedar solo hasta 3 canicas?*

Alumnos: *sí*

Notemos que cuando el divisor es 3 o 4 (en este caso el número de primos) los alumnos no muestran dificultad para identificar todos los posibles valores del residuo. Pensamos que esto se debe a que los alumnos ya han trabajado este tipo de situaciones en la sesión anterior.

Profesora: *y… ¿Podrá Luis quedarse con 5 canicas?*

Orlando: *¡¡no!!*

Profesora: *¿por qué no?*

Orlando: *porque se tiene que repartir la mayor cantidad*

Profesora: *y entonces… ¿Qué se debe hacer con esas 5 canicas que supuestamente le quedan a Luis?*

Orlando: *repartirlas de nuevo*

Profesora: *y ¿con cuántas se quedaría Luis?*

Orlando: *con 1 (canica) Miss*

Profesora: *¿por qué con una canica?*

Orlando: *porque 4 más 1 es igual a 5*

Profesora: *porque Luis tiene cuatro primos y le da 1 canica más a cada primo, y así él (Luis) en realidad se quedaría con una (canica).*

Es importante resaltar que la pregunta hecha por la profesora ("*¿Podrá Luis quedarse con 5 canicas?"*) dio origen a que el estudiante realice una justificación correcta en base a los conocimientos que tiene sobre la noción de repartición máxima. Además, notemos que el estudiante explica lo que se debe hacer con estas 5 canicas: se deben redistribuir entre los 4 primos de Luis. Finalmente el estudiante indica que el valor del residuo real, después de la redistribución, debía ser 1.

> ***Profesora:*** *una pregunta… Y ahora, ¿con cuántas canicas podría quedarse Luis si tiene 6 primos?*
>
> ***Orlando:*** *1, 2, 3, 4 y 5*
>
> ***Jamil:*** *¡0!*
>
> ***Profesora:*** *claro, ahora tiene 6 primos. ¿Cuántas canicas le pueden quedar a Luis como máximo?*

Observemos que los estudiantes no muestran dificultad para dar las posibles cantidades de canicas con las que Luis podría quedarse en el caso de que éste tenga 6 primos. Aunque Orlando parece haber olvidado a cero como posible valor del residuo, Jamil sí lo considera y comparte con la clase. Notemos que la última pregunta planteada por la profesora está dirigida a que los estudiantes mencionen el residuo máximo, cuando se tiene divisor igual a 6. A continuación veamos la respuesta a lo solicitado y la justificación de por qué tal número es el residuo máximo.

> ***Luis:*** *hasta 5*
>
> ***Profesora:*** *y… ¿por qué no le puede quedar más de cinco?*
>
> ***Luis:*** *porque si fuera 6, tendría que repartirle a sus primos*
>
> ***Profesora:*** *Muy bien… Si Luis tiene 6 canicas, puede todavía volver a repartir… Ahora, ¿por qué no le puede quedar 10 canicas a Luis, si tiene 6 primos?*
>
> ***Jeffrie:*** *Porque esa cantidad se le puede volver a repartir a cada primo*

Vemos que Luis y Jeffrie tienen claro por qué 6 y 10 no pueden ser valores del residuo cuando se tiene divisor igual a 6. De estas justificaciones percibimos que los estudiantes han notado de manera general que un residuo mayor o igual que el divisor conduce a un proceso de redistribución.

> ***Profesora:*** *¿se puede volver a repartir?… ¿Cómo?... Si Luis tiene 6 primos y 10 canicas que supuestamente le sobran, ¿cómo haría?*
>
> ***Felipe:*** *Uhm… Le quedan 2*
>
> ***Profesora:*** *recuerda que Luis tiene 6 primos y supuestamente le sobran 10 canicas. ¿Cómo sería?… Recuerden que no solo deben decir sí o no. Es importante que expliquen por qué.*

Yolanda: *a Luis le quedan 4 canicas y a cada primo le da 1 (más).*

En este caso, la respuesta del alumno se considera incorrecta ya que se trata de la redistribución de 10 canicas entre 6 primos. Mientras que Yolanda sí presenta una respuesta correcta para esta redistribución de canicas.

[…]

Profesora: *muy bien. A ver, ahora les voy a poner otra pregunta. Ahora vamos a imaginar que Luis tiene 14 primos. ¿Cuántas canicas le pueden quedar a Luis?*

Alumnos: *¡13!*

Profesora: *he dicho ¿cuántas canicas le pueden quedar a Luis? No he dicho como máximo… Si Luis tiene 14 primos, ¿qué cantidades diferentes de canicas le pueden quedar a Luis?*

Mía: *13 canicas*

Jamil: *¡no dijeron la cantidad máxima!*

Profesora: *pero… ¿le pueden quedar 13?*

Jamil: *ah… sí*

Profesora: *ah… es diferente. He preguntado: ¿le pueden quedar 13? Sí. Ahora, si yo dijese: ¿cuál es la cantidad máxima de canicas que le puede quedar a Luis? ¿Cómo sería Jamil?*

Jamil: *13*

Cabe resaltar que la profesora aclara, en este caso, que 13 es el residuo máximo y que éste también es uno de los posibles valores del residuo cuando el divisor es igual a 14. Esta aclaración se hace debido a que aparentemente los estudiantes están pensando que Luis solo se puede quedar con 13 canicas.

Profesora: *¿qué otra cantidad le puede quedar a Luis?*

Yolanda: *14*

Profesora: *14 dice su compañera. ¿Le puede quedar 14 canicas a Luis?*

Hugo: *¡no, tiene que repartir la mayor cantidad!*

Profesora: *¿Y cómo sería repartir la mayor cantidad?*

Hugo: *dándoles una canica (más) a cada primo*

Profesora: *y entonces… ¿Cuántas canicas le sobrarían a Luis?*

Hugo: *uhm… cero*

Vemos que la respuesta de Yolanda originó que Hugo dé una justificación del por qué 14 no puede ser un valor del residuo cuando se tiene como divisor a 14. El alumno realiza una justificación en base a la noción de repartición máxima y el proceso de redistribución.

Profesora: *muy bien, no le pueden quedar 14 canicas a Luis. A ver, ¿cuáles son las posibles cantidades de canicas que le pueden quedar a Luis?*

Luis: *hasta 13*

Profesora: *¿Desde qué cantidad?*

Jeffrie: *desde 0 hasta 13*

Profesora: *o sea 0,…*

Alumnos: *1, 2, 3,…, 10,11, 12 y 13*

Profesora: *muy bien. ¿Y cuánto me puede quedar como máximo?*

Jeffrie: *hasta 13. Nomás*

Profesora: *¿Cuántas canicas le quedan como máximo?*

Alumnos: *13*

Observemos que los estudiantes mencionan todos los valores posibles del residuo cuando el divisor es igual a 14. Pensamos que los estudiantes se han percatado de que el residuo toma ciertos valores (valores menores al divisor), y que esto se debe a la condición de repartición máxima.

A continuación mostramos ejemplos propuestos por los alumnos para el valor del divisor, para los que analizan los valores posibles del residuo, así como el valor máximo del residuo.

[…]

Profesora: *alguien que me dé un ejemplito*

Chris: *100*

Profesora: *100 dice su compañero. Ahora, si Luis tiene 100 primos, ¿con cuántas canicas podría quedarse Luis?*

Mía: *99 canicas*

Alumnos: ¿cómo máximo 99 canicas? A ver Jeffrie, ¿cuántas canicas le pueden quedar a Luis como máximo?

Jeffrie: *con 99 canicas, porque si fuera alguna más, se podría repartir a los primos y… la cantidad de canicas que no se les reparte a los primos se queda Luis.*

La respuesta de Jeffrie refleja que él ha notado que una cantidad mayor o igual que el divisor no puede ser un valor del residuo ya que él interpreta que para una cantidad de canicas igual a la cantidad de primos se requeriría de un proceso de redistribución.

Profesora: *muy bien. Entonces como máximo le pueden quedar 99 canicas… A ver, otro ejemplo… Otro ejemplito*

Renzo: *672*

Profesora: *su compañero Renzo nos da su ejemplo. Luis tiene 672 primos. ¿Con cuántas canicas se puede quedar Luis?*

Chris: *¡671!*

Profesora: *¿por qué?*

Chris: *uhm….*

Hugo: *porque… Luis no se puede quedar 672. Tiene que repartir entre sus primos*

Profesora: *muy bien. ¿Y hay otras posibilidades con las que Luis se puede quedar?*

Nicolás: *670*

Jeffrie: *también 669, 668,…*

Profesora: *Cómo mínimo, ¿con cuántas canicas se pueden quedar Luis?*

Alumnos: *cero*

Profesora: *con cero,… ¿y hasta qué cantidad?*

Jamil: *671*

Profesora: *miren, de 0 hasta 671, que es el máximo. A ver otro ejemplo…*

Notemos que los estudiantes muestran facilidad para dar ejemplos con números de tres cifras, así como el hecho de mencionar el valor mínimo y máximo que puede tomar el residuo. Pensamos que los estudiantes han notado la relación que existe entre el divisor y el residuo. Las justificaciones que presentan, así como para los casos anteriores, están dadas en función de la definición de una repartición máxima y el proceso de redistribución.

> ***Nicolás:*** *1220*
>
> ***Profesora:*** *1220 primos… Ahora, si Luis tiene 1220 primos, ¿con cuántas canicas como máximo se puede quedar Luis?*
>
> ***Julio César:*** *1219*
>
> ***Profesora:*** *muy bien. Si tiene 3000 primos, ¿con cuántas canicas como máximo se puede quedar Luis?*

[La respuesta dada por Renzo a continuación es inmediata. Mientras la profesora hace la pregunta, él ya daba la respuesta]

> ***Renzo:*** *2999*
>
> ***Profesora:*** *Si Luis tiene 3000 primos, como máximo se puede quedar con 2999 canicas, ¿está bien?*
>
> ***Jeffrie:*** *sí, porque si fuera algunas (canicas) más, podría repartir a sus primos y lo que sobra se queda Luis.*

Es relevante mencionar que en esta parte los estudiantes tienen libertad para proponer sus propios ejemplos. Notemos que el número de cifras para sus ejemplos de número de primos tampoco ha sido una limitación ya que cada vez emplean números mayores para sus ejemplos. Vemos que los estudiantes incluso proponen números de 3 o 4 cifras, con los cuales trabajan sin dificultad, y hasta al momento han presentado respuestas correctas.

> ***Nicolás:*** *un ejemplo: 500 primos*
>
> ***Orlando:*** *499 canicas. No, digo… primos.*
>
> ***Profesora:*** *muy bien. Ahora cada uno va a pensar en un ejemplo y en su respuesta.*
>
> ***Profesora:*** *A ver Hugo, tu ejemplo. ¿Con cuántos primos? Y, ¿con cuántas canicas como máximo se queda Luis?*
>
> ***Hugo:*** *95 primos y se queda con 94 canicas*
>
> ***Profesora:*** *ok. Tu ejemplo Orlando*
>
> ***Orlando:*** *1334 primos*

Profesora: *¿con cuántas canicas como máximo se queda Luis?*

Orlando: *con 1333 canicas*

Profesora: *muy bien. Anayely…*

Anayely: *52 primos*

Profesora: *¿Con cuántas canicas como máximo se queda Luis?*

Anayely: *desde 0 hasta 51… canicas*

Profesora: *muy bien Anayely. A ver Jamil…*

Jamil: *10 091 primos*

Profesora: *si Luis tiene 10 091 primos, ¿con cuántas canicas se puede quedar cómo máximo Luis?*

Jamil: *desde 0 hasta 10 090*

Profesora: *pero la cantidad máxima con las que se puede quedar…*

Jamil: *10 090*

Profesora: *muy bien Jamil*

Vemos que la mayoría de los estudiantes para sus ejemplos han empleado cantidades grandes, no siendo éste un inconveniente para que los estudiantes puedan identificar los valores del residuo. Cabe resaltar que el hecho de que en las sesiones anteriores hayamos invertido tiempo para trabajar las nociones de repartición máxima, repartición equitativa, y repartición equitativa y máxima a la vez, ha permitido que los estudiantes tengan seguridad al dar sus justificaciones sobre los posibles valores del residuo teniendo en cuenta para ello las definiciones dadas y el proceso de redistribución.

ETAPA 2

- **Materiales:** para desarrollar la situación necesitamos de una pelota y un objeto que hiciera de arco, en nuestro caso tomamos una carpeta. Además, llevamos una bolsa de 24 caramelos.

  Empezamos narrando la siguiente situación, que es la situación que regirá el desarrollo de toda la Etapa 2 de esta sesión:

> *Vamos a seleccionar a los alumnos que van a representar a nuestra sección (tercer grado "C") en el campeonato "PUNTERIA A GOLES", que se llevará a cabo a nivel de todo tercer grado de primaria. El alumno que meta un gol al arco, será declarado alumno de la selección de tercer grado "C", y tendrá una recompensa. La profesora de Educación Física ha comprado una bolsa de 24 caramelos para ser repartidos, de forma equitativa y máxima, entre los alumnos que sean clasificados en la selección de tercer grado "C".*

- **Requerimientos:** Para el desarrollo de la situación les pedimos a los alumnos que hagan fila para intentar anotar un gol, y así llegar a ser parte de la selección.

Después de que formamos la selección de tercer grado "C", planteamos a los estudiantes la siguiente pregunta:

> ***¿Entre cuántas personas podremos repartir de forma exacta 24 caramelos?***

A continuación incluimos la transcripción de algunos fragmentos del diálogo entre la profesora y los alumnos llevado a cabo en esta etapa:

> ***Profesora:*** *¿Cuántos alumnos seleccionados tenemos? [Esto después de que los alumnos intentaran anotar un gol]*
>
> ***Alumnos:*** *7*
>
> ***Profesora:*** *muy bien. Si tenemos 24 caramelos, ¿cuántos caramelos le toca a cada uno de los seleccionados? Recuerden que son reparticiones equitativas y…*
>
> ***Luisa:*** *y máximas*

Profesora: *y máximas… A ver, tenemos 24 caramelos ¿Cuántos caramelos le toca a cada uno de los seleccionados? Y, ¿con cuántos caramelos se quedará la Miss? ¿Cuántos caramelos le toca a cada uno de los seleccionados?*

Alumnos: *3*

Profesora: *Y ¿cuántos caramelos se queda la Miss?*

Alumnos: *3*

Observemos que inmediatamente después la profesora procede a introducir las nuevas nociones: *"repartición exacta"* y *"repartición no exacta"*, dando las condiciones específicas que se requieren para tener una u otra repartición.

Profesora: *muy bien. Vamos a decir que esa repartición fue una* ***repartición NO EXACTA*** *pues sobran caramelos. [Observemos que la profesora pone énfasis en sus palabras] La repartición que hemos hecho ha sido una repartición no exacta porque han sobrado caramelos. Entonces, <u>cuando sobren caramelos de la repartición equitativa y máxima</u> diremos que la repartición es* ***NO EXACTA****… Y, ¿cuándo vamos a decir que es una* ***repartición EXACTA****?*

Jeffrie: *<u>cuando no sobra nada</u>*

Profesora: *cuando sobra nada. Muy bien. Vamos a decir que fueron reparticiones exactas cuando sobra nada. Y, ¿cuándo vamos a decir no exacta?*

Ana Lucía: *cuando sobra algo*

Observamos también que la profesora aprovecha la situación presentada para introducir estos dos casos particulares de reparticiones equitativas y máximas. Ella prosigue planteando nuevas preguntas con el propósito de que los estudiantes logren comprender estas nuevas nociones, y con el fin de que los estudiantes determinen los divisores de 24, a partir de su noción de repartición exacta. En este caso los divisores de 24 serán las cantidades de personas entre las que podríamos repartir los 24 caramelos de manera exacta.

Con estos propósitos presentamos la siguiente pregunta:

Veamos a continuación las reacciones de los alumnos ante este nuevo pedido.

Profesora: *muy bien… Voy hacer una pregunta. Vamos a seguir pensando que tenemos 24 caramelos… ¿Entre cuántas personas podremos repartir estos 24 caramelos en forma EXACTA?*

Manuel: *entre 24 veinticuatro personas, a cada uno le da uno*

Profesora: *¿y sobra?*

Manuel: *cero*

Profesora: *¡muy bien Manuel! Entonces es un ejemplo. Si tengo 24 caramelos, ¿entre cuántas personas las puedo dividir en forma exacta? Un ejemplito que nos da Manuel: entre 24 personas. Y, ¿por qué puedo dividir en forma exacta 24 caramelos entre 24 personas? Manuel nos explicó: porque a cada persona le da un caramelo y me quedo sin caramelos después de la repartición… Esa es una repartición exacta, ¿verdad?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *¡otra repartición exacta!*

Ana Lucía: *entre 3 personas*

Profesora: *¿por qué es una repartición exacta?*

Ana Lucía: *porque no le sobra caramelos a quién está repartiendo*

Profesora: *¿y cuánto le toca a cada una de esa 3 personas?*

Ana Lucía: *uhm….8*

Profesora: *¿está bien lo que dice su compañera? ¿Es una repartición exacta?*

Alumnos: *¡sí!*

Profesora: *¿y por qué es una repartición exacta?*

Jeffrie: *porque no le sobra nada*

Profesora: *porque sobra nada después de la repartición. Le da 8 a cada persona y ella se queda con nada.*

Es importante resaltar que no solo se acepta un ejemplo, sino que además se pide la justificación de por qué tal repartición es exacta. Además notemos que la justificación dada por la alumna está en función de la condición dada para tener una repartición exacta.

> ***Profesora:*** *muy bien… A ver, otro ejemplito*
>
> ***Luis:*** *a 2 personas, y a cada uno le da 12*
>
> ***Profesora:*** *¿y con cuántos caramelos se queda quien está haciendo la repartición?*
>
> ***Luis:*** *con 0*
>
> ***Profesora:*** *¿y por qué es una repartición exacta?*
>
> ***Luis:*** *porque no me tiene que sobrar ningún caramelo…*
>
> ***(…)***

Notemos que Luis da un divisor correcto de 24, como es 2. El alumno refleja seguridad al dar su ejemplo ya que no solo da el número de personas, sino que además da el número de caramelos que le correspondería a cada una de estas 2 personas. También responde correctamente que la cantidad de caramelos con la que se quedaría quien reparte es 0.

> ***Profesora:*** *A ver alguien que me dé otro ejemplo…*
>
> ***Yolanda:*** *entre 8 personas*
>
> ***Profesora:*** *¿y con cuántas me quedo yo?*
>
> ***Yolanda:*** *con 0*
>
> ***Profesora:*** *muy bien Yolanda. Su compañera dice: si tenemos 24 caramelos puede repartirlos entre 8 personas y no le sobra nada después de la repartición, ¿está bien lo que dice Yolanda?*
>
> ***Alumnos:*** *¡está bien!*
>
> ***(…)***

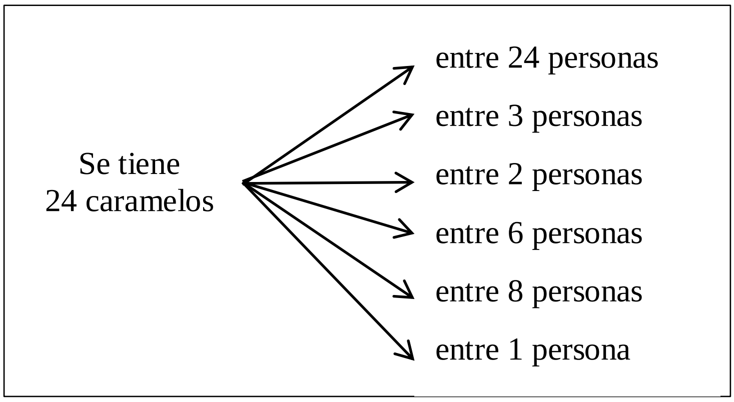
Notemos que Yolanda da otro ejemplo correcto de divisor de 24. A continuación la profesora sigue pidiendo ejemplos de reparticiones exactas de los 24 caramelos.

> ***Jhosetp:*** *entre 6 personas*
>
> ***Profesora:*** *¿Entre 6 personas? ¿Por qué es una repartición exacta?*
>
> ***Jhosetp:*** *porque a cada uno le da 4 y no le sobra nada*
>
> ***Profesora:*** *porque no le sobra nada a la Miss que está repartiendo… A ver, otro ejemplo, o ¿ya no tienen más ejemplitos?*
>
> ***Julio César:*** *con 1 persona*
>
> ***Profesora:*** *¿con 1 persona? A ver, su compañero dice con 1 persona… ¿Cómo repartes entre 1 persona?*
>
> ***Julio César:*** *24 (caramelos) para una persona*
>
> ***Profesora:*** *¿y con cuántas se queda la persona que reparte?*
>
> ***Julio César:*** *con 0*
>
> ***Profesora:*** *con 0, ¡muy bien!*

Observemos que Jhosetp da una justificación correcta respecto al divisor 6. Por otro lado, Julio César ha notado que el número 1 es un divisor de 24.

> ***Profesora:*** *A ver hasta ahora tenemos que los 24 caramelos los podemos repartir entre 24 personas, entre 3 personas,…*

[La profesora toma lectura de los 6 divisores de 24, los que han sido dados por los alumnos hasta el momento y que ella ha ido tomando nota en la pizarra como mostramos en la siguiente figura.]



Profesora: *¿alguien tiene otra cantidad?*

Jhosetp: *entre 16 personas*

Profesora: *¿entre 16 personas? ¿Puede ser una repartición exacta?*

Alumnos: *¡no!*

Profesora: *¿por qué no?*

Jhosetp: *porque… no es una repartición exacta porque 16 más 16 es 32.*

Profesora: *pero tenemos 24 caramelos entre 16 personas…*

Jhosetp: *no alcanza*

Observamos que Jhosetp se equivoca al dar su ejemplo. Y luego, cuando se da cuenta de que su ejemplo no es un ejemplo para el tipo de repartición exacta que se solicita, intenta justificar por qué el ejemplo que dio no es correcto. Notemos que la justificación que da el alumno no es incorrecta, aunque no es el tipo de justificaciones que esperábamos según lo que hemos trabajado con los estudiantes. El alumno menciona que "*no es una repartición exacta porque… 16 más 16 es 32*", lo que nos lleva a pensar que el estudiante está pensando en el caso de la repartición de los 24 caramelos entre las 16 personas, y que en una "primera vuelta" de repartición sí se podría hacer la repartición (de 16 caramelos); sin embargo, hay problemas en la "segunda vuelta" de repartición (otros 16 caramelos más: *"16 más 16 es 32"*) ya que Jhosetp se da cuenta de que no tendríamos suficientes caramelos para repartirlos de manera exacta entre estas 16 personas.

En este sentido debemos tener presente, como docentes, que un problema puede tener más de un camino para llegar a su solución. El detalle está en saber interpretar los caminos propuestos por nuestros estudiantes y no descartar de inmediato una respuesta porque simplemente no se parece a lo que hemos afianzado. Debemos estar atentos a las respuestas de nuestros estudiantes ya que muchas veces nos podemos llevar gratas sorpresas por los planteamientos ingeniosos que ellos proponen.

Vale la pena mencionar que no pudimos concluir esta parte (quedaron por ser determinados los divisores 4 y 12) por cuestiones de tiempo.

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 5

Sobre la Etapa 1 de esta sesión; pensamos que la forma cómo hemos planificado y llevado a cabo esta etapa ha permitido que los estudiantes identifiquen el valor máximo del residuo, y en general los posibles valores que éste puede tomar conforme variábamos el valor del divisor. Hemos conseguido esto gracias a la tarea de dar en los casos iniciales y luego solicitar ejemplos de números que podría tener Luis y a partir de ello preguntar cuántas canicas le podrían quedar a Luis después de hacer la repartición equitativa y máxima entre este número de primos. Aparentemente los estudiantes lograron darse cuenta de la relación implícita existente entre el residuo y el divisor. Los alumnos en diferentes casos han logrado justificar por qué el residuo no puede ser mayor o igual que el divisor. Estas justificaciones se han presentado en base a la noción de repartición máxima, a que los estudiantes han puesto de manifiesto en muchas oportunidades al afirmar que todavía era posible redistribuir el número de canicas que se tenía como supuesto valor del residuo.

Sobre la Etapa 2; hemos logrado introducir dos nuevas nociones (repartición *exacta* y repartición *no exacta)* y que los estudiantes aprendan a diferenciar entre ellas. También hemos iniciado el trabajo de encontrar los divisores de 24, aunque no hemos empleado este término ("divisores") ya que el fin de este trabajo no es éste, sino afianzar a los estudiantes en los casos particulares de repartición para luego ir reemplazando los términos por los que ya se conocen. Hemos podido apreciar que los alumnos no han mostrado dificultad en dar divisores de 24. Es posible que esto se pueda atribuir a la forma en cómo se plantean los requerimientos: en términos de una situación concreta sobre reparticiones, que es un mecanismo cercano a los estudiantes; pero sobre todo al enfoque de la enseñanza de la división de números naturales a partir de reparticiones equitativas y máximas.

4.3.6 Análisis de la sesión 6

- **Actividades trabajadas:** en esta sesión hemos desarrollado la situación: ***"La radio"***
- **Tipo de actividad:** Trabajo de clase.
- **Propósitos de la sesión:** indicados en la Tabla 13 (ver pp.80-81).
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** a esta sesión asistieron 23 alumnos.
- **Caso de división trabajado:** trabajamos la división con dividendo fijo 6, 12 y 40.
- **Etapas que conforman esta sesión:** a continuación presentamos un esquema resumen de las etapas que conforman la sesión 6, con sus respectivos propósitos:

ETAPA 1 → Reforzamos las nociones: repartición exacta y repartición no exacta. Logramos esto mediante el requerimiento de que los estudiantes creen sus propios ejemplos de reparticiones exactas y reparticiones inexactas.

Presentamos la Situación 4: *"La radio"*

ETAPA 2 →
- Entregamos **6** entradas al que hace el papel del locutor.
- Reforzamos las nociones: repartición exacta y repartición no exacta.
- Presentamos dos casos especiales de división exacta: cuando el divisor es igual al dividendo y cuando el divisor es igual a 1.

ETAPA 3 →
- Entregamos **12** entradas al alumno que juega el papel del locutor.
- Reforzamos la noción de repartición equitativa y máxima, repartición exacta y repartición no exacta.
- Determinamos los divisores de **12**, en función de reparticiones exactas.
- Ejemplos de números que no son divisores de **12**, en función de reparticiones no exactas.

ETAPA 4

Reforzamos la noción de repartición equitativa y máxima, repartición exacta y repartición no exacta.

Determinamos los divisores de **40**, en función de reparticiones exactas.

A continuación, presentamos el análisis del desarrollo de cada una de las etapas que conforman la sesión 6.

ETAPA 1

Introducimos una manera alternativa de hacer referencia a las reparticiones no exactas: les llamamos también *reparticiones inexactas*.

En esta etapa damos a los estudiantes la siguiente indicación:

Den ejemplos de reparticiones exactas, para los que deben tener en cuenta lo siguiente:

- ***¿Qué cantidad van a repartir?***
- ***¿Entre cuántas personas van a repartir?***
- ***¿Cuánto le toca a cada persona? y***
- ***¿Cuánto sobra después de la repartición?***

A continuación incluimos algunos fragmentos del trabajo de clase, mediante el cual los estudiantes proponen sus propios ejemplos de reparticiones exactas:

> ***Jeffrie:*** *Luis tiene 18 caramelos y 3 primos, a cada primo le da 6 caramelos y él se queda con nada.*
>
> ***Profesora:*** *muy bien, es una repartición exacta, ¿verdad?*
>
> ***Alumnos:*** *¡sí!*
>
> ***Profesora:*** *¿alguien tiene otro ejemplo?*
>
> ***Manuel:*** *Luis tiene 3 primos y 60 canicas, a cada primo le da 20 y él no se queda con nada*
>
> ***Profesora:*** *¿ese es otro ejemplo de repartición exacta? Su compañero dice: "Tengo 60 canicas y 3 primos. A cada uno le doy 20 canicas y me quedo con nada". ¿Es un ejemplo de repartición exacta?*
>
> ***Alumnos:*** *sí*
>
> ***Profesora:*** *muy bien, ese es un ejemplo de repartición exacta*

Julio César: *si tengo 4 amigos y 20 canicas, a cada uno le doy 5 y me quedo con 0 canicas.*

Profesora: *muy bien, ese es otro ejemplo*

Yolanda: *la miss tiene 24 caramelos y 3 alumnos, a cada uno le da 8 caramelos y ella se queda con 0 caramelos*

Profesora: *otro ejemplito. ¡Muy bien!*

Felipe: *Chris tiene 40 carritos y tiene 4 amigos, a cada amigo le toca 10 y a Chris le queda 0.*

Profesora: *¿es un ejemplo de repartición exacta?*

Alumnos: *sí, porque no sobra*

Observemos que hasta el momento los ejemplos dados por los alumnos son correctos y que los estudiantes justificaron en cada caso por qué su ejemplo es un caso de repartición exacta. Vemos que sus explicaciones están en términos del contexto que han considerado, por ejemplo Felipe ha considerado en su ejemplo a un personaje Chris quien reparte 40 carritos entre sus 4 amigos. El alumno explica que Chris se queda con 0 carritos después de la repartición, ya que a cada uno de sus amigos le da 10 carritos. Lo explicado por Felipe se considera un argumento correcto para poder afirmar que su ejemplo es, en efecto, un ejemplo de repartición exacta.

Posteriormente la profesora da la siguiente indicación:

Ahora den ejemplos de reparticiones no exactas, en los que deben tener en cuenta lo siguiente:

- ***¿Qué cantidad van a repartir?***
- ***¿Entre cuántas personas van a repartir?***
- ***¿Cuánto le toca a cada persona? y***
- ***¿Cuánto le sobra al que reparte?***

Inmediatamente después de dada la indicación Orlando da un ejemplo:

Orlando: *Jeffrie tiene 8 hermanos y 81 taps. A cada hermano le da 10 taps y Jeffrie se queda con 1 tap.*

Profesora: *muy bien. Ese es un ejemplo de repartición no exacta, que también se le puede llamar repartición…* ***INEXACTA***

Orlando da su ejemplo de repartición no exacta respondiendo a cada una de las preguntas planteadas por la profesora. Por otro lado, notemos que la profesora antes de concluir esta etapa, reemplaza el término "no exacta" por "inexacta".

En esta etapa no hemos seguido pidiendo más ejemplos de repartición inexacta a los alumnos dado que en las siguientes etapas teníamos previsto seguir reforzando este tipo de repartición.

ETAPA 2

- **Materiales:** al locutor le íbamos entregando una cierta cantidad de entradas, la que variaba de acuerdo a las etapas que conforman esta sesión.

Empezamos esta etapa narrando la siguiente situación, que es la situación que regirá el desarrollo de esta y las demás etapas de esta sesión:

Situación 4: ***"La radio"***

Imaginemos que la radio "EL SOL" como celebración por estas fiestas patrias regalará entradas a sus oyentes para que vayan al circo. El locutor de la radio anuncia que tiene 6 entradas para ser repartidas en forma equitativa y máxima, ***únicamente*** *entre las personas que llamen a la radio en los siguientes minutos.*

- **Requerimientos:** En todas las etapas que conforman el desarrollo de esta situación, elegimos a un alumno para que asumiera el papel del "locutor de la radio" y un grupo de alumnos para que hicieran el papel de las personas que llaman a la radio. Para el desarrollo de esta situación los 23 alumnos se colocaron formando un círculo. En el centro del círculo se ubicaron los alumnos que asumían el rol de las personas que llaman a la radio (ganadores de las entradas), así como el alumno que jugará el rol del locutor.

Para reforzar la noción de repartición exacta e inexacta, planteamos las siguientes preguntas:

Si el locutor tiene 6 entradas y hay ___ ganadores,
¿Cuántas entradas le corresponde a cada ganador?
¿Sobran entradas después de la repartición?
¿Es un caso de repartición EXACTA o INEXACTA? ¿Por qué?

A continuación mostramos partes de los diálogos correspondientes a este trabajo:

> ***Profesora:*** *si son 3 las personas que llamaron a la radio y el locutor debe cumplir su promesa de repartir en forma equitativa y máxima esas 6 entradas entonces la repartición de las 6 entradas entre las 3 personas…. ¿es un caso de repartición exacta o inexacta?*
>
> ***Alumnos:*** *¡exacta!*

> ***Profesora:*** *alguien que me explique: ¿Por qué es exacta?*
>
> ***Manuel:*** *es exacta porque a cada uno (de los ganadores) le da 2 (entradas) y el locutor se queda sin entradas.*

Observemos que el argumento del alumno es correcto y está dado en términos de la situación (ganadores, locutor y entradas), quien considera que esta repartición es de tipo exacta porque el locutor se queda sin entradas después de la repartición; en otras palabras, el valor del residuo es igual a cero.

> ***Profesora:*** *¡Muy bien! Su compañero dice que es exacta porque al locutor no le sobran entradas después de la repartición. ¿Se entendió? … A ver, otro caso. Supongamos que el locutor sigue teniendo las 6 entradas y ahora han llamado 4 personas… ¿Qué tipo de repartición es?*
>
> ***Nicolás:*** *Inexacta*
>
> ***Profesora:*** *¿Por qué?*
>
> ***Nicolás:*** *porque 4 más 4 da 8 y… se pasa de 6*
>
> ***Profesora:*** *pero,… ¿Cómo repartes esas 6 entradas entre los 4 ganadores? No olvides que el locutor tiene que hacer reparticiones equitativas y máximas de las 6 entradas.*
>
> ***Nicolás:*** *uhm…*

Nicolás considera que repartir 6 entradas en forma equitativa y máxima entre 4 ganadores es un tipo de repartición inexacta. Para presentar su justificación el alumno dice: *"4 más 4 da 8"*, lo que creemos que hace referencia a una primera y segunda ronda de repartición de entradas. Pero como el alumno se da cuenta de que necesitaría 8 entradas para poder hacer estas dos rondas de reparticiones y así tener una repartición exacta, el alumno termina diciendo: *"da 8 y… se pasa de 6".* Notemos que aunque el argumento presentado por el estudiante es válido, como pretendemos que los estudiantes respondan a las preguntas planteadas por la profesora, y posteriormente sean capaces de determinar los valores exactos del cociente y del residuo para la división de 6 entre 4, la profesora insiste con su pregunta.

[La profesora pide a Nicolás y a 4 de sus compañeros que se coloquen en el centro del círculo para que hagan el papel del locutor y el papel de los ganadores de las entradas, respectivamente. La profesora hace entrega de las 6 entradas a Nicolás, quien hace el papel del locutor. Enseguida el locutor reparte las 6 entradas entre los 4 ganadores]

> ***Profesora:*** *¿cuántas entradas ha entregado el locutor a cada uno de los ganadores? [Refiriéndose a la repartición hecha por Nicolás]*

Alumnos: *una*

Profesora: *y, ¿con cuántas entradas se quedó el locutor (Nicolás)?*

Nicolás: *con 2*

Profesora: *y, ¿con esas dos entradas puede hacerse otra ronda de repartición de tal manera que sea equitativa?*

Nicolás: *¡¡no!!*

Profesora: *su compañero dice que no se puede. Entonces, ¿qué tipo de repartición es? ¿Exacta o inexacta?*

Alumnos: *¡inexacta!*

Profesora: *¿y por qué es inexacta?*

Yolanda: *porque le sobraron 2*

Profesora: *muy bien, porque le están sobrando entradas al locutor…. Ahora, vamos a hacer que otro alumno sea el locutor y elegiremos a los ganadores.*

Vemos que la representación que hace el locutor (Nicolás) de la repartición (equitativa y máxima) de las entradas entre los ganadores ha permitido que los alumnos den respuestas correctas a las preguntas planteadas por la profesora.

A continuación veremos un caso especial de las divisiones exactas: cuando el divisor es igual al dividendo. Para conseguir este propósito planteamos de manera secuencial las siguientes preguntas:

Si el locutor tiene 6 entradas y hay 6 ganadores, ***¿Con cuántas entradas se quedó el locutor?*** ***¿Qué tipo de repartición es? ¿Por qué?***

[Ahora Julio hace el papel del locutor y 6 de sus compañeros hacen el papel de los ganadores. La profesora hace entrega de las 6 seis entradas Julio. Enseguida Julio reparte las 6 entradas entre los 6 ganadores]

A continuación mostramos el diálogo correspondiente al trabajo desarrollado con los estudiantes:

Profesora: *a ver Julio, ¿con cuántas entradas te quedaste?*

Julio: *con 0*

Profesora: *¿qué tipo de repartición es?*

Julio: *es exacta*

Profesora: *y, ¿por qué es exacta?*

> ***Julio:*** *porque le he dado 1 (entrada) a cada ganador*
>
> ***Profesora:*** *y, ¿por eso es exacta? ¿Porque le dio a cada ganador 1 entrada? ¿Por eso es exacta?*
>
> ***Julio:*** *¡¡no!!... porque me quedé con 0*
>
> ***Profesora:*** *¡Ah! ¡Porque Julio se quedó sin entradas! ¡Por eso es una repartición exacta! ¡Muy bien!*

Julio ha hecho una repartición equitativa y máxima de las 6 entradas entre 6 ganadores de manera correcta. Sin embargo, en el intento de dar su justificación de por qué la repartición es de tipo exacta, vemos que el argumento dado inicialmente por el alumno no habría sido el correcto. Julio consideró que para tener una repartición exacta cada ganador debía tener 1 entrada, lo que sabemos que es incorrecto puesto que ésta no viene a ser la condición suficiente para tener una repartición de tipo exacta. Posteriormente, frente a una segunda pregunta de la profesora, el alumno logra corregir su justificación inicial.

A continuación, veremos otro caso especial de división exacta: cuando el divisor es igual a 1. Con este propósito, planteamos las siguientes preguntas:

Si el locutor tiene 6 entradas y hay un único ganador ***¿Se podrá hacer la repartición?*** ***¿Qué tipo de repartición es?***

> ***Profesora:*** *Ahora Felipe será el locutor y solamente una persona llamó a la radio: Chris. Nadie más estuvo atento a la radio…*

[La profesora hace entrega de las 6 seis entradas a Felipe quien hace el papel de locutor]

> ***Profesora:*** *¿podremos hacer la repartición? Tomen en cuenta que el locutor tiene que cumplir su promesa. ¿Cuál es la promesa que había hecho el locutor?*
>
> ***Orlando:*** *dar equitativamente y la mayor cantidad de entradas*
>
> ***Profesora:*** *¡¡Ah!! Díganme entonces, ¿Felipe (el locutor) puede quedarse con entradas?*
>
> ***Alumnos:*** *¡¡no!!*
>
> ***Profesora:*** *no, ¿verdad? Porque nos dicen que él va a regalar las entradas de manera equitativa y máxima entre las personas que llamen a la radio…*

Observemos que la profesora menciona reiteradamente las condiciones dadas para esta situación, con el propósito de que esto no sea un impedimento para que los estudiantes puedan imaginar cómo se tendría que realizar esta repartición particular.

[Felipe hace la repartición de las 6 entradas entre el único ganador]

> ***Profesora:*** *Felipe ha dado todas las entradas a Chris. ¿Está bien?*
>
> ***Alumnos:*** *¡sí!*
>
> ***Profesora:*** *¿qué tipo de repartición es?*
>
> ***Alumnos:*** *¡exacta!*
>
> ***Profesora:*** *muy bien*

Vemos que Felipe ha hecho una repartición equitativa y máxima de las 6 entradas entre un ganador de manera correcta. De esta manera, Felipe, y sus demás compañeros, han notado que para este caso particular en el que hay un único ganador (el dividendo es igual a 1), se le debería entregar a éste (el cociente) todas las entradas disponibles (el dividendo).

ETAPA 3

Para seguir reforzando las nociones repartición exacta y repartición inexacta, planteamos las siguientes preguntas:

Si el locutor tiene 12 entradas y ___ ganadores ***¿Cuántas entradas le corresponde a cada ganador?*** ***¿Sobran entradas después de la repartición?*** ***¿Es un caso de repartición EXACTA o INEXACTA? ¿Por qué?***

Los alumnos trabajaron estas preguntas para las reparticiones equitativas y máximas de 12 entradas entre 5 y 7 ganadores respectivamente. Aunque no incluimos aquí los diálogos que conforman parte de este desarrollo, podemos afirmar que los alumnos no tuvieron dificultades al hacer las reparticiones entre tales cantidades, así como tampoco al presentar sus justificaciones de por qué dichas reparticiones son inexactas.

Inmediatamente después, con el propósito de que los estudiantes nos proporcionen los divisores de 12, planteamos la siguiente pregunta:

¿Entre cuántas personas se pueden repartir estas doce entradas de forma exacta? ¿Por qué?

A continuación mostramos algunos extractos del diálogo correspondiente a este trabajo de clase:

Jeffrie: *entre 2*

Profesora: *¿por qué?*

Jeffrie: *porque le doy 6 a cada uno y en total son 12*

Profesora: *pero, ¿por qué es una repartición exacta?*

Jeffrie: *porque no le sobra nada al locutor*

Notemos que la profesora no solo acepta que el alumno dé un número de personas, sino también la justificación de por qué está considerando esa cantidad como un ejemplo de lo solicitado.

[La profesora en la pizarra va tomando nota de las respuestas de los estudiantes]

Yolanda: *entre 12 personas*

Profesora: *¿está bien? ¿Entre 12 personas se puede repartir las entradas de forma exacta?*

Alumnos: *¡sí!*

Profesora: *y… ¿cuántas le toca a cada uno?*

Yolanda: *uno*

Profesora: *y, ¿con cuántas se queda el locutor?*

Yolanda: *con cero*

Profesora: *¡muy bien Yolanda!... A ver, otro ejemplo*

Mikeley: *entre 1 (persona)*

Profesora: *¿y esa es una repartición exacta?*

Mikeley: *sí, es exacta… porque al locutor no le queda nada*

Profesora: *al locutor no le queda nada…*

Notemos que los ejemplos dados por Yolanda y Mikeley son considerados los dos casos especiales de la división exacta vistos en la etapa anterior, en este caso para el dividendo igual a 12. Vemos que Yolanda da su ejemplo de 12 entradas entre 12 personas, esto correspondería al caso especial cuando el divisor es igual al dividendo. Mientras que el ejemplo dado por Mikeley (12 entradas entre 1 persona) sería para el caso cuando el divisor es igual a 1.

Profesora: *Otro ejemplo*

Luis: *entre 6 personas, a cada uno le doy 2*

Profesora: *¿y el locutor?*

Luis: *y el locutor se queda sin ninguna (entrada)*

Profesora: *entonces, también podemos repartir de forma exacta las 12 entradas entre 6 personas. Muy bien ¡Otro ejemplo!*

Julio César: *entre 3 personas*

Profesora: *y, ¿cuántas entradas le corresponde a cada persona?*

Julio César: *4*

Profesora: *¿y para el locutor?*

Julio César: *0*

Profesora: *y, ¿es una repartición exacta?*

Julio César: *sí, porque se queda con 0*

Profesora: *claro, porque el locutor se queda con 0 entradas… Otro ejemplo, ¿podrán darme otro ejemplo? ¿Ya acabé?*

Luis: *entre 4 personas*

Profesora: *¿entre 4 personas se puede?*

Luis: *sí se puede, porque le das 3 (entradas) a cada persona y no le queda ninguna (entrada al locutor).*

Profesora: *¡muy bien!, entre 4 personas también se puede*

Observemos que los ejemplos dados por los alumnos cumplen con lo solicitado por la profesora. Notemos que los alumnos hasta aquí han logrado dar todos los divisores de 12 (1, 2, 3, 4, 6 y 12), y además las justificaciones de por qué tales ejemplos son en realidad casos particulares de reparticiones exactas. Es importante que recalquemos que las justificaciones de los estudiantes se basan en que el locutor se queda con 0 entradas después de la repartición equitativa y máxima. Con esto vemos que sus argumentos se basan en la noción inicial de repartición equitativa y máxima, en la cual hacemos depender los nuevos conceptos que vamos introduciendo.

Vanesa: *entre 10 personas*

Profesora: *¿se puede entre 10 personas? ¿Es una repartición exacta?*

Alumnos: *¡¡no!!*

Profesora: *¿por qué no?*

Anayely: *no es exacta, porque le sobran dos*

Profesora: *eso es verdad. Y, ¿qué tipo de repartición es sino?*

Alumnos: *¡inexacta!*

Notemos que los estudiantes tienen la oportunidad de corregir las respuestas incorrectas de sus compañeros. Este es el caso de Anayely, quien corrige la respuesta de Vanesa.

Anayely presenta un argumento correcto de por qué el número 10 no es divisor de 12; esto, claro que, en el contexto de las reparticiones que hace el locutor de las entradas.

A continuación observemos que la profesora solicita a sus alumnos ejemplos de reparticiones inexactas:

> ***Profesora:*** *¡muy bien!… Alguien que me dé ahora ejemplos de reparticiones inexactas*
>
> ***Manuel:*** *entre 2 personas*
>
> ***Profesora:*** *a ver, su compañero dice tengo 12 entradas y las reparto entre 2 personas. ¿Está bien eso? ¿Es una repartición inexacta?*
>
> ***Alumnos:*** *¡no! ¡Es exacta!*

Manuel da un ejemplo correcto para un tipo de repartición exacta; sin embargo, el requerimiento dado por la profesora es proponer ejemplos de reparticiones inexactas de las 12 entradas que se tienen (es decir ejemplos de números que no son divisores de 12).

> ***Mikeley:*** *entre 8 personas*
>
> ***Profesora:*** *su compañera dice entre 8 personas. ¿Está bien? Tengo 12 entradas entre 8 personas,… ¿es una repartición exacta o inexacta?*
>
> ***Alumnos:*** *¡es inexacta!*
>
> ***Profesora:*** *¿Inexacta? A ver, Ana Lucía…*
>
> ***Ana Lucía:*** *porque me sobran 2 (entradas)*
>
> ***Profesora:*** *tengo 12 entradas entre 8 personas, ¿es exacta o inexacta?*
>
> ***Alumnos:*** *¡inexacta!*
>
> ***Profesora:*** *¿cuánto le doy a cada persona?*
>
> ***Jhosetp:*** *1*
>
> ***Profesora:*** *y, ¿con cuánto se queda el locutor?*
>
> ***Jhosetp:*** *con 4 entradas*

Vemos que Mikeley da un ejemplo correcto de repartición inexacta; mientras que Ana Lucía presenta una justificación imprecisa de por qué 8 no es divisor de 12. Por otro lado, vemos que Jhosetp da respuestas correctas para los valores del cociente y del residuo de la división de 12 entre 8.

> ***Profesora:*** *A ver, otro ejemplo de repartición inexacta*
>
> ***Nicolás:*** *12 entradas entre 60 personas*

Notemos que hasta el momento, todos los ejemplos de reparticiones inexactas dados por los alumnos se habían caracterizado porque el divisor era menor o igual que el dividendo (12). No obstante, el ejemplo recientemente dado por Nicolás (12 entradas entre 60 personas) rompe el esquema de todos los ejemplos dados previamente por los alumnos. Esto, ya que como observamos, en su ejemplo el divisor es mayor que el dividendo.

A continuación veamos las reacciones de los alumnos frente a este ejemplo.

> ***Profesora:*** *a ver, su compañero dice: tengo 12 entradas y llaman 60 personas,… ¿es una repartición exacta o inexacta?*
>
> ***Chris:*** *inexacta*
>
> ***Profesora:*** *¿por qué?*
>
> ***Chris:*** *porque (el locutor) no tiene tantas entradas*
>
> ***Profesora:*** *¿con cuántas entradas se queda el locutor?*
>
> ***Chris:*** *con la misma (cantidad de entradas) porque no le puede repartir a cada uno (de los ganadores)*
>
> ***Profesora:*** *¡muy bien Chris! El locutor se queda con todas las entradas porque no puede repartir entre 60 personas. No le alcanza…*

Creemos que la justificación dada por Chris hace referencia a que si se tiene que hacer una primera repartición equitativa y máxima (una primera vuelta de repartición), las 12 entradas no alcanzarían para que cada una de las 60 personas tenga al menos 1 entrada. Además, vemos que el resultado dado por el alumno es correcto respecto a la cantidad de entradas que le quedarían al locutor ya que en este caso el residuo sería igual a 12 puesto que no estamos contemplando el caso en que estas entradas se puedan romper de tal manera que repartamos las partes.

ETAPA 4

En esta etapa, y a través del siguiente planteamiento, solicitamos de manera indirecta a los estudiantes que nos proporcionen los divisores de 40.

¿Entre cuántas personas se pueden repartir estas 40 entradas en forma exacta?

A continuación presentamos la transcripción de algunos fragmentos del diálogo que se llevó a cabo en esta etapa:

> ***Jeffrie:*** *entre 2*

Profesora: *¿por qué?*

Jeffrie: *porque le doy 20 a cada uno y queda 0 al locutor*

Profesora: *muy bien, entre 2 personas… A ver Manuel…*

Manuel: *entre 4 personas, a cada uno le da 10*

Profesora: *¿y con cuánto se queda el locutor?*

Manuel: *con nada*

Profesora: *y… el locutor se queda con 0 entradas. Muy bien*

Orlando: *entre 10 personas*

Profesora: *y, ¿por qué es una repartición exacta?*

Orlando: *porque a cada uno le da 4 y él se queda con 0*

Profesora: *claro la repartición es exacta porque el locutor se queda con…*

Alumnos: *0*

Notemos que los alumnos no tienen dificultad en dar los divisores de 40, así como en dar argumentos correctos. Vemos que los argumentos de los alumnos hacen referencia a que una repartición es exacta porque quien hace la repartición (el locutor en este caso particular) se queda con 0 objetos (entradas en este contexto) después de la repartición. Observemos que la profesora pone énfasis en esto constantemente. Es por ello que el argumento para justificar que una repartición es de tipo inexacta o exacta va a depender básicamente de la cantidad de entradas que le sobren a quien hace la repartición después de la repartición equitativa y máxima.

Profesora: *bien… Ana Lucía dame un ejemplo por favor*

Ana Lucía: *entre 13 personas*

Profesora: *¿entre 13 personas?*

Ana Lucía: *a cada una le doy 3*

Profesora: *y, ¿con cuántas se queda?*

Ana Lucía: *con cero*

Profesora: *¿con cero?*

Alumnos: *¡con una!*

Profesora: *¿es una repartición exacta o inexacta?*

Alumnos: *¡inexacta!*

Notemos que los alumnos corrigen y explican por qué el ejemplo dado por Ana Lucía no es considerado un ejemplo de repartición exacta. Es importante que no perdamos de vista que el solicitar (de manera indirecta) a los alumnos los divisores y no divisores de un número, permite que los alumnos refuercen las nociones de repartición exacta y repartición inexacta.

Profesora: *a ver… un ejemplo de repartición exacta*

Hugo: *con 40 personas*

Profesora: *¿Es un repartición exacta entre 40 personas?*

Hugo: *porque tiene… 40 entradas y las reparte entre…40 personas, y le da uno a cada uno*

Profesora: *y, ¿con cuántas se queda el locutor?*

Hugo: *con cero*

Profesora: *muy bien… A ver, otro ejemplo*

Luis: *entre 8 personas a cada uno le das 5*

Profesora: *y, ¿con cuántas se queda el locutor?*

Luis: *con 0*

Profesora: *muy bien… A ver Anayely*

Anayely: *entre 1 persona*

Profesora: *¿puede ser entre una persona?*

Alumnos: *¡sí!*

Profesora: *y, ¿el locutor con cuántas se queda?*

Alumnos: *cero*

Los ejemplos dados por Hugo y Anayely cumplen dos propiedades de los divisores: todo número es divisor de sí mismo y la unidad es divisor de cualquier número. Además vemos que Luis considera al número 8 como divisor de 40 y presenta un argumento correcto de por qué 8 divide exactamente a 40.

Profesora: *otro ejemplo*

Nicolás: *entre 20*

Profesora: *¿entre 20 personas se puede? ¿Cuánto le da a cada persona?*

Jhosept: *2*

Profesora: *2… Y, ¿con cuántas se queda el locutor?*

Alumnos: *cero*

Profesora: *está bien entonces… entre 20 personas… Ahora otro ejemplo*

Orlando: *entre 5*

Profesora: *y, ¿por qué es una repartición exacta?*

Orlando: *porque a cada una de las 5 personas le da ocho (entradas) y el locutor se queda con… nada*

Profesora: *muy bien, ya está. ¿Tenemos más ejemplos? ¿Son los únicos ejemplos de repartición exacta? ¿Faltan?*

[En la pizarra la profesora había estado anotado los divisores de 40 dados por los estudiantes: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 y 40.]

Notemos que Nicolás y Orlando han dado los divisores que faltaban para tener todos los divisores de 40. Sin embargo la profesora plantea las últimas preguntas con el propósito de que los alumnos se den cuenta de que no es posible tener más ejemplos de reparticiones exactas para este caso particular.

A continuación veremos que parece ser que esto no es notado por todos los alumnos:

Luis Miguel: *entre 30 personas*

Profesora: *¿40 entradas se pueden repartir de forma exacta entre 30 personas?*

Alumnos: *¡¡no!!*

Profesora: *¿y por qué no?*

Orlando: *porque es más que eso… uhmm… porque es más que el número*

Profesora: *¿40 entradas entre 30 personas?*

Orlando: *no se podría Miss, porque…uhm… no llegaría a dar una entrada a cada uno…*

Profesora: *entonces esa no sería una repartición exacta… A ver, otro ejemplo…*

Vemos que Orlando trata de explicar por qué 40 entradas entre 30 personas no es una repartición de tipo exacta. Pensamos que el alumno pretende decir que al locutor le faltarían entradas para que cada una de las 30 personas tenga al menos 1 entrada. Si lo que suponemos es verdadero, la explicación de Orlando no es correcta ya que sí se podría hacer una repartición equitativa y máxima de las 40 entradas entre 30 personas pues a cada persona le correspondería 1 entrada y al locutor le sobrarían 10 entradas después de la repartición.

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 6

En esta sesión hemos conseguido de manera activa y general que los estudiantes propongan sus ejemplos de reparticiones exactas o inexactas, con el propósito de que afiancen estas nociones. En casi todos los casos hemos solicitado la justificación de por qué su ejemplo es del tipo que ellos indicaron. Esto con el fin que podamos medir sus avances individuales.

En las dos primeras etapas de esta sesión, en términos generales podemos afirmar que los alumnos no tuvieron mayores dificultades para desarrollar los problemas que les presentábamos.

En la Etapa 3 y Etapa 4 los estudiantes “en equipo” lograron determinar todos los divisores de 12 y 40, respectivamente; y a la vez han justificado cada uno de sus ejemplos. Hemos notado que en el desarrollo de estas dos etapas algunos alumnos todavía presentaban ejemplos que no guardaban relación con lo solicitado. Por ejemplo presentan números que no son divisores de 40, cuando se les había solicitado lo contrario. Sin embargo, pensamos que estos ejemplos propiciaban la discusión y el proceso de justificación, ya que los estudiantes pudieron reflexionar sobre las razones de por qué estos casos no cumplían con las condiciones solicitadas.

Vale la pena mencionar que en estos casos y a este nivel son los mismos alumnos quienes corrigen las respuestas incorrectas de sus compañeros, en algunos casos con la guía de la profesora.

4.3.7 Análisis de la sesión 7

- **Actividades trabajadas:** en esta sesión primero aplicamos la Ficha 3: ***"Repartiendo entradas de forma equitativa y máxima"***, y luego aplicamos la Ficha 4: "***¡A repartir se ha dicho!"*** (ver Apéndice)
- **Tipo de actividad:** Trabajo individual
- **Propósitos de la sesión:** indicados en la Tabla 13 (ver p. 81)
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** 24 estudiantes
- **Materiales:** a cada alumno se le entrega por escrito la Ficha 3 y Ficha 4.

Análisis de la Ficha 3

- **Requerimientos:** esta ficha está compuesta de 6 ítems, cada uno de los cuales presenta los siguientes propósitos:

Tabla 24. Estructura de la Ficha 3.

<table>
<tr><th>Ítems</th><th>Repartición equitativa y máxima de:</th><th>Propósitos</th></tr>
<tr><td>(1)</td><td>36 entradas entre 5 personas</td><td rowspan="6">- Determinar el número de entradas que le corresponde a cada persona (el valor del cociente) y el número de entradas que le sobran al locutor después de la repartición (el valor del residuo).

- Identificar qué tipo de repartición es el ejemplo dado: exacta o inexacta.

Solo para los ítems (1) y (4), de acuerdo al requerimiento explícito:
- Justificar por qué es dicho tipo de repartición (exacta o inexacta).</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>36 entradas entre 8 personas</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>38 entradas entre 10 personas</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>42 entradas entre 6 personas</td></tr>
<tr><td>(5)</td><td>38 entradas entre 11 personas</td></tr>
<tr><td>(6)</td><td>25 entradas entre 13 personas</td></tr>
</table>

- **Organización del análisis de las respuestas de los alumnos para la Ficha 3:** seguiremos el orden del siguiente esquema:

Análisis de las respuestas para la Ficha 3.

- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 24 alumnos para los 6 ítems que conforman esta ficha (*Tabla 25 y 26)*.
- Análisis cualitativo de los procedimientos llevados a cabo por los estudiantes para determinar los valores del cociente y del residuo (hojas adicionales - borrador).
- Análisis Cualitativo de las respuestas de 2 alumnos para los 6 ítems que conforman esta ficha.

Análisis Cuantitativo

La tabla que mostramos a continuación se basa en el conteo de las respuestas correctas o incorrectas que han sido presentados por los estudiantes en lo que respecta a los otros 3 requerimientos presentados en este ítem: el valor del cociente, el valor del residuo, el tipo de división obtenida. Aclaramos que en nuestro análisis, consideramos respuestas correctas a aquellas respuestas que son todas correctas para cada uno de los 3 requerimientos planteados. Mientras que, consideramos respuestas incorrectas a aquellas respuestas que son incorrectas al menos en uno de estos 3 requerimientos.

Tabla 25. Análisis cuantitativo para la Ficha 3.

<table>
<tr><th colspan="16">Respuestas esperadas</th></tr>
<tr>
<td colspan="3">(1)
A cada persona 7 entradas, y el locutor se queda con 1 entrada

(Repartición Inexacta)</td>
<td colspan="2">(2)
A cada persona 4 entradas, y el locutor se queda con 4 entradas
(R. Inexacta)</td>
<td colspan="2">(3)
A cada persona 3 entradas, y el locutor se queda con 8 entradas
(R. Inexacta)</td>
<td colspan="3">(4)
A cada persona 7 entradas, y el locutor se queda con 0 entradas
(R. Exacta)</td>
<td colspan="3">(5)
A cada persona 3 entradas, y el locutor se queda con 5 entradas
(R. Inexacta)</td>
<td colspan="3">(6)
A cada persona 1 entrada, y el locutor se queda con 12 entradas
(R. Inexacta)</td>
</tr>
<tr>
<th colspan="2">Correctas</th>
<th rowspan="2">Incorrectas</th>
<th rowspan="2">Correctas</th>
<th rowspan="2">Incorrectas</th>
<th rowspan="2">Correctas</th>
<th rowspan="2">Incorrectas</th>
<th colspan="2">Correctas</th>
<th rowspan="2">Incorrectas</th>
<th rowspan="2">Correctas</th>
<th rowspan="2">Incorrectas</th>
<th rowspan="2">En blanco</th>
<th rowspan="2">Correctas</th>
<th rowspan="2">Incorrectas</th>
<th rowspan="2">En blanco</th>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">¿Justifica por qué es inexacta?</td>
<td colspan="2">¿Justifica por qué es exacta?</td>
</tr>
<tr>
<td>SÍ</td><td>NO</td>
<td rowspan="2">13</td>
<td rowspan="2">13</td>
<td rowspan="2">11</td>
<td rowspan="2">11</td>
<td rowspan="2">13</td>
<td>SÍ</td><td>NO</td>
<td rowspan="2">11</td>
<td rowspan="2">9</td>
<td rowspan="2">13</td>
<td rowspan="2">2</td>
<td rowspan="2">12</td>
<td rowspan="2">9</td>
<td rowspan="2">3</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td><td>5</td>
<td>6</td><td>7</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">24</td>
<td colspan="2">24</td>
<td colspan="2">24</td>
<td colspan="3">24</td>
<td colspan="3">24</td>
<td colspan="3">24</td>
<td>Total (N° de alumnos)</td>
</tr>
</table>

De acuerdo a este primer análisis, podemos concluir lo siguiente:

- Para el ítem (1): casi el 46% de los estudiantes responde correctamente a este ítem. De estos alumnos, el 55% justifica adecuadamente que la repartición llevada a cabo es inexacta.
- Para el ítem (2): un poco más del 54% de los estudiantes responde correctamente a este ítem.
- Para el ítem (3): casi el 46% de los estudiantes responde correctamente a este ítem.
- Para el ítem (4): un poco más del 54% de los estudiantes responde correctamente a este ítem. De estos alumnos, solo el 46 % justifica adecuadamente que la repartición llevada a cabo es exacta.
- Para el ítem (5): solo el 37, 5% de los estudiantes responde correctamente a este ítem, mientras que un poco más del 54% comete errores en alguno de los requerimientos planteados en el problema. Observe que a partir de este ítem se dan casos de alumnos que dejan en blanco sus respuestas.
- Para el ítem (6): exactamente el 50% de los estudiantes responde correctamente a este ítem.
- Para los ítems (1) y (4): es importante mencionar que las justificaciones de los alumnos han sido dadas en función del número de entradas que le sobraron al locutor después de la repartición.
- Si tomamos únicamente como referencia el valor del residuo determinado por los estudiantes, sea o no el valor correcto, podemos concluir que todos los alumnos lograron distinguir correctamente el tipo de repartición involucrada (exacta o inexacta).

En la *Tabla 26*, el análisis que presentamos se basa en el conteo de los ítems correctos que han presentado los alumnos. Consideramos ítems correctos a aquellos ítems que presentan respuestas correctas, esto último según el criterio señalado para la tabla anterior (*Tabla 25*).

Tabla 26. Análisis cuantitativo complementario para la Ficha 3.

Cantidad de alumnos según el número de ítems correctos							
0 ítems correctos	1 ítems correcto	2 ítems correctos	3 ítems correctos	4 ítems correctos	5 ítems correctos	6 ítems correctos	**Total (N° de alumnos)**
7	**1**	**1**	**6**	**5**	**2**	**2**	**24**

De acuerdo a este segundo análisis, podemos concluir lo siguiente:

- Casi el 71% de los estudiantes responde correctamente al menos 1 de los 6 ítems planteados.
- El 62,5% de los estudiantes responde correctamente al menos 3 ítems.
- Un poco más del 29% de los estudiantes no presenta ítem correcto alguno.

Es importante mencionar que en la aplicación de esta ficha, entregamos adicionalmente a cada alumno una hoja en blanco para que le sirva de borrador. Al finalizar el desarrollo de esta ficha recogimos estas hojas para analizar su contenido. En estos borradores notamos que los alumnos habían empleado diferentes procedimientos para encontrar los valores del cociente y del residuo para cada uno de los ítems propuestos.

A continuación describimos los 3 procedimientos identificados y posteriormente muestras de ellos:

- *Reparticiones equitativas y máximas*. Notamos que algunos alumnos han hecho la repartición de las entradas una a una de tal manera que cumplan estas dos condiciones de repartición (equitativa y máxima). En algunos otros casos los alumnos han trabajado primero la repartición equitativa al tanteo, y simultáneamente buscaban que se cumpla la condición de repartición máxima. Ilustramos este último caso con el trabajo de Jeffrie, concretamente para el desarrollo del ítem (2) (ver Fig. 57, p. 191). En este problema vemos que el alumno primero ha realizado una repartición (equitativa) de 6 entradas a cada uno de las 8 personas. Luego parece ser que el alumno al notar que la cantidad de entradas que necesitaría (48) sobrepasa el número de entradas dado en el problema (que es 36), para lo que ahora tantea repartiendo de manera equitativa 5 entradas a cada una de las 8 personas. El alumno deja de realizar el tanteo al llegar a una repartición equitativa de 4 entradas para cada una de las 8 personas pues efectúa la suma resultándole 32. Parece ser que el alumno ha notado que las 4 entradas sobrantes serían para el locutor. Jeffrie, usando este procedimiento, muestras respuestas correctas para el problema (2). Cabe resaltar que 16 de los 24 estudiantes emplearon este procedimiento.
- *Agrupamientos*. Los alumnos que emplearon este procedimiento grafican una cantidad de figuras (palitos, bolitas, cuadraditos). La cantidad de estas figuritas depende del dividendo. Estas figuritas son agrupadas tomando en cuenta el número de personas entre los que tienen que hacer la repartición según las indicaciones de cada problema.

Vemos que los alumnos han ido agrupando las figuras buscando que en cada grupo se tenga una misma cantidad de figuras, y que se hayan agrupado la mayor cantidad posible de figuras en cada grupo. Esto se ve reflejado en los borrones realizados en sus trabajos. Notemos que los alumnos al hacer este procedimiento también, aunque indirectamente, tenían en cuenta la noción de repartición equitativa y máxima. Vale la pena mencionar que 2 de los 24 estudiantes han encontrado los valores del cociente y del residuo por medio de agrupamientos.

- *Multiplicaciones*. Los alumnos que emplearon este procedimiento iban multiplicando el número de personas involucrado en cada problema por algún otro número hasta que el producto de la multiplicación resultara un número igual o cercano al dividendo. Cabe mencionar que 3 de los 24 estudiantes emplearon este procedimiento.

Por otro lado, los otros 3 estudiantes entregaron sus borradores en blanco, por lo que no forman parte de este análisis.

A continuación, mostramos ejemplos de cada uno de estos tres procedimientos.

Ericka:

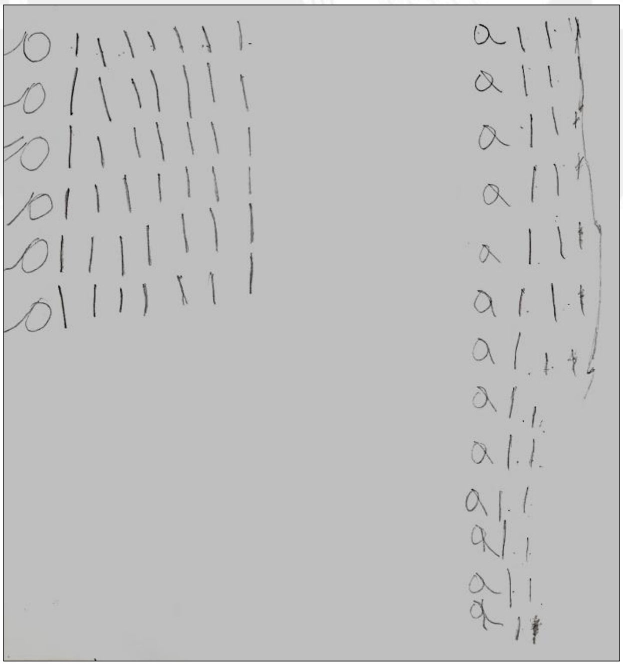


Figura 54. Procedimiento de Ericka: por medio de reparticiones equitativas y máximas

Vemos que el procedimiento que Ericka emplea es la repartición de las entradas de una a una, en este caso, para los ítems (4) y (6) de esta ficha, respectivamente. Creemos que son estos ítems dado que sus divisores son igual a 6 y 13, respectivamente. Observemos que para el segundo caso, la columna de la derecha, la alumna reparte más entradas de las que tenía (25); pero se da cuenta del error, por eso tacha las últimas 8 entradas (las que son representadas por palitos). Vale la pena mencionar que la alumna muestra respuestas correctas para estos dos ítems.

Krisstell:

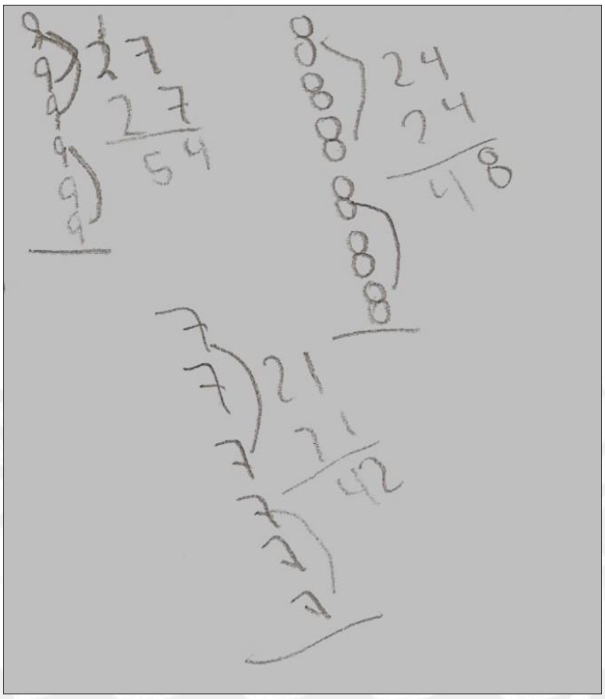


Figura 55. Procedimiento de Krisstell: por medio de reparticiones equitativas y máximas

Notemos que el procedimiento que la alumna emplea es de reparticiones equitativas y máximas para el desarrollo del ítem (4), que involucra la división de 42 entre 6. Creemos que el trabajo que se muestra es de dicho ítem puesto que en las 3 adiciones presentan 6 sumandos. Vemos que Krisstell ha "tanteado" con los números 9 y 8 notando que con esos números sobrepasa al valor del dividendo. Finalmente la alumna deja de tantear cuando trabaja con el número 7 ya que suma 6 veces el número 7 resultándole el valor del dividendo (42). En las tres adiciones ha tenido en cuenta la noción de repartición equitativa y máxima.

Jeffrie:

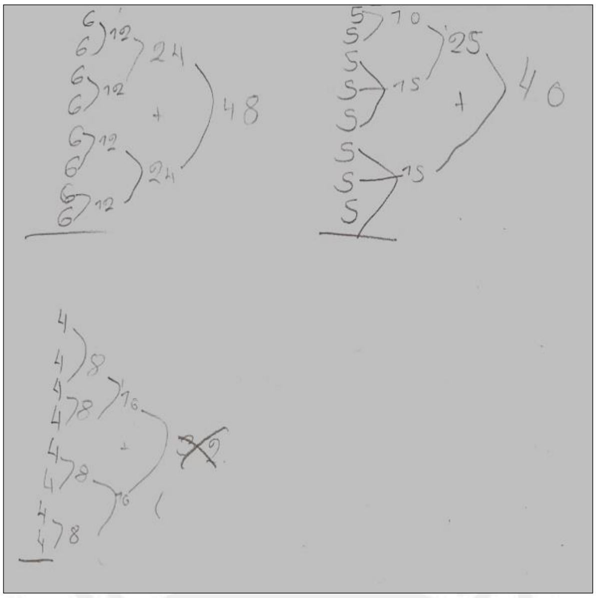


Figura 56. Procedimiento de Jeffrie: por medio de reparticiones equitativas y máximas

Observemos que el procedimiento que el alumno emplea es de reparticiones equitativas y máximas. El procedimiento presentado por Jeffrie, ha sido detallado anteriormente como ejemplo para este tipo de procedimiento.

Nicolás:

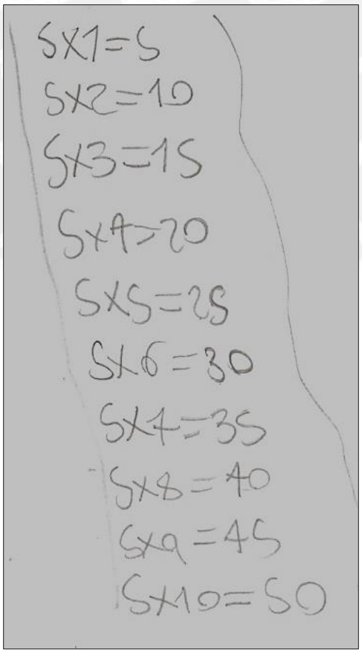


Figura 57. Procedimiento de Nicolás: por medio de la multiplicación

Vemos que el procedimiento de Nicolás, para el desarrollo del ítem (1), división de 36 entre 5, se basa en la multiplicación de números naturales. Creemos que este procedimiento se ha empleado para dicho ítem ya que en cada una de las multiplicaciones (de la Fig. 57) se tiene como uno de los factores al número 5 que, en este caso, sería el divisor de la división de 36 entre 5. Hemos observado que la respuesta del alumno para el problema es correcta. Al parecer el alumno ha buscado el producto más cercano al dividendo. Concretamente el número 35 para luego considerar como residuo al número que falta para ser igual a 36 (es decir 1).

Mikeley:

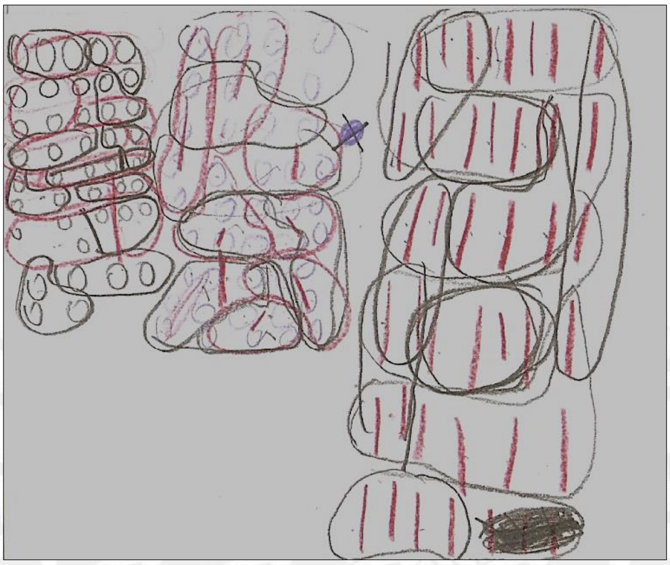
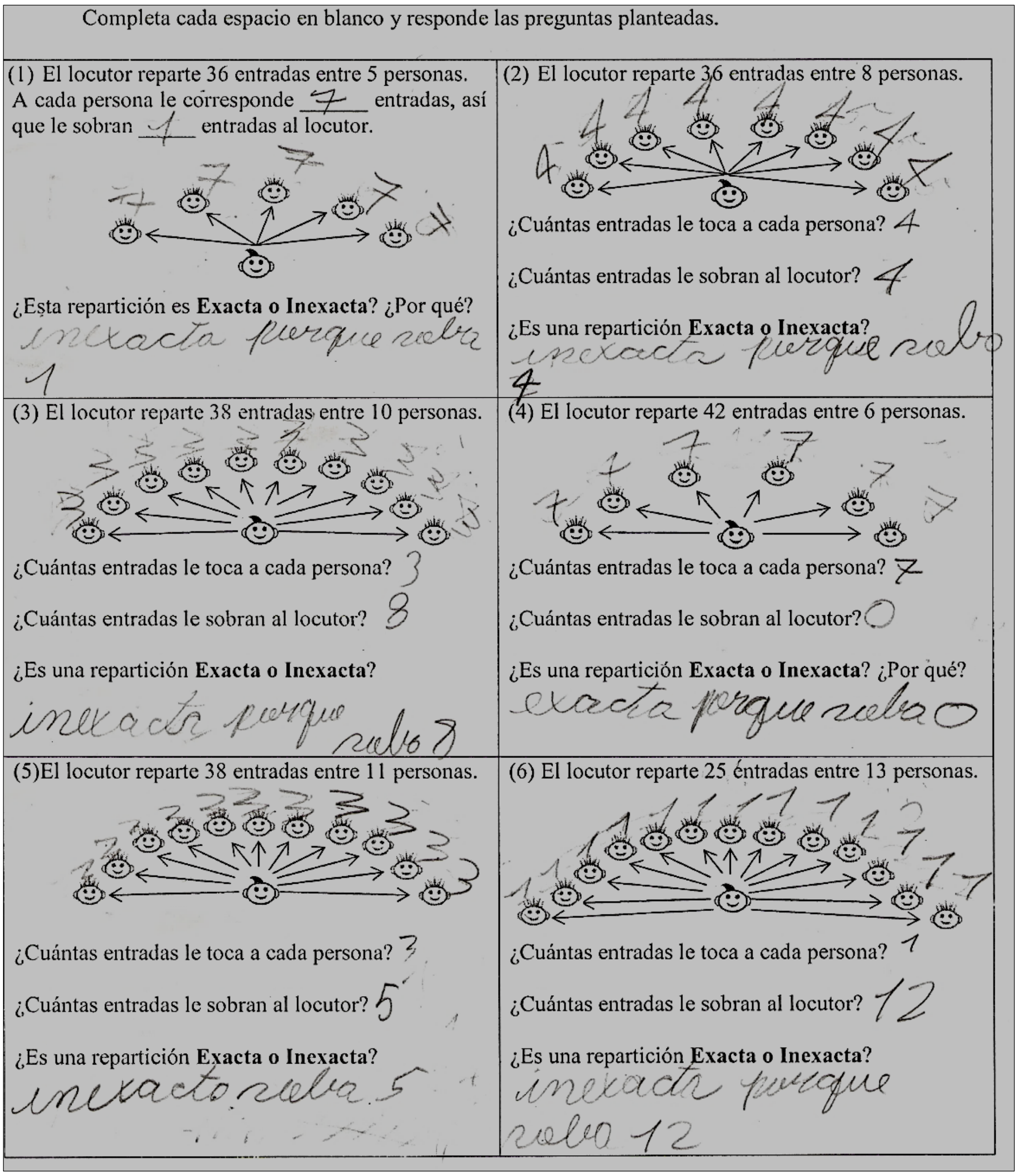


Figura 58. Procedimiento de Mikeley: por medio de agrupamiento

Vemos que la alumna para dar respuesta al problema (4), división de 42 entre 6, emplea como procedimiento las agrupaciones, ya que agrupa de diferentes maneras las 42 bolitas o palitos (lo que se observa en la Fig. 58).

Análisis cualitativo

Jamil:


Completa cada espacio en blanco y responde las preguntas planteadas.

(1) El locutor reparte 36 entradas entre 5 personas. A cada persona le corresponde 7 entradas, así que le sobran 1 entradas al locutor.

¿Esta repartición es **Exacta o Inexacta**? ¿Por qué?

inexacta porque sobra 1

(2) El locutor reparte 36 entradas entre 8 personas.

¿Cuántas entradas le toca a cada persona? 4

¿Cuántas entradas le sobran al locutor? 4

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**?

inexacta porque sobro 4

(3) El locutor reparte 38 entradas entre 10 personas.

¿Cuántas entradas le toca a cada persona? 3

¿Cuántas entradas le sobran al locutor? 8

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**?

inexacta porque sobro 8

(4) El locutor reparte 42 entradas entre 6 personas.

¿Cuántas entradas le toca a cada persona? 7

¿Cuántas entradas le sobran al locutor? 0

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**? ¿Por qué?

exacta porque sobra 0

(5) El locutor reparte 38 entradas entre 11 personas.

¿Cuántas entradas le toca a cada persona? 3

¿Cuántas entradas le sobran al locutor? 5

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**?

inexacto sobra 5

(6) El locutor reparte 25 entradas entre 13 personas.

¿Cuántas entradas le toca a cada persona? 1

¿Cuántas entradas le sobran al locutor? 12

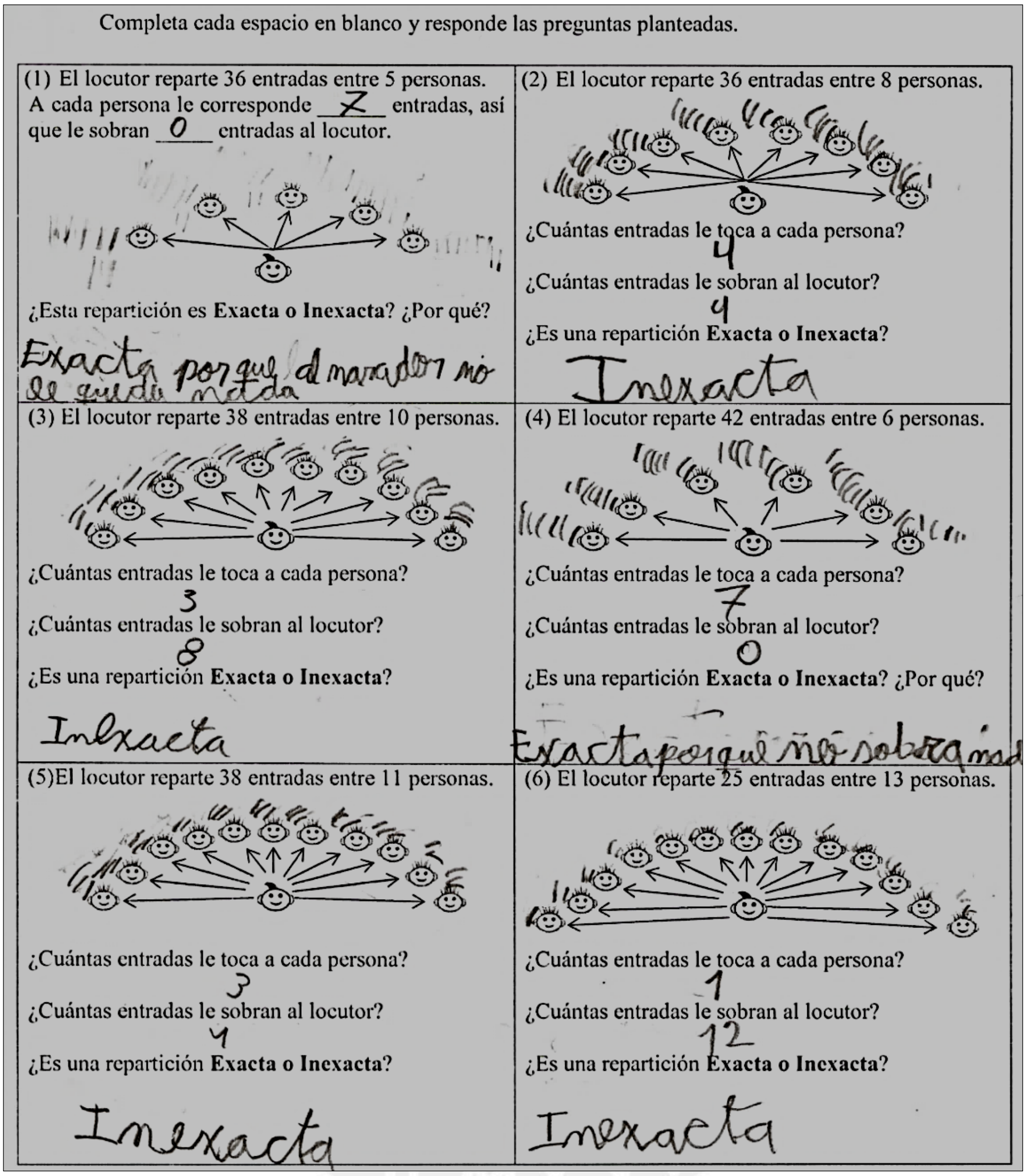
¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**?

inexacta porque sobro 12

Figura 59. Respuesta de Jamil para la Ficha 3.

Jamil es uno de los dos alumnos que ha desarrollado correctamente los 6 problemas propuestos (ver Tabla 26). Del borrador recogido del alumno, podemos ver que el alumno ha seguido el procedimiento explicado anteriormente sobre reparticiones equitativas y máximas para desarrollar sus problemas. Asimismo, notemos que Jamil hace justificaciones correctas para los problemas (1) y (4), así como también en los demás problemas aunque no se lo solicitan.

Luisa:



Completa cada espacio en blanco y responde las preguntas planteadas.

(1) El locutor reparte 36 entradas entre 5 personas. A cada persona le corresponde 7 entradas, así que le sobran 0 entradas al locutor.

¿Esta repartición es **Exacta o Inexacta**? ¿Por qué?

Exacta porque al marador no le queda nada

(2) El locutor reparte 36 entradas entre 8 personas.

¿Cuántas entradas le toca a cada persona? 4

¿Cuántas entradas le sobran al locutor? 4

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**?

Inexacta

(3) El locutor reparte 38 entradas entre 10 personas.

¿Cuántas entradas le toca a cada persona? 3

¿Cuántas entradas le sobran al locutor? 8

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**?

Inexacta

(4) El locutor reparte 42 entradas entre 6 personas.

¿Cuántas entradas le toca a cada persona? 7

¿Cuántas entradas le sobran al locutor? 0

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**? ¿Por qué?

Exacta porque no sobra nad

(5)El locutor reparte 38 entradas entre 11 personas.

¿Cuántas entradas le toca a cada persona? 3

¿Cuántas entradas le sobran al locutor? 4

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**?

Inexacta

(6) El locutor reparte 25 entradas entre 13 personas.

¿Cuántas entradas le toca a cada persona? 1

¿Cuántas entradas le sobran al locutor? 12

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**?

Inexacta

Figura 60. Respuesta de Luisa para la Ficha 3.

Luisa es una de los cinco alumnos que presenta solo 4 problemas correctos pues vemos que ha tenido errores en los problemas (1) y (5). Específicamente, podemos observar que la alumna ha tenido errores al dar la cantidad de entradas que le sobra al locutor en estos dos casos (problemas 1 y 5). Notemos que la alumna ha empleado como procedimiento de trabajo las reparticiones equitativas y máximas de una en una de las entradas.

Asimismo notemos que la alumna da una justificación correcta a los problemas (1) y (4), según el valor del residuo que ha obtenido y a pesar de que la respuesta del problema (1) no es correcta. De aquí podemos concluir que la alumna sí sabe cuáles son las condiciones para tener una repartición de tipo exacta, pero parece haber tenido problemas al sumar la cantidad de las entradas repartidas en total para así hallar el número de entradas que le sobrarían al locutor.

Análisis de la Ficha 4

- **Requerimientos:** esta ficha está compuesta de 6 problemas, cada uno de los cuales presenta los siguientes propósitos:

Tabla 27. Estructura de la Ficha 4.

Problemas	Propósitos
1)	Determinar los divisores de 9.
2)	Determinarlos divisores de 14.
3)	Determinar los divisores de 35.
4)	Dar un ejemplo de repartición inexacta con dividendo igual a 48.
5a)	Crear dos ejemplos de repartición exacta.
5b)	Crear dos ejemplos de repartición inexacta.

- **Organización del análisis de las respuestas de los alumnos para la Ficha 4:** debido a la estructura que guardan los problemas propuestos, hemos organizado el análisis de la siguiente manera:

Análisis de las respuestas para los *problemas 1), 2) y 3)*

- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 24 alumnos *(Tabla 28)*
- Análisis Cualitativo de las respuestas de 2 alumnos

Análisis de las respuestas para el *problemas 4), 5a) y 5 b)*

- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 24 alumnos *(Tabla 29)*
- Análisis Cualitativo de las respuestas de 2 alumnos

Enseguida mostramos el desarrollo de estos análisis.

Análisis de las respuestas para los problemas 1), 2) y 3)

Análisis Cuantitativo

Tabla 28. Análisis cuantitativo para los problemas 1), 2) y 3) de la Ficha 4.

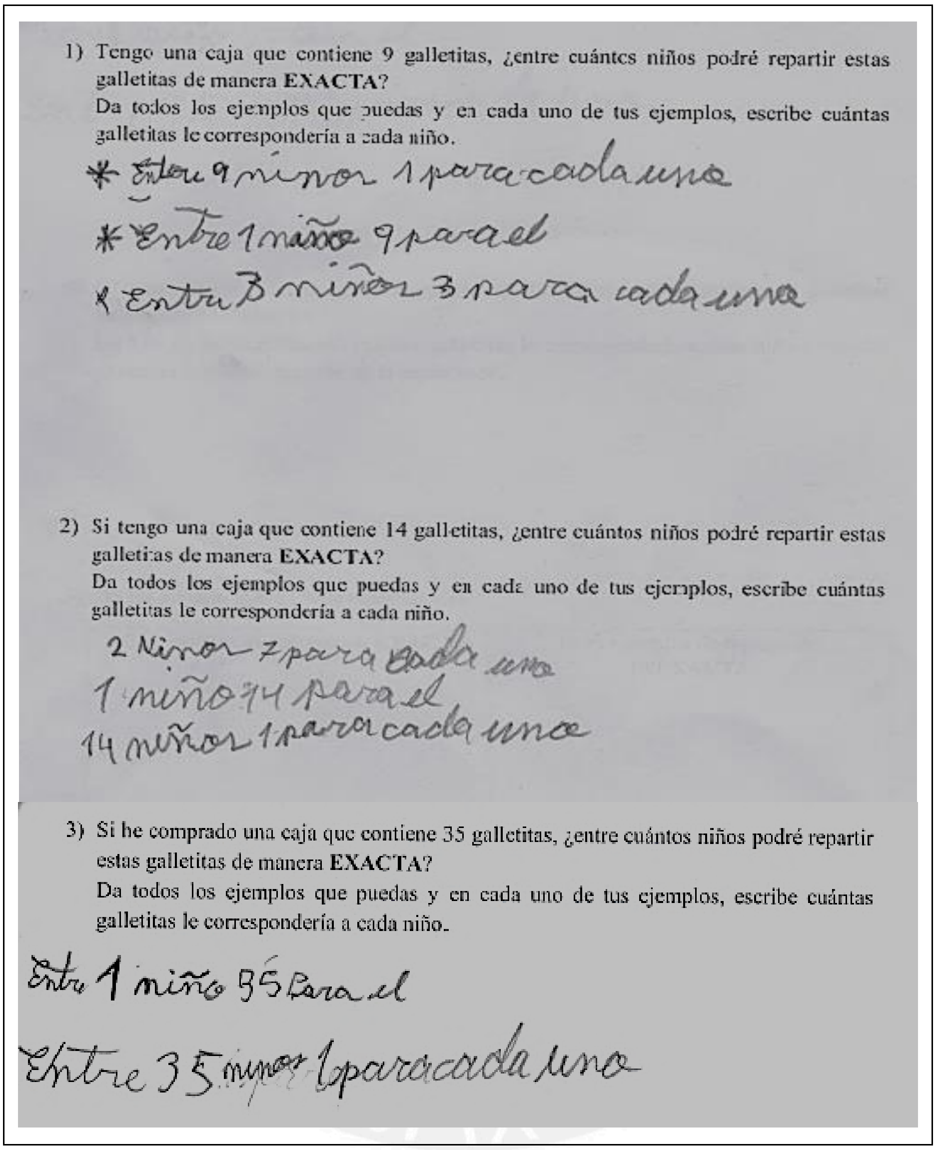
Divisores	Respuestas						
	No respondió (en blanco)	Dieron 0 divisores correctos	Dieron solo 1 divisor correcto	Dieron solo 2 divisores correctos	Dieron solo 3 divisores correctos	Dieron los 4 divisores correctos	Total (Número de alumnos)
1) Divisores de 9 (1, 3 y 9)	0	2	8	10	4		24
2) Divisores de 14 (1, 2, 7 y 14)	4	0	7	7	6	0	24
3) Divisores de 35 (1, 5, 7 y 35)	8	3	6	6	1	0	24

De esta tabla, observamos que:

- Casi el 92% de los 24 estudiantes ha dado al menos uno de los tres divisores de 9; un poco más del 83% de los estudiantes ha logrado dar al menos uno de los cuatro divisores de 14; un poco más del 54% de los estudiantes ha dado al menos uno de los cuatro divisores de 35.
- Notemos que ningún alumno ha logrado dar los cuatro divisores de 14 o de 35.
- Desde nuestro punto de vista, es normal que los estudiantes todavía no sean capaces de dar todos los divisores de ciertos números naturales puesto que recién se están enfrentando a estas tareas, y más aún de manera individual.
- Este análisis nos sirve para medir el avance de los estudiantes en este trabajo, replantear estrategias y seguir trabajando en el pedido de encontrar los divisores de un número natural (aunque no estamos empleando el término “divisores”).

Análisis cualitativo

Julio:



1) Tengo una caja que contiene 9 galletitas, ¿entre cuántos niños podré repartir estas galletitas de manera **EXACTA**?
Da todos los ejemplos que puedas y en cada uno de tus ejemplos, escribe cuántas galletitas le correspondería a cada niño.

* Entre 9 niños 1 para cada uno
* Entre 1 niño 9 para el
* Entre 3 niños 3 para cada uno

2) Si tengo una caja que contiene 14 galletitas, ¿entre cuántos niños podré repartir estas galletitas de manera **EXACTA**?
Da todos los ejemplos que puedas y en cada uno de tus ejemplos, escribe cuántas galletitas le correspondería a cada niño.

2 Niños 7 para cada uno
1 niño 14 para el
14 niños 1 para cada uno

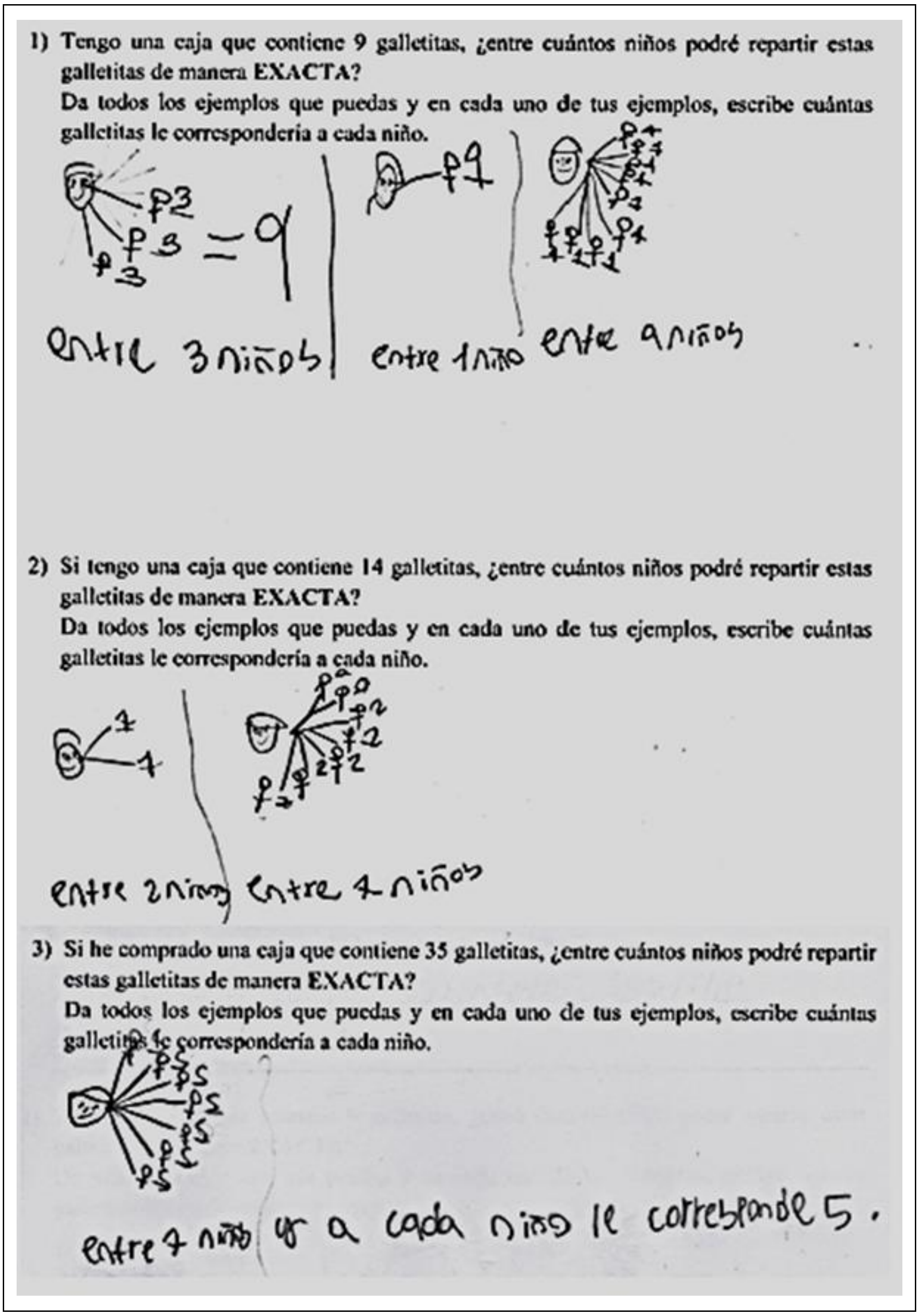
3) Si he comprado una caja que contiene 35 galletitas, ¿entre cuántos niños podré repartir estas galletitas de manera **EXACTA**?
Da todos los ejemplos que puedas y en cada uno de tus ejemplos, escribe cuántas galletitas le correspondería a cada niño.

Entre 1 niño 35 para el
Entre 35 niños 1 para cada uno

Figura 61. Respuesta de Julio para los problemas 1), 2) y 3) de la Ficha 4.

Notemos que Julio ha dado divisores correctos para los números 9, 14 y 35, aunque no ha conseguido dar todos los divisores en el caso de los números 14 y 35. Asimismo, observemos que en los 3 casos analizados el alumno ha considerado a 1 y al mismo número como divisores de los números 9, 14 y 35 respectivamente. Recordemos que estos casos especiales de división exacta los hemos trabajado en la sesión anterior.

Nicolás:



1) Tengo una caja que contiene 9 galletitas, ¿entre cuántos niños podré repartir estas galletitas de manera **EXACTA**?
Da todos los ejemplos que puedas y en cada uno de tus ejemplos, escribe cuántas galletitas le correspondería a cada niño.

3 3 3 = 9

entre 3 niños | entre 1 niño | entre 9 niños

2) Si tengo una caja que contiene 14 galletitas, ¿entre cuántos niños podré repartir estas galletitas de manera **EXACTA**?
Da todos los ejemplos que puedas y en cada uno de tus ejemplos, escribe cuántas galletitas le correspondería a cada niño.

entre 2 niños | entre 7 niños

3) Si he comprado una caja que contiene 35 galletitas, ¿entre cuántos niños podré repartir estas galletitas de manera **EXACTA**?
Da todos los ejemplos que puedas y en cada uno de tus ejemplos, escribe cuántas galletitas le correspondería a cada niño.

entre 7 niño y a cada niño le corresponde 5.

Figura 62. Respuesta de Nicolás para los problemas 1), 2) y 3) de la Ficha 4.

Observemos que Nicolás ha presentado correctamente algunos de los divisores de 14 y 35 respectivamente. Y, en el caso particular del problema 1), ha presentado todos los divisores del número 9. Asimismo notamos que el alumno no ha considerado como divisores de 14 y 35 a 1 o al mismo número en sus respuestas.

Análisis de las respuestas para los problemas 4), 5a) y 5b)

Análisis Cuantitativo

Tabla 29. Análisis cuantitativo para los problemas 4), 5a) y 5b) de la Ficha 4.

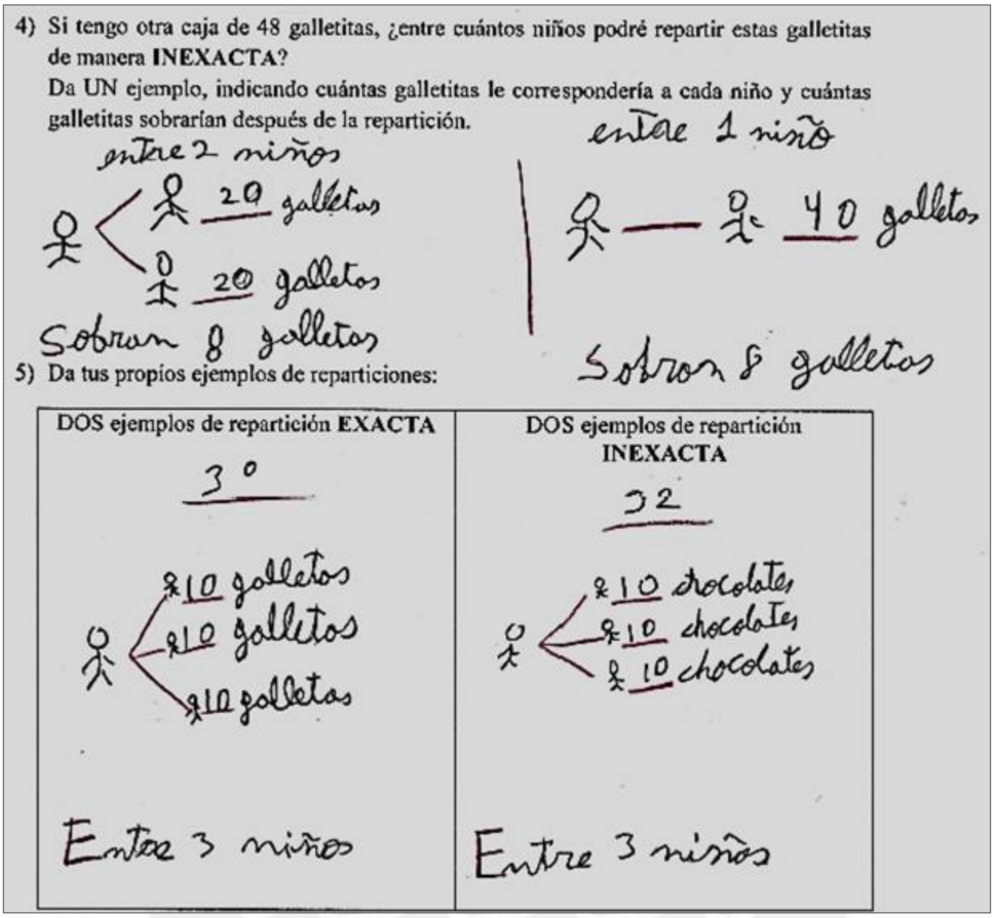
Ejemplos	Respuestas				Total (Número de alumnos)
	No respondió (En blanco)	0 ejemplos correctos	1 ejemplo correcto	2 ejemplos correctos	
4) De división inexacta con dividendo 48	7	12	5		24
5a) División exacta	9	6	5	4	24
5b) División inexacta	10	8	3	3	24

De esta tabla, observamos que:

- Solo 5 de los 24 estudiantes (casi el 21%) logra crear un ejemplo correcto de repartición inexacta cuando se tiene como dividendo al número 48.
- Notemos que el 50% de los estudiantes ha intentado dar ejemplos para el problema 4), pero no han logrado que estos sean correctos. Creemos que esto es debido a que los alumnos no han tomado en cuenta los requerimientos explícitos para este problema, ya que la mayoría de alumnos siguen dando números que sí son divisores de 48 (que era lo que se pedía en los 3 primeros ítems: reparticiones exactas).
- Observamos que, para el problema 5a), 9 de los 24 estudiantes (el 37,5% de los estudiantes) han logrado dar al menos 1 ejemplo de repartición exacta de manera correcta; mientras que, para el problema 5b), solo el 25% de los 24 estudiantes ha logrado dar al menos 1 ejemplo correcto de repartición inexacta.
- Por otro lado, vemos que en el desarrollo de estos 3 últimos ítems se va incrementando la cantidad de alumnos que deja en blanco los problemas. Creemos que esto es principalmente debido al factor tiempo.

Análisis cualitativo

Ericka:


4) Si tengo otra caja de 48 galletitas, ¿entre cuántos niños podré repartir estas galletitas de manera **INEXACTA**?
Da UN ejemplo, indicando cuántas galletitas le correspondería a cada niño y cuántas galletitas sobrarían después de la repartición.

entre 2 niños
20 galletas
20 galletas
Sobran 8 galletas

entre 1 niño
40 galletas
Sobran 8 galletas

5) Da tus propios ejemplos de reparticiones:

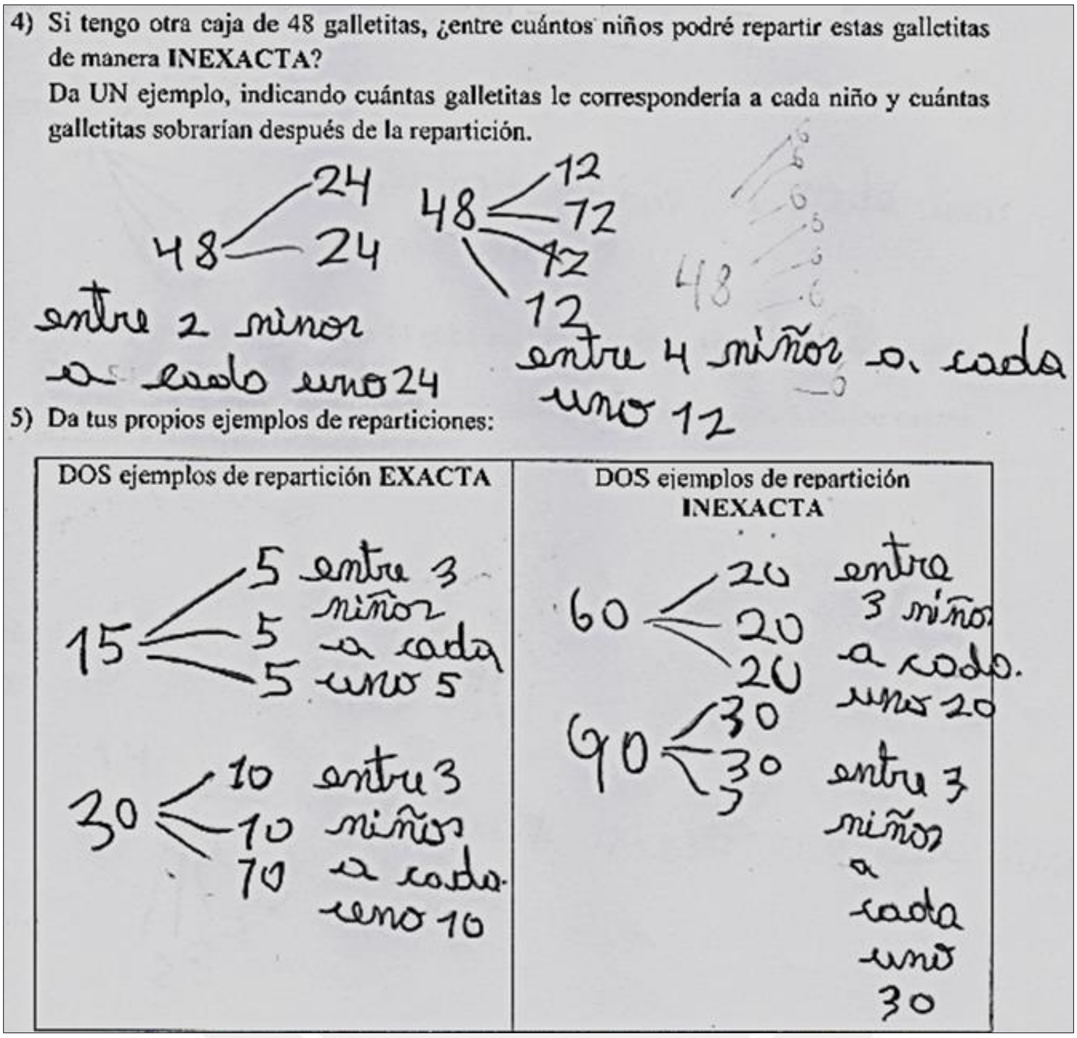
DOS ejemplos de repartición **EXACTA**	DOS ejemplos de repartición **INEXACTA**
30 10 galletas 10 galletas 10 galletas Entre 3 niños	32 10 chocolates 10 chocolates 10 chocolates Entre 3 niños

Figura 63. Respuesta de Ericka para los problemas 4), 5a) y 5b) de la Ficha 4.

Aparentemente Ericka sí es consciente del requerimiento que presenta el problema 4), ya que intenta dar ejemplos de reparticiones con residuos diferentes de cero. Sin embargo, si miramos de cerca, podemos observar que la respuesta inicial al problema 4 fue asignarle 24 galletas a cada niño y concluir que sobran 8 galletas. Pensamos que al notar que el requerimiento era diferente al de una repartición exacta, la alumna intentó hacer el cambio sobre lo que ya tenía escrito (“entre 2 niños”), lo que puede haber afectado su respuesta final, en la que la alumna muestra una repartición equitativa que no es máxima.

La afirmación hecha anteriormente además se basa en que luego, en el siguiente problema, la alumna muestra dos ejemplos correctos de reparticiones según los requerimientos presentados. Entre ellos podemos observar que el ejemplo 5 b) es un ejemplo correcto de repartición inexacta.

Luis:


4) Si tengo otra caja de 48 galletitas, ¿entre cuántos niños podré repartir estas galletitas de manera **INEXACTA**?
Da UN ejemplo, indicando cuántas galletitas le correspondería a cada niño y cuántas galletitas sobrarían después de la repartición.

48 — 24, 24
entre 2 ninor
a cada uno 24

48 — 12, 12, 12, 12
entre 4 niñor a cada uno 12

5) Da tus propios ejemplos de reparticiones:

DOS ejemplos de repartición EXACTA	DOS ejemplos de repartición INEXACTA
15 — 5, 5, 5 entre 3 niñor a cada uno 5	60 — 20, 20, 20 entre 3 niños a cada uno 20
30 — 10, 10, 10 entre 3 niñor a cada uno 10	90 — 30, 30, 3 entre 3 niñor a cada uno 30

Figura 64. Respuesta de Luis para los problemas 4), 5a) y 5b) de la Ficha 4.

Notemos que todos los ejemplos del alumno son reparticiones de tipo exacta, aunque no en todos los problemas se requiere de esto. Vemos que Luis es uno de los alumnos que no tiene en cuenta las indicaciones de los problemas que le presentamos, pues en los problemas 4) y 5b) se solicitan ejemplos de reparticiones inexactas.

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 7

Sobre el análisis de las respuestas para la Ficha 3:

- Independientemente de que calcularon bien o mal el valor del cociente y del residuo en cada caso, el 100% de los estudiantes logró identificar correctamente el tipo de repartición en función del valor del residuo obtenido.
- Dado que para considerar una respuesta como correcta los estudiantes tuvieron que responder acertadamente los tres requerimientos de los problemas para cada ítem, podemos afirmar que en términos generales el número de respuestas correctas en comparación con el número de respuestas incorrectas está dividido. Además, de los alumnos que responden correctamente a los problemas 1 y 4, hemos notado que el porcentaje de los alumnos que justifican sus respuestas y el porcentaje de aquellos alumnos que no justifican sus respuestas también se encuentra dividido (aprox. 50-50).
- De acuerdo al análisis de las hojas adicionales entregadas a los alumnos, hemos podido identificar 3 procedimientos empleados por los estudiantes para llevar a cabo sus reparticiones: reparticiones equitativas y máximas (casi el 67% de los estudiantes), agrupamientos (un poco más del 8%) y multiplicaciones (el 12,5%).

  Vale la pena mencionar además que estos 3 procedimientos identificados son compatibles con los procedimientos sugeridos por los documentos oficiales distribuidos por nuestro Ministerio de Educación (ver capítulo 3). Lo interesante en este caso particular es que de estos 3 procedimientos identificados, nosotros solo hemos partido del primero de ellos (repartición equitativa y máxima) y algunos estudiantes, de manera natural, han asociado éste con los otros dos lo que se ve reflejado en sus trabajos por escrito.

Sobre el análisis de las respuestas para la Ficha 4:

- Casi el 17% de los estudiantes ha logrado dar todos los divisores de 9.
- Ningún alumno ha logrado dar todos los divisores de 14 o de 35.
- Notamos que un poco más del 54% de los 24 estudiantes logra dar al menos un divisor para cada uno de los números 9, 14 y 35 respectivamente.
- Por otro lado, cuando se les solicita ejemplos para los problemas 4), 5a) y 5b) vemos que menos del 50% de los alumnos han dado ejemplos correctos. Específicamente casi el 21% de los estudiantes muestra correctamente su ejemplo de un número que no es divisor de 48; casi el 17% de los estudiantes presenta correctamente sus 2 ejemplos de

divisiones exactas; y el 12,5% de los estudiantes presenta correctamente sus 2 ejemplos de divisiones inexactas.

- Observamos además que hay un número creciente de alumnos que no han dado respuestas a los tres últimos ítems de la Ficha 4. Creemos que esto podría deberse a ciertos factores, siendo uno de ellos que a los alumnos les resultaba tedioso trabajar esta última ficha, puesto que anteriormente ya habían trabajado otra ficha (la Ficha 3, compuesta de 6 problemas). Otro factor ha sido el poco tiempo con el que contaban para trabajar esta última ficha. Estos son dos aspectos importantes que tratamos de subsanar en las siguientes sesiones.

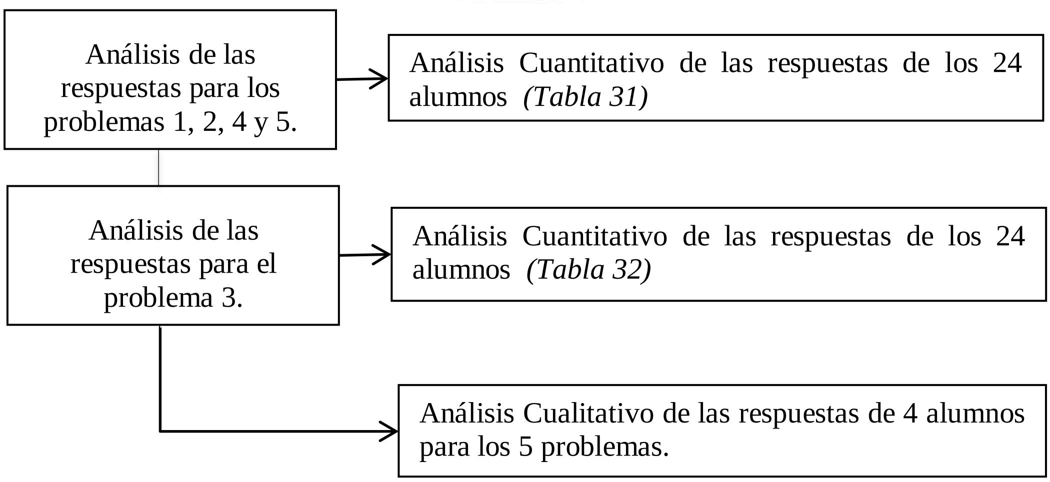
4.3.8 Análisis de la sesión 8

- **Actividades trabajadas:** en esta sesión hemos aplicado la Ficha 5: ***"Repartiendo panes"*** (ver Apéndice).
- **Tipo de actividad:** Trabajo de clase y Trabajo individual
- **Propósitos de la sesión:** indicados en la Tabla 13 (ver p. 81)
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** a esta sesión asistieron 24 estudiantes.
- **Materiales:** a cada alumno se le entrega por escrito la Ficha 5.
- **Requerimientos:** La ficha 5 está compuesta por cinco problemas, cada uno de los cuales presenta los siguientes propósitos:

Tabla 30. Estructura de la Ficha 5

Problemas	Propósitos
1	Determinar los divisores de 7.
2	Determinar los divisores de 6
3	Dar un número que no sea divisor de 9.
4	Determinar los divisores de 10.
5	Determinar los divisores de 20.

- **Organización del análisis de las respuestas de los alumnos para la Ficha 5:** debido a que el problema 3 tiene otro requerimiento en comparación con los otros cuatros problemas que conforman la ficha, hemos organizado el análisis de la siguiente manera:



Vale la pena mencionar que antes de la aplicación de la ficha 5, la profesora – conjuntamente con los estudiantes – retoma la situación de la radio con el propósito de reforzar las nociones de repartición equitativa y máxima, repartición exacta y repartición inexacta. En base a estas dos últimas nociones los alumnos trabajaron los divisores y no divisores (aunque no empleamos estos términos) de un cierto número. Este reforzamiento era necesario ya que se tenía una cantidad considerable de estudiantes que mostraron un gran número de respuestas incorrectas e/o incompletas, específicamente, en la ficha 4 aplicada en la sesión anterior.

Análisis de las respuestas para los problemas de la Ficha 5

Análisis Cuantitativo

Cabe resaltar que para el análisis siguiente (*Tabla 31*), hemos considerado que un alumno ha dado divisores correctos si logra dar divisores del número en cuestión aunque no necesariamente haya dado correctamente el número de panes que le corresponden a cada niño.

Tabla 31. Análisis cuantitativo para los problemas 1, 2, 4 y 5 de la Ficha 5.

Problemas N°	Cantidad de divisores (d.) correctos dados por los estudiantes							
	Solo 0 d.	**Solo 1 d.**	**Solo 2 d.**	**Solo 3 d.**	**Solo 4 d.**	**Solo 5 d.**	**Solo 6 d.**	**Total (N° de alumnos)**
1) Divisores de 7 (1 y 7)	**3**	**7**	**14**					24
2) Divisores de 6 (1, 2, 3 y 6)	**3**	**3**	**4**	**2**	**12**			24
4) Divisores de 10 (1, 2, 5 y 10)	**6**	**0**	**2**	**1**	**15**			24
5) Divisores de 20 (1, 2, 4, 5, 10 y 20)	**6**	**1**	**0**	**0**	**2**	**6**	**9**	24

A partir de esta tabla, observamos que:

- Un poco más del 58% de los estudiantes ha logrado dar ejemplos correctamente los 2 divisores de 7.
- El 50% de los estudiantes ha logrado dar correctamente los divisores de 6.
- El 62,5% de los estudiantes ha logrado dar correctamente los 4 divisores de 10.

- El 37,5% de los estudiantes ha logrado dar correctamente los 6 divisores de 20.

Por otro lado, hemos observado que algunos alumnos emplearon un cierto procedimiento para encontrar los divisores de los números dados en la ficha. El procedimiento consiste en agrupar los panes de tal manera que en cada grupo cuenten con una misma cantidad de panes y que ningún pan deje de ser agrupado (esto, por supuesto, para el caso de los divisores de un número: reparticiones exactas). Mostramos un ejemplo de este procedimiento en el análisis cualitativo, concretamente, con el trabajo de Anayely.

Para el análisis del problema 3 tomamos en cuenta que:

Ejemplos correctos son aquellos ejemplos que han dado respuestas correctas para los tres requerimientos presentados para este problema: un número que no es divisor de 9, el valor del cociente y el valor del residuo. Mientras que, consideramos ejemplos incorrectos a aquellos ejemplos cuyas respuestas son incorrectas para al menos uno de estos 3 requerimientos.

Tabla 32. Análisis cuantitativo para el problema 3 de la Ficha 5

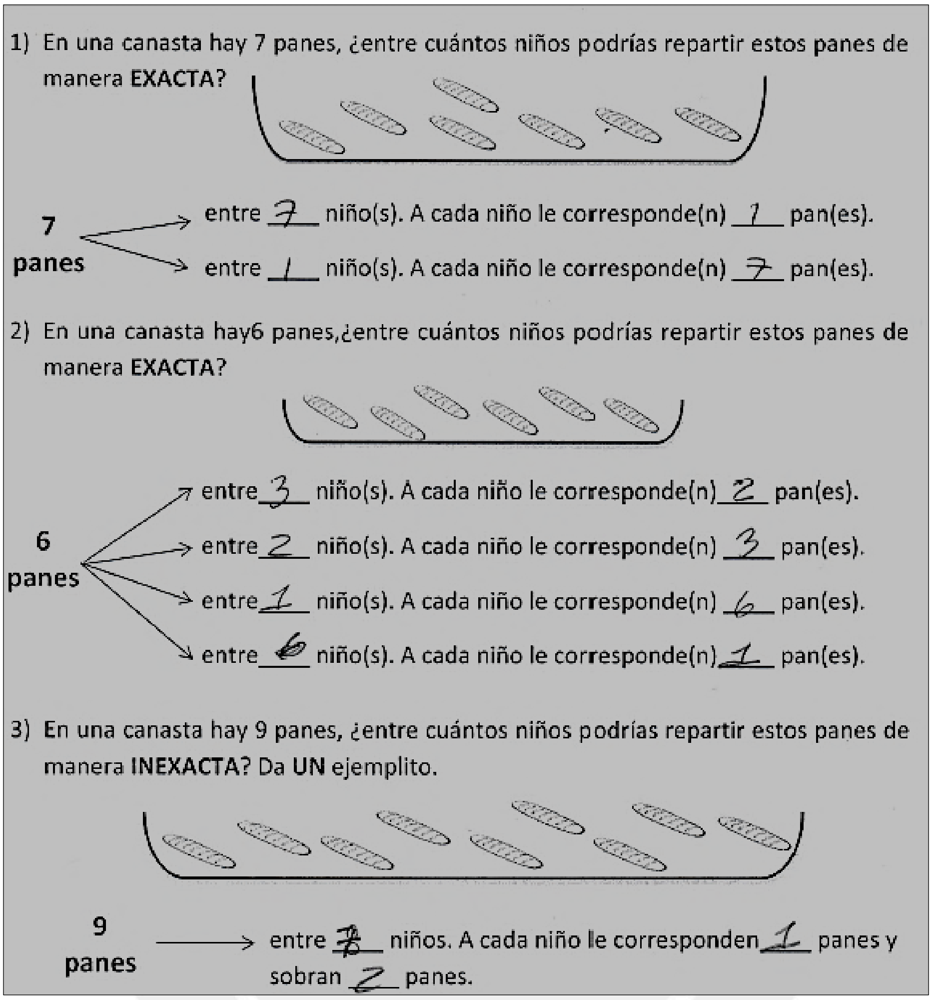
Problema N°	Dieron Ejemplos correctos	Dieron Ejemplos incorrectos	Total (N° de alumnos)
3) Un número que no es divisor de 9 (Por ejemplo: 2, 4, 5, 6, etc.)	**14**	**10**	**24**

Ampliando la información de esta tabla, hemos observado que:

- Un poco más del 58% de los 24 alumnos ha logrado dar correctamente su ejemplo de número que no es divisor de 9.

Análisis cualitativo de las respuestas de algunos alumnos para la ficha 5:

Hugo:



1) En una canasta hay 7 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?

7 panes → entre 7 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).
→ entre 1 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 7 pan(es).

2) En una canasta hay6 panes,¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?

6 panes → entre 3 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 2 pan(es).
→ entre 2 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 3 pan(es).
→ entre 1 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 6 pan(es).
→ entre 6 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).

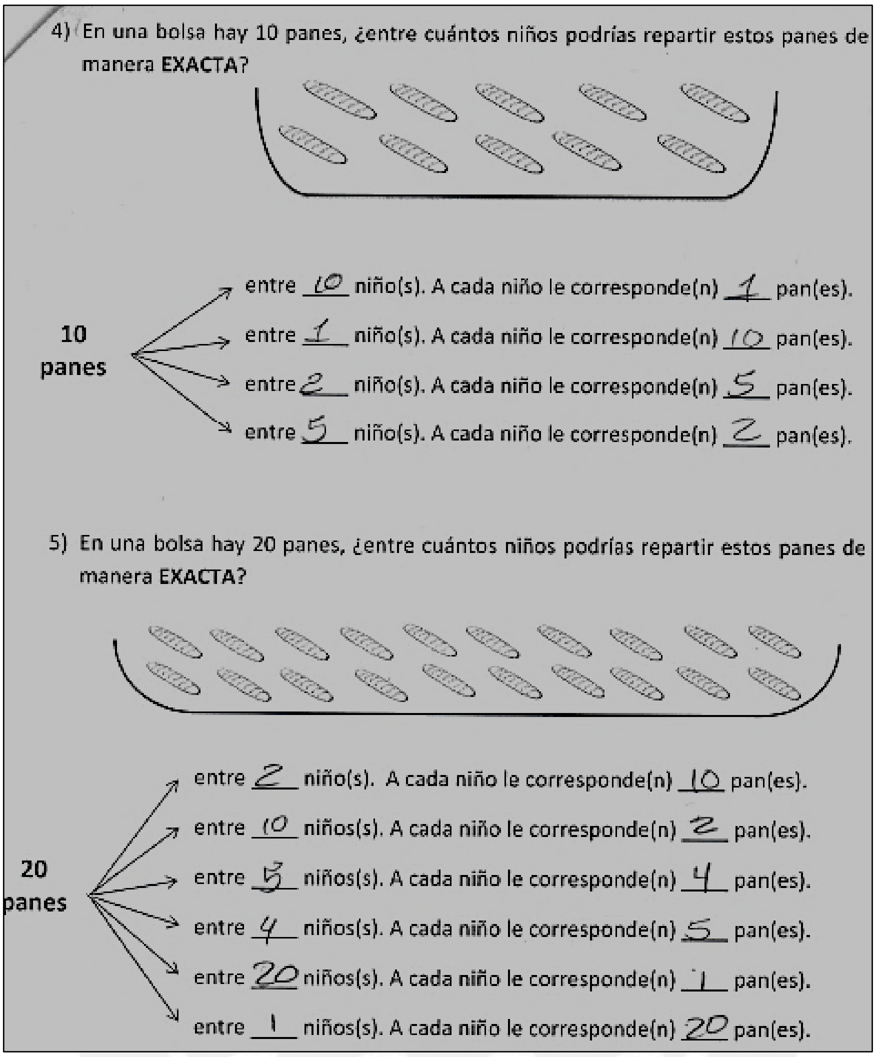
3) En una canasta hay 9 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **INEXACTA**? Da **UN** ejemplito.

9 panes → entre 7 niños. A cada niño le corresponden 1 panes y sobran 2 panes.

Figura 65. Respuesta de Hugo para los problemas 1), 2) y 3) de la Ficha 5

Notemos que las respuestas de Hugo son correctas para estos tres problemas. El alumno ha logrado dar todos los divisores de 7 y 6, así como los valores correctos para la cantidad de panes que le corresponde a cada niño. Para el problema 3) vemos que el alumno presenta un número que no es divisor de 9, como es el número 7. Además vemos que muestra valores correctos para la cantidad de panes que le corresponde a cada niño (cociente) y la cantidad de panes que sobran después de la repartición equitativa y máxima (residuo).

Veamos a continuación las respuestas de Hugo a los problemas 4) y 5) de esta ficha:



4) En una bolsa hay 10 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?

10 panes

entre 10 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).

entre 1 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 10 pan(es).

entre 2 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 5 pan(es).

entre 5 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 2 pan(es).

5) En una bolsa hay 20 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?

20 panes

entre 2 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 10 pan(es).

entre 10 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 2 pan(es).

entre 5 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 4 pan(es).

entre 4 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 5 pan(es).

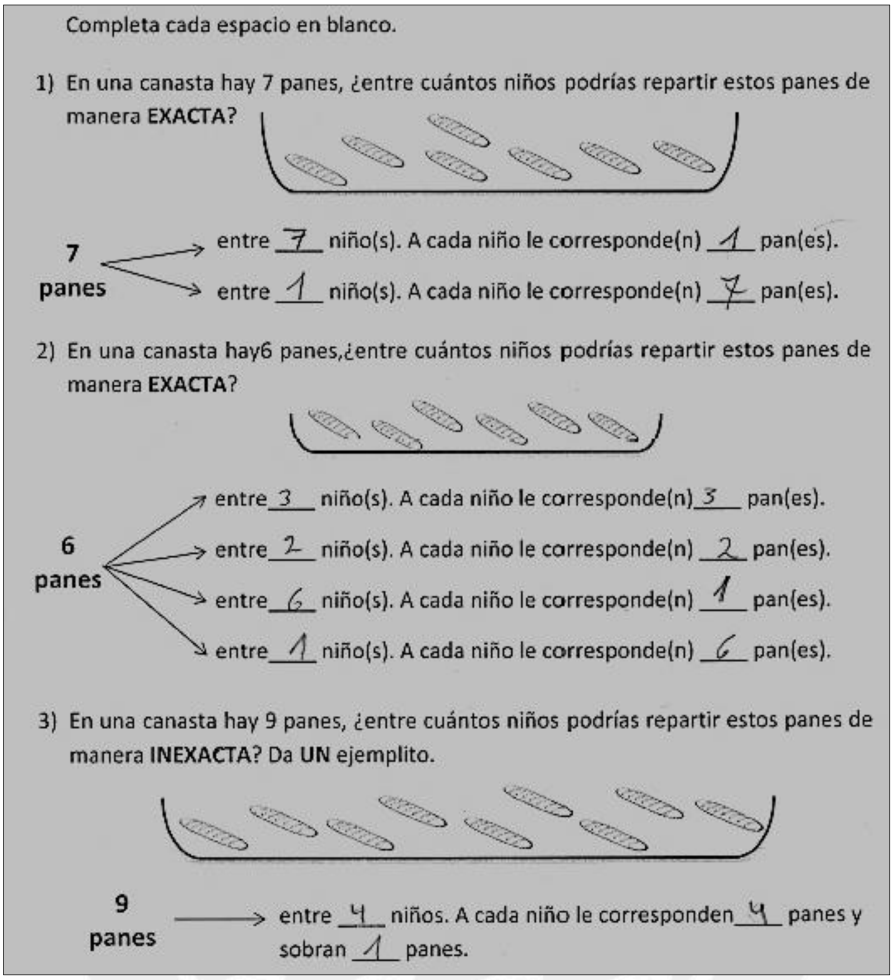
entre 20 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).

entre 1 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 20 pan(es).

Figura 66. Respuesta de Hugo para los problemas 4) y 5) de la Ficha 5.

Vemos que Hugo no muestra dificultades en identificar de manera correcta todos los divisores de 10 y 20, así como también la cantidad de panes que le corresponde a cada niño al finalizar la repartición.

Krisstell:


Completa cada espacio en blanco.

1) En una canasta hay 7 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?

7 panes → entre 7 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).
→ entre 1 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 7 pan(es).

2) En una canasta hay6 panes,¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?

6 panes → entre 3 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 3 pan(es).
→ entre 2 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 2 pan(es).
→ entre 6 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).
→ entre 1 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 6 pan(es).

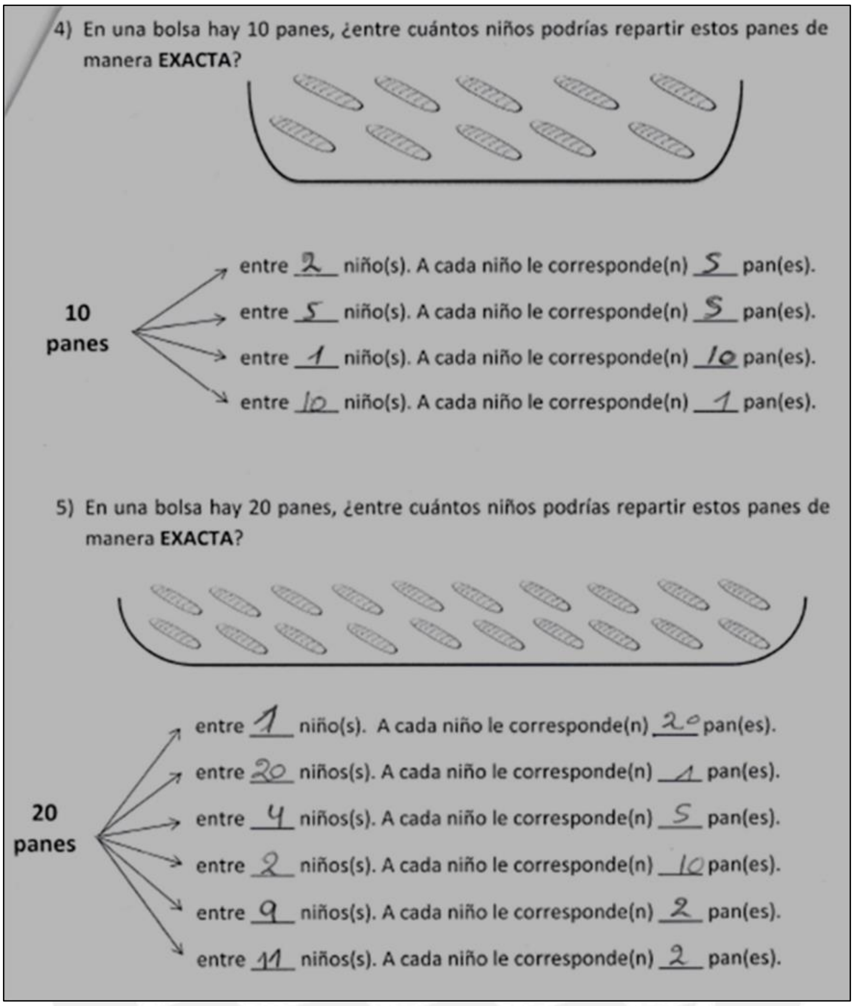
3) En una canasta hay 9 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **INEXACTA**? Da **UN** ejemplito.

9 panes → entre 4 niños. A cada niño le corresponden 4 panes y sobran 1 panes.

Figura 67. Respuesta de Krisstell para los problemas 1), 2) y 3) de la Ficha 5.

Notemos que Krisstell presenta divisores correctos para los problemas 1) y 2). Aunque, en el problema 2) muestra errores en las cantidades de panes que le corresponde a cada niño para el primer y segundo caso que la alumna presenta. Pudimos detectar el mismo tipo de error en el problema 3), a pesar de que acierta al dar un número que no es divisor de 9.

A continuación, veamos la respuesta de Krisstell para los problemas 4) y 5) de esta ficha:



4) En una bolsa hay 10 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?

10 panes

entre 2 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 5 pan(es).
entre 5 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 5 pan(es).
entre 1 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 10 pan(es).
entre 10 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).

5) En una bolsa hay 20 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?

20 panes

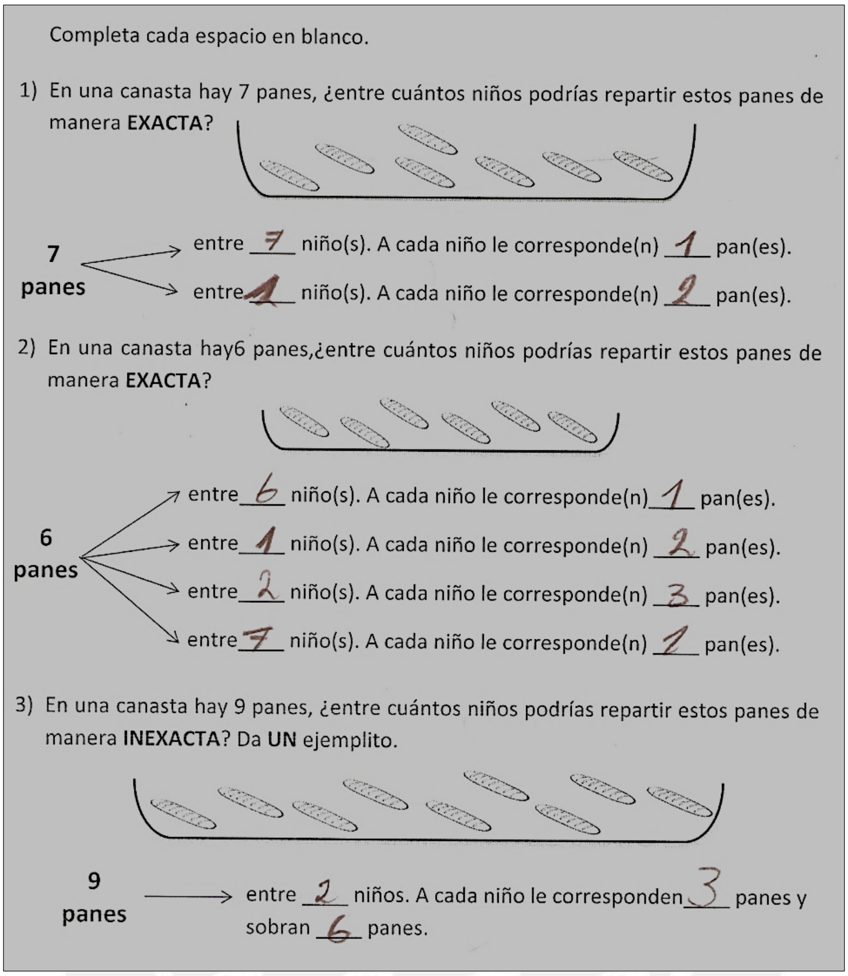
entre 1 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 20 pan(es).
entre 20 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).
entre 4 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 5 pan(es).
entre 2 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 10 pan(es).
entre 9 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 2 pan(es).
entre 11 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 2 pan(es).

Figura 68. Respuesta de Krisstell para los problemas 4) y 5) de la Ficha 5.

Vemos que Krisstell ha dado correctamente todos los divisores para el problema 4, pero sigue manifestando el mismo tipo de error que cometió en los primeros problemas de esta ficha.

Por otro lado, observemos que en el problema 5 la alumna da correctamente 4 de los 6 divisores de 20; sin embargo presenta dos casos incorrectos (9 y 11).

Renzo:



Completa cada espacio en blanco.

1) En una canasta hay 7 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?

7 panes
- entre 7 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).
- entre 1 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 2 pan(es).

2) En una canasta hay6 panes,¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?

6 panes
- entre 6 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).
- entre 1 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 2 pan(es).
- entre 2 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 3 pan(es).
- entre 7 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).

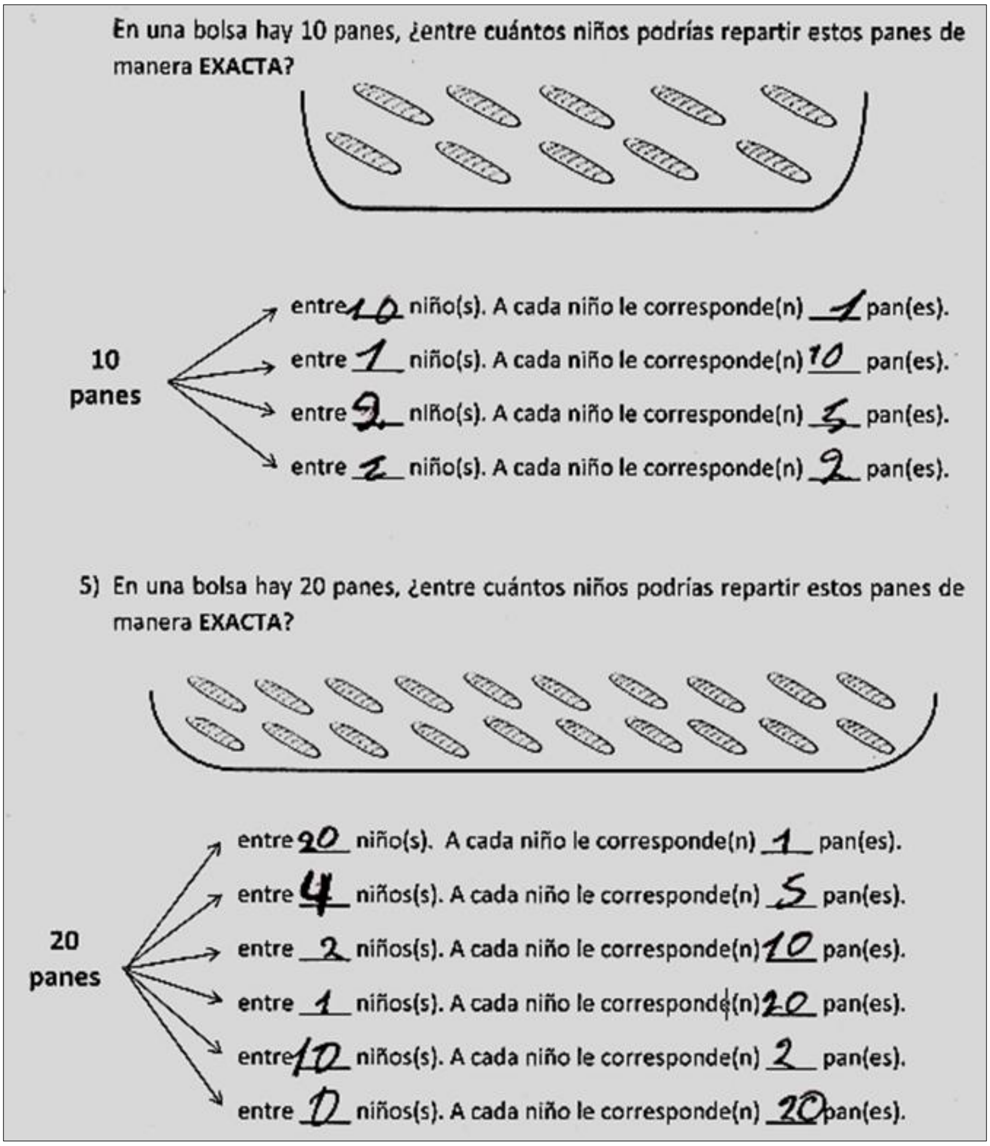
3) En una canasta hay 9 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **INEXACTA**? Da **UN** ejemplito.

9 panes → entre 2 niños. A cada niño le corresponden 3 panes y sobran 6 panes.

Figura 69. Respuesta de Renzo para los problemas 1), 2) y 3) de la Ficha 5.

Notemos que Renzo ha determinado dos divisores correctos para el número 7; sin embargo solo muestra una respuesta correcta para la cantidad de panes que le corresponde a cada niño. Estos errores también han permanecido, como podemos observar, en el desarrollo de los problemas 2) y 3).Vemos que en el problema 2) el alumno muestra tres números que son divisores de 6, y de manera incorrecta muestra también el número 7. En cuanto al problema 3, el alumno muestra un número que no es divisor de 9, como es el número 2, pero da respuestas incorrectas para los valores del cociente y del residuo respectivamente.

Estos errores pueden haberse debido, en este caso en particular, a que el alumno tiende a ser muy inquieto y distraerse con facilidad lo que origina que por momentos se desconcentre del trabajo que realiza. Esto puede haber sucedido en el desarrollo de los tres primeros problemas, ya que estos errores no persisten en el desarrollo de los siguientes problemas (4 y 5), después de que le pedimos que trabaje concentrado. Veamos sus respuestas a continuación:



En una bolsa hay 10 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA?**

10 panes

entre 10 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).
entre 1 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 10 pan(es).
entre 2 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 5 pan(es).
entre 5 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 2 pan(es).

5) En una bolsa hay 20 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA?**

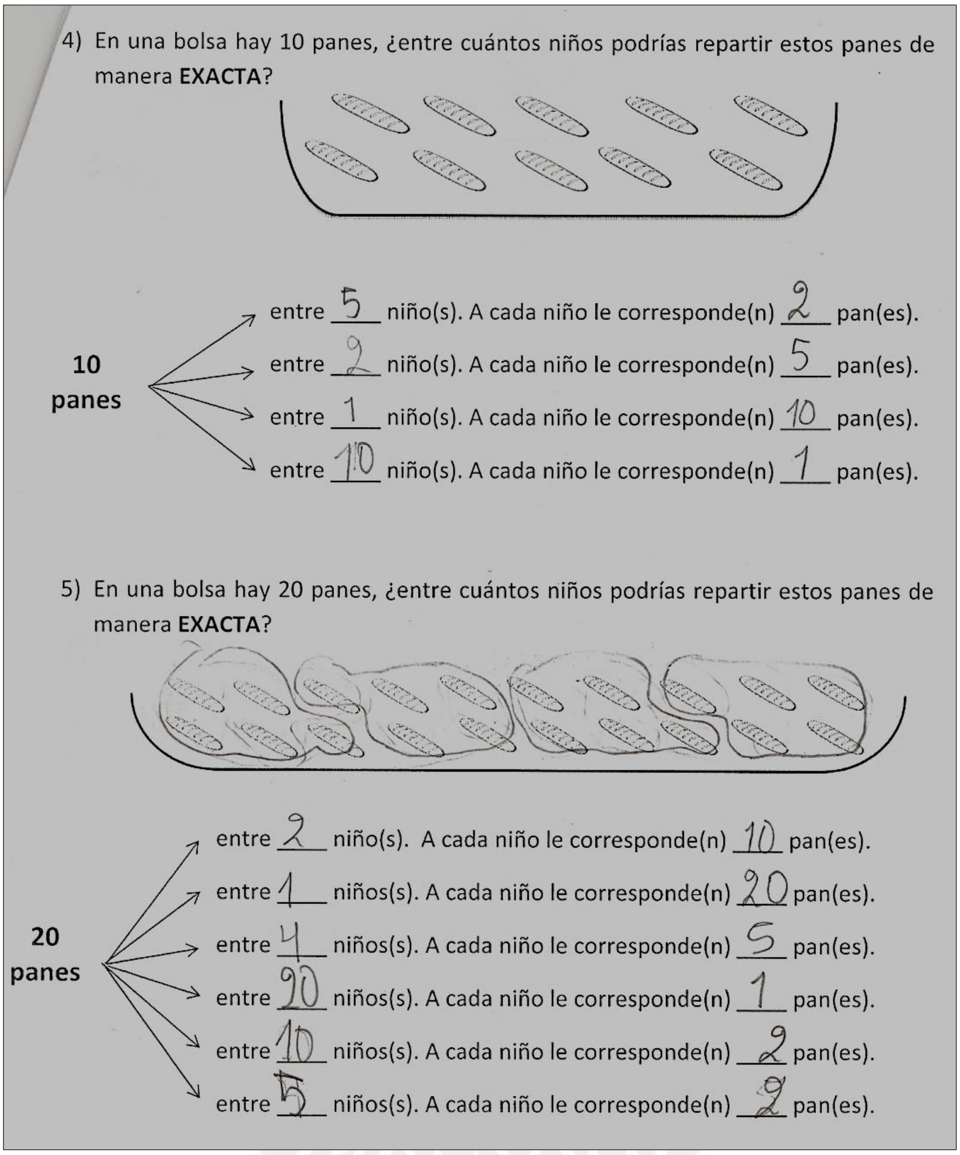
20 panes

entre 20 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).
entre 4 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 5 pan(es).
entre 2 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 10 pan(es).
entre 1 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 20 pan(es).
entre 10 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 2 pan(es).
entre 0 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 20 pan(es).

Figura 70. Respuesta de Renzo para los problemas 4) y 5) de la Ficha 5.

Observemos que, aunque Renzo comete un error en el último caso de repartición de 20 panes, los demás problemas propuestos en esta página han sido desarrollados correctamente por el alumno.

Anayely:



4) En una bolsa hay 10 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?

10 panes

entre 5 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 2 pan(es).
entre 2 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 5 pan(es).
entre 1 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 10 pan(es).
entre 10 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).

5) En una bolsa hay 20 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?

20 panes

entre 2 niño(s). A cada niño le corresponde(n) 10 pan(es).
entre 1 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 20 pan(es).
entre 4 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 5 pan(es).
entre 20 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 1 pan(es).
entre 10 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 2 pan(es).
entre 5 niños(s). A cada niño le corresponde(n) 2 pan(es).

Figura 71. Respuesta de Anayely para los problemas 4) y 5) de la Ficha 5.

Anayely no muestra dificultades en identificar de manera correcta todos los divisores de 10 y 20. Notemos que muestra respuestas correctas para la cantidad de panes que le corresponde a cada niño, aunque muestra un error en el último problema. Por otro lado, en las figuras de los panes del problema 5). Vemos que la alumna emplea agrupaciones para encontrar los divisores y la cantidad de panes que le corresponde a cada niño; esto se logra detectar en los borrones que la alumna muestra en el desarrollo de su trabajo, aunque es notorio cuando agrupa de manera equitativa y máxima los 20 panes en 4 grupos.

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 8

Sobre el análisis de las respuestas para la Ficha 5:

- Observamos que más del 74% de los estudiantes han logrado determinar algunos o todos los divisores de 6, 7, 10 y 20.
- Además, hemos notado que un poco más del 58% de los alumnos han logrado dar correctamente su ejemplo de número que no es divisor de 9.
- De acuerdo a este análisis, podemos señalar que la mayoría de los alumnos han mostrado respuestas correctas en esta ficha. Notamos que en esta ficha es notorio el incremento en el número de alumnos que logran determinar divisores correctos para los tres primeros casos propuestos, en comparación con las respuestas correctas de los alumnos en las dos fichas aplicadas en la sesión anterior.
- Creemos que este incremento es debido a ciertos factores, siendo uno ellos el reforzamiento que se realizó previo a la aplicación de la ficha; otro factor puede ser que los números empleados para las reparticiones propuestas han sido números menores o iguales a 20; y otro factor puede ser el diseño de la ficha, concretamente a las figuras y los esquemas que se presentan en cada uno de los problemas ya que han ayudado a que realicen el trabajo de búsqueda de los divisores y no divisores de los números involucrados en los problemas. El último posible factor; es el procedimiento que emplearon algunos alumnos, en el que realizan agrupaciones para determinar los divisores de los números que se les propone en la ficha.

4.3.9 Análisis de la sesión 9

- **Actividades trabajadas:** en esta primera sesión hemos desarrollado la situación: ***"En el supermercado"***.
- **Tipo de actividad:** Trabajo de clase
- **Propósitos de la sesión:** indicados en la Tabla 13 (ver p. 81)
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** a esta sesión asistieron 24 alumnos.
- **Indicaciones:** Para esta situación todos los alumnos se colocan formando un círculo.
- **Materiales:** En esta sesión la profesora ha llevado como muestra un pack de jugos, el que consta de 2 unidades de jugos por pack, así como un papelote que ha sido colocado en la pizarra. Este papelote tiene una tabla para que los alumnos completen en los espacios en blanco los múltiplos de 2. Estos múltiplos están dados en términos de la cantidad de jugos que llevarías a casa, como se muestra a continuación:

Número de packs de jugos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
Número de jugos que llevarías a casa															

Empezamos esta sesión narrando la siguiente situación, que es la situación que regirá el desarrollo de toda la sesión:

Imagina que estás de compras en el supermercado "*Todo Barato*", y tienes una lista de productos que debes llevar a tu casa. En tu lista figuran los siguientes productos:

Yogurt
Leche
Jabón
Jugo
Hot dog

En este supermercado todo es barato, por eso es que puedes encontrar productos que solo se venden en **packs** (paquetes, agrupados) en distintas cantidades dependiendo del tipo de producto. De ninguna manera se permite la venta de los productos por unidad. Todo se vende en packs.

En esta situación se han tenido en cuenta básicamente tres preguntas, las que se han ido planteando progresivamente a lo largo del desarrollo de esta sesión. Estas son:

¿Podremos comprar 12 jugos?
¿Podremos comprar 19 jugos?
¿Cuáles son algunas posibles cantidades de jugos que podrás llevar a casa?

A continuación incluimos la transcripción de algunos fragmentos de la discusión llevada a cabo en esta sesión:

> ***Profesora:*** *en el supermercado "Todo Barato" se vende todo por mayor. Ahora, el jugo viene en paquetes de… ¿cuántas unidades habíamos dicho?*
>
> ***Alumnos:*** *¡2!*
>
> ***Profesora:*** *¿y podríamos comprar un juguito solito?*
>
> ***Alumnos:*** *¡¡no!!*
>
> ***Profesora:*** *no, ¿verdad?, porque no podemos separarlo [mostrando el pack de jugos]. En la tienda venden todo al por mayor, se vende todo en paquetes, en packs. Vemos que en nuestra lista nos dicen que debemos comprar jugos [en la pizarra se pegó la lista de compras]. Ahora, una pregunta: Si los jugos vienen en packs, ¿podremos comprar 12 jugos?*

Notemos que la profesora pone énfasis en las condiciones dadas para esta situación, resaltando que las ventas en el supermercado solo están permitidas en packs. Es importante que los estudiantes tengan presente esta condición para que esto, no sea un impedimento de que los estudiantes respondan a los problemas de fondo a ser planteados gradualmente.

> ***Nicolás:*** *Sí se podría comprar 12 jugos, es que… uhmm… en cada uno hay 2 unidades… uhmmm…*
>
> ***Profesora:*** *a ver, Nicolás está tratando de responder….*
>
> ***Renzo:*** *solo si le das 10 jugos más...*
>
> ***Profesora:*** *¿Ah? Tú dices: si le agregamos 10 jugos… Pero, ¿cuántos packs tendrías que comprar para llevar a casa 12 jugos?... A ver, ¿qué pasa si voy al supermercado y en mi lista dice que tengo que comprar 12 jugos y estos solo los venden en packs de dos unidades? ¿Podría comprar 12 jugos?*

Cuando Renzo dice: *"solo si le das 10 jugos más"*, pensamos que el alumno se está refiriendo a que se podrían comprar los 12 jugos si se agregan 10 unidades de jugos más al paquete de 2 unidades de jugos (el pack) que muestra la profesora en clase. Si lo que pensamos es cierto, el alumno estaría dando una respuesta correcta pues sí se podrían comprar 12 jugos.

Alumnos: *¡sí se puede!*

Profesora: *¿sí se puede? y, ¿por qué se puede?*

Julio: *pero tendrá 24 jugos en total*

Profesora: *¿y por qué en total tendría 24 jugos?*

Julio: *porque en cada jugo vienen 2 (unidades)*

Profesora: *pero no quiero comprar 24 jugos, ¡quiero comprar solo 12 jugos!*

Orlando: *¡¡ya sé!! Tienes que comprar 6 packs porque 6 por 2 es 12*

Observemos que la respuesta de Julio es incorrecta. Parece ser que el alumno está entendiendo que la única forma de comprar los 12 jugos es comprando 12 packs de jugos ya que luego menciona: *"pero tendrá en total 24 jugos"*. Mientras que la respuesta dada por Orlando es correcta pues ha logrado relacionar el número de packs con el número de jugos que obtendría al comprar 6 packs de jugos mediante la operación de multiplicación, a partir de la cual Orlando justifica su respuesta ($6 \times 2 = 12$).

Profesora: *¿6 packs?... ¿Orlando tiene razón o no?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *entonces, si compro 6 packs de jugos, ¿cuántos jugos estoy llevando a mi casa?*

Alumnos: *12*

Profesora: *entonces, ¿puedo comprar esos 12 jugos?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *sí, ¿verdad? Entonces, ¿cuántos packs de jugos estaría llevando en total a mi casa?*

Alumnos: *6*

Notemos que las últimas preguntas planteadas por la profesora tienen el propósito de que los alumnos realicen los dos tipos de conversiones: 6 packs a unidades de jugos (12 jugos), y 12 unidades de jugos a packs (6 packs).

> ***Profesora:*** *A ver, otra pregunta, ¿podremos comprar 19 jugos? Tengan en cuenta que esto no se puede separar [mostrando el pack de jugos].*
>
> ***Jhosetp:*** *¡no se puede!*
>
> ***Profesora:*** *¿por qué no se puede?*
>
> ***Jhosetp:*** *porque 19 no es una cantidad que va de* 2 en 2
>
> ***Profesora:*** *a ver, su compañero dice que 19 no es una cantidad de 2 en 2. ¡Muy bien Jhosetp!*

Notemos que Jhosetp tiene ideas claras de por qué 19 no es un múltiplo de 2 (en el contexto de la situación dada). Sin embargo, como podemos observar, existen algunas imprecisiones en su justificación. Por ejemplo: ¿Qué quiere decir "una cantidad que va de 2 en 2"?, ¿Cuál es el valor de partida (o de referencia) para contar de 2 en 2? Observemos que en este caso la profesora simplemente ha asumido que la justificación del alumno está basada en la adición, en la que considera que la suma de 2 en 2 va desde 0 ya que este es otro procedimiento para obtener los múltiplos de 2.

Creemos que hubiese sido oportuno aclarar estos puntos a través de algunas preguntas que la misma profesora puede haberle planteado al estudiante, con el fin de que Jhosetp maneje una información más precisa, así como para que todos sus compañeros entiendan exactamente a qué se refería el alumno.

[Debido a que Orlando es un alumno que tiende a distraerse con mucha facilidad, la profesora le sede el papel "protagónico" de profesor al alumno con el propósito que el alumno se concentre en el trabajo que se viene realizando. A continuación veremos que, en su nuevo rol de profesor, Orlando plantea algunas preguntas a sus compañeros]

> ***Orlando:*** *¿se podrán comprar 29 jugos?*
>
> ***Nicolás:*** *no, porque si 19 no se puede entonces… uhmm… si fuera 20, sí se puede… uhmm… Porque 29 no es una cantidad de a 2.*
>
> ***Profesora:*** *a ver Orlando, ¿qué opinas? ¿Está bien la respuesta de tu compañero?*

> ***Orlando:*** *sí, está bien*
>
> ***Jeffrie:*** *¡sí se puede Miss! Partiendo uno [refiriéndose a partir un pack de jugos]*

Nicolás da una respuesta correcta a la pregunta dada por Orlando. Observemos que para dar su respuesta el alumno recuerda el ejemplo anterior (19 jugos), intenta relacionar este ejemplo con el ejemplo que le presenta Orlando, aunque no explicita esta conexión, y finalmente se basa en el argumento dado por Jhosetp para el trabajo previo. Pensamos que el alumno, en su intento por encontrar una relación entre los dos ejemplos dados (19 y 29 jugos), podría haber notado que los números que terminan en la cifra 9 no son múltiplos de 2 (no van de 2 en 2, empezando desde 0).

Por otro lado, Jeffrie considera que sí es posible comprar 29 jugos ya que el alumno está contemplando el caso en que se pueden separar las 2 cajitas de jugos que conforman un pack de jugos, siendo esta una respuesta incorrecta pues Jeffrie no estaría cumpliendo la condición dada en la situación. En ese sentido, la profesora vuelve a hacer la aclaración a todos los alumnos:

> ***Profesora:*** *pero hemos dicho que* ***solo se vende por packs****… Entonces, ¿se pueden comprar 29 jugos?*
>
> ***Alumnos:*** *¡no!*
>
> ***Profesora:*** *no, ¿verdad?… A ver, Orlando nos va a hacer otra pregunta.*
>
> ***Orlando:*** *¿Podría comprar 1799 jugos?*
>
> ***Alumnos:*** *¡no se puede!*
>
> ***Profesora:*** *¿y por qué no se puede?*
>
> ***Manuel:*** *no es una cantidad de 2 en 2*

Observemos que Orlando en su pregunta emplea un número “grande”, y que esto no es una dificultad para que los alumnos den una respuesta correcta. Notemos que Manuel presenta una justificación basada en la adición, que es el argumento original de Jhosetp. Además, el alumno podría haber percibido que, de manera general, los números que tienen como última cifra 9 son números que no podríamos obtener si contamos de 2 en 2, a partir de 0. Creemos esto ya que difícilmente el alumno ha logrado hacer tan rápido la verificación que con este procedimiento puede obtener el número 1799 (esto por la respuesta inmediata que el alumno da). Pensamos que así como Manuel, Orlando también podría haber identificado este "patrón" y por esta razón planteó el caso particular de 29 y luego 1799 jugos.

> ***Orlando:*** *tiene razón. ¿Y se puede comprar 1820 jugos?*
>
> ***Chris:*** *Sí*
>
> ***Orlando:*** *¿por qué?*
>
> ***Chris:*** *Uhm…*
>
> ***Jamil:*** *porque tendría que comprar 910 packs.*
>
> ***Profesora:*** *A ver…*

Observemos que la profesora interviene con el propósito de no dejar pasar la respuesta de Jamil que hasta este punto había resultado inesperada.

> ***Jamil:*** *¡tendrías que comprar 910 packs!*
>
> ***Profesora:*** *Orlando preguntó: ¿podrás comprar 1820 jugos? ¿Se podrá comprar esta cantidad de jugos? Y Jamil dio una respuesta interesante… Muy bien, ¿se podrá?*
>
> ***Orlando:*** *pero, ¿por qué se puede?*
>
> ***Profesora:*** *Sí, ¿y por qué se puede?*

Notemos que aunque la profesora sabe que Orlando tiene dudas sobre la respuesta de Jamil, ella no le da la respuesta a Orlando y a cambio devuelve la pregunta a todo el grupo de alumnos con el fin de que sean ellos los que descubran por qué Jamil dio esa respuesta o que sea el mismo Jamil quien les explique su razonamiento.

A continuación veamos que esto último es lo que sucede:

> ***Jamil:*** *porque el doble de 910 es 1820*
>
> ***Profesora:*** *entonces, ¿tendrían que comprarse…?*
>
> ***Jamil:*** *tendría que comprarse 910 packs.*

Las preguntas hechas por Orlando son respondidas correctamente por Jamil. Vemos que el argumento de Jamil parece estar basado en la multiplicación, ya que ha empleado el término "doble" (2 x 910 = 1820).

> ***Profesora:*** *muy bien. A ver, Julio quiere hacer una pregunta*

Julio: *¿Se pueden comprar 1800 packs?*

Chris: *Se tendrían que comprar 900 packs.*

Profesora: *Ojo, Julio está preguntado si se podrían comprar 1800 packs, no si se pueden comprar 1800 jugos. Así, en 1800 de estos [mostrando un pack de jugos], ¿cuántos jugos de estos podrá llevar a su casa?*

Vemos que la profesora aclara que la pregunta dada por Julio es diferente a las que se han venido planteando previamente. La respuesta dada por Chris sería correcta si la pregunta hubiera sido: ¿cuántos packs de jugos debo llevar a casa si quiero comprar 1800 jugos?

A continuación veamos las reacciones de los alumnos frente al replanteamiento que hace la profesora de la pregunta dada originalmente por Julio.

Jhosetp: *1800 más 1800 es… uhmm… ¿2700?*

Orlando: *1800 por 2 es 3600*

Profesora: *¿qué cosa? ¿3600 qué?*

Orlando: *3600 jugos.*

Profesora: *bien. Debemos entender lo que ha preguntado Julio César. Él dice: Si voy al supermercado y en mi carrito llevo 1800 packs de estos [mostrando un pack de jugos], ¿cuántos jugos llevaré a casa? No olviden que cada pack tiene 2 jugos. A ver…*

Jhosetp: *está llevando 3600 jugos*

Profesora: *¿por qué?*

Jhosetp: *porque 1800 más 1800,… uhmm… El doble de 1800 es 3600.*

Notemos que para justificar sus respuestas los alumnos se basan en la adición o en la multiplicación. Vemos que Jhosetp inicialmente intenta presentar su explicación en base a la adición (1800 más 1800); sin embargo no logra dar una respuesta correcta en esa primera oportunidad (el alumno dice 2700). En el caso de Orlando, el alumno logra dar una respuesta correcta y esto lo hace por medio de la multiplicación.

Profesora: *así es… Ahora, si les pregunto ¿cuáles son algunas posibles cantidades de jugos que podrás llevar a casa? O sea, ¿qué cantidades de jugos podrías llevar a casa?*

[Los alumnos salen a la pizarra a completar la tabla del papelote. Cada alumno tiene que interpretar y explicar las cantidades que están colocando en el papelote. Por ejemplo, decir: si compro 4 packs de jugos, llevaría 8 unidades de jugos a casa. Finalmente, en el papelote se tiene lo siguiente]

Número de packs de jugos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
Número de jugos que llevarías a casa	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**	**24**	**26**	**…**

Profesora: *estos puntos suspensivos significan que hay muchos más ejemplos para dar… A ver, corrijamos lo que tenemos hasta este momento [en el papelote]… Pregunto: Si compro 10 packs de jugos, ¿estaré llevando 20 jugos? Yo digo que esto no está bien.*

Alumnos: *¡está bien!*

Profesora: *no, digo que esto no está bien [señalando el papelote]. Si compro 10 packs no es verdad que llevaré 20 jugos a casa*

Alumnos: *¡20! ¡Está bien!*

Profesora: *¡Ah!, entonces me equivoqué… A ver, ¿vemos un error por ahí o todo está bien? [Refiriéndose al papelote]*

Alumnos: *¡está bien!*

Vemos que la profesora da una afirmación falsa (Si compro 10 packs de jugos, no es verdad que llevaré 20 unidades de jugos) con el propósito de que los alumnos la corrijan. Es decir con el fin de que los estudiantes muestren seguridad en sus respuestas y no duden al respecto, a pesar de que es justamente la profesora quien los pone “a prueba”. Notemos que los alumnos muestran seguridad ya que mantienen su misma respuesta de inicio a fin.

Profesora: *si llevo 100 packs de jugos, ¿cuántos jugos estaría llevando a mi casa?*

Ericka: *200 jugos*

Orlando: *¡tendría que llevar 200 jugos!*

Profesora: *Ahora, si llevo 15 packs de jugos, ¿cuántos jugos estaría llevando a mi casa?*

Alumnos: *30*

Profesora: *y si ahora llevo en mi carrito 17 pack de jugos, ¿cuántos jugos estaría llevando?*

Jeffrie: *34*

Profesora: *34, y… uhmm… Si llevo en mi carrito 111 packs, ¿cuántos jugos estaría llevando?*

Alumnos: *222 jugos*

Notemos que los alumnos no muestran dificultad para convertir los números de packs propuestos a unidades de jugos, ya sea los casos de números de dos cifras, como números de tres cifras, que les presentamos. Pensamos que los alumnos podrían estar empleando ya sea adiciones o multiplicaciones.

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 9

En esta sesión logramos que los estudiantes den algunos múltiplos de 2, así como que analicen si ciertas cantidades son o no múltiplos de 2 en el contexto de la situación dada. Es importante aclarar que los estudiantes no usan el término “múltiplo”; sin embargo es lo que estaría “detrás” de los requerimientos planteados. Asimismo hemos notado que para dar múltiplos de 2, los estudiantes han empleado sus conocimientos previos de adición y multiplicación. Por otro lado, creemos que algunos alumnos han notado que los números que tienen como última cifra a 9 no son múltiplos de 2.

4.3.10 Análisis de la sesión 10

- **Actividades trabajadas:** indicadas en la Tabla 13 (ver p. 82)
- **Tipo de actividad:** Trabajo individual y Trabajo de clase
- **Propósitos de la sesión:** indicados en la Tabla 13
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** 22 estudiantes
- **Materiales:** a cada alumno se le entrega por escrito la Ficha 6
- **Etapas que conforman esta sesión:**

Etapa 1 →	Aplicamos la Ficha 6: "***Comprando en el supermercado***" Trabajo individual
Etapa 2 →	Retomamos la situación 5: ***"En el supermercado"*** Trabajo de clase
Etapa 3 →	Trabajo de clase

ETAPA 1

- **Requerimientos:** La ficha aplicada en esta etapa individual está compuesta de 4 ítems, cada uno de los cuales presenta los siguientes propósitos:

Tabla 33. Estructura de la Ficha 6.

ÍTEM	PROPÓSITOS
a)	Determinar si los estudiantes toman en cuenta las condiciones de la situación presentada la sesión previa en el contexto del supermercado.
b)	**Primera parte:** análogo al propósito del ítem (a). La diferencia con el ítem (a) es esencialmente la forma en la que se presenta este problema. Aquí se plantea una pregunta. **Segunda parte:** Determinar si 23 es múltiplo de 2 (o equivalentemente: determinar si 23 es divisible entre 2) y justificar su respuesta.
c)	**Primera parte:** Dar 2 ejemplos de números que son múltiplos de 2. **Segunda parte:** Conjeturar que existen infinitos múltiplos de 2.
d)	**Primera parte:** Dar 2 ejemplos de números que no son múltiplos de 2. **Segunda parte:** Conjeturar que existen infinitos números que no son múltiplos de 2.

- **Organización del análisis de las respuestas de los alumnos para la Ficha 6:** debido a que algunas partes tienen requerimientos similares, el análisis de esta ficha se presentará de la siguiente manera:

Análisis de las respuestas para los *ítems a) y b)*

- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 22 alumnos para para el ítem a) y la primera parte del ítem b) *(Tabla 34)*
- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 22 alumnos para la segunda parte del ítem b) *(Tabla 35)*
- Análisis Cualitativo de las respuestas de 4 alumnos.

Análisis de las respuestas para los *ítems c) y d)*

- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 22 alumnos *(Tabla 36)*
- Análisis Cualitativo de las respuestas de 2 alumnos

A continuación presentamos el desarrollo de estos análisis.

<u>Análisis de las respuestas para los ítems a) y b)</u>

Análisis Cuantitativo:

Tabla 34. Análisis cuantitativo para el ítem a) y para la primera parte del ítem b)

Respuestas	**Respuestas esperadas para el ítem a)**				**Respuestas esperadas para la primera parte del ítem b)**
	Si compras 4 *packs* de jugos, llevarías <u>8</u> *jugos* a casa.	Si compras 9 *packs* de jugos, llevarías <u>18</u> *jugos* a casa.	Si llevas 14 *jugos* a casa, compraste <u>7</u> *packs* de jugos.	Si llevas 22 *jugos* a casa, compraste <u>11</u> *packs* de jugos.	Si necesito 26 *jugos*, compraría <u>13</u> *packs* de jugos.
Correctas	18	19	15	13	16
Incorrectas	4	3	7	9	5
En blanco (No respondió)	0	0	0	0	1
Total (N° de alumnos)	22	22	22	22	22

De acuerdo al análisis realizado:

- Observemos que, de manera general, más del 59% de los 22 alumnos responden de manera correcta cada uno de los cuatro problemas que conforman el ítem a).
- Cabe resaltar que uno de los errores más comunes observados en las respuestas del tercer y cuarto problema del ítem a) es que los estudiantes creen que el requerimiento sigue siendo el mismo que el de los dos primeros problemas (conversión de packs a unidades). Esto lo vemos evidenciado en las respuestas de los alumnos. Por ejemplo:
    - Algunos alumnos escriben 28 y 44 para el tercer y cuarto problema respectivamente.

      Específicamente:

      Para el tercer problema: 3 alumnos escriben 28.

      Para el cuarto problema: 3 alumnos escriben 44.
    - Algunos alumnos completan los espacios en blanco con números que son mayores que 14 y 22 para el tercer y cuarto problema respectivamente. Tomemos en cuenta que si un alumno hubiese dado como respuesta un número menor que 14 y 22 respectivamente, podríamos haber pensado que el alumno está teniendo en cuenta el requerimiento dado en estos dos problemas. Pero, si por otro lado un alumno da como respuesta un número mayor que 14 y 22, esto nos llevar a pensar que este error está asociado a que se sigue manteniendo el requerimiento dado en el primer y segundo problema del ítem a).

      Específicamente:

      Para el tercer problema: 2 alumnos escriben 48 y 24 respectivamente.

      Para el cuarto problema: 3 alumnos escriben 40, 36 y 80 respectivamente.
- Observemos entonces que en realidad son 2 los alumnos que responden el tercer problema escribiendo un número menor que 14, pero diferente a 7; mientras que son 3 los alumnos que responden el cuarto problema escribiendo un número menor que 22 pero diferente a 11. Es decir que parece que toman en cuenta los requerimientos; sin embargo no llegan a dar el número exacto de pack de jugos.
- En cuanto a la primera parte del ítem b), casi el 73% de los 22 alumnos responde correctamente a este requerimiento. Observemos que 5 de los 22 alumnos han dado respuestas incorrectas, de las cuales 4 alumnos al parecer siguen manteniendo la misma estructura de los dos primeros problemas del ítem a), por alguna de las razones ya expuestas anteriormente. Mientras que 1 alumno escribe como respuesta: *9 jugos*.

- Aunque esencialmente el requerimiento de la primera parte del ítem b) es el mismo al de los dos problemas anteriores, pensamos que la disminución en el número de respuestas incorrectas en el primer caso se debe al cambio en la estructura del problema (a la forma en la que ha sido planteado éste).

A continuación presentamos el análisis cuantitativo de las respuestas de todos los alumnos con respecto a la segunda parte del ítem b).

<u>Análisis de las respuestas para la segunda parte del ítem b)</u>

Análisis Cuantitativo

Tabla 35. Análisis cuantitativo para la segunda parte del ítem b) de la Ficha 6

Respuestas							
No codificable	**Respuesta correcta** (el alumno escribió: NO)					**Respuesta incorrecta** (el alumno escribió: SÍ)	
	No codificable	Su argumento se basa en que no se puede comprar 23 jugos porque sobraría 1 jugo suelto.	Su argumento se basa en que 23 es impar o no tiene mitad.	Su argumento se basa en que 23 no es un número que va de 2 en 2	Su argumento se basa en que la compra debe ser 22 y/o 24 jugos	Su argumento se basa en una compra de 46 jugos y no de 23 jugos.	**Total (N° de alumnos)**
4	**2**	**7**	**3**	**3**	**2**	**1**	**22**

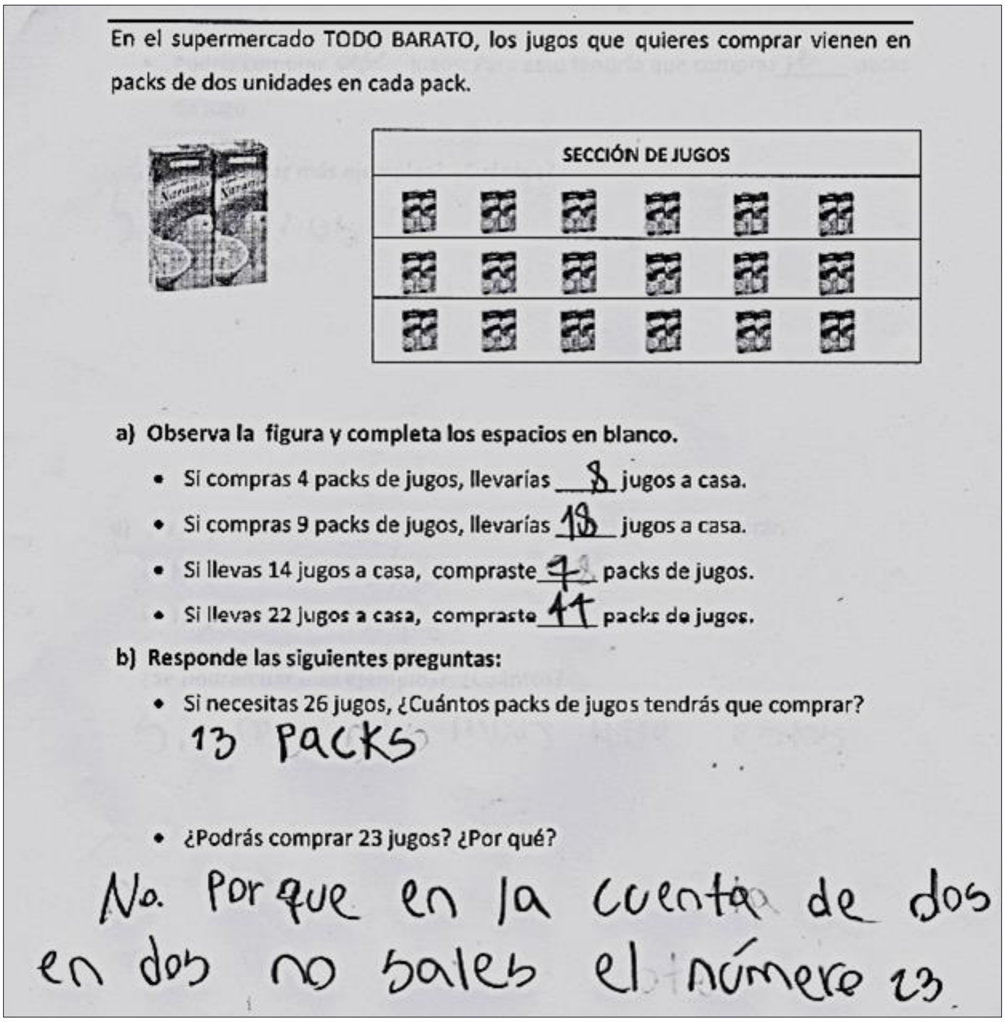
De acuerdo al análisis realizado:

- Observemos que 17 de los 22 alumnos (un poco más del 77%) han respondido correctamente, ya que han considerado un *“no”* como respuesta. Cabe resaltar que 15 de estos 17 alumnos (un poco más del 88% de los alumnos que responden correctamente) han justificado adecuadamente que 23 no es múltiplo de 2 (o equivalentemente que 23 no es divisible entre 2).
- Solo 1 alumno ha considerado que es posible comprar 23 jugos.
- Por otro lado, las respuestas de 4 de los 22 alumnos (un poco más del 18%) son consideradas como respuestas no codificables puesto que no se pueden categorizar

como un *“sí”* o un *“no”*, ya que los alumnos han escrito como únicas respuestas números aislados (*7, 22, 64 y 46)*.

Análisis cualitativo

Nicolás:



En el supermercado TODO BARATO, los jugos que quieres comprar vienen en packs de dos unidades en cada pack.

SECCIÓN DE JUGOS

a) Observa la figura y completa los espacios en blanco.

- Si compras 4 packs de jugos, llevarías 8 jugos a casa.
- Si compras 9 packs de jugos, llevarías 18 jugos a casa.
- Si llevas 14 jugos a casa, compraste 7 packs de jugos.
- Si llevas 22 jugos a casa, compraste 11 packs de jugos.

b) Responde las siguientes preguntas:

- Si necesitas 26 jugos, ¿Cuántos packs de jugos tendrás que comprar?

13 packs

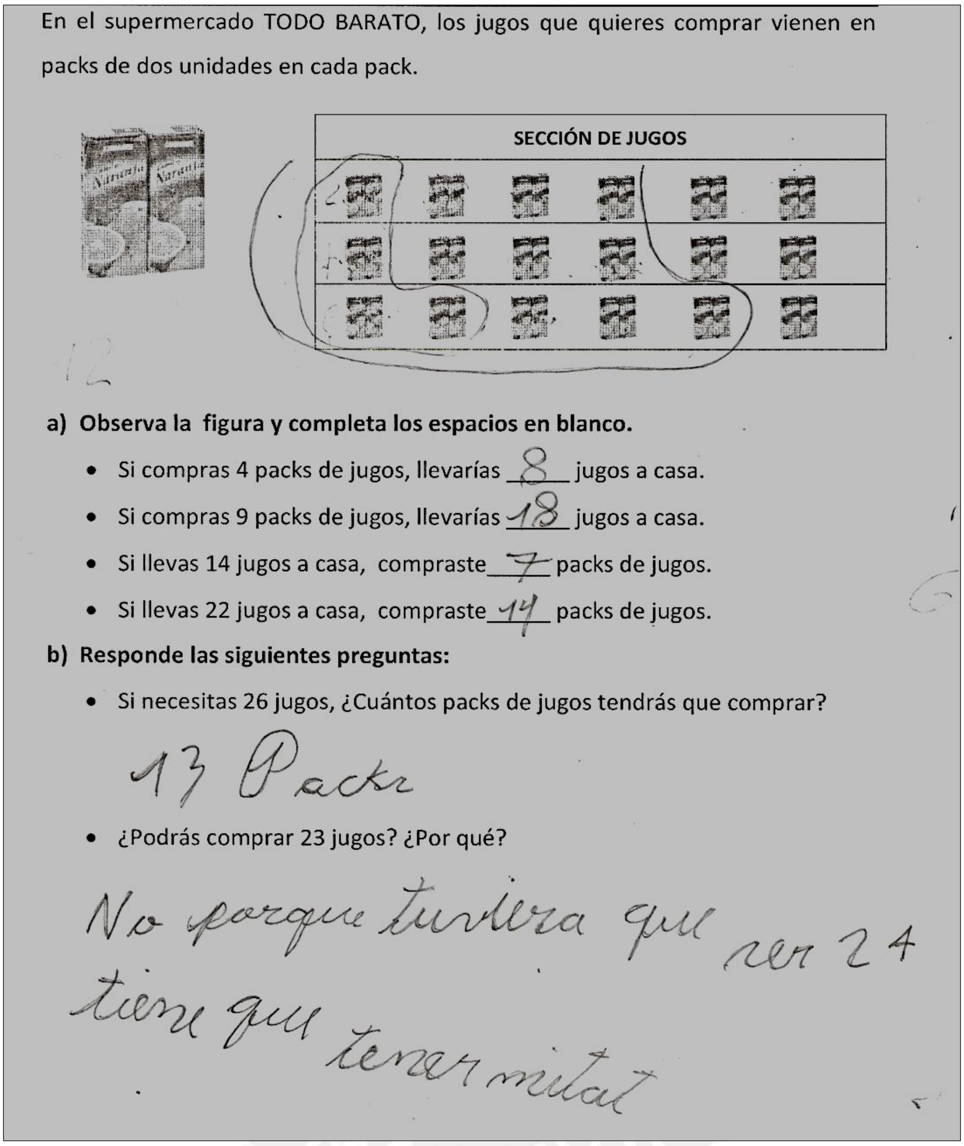
- ¿Podrás comprar 23 jugos? ¿Por qué?

No. Porque en la cuenta de dos en dos no sales el número 23.

Figura 72. Respuesta de Nicolás para los ítems a) y b).

Notemos que todas las respuestas dadas por el alumno son correctas. Vemos que Nicolás es uno de los 3 alumnos cuya justificación se basa en que 23 no es un número que se obtiene al contar de 2 en 2. Aunque no lo dice de manera explícita, suponemos que el alumno hace el conteo desde cero.

Jamil:



En el supermercado TODO BARATO, los jugos que quieres comprar vienen en packs de dos unidades en cada pack.

SECCIÓN DE JUGOS

12

a) Observa la figura y completa los espacios en blanco.

- Si compras 4 packs de jugos, llevarías __8__ jugos a casa.
- Si compras 9 packs de jugos, llevarías __18__ jugos a casa.
- Si llevas 14 jugos a casa, compraste __7__ packs de jugos.
- Si llevas 22 jugos a casa, compraste __14__ packs de jugos.

b) Responde las siguientes preguntas:

- Si necesitas 26 jugos, ¿Cuántos packs de jugos tendrás que comprar?

13 Packs

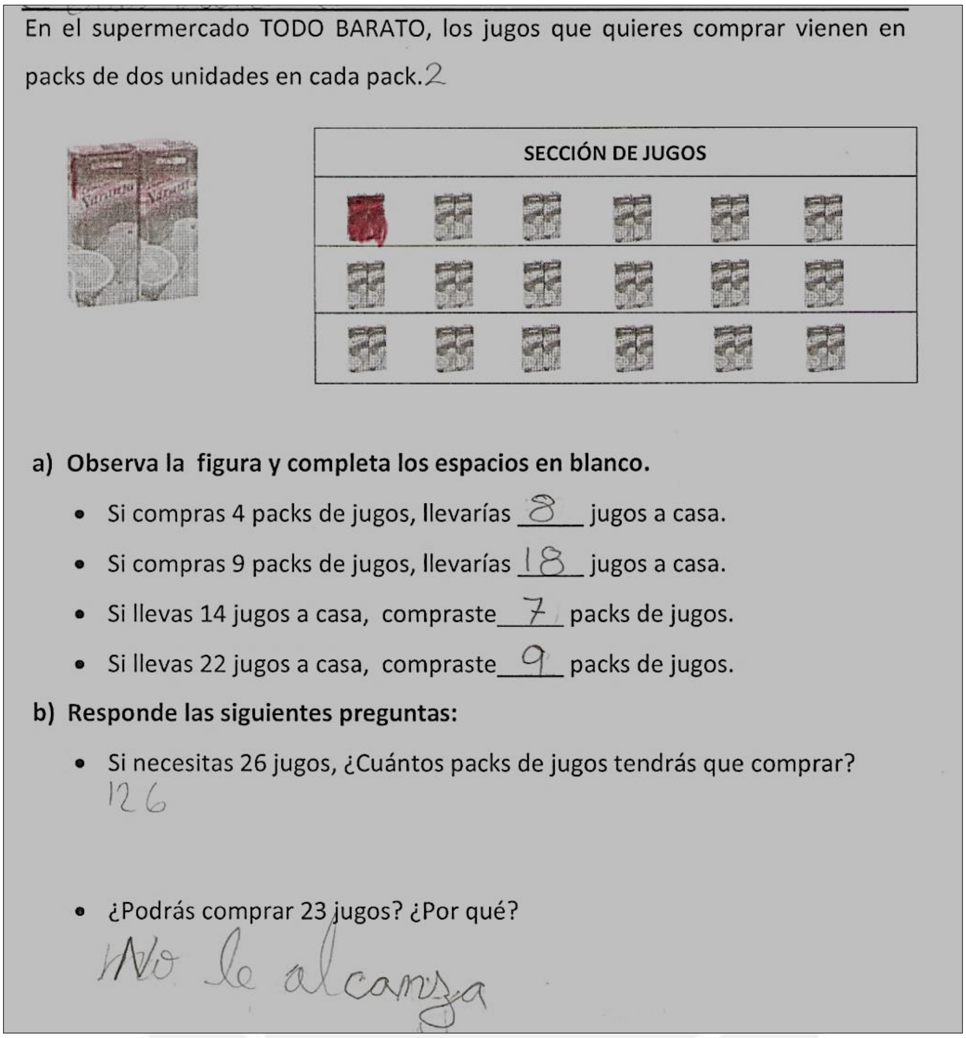
- ¿Podrás comprar 23 jugos? ¿Por qué?

No porque tuviera que ser 24 tiene que tener mitat

Figura 73. Respuesta de Jamil para los ítems a) y b).

Observemos que Jamil responde correctamente los dos ítems a) y b). El argumento dado para la segunda parte del ítem b) hace referencia a que 23 es una cantidad de jugos que no podría comprarse ya que este es un número que no tiene mitad (o equivalentemente que el número 23 no es divisible entre 2). El alumno adicionalmente propone un caso cercano a 23 que sí es posible dividir entre 2 de manera exacta (24).

Vanesa:



En el supermercado TODO BARATO, los jugos que quieres comprar vienen en packs de dos unidades en cada pack. 2

SECCIÓN DE JUGOS

a) Observa la figura y completa los espacios en blanco.

- Si compras 4 packs de jugos, llevarías 8 jugos a casa.
- Si compras 9 packs de jugos, llevarías 18 jugos a casa.
- Si llevas 14 jugos a casa, compraste 7 packs de jugos.
- Si llevas 22 jugos a casa, compraste 9 packs de jugos.

b) Responde las siguientes preguntas:

- Si necesitas 26 jugos, ¿Cuántos packs de jugos tendrás que comprar?

  12 6

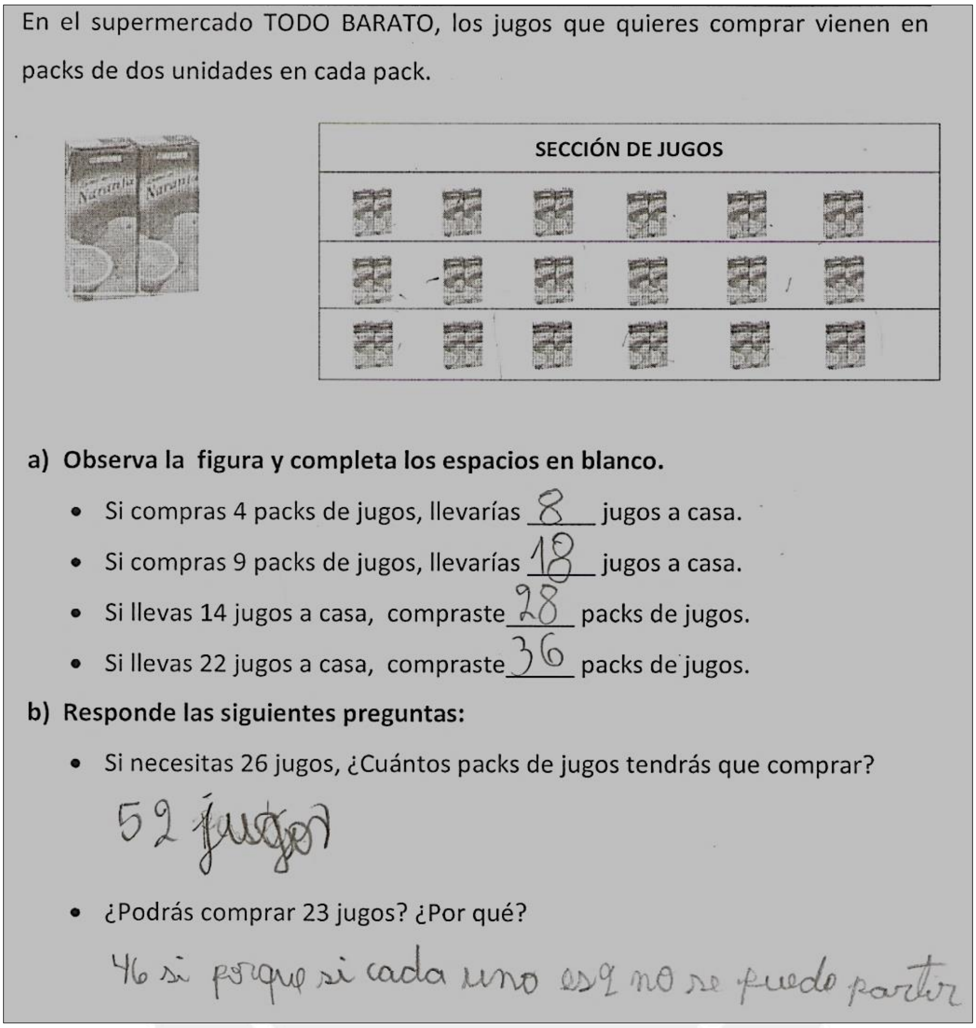
- ¿Podrás comprar 23 jugos? ¿Por qué?

  No le alcanza

Figura 74. Respuesta de Vanesa para los ítems a) y b).

Notemos que la alumna ha respondido correctamente los tres primeros problemas del ítem a). La respuesta de la alumna para la primera parte del ítem b) es incorrecta; mientras que la respuesta para la segunda parte del ítem b) la consideramos como no codificable puesto que la expresión *"no le alcanza"* no nos proporciona una idea completa.

Anayely:



En el supermercado TODO BARATO, los jugos que quieres comprar vienen en packs de dos unidades en cada pack.

SECCIÓN DE JUGOS

a) Observa la figura y completa los espacios en blanco.

- Si compras 4 packs de jugos, llevarías 8 jugos a casa.
- Si compras 9 packs de jugos, llevarías 18 jugos a casa.
- Si llevas 14 jugos a casa, compraste 28 packs de jugos.
- Si llevas 22 jugos a casa, compraste 36 packs de jugos.

b) Responde las siguientes preguntas:

- Si necesitas 26 jugos, ¿Cuántos packs de jugos tendrás que comprar?

52 jugos

- ¿Podrás comprar 23 jugos? ¿Por qué?

46 si porque si cada uno es 9 no se puedo partir

Figura 75. Respuesta de Anayely para los ítems a) y b).

Observamos que la alumna ha respondido correctamente los dos primeros problemas del ítem a). Sin embargo parece ser que la alumna no se percata del requerimiento para los siguientes casos puesto que en el tercer problema del ítem a) y las respuestas del ítem b) sigue dando respuestas como si lo solicitado se tratase de la conversión de una cantidad de packs de jugos a unidades. Notemos que Anayely es la única alumna que escribió como respuesta *"sí"* en la segunda parte del ítem b).

<u>Análisis de las respuestas para los ítems c) y d)</u>

Análisis Cuantitativo

La tabla que mostramos a continuación, concretamente en la primera parte de los ítems c) y d), se basa en el conteo de los ejemplos correctos que han sido presentados por los estudiantes. En el ítem c), consideramos ejemplos correctos a aquellos ejemplos que han dado respuestas correctas para estos dos requerimientos: número de jugos que se podría comprar (números que son divisibles entre 2 o múltiplo de 2) y la conversión de tal número en packs. Mientras que en el ítem d), ejemplos correctos es aquel ejemplo que presenta un número de jugos que no es posible comprar (números que no son divisibles entre 2 o no son múltiplo de 2).

Tabla 36. Análisis cuantitativo para los ítems c) y d) de la Ficha 6

Respuestas							
	Primera parte			Segunda parte			
Ítem	0 ejemplos correctos	1 ejemplo correcto	2 ejemplos correctos	Finito o algo parecido	Infinito o algo parecido	No respondió	Total (N° de alumnos)
c)	5	2	15	5	15	2	22
d)	3	3	16	6	13	3	22

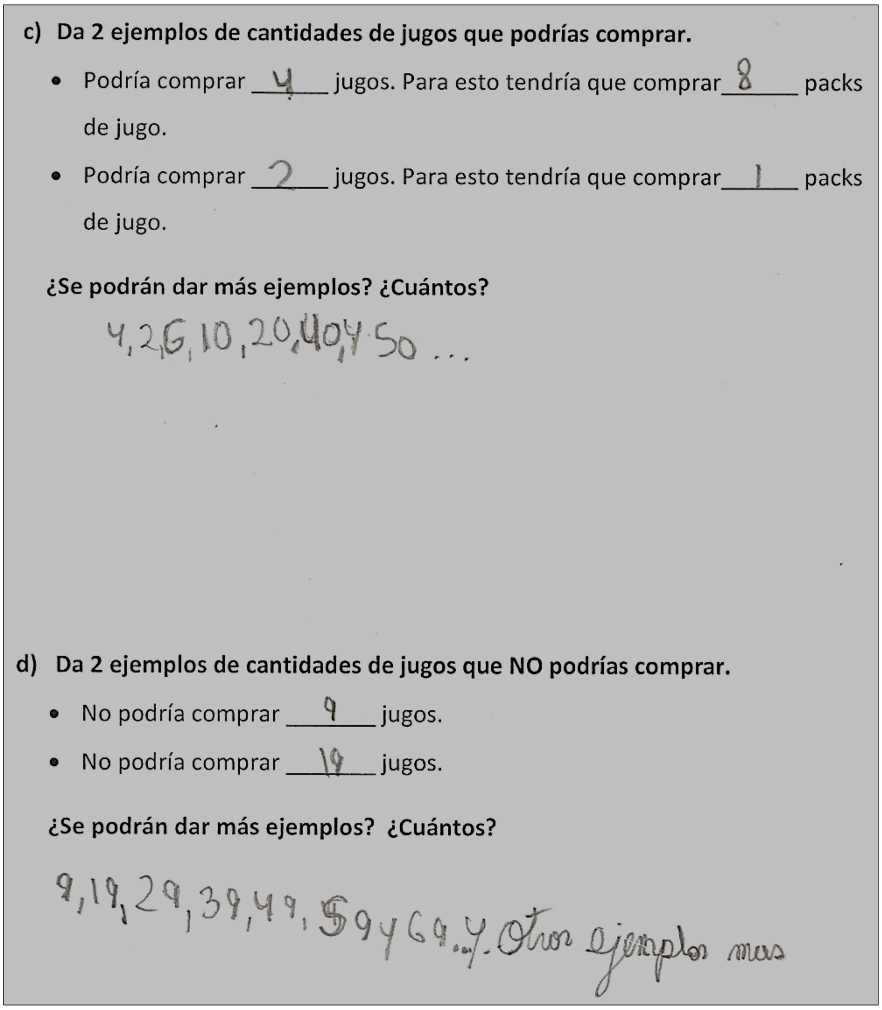
De acuerdo al análisis realizado:

- En la *primera parte del ítem c),* 17 de los 22 alumnos (un poco más del 77%) dieron al menos un ejemplo correcto.
  En cuanto a la *segunda parte* de este ítem, 15 de los 22 alumnos (un poco más del 68%) parecen percibir que existe una cantidad infinita de ejemplos que podrían ser dados para este tipo de requerimiento (ejemplos de números divisibles entre 2, o múltiplos de 2). Los estudiantes manifiestan de diferentes maneras que hay infinitos ejemplos. Entre las expresiones que ellos emplean tenemos por ejemplo: *muchos más, un montón, muchísimos más que yo no puedo saber, varios, infinitos, no sé cuántos pero hay muchos, etc*. Aunque rigurosamente hablando sabemos que no todas ellas hacen referencia real a "infinitos ejemplos", debido al nivel educativo en el que se presentan estos alumnos asumimos que en estos casos ellos sí percibieron que ese es el caso.
- En la *primera parte del ítem d),* 19 de los 22 alumnos (un poco más del 86%) crearon de manera correcta al menos un ejemplo correcto.

En cuanto a la *segunda parte* de este ítem, 13 de los 22 alumnos (un poco más del 59%) conjeturan que existe una cantidad infinita de ejemplos de números que no son divisibles entre 2. Esto lo vemos reflejado en sus respuestas, en las que emplean expresiones similares a las presentadas en el ítem a).

Análisis cualitativo

Chris:


c) **Da 2 ejemplos de cantidades de jugos que podrías comprar.**

- Podría comprar __4__ jugos. Para esto tendría que comprar __8__ packs de jugo.
- Podría comprar __2__ jugos. Para esto tendría que comprar __1__ packs de jugo.

¿Se podrán dar más ejemplos? ¿Cuántos?

4, 2, 6, 10, 20, 40, 450 ...

d) **Da 2 ejemplos de cantidades de jugos que NO podrías comprar.**

- No podría comprar __9__ jugos.
- No podría comprar __19__ jugos.

¿Se podrán dar más ejemplos? ¿Cuántos?

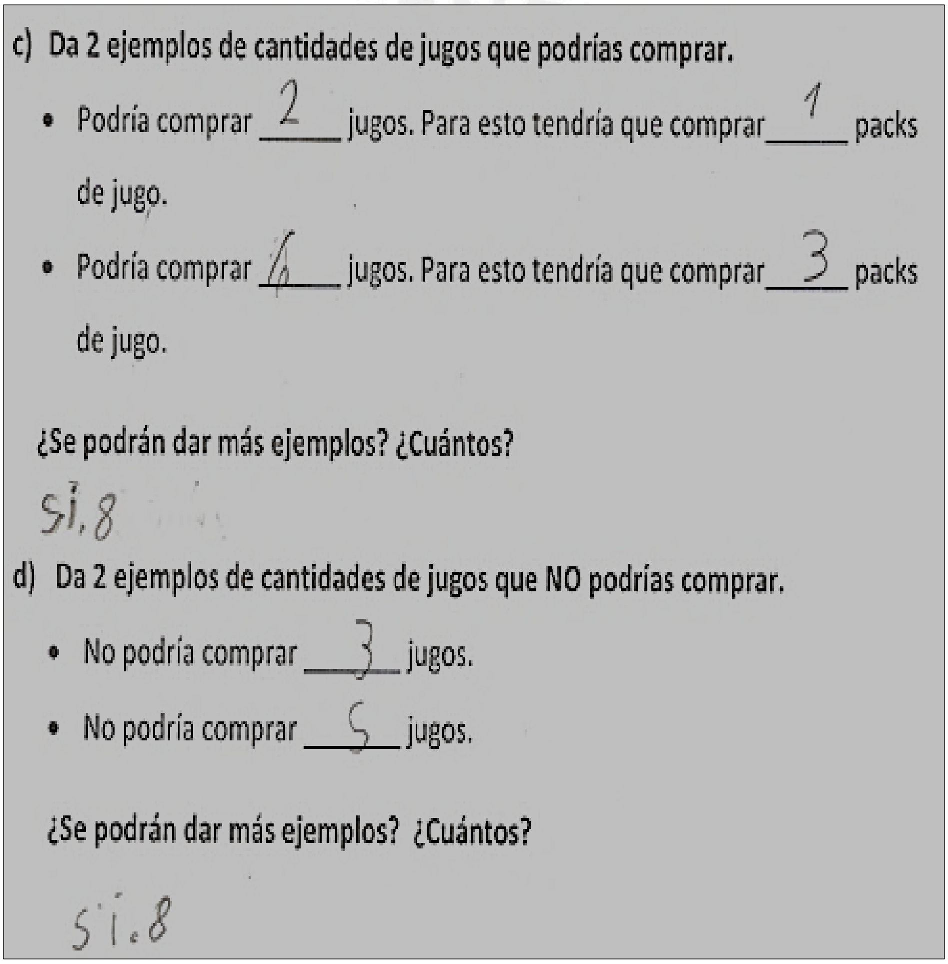
9, 19, 29, 39, 49, 59 y 69... y. Otros ejemplos mas

Figura 76. Respuesta de Chris para los ítems c) y d).

Observemos que en el ítem c) el alumno empieza teniendo dificultades en convertir unidades a packs de jugos, ya que su primer ejemplo es incorrecto. En cuanto a la segunda parte del ítem c), creemos que Chris logra percibir que, en particular, los números que terminan en cero satisfacen este requerimiento. Es decir, parece darse cuenta de que los números que terminan en cero serán divisibles entre 2 pues los números que presenta en sus ejemplos cada vez son más grandes (10, 20, 40, 450,...).

Asimismo vemos que el alumno percibe que hay infinitos ejemplos para este caso ya que coloca puntos suspensivos, lo que desde nuestro punto de vista es un indicador de que el alumno podría seguir dando cada vez más ejemplos. Por otro lado, en la primera y segunda parte del ítem d), los ejemplos dados por el alumno son correctos. Más aún notemos que sus ejemplos son números que terminan en la cifra nueve. Esto refleja que el alumno percibe que los números con estas características son números con los que no se podría comprar jugos en packs de dos unidades. Es decir, son números que no son divisibles entre 2.

Julio:


c) Da 2 ejemplos de cantidades de jugos que podrías comprar.

- Podría comprar 2 jugos. Para esto tendría que comprar 1 packs de jugo.
- Podría comprar 6 jugos. Para esto tendría que comprar 3 packs de jugo.

¿Se podrán dar más ejemplos? ¿Cuántos?

Si, 8

d) Da 2 ejemplos de cantidades de jugos que NO podrías comprar.

- No podría comprar 3 jugos.
- No podría comprar 5 jugos.

¿Se podrán dar más ejemplos? ¿Cuántos?

si.8

Figura 77. Respuesta de Julio para los ítems c) y d).

Notemos que los ejemplos dados por el alumno respecto a la primera parte de los ítems c) y d) son correctos. En cuanto a la segunda parte de estos ítems, Julio César escribe que sí se podrían dar más ejemplos. A simple vista podríamos pensar que el alumno al escribir *"8"* podría estar contradiciéndose al haber escrito previamente "sí". Creemos que el símbolo empleado por el alumno hace referencia al símbolo de infinito *"∞"*, aunque no esté presentando el verdadero símbolo; deducimos que esto es así, puesto que los alumnos tienen conocimiento de que los números son infinitos y de su símbolo.

Sin embargo nos parecía "curioso" que el alumno considere que exactamente se podían dar "ocho" ejemplos más. Por esta razón decidimos investigar un poco más y consultar nuestra sospecha con la profesora de estos alumnos, confirmándonos que en algún momento había usado el símbolo *"∞"* para hacer referencia a "infinitos" números.

ETAPA 2

En esta etapa pretendemos que los alumnos determinen los números divisibles entre 3 (aunque todavía no empleamos esta terminología).

- **Materiales:** la profesora ha llevado como muestra un pack de 3 unidades de jabones, y un papelote que ha sido pegado en la pizarra. Este papelote contiene una tabla con espacios en blanco para que los alumnos completen en ellos algunos múltiplos de 3. Estos múltiplos están dados en términos de la cantidad de jabones que podrías llevar a casa.

Número de packs de jabones	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	10	11	12	13	…
Número de jabones que llevas a casa															

En esta situación se ha tenido en cuenta básicamente tres preguntas, las que se han ido planteando gradualmente a lo largo del desarrollo de esta etapa. Estas preguntas son:

¿Podremos comprar 18 jabones?

¿Podremos comprar 26 jabones?

¿Cuáles son algunas posibles cantidades de jabones que podrás llevar a casa?

A continuación incluimos la transcripción de algunos fragmentos de la discusión llevada a cabo en esta sesión, así como los comentarios hechos para el mismo:

> ***Profesora:*** *ahora vamos a pasar al caso de los jabones [se muestra a los estudiantes un pack de 3 jabones]… Ahora, les hago una pregunta: ¿podré comprar 18 jabones?*
>
> ***Alumnos:*** *sí Miss*

Profesora: *¿Cuántos packs tendría que comprar para llevar 18 jabones? A ver Thalía, ayúdanos por favor…*

[En la pizarra se habían colocado varias figuritas. Cada figurita muestra la imagen de un pack de jabones, de 3 unidades cada pack. La alumna debía tomar de ahí las cantidades de figuritas ("packs") necesarias para poder llevar consigo 18 jabones. Como resultado de este trabajo, se muestra a continuación la respuesta de la alumna]

Thalía: *6 figuritas (packs) de jabones*

Profesora: *¿está bien lo que ha hecho su compañera?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *¿cuántos packs de jabones se tuvieron que comprar?*

Alumnos: *6*

Observemos que el material ayudó a que la alumna dé una respuesta correcta y, que a la vez, sus demás compañeros vean cómo se podría ir obteniendo cantidades de jabones que son múltiplos de 3.

Profesora: *bien… Ahora, ¿se podrán comprar 26 jabones?*

Alumnos: *¡¡no!!*

Notemos aquí que aunque la gran mayoría de los alumnos, sino todos, dan una respuesta correcta al decir en grupo que no es posible el caso que plantea la maestra, la profesora siempre solicita una respuesta individual. Esto, con el fin de asegurarse que los estudiantes tengan claro por qué no sería posible este caso y con este propósito siempre solicita a los estudiantes que justifiquen sus respuestas.

Profesora: *a ver Ana Lucía, ¿podré comprar 26 jabones?*

Ana Lucía: *no*

Profesora: *¿por qué no?*

Ana Lucía: *porque me sobra uno*

La respuesta de la alumna refleja que no se podrían comprar 26 jabones de manera exacta. Suponemos, a partir de la respuesta de la alumna ("porque me sobra uno"), que ella está pensando en que lo mejor sería llevar 9 packs de jabones ya que al menos con esa cantidad de packs podría llevar los 26 jabones, pero aun así le sobraría 1 jabón. En otros términos, diríamos que 26 no es divisible entre 3 dado que 3 no divide exactamente a 26.

Profesora: *¿cómo? ¿Me sobra uno? ¿Cuántos packs puedes comprar que estén cerca de 26?*

Renzo: *24*

Notemos que Renzo está dando una cantidad de jabones (por unidades) que sí podríamos llevar a casa, la cual es una cantidad cercana "por debajo" a 26 (jabones). Sin embargo, la pregunta está dirigida a cantidades de packs y no a unidades de jabones, a lo que creemos que hace referencia la respuesta del alumno. Por esta razón la profesora repite su pregunta, poniendo énfasis esta vez en que son 26 jabones, y no 26 packs de jabones.

Profesora: *¿cuántos PACKS puedes comprar que estén cerca de 26 JABONES?*

Julio César: *se tiene que comprar 8 packs, para tener cerca de 26 jabones*

Profesora: *si yo compro 8 packs, ¿cuántos jabones llevo a casa?*

Orlando: *24*

Profesora: *¿y cuántos jabones me faltarían para comprar 26?*

Alumnos: *2 jabones*

Julio César: *no se puede porque si tienes más jabones alcanzaría tener más jabones… tendrías 27*

Profesora: *entonces, ¿podré comprar exactamente 26 jabones?*

Alumnos: *no*

Notemos que los estudiantes dan dos múltiplos de 3 que son cercanos al número 26: 24 y 27. Observemos que una vez realizado este análisis los estudiantes descartan la posibilidad de que se puedan comprar 26 jabones.

Profesora: *si yo tengo 0 packs de jabones, ¿cuántos jabones llevaré a mi casa?*

Alumnos: *cero*

Vemos que el propósito de la pregunta de la profesora es que los alumnos se den cuenta (indirectamente) que un múltiplo de 3 es cero.

Profesora: *¿cuáles son algunas posibles cantidades de jabones que podrás llevar a casa? Por ejemplo si compro 3 packs de jabones…*

Alumnos: *llevaré 6 (jabones)*

Observemos que los alumnos han dado una respuesta incorrecta en relación a la cantidad de jabones que se tendrían en 3 packs de jabones. Para evitar que los alumnos se queden con esta idea errada, la profesora plantea nuevamente la pregunta.

Profesora: *¿6? Si llevo 3 packs de jabones, ¿estaré llevando 6 jabones a casa?*

Luis: *¡9 (jabones)!*

Profesora: *¡Muy bien Luis!, podré llevar a mi casa 9 jabones… A ver, algunas otras posibles cantidades de jabones que podrán llevar a su casa.*

[Los alumnos salen a completar la tabla del papelote que está pegado en la pizarra. A continuación mostramos sus respuestas]

Número de packs de jabones	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Número de jabones que llevarías a casa	0	3	6	9	12	15	12	14	24	27	30	…

Notemos que las cantidades resaltadas en color amarillo son incorrectas, ya que al comprar 6 packs de jabones se obtendrían 18 jabones y no 12. Sucede algo análogo en el caso de 7 packs de jabones.

Profesora: *en la primera fila tiene el número de packs y abajo la cantidad de jabones que llevarían a su casa… A ver, vamos a corregir. Van salir a corregir estas respuestas aquellos alumnos que no han salido anteriormente…*

[Después de la corrección se tienen las siguientes respuestas en la tabla]

Número de packs de jabones	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de jabones que llevarías a casa	0 √	3 √	6 √	9 √	12 √	15 √	~~12~~ 18	~~14~~ 21	24 √	27 √	30 √

Cabe resaltar que los alumnos son quienes corrigen las respuestas de sus compañeros, asimismo notemos que sus correcciones son correctas.

Profesora: *a ver, ahora vamos a responder… ¿Cuáles son algunas posibles cantidades de jabones que podrás llevar a casa? A ver, por ejemplo…*

Anayely: *9*

Profesora: *muy bien, otro ejemplo*

Jeffrie: *12*

Vanesa: *10*

Notemos que Vanesa da un ejemplo equivocado para el caso en discusión; mientras que Anayely y Jeffrie sí dan ejemplos correctos (de cantidades que son múltiplos de 3). Debido al ejemplo incorrecto de Vanesa, la profesora plantea las siguientes preguntas con el fin de que los estudiantes se den cuenta de que éste no es un ejemplo para el caso planteado.

> ***Profesora:*** *¿10? ¿Podré llevar 10?*
>
> ***Alumnos:*** *no*
>
> ***Profesora:*** *¿por qué no?*
>
> ***Luis:*** *porque tendría que ser 15*

Vemos que Luis no responde directamente la pregunta que plantea la profesora. Creemos que, a cambio, el alumno se refiere al número 15 ya que parece que él está siguiendo la secuencia de los múltiplos de 3 que empezaron a dar Anayely y Jeffrie, antes de la intervención de Vanesa.

A continuación la profesora retoma la pregunta que había planteado.

> ***Profesora:*** *ya, está bien, pero ¿porque no puedo llevar 10?, ¿cuántos packs de jabones tendría que comprar para llevar 10 jabones a mi casa?*
>
> ***Yolanda:*** *no se puede, porque sobrarían 2*

Imaginamos que en este caso la alumna está pensando en llevar 4 packs de jabones a su casa ya que dice que sobrarían 2.

Sin embargo parece que luego cambia su respuesta ya que, a partir de las preguntas que plantea la profesora, Yolanda responde que llevaría 3 packs de jabones aunque sabemos que para este caso faltaría 1 y no sobrarían 2 jabones. Esto se puede ver en lo que sigue del diálogo:

> ***Profesora:*** *¿sobrarían 2? ¿Por qué? ¿Cuántos packs estarías llevando?*
>
> ***Yolanda:*** *3*
>
> ***Profesora:*** *si llevo 3 packs, ¿cuántos jabones llevaría a mi casa?*
>
> ***Alumnos:*** *9*
>
> ***Profesora:*** *entonces, ¿puedo llevar 10 jabones a mi casa?*
>
> ***Alumnos:*** *no*

Luego los estudiantes siguen dando sus ejemplos para el requerimiento planteado por la profesora.

> ***Luis:*** *30*
>
> ***Thalía:*** *27*
>
> ***Felipe:*** *uhm…9*

Julio: *18*

Jhosetp: *42*

Profesora: *¿42? ¿Puedo llevar 42 jabones a mi casa?... ¿Cuántos packs tendría que comprar?*

Observemos que la profesora plantea estas preguntas con el fin de verificar que los estudiantes estén seguros de sus respuestas (sus ejemplos en este caso), ya que desde nuestro punto de vista este no es un ejemplo evidente o simple.

Nicolás: *¡14!*

Profesora: *¡muy bien Nicolás! Si compro 20 packs, ¿cuántos jabones llevaría a mi casa?*

Jhosetp: *60 jabones*

Vemos que Nicolás y Jhosetp logran convertir correctamente unidades de jabones a packs y viceversa.

[…]

Profesora: *muy bien. ¿Podré llevar 11 jabones a mi casa?*

Alumnos (menos Orlando): *no*

Orlando: *sí Miss*

Profesora: *A ver, ¿por qué Orlando?*

[Orlando sale a la pizarra y suma números 3, hasta llegar a doce].

Orlando: *12,… mmmm… no, no se puede*

Notemos que la estrategia empleada por Orlando es sumar de manera repetitiva números 3 para obtener las diferentes cantidades de jabones que podrían llevar a su casa. Creemos que la mayoría de los estudiantes está empleando este procedimiento ya que es más natural para ellos relacionar estos procesos con la adición, que con la multiplicación directamente.

Profesora: *a ver Orlando, otra pregunta, ¿podré llevar 31 jabones a mi casa?*

Alumnos: *¡no!*

Nicolás: *31 no podré llevar, 33 jabones sí*

Julio: *¡no se puede llevar 31!*

Profesora: *¿por qué no Julio?*

[Julio en la pizarra escribe: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 y a este último le suma 3, resultando 33]

Julio: *no se puede porque sale 33*

Profesora: *entonces no puedo llevar 31 jabones. Su compañero ha escrito diferentes cantidades de jabones que podría llevar a su casa [encierra todas los números dados por Julio]. ¿Ahí ustedes pueden encontrar a la cantidad 31?*

Alumnos: *¡¡no!!*

Profesora: *¿quiere decir que pueden llevar 31 jabones a su casa?*

Alumnos: *¡¡no!!*

Notemos que los alumnos no muestran dificultad dan correctamente números que son múltiplos de 3 y notan qué números no son múltiplos de 3. Vemos que Julio ha empleado la misma estrategia de Orlando. Asimismo, observamos que los alumnos reflejan confianza en sí mismos al salir al frente, por su propia iniciativa, a explicar sus razonamientos. Cabe resaltar que la profesora pone énfasis en los números dados por Julio, ya que estos son múltiplos de 3. Además, observemos que Nicolás descarta la posibilidad de que se puedan comprar 31 jabones y da alternativamente una cantidad de jabones que sí se podría comprar y que además es cercana a 31.

ETAPA 3

En esta etapa reemplazamos la expresión “repartición equitativa y máxima” por “división”. También “repartición exacta” y “repartición inexacta” por “división exacta” y “división inexacta”, respectivamente.

A continuación incluimos la transcripción de la discusión llevada a cabo para la introducción de los términos de división y los tipos de división.

[…]

Profesora: *A ver… ¿Cuántas operaciones conocen ustedes en matemática? ¿Qué operaciones conocen ustedes en matemática?*

Jeffrie: *multiplicación, suma y resta*

[La profesora escribe en pizarra adición/ suma, sustracción/resta y multiplicación]

La profesora con esta pregunta busca que los alumnos noten que ellos conocían formalmente hasta el momento solo tres operaciones de los números naturales, aunque indirectamente hemos trabajado con ellos una operación más de los números naturales, que es la división. A continuación la profesora reemplaza el término repartición equitativa y máxima por división.

Profesora: *¿ustedes saben que las cosas que hemos estado haciendo: reparticiones equitativas y máximas - son divisiones? Entonces ustedes ya están conociendo otra operación [la profesora escribe en la pizarra: DIVISIÓN]. Entonces, cuando hablamos de <u>REPARTICIONES EQUITATIVAS Y MÁXIMAS</u> estamos hablando de la nueva operación que ustedes han estado aprendiendo: <u>DIVISIÓN</u>.*

Voy a dividir 26 canicas entre 5 niños, que es lo mismo que repartir 26 canicas entre 5 niños. Pregunta,… Si yo divido, reparto, 26 canicas entre 5 niños, ¿cuántas canicas le doy a cada niño? ¿Con cuántas canicas me quedo después de la repartición?

Jamil y Luis: *5 (canicas) a cada niño*

Profesora: *¿con cuántas me quedo después de la repartición?*

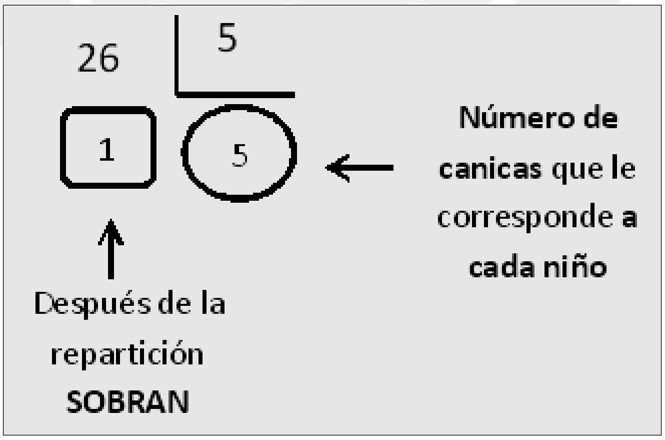
Jamil y Luis: *1 (canica)*

Profesora: *a ver, 26 canicas entre 5 niños… Esto significa entre [refiriéndose a]. ¿Entre cuántos niños?*

Alumnos: *5*

Profesora: *entre 5 y van a completar de esta manera. Aquí va [refiriéndose a esta figura] el número de canicas que le corresponde a cada niño, y aquí se coloca [refiriéndose a esta figura] la cantidad de canicas que sobrarán después de la repartición.*

[Finalmente, en la pizarra se tiene la notación de la división siguiente, para el caso particular de la división de 26 entre 5]



Y sigue con la introducción de esta nueva notación.

Profesora: *tengo ahora 11 canicas entre 3 niños*

[Felipe sale a escribir en la pizarra lo que sería la notación para este caso de división, lo que hace de manera correcta]

Profesora: *¿está bien escrita la división?... miren que voy a repartir 11 canicas entre 3 [señalando lo hecho por Felipe]. Ahora ¿con qué voy a completar aquí y aquí? [Señalando los espacios del cociente y del residuo respectivamente]*

Luis: *3 canicas le corresponden a cada niño*

Profesora: *¿y cuánto le sobra?*

Alumnos: *2*

Observemos que en la notación introducida no hemos mencionado aún ni el término cociente, ni el término residuo de manera explícita.

Profesora: *bien… Ahora, ¿reparticiones de qué tipo habíamos visto?*

Luis: *exactas*

Alumnos: *inexactas*

Profesora*: igual van a ser en las divisiones… Vamos a tener DIVISIONES EXACTAS y DIVISIONES INEXACTAS. Por ejemplo, ¿Qué tipo de división sería esta de aquí? [Señalando el ejemplo: 26 canicas entre 5 niños]*

Alumnos*: inexactas*

Notemos que la profesora ha introducido las expresiones "división exacta" y "división inexacta", a partir de las nociones que los alumnos ya conocen de repartición exacta e inexacta. Cabe resaltar que el proceso de introducción de estos términos permitió además que los alumnos refuercen los dos tipos de reparticiones – exactas e inexactas – que a partir de ahora serán llamadas *divisiones exactas* y *divisiones inexactas*.

Profesora*: ¿por qué?*

Alumnos*: porque sobran (canicas)*

Profesora*: muy bien, porque sobran canicas. ¿Y qué tipo de división es este ejemplo? [Señalando el ejemplo de 11 canicas entre 3 niños]*

Ana Lucía*: inexacta, porque están sobrando 2 (canicas)*

Profesora*: ¿alguien me puede dar ejemplos de divisiones? ¡A ver!, ¡tengo una mejor idea! Cada uno va a escribir sus ejemplos de división en una hoja.*

A continuación mostramos algunos ejemplos de división exacta y divisiones inexactas creados por dos alumnas:

Luisa:

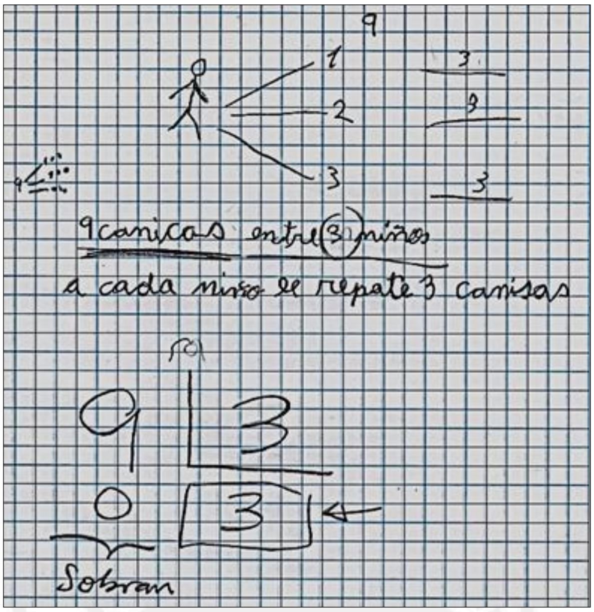


Figura 78. Ejemplo de división exacta dado por Luisa.

Notemos que para que la alumna pueda resolver la división 9 entre 3 se ha basado en la noción que maneja de repartición equitativa y máxima. Asimismo vemos que la alumna pasa correctamente los resultados obtenidos en su repartición a la notación de división introducida, ya que coloca de manera correcta el valor del cociente y del residuo en los lugares correspondientes.

Yolanda:

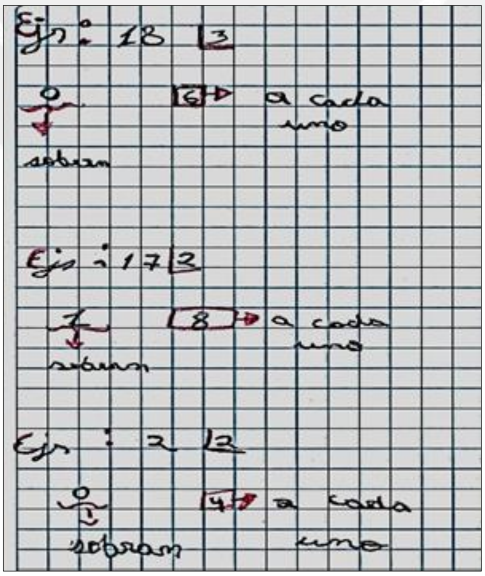


Figura 79. Ejemplos de división exacta e inexacta dados por Yolanda.

Observemos que los dos primeros ejemplos dados por la Yolanda son correctos. Mientras que en su último ejemplo el cociente es incorrecto.

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 10

En la Etapa 1: más del 50% de los estudiantes presenta respuestas correctas para la Ficha 6. Observamos que los estudiantes logran determinar números que son divisibles entre 2 (múltiplos de 2), así como números que no son divisibles entre 2 (no son múltiplos de 2) aunque no hayamos empleado explícitamente este término. Asimismo, es importante mencionar que un poco más del 88% de los estudiantes responden correctamente que 23 no es divisible entre 2, justifican adecuadamente su respuesta.

Además hemos notado que las formas en que los estudiantes justifican sus respuestas son diversas. También, en la segunda parte de los ítems c) y d) respectivamente más del 50% de los estudiantes parece percibir que hay una cantidad infinita de números que son divisibles entre 2 y números que no son divisibles entre 2.

En la Etapa 2: los alumnos logran determinar qué números son divisible entre 3, así como qué números no son divisible entre 3. Asimismo notamos que los alumnos para afirmar y/o verificar que ciertos números son o no divisible entre 3 han empleado su "propia" técnica que consiste, en sumar de 3 en 3 a partir de cero. Vemos además que las respuestas incorrectas dadas por los alumnos permiten que sean corregidas por sus compañeros y que den sus justificaciones.

En la Etapa 3: se ha introducido las nuevas expresiones: división, división exacta y división inexacta, las que hemos definido en términos de los conocimientos que ya se pueden asumir como "previos" en los estudiantes (repartición equitativa y máxima). También hemos empezado a usar la notación de la división de números naturales. Hemos reforzado esto último mediante el pedido de creación de ejemplos de divisiones en los que los estudiantes debían usar esta nueva notación.

4.3.11 Análisis de la sesión 11

- **Actividades trabajadas:** indicadas en la Tabla 13 (ver p. 82)
- **Tipo de actividad:** Trabajo individual y Trabajo de clase.
- **Propósitos de la sesión:** indicados en la Tabla 13
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** 24 estudiantes
- **Materiales:** a cada alumno se les entrega por escrito la Ficha 7
- **Etapas que conforman esta sesión:**

Etapa 1 → Aplicamos la Ficha 7: *"División exacta e inexacta"* (Trabajo individual)

Etapa 2 → Trabajo de clase

ETAPA 1

- **Requerimientos:** la ficha aplicada en esta etapa está compuesta de 4 problemas, cada uno de los cuales presenta los siguientes propósitos:

Tabla 37. Estructura de la Ficha 7

Problemas	Divisiones	Propósitos
1)	8 canicas entre 3 niños	- Determinar el valor del cociente y del residuo empleado la notación de división recién introducida. - Identificar el tipo de división: exacta o inexacta.
2)	12 lápices entre 4 amigos	
3)	19 figuritas entre 5 páginas	
4)	24 sillas entre 6 mesas	

- **Organización del análisis de las respuestas de los alumnos para la Ficha 7:** seguiremos el orden del siguiente esquema:

Análisis de las respuestas de los alumnos

- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 24 alumnos para los problemas 1) y 2) *(Tabla 38)*
- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 24 alumnos para los problemas 3) y 4) *(Tabla 39)*
- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 24 alumnos para los problemas 1), 2), 3) y 4) *(Tabla 40)*
- Análisis Cualitativo de las respuestas de 3 alumnos.

A continuación mostramos el desarrollo de estos análisis.

Análisis Cuantitativo

Tabla 38. Análisis cuantitativo para los problemas 1) y 2) de la Ficha 7

Respuestas esperadas para los problemas 1) y 2) respectivamente							
1) 8 entre 3 Cociente: 2 Residuo: 2 División Inexacta				2) 12 entre 4 Cociente: 3 Residuo: 0 División Exacta			
Correctas	**Incorrectas**			**Correctas**	**Incorrectas**		
Cociente y/o residuo correctos, y logra identificar de manera correcta el tipo de división.	Identifica de manera correcta el tipo de división, aunque el cociente y/o residuo son incorrectos.	Cociente y residuo correctos, pero identifica de manera incorrecta el tipo de división.	Cociente y/o residuo incorrectos, y también identifica de manera incorrecta el tipo de división.	Cociente y/o residuo correctos, y logra identificar de manera correcta el tipo de división.	Identifica de manera correcta el tipo de división, aunque el cociente y/o residuo son incorrectos.	Cociente y residuo correctos, pero identifica el tipo de división de manera incorrecta.	**Total (N° de alumnos)**
13	**9**	**1**	**1**	**17**	**6**	**1**	**24**

De acuerdo a este análisis, observamos que:

- Para el *problema 1)*: 13 de los 24 alumnos (un poco más del 54%) dieron correctamente los valores del cociente y del residuo, así como el tipo de división al que pertenece este problema. Notemos que casi el 92% (22 de 24) de los estudiantes logra identificar el tipo de división correctamente. Podemos concluir que los estudiantes han aceptado de manera natural los términos recién introducidos en la sesión previa gracias a que se definieron en función de las nociones básicas para este trabajo: reparticiones equitativas y máximas.
- Para el *problema 2)*: 17 de los 24 alumnos (casi el 71%) determinaron correctamente los valores del cociente y del residuo, así como el tipo de división que, en este caso, es exacta. Notemos que en este problema los alumnos han mostrado menos dificultad en comparación con los otros tres problemas de la ficha. Así como para el problema 1), en este problema un alto porcentaje de alumnos logra identificar correctamente el tipo de división.

Tabla 39. Análisis cuantitativo para los problemas 3) y 4) de la Ficha 7

Respuestas esperadas para los problemas 3) y 4) respectivamente							
3) 19 entre 5 Cociente: 3 Residuo: 4 División Inexacta			4) 24 entre 6 Cociente: 4 Residuo: 0 División Exacta				
Correctas	**Incorrectas**		**Correctas**	**Incorrectas**			
Cociente y/o residuo correctos, y logra identificar de manera correcta el tipo de división.	Identifica de manera correcta el tipo de división, aunque el cociente y/o residuo son incorrectos.	Cociente y/o residuo incorrectos, y también identifica el tipo de división de manera incorrecta.	Cociente y/o residuo correctos, y logra identificar de manera correcta el tipo de división.	Identifica de manera correcta el tipo de división, aunque el cociente y/o residuo sean incorrectos.	Cociente y residuo correctos, pero identifica el tipo de división de manera incorrecta	Cociente y residuo incorrectos , y no identifica el tipo de división (deja en blanco)	**Total (N° de alumnos)**
12	**11**	**1**	**14**	**8**	**1**	**1**	**24**

De acuerdo a este análisis, observamos que:

- Para el *problema 3)*: 12 de los 24 alumnos (el 50%) resolvieron correctamente la división (cociente y residuo correctos) e identificaron que el tipo de división es inexacta.
- Para el *problema 4)*: 14 de los 24 alumnos (un poco más del 58%) determinaron correctamente los valores del cociente y del residuo, así como identificaron correctamente el tipo de división al que pertenece el problema.

La tabla que mostramos a continuación (*Tabla 40*) se basa en el conteo de los problemas correctos que han sido presentados por los estudiantes. Consideramos problemas correctos a aquellos problemas cuyas respuestas son todas correctas para cada uno de los 3 requerimientos presentados: el valor del cociente, el valor del residuo, el tipo de división obtenida.

Tabla 40. Análisis cuantitativo para la Ficha 7

Número de alumnos según el número de problemas correctos					
0 problemas correctos	1 problema correcto	2 problemas correctos	3 problemas correctos	4 problemas correctos	**Total (N° de alumnos)**
3	**5**	**3**	**6**	**7**	**24**

De acuerdo a este análisis, observamos que:

- De acuerdo a *la Tabla 40*, observamos que 21 de los 24 alumnos (el 87,5% de los estudiantes) desarrollaron correctamente al menos uno de los cuatro problemas. Mientras que 3 de los 24 alumnos (el 12,5%) no lograron dar algún problema correcto. Otra observación es que casi el 67% de los estudiantes desarrollan correctamente al menos 2 problemas.

Análisis cualitativo

Hugo:

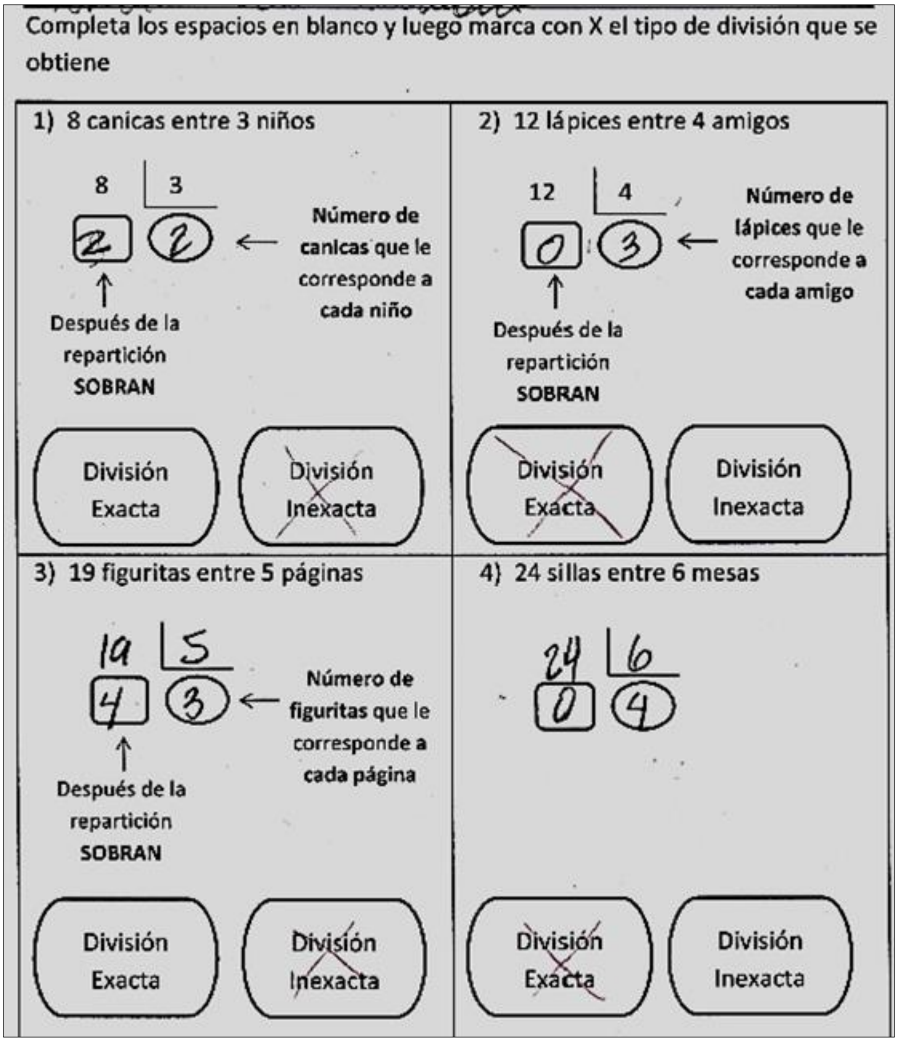


Figura 80. Respuesta de Hugo para la Ficha 7.

Notemos que Hugo es uno de los 7 alumnos (ver Tabla 40) que ha desarrollado correctamente los cuatro problemas de la Ficha 7.

Nicolás:

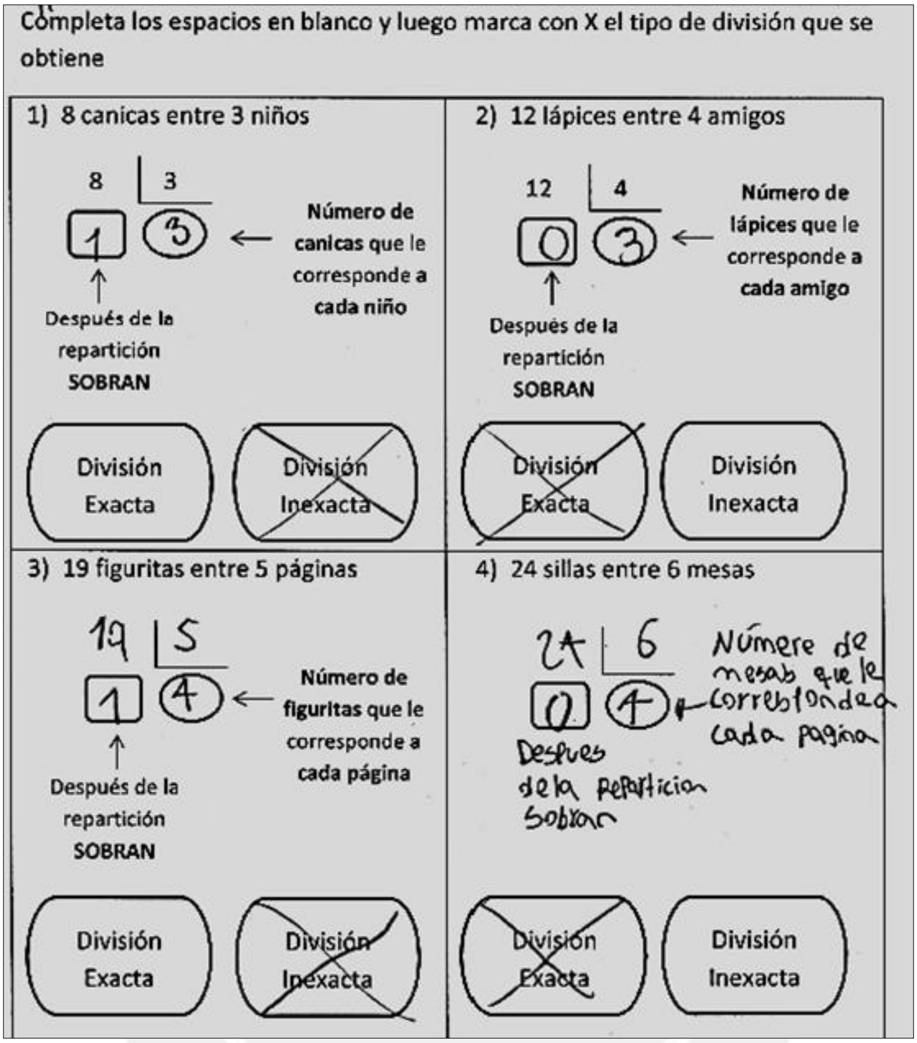
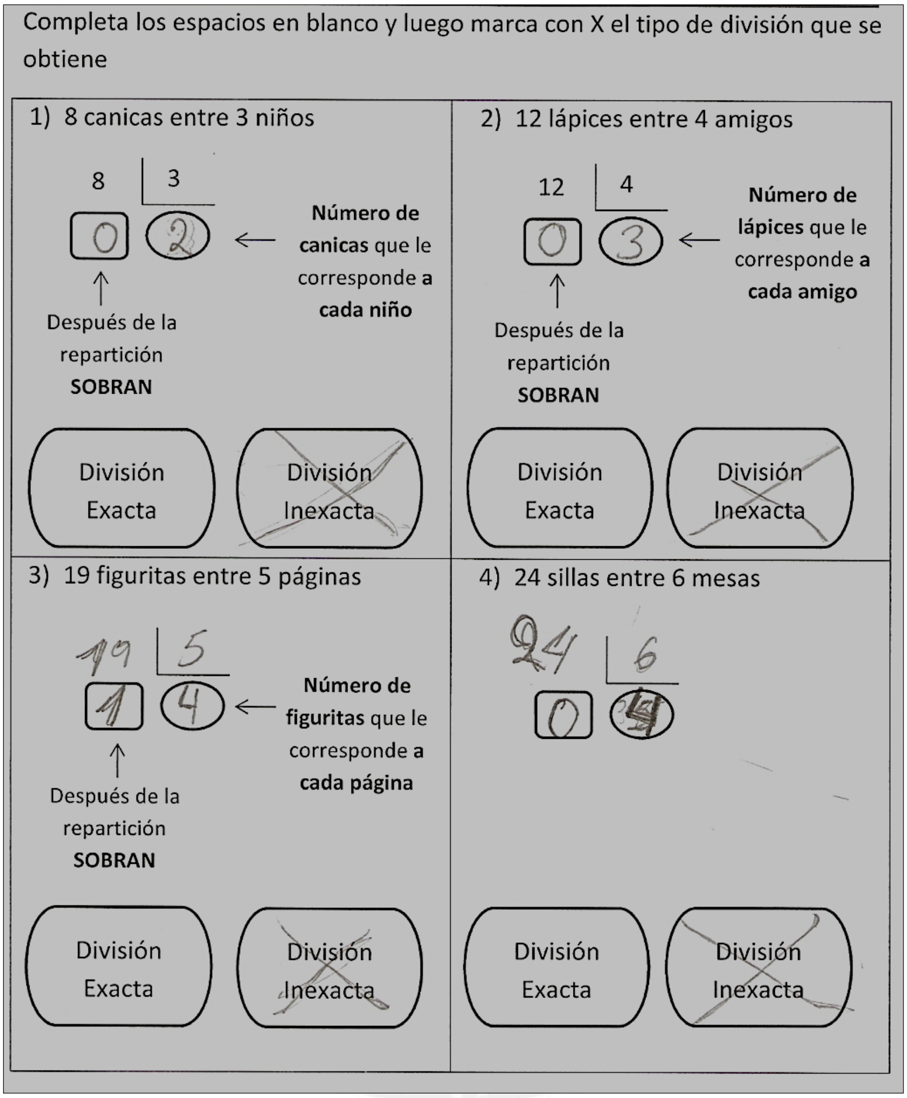


Figura 81. Respuesta de Nicolás para la Ficha 7.

Vemos que Nicolás es uno de los 3 alumnos que ha logrado dar dos problemas correctos (ver Tabla 40) puesto que los problemas 1) y 3) han sido desarrollados incorrectamente. Notemos que los valores del cociente y del residuo que el alumno ha dado para los problemas 1) y 3) no tienen sentido si tomamos como referencia el contexto de las reparticiones ya que aunque planteamos que se tienen 8 canicas para ser repartidas entre 3 niños, el alumno contempla el caso en el que se reparta una cantidad de canicas con la que no se cuenta (9 canicas en el caso del problema 1). Asimismo, vemos que en el problema 4) el alumno muestra dificultad al interpretar el significado del cociente, ya que escribe: *"número de mesas que le corresponde a cada página",* cuando lo correcto sería: *"número de sillas para cada mesa".* Por último, observamos que el alumno no muestra dificultades para identificar los tipos de divisiones ya que aunque las divisiones se hayan desarrollado de manera incorrecta, identifica el tipo de división a partir del residuo obtenido.

Renzo:


Completa los espacios en blanco y luego marca con X el tipo de división que se obtiene

1) 8 canicas entre 3 niños

8 | 3

0 2

Número de **canicas** que le corresponde **a cada niño**

Después de la repartición **SOBRAN**

División Exacta | ~~División Inexacta~~

2) 12 lápices entre 4 amigos

12 | 4

0 3

Número de lápices que le corresponde **a cada amigo**

Después de la repartición **SOBRAN**

División Exacta | ~~División Inexacta~~

3) 19 figuritas entre 5 páginas

19 | 5

1 4

Número de figuritas que le corresponde **a cada página**

Después de la repartición **SOBRAN**

División Exacta | ~~División Inexacta~~

4) 24 sillas entre 6 mesas

24 | 6

0 4

División Exacta | ~~División Inexacta~~

Figura 82. Respuesta de Renzo para la ficha 7.

Renzo es uno de los alumnos que muestra dificultades para identificar correctamente el tipo de división. En el problema 1) el alumno solo ha determinado correctamente el valor del cociente, pero no el del residuo. Vemos que Renzo no logra asociar el tipo de división con el valor que obtiene para el residuo (al menos no completamente ya que la división del problema 3 es incorrecta, sin embargo el alumno identifica correctamente el tipo de división). En cuanto a los problemas 2) y 4), vemos que los valores del cociente y del residuo dados por el alumno son correctos; pero otra vez, vemos que Renzo no logra identificar el tipo de división correcto.

Después de la aplicación de la Ficha 7 la profesora resuelve conjuntamente con los alumnos los cuatro problemas propuestos en esta ficha, con la finalidad de aclarar y afianzar la noción de división exacta e inexacta.

ETAPA 2

En esta etapa introducimos la noción de divisibilidad en función de la noción de división exacta. Además, los alumnos emplean la notación de la división de los números naturales para comprobar si un número es o no es divisible entre otro número.

A continuación incluimos la transcripción de algunos fragmentos de la discusión llevada a cabo en esta etapa:

> ***Profesora****: ¿cuántos tipos de divisiones hemos trabajado?*
>
> ***Alumnos:*** *dos*
>
> ***Profesora:*** *¿cuáles son Jamil?*
>
> ***Jamil:*** *División inexacta y división exacta*
>
> ***Profesora:*** *muy bien Jamil. Vamos a concentrarnos ahora en las divisiones exactas… ¿Cuándo una división es exacta?*
>
> ***Alumnos:*** *¡cuando no sobra nada!*
>
> ***Profesora:*** *¡muy bien! Cuando no sobra nada, cuando sobran 0 objetos después de la repartición.*

Notemos que las preguntas planteadas por la profesora tienen como propósito verificar que los estudiantes tienen presente los dos tipos de divisiones que se han trabajado. Además vemos que especialmente pone énfasis en la división de tipo exacta, puesto que a partir de esta noción se trabajará la definición de divisibilidad.

> ***Profesora:*** *A ver… uhmmm… voy a poner lo siguiente: ¿entre qué números puedo dividir a 24 de manera exacta?*
>
> ***Jamil:*** *entre 6*
>
> ***Profesora:*** *entre 6... Entonces, ¿24 entre 6 es una división exacta? ¿Verdad?*
>
> ***Alumnos:*** *sí, es exacta*
>
> ***Profesora:*** *¿Entre qué otro número puedo dividir a 24 de forma exacta?*
>
> ***Orlando:*** *entre 2*
>
> ***Hugo:*** *4*
>
> ***Jamil:*** *entre 8*

Notemos que con esta pregunta la profesora está solicitando, en otros términos, los divisores de 24. Observemos que hasta el momento los alumnos han mencionado 4 de los 8 divisores de 24 (6, 2, 4 y 8).

A continuación veremos que la profesora muestra a los alumnos una forma de verificar si sus afirmaciones son correctas.

> ***Profesora:*** *vamos a verificar lo que ha dicho Orlando. ¿Cómo vamos a verificar que 24 entre 2 se puede dividir en forma exacta? ¿Qué tengo que hacer?… Hacemos la división de 24 entre 2. [La profesora en la pizarra representa la división de 24 entre 2 por medio de la notación de la división que ya han empezado a usar] ¿Qué cantidad colocamos aquí? [Esta pregunta hace referencia al cociente]*
>
> ***Jhosetp:*** *12*
>
> ***Jeffrie:*** *y sobra 0*
>
> ***Profesora:*** *y sobra 0, muy bien. Entonces, ¿es una división exacta?*
>
> ***Alumnos:*** *sí*

Observemos que los alumnos han dado correctamente los valores del cociente y del residuo, así como también el tipo de división al que pertenece esta división.

> ***Profesora:*** *entonces sí es una división exacta. ¿Entre qué otro número me va a dar una división exacta?*
>
> ***Jeffrie:*** *24 entre 8*
>
> ***Profesora:*** *24 entre 8, ¿es una división exacta?*
>
> ***Jeffrie:*** *sí, mire*

[Jeffrie sale a la pizarra y resuelve la división de 24 entre 8, colocando como cociente a 3 y como residuo a 0]

> ***Profesora:*** *¿es una división exacta?*
>
> ***Jeffrie:*** *sí, porque sobra 0*

Es importante mencionar que no solo esperamos que los alumnos mencionen los posibles números que dividen exactamente a 24, sino que también justifiquen por qué es así. En este caso esperamos que los estudiantes verifiquen que la división de 24 entre tales números es una división de tipo exacta

> ***Luis:*** *¡24 entre 4! A cada uno le das 6 y sobra 0.*
>
> ***Profesora:*** *¿24 entre 4 es una división exacta?*
>
> ***Alumnos:*** *sí*

Profesora: ¿cuánto le damos a cada uno?

Alumnos: 6

Profesora: y ¿sobran?

Alumnos: 0

Profesora: y sobran 0, por eso es una división exacta... Muy bien… ¿otro ejemplo?

Vemos que Luis propone un ejemplo de división exacta, para el que menciona además correctamente los valores del cociente y del residuo. Asimismo notemos que su respuesta está dada en función de la noción de repartición equitativa y máxima.

A continuación vemos que los estudiantes siguen dando sus ejemplos.

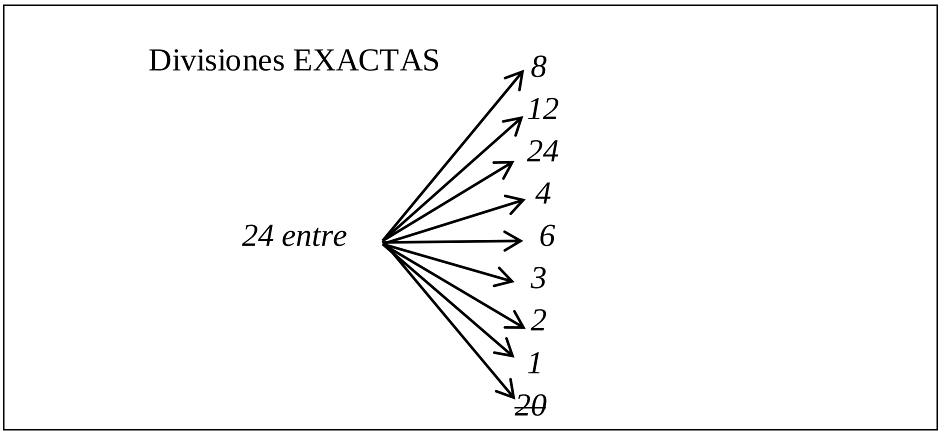
Jamil: entre 1 persona

Profesora: ¿cuánto le damos a esa persona?

Jamil: 24 y sobra 0

Posteriormente los alumnos siguen mencionando los números que dividen exactamente a 24, pero algunos alumnos sugieren también, por error, ejemplos de números que no cumplen con este requerimiento. A pesar de esto, en la mayoría de los casos la profesora ha buscado que los alumnos justifiquen sus respuestas por medio de la división de 24 entre los números sugeridos, con el fin de que los estudiantes se convenzan de que están o no tratando con una división exacta.

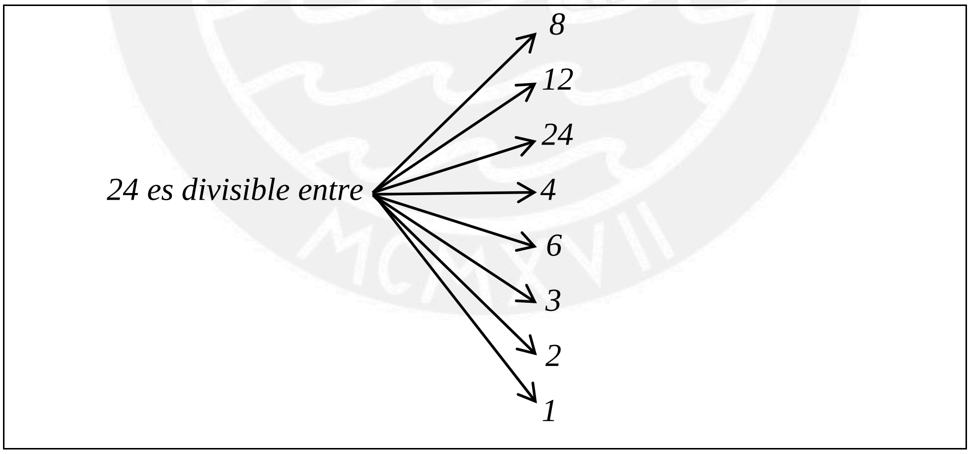
[Finalmente en la pizarra se muestra el siguiente esquema, en el que se tienen los divisores de 24, así como también el número 20 que fue un ejemplo sugerido que finalmente ha sido tachado ya que los alumnos han verificado que 24 entre 20 no es una división exacta]



A continuación, la profesora introduce el término Divisibilidad en función de la noción de división exacta.

> ***[…]***
>
> **Profesora:** *cuando tengamos divisiones exactas… por ejemplo 24 entre 8, decimos que 24 entre 8 es una división exacta, pero también podremos decir que 24 es DIVISIBLE entre 8. Este es el nombre que vamos a poner cuando son divisiones…*
>
> *[Mientras la profesora explica, en la pizarra va colocando lo siguiente]*
>
> *24 entre 8 es una división exacta*
>
> *24 es divisible entre 8*
>
> ***Jamil:*** *¡exactas!*
>
> ***Profesora****: a ver, tengo una pregunta: ¿24 es divisible entre… qué números?*
>
> ***Alumnos****: entre 8, 12, 24, 4, 6, 3, 2 y 1*

[Los alumnos se ayudan del esquema anterior para dar sus respuestas, mientras tanto la profesora en la pizarra va escribiendo las respuestas de los alumnos, teniendo finalmente lo siguiente]



Notemos que, al menos en un principio, los alumnos no muestran dificultad en relacionar sus nociones de divisiones exactas con la noción de divisibilidad recién introducida. Esto lo podemos ver reflejado cuando ellos descartan al número 20 (cantidad mostrada en el esquema anterior), ya que al dividir 24 entre 20 se tiene una división de tipo inexacta. Sin embargo, podemos observar a continuación que el ejemplo propuesto por un alumno sirve para hacer aclaraciones acerca del nuevo término empleado.

Nicolás: *Miss, ¿y entre 7?*

Profesora: *¿es una división exacta?*

Alumnos: *¡no!*

[Orlando pide salir a la pizarra para verificar que la división de 24 entre 7 no es exacta. Después el alumno dice lo siguiente]

Orlando: *a cada uno se le da 3 y les sobrarían 3.*

Profesora: *¿está bien?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *¿es una división de qué tipo?*

Alumnos: *inexacta*

Profesora: *lo que podemos decir es que 24 NO es divisible entre 7 [la profesora pone énfasis en este caso de NO divisibilidad]*

El número sugerido por Nicolás (7) es un ejemplo de un número que no es divisor de 24. Vemos que este ejemplo permitió que la profesora pueda introducir la expresión adecuada, que en este caso sería "*… no es divisible entre…* ". Asimismo notemos que el haber fomentado constantemente que los estudiantes justifiquen cada una de sus respuestas ha motivado que Orlando quiera desarrollar la división de 24 entre 7 con el fin de convencerse o de convencer a sus compañeros que, en efecto, 24 no es divisible entre 7.

[…]

Profesora: *Muy bien, ahora vamos a dar otro ejemplo. 18 es divisible, ¿entre qué números? Primero piensen en todos los ejemplos. Yo voy a escribir todos los ejemplos que me den y luego revisamos…*

[Todos los alumnos levantan la mano para dar sus números]

Luisa: *9*

Jhosetp: *entre 3*

Manuel: *entre 1 persona*

Anayely: *2*

Mikeley: *18*

Nicolás: *entre 6*

Thalía: *entre 4*

Profesora: *¿Alguien tiene otros ejemplos?*

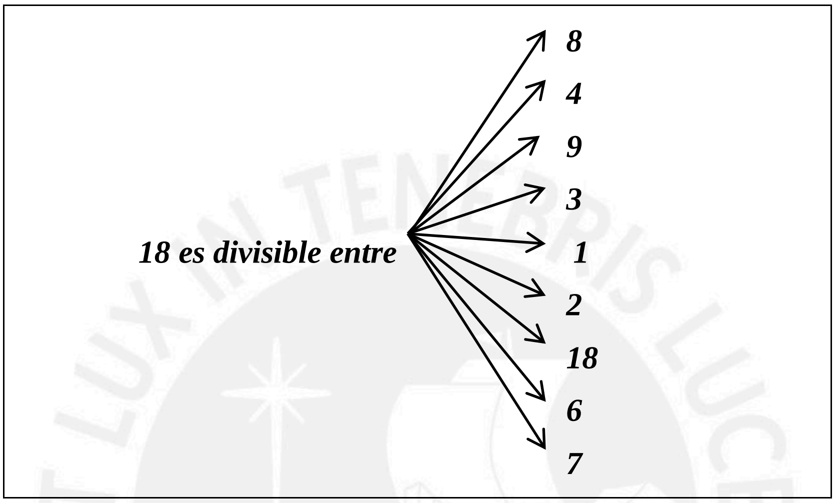
Mía: *entre 7*

Krisstell: entre 8

Profesora: *¿se terminaron los ejemplos?*

Alumnos: *sí*

Vemos que los alumnos han logrado dar los 6 divisores de 18, pero también números, que no lo son (4, 7 y 8). A continuación mostramos el esquema que quedó en la pizarra para este ejemplo.



En seguida los alumnos verifican cuáles de los números propuestos, por ellos mismos, son divisores de 18 y cuáles no.

Profesora: *ahora vamos a corregir. ¿18 es divisible entre 8? ¿Está bien esto?*

Alumnos: *no, sí [respuestas divididas]*

Profesora: *¿por qué no?*

Ana Lucía: *porque le sobran 2*

Hugo: *3*

Profesora: *¿3 o 2? ¿Cuánto le sobran? [En la pizarra la profesora hace la división de 18 entre 8] ¿Cuánto es acá? [La pregunta hace referencia al cociente]*

Ana Lucía: *da 2 y le sobra 2*

Profesora: *¿es una división de qué tipo?*

Alumnos: *inexacta*

Profesora: *si es inexacta… ¿puedo decir que 18 es divisible entre 8?*

Alumnos: *¡no!*

Vemos que algunos alumnos reflejan dudas de si 18 es o no es divisible entre 8. Aunque el caso de Ana Lucía, en particular, nos hace pensar que la alumna ha entendido la idea básica de la noción de divisibilidad dado que logra identificar si 18 es o no es divisible teniendo en cuenta el valor del residuo, al que ella hace referencia diciendo *"le sobra dos".* Por otro lado, la profesora frente a la duda de algunos alumnos, busca recordar que para verificar si un número es o no es divisible entre otro número desarrollamos la división involucrada. Es por ello que la profesora conjuntamente con los alumnos resuelve la división de 18 entre 8.

> ***Jamil:*** *entre 4 tampoco*
>
> ***Profesora:*** *¿que con 4 tampoco? [La profesora escribe la división de 18 entre 4]. A ver, ¿cuánto va aquí? [Refiriéndose al cociente]*
>
> ***Felipe:*** *4*
>
> ***Luis:*** *sobran 2*
>
> ***Profesora:*** *4 y sobran 2. Entonces, ¿18 es divisible entre 4?*
>
> ***Alumnos:*** *¡no!*
>
> ***Profesora:*** *¡no!, porque es una división inexacta…*

A partir de la aclaración de que 18 no es divisible entre 8, Jamil hace la observación de que 18 tampoco es divisible *entre 4,* siendo esto correcto. Pero vemos que la profesora plantea como pregunta lo mencionado por Jamil con el fin de que los alumnos sean quienes verifiquen si lo dicho por su compañero es correcto o no. Asimismo, observemos que una vez más la profesora recuerda a los alumnos que 18 no es divisible entre 4 porque es un caso de división inexacta.

Observemos que a continuación la profesora plantea una pregunta por iniciativa propia con el fin de que los estudiantes no solo analicen casos de NO divisibilidad, y las nociones introducidas no se vuelvan a confundir.

> ***Profesora:*** *y, ¿18 es divisible entre 9?*
>
> ***Alumnos:*** *¡sí!*
>
> ***Profesora:*** *¿por qué?*
>
> ***Nicolás:*** *porque a cada uno le das 2 [refiriéndose al cociente] y sobra 0*
>
> ***Profesora:*** *¿es una división exacta?*
>
> ***Alumnos:*** *sí*
>
> ***Profesora:*** *perfecto. Entonces…*

Nicolás: *18 es divisible entre 9*

Observemos que Nicolás da acertadamente los valores del cociente y del residuo, en función de la noción de repartición equitativa y máxima. Además notemos que el alumno no solo se queda dando valores correctos, sino que también asocia su respuesta con la noción de divisibilidad.

Profesora: *está bien. Y,… ¿18 es divisible entre 7?*

Alumnos: *¡no!*

Profesora: *¿por qué no?*

Hugo: *porque doy 2 y me están sobrando 4*

Profesora: *¿qué tipo de división es?*

Hugo: *inexacta*

Profesora: *Muy bien, entonces…*

Jamil y Hugo: *18 no es divisible entre 7*

Profesora: *Ok, Ahora ustedes van a crear sus propios ejemplos de divisibilidad. Cada alumno haga un ejemplo.*

Hugo y Jamil no tienen dificultad en reconocer que 18 no es divisible entre 7. Vemos además que Hugo presenta su argumento en términos de una repartición equitativa y máxima. Antes de finalizar esta etapa la profesora indica a los alumnos que cada uno debe crear su propio ejemplo de divisibilidad. Esto con el fin principal de medir de manera más objetiva si los estudiantes entendieron o no esta nueva noción. Veremos a continuación que aunque la profesora ha solicitado básicamente un ejemplo a cada alumno, muchos de ellos han presentado más de un ejemplo.

A continuación mostramos los ejemplos dados por algunos alumnos.

Jamil:

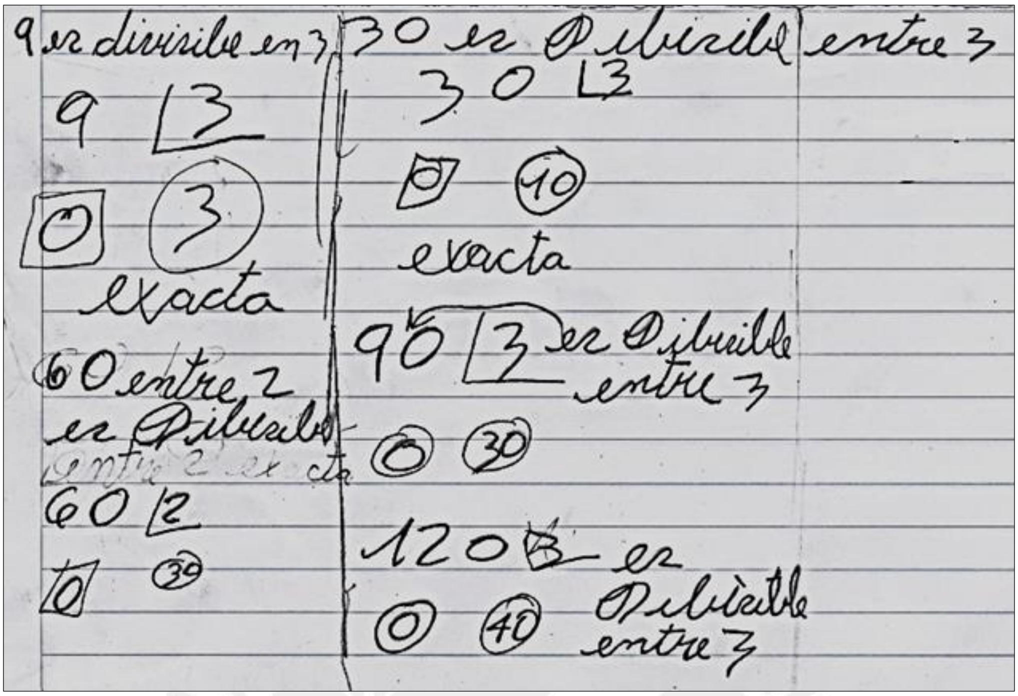


Figura 83. Ejemplos de divisibilidad dados por Jamil.

Notemos que Jamil muestra cinco ejemplos correctos de divisibilidad los números: 9, 30, 90 y 120 son divisibles entre 3, y 60 es divisible entre 2. Asimismo vemos que el alumno presenta la división en cada caso a manera de verificación, y concluye escribiendo la expresión: “*sí es divisible”*. Observemos además que en los dos primeros casos el alumno escribe “exacta”, haciendo referencia a las divisiones exactas que obtiene.

Nicolás:

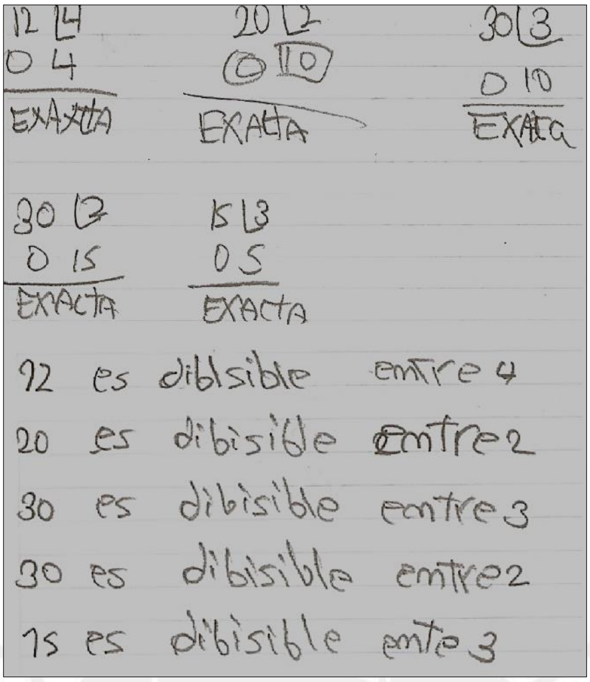


Figura 84. Ejemplos de divisibilidad dados por Nicolás

Como el caso de Jamil, vemos que Nicolás presenta 5 ejemplos correctos de divisibilidad, a pesar de que comete un error (por descuido desde nuestro punto de vista) en el cálculo del cociente del primer ejemplo. A diferencia de Jamil, observamos que el procedimiento de Nicolás consiste en resolver primero todas las divisiones e identificar el tipo de división que obtiene en cada caso. Finalmente, observamos que el alumno logra relacionar de manera correcta una división exacta con la noción de divisibilidad.

Luis:

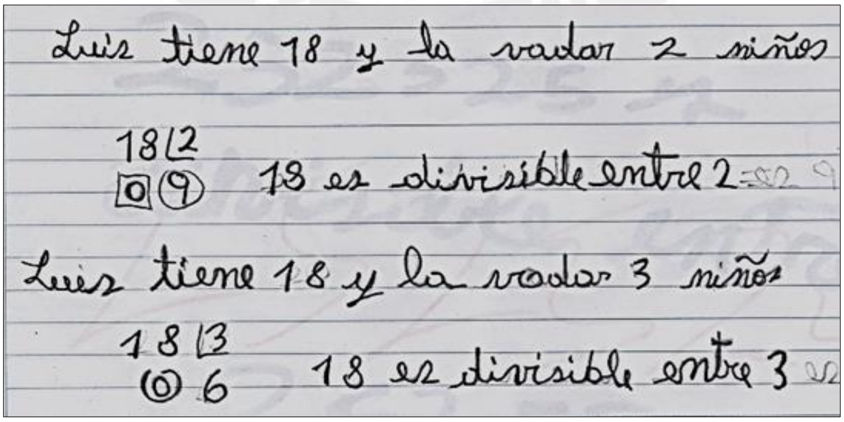


Figura 85. Ejemplos de divisibilidad dados por Luis

Luis muestra dos ejemplos correctos de divisibilidad. Observamos que la forma en la que el alumno presenta sus ejemplos de divisibilidad difiere de la forma en la que Jamil y Nicolás presentan sus ejemplos. Luis opta por presentar sus ejemplos en el contexto de reparticiones equitativas y máximas, para luego proceder a verificar de manera correcta mediante el uso de las divisiones. Finalmente, vemos que el alumno concluye correctamente en términos de divisibilidad.

Orlando:

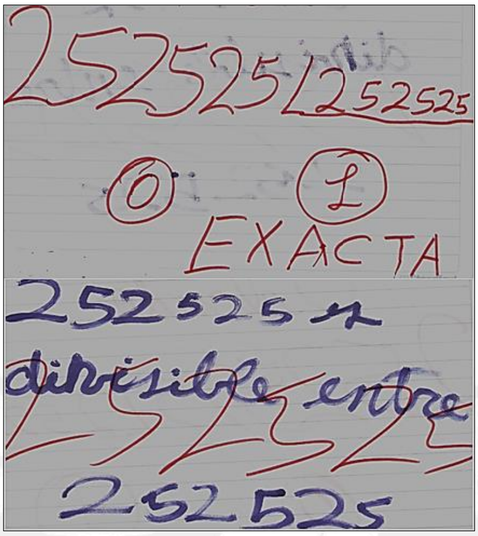


Figura 86. Ejemplo de divisibilidad dado por Orlando

Observemos que Orlando presenta un ejemplo correcto de divisibilidad. Notemos que el ejemplo de Orlando se caracteriza principalmente por dar un número de seis dígitos (252 525). Creemos que el alumno no tiene dificultades al presentar el ejemplo de un número de 6 dígitos ya que está conectando su noción de divisibilidad con el conocimiento que tiene sobre uno de los casos especiales de la división exacta vistos en una de las sesiones previas: cuando el dividendo es igual al divisor.

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 11

En la *Etapa 1*, la aplicación de la Ficha 7 nos dio a conocer que el 87,5% de los 24 alumnos ha logrado presentar al menos un problema correcto, tomando en cuenta que un problema correcto, en este contexto, es aquel problema para el que se responde correctamente a cada uno de los tres requerimientos que éste involucra.

Por otro lado, hemos notado que al menos el 50% de los 24 alumnos ha logrado responder acertadamente los tres requerimientos para cada uno de los cuatro problemas propuestos. Asimismo, hemos notado que la mayoría de los alumnos logra identificar el tipo de división correcto, a pesar de que en algunos casos sus residuos no sean los correctos. El desarrollo de esta ficha es importante pues permite que los estudiantes refuercen los dos tipos de divisiones (exactas e inexactas), ya que a partir de estas nociones teníamos contemplado construir luego otros conocimientos, como el de divisibilidad.

En la *Etapa* 2 de esta sesión introducimos la noción de divisibilidad (es la primera vez que empleamos este término), en función de la noción de división exacta. Recordemos que esta última noción ha sido dada en términos de reparticiones equitativas y máximas. Cabe resaltar que los alumnos han logrado hacer la conexión de la noción divisibilidad con la noción de división exacta, lo que se ve reflejado en los ejemplos que ellos crearon en la fase final de esta etapa. Es importante hacer notar que en todos los casos los alumnos han justificado sus respuestas.

4.3.12 Análisis de la sesión 12

- **Actividades trabajadas:** indicadas en la Tabla 13 (ver pp. 82 - 83)
- **Tipo de actividad:** una individual y trabajo de clase
- **Propósitos de la sesión:** indicados en la Tabla 13
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** 23 estudiantes
- **Materiales:** a cada alumno se les entrega por escrito la Ficha 8
- **Etapas que conforman esta sesión:**

Etapa 1 →	Aplicamos la Ficha 8: *"Divisibilidad"* (Trabajo individual)
Etapa 2 →	Trabajo de clase

ETAPA 1

La ficha 8 está compuesta por 3 ítems, cada uno de los cuales tiene los siguientes propósitos:

Tabla 41. Estructura de la Ficha 8

ÍTEM	PROPÓSITOS
Ítem a)	- Orientar al estudiante en el proceso de justificación en el tema divisibilidad. Para ello se pide: ✓ Determinar los divisores restantes de 8, ya que damos como ejemplo el divisor 2. En ese sentido faltarían dar los divisores: 1, 4 y 8. ✓ Dar el valor del cociente y del residuo de la división de 8 entre cada uno de los números que den como divisores. ✓ Identificar el tipo de división obtenida (exacta o inexacta), según el número que consideren como divisor.
Ítem b)	- Analizar en cuatro casos diferentes si se trata de un caso de divisibilidad o no. Esto se consigue cuando se pide a los estudiantes que completen los espacios en blanco de tal manera que las siguientes afirmaciones sean verdaderas: b.1) 6…………… entre 2 b.2) 10………….. entre 4 b.3) 18……………entre 7 b.4) 22…………...entre 5
Ítem c)	- Determinar y justificar el valor de verdad en cada caso: c.1) ¿16 es divisible entre 5? ¿Por qué? c.2) ¿21 es divisible entre 3? ¿Por qué? c.3) ¿15 es divisible entre 5? ¿Por qué? c.4) ¿4 es divisible entre 8? ¿Por qué?

- **Organización del análisis de las respuestas de los alumnos para la Ficha 8:** debido a que algunas partes tienen requerimientos similares, el análisis de esta ficha se presentará de la siguiente manera:

- Análisis de las respuestas para el *ítem a)*
  - Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 23 alumnos *(Tablas 42,43 y 44).*
  - Análisis Cualitativo de las respuestas de 3 alumnos.
- Análisis de las respuestas para el *ítem b)*
  - Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 23 alumnos *(Tabla 45)*
  - Análisis Cualitativo de las respuestas de 2 alumnos
- Análisis de las respuestas para el *ítem c)*
  - Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 23 alumnos para el ítem c.1) *(Tabla 46)*
  - Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 23 alumnos para el ítem c.2) *(Tabla 47)*
  - Análisis Cualitativo de las respuestas de 3 alumnos para los ítems c.1) y c.2)
  - Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 23 alumnos para el ítem c.3) *(Tabla 48)*
  - Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 23 alumnos para el ítem c.4) *(Tabla 49)*
  - Análisis Cualitativo de las respuestas de 2 alumnos para el ítem c.3) y c.4)

A continuación mostramos el desarrollo de estos análisis.

Análisis de las respuestas para el ítem a)

Análisis Cuantitativo

Las siguientes tablas (*Tabla 42, Tabla 43 y Tabla 44*) muestran el análisis para el ítem a).

La tabla que mostramos a continuación (*Tabla 42)* recoge información básica de las respuestas de los estudiantes para el ítem a) en forma cuantitativa. Vale la pena mencionar que aunque algunos estudiantes no escribieron sus respuestas en el esquema presentado inicialmente (aquel con flechitas), hemos analizado las respuestas que presentan en los recuadros, esto es, inmediatamente después del esquema (en el mismo ítem a).

Tabla 42. Análisis cuantitativo para el ítem a) de la Ficha 8

Número de alumnos que escribieron o no los divisores de 8 faltantes: 1, 4 y 8						
¿Escribieron el divisor 1?		¿Escribieron el divisor 4?		¿Escribieron el divisor 8?		
Sí	**No**	**Sí**	**No**	**Sí**	**No**	
20	3	21	2	22	1	
23		23		23		**Total (N° de alumnos)**

En la siguiente tabla (*Tabla 43*) nuestro análisis se basa en el conteo de los problemas correctos o incorrectos presentados por los estudiantes en lo que respecta a los otros 3 requerimientos presentados en este ítem: el valor del cociente, el valor del residuo y el tipo de división obtenida. En este estudio hemos considerado como problemas correctos a aquellos problemas cuyas respuestas son todas correctas para cada uno de los 3 requerimientos planteados. Mientras que, consideramos problemas incorrectos a aquellos problemas cuyas respuestas son incorrectas para al menos uno de estos 3 requerimientos.

Vale la pena mencionar que para este análisis cuantitativo nos centramos solo en el trabajo de aquellos alumnos cuyas respuestas resultan afirmativas de acuerdo a la tabla anterior (*Tabla 42*). También incluimos para este análisis el caso del divisor 2 (aunque este divisor ha sido dado en la ficha).

Tabla 43. Análisis cuantitativo para el ítem a) de la Ficha 8

Análisis de respuestas							
2 (divisor ya dado en la ficha)		Escribieron el **divisor 1**		Escribieron el **divisor 4**		Escribieron el **divisor 8**	
Problemas Correctos	**Problemas Incorrectos**	**Problemas Correctos**	**Problemas Incorrectos**	**Problemas Correctos**	**Problemas Incorrectos**	**Problemas Correctos**	**Problemas Incorrectos**
20	3	20	0	18	3	20	2

De acuerdo a los análisis resumidos en la Tabla 42 y 43, observamos que:

- Notemos que 20 de los 23 alumnos (casi el 87%) han mostrado problemas correctos cuando se ha dado el divisor 2 (ver *Tabla 43*), mientras que 3 de los 23 alumnos han dado valores incorrectos para el cociente o el residuo; sin embargo estos alumnos logran identificar de manera correcta el tipo de división (a pesar que el valor del residuo no es el correcto).
- De acuerdo a la *Tabla 42*, observemos que casi el 87% de los estudiantes (20 de los 23) escribieron correctamente que 8 es divisible entre 1. De la *Tabla 43*, vemos que este grupo de estudiantes no muestran dificultad al resolver la división de 8 entre 1; ya que han mostrado valores correctos para el cociente y el residuo, así como también han identificado que la división es de tipo exacta.
- De la *Tabla 42* vemos que un poco más del 91% de los estudiantes (21 de los 23) han logrado determinar que 4 es divisor de 8. Observemos que 18 de los 21 alumnos que responden afirmativamente a que 8 es divisible entre 4 dan valores correctos para el cociente y el residuo; sin embargo los 21 alumnos logran identificar el tipo de división correctamente, aunque el valor del residuo es incorrecto (que es el caso de 3 alumnos).
- De acuerdo a la *Tabla 42*, notemos que más del 95% de los estudiantes (22 de los 23) escribieron correctamente que 8 es divisible entre 8. De la *Tabla 43*, vemos que 20 de estos 22 alumnos muestra valores correctos para el cociente y el residuo, y que además logran identificar que 8 entre 8 es una división exacta. Mientras que 2 de estos 22 alumnos muestran valores incorrectos para el cociente y el residuo; pero logran identificar el tipo de la división, aunque el valor del residuo sea incorrecto.

En la *Tabla 44*, nuestro análisis solo hace referencia al número de divisores correctos presentados por los alumnos. Aclaramos que para este análisis no necesariamente tenemos en cuenta que los alumnos hayan presentado problemas correctos, de acuerdo al criterio considerado en la *Tabla 43*.

Tabla 44. Análisis cuantitativo para el ítem a) de la Ficha 8

Número de divisores correctos	Número de alumnos	Frecuencia porcentual
Solo 2 divisores	5	21,7%
3 divisores	18	78,3%
TOTAL	23	100%

De acuerdo a este análisis, observamos que:

- 18 de los 23 alumnos (un poco más del 78%) han logrado determinar los tres divisores faltantes del número 8: 1, 4 y 8.
- 5 de los 23 alumnos han mostrado solo dos de los divisores faltantes de 8.
- Todos los alumnos han logran identificar al menos dos de estos tres divisores.

Análisis cualitativo

Jeffrie:

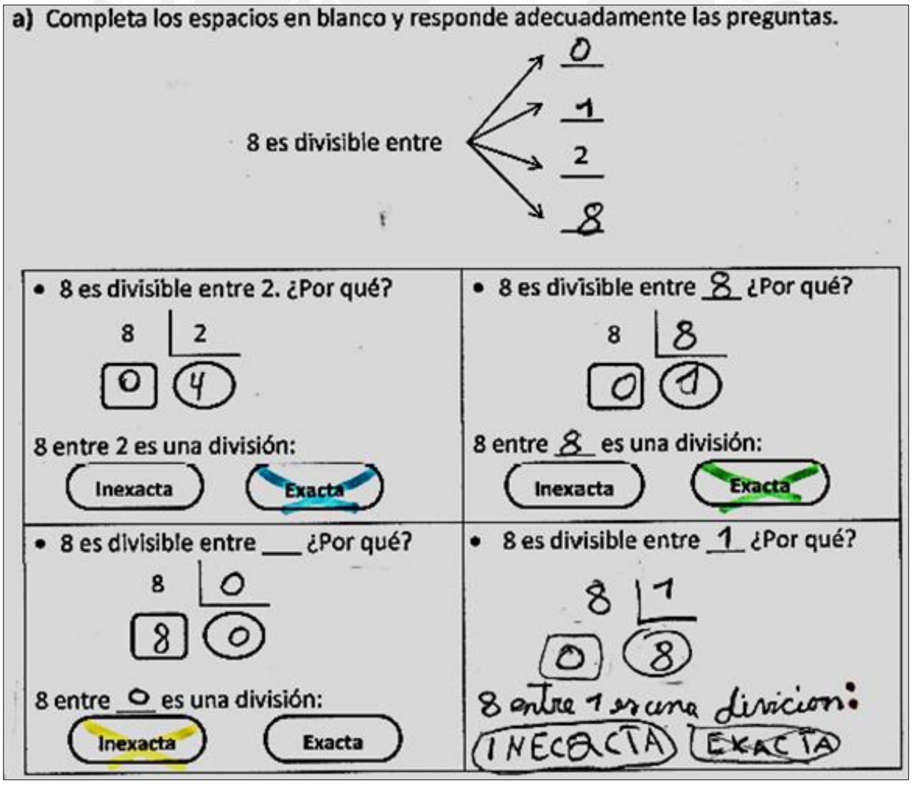


Figura 87. Respuesta de Jeffrie para el ítem a)

Jeffrie es uno de los 5 alumnos que logra determinar solo 2 de los 3 divisores faltantes del número 8 (1 y 8). Vemos que el alumno resuelve correctamente las divisiones de 8 entre 1, 8 y 2 respectivamente; y también identifica que las divisiones son de tipo exacta. Por otro lado, aunque sabemos que no es correcta la división que el alumno ha realizado de 8 entre 0, de este pseudo caso de división inexacta podemos destacar que el alumno ha logrado hacer la conexión de la noción divisibilidad con la noción de división exacta. Afirmamos esto ya que el alumno, al pensar que la división que ha obtenido es inexacta, no ha completado el espacio en blanco en *"8 es divisible entre…"*.

Thalía:

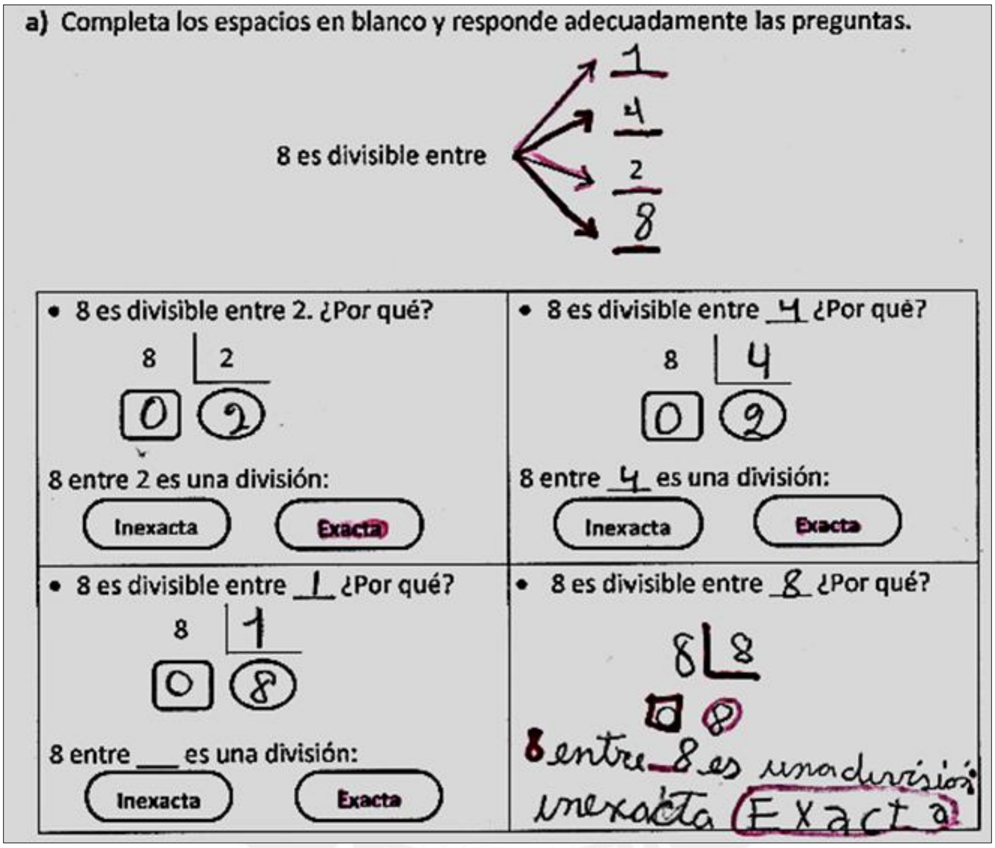
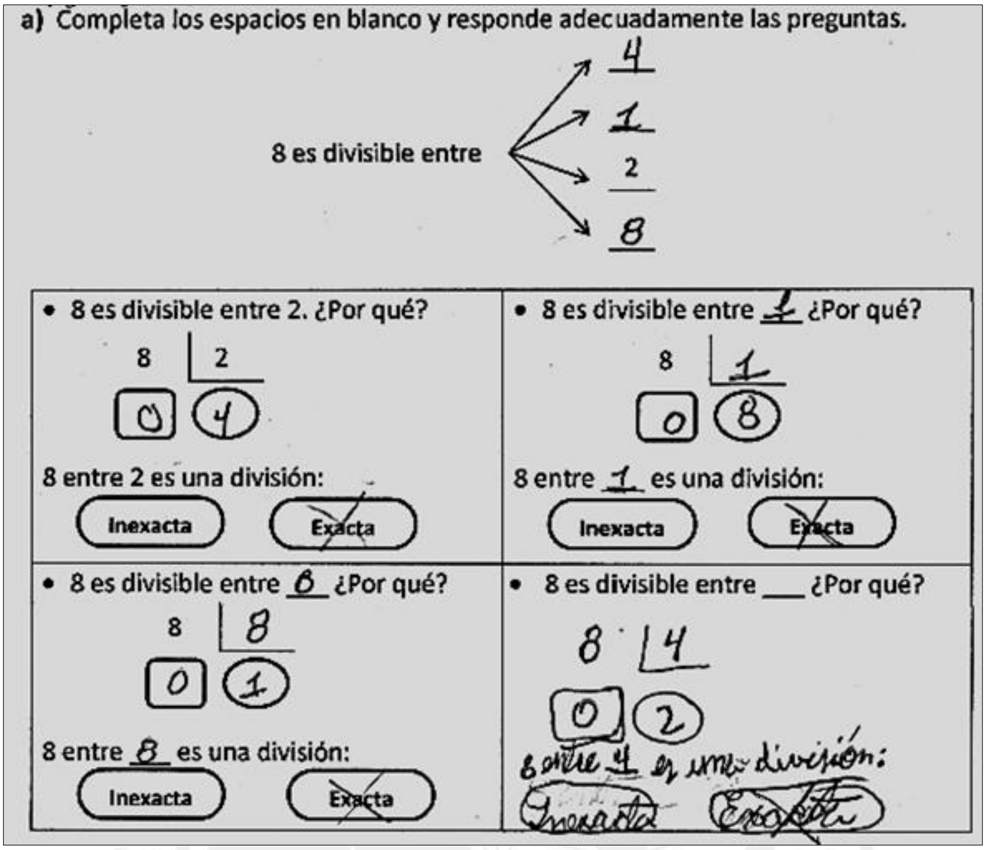


Figura 88. Respuesta de Thalía para el ítem a)

Thalía es uno de los 18 alumnos que logra determinar los tres divisores faltantes de 8 (1, 4 y 8). Observemos que la alumna muestra dificultad en realizar las divisiones de 8 entre 2 y 8 respectivamente, pues muestra valores incorrectos para el cociente. Por otro lado, para las divisiones de 8 entre 4 y 1 respectivamente presenta valores correctos para el cociente y el residuo. Asimismo, la alumna identifica correctamente el tipo de división en cada caso, a pesar de que en algunos casos los valores del residuo son incorrectos.

Hugo:


a) Completa los espacios en blanco y responde adecuadamente las preguntas.

8 es divisible entre → 4, 1, 2, 8

- 8 es divisible entre 2. ¿Por qué?

8 | 2 — 0, 4

8 entre 2 es una división: Inexacta ~~Exacta~~

- 8 es divisible entre 1 ¿Por qué?

8 | 1 — 0, 8

8 entre 1 es una división: Inexacta ~~Exacta~~

- 8 es divisible entre 8 ¿Por qué?

8 | 8 — 0, 1

8 entre 8 es una división: Inexacta ~~Exacta~~

- 8 es divisible entre ___ ¿Por qué?

8 | 4 — 0, 2

8 entre 4 es una división: Inexacta ~~Exacta~~

Figura 89. Respuesta de Hugo para el ítem a)

Hugo es uno de los 18 alumnos que logra determinar los tres divisores faltantes del número 8 (1, 4 y 8), y que ha desarrollado correctamente todos los problemas. Vemos que el alumno ha dado de manera correcta los valores del cociente y del residuo en cada uno de los cuatro problemas, y así como también ha identificado que las divisiones son de tipo exacta.

Análisis de las respuestas para el ítem b)

Análisis Cuantitativo

Tabla 45. Análisis cuantitativo para el ítem b) de la Ficha 8

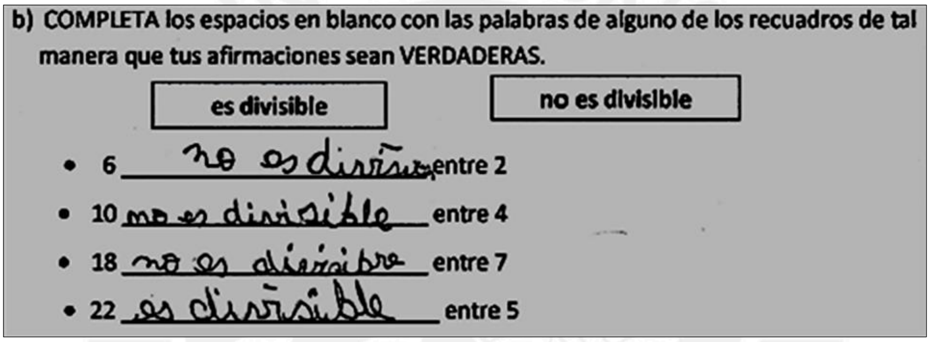
Casos / Respuestas	b.1) 6 es divisible entre 2	b.2) 10 no es divisible entre 4	b.3) 18 no es divisible entre 7	b.4) 22 no es divisible entre 5
Correctas	21	20	21	20
Incorrectas	2	3	2	3
Total (N° de alumnos)	23	23	23	23

Ampliando la información de esta tabla, hemos observado que:

- un poco más del 91% (21 de 23) de los estudiantes han dado respuestas correctas para los casos b.1) y b.3), ya que han completado de manera correcta que 6 *es divisible* entre 2 y que 18 *no es divisible* entre 7 respectivamente. Mientras que casi el 87% (20 de 23) de los estudiantes muestra respuestas correctas para los casos b.2) y b.4), dado que han logrado completar de manera correcta que 10 *no es divisible* entre 4 y 18 *no es divisible* entre 7. De todo esto podemos concluir que la mayoría de los estudiantes ha logrado discernir (distinguir) si un número es o no es divisible entre otro número.

Análisis cualitativo

Yolanda:


b) COMPLETA los espacios en blanco con las palabras de alguno de los recuadros de tal manera que tus afirmaciones sean VERDADERAS.

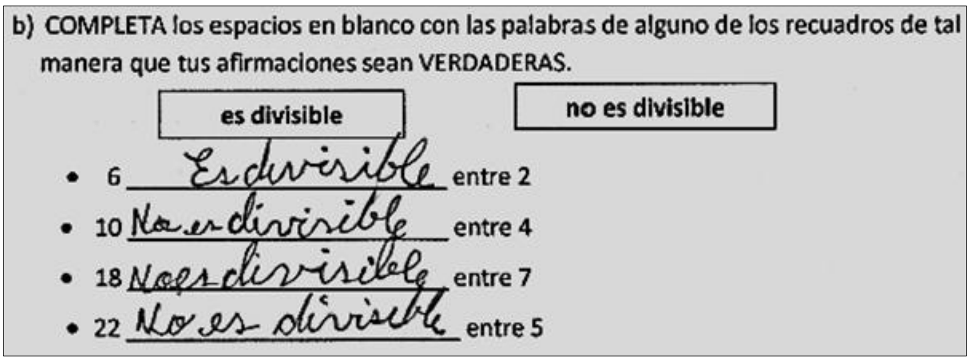
es divisible | no es divisible

- 6 no es divisible entre 2
- 10 no es divisible entre 4
- 18 no es divisibre entre 7
- 22 es divisible entre 5

Figura 90. Respuesta de Yolanda para el ítem b)

Notemos que la alumna completa que 6 *no es divisible* entre 2 y que 22 *es divisible* entre 5, siendo estas afirmaciones incorrectas. Sin embargo, la alumna completa correctamente los casos b.2) y b.3). Por otro lado, analizando las respuestas de la alumna para este ítem y los demás ítems de la ficha, podemos concluir que la alumna no ha logrado conectar la definición de divisibilidad con la noción de división, ya que sí resuelve de manera correcta las divisiones.

Julio:


b) COMPLETA los espacios en blanco con las palabras de alguno de los recuadros de tal manera que tus afirmaciones sean VERDADERAS.

es divisible | no es divisible

- 6 Es divisible entre 2
- 10 No es divisible entre 4
- 18 No es divisible entre 7
- 22 No es divisible entre 5

Figura 91. Respuesta de Julio para el ítem b)

Notemos que Julio ha logrado completar correctamente los cuatro casos presentados. Esto nos lleva a pensar que el alumno ha comprendido la noción de divisibilidad.

Análisis de las respuestas para los ítem c.1) y c.2)

Análisis Cuantitativo

Tabla 46. Análisis cuantitativo para el ítem c.1) de la Ficha 8

¿16 es divisible entre 5? ¿Por qué?						
Respuesta Incompleta (el alumno no escribió SÍ, y tampoco escribió NO)	**Respuesta Correcta** (el alumno escribió NO)					
	Justificaciones					
	Se basa en su noción de división inexacta	Se basa en que “sobra” o “sobra 1” o “ le quedaría”	Se basa en que: “No es un número de 5 en 5”	Se basa en que “no se le puede dividir o multiplicar”	Se basa en que “no le alcanza”	**Total (N° de alumnos)**
7	**5**	**6**	**3**	**1**	**1**	**23**

Ampliando la información resumida de esta tabla; observamos que:

- 16 de los 23 estudiantes (casi el 70%) se dan cuenta de que 16 no es divisible entre 5. De ellos:

  - 5 alumnos presentan la resolución de la división de 16 entre 5 (cociente y residuo correctos), y emplean una de las expresiones: *división inexacta* (4 alumnos) o *no es exacta* (1 alumno).
  - 6 alumnos emplean como parte de sus justificaciones estas expresiones: *“sobra”*, *“le quedaría”*, *“no tiene que sobrar nada”*, *“le sobra al que reparte”* y *“sobra uno”* (esta última es usada por 2 alumnos). Cabe mencionar que aunque 4 de estos 6 alumnos no resuelven la división de 16 entre 5, sí escribieron alguna de las expresiones anteriores.
  - Asimismo, 3 alumnos proporcionan como argumentos: escriben *“no es una cantidad o número de 5 en 5”* (2 alumnos) y presenta una adición de 5 en 5 a partir de cero (1 alumno). Notemos que estos 3 argumentos están relacionados a la noción de múltiplos, término no empleado por los alumnos, pero noción trabajada indirectamente en las sesiones 9 y 10.
  - Además, 1 alumno proporciona una justificación mostrando la siguiente expresión: *“no le alcanza”*. Creemos que esta expresión está haciendo referencia

a la noción de repartición equitativa y máxima, ya que dicha expresión indicaría que no alcanzan objetos para que la repartición sea de tipo exacta.

- Por último, 1 alumno proporciona un argumento dando la siguiente expresión: *"porque no se le puede dividir o multiplicar"*. Este argumento ha sido considerado como correcto, ya que hemos logrado interpretar esta expresión teniendo en cuenta el trabajo que mostró el alumno para el caso c.2). Este caso particular será incluido posteriormente en el análisis cualitativo (ver Fig. 92, p.273).

- Por otro lado, 7 de los 23 alumnos muestran respuestas incompletas, ya que no escriben sí o no como parte de sus respuestas. A cambio presentan lo siguiente: 4 alumnos resuelven la división de 16 entre 5 e identifican el tipo de división de manera correcta; 1 alumno resuelve de manera incorrecta la división pero logra identificar correctamente el tipo de división (aunque el valor del residuo es incorrecto); 1 alumno resuelve de manera incorrecta la división, y no identifica el tipo de división; y finalmente 1 alumno emplea la expresión *"sobra 1"* lo que ha obtenido haciendo reparticiones (equitativas y máximas), pero no identifica el tipo de repartición.

  Las respuestas incompletas presentadas por este grupo de alumnos nos lleva a reflexionar la forma en la que hemos planteado el ítem c) de esta ficha. Consideramos que en cada uno de los casos que se presenta en este ítem, faltó colocar un pedido explícito de respuestas para la primera pregunta. En este caso lo que se esperaba es que el alumno escriba, primero, "sí" o "no" para luego justificar su respuesta. Esta experiencia nos sirve para replantear este ítem en la nueva propuesta.

Tabla 47. Análisis cuantitativo para el ítem c.2) de la Ficha 8

<table>
<tr><th colspan="8">¿21 es divisible entre 3? ¿Por qué?</th><th rowspan="3"></th></tr>
<tr><th rowspan="3">No respondió (en blanco)</th><th rowspan="3">Respuesta Incompleta (el alumno no escribió SÍ, y tampoco escribió NO)</th><th colspan="4">Respuesta Correcta (el alumno escribió SÍ)</th><th colspan="2">Respuesta incorrecta (el alumno escribió NO)</th></tr>
<tr><th colspan="4">Justificaciones</th><th rowspan="2">No codificable</th><th rowspan="2">Su explicación hace referencia a la división inexacta</th></tr>
<tr><th>Se basa en su noción de división exacta</th><th>Se basa en que "no sobra"</th><th>Se basa en que: "es un número de 3 en 3"</th><th>Se basa en que " se puede multiplicar "</th><th>Total (N° de alumnos)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>7</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>23</td></tr>
</table>

Ampliando la información resumida de esta tabla; observamos que:

- Casi el 48% (11 de 23) de los estudiantes ha logrado dar ***respuestas correctas***. Notemos que los argumentos son similares a los presentados en el ítem c.1), aunque ahora están orientados para una división de tipo exacta (21 entre 3).
- Por otro lado, 4 de los 23 estudiantes presentan ***respuestas incorrectas*** pues consideran que 21 no es divisible entre 3. Entre los argumentos de estos alumnos tenemos: 3 de ellos escriben *“no es exacta”, “le quedarían” y “sobra 1”* respectivamente. Estas expresiones hacen referencia a la división inexacta. Mientras que 1 de estos 4 estudiantes argumenta que *“3 entre 6 es igual a 21”*. Este último caso será incluido en el análisis cualitativo (ver Fig. 93, p. 274).
- Además, 7 de los 23 alumnos han dado ***respuestas incompletas***. Es importante mencionar que este grupo de alumnos es exactamente el mismo que presentó respuestas incompletas para el ítem c. 1). Entre las respuestas de estos alumnos tenemos: 6 alumnos no tienen dificultad en resolver la división de 21 entre 7 ya que muestran cociente y residuo correctos, y también identifican que la división es exacta. Mientras que 1 de estos 7 alumnos resuelve de manera incorrecta la división.

Análisis cualitativo

Jeffrie:

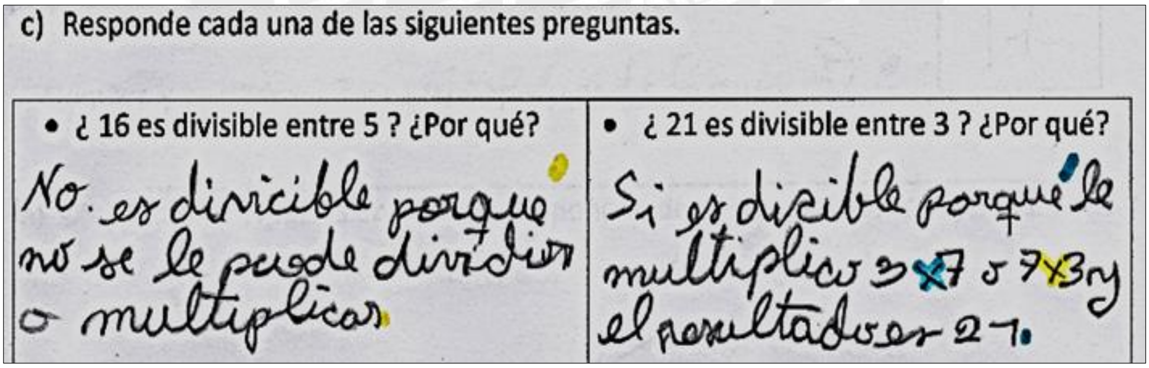


Figura 92. Respuestas de Jeffrie para los ítems c.1) y c.2)

Jeffrie muestra respuestas correctas para los dos primeros casos de este ítem. El alumno, en el primer caso, trata de explicar su respuesta presentando como argumento que *“no se le puede dividir o multiplicar”*. Observemos que la expresión *“no se le puede dividir”* hace referencia a que 16 no se puede dividir entre 5 de manera exacta. Asimismo, cuando el alumno escribe *“no se le puede dividir o multiplicar”*, creemos que el alumno hace referencia a que no hay un número natural que multiplicado por 5 nos dé como resultado 16. Esto se ve reflejado más claramente por la justificación que el alumno presenta para el ítem c.2). En ese caso el alumno trabaja la división exacta como operación inversa de la multiplicación. De todo esto concluimos que Jeffrie ha notado que un número es divisible entre otro número si es posible encontrar un número natural que multiplicado por el divisor nos dé el valor del dividendo.

Renzo:

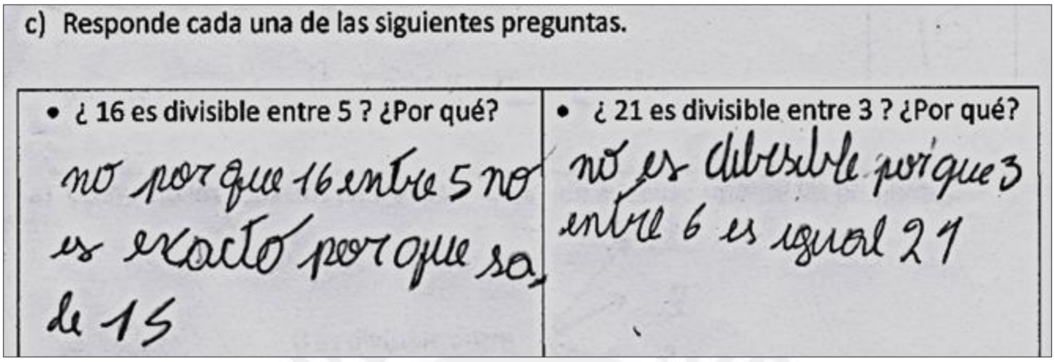


Figura 93. Respuestas de Renzo para los ítems c.1) y c.2)

Vemos que Renzo responde de manera correcta el ítem c.1). El argumento que presenta para su respuesta es la expresión: *"16 entre 5 no es exacta"*. De esta parte, interpretamos que el alumno está haciendo referencia a que la división de 16 entre 5 es inexacta; pero si además le agregamos a esa expresión lo que el alumno escribe *"porque sale 15"*, creemos que trata de explicar que al multiplicar 5 por un número natural, el resultado más cercano a 16 que puede obtener es 15, pero no puede obtener 16. Por otra parte, en el ítem c.2) el alumno no logra dar de manera correcta la respuesta. El argumento que presenta el alumno es clasificado como no codificable, ya que su explicación es confusa.

Ana Lucía:

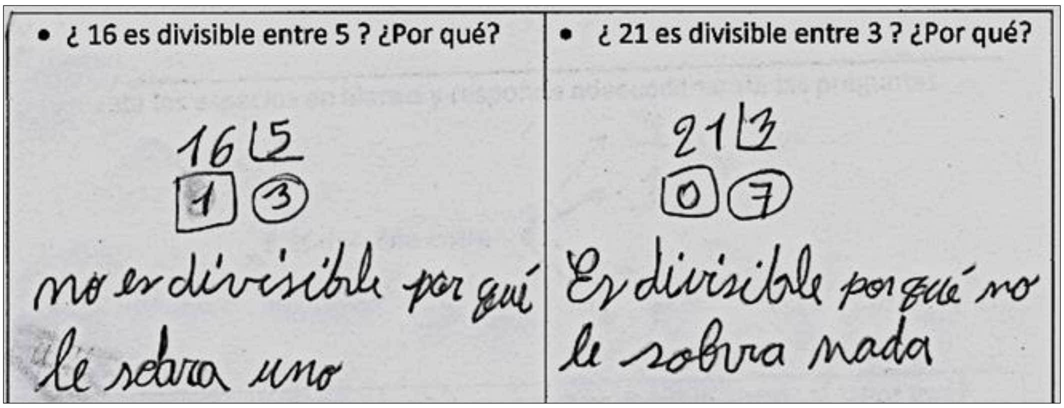


Figura 94. Respuestas de Ana Lucía para los ítems c.1) y c.2)

Notemos que las respuestas dada por la alumna para los ítems c.1) y c.2), así como sus justificaciones, son correctas. Vemos que las justificaciones que presenta la alumna están en función de la noción de repartición equitativa y máxima.

<u>Análisis de las respuestas para los ítem c.3) y c.4)</u>

Análisis Cuantitativo

Tabla 48. Análisis cuantitativo para el ítem c.3) de la Ficha 8

<table>
<tr><th colspan="7">¿15 es divisible entre 5? ¿Por qué?</th><th></th></tr>
<tr><th rowspan="3">No respondió (en blanco)</th><th rowspan="3">Respuesta Incompleta (el alumno no escribió SÍ, y tampoco escribió NO)</th><th colspan="4">Respuesta Correcta (el alumno escribió SÍ)</th><th rowspan="2">Respuesta incorrecta (el alumno escribió NO)</th><th rowspan="2"></th></tr>
<tr><th colspan="4">Justificaciones</th></tr>
<tr><td>Se basa en su noción de división exacta</td><td>Se basa en que “no sobra”</td><td>Se basa en que: “No es un número de 5 en 5”</td><td>Se basa en que “ le quedaría” o “no le alcanza”</td><td>Se basa en que “ no se puede multiplicar o dividir”</td><td>Total (N° de alumnos)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>7</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>23</td></tr>
</table>

Ampliando la información resumida de esta tabla; observamos que:

- El 56,52% (13 de 23) de los estudiantes muestran respuestas correctas. Vemos que entre los argumentos empleados para este caso se presentan expresiones similares a las dadas en el ítem c.2).
- Asimismo, 1 estudiante ha manifestado de manera equivocada que la respuesta debe ser no. Es decir, que 15 no es divisible entre 5. En este caso Jefrrie es el único alumno que da esta respuesta.
- Por otro lado, 7 de los 23 alumnos han dado respuestas incompleta. Estos alumnos son los mismos que presentan este tipo de respuesta para los ítems c.1) y c.2). 5 de estos 7 alumnos resuelven la división de 15 entre 5 e identifican el tipo de división de manera correcta. 1 alumno resuelve de manera correcta la división, pero no menciona el tipo de división. Por último, 1 alumno resuelve de manera incorrecta la división.

Tabla 49. Análisis cuantitativo para el ítem c.4) de la Ficha 8

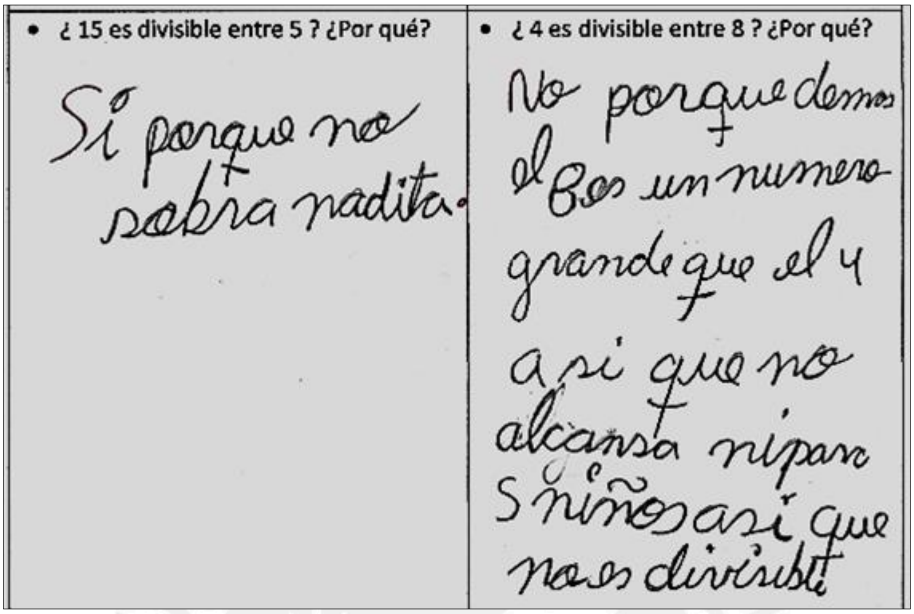
¿4 es divisible entre 8? ¿Por qué?							
No respondió (en blanco)	**Respuesta Incompleta** (el alumno no escribió SÍ, y tampoco escribió NO)	**Respuesta Correcta** (el alumno escribió NO)				**Respuesta incorrecta** (el alumno escribió SÍ)	**Total (N° de alumnos)**
		Justificaciones					
		Se basa en la noción de división inexacta	Se basa en que no alcanza para hacer una repartición.	Está en basa en que "no se puede multiplicar o dividir"	Está en base a que el dividendo es mayor al divisor		
2	**7**	**1**	**4**	**1**	**2**	**6**	**23**

Ampliando la información resumida de esta tabla; observamos que:

- Casi el 35% (8 de 23) de los estudiantes presenta respuestas correctas para el ítem c.4). Consideramos los diferentes argumentos presentados como correctos.
- Además, notemos que casi el 26,1% (6 de 23) de los estudiantes ha dado respuestas incorrectas: 3 de estos 6 alumnos resuelven de manera incorrecta la división de 4 entre 8, pero identifican el tipo de división; mientras que los otros 3 alumnos muestran entre sus argumentos: *"es una cantidad de 4 en 4"* (1 alumno), presenta una adición de 4+4=8 (1 alumno) y *"no sobra"* (1 alumno). Esto nos hace pensar que los alumnos confunden la división que debe ser hecha por algo que desde su punto de vista debe ser lo más lógico, que es dividir 8 entre 4 y no 4 entre 8. En realidad este era el reto de este ítem: que independientemente de lo que parezca "más lógico", el alumno respete la condiciones dadas previamente.
- Por otro lado, 7 de los 23 estudiantes no responden si 4 es o no es divisible entre 8; sin embargo, presentan las siguientes respuestas: 6 de estos 7 alumnos resuelven la división de 4 entre 8 de manera incorrecta (cociente y/o residuo incorrecto).Además, 1 de estos 7 alumnos emplea solo esta expresión *"a nadie le da nada"*, la cual está en términos de reparticiones (equitativas y máximas).

Análisis cualitativo

Krisstell:

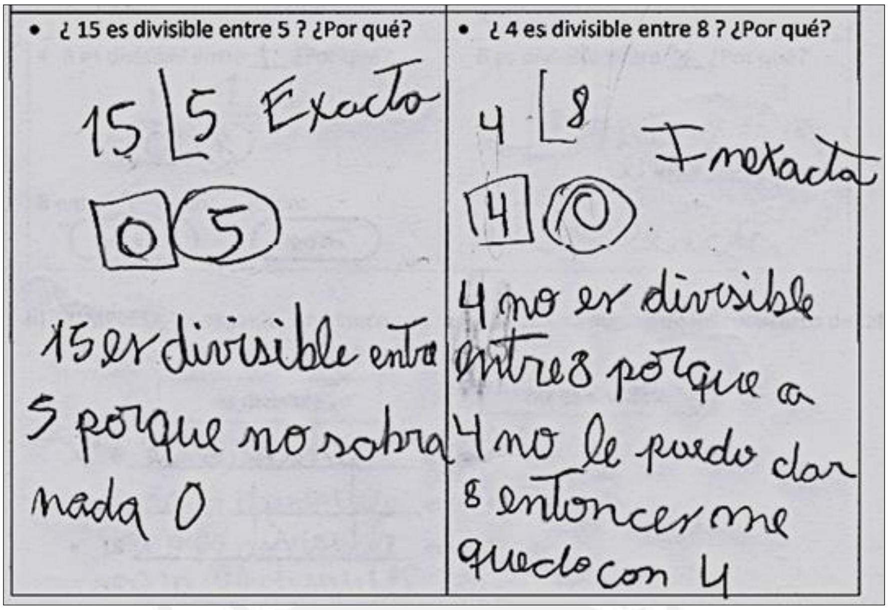


• ¿ 15 es divisible entre 5 ? ¿Por qué?	• ¿ 4 es divisible entre 8 ? ¿Por qué?
Si porque no sobra nadita.	No porque demos el 8es un numero grande que el 4 así que no alcansa ni para 5 niños asi que no es divisibl

Figura 95. Respuestas de Krisstell para los ítems c.3) y c.4)

La respuesta dada por Krisstell para los ítems c.3) y c.4), así como sus argumentos, son correctos. Notemos que los argumentos de la alumna están en función de la noción de repartición equitativa y máxima. En cuanto al ítem c.3), Krisstell está haciendo referencia a que la repartición es de tipo exacta pues trata de explicar que le sobra cero objetos después de la repartición. Mientras que en el ítem c.4), la alumna ha notado que no es posible hacer una repartición de 4 objetos entre 8 personas. Más aún, la alumna descarta el caso propuesto ya que ni siquiera se pueden repartir 4 objetos entre 5 niños. Creemos que de alguna manera la alumna ha podido notar gracias a la noción de repartición equitativa y máxima que un número no podrá ser divisible por un número mayor a él.

Anayely:


• ¿ 15 es divisible entre 5 ? ¿Por qué?

15 |5 Exacto
0 5
15 er divisible entre 5 porque no sobra nada 0

• ¿ 4 es divisible entre 8 ? ¿Por qué?

4 |8 Inexacta
4 0
4 no er divisible entre 8 porque a 4 no le puedo dar 8 entoncer me quedo con 4

Figura 96. Respuestas de Anayely para los ítems c.3) y c.4)

Anayely muestra respuestas correctas para los ítems c.3) y c.4), aunque muestra un error en el cociente de la división de 15 entre 5. Notemos que la alumna está relacionando la noción de divisibilidad con la noción de repartición equitativa y máxima. Esto podemos concluirlo a partir de los argumentos presentados en los dos casos de este ítem. Particularmente, vemos que en el ítem c.4) menciona que 4 no es divisible entre 8. Esto lo explica a través de su división por ejemplo y luego cuando la alumna escribe *"me quedo con 4 (objetos)"*. Al parecer esta manera de trabajar la división en función de reparticiones permite que Anayely muestre valores correctos para el cociente y el residuo de la división de 4 entre 8. Por otro lado, observemos que la alumna además logra identificar correctamente el tipo de división (exacta e inexacta respectivamente).

ETAPA 2

Después de la aplicación de la Ficha 8, desarrollamos esta etapa como trabajo de clase. En esta etapa trabajamos la noción de divisibilidad presentando tres casos concretos; esto es con el propósito de que el estudiante pueda notar ciertas propiedades o características de esta noción, y así logre presentar conjeturas en relación al tema. Para conseguir esto, planteamos gradualmente las siguientes preguntas:

¿1 es divisible entre 2?
¿2 es divisible entre qué números?
¿3 es divisible entre qué números?

A continuación mostramos partes de los diálogos correspondientes a este trabajo:

Profesora: *¿1 es divisible entre 2?*

Alumnos: *sí, no [respuestas divididas]*

Ana Lucía: *no, porque es como si tuviera…uhm… una canica entre dos niños*

Notemos que la alumna relaciona este caso con las reparticiones equitativas y máximas, ya que el problema que se le presenta lo ha traducido como el caso de repartición de *"una canica entre dos niños"*. La expresión que emplea sería considerada correcta puesto que no es posible la repartición de un objeto entre dos personas de tal manera que obtengamos una cantidad natural de objetos para cada persona.

Profesora: *su compañera dice que es como si tuviera una canica entre dos niños. ¿Puedo dividir una canica entre dos niños? ¿Cuántas canicas le daríamos a cada niño?*

Jeffrie: *la mitad*

Profesora: *¿vale la mitad de las canicas?*

Alumnos: *¡¡no!!*

Profesora: *no, entonces ¿cuántas canicas le doy a cada niño?*

Mikeley: *nada*

Ana lucía: *nada, porque no le va alcanzar*

Profesora: *¡nada!, le doy 0 canicas a cada uno. Y ¿con cuántas me quedo?*

Alumnos: *con 1canica*

Vemos que Ana Lucía y Mikeley muestran valores correctos para el cociente de la división que, en este caso, sería igual a cero. Asimismo sus compañeros han notado que el valor del residuo es igual a 1.

Profesora: *entonces si le doy una canica a cada niño [la profesora en la pizarra va haciendo la notación de la división] ¿Cuántas creen que le voy a dar a cada niño?*

Alumnos: *0*

Profesora: *¿y me sobra?*

Alumnos: *1*

[La profesora coloca en el lugar del cociente escribe a 0 y en el lugar del residuo escribe a 1]

Profesora: *y me sobra 1 canica. ¿Qué tipo de división es?*

Alumnos: *inexacta*

Profesora: *es una división inexacta. Entonces, podría decir que ¿1 es divisible entre 2?*

Alumnos: *no*

Desde nuestro punto de vista, traducir el problema (*¿1 es divisible entre 2?*) en el contexto de las canicas y los niños como lo propuesto por Ana Lucía, conjuntamente con las preguntas dadas por la profesora ha permitido que los alumnos logren dar los valores correctos del cociente y residuo. Por otra parte también han logrado identificar el tipo de división al que pertenece esta división, para posteriormente concluir de manera correcta que 1 no es divisible entre 2.

[…]

Profesora: *ahora, ¿2 es divisible entre qué números?*

Jeffrie: *entre 2*

Manuel: *entre 1*

Luis: *entre nada más*

Vemos que Jeffrie y Manuel han dado correctamente los dos números que dividen exactamente al número 2. Mientras que Luis ha notado que 2 no tiene otros divisores.

Profesora: *¿nada más? ¿Qué más?*

Julio: *no se puede, porque si no se pasaría del 2. Si lo aumenta uno más al 2 tendríamos un número que se está pasando del 2, y no se puede*

Profesora: *a ver su compañero dice algo muy interesante, si se pasa del 2 ya no se puede… y ¿por qué no se puede?*

Nicolás: *porque no podría repartirse*

Luis: *porque no se puede dividir un número chico entre un número grande*

[La profesora escribe en la pizarra lo mencionado por Luis, para resaltar colocando la idea entre comillas]

Notemos que las intervenciones de los alumnos son interesantes, ya que podríamos considerar como conjeturas correctas lo mencionado por Julio y Luis. Vemos que Julio descarta como divisores a todos los números que son mayores, en este caso a 2, ya que como lo menciona Nicolás no se podría hacer una repartición (exacta). Mientras que en la última intervención de Luis, entendemos que el divisor de un número no puede ser mayor al dividendo, lo que es correcto en casi todos los casos. Sin embargo no cumpliría cuando el dividendo es igual a 0 y el divisor es cualquier número natural diferente de 0. Notemos que la afirmación de Luis es general a diferencia de lo mencionado por Julio.

Profesora: *¿eso será verdad? 2 no es divisible entre un número mayor que 2... ¿Entre qué otro número se podrá dividir 2?*

Alumnos: *no, ya no hay más números*

Profesora: *¿no?, ¿ya no se puede? ¿Alguien que opine que sí se puede?*

Orlando: *se puede repartir entre 1 y entre 2*

Profesora: *¿solamente entre 1 y 2?*

Alumnos: *sí*

Observamos que los alumnos tienen la seguridad de que 1 y 2 son los únicos divisores del número 2.

Profesora: *entre 1 y entre 2, muy bien. Entonces, vamos a poner otro ejemplo, ¿3 es divisible entre que números?*

Jeffrie: *entre 3*

Vanesa: *entre 6*

Alumnos: *¡no! [Refiriéndose a que 6 no es un número que se debe considerar en ese caso. La profesora igual lo escribe en la pizarra]*

Luis y Manuel: *entre 2*

Alumnos: *¡no! [Los compañeros de Luis y Manuel no consideran que 2 sea divisor de 3]*

Julio: *entre 1*

Profesora: *¿qué más? ¿Está bien? [En la pizarra se tiene lo siguiente: 3 es divisible entre 1, 2, 3 y 6] ¿Entre otro número?*

Jeffrie: *0*

Alumnos: *¡¡no!!*

Notemos que algunos alumnos han dado diferentes cantidades que no necesariamente son divisores de 3, como son los números 0, 2 y 6.

Profesora: *a ver, vamos a revisar. ¿Entre 1 está bien?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *¿entre 2?*

Orlando: *sí*

[Orlando en la pizarra resuelve la división de 3 entre 2, colocando en el cociente igual a 1 y en el residuo igual a 1. Finalmente escribe que la división es inexacta]

Creemos que los alumnos tienen la seguridad de que la unidad es divisor de cualquier número, ya que muestran seguridad en su respuesta. Mientras que Orlando tiene la necesidad de verificar si 3 es o no es divisible entre 2, para lo cual resuelve la división de 3 entre 2 (para asegurarse que su respuesta dada es correcta).

> ***Jeffrie:*** *no se puede dividir entre un número que es más de 3*
>
> ***Jamil:*** *sí se puede dividir, pero sería inexacta.*
>
> ***Profesora:*** *¿y si es inexacta es divisible?*
>
> ***Jamil:*** *no*
>
> ***Profesora:*** *entonces 3 es divisible entre 2*
>
> ***Alumnos:*** *¡no!*

Jeffrie menciona que 3 no puede ser divido entre un número mayor a 3, pero vemos que Jamil precisa lo dicho por su compañero, ya que nota que sí se puede dividir pero que se tendría una división de tipo inexacta, lo que nos ubicaría en el caso de no divisibilidad.

> ***Profesora:*** *claro, 3 no es divisible entre 2… y será… ¿3 divisible entre 3?*
>
> ***Alumnos:*** *sí*
>
> ***Profesora:*** *¿por qué?*
>
> ***Jeffrie:*** *sí, se puede porque se le da uno a cada niño*
>
> ***Mikeley:*** *porque no me sobra nada*

Vemos que Jeffrie relaciona el problema 3 divisible entre 3 con la noción de repartición (equitativa y máxima) de manera correcta pues presenta el valor correcto del cociente (1). Pero su respuesta no es suficiente para determinar que 3 es divisible entre 3. Esta respuesta es complementada con la respuesta de Mikeley que sí permite afirmar que 3 es divisible entre 3.

> ***Profesora:*** *3 divisible entre 3, porque no sobra nada*
>
> ***Julio:*** *se puede porque es un número igual.*
>
> ***Profesora:*** *¿cómo igual?*
>
> ***Julio:*** *porque los números son los mismos*

[La profesora escribe: "3 es divisible entre 3 porque es un número igual" porque los dos números son los mismos]

> ***Profesora:*** *los dos números son iguales ¿a qué te refieres?*
>
> ***Julio:*** *a que uno tiene 3 y el otro también*
>
> ***Profesora:*** *¿estas dividiendo?*

Julio: *sí, 3 entre 3 y sale exacto*

Vemos que Julio ha notado una de las propiedades de divisibilidad. En este caso, el alumno parece haber notado que un número es divisible por el mismo. El alumno trata de explicar que al tener números iguales en el lugar del dividiendo y del divisor obtendremos una división de tipo exacta.

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 12

Respecto a la *Etapa 1*:

- Hemos observado que más del 78% de los estudiantes han logrado determinar los divisores faltantes de 8 (1, 4 y 8). Además que, los estudiantes, para determinar dichos divisores de 8 han tenido en cuenta la noción de repartición exacta.
- Notamos que al menos el 75% de los estudiantes logran responder acertadamente los tres requerimientos para cada uno de los cuatro problemas (8 entre 1, 2, 4 y 8). También, observamos que la mayoría de los alumnos logran identificar el tipo de división, a pesar de que en algunos casos los valores del residuo sean incorrectos.
- Observamos que, en los tres primeros casos del ítem c) de la Ficha 8, más del 45% de los estudiantes han presentado diferentes argumentos para tratar de explicar el por qué de sus respuestas; hemos visto que algunos estudiantes emplean lo explicado en clase (que como primer paso tiene que resolver la división y luego identificar el tipo de división, para finalmente concluir si un número es o no es divisible entre otro número) o usan la noción de repartición equitativa y máxima, etc.
- Además, hemos notado que en el ítem c) se debió aclarar que teníamos dos preguntas en cada uno de los casos, ya que casi el 31% (7 de 23) de los estudiantes no responde sí o no a la primera pregunta que se les plantea en cada caso. Esta observación tendremos presente para nuestra nueva propuesta.

Respecto a la *Etapa 2*:

- De manera general hemos observado que para dar respuesta y justificar los casos presentados de divisibilidad, los alumnos relacionan, de manera natural, los casos numéricos presentados con casos de reparticiones equitativas y máximas.
- Cabe resaltar que en esta etapa dos alumnos han planteado dos conjeturas relacionadas con el tema de divisibilidad (como son los casos de Julio y Luis).
- Creemos que asociar la divisibilidad con la noción de reparticiones equitativas y máximas ha permitido que los alumnos identifiquen ciertos patrones o compartimientos en relación a la divisibilidad.

4.3.13 Análisis de la sesión 13

- **Actividades trabajadas:** en esta sesión hemos desarrollado 3 casos diferentes de divisibilidad.
- **Tipo de actividad:** Trabajo de clase
- **Propósitos de la sesión:** indicados en la Tabla 13 (Ver p. 83)
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** a esta sesión asistieron 24 alumnos.
- **Casos de divisibilidad trabajado:** trabajamos los siguientes 3 casos:

¿4 es divisible entre 8?
¿20 es divisible entre qué números?
¿Qué números son divisibles entre 2?

A continuación incluimos la transcripción de algunos fragmentos de la discusión llevada en esta sesión:

> ***Profesora:*** *¿4 es divisible entre 8?*
>
> ***Orlando:*** *Miss, 4 no es divisible entre 8*
>
> ***Nicolás:*** *8 entre 4 personas a cada uno le das 2*

Notemos que la afirmación dada por Orlando es verdadera. Por el contrario, Nicolás no da un sí como respuesta pero deducimos que este es el caso. Sin embargo vemos que el alumno no considera el caso propuesto (4 entre 8), sino otro (8 entre 4).

> ***Profesora:*** *Nicolás dice que le da 2 a cada persona. ¿Será verdad?*
>
> ***Hugo:*** *no, porque no alcanza. Si tienes 4 canicas y 8 personas no alcanza*
>
> ***Jeffrie:*** *no se puede, porque no alcanza y es una división inexacta*

Vemos que Hugo y Jeffrie dan justificaciones complementarias. Hugo trata de explicar en términos de la noción de repartición equitativa y máxima que 4 canicas "no alcanzan" para ser repartidas entre 8 personas. Mientras que Jeffrie además agrega que se trata de una división inexacta. Notemos que tanto Hugo como Jeffrie relacionan su noción de divisibilidad en función de la noción de repartición equitativa y máxima.

> ***[…]***
>
> ***Profesora:*** *a ver, vamos a dar la explicación general. Podemos pensar lo siguiente, tenemos 4 canicas [la profesora en la pizarra gráfica las 4 canicas]. ¿Entre cuántas personas vamos a repartir las canicas?*

Alumnos: *entre 8 personas*

[La profesora en la pizarra muestra la división de 4 entre 8]

Profesora: *entre 8 personas, y… ¿me alcanzan esas 4 canicas para repartirlas de forma exacta entre las 8 personas?*

Alumnos: *¡¡no!!*

Ana Lucía: *Miss, podría ser al revés*

Creemos que Ana Lucía al notar que 4 no es divisible entre 8, pero que 8 sí es divisible entre 4 propone que los números se consideren "al revés"; ya que así sí se podría tener un caso de divisibilidad.

Profesora: *podría ser al revés... Pero nos están diciendo 4 entre 8. ¿Me alcanzarían 4 canicas para darle a cada una de las 8 personas una cantidad igual de canicas?*

Alumnos: *¡¡no!!*

Julio: *no, porque 8 es mayor a la cantidad [de canicas] que tienes…*

Profesora: *8 personas es una cantidad mayor a la cantidad de canicas que se tiene. ¿Podemos hacer la repartición? ¿Le va alcanzar o no le va alcanzar?*

Vemos que Julio se ha dado cuenta que 4 no es divisible entre 8. El argumento que presenta el alumno está en relación a que el dividendo (8) es mayor al divisor (4).

Jeffrie: *no le va alcanzar, a menos que se partiera pero no vale partido*

Profesora: *no vale partido. Entonces, si hago la división de 4 entre 8, ¿cuánto le corresponde a cada niño? [La pregunta hace referencia al valor del cociente]*

Luisa: *4*

Profesora: *¿4 a cada niño?*

Alumnos: *¡¡no!! Faltan [canicas]*

Mikeley: *le toca 1 a cada niño*

Hugo: *no se puede, porque solamente tienes 4 canicas*

Jhosetp: *¡¡no se puede!!*

Observemos que Luisa y Mikeley dan respuestas incorrectas para el valor del cociente de la división de 4 entre 8. Esto es algo que notan sus compañeros y Hugo enfatiza que no son posibles aquellas respuestas dado que solamente se tienen 4 canicas para ser repartidas entre 8 personas.

Profesora: *¡¡no se puede!! Pero… ¿qué número coloco aquí? [Señalando el lugar del cociente]*

Alumnos: *0*

Profesora: *como tengo que hacer reparticiones iguales a cada persona… no le puedo dar nada, porque solo hay 4 canicas. Es por eso, que doy a cada niño 0 canicas, y ¿cuántas canicas me sobrarían?*

Alumnos: *4*

Profesora: *¡cierto! No puedo repartir las 4 canicas entre las 8 personas, ya que no les puedo dar una misma cantidad, por eso que no reparto nada y me quedo con esas 4 canicas. ¿Es una división exacta?*

Alumnos: *inexacta, porque sobra*

Notemos que los alumnos finalmente presentan valores correctos para el cociente y el residuo de la división de 4 entre 8, así como también identifican correctamente el tipo de división involucrado. Consideramos que trabajar la división en términos de reparticiones (equitativas y máximas) ha permitido que los alumnos den los valores correctos de la división para el cociente y el residuo en este caso particular, poco usual debido a lo complejidad de esta división.

Profesora: *si es una división inexacta, ¿Podré decir que 4 es divisible entre 8?*

Alumnos: *¡¡no!!*

Profesora: *entonces, ¿qué es lo que debería decir? ¿4 es o no es divisible entre 8?*

Alumnos: *4 no es divisible entre 8*

Profesora: *Ok, entonces 4 no es divisible entre 8.*

Vemos que los alumnos han logrado conectar su noción de división con la noción de divisibilidad, dado que han determinado de manera correcta que 4 no es divisible entre 8.

A continuación, mostramos las intervenciones de los alumnos cuando se les solicita los **divisores de 1** (aunque no empleamos este término).

Profesora: *Ahora, vamos a seguir trabajando, <u>¿1 es divisible entre qué números?</u>*

[La profesora escribe en la pizarra: 1 es divisible entre___]

Jamil: *entre 1*

Nicolás: *solo 1 nomás, no hay más*

Hugo: *¡no hay más!*

Jeffrie: *entre 0*

Nicolás: *eso no vale, eso está mal Miss [Nicolás hace ese comentario por la respuesta de Jeffrie]*

Vemos que Jamil responde correctamente a la pregunta planteada por la profesora. De igual manera, Nicolás y Hugo coinciden con la respuesta de su compañero. Más aún los alumnos aseguran que el número 1 solo tiene como divisor a 1. Por el contrario, Jeffrie considera que 0 es divisor de 1, respuesta que como sabemos es incorrecta. A continuación presentamos la revisión que hace la profesora con los alumnos de las respuestas dadas como divisores de 1.

Profesora: *A ver, hay que revisar, ¿1 es divisible entre 1?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *quién me explica por qué*

Ana Lucía: *le das 1, y me queda 0…*

Profesora: *o sea, ¿qué tipo de división es?*

Alumnos: *exacta*

Profesora: *entonces…*

Alumnos: *¡¡1 es divisible entre 1!!*

Vemos que Ana Lucía justifica su respuesta en base a la noción de repartición equitativa y máxima. Esto lo vemos reflejado en su respuesta ya que presenta valores del cociente y del residuo en términos de dicha noción. Observamos que con el fin de completar las ideas, la profesora plantea la pregunta *¿qué tipo de división es?* para que los alumnos tomen en cuenta que es en base al tipo de división que se define si un número es o no es divisible entre otro número. Particularmente, en este caso, los alumnos logran determinar de manera correcta que 1 es divisible entre 1.

Profesora: *y ¿1 es divisible entre 0?*

Alumnos: *¡¡no!!*

Profesora: *y entonces Jeffrie, ¿por qué dijiste 0?*

Jeffrie: *Miss, me había equivocado. Pensaba que podía ser exacta o inexacta*

Profesora: *pero yo dije que sean divisibles, y cuándo hablamos de divisible, ¿qué tipo de división es?*

Alumnos: *¡¡exacta!!*

Notemos que Jeffrie tenía una idea equivocada respecto a la noción de divisibilidad, pues consideraba que un número es divisible de otro número si era una división exacta o inexacta. Este error conllevó a que el alumno presentara un divisor incorrecto para el caso presentado. Sin embargo, consideramos que estos errores permiten hacer aclaraciones sobre la noción de divisibilidad.

> ***Profesora:*** *ahora, 1 entre 0… ¿es una división exacta?*
>
> ***Orlando:*** *Miss, 1 no puede ser divisible entre 0*
>
> ***Profesora:*** *entonces, ¿puede ir 0?*
>
> ***Alumnos:*** *¡no!*
>
> ***Profesora:*** *muy bien, y… ¿faltará otro número aquí? [Señalando en el lugar de los divisores de: 1 es divisible entre __1__]*
>
> ***Alumnos:*** *¡no!*

Vemos que los alumnos, como Orlando, se han dado cuenta que 1 no es divisible entre 0. Asimismo los alumnos han notado que el único divisor de 1 es el mismo número.

A continuación la profesora trabaja con los alumnos las siguientes preguntas: *¿2 es divisible entre qué números?, ¿3 es divisible entre qué números?, ¿4 es divisible entre qué números?, ¿5 es divisible entre qué números?, ¿6 es divisible entre qué números?, ¿7 es divisible entre qué números?* y *¿8 es divisible entre qué números?* En todas estas preguntas los alumnos no muestran dificultad para dar sus respuestas y justificar por qué los números que consideran son divisores de dichos números.

A continuación mostramos las respuestas de los alumnos cuando se les pide los **divisores de 20**.

> ***[…]***
>
> ***Profesora:*** *Ahora díganme, <u>¿20 es divisible entre qué números?</u>*
>
> ***Thalía:*** *entre 20*
>
> ***Manuel:*** *entre 10*
>
> ***Nicolás:*** *entre 1*
>
> ***Mía:*** *entre 4*
>
> ***Jeffrie****: 5*
>
> ***Ericka:*** *entre 2*
>
> ***Yolanda:*** *entre 9*

Notemos que los alumnos han dado todos los divisores de 20, aunque la respuesta dada por Yolanda no sea correcta.

[La profesora escribe en la pizarra todas las cantidades que han sido dadas por los alumnos, para luego proceder a verificar con cada uno de estos números si estos son divisores de 20. A continuación presentaremos el trabajo de verificación con dos de estos números: 1 y 9]

Profesora: *a ver, ¿está bien entre 1?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *¿Cuánto le doy a cada persona?*

Alumnos: *20*

Profesora: *y me quedo con 0. ¿Qué tipo de división es?*

Alumno: *es exacta*

Profesora: *entonces, ¿20 es o no es divisible entre 1?*

Alumnos: *sí es divisible*

Observemos que los alumnos no muestran dificultad para justificar que 1 es divisor de 20. En este caso, notemos que los alumnos logran identificar correctamente que es una división de tipo exacta y, en efecto, que 20 es divisible entre 1. Por otro lado, notemos que los alumnos, de manera natural, relacionan este caso de divisibilidad con la noción de repartición equitativa y máxima.

[…]

Profesora: *ahora, ¿20 es divisible entre 9?*

Alumnos: *¡¡no!!*

Nicolás: *porque…, sobraría 2*

Jeffrie: *es inexacta*

Profesora: *¿Cuánto le doy a cada persona?*

Alumnos: *2*

Profesora: *y ¿cuánto sobra a cada persona?*

Alumnos: *2*

Profesora: *entonces, ¿20 es divisible entre 9?*

Alumnos: *¡¡no!!*

Vemos que los alumnos han justificado por qué 9 no es divisor de 20. Esto lo han hecho en términos de reparticiones (equitativas y máximas), asociando la divisibilidad con el valor del residuo obtenido.

Jhosetp: *he notado algo, que todos tienen al número 1*

Profesora: *a ver, su compañero ha notado que siempre aparece el 1.*

[La profesora escribe en la pizarra, Jhosetp: "en todos los ejemplos aparece el uno"]

Nicolás: *sí, porque a una persona le das toda la cantidad que está ahí. ¡Es obvio!*

[La profesora escribe en la pizarra, Nicolás: "porque si hay una persona, a esa persona hay que darle todo lo que tienes"]

Profesora: *muy bien Nicolás*

Vemos que lo notado por Jhosetp está haciendo referencia a que todos los números dados son divisibles entre 1; lo que consideramos una conjetura. Además, observemos que también Nicolás ha notado lo que menciona Jhosetp, pues inmediatamente presenta una justificación válida de por qué se da este patrón. Notemos que la justificación de Nicolás es correcta y está dado en términos de reparticiones equitativas y máximas.

Jhosetp: *¡¡Ah!! Pero también he notado una cosa más…*

Profesora: *a ver, su compañero ha notado algo más…*

Jhosetp: *todos los números pares 10, 20, 30, 40 ó 50, siempre están andando en 5 y en 10.*

Profesora: *pero tú dices TODOS los números pares. Por ejemplo, ¿el 4 es par?*

Alumnos: *sí,*

Profesora: *Jhosetp, piensa un poquito más lo que me acabas de decir y luego me dices…*

Creemos que el alumno trata de explicar que siempre al sumar de 5 en 5 y de 10 en 10 a partir de cero, obtendremos los números *10, 20, 30, 40, 50, etc*. Sin embargo, la proposición tal y como la presenta Jhosetp no es verdadera. Jhosetp está considerando a todos los números pares y al parecer el alumno está haciendo referencia solo a los números pares que tienen como última cifra a cero. Desde nuestro punto de vista, el alumno ha notado que los números *10, 20, 30, 40, 50, etc.* (los números que terminan en cero) son divisibles entre 5 y entre 10 (o son múltiplos de 5 y de 10, en otras palabras).

A continuación la profesora plantea una pregunta que tiene como propósito dar los múltiplos de 2.

Profesora: *a ver ahora, <u>¿qué números son divisibles entre 2?</u>*

Alumnos: *¡¡2!!*

Jhosetp: *1*

Profesora: *a ver, ¿será cierto? Miren bien lo que tienen que completar. Vuelvo a repetir, ¿qué números son divisibles entre 2?*

Felipe: *el 1 y 2 ¡nomás!*

Observemos que Jhosetp y Felipe no han entendido realmente lo que se solicita. Aparentemente siguen creyendo que el requerimiento para esta última pregunta sigue siendo el mismo que el de las preguntas anteriores ya que dan respuestas correctas para los divisores de 2.

Profesora: *ah… ¿quiere decir que 1 es divisible entre 2? Porque eso es lo que ustedes me están diciendo acá*

Jeffrie: *¡no!*

Yolanda: *sí, porque a cada uno le das 1*

Julio: *no se podría, porque el 2 es mayor que 1*

Mikeley: *no se puede*

Observemos que los alumnos, excepto Yolanda, descartan la posibilidad de que 1 sea divisible entre 2. Notemos que la respuesta de Yolanda está haciendo referencia a la división de 2 entre 1. La respuesta dada podría reflejar que la alumna no ha logrado interpretar la expresión "*1 es divisible entre 2"* en función de la noción de división, ya que no tiene en cuenta que, en este caso, debemos trabajar la división de 1 entre 2 y no 2 entre 1.

Con el fin de aclarar la duda de Yolanda, veamos que a continuación la profesora insiste con este problema.

Profesora: *a ver… dos alumnos que trabajen la división de 1 entre 2 en la pizarra*

[Dos alumnos salen a trabajar en la pizarra de manera independiente la división de 1 entre 2. Jeffrie coloca como cociente igual a 0 y residuo igual a 1, y Yolanda coloca como cociente igual a 1 y residuo igual a 2]

Profesora: *a ver, su compañera dice a cada uno le doy dos*

Jeffrie: *¡no Miss!, inexacta porque solo hay 1[objeto] entre 2 personas. No doy nada y me quedo con 1.*

Mikeley: *si tengo una regla no puedo repartirla entre 2 personas. No vale partido. No se puede*

Vemos que Yolanda tiene dificultades para presentar de manera correcta los valores del cociente y el residuo de la división de 1 entre 2; por el contrario, Jeffrie ha realizado correctamente la división. Además, observamos que Jeffrie y Mikeley explican en términos de reparticiones (equitativas y máximas) por qué son incorrectos los valores que muestra su compañera. Vemos también que las explicaciones en ambos casos son diferentes en "forma" ya que Mikeley agrega un contexto específico a ella.

Profesora: *¿1 es divisible entre 2?*

Alumnos: *¡¡no!!*

Profesora: *a ver, ahora, ¿2 es divisible entre 2?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *¿habrá otro número o ya no hay? ¿Qué otro número es divisible entre 2?*

Orlando: *Miss, ahí ya no se puede más*

Profesora: *¿no se puede más?*

Consideramos que Orlando es uno de los alumnos que cree que se sigue manteniendo el requerimiento anterior, en el cual se solicitaba los divisores de 2 y no los múltiplos de 2 (o números divisibles entre 2) como es el caso.

Jamil: *sí se puede*

Profesora: *¿Cuáles son esos números?*

Jamil: *4*

Nicolás: *6*

Orlando: *8*

Alumnos: *10, 12, 14, 20, 18, 16,…*

[La profesora va colocando en la pizarra las respuestas que presentan los alumnos]

Jamil: *Miss, tienen que ser todos los números pares*

Observemos que Jamil sí ha logrado captar lo que se solicitaba dado que da un número que también es divisible entre 2. La intervención de Jamil originó que sus demás compañeros mencionen otros números que son divisibles entre 2. Además, vemos que el alumno identifica que todos los números pares son divisibles entre 2, lo que es una afirmación correcta tomando en cuenta que esta no es la definición que ellos tenían de los números pares.

Profesora: *los números pares y, ¿por qué ustedes decían que solamente se puede con 2? Jamil dijo se puede con 4 y, luego comenzaron ustedes… A ver, ¿4 es divisible entre 2?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *¿6 es divisible entre 2?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *¿8 es divisible entre 2?*

Alumnos: *sí*

Profesora: *¿20 es divisible entre 2?*

Alumnos: *sí*

Notemos que ahora los estudiantes muestra seguridad en sus respuestas, pues la forma como la profesora ha planteado la pregunta ha permitido que los estudiantes se aseguren de que 4, 6, 8 y 20 son números divisibles entre 2.

Profesora: *¿cuántos números son divisibles entre 2?*

Alumnos: *¡¡muchos!!*

Jamil: *¡¡infinitos!!*

Observemos que los alumnos perciben que existe una cantidad infinita de números que son divisibles entre 2. Esto es reflejado en las expresiones que emplean ("*muchos*" y "*infinitos*").

Profesora: *y… ¿no estamos olvidando un número bonito?*

Nicolás: *30*

Chris: *100*

Profesora: *¿de 0?*

Jamil: *no Miss, el 0 no tiene par*

Profesora: *a ver, piensen en la respuesta de esta pregunta: ¿0 es divisible entre 2?*

Nicolás: *no Miss, porque no le darías nada a nadie*

Thalía: *no, porque sobraría 2*

Notemos que los estudiantes no tienen idea alguna de que 0 es divisible entre 2; más aún no consideran que 0 es par, como es el caso de Jamil. Este es un caso especial de divisibilidad que esperábamos que cause cierta controversia entre los alumnos ya que incluso se origina con profesores de matemática en formación o con profesores de ejercicio de nivel escolar. Por otro lado, Nicolás y Yolanda dan respuestas incorrectas a la pregunta planteada por la profesora. En el caso de Nicolás vemos que presenta correctamente el valor del cociente de la división de 0 entre 2, pero aparentemente está considerando que una condición para que un número sea divisible entre otro número es que el cociente debe ser diferente de cero (cuando dice: *"porque no le darías nada a nadie"*).

Profesora: *a ver, vamos hacer la división [la profesora en la pizarra escribe 0 entre 2] ¿Cuánto le doy a cada persona?*

Nicolás: *0*

Mikeley: *nada. Tengo 0 cosas, las personas no reciben nada*

Renzo: *0 cosas*

Profesora: *y ¿le queda?*

Alumnos: *0*

Orlando: *0*

Profesora: *y ¿es divisible o no es divisible?*

Orlando: *no es divisible. Si nos sobra 0, es divisible. Pero tiene que repartirle algo a alguien…*

Profesora: *pero, ¿qué tipo de división es?*

Orlando: *exacta*

Nicolás: *es exacta, sobra 0*

Profesora: *entonces, 0 es divisible entre 2.*

Notemos que los alumnos no muestran dificultad al resolver la división de 0 entre 2, ya que presentan correctamente el valor del cociente y del residuo. Es más, los estudiantes logran identificar que la división es de tipo exacta. Sin embargo, no logran convencerse de que 0 es divisible entre 2, como es el caso de Orlando. Vemos que Orlando sabe que el residuo de dicha división es igual a cero, y que un número es divisible entre otro número si sobran 0 objetos después de la repartición (es decir que el residuo es 0). No obstante parece ser que el alumno no puede contemplar el caso en que no necesariamente se tengan objetos a ser repartidos. Esto lo vemos reflejado cuando el alumno menciona: *"pero tiene que repartirle algo a alguien"*

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 13

- Hemos logrado que los alumnos refuercen la noción de divisibilidad. También hemos aclarado dudas relacionadas con algunos casos "especiales" (controversiales) de divisibilidad. Esto se ha desarrollado presentado diferentes casos en los cuales los requerimientos han ido variando.
- En el desarrollo de esta sesión algunos alumnos han logrado dar conjeturas en torno a la divisibilidad, aunque en algunos casos las afirmaciones que presentan no son precisas. Hemos observado que Jamil ha notado la regla para la divisibilidad por 2. Por su parte, Jhosetp ha notado que el número 1 es divisor de todos los números naturales; además pensamos que el alumno podría haber notado el criterio de divisibilidad por 5 y por 10, aunque en estos casos su idea no es precisa.
- Es importante señalar que la mayoría de los alumnos han participado activamente en esta sesión. Esto lo vemos reflejado cuando los alumnos presentan sus justificaciones para cada una de sus respuestas, así como también cuando han tenido la oportunidad de corregir las respuestas de sus compañeros y justificar por qué tales respuestas son incorrectas.

4.3.14 Análisis de la sesión 14

- **Actividades trabajadas:** en esta sesión hemos aplicado la Ficha 9: ***"¿Es divisible?"***, Ficha 10: "***Criterio de divisibilidad por 5"*** (ver Apéndice) y tres preguntas en relación a las propiedades de divisibilidad de números naturales.
- **Tipo de actividades:** individuales
- **Propósitos de la sesión:** indicados en la Tabla 13 (Ver p. 83)
- **Número de alumnos asistentes a la sesión:** hemos aplicado las fichas 9 y 10 a los 22 alumnos asistentes. Sin embargo, en la aplicación de las tres preguntas se ausentó 1 alumno; por ese motivo consideramos para el análisis de esas preguntas la respuesta de 21 alumnos.
- **Materiales:** a cada alumno se le entrega por escrito la Ficha 9, la Ficha 10, así como tres hojas en blanco. En cada una de estas 3 hojas en blanco desarrollarán cada una de las tres preguntas relacionadas con divisibilidad.

Análisis de la Ficha 9

- **Requerimientos:** esta ficha está compuesta por 4 ítems, cada uno de los cuales presenta los propósitos según se detallan a seguir:

Tabla 50. Estructura de la Ficha 9

ÍTEM	PROPÓSITOS
Ítem 1	**Primera parte:** Determinar los valores del cociente y del residuo, e identificar qué tipo de división es 18 entre 3. **Segunda parte:** Determinar y justificar el valor de verdad en ¿18 es divisible entre 3? ¿Por qué?
Ítem 2	**Primera parte:** Determinar los valores del cociente y del residuo, e identificar qué tipo de división es 34 entre 5. **Segunda parte:** Determinar y justificar el valor de verdad en ¿34 es divisible entre 5? ¿Por qué?
Ítem 3	**Primera parte:** Determinar los valores del cociente y del residuo, e identificar qué tipo de división es 48 entre 48 **Segunda parte:** Determinar y justificar el valor de verdad en ¿48 es divisible entre 48? ¿Por qué?
Ítem 4	**Primera parte:** Determinar los valores del cociente y del residuo, e identificar qué tipo de división es 0 entre 6 **Segunda parte:** Determinar y justificar el valor de verdad en ¿0 es divisible entre 6? ¿Por qué?

- **Organización del análisis de las respuestas de los alumnos para la Ficha 9:** para este análisis seguiremos el orden del siguiente esquema:

Análisis de las respuestas para los *ítems 1) y 2)*

- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 22 alumnos para la primera y segunda parte del ítem 1 *(Tabla 51)*
- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 22 alumnos para la primera y segunda parte del ítem 2 *(Tabla 52)*
- Análisis Cualitativo de las respuestas de 2 alumnos para los ítems 1 y 2

Análisis de las respuestas para los *ítems 3) y 4)*

- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 22 alumnos para la primera y segunda parte del ítem 3 *(Tabla 53)*
- Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 22 alumnos para la primera y segunda parte del ítem 4 *(Tabla 54)*
- Análisis Cualitativo de las respuestas de 2 alumnos para los ítems 3 y 4

A continuación mostramos el desarrollo de estos análisis.

Más específicamente, el análisis cuantitativo llevado a cabo para cada uno de los cuatro ítems que conforman la Ficha 9 toma en cuenta:

- Para la *primera parte* de cada uno de estos ítems, el conteo de los problemas correctos e incorrectos desarrollados por los estudiantes. Cada uno de estos ítems presenta 3 requerimientos: el valor del cociente, el valor del residuo y el tipo de división obtenida (exacta e inexacta). Consideramos para este análisis que un ***problema correcto*** es aquel cuya solución presenta de manera correcta cada uno de los 3 requerimientos planteados. Por otro lado, consideraremos que un ***problema incorrecto*** es aquel cuya solución presenta de manera incorrecta al menos uno de estos 3 requerimientos.
- Para la *segunda parte* de los ítems, el análisis de las respuestas de los estudiantes ya sea que hayan presentado problemas correctos o incorrectos en la primera parte de cada ítem. Consideramos que es importante este análisis, puesto que nos permite conocer el porcentaje de alumnos que han comprendido la noción de divisibilidad independientemente de si han logrado dar respuestas correctas para los tres requerimientos de la primera parte de cada uno de los ítems. Sin embargo, en el

comentario que hacemos para cada uno de las tablas que presentamos detallamos los diferentes tipos de respuestas que han sido presentados por los estudiantes para la segunda parte de los ítems.

<u>Análisis de las respuestas para el ítem 1)</u>

Análisis Cuantitativo

La siguiente tabla muestra el análisis para la primera y segunda parte del ítem 1

Tabla 51. Análisis cuantitativo para el ítem 1 de la Ficha 9

Primera parte: ***18 entre 3***		**Segunda parte:** ***¿18 es divisible entre 3? ¿Por qué?***						
Respuestas		**Respuesta correcta** (el alumno escribió: SÍ)				**Respuesta incorrecta** (el alumno escribió: NO)	**Respuesta en blanco**	**Total** **(N° de alumnos)**
		Justificaciones						
Problemas Correctos	Problemas incorrectos	No codificable	Se basa en la noción de división exacta	Emplea la expresión: “no sobra” o “no me quedaría” (o algo parecido)	Escribe 3x 6 = 18 o su equivalente con la adición.			
19	**3**	**1**	**2**	**14**	**3**	**1**	**1**	**22**

Ampliando la información de esta tabla, hemos observado que:

- *En la primera parte* del ítem 1, 19 de 22 estudiantes (el 86,36%) presenta problemas correctos cuando se les solicita resolver la división 18 entre 3 e identificar el tipo de división al que pertenece. Mientras que 13, 64% de los estudiantes han mostrado problemas incorrectos: 2 alumnos logran identificar el tipo de división, aunque el valor del cociente y/o del residuo son incorrectos. Mientras que 1 de estos 3 alumnos muestra de manera incorrecta el valor del cociente y del residuo, y también identifica el tipo de división incorrectamente.
- *En la segunda parte* del ítem 1), 20 de 22 estudiantes (casi el 91%) respondieron correctamente que 18 sí es divisible entre 3. Adicionalmente, 17 de estos 20 estudiantes presentaron problemas correctos en la primera parte de este ítem y justificaron adecuadamente su respuesta en la segunda parte. Mientras que 2 de estos 20 estudiantes presentaron problemas incorrectos en la primera parte del ítem, sin embargo justificaron bien su respuesta en la segunda parte. Por último 1 de estos 20

estudiantes presenta correctamente el problema en la primera parte y responde afirmativamente a la segunda parte, pero sus argumento es clasificado como *no codificable* ya que el alumno escribe *"si es 18 divisible entre 18"*, lo cual no tiene sentido tomando en cuenta lo que se le pregunta.

Observemos que de manera general tenemos un porcentaje importante de estudiantes que logra determinar y justificar que 18 es divisible entre 3. Esto nos lleva a pensar que los estudiantes han logrado conectar la noción de divisibilidad con la noción de división y esta a su vez con la noción de repartición equitativa y máxima. Específicamente el 70% de los estudiantes justificaron de manera explícita que 18 es divisible entre 3 basándose en esta última noción.

- Por otro lado, 1 de los 22 alumnos presenta el problema correcto en la primera parte de este ítem, pero no proporciona respuesta alguna a la segunda parte. Mientras que, 1 de los 22 estudiantes presenta el problema correcto para la primera parte, pero considera de manera equivocada que 18 no es divisible entre 3 (detallamos la respuesta de este alumno en el análisis cualitativo- ver Fig. 98).

<u>Análisis de las respuestas para el ítem 2</u>

Análisis Cuantitativo

A continuación mostramos el análisis para la primera y segunda parte del ítem 2.

Tabla 52. Análisis cuantitativo para el ítem 2 de la Ficha 9

Primera parte: ***34 entre 5***		**Segunda parte:** ***¿34 es divisible entre 5? ¿Por qué?***						
Respuestas		**Respuesta correcta** (el alumno escribió: NO)				**Respuesta incorrecta** (el alumno escribió: SÍ)	**Respuesta en blanco**	**Total** (N° de alumnos)
		Justificaciones						
Problemas Correctos	Problemas incorrectos	No presenta argumento	Se basa en la noción de la división inexacta	Emplea la expresión: "sobra" o "quedaría" (o algo parecido)	Se basa en que no existe un número multiplicado por 5 que sea igual a 34 (o algo parecido)			
9	**13**	**1**	**2**	**11**	**4**	**3**	**1**	**22**

Ampliando la información de esta tabla, hemos observado que:

- *En la primera parte* del ítem 2, 9 de los 22 estudiantes (casi el 41%) muestran problemas correctos para la división de 34 entre 5. Mientras que aproximadamente el 59% de los estudiantes presentan problemas incorrectos ya que han dado valores incorrectos para el cociente y/o el residuo de la división; sin embargo logran identificar de manera correcta el tipo de división en función del valor que han obtenido (correcto o no) para el residuo. Esto último nos da a entender que los alumnos toman en cuenta las condiciones que deben ser cumplidas para tener una división exacta o inexacta. No obstante mantiene errores al realizar sus divisiones.
- *En la segunda parte* del ítem 2, 18 de los 22 estudiantes (casi el 82%) han logrado determinar que 34 no es divisible entre 5. De este grupo de estudiantes tenemos que: 6 de ellos han mostrado problemas correctos para la primera parte de este ítem y han justificado correctamente que 34 no es divisible entre 5; 11 estudiantes han presentado problemas incorrectos para la primera parte de este ítem (pues han dado valores incorrectos para el residuo de la división, sin embargo logran identificar de manera correcta el tipo de división en función del valor que han obtenido). Independientemente del trabajo presentado en la primera parte, estos alumnos determinan y justifican que 34 no es divisible entre 5, claro que esto lo hacen en función de lo que han obtenido en la parte anterior; 1 estudiante responde correctamente tanto a la primera como a la segunda parte de este ítem, sin embargo no muestra argumento alguno para justificar su respuesta.

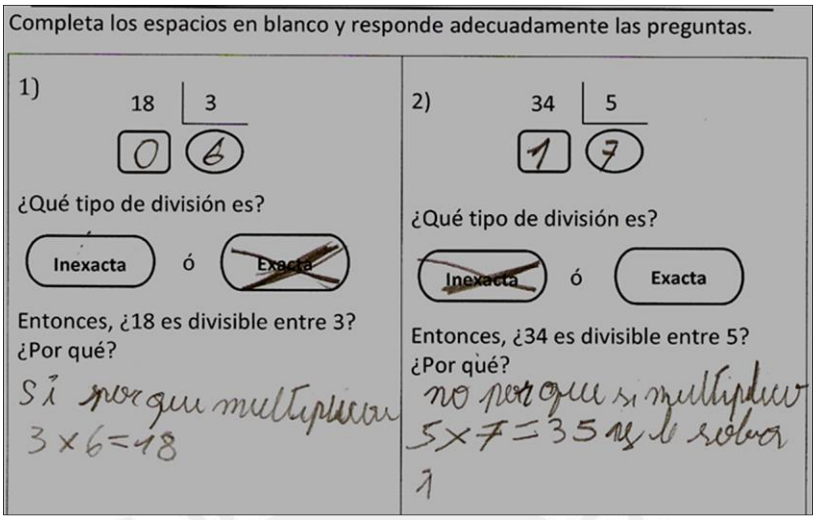
  Por otro lado, 3 de los 22 estudiantes consideran que la respuesta es "sí", 34 es divisible entre 5 (respuesta incorrecta). Concretamente, 1 de estos 3 estudiantes presenta el problema correcto para la primera parte de este ítem, pero responde incorrectamente a la segunda parte de este ítem. Este alumno es el mismo que presenta este tipo de respuesta para el ítem 1. Los otros 2 alumnos presentaron problemas incorrectos para la primera parte de este ítem, ya que la división dada es exacta.

  De manera general observamos que los estudiantes han logrado comprender la noción de la divisibilidad, aunque hayan dado problemas incorrectos en la primera parte de este ítem.

  Por otro lado, 1 alumno presenta para la primera parte del ítem 2 el problema correcto pero no da respuesta alguna a la segunda parte. Este alumno presenta este mismo tipo de respuesta en el ítem anterior.

Análisis cualitativo

Renzo:


Completa los espacios en blanco y responde adecuadamente las preguntas.

1) 18 | 3

0 6

¿Qué tipo de división es?

Inexacta ó ~~Exacta~~

Entonces, ¿18 es divisible entre 3? ¿Por qué?

Sí porque multiplicar 3×6=18

2) 34 | 5

1 7

¿Qué tipo de división es?

~~Inexacta~~ ó Exacta

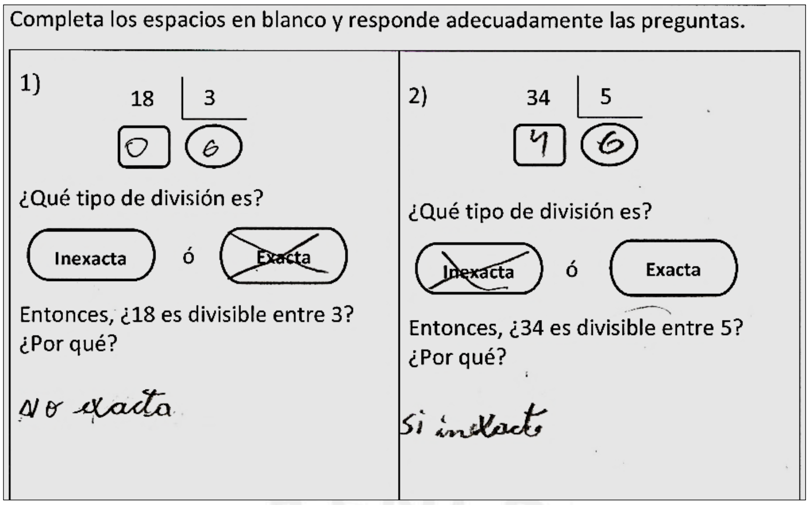
Entonces, ¿34 es divisible entre 5? ¿Por qué?

no porque si multiplicar 5×7=35 no le sobra 1

Figura 97. Respuestas de Renzo para los ítems 1 y 2

Las respuestas dadas por el alumno para el ítem 1 son correctas. Notemos que la justificación que presenta para responder a la segunda parte de este ítem está en relación a la multiplicación. Por otro lado, en la primera parte del ítem 2 Renzo ha desarrollado incorrectamente la división (problema incorrecto). Al parecer el alumno ha probado con números tales que multiplicados por 5 obtenga como resultado de un número cercano a 34. De alguna manera parece ser que el alumno elige el número 7 y no el 6 porque con 7 obtiene 35, mientras que con 6 obtiene 30. De estos dos valores vemos que 35 está más cercano a 34, que 30. Pero el alumno no ha previsto que en realidad no cuenta con más de 34 unidades. Sin embargo, logra determinar que 34 no es divisible entre 5, a pesar de que las respuestas de la primera parte no son correctas. Vemos que la justificación para la respuesta de la segunda parte del ítem 2 también está en función de la multiplicación.

Luis Miguel:



Completa los espacios en blanco y responde adecuadamente las preguntas.

1) 18 | 3

0 6

¿Qué tipo de división es?

Inexacta ó ~~Exacta~~

Entonces, ¿18 es divisible entre 3? ¿Por qué?

No exacta

2) 34 | 5

4 6

¿Qué tipo de división es?

~~Inexacta~~ ó Exacta

Entonces, ¿34 es divisible entre 5? ¿Por qué?

Si inexacto

Figura 98. Respuestas de Luis Miguel para los ítems 1 y 2

Vemos que el alumno no tiene dificultad para dar respuestas correctas para la primera parte de ambos ítems pues determina correctamente el valor del cociente y del residuo, así como también el tipo de división en ambos casos. Sin embargo, Luis Miguel no logra dar respuestas correctas para la segunda parte de estos ítems. Concretamente vemos que el alumno en la segunda parte del ítem 1 responde de manera equivocada “no”, (imaginemos que haciendo referencia a que 18 no es divisible entre 3). Notemos que de manera similar el alumno sigue cometiendo el mismo tipo de error para la segunda parte del ítem 2. De esto podemos pensar que el alumno podría estar invirtiendo (confundiendo) las condiciones para el caso de divisibilidad y el caso de no divisibilidad respectivamente.

Análisis de las respuestas para el ítem 3

Análisis Cuantitativo

La siguiente tabla muestra el análisis cuantitativo para la primera y segunda parte del ítem 3.

Tabla 53. Análisis cuantitativo para el ítem 3 de la Ficha 9

Primera parte: *48 entre 48*		**Segunda parte:** *¿48 es divisible entre 48? ¿Por qué?*						
Respuestas		**Respuesta correcta** (el alumno escribió: SÍ)					**Respuesta incorrecta** (el alumno escribió: NO)	**Total (N° de alumnos)**
		Justificaciones						
Problemas correctos	Problemas incorrectos	No argumenta	Se basa en la noción de la división exacta	Emplea la expresión: “no sobra” o “no me quedaría” (o algo parecido)	Emplea la expresión: “es el mismo número” y “son iguales”	Emplea la expresión: “Una cantidad de 1 en 1”		
17	**5**	**1**	**2**	**14**	**2**	**1**	**2**	**22**

Ampliando la información de esta tabla, hemos observado que:

- *En la primera parte* de este ítem, 17 de 22 estudiantes (un poco más del 77 %) no han mostrado dificultades para dar respuestas correctas para los tres requerimientos que se solicita en la división de 48 entre 48. Cabe mencionar que los otros 5 estudiantes logran identificar correctamente el tipo de división, en función del error cometido al determinar el cociente y/o el residuo. Esto nos indica que los alumnos, toman en cuenta las condiciones dadas para identificar el tipo de división; sin embargo algunos de ellos siguen cometiendo errores al desarrollar sus divisiones.
- *En la segunda parte* del ítem, 20 de 22 estudiantes (casi el 91%) logra determinar que 48 es divisible entre 48. Concretamente, de estos 20 estudiantes: 16 han mostrado problemas correctos para la primera parte de este ítem, y han logrado determinar y justificar de manera correcta que 48 es divisible entre 48; 3 alumnos presentan problemas incorrectos en la primera parte, pero logran determinar y justificar correctamente que 48 es divisible entre 48 (es importante aclarar que estos alumnos se confunden al dar el cociente, pero consideran el valor del residuo igual a cero y que la división es exacta); y por último 1 alumno

ha presentado el problema incorrecto para la primera parte de este ítem en este caso ha considerado el valor del residuo igual a cero y que la división es exacta, logrando de esta manera determinar de manera correcta que "*sí*", 48 es divisible entre 48 pero no muestra argumento alguno para su respuesta.

Por otro lado, los otros 2 estudiantes respondieron incorrectamente (escriben *"no"*) para la segunda parte de este ítem: 1 de ellos resuelve de manera incorrecta la división de 48 entre 48. El alumno considera que el valor del residuo es un número diferente a cero y, según lo obtenido logra determinar que 48 no es divisible entre 48. El otro alumno desarrolla correctamente la división pero presenta respuestas incorrectas para la segunda parte de este ítem. Este es el mismo alumno que presenta este tipo de respuesta para los ítems anteriores (1 y 2).

<u>**Análisis de las respuestas para el ítem 4**</u>

Análisis Cuantitativo

La siguiente tabla muestra el análisis cuantitativo para la primera y segunda parte del ítem 4.

Tabla 54. Análisis cuantitativo para el ítem 4 de la Ficha 9

Primera parte: ***0 entre 6***		**Segunda parte:** ***¿0 es divisible entre 6? ¿Por qué?***						
Respuesta		**Respuesta correcta** (el alumno escribió: SÍ)				**Respuesta incorrecta** (el alumno escribió: NO)	**Respuesta en blanco**	
		Justificaciones						
Problemas Correctos	Problemas incorrectos	No codificable	Se basa en la noción de la división exacta	Emplea la expresión: "no sobra" o "no me quedaría" (o algo parecido)	Su argumento se basa en que 6 x 0= 0 y sobra 0			**Total (N° de alumnos)**
10	**12**	**3**	**2**	**4**	**1**	**10**	**2**	**22**

Ampliando la información de esta tabla, hemos observado que:

- *En la primera parte* de este ítem, 10 estudiantes (un poco más del 45%) presentan problemas correctos. Mientras que los otros 12 estudiantes presentan problemas incorrectos. De este último grupo de estudiantes tenemos que: 6 de ellos muestran valores correctos para el cociente y el residuo de la división de 0 entre 6; sin embargo, no identifican de manera correcta el tipo de división; 5 alumnos presentan valores incorrectos para el cociente y el residuo de la división, pero logran identificar el tipo de división según el valor del residuo que han obtenido; y finalmente 1 alumno muestra valores incorrectos para el cociente, el residuo, así como identifica incorrectamente el tipo de división.
- *En la segunda parte*, 10 alumnos manifiestan que 0 es divisible entre 6 (un poco más del 45%); pero solo 7 de ellos muestran argumentos válidos. Específicamente, tenemos que de estos 7 estudiantes: 6 presentan problemas correctos para la primera parte de este ítem, y logran determinar y justificar correctamente por qué 0 es divisible entre 6; mientras que 1 de ellos ha desarrollado incorrectamente la división y a partir de esto considera que la división de 0 entre 6 es de tipo exacta, es por eso que determina y justifica de manera correcta que 0 es divisible entre 6.

- Por otro lado, 10 alumnos respondieron incorrectamente para la segunda parte (el alumno considera que 0 no es divisible entre 6). Cabe mencionar que 3 de estos 10 estudiantes presentan problemas correctos, y a pesar de ello determinan que 0 no es divisible entre 6. Mientras que otros 5 de estos 10 alumnos han mostrado respuestas correctas para el valor del cociente y del residuo, sin embargo no logran identificar que la división es de tipo exacta; es por eso que manifiestan que 0 no es divisible entre 6. Además los otros 2 alumnos presentan respuestas incorrectas para la primera parte de este ítem, en el que consideran al valor del residuo diferente de cero y que la división es inexacta y por eso que manifiestan que 0 no es divisible entre 6.

Análisis cualitativo

Nicolás:

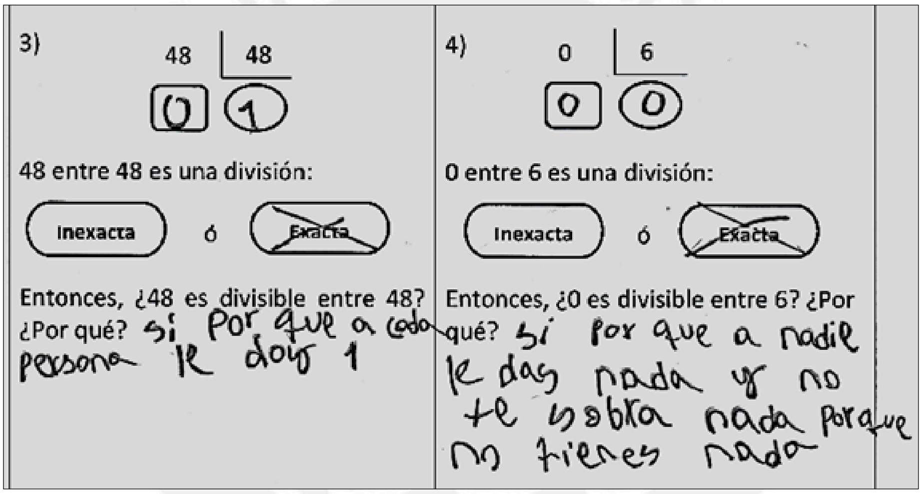
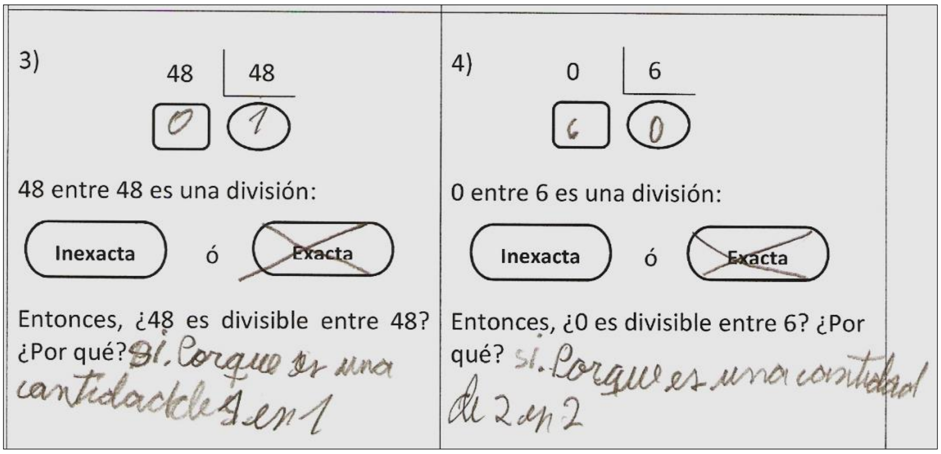


Figura 99. Respuestas de Nicolás para los ítems 3) y 4)

Observemos que el alumno responde correctamente a los dos ítems. Específicamente notemos que el argumento empleado en ambos casos está en basado en su noción de repartición equitativa y máxima.

Julio:


3) 48 | 48

0 1

48 entre 48 es una división:

Inexacta ó ~~Exacta~~

Entonces, ¿48 es divisible entre 48? ¿Por qué? Si. Porque es una cantidadde 1 en 1

4) 0 | 6

6 0

0 entre 6 es una división:

Inexacta ó ~~Exacta~~

Entonces, ¿0 es divisible entre 6? ¿Por qué? si. Porque es una cantidad de 2 en 2

Figura 100. Respuestas de Julio para los ítems 3 y 4

Vemos que el alumno desarrolla correctamente el ítem 3: el alumno determina correctamente los valores del cociente, el residuo, así como también identifica que 48 entre 48 es una división de tipo exacta. También responde correctamente que 48 sí es divisible entre 48 y el argumento que presenta para su respuesta está relacionado con su noción de repartición. Para el ítem 4 el alumno muestra dificultades al resolver la división, ya que considera como residuo a 6 y a pesar de ello marca que la división es de tipo exacta. Notemos que aunque el alumno responde correctamente que sí, 0 es divisible entre 6, el argumento que presenta es no codificable ya que no tiene sentido tomando en cuenta lo que se le pregunta.

<u>Análisis de la Ficha 10</u>

- **<u>Requerimientos</u>:** esta ficha está compuesta por 3 ítems, cada uno de los cuales presenta los siguientes propósitos:

Tabla 55. Estructura de la Ficha 10

ÍTEM	PROPÓSITOS
a)	• Dar 9 ejemplos de números que sean divisibles entre 5
b)	• Conjeturar cuántos ejemplos de números divisible entre 5 se pueden dar en total
c)	• Identificar las características principales de los números que son divisibles entre 5 (se pide identificar intuitivamente el criterio de divisibilidad por 5).

- **Organización del análisis de las respuestas de los alumnos para la Ficha 10:** seguiremos el orden del siguiente esquema:

- Análisis de las respuestas
  - Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 22 alumnos para los ítems a) y b) *(Tabla 56)*
  - Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 22 alumnos para el ítem c) *(Tabla 57)*
  - Análisis Cualitativo de las respuestas de 3 alumnos

<u>**Análisis de las respuestas**</u>

Análisis Cuantitativo

La siguiente tabla muestra el análisis cuantitativo para los ítems a) y b)

Tabla 56. Análisis cuantitativo para los ítems a) y b) de la Ficha 10

Ítem a)				**Ítem b)**			
9 ejemplos correctos	8 de los 9 ejemplos son correctos	6 de los 9 ejemplos son correctos	Menos de 6 de los 9 ejemplos son correctos	Finito o algo parecido	Infinito o algo parecido	No codificable	**Total (N° de alumnos)**
18	**1**	**1**	**2**	**7**	**14**	**1**	**22**

Tabla 57. Análisis cuantitativo para el ítem c) de la Ficha 10

Ítem c)				
No codificable	Escribe: *“Terminan en 0 o en 5”*	Escribe: *“Siempre debe tener un 5”* y da un ejemplo	Presenta otro tipo de respuesta	**Total (N° de alumnos)**
3	**1**	**1**	**17**	**22**

A partir de estas tablas, observamos que:

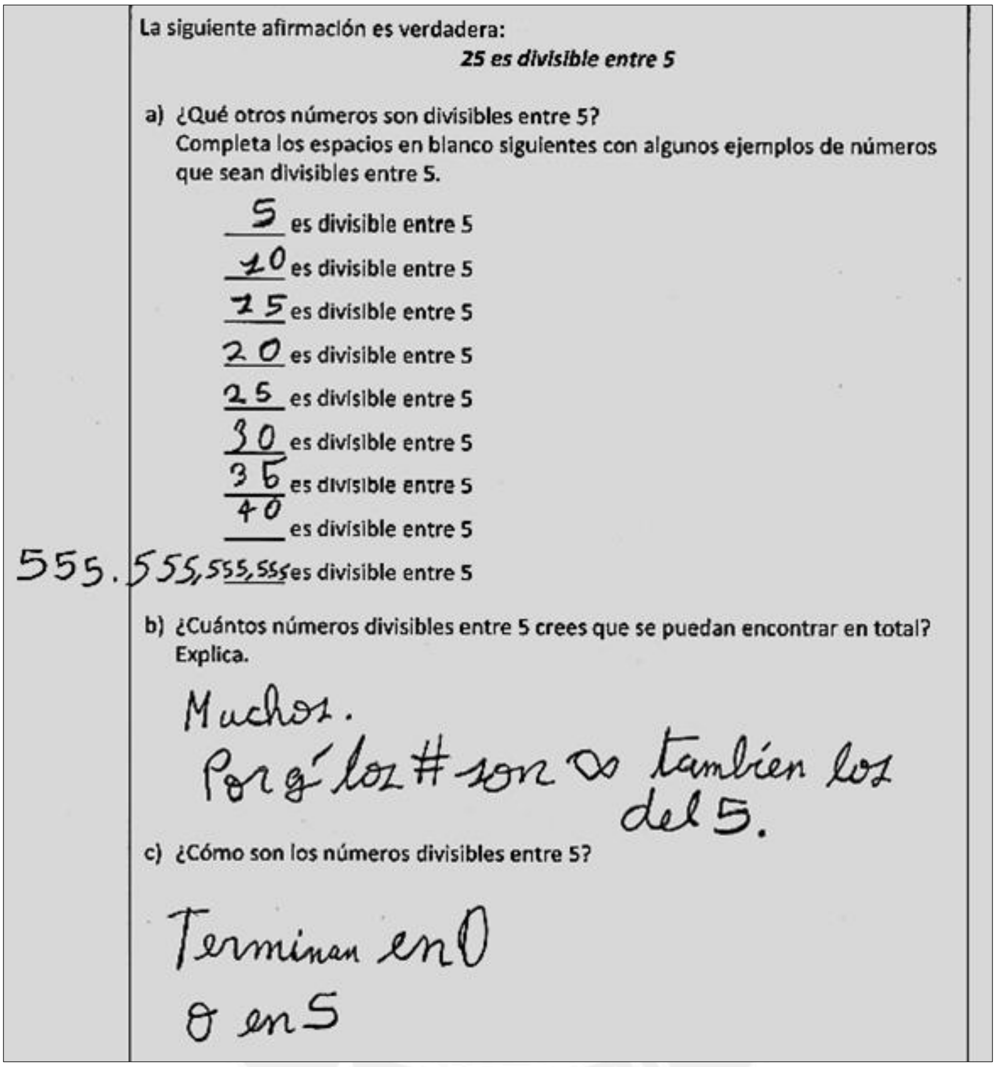
- *Para el ítem a),* 18 de los 22 alumnos (casi el 82 %) muestran ejemplos correctos (números que son divisible entre 5): 16 alumnos dieron ejemplos variados de números que terminan en 0 o en 5; mientras que 2 alumnos solo dieron ejemplos de números que terminaban en la cifra 5. Además, 2 de los 22 alumnos muestran dificultades para dar sus ejemplos, ya que han dado menos de 6 ejemplos correctos.

- *Para el ítem b)*, 14 de los 22 alumnos (casi el 64%) parecen percibir que existe una cantidad infinita de ejemplos que son divisibles entre 5. Los estudiantes manifiestan de diferentes maneras que hay infinitos ejemplos. Entre las expresiones que los estudiantes muestran tenemos: *un montón, se puede encontrar más, muchos, bastante continua no se acaba, hay muchos más, etc.* Mientras que las respuestas de 7 de los 22 alumnos están asociadas a que hay un número finito de ejemplos. Los alumnos emplean las siguientes expresiones: *yo creo que hay como unos 90…, hasta el 100…, muchos pero no tantos, son como 1 000 000 de números, etc.*
- *Para el ítem c)*, 2 de los 22 alumnos (un poco más del 9%) lograron dar parcial o totalmente el criterio de divisibilidad por 5. En este grupo de alumnos tenemos que 1 alumno logró reconocer que los números que terminan en las cifras 0 o 5 son números divisible entre 5. Mientras que 1 alumno logra dar parte del criterio de divisibilidad por 5; en este caso el alumno reconoce que son los números que terminan en 5.

Por otro lado, 17 de los 22 alumnos presentan expresiones diferentes a las mencionadas anteriormente. Entre las expresiones que ellos emplean tenemos: *van de 5 en 5, algunos son par y algunos son impar, todos los números de 5 en 5, número que se puede dividir con 5, etc.* Otros alumnos presentan ejemplos (números) que son divisibles entre 5.

Análisis cualitativo

Orlando:


La siguiente afirmación es verdadera:

25 es divisible entre 5

a) ¿Qué otros números son divisibles entre 5?
Completa los espacios en blanco siguientes con algunos ejemplos de números que sean divisibles entre 5.

5 es divisible entre 5

10 es divisible entre 5

15 es divisible entre 5

20 es divisible entre 5

25 es divisible entre 5

30 es divisible entre 5

35 es divisible entre 5

40 es divisible entre 5

555.555,555,555 es divisible entre 5

b) ¿Cuántos números divisibles entre 5 crees que se puedan encontrar en total? Explica.

Muchos.
Porq' los # son ∞ tambien los del 5.

c) ¿Cómo son los números divisibles entre 5?

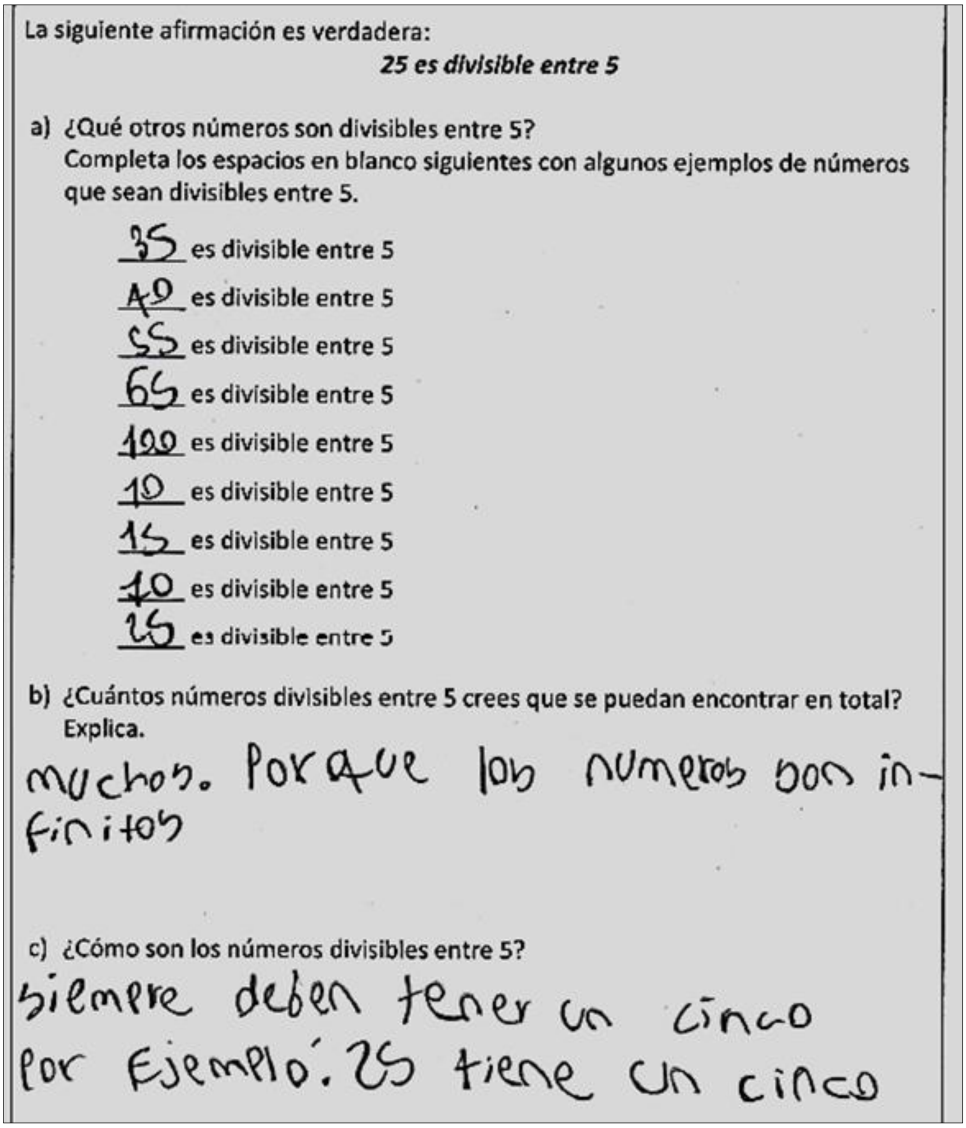
Terminan en 0
o en 5

Figura 101. Respuestas de Orlando para la Ficha 10

Vemos que los 9 ejemplos dados por el alumno en el ítem a) son correctos. Observemos que los ejemplos dados por el alumno son los 8 primeros números divisibles entre 5 positivos, y su último ejemplo es un número de 12 dígitos formado solamente por cincos (555 555 555 555). Aparentemente Orlando ha notado que todos los números que tengan como última cifra a 0 o a 5 son divisibles entre 5 y por esta razón da un número “grande” que aplique a una de estas “categorías”. En el ítem b), notemos que el alumno percibe que existe una cantidad infinita de ejemplos y que incluso emplea el símbolo “∞”, que como sabemos representa el infinito y que según lo consultado con la profesora del curso ya había sido presentado a los estudiantes. Por último, en el ítem c) el alumno logra reconocer que los números que terminan en 0 o en 5 son divisibles entre 5.

De aquí que, aunque el alumno no tenga mayores conocimientos de divisibilidad, sino los mínimos dados a partir de reparticiones, observamos que Orlando ha logrado identificar el criterio de divisibilidad.

Nicolás:


La siguiente afirmación es verdadera:

25 es divisible entre 5

a) ¿Qué otros números son divisibles entre 5?
Completa los espacios en blanco siguientes con algunos ejemplos de números que sean divisibles entre 5.

35 es divisible entre 5
40 es divisible entre 5
55 es divisible entre 5
65 es divisible entre 5
100 es divisible entre 5
10 es divisible entre 5
15 es divisible entre 5
10 es divisible entre 5
25 es divisible entre 5

b) ¿Cuántos números divisibles entre 5 crees que se puedan encontrar en total? Explica.

muchos. Porque los numeros son in-finitos

c) ¿Cómo son los números divisibles entre 5?

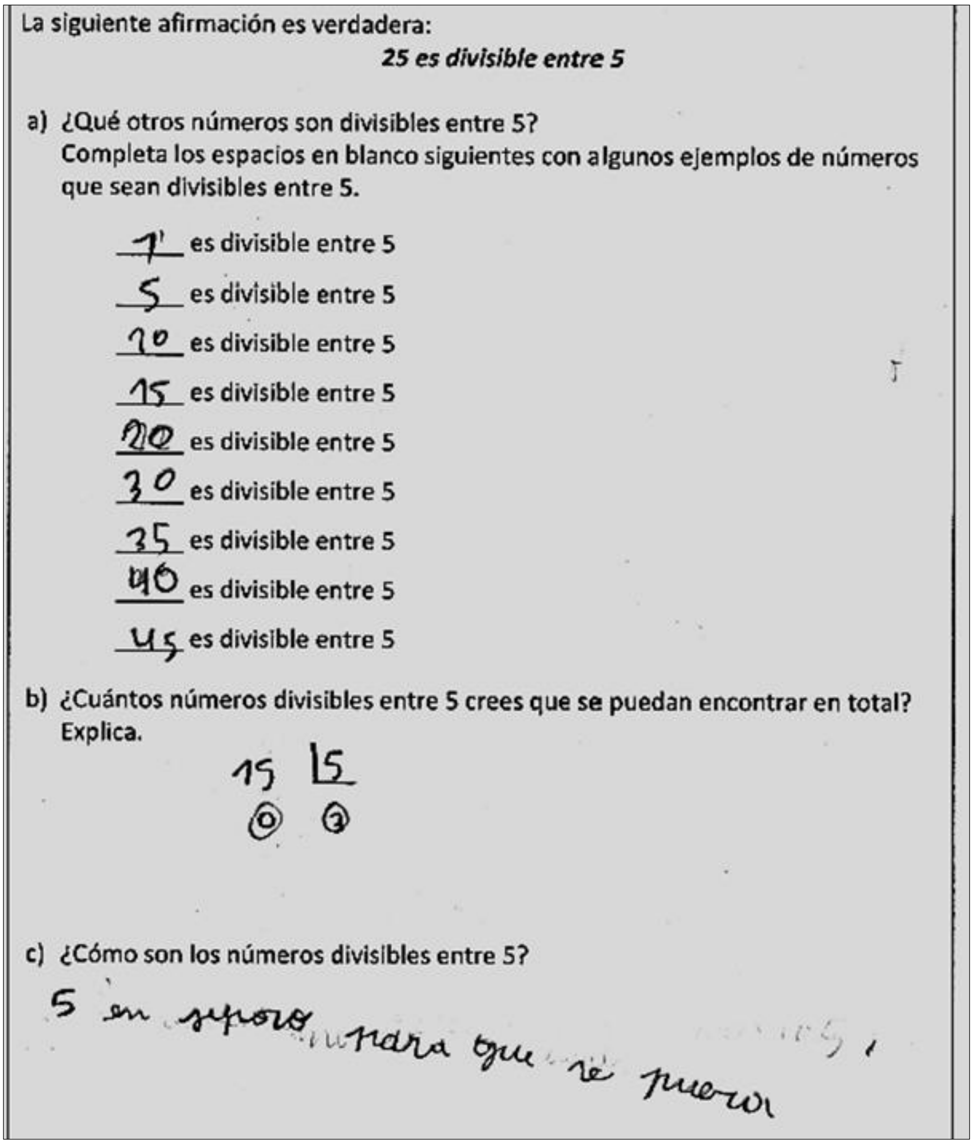
siempre deben tener un cinco por Ejemplo. 25 tiene un cinco

Figura 102. Respuestas de Nicolás para la Ficha 10

Notemos que en el ítem a), los ejemplos dados por el alumno son correctos. En sus ejemplos, Nicolás emplea números de dos o tres cifras que tienen como última cifra a 0 o 5. Además, vemos que en el ítem b) Nicolás logra percibir que hay infinitos ejemplos para este caso ya que como él dice: *“Muchos. Porque los números son infinitos”*.

Asimismo, en el ítem c), observemos que el alumno considera que un número es divisible entre 5 siempre que tenga un cinco. Aunque sabemos que lo escrito por el estudiante, tal y como figura en su trabajo no es totalmente cierto (porque podemos pensar en el caso del número 51 por ejemplo), notamos que luego presenta un ejemplo que nos podría llevar a pensar que el alumno está pensando en los números que terminan en 5 ya que escribe 25.

Luis Miguel:



La siguiente afirmación es verdadera:

25 es divisible entre 5

a) ¿Qué otros números son divisibles entre 5?
Completa los espacios en blanco siguientes con algunos ejemplos de números que sean divisibles entre 5.

1' es divisible entre 5
5 es divisible entre 5
10 es divisible entre 5
15 es divisible entre 5
20 es divisible entre 5
30 es divisible entre 5
35 es divisible entre 5
40 es divisible entre 5
45 es divisible entre 5

b) ¿Cuántos números divisibles entre 5 crees que se puedan encontrar en total? Explica.

15 15
0 3

c) ¿Cómo son los números divisibles entre 5?

5 en seporo nadra que se pueron

Figura 103. Respuestas de Luis Miguel para la Ficha 10

Notemos que 8 de los 9 ejemplos dados por el alumno son correctos (solo el primer ejemplo fue incorrecto). El alumno emplea números de una o dos cifras que terminan en 0 o 5. En el ítem b), vemos que Luis Miguel responde con el ejemplo de una división. Esto nos lleva a pensar que el alumno no ha entendido la pregunta planteada y que por escribir "algo" hace una división. Por esta razón consideramos su respuesta como no codificable. Por otro lado, en el ítem c) de esta ficha se considera la respuesta como no codificable porque no se entiende lo escrito por el alumno.

<u>Análisis de las respuestas de los alumnos a las tres preguntas planteadas en relación a propiedades de divisibilidad</u>

A continuación presentamos el análisis cuantitativo de las respuestas de los 21 alumnos para cada una de las preguntas.

- **Requerimientos:**

Determinar y justificar el valor de verdad en cada uno de los siguientes casos:

- ¿Todo número es divisible entre él mismo? ¿Por qué?
- ¿Todo número es divisible entre 1? ¿Por qué?
- ¿0 es divisible entre qué números? ¿Por qué?

- **Organización del análisis de las respuestas de los alumnos para las tres preguntas:** seguiremos el orden del siguiente esquema:

Análisis de las respuestas para la *primera pregunta*	Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 21 alumnos a la primera pregunta *(Tabla 58)*.
	Análisis Cualitativo de las respuestas de 3 alumnos a la primera pregunta.
Análisis de las respuestas para la *segunda pregunta*	Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 21 alumnos a la segunda pregunta *(Tabla 59)*.
	Análisis Cualitativo de las respuestas de 3 alumnos a la segunda pregunta.
Análisis de las respuestas para la *tercera pregunta*	Análisis Cuantitativo de las respuestas de los 21 alumnos a la tercera pregunta *(Tabla 60)*.
	Análisis Cualitativo de las respuestas de 3 alumnos a la tercera pregunta.

A continuación mostramos el desarrollo de este análisis

<u>Análisis de las respuestas para la primera pregunta</u>

Análisis Cuantitativo

La siguiente tabla muestra el análisis cuantitativo para la primera pregunta.

Tabla 58. Análisis cuantitativo para la primera pregunta

<table>
<tr><th colspan="7">¿Todo número es divisible entre él mismo?</th><th></th></tr>
<tr><th>Respuesta Incompleta</th><th colspan="4">Respuesta Correcta
(el alumno escribió SÍ)</th><th colspan="2">Respuesta Incorrecta
(el alumno escribió NO)</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="3">No codificable</td><td rowspan="3">Argumento no codificable</td><th colspan="3">Justificaciones</th><td rowspan="3">No codificable</td><td rowspan="3">Presenta un ejemplo (en que el dividendo y el divisor son diferentes)</td><th rowspan="3">Total (N° de alumnos)</th></tr>
<tr><td>Da ejemplos (en que el dividendo y el divisor son iguales)</td><td>Da ejemplos e intenta dar un argumento general</td><td>Da un argumento general</td></tr>
<tr><th>Nivel 1</th><th>Nivel 2</th><th>Nivel 3</th></tr>
<tr><th>1</th><th>3</th><th>5</th><th>8</th><th>1</th><th>2</th><th>1</th><th>21</th></tr>
</table>

Ampliando la información de esta tabla, hemos observado que:

- Notemos que 17 de los 21 alumnos (casi el 81%) respondieron correctamente a esta primera pregunta.
- 3 de los 21 alumnos han dado respuestas incorrectas a la pregunta que se les plantea pues presenta como respuesta a un “no”.
- 1 de los 21 alumnos no responde sí y tampoco no (respuesta incompleta), pero sí muestra un argumento que en este caso es considerada como no codificable porque no se entiende lo escrito por el alumno.
- Por otro lado, teniendo en cuenta los niveles de producción de demostración matemática detallados en el capítulo 2. Observamos que 14 de las 21 respuestas dadas por los estudiantes (más del 66%) son categorizadas en alguno de los niveles 1, 2, o 3, las que clasifican como justificaciones según nuestro marco teórico. Cabe resaltar, que 1 de estos 14 alumnos presenta un argumento que clasifica como una demostración matemática (nivel 3).

Análisis cualitativo

Orlando:

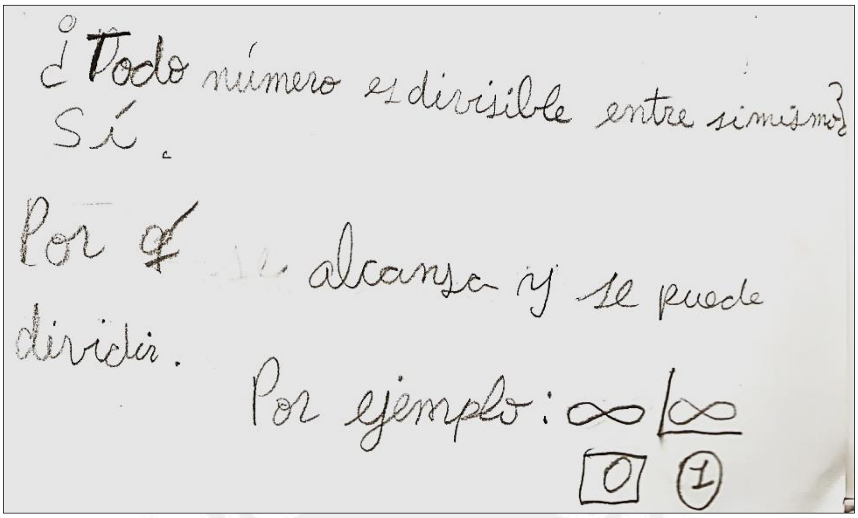
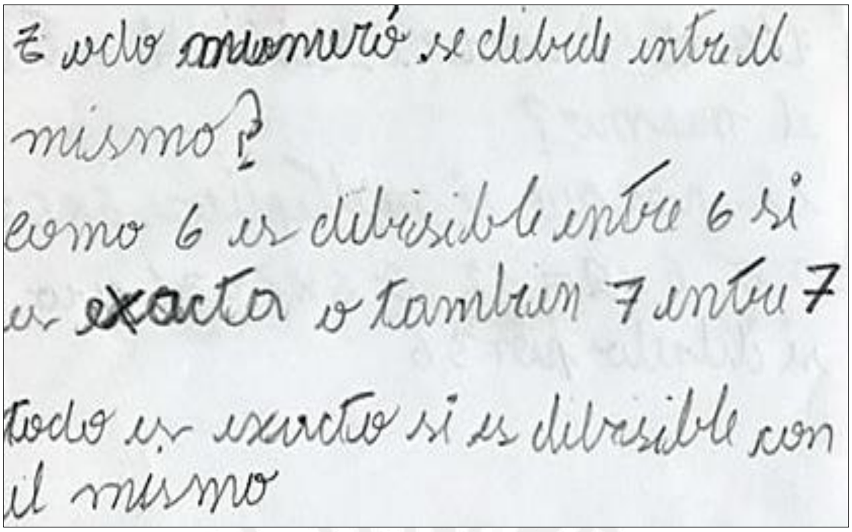


Figura 104. Respuesta de Orlando a la primera pregunta planteada.

Observemos que la respuesta del alumno es correcta. Como parte de su argumento Orlando escribe: *"porque alcanza y se puede dividir"*, lo que hace referencia a la noción de repartición trabajada. Sin embargo si tomamos en cuenta solo esto, vemos que su argumento no sería suficiente para justificar su respuesta así que analizando lo que el alumno escribe a continuación, nos damos cuenta de que el alumno presenta un "ejemplo" de división. Además, para dar su "ejemplo" el alumno emplea el símbolo ∞. Es evidente que la división hecha por el alumno, tal como la presenta, no sería rigurosamente correcta. Sin embargo, en este contexto en el que se trabaja con estudiantes de 7 u 8 años, no podemos exigir un alto nivel de rigor matemático ya que en particular este símbolo para ellos no tiene otro significado sino básicamente: "muchos". Tomando en cuenta esto, creemos que el alumno empleó este símbolo para representar cualquier número natural, (en el mejor de los casos consideramos que debía ser un número diferente de cero). De aquí que con su división Orlando estaría intentando comunicar que un número cualquiera dividido entre sí mismo, da como cociente 1 y como residuo 0. En este sentido, basándonos en la respuesta completa del alumno vemos que el alumno empezó pensando en reparticiones, lo que ha "traducido" luego como una división general. Desde nuestro punto de vista, el argumento del alumno clasifica como una justificación general. Más aún, la respuesta de Orlando podría ser categorizada como una justificación en el nivel 3 de los niveles de producción de demostración matemática.

Renzo:


¿ todo numeró se dibide entre el mismo?

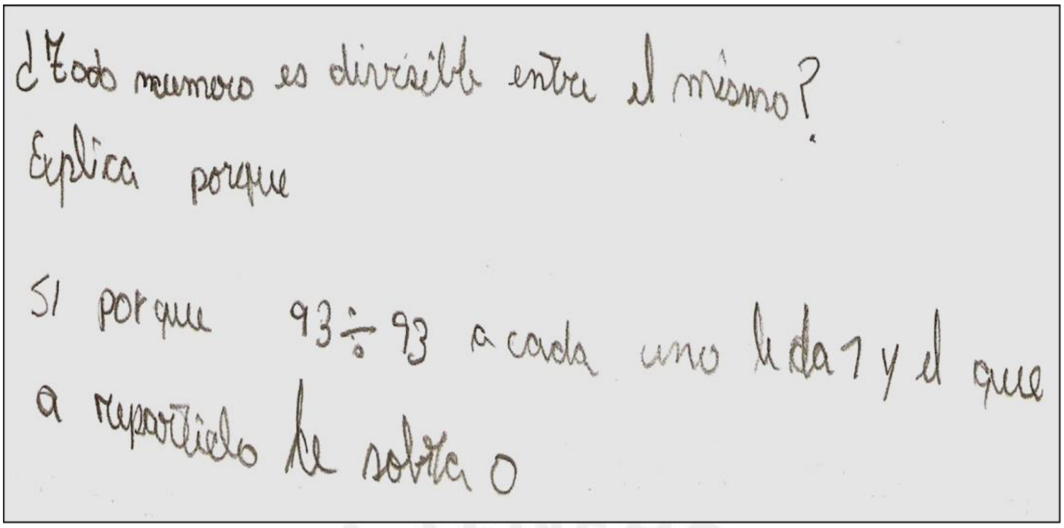
como 6 es dibisible entre 6 si es exacta o tambien 7 entre 7

todo es exacto si es dibisible con el mismo

Figura 105. Respuesta de Renzo a la primera pregunta planteada.

Notamos que el alumno no escribe un sí como respuesta, aunque podemos deducir que este es el caso. Observamos que el argumento dado por el alumno está basado inicialmente en dos ejemplos concretos: 6 es divisible entre 6 y 7 es divisible entre 7. Vemos que su explicación está dada en términos de una división exacta, lo que queda claro cuando escribe la expresión: *"...si es exacta…"*. No obstante, el alumno no solo se queda dando ejemplos sino también intenta dar un argumento general, cuando escribe en las dos últimas líneas: *"todo es exacto si es divisible con él mismo".* Este argumento estaría ubicado en el nivel 2 de producción de demostración matemática. Es importante mencionar que así como en este caso, existen otros casos en que los alumnos no son lo suficientemente claros al dar sus argumentos. Esto lo vemos reflejado específicamente cuando los estudiantes escriben un argumento que puede ser considerado a primera vista como incorrecto, lo cual se debe principalmente a su poco conocimiento del uso de las reglas de ortografía y de los signos de puntuación (por su edad). Por ejemplo, cuando Renzo escribe: *"...si es exacta…"*, y debió escribir: *"...sí, es exacta…"*; o también cuando escribe: *"todo es exacto si es divisible con él mismo"*, y debió escribir: *"Todo es exacto. Sí, es divisible con él mismo".*

Jhosetp:


¿Todo numero es divisible entre el mismo?
Explica porque

Si porque 93÷93 a cada uno le da 1 y el que a repartido le sobra 0

Figura 106. Respuesta de Jhosetp a la primera pregunta planteada.

Vemos que Jhosetp responde con un sí a la interrogante, siendo esta una respuesta correcta. Además, notemos que el argumento dado por el alumno se basa en un ejemplo concreto, y que la división que considera la desarrolla en términos de su noción de repartición equitativa y máxima. Hemos considerado el argumento dado por el alumno en el nivel 1 de los niveles de producción de demostración matemática puesto que su justificación ha sido basada en un ejemplo.

Análisis de las respuestas para la segunda pregunta

Análisis Cuantitativo

La siguiente tabla muestra el análisis cuantitativo para la segunda pregunta

Tabla 59. Análisis cuantitativo para la segunda pregunta

<table>
<tr><th colspan="5">¿Todo número es divisible entre 1?</th><th></th></tr>
<tr><th colspan="3">Respuesta Correcta
(el alumno escribió SÍ)</th><th colspan="2">Respuesta Incorrecta
(el alumno escribió NO)</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="3">Argumento no codificable</td><th colspan="2">Justificaciones</th><td rowspan="3">No codificable</td><td rowspan="3">Escribió: “Solo cumple con el número 1”</td><td></td></tr>
<tr><td>Presenta ejemplos</td><td>Presenta un argumento general</td><td></td></tr>
<tr><th>Nivel 1</th><th>Nivel 3</th><th>Total (N° de alumnos)</th></tr>
<tr><th>7</th><th>10</th><th>1</th><th>2</th><th>1</th><th>21</th></tr>
</table>

A partir de esta tabla, observamos que:

- 18 de los 21 alumnos (casi el 86%) respondieron correctamente. De ellos solo 11 alumnos presenta argumentos válidos.
- 3 de los 21 alumnos muestran respuestas incorrectas de las cuales 2 de ellas dieron argumentos que han sido considerados como no codificables ya que no tienen sentido.
- Por otro lado, teniendo en cuenta los niveles de producción de demostración matemática, 11 de las 21 respuestas analizadas para esta pregunta (un poco más del 52%) han sido clasificado como justificaciones, ya que sus argumentos están categorizados en alguno de los niveles 1 o 3. Observemos que solo 1 de estos 11 alumnos presentan argumentos categorizados como demostraciones matemáticas (nivel 3) ya que son justificaciones generales.

Análisis cualitativo

Orlando:

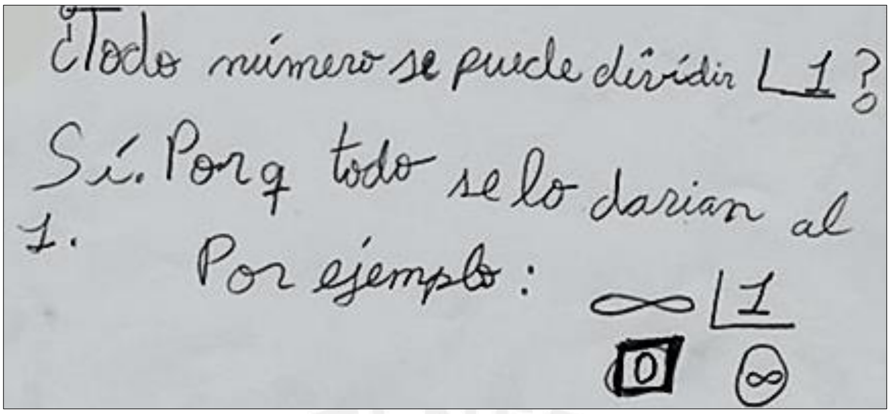


Figura 107. Respuesta de Orlando a la segunda pregunta.

La respuesta dada por el alumno es correcta, así como su argumento. Cuando Orlando escribe: *"Porque todo se lo darían al 1"*, observamos que su argumento está basado en la noción de repartición equitativa y máxima; específicamente el alumno hace referencia a la repartición equitativa y máxima de una cantidad arbitraria de objetos entre una sola persona, a la que entregaría todos estos objetos y en la que no sobren objetos después de la repartición. Asimismo notemos que el estudiante presenta un "ejemplo" empleando la notación de la división trabajada en clase, en el que creemos que (como en el caso de la pregunta anterior) usa el símbolo infinito "∞" para representar una cantidad cualquiera que al ser dividida entre uno, se tiene como cociente el mismo "número" ∞, y como residuo cero. Notemos que el alumno pone énfasis en el valor del residuo cero, al colocarlo en un recuadro el cual remarca bien, ya que depende básicamente del valor del residuo para hablar de divisibilidad. De esta manera podemos concluir diciendo que Orlando logra producir exitosamente una justificación general a la pregunta planteada. Esta justificación por lo tanto estaría ubicada en el nivel 3 de los niveles de producción de demostración matemática.

Ana Lucía:

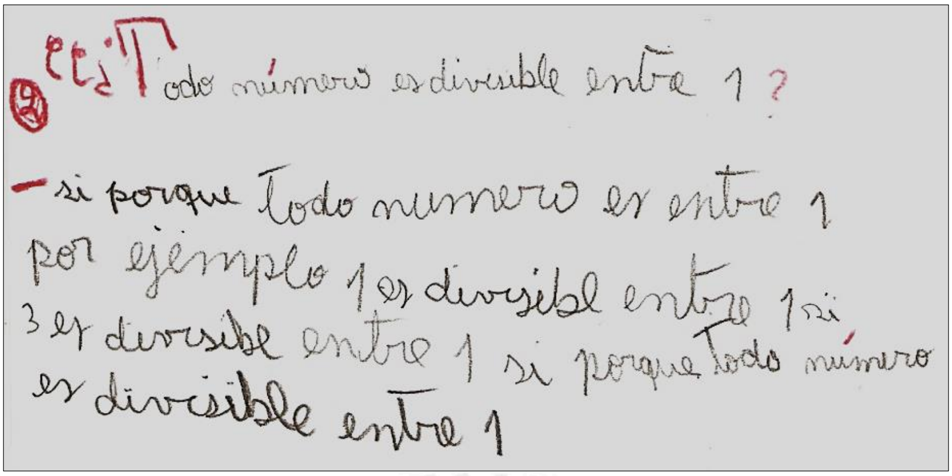

② ¿Todo número es divisible entre 1?
-si porque Todo numero es entre 1 por ejemplo 1 es divisibl entre 1 si 3 es divisibe entre 1 si porque Todo número es divisible entre 1

Figura 108. Respuesta de Ana Lucía a la segunda pregunta.

Observemos que Ana Lucía escribe un sí como respuesta. Vemos que el argumento dado por la alumna está basado en dos ejemplos concretos: 1 es divisible entre 1 y 3 es divisible entre 1, en el que muestra seguridad que estos ejemplos son verdaderos ya que después de cada ejemplo escribe "…si", creemos que está haciendo referencia a un "sí" (afirmativo). Al parecer la alumna no ha tenido la necesidad de presentar la justificación para cada uno de los ejemplos, dado que en la pregunta anterior (¿Todo número es divisible entre él mismo?) enfatiza el valor del residuo igual a cero, el cual sabemos que es una condición básica de la divisibilidad, esto lo hace en términos de repartición equitativa y máxima. Es por eso, que este argumento, estaría ubicada en el nivel 1 de producción de demostración matemática.

Felipe:

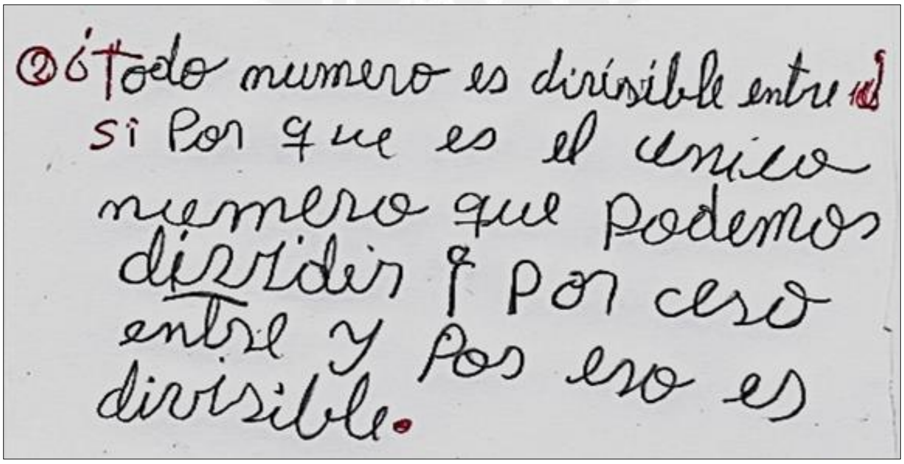

② ¿Todo numero es divisible entre 1?
si Por que es el unico numero que podemos dividir y por cero entre y Por eso es divisible.

Figura 109. Respuesta de Felipe a la segunda pregunta.

Notemos que aunque la respuesta dada por el alumno (sí) es correcta, su argumento estaría considerado como no codificable ya que lo escrito por el alumno no es lo suficientemente claro como para categorizarlo en alguno de los niveles de demostración matemática.

Análisis de las respuestas para la tercera pregunta

Análisis Cuantitativo

La siguiente tabla muestra el análisis cuantitativo para la tercera pregunta

Tabla 60. Análisis cuantitativo para la tercera pregunta

¿0 es divisible entre qué números?					
No codificable	**Respuesta Correcta** el alumno escribió: entre todos los números positivos (o algo parecido)		**Respuesta Incorrecta** el alumno escribió:		
	No codificable	No justifica	Entre ningún número (o algo parecido)	Entre un número: cero	**Total (N° de alumnos)**
1	**3**	**2**	**12**	**3**	**21**

Ampliando la información de esta tabla, hemos observado que:

Notemos que solo 5 de los 21 alumnos (casi el 24%) respondieron correctamente, pero ninguno de ellos presenta argumentos válidos. Asimismo observemos que hay un número considerable de respuestas incorrectas (un poco más del 71%) entre las que se manifiesta que 0 es divisible entre ningún número (12 alumnos), o que solo es divisible entre cero (3 alumnos). Hemos notado que la mayoría de los 12 alumnos tiene la idea de que un número es divisible entre otro si el primero (el dividendo) es mayor o igual que el segundo (el divisor).y por esta razón descartan este caso de divisibilidad.

Análisis cualitativo

Mikeley:

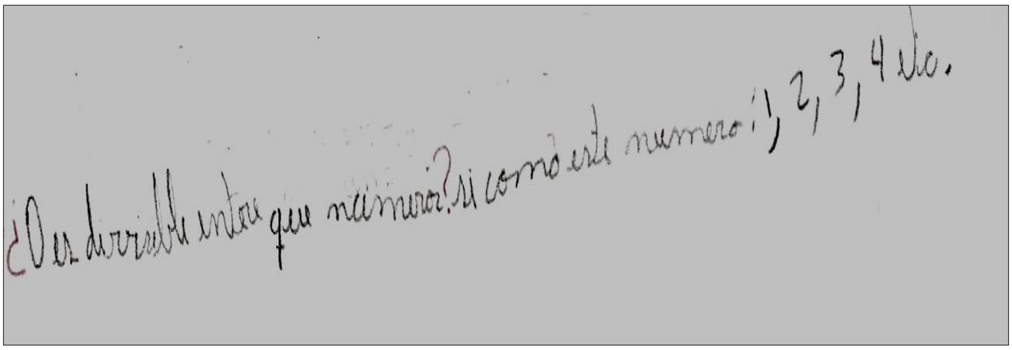
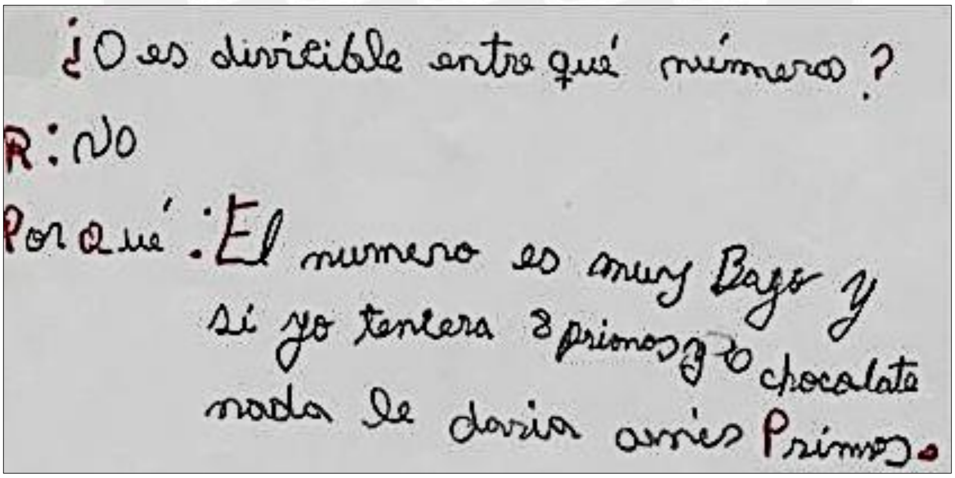

¿0 es divisible entre que número? si como este numero: 1, 2, 3, 4 etc.

Figura 110. Respuesta de Mikeley a la tercera pregunta.

Observemos que el caso de Mikeley es uno de los 5 casos de alumnos que respondieron correctamente a la pregunta planteada. Notemos que la alumna indica los números solicitados, y que incluso empieza a darlos en orden, descartando de alguna manera a cero. Además Mikeley escribe "etc." para indicar que los 4 números dados nos son los únicos que se pueden dar en este caso. Sin embargo no justifica por qué 0 es divisible entre los números que ella ha dado.

Yolanda:


¿0 es divicible entre qué número?

R: No

Porqué: El numero es muy Bajo y si yo tenera 8 primos y 0 chocolate nada le daria a mis Primos.

Figura 111. Respuesta de Yolanda a la tercera pregunta.

Observemos que Yolanda es una de los 12 alumnos que hace referencia (cuando escribe "no") a que 0 es divisible entre ningún número porque "*el número es muy bajo",* refiriéndose al cero. De lo anterior, creemos que la alumna estaría relacionando este caso particular con los casos en que el dividendo (no necesariamente es igual a cero) es menor que el divisor; por ejemplo: 2 entre 4 (2 no es divisible entre 4), 5 entre 9 (5 no es divisible entre 9), etc. Sin embargo no han contemplado el caso especial en que 0 sí es divisible entre cualquier número natural positivo.

Notemos que la alumna emplea un ejemplo concreto de repartición para su justificación: cero chocolates entre ocho primos la cual es como sabemos una repartición de tipo exacta (una división de tipo exacta). Curiosamente, además, la alumna realiza correctamente esta repartición (*"…nada le daría a mis primos"*). Sin embargo, parece ser que la alumna no es totalmente consciente de su argumento. Esto podría reflejar que la alumna, al menos para este caso, no ha logrado hacer la conexión entre su ejemplo de división exacta y la noción de divisibilidad, y por tanto con la respuesta que da (no).

COMENTARIOS FINALES DE LA SESIÓN 14

- En la Ficha 9, en cuanto a la primera parte de cada uno de los ítems, nos ha permitido conocer que más del 77% de los 22 estudiantes no muestran dificultades al resolver las divisiones 18 entre 3 y 48 entre 48 e identificar correctamente el tipo de división. Mientras que menos del 50% de los 22 estudiantes ha resuelto e identificado correctamente el tipo de división para 34 entre 5 y 0 entre 6. De aquí que hemos notado que la mayoría de los estudiantes muestran mayores dificultades al trabajar divisiones de tipo inexacta o al trabajar con casos especiales de división (0 entre 6), en comparación con las divisiones de tipo exacta.

  En cuanto a la segunda parte de cada uno de los ítems, de manera general hemos observado que más del 80% de los estudiantes logran determinar y justificar cuando se les presentó las siguientes interrogantes: ¿18 es divisible entre 3?, ¿34 es divisible entre 5? y ¿48 es divisible entre 48? Sin embargo, menos del 46% de los estudiantes ha logrado determinar y justificar por qué 0 es divisible entre 6.
- En la Ficha 10, hemos observado que más del 80% de los estudiantes logran dar los 9 números solicitados que son divisibles entre 5. Asimismo, tenemos que más del 63 % de los estudiantes ha logrado conjeturar que existen infinitos ejemplos de números que son divisibles entre 5. Sin embargo, solo casi el 9% de los estudiantes ha logrado reconocer parcial o totalmente las características que tienen los números que son divisibles entre 5 (el criterio de divisibilidad por 5). Creemos que la mayoría de los alumnos no logra reconocer este criterio de divisibilidad debido a que la pregunta tal y como se presenta no ha sido planteada adecuadamente. Esta observación será tomada en cuenta en el planteamiento de la nueva propuesta.
- Por otro lado, hemos notado que para las tres interrogantes relacionadas a las propiedades de divisibilidad, más del 52% de los estudiantes ha logrado hacer justificaciones para las dos primeras preguntas planteadas (argumentos en alguno de los niveles 1, 2 o 3 de los niveles de producción de demostración matemática). Mientras que casi el 24% de los estudiantes han dado respuesta correcta, pero no su justificación para el caso de la tercera pregunta. Es importante mencionar que esta última interrogante ha sido ligeramente tratada en una de las sesiones (sesión 13). Asimismo, muchas de las explicaciones de las respuestas incorrectas hacían referencia a que el dividendo no puede ser mayor que el divisor, aunque por supuesto esta pregunta hace alusión a un caso especial de división.

Cabe resaltar que en la mayoría de las justificaciones de los alumnos está inmersa su noción de repartición equitativa y máxima, lo que era de esperar ya que este es la noción base que hemos empleado para construir las otras nociones (división y divisibilidad).

Reflexión sobre lo implementado:

- En el desarrollo de la situación 1: “El álbum de frutas”, ejecutada en la sesión 1, los estudiantes lograron identificar básicamente las diferencias entre las reparticiones libres, reparticiones equitativas, y las reparticiones equitativas y máximas. Sin embargo, hemos creído conveniente realizar algunos cambios para la propuesta reformulada (ver Anexo) - concretamente en la Etapa 1 y en la Etapa 2 de esta sesión. Consideramos que, en la Etapa 1 es oportuno que los estudiantes trabajen con una cantidad impar de figuritas. Este cambio es con el propósito de que los estudiantes tengan en cuenta - desde el inicio de la sesión 1 - que pueden sobrar figuritas después de una repartición, de esta manera podrán aceptar después residuos no nulos en una división. En la Etapa 2, creemos conveniente que los estudiantes trabajen con una cantidad par y mayor a 10 figuritas, en este caso, consideramos 12 figuritas en la propuesta reformulada. Con esta cantidad de figuritas pretendemos que los estudiantes tengan la necesidad de hacer reparticiones de uno en uno. Adicionalmente, en la propuesta reformulada agregamos una pregunta - el ítem b) - con el propósito de que los estudiantes tengan en cuenta que la repartición equitativa y máxima solo admite una única respuesta. Esta pregunta ha sido agregada en las tres últimas etapas que se desarrollan para la situación 1.
- Consideramos que el trabajo y el tiempo invertido en la situación 2 (“La promesa de las canicas”) trabajada desde la sesión 2 hasta la sesión 5 ha sido favorable para que los estudiantes logren determinar y justificar por qué el valor del residuo no puede ser mayor o igual que el valor del divisor, así como también que logren determinar el valor del residuo máximo en una división. Aclaramos que los estudiantes no emplean estos términos (como divisor, residuo y residuo máximo).
- Observamos que en la Ficha 1 (“La promesa de las canicas”) aplicada en la sesión 3, hubo un cantidad considerable de respuestas en blanco en los dos últimos ítems de esta ficha. Es por ello que, en la propuesta reformulada recomendamos que para el trabajo de esta ficha se le asigne más tiempo a los alumnos por las dos razones siguientes: una de ellas es para que los estudiantes terminen de desarrollar los cinco ítems que componen esta ficha; y la otra razón es que si el estudiante logra desarrollar la Ficha 1, esto permitirá evaluar el

avance de los estudiantes en la comprensión de los diferentes tipos de repartición equitativa, repartición máxima, y repartición equitativa y máxima.

- En la aplicación de la Ficha 2 (“Reparticiones equitativas y máximas”) hemos observado que algunos estudiantes han identificado erróneamente cierto “patrón” cuando se les solicitaba completar en la tabla (que constaba de 12 filas) del ítem (a) los diferentes valores del residuo cuando se tenía como divisor igual a 3. Debido a esto hemos agregado dos filas al final de la tabla, las cuales podemos observar en la propuesta reformulada. Los datos que figuran en estas dos filas son valores para el dividendo - en este caso 24 canicas y 34 canicas respectivamente. Hemos considerado estos números, ya que son el número siguiente del dato de la séptima fila (23) y el número anterior del dato de la octava fila (35), respectivamente. Creemos que los datos que hemos considerado son adecuados ya que si un alumno está siguiendo un patrón equivocado, podría notar su error a partir del nuevo orden dado y así corregir sus respuestas oportunamente.
- La situación 3 (“Goles con premio”), desarrollada en la sesión 4, nos ha permitido introducir dos nuevas nociones: repartición *exacta* y repartición *no exacta*, así como que los estudiantes logren diferenciar entre ellas. Mientras que la situación 4: “La radio”, los estudiantes han logrado conocer los dos casos especiales de la división exacta, cuando el divisor es igual al dividendo y cuando el divisor es igual a 1.
- Hemos modificado el valor del dividendo y del divisor en algunos ítems de la Ficha 3 (“Repartiendo entradas en forma equitativa y máxima”) aplicada en la sesión 7. Esto lo podemos observar en la propuesta reformulada. Hemos realizado esta modificación porque pensamos que los valores que presentamos inicialmente eran “grandes” y que posiblemente por esta razón los estudiantes no lograron presentar respuestas correctas para los valores del cociente y del residuo de las divisiones que se planteó en dicha ficha.
- Consideramos que es a partir de la sesión 7 que se pone de manifiesto las dificultades de los estudiantes en el cálculo del cociente y del residuo en divisiones de números naturales. Creemos que no le dimos un tiempo prudente de dedicación al tema de las divisiones, pero específicamente a reforzar el cálculo de los valores del cociente y del residuo.

- Desde nuestro de punto de vista, hemos considerado que en la propuesta reformulada se dé un cambio en el orden de la aplicación de la Ficha 4 ("¡A repartir se ha dicho!") y de la Ficha 5 ("Repartiendo panes"). Creemos que la aplicación de la ficha 5 podría ser aplicada antes de aplicarse la Ficha 4 puesto que el diseño de la Ficha 5 (las figuras y los esquemas que se presentan) ayudarían a que el estudiante pueda determinar más fácilmente de esta manera los divisores y no divisores de ciertos números. Después de la aplicación de la Ficha 5, sugerimos la aplicación de la Ficha 4 ya que esta no presenta figuras y/o esquemas.
- Hemos considerado que el desarrollo de la situación 5 ("Comprando en el supermercado"), trabajadas en la sesión 9 y sesión 10, posibilita que los estudiantes logren determinar qué números son divisibles entre 2 y entre 3 (múltiplos de 2 y de 3, respectivamente), así como también que logren determinar qué números no son divisibles entre 2 y entre 3 (números que no son múltiplos de 2 o de 3). Esto lo vemos reflejado en las respuestas de la Ficha 6 ("Comprando en el supermercado").
- Notemos que en la aplicación de la Ficha 7 ("División exacta e inexacta"), a pesar de que algunos estudiantes siguen mostrando las mismas dificultades al resolver las divisiones (concretamente, al determinar los valores del cociente y del residuo) que se les presenta en esta ficha, la mayoría de los estudiantes logra identificar de manera correcta el tipo de división en función del valor de residuo (correcto o no) obtenido.
- En la propuesta reformulada presentamos también modificaciones en la Ficha 8 ("Divisibilidad"). En el análisis de esta ficha (concretamente, el ítem c) observamos que la mayoría de los estudiantes no presentaron respuesta alguna a la primera pregunta que se les plantea en cada uno de los casos de dicho ítem. En estos casos esperábamos como respuesta un sí o un no. Teniendo en cuenta esta observación, en cada uno de los casos hemos agregado el requerimiento de marcar una de las respuestas (sí o no).
- En el análisis de la Ficha 8 ("Divisibilidad") y de la Ficha 9 ("¿Es divisible?"), aplicadas en la sesión 12 y 14 respectivamente, hemos observado que la mayoría de los estudiantes ha logrado conectar la noción de la división exacta con la noción de divisibilidad. No obstante, hemos notado que se sigue manteniendo

errores al determinar los valores del cociente y del residuo en las divisiones propuestas. Estos errores conllevaron a que se tenga un número considerable de respuestas incorrectas en las preguntas sobre divisibilidad, ya que para resolver estos problemas se requería primero del cálculo del cociente y del residuo respectivamente.

- En la propuesta reformulada presentamos modificaciones en la Ficha 10 (“Criterio de divisibilidad por 5”), aplicada en la sesión 14. En el análisis de esta ficha notamos que la mayoría de los estudiantes aparentemente no tuvieron dificultades para determinar qué números son divisibles entre 5 y percibir que existen infinitos números que son divisibles entre 5. Sin embargo, solo una minoría de estudiantes logró reconocer el criterio de divisibilidad por 5. Creemos que esto se debió a la forma en que fue inicialmente planteada la pregunta. Es por eso que hemos creído conveniente reformular la pregunta del ítem c) de esta ficha.
- Observemos, por último, que a lo largo de las 14 sesiones hemos procurado también desarrollar la creatividad de los estudiantes mediante el requerimiento explícito de la creación de ejemplos de reparticiones equitativas y máximas (Sesión 2), reparticiones exactas e inexactas (Sesión 7), divisiones exactas e inexactas (Sesión 10), y de divisibilidad (Sesión 11), ya sea de manera oral o escrita por parte de los estudiantes.

CAPÍTULO 5

Consideraciones finales

En este capítulo presentamos las conclusiones obtenidas respecto a los objetivos planteados en el Capítulo 1. También explicitamos algunas sugerencias para una próxima investigación relacionada con el presente trabajo.

5.1 Conclusiones

En cuanto al objetivo general de la tesis:

"Determinar bajo qué condiciones alumnos del tercer grado de nivel primaria pueden construir conocimientos de división y divisibilidad de números naturales"

La puesta en práctica que se muestran en el capítulo 4 nos permite afirmar que se ha cumplido este objetivo; puesto que los alumnos de tercer grado de primaria, a lo largo del desarrollo de las sesiones, han logrado construir su conocimiento de división y divisibilidad de números naturales. En ese sentido, determinamos que las condiciones que permite la construcción de dichos conocimientos son: *la noción de repartición equitativa y máxima y, las secuencias de problemas especialmente diseñadas con este propósito*. Estas dos condiciones se complementan, dado que la noción de repartición equitativa y máxima ha sido la base para la construcción de la división y divisibilidad de números naturales, mientras que las justificaciones involucradas en los problemas han sido el medio para que se logre la construcción de dichos conocimientos.

5.1.1 Respecto al primer objetivo específico:

"Identificar los significados de la división de números naturales en documentos oficiales elaborados por el Ministerio de Educación del Perú, así como también en el libro de texto distribuido por el Estado Peruano"

Identificar los significados de la división de números naturales en documentos oficiales elaborados por el Ministerio de Educación del Perú nos llevó a analizar: el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del Perú (DCN), los Mapas de Progreso (MP) y las Rutas del Aprendizaje (RA). Además, este objetivo nos llevó a analizar el libro "Matemática 3" de primaria distribuido por el Estado Peruano.

Como resultado de nuestro análisis llegamos a las siguientes conclusiones:

- Hemos identificado que en el DCN, en los MP y en las RA se sugiere que la división de los números naturales sea tratada como al menos uno de los significados: reparto en partes iguales, operación inversa a la multiplicación, restas sucesivas y a través de agrupamientos. Además enfocan estos significados solo para el tratamiento de las divisiones de tipo exacta.
- Consideramos que el libro “Matemática 3” guarda relación con los documentos oficiales estudiados. Esto es, en cuanto a los significados que proponen los tres documentos, dado que el libro aborda todos los significados mencionados anteriormente mediante ejemplos concretos. Además considera un significado más para la división. Esto es mediante el cálculo de cuántas veces está contenida una cantidad en otra. Sin embargo, de manera explícita señala solo tres significados para la división. Por otro lado, de manera general notamos que el libro presenta imprecisiones en los problemas planteados y propuestos, para los cuales hacemos sugerencias (ver capítulo 3).
- Observemos que uno de los significados comunes sugeridos por los documentos oficiales del MINEDU, así como por el libro de texto analizado, es el de “reparto en partes iguales”. Este significado es el que recoge y delimita Vallejo (2012) con el fin de evitar posibles ambigüedades al trabajar la división de números naturales (ver Capítulo 2). Nosotros empleamos directamente las nociones dadas por la autora.
- Los MP y las RA presentan elementos a ser destacados ya que no solo sugieren lo que debe ser tratado sobre la división; si no también los orientan planteándoles situaciones. Particularmente, observamos que en estos documentos muestran ejemplos de situaciones para el tema de división desde la perspectiva de los problemas aritméticos de enunciado verbal.

5.1.2 Respecto al segundo objetivo específico:

“Adaptar la propuesta de Vallejo, de tal modo que alumnos de tercer grado de primaria puedan construir conocimientos de división y divisibilidad de números naturales, a partir de la noción de repartición equitativa y máxima.”

Este objetivo nos condujo a adaptar la propuesta de Vallejo (2012), dado que los niveles en los que se sitúan las investigaciones son diferentes. Planteamos una propuesta inicial, teniendo en cuenta la noción de *repartición equitativa y máxima* dada por la autora y a las justificaciones como mediadoras en el proceso de construcción del conocimiento. Respecto a este objetivo, llegamos a las siguientes conclusiones:

- La propuesta inicial se ha diseñado en base a la noción de repartición equitativa y máxima. En base a esta noción hemos propuesto una secuencia de actividades, las que han sido trabajadas de diferentes maneras tomando en cuenta los propósitos específicos de cada sesión: Trabajos de clase, Trabajos individuales y Trabajos en grupos. Esto es con el propósito de construir los conocimientos de división y divisibilidad de los números naturales por medio de las justificaciones. Esto se ve reflejado en el capítulo 4.
- El diseño y los resultados de la aplicación de esta propuesta inicial nos permitió confirmar las condiciones que pueden propiciar la construcción de conocimientos sobre división y divisibilidad y el proceso como se ha conseguido la construcción de estos conocimientos.
- Como resultado del análisis de la aplicación de la propuesta inicial así como las reflexiones, que se presentan en la última parte del capítulo 4, surgió una propuesta reformulada (véase el Apéndice).

5.1.3 Respecto al tercer objetivo específico:

"Analizar las producciones de los alumnos de tercer grado de primaria en la construcción de su conocimiento de división y divisibilidad de números naturales a través de las justificaciones que estos presenten"

Analizar las producciones de los estudiantes nos condujo a poner en práctica nuestra propuesta inicial con un grupo de 24 estudiantes. Como resultado de este análisis llegamos a las siguientes conclusiones:

- De manera general, hemos observado que alumnos de tercer grado de primaria lograron construir conocimientos sobre división y divisibilidad gracias a que tuvimos en cuenta las dos condiciones (noción de repartición equitativa y máxima; y las justificaciones) que favorecen esta construcción.
- Notamos que la mayoría de los alumnos lograron darse cuenta de la relación existente entre el divisor y el residuo (esto al menos de manera implícita). En concreto, los estudiantes lograron justificar por qué el residuo no puede ser

mayor o igual que el divisor. Asimismo, los estudiantes han logrado identificar los posibles valores del residuo y el valor máximo del residuo teniendo como información dada el valor del divisor. Este logro fue conseguido gracias a la noción de repartición equitativa y máxima (ver sesiones 2-5), gracias a la cual construimos las otras nociones.

- Creemos que las situaciones y problemas elaborados así como la forma como éstos fueron planteados permitieron que los alumnos logren determinar los divisores y no divisores de ciertos números (aunque no fue un propósito que ellos empleen el término “divisor”). Los divisores y no divisores de un número se han trabajado a partir de la definición de repartición exacta e inexacta, respectivamente.
- La mayoría de los estudiantes logró dar ejemplos de números que son divisibles entre 2 o entre 3. Asimismo analizaron si ciertos números dados son o no divisibles entre 2 o de 3. Además, parecen percibir que hay una cantidad infinita de números que son divisibles entre 2 y de números que no son divisibles entre 2 (ver sesiones 9-10).
- Cabe resaltar que no solo esperábamos que los alumnos den sus respuestas, sino también que justifiquen las mismas. En el desarrollo de las sesiones los estudiantes también dieron respuestas incorrectas. Ocasiones de este tipo fueron aprovechadas para propiciar la discusión y justificación por parte de los alumnos ya que eran ellos mismos quienes corregían las respuestas.
- Observamos que algunos estudiantes mostraron en algunos ocasiones errores al determinar los valores del cociente y del residuo en algunas divisiones. Esto, en algunos casos dificultó los fines para el desarrollo de las siguientes sesiones. Pensamos que esto es debido a que al ser esta la primera vez que los estudiantes aprendían sobre división de números naturales; el tiempo que dedicamos a este tema en particular fue insuficiente. No obstante, esto no fue obstáculo para que la mayoría de alumnos logre conectar su noción de división exacta con la noción de divisibilidad.
- Notamos que algunos pocos alumnos lograron hacer algunas conjeturas en relación al tema de divisibilidad. Pensamos que la mayoría de los alumnos no logran hacer conjeturas debido a su corta edad y además porque son nuevos en esta forma de aprendizaje de las matemáticas.

- En la mayoría de las actividades logramos los propósitos trazados. Sin embargo en algunas actividades no logramos lo que esperábamos, como en el caso de la Ficha 10. En este caso concreto los estudiantes dieron respuestas que diferían de la respuesta esperada, específicamente en el caso del 3° ítem. Pensamos que esto es debido a la forma como se ha planteado en la propuesta inicial.
- Cabe resaltar que en la mayoría de las justificaciones de los alumnos estaba inmersa la noción de repartición equitativa y máxima, lo que era de esperar ya que esta noción ha sido la base para construir las otras nociones (división y divisibilidad).
- Es importante mencionar que alumnos de tercer grado de primaria, son capaces de dar argumentos generales completos, alcanzando así el nivel más alto de justificación matemática (considerado también como demostración matemática) como vimos en la última sesión (sesión 14).

5.1.4 Respecto al cuarto objetivo específico:

“Generar una propuesta donde se incluyan las condiciones para que alumnos de tercer grado de primaria construyan sus propios conocimientos sobre división y divisibilidad de números naturales”

Respecto a este objetivo, llegamos a las siguientes conclusiones:

- Para diseñar la propuesta reformulada tuvimos en cuenta: los dos objetivos específicos inmediatos anteriores, así como las observaciones y reflexiones hechas a partir de la puesta en acción de la propuesta inicial.
- La propuesta reformulada que se incluye en el Apéndice (pp. 340-379) se caracteriza por la inclusión de las justificaciones en el planteamiento de los problemas que conforman la secuencia de actividades diseñadas especialmente para los fines de esta investigación.

5.2 Sugerencias para próximas investigaciones

A continuación mostramos algunas sugerencias para próximas investigaciones:

- Realizar los ajustes necesarios a la propuesta aquí planteada para que estudiantes de este nivel cuenten con las condiciones suficientes para aprender a dividir números naturales, en términos de la noción de la repartición equitativa y máxima.
- Aplicar este nuevo replanteamiento con un nuevo grupo de estudiantes de tercer grado de primaria que aún no hayan tratado el tema de división y/o divisibilidad de números naturales con el fin de validarla.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bieda, K., Choppin, J., & Knuth, E. (2011). Middle School Students' Production of Mathematical Justifications. En Blanton, M., Knuth, E. y Stylianou, D. (Eds), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*. (pp.153-155).New York: Routledge.

De Villiers, M. (2001). *Papel e funcoes da demonstracao no trabalho como o sketchpad*. 31-36. Key Curriculum Press.

Fischbein, E. (1994). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Godino, J. & Recio, A. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 83-89.

Hanna, G. & De Villiers, M. (2012). *Proof and proving in mathematics Education*. New York: Springer.

Lay, S. (2009). Good proofs depend on good definitions: Examples and counterexamples in arithmetic. In F. Lin, F. Hsieh, G. Hanna & M. De Villiers (Eds.), *Proc. 19th Conf. of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study* (Vol. 2, pp. 27-30). Taipei, Taiwan: ICMI.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Primera edición en castellano.

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular*. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/

Perú, Ministerio de Educación (2013). *Mapas del progreso del Aprendizaje: Números y operaciones*. Lima. Recuperado de http://www.ipeba.gob.pe/estandares/MapasProgreso_Matematica_NumerosOperaciones.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2013). *Rutas del Aprendizaje*. Lima. Recuperado de http://www.todospodemosaprender.pe/noticias-detalle/0-211-325/nuevas-rutas-del-aprendizaje-2014

Recio, A. (2001). La demostración en Matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds.), *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 27 – 43. Universidad de Almería.

Sáenz, C. (2001). La demostración en Matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds.), *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 47 – 62. Universidad de Almería.

Santillana (2012). *Matemática 3 primaria*. Educación Básica Regular. Edición: Santillana. Lima-Perú.

Segal, S. (2009). *Action research in Mathematics Education: a study of a master's program for teachers.* (Tesis doctoral en Educación).Montana State Universty, Montana, Estados Unidos.

Vallejo, E. (2012). *Análisis y propuesta en torno a las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en el primer grado de secundaria.* (Tesis de maestría en Educación Matemática).Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

APÉNDICE

Propuesta para que alumnos de tercer grado de primaria construyan sus propios conocimientos sobre división y divisibilidad de números naturales

El diseño de esta propuesta es el resultado de los análisis presentados anteriormente. Especialmente, tenemos en cuenta las reflexiones hechas a partir de los análisis de las 14 sesiones (véase el Capítulo 4). Con esta propuesta pretendemos desarrollar la intuición, el razonamiento plausible, la formulación de las conjeturas y la capacidad justificativa (véase el Capítulo 2).

Esta propuesta tiene como finalidad que los estudiantes a partir de la noción "Repartición equitativa y máxima" (véase el Capítulo 2) construyan conocimientos sobre división, para que en función de esta noción logren construir la noción de divisibilidad, que elaboren justificaciones para cada una de sus respuestas, así como también que sean capaces de conjeturar propiedades de las nociones trabajadas en esta propuesta.

Es importante aclarar que nuestra prioridad no es que el alumno emplee los términos que hemos mencionado anteriormente, tampoco que se ejercite en la notación o algoritmo de la división o que llame a cada uno los elementos de la división por su nombre, sino que consiga dar un significado a cada una de estas nociones.

Nota:

Para guiar al profesor en la enseñanza de la división y divisibilidad de los números naturales, incluimos mensajes, en color azul, que permitirán orientar con informaciones de acuerdo a cada situación y sugerencias a la mayoría de los problemas propuestos.

Situación 1: "El álbum de Frutas"

Materiales: *En esta situación se necesita entregar un álbum con dos páginas en blanco que es empleado en todas las etapas de esta situación y una cantidad definida de figuritas cuyo número entregado a cada grupo irá variando de acuerdo a las etapas de esta situación.*   ***Requerimientos:***   *En esta situación se solicita a los estudiantes repartir y pegar las figuritas en las dos páginas en blanco del álbum de frutas.*

En todas las etapas que conforman el desarrollo de la sesión, trabajamos el caso particular de la división de números naturales en el que variamos el dividendo (número de figuritas a ser repartidas en las páginas) y mantenemos el divisor fijo igual a 2 (número de páginas).

Objetivos: - Determinar la noción que tiene el estudiante de lo que es una repartición libre. - Diferenciar entre los tres tipos siguientes de repartición: repartición equitativa, repartición máxima, y repartición equitativa y máxima.

TRABAJO DE CLASE

Recomendación: Previamente para el desarrollo de esta situación el docente forma grupos de trabajo. Lo recomendable es formar grupos de cuatro estudiantes como máximo.

ETAPA 1
Propósito: introducir la noción de repartición equitativa de cinco figuritas en dos páginas.   **Indicaciones:** Se hace entrega del álbum y las cinco figuritas a cada grupo. Luego se pide a los alumnos repartir y pegar las cinco figuritas en las dos páginas del álbum de frutas. En esta etapa creemos conveniente aclarar a los estudiantes que nos puede sobrar figuritas después de la repartición.   **Preguntas:**   **a) Presenta algunos casos de repartición libre de las cinco figuritas. ¿Cuántos casos de repartición tendremos?**   **b) ¿Podremos repartir estas 5 figuritas, de tal manera que en cada página tengamos la misma cantidad de figuritas?; ¿cuántas figuritas tendremos en**

cada página?; ¿nos sobrarán figuritas? ¿De cuántas formas podremos hacer esto?

ETAPA 2

Propósito: explorar la noción de repartición "libre" de doce figuritas en dos páginas, se considera esta cantidad de figuritas ya que buscamos que el estudiante haga una repartición de uno a uno.

Indicaciones: El docente entrega siete figuritas más a cada grupo. Notemos que ahora cada grupo tiene doce figuritas. Luego se pide a los alumnos repartir y pegar las doce figuritas en las dos páginas del álbum de frutas.

Pregunta:

¿Cuántas figuritas tendremos en cada página?; ¿quedaron figuritas sin ser pegadas? y ¿podrían quedar figuritas sueltas?

[Los alumnos comparten sus experiencias de cómo repartieron y pegaron las 12 figuritas en las dos páginas del álbum de frutas]

ETAPA 3

Propósito: ver un caso de División exacta mediante el proceso de repartición equitativa, máxima y natural; en este caso, mediante la repartición de seis figuritas en dos páginas.

Indicaciones: El docente entrega una figurita más a cada grupo. Notemos que ahora cada grupo tiene seis figuritas. Luego pide a sus alumnos repartir y pegar las seis figuritas en las dos páginas del álbum de frutas.

Preguntas:

a) **¿Podremos repartir estas 6 figuritas, de tal manera hayamos repartido el mayor número de figuritas y que en cada página tengamos la misma cantidad de figuritas?; ¿cuántas figuritas tendremos en cada página?; ¿cuántas figuritas nos sobrarán?**
b) **¿De cuántas formas podremos hacer esto?**

ETAPA 4

Propósito: ver un caso de División inexacta mediante el proceso de repartición equitativa, máxima y natural; en este caso, mediante la repartición de siete figuritas en dos páginas.

Indicaciones: El docente retira cinco figuritas a cada grupo. Notemos que ahora cada grupo tiene siete figuritas. Luego pide a sus alumnos repartir y pegar las siete figuritas en las dos páginas del álbum de frutas. **Peguntas:** **a) ¿Podremos repartir estas 7 figuritas, de tal manera hayamos repartido el mayor número de figuritas y que en cada página tengamos la misma cantidad de figuritas?; ¿cuántas figuritas tendremos en cada página como máximo?; ¿cuántas figuritas nos sobrarán?** **b) ¿De cuántas formas podremos hacer esto?** NOTA: El docente puede ir incluyendo otras etapas con el propósito que quede claro en los estudiantes estos tres tipos de repartición: repartición equitativa, repartición máxima y repartición equitativa y máxima.
ETAPA 5
Propósito: ver un caso de División inexacta mediante el proceso de repartición equitativa, máxima y natural; en este caso, mediante la repartición de nueve figuritas en dos páginas. **Indicaciones:** El docente entrega dos figuritas más a cada grupo. Notemos que ahora cada grupo tiene nueve figuritas. Luego pide a sus alumnos repartir y pegar las nueve figuritas en las dos páginas del álbum de frutas. **Peguntas:** **a) ¿Podremos repartir estas 9 figuritas, de tal manera hayamos repartido el mayor número de figuritas y que en cada página tengamos la misma cantidad de figuritas?; ¿cuántas figuritas tendremos en cada página como máximo?; ¿cuántas figuritas nos sobrarán?** **b) ¿De cuántas formas podremos hacer esto?**

Notemos que con la situación “El álbum de frutas” se trabaja cuatro tipos de repartición: repartición libre, repartición equitativa, repartición máxima, y repartición equitativa y máxima. A su vez, se trabaja de manera implícita las nociones de división exacta e inexacta.

IMPORTANTE:

Las reparticiones que hacemos referencias de ahora en adelante son “Reparticiones equitativas y máximas”.

Situación 2: "La promesa de las canicas"

Luis es un niño que adora jugar a las canicas con sus amigos del colegio durante los recreos. Cierto día, como ya es de costumbre, Luis y sus amigos juegan un partidito de canicas. Esta vez Luis tiene presente que el día anterior había prometido a sus tres primos que les obsequiaría las canicas que gane en su próximo juego.   *Luis ha pensado en detalle cómo hará la repartición de las canicas que gane entre sus tres primos:*   *"Repartiré entre ellos la mayor cantidad de canicas que pueda, respetando que cada uno de ellos tenga una misma cantidad de canicas, así todos quedan contentos. Yo me quedaré con las canicas que sobren después de la repartición".*

En todas las etapas de esta situación variamos el dividendo (número de canicas a ser repartidas), mientras que mantenemos el divisor fijo igual a 3 (número de primos a quienes se les hace la repartición).

Objetivos: -reforzar en los estudiantes la noción de repartición equitativa y máxima -identificar los posibles valores que puede tomar el residuo, en función de los valores que toma el divisor - identificar el valor del residuo máximo en una división de números naturales.

TRABAJO DE CLASE

Indicación: El docente divide la clase en grupos de cuatro alumnos cada grupo, con el fin de que uno de los alumnos juegue el papel de Luis y los otros alumnos jueguen el papel de los primos.

ETAPA 1
Propósito: ver un caso concreto de División exacta por 3, mediante el proceso de repartición equitativa y máxima de 12 canicas entre 3 personas.   **Indicaciones:** El docente en cada grupo entrega doce canicas al alumno que hace el papel de Luis.   **Pregunta**:   Imaginemos que Luis ha ganado 12 canicas, y que como Luis es un niño que siempre cumple sus promesas, debe repartir estas canicas entre sus 3 primos.   **a) Si tomamos en cuenta la repartición que Luis ha pensado hacer, ¿cuántas canicas le correspondería a cada uno de los 3 primos de Luis? ¿Cuántas canicas sobrarían a Luis después de la repartición equitativa**

y máxima de las doce canicas? **b) ¿Se puede quedar Luis con tres canicas?**
ETAPA 2
Propósito: ver un caso concreto de División inexacta por 3, mediante el proceso de repartición equitativa, máxima y natural de 7 canicas entre 3 personas. **Indicaciones:** El docente retira 5 canicas de cada grupo, con el fin de que Luis ahora tenga solo 7 canicas. **Pregunta:** Imaginemos que Luis ha ganado 7 canicas, y que como Luis es un niño que siempre cumple sus promesas, debe repartir estas canicas entre sus 3 primos. **a) Si tomamos en cuenta la repartición que Luis ha pensado hacer, ¿cuántas canicas tiene cada uno de los primos de Luis? ¿Cuántas canicas sobraría a Luis después de la repartición equitativa y máxima de las siete canicas?** **b) ¿Se puede quedar Luis con cuatro canicas?**
ETAPA 3
Propósito: ver un caso concreto de División inexacta por 3, mediante el proceso de repartición equitativa, máxima y natural de 11 canicas entre 3 personas. **Indicaciones:** El docente hace que cada grupo tenga ahora 11 canicas. **Pregunta:** Imaginemos que Luis ha ganado 11 canicas, y que como Luis es un niño que siempre cumple sus promesas, debe repartir estas canicas entre sus 3 primos. **a) Si tomamos en cuenta la repartición que Luis ha pensado hacer, ¿cuántas canicas tiene cada uno de los primos de Luis? ¿Cuántas canicas sobraría a Luis después de la repartición equitativa y máxima de las once canicas?** **b) ¿Se puede quedar Luis con ocho canicas?** Notemos que en estas tres primeras etapas pretendemos que los alumnos logren identificar los posibles valores que puede tomar el residuo o resto en una división, cuando se tiene divisor igual a 3 en este caso tendríamos como posible valores del residuo: 0, 1 y 2.

ETAPA 4
Propósito: ver casos concretos de división entre 3, con residuo igual a 0. **Pregunta:** a) **Si tomamos en cuenta el tipo de repartición que Luis ha decidido hacer de las canicas ganadas, ¿Cuántas canicas tendría que ganar Luis para que pueda repartir todas las canicas y no le quede canicas para él?** ***Respuesta:*** *Todos los números que son divisibles entre 3. Por ejemplo: 9, 6, 3, 21, 15, 33, etc.* **Propósito:** ver casos concretos de división entre 3, con residuo igual a 1. **Pregunta:** b) **Si tomamos en cuenta el tipo de repartición que Luis ha decidido hacer de las canicas ganadas, ¿Cuántas canicas tendría que ganar Luis para que él se pueda quedar con una canica después de la repartición?** ***Respuesta:*** *Todos los números que son divisibles entre 3 más 1. Por ejemplo: 4, 7, 25, 13, 40, 16, etc.* **Propósito:** ver casos concretos de división entre 3, con residuo igual a 2. **Pregunta:** c) **Si tomamos en cuenta el tipo de repartición que Luis ha decidido hacer de las canicas ganadas, ¿Cuántas canicas tendría que ganar Luis para que él se pueda quedar con dos canicas?** ***Respuesta:*** *todos los números divisibles entre 3 más 2. Por ejemplo: 5, 8, 11, 14, 17, etc.*
ETAPA 5
Propósito: ver casos concretos de división entre 3, con residuo igual a 3. **Pregunta:** a) **Si tomamos en cuenta el tipo de repartición que Luis ha decidido hacer de las canicas ganadas, ¿Le pueden quedar 3 canicas a Luis? ¿Por qué?** ***Respuesta:*** *No se puede dar este caso, ya que las 3 canicas que supuestamente se quedaría Luis deberían ser redistribuidas entre los tres primos. De lo contrario no sería una repartición máxima.* **Propósito:** ver casos concretos de división entre 3, con residuo igual a 4. b) **Si tomamos en cuenta el tipo de repartición que Luis ha decidido hacer de las canicas ganadas, ¿Le pueden quedar 4 canicas a Luis? ¿Por qué?**

En esta etapa pretendemos que los alumnos justifiquen por qué no podrían ser posibles valores del residuo, por ejemplo: 3 y 4.

NOTA: En esta quinta etapa se puede seguir planteando más casos en que el residuo sea mayor que el divisor (3), de tal manera que el estudiante logre comprender, que en este caso, el valor del residuo puede tomar estos tres valores: 0, 1 y 2. Es importante mencionar que la justificación para cualquiera de estos casos, residuo igual o mayor que 3, debe estar dada en función de la noción de repartición máxima.

ETAPA 6

Propósito: identificar los posibles valores del residuo y del residuo máximo de la división, cuando se tiene como divisor igual a 4.

Imaginemos que Luis ahora tiene 4 primos.

Preguntas:

a) ¿Cuántas canicas le puede quedar a Luis, si ahora tiene cuatro primos?

b) ¿Cuántas canicas como máximo le pueden quedar a Luis?

Propósito: identificar los posibles valores del residuo y del residuo máximo de la división, cuando se tiene como divisor igual a 7. Asimismo se pretende que los alumnos logren justificar por qué no es posible tener como residuo igual a 10.

Imaginemos que Luis ahora tiene 7 primos.

Preguntas:

a) ¿Cuántas canicas le puede quedar a Luis, si ahora tiene siete primos?

b) ¿Podría haberle sobrado a Luis diez canicas después de la repartición a sus siete primos? ¿Por qué?

c) ¿Cuántas canicas como máximo le pueden quedar a Luis?

Propósito: identificar los posibles valores del residuo y residuo máximo de la división, cuando se tiene como divisor igual a 14. Asimismo se pretende que los alumnos logren justificar por qué no es posible tener como residuo mayor que 13.

Imaginemos que Luis ahora tiene 14 primos.

Preguntas:

a) Si Luis tiene 14 primos, ¿Cuáles son las posibles cantidades de canicas

que le puede quedar Luis?

b) ¿Cuántas canicas como máximo le pueden quedar a Luis?

c) ¿Por qué a Luis no le pueden quedar más de 13 canicas?

Propósito: identificar los posibles valores del residuo y del residuo máximo de la división, cuando se tiene como divisor igual a 50.

Imaginemos que Luis ahora tiene 50 primos.

Preguntas:

a) ¿Cómo mínimo cuántas canicas se pueden quedar Luis?

b) ¿Cuál es la cantidad máxima de canicas que le puede quedar a Luis?

c) ¿Cuántas canicas le puede quedar a Luis, si ahora tiene cincuenta primos?

Notemos que en esta etapa intentamos que el alumno logre identificar los posibles valores que puede tomar el residuo cuando variamos el divisor, en este caso los números de primos. Además en esta etapa pretendemos que los alumnos determinen el residuo máximo en una división.

Aclaramos que estas 6 etapas, mostradas anteriormente, podrían ser trabajadas en más de una sesión. Esto es con el propósito de que los estudiantes tengan el tiempo suficiente para analizar como mínimo los casos presentados en cada uno de estas etapas.

TRABAJO INDIVIDUAL

Sugerimos la aplicación de la Ficha 1: "La promesa de las canicas", que a continuación presentamos. Para la aplicación de esta ficha, recomendamos que éste se ha trabajada en una sesión de clase; ya que los estudiantes deben tener el tiempo suficiente para que logren trabajar los 5 ítems planteados de esta ficha.

Después de la aplicación de la Ficha 1, recomendamos la aplicación de la Ficha 2: "Reparticiones equitativas y máximas". La aplicación de esta ficha es con el propósito de reforzar en los estudiantes el tipo de repartición (equitativa y máxima) con el que estamos trabajando.

<u>Ficha 1</u>: "La promesa de las canicas"

"La promesa de las canicas"

Nombre y apellidos: ____

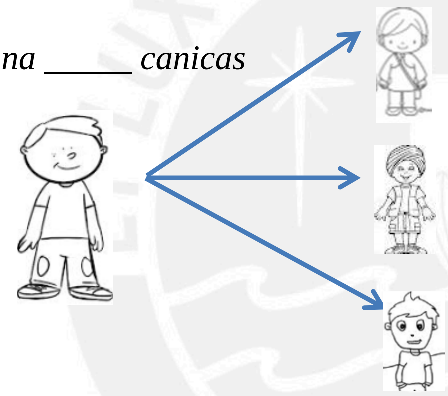
____

Si tenemos en cuenta el tipo de repartición que Luis ha decidido hacer de las canicas ganadas a sus 3 primos,

a) ¿cuántas canicas tendría que ganar Luis para que pueda repartir todas las canicas ganadas y así no le queden canicas para él? Dar 3 ejemplos diferentes.

Primer ejemplo:

Si Luis gana _____ canicas



_____ canicas

_____ canicas *Y no le sobran canicas para él*

_____ canicas

Segundo ejemplo:	***Tercer ejemplo:***

¿Se pueden dar más ejemplos para este tipo de repartición? ¿Cuántos?

____

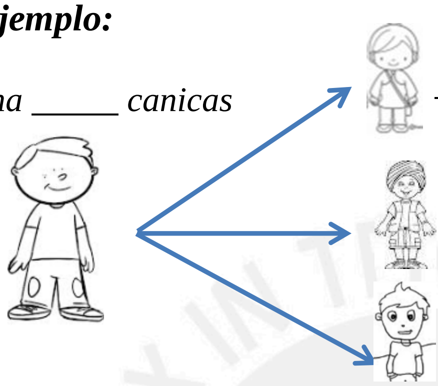
____

____

b) ¿Cuántas canicas tendría que ganar Luis para que él se pueda quedar con 1 canica después de la repartición? Dar 3 ejemplos diferentes.

Primer ejemplo:

Si Luis gana ______ canicas



______ *canicas*

______ *canicas*

______ *canicas*

Y le sobra 1 canica para él

Segundo ejemplo:	***Tercer ejemplo:***

¿Se pueden dar más ejemplos para este tipo de repartición? ¿Cuántos?

____

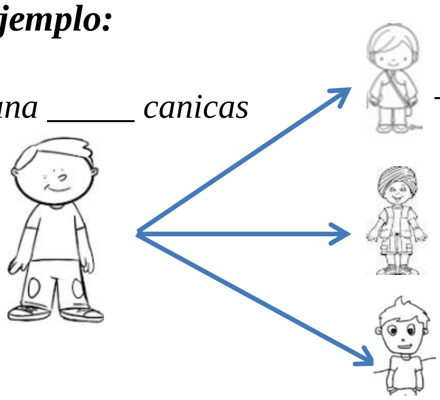
____

____

c) ¿cuántas canicas tendría que ganar Luis para que él se pueda quedar con 2 canicas después de la repartición?

Primer ejemplo:

Si Luis gana _____ canicas



_____ canicas

_____ canicas *Y le sobra 2 canicas para él*

_____ canicas

Segundo ejemplo:	***Tercer ejemplo:***

¿Se pueden dar más ejemplos para este tipo de repartición? ¿Cuántos?

____

____

____

____

____

Recordemos que Luis dijo:

"Repartiré entre mis 3 primos ***la mayor cantidad de canicas*** *que pueda, respetando que cada uno de ellos reciba* ***una misma cantidad de canicas****, así todos quedan contentos. Yo me quedaré con las canicas que sobren después de la repartición."*

d) ¿Le pueden quedar 3 canicas a Luis? ¿Por qué?

e) ¿Cuántas canicas tendría que ganar Luis para que él se pueda quedar con 4 canicas después de la repartición que ha planeado hacer? ¿Se podrá dar este caso? ¿Por qué?

<u>Ficha 2</u>: **"Reparticiones equitativas y máximas"**

"Reparticiones EQUITATIVAS Y MÁXIMAS"

Nombre y apellidos: ____

a) Completa la siguiente tabla con datos adecuados para que Luis haga reparticiones equitativas y máximas de las canicas ganadas entre sus 3 primos.

Si Luis gana…	**a cada primo le corresponden…**	**Sobran para Luis…**
18 canicas		
19 canicas		
20 canicas		
21 canicas		
22 canicas		
23 canicas		
35 canicas		
	10 canicas	1 canica
		2 canicas
		0 canicas
	32 canicas	
		1 canica
24 canicas		
34 canicas		

Le da a cada primo:

b) Observa el siguiente caso:

4 canicas

4 canicas

4 canicas

Luis reparte 15 canicas

Luis se queda con 3 canicas

La profesora pregunta:

¿Está bien hecha la repartición equitativa y máxima de Luis?

Después de unos instantes, Carlita y Joselito responden:

Joselito: SÍ, Luis puede quedarse con cualquier cantidad de canicas.

Carlita: NO, porque no le pueden sobrar 3 canicas a Luis. No sería una repartición máxima. Luis puede repartir todavía las 3 canicas que le quedan. Le tendría que dar 1 canica más a cada primo.

Ahora tú responde las siguientes preguntas:

¿Quién tiene razón, Carlita o Joselito? ¿Por qué?

¿Se pueden redistribuir las 3 canicas sobrantes para tener una repartición máxima? ¿Cómo se haría esta redistribución? Explica

Después de la repartición equitativa y máxima, ¿cuántas canicas le correspondería a cada primo y cuántas canicas le sobrarían a Luis?

TRABAJO DE CLASE

Situación 3: "Goles con premio"

Vamos a seleccionar a los alumnos que van a representar a nuestra sección (tercer grado "C") en el campeonato "PUNTERIA A GOLES", que se llevará a cabo a nivel de todo tercer grado de primaria. El alumno que meta un gol al arco, será declarado alumno de la selección de tercer grado "C", y tendrá una recompensa. La profesora de Educación Física ha comprado una bolsa de 24 caramelos para ser repartidos, de forma equitativa y máxima, entre los alumnos que sean clasificados en la selección de tercer grado "C".

En esta situación trabajamos el caso particular de una división de números naturales, con el dividendo fijo igual a 24 (en este caso el número de caramelos a ser repartidos) y variamos el divisor (en este caso el número de seleccionados a quienes se les hace la repartición).

Materiales: Notemos que para desarrollar la situación necesitamos de una pelota, un objeto que hiciera de arco y los caramelos (esta cantidad de caramelos es según el número de alumnos que tengamos en el aula).

Objetivo: Introducir los términos de repartición exacta y repartición no exacta. Asimismo pretendemos que los estudiantes den los divisores del número 24, a partir de la noción de repartición exacta.

Indicaciones: los alumnos hacen fila para intentar anotar un gol, y así ser parte de la selección.

Secuencia de preguntas:

a) Si suponemos que fueron 8 alumnos los que participaran en la selección:

a.1) ¿Cuántos caramelos le toca a cada seleccionado?

a.2) ¿Sobrará algún caramelo a la profesora después de la repartición? ¿Cuántos?

Esto quiere decir que: 24 caramelos pueden ser repartidos de forma EXACTA entre 8 personas si después de la repartición no sobra caramelo alguno. ***O dicho de otra manera:*** 24 caramelos entre 8 personas es una repartición EXACTA porque no sobran caramelos después de la repartición.

b) Supongamos ahora que no fueron 8, sino 9 alumnos que conforman la selección:

b.1) ¿Cuántos caramelos le toca a cada seleccionado?

b.2) ¿Sobrará algún caramelo a la profesora después de la repartición? ¿Cuántos?

> ***Esto quiere decir que:*** 24 caramelos pueden ser repartidos de forma NO EXACTA entre 9 personas si después de la repartición no sobra caramelo alguno.
>
> ***O dicho de otra manera:*** 24 caramelos entre 9 personas es una repartición NO EXACTA porque sobran caramelos después de la repartición.

Observemos que estos dos ejemplos ayudan a que el profesor pueda introducir el término de Repartición exacta y Repartición no exacta. Por otro lado, el orden como se ha presentado los dos tipos de reparticiones (primero Repartición exacta y segundo Repartición no exacta) puede variar, esto depende según la cantidad de seleccionados que tengamos. Además sugerimos que los alumnos trabajen con diferentes casos (modificando los divisores: la cantidad de alumnos que hayan ingresado a la selección).

c) ***¿Entre cuántas personas podremos repartir los 24 caramelos en forma exacta?***

A continuación, presentamos una manera en la que podría presentarse en la pizarra la respuesta del ítem c).

24 caramelos pueden ser **repartidos de manera exacta**

- → entre 24 personas
- → entre 4 personas
- → entre 3 personas
- → entre 2 personas
- → entre 6 personas
- → entre 8 personas
- → entre 12 personas
- → entre 1 persona

Notemos que esta pregunta implícitamente se hace mención a los divisores de 24.

d) Ejemplos de reparticiones EXACTAS. *Los ejemplos deben tener lo siguiente:* ***¿Qué cantidad van a repartir?, ¿entre cuántas personas van a repartir?, ¿cuánto le toca a cada persona? y ¿cuánto sobra al quien reparte?***

e) Ejemplos de reparticiones NO EXACTAS. *Los ejemplos deben tener en cuenta lo siguiente:* ***¿Qué cantidad van a repartir?, ¿entre cuántas personas van a repartir?, ¿cuánto le toca a cada persona? y ¿cuánto sobra al quien reparte?***

Estos dos últimos ítems tienen como propósito que el estudiante pueda reforzar las nociones de repartición exacta y de repartición no exacta, así como también que desarrollen la creatividad de los estudiantes.

TRABAJO DE CLASE

La situación consiste en lo siguiente:

Situación 4: "La radio"

Imaginemos que la radio "EL SOL" como celebración de estas fiestas regalará entradas a sus oyentes para que vayan al circo. El locutor de la radio anuncia que tiene 6 entradas para ser repartidas ***únicamente*** *entre las personas que llamen a la radio en los siguientes minutos.*

En las cuatro primeras etapas que conforman el desarrollo de esta situación, mantenemos fijo el dividendo en este caso igual a 6 (número de entradas a ser repartidas) y variamos el divisor (número de personas que llaman a la radio).

Objetivos: - Presentar los dos casos especiales de división exacta, cuando el divisor es igual al dividendo y cuando el divisor es igual a 1. - Identificar el tipo de repartición (exacta o inexacta) en cada caso y - Justificar por qué, en los ejemplos que se plantea las reparticiones son del tipo elegido.

ETAPA 1
Propósito: ver un caso concreto de División exacta por 3, mediante el proceso de repartición equitativa, máxima y natural de 6 entradas entre 3 personas.   **Indicaciones:** los alumnos se colocan formando un círculo. En el centro del círculo se colocará la profesora que hace el rol de locutor de radio y 3 niños que son escogidos al azar que hacen el rol de los ganadores de las entradas. La profesora hace entrega de las 6 entradas al locutor de la radio.

Secuencia de preguntas:

Imaginemos que fueron 3 personas que llamaron a la radio, y que el locutor de la radio debe cumplir su promesa de repartir estas entradas entre las personas que llamaron.

a) **¿Cuántas entradas le corresponde a cada persona? ¿Sobran entradas después de la repartición?**
b) **¿Es un caso de repartición EXACTA o INEXACTA? ¿Por qué?**

ETAPA 2

Propósito: ver un caso concreto de División Inexacta por 4, mediante el proceso de repartición equitativa, máxima y natural de 6 entradas entre 4 personas.

Indicaciones: los alumnos se colocan formando un círculo. En el centro del círculo se colocará la profesora que hace el rol de locutor de radio y 4 niños que son escogidos al azar que hacen el rol de los ganadores de las entradas. La profesora hace entrega de las 6 entradas al locutor de la radio.

Secuencia de preguntas:

Imaginemos que fueron 4 personas que llamaron a la radio, y que el locutor de la radio debe cumplir su promesa.

a) **¿Cuántas entradas le corresponde a cada persona? ¿Sobran entradas después de la repartición?**
b) **¿Es un caso de repartición EXACTA o INEXACTA? ¿Por qué?**

ETAPA 3

Propósito: ver un caso especial de división exacta cuando **el divisor es igual al dividendo**, mediante el proceso de repartición equitativa, máxima y natural de 6 entradas entre 6 personas.

Indicaciones: los alumnos se colocan formando un círculo. En el centro del círculo se colocará la profesora que hace el rol de locutor de radio y 6 niños que son escogidos al azar que hacen el rol de los ganadores de las entradas. La profesora hace entrega de las 6 entradas al locutor de la radio.

Secuencia de preguntas:

Imaginemos que fueron 6 personas que llamaron a la radio, y que el locutor de la radio debe cumplir su promesa.

a) ¿Cuántas entradas le corresponde a cada persona? ¿Sobran entradas después de la repartición?

b) ¿Es un caso de repartición EXACTA o INEXACTA? ¿Por qué?

ETAPA 4

Propósito: ver un caso especial de división exacta cuando **el divisor es igual a 1**, mediante el proceso de repartición equitativa, máxima y natural de 6 entradas entre 1 persona.

Indicaciones: los alumnos se colocan formando un círculo. En el centro del círculo se colocará la profesora que hace el rol de locutor de radio y 1 niño que es escogido al azar que hace el rol del ganador de las entradas. La profesora hace entrega de las 6 entradas al locutor de la radio.

Secuencia de preguntas:

Imaginemos que fue solo 1 persona que llamo a la radio, y que el locutor de la radio debe cumplir su promesa de repartir estas 6 entradas entre las personas que llamaron.

a) ¿Cuántas entradas le corresponde a cada persona? ¿Sobran entradas después de la repartición?

b) ¿Es un caso de repartición EXACTA o INEXACTA? ¿Por qué?

ETAPA 5

Propósito: determinar los divisores de 12 y 40.

Secuencia de preguntas:

a) ¿Entre cuántas personas se pueden repartir estas doce entradas de forma exacta? ¿Por qué?

b) ¿Entre cuántas personas se pueden repartir estas cuarenta entradas de forma exacta? ¿Por qué?

Notemos que en estas dos primeras etapas pretendemos que el estudiante pueda reforzar las nociones de repartición exacta y repartición no exacta y que logre identificar y justificar por qué es una repartición exacta o inexacta. Mientras que en las etapas 3 y 4 tiene como propósito que los alumnos noten estos dos casos especiales de la división (cuando el divisor es igual al dividendo y cuando el divisor es igual a 1). Para reforzar estos casos especiales se puede ir variando el dividendo de esta situación y plantear a los alumnos las preguntas que se han presentado en las etapas anteriores. Notemos que en la etapa 5 solicitamos de manera indirecta a los estudiantes los divisores de 12 y de 40.

TRABAJO INDIVIDUAL

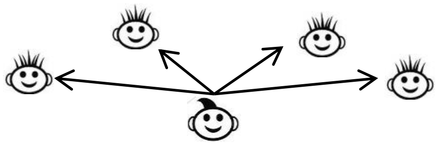
Sugerimos la aplicación de la Ficha 3: "Repartiendo entradas en forma equitativa y máxima", la Ficha 5: "Repartiendo panes" y la Ficha 4: ¡A repartir se ha dicho!, que a continuación presentamos. La aplicación de estas 3 fichas será en el orden en el que proponemos (la explicación de este orden esta dado en la reflexiones del Capítulo 4). Cabe señalar que la Ficha 3 tiene como propósito que el estudiante logre identificar entre repartición exacta y repartición inexacta y, como también justificar por qué es uno de estos dos tipos de repartición. Mientras que la Ficha 4 y Ficha 5 tiene como propósito que el estudiante presente de manera intuitiva los divisores de 7, 6, 9, 14, 10, 20, 35 y 48.

Cabe resaltar que las tres fichas nos permiten medir el progreso de los alumnos en la comprensión de la noción de la repartición exacta y de la repartición inexacta.

Ficha 3: “Repartiendo entradas en forma equitativa y máxima”

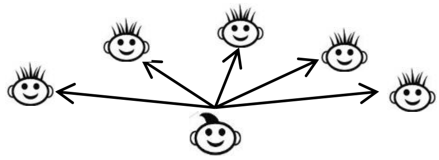
Completa cada espacio en blanco y responde las preguntas planteadas.

(1) El locutor reparte 12 entradas entre 4 personas. A cada persona le corresponde ______ entradas, así que le sobran _____ entradas al locutor.



¿Esta repartición es **Exacta o Inexacta**? ¿Por qué?

(2) El locutor reparte 11 entradas entre 5 personas.

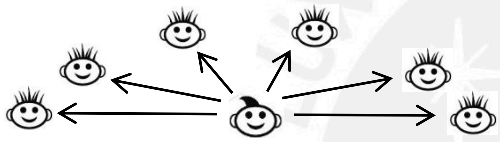


¿Cuántas entradas le toca a cada persona?

¿Cuántas entradas le sobran al locutor?

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**? ¿Por qué?

(3) El locutor reparte 14 entradas entre 6 personas.

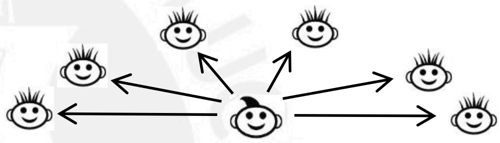


¿Cuántas entradas le toca a cada persona?

¿Cuántas entradas le sobran al locutor?

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**? ¿Por qué?

(4) El locutor reparte 18 entradas entre 6 personas.

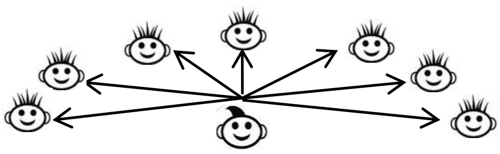


¿Cuántas entradas le toca a cada persona?

¿Cuántas entradas le sobran al locutor?

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**? ¿Por qué?

(5)El locutor reparte 19 entradas entre 7 personas.

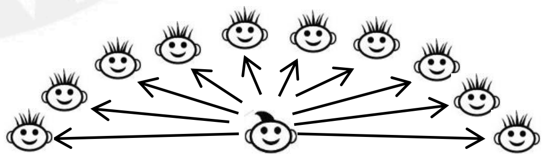


¿Cuántas entradas le toca a cada persona?

¿Cuántas entradas le sobran al locutor?

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**? ¿Por qué?

(6) El locutor reparte 20 entradas entre 10 personas.



¿Cuántas entradas le toca a cada persona?

¿Cuántas entradas le sobran al locutor?

¿Es una repartición **Exacta o Inexacta**? ¿Por qué?

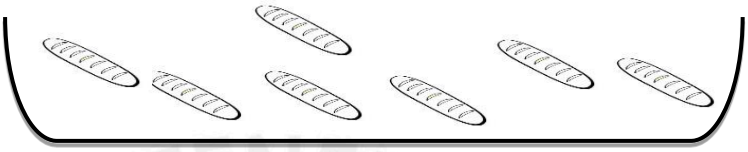
<u>Ficha 5</u>: **“Repartiendo panes”**

Nombre y apellidos: ____

____

Completa cada espacio en blanco.

1) En una canasta hay 7 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?

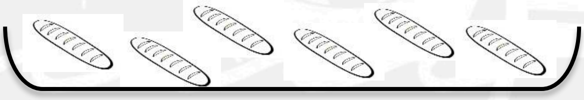


7 panes

entre ____ niño(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

entre niño(s). A cada niño le corresponde(n) pan(es).

2) En una canasta hay 6 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?



6 panes

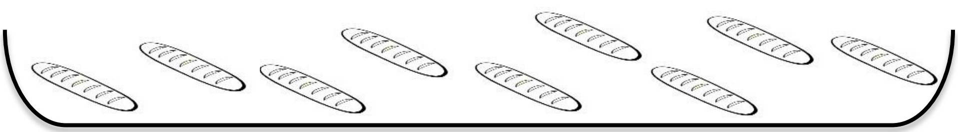
entre____ niño(s). A cada niño le corresponde(n)____ pan(es).

entre____ niño(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

entre____ niño(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

entre____ niño(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

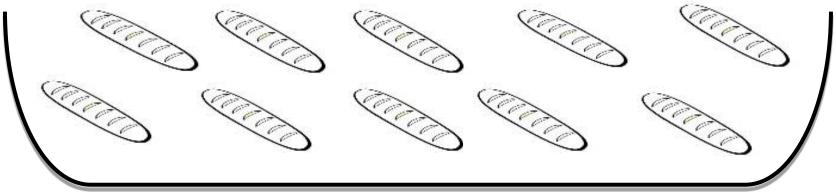
3) En una canasta hay 9 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **INEXACTA**? Da **UN** ejemplito.



9 panes

entre ____ niños. A cada niño le corresponden____ panes y sobran____ panes.

4) En una bolsa hay 10 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?



10 panes

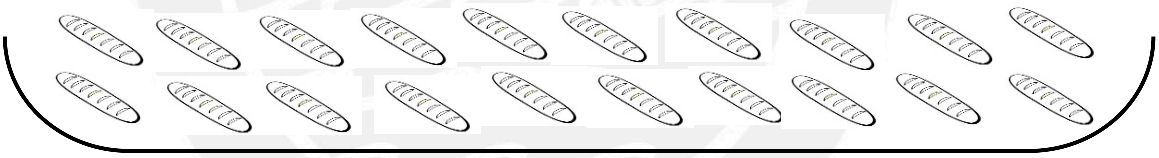
entre ____ niño(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

entre ____ niño(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

entre ____ niño(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

entre ____ niño(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

5) En una bolsa hay 20 panes, ¿entre cuántos niños podrías repartir estos panes de manera **EXACTA**?



20 panes

entre ____ niño(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

entre ____ niños(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

entre ____ niños(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

entre ____ niños(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

entre ____ niños(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

entre ____ niños(s). A cada niño le corresponde(n) ____ pan(es).

Ficha 4: “¡A repartir se ha dicho!”

“¡A repartir se ha dicho!”

Nombre y apellidos: ____

1) Tengo una caja que contiene 9 galletitas, ¿entre cuántos niños podré repartir estas galletitas de manera **EXACTA**?
   Da todos los ejemplos que puedas y en cada uno de tus ejemplos, escribe cuántas galletitas le correspondería a cada niño.

2) Si tengo una caja que contiene 14 galletitas, ¿entre cuántos niños podré repartir estas galletitas de manera **EXACTA**?
   Da todos los ejemplos que puedas y en cada uno de tus ejemplos, escribe cuántas galletitas le correspondería a cada niño.

3) Si he comprado una caja que contiene 35 galletitas, ¿entre cuántos niños podré repartir estas galletitas de manera **EXACTA**?
   Da todos los ejemplos que puedas y en cada uno de tus ejemplos, escribe cuántas galletitas le correspondería a cada niño.

4) Si tengo otra caja de 48 galletitas, ¿entre cuántos niños podré repartir estas galletitas de manera **INEXACTA**?
Da UN ejemplo, indicando cuántas galletitas le correspondería a cada niño y cuántas galletitas sobrarían después de la repartición.

5) Da tus propios ejemplos de reparticiones:

DOS ejemplos de repartición **EXACTA**	DOS ejemplos de repartición **INEXACTA**

TRABAJO DE CLASE

Situación 5: “En el supermercado”

Imagina que estás de compras en el supermercado TODO BARATO, y tienes una lista de productos que debes llevar a tu casa. En la lista tienes los siguientes productos:

Yogurt
Leche
Jabón
Jugo
Hot dog

*En este supermercado todo es barato, por eso puedes encontrar productos que solo se venden en **packs** (paquetes, agrupados) en distintas cantidades dependiendo del tipo de producto. De ninguna manera está permitida la venta de los productos por unidad. Todo se vende en packs.*

Objetivo: Determinar qué números son divisibles entre 2 y entre 3 (múltiplos de 2 y de 3) y qué números no son divisibles entre 2 (no son múltiplos de 2 y de 3), aunque no emplee estos términos.

Recomendación: sugerimos que se muestra un pack de 2 unidades de jugos y un pack de 3 unidades de jabones en físico, para que a todos los alumnos le queden claro que los productos no pueden ser vendidos por unidades.

ETAPA 1

Propósito: Hallar los múltiplos de 2.

Indicación: Mostrar el pack de jugos de dos unidades a los alumnos.

Note que:

En el supermercado TODO BARATO, los jugos que quieres comprar vienen en packs de dos unidades en cada pack.

Secuencia de preguntas:

a) ¿Podrás comprar 12 jugos? ¿Cuántos packs tendrías que comprar para llevar a casa 12 jugos?
b) Y, ¿podrás comprar 19 jugos? ¿Por qué?
c) ¿Se pueden comprar 29 jugos? ¿Por qué?
d) ¿Y se puede comprar 820 jugos? ¿Por qué?
e) Ahora, ¿se puede comprar 800 packs? ¿Cuántos jugos de estos podrá llevar a casa?

Cabe indicar que podemos seguir planteando preguntas similares a las anteriores. Después de trabajar como mínimo la secuencia de preguntas de esta etapa, plantearemos la siguiente pregunta:

f) ¿Cuáles son algunas posibles cantidades de jugos que podrás llevar a casa? O ¿Qué cantidades de jugos podría llevar a mi casa?

Para ayudar a los estudiantes en la respuesta de dicha pregunta, sugerimos que los estudiantes salgan a la pizarra a completar la siguiente tabla del papelote. Además es conveniente que posteriormente de completar la tabla los estudiantes revisen y corrijan, si es ese el caso, las respuestas incorrectas de sus compañeros.

Número de packs de jugos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
Número de jugos que llevarías a casa															

TRABAJO INDIVIDUAL: Sugerimos la aplicación de la Ficha 6.

<u>Ficha 6</u>: "Comprando en el supermercado"

"Comprando en el supermercado"

Nombre y apellidos: ______________________________________

____

En el supermercado TODO BARATO, los jugos que quieres comprar vienen en packs de dos unidades en cada pack.

a) Observa la figura y completa los espacios en blanco.

- Si compras 4 packs de jugos, llevarías _____ jugos a casa.
- Si compras 9 packs de jugos, llevarías _____ jugos a casa.
- Si llevas 14 jugos a casa, compraste_____ packs de jugos.
- Si llevas 22 jugos a casa, compraste_____ packs de jugos.

b) Responde las siguientes preguntas:

- Si necesitas 26 jugos, ¿Cuántos packs de jugos tendrás que comprar?

- ¿Podrás comprar 23 jugos? ¿Por qué?

c) Da 2 ejemplos de cantidades de jugos que podrías comprar.

- Podría comprar ______ jugos. Para esto tendría que comprar______ packs de jugo.
- Podría comprar ______ jugos. Para esto tendría que comprar______ packs de jugo.

¿Se podrán dar más ejemplos? ¿Cuántos?

d) Da 2 ejemplos de cantidades de jugos que NO podrías comprar.

- No podría comprar _______ jugos.
- No podría comprar _______ jugos.

¿Se podrán dar más ejemplos? ¿Cuántos?

TRABAJO DE CLASE

Retomamos la situación 5, a continuación mostramos la etapa 2.

ETAPA 2

Propósito: Hallar los múltiplos de 3.

Indicación: Mostrar el pack de jabones de tres unidades a los alumnos.

Note que:

En el supermercado TODO BARATO, los jabones que quieres comprar vienen en packs de tres jabones en cada pack.

Secuencia de preguntas:

a) ¿Podrás comprar 18 jabones? ¿Cuántos packs tendrías que comprar para llevar 18 jabones?
b) ¿Podrás llevar 26 jabones a tu casa? ¿Por qué?
c) ¿Cuántos packs puedes comprar que estén cerca de 26 jabones?
d) ¿Cuáles son algunas posibles cantidades de jabones que podrás llevar a casa?

Para dar respuesta a esta última pregunta, como en la etapa anterior, los alumnos completaran la siguiente tabla.

Número de packs de jabones	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
Número de jabones que llevarías a casa															

El siguiente propósito es introducir las expresiones "División exacta" y "División inexacta", reemplazando por los términos de "Repartición exacta" y "Repartición inexacta", así como introducir el algoritmo de la división de los números naturales. Para conseguir lo mencionado, podemos ver el trabajo que se presenta en el análisis de la sesión 10, específicamente en la etapa 3. En resumen se trabaja lo siguiente:

TRABAJO DE CLASE

División de números naturales

Secuencia de preguntas:

a) Dividir 26 canicas entre 5 niños, que es lo mismo que repartir 26 canicas entre 5 niños.

¿Cuántas canicas le doy a cada niño?

¿Con cuántas canicas me quedo después de la repartición?

b) Dividir 11 canicas entre 3 niños

¿Cuántas canicas le doy a cada niño?

¿Con cuántas canicas me quedo después de la repartición?

¿Qué tipo de división es?

c) Indicación: Dar ejemplos de divisiones exacta e inexacta de forma escrita.

TRABAJO INDIVIDUAL:

- Solicitar ejemplos de: divisiones exactas, divisiones inexactas.

- Sugerimos la aplicación de la Ficha 7, que a continuación mostramos.

Ficha 7: "División exacta e inexacta"

"División exacta e inexacta"

Nombre y apellidos: ____

____

Completa los espacios en blanco y luego marca con X el tipo de división que se obtiene

1) 8 canicas entre 3 niños

8 | 3

Número de canicas que le corresponde **a cada niño**

Después de la repartición **SOBRAN**

División Exacta

División Inexacta

2) 12 lápices entre 4 amigos

12 | 4

Número de lápices que le corresponde **a cada amigo**

Después de la repartición **SOBRAN**

División Exacta

División Inexacta

3) 19 figuritas entre 5 páginas

Número de figuritas que le corresponde **a cada página**

Después de la repartición **SOBRAN**

División Exacta

División Inexacta

4) 24 sillas entre 6 mesas

División Exacta

División Inexacta

El siguiente propósito es introducir la noción de divisibilidad en función de la noción de división exacta. El detalle del trabajo que se hace sobre este tema lo podemos observar en el análisis de la sesión 11, concretamente en la etapa 2 (ver capítulo 4). En resumen se trabaja lo siguiente:

TRABAJO DE CLASE

Divisibilidad de números naturales

Secuencia de preguntas:

a) ¿Entre qué números puedo dividir a 24 de manera exacta?
b) ¿24 es divisible entre qué números?
c) ¿18 es divisible entre qué números?
d) Indicación: por escrito, dar ejemplos de divisibilidad.

TRABAJO INDIVIDUAL:

- Proponer ejemplos de divisibilidad.
- Sugerimos la aplicación de la Ficha 8: “Divisibilidad”.

Ficha 8: "Divisibilidad"

"Divisibilidad"

a) Completa los espacios en blanco y responde adecuadamente las preguntas.

8 es divisible entre
- ____
- ____
- 2
- ____

• 8 es divisible entre 2. ¿Por qué? 8 ⌊ 2 8 entre 2 es una división: **Inexacta** **Exacta**	• 8 es divisible entre ___ ¿Por qué? 8 ⌊ 8 entre ___ es una división: **Inexacta** **Exacta**
• 8 es divisible entre ___ ¿Por qué? 8 ⌊ 8 entre ___ es una división: **Inexacta** **Exacta**	• 8 es divisible entre ___ ¿Por qué?

b) COMPLETA los espacios en blanco con las palabras de alguno de los recuadros de tal manera que tus afirmaciones sean VERDADERAS.

es divisible **no es divisible**

- 6 ___________________________ entre 2
- 10 ___________________________ entre 4
- 18 ___________________________ entre 3
- 22 ___________________________ entre 5

Responde cada una de las siguientes preguntas.

• ¿16 es divisible entre 5? SÍ NO ¿Por qué?	• ¿21 es divisible entre 3? SÍ NO ¿Por qué?
• ¿15 es divisible entre 5? SÍ NO ¿Por qué?	• ¿4 es divisible entre 8? SÍ NO ¿Por qué?

TRABAJO DE CLASE

Propósito: reforzar la noción de divisibilidad mediante ejemplos concretos. Es por que sugerimos que se trabaje lo siguiente.

Secuencia de preguntas

a) ¿1 es divisible entre 2?
b) ¿4 es divisible entre 8?
c) ¿3 es divisible entre 1?
d) ¿3 es divisible entre 2?
e) ¿3 es divisible entre 3?
f) ¿1 es divisible entre qué números?
g) ¿2 es divisible entre qué números?
h) ¿3 es divisible entre qué números?
i) ¿20 es divisible entre qué números?
j) ¿Qué números son divisibles entre 2?

El trabajo de esta secuencia de preguntas lo desarrollamos en el análisis de la sesión 12 y sesión 13 (ver el capítulo 4).

TRABAJO INDIVIDUAL:

- Proponer ejemplos de divisibilidad.
- Sugerimos la aplicación de la Ficha 8: “Divisibilidad”, Ficha 9: ¿Es divisible? y Ficha 10: “Criterio de divisibilidad por 5”. La última ficha, tiene como propósito indagar si los estudiantes pueden percibir que existen infinitos números naturales divisibles entre 5, y reconocer el criterio de divisibilidad por 5. Después de la aplicación de las 3 fichas, sugerimos plantear tres interrogantes, que más adelante detallamos.

  Para la aplicación de estas fichas, tener en cuenta que los estudiantes deben tener el tiempo suficiente para trabajar cada uno de los ítems que se plantean en cada ficha.

<u>Ficha 9</u>: "¿Es divisible?"

¿Es divisible?

Nombre y apellidos:____

Completa los espacios en blanco y responde adecuadamente las preguntas.

1) 18 | 3 ¿Qué tipo de división es? **Inexacta** ó **Exacta** Entonces, ¿18 es divisible entre 3? ¿Por qué?	2) 34 | 5 ¿Qué tipo de división es? **Inexacta** ó **Exacta** Entonces, ¿34 es divisible entre 5? ¿Por qué?
3) 48 | 48 48 entre 48 es una división: **Inexacta** ó **Exacta** Entonces, ¿48 es divisible entre 48? ¿Por qué?	4) 0 | 6 0 entre 6 es una división: **Inexacta** ó **Exacta** Entonces, ¿0 es divisible entre 6? ¿Por qué?

<u>Ficha 10</u>: "Criterio de divisibilidad por 5"

"Criterio de divisibilidad por 5"

Nombre y apellidos: ____

La siguiente afirmación es verdadera:

25 es divisible entre 5

a) ¿Qué otros números son divisibles entre 5?

Completa los espacios en blanco siguientes con algunos ejemplos de números que sean divisibles entre 5.

_____ es divisible entre 5

_____ es divisible entre 5

_____ es divisible entre 5

_____ es divisible entre 5

_____ es divisible entre 5

_____ es divisible entre 5

_____ es divisible entre 5

_____ es divisible entre 5

_____ es divisible entre 5

b) ¿Cuántos números divisibles entre 5 crees que se puedan encontrar en total? Explica.

c) ¿Cuáles son las características que nos ayudarían a reconocer un número que es divisible entre 5?

Después de la aplicación de las tres fichas (Ficha 8, Ficha 9 y Ficha 10) sobre el tema de divisibilidad, sugerimos plantear las siguientes preguntas:

- ¿Todo número es divisible entre él mismo? ¿Por qué?
- ¿Todo número es divisible entre 1? ¿Por qué?
- ¿0 es divisible entre qué números? ¿Por qué?