PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU

ESCUELA DE POSTGRADO

ESTUDIO DE LOS PROCESOS DE INSTRUMENTALIZACIÓN DE LA ELIPSE MEDIADO POR EL GEOGEBRA EN ALUMNOS DE ARQUITECTURA Y ADMINISTRACIÓN DE PROYECTOS

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de la Matemática que presenta el alumno

José Carlos León Ríos

ASESOR

Mg. Miguel Gonzaga

JURADO

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Dr. Gilson Bispo de Jesus

Lima – Perú

2014

Agradecimientos

La realización del presente trabajo de investigación, no hubiese sido posible sin el apoyo de un grupo selecto de profesionales e investigadores en didáctica de la matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Por ello quiero manifestar mi sincero reconocimiento a aquellas personas que contribuyeron al logro académico de este objetivo que representa un paso muy importante en mi formación profesional.

A mi asesor de tesis, Mg. Miguel Gonzaga, por sus orientaciones y sugerencias en la realización de esta investigación.

A mi profesora, Dra. Jesús Victoria Flores, por su apoyo incondicional, su actitud crítica, sus enseñanzas, su apoyo franco y directo durante el proceso de realización de la tesis.

Al Dr. Gilson Bispo de Jesus, de la Universidad Federal do Recôncavo da Bahía – UFRB Brasil, por sus valiosos aportes y por su disponibilidad en el proceso de revisión.

A mi profesora, Mg. Cecilia Gaita Iparraguirre, por encausarme en el campo de la didáctica en matemática y por el trato cordial que siempre me ha brindado.

A todos los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática por compartir sus experiencias profesionales a lo largo de todos estos años de clases.

Dedicatoria

A Marita, mi esposa que silenciosamente guía mi trayectoria y para dos luces que la alumbran Alejandrita y Jimena, nuestras hijas.

A mis queridos padres, Manfredo y Alicia, que apostaron siempre por la educación de sus hijos y sacrificaron buena parte de su vida por ello.

A mis hermanos Fernando, Rosa y Jorge Luis, porque a pesar del tiempo transcurrido seguimos mostrando afecto, cariño y dando muestras de solidaridad en las metas que emprendemos.

Al hombre bueno que no le teme a la oscuridad.

Resumen

Esta investigación trata de los procesos de instrumentalización de la elipse haciendo uso de del Geogebra como mediador y dirigido a los alumnos que llevan el curso de Matemática I y estudian la carrera de Arquitectura y Administración de Proyectos en una universidad privada de la ciudad de Lima. El proceso de instrumentalización, se basó fundamentalmente en el enriquecimiento de las propiedades de la elipse por parte del sujeto durante una secuencia de actividades mediadas por el software Geogebra y que permitió el surgimiento y descubrimiento progresivo de sus componentes. Desde este conjunto de actividades los alumnos identificaron la condición geométrica de la elipse, la relación entre sus parámetros, la excentricidad, la ubicación de los vértices, focos, extremos del eje menor, el trazo del lado recto y vincularon la representación gráfica a la expresión algebraica correspondiente, identificando la relación entre los semiejes de la curva elíptica y los elementos de dicha expresión algebraica. En esta tesis, la pregunta que orientó nuestra investigación fue: ¿Una secuencia de actividades mediadas por el Geogebra permite que los alumnos de Arquitectura y Administración de Proyectos instrumentalicen la elipse? Para la respuesta a esta interrogante planteamos como objetivo propiciar la instrumentalización de la noción de la elipse cuando los alumnos trabajan una secuencia de actividades mediadas por el Geogebra. En el análisis de las acciones de los alumnos, se eligió como referencial teórico el Enfoque Instrumental de Rabardel y como referencial metodológico la Ingeniería Didáctica de Artigue. A partir del diseño de nuestras actividades tratamos de describir el proceso de instrumentalización de la elipse e identificamos por medio de las acciones, los posibles esquemas de utilización que los alumnos construyeron o movilizaron cuando trabajaron una secuencia de aprendizaje mediada por el Geogebra. Observamos que el Geogebra como agente mediador, permitió en el sujeto no solo la elaboración de construcciones geométricas sino también la interacción, exploración, y manipulación de las actividades propuestas. La información recolectada y el posterior análisis de la secuencia de actividades, evidenciaron que los alumnos movilizaron esquemas previos que fueron señalados en la parte cognitiva de la Ingeniería Didáctica, los cuales facilitaron el desarrollo de las actividades y minimizaron las dificultades presentadas.

Abstract

This research deals with the instrumentalization processes of the ellipse using the Geogebra as mediator and is addressed to Mathematics I students in the career of Architecture and Project Administration at a private university in the city of Lima. The instrumentalization process was essentially based on the enrichment of the properties of the ellipse by the subject during a sequence of activities mediated by the Geogebra software and that made possible the emergence and progressive discovery of its components. From this set of activities the students identified the geometric condition of the ellipse, the relation between its parameters, eccentricity, location of vertex, foci, extremes of the minor axis, the stroke of the straight side length and linked the graphic representation to the appropriate algebraic expression by identifying the relation between the semi-axes of the elliptic curve and the elements of such algebraic expression. In this paper, the question that directed our research was: Does a sequence of Geogebra-mediated activities allow the Architecture and Project Administration students to instrumentalize the ellipse? In order to answer this question, our objective is to encourage the instrumentalization of the notion of ellipse when students work a sequence of Geogebra-mediated activities. In the analysis of the students' actions, Rabardel's Instrumental Approach was chosen as a theoretical reference and the Artigue's Didactic Engineering as a methodological reference. As from the design of our activities, we tried to describe the instrumentalization process of the ellipse and identified by means of the actions the possible schemes of use that the students constructed or mobilized when they worked a Geogebra-mediated sequence of learning. We observe that the Geogebra as a mediating agent allowed the subject not only to make geometrical constructions but also the interaction, exploration and management of the proposed activities. The collected information and the subsequent analysis of the sequence of activities evidenced that the students mobilized previous schemes that were indicated in the cognitive part of the Didactic Engineering, which facilitated the development of the activities and minimized any difficulties that may have arisen.

Lista de Figuras

Lista de Tablas

ÍNDICE

Consideraciones Iniciales

Nuestro trabajo de investigación se centra en los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra, investigación que surge por la necesidad de reconocer que existen otros planteamientos con sus propias complejidades que abarcan representaciones y construcciones geométricas, las cuales sirven como una propuesta adicional al proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica actual, donde tradicionalmente ha prevalecido el enfoque algebraico. Además, reconocemos el impacto del uso de los Ambientes en Geometría Dinámica (AGD), como medio para la exploración, confrontación y validación de los objetos matemáticos, específicamente el Geoegebra, como mediador en las actividades propuestas de la elipse. Dicho de esta forma, nuestras actividades buscaron promover no solo las acciones centradas en las construcciones geométricas que dieron origen a las propiedades de la elipse, sino también fomentar la interacción continua y la comprensión intuitiva de la geometría, cuando los alumnos desarrollaron las actividades propuestas.

Debemos resaltar además, que esta tesis forma parte del proyecto Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em ambientes tecnológicos PEA-MAT/DIMAT desarollado entre la PUCP y la PUC-SP/Brasil que cuenta con el apoyo del Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Nuestro trabajo de investigación se encuentra estructurado en cuatro capítulos:

En el primer capítulo, La Problemática, presentamos algunas investigaciones relacionadas al aprendizaje de la elipse haciendo uso de construcciones geométricas y otras relativas al uso de ambientes de Geometría Dinámica en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, las cuales constituyen elementos fundamentales como sustento de mi investigación. De igual forma, dada la integración de la tecnología a nuestro trabajo de investigación, hemos creído conveniente incluir la descripción de algunas herramientas del software Geogebra y presentar aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) como marco teórico para analizar el proceso de instrumentalización de la elipse cuando es mediada por el Geogebra.

Sobre la base de estas consideraciones es que formulamos nuestra pregunta y nuestro objetivo de investigación.

En el segundo capítulo, Procedimientos Metodológicos, escogimos como metodología de investigación algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), pues nos permite analizar el entorno didáctico de nuestro objeto de estudio, además de una contrastación de los resultado, los cuales se basan en la confrontación interna entre el análisis *a priori* y *a posteriori* de las secuencias de aprendizaje diseñadas. En el proceso experimental trabajamos con alumnos del primer ciclo de una universidad particular de la ciudad de Lima, con edades que oscilan entre los 16 y 18 años.

En el tercer capítulo: Aspectos Históricos y Estudio de la Elipse, presentamos una breve descripción histórica de la noción de elipse basada en Boyer (1987) y que abarcan algunos aspectos de los trabajos de Menecmo $(350\,\text{a.C})$, Apolonio de Perga $(262-190\,\text{a.C})$ y la obra de Descartes $(1596-1650\,\text{a.C})$. También mostramos los principales fundamentos teóricos de la Elipse del texto de Lehmann (2003), cuya obra abarca los temas que se incluyen generalmente en los textos de Geometría Analítica.

En el cuarto capítulo, Experimento y Análisis, caracterizaremos a los sujetos de investigación y elaboraremos un análisis de la prueba de diagnóstico propuesta a los alumnos descritos en la caracterización. Al mismo tiempo procedemos a realizar una descripción del experimento donde detallamos los recursos y los instrumentos que usamos. Finalmente describimos la secuencia de actividades que serán analizadas de acuerdo al Enfoque Instrumental y a la Metodología de la Ingeniería Didáctica.

Finalmente, señalamos que el interés por elaborar el estudio de la elipse desde la óptica de las construcciones y representaciones gráficas, nos ha perseguido desde nuestros primeros contactos en la enseñanza de estas figuras cónicas en la docencia universitaria. En la actualidad, la influencia de los AGD, específicamente el software Geogebra, y la revisión de algunas de las investigaciones pertinentes a nuestro tema, han logrado enriquecer nuestro trabajo, y han guiado la presente investigación.

CAPÍTULO 1 – LA PROBLEMÁTICA

En este capítulo mostramos algunas investigaciones vinculadas al aprendizaje de la elipse como construcción geométrica y otras relacionadas al uso de Ambientes de Geometría Dinámica (AGD), ambientes que estamos interesados en utilizar en esta investigación. Procedemos también a justificar nuestro tema de estudio basado en estas investigaciones y mencionamos desde nuestra experiencia profesional como docente universitario, algunas dificultades en el aprendizaje de la Elipse. También hemos incluido la descripción de algunas herramientas y comandos del Geogebra que fueron utilizadas en el desarrollo de la investigación y se ha elaboró una síntesis de los aspectos más importantes del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), la cual se erige como el marco teórico en el proceso de instrumentalización de la Elipse y que integra a los programas de AGD, específicamente el Geogebra como mediador del aprendizaje.

1.1 Antecedentes

De las investigaciones revisadas en Educación Matemática, mencionamos la investigación de Fernández (2011) referente al aprendizaje de las cónicas (Parábola, Elipse e Hipérbola) haciendo uso del Cabri Géométre II Plus, así como la investigación de Santa (2011) quien estudia a la elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado del papel. Ambas investigaciones consideran la representación del objeto geométrico como recreación en un ambiente interactivo y como objeto tangible en el caso del doblado de papel, nos permiten estrategias complementarias al enfoque analítico de la elipse.

También tomamos como base las investigaciones de Salazar (2009), Chumpitaz (2013) y Jesús (2012), quienes realizan investigaciones utilizando el Enfoque Instrumental. Los dos primeros autores integran los AGD a sus investigaciones.

Otra investigación que se enmarca en la misma línea teórica es la investigación de Sandoval (2009) quien estudia a la geometría dinámica como herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. Analiza cómo esta influye en la estructura de los esquemas cognitivos.

Finalmente, comentamos los trabajos de Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strasser (2006), en los que podemos hallar una amplia investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría utilizando AGD.

A continuación detallamos las investigaciones señaladas:

El trabajo de Fernández (2011), hace un estudio de la secuencia de ocho situaciones didácticas para el aprendizaje de las cónicas vistas como lugares geométricos. Las situaciones transitan desde lo puntual (conjunto de puntos que da forma a la figura pero sin ser la figura), a lo global (una curva o una construcción de un punto móvil que contiene a esa nube de puntos representada por una ecuación algebraica) y en otros casos desde lo global, a lo puntual de algunas de sus propiedades intrínsecas.

El investigador hace una presentación de la problemática de investigación, indica la escasez de estudios sobre lugares geométricos, la tendencia a marginar curricularmente a las cónicas como contenido geométrico. Como contraparte menciona que el fomento de las construcciones geométricas mediadas por ambientes de geometría dinámica, serviría como complementariedad entre lo sintético y analítico.

En ese sentido, Contreras et al. (2002 citado en Fernández, 2011) asegura que el tratamiento excesivamente analítico de las cónicas en la mayoría de cursos y textos escolares de educación secundaria en España y que como consecuencia los alumnos de primer año de universidad no tienen idea de esta temática, reconociendo la necesidad de establecer un puente entre lo sintético y lo analítico, recomendando la integración de un conjunto de construcciones, incorporando elementos visuales como parte de su actividad matemática.

De la misma forma, Velásquez et al. (2007 citado en Fernández, 2011) establece que la presentación clásica de la geometría analítica predominan contenidos desde el punto de vista algebraico, formalista y que los efectos de este tratamiento trae entre otros resultados limitaciones en la formación de conceptos principales de la geometría analítica.

En todo caso memorización de definiciones sin significado y poca contribución a desarrollar habilidades matemáticas como comprender, visualizar y comunicar las actividades.

De igual forma Del Río Sánchez, J. (1990 citada en Fernández, 2011), indica que se observan errores recurrentes referidos a las propiedades intrínsecas de las cónicas obtenidas de manera perceptual, en un estudio realizado a alumnos de 17 años en la Universidad de Salamanca, constata que el estudiante confunde y da por válida la afirmación que un óvalo construido por cuatro arcos de circunferencia es una elipse y que la curva no es considerada como un objeto independiente del sistema de referencia.

Fernández (2011), señala que estas dificultades pueden ser superadas en la medida que las estrategias de solución establezcan una complementariedad entre el enfoque cartesiano y sintético, por ello reconoce la necesidad de fomentar las construcciones geométricas de las curvas cónicas como otra competencia básica asociada al razonamiento y comunicación de los saberes matemáticos.

La investigación del autor, fue realizada con 25 alumnos del segundo semestre de la Licenciatura de Matemáticas de un Universidad de la ciudad de Pasto, Colombia. La edad promedio de los alumnos que cursaban el curso de geometría analítica era de 18 años. Los alumnos ya habían tenido experiencia en el uso del Cabri en el semestre anterior, durante los meses de febrero, marzo y abril del 2009. Los alumnos trabajaron previo a la experimentación, algunos conceptos y procedimientos de la elipse desde el enfoque analítico, tal como se estila en el curso tradicional de geometría analítica.

La pregunta de investigación está referida a los fenómenos didácticos que genera la mediación del Cabri II Plus en la actividad matemática de los alumnos que se inician en un curso de geometría analítica, elaborando construcciones geométricas de las cónicas desde lo puntual y global, es decir desde un conjunto de puntos que da forma a la figura pero sin ser la figura hasta una curva representada por una ecuación algebraica. La metodología en la que se base esta investigación es la micro Ingeniería didáctica de Artigue (1995), de orden cualitativo.

En la investigación de Fernández (2011), algunas de las conclusiones indican que la determinación de los puntos de una curva, sobre la base de ciertas construcciones geométricas, posibilita el trazo global influenciado por el Cabri y en algunos casos, el alumno consigue además la representación algebraica cuando emplea un sistema de ejes coordenados, revelando así la posibilidad de la integración sintética y analítica. Asimismo, resalta la importancia del diseño de una secuencia de situaciones para transitar de lo global a lo puntual aludiendo a puntos de la curva que pueden ser claves como el vértice, foco. Finalmente, el tratamiento de estas construcciones permite despertar sus percepciones, imágenes mentales y fortalecer el proceso de la visualización.

Acerca del dispositivo experimental, la autora elabora ocho actividades, tres relacionadas con parábolas, tres con elipses y dos con hipérbola. Algunas de estas actividades son relevantes pues nos permitieron adaptarlas a nuestro trabajo de investigación. Nos pareció pertinente la generación de representaciones gráficas a través de un conjunto o nube de puntos, la conjetura por parte de los alumnos de los posibles lugares geométricos y la validación de estas conjeturas por medio de alguna construcción geométrica dinámica, que en algunos casos pudieron ser adaptados al tema de la elipse, que es nuestro objeto matemático de estudio.

La siguiente investigación, corresponde a Santa (2011), dicho estudio tiene por objetivo general analizar la comprensión de la elipse como lugar geométrico, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele (1986), utilizando la geometría del doblado de papel. La experimentación la realiza con cinco alumnos del grado décimo de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín, no se indica la edad de los estudiantes.

Respecto al planteamiento del problema, la investigadora menciona que en los niveles secundarios y universitarios se siguen planteando ejercicios donde el estudiante se limita a elaborar esbozos de las elipses a partir de las ecuaciones algebraicas generales y canónicas sin que haya de por medio una reflexión de los lugares geométricos y la aplicación de otros conceptos geométricos como la de mediatriz y circunferencia vistas como lugar geométrico. Refiere que la elección de la elipse y no de la hipérbola como tema de investigación, se debe a que la suma de longitudes de segmentos en la elipse se torna más sencillo para los alumnos que una diferencia, en el caso de la hipérbola y que sin ser el propósito de la investigación, el estudiante logra la comprensión de otros conceptos geométricos posteriores como el de la hipérbola.

Santa (2011) hace una descripción de siete axiomas o postulados, basado en los axiomas del doblado de papel de Huzita y Haotie, y en correspondencia a los conceptos primitivos de la geometría euclidiana. Basándose en estos axiomas del doblado de papel, realiza construcciones, que pueden ser desde rectas mediatrices, hasta hipérbolas. Los temas tratados estuvieron vinculados a conceptos previos como el de la geometría euclidiana, fortalecimiento de conceptos básicos en torno a la elipse como lugar geométrico, y experiencias en construcciones con doblado de papel: construcción de rectas perpendiculares, mediatrices, etc.

La investigadora, distingue los niveles de razonamiento pre descriptivo, de reconocimiento visual (I), de análisis (II) y de clasificación (III), que es el más alto en la caracterización de la comprensión del objeto de estudio. En el nivel pre descriptivo la investigadora, considera que el alumno reconoce algunas nociones básicas como punto, recta, segmento, distancia, perpendicularidad y se le dificulta la construcción de una mediatriz. En el de reconocimiento visual, realiza la construcción de la mediatriz, circunferencia, elipse pero le dificulta reconocer las propiedades que los caracterizan. En el nivel de análisis reconoce la mediatriz y la circunferencia como lugares geométricos y sobre esta base, identifica a los elementos propios de una elipse. Se le dificulta emplear la mediatriz como lugar geométrico cuando se quiere establecer que la suma de dos segmentos dados es el radio de la circunferencia inicial. Finalmente en el nivel de clasificación, el estudiante determina la condición que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la elipse y es capaz de llegar a la definición de la elipse como lugar geométrico

Notamos que las nociones de mediatriz y circunferencia, son mencionadas en los niveles de análisis y clasificación como conocimientos previos de los alumnos para determinar la condición que debe cumplir un conjunto de puntos que pertenece a una elipse, es decir *dado* *un punto de la elipse, la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante.* Estas nociones fueron incorporadas en nuestra investigación, como conocimientos previos que los alumnos deben movilizar para resolver nuestras actividades propuestas.

De las conclusiones de la investigación de Santa (2011), podemos resaltar que las propiedades de los niveles de razonamiento, con relación a unos descriptores, permiten explicar que los alumnos no pueden avanzar al nivel inmediatamente superior si no han superado sus saberes previos con relación al concepto de elipse como lugar geométrico.

La investigadora afirma que el estudiante puede llegar a la comprensión de la elipse gracias a un mecanismo visual – geométrico que le brindan las actividades y las construcciones hechas en papel.

En nuestro trabajo de investigación no hicimos uso de un objeto tangible como la hoja de papel pero sí de algún programa de geometría dinámica, específicamente el Geogebra, que permitió la representación gráfica y la manipulación del objeto haciendo uso de las herramientas que el Geogebra brinda, como el arrastre y otras herramientas de transformación.

Desde ese punto de vista, creemos que en el trabajo de la investigadora, la manipulación representó el agente mediador en el doblado del papel así como el uso del Geogebra para las representaciones gráficas. La autora, indica que producto de este aprendizaje del doblado de papel, el alumno realiza construcciones y es a partir de estas construcciones que el estudiante logra entender la noción de elipse como lugar geométrico. Por lo tanto en nuestra fase de elaboración de actividades, hemos adaptado algunas secuencias propuestas por la investigadora a nuestra secuencia de actividades.

Por otro lado, hemos considerado las investigaciones de Chumpitaz (2013), Salazar (2009) y Jesus (2012), cuyos trabajos de investigación se enmarcan en el enfoque instrumental. Las dos primeras investigaciones hacen referencia a la influencia de los AGD como mediadores del objeto de estudio matemático y el tercer trabajo busca identificar los esquemas de utilización que los alumnos forman cuando instrumentan la mediatriz.

En ese mismo contexto, se analiza la investigación de Sandoval (2009) referido al papel de los AGD como una herramienta que media entre el conocimiento perceptivo y geométrico.

Respecto a Chumpitaz (2013), el investigador emplea el Enfoque Instrumental y como referencial metodológico la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). Las actividades se realizaron en tres sesiones con alumnos del curso de Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería en la Universidad San Ignacio de Loyola.

El autor plantea elaborar una secuencia de aprendizaje para minimizar las dificultades de los alumnos cuando instrumentalizan propiedades de la función definida por tramos, usando el Geogebra, como herramienta mediadora. Para ello estudia las acciones que los alumnos movilizan en las situaciones propuestas en las actividades de su investigación.

En la investigación, el autor presenta diez actividades, las cuatro primeras están referidas a la instrumentalización del Geogebra y las preguntas restantes a la instrumentalización del objeto de estudio. Nuestra investigación no instrumentaliza el Geogebra pues no es nuestro foco de investigación, por lo tanto creemos pertinente tomar como relevantes las actividades que nos remiten a los procesos de instrumentalización de la función definida por tramos y adaptarlos a nuestro objeto de estudio. Por ejemplo, en las preguntas 6 y 7, el autor instrumentaliza el dominio, rango e intervalos de crecimiento de una función a través de la representación gráfica de la función par y de algunas herramientas del Geogebra. De igual forma hace uso de la Vista algebraica del Geogebra para instrumentalizar la regla de correspondencia de la función. En sus conclusiones, indica que el uso del Geogebra minimiza las dificultades en identificar el dominio y en elaborar la representación gráfica. Estas características de la función definida por tramos, son adquiridas por el sujeto debido al proceso de instrumentalización de su objeto matemático.

De igual forma, Jesus (2012), elabora un estudio de las construcciones geométricas y de la génesis instrumental de la mediatriz. El proceso de elaboración del instrumento se realiza tomando como referencia el artefacto abstracto mediatriz. De esta forma la investigación apunta a analizar – con base en las acciones de los profesores – cómo el artefacto mediatriz se transforma en instrumento en la resolución de problemas geométricos. Además, Jesus (2012) investiga cómo este proceso puede contribuir al aprendizaje de los contenidos geométricos por parte de los profesores.

El marco teórico empleado en dicha investigación es el Enfoque Instrumental, el cual constituye relevante para su estudio de investigación, porque le permite analizar las acciones de los profesores cuando resuelven tareas haciendo uso de la mediatriz y de esa forma identificar los posibles esquemas de utilización que los alumnos forman en las construcciones geométricas. Dentro de sus objetivos, el autor estudia el proceso de la Génesis Instrumental de la mediatriz, es decir la transformación del artefacto a instrumento a través de las acciones y del uso de los esquemas de utilización de los profesores en la resolución de problemas geométricos. Con base a estos objetivos, la investigación se enfoca en saber de qué modo ocurre la génesis instrumental en la mediatriz cuando el sujeto integra este objeto matemático durante la resolución de problemas geométricos y cómo la inserción del objeto matemático mediatriz interfiere en el proceso de aprendizaje de los contenidos geométricos por parte del sujeto. El autor señala que las primeras actividades de los profesores, muestran indicios que la mediatriz constituye un artefacto, y esto debido a que las construcciones geométricas elaboradas, no tenían formas consistentes de definición. Posteriormente mediante problemas de construcción geométrica utiliza la mediatriz y amplia el alcance de la técnica de la construcción de la mediatriz, avanzando los profesores en su proceso de Génesis Instrumental. Creemos relevante para nuestra investigación, el análisis que empleó el autor pues nos sirvieron de apoyo, para identificar los posibles Esquemas de Utilización en el proceso de la génesis instrumental. En relación a nuestro trabajo de investigación, señalamos que la condición geométrica de la elipse, es decir *dado un punto de la elipse, la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante*, fue construida como un esquema de acción instrumentada cuando se movilizaron esquemas de uso como la mediatriz y circunferencia vistos como lugares geométricos. Posteriormente, dicho Esquema de Acción Instrumentada evolucionó como posible Esquema de Uso, con el objetivo de instrumentalizar otra componente artefactual, ya que nuestro objeto matemático cuenta con diversas componentes artefactuales.

En tanto la investigación de Salazar (2009), tiene como objetivo observar cómo los alumnos de segundo año de secundaria se apropian de las transformaciones geométricas en el espacio cuando interactúan con el AGD Cabri 3D. Además como objetivo adicional, analizar los constructos que elaboran los alumnos cuando realizan dichas acciones mediante el modelo de Situaciones de Actividades Instrumentadas. Para dicho estudio se planteó como preguntas de investigación ¿De qué forma los estudiantes se apropian de las herramientas y/o recursos del ambiente Cabri 3D cuando estudian algunas transformaciones geométricas en el espacio? , ¿Cómo la integración del Cabri 3D interfiere en el proceso de aprendizaje de esas transformaciones geométricas en el espacio?.

Como referencial teórico, Salazar (2009) usa el Enfoque Instrumental de Rabardel y la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval.

De las conclusiones de dicha investigación podemos considerar como aporte a nuestra investigación, que la inexperiencia de los alumnos con el programa Cabri 3D no significó un obstáculo para que los alumnos interactúen durante las actividades y que los AGD les permite trabajar con representaciones dinámicas, superando incluso el carácter estático, propio de los ambientes de lápiz y papel. De igual forma, se tomó en cuenta alguna de las actividades animadas que la investigadora presenta, específicamente en nuestra actividad diez, consideramos la descripción de la órbita elíptica del cometa Halley alrededor del sol, haciendo de la representación una trayectoria animada de la elipse.

Asimismo, creemos pertinente, mostrar el trabajo de Sandoval (2009), referido al papel de la geometría dinámica como una herramienta que media entre el conocimiento perceptivo y geométrico.

En este trabajo de investigación, la autora utiliza técnicas de tipo cualitativo, exploratorio – descriptivo ya que se hace un análisis de la relación entre lo perceptivo y lo teórico del razonamiento de los estudiantes al resolver problemas apoyados en el Cabri. El trabajo se desarrolló con 15 alumnos entre 15 a 18 años con conocimientos elementales en geometría y sin experiencia alguna en ambientes de geometría dinámica.

La investigadora aplica un monitoreo desde el inicio de las actividades y de todas las acciones que realizan durante la prueba, se incluyen lecturas del enunciado, utilización de herramientas, sistematización, validación de las soluciones, cambio de significados y una participación muy activa del profesor.

Entre sus conclusiones, Sandoval (2009), menciona a la geometría dinámica como un instrumento semiótico y que a partir de allí el razonamiento geométrico puede verse enriquecido por el surgimiento y desarrollo de estrategias argumentativas en la resolución de problemas. Además que la geometría dinámica ofrece un campo de exploración que no es posible en las representaciones con lápiz y papel. Indica que la dificultad relacionada al aprendizaje de las propiedades geométricas o la de descubrir relaciones estructurales de los objetos geométricos, pueda deberse al tipo de representación estática que se usa para movilizar las ideas geométricas en una clase y que en ocasiones, un dibujo a mano por ejemplo, puede generar dificultades que impidan llegar a una solución. Además, señala cómo los estudiantes utilizan la percepción como medio de deducción, es decir que la representación no alcanza al mismo tiempo a ser concebida como objeto perceptivo y estructural. Al respecto, en un estudio que se realiza en Mayo del 2005 a estudiantes de secundaria en un estado de la República Mexicana, se indica que aproximadamente el 82% de los alumnos muestran una fuerte tendencia a establecer únicamente medidas perceptivas vinculadas con las representaciones geométricas y desligadas de la información numérica que se alcanza.

El trabajo de dicha autora, se basa en también en el Enfoque Instrumental. La autora menciona que este enfoque establece que toda forma de conocimiento está mediada por la acción de una herramienta y que la mediación de una herramienta transforma la naturaleza de la construcción. Además, menciona que los instrumentos cumplen una función muy importante como parte activa en la construcción del conocimiento mediante sus acciones, y que la apropiación del instrumento por parte de los alumnos, resulta de un desarrollo progresivo de génesis instrumental.

De la investigación de Sandoval (2009), tomamos en cuenta el uso del Geogebra, como elemento mediador para el aprendizaje de la elipse, y la influencia que este programa ejerce en las estructuras cognitivas que los estudiantes han desarrollado.

De igual forma que ciertas herramientas como medición, arrastre o construcciones auxiliares ayudaron a la validación de sus conjeturas y a realizar la transición de lo perceptivo a lo estructural, como el caso de la actividad cuatro en la que la deformación de la elipse, permitió percibir la relación de los parámetros que representan la longitud del semieje mayor y semidistancia focal, relación llamada excentricidad.

Además de las investigaciones referidas, hemos creído necesario considerar algunas investigaciones que explican el avance histórico y el desarrollo de los ambientes de geometría dinámica y cómo han propiciado nuevas actividades de enseñanza hacia los objetos matemáticos.

Precisamente, en la actualidad el uso de nuevas tecnologías, nos brindan la posibilidad de trabajar en estos tipos de ambientes, los cuales nos ofrecen un nuevo ambiente de aprendizaje educativo. Sobre este entorno de trabajo los alumnos pueden manipular, explorar, experimentar con elementos geométricos gracias a la plataforma interactiva que estos programas ofrecen.

En ese sentido, Laborde et al. (2006) indican que algunos intentos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría han llevado a algunos investigadores a centrarse en el rol que juegan las representaciones gráficas proporcionadas por los ambientes en geometría dinámica.

Sobre este tema, los investigadores mencionan que en los últimos 30 años se han desarrollado ambientes tecnológicos que han ofrecido caminos novedosos para llevar a cabo actividades geométricas en la educación matemática y que en las últimas décadas se han desarrollado principalmente dos clases de tecnologías relativas a las representaciones gráficas: *Logo driven Turtle (*TG) y *Dynamic geometry environments* (DGE).

El *Logo driven Turle* (TG), es un lenguaje de programación educativo, diseñado en la década del 60 y que tiene su primera aparición digital en la década del 80, nos permite dibujar y generar una variedad de formas básicas de patrones y figuras geométricas. Sobre la segunda tecnología (DGE), Laborde et al. (2006) señalan que a la fecha se han desarrollado aproximadamente 70 programas, entre ellos el Cabri-Géomètre (1988), GEOLOG Inventor (2003), Geometric Supposer (1985), y Thales (1993), y que estos programas dan muestra de la interactividad y manipulación directa en las representaciones gráficas, haciéndolas interactivas y dinámicamente manipulables.

Es importante señalar que la incursión de la tecnología en el ámbito de la enseñanza de la matemática, especialmente en la geometría, ha derivado en la difusión de múltiples enfoques con la intención de engranarlos a la enseñanza. Así, por esos años un grupo de educadores e investigadores fundan en 1976 la agrupación International *Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), organización que promueve información científica y estimula la investigación interdisciplinaria en el campo de la educación matemática y que congrega entre 700 a 800 miembros de alrededor de 60 países.

Precisamente, los investigadores, basados en las actas y publicaciones de Educación Matemática desarrolladas en jornadas internacionales por el grupo PME, explican el proceso evolutivo de la tecnología, haciendo un análisis de la naturaleza epistemológica de la geometría, los problemas con los que la enseñanza se ha enfrentado en las pasadas décadas y los enfoques teóricos que se han usado para integrar la tecnología dentro de la enseñanza.

Una de las principales conclusiones a las que llegan Laborde et al. (2006), en cuanto a la perspectiva epistemológica de la geometría es que la enseñanza ha estado acompañada de manera continua por el estudio de conceptos y relaciones lógicas provenientes de un análisis del espacio pero por otro lado, esto se fue convirtiendo en un campo de investigación y discusión axiomática.

Esta coexistencia de dos tendencias en la enseñanza de la geometría también es señalada por Hilbert (1952 citado en Laborde et al. 2006), fundador del enfoque axiomático de la geometría, quien menciona la existencia de esta dualidad: una hacia la abstracción y la otra hacia la comprensión intuitiva de la geometría.

Los investigadores indican que este enfoque dual empírico y teórico, se acrecienta de manera significativa debido a la reforma de la matemática llamada matemática moderna que se implanta en algunos países, la cual priorizaba la parte formal de la geometría evitando las representaciones gráficas. Se enfatizan los procesos deductivos, axiomáticos y simbólicos, renunciándose a la idea de representaciones gráficas y geométricas.

Laborde et al. (2006) mencionan también, que esta dualidad hizo que algunos investigadores notaran la carencia de representaciones gráficas vinculadas a sus significados geométricos. Paralelamente, ante esta situación nacen distintas posturas que focalizan sus investigaciones en los procesos cognitivos involucrados en la actividad geométrica y en el carácter estructural de sus representaciones dejando apartada la tendencia abstracta y axiomática. Es entonces que a finales de los ochenta y a inicios de los noventa distintos enfoques teóricos emergen reintroduciendo los diagramas en la enseñanza geométrica que habían tenido acogida en los finales de los setenta e inicios de los ochenta.

En nuestro trabajo de investigación se aplicó uno de los enfoques teóricos que aparece en la década de los ochenta, el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), del cual comentaremos en los siguientes capítulos.

Así mismo, los autores indican que algunos intentos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría los lleva a centrarse en el rol que juegan las representaciones gráficas proporcionadas por el entorno informático y por lo tanto muchos investigadores y educadores resaltan la importancia de la visualización, la cual va mucho más allá del reconocimiento visual de relaciones espaciales.

Recalcan que la enseñanza de la geometría debería contribuir, entre otros, a la distinción entre relaciones gráficas en el espacio y relaciones teóricas geométricas, al reconocimiento de relaciones geométricas en un diagrama, al movimiento de los objetos y sus representaciones espaciales. Estos supuestos llevan, a que la enseñanza y el aprendizaje de la geometría se hallen focalizados en las representaciones gráficas que disponen los ambientes tecnológicos.

Al respecto, Gutiérrez (1991) indica que la utilidad de la visualización y las representaciones gráficas en la enseñanza de las matemáticas está siendo reconocida por muchos educadores y profesores de la matemática.

Gutiérrez (1991), afirma que la geometría puede ser considerada como el origen de la visualización en la matemática y que la revolución tecnológica que ha ocurrido en los últimos años, la popularización de las computadoras y las herramientas multimedia, provee de nuevos elementos para impulsar la enseñanza de la geometría.

Por ello, consideramos importante aclarar el término visualización, tomando como referencia a este investigador, el cual indica que la visualización está integrada por 4 elementos principales: las imágenes mentales, representaciones externas, procesos de visualización y habilidades de visualización. Las imágenes mentales provienen de representaciones externas como objetos físicos, conceptos, dibujos, etc. Los procesos de visualización se realizan al convertir información abstracta en imágenes visuales o al comprender e interpretar las representaciones visuales y extraer de ellas la información que llevan. Las habilidades, son las usadas por los individuos para la creación y procesamiento de datos.

En ese contexto, nuestro trabajo de investigación hace uso de un ambiente vinculado con la geometría dinámica, específicamente el Geogebra, el cual puede facilitar la visualización, construcción, transformación, la exploración y reconocimiento de las propiedades de las figuras geométricas para el aprendizaje y la enseñanza de los estudiantes. Las imágenes que se dispondrán en el monitor, en algunos casos corresponderán a imágenes dinámicas, en las que los elementos u objetos se desplazan, por ejemplo el referido al lugar geométrico de la elipse. En este caso, el estudiante interpretará estas representaciones visuales obteniendo algunas propiedades del objeto matemático. Según Gutiérrez (1996), la coordinación motriz de los ojos para seguir el movimiento de los objetos de manera eficaz, constituye una habilidad de un individuo.

De lo anterior, es importante distinguir que las construcciones geométricas son parte del entorno que debe existir entre lo conceptual y lo espacial de la geometría y que las investigaciones muestran la importancia de la visualización en la actividad geométrica en un ambiente en el cual el estudiante pueda interactuar con el objeto matemático.

Mostramos en los párrafos siguientes, algunos trabajos de investigación en el que se menciona el rol de la geometría dinámica como parte del entorno tecnológico en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Destacamos a Trouche (2000 citado en Laborde, 2006) por las investigaciones realizadas con calculadoras gráficas y simbólicas, enmarcadas en el enfoque instrumental que articula las relaciones entre el uso de la herramienta y el desarrollo de los conceptos. Otros investigadores como Drijers (2003 citado en Laborde, 2006) han empezado también a aplicar la teoría en el desarrollo del álgebra, con el uso de otras herramientas tecnológicas como el *Computer Algebra Systems* (CAS).

Teniendo en cuenta las investigaciones revisadas relativas a la elipse y cónicas, así como las referidas a los programas de ambiente de geometría dinámica (AGD), presentamos la justificación de nuestro tema de investigación.

1.2 Justificación del tema de investigación

En nuestra experiencia como docente, hemos notado que las construcciones geométricas y la noción de lugar geométrico están siendo desatendidas en el campo de la geometría desde hace algún tiempo a pesar que existe en los últimos años, una tendencia a recuperar el lugar en la enseñanza.

Existe un marcado interés en enfocar el estudio de las cónicas como un tratamiento excesivamente analítico, donde prevalece el punto de vista algebraico y en la que se han ido marginando las representaciones de los lugares geométricos en el aprendizaje de las cónicas, de esta forma el alumno va perdiendo el desarrollo de habilidades y competencias de las aplicaciones de sus estrategias geométricas de construcción que les fueron enseñados como conocimientos previos y una serie de errores, dificultades van surgiendo en los alumnos, de los cuales hago mención en los siguientes párrafos.

Tales evidencias también son señaladas por Fernández (2011) cuando problematiza el estudio de las cónicas. El autor reconoce distintas categorías de problematización, como la tendencia a marginar curricularmente las cónicas del contenido geométrico, la desatención de las construcciones geométricas y la escasez de estudios sobre lugares geométricos.

En su investigación Fernández (2011) indica:

> Las investigaciones en didáctica de la geometría analítica, suelen señalar la importancia de no subestimar ni dejar de lado el sistema lógico deductivo de axiomas, postulados, definiciones que emergieron en una época anterior de Descartes y también recomienda tener en cuenta, las construcciones geométricas de las curvas cónicas como otra competencia básica, y como un proceso importante en la actividad matemática asociada al razonamiento y comunicación de saberes matemáticos (p. 26).

De igual forma, el autor indica que la importancia de tomar en cuenta las construcciones geométricas es un proceso en la actividad matemática asociada a los saberes del razonamiento y de la comunicación.

Por ello se sugiere la necesidad de promover las construcciones geométricas como una forma de integración del aprendizaje de las cónicas al enfoque analítico actual. El investigador señala la importancia de establecer una complementariedad entre el enfoque sintético y el analítico, las cuales han sido reconocidas por otros investigadores.

Por ejemplo Contreras et al. (2002 citado en Fernández, 2011), indica sobre la complementariedad de los enfoques sintéticos y analíticos.

> Se reconoce la necesidad de conectar los dos enfoques, lo cual da lugar a una propuesta integradora de la visión sintética y analítica para el estudio de la elipse. Para establecer este puente entre los sintético y lo analítico, recomiendan que el profesor integre un universo de construcciones tanto sintéticas como analíticas, extenso y rico en significados,

> incorporando elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas (p. 25).

Esta problematización surge debido a ciertos conceptos erróneos de las cónicas se han puesto en evidencia en el aprendizaje de los alumnos. Investigadores como Del Río Sánchez, J. (1990), obtiene resultados preocupantes sobre las cónicas en una muestra en 305 estudiantes españoles de 17 años promedio.

Por ejemplo, Del Río Sánchez, J. (1990), resalta que las propiedades intrínsecas de las cónicas obtenidas perceptualmente son adquiridas de manera errónea, al afirmar que un óvalo construido por cuatro arcos de circunferencia es una elipse o que las cónicas (una elipse por ejemplo) no representan un objeto independiente del sistema de referencia y que los estudiantes no perciben a las cónicas como conectas con la realidad.

Algunos de estos resultados tienen relación con las halladas por Sandoval (2009), al referirse sobre las representaciones de un dibujo mal hecho. Al respecto, la autora indica:

> Con frecuencia los alumnos tienen dificultades para decodificar una representación geométrica, para descubrir las relaciones estructurales y, más aún, para describirlas coherentemente y utilizarlas en la resolución de un problema. En ocasiones la representación puede generar obstáculos que impidan llegar a la solución (p 7).

En ese sentido Fernández (2011), toma en cuenta las potencialidades de los ambientes en AGD en cuanto al campo de la exploración que no es factible en lápiz y papel. Indica que los esquemas de uso construidos para el arrastre y la medición te permiten confrontar tu percepción, es decir un reorganizador de conceptos.

Así mismo, hemos creído conveniente seleccionar como objeto de investigación a la elipse y no a la hipérbola basándonos en el trabajo de Santa (2011) el cual indica que con la elipse los estudiantes pueden visualizar de una manera más directa la suma de las longitudes de los segmentos que como diferencia, en el caso de la hipérbola.

Por nuestra experiencia como docente, hemos detectado que esta problemática descrita en el caso de la elipse, también es percibida en los alumnos de la asignatura de Matemática I de Estudios Generales de la Universidad donde realizamos el estudio.

Es así que hemos creído pertinente mencionar algunos errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la elipse.

- Debido a que no es común el uso de algún programa de AGD, las representaciones gráficas son mayoritariamente estáticas, lo que contribuye a la poca difusión de representaciones dinámicas referidas a los lugares geométricos de las cónicas y a la desatención gradual de dicho tema en los programas curriculares. Sin embargo, en nuestra opinión, creemos que el lugar geométrico resultaría un complemento favorable al enfoque actual de la enseñanza y aprendizaje de la elipse, ya que establecería un nexo entre la geometría sintética y la analítica. Además, se propiciaría en los alumnos, el uso de las construcciones geométricas movilizando nociones previas como mediatriz y circunferencia, lo que traería como resultado el reforzamiento y la reutilización de estos constructos geométricos.

- En las clases no es usual iniciar el tema de la elipse sin hacer uso de los ejes coordenados El alumno considera a la elipse como una curva que depende necesariamente de un sistema de referencia debido a la tendencia que existe de representarlas en el sistema de coordenadas cartesiano. Observamos que existe un interés por darle mayor protagonismo a las expresiones algebraicas que, por ejemplo, a la condición geométrica de la elipse. Al respecto, Laborde et al. (2006) indican que los conceptos tradicionales de la geometría euclidiana han recibido mayor atención por parte de los investigadores que otros conceptos como los lugares geométricos.

- Notamos ciertas concepciones erradas de los alumnos respecto a las propiedades invariantes de la elipse. Se observa, por ejemplo, que hay una tendencia a suponer que cualquier cuerda perpendicular al eje focal representa siempre el lado recto de la elipse o que una elipse es un óvalo formado por arcos de circunferencia, esto en referencia a la investigación que realiza Del Río Sánchez, J. (1990) y que mencionamos en los párrafos anteriores.

- Si el objeto matemático es trasladado o rotado a otro sistema de referencia, entonces se les dificulta analizar que ciertas propiedades de dicha cónica, como lado recto, eje mayor y menor, excentricidad, condición geométrica de la elipse, se mantienen invariantes

Hemos considerado hacer uso del AGD, como fuente de apoyo a la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Este tema ha sido materia de investigación en las últimas décadas y ha involucrado a toda la comunidad educativa, en la que estamos inmersos los docentes como protagonistas del cambio.

Al respecto Sandoval (2009), indica que:

> Durante los últimos años, La geometría ha venido recuperando su lugar en la enseñanza. Ello se debe en gran medida, al impulso recibido desde la geometría dinámica (GD), que ha puesto de manifiesto el carácter estructural de los dibujos que se generan sobre la pantalla de las computadoras o calculadoras. Hoy día, se vuelven a plantear problemas que han sido recurrentes para la enseñanza de la geometría, como la confusión entre los objetos geométricos y los dibujos que la representan (p. 6).

Al respecto la investigadora recalca el papel de la geometría dinámica como una herramienta mediadora entre el conocimiento perceptivo y el geométrico, es decir la capacidad de descubrir relaciones estructurales de los objetos geométricos que pueden enriquecerse por los modos de argumentación o por la forma de expresarlos de manera oral o escrita. En nuestro trabajo de investigación hicimos uso del Geogebra, el cual integramos en nuestro estudio como instrumento que permitió la mediación entre el objeto matemático y los alumnos involucrados en la presente investigación.

Todas estas consideraciones señaladas, muestran la importancia de efectuar la investigación en el tema de la elipse, desde una perspectiva distinta a la que tradicionalmente se ha venido enfocando.

A continuación, presentamos algunas de las características que describen este programa de AGD, Geogebra como mediador entre la elipse y el sujeto, lo cual nos permitió desarrollar las actividades elaboradas en nuestro estudio de investigación.

1.3 El Geogebra

El Geogebra es un software libre de geometría dinámica para todos los niveles de educación que interactúa y combina la geometría, el álgebra, las estadísticas y el cálculo. Está escrito en Java y por tanto disponible en múltiples plataformas.

El creador del programa, Markus Hohenwarter estudió educación matemática y ciencias de la computación en la Universidad de Salzburgo, Austria. Su interés estuvo centrado en la aplicación de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el año 2002 crea el software Geogebra como parte del proyecto de su tesis en maestría de ciencias de la computación en Salzburgo, Austria. Posteriormente, obtiene un doctorado en Educación Matemática y se involucra en numerosos proyectos, inicialmente en Austria, luego en Europa y posteriormente en Estados Unidos.

Actualmente, ya son 50 idiomas a los que el programa ha sido traducido. Se cuenta con la participación de personas de distintas partes del mundo, las cuales están involucradas en la mejora del software trabajando en el código fuente. Además se han creado una serie de Institutos por todos los continentes, los cuales están conformados por un grupo de profesores, investigadores de colegios y universidades, operando como una comunidad para apoyar a estudiantes y a profesores en la difusión de este programa de geometría dinámica.

De acuerdo a su página oficial (geogebra.com), ya existen Institutos ubicados en regiones como las de Argentina, Brasil, Chile, Colombia y Uruguay quienes al formar parte de la cadena Instituto Geogebra Internacional comparten materiales de libre disposición, organizan talleres, conferencias, jornadas y trabajan en proyectos relativos al Geogebra. De igual forma, se anuncia que pronto habrá una aplicación disponible para la Tablet y posteriormente se lanzará una versión libre del Geogebra en tres dimensiones.

Enseguida, indicamos el uso de algunas de las herramientas y comandos que usaremos en nuestro trabajo de investigación.

En la figura 1, mostramos el sitio web del programa:

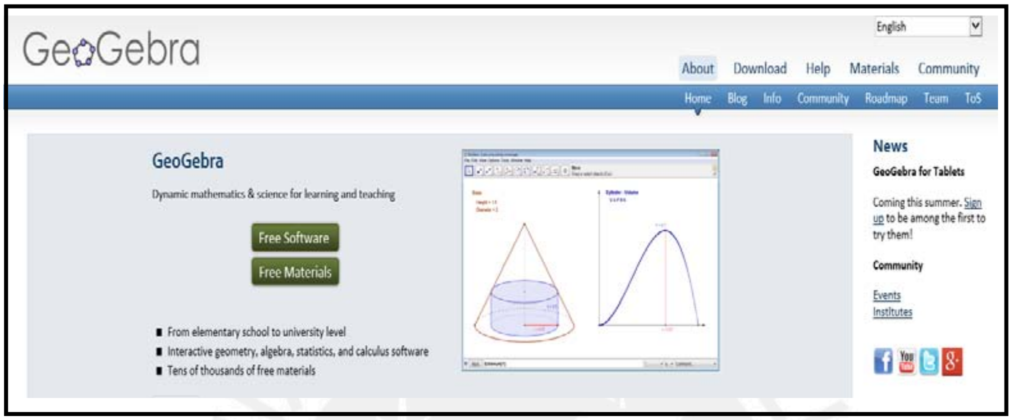


Figura 1. Página oficial del Geogebra

En la figura 2, se observa la Vista Algebraica y Gráfica. Se puede trabajar paralelamente en ambas vistas, de tal forma que se aprecie la representación gráfica en la parte derecha y su expresión algebraica o las coordenadas del objeto en el lado izquierdo.

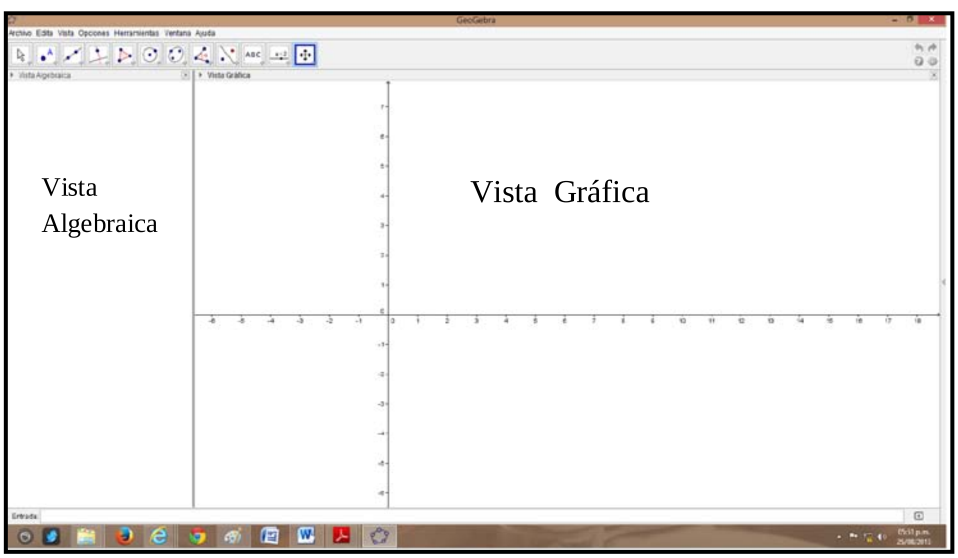


Figura 2. Vista Algebraica y Gráfica

En la figura 3, se muestra la barra de Menú y de Herramienta. Se puede apreciar que al seleccionar una de las herramientas se despliegan los comandos.

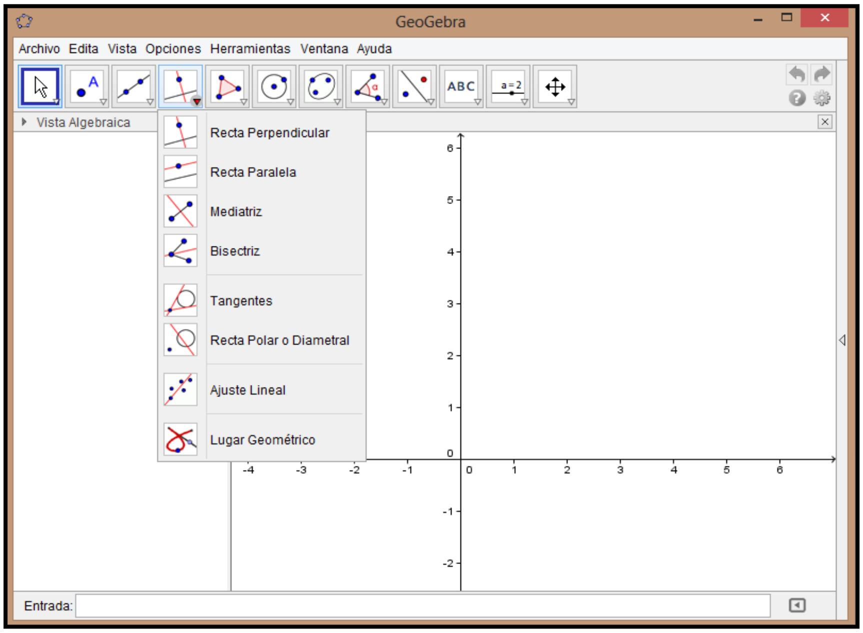


Figura 3. Barra de Menú y Herramientas

En la figura 4, se muestra que para desaparecer temporalmente la Vista Algebraica, Vista Gráfica o los ejes coordenados, puedes desplegar la opción Vista y seleccionar el comando correspondiente. También se pueden ocultar los ejes coordenados al seleccionar el ícono de ejes que aparece en la esquina izquierda de vista gráfica

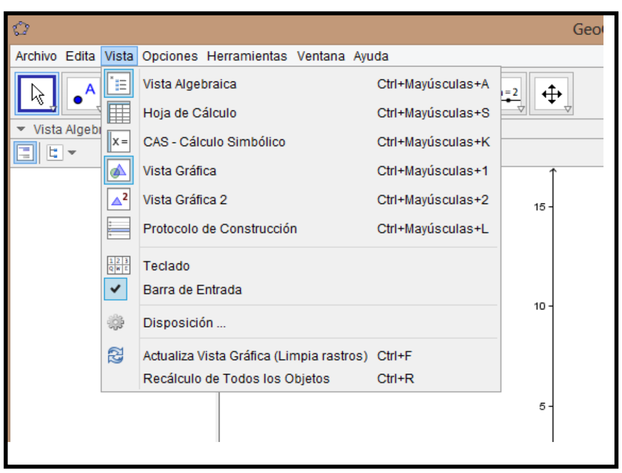


Figura 4. Vista Algebraica

El ingreso de variables, coordenadas, funciones, pueden ser digitadas a través de la a barra de Entrada. Por ejemplo, en la figura 5, se observa que la representación gráfica de la circunferencia se consiguió por la digitación de la ecuación correspondiente.

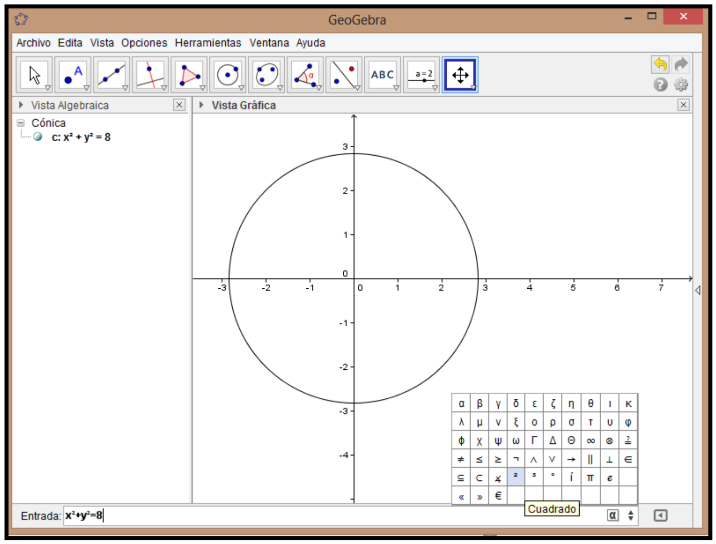


Figura 5. Barra de Entrada

En la figura 6, se dispone de un teclado virtual. Para ello, en la opción Vista de la Barra de Menú seleccione el comando Teclado. Allí podrán ingresar símbolos de manera directa como si se tratase de un teclado de los dispositivos periféricos de la computadora.

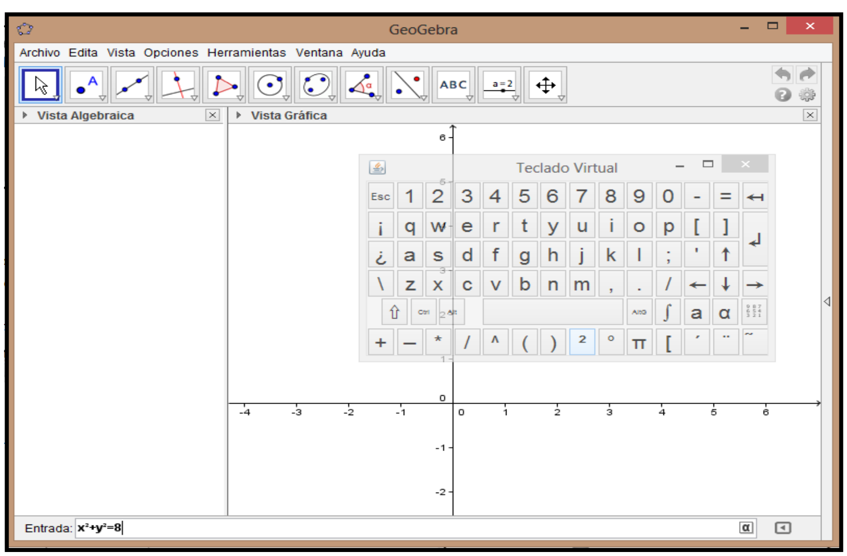


Figura 6. Teclado Virtual

Como se aprecia en la figura 7, en el menú Vista se puede acceder a la Hoja de Cálculo, Esta Hoja de Cálculo no sólo te permite realizar operaciones aritméticas sino que puedes crear una lista de números y trasladarla a tu zona gráfica.

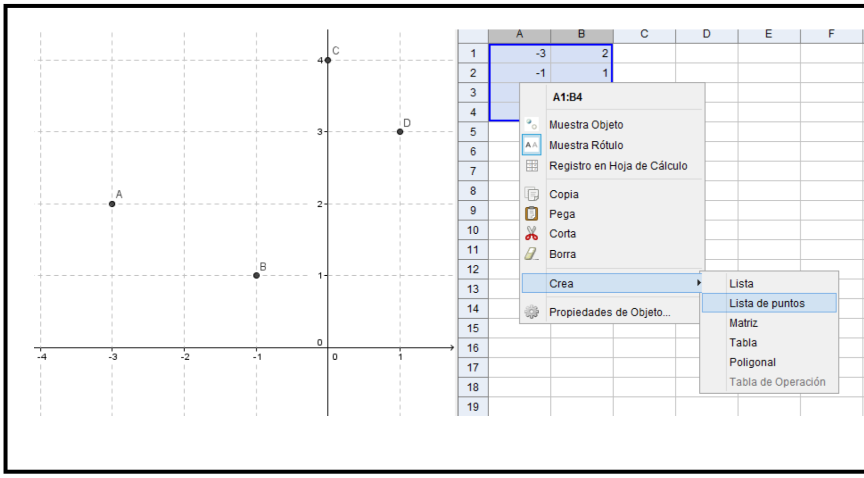


Figura 7. Hoja Algebraica

En la figura 8, se muestra que el Geogebra asigna nombres a los objetos por orden alfabético, estos podrán ser renombrados colocando el cursor sobre el objeto y pulsando el botón derecho para desplegar el menú contextual y digitar el nuevo nombre del objeto en la ventana Renombrar.

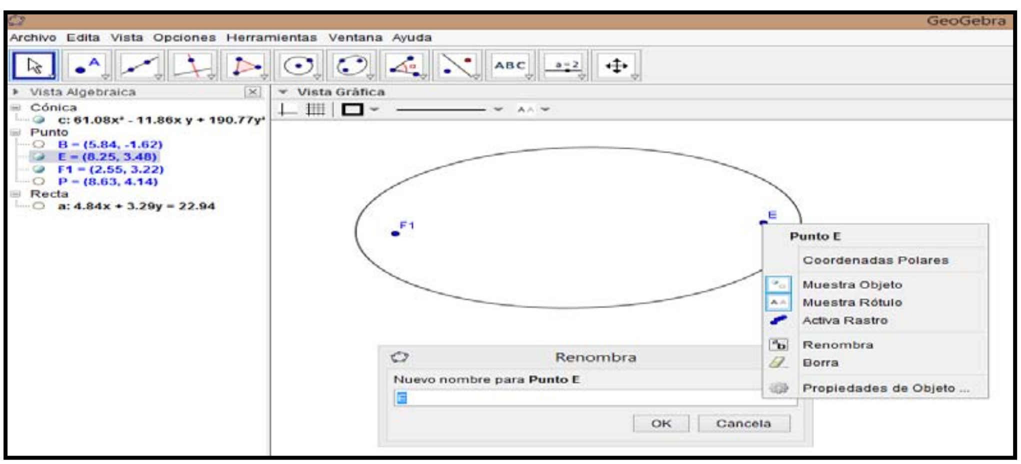


Figura 8. Renombrar el Objeto

Para efectuar algún cambio en el objeto como color, estilo, nombre, rótulo, valor, etc., se despliega un Menú Contextual, como se observa en la figura 9, y se selecciona las Propiedades del Objeto.

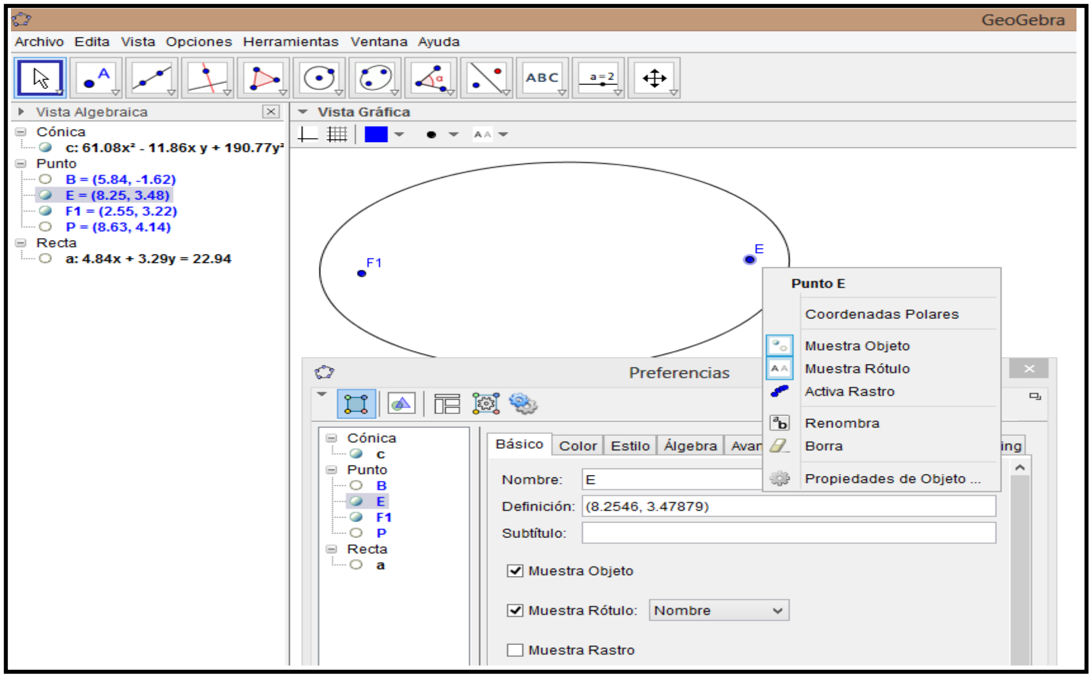


Figura 9. Propiedades del Objeto

La casilla Muestra Objeto, se usa para desaparecer o aparecer algún objeto de nuestra zona de trabajo. La casilla Muestra Rótulo, se usa de manera similar en la aparición o desaparición del nombre, valor o subtítulo, como mostramos en la figura 10.

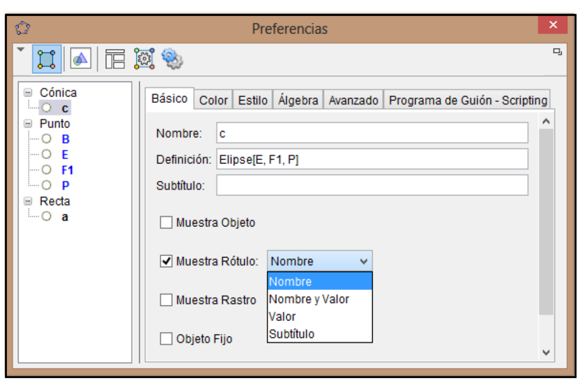


Figura 10. Muestra Rótulo

El Comando deslizador te permite asignarle a un elemento geométrico, por ejemplo el radio, un intervalo de valores, de tal forma que este elemento pueda ir aumentando o disminuyendo conforme lo haga también el deslizador. En la figura 11 se muestra la creación del deslizador con un rango que varía de -5 y 5, que posteriormente el usuario lo vincule a algún elemento geométrico.

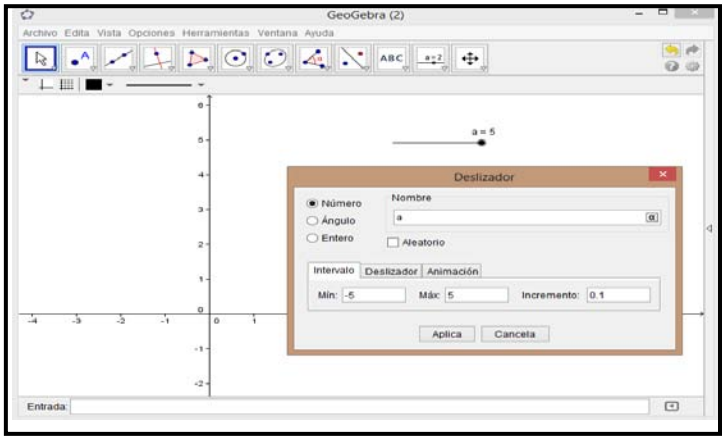


Figura 11. Comando Deslizador

La herramienta Activa Rastro permite elaborar un trazo que deja una huella al desplazar un punto determinado. Se visualiza en el Menú contextual del punto.

En la figura 12, se aprecia la huella de los puntos que gozan de determinada propiedad.

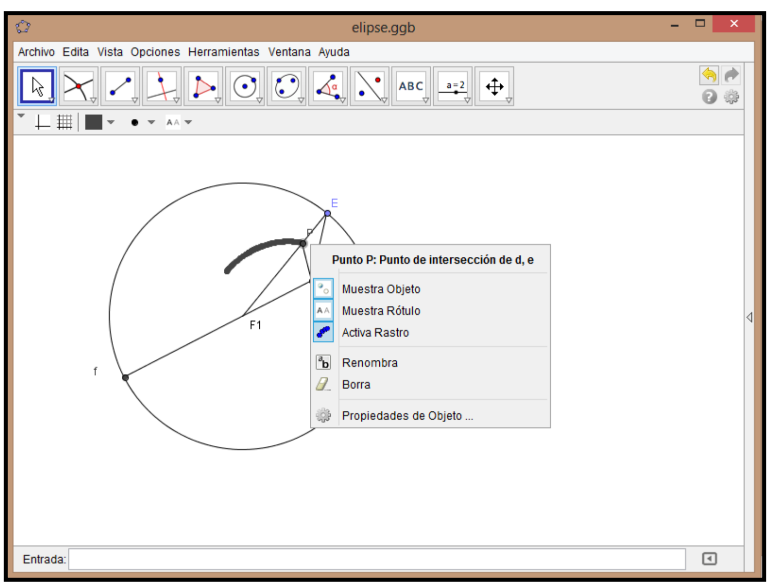


Figura 12. Activa Rastro

Para desactivar el rastro del objeto, usar Actualiza Vista (Limpia rastro) en la barra de menú vista. De esa manera se eliminará cualquier trazo anterior. Ver figura 13.

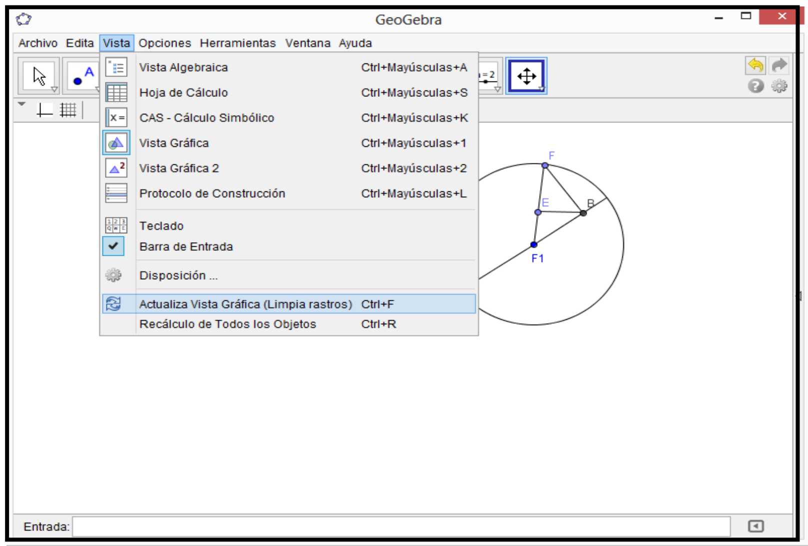


Figura 13. Actualiza Vista

El programa Geogebra también permite exportar las construcciones como páginas web interactivas y guardarlas en Geogebra *Tube*. Además, se puede usar el Lenguaje *Latex*, la cual aparece en Insertar Texto en la barra de menú, como se observa en la figura 14.

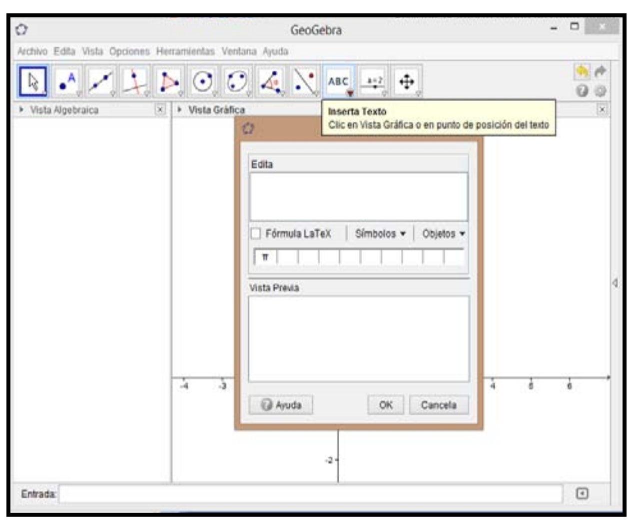


Figura 14. Insertar Texto

Creemos importante mencionar las acciones de la herramienta arrastre la cual nos permite transitar de la geometría estática a la dinámica, conservando las propiedades del objeto matemático representado.

Según Silva et al. (2011), el uso del arrastre influye en la estrategia de la resolución del problema y por lo tanto en una forma de hacer inferencias ya que permite pasar de una geometría estática a una dinámica, en la que las construcciones conservan su propiedades geométricas cuando los elementos del objeto geométrico sean arrastrados.

Los investigadores afirman que han identificado seis tipos de arrastre en su trabajo de investigación: dos arrastres erráticos, dos arrastres guiados, un arrastre vinculado y un arrastre para validar o invalidar.

Dentro de los arrastres erráticos se hallan los desplazamientos que el alumno puede realizar a la zona gráfica o al objeto matemático representado pero sin un objetivo o plan específico, es decir de manera aleatoria. El objeto es modificable pero sin que importe cómo es esa modificación. Los arrastres guiados, en cambio, son los arrastres de objetos y de la zona gráfica con la finalidad de modificarlos y darles una forma particular. Finalmente la autora considera el arrastre vinculado que trata de conectar un objeto a otro con el objetivo de moverlos, como el deslizamiento de un punto sobre una curva y el arrastre para validar o invalidar una propiedad o característica del objeto.

Finalmente, hemos identificado en nuestra investigación, algunas herramientas que restringieron las acciones de los alumnos durante el desarrollo de la secuencia de aprendizaje. Así, encontramos que las herramientas "Intersección de objetos", "Activa Rastro", "Compás", "Muestra Objeto", y "Barra de Entrada", opusieron al sujeto una serie de restricciones que Rabardel (1995), clasifica como restricciones de existencia, de intención y de acción, los cuales han sido detallados en el siguiente capítulo.

Presentemos entonces algunos aspectos relevantes del Enfoque Instrumental, el cual representa nuestro marco teórico de nuestra presente investigación con el que logramos analizar las actividades que permitieron las instrumentalización de la elipse.

1.4 Aspectos del Enfoque Instrumental

Consideraremos en nuestro trabajo de investigación el Enfoque Instrumental presentado por Rabardel (1995), el cual servirá como marco teórico para estudiar la instrumentalización de la elipse mediada por un programa de geometría dinámica como el Geogebra.

En esta parte describiremos algunos términos del Enfoque Instrumental del que haremos uso en nuestro trabajo de investigación.

El autor indica que en toda situación de actividad o de utilización de artefactos, instrumentos, existe siempre una tríada de elementos relacionados de manera explícita o implícita, formada por el sujeto, el instrumento y el objeto.

El sujeto puede entenderse como un usuario, alumno; operario, trabajador, agente, individuo, grupo de individuos o estudiantes que desarrollan una determinada acción en un instrumento. El instrumento puede ser una herramienta, máquina o sistema, una propiedad, de tal forma que sirve como mediador entre el sujeto y el objeto. El objeto, es todo aquello donde va dirigida la acción con ayuda del instrumento.

El autor señala también que el término "objeto material fabricado" es un sinónimo de artefacto, y que prefiere esta última denominación por ser un término más liviano, de designación neutra que no especifica un tipo de relación particular con el objeto al que te diriges. Además, indica que desde el punto de vista antropológico, el artefacto es toda cosa que ha sufrido una transformación de origen humano y que es elaborada para inscribirse en actividades intencionales, siendo la intencionalidad la causa de su existencia. Es decir, que el artefacto, material o no, puede transformar a los objetos y concreta una solución a un problema o a una clase de problemas sociales.

Sobre el artefacto, el autor señala que puede ser definido desde distintos enfoques. Desde el punto de vista técnico: el artefacto es un objeto que el hombre debe conocer, para poder administrarlo con el fin de que responda a ciertos criterios prescritos o simplemente esperados, funciona según sus leyes y restricciones propias. Desde el punto de vista de sus funciones: el artefacto es un productor de transformaciones del producto tratado, sin concebir al artefacto como un sistema funcionando, sólo desde la perspectiva de lo que produce, de lo que le sucede a los objetos. Finalmente visto como medio de acción, el artefacto tiene un status de medio para la acción del sujeto, un medio que el sujeto asume para operar sobre un objeto.

Rabardel (1995), indica que el instrumento no existe en sí, sino es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, como medio para la misma. El artefacto puede ser un medio material como un computador o puede referirse también a un medio simbólico, como la representación gráfica de una elipse en el monitor de una computadora. El autor designa el término instrumento, para designar el artefacto en situación, inscrito en su uso, en una relación instrumental entre dos entidades que son el sujeto, el usuario del instrumento y el objeto sobre el cual se actúa. La característica principal es adaptarse al sujeto y al objeto, en términos de propiedades materiales pero también en términos cognitivos y semióticos. Por ejemplo, la condición geométrica de la elipse *dado un punto de la elipse la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante,* representa una noción que movilizamos para determinar que dicha constante es igual a la longitud del eje mayor de la elipse, es decir *dado un punto de la elipse la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es igual a la longitud del eje mayor.* Este descubrimiento progresivo de las propiedades del artefacto elipse en términos de propiedades materiales, vendrá acompañado por el cambio de significado de la condición geométrica de la elipse en términos cognitivos y semióticos, es decir el sujeto va asociando nuevos componentes artefactuales a sus esquema condición geométrica de la elipse, generando el enriquecimiento de las propiedades del artefacto elipse por parte del sujeto. El artefacto pasará al estado de instrumento, cuando el sujeto le asigne los esquemas de utilización correspondientes, es decir el autor propone considerar al instrumento como una entidad mixta que comprende tanto artefacto como los esquemas de utilización.

Sobre los esquemas de utilización, el investigador indica que son esquemas relacionados con la utilización de un artefacto y que estas actividades comprenden dos dimensiones. La primera, referida a las actividades que se focalizan en las características, propiedades y actividades específicas del artefacto, y son llamadas tareas segundas o esquemas de uso

(EU). Otras orientadas hacia el objeto de la actividad, hacia la tarea principal del sujeto, llamadas las actividades primeras o esquemas de acción instrumentada (EAI).

Un mismo esquema puede, dependiendo de la situación, ser un esquema de uso y en otra circunstancia un esquema de acción instrumentada. Por ejemplo, si se desea hallar la longitud del lado recto de una elipse en términos de sus semiejes, la condición geométrica de la elipse, podría ser un esquema de uso o podría tratarse también de un esquema de acción instrumentada para un alumno que inicia el estudio de la elipse.

Los esquemas de utilización, pueden ser elaborados tanto individual como socialmente. La elaboración individual corresponde a una dimensión propia para cada individuo, mientras que la dimensión social comprende otros usuarios, ya que el sujeto no está solo, e incluso los creadores del artefacto, son parte del surgimiento de los esquemas. Por ejemplo, el lenguaje, los signos, los esquemas son considerados (Vygotsky, citado por Rabardel, 2011), como instrumentos psicológicos que median la relación del sujeto consigo mismo y con los demás, es decir los instrumentos permiten, no solamente la regulación y la transformación del medio externo, sino también la regulación, de la conducta del propio sujeto y la conducta de los otros. Rabardel (1995), considera una tercera dimensión de esquema, el de los esquemas de actividad colectiva instrumentada (EACI) que corresponde a la utilización en conjunto de un instrumento en un contexto de actividades compartidas.

Los esquemas de utilización están relacionados, por un lado con los artefactos pues los convierten en medios; y por otra parte, con los objetos sobre los cuales estos artefactos permiten actuar. Además, los esquemas de utilización son polifuncionales porque se dirigen a la comprensión de las situaciones, a la transformación de situaciones, la obtención de resultados, la orientación y al control de la actividad en la que se trabaja.

Por lo tanto Rabardel (1995), afirma que el instrumento no puede ser reducido a un artefacto, a un objeto técnico o máquina. El instrumento es al igual que el signo una entidad bifacial, de doble cara o mixta, que comprende a la vez un artefacto y modos de uso, ambas indisociables, se da en términos de propiedades materiales, pero también cognitivas y semióticas, dependiendo de la actividad a la que el instrumento este destinado

Rabardel (1995), afirma sobre el instrumento:

> Es una entidad mixta, que incluye una componente artefactual (un artefacto, una fracción de artefacto o un conjunto de artefactos) y una componente cognitiva (el o los esquemas de utilización) (Rabardel 2011, p.178).

Además agrega, que las dos componentes del instrumento: artefactos y esquemas, pueden también tener relación de independencia. Un mismo esquema puede aplicarse a una multiplicidad de artefactos de la misma clase, por ejemplo, los esquemas de utilización de una elipse pueden ser llevados también a la noción hipérbola. De manera recíproca, un artefacto es susceptible de ser insertado en otros esquemas de utilización que le atribuirán significados y funciones distintas. La Elipse puede ser insertada en otros esquemas de utilización como la construcción de elipsoides.

Los instrumentos, nos indica el autor, pueden evolucionar en situaciones en las que el sujeto utilice el instrumento. Por ello los instrumentos pueden ser efímeros pero también puede tener carácter permanente, como medio disponible para acciones futuras. Este carácter de permanencia y de reutilización del instrumento, es la asociación de dos invariantes el artefactual y el esquemático. Estos procesos son caracterizados en términos de procesos de instrumentalización e instrumentación, dos orientaciones diferentes y conjuntas.

El autor define la Génesis Instrumental como la elaboración instrumental o el proceso de construcción de un artefacto a un instrumento, el cual se realiza por medio de la instrumentalización (actividad va dirigida hacia la componente artefacto del instrumento) y la instrumentación (actividad va dirigida al sujeto mismo). Ambos procesos, según indica el investigador, contribuyen de manera solidaria al surgimiento y a la evolución de los instrumentos

Sobre lo anterior, el investigador indica que

> Los procesos de instrumentalización se refieren al surgimiento y la evolución de los componentes artefacto del instrumento: selección, reagrupación, producción e institución de

> funciones, desvíos y catacresis, atribución de propiedades, transformación del artefacto (estructura, funcionamiento, etc.) que prolongan las creaciones y realizaciones de artefactos cuyos límites son difíciles de determinar debido a este proceso de transformación.
>
> Los procesos de instrumentación son relativos al surgimiento y a la evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada: constitución, funcionamiento, evolución por acomodación, coordinación, combinación, inclusión y asimilación recíproca, asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos (Rabardel 2011, p. 211).

En nuestro trabajo de investigación, hicimos surgir y evolucionar las propiedades de la elipse. La primera componente artefactual que se intentó instrumentar fue la condición geométrica de la elipse: *dado un punto de la elipse la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante*, dicha condición geométrica es un EAI.

Para lograrlo, los alumnos movilizaron EU como por ejemplo las nociones de mediatriz y circunferencia, las cuales fueron consignadas en el análisis cognitivo como saberes previos al tema de la elipse. Además verificamos que los alumnos se hallaban instrumentados en relación a la mediatriz de un segmento, pues movilizaron la propiedad que indica que si un punto pertenece a una mediatriz de un segmento entonces equidista de los extremos del segmento. En actividades posteriores la condición geométrica de la elipse *dado un punto de la elipse la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante*, fue movilizada por los alumnos en otras tareas como determinar la relación entre los parámetros de una elipse, para lo cual fueron explícitos en sus aplicaciones. Esta descripción nos condujo a pensar que la condición geométrica de la elipse funcionó como EAI en algún momento y luego evolucionó para un EU en otro. Ambos procesos, instrumentalización e instrumentación, relativos al surgimiento de las componentes del artefacto y a la evolución de los esquemas de utilización como esquemas de acción instrumentada, nos permitieron finalmente, instrumentar la elipse, pues en las actividades finales, específicamente en la actividad nueve y diez, hay indicios que los alumnos tuvieron indicios de cuestiones de reconocimiento de sus propiedades que les permitió movilizarlas en determinadas situaciones, como la generación de órbitas elípticas de un cometa alrededor del sol.

A partir de las atribuciones de funciones de un artefacto, el autor distingue dos niveles de instrumentalización.

En un primer nivel, la instrumentalización local, relacionada con una acción singular y con circunstancias de su desarrollo. El artefacto está instrumentalizado momentáneamente.

En el segundo nivel, la función adquirida se conserva de manera durable como una propiedad del artefacto en relación con una clase de acciones, de objetos de la actividad y de situaciones.

Sin embargo, señalamos que para conseguir el segundo nivel de instrumentalización, la movilización de las propiedades de la elipse, deben ser observadas nuevamente en un tiempo mayor. El tiempo que disponemos es muy corto, por lo tanto no será nuestro foco de interés observar este procedimiento.

Acerca de la instrumentalización, Trouche (2004) indica que esta puede pasar por escenarios distintos: un escenario de descubrimiento y selección de las funciones relevantes; un escenario de personalización en la que el sujeto encaja al artefacto de acuerdo a sus necesidades y finalmente un escenario de transformación del artefacto, algunas veces en direcciones insospechadas por el diseñador.

Por ejemplo, en la fase de descubrimiento el alumno puede iniciar la manipulación de los íconos del Geogebra para familiarizarse con las propiedades del software. En la fase de personalización cada sujeto encaja el artefacto de acuerdo a su requerimiento, por ejemplo el alumno puede trabajar con la vista algebraica o geométrica en la pantalla de la barra de herramientas del Geogebra. En la fase de transformación, el sujeto puede situarse incluso en direcciones imprevistas por el diseñador, el autor menciona ejemplos como la creación de atajos de teclado, el almacenamiento de programas de juegos, la ejecución automática de algunas tareas.

Sin embargo, existen también restricciones por la utilización de los instrumentos en la actividad de sujeto. Estas restricciones, afirma Rabardel (1995), son distintas, dependiendo de la actividad en relación con el artefacto. Según el autor existen tres tipos de restricciones que impone el artefacto: las restricciones de existencia, de intencionalidad y de acción. Las tres restricciones fueron halladas mayoritariamente cuando los alumnos hicieron uso de las herramientas del Geogebra, no las encontramos en nuestro objeto matemático. Estas restricciones serán detalladas en relación al Geogebra, ya que fueron restricciones que se impusieron mayoritariamente en el desarrollo de las actividades cuando los alumnos usaron este AGD como mediador en el proceso de instrumentalización de la elipse.

La primera restricción referida a las restricciones de modalidades de existencia, vinculadas a las características o propiedades comunes del artefacto que el usuario debe identificar, comprender, administrar y verificar para el cumplimiento de las condiciones de funcionamiento. Así tenemos, los dispositivos o periféricos de la computadora: procesador, memoria, resolución gráfica. En la actividad 2, ocurrió una restricción de existencia en los alumnos de ambos equipos, pues el mouse que es una parte periférica del sistema, era soltado antes de completar el trazo de la elipse que elaboraban con la herramienta “Activa Rastro”. En la actividad 5 los alumnos mostraron dificultades al momento de ocultar algunos objetos, ya que no lograron seleccionarlos correctamente, dicha acción está ligada a la manipulación de un material periférico, en este caso el mouse que manipula la herramienta “Muestra Objeto”.

La segunda restricción referida a las restricciones de intencionalidad, en tanto este destinada a producir transformaciones, dirigida hacia los objetos sobre los cuales hay condiciones de transformación, por ejemplo restricciones en la representación de los objetos geométricos es decir en las transformaciones realizables. Así, mostramos que en la actividad 2, encontramos una restricción de intencionalidad en los alumnos, integrantes del equipo B, cuando uno de los integrantes quiso obtener una imagen más completa de la traza de la elipse y aplicó el zoom (CTRL y giró la perilla del mouse), esto provocó que la imagen desapareciese por completo de la pantalla. Esta limitación del programa para producir transformaciones intencionales hizo que el alumno tenga una limitación en el accionar de su trabajo.

Finalmente las restricciones de estructuración de la acción, vinculadas a las modalidades de la acción anticipadas por el diseñador, inscritas por ellos en la estructura y, por tanto, incorporadas a la estructura y funcionamiento del artefacto. Podrían suceder restricciones en la zona de interfaz del usuario como la barra de herramientas, la zona de trabajo, retroalimentaciones, etc. Podemos afirmar que en la actividad 1, la herramienta "Punto" tuvo una restricción de acción, debido a que el usuario confundió dicha herramienta por la herramienta "Intersección de objetos" cuando sus modalidades de acción están anticipadas por el diseñador e incorporadas a la estructura del programa. En la actividad 2 notamos que la herramienta "Activa Rastro" pasa por una estructuración de la acción, ya que los alumnos no usaron las características del menú de la barra de herramientas para editar el grosor de la pluma del trazado de la elipse. En la actividad 5 con el uso de la herramienta "Compás", los alumnos tuvieron ciertas dificultades para manipularla, creemos que aún no la conciben como una herramienta que traslada distancias. En la actividad 7 los alumnos tuvieron problemas para ingresar los exponentes de las expresiones algebraicas en la Barra de Entrada, al respecto el Geogebra dispone de un teclado virtual donde se hallan los símbolos que otros teclados no consignan.

En el inicio de este capítulo mostramos algunos trabajos de investigación que problematizan la enseñanza de las cónicas. De igual forma, desde nuestra experiencia como docente universitario, justificamos la realización de nuestro estudio en torno a algunos problemas puntuales que notamos recurrentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, como la desatención de espacios que promuevan la enseñanza y aprendizaje de las cónicas.

Creímos conveniente enfatizar el uso de las construcciones geométricas y de lugares geométricos. Además, la revisión de la literatura nos indica que la aplicación de los AGD puede favorecer la enseñanza y aprendizaje de nuestro objeto de estudio.

De acuerdo a este análisis pasamos a delimitar nuestro problema, en el que incluiremos nuestra pregunta de investigación, nuestro objetivo general y los objetivos específicos de nuestra investigación.

1.5 Delimitación del Problema

La revisión de la literatura analizada en este capítulo fue clave para sentar una evidencia que a la luz de dichos trabajos de investigación, existen ciertos problemas ligados al estudio de las cónicas y que desde nuestra experiencia como docente compartimos algunas de sus experiencias. De este modo Fernández (2011) problematiza algunos fenómenos como la escasez de estudios sobre lugares geométricos, la desatención de las cónicas como contenido geométrico, necesidad de una complementariedad entre el enfoque sintético y analítico, y privilegia la importancia del uso de los AGD, como mediador para fomentar las construcciones geométricas. Así mismo, Santa (2011) manifiesta que la geometría es la rama de la matemática que puede ser tratada desde el punto de vista intuitivo, a partir de procesos de visualización y de experimentación, usando objetos tangibles para generar conjeturas y procesos de razonamiento, reconociendo que las tecnologías podrían facilitar el grado de interactividad y experimentación virtual. Además, indica que con el doblado de papel y su axiomática, es posible que el estudiante pase por un mejor entendimiento de la noción de elipse a través de distintos niveles de razonamiento, desde el reconocimiento de la figura por su forma y su tamaño, hasta la percepción de los elementos que la constituyen y su relación entre ellos.

En ese sentido creímos importante contemplar un enfoque donde se incorpore los programas de AGD para el estudio de las cónicas. Al respecto, Laborde et al. (2006), indican que los investigadores han estado muy centrados en los conceptos tradicionales de la geometría euclidiana, marginando las representaciones gráficas ligadas a sus significados geométricos. Los autores manifiestan que la coexistencia de la abstracción y la comprensión intuitiva de la geometría o el permanente enfoque dual teórico y empírico, ha inclinado la situación, en muchos casos, a la renuncia de la idea de estas representaciones gráficas y geométricas. Ante este contexto, los investigadores hacen notar el nacimiento de otras posturas que centran sus investigaciones en los procesos cognitivos de la actividad geométrica y en el carácter estructural de sus representaciones, los cuales dejan apartada la tendencia abstracta y axiomática, y es por medio de los AGD que se puede lograr las manipulaciones de la elipse, deformaciones de la curva, rastros que permiten observar trayectorias y que obedecen a ciertas condiciones geométricas, valores que actualizan sus resultados de acuerdo a cualquier cambio de la curva, los cuales usualmente son difíciles de conseguir en lápiz y papel.

Desde nuestra experiencia como docente, afirmamos que esta problemática mostrada se halla relacionada a la experimentada con los alumnos de Arquitectura del primer ciclo del curso de Matemática I de una Universidad Particular de Lima. En ese contexto, hemos mencionado y descrito algunos puntos que consideramos problemáticos en las actividades de enseñanza y aprendizaje de la elipse, como la marginación de construcciones geométricas, la desatención de los lugares geométricos, la pérdida progresiva de los saberes previos de los alumnos en estos temas las cuales son requisitos previos para el curso de cónicas, excesivo énfasis a los enfoques algebraicos o analíticos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tendencia a vincular a las elipses al sistema coordenado cartesiano, percepción equívoca o nula a los aspectos invariantes de la elipse cuando los ejes coordenados son omitidos en contextos distintos o cuando existe una traslación o rotación de la elipse.

Respaldados por estos argumentos, surge la necesidad de reconocer que no solo se puede comprender la noción de elipse articulándola a una ecuación algebraica con dos variables, sino que existen otros planteamientos con sus propias complejidades alrededor del proceso de enseñanza y aprendizaje de la elipse. En ese sentido, la historicidad de este concepto matemático reconoce la existencia de múltiples concepciones que le han sido vinculadas a las cónicas a través de su proceso histórico. Fernández (2011), indica que hasta la época de Descartes, se podía comprender a las curvas cónicas no solo como secciones de un cono o como el rastro que un punto deja sobre el plano cuando cumple determinadas condiciones sino también como una expresión algebraica compuesta por dos variables. De igual forma, Boyer (1987) señala que el nacimiento de la elipse, atribuida al geómetra griego Menecmo, fue un subproducto de su investigación cuando trataba de resolver el problema de la duplicación de un cubo y que el primer tratado sistemático elaborado por el matemático griego Apolonio, hace uso de un lenguaje sintético, con tratamientos desde el punto de vista geométrico. Nuestro enfoque dará un tratamiento a la elipse basado en las construcciones y sus respectivas representaciones geométricas, lo cual nos conduce además, a tender un puente entre el contexto sintético y analítico, teniendo en cuenta al Geogebra, que actúa como agente mediador, facilitando, según manifiesta Laborde et al. (2006), la interacción, la exploración, manipulación, de los alumnos con el objeto matemático.

Desde esta posición, basada en las situaciones descritas, nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Una secuencia de actividades mediadas por el Geogebra permite que los alumnos de Arquitectura y Administración de Proyectos instrumentalicen la elipse?

Para responder la pregunta de investigación, necesitamos señalar los objetivos específicos que contribuyan finalmente al logro del objetivo general.

Objetivo general:

- Propiciar la instrumentalización de la elipse cuando los alumnos trabajan una secuencia de actividades mediadas por el Geogebra.

Objetivos específicos:

- Diseñar actividades que permitan el surgimiento y enriquecimiento de las propiedades de la elipse, cuando los alumnos elaboran construcciones geométricas mediadas por el Geogebra.
- Identificar por medio de las acciones, los posibles esquemas de utilización que los alumnos construyen o movilizan cuando trabajan una secuencia de aprendizaje mediada por el Geogebra.

El diseño de las actividades son situaciones secuenciales que fueron planteadas usando algunos aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1986). Se crearon situaciones didácticas en las que de manera explícita o implícita se estableció un conjunto de relaciones entre los alumnos y el entorno con el objetivo de producir aprendizaje. En el diseño de dichas actividades, se crearon situaciones que llevaron al alumno a actuar, formular y validar sus respuestas haciendo uso del Geogebra, de esta manera se consigue que surjan y se enriquezcan de manera progresiva las propiedades de la elipse. Se presentaron situaciones en las que el alumno debió ser orientado por los profesores sin que haya una situación de información explícita hacia los alumnos.

Asimismo, es importante notar que en nuestra investigación hemos buscado señalar los esquemas de utilización que los estudiantes pudieron movilizar o construir cuando elaboraron construcciones geométricas e hicieron uso del Geogebra. De igual forma, sus justificaciones explícitas, presentadas como escritos, contribuyeron también al entendimiento en algunas de las actividades.

Es así que creemos que nuestros objetivos específicos pudieron ser alcanzados y que ambos objetivos contribuyeron de manera solidaria en el logro de nuestro objetivo general, y de esta forma responder a la pregunta de investigación

En el siguiente capítulo detallaremos algunos aspectos de nuestra metodología de investigación de carácter cualitativo - experimental, y en la que hemos creído conveniente considerar la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) pues nos permite analizar el entorno didáctico de nuestro objeto de estudio, además de una contrastación de los resultados con las propuestas señaladas en el análisis *a priori*.

CAPÍTULO 2 - ASPECTOS METODOLÓGICOS

Nuestro trabajo de investigación se enmarca en una metodología de carácter cualitativo - experimental. Dentro de este marco, hemos seleccionado como metodología de investigación a la Ingeniería Didáctica.

2.1 Ingeniería Didáctica

De acuerdo a Artigue (1995), esta metodología, se origina en Francia, en pleno desarrollo de la didáctica de la matemática, a inicios de los años 80.

La autora indica que por esa época había la necesidad de abordar dos temas importantes, debido al desarrollo de la didáctica: en primer lugar la ausencia de una metodología en didáctica, libre de la influencia de otras metodologías, es decir la necesaria desvinculación de las relaciones entre los procesos de investigación - acción de esa época; y en segundo lugar, la necesidad de otorgar un espacio a la realización didáctica en clase, es decir la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. En este capítulo nos centraremos básicamente en las producciones para la enseñanza en aula, es decir en las realizaciones didácticas.

Ingeniería Didáctica

Artigue (1995), afirma que la Ingeniería didáctica se distingue por su naturaleza experimental basada en las realizaciones didácticas y surge finalmente como una metodología a la luz de los hallazgos de la teoría de Situaciones didácticas y de la Transposición Didáctica.

El nombre de Ingeniería Didáctica se origina al comparar esta metodología con el trabajo que realiza un ingeniero ya que el investigador en didáctica tiene a cargo un proyecto relacionado a la enseñanza y aprendizaje, se enfrenta a un grupo determinado de alumnos y es en función a esta retroalimentación entre profesor y estudiante que el proyecto evoluciona y se nutre de nuevos elementos que el investigador debe contemplar en el análisis *a priori* que después confrontará con los resultados de su experimentación.

Al respecto Artigue (1995), afirma que:

> Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (pp. 33-34).

En ese sentido, Douady (1995 citado en Artigue, 1995), afirma que la ingeniería didáctica es una metodología de investigación particularmente interesante por tener en cuenta la complejidad de la clase y la evolución de su relación con el conocimiento. Al respecto la autora, proporciona también una descripción del término ingeniería didáctica.

> El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un *profesor – ingeniero*, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la ingeniería didáctica es a la vez un producto, resultante de un análisis *a priori*, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase (p.61).

La investigadora también sostiene que dependiendo de la importancia de la realización didáctica, se distinguen 2 niveles de ingeniería: el nivel del micro y la macro-ingeniería.

Nuestro trabajo de investigación estuvo basado en las realizaciones didácticas a nivel micro ingeniería, es decir, por la realización y análisis de las secuencias que ocupan el estudio de un determinado tema y en relación a la complejidad de los fenómenos en el aula para su realización, lo cual nos permitió analizar los procesos de aprendizaje del objeto matemático de estudio.

En seguida distinguimos algunas fases de la ingeniería didáctica.

Fases de la Ingeniería Didáctica.

Al respecto, Artigue (1995) distingue cuatro fases que caracterizan esta metodología: la fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y el análisis *a priori*, las fase 3 de experimentación y finalmente la fase 4 de análisis *a posteriori* y evaluación.

A continuación, de manera muy general describiremos cada una de las fases del proceso experimental de la ingeniería didáctica:

Fase 1: Análisis preliminar

Según Artigue et al. (1995), en los análisis preliminares se debe tener presente:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza
- El análisis cognitivo, referente a de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución
- El análisis didáctico, referente a la enseñanza tradicional y sus efectos
- El análisis del campo de restricciones, donde se va a situar la realización didáctica efectiva

Todo lo anterior se realizó teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

El **análisis epistemológico**, en nuestra investigación no haremos un análisis epistemológico sino una aproximación histórica de nuestro objeto matemático, con la finalidad de obtener un panorama sobre la evolución y las múltiples concepciones que le han sido asignadas a la elipse en la historia. Nos centraremos en ciertos periodos históricos relacionados con el desarrollo de la evolución matemática, desde las primeras manifestaciones griegas en los años 350 a.C., hasta sus aplicaciones en el campo de la astronomía, en el siglo XVII aproximadamente.

Respecto al **análisis cognitivo**, la investigadora, indica que está asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.

En nuestro trabajo de investigación, fue necesario realizar una prueba de diagnóstico (Ver Apéndice A) para seleccionar a los alumnos que adquirieron los conocimientos previos al tema de la elipse, de tal forma que lograron apropiarse de las propiedades de la Elipse durante nuestra secuencia de aprendizaje. Para ello se toma como referencia el programa analítico de la asignatura de Matemática I (Ver Anexo).

De igual forma, fueron diseñadas cinco actividades como medio exploratorio del uso del Geogebra (Ver Apéndice B), lo que permitió que los alumnos seleccionados se familiaricen con el manejo de algunas herramientas.

Acreditamos que se evidenciaron algunas restricciones en el uso del Geogebra y que detallamos en el capítulo I. En general, podemos indicar que el hecho que los alumnos no hayan tenido una experiencia previa con este AGD, no resultó impedimento para el desarrollo de las actividades propuestas.

En el **análisis didáctico**, Artigue (1995), afirma que está relacionado a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Sobre este análisis didáctico, hemos seleccionado dos libros de consulta que son consignados en el silabo del curso y un Texto Guía que sirve de apoyo académico a la asignatura de Matemática.

En el cuadro 1, se presenta la información de estos documentos de consulta en el curso de Matemática I.

Cuadro 1. Documentos de consulta

Autor	Capítulo	Páginas	Título
Swokowski, Earl y Jeffery Cole (2011)	11	651-664	Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica
Leithold, Louis (1998)	11	759-782	Matemáticas previas al cálculo
Profesores de la asignatura		37-41	Texto Guía – Matemática I

Fuente: Elaboración propia.

Hemos elaborado una revisión de los capítulos que han sido consignados en el cuadro anterior.

En cada caso haremos mención a los aspectos relevantes relacionados a nuestro trabajo de investigación.

En el cuadro 2, se muestra el primer texto de consulta

Cuadro 2. Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica (2011)

Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica		
Earl W. Swokowski . Jeffery A. Cole		
Capítulo	Sección	Artículos
Capítulo 11. Páginas: 759-782 Temas de Geometría Analítica	Sección 11.2 La Elipse	Definición de la elipse. Ecuación con centro en el origen. Ejemplos resueltos. Excentricidad. Ejercicios propuestos.

Fuente: Elaboración propia.

En este texto de Swokowski et al. (2011), los autores describen el siguiente procedimiento para encontrar lo que llaman como una ecuación sencilla en una elipse:

> Seleccionan el eje X como la recta que contienen a los dos focos F y F', con el centro de la elipse en el origen. Si F tiene coordenadas $(c,0)$ con $c > 0$, entonces, F' tiene coordenadas $(-c,0)$. En consecuencia, la distancia entre F y F' es 2c. La suma constante de las distancias de P desde F y F' estará denotada por $2a$. Para obtener puntos que no estén sobre el eje X, debemos tener $2a > 2c$; es decir $a > c$. Por definición, $P(x, y)$ está sobre la elipse si y sólo si son verdaderas las siguientes ecuaciones $d(P,F) + d(P,F') = 2a$ (pp.769-770).

Luego elaborando una serie de procedimientos algebraicos, llegan a la expresión, definida por la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

Cuando hacen la sustitución posterior $a^2 - c^2 = b^2$, logran obtener la ecuación estándar de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

En nuestras actividades el alumno realizó construcciones geométricas sin recurrir a los ejes coordenados, con el objetivo de determinar la condición geométrica de la elipse. Posteriormente hace uso de esta condición y la incorpora como una nueva característica de la elipse. Con esta propiedad, elabora una traza de la elipse. Luego, haciendo uso de la representación gráfica y vinculándola a la Vista Algebraica del Geogebra el estudiante aplicó la condición geométrica y escribe la expresión algebraica correspondiente. Es decir se trata de establecer en nuestro trabajo de investigación un vínculo entre la geometría sintética y analítica.

Se observó también en la figura 15, que los autores abren la posibilidad de integrar el uso de una calculadora gráfica para el trazado de una semielipse. Sin embargo el proceso para la elaboración del gráfico no es directo. El texto indica que el estudiante debe ajustar la expresión analítica $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ a otra ecuación de la forma $ay^2 + by + (cx^2 + dx + f) = 0$, luego hacer uso de la fórmula general para determinar la variable incógnita y. La figura 15, muestra el procedimiento

EJEMPLO 6 **Graficar semielipses**

Trace la gráfica de $3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y + 9 = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación puede ser considerada como una ecuación cuadrática con y de la forma $ay^2 + by + c = 0$ al reacomodar términos como sigue:

$$4y^2 - 8y + (3x^2 + 12x + 9) = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática a la ecuación previa, con $a = 4$, $b = -8$ y $c = 3x^2 + 12x + 9$ tendremos

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(3x^2 + 12x + 9)}}{2(4)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}}{8} \\ &= 1 \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}. \end{aligned}$$

Note que no simplificamos por completo el radicando, porque estaremos usando una calculadora de gráficas.

Figura 15. Ejemplo 6 – Calculadora Gráfica I

Fuente: Swokowski (2011, p. 775)

En seguida se procede a realizar las asignaciones correspondientes, de acuerdo al gráfico mostrado de la figura 16.

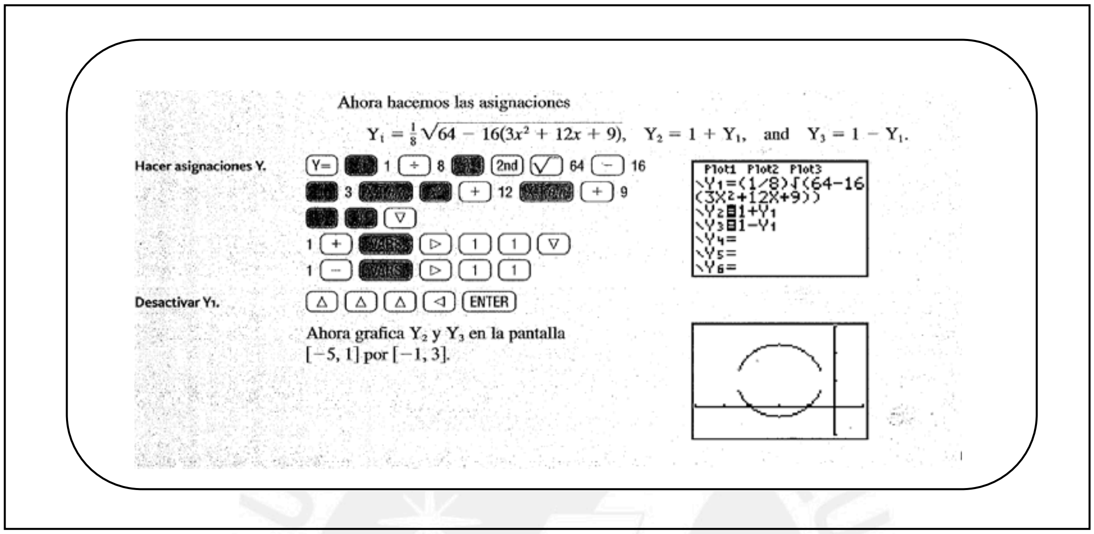


Figura 16. Ejemplo 6 Calculadora Gráfica II

Fuente: Swokowski (2011, p. 775)

Asimismo, observamos que en gran parte de los ejercicios se pide hallar los elementos de la elipse a partir de su ecuación analítica y en otros la ecuación analítica teniendo como punto de partida sus elementos.

El texto también menciona la modificación de la ecuación estándar $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ usando sustituciones $x-h$ así como $y-k$, elaborando siempre procesos algebraicos.

En nuestra secuencia de actividades, el alumno trasladó la elipse desde el origen de coordenadas hasta otro punto en el plano con la ayuda de un deslizador creado con el Geogebra. Además, el programa de AGD, permitió que los alumnos observaran en tiempo real el cambio en el centro de la elipse.

El capítulo del texto finaliza con algunas aplicaciones de la elipse a la astronomía y su uso como traza de una superficie cuádrica o elipsoide, y en la generación de ondas o impulsos emitidos desde los focos en el campo de la acústica. Nosotros propusimos, en la actividad 10, una animación en el que se moviliza a la elipse como instrumento para describir la órbita elíptica del cometa Halley alrededor del sol (Ver Apéndice C).

En el cuadro 3, se muestra el capítulo del texto correspondiente

Cuadro 3. Matemáticas previas al cálculo. 3° edición 1998

Autor: Leithold		
Capítulo	Sección	Artículos
Capítulo 11. Páginas: 651-654 Tema Secciones Cónicas	Sección 11.1 La Elipse	Definición de la elipse. Ecuación de la elipse. Ejemplos resueltos. Forma estandar de la ecución de la elipse.

Fuente: Elaboración propia.

Observamos situaciones muy similares al texto de Swokowski y Jeffery (2011). Procede con las mismas definiciones que empleó en dicho texto sindicando los valores de los parámetros, los cuales representa por las letras a, b y c.

Por ejemplo, en la sección referida al tema de la elipse, el autor usó las definiciones $d(P,F)+d(P,F')=2a$ y la relación $b^2=a^2-c^2$ para formular la ecuación de la elipse, sin embargo, tampoco concretó una explicación geométrica que otorgue complementariedad geométrica a esta propiedad

Nosotros propusimos en nuestras actividades, la construcción de un triángulo isósceles que tenga como vértices los focos de la elipse y un extremo del eje menor, de tal forma que el alumno pudo formular una relación entre los parámetros a, b y c. Sin embargo, fue muy

importante que el alumno manejara como conocimientos previos las propiedades de la mediatriz y relaciones pitagóricas, que son conocimientos preexistentes.
Respecto al uso tecnológico de algún dispositivo, el autor indica que una elipse puede ser representada mediante una calculadora gráfica, pero en este caso no muestra un ejemplo relacionado al trazado de elipses.

El texto de Leithold (1998), al igual que el texto anterior, hace uso de las traslaciones $(x-h)$ así como $(y-k)$ para hallar la forma estándar de la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, que tiene ejes paralelos a los ejes coordenados.

Ambos autores usan la excentricidad para describir el alargamiento o la compresión de una elipse de acuerdo a la relación entre los valores que toman a y c. Sin embargo los dibujos estáticos que muestra el texto no conllevan necesariamente a que el alumno elabore el proceso dinámico que estas representaciones requieren.

En la figura 17, mostramos las distintas formas límites de la elipse, cuyo eje mayor es el único que se mantiene constante.

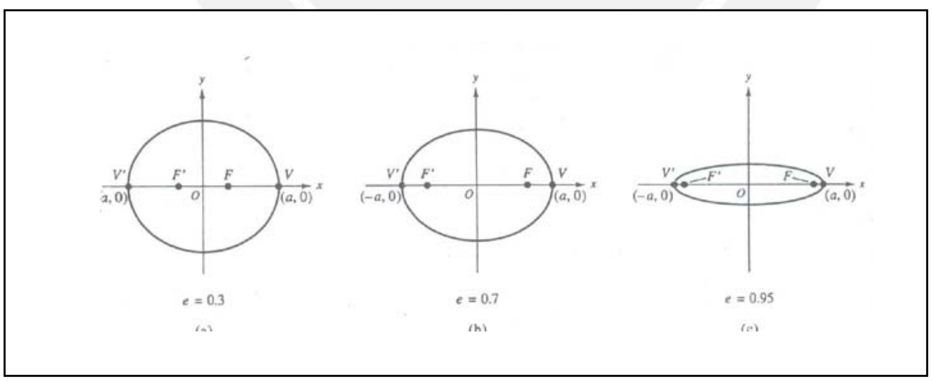


Figura 17. Las formas límites de la elipse

Fuente: Leithold (1998, p.662)

En dicha figura, se observa que a medida que los focos se acerquen a los vértices, la forma de la elipse se alarga. Deberían existir nociones previas de los parámetros de la elipse.

En nuestra opinión la excentricidad es una propiedad que no debe ser mostrada con dibujos estáticos. En nuestras actividades pudimos ejemplificar de manera dinámica y por medio del deslizador, el alargamiento que sufre la gráfica de una elipse cuando los focos se aproximan o se alejan de los extremos de los vértices una gráfica de la elipse.

En nuestro trabajo de investigación las actividad propuesta mostró una gráfica dinámica en la cual los alumnos arrastraron y alejaron los focos de los vértices, de esa forma se actualizaron los valores que corresponden a la razón de la excentricidad.

En el cuadro 4, se muestra las secciones y los artículos del curso de Matemática I.

Cuadro 4. Texto Guía Curso Matemática I

Autores: Los Profesores de la Asignatura		
Unidad	Sección	Artículos
Unidad 3 Tema: Las Cónicas	Sección 3 La Elipse (pp.37-41)	Definición de la elipse. Ecuación de la elipse. Forma canónica de la elipse. Ejemplos propuestos

Fuente: Elaboración propia.

Es una guía que emite el Departamento Académico de Ciencias y Humanidades del área de Matemática como complemento al trabajo de aula y afianzamiento del aprendizaje del alumno. En la Unidad 3, referido al tema de las Cónicas, en la parte de elipse, la guía contiene un resumen teórico acerca de su definición, elementos y la expresión algebraica de la elipse pero en forma canónica. Los problemas propuestos, están referidos básicamente en determinar y graficar la ecuación de la elipse en su forma canónica, identificar sus elementos y calcular el área.

Encontramos similitudes a los textos anteriores, existen gráficas pero no construcciones geométricas. Se observa una sola pregunta referida al área de la elipse, manteniéndose la predominancia de las representaciones algebraicas.

No hay referencia al uso de alguna herramienta informática. Además, las formas canónicas de la ecuación y el área de la elipse son escritas sin explicación.

En nuestro trabajo de investigación se diseñaron actividades para que los alumnos trasladen los centros de las elipses a diferentes puntos del plano, haciendo uso del Geogebra, como mediador.

Fase 2: La concepción y el análisis a Priori

En esta fase, Artigue (1995) indica, que el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables pertinentes con relación al problema estudiado. Distingue dos tipos de variables: las variables macro didácticas y las micro didácticas. Debido a que nuestro trabajo de investigación estuvo basado en las realizaciones didácticas a nivel micro ingeniería, tomaremos en cuenta las variables concernientes a la organización local de la ingeniería es decir, en relación a la complejidad de los fenómenos en el aula, aquellas de carácter más específico y que tienen que ver directamente con el contenido y actividades de nuestro tema.

Es importante destacar que el proceso de validación tiene que ser visto desde la fase de la concepción del problema por ello es importante el análisis *a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería

Respecto al análisis *a priori*, la investigadora indica que está compuesto por dos partes: una que describe y otra que predice, está basado en un conjunto de hipótesis sobre lo que se espera respondan los alumnos. La autora indica que siendo la teoría constructivista aquella que sienta como principio la construcción de los conocimientos de los alumnos como la interacción del estudiante con su propio medio, entonces la teoría de situaciones didácticas sirve de referencia a la metodología para constituir una herramienta que permite controlar las relaciones entre el comportamiento de los alumnos y su significado. La investigadora indica que el análisis *a priori* tiene como objetivo determinar cómo las selecciones están elaboradas de tal forma que permita controlar el comportamiento de los alumnos y su significado. Además, agrega que la validación de estas hipótesis se lleva a cabo en la última fase, donde se realiza la confrontación del análisis *a priori* con los resultados del experimento.

Fase 3: La experimentación

En la fase uno, se efectuó el análisis inicial en torno a la dimensión cognitiva, histórica y didáctica de la elipse. En la fase dos, y respaldados por los antecedentes preliminares y por algunos aspectos de la TSD se procedió a implementar una secuencia de actividades. Finalmente, en la fase tres, se llevó a cabo la implementación y la evaluación de la puesta en marcha de la experimentación.

Según Hernández, R. Fernández, C. y Batista, P. (2010), en cuanto a la experimentación cualitativa, indica que es importante en esta etapa que la tarea del investigador sea sumamente proactiva, motivar a las personas para que el plan sea ejecutado de acuerdo a lo esperado y asistirlas cuando tengan alguna dificultad. Por ello la experimentación supone que se den las condiciones previstas por el investigador, entre ellas las aplicaciones de los instrumentos elaborados en la fase previa y el registro permanente de los sucesos o eventos que ocurren durante la experimentación.

En nuestro trabajo de investigación, participaron el investigador, tres profesores de la asignatura como observadores y un grupo o una muestra de alumnos. Se usaron unas fichas de trabajo en la que los alumnos registraron sus respuestas, unas fichas de observación en las que los profesores anotaron los sucesos ocurridos en clase durante el desarrollo de la actividad y finalmente archivos que se generaron por defecto en el Geogebra, guardados en el protocolo de construcción de la carpeta donde trabajó el alumno. Las fichas mencionadas son mostradas en los anexos respectivos.

En este proceso de investigación la experimentación fue realizada en 3 encuentros, con una duración de 90 minutos por encuentro. El primer encuentro tuvo 5 actividades con la finalidad que los alumnos exploren las principales herramientas del Geogebra. Las cinco actividades de este encuentro no fueron analizadas pues no es el centro de nuestra investigación. El segundo y el tercer encuentro contuvieron en total 10 actividades, las cuales fueron divididas en dos sesiones. En la sesión referida al segundo encuentro se elaboraron cinco actividades que corresponden a la construcción de la elipse como lugar geométrico y a la exploración de las propiedades de sus principales elementos en el contexto de la geometría sintética. En la sesión referida al tercer encuentro se diseñaron actividades usando el enfoque analítico, se hicieron uso de los ejes coordenados con el fin que el alumno obtuviese la expresión algebraica y gráfica de la elipse, así como actividades que les permitieron reconocer las partes constitutivas de una elipse.

Fase 4: Análisis a posteriori y validación.

En esta última fase de la ingeniería didáctica procedimos a realizar una validación interna, confrontando los datos recolectados en la fase de experimentación con la información obtenida en la fase de concepción y análisis *a priori* de nuestra investigación. En la mayoría de textos publicados referidos a la ingeniería, Artigue (1995) indica que aparecen siempre distorsiones luego de efectuar la confrontación de los dos análisis.

Sobre la validación, Artigue (1995) señala:

> A esta fase sigue una de análisis *a posteriori* que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se complementan con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicados en distintos momentos de enseñanza o durante el transcurso. Y, como ya lo habríamos indicado, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y *a posteriori*, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación (p. 48).

En nuestro trabajo de investigación, validamos los supuestos de nuestra investigación, al confrontar tanto el análisis *a priori* y como el *a posteriori*.

Antes de iniciar el proceso de la experimentación y el análisis de la secuencia de actividades propuestas, daremos una definición del concepto de la elipse y mencionaremos los aspectos históricos de dicho objeto matemático, luego haremos un estudio de la elipse señalando la definición y la descripción de sus elementos.

CAPÍTULO 3 – LA ELIPSE

En este capítulo presentamos una breve descripción del proceso evolutivo del estudio de la elipse considerando dos etapas en la historia de la matemática. El periodo que se inicia con los trabajos de Menecmo (350 a.C), y Apolonio de Perga (262 – 190 a.C) y el periodo del siglo XVI que destaca la obra de Descartes (1596 – 1650 a.C) .

Asimismo elaboramos una descripción del objeto matemático y de las propiedades de algunos de sus elementos, tomando como referencia el texto de Geometría Analítica, Lehmann (2003).

3.1. Aspectos históricos

Tomo como referencia el texto de Boyer (1987) que presenta la historia de la matemática desde los orígenes primitivos del hombre hasta ciertos hechos notables del siglo veinte.

Del texto hemos tomado en cuenta el siglo de Pericles o época heroica de los griegos, aproximadamente en la segunda mitad del siglo Va.C., época en la que los griegos se plantean tres problemas clásicos de construcción geométrica como la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo, usando una regla no graduada y un compás. Los intentos por resolver estos problemas por parte de los geómetras dan origen al descubrimiento de las trayectorias cónicas que conocemos en la actualidad. Por ese motivo, consideramos los trabajos de Menecmo (350 a.C.), por ser el primero que da origen a las secciones cónicas al realizar cortes a un cono, los aportes del geómetra griego Apolonio de Pergo (262 - 190 a.C.), famoso por su obra de las secciones cónicas y resaltamos la labor de Descartes en el siglo XVI a.C. porque inicia el tratamiento moderno de las cónicas.

El autor refiere que el siglo Va.C. es un periodo que se inicia con la derrota de los persas por parte de los griegos y la victoria de Esparta sobre Atenas. La época gloriosa de Pericles en las artes y literatura, contribuye a la migración de muchos intelectuales a Esparta, como Anaxágoras de Jonia, Zenón del sur de Italia, Demócrito de Abdera, los cuales contribuyen a formar en Esparta, un espíritu de libre investigación, con pensadores intrigados por la búsqueda del conocimiento.

Boyer (1987) nos señala que la ciencia griega se ocupaba de curiosidades altamente intelectuales que contrastaba con el carácter de inmediatez utilitaria del pensamiento prehelénico. El mundo matemático griego estaba más relacionado con la filosofía que con los problemas del contexto de la vida diaria.

Por ejemplo, del griego Anaxágoras se sabe, que trabajó en el problema de la cuadratura del círculo, usando solamente regla y compás, es decir en la construcción de un cuadrado igual al área de un círculo. Anaxágoras muere en el 426 a. C., un año después del fallecimiento de Pericles atacado por una plaga enfermedad causante de la muerte de aproximadamente la cuarta parte de la población ateniense. Según el autor, los atenienses preguntan al oráculo de Apolo en Delos qué hacer para terminar con la epidemia que consumía a la población. El oráculo les anuncia que para calmar a los dioses, los delianos debían duplicar el volumen del altar del Dios Apolo. Es decir, dada la arista de un cubo, construir usando sólo regla y compás, la arista de otro cubo que tenga el doble volumen que el primero. Es así que nace la historia de uno de los problemas clásicos de la literatura griega: la duplicación de un cubo. Este problema coincide con otro problema que circulaba también por Atenas: La trisección de un ángulo

Estos tres problemas, la cuadratura de un círculo, la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo han sido considerados los tres problemas clásicos de la antigüedad. Aunque posteriormente, se demostrara que eran irresolubles usando regla no graduada y compás, los esfuerzos realizados por los griegos contribuyeron a evidenciar el reflejo del nivel de la matemática griega y el descubrimiento de algunos lugares geométricos como el de las cónicas.

Al respecto, el autor nos indica que el primero en abordar este problema fue Hipócrates de Chios por el año 430 a.C., quien reduce el problema a la interpolación de dos medias geométricas entre la magnitud que representa la arista de un cubo y la que corresponde al doble de la misma. Por esos tiempos conocían la cuadratura de un rectángulo, lo que nos muestra hasta qué grado dominaban los matemáticos de esa época las transformaciones de áreas y las proporciones.

En ese sentido, Boyer (1987) nos indica que:

> En particular, no tenían evidentemente ninguna dificultad en convertir un rectángulo de lados a y b en un cuadrado, lo que requería hallar la media proporcional o geométrica entre los segmentos a y b, es decir, que si debía verificarse la proporción $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, los geómetras de la época sabían construir fácilmente la variable x (p.101).

En la figura 18, se muestra la representación gráfica de la media proporcional:

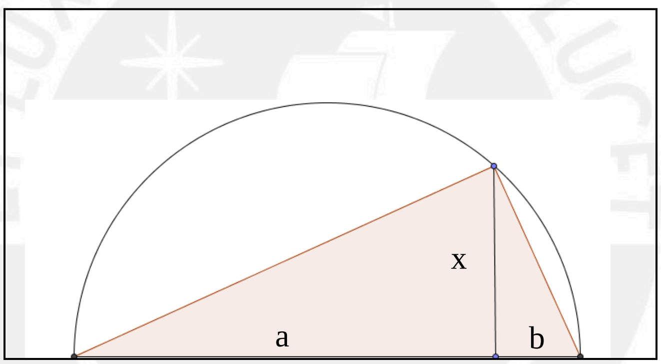


Figura 18. Media proporcional de los segmentos a y b.

El autor considera que estos mismos geómetras generalizaron el problema al interpolar dos medias entre dos magnitudes dadas a y b. Es decir, que dado los segmentos a y b, los griegos intentaran construir dos segmentos x e y tales que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

De tal forma que a representa la magnitud de la arista de un cubo y b la arista del otro cubo cuyo volumen sea el doble. De allí que el autor indique que probablemente fue Hipócrates el primero en reconocer que esta relación nos lleva al problema de la duplicación de un cubo.

De esta forma, de la expresión $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$, obtenemos la expresión $x^2 = ay$. Si se considera $b = 2a$, conseguimos la ecuación $y^2 = 2ax$.

En nuestra notación actual, relacionando ambas expresiones, nos conduce a la ecuación $x^4 = a^2(2\text{ax})$, la cual nos permite expresar la relación $\text{x}^3 = 2a^3$, donde la arista del cubo inicial es de longitud a y la arista del cubo modificado es x.

Por lo tanto, según refiere Boyer (1987), Hipócrates de Chios demostró que la duplicación del volumen del cubo era posible en tanto se pudiese utilizar curvas que tuvieran la propiedad expresada en la proporción continua $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$.

Unos años después, en el siglo IV a.C. y gracias a la contribución de Menecmo, estas curvas llegan a ser representadas. Precisamente, Boyer (1987) nos detalla que fue un gran logro por parte de Menecmo el descubrimiento de curvas cuyos puntos verificasen las propiedades anteriores, lo cual consiguió seccionando un cono recto con un plano perpendicular a sus generatrices obteniendo la parábola. Igual procedimiento realizó con conos según sus vértices fuesen agudos u obtusos, obteniendo así a la elipse y la hipérbola. Debió haberse tratado de un éxito notable ya que en esos tiempos se disponían de métodos muy limitados para trazar las curvas.

De esta manera, a partir de un cono circular recto de una sola hoja, con generatrices formando con el eje un ángulo de 45° se podía obtener una familia de curvas haciendo cortes en el cono de una misma forma. Por ejemplo, por un plano perpendicular a la generatriz del cono, se obtenía toda una familia de curvas. Por ese motivo se le atribuye a Menecmo el origen de estas curvas, las que posteriormente recibirían el nombre de elipse, parábola e hipérbola.

El autor menciona que el descubrimiento de la elipse pudo haber sido casual o como un subproducto de la investigación por el intento de obtener la parábola o la hipérbola que representaban las propiedades necesarias para resolver el problema de la duplicación del cubo o el problema del oráculo de Delos.

El texto de Boyer (1987), nos indica que si queremos duplicar un cubo de arista a, entonces a partir de la proporción continua $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$, construimos dos parábolas $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$.

Haciendo uso de la notación actual, la primera ecuación tendría lado recto a y la segunda $2a$. Los vértices estarían ubicados en el origen de coordenadas.

En la figura 19, mostramos la representación gráfica de ambas parábolas. La abscisa x sería la arista del cubo buscado

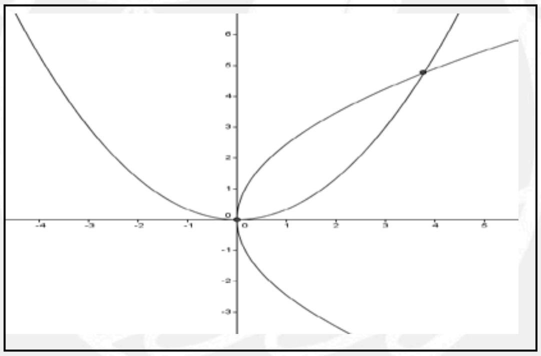


Figura 19. La duplicación del cubo

Fuente: Boyer (1987, p.134)

El autor indica que probablemente Menecmo conociera muchas de las propiedades de las cónicas que hoy nos son tan familiares, incluidas la de las asíntotas de la hipérbola pero que sin embargo existen pocas fuentes documentadas sobre este geómetra griego.

Al respecto el autor indica:

> Entre las principales fuentes documentales autorizadas que nos permiten atribuir a Menecmo el descubrimiento de las secciones cónicas está una carta de Erastótenes al rey Ptolomeo Euergetes, citada 700 años más tarde por Eutocio, en la que se mencionan varias

> duplicaciones de cubo, entre las cuales figura una por medio de la complicada construcción de Arquitas y otra cortando el cono según las triadas de Menecmo (p.135)

Sin embargo durante el primer siglo de la época Helenística, los matemáticos Euclides, Arquímedes y Apolonio, sobresalen por encima de sus predecesores y sucesores. Sus obras han hecho que se llame a este periodo la edad de oro de la matemática griega que abarca desde el 300 al 200 a.C. aproximadamente.

Por ejemplo de Apolonio se sabe que nació en Perga y vivió aproximadamente entre los años 262 y 190 a.C. y que solo dos de los muchos tratados han sobrevivido. Una de ellos *Secciones en una razón dada*, fue traducida al árabe en 1706 y una publicación fue traducida al latín por Halley, el astrónomo amigo de Newton. De la otra publicación *Las Cónicas*, nos indica el autor, se conserva en la lengua original griega la mitad aunque en 1710, Edmund Halley publicó una traducción al latín de siete de los ocho libros, y desde entonces se han publicado en distintas lenguas. Los ocho libros escritos de Apolonio contienen 487 proposiciones en total.

En su obra *Secciones cónicas*, Apolonio consolida los resultados sobre las cónicas y es el primero en demostrar que con un solo cono circular recto se pueden obtener los tres tipos de secciones cónicas (elipse, parábola e hipérbola) haciendo variar únicamente la inclinación del plano que corta al cono. Asimismo sustituye el cono de una hoja por el cono de dos hojas o dos conos orientados en sentidos opuestos, lo que conllevaría posteriormente a observar que la hipérbola es una curva de dos ramas.

Al respecto, Boyer (1987) señala que Apolonio no fue el primero en estudiar con detalle las secciones cónicas ni los lugares geométricos, ya que Arquímedes usaba el nombre de parábola para referirse a una sección cónica. Sin embargo indica que fue Apolonio quien introdujo por primera vez los nombres de Elipse e Hipérbola, haciendo caso probablemente a una sugerencia de Arquímedes. Estos nombres no fueron ni acuñados en el instante ni creados para la ocasión sino que por el contrario eran términos que usaban los pitagóricos para la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de aplicación de áreas.

Sobre lo anterior se indica:

> El término *Ellipsis*, que significa una deficiencia, se utilizaba cuando un rectángulo dado debía aplicarse a un segmento dado y resultaba escaso en un cuadrado (u otra figura dada) Mientras que la palabra *Hyperbola* (de "avanzar más allá") se adoptó para el caso en que el área excedía del segmento dado, y por último la palabra *Parábola* (de "colocar al lado" o "comparar") indicaba que no había deficiencia ni exceso. Apolonio utilizó estas palabras en un contexto nuevo, utilizándolas como nombres para las secciones cónicas (p.195).

Es interesante la acotación que hace Boyer (1987) acerca de la interpretación que los geómetras daban a los términos *Ellipsis*, *Hyperbola* y *Parábola*, la cual estaba en relación a la conocida ecuación moderna de la parábola $y^2 = lx$ (parábola con vértice en el origen y eje principal de abscisa) donde l es el llamado "latus rectum" o parámetro.

La parábola tiene la propiedad que dado un punto $(x;y)$ sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y, es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa x y el parámetro l.

Mostramos una representación gráfica en la figura 20 de la parábola $y^2 = 4x$. Sea el punto $(1;2)$ perteneciente a la parábola, se construye un cuadrado sobre la ordenada $y = 2$ cuya área equivale a la del rectángulo construido sobre la abscisa $x = 1$ y el parámetro $l = 4$

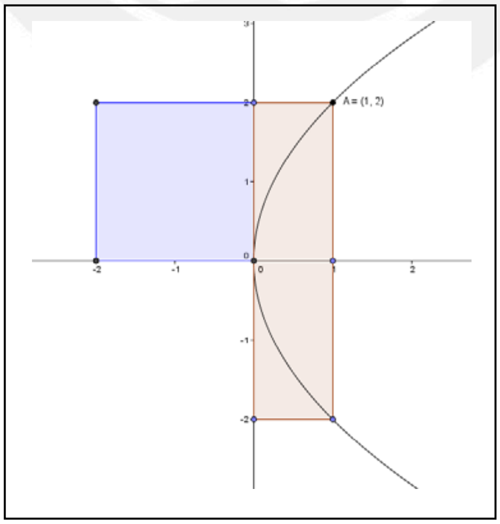


Figura 20. Interpretación por áreas de la parábola

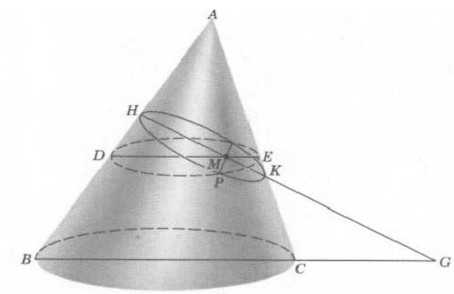
En términos modernos, la ecuación de la elipse $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ referida a uno de los vértices como origen, sería $y^2 = lx - \frac{b^2}{a^2}x^2$ siendo $l=\frac{2b^2}{a}$. Esto nos indica que y^2 no alcanza a cubrir lx, es decir $y^2 < lx$, que resulta estar en perfecto acuerdo con el nombre "ellipsis" o deficiencia de algo. Igual razonamiento le fue atribuido a la hipérbola $y^2 = lx + \frac{b^2}{a^2}x^2$, la cual nos indica que y^2 excede lx, es decir $y^2 > lx$, que resulta estar en perfecto acuerdo con el nombre "*Hyperbola*" o exceso de algo. Sin embargo, es sorprendente saber que durante un siglo y medio aproximadamente, las curvas fueron llamadas de distintas formas y no tuvieron un nombre específico.

De acuerdo a Boyer (1987), se han registrado nombres triviales en alusión a la forma en la que fueron descubiertas, por ejemplo secciones de un cono agudo (oxitoma), secciones de un cono rectángulo (ortotoma) y secciones de un cono obtuso (amblitoma). Incluso Arquímides continuó usando estos nombres, aunque ya usaba el nombre de parábola para referirse a la sección de un cono rectángulo, incluso en el libro VI Arquímedes hace uso de los términos "excesivo" y "deficiente" descritos en los párrafos anteriores y se cree que fue Arquímedes quien propuso a Apolonio indicar a las secciones cónicas con los nombres que usamos en la actualidad.

Acerca de las propiedades fundamentales de las cónicas, el autor nos indica que los griegos clasificaban a las curvas como "lugares planos" cuando eran construidas con líneas rectas, y circunferencias, como "lugares sólidos" cuando estaban conformadas por todas las secciones cónicas, y finalmente "lugares lineales" cuando la componían el resto de curvas. El nombre dado a la segunda clasificación procedía por el hecho que las cónicas eran descritas a partir de una figura tridimensional en el plano. A pesar que Apolonio al igual que sus predecesores, obtenía las curvas a partir de un cono en el espacio tridimensional, es gracias a él, que se logra prescindir del cono y se estudia a estas curvas por la propiedad que las caracteriza, lo que llamó "síntoma" de la sección cónica, la cual señala como condición necesaria y suficiente para que un punto este situado sobre la curva.

Boyer (1987) muestra el proceso anterior, para el caso de la elipse y que toma del libro I de Apolonio, proposición 13, descrito en la figura 21.

Sea ABC una sección triangular de un cono circular oblicuo como se muestra en la figura, y sea P un punto cualquiera de una sección plana HPK que corta a todas las generatrices del cono¸ prolonguemos HK hasta que corte a la recta BC en G, y tracemos por P un plano paralelo a la base, que cortará al cono según la circunferencia DPE y al plano HPK según la recta PM. Sea DME el diámetro de esta circunferencia perpendicular a PM



Por semejanza de los triángulos HDM y HBG

$$\frac{DM}{HM} = \frac{BG}{HG}$$

Y por semejanza de los triángulos MEK y KCG:

$$\frac{ME}{MK} = \frac{CG}{KG}$$

Por otra parte debido a la propiedad de la circunferencia, tantas veces utilizada, se tiene:

$$PM^2 = DM \, . \, ME \, .$$

Por lo tanto $PM^2 = \dfrac{HM \, . \, BG}{HG} . \dfrac{MK \, . \, CG}{KG}$ Si llamamos $PM = y$, $HM = x$, $HK = 2a$, la propiedad que expresa la igualdad anterior viene a traducirse en la ecuación

$$y^2 = k \, x \, (2a - x)$$

Que podemos reconocer como la ecuación de una elipse referida al vértice H y a su eje mayor como HK.

Figura 21. La propiedad fundamental de la elipse de Apolonio

Fuente: Boyer (1987, p.198)

Incluso Boyer (1987), señala que cuando Apolonio obtuvo estas relaciones básicas sobre el cono, se dedicó a deducir el resto de propiedades restantes sin mencionar o hacer referencia explícita al cono, haciendo uso en todo caso de las proporciones y del álgebra geométrica.

Apolonio en su libro de las *Cónicas,* omite algunas propiedades de las cónicas, que probablemente a nosotros nos parecerían, obvias. Según el autor Apolonio menciona de manera muy indirecta a los focos de la elipse, ni siquiera les otorga un nombre en especial.

Al respecto el autor nos indica:

> Se supone que él mismo, y quizá incluso ya Aristeo y Euclides, estaban bien familiarizados con las propiedades de estas curvas referidas al foco y a la directriz, pero el caso es que nada de esto se menciona ni siquiera en Las Cónicas. No hay, obviamente en los tratamientos antiguos de las cónicas ninguna idea numérica que corresponda a lo que ahora llamamos excentricidad de una cónica con centro… Es muy posible, desde luego, que algunas o todas estas omisiones que nos llaman la atención se deban al hecho de que fueron tratadas en otras obras que se han perdido, por Apolonio u otros autores (pp. 206-207).

Finalmente, el autor nos refiere que la obra de Apolonio se considera como una anticipación de la geometría analítica de Descartes, en el siglo XVII ya que los métodos usados son semejantes al planteamiento analítico moderno.

Sin embargo durante muchos siglos, las cónicas permanecieron sin ser analizadas por la matemática griega hasta aproximadamente la época del Renacimiento, época en la que nuevamente son tomadas en cuenta por científicos renacentistas e incluso usadas en contextos reales. Por ejemplo Galileo (1564 – 16429) para describir la trayectoria de un proyectil, Kepler (1571 – 1630) y Newton (1643 – 1727) para mostrar que las órbitas de los planetas eran elípticas y que el sol era uno de sus focos. Estas aplicaciones unidas al inicio de la geometría analítica de Descartes colocan nuevamente a las secciones cónicas en un lugar privilegiado de las ciencias.

Sobre Descartes, Boyer (1987) indica que nace en el seno de una familia económicamente estable, estudia derecho en la Universidad de Poitier sin mucho entusiasmo y participa en algunas campañas militares sin llegar a ser un militar profesional. Descartes llega a convertirse en el padre de la filosofía moderna así como a presentar una nueva visión científica del mundo. El autor indica que La filosofía y la ciencia de Descartes era revolucionaria por su desligazón con el pasado, pero sin embargo, su matemática estaba relacionada a la matemática de las tradiciones anteriores, por ese motivo la creación de la geometría analítica estuvo motivada por un intento de volver al pasado. El interés de Descartes por la matemática puede haber empezado en su juventud, cuando descubre la fórmula poliédrica $c+v=a+2$, donde $c, v, a,$ son respectivamente los números de caras, vértices y aristas de un poliedro convexo. Existe una carta dirigida a un amigo holandés en 1628, en la que le comunica una regla para la construcción de las raíces de cualquier ecuación cúbica o cuartica por medio de una parábola. El autor refiere que se trata de lo mismo que había hecho Menecmo para resolver la duplicación de un cubo 2000 años antes.

Boyer (1987) señala que Descartes habría descubierto su geometría analítica aproximadamente por el año 1628 ya que cercana a esa fecha decide escribir su famosa obra *La géométrie*. Esta obra no se presenta como un tratado independiente sino como uno de los tres apéndices *de Discours de la méthode,* en estos apéndices Descartes muestra aplicaciones de su método filosófico.

El autor, indica que la meta perseguida por Descartes era realizar una construcción geométrica, en todo caso una interpretación de las operaciones algebraicas al lenguaje de la geometría, y no lo que hoy en día representa la geometría cartesiana como sinónimo de geometría analítica. Así lo hace ver en los primeros capítulos de su libro *La géométrie.*, los que lleva como título "Cómo se relacionan los cálculos de la aritmética con la operaciones de la geometría" y "Cómo pueden efectuarse geométricamente la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas"

En general el libro *La géométrie* es un texto que se puede leer sin encontrar dificultades en su notación, por ejemplo hace uso de las primeras letras del alfabeto para las constantes y de las últimas para las variables, emplea los símbolos germánicos $+, -$, etc. Aunque considera a las incógnitas no como números sino como segmentos. Incluso, Descartes rompe con la tradición griega y deja de relacionar a las variables x^2, x^3 como áreas y volúmenes, sino que los interpreta como segmentos, lo que le permite conservar el sentido geométrico, lo cual le da mayor flexibilidad a su algebra geométrica. Tanto es así, que a la fecha cuando leemos x^2 pocos se imaginan relacionarlo con el área de un cuadrado de lado x. Además muestra una serie de instrucciones detalladas para resolver ecuaciones cuadráticas, no en el sentido algebraico como lo hacían los antiguos babilonios sino geométricamente, interpretándolos con segmentos, circunferencias, etc.

En el libro I, Descartes plantea una serie de instrucciones detalladas para resolver ecuaciones cuadráticas, pero no en el sentido algebraico de los antiguos babilónicos, sino de manera geométrica como lo hacían los griegos de la antigüedad. A lo largo de los libros II y III, Descartes continúa realizando este tipo de interpretaciones geométricas. Su manera de proceder era interpretar un problema netamente geométrico y llevarlo a una ecuación algebraica, y luego de simplificarla resolverla desde un enfoque geométrico, sin embargo Descartes no se parcializa con ninguno de los enfoques geométricos y algebraicos. Descartes insistía que la resolución geométrica de una ecuación implicaba usar los métodos más sencillos compatibles con el grado de la ecuación. Por ejemplo para la solución de las ecuaciones cuadráticas eran suficientes rectas y circunferencias y para las cúbicas o cuarticas, las parábolas.

Boyer (1987) afirma que Descartes reconocía de manera muy general, que las ordenadas negativas estaban dirigidas en un sentido opuesto al que se tomó como positivo, pero no lo hizo con las abscisas. En el caso de las cónicas, indica que Descartes había comenzado por el lugar de las tres y cuatro rectas de Pappus, utilizando una de ellas como eje de abscisas. Para ello refiere:

> Sólo en un caso examina Descartes con detalle un lugar geométrico, y es en conexión con el problema del lugar de las tres y cuatro rectas de Pappus, para el que obtiene la ecuación $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$. Esta es la ecuación general de una cónica que pasa por el origen de coordenadas. Descartes presenta condiciones sobre los coeficientes para que la cónica sea una recta (doble), una parábola, una elipse o una hipérbola. El autor sabía que

> eligiendo adecuadamente tanto el origen de coordenadas como los ejes, podía reducirse la ecuación a su forma más sencilla pero el hecho es que no da ninguna de las formas canónicas (p. 434).

El libro III retoma el tema del libro I, es decir la construcción de las raíces de ciertas ecuaciones. Por ese motivo el libro explica cómo hallar las raíces, cómo rebajar el grado de una ecuación si se conoce una raíz, cómo eliminar el segundo término de una ecuación, cómo determinar el número posible de raíces, y cómo hallar las soluciones de las ecuaciones cúbicas o cuarticas algebraicamente.

En resumen, la totalidad de su obra *La géométrie* está dedicada a la aplicación del algebra a la geometría y de la geometría al algebra, es decir liberar a la geometría de diagramas haciendo uso de procedimientos algebraicos, y darle un significado a las operaciones algebraicas por medio e su interpretación geométrica Sin embargo, el autor señala que no hay nada sistemático acerca del uso de las coordenadas rectangulares para la localización de determinados puntos como lo haría un topógrafo, no hay fórmulas para distancias, pendientes, división de un segmento en partes iguales. En realidad lo que establece Descartes es un puente para transitar entre la geometría y el álgebra. Finalmente en 1649 se traslada a Holanda por una invitación de la Reyna Cristina de Suecia con el propósito de enseñarle Filosofía y fallece en el año de 1650.

De esa manera el significado de las cónicas se va ampliando desde su aparición en el siglo IV a.C. como secciones de un cono de dos hojas con un plano, con la descripción sintética de las cónicas que hace Apolonio en el siglo III a.C. en su obra “Secciones Cónicas”, hasta que en el siglo XVII Descartes retoma el estudio de las cónicas y establece la representación gráfica de las cónicas por medio de una ecuación de dos variables. Todo este panorama nos sirve para ampliar la visión sobre las diversas concepciones atribuidas en su desarrollo histórico, no siempre hablar de cónicas representó hallar expresiones algebraicas vinculadas a representaciones en ejes coordenados. Nuestro trabajo de investigación promueve las construcciones geométricas, las propiedades sintéticas que posteriormente traducimos a un lenguaje analítico. A continuación se hace un estudio del enfoque actual de la noción de Elipse usando como base el texto de Lehmann (2003).

3.2. Estudio de la Elipse.

Para nuestro estudio, hemos seleccionado como referencia el texto de Geometría Analítica, Lehmann (2003), cuya obra contiene una multiplicidad de temas que son incluidos en la mayoría de textos de Geometría Analítica plana y del espacio. Nosotros nos centraremos en los temas relacionados a la Elipse que se incluyen en el capítulo VII del libro.

El capítulo de elipse se inicia con la definición del objeto como lugar geométrico y con la descripción de todos los elementos que intervienen en este objeto matemático. En base a estos argumentos, el autor expresa la ecuación de la elipse desde su forma más simple, la elipse con centro en el origen y ejes coordenados los ejes de la elipse, hasta aquella con ejes paralelos a los ejes coordenados y con centro $(h,\ k)$ ubicado fuera del origen de coordenadas.

En el desarrollo de los conceptos sobre este objeto, se muestra la propiedad focal de la elipse con el propósito de aplicar estas nociones en compartimientos o cámaras secretas de forma elíptica. En ese sentido, el autor menciona de manera muy general, una descripción de las construcciones elípticas en el arte, en la arquitectura y las trayectorias elípticas de los planetas en la astronomía.

Enseguida, hacemos una ampliación de la síntesis anterior.

Tomamos como referencia la definición que el autor proporciona a la ecuación del lugar geométrico:

> Se llama ecuación de un lugar geométrico plano, a una ecuación de la forma $f(x\ ,y)\ =\ 0$, cuyas soluciones reales para valores correspondientes de x, y, son todas las coordenadas de aquellos puntos, y solamente de aquellos puntos, que satisfacen la condición o condiciones geométricas dadas que definen el lugar geométrico (pp. 50-51).

Tomando en cuenta la definición de ecuación del lugar geométrico, el texto define a la línea recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

En el texto, Lehmann (2003) define a la elipse, del siguiente modo:

> Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre sus puntos (p. 173).

El autor designa por F y F' a los focos de la elipse. De igual forma, indica que la recta $\boldsymbol{l}$ que contiene a los focos se llama eje focal y esta recta corta a la elipse en dos puntos V y V', llamados vértices. Se define al eje mayor como la porción del eje focal comprendido entre los vértices.

Asimismo, define al centro C de la elipse como el punto medio del segmento que une los focos. La recta l' perpendicular al eje focal, que pasa por el centro C es llamada eje normal, y corta a la elipse en dos puntos A y A'. Se define al eje menor como la porción del eje normal comprendido entre los puntos A y A'.

Señala que el segmento que une dos puntos diferentes de la elipse se llama cuerda. La cuerda que pasa por los focos se llama cuerda focal y la cuerda perpendicular al eje focal que pasa por uno de los focos, se llama lado recto. Como la elipse tiene dos focos, entonces también tiene dos lados rectos.

Finalmente, indica que si una cuerda pasa por el centro, ésta cuerda se llama diámetro de la elipse y que si P es un punto cualquiera de la elipse, los segmentos que unen los focos con el punto P, se llaman radios vectores.

Para determinar la ecuación de la elipse con centro en el origen y ejes coincidentes con los ejes coordenados, considera a los focos F y F' sobre el eje X. Las coordenadas de F y F' serían, por ejemplo $F(c;0)$ y $F'(-c;0)$, $c > 0$, respectivamente, pues por definición el centro de la elipse es el punto medio del segmento FF'.

En seguida obtiene la ecuación de la elipse, considerando el punto $P(x;y)$ un punto cualquiera de la elipse, que satisface la condición geométrica $\left|\overline{PF}\right| + \left|\overline{PF'}\right| = 2a$, siendo a una constante positiva mayor que c.

En el texto de Lehmann (2003), se aprecia una representación geométrica de la elipse. Se muestra dicha representación en la figura 22.

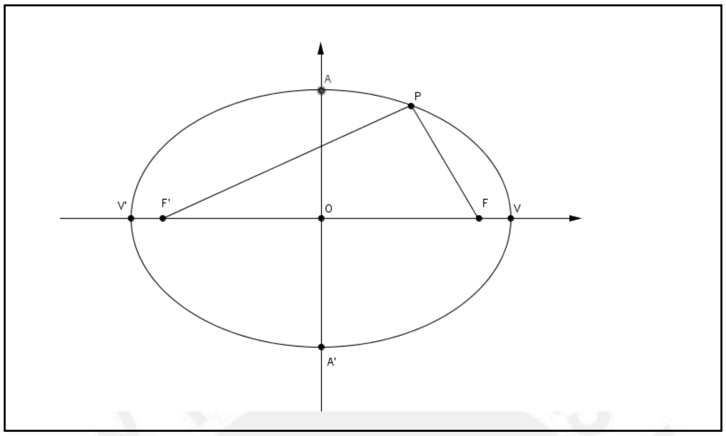


Figura 22. Elipse centro en el origen y ejes los ejes coordenados

Fuente: Lehmann (2003, p. 174)

Sean $P(x;y)$ cualquier punto de la elipse y $F(c;0)$ y $F'(-c;0)$, los focos respectivos.

La condición geométrica $|\overline{PF}| + |\overline{PF'}| = 2a$, se expresa de la siguiente forma:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2\text{a}$$

Luego de elevar al cuadrado y realizar simplificaciones, se tiene

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

De donde

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\ (a^2-c^2)$$

En la definición de elipse se considera $2a>2c>0$, entonces $a^2>c^2$, luego $a^2-c^2>0$ es un número positivo, que puede ser llamado b^2, es decir $a^2-c^2=b^2$.

Usando lo anterior en la expresión $\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\ (a^2-c^2)$, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

La cual corresponde a la ecuación de la elipse con centro en el origen, eje focal el eje X y con longitud del eje mayor $2a$ y longitud del eje menor igual a $2b$, como explicamos a continuación.

Para hallar la longitud del eje menor, es decir longitud del segmento $\mathrm{A\,A'}$, Lehmann (2003) considera uno de los extremos, por ejemplo A, como un punto de la forma $A\,(0;y)$ en la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, obteniendo $\frac{0^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, es decir, $y=\pm b$ y por tanto las coordenadas $A\,(0;b)$ y $A'\,(0;-b)$.

Luego encuentra la longitud del eje menor 2b, calculando la distancia entre sus extremos.

Repite un procedimiento similar para hallar la longitud del lado recto de la elipse $\mathrm{LL'}$. Sustituye uno de los extremos $L\,(c;y)$ en la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, obteniendo $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Luego, al despejar la variable y en la expresión anterior, se obtiene $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}$. Se sustituye $a^2-c^2=b^2$ y se halla que la longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a}$.

Sin embargo en nuestro trabajo de investigación, específicamente en la actividad $5g$), mostraremos que esta propiedad es independiente del sistema de coordenadas que se haya elegido.

Lehmann (2003), define la excentricidad de la elipse como la razón $\frac{c}{a}$ y la representa por la letra e, por lo que se obtiene que $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Como $c < a$ entonces la excentricidad resulta menor que la unidad.

Se procede de manera similar para determinar la ecuación de la elipse cuando su centro se halle en el origen y su eje focal sobre el eje Y. Se determina que la ecuación se escribe como $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, donde a sigue siendo la longitud del semieje mayor, b la longitud del semieje menor, c la distancia del centro a uno de los focos, manteniéndose la relación entre los semiejes $a^2 - c^2 = b^2$ y la longitud de su lado recto $\frac{2b^2}{a}$.

El autor, indica que los resultados anteriores se resumen en un teorema que enuncia de la siguiente forma:

> La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal el eje X, distancia focal igual a $2c$ y cantidad constante $2a$ es
>
> $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
>
> Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean $(0; c)$ y $(0; -c)$, la ecuación de la elipse es
>
> $$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$
>
> Para cada elipse a, b y c están ligadas por la relación $a^2 = b^2 + c^2$

También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{\mathrm{a}}$ y la excentricidad e está dada por la fórmula $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$ (p.177).

Ambas ecuaciones reciben por nombre primera ecuación ordinaria de la elipse. En el texto, también refiere que estas ecuaciones son las más simples de la elipse.

Sin embargo también es posible hallar la ecuación de la elipse cuando su centro está fuera del origen y ejes paralelos a los ejes coordenados.

En la figura 23, se muestra la elipse con centro en *(h;k)*, eje focal paralelo al eje X, y $2a$ y $2b$ las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse.

La ecuación de la elipse, con referencia a los nuevos ejes está dada por $\frac{x'^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{y'^2}{\mathrm{b}^2} = 1$

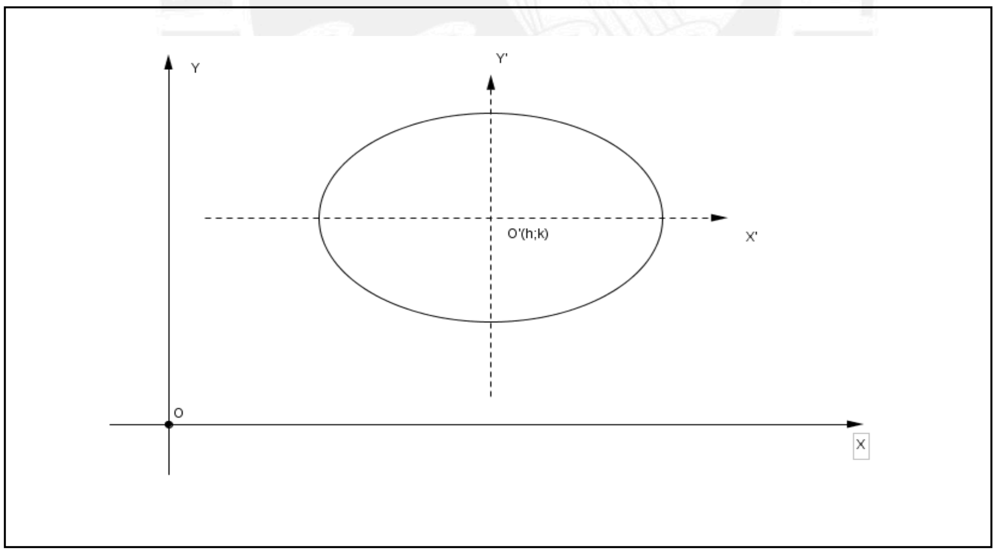


Figura 23. Elipse centro (h; k) y ejes paralelos a los ejes coordenados

Fuente: Lehmann (2003, p.180)

En el texto, Lehmann (2003) hace referencia a las ecuaciones de transformación que expresa como $x = x' + h$, $y = y' + k$. A continuación sustituye los valores de $x' = x - h$, $y' = y - k$ en la ecuación $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, y obtiene $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Los resultados precedentes, se resumen de la siguiente manera:

> La ecuación de la elipse de centro el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje X, está dada por la segunda forma ordinaria $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
>
> Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria
>
> $$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$
>
> Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b la del semieje menor, c es la distancia del centro a cada foco, y a, b y c están ligadas por la relación $a^2 = b^2 + c^2$
>
> También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{\text{a}}$ y la excentricidad e está dada por la fórmula $\text{e} = \frac{c}{\text{a}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$ (p.181).

Otras de las propiedades de la elipse, está basada en la ecuación de la recta tangente y recta normal. Esta propiedad llamada propiedad focal, no será incluida dentro de nuestras actividades porque nuestra investigación está basada en el proceso de la instrumentalización de la noción de elipse. Sin embargo debido a que esta propiedad tiene diversas aplicaciones en el campo de la ciencia la incluimos en la parte teórica del estudio de la elipse.

Al respecto se enuncia el teorema 6: La recta normal a una elipse en cualquiera de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.

En la figura 24, se observa la normal a una elipse por un punto de la cuerva.

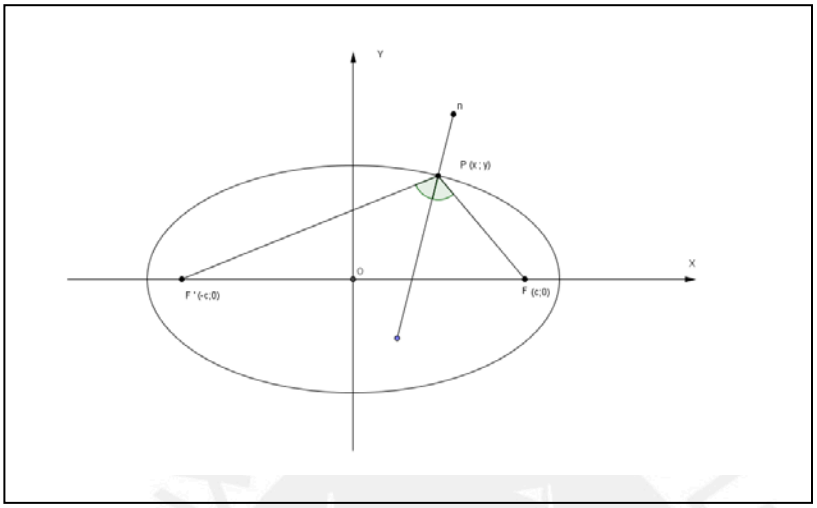


Figura 24. Normal a una elipse por un punto de la curva.

Fuente: Lehmann (2003, p.187)

Lehmann (2003), indica que el teorema anterior está basado en la ley de la reflexión. Si consideramos una superficie de reflexión que tenga como sección recta una elipse y uno de los focos como fuente de luz, entonces el rayo así emitido, incidirá sobre un punto de la elipse, entonces esa luz reflejada, deberá pasar por el otro foco de la elipse. De manera análoga sucede con ondas sonoras, cuyo sonido podrá ser escuchado en el otro foco e inaudible en los puntos intermedios. De acuerdo al teorema mencionado tanto el rayo de incidencia como el reflejado forman ángulos iguales con la normal en el punto de incidencia.

Sobre la base de esta propiedad focal, se basan las construcciones arquitectónicas, cámaras y bóvedas secretas

Otras aplicaciones de la elipse también podrán ser observadas, según el autor en construcciones como arcos elípticos, máquinas y trayectorias elípticas en la astronomía.

En el siguiente capítulo nos enfocaremos en nuestro experimento y análisis del diseño.

CAPÍTULO 4 – EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo caracterizamos a los sujetos de investigación y elaboramos un análisis de la prueba de diagnóstico propuesta a los alumnos descritos en la caracterización. Se elabora una descripción del experimento en la que se detallan los recursos y los instrumentos a usar. Finalmente, el desarrollo del experimento fue planteado mediante una secuencia de actividades, los cuales fueron analizados de acuerdo al enfoque instrumental y a la metodología de la Ingeniería Didáctica.

4.1 Caracterización de los sujetos de la investigación

Para realizar la selección de los sujetos a investigación, hicimos una convocatoria a los alumnos del primer ciclo de la asignatura de Matemática I del programa de Estudios Generales en la Universidad donde se realiza el estudio. Los alumnos traen conocimientos en temas como ecuación de la recta, circunferencia y parábola que son los temas previos al tema de la elipse.

Asistieron veinte estudiantes de manera voluntaria y se les aplicó una prueba de diagnóstico para observar su nivel de logro en los temas indicados. La prueba de diagnóstico (ver Apéndice A) es diseñada para evaluar los conocimientos que han sido indicados como conocimientos previos en el análisis cognitivo de la ingeniería didáctica.

Según Hernández, et al. (2010), ya que nuestro trabajo de investigación es cualitativo, nuestro interés no radica en aplicar los resultados a una muestra muy densa sino comprender sólo algunos aspectos del fenómeno estudiado. Por lo tanto, se creyó conveniente tomar de la población inicial sólo seis alumnos, dado que el tamaño de la muestra no reviste la importancia del caso. Los seis alumnos seleccionados tuvieron notas aprobatorias en la prueba de diagnóstico y fueron asignados a equipos de trabajo que detallamos en el siguiente punto.

Es importante recalcar, que hemos preservado la identidad de los alumnos, sustituyendo sus nombres por seudónimos. Así quedó establecido el equipo *A* conformado por Jorge y Rosa, el equipo *B* por Carlos y Jimena, y el equipo C por Fernando y Alonso.

Cuadro 5. Nombre de los alumnos

Equipos Participantes		
Equipo A	Equipo B	Equipo C
Jorge	Carlos	Fernando
Rosa	Jimena	Alonso

Fuente: Elaboración propia

El cuadro 5 muestra a los equipos conformados por dos alumnos por equipo. Los equipos fueron etiquetados como Equipo A, Equipo B y Equipo C.

En el aula asignada donde se desarrolló el experimento, se le proporcionó a cada equipo una computadora. Además, tres profesores del área de Matemática nos acompañaron como observadores durante el desarrollo de los encuentros, los cuales tuvieron un rol muy activo pues elaboraron descripciones de los sucesos e interacciones de los alumnos durante el experimento, lo cual nos sirvió para el análisis posterior del experimento.

A continuación se hace un breve estudio de la prueba de diagnóstico.

4.2 Prueba de diagnóstico

Con el fin de lograr un mejor criterio de objetividad en la selección de los alumnos, se elaboró una prueba de diagnóstico (Ver Apéndice A) compuesta por seis preguntas, las cuales fueron elaboradas teniendo en cuenta los saberes previos señalados en el análisis cognitivo de la ingeniería didáctica. El cuestionario constó de seis preguntas y está basado en temas relativos a los de lugares geométricos de la mediatriz, circunferencia y parábola, en situaciones que excluyen a los ejes coordenados.

El cuestionario se divide en tres partes.

Parte I. Conformada por tres preguntas que tienen como propósito saber si los alumnos conocen la definición de mediatriz relativa a un segmento, su representación gráfica y cómo aplican esta definición en alguna representación geométrica.

Parte II. Una pregunta sobre circunferencia. Se les indicó que escriban la condición geométrica de un punto perteneciente a la circunferencia y el trazo de algunos elementos como el de la cuerda de dicha curva.

Parte III. Compuesta por dos preguntas sobre el lugar geométrico y las propiedades intrínsecas de la parábola, con el objetivo de saber si los alumnos reconocen las características de los elementos de las parábolas sin que se muestren los ejes coordenados.

En seguida describimos con más detalle la prueba de diagnóstico.

Parte I

La primera parte consta de tres preguntas. El propósito es saber si el alumno conoce la definición de la mediatriz como lugar geométrico y cómo aplica este saber en alguna situación geométrica. Es importante la noción que tenga el estudiante de este tema pues contribuirá al mismo tiempo en el aprendizaje de otros tópicos de la geometría analítica, sobretodo en la construcción geométrica de otros lugares geométricos como la elipse.

En la primera pregunta pedimos una definición de la mediatriz y la descripción de su construcción. Puede plantear la definición como puntos equidistantes a los extremos de un segmento o como la recta perpendicular a un segmento por su punto medio.

La segunda pregunta está elaborada para que el alumno aplique la definición de mediatriz y clasifique a un triángulo por sus lados iguales. Puede aplicar cualquiera de los criterios mencionados en el párrafo anterior, pero si aplica el criterio de recta perpendicular a un segmento por su punto medio, debe además usar congruencia de triángulos para completar la demostración.

En la tercera pregunta se muestra un conjunto de puntos contenidos en la mediatriz de un segmento y se pide al alumno redactar la propiedad que caracteriza a estos puntos respecto a los extremos del segmento dado. Esto nos permite saber si el alumno aplica convenientemente la definición de la mediatriz como lugar geométrico pues será necesaria su posterior aplicación en la construcción de una elipse.

Parte II

La segunda parte está compuesta por una sola pregunta referente al lugar geométrico de la circunferencia. Se espera que los alumnos recuerden que los puntos que pertenecen a esta curva equidistan de su centro. Se elaboró una sola pregunta por su familiarización con el tema de circunferencia desde el colegio y porque usan el compás como instrumento para su construcción.

Se muestra en la figura 25 la representación gráfica de la pregunta cuatro

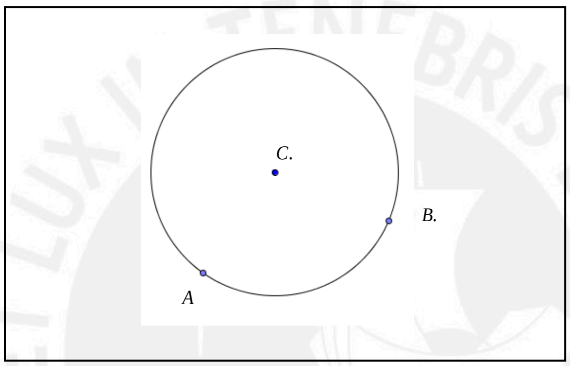


Figura 25. Circunferencia centro C que pasa por A y B

Fuente: Prueba de diagnóstico

En la figura 25 los alumnos deben escribir la condición geométrica de los puntos A y B pertenecientes a la circunferencia de radio r y centro C, así como verificar que el centro C está contenido en la mediatriz de la cuerda $\overline{AB}$

Parte III

En la última parte se han elaborado dos preguntas sobre parábola que corresponden a las preguntas cinco y seis. Las preguntas tienen como propósito que el alumno recuerde que el concepto de lugar geométrico y las propiedades de los elementos de una cónica son invariantes en cualquier situación ya sea de traslación o de rotación e incluso en situaciones en las que no existen los ejes coordenados.

En la figura 26, se observa la gráfica de la pregunta cinco, la curva pasa por tres puntos, construida con dos cuadrados y una circunferencia.

Los alumnos deben justificar que la cuerda PQ es el lado recto de la parábola de vértice V. Para ello el alumno podría usar la noción del lado recto de la parábola, la noción circunferencia y las propiedades del cuadrado.

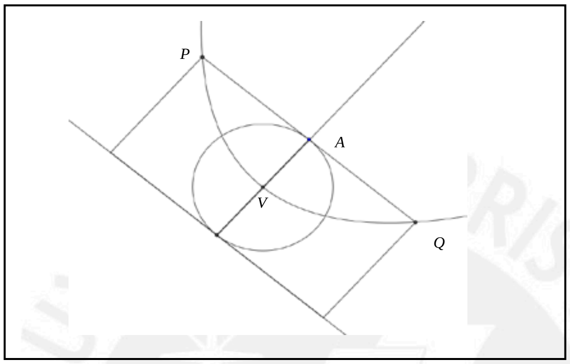


Figura 26. Parábola que contiene tres puntos

Fuente: Prueba de diagnóstico

En la figura superior, se observa a una circunferencia con centro V y dos cuadrados que intersectan a la parábola de vértice V, en los puntos P, Q . El alumno identificó el punto A como el foco de la parábola, y la cuerda de la parábola que une los puntos P y Q como perpendicular a su eje de simetría.

La sexta pregunta, representada en la figura 27, fue elaborada con el propósito de comprobar si reconocen la invariabilidad de las propiedades de una parábola ante cualquier traslación o rotación de la curva, específicamente del lado recto, pues por la experiencia como docente, he observado que un error frecuente de los alumnos es confundir el lado recto de una cónica como cualquier cuerda perpendicular al eje focal.

Este error es mencionado en la problematización de mi trabajo de investigación y una actividad referida al lado recto de una elipse es propuesta en las preguntas del experimento.

En la figura 27 se muestra la representación gráfica de la pregunta seis, se observa una cuerda perpendicular al eje focal de una parábola de vértice V. No se menciona que la cuerda pase por el foco.

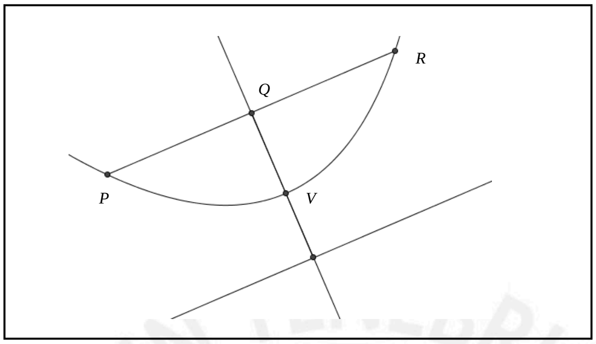


Figura 27. Parábola que contiene una cuerda

Fuente: Prueba de diagnóstico

Se muestra en el cuadro 6, un resumen de los temas considerados como saberes previos:

Cuadro 6. Conocimientos previos del alumno

Tema		Saberes del alumno
La Mediatriz	PARTE I	Conoce la definición de mediatriz
		Traza la gráfica y redacta su construcción
		Aplica la definición en otras representaciones geométricas
La Circunferencia	PARTE II	Conoce el lugar geométrico de la circunferencia
		Identifica el radio y la cuerda de una circunferencia
		Aplica la propiedad de la mediatriz de la cuerda de una circunferencia
La Parábola	PARTE III	Usa la definición de la parábola
		Identifica algunos elementos como el foco, el lado recto.
		Reconoce algunas propiedades invariantes de la parábola.

Fuente: Elaboración propia

Mostramos en el cuadro 7, un resumen que consolida los resultados de la prueba de diagnóstico aplicada a los alumnos

Cuadro 7. Respuestas de los alumnos en la prueba de diagnóstico

	Estudiante					
Preguntas	1	2	3	4	5	6
1	Correcta	Parcialmente correcta	Parcialmente correcta	Correcta	Correcta	Parcialmente correcta
2	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta
3	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta
4	Correcta	Parcialmente correcta	Parcialmente correcta	Parcialmente correcta	Correcta	Parcialmente correcta
5	Correcta	No contesta	No contesta	Incorrecta	Incorrecta	Incorrecta
6	Correcta	Incorrecta	Correcta	Incorrecta	Incorrecta	Correcta
Total respuestas correctas y parcialemte correctas	6	4	5	4	4	5

Fuente: Elaboración propia

El cuadro 7 nos indica el número de preguntas que los alumnos seleccionados respondieron de manera satisfactoria.

En lo que respecta al tema de la mediatriz (preguntas 1-3), se puede apreciar que en algunos casos los alumnos contestan de manera parcial a la pregunta porque tienen dificultades para redactar la definición de la mediatriz como lugar geométrico, pero no evidencian mayor problema para representar la mediatriz gráficamente ni para hacer uso de la propiedad de la mediatriz.

En el siguiente tema (pregunta 4) los alumnos tienen problemas para redactar que los puntos pertenecientes a una circunferencia equidistan del centro pero sí relacionan la propiedad de la mediatriz aplicada en la circunferencia

Finalmente, en las respuestas (preguntas 5-6), se observa que no manejan correctamente las propiedades invariantes de una cónica y que muchas de sus deducciones las basan en percepciones, como identificamos en la problemática de las figuras cónicas como representaciones estáticas.

De esta forma podemos garantizar que los alumnos que participan en el desarrollo de nuestra secuencia de aprendizaje de la elipse mediado con el Geogebra muestran aptitudes en los temas previos al concepto de elipse, es decir reconocen la mediatriz de un segmento como la perpendicular que pasa por el punto medio del segmento, saben trazar mediatrices usando esta definición aunque en algunos casos les cuesta indicar que sus puntos equidistan de los extremos del segmento, conocen la condición de lugar geométrico de la circunferencia, saben trazar cuerdas pero no relacionan la propiedad de la mediatriz cuando pasa por la cuerda de una circunferencia. Se perciben dificultades en la aplicación de sus propiedades invariantes de algunas cónicas como la parábola, cuando las curvas no están sobre los ejes coordenados.

Todas estas dificultades que los alumnos muestran en torno a las aplicaciones y construcciones de alguna curva se evidencian porque las construcciones geométricas son ajenas a su enseñanza.

4.3 Descripción del experimento

Hemos considerado en total quince actividades que fueron desarrolladas en tres encuentros con los alumnos. El cuadro 8 presenta un resumen del número de actividades y una descripción de los temas elaborados en las actividades.

Cuadro 8. Encuentros del Experimento

Encuentro	Actividades	Descrición
1	5	Explorando las herramientas del Geogebra
2	5	Construcción de la elipse como lugar geométrico. Exploración de las propiedades de sus elementos.
3	5	Representación de la elipse en los ejes coordenados Expresión algebriaca de la elipse Aplicación animada

Fuente: Elaboración propia

En el primer encuentro (Ver Apéndice B) constó de cinco actividades sobre la exploración de algunas herramientas o funciones del Geogebra que fueron necesarias para el trabajo y desarrollo del experimento.

El primer encuentro se inició con una exposición en la que se hizo una descripción de las principales herramientas del programa de AGD. Luego se propusieron actividades para que el alumno explore y trabaje preguntas relacionadas al software. El tiempo programado para esta actividad fue de cien minutos. Estas actividades no serán descritas porque no es el foco de la investigación.

Las otras diez actividades correspondieron al segundo y al tercer encuentro (Ver Apéndice C), ambas vinculadas al estudio de la elipse que describimos a continuación. A pesar que el Geogebra no es nuestro foco de estudio, hemos analizado como se instrumentalizan algunas herramientas y las restricciones que encontramos cuando las empleamos para mediar con la elipse.

En el segundo encuentro, se propusieron cinco de las diez actividades y fueron enumeradas desde la pregunta 1 a la pregunta 5. Estas primeras actividades guardan relación directa con el objeto matemático de nuestro tema de estudio. Es importante recordar, que previo a esta etapa los alumnos ya habían tenido un primer contacto con las herramientas del Geogebra, por lo tanto hay una familiarización de dichas herramientas cuando elaboraron las actividades propuestas. Las primeras actividades de este encuentro, hacen cuenta de la construcción de una elipse movilizando esquemas previos, entre otros, la mediatriz y circunferencia como lugares geométricos. Para ello hicieron uso de la herramienta Rastro del Geogebra, la cual traza un conjunto o traza de puntos que cumplen determinadas restricciones y que condujo al estudiante a la interpretación de esta situación, haciendo uso de la condición geométrica de la curva. De acuerdo al desarrollo de las secuencias de actividades y haciendo uso de las herramientas del Geogebra, surgen otras propiedades de sus elementos, como la relación entre los semiejes con la semidistancia focal, la excentricidad, el trazo de focos, lados rectos, ubicación de los vértices, extremos del eje menor, etc., Esta evolución de sus componentes permitieron que el alumno le atribuya ciertas funciones a las propiedades intrínsecas de la elipse. El tiempo de duración fue consignado para cien minutos.

En el tercer encuentro, se propusieron cinco actividades adicionales y se enumeraron desde la pregunta 6 a la pregunta 10. Estas actividades se iniciaron con el trazo global de la curva y la vinculación de esta representación a las expresiones algebraicas correspondientes. Para ello los alumnos hicieron uso tanto de la Vista Gráfica como en la Vista Algebraica que ofrece el Geogebra. Gracias a ambas vistas, lograron escribir las expresiones algebraicas y las coordenadas de los principales elementos de la elipse. Finalmente, la última actividad correspondió al uso de la elipse como instrumento para mediar sobre un objeto real, es decir sobre la trayectoria elíptica de un cometa alrededor del sol, cuando este se ubica sobre el foco de la curva. El tiempo de duración se estableció también en cien minutos. En seguida haremos una descripción de los instrumentos requeridos en el experimento

4.4 Recursos e Instrumentos del experimento

El experimento se llevó a cabo en un salón de clase de una universidad privada, al cual llamaremos laboratorio de investigación.

Se emplearon recursos para la investigación como:

- Una pizarra acrílica y proyector
- Una computadora en aula disponible para el profesor
- Computadoras en aula de uso disponibles para los alumnos
- El software Geogebra versión 4.2.57.0 de libre distribución

Para la recolección de datos, utilizamos los siguientes instrumentos:

- Las Fichas de trabajo de las actividades propuestas.
- Las grabaciones de los archivos que contienen todos los pasos de construcción elaborados por los alumnos del experimento. Ingresando al Protocolo del Menú Vista del Geogebra se tiene la posibilidad de observar la estructura de su construcción.

- Ficha de observación (Ver Apéndice D), usado para registrar los sucesos durante el desarrollo de la clase. Esta información enriquece nuestro trabajo de investigación y es elaborada por tres profesores involucrados en el proceso de enseñanza de la materia.

A continuación presentamos las actividades que propusimos en el experimento con sus respectivos análisis *a priori* y *a posteriori*.

4.5 Análisis de las actividades

De acuerdo a la metodología de la Ingeniería Didáctica el análisis *a priori* comprende una parte descriptiva y una predictiva que se centra en las características de una situación a-didáctica y que sirve de referencia a la metodología. Posterior a este primer análisis, y luego de recoger los datos provenientes de las actividades realizadas en la experimentación, se realiza la validación de los comportamientos esperados por los alumnos y de sus significados. Finalmente, la confrontación entre ambos análisis: *a priori y posteriori*, basamos la validación de nuestro trabajo de investigación.

Se analizarán las actividades por cada equipo. Nos hemos centrado en especial en el equipo A formado por Jorge y Rosa y en el equipo B formado por Carlos y Jimena. Así en adelante haremos mención a los equipos o a los alumnos de los equipos A y B.

Figura 28. Los equipos durante las actividades

A continuación realizaremos el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada una de las actividades de la secuencia didáctica.

Análisis de la actividad 1

En el cuadro 9 presentamos la actividad uno que consta de cinco ítems. A continuación elaboramos el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada una de las partes correspondientes.

Cuadro 9. Actividad 1

ACTIVIDAD 1

En el archivo Actividad_1.ggb mostramos una circunferencia de centro C , de radio $\overline{CP}$ y un punto interior fijo a la circunferencia Q, de tal forma que $/\ \overline{CP}\ / > /\ \overline{CQ}\ /$.

a) Trace la mediatriz relativa segmento $\overline{PQ}$.

b) Determine el punto A sobre el radio $\overline{CP}$ que equidiste de los extremos del segmento $\overline{PQ}$

c) Con la herramienta "Polígono", marque los vértices del triángulo APQ.

De acuerdo a la longitud de sus lados ¿cómo clasifica al triángulo APQ? ¿Por qué?

d) Utilizando el punto A como extremo de los segmentos, indique la longitud del radio de la circunferencia como la suma de las medidas de dos segmentos. Muestre dos expresiones equivalentes.

e) Si mueve el punto P sobre la circunferencia genera un desplazamiento del punto A. ¿por qué la suma de las medidas de los segmentos hallada en el ítem d) se mantiene constante? Puede hacer uso de la herramienta "Distancia" del Geogebra

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_1ggb en la careta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente actividad

Actividad 1

Análisis a priori de la actividad 1

Esperamos que los alumnos instrumentalicen una nueva propiedad de una circunferencia con centro en C y radio $\overline{CP}$. Es decir *dado un punto fijo* Q *en el interior de dicha circunferencia, se determinará un punto* A *sobre su radio* $\overline{CP}$, *de tal forma que sea lo mismo sumar la medida de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ *que la medida de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$, *y que esa suma sea una constante*. Para propiciar esta actividad creemos que los equipos A y B deberán movilizar sus esquemas de uso como segmento, triángulo isósceles, mediatriz de un segmento con base en la propiedad todo punto perteneciente a la mediatriz de un segmento equidista de las extremidades del segmento o que la mediatriz de un segmento es una recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento, además de la noción de circunferencia como un conjunto de puntos cuya distancia a otro punto fijo es una constante llamada radio, nociones que corresponden a los saberes previos consignados en la dimensión cognitiva de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). Todas las herramientas del Geogebra, según Trouche (2004), se encontrarían en la fase de descubrimiento y selección pues se hallan en un proceso de familiarización. En esta actividad pensamos que ambos equipos construirán un nuevo esquema de acción instrumentada en relación a la nueva propiedad de la circunferencia.

Se muestra en la figura 29 la representación gráfica de la pregunta1ggb.

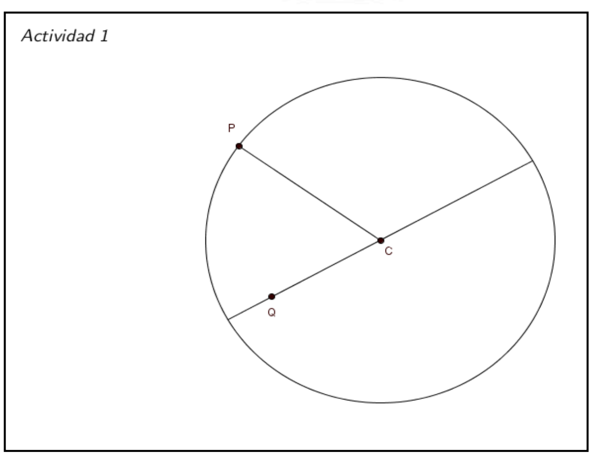


Figura 29. Actividad 1

Análisis a posteriori de la actividad 1

Las acciones de los alumnos de los equipos A y B, nos proporcionaron indicios que los esquemas de utilización como segmento, mediatriz, triángulo isósceles, circunferencia, fueron movilizados como esquemas de uso, es decir que la mediatriz de un segmento es una recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento o que todo punto perteneciente a la mediatriz de un segmento equidista de las extremidades de dicho segmento y que la circunferencia es un conjunto de puntos cuya distancia a otro punto fijo es una constante llamada radio, los cuales fueron previstos en el análisis *a priori*.

Los alumnos de ambos equipos pudieron construir una nueva propiedad con respecto a la circunferencia, la cual indica que en *una circunferencia con centro* C, *que contiene al punto interior fijo* Q, *es posible encontrar un punto* A *sobre cualquier radio* $\overline{CP}$, *de tal forma que resulte lo mismo sumar la medida de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ *que la medida de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$, *y que además esa suma es una constante*.

De acuerdo a ello, acreditamos que los esquemas de uso movilizados favorecieron para que dicha nueva propiedad de la circunferencia sea un esquema de acción instrumentada que los alumnos construyeron.

Notamos que el proceso de instrumentalización de las herramientas del Geogebra, transcurrieron por un escenario de familiarización pues hay una ayuda recíproca entre los integrantes de cada equipo para su utilización. Al respecto Trouche (2004) indica que las herramientas en esta etapa, aún se encuentran en una fase de descubrimiento y selección, aunque el equipo B hace uso además de la herramienta “Distancia” del Geogebra en el ítem $c)$ y la emplea de manera personalizada.

Probablemente la exploración del Geogebra que hicimos con los alumnos de ambos equipos en la primera sesión y el procedimiento similar al de lápiz y papel de algunas herramientas, favoreció que en muchos pasajes ambos equipos no requieran orientación del profesor y personalicen algunas herramientas de este programa de AGD.

Ítem a)

Análisis a priori.

En la parte predictiva, pensamos que los equipos A y B trazarán sin ninguna dificultad la mediatriz de un segmento basados en la propiedad que indica que la mediatriz de un segmento es una recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento. Creemos que no tendrán problemas para realizar esta actividad, porque el trazo de la mediatriz como instrumento es una noción cuyas propiedades fueron movilizadas en la prueba de diagnóstico. Las herramientas del Geogebra que harán uso en el proceso de construcción se hallan en un escenario de descubrimiento, pues están en un proceso de familiarización, según Trouche (2004).

Posibles esquemas de utilización.

- La noción de segmento y de mediatriz
- El uso de las herramientas "Segmento entre dos puntos", "Mediatriz"

Parte predictiva de las acciones.

Los alumnos de ambos equipos señalan la herramienta "Segmento entre dos puntos", seleccionas los puntos $P\ y\ Q$ y se crea el segmento $\overline{PQ}$. Señalan la herramienta "Mediatriz", seleccionan el segmento $\overline{PQ}$ y aparece la mediatriz de dicho segmento.

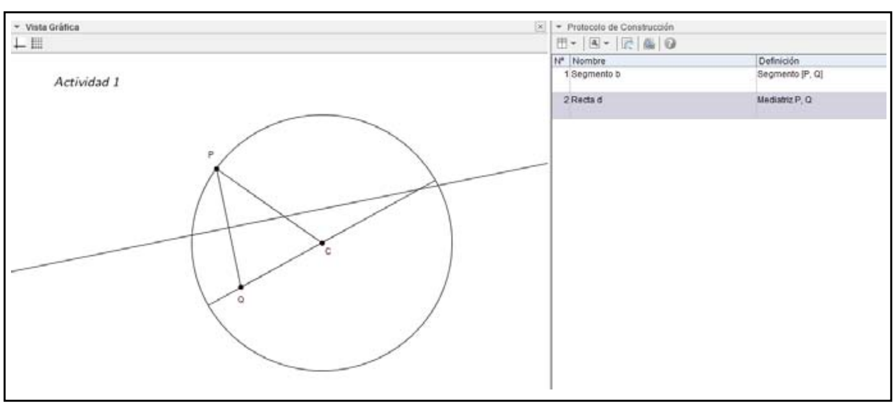


Figura 30. Desarrollo Actividad 1a

En la figura 30 se muestra el trazo del segmento $\overline{PQ}$ y de la mediatriz correspondiente al segmento, que creemos los alumnos construirán sin ninguna dificultad.

Análisis a posteriori

Como lo habíamos previsto, los alumnos están instrumentados con la mediatriz, ya que ambos equipos trazaron el segmento $\overline{PQ}$ y la mediatriz del segmento correspondiente, la cual estuvo basada en la propiedad que indica que la mediatriz de un segmento es una recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento. Ninguno de ellos presentó dificultades en la movilización de los posibles esquemas segmento, mediatriz y el uso de las herramientas del Geogebra.

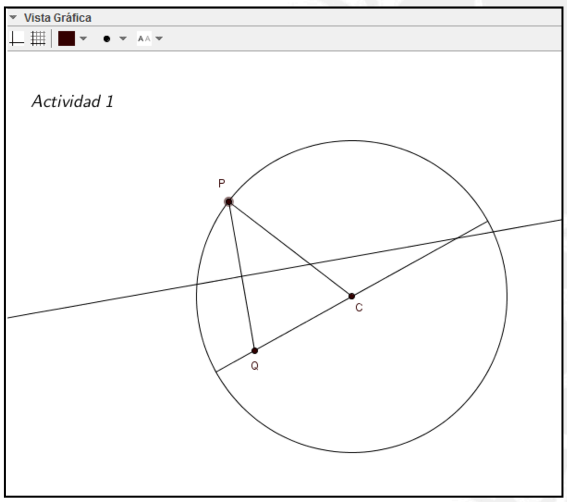


Figura 31. Gráfico 1a. Equipo A

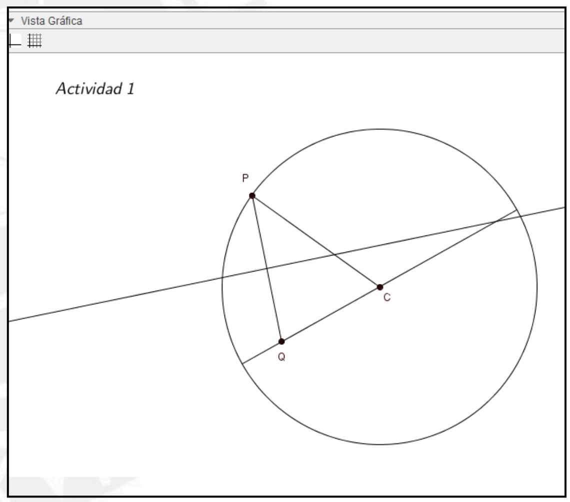


Figura 32. Gráfico 1a. Equipo B

Las figuras 31 y 32 muestran el trazo de la mediatriz al segmento $\overline{PQ}$ de ambos equipos, de acuerdo a Trouche (2004), hay indicios de instrumentalización de las herramientas del Geogebra pues se hallan en la fase de familiarización.

No se presentó ninguna dificultad en la construcción debido a que los alumnos movilizaron sus nociones previas del trazo de la mediatriz de un segmento como perpendicularidad entre rectas, punto medio, segmento. Identificamos que ambos equipos movilizaron la noción de mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ como instrumento porque movilizaron sus propiedades, como aquella que indica que es una recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento.

En el ítem b)

Análisis a priori.

Esperamos que equipos A y B continúen movilizando esquemas de uso referente a la mediatriz, e indiquen que todo punto perteneciente a la mediatriz de un segmento equidista de las extremidades del segmento y determinen el punto A en la intersección de dicha mediatriz y el radio de la circunferencia.

Posibles esquemas de utilización

- Noción de intersección, mediatriz, circunferencia.
- El uso de la herramienta "Intersección de dos objetos"

Parte predictiva de las acciones.

Ambos equipos señalan la herramienta "Intersección de dos objetos", seleccionan la mediatriz y el radio de la circunferencia y determinan el punto A

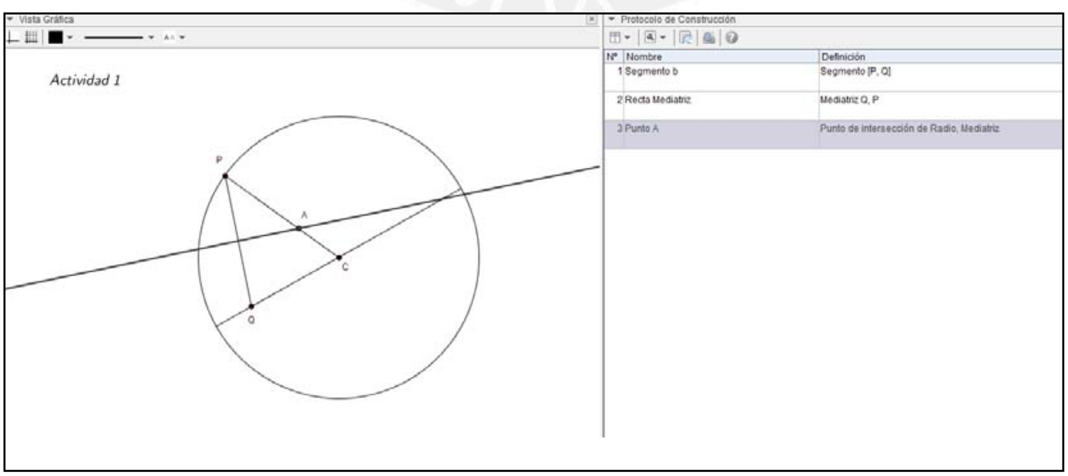


Figura 33. Desarrollo Actividad 1b

En la figura 33, mostramos el punto A que los alumnos finalmente rotularán haciendo uso de la herramienta "Intersección de dos objetos". Probablemente los equipos A y B tengan dificultades al usar dicha herramienta porque el proceso de construcción no es similar al de papel y lápiz.

Análisis a posteriori

Como se había previsto, verificamos que los alumnos estaban instrumentados en relación a la mediatriz pues continuaron utilizando la técnica de construcción elaborada con base a la definición que indica que todo punto perteneciente a la mediatriz de un segmento equidista de las extremidades del segmento y determinaron el punto A, el cual se ubica en la intersección de la mediatriz y el radio $\overline{CP}$. Para ello hacen uso de la herramienta "Intersección de dos objetos" y luego obtienen el punto solicitado. En esta parte, se halló una restricción de acción de la herramienta "Intersección de objetos" del Geogebra que fue comentada en los aspectos del Enfoque Instrumental.

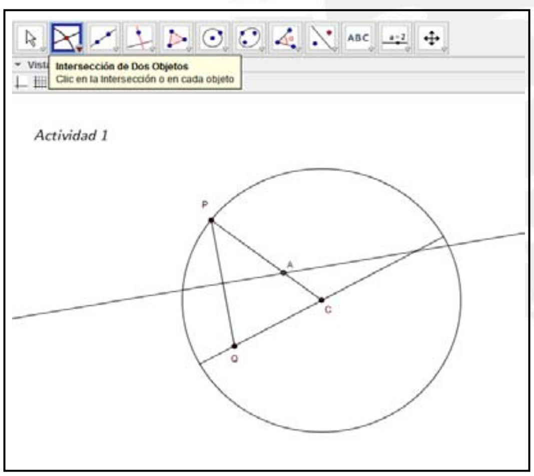


Figura 34. Gráfico 1b. Equipo A

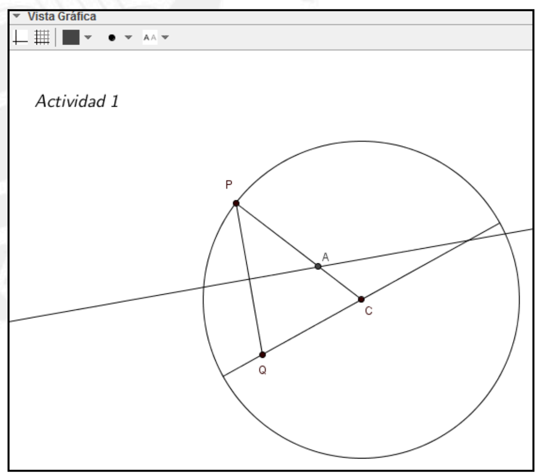


Figura 35. Gráfico 1b. Equipo B

La figura 34 y 35 muestra la ubicación del punto A, luego que los alumnos intersectaron la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ con el radio $\overline{CP}$ de la circunferencia.

En ambos casos podemos afirmar que los alumnos siguen instrumentados respecto a la mediatriz de un segmento $\overline{PQ}$, ya que muestran condiciones de reconocimiento como aquella recta en la cual un conjunto de puntos equidista de los extremos de dicha recta.

En el ítem c)

Análisis a priori

Creemos que los alumnos de ambos equipos están instrumentados con la noción de mediatriz de un segmento y de triángulo isósceles con base a la propiedad de la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ y la del triángulo APQ como triángulo isósceles. Es decir dado que el punto A pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ y sus distancias a dichos segmento son iguales, entonces los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son iguales. Además creemos que los equipos usarán de manera apropiada la herramienta "Polígono" del Geogebra porque el proceso de dibujar el triángulo es similar al que usamos con lápiz y papel, es decir se irán construyendo uno a uno los vértices A, P y Q y los segmentos que une con los puntos

Posibles esquemas de utilización

- Noción de triángulo isósceles, mediatriz
- El uso de la herramienta "Polígono"

Parte predictiva de las acciones.

Ambos equipos señalan la herramienta "Polígono" y seleccionan sin soltar el mouse, los puntos $A,P\ ,Q\ \ y\ \ A$.

Luego los alumnos observarán que el punto A pertenece a la mediatriz del segmento y clasifican al triángulo APQ como isósceles porque movilizan los esquemas de uso de mediatriz de un segmento como todo punto que equidista de las extremidades del segmento.

Luego señalan que si el punto A está en la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, entonces la medida de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ permanecen iguales, por lo tanto creemos que concluirán que el triángulo APQ obtenido es un triángulo isósceles.

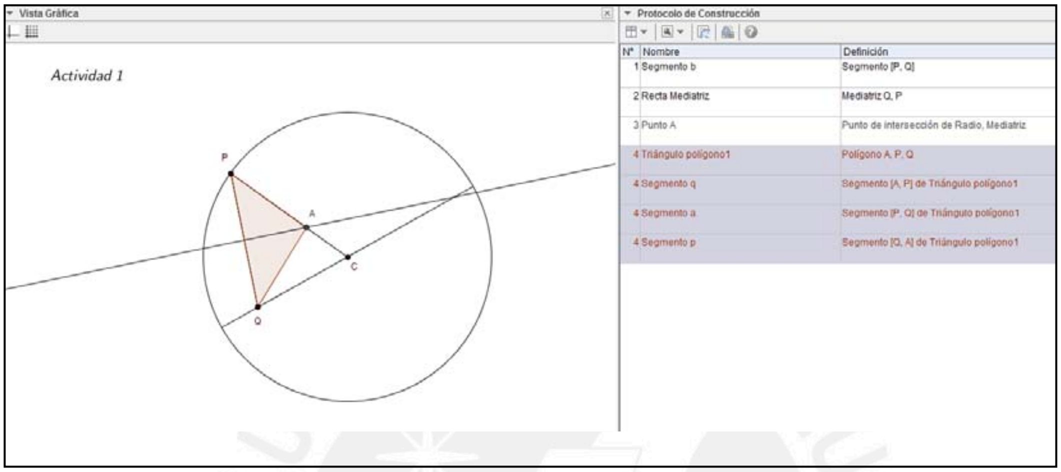


Figura 36. Desarrollo Actividad 1c

En la figura 36, luego de trazar el triángulo APQ, los alumnos de ambos equipos, movilizan su esquema de uso que indica que todo punto de la mediatriz es equidistante de las extremidades de dicho segmento, luego clasificarán dicho polígono como triángulo isósceles, porque dos de sus lados son iguales. Los alumnos siguen mostrando que están instrumentados con respecto a la mediatriz de un segmento y con la clasificación del triángulo como isósceles.

Análisis a posteriori.

Tal como se tenía previsto, los equipos A y B hacen uso correcto de la herramienta "Polígono", y trazan el triángulo APQ. El equipo B además hace uso de la herramienta "Distancia" para validar sus respuestas.

Destacamos que ambos equipos siguen mostrando que continúan instrumentados con la noción de mediatriz ya que llegan a determinar que el punto A es un punto de la mediatriz que equidista de los extremos del segmento $\overline{PQ}$ y que por lo tanto el triángulo APQ es un triángulo isósceles cuyos lados $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ permanecen iguales.

Las figuras 37 y 38 muestran los trazos de los triángulos solicitados.

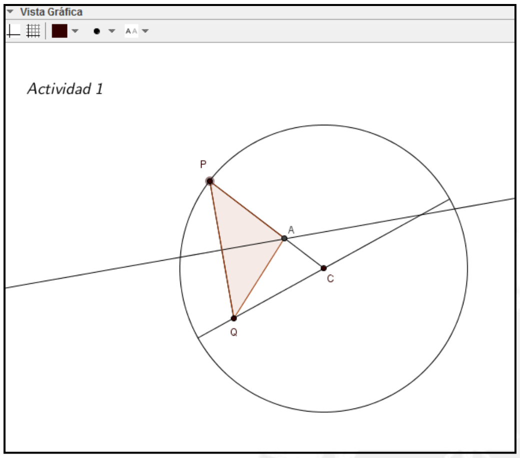


Figura 37. Gráfico 1c. Equipo A

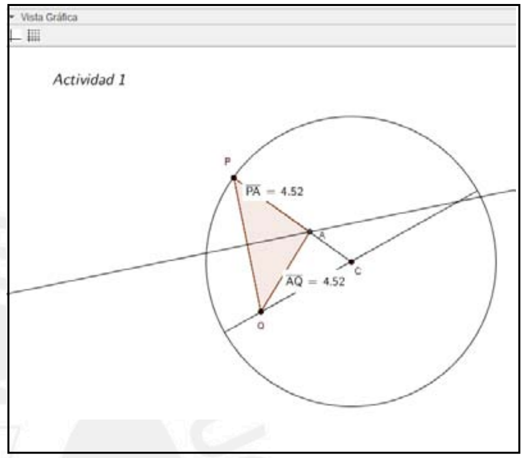


Figura 38. Gráfico 1c. Equipo B

De acuerdo al análisis *a priori*, ambos equipos movilizaron la propiedad de la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, y señalaron que todo punto perteneciente a la mediatriz de un segmento equidista de las extremidades del segmento, luego indican que el triángulo APQ es isósceles porque los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son iguales.

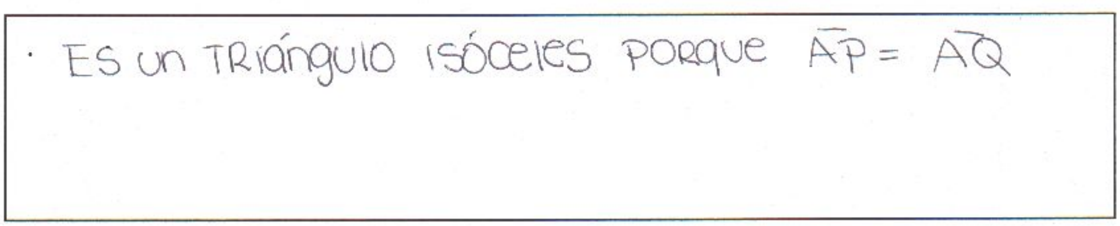


Figura 39. Enunciado 1c. Equipo A

En la figura 39, se observa que para justificar que el triángulo es isósceles, el equipo A indicó que los lados $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son iguales ya que dicho punto pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{AQ}$ o que la mediatriz contenía a la altura que pasaba por el punto medio de la base, lo cual correspondía a un triángulo isósceles.

Esta justificación construida de manera grupal también es producto del trabajo colectivo que contribuyó al surgimiento de los esquemas de acción colectiva instrumentada.

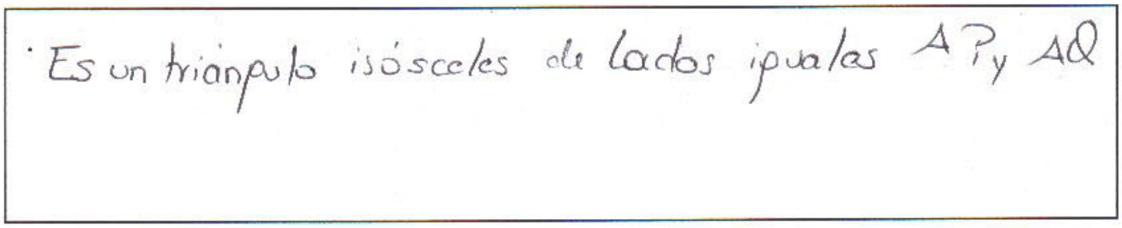


Figura 40 Enunciado 1c. Equipo B

En la figura 40, el equipo B ejemplifica el mismo hecho del trabajo colectivo mediante la presentación de un discurso escrito, aunque personaliza la herramienta “Distancia”.

En el ítem d)

Análisis a priori

Creemos que equipos no tendrán inconvenientes en movilizar como esquemas de uso la propiedad de triángulo isósceles que indica que los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son iguales y la noción de segmento que representa al radio de la circunferencia como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$. Luego indicarán el radio de la circunferencia se puede expresar como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ y como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$.

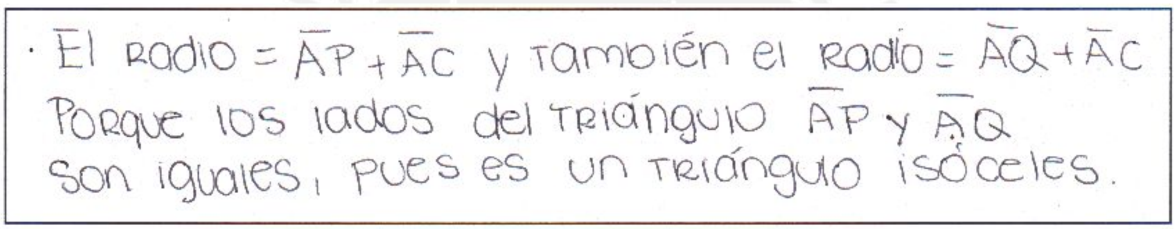
Posibles esquemas de acción.

El equipo moviliza la noción de segmento, mediatriz, triángulo isósceles.

Análisis a posteriori

Podemos afirmar que ambos equipos no tuvieron dificultad en expresar el radio de la circunferencia como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ y como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$. En efecto, en la primera relación observamos que los puntos C, A y P son puntos colineales, lo que les permitió expresar el radio de la circunferencia como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$. Para determinar la segunda relación, es decir la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$, los alumnos movilizaron la propiedad del triángulo isósceles APQ como esquema de uso, ya que lograron señalar que el lado $\overline{AQ}$ del triángulo isósceles es igual al lado $\overline{AP}$, lo que les permitió expresar el radio de la circunferencia como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$.

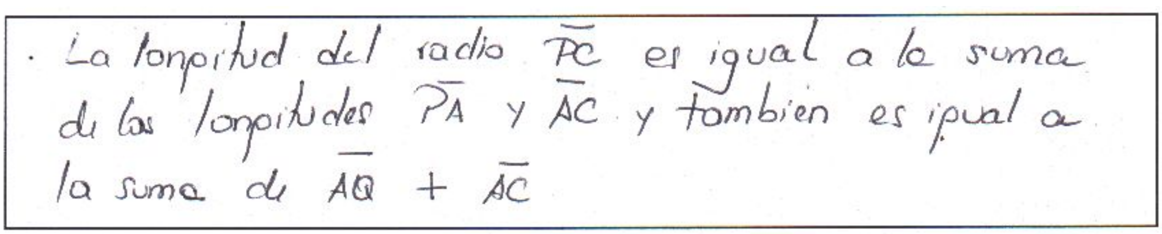
En las figura 41 y 42, observamos que los alumnos pueden expresar el radio de la circunferencia como la suma de las medidas de otros segmentos, la cual explican haciendo uso de la noción de triángulo isósceles.



· El radio = $\overline{AP}+\overline{AC}$ y también el radio = $\overline{AQ}+\overline{AC}$ Porque los lados del triángulo $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son iguales, pues es un triángulo isósceles.

Figura 41. Enunciado 1d. Equipo A

Ambos equipos han construido un nuevo esquema de acción instrumentada respecto a la circunferencia, específicamente la existencia de un punto A perteneciente al radio CP de la circunferencia con centro en C y un punto interior Q, de tal forma que resulta lo mismo sumar la medida de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ que la medida de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$.



· La longitud del radio $\overline{PC}$ es igual a la suma de las longitudes $\overline{PA}$ y $\overline{AC}$ y tambien es igual a la suma de $\overline{AQ}+\overline{AC}$

Figura 42. Enunciado 1d. Equipo B

Resaltamos que como también estamos enfocados en los esquemas que podrían construirse de forma colectiva, creemos que en la sociabilización, los grupos presentaron la nueva propiedad de la circunferencia lo que significa que los alumnos continúan instrumentalizando el instrumento circunferencia al enriquecerlo con una nueva propiedad.

En el ítem e)

Análisis a priori

Pensamos que los alumnos de ambos equipos movilizarán los mismos esquemas de uso del ítem anterior: triángulo isósceles y segmento como la suma de otros segmentos y también harán uso de la herramienta “Distancia”. Al deslizar el punto P, el triángulo APQ continúa siendo isósceles debido a que el punto A permanece sobre la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$. Los alumnos harán uso además, de la herramienta “Distancia” del Geogebra para validar esta afirmación y continuarán instrumentalizando a la circunferencia, pues señalan la existencia de un punto A perteneciente al radio CP de dicha circunferencia en la que resulta lo mismo sumar la medida de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ que la medida de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$ debido a que los lados $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ se mantienen invariantes

Posibles esquemas de utilización

- La noción de distancia entre dos puntos, la noción de triángulo isósceles, la noción de segmento y la noción del radio.
- El uso de la herramienta “Distancia” y “Elige y mueve” sobre un determinado punto

Parte predictiva de las acciones.

Pensamos que los alumnos de ambos equipos, señalarán la herramienta “Distancia” tal como le fue sugerida en el enunciado de la actividad y seleccionan los extremos del segmento $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$. Luego arrastran el punto P sobre la circunferencia con la herramienta “Elige y mueve”, entonces observan que la relación de igualdad entre los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ del triángulo isósceles APQ sigue siendo la misma y que el radio de la circunferencia es una constante que puede ser escrita como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$.

Se espera que los alumnos no tengan dificultad en hacer uso de la herramienta "Distancia", tal como se aprecia en la figura 43.

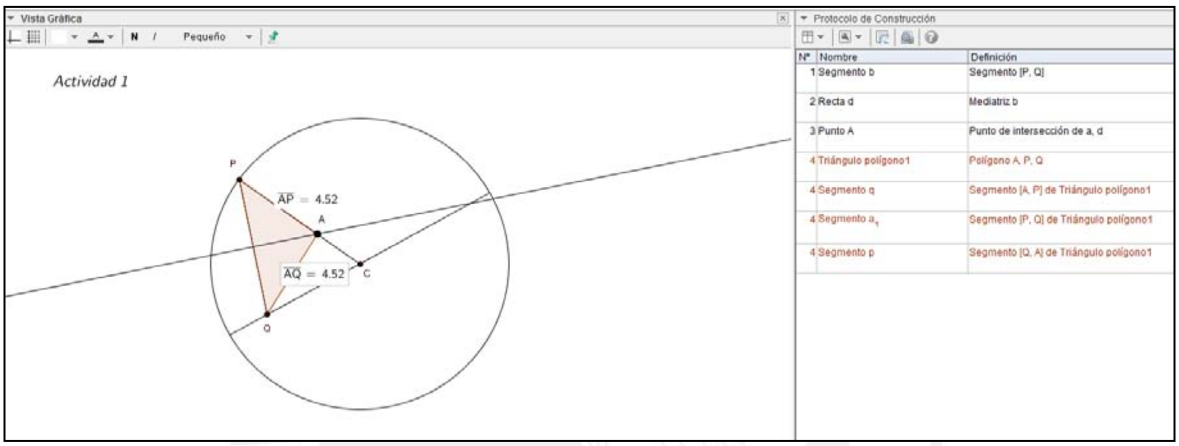


Figura 43. Desarrollo Actividad 1d

De esta forma, los equipos A y B indicarán que al mantenerse invariante la longitud de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$, entonces la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$ es siempre igual a una constante.

Análisis a posteriori

Ambos equipos hicieron uso de la herramienta "Distancia" del Geogebra, de acuerdo a lo previsto en el análisis *a priori* y luego mueven el punto P con el objetivo que el punto A se desplace en el interior de la circunferencia.

En la figura 44, se mueve el punto P y se consiguió el desplazamiento de los vértices A y P del triángulo APQ. La movilización del esquema de uso mediatriz de un segmento, la de triángulo isósceles y el uso de la herramienta "Distancia", les permitió validar que el triángulo APQ se mantiene como triángulo isósceles.

.

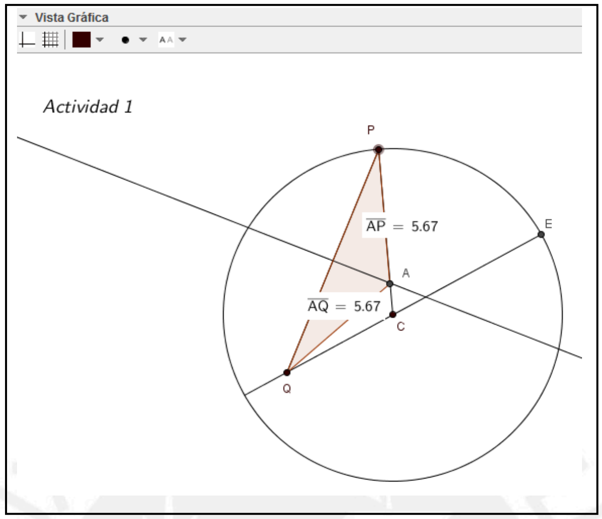


Figura 44. Gráfico 1e. Equipo A

El equipo A expresa en la figura 45, que tanto la longitud del radio como la relación de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ se mantienen constantes, luego de desplazar el punto A en el interior de la circunferencia

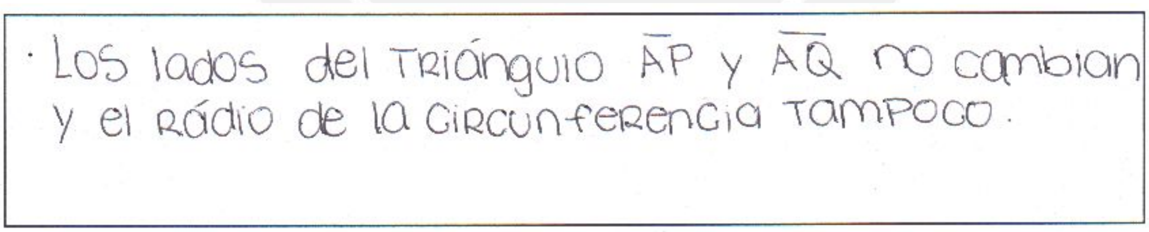


Figura 45. Enunciado 1e. Equipo A

En la figura 46, se muestra una situación similar. A medida que los alumnos del equipo B mueven el punto P, el punto A va tomando otras posiciones relativas en el interior de la circunferencia, permaneciendo el punto A en la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, de tal forma que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AP}$ es siempre igual al radio de la circunferencia e igual a la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$.

Se observó al movilizar las propiedades de la mediatriz de un segmento, triángulo isósceles, y el uso de la herramienta “Distancia”, les permitió validar que el triángulo APQ se mantiene como triángulo isósceles.

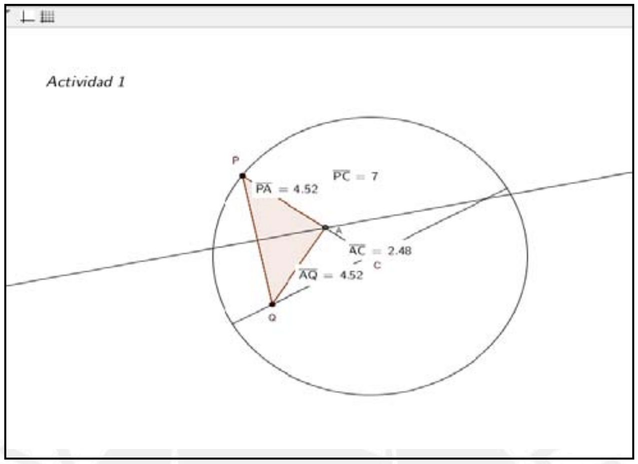


Figura 46 Gráfico 1e. Equipo B

En la figura 47, los alumnos del equipo B movilizaron los esquemas de uso de la mediatriz de un segmento, la propiedad del triángulo isósceles, y aplicaron la herramienta “Distancia” del Geogebra, para indicar que los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ permanecieron iguales, al desplazar el punto A.

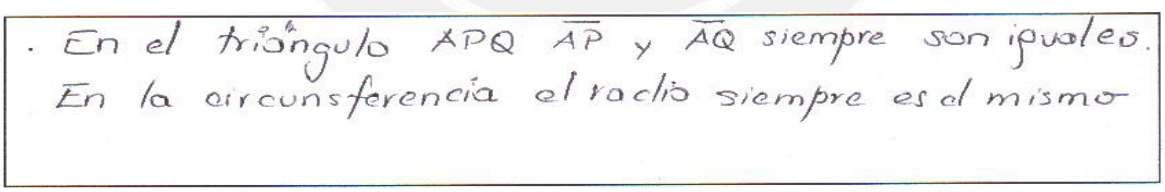

· En el triángulo APQ $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ siempre son iguales.
En la circunsferencia el radio siempre es el mismo

Figura 47. Enunciado 1e. Equipo B

Los alumnos que estaban instrumentados con la circunferencia como lugar geométrico, continuaron instrumentalizándola, sus acciones mostraron que construyeron una nueva propiedad en la que es posible hallar un punto A en el radio $\overline{CP}$ de una circunferencia y que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$ sea una constante igual al radio de la circunferencia, siendo Q un punto interior de la circunferencia.

Análisis de la actividad 2

En el cuadro 10 presentamos la actividad 2 que consta de cinco ítems. A continuación elaboramos el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada una de las partes correspondientes.

Cuadro 10. Actividad 2

ACTIVIDAD 2

En el archivo Actividad_2.ggb mostramos una circunferencia de centro C, de radio $r = \overline{CP}$ y un punto interior fijo a la circunferencia Q. Además el punto A pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ y al radio de la circunferencia

a) Mueva el punto P sobre la circunferencia. Calcule la longitud del radio como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ cuando el punto A se desplaza a dos posiciones distintas.

$\|\overline{CA}\| + \|\overline{AP}\| = \quad + \quad =$	$\|\overline{CA}\| + \|\overline{AP}\| = \quad + \quad =$

b) Mueva el punto P sobre la circunferencia. Calcule la longitud del radio como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$ para dos posiciones distintas del punto A

$\|\overline{CA}\| + \|\overline{AQ}\| = \quad + \quad =$	$\|\overline{CA}\| + \|\overline{AQ}\| = \quad + \quad =$

c) ¿Qué propiedades geométricas justifican los resultados hallados en $a)$ y en $b)$

d) En el menú contextual del punto A seleccione “Active Rastro”, fije el estilo del punto al mínimo en Propiedades del Objeto y luego deslice lentamente el punto P sobre la circunferencia. La trayectoria del punto A genera una curva llamada elipse. La suma de las distancias del punto A a los puntos fijos Q y C, ¿es un resultado que se mantiene constante mientras A se desplace por la curva? ¿Por qué?

e) En la circunferencia de centro C, radio CP y un punto interior Q, exprese en términos de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$, la condición geométrica que debe cumplir el punto A para que su trayectoria forme la figura elíptica.

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_2.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente pregunta.

Análisis a priori de la actividad 2

En esta actividad, creemos que los alumnos de ambos equipos siguen avanzando en el proceso de instrumentalización de la propiedad de la circunferencia que determinaron en la actividad 1, es decir *dada circunferencia con centro* C*, que contiene al punto interior fijo* Q*, es posible encontrar un punto* A *sobre cualquier radio* $\overline{CP}$*, de tal forma que resulte lo mismo sumar las medidas de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ *que las medidas de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$*, y que además esa suma sea una constante*, ya que la enriquecerán vinculando la trayectoria del punto A que cumple dicha propiedad a la gráfica de una elipse y escribirán la condición geométrica de la elipse en términos de la propiedad de dicha circunferencia.

Creemos que hay indicios para suponer que la circunferencia continúa instrumentalizándose porque vincularán el punto A a la trayectoria de una elipse, pero además pensamos que el artefacto elipse deje de ser un artefacto abstracto para los alumnos pues creemos que le atribuirán dicha propiedad a la figura elíptica, iniciando su proceso de instrumentalización.

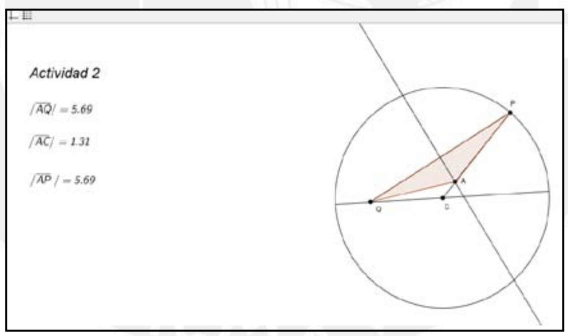


Figura 48. Actividad 2

En la figura 48 se muestra la representación gráfica de la pregunta 2 ggb. Al deslizar el punto B sobre la circunferencia, el punto A se desplaza generando una trayectoria que los alumnos de ambos equipos identificarán como elipse, de acuerdo al enunciado, luego los ambos equipos expresarán la condición geométrica de la curva.

Para ello movilizarán algunos de los esquemas de uso que movilizaron en la actividad 1, es decir la propiedad de la mediatriz de un segmento como una recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento o como todo punto perteneciente a la mediatriz de un segmento que equidista de las extremidades del segmento, la circunferencia como un conjunto de puntos cuya distancia a otro punto fijo es una constante llamada radio. En cuanto a las herramientas del Geogebra, creemos que algunas seguirán en proceso de familiarización y descubrimiento, como la herramienta "Activa Rastro"

Análisis a posteriori de la actividad 2

De acuerdo al análisis *a priori*, los alumnos continuaron procesando la instrumentalización de la propiedad de la circunferencia de centro C. Observaron el desplazamiento del punto A en el interior de la circunferencia y calcularon numéricamente la longitud del radio de la circunferencia como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$, así como los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$. De acuerdo al análisis *a priori*, los alumnos vincularon dicha trayectoria del punto A a la gráfica de una elipse y escribieron la condición geométrica de la elipse en términos de la propiedad de la circunferencia que indica que *existe un punto A en el radio de la circunferencia en el que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$ es una constante igual al radio de la circunferencia, siendo Q un punto interior de la circunferencia.* Todo aquello continuó favoreciendo la instrumentalización de la propiedad de la circunferencia porque vincularon el punto A a la trayectoria de una elipse, pero a la vez se inicia el proceso de instrumentalización de la elipse.

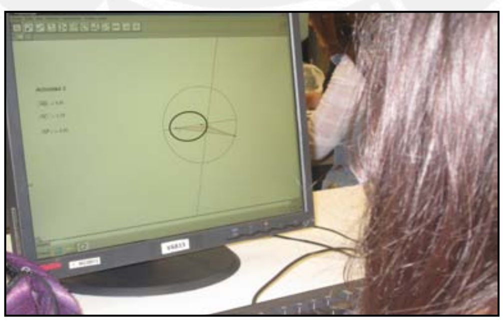


Figura 49. Trayectoria de la elipse

En la figura 49 observamos a los alumnos generando el lugar geométrico de la elipse cuando desliza el punto P sobre la circunferencia, aunque la figura estática que mostramos en la figura, no demuestra la situación real de interactividad y del dinamismo de la situación presentada. Los esquemas que movilizaron fueron los de noción de circunferencia, de triángulo isósceles y mediatriz de un segmento. Las herramienta “Activa Rastro¨ del Geogebra inició su proceso de familiarización, por el análisis *a priori*.

En los ítem a) y b)

Análisis a priori

Cuando los alumnos de ambos equipos deslizan el punto P sobre la circunferencia, el texto numérico que representa las longitudes de los segmentos $\overline{AQ}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AP}$ va actualizando los resultados de estas expresiones. Creemos que esta representación dinámica permitirá que el alumno exprese el radio de dicha circunferencia como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ así como la de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$.

Posibles esquemas de utilización.

- La noción de segmento, de radio, mediatriz, triángulo isósceles
- Uso de la herramienta “Elige y mueve”

Parte predictiva de las acciones.

Los equipos arrastran el punto P sobre la circunferencia y observan el texto numérico que se actualiza de manera dinámica y que aparece en su vista gráfica. Como mencionamos en la actividad anterior, la figura 50 no comunica de manera apropiada el dinamismo que se produce en la situación real, simplemente representa una foto en un instante determinado

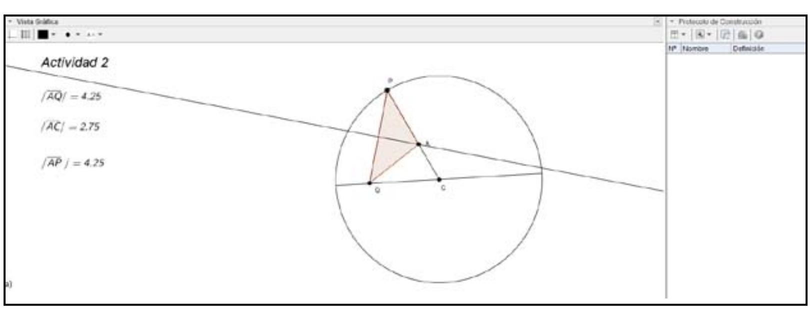


Figura 50. Desarrollo Actividad 2 a-b

Los alumnos deslizan el punto P sobre la circunferencia y hacen uso del uso del texto dinámico, lo que les permitirá escribir las relaciones $\left|\overline{CA}\right| + \left|\overline{AP}\right| = 7$ y $\left|\overline{CA}\right| + \left|\overline{AQ}\right| = 7$.

Análisis a posteriori

Tal como se esperaba, los equipos no presentaron dificultades para expresar el radio de la circunferencia como la suma de las medidas de dos segmentos, escritas de dos formas distintas. De esta forma se continuó con el proceso de instrumentalización de la propiedad de la circunferencia, apoyados en el dinamismo del texto numérico

El Equipo A

$$\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{AC}\right| = 4{,}39 + 2{,}61 = 7$$

$$\left|\overline{AQ}\right| + \left|\overline{AC}\right| = 4{,}51 + 2{,}49 = 7$$

Figura 51. Enunciado 2 a-b. Equipo A

El Equipo B

$$\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{AC}\right| = 5.16 + 1.84 = 7$$

$$\left|\overline{AQ}\right| + \left|\overline{AC}\right| = 2.37 + 4.63 = 7$$

Figura 52. Enunciado 2 a-b. Equipo B

En las figuras 51 y 52, mostramos los resultados al sumar las medidas de los segmentos correspondientes luego de desplazar el punto A por el interior de la circunferencia. La Vista Gráfica que muestra la representación gráfica de las construcciones y el texto dinámico del Geogebra, favorecieron el enriquecimiento de la instrumentalización de esta propiedad de la circunferencia.

Dicha propiedad contribuirá posteriormente a que el alumno la relacione con la condición geométrica de la elipse. Los alumnos deberán justificar en el siguiente ítem los resultados que mostraron en las figuras anteriores.

En el ítem c)

Análisis a priori

Esperamos que ambos equipos validen las condiciones del equipo $|\overline{CA}|+|\overline{AP}|=7$ y $|\overline{CA}|+|\overline{AQ}|=7$. Para ello esperamos puedan movilizar los esquemas de uso los cuales se presenta a continuación:

Posibles esquemas de utilización

- La noción de triángulo isósceles, mediatriz de un segmento, circunferencia.

Parte predictiva de las acciones.

Creemos que los alumnos usarán la propiedad del triángulo isósceles para afirmar que los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son iguales o pensamos que podrán aplicar la propiedad de la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, e indicar que las distancias desde dicho punto de la mediatriz, en este caso el punto A a los extremos del segmento $\overline{PQ}$ son iguales. Con estas propiedades podrán justificar sus resultados del ítem anterior.

Análisis a posteriori

Como lo habíamos previsto, ambos equipos movilizan los esquemas de uso y hacen uso del texto dinámico para observar que los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ se mantienen iguales. En la figura 53, el equipo A expresa la relación de igualdad entre los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ ya que ambos lados pertenecen al triángulo isósceles. De esa forma justifica los resultados encontrados en los ítems a) y b).

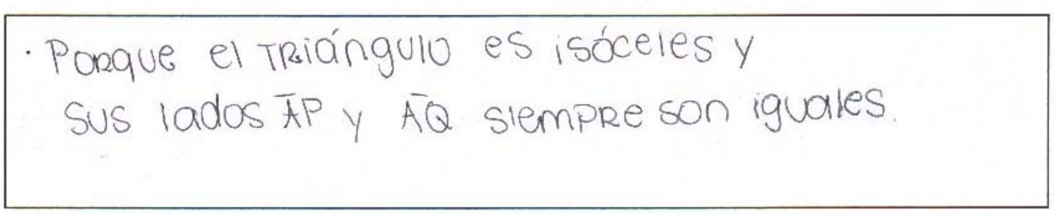
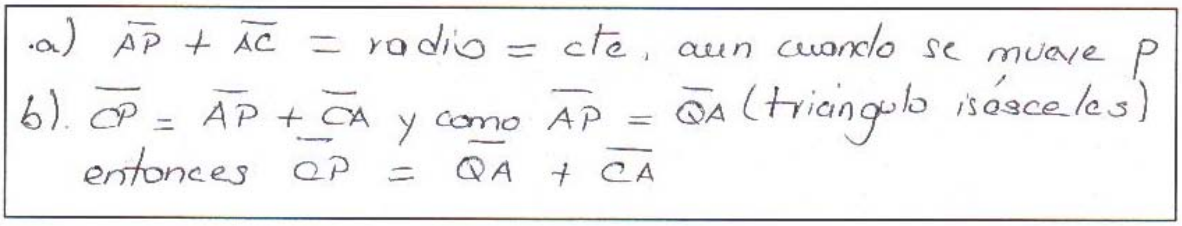

· Porque el triángulo es isóceles y
sus lados $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ siempre son iguales.

Figura 53. Enunciado 2c. Equipo A

En la figura 54, el equipo B señala que el radio es una constante que se puede escribir como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$. Luego indica que $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son los lados iguales del triángulo isósceles, así que escribe la expresión que se muestra en la parte $a)$. Luego en la parte $b)$, indica que el radio de la circunferencia se puede escribir como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$


a) $\overline{AP} + \overline{AC}$ = radio = cte, aun cuando se mueve P

b). $\overline{CP} = \overline{AP} + \overline{CA}$ y como $\overline{AP} = \overline{QA}$ (triángulo isósceles)

entonces $\overline{QP} = \overline{QA} + \overline{CA}$

Figura 54. Enunciado 2c. Equipo B

Las justificaciones mostradas son muy similares en los equipos A y B . Consideramos que estas actividades son pertinentes pues ambos equipos con base a las acciones y esquemas de utilización que movilizan, hacen surgir propiedades que luego serán inscritas como características de la elipse.

Como estamos interesados en los esquemas que provengan de la sociabilización de los grupos y notamos que la definición que se esperaba corresponde a los esquemas que los alumnos formaron para justificar el triángulo isósceles, se puede indicar que esto favorece al surgimiento de los esquemas de acción colectiva instrumentada, para ambos grupos.

En el ítem d)

Análisis a priori

Creemos que los alumnos de los equipos A y B lograrán generar un conjunto de puntos que corresponden a la representación gráfica de la elipse a través del rastro que deja el punto A de la curva cuando es desplazada con la herramienta “Activa Rastro”. Pensamos que dicha herramienta del Geogebra, originará problemas de estructuración de la acción, tema que fue comentado en los aspectos del Enfoque Instrumental. Los alumnos movilizarán el esquema de uso de la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ o la del triángulo isósceles para indicar que la suma de las distancias del punto A a los puntos fijos Q y C A es un resultado que se mantiene constante pues representa el radio de la circunferencia

Posibles esquemas de utilización:

- La mediatriz de un segmento, triángulo isósceles, la circunferencia..
- El uso de la herramienta "Activa Rastro".

Parte predictiva de las acciones.

Los equipos A y B activarán la herramienta "Activa Rastro" del punto A pulsando el botón secundario del mouse. Luego fijan al mínimo el estilo del grosor del trazo y arrastran el punto P sobre la circunferencia. Probablemente tengan dificultades con la herramienta "Activa Rastro", para fijar el estilo de trazo.

En la figura 55, se muestra la trayectoria del punto A cuando gracias al movimiento del punto P sobre la circunferencia.

Ciertamente, la figura solo representa una ligera aproximación del movimiento de los puntos que generan la trayectoria elíptica de la curva, en consecuencia no se percibe la acción dinámica elaborada por esta serie de construcciones.

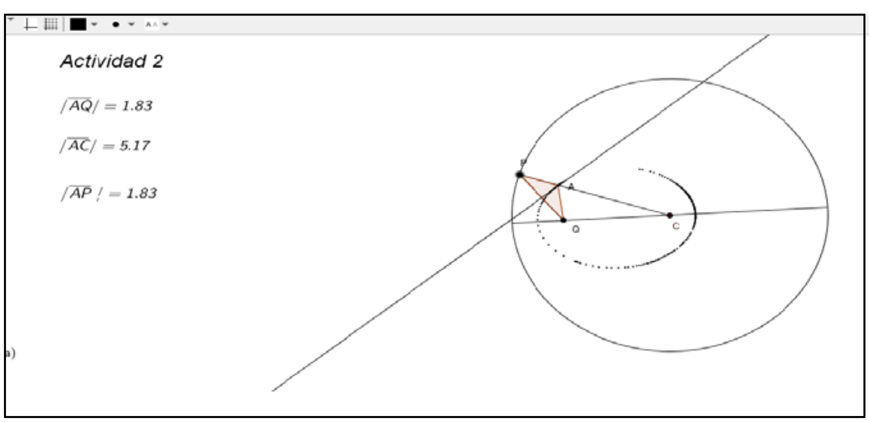


Figura 55. Desarrollo Actividad 2e

En la figura 55, se observa que el punto A continúa perteneciendo a la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, mientras es desplazado por el interior de la circunferencia. Los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AP}$ son los lados de un triángulo isósceles, por lo tanto la suma de las medidas de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$ sigue siendo igual al radio de la circunferencia.

Análisis a posteriori

De acuerdo a lo previsto en el análisis *a priori*, se logró la representación gráfica de la elipse a través del rastro que deja el punto A con la herramienta “Activa Rastro”.

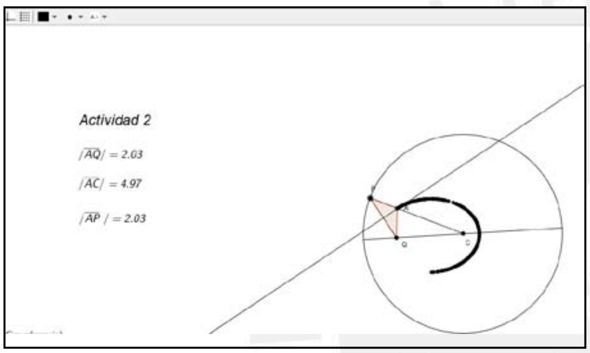


Figura 56. Gráfico 2d. Equipo A

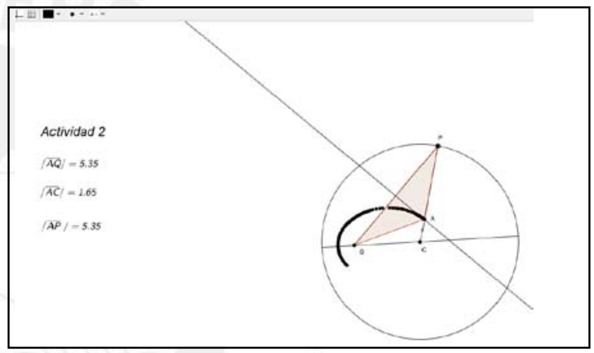


Figura 57. Gráfico 2d. Equipo B

Como se muestra en las figuras 56 y 57, ambos equipos usaron la herramienta “Activa Rastro”, pulsando el botón secundario del mouse. Es importante señalar que los gráficos que mostramos no son representaciones estáticas sino dinámicas que se van generando con las construcciones geométricas realizadas por los alumnos.

Ambos equipos afirmaron que se trataba de una elipse. En el uso de la herramienta “Activa Rastro” se presentan las tres restricciones que Rabardel (1995) clasifica como impedimentos de existencia, intencionalidad y de acción de los sujetos, los cuales fueron detallados en la parte de los aspectos del Enfoque Instrumental.

Como era de esperarse, los alumnos de ambos equipos lograron justificar que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$ es una constante porque comprobaron a través del texto dinámico que ofrece el Geogebra, que su resultado es igual al radio de la circunferencia.

Se puede observar el texto que aparece en las figuras 58 que corresponde al equipo A

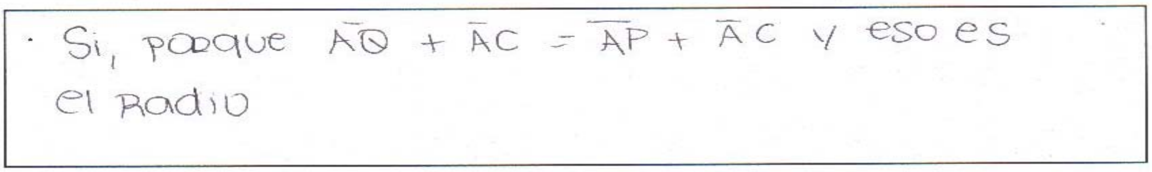

· Si, porque $\overline{AQ} + \overline{AC} = \overline{AP} + \overline{AC}$ y eso es el Radio

Figura 58. 1° Enunciado 2d. Equipo A

Probablemente, la movilización de los posibles esquemas planteados en el análisis *a priori,* la influencia interactiva del texto numérico del Geogebra y la representación dinámica de la gráfica, también contribuyeron a establecer que la suma de las distancias de los segmentos $\overline{AQ}$ *y* $\overline{AC}$ es una constante.

De igual forma, en la figura 59 muestra la justificación que elabora el equipo B acerca de la razón por la que las distancias de los segmentos permanecen constantes.

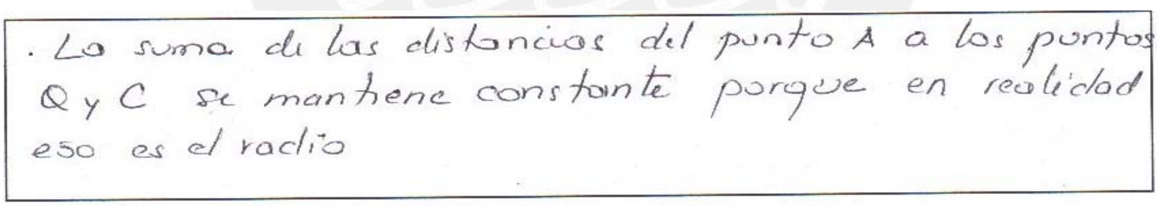

· La suma de las distancias del punto A a los puntos Q y C se mantiene constante porque en realidad eso es el radio

Figura 59. 1° Enunciado 2d. Equipo B

Además consideramos que es evidente que la redacción de los textos, nos muestran la integración de sus resultados y que los alumnos participaron en una actividad colectiva aplicando esquemas de utilización que favorecieron la construcción de algún esquema de utilización como esquema de actividad colectiva instrumentada.

Creemos que los alumnos de ambos equipos al atribuirle una propiedad a la trayectoria elíptica de la curva, permitieron que dicha curva deje de ser un artefacto abstracto e iniciaron el enriquecimiento de sus características. Esto origina un primer avance en el proceso de instrumentalización de la elipse.

En el ítem e)

Análisis a priori

Esperamos que ambos equipos logren expresar la condición geométrica de la elipse, es decir que si A es un punto que pertenece al radio $\overline{CP}$ de una circunferencia con centro en C, y Q un punto interior de dicha circunferencia, entonces la suma de las medidas de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$ sea una constante igual al radio de dicha circunferencia.

Creemos que los esquemas movilizados en los ítems anteriores, como la del triángulo isósceles en términos de sus lados iguales, la mediatriz de un segmento en términos de que cualquier punto de la mediatriz equidista de sus extremos, la circunferencia como lugar geométrico y la mediación de las herramientas del Geogebra harán posible que los equipos no presenten dificultades en responder a la pregunta.

Posibles esquemas de utilización

- Noción de triángulo isósceles, mediatriz de un segmento, radio como propiedad invariante de la circunferencia.
- Usa la herramienta “Elige y mueve”

Parte predictiva de las acciones.

Los alumnos de ambos equipos indican que el resultado de la suma de las medidas de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$ es una constante igual al radio de la circunferencia, debido a los posibles esquemas de utilización y respaldado por el texto numérico que se actualiza de manera dinámica a medida que se desplaza el punto A por el interior de la circunferencia.

Los alumnos de ambos equipos no tendrán dificultades en expresar la condición geométrica que debe cumplir el punto A para que su trayectoria forme una curva elíptica y de acuerdo a las consideraciones iniciales de la actividad. Es decir, que el punto A es tal que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$ es una constante igual al radio de la circunferencia.

Análisis a posteriori

Tal como se esperaba, ambos equipos lograron expresar la condición geométrica de la elipse en términos del radio de la circunferencia, es decir que si A es un punto que pertenece al radio $\overline{CP}$ de una circunferencia con centro en C, y Q un punto interior de dicha circunferencia, entonces la suma de las medidas de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$ es una constante igual al radio de dicha circunferencia.

Acreditamos que los alumnos comenzarán a instrumentarse con la propiedad de la elipse que indica que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$ es una constante igual al radio de dicha circunferencia pues tienen cuestiones de reconocimiento cuando el punto A describe una trayectoria elíptica.

En la figura 60, se observa que el equipo A indica que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$ es igual a la longitud del radio de la circunferencia


· $\overline{AQ} + \overline{AC}$ = radio.

Figura 60. 2° Enunciado 2e. Equipo A

De esta manera, esta actividad está orientada a iniciar la instrumentación de la condición geométrica de la elipse, ya que los alumnos lograron redactar y reconocer que el punto A, es aquel que cumple con la propiedad que indica que si un punto A pertenece a la elipse, la suma de las medidas de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$ resulta una constante, igual al radio de la circunferencia. En la siguiente actividad continuaremos enriqueciendo esta propiedad, atribuyéndole otra característica e indicando que dicha suma corresponde al eje mayor de la elipse.

En la figura 61, el equipo B escribe que la suma de las distancias de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$ permanece constante o es igual al radio de la circunferencia con base a los esquemas de utilización (esquemas de uso), consignados en esta actividad.

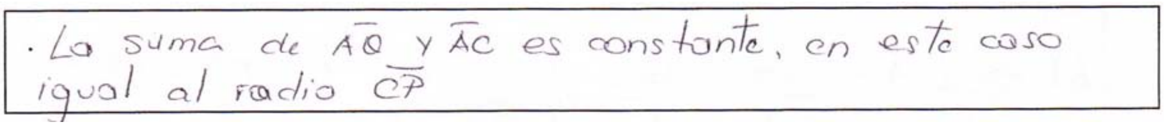

· La suma de $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$ es constante, en este caso igual al radio $\overline{CP}$

Figura 61. 2° Enunciado 2f. Equipo B

En relación a esta actividad, Rabardel (1995), indica que la instrumentalización del artefacto es un proceso en el cual surgen las componentes del artefacto por parte del sujeto. Hay indicios que la condición geométrica de la elipse, ha sido atribuida por los alumnos como una de las primeras características de la elipse, lo cual muestra que existe un primer enriquecimiento de las propiedades de la elipse.

Se observa que la secuencia de aprendizaje favoreció a los alumnos, porque comenzaron a instrumentar una de las propiedades de la elipse ya que mostraron cuestiones de reconocimiento, como que dado un punto A de la elipse la suma de las medidas de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$ resultan una constante. A este nivel de instrumentalización, Rabardel (1995), la clasifica como local, porque está relacionada a una acción singular, es decir el nivel de instrumentalización de esta función es momentáneo.

Además, de acuerdo con las actividades que fuimos desarrollando en nuestra investigación, surgieron nuevas componentes del artefacto elipse, que los alumnos atribuyeron como propiedades de la elipse. Dichas propiedades que construyeron los alumnos como esquemas de acción instrumentada, evolucionaron como esquemas de uso y fueron movilizadas posteriormente para determinar nuevas componentes en la elipse.

En la siguiente actividad los alumnos continúan instrumentalizando o enriqueciendo la condición geométrica de la elipse, que empezaron a reconocer, ya que le atribuyen otras potencialidades, como aquella que indica que el radio de la circunferencia equivale al eje mayor de la elipse.

Análisis de la actividad 3

En el cuadro 11 presentamos la actividad 3, la cual consta de cinco ítems. A continuación elaboramos el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada una de las partes correspondientes

Cuadro 11. Actividad 3

ACTIVIDAD 3

Abra el archivo Actividad_3.ggb. Se muestra una circunferencia de centro F_2, un punto fijo F_1 al interior de la circunferencia y un punto P sobre el radio de dicha circunferencia que se mueve sobre una elipse. Los puntos fijos F_1 y F_2 son llamados focos. La recta que pasa por los focos se llama eje focal. El eje focal corta a la elipse en dos puntos V_1 y V_2 llamados vértices. La porción del eje focal comprendida entre los vértices se llama eje mayor.

a) Trace el eje mayor, renombre los vértices como V_1 y V_2 y calcule su longitud

b) Trace segmentos que unan P a los focos F_1 y F_2 . Luego desplace P sobre la elipse y registre sus resultados haciendo uso de la herramienta "Distancia".

$\lvert\overline{PF_1}\rvert + \lvert\overline{PF_2}\rvert =$ + = / $\overline{V_1V_2}$ / =
$\lvert\overline{PF_1}\rvert + \lvert\overline{PF_2}\rvert =$ + = / $\overline{V_1V_2}$ / =
$\lvert\overline{PF_1}\rvert + \lvert\overline{PF_2}\rvert =$ + = / $\overline{V_1V_2}$ / =

c) Si P es un punto de la elipse con focos F_1 y F_2 y la longitud del eje mayor $\overline{V_1V_2}$ es $2a$, escriba la condición geométrica del punto P

d) La recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro C del segmento que une los focos se llama eje normal. El eje normal corta a la elipse en dos puntos. La porción del eje normal comprendida entre esos puntos se llama eje menor.

Trace el segmento que representa el eje menor y marque el centro C de la elipse, ¿el eje menor está contenida en la mediatriz del segmento que une los focos? ¿Por qué?

¿Cuál es la suma de las distancias de uno de los extremos del eje menor a los focos? ¿Por qué?

e) Con la herramienta “Polígono” trace el triángulo que tiene como vértices los focos de la elipse y un extremo del eje menor.

Considerando que la distancia del centro a uno de los vértices es a, que la distancia del centro a uno de los focos es c, y que la distancia del centro a uno de los extremos del eje menor es b, halle b en términos de a y c

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad 3_ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente actividad.

Análisis a priori de la actividad 3

En esta secuencia de actividades creemos que los alumnos muestran indicios de instrumentación con la condición geométrica de la elipse pues reconocen que *siendo* P *un punto sobre la elipse*, *entonces la suma de las medidas de los segmentos* $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ *es igual al radio de la circunferencia con centro* F_2, pero también enriquecerán esta propiedad de la elipse con nuevas potencialidades indicando que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ no sólo corresponde al radio de la circunferencia sino también a la longitud del eje mayor de la elipse, con base a este análisis inferimos que la condición geométrica de la elipse se enriquecerá, se instrumentalizará con otra propiedad, esto significará que posteriormente omitamos la longitud del radio y mencionemos a la longitud del eje mayor cuando nos refiramos a la condición geométrica de la elipse.

Finalmente pensamos que la condición geométrica de la elipse en base a la definición que indica que *dado un punto de la elipse la suma de sus distancias a otros puntos fijos es una constante que corresponde a la longitud del eje mayor de la elipse*, podría evolucionar de esquema de acción instrumentada a esquema de uso con el fin de determinar la relación entre los parámetros de dicha elipse, como la relación geométrica $a^2 = b^2 + c^2$, siendo a y b la distancia del centro de la elipse a los extremos de la curva y siendo c la distancia del centro a uno de los focos de la elipse. En la figura 62, se muestra la representación gráfica de la actividad.

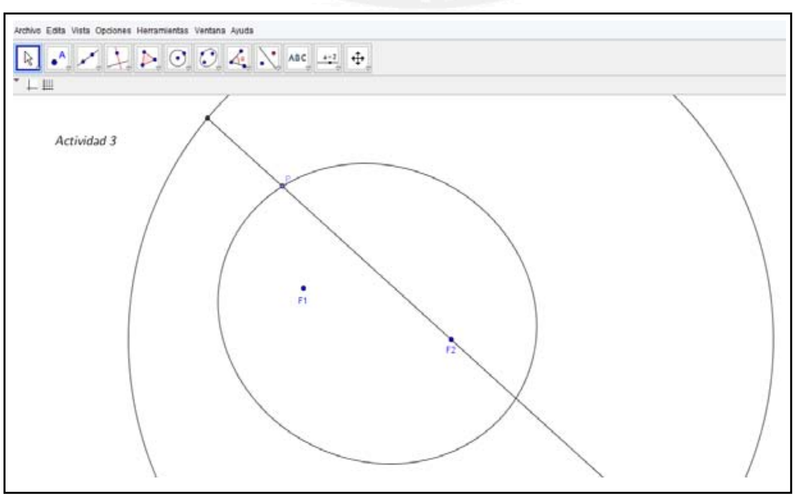


Figura 62. Actividad 3

Simultáneamente, creemos que los alumnos seguirán instrumentalizándose con algunas características de la elipse como eje mayor, eje menor, los vértices, los focos y los extremos del eje menor. Las herramientas del Geogebra que corresponden al trazo de rectas paralelas, perpendiculares y otros comandos también están en una fase de familiarización.

Análisis a posteriori de la actividad 3

Los equipos A y B no presentaron dificultades en responder la actividad 3. Esta actividad está basada, según Rabardel (2011), en la gestión de características y propiedades particulares del artefacto. Como se tenía previsto, los alumnos están instrumentados en la condición geométrica de la elipse porque sumaron las medidas de los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ y lo igualaron al radio de la circunferencia. Por otro lado continuaron instrumentalizando esta propiedad ya que la enriquecieron al señalar que *la suma de las medidas de los segmentos* $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ *corresponde al eje mayor de la elipse*. De acuerdo al análisis *a priori*, este resultado permitirá omitir el radio de una circunferencia cuando los alumnos quieren expresar la condición geométrica de la elipse señalando que esta suma corresponde a la longitud del eje mayor de la elipse. De igual forma, de acuerdo al análisis *a priori* dicha condición geométrica, es decir la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ corresponde al eje mayor de la elipse, evolucionó como esquema de uso, ya que permitió construir otro nuevo esquema en términos de los parámetros de la elipse, cuya relación geométrica es $a^2 = b^2 + c^2$. Los alumnos de ambos equipos, movilizaron esquemas elementales como mediatriz, triángulo isósceles, el Teorema de Pitágoras y reutilizaron las herramientas del Geogebra, lo que les permitió enriquecer las propiedades de la elipse. De igual forma, instrumentalizaron algunas componentes como el trazo del eje focal, eje mayor, eje normal y eje menor

En el análisis *a priori*, no se previó que el equipo A seleccionaría “Posición absoluta en pantalla” el cual permitió arrastrar los textos a cualquier posición de la pantalla, y que Trouche (2004) señala como estadio de descubrimiento y selección. Además el equipo B, encajó la herramienta “Distancia” en un escenario de personalización en los ítems a) y b), pues trata de aplicar dicha herramienta de acuerdo a su requerimiento.

En el ítem a)

Análisis a priori

Esperamos enriquecer la noción de elipse y propiciar el surgimiento de las propiedades de algunos de sus elementos, haciendo uso de trazos geométricos. Al respecto Rabardel (1995), indica que la instrumentalización puede definirse como un proceso de enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto.

De esa forma tanto las herramientas del Geogebra como las componentes de la elipse continúan en proceso de instrumentalización. Pensamos que los equipos no encontrarán dificultades en resolver esta actividad.

Posibles esquemas de utilización

- La noción de recta, intersección entre dos objetos, distancia entre dos puntos.
- El uso de las herramientas: “Recta que pasa por dos puntos”, “Intersección de objetos”, “Renombrar” y la herramienta “Distancia”

Parte predictiva de las acciones.

Los equipos señalan la herramienta “Recta que pasa por dos puntos”, seleccionan los puntos $F_1\ y\ F_2$ y aparece la recta que representa al eje focal. Luego señalan la herramienta “Intersección de objetos”, seleccionan la curva, el eje focal y encuentran los puntos que corresponden a los vértices de la elipse. Hacen clic derecho sobre cada vértice se despliega una lista llamada menú contextual, la cual es una manera ágil de modificar algunos parámetros. Se selecciona del menú contextual, el comando “Renombrar” y se asigna una nueva etiqueta para los vértices, en este caso $V_1\ y\ V_2$.

Finalmente señalan la herramienta “Distancia” y selecciona los puntos $V_1\ y\ V_2$. De este modo se halla la longitud entre los vértices.

.

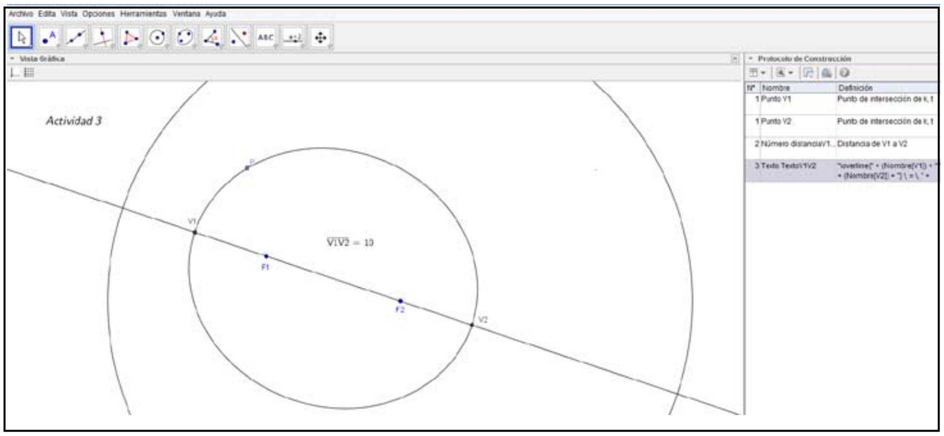


Figura 63. Desarrollo Actividad 3a

En la figura 63 los alumnos de ambos equipos, trazarán el eje focal que contiene al eje mayor, el cual se renombrará como $\overline{V_1V_2}$ y luego calcularán la longitud del eje mayor

Análisis a posteriori

Como lo habíamos previsto en la parte predictiva, se observó en las figuras 64 y 65, que ambos equipos trazaron el eje focal de la elipse, obtuvieron los vértices respectivos y hallaron la longitud del eje mayor.

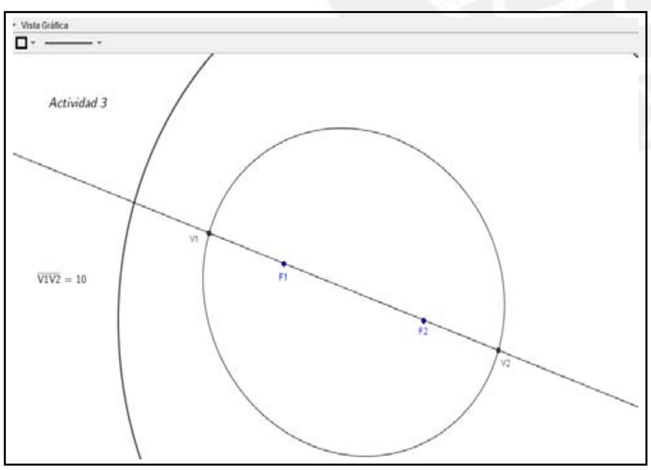


Figura 64 Gráfico 3a. Equipo A

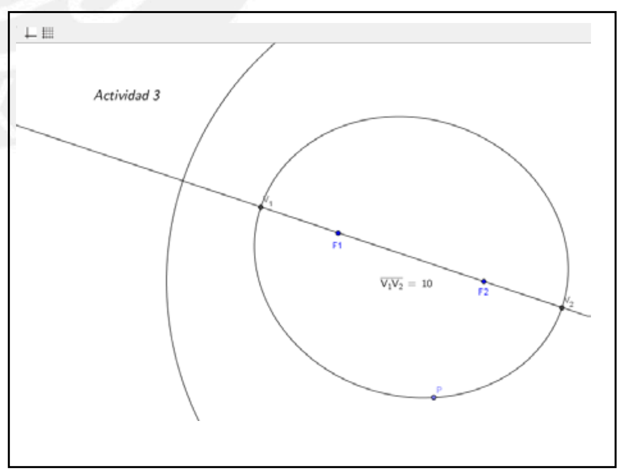


Figura 65. Gráfico 3a. Equipo B

Se inició la familiarización del uso de las herramientas “Recta que pasa por dos puntos”, “Intersección de objetos”, “Renombrar” “Distancia”.

Se observó que el equipo A luego de hallar la distancia entre los vértices, hace uso del menú contextual y seleccionó la opción “Posición absoluta en pantalla” y trasladó el texto $\overline{V_1V_2}=10$ a otra posición de la Vista Gráfica del Geogebra. Según Trouche (2004), esta herramienta estaría instrumentalizándose en la fase de descubrimiento y selección. Al respecto, es importante señalar que esta propiedad del texto numérico “Posición absoluta en pantalla” fue detallada cuando se desarrolló el primer encuentro llamado Exploración del Geogebra. El equipo A usó esta opción, probablemente, porque quiere familiarizarse con esta propiedad del texto numérico para aplicarla luego en otras circunstancias.

En el ítem b)

Análisis a priori

De acuerdo a la actividad anterior, creemos que los alumnos están instrumentados con respecto a la condición geométrica de la elipse que indica que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ es igual al radio de la circunferencia. Los alumnos continuarán instrumentando esta propiedad, pues será movilizada cuando el punto P toma distintas posiciones sobre la trayectoria de la elipse y luego compararán sus resultados con la longitud del eje mayor de dicha elipse. De esta forma los alumnos continuarán con el proceso de instrumentalización de la condición geométrica porque incorporan la longitud del eje mayor de la elipse (distancia entre los vértices de una elipse), como la longitud del radio de la circunferencia,

Las herramientas del Geogebra que se vienen empleando tienen un proceso de aplicación similar al trazo de lápiz y papel.

Posibles esquemas de utilización

- La noción de distancia, circunferencia, la condición geométrica de la elipse y la noción de eje mayor $\overline{V_1V_2}$

- El uso de las herramientas “Segmento entre dos puntos” , “Distancia entre dos puntos”, “Elige y mueve”

Parte predictiva de las acciones.

Los equipos A y B, señalan la herramienta “Segmento entre dos puntos”, seleccionan los puntos P y F_1 y aparece el segmento $\overline{PF_1}$, seleccionan P y F_2 y aparece el segmento $\overline{PF_2}$, Luego, señalan la herramienta “Distancia entre dos puntos”, seleccionan el punto P y los extremos del eje mayor V_1 y V_2, luego simultáneamente con la herramienta “Elige y mueve” arrastran el punto P sobre la circunferencia y observan a la vez los valores del texto dinámico que aparece en su vista gráfica.

Los equipos A y B no tendrán problemas en observar que los resultados son equivalentes y escribirán las expresiones $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 10$ $\overline{V_1V_2} = 10$.

En la figura 66, los alumnos trazan los segmentos que unen P a los focos, luego arrastrarán el punto P sobre la elipse y comprobarán que $/\overline{PF_1}/ + /\overline{PF_2}/ = /\overline{V_1V_2}/$. La representación gráfica no muestra el carácter dinámico de la situación real.

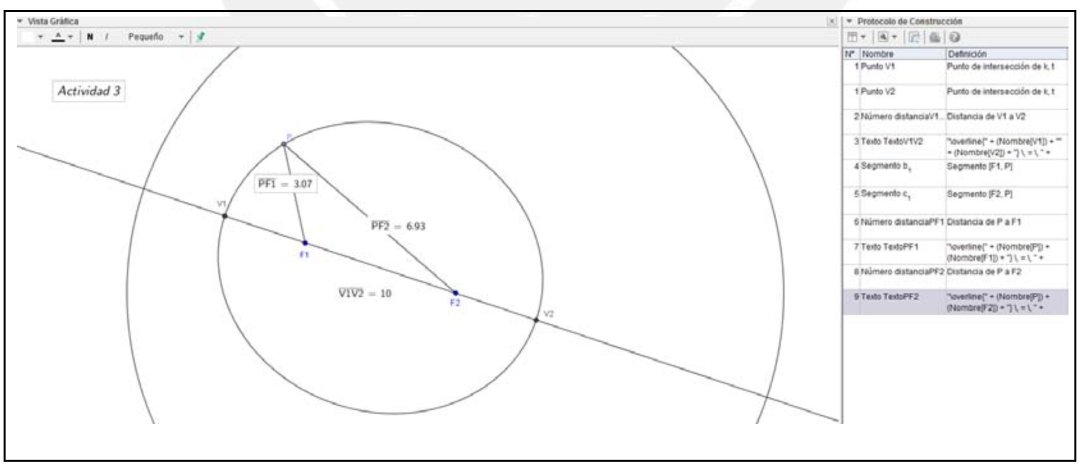


Figura 66. Desarrollo Actividad 3b

Análisis a posteriori

Tal como esperábamos, los alumnos enriquecen la noción de la condición geométrica de la elipse al asignarle a esta condición un significado equivalente, es decir sustituyen el valor del radio de la circunferencia por la longitud del eje mayor.

En las figuras 67 y 68 ambos equipos trazan los segmentos que unen al punto P con los focos F_1 y F_2. Cuando el punto P se desliza sobre la circunferencia, hallan la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PF}_1$ y $\overline{PF}_2$ y comparan dicha suma con la longitud del eje mayor.

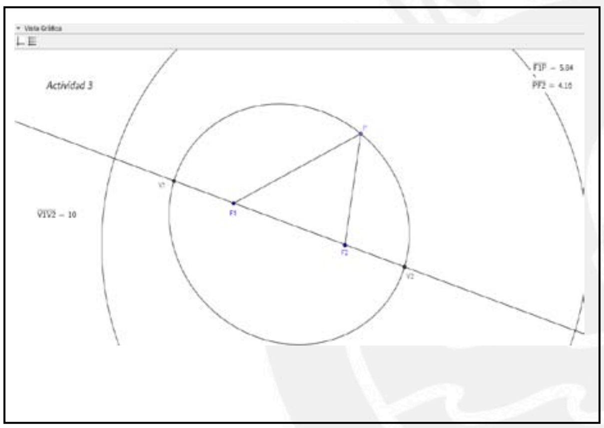


Figura 67. Gráfico 3b. Equipo A

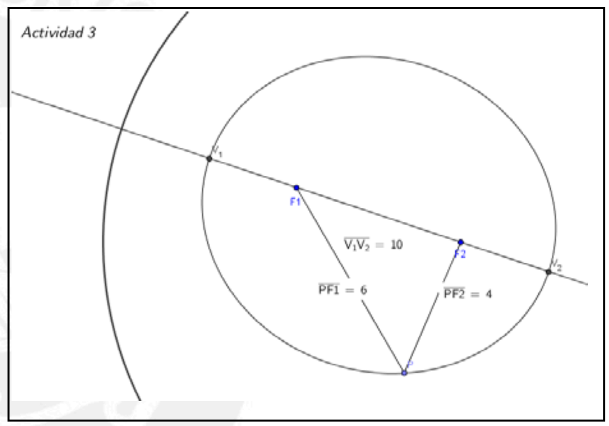


Figura 68. Gráfico 3b. Equipo B

Es importante la influencia del Geogebra como mediador en la presente actividad. Los alumnos comprobaron, a través de los textos numéricos dinámicos, que la suma de las medidas de los segmentos corresponde a la longitud del eje mayor.

En la figura 69, se muestra la respuesta del equipo A, en el cual asignan al radio de condición geométrica de la elipse un significado equivalente al de lado mayor.

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 3{,}98 + 6{,}02 = 10 \qquad /\ \overline{V_1V_2}\ / = 10$$

Figura 69. Enunciado 3b. Equipo A

En la figura 70, se muestra la respuesta del equipo B.

$$\left|\overline{PF_1}\right| + \left|\overline{PF_2}\right| = 2.96 + 7.04 = 10 \qquad /\overline{V_1V_2}/ = 10$$

Figura 70. Enunciado 3b. Equipo B

A partir de esta actividad podemos distinguir que la condición geométrica de la elipse, que indica qe la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PF}_1$ y $\overline{PF}_2$ igual al radio de la circunferencia, continúa en proceso de instrumentalización, ya que los alumnos la enriquecen con una nueva propiedad, es decir que el radio de circunferencia es igual a la longitud del eje mayor.

En el ítem c)

Análisis a priori

Pensamos que ambos equipos continuarán instrumentando la condición geométrica de la elipse consiguiendo movilizar la condición que indica que las medidas de los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ es igual al al eje mayor de la elipse que corresponde a $\left|\overline{V_1V_2}\right| = 2a$.

Análisis a posteriori

Se define la longitud del eje mayor como $\left|\overline{V_1V_2}\right| = 2a$.

Como era de esperarse, se observa en la figuras 71 que el equipo A escriben sin ninguna dificultad la condición geométrica de la elipse en términos del eje mayor asignado como $2a$. Esta expresión nos acompañará a lo largo de todas las restantes actividades ya que nos permitirá omitir la representación gráfica de la circunferencia.

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a.$$

Figura 71. Enunciado 3c. Equipo A

De igual forma, en la figura 72, el equipo B, escribe la condición geométrica en términos del eje mayor representado por la expresión $2a$

Figura 72. Enunciado 3c. Equipo B

Podemos afirmar que los alumnos están instrumentados con la condición geométrica de la elipse ya que logran movilizar la condición que indica que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ es igual al eje mayor de la elipse que equivale a $2a$. En los siguientes ítems este esquema de acción instrumentada evolucionó como esquema de uso para conseguir una nueva propiedad artefactual de la elipse, y de esta forma continuar con el enriquecimiento de las propiedades artefactuales de la elipse.

En el ítem d)

Análisis a priori

Pensamos que los conocimientos previos consignados en la parte cognitiva de la Ingeniería Didáctica, así como algunas herramientas del Geogebra serán movilizados para trazar el eje menor de la elipse.

Como los alumnos se hallan instrumentados con la mediatriz, reconocen que el eje menor contenido en el eje normal, corresponde a una mediatriz porque es una perpendicular al eje focal y que pasa por el centro de la elipse.

Además creemos que se hallan instrumentados con la condición geométrica de la elipse porque movilizarán la propiedad que indica que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ es igual al eje mayor de la elipse que equivale a $2a$, reconociendo que la suma de las medidas de uno de los extremos del eje menor a los focos es 10.

Posibles esquemas de utilización:

- La noción de segmento, intersección, distancia entre dos puntos, rectas perpendiculares, mediatriz de un segmento, condición geométrica de la elipse
- El uso de las herramientas “ Punto medio o centro”, “Mediatriz”, “Intersección de objetos”, “Segmento”

Parte predictiva de las acciones.

Señalan la herramienta “Punto medio o centro”, seleccionan los focos F_1 *y* F_2 y aparece el punto medio, luego se le renombra como punto C. Luego señalan la herramienta “Mediatriz”, seleccionan el eje focal, y aparece el eje normal que pasa por el centro C. A continuación señalan la herramienta “Intersección de objetos”: seleccionan la curva, el eje normal y determinan los extremos del eje menor de la elipse. En seguida con la herramienta “Segmento”, seleccionan los extremos del eje menor de la elipse y aparece el segmento correspondiente.

Luego que los alumnos de ambos equipos, trazan el segmento que representa el eje menor y marcan el centro C de la elipse, justifican que el eje menor está contenido en la mediatriz del segmento que une los focos, porque tienen instrumentada la noción de elipse y movilizan la propiedad de la mediatriz que indica que un punto, específicamente el punto P de la mediatriz relativa al segmento $\overline{F_1 F_2}$, equidista de los extremos F_1 y F_2.

De igual forma, hay indicios que los alumnos tienen instrumentada la condición geométrica de la elipse, ya que movilizan la propiedad que indica que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ es igual al eje mayor de la elipse que equivale a $2a$. Entonces podrán calcular la suma de las medidas de uno de los extremos del eje menor a los focos de la elipse es de 10 unidades.

Entonces movilizan esta condición para calcular la suma de las distancias del extremo del eje menor a los focos.

En la figura 73, se muestra el desarrollo de la actividad $3d$)

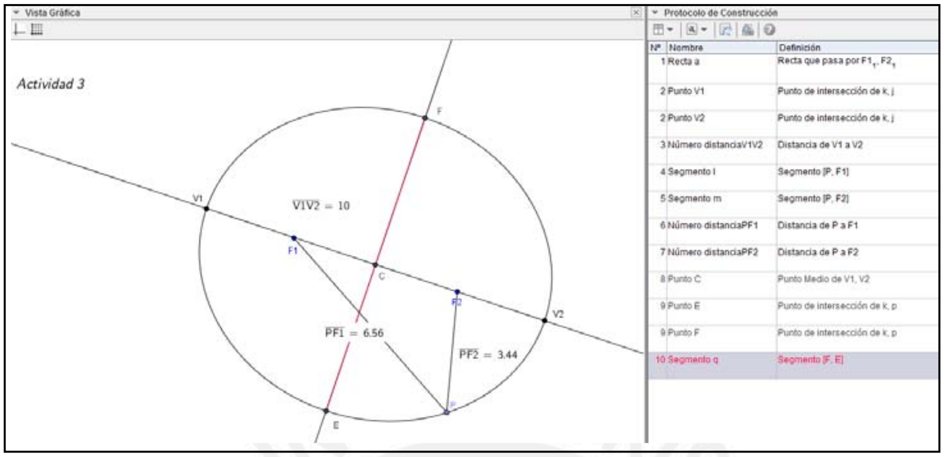


Figura 73 Desarrollo 3d

En esta figura, se espera que el alumno trace el segmento que representa el eje menor y marque el centro C de la elipse. Luego usa la condición geométrica de la elipse para indicar que la suma de las distancias del extremo del eje menor a los focos es igual a la longitud del eje mayor.

Análisis a posteriori

De acuerdo a lo previsto, en las figuras 74 y 75, ambos equipos trazaron el eje normal de la elipse. Luego obtuvieron los puntos de intersección del eje normal con la elipse y trazaron el segmento que representa el eje menor.

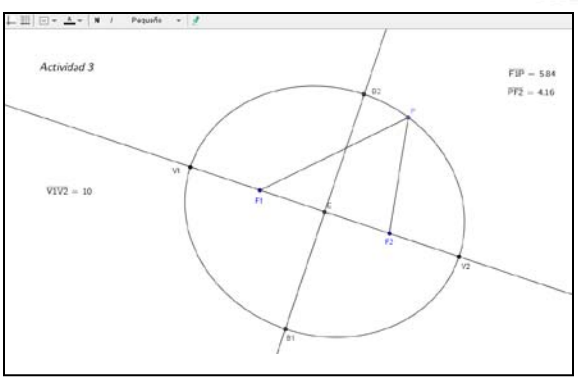


Figura 74. Gráfico 3d. Equipo A

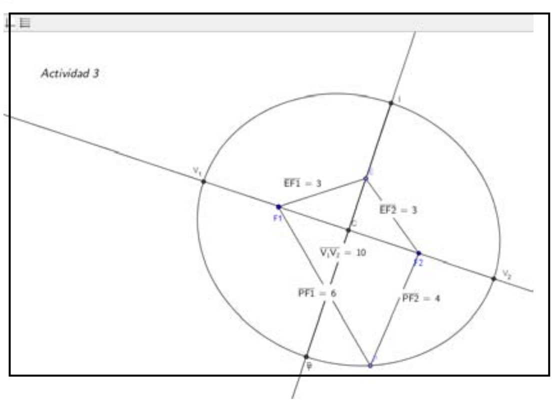


Figura 75. Gráfico 3d. Equipo B

Los alumnos están instrumentados con la noción de mediatriz, como se observa en las figuras 76 y 77, ya que movilizaron las dos propiedades que definen a la mediatriz. Por un lado el equipo A reconoce que el eje menor se encuentra contenido en dicha mediatriz del segmento que une los focos porque es perpendicular al segmento y pasa por el punto medio C, por otro lado el equipo B, toma un punto de la mediatriz y encuentra por medio del Geogebra que sus medidas son equivalentes.

En la figura 76, el equipo A justifica por qué el eje menor está contenido en la mediatriz que une los focos.

Sí, porque el eje menor es perpendicular al segmento y pasa por el punto medio C.

Figura 76. 1° Enunciado 3d. Equipo A

En la figura 77, el equipo B indica en su justificación que el eje menor está contenido en la mediatriz del segmento porque dado un punto del eje menor sus distancias a los focos son equivalentes.

Ambos equipos mostraron que están instrumentados desde el inicio de las actividades.

Si se toma un punto del eje menor, sus distancias a los focos F1 y F2 serán iguales.

Figura 77. 1° Enunciado 3d. Equipo B

El equipo B usa la herramienta "Distancia" de acuerdo a su conveniencia. Según Trouche (2011) esta herramienta estaría en una fase de personalización. En la representación gráfica de la figura 76, se observa que el equipo B toma un punto del eje menor y hace uso de la herramienta "Distancia" con el fin de aplicar la propiedad de equidistancia de la mediatriz, y mostrar que las distancias a los extremos de los focos son equivalentes.

Luego, como se había previsto, ambos equipos aplican la condición geométrica de la elipse y señalan que la suma de las distancias desde uno de los extremos del eje menor a los focos es la longitud del eje mayor igual a 10.

En la figura 78, el equipo *A* moviliza la condición geométrica de la elipse y escribe que la suma de las distancias del extremo del eje menor a los focos es 10

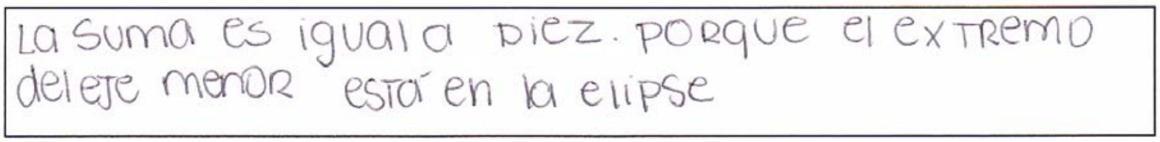

La suma es igual a Diez. porque el extremo del eje menor está en la elipse

Figura 78. 2° Enunciado 3d. Equipo A

El equipo *A* vincula la longitud del eje mayor a la suma de las medidas de los segmentos trazados desde un extremo del eje menor a los focos de la elipse. La movilización de la condición geométrica nos da indicios para creer que dicha condición sigue instrumentada.

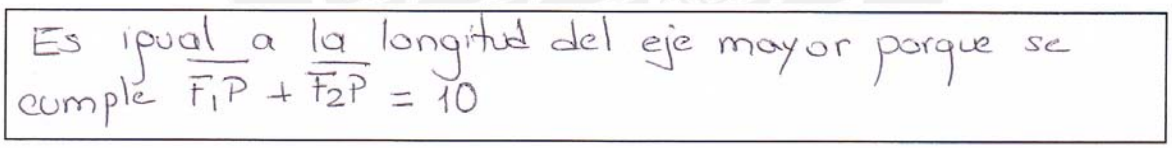

Es igual a la longitud del eje mayor porque se cumple $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 10$

Figura 79. 2° Enunciado 3d. Equipo B

Como se había previsto en el análisis *a priori*, la aplicación de la condición geométrica de la elipse, es atribuida por los alumnos como una propiedad de la curva, que podemos considerarla un enriquecimiento de la propiedad extrínseca.

En el ítem e)

Análisis a priori

Creemos que la condición geométrica de la elipse evolucionará como esquemas de uso porque esto les permitirá a los alumnos elaborar una relación pitagórica entre los parámetros de la elipse, es decir el parámetro a relativo a la distancia del centro a uno de los vértices, el parámetro b que expresa la distancia del centro a uno de los extremos del eje menor y el parámetro c como la distancia del centro a uno de los focos. La condición geométrica de la elipse, está siendo usada por los alumnos como medio para establecer una nueva relación o un nuevo atributo en la elipse.

Posibles esquemas de utilización

- La noción de la condición geométrica de la elipse, la mediatriz de un segmento y la relación pitagórica.
- El uso de la herramienta "Polígono"

Parte predictiva de las acciones.

Los equipos señalan la herramienta "Polígono": seleccionan los vértices F_1, F_2, F, F_1 y construyen el triángulo F_1F_2, F. Clasifican al triángulo como isósceles ya que el extremo del eje menor pertenece a la mediatriz del segmento que une los focos F_1 y F_2 y por lo tanto $\overline{F_1F} = \overline{F_2F}$. Luego, usan Pitágoras y tomando la información proporcionada en el enunciado: distancia del centro a uno de los vértices es a, distancia del centro a uno de los focos es c, distancia del centro al extremo del eje menor es b, y la condición geométrica de la elipse, determinan la relación que expresan como $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Para hallar la relación de los semiejes, se traza un triángulo isósceles como se muestra en la figura 80.

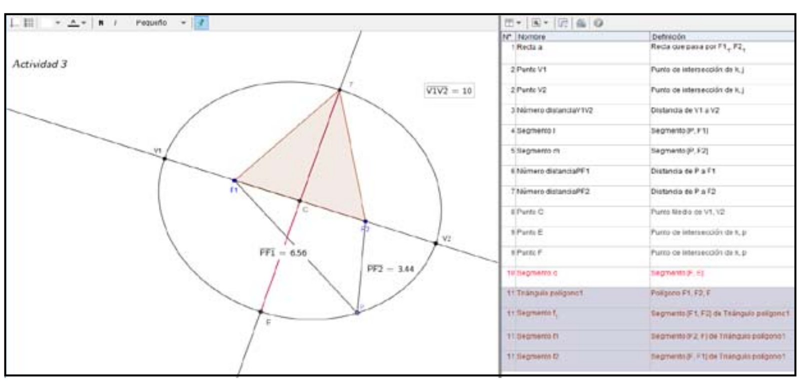


Figura 80. Desarrollo Actividad 3e

Creemos que por la clase de acciones realizadas, la aplicación de la condición geométrica de la elipse se halla en un segundo nivel de instrumentalización, es decir que esta función adquirida se conserva de manera durable en relación con una clase de acciones.

Análisis a posteriori.

Tal como se había previsto, los alumnos hicieron uso de la condición geométrica de la elipse, como esquema de uso y junto a la representación gráfica del triángulo rectángulo que fue trazado con la herramienta "Polígono" y la noción pitagórica, encontraron la relación solicitada.

En el gráfico de la figura 81, mostramos la representación gráfica del equipo A

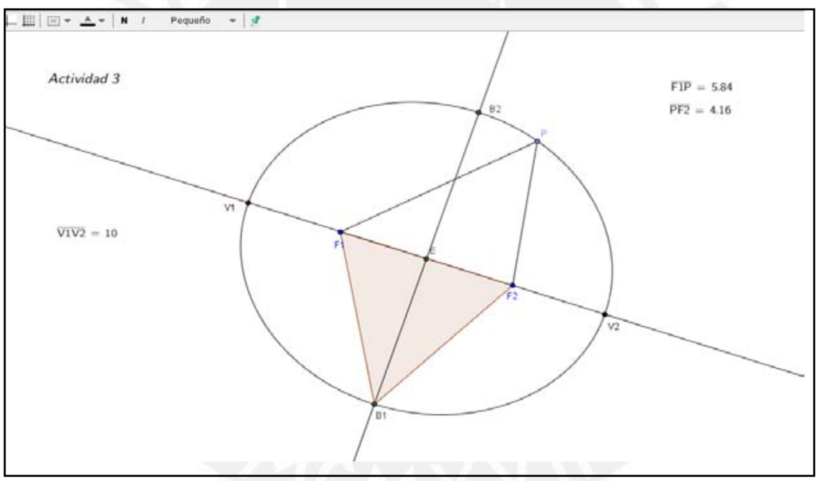


Figura 81. Gráfico 3e. Equipo A

El equipo A hace uso de la herramienta "Polígono" para formar un triángulo isósceles. Dicha herramienta ha sido vista en la sesión exploratoria y familiarizada en actividades anteriores. Por alguna razón ambos equipos usan los extremos inferiores del eje menor para realizar sus acciones, como se muestran en las ambas figuras. Creemos que esto podría deberse a que de esta forma obtienen mayor visibilidad en su trabajo.

En el gráfico 82, los alumnos del equipo B, no solo trazaron el polígono que representa al triángulo, sino que usaron la herramienta "Distancia" para determinar que la distancia entre los vértices $\overline{V_1V_2}$ es 10. Luego determinaron que la distancia desde uno de los extremos del eje menor a ambos focos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ es 10, probablemente para verificar la condición geométrica de la elipse.

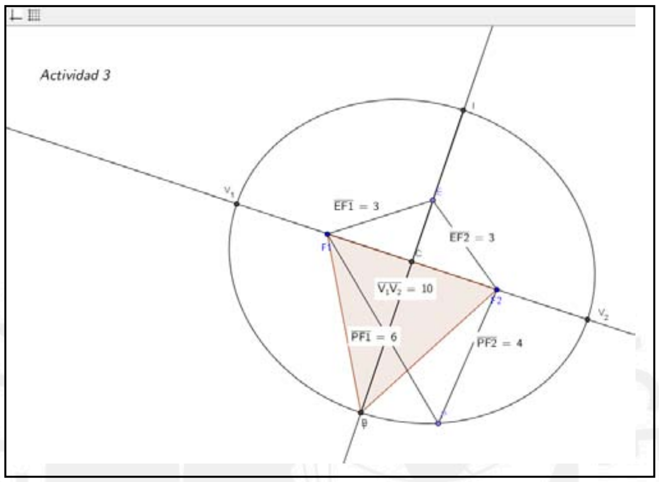


Figura 82. Gráfico 3e. Equipo B

El enunciado nos indica que la distancia del centro a uno de los vértices es el parámetro a, que la distancia del centro a uno de los focos es el parámetro c y que la distancia del centro al extremo del eje menor es el parámetro b. Los alumnos movilizan la condición geométrica de la elipse para indicar que la hipotenusa es igual al valor de a y luego la relación pitagórica para hallar una relación entre los catetos y la hipotenusa del triángulo. Ninguno de los equipos evidencia dificultades para hallar la relación solicitada.

En la figura 83, los alumnos del equipo A dibujan un triángulo rectángulo y realizan operaciones algebraicas que no muestran, para encontrar la relación buscada.

$$b=\sqrt{a^2-c^2}$$

Figura 83. Enunciado 3e. Equipo A

El equipo B, aplica el Teorema de Pitágoras, halla la relación $a^2 = b^2 + c^2$, despeja la variable que representa al eje menor, lo que resulta la relación $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$$\text{Si } a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Figura 84. Enunciado 3e. Equipo B

En las acciones de los alumnos, observamos que la condición geométrica de la elipse es un esquema de acción instrumentada porque movilizaron la propiedad de la elipse, que indica que dado un punto de la elipse la suma de sus distancias a otros puntos fijos es una constante igual a la longitud del eje mayor. La siguiente componente artefactual que se intentó instrumentar es la relación geométrica de los parámetros $a, b\ y\ c$, los cuales indican que dichos parámetros pueden relacionarse mediante la expresión $a^2 = b^2 + c^2$. Ello significa que los alumnos movilizaron la condición geométrica de la elipse en base a la definición dado un punto de la elipse la suma de sus distancias a otros puntos fijos es una constante igual a la longitud del eje mayor, y junto a otros esquemas de uso instrumentaron la relación geométrica indicada

Por ello podemos afirmar que inicialmente la condición geométrica de la elipse que indica que la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ es igual al radio de la circunferencia continuó instrumentalizándose porque se le enriqueció con otra propiedad indicando que el radio equivale a la longitud del eje mayor. Con base a este análisis podemos señalar que los alumnos construyeron un esquema de acción instrumentada porque encontraron la relación que expresa que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ como propiedad emergente de la elipse. En la siguiente actividad esperamos el surgimiento de la excentricidad, como un nuevo atributo de la elipse. Haremos uso de la herramienta “Deslizador” en la Zona Gráfica del Geogebra, para ejercer cierto gado de manipulación en la curva.

Análisis de la actividad 4

En el cuadro 12 presentamos la actividad 4, la cual consta de cuatro ítems. A continuación elaboramos el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada una de las partes correspondientes

Cuadro 12. Actividad 4

ACTIVIDAD 4

Abra el archivo Actividad_4.ggb. Se muestra una elipse y dos focos F_1 y F_2

El deslizador a representa la distancia del centro a uno de los vértices, $a > 0$

El deslizador c representa la distancia del centro a uno de los focos, $c > 0$.

Fijamos el deslizador $a = 10$

a) ¿Qué forma aproximada adopta la elipse, si sus focos se acercan a su centro y a los vértices de la elipse?

b) Se define la excentricidad como la razón $\frac{c}{a}$ ¿entre qué límites numéricos se halla la excentricidad para que su representación gráfica no adopte la forma circular ni lineal?

c) Si la tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del sol y su excentricidad es menor a 0.017, ¿Con qué figura se aproximaría su trayectoria elíptica? ¿por qué?

d) ¿Qué información le proporciona la excentricidad de una elipse?

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad 4_ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente actividad.

Análisis a priori de la actividad 4

En esta actividad esperamos que los alumnos instrumentarán la excentricidad de la elipse, de tal forma que la instrumentalización de la elipse avance, enriqueciéndola con una característica adicional. Creemos que la manipulación de la representación gráfica a través de la herramienta "Deslizador" del Geogebra, permitirá que la *razón* $e = \frac{c}{a}$ *nos indique que la gráfica de la elipse adopte formas alargadas cuando los focos se aproximan a los vértices o formas redondas cuando se aproximan al centro de la elipse* Las tareas propuestas corresponden a acciones específicas directamente relacionadas con la representación dinámica de la elipse, es decir la movilización de esquemas de uso como el deslizador y un texto dinámico vinculado a las distancias del centro a los focos y a los vértices, los cuales fueron creados para esta actividad.

En la figura 85, se muestra la representación gráfica de la pregunta 4 ggb. El arrastre de los deslizadores permite actualizar los valores del texto dinámico, de tal forma que la razón entre la distancia del centro al vértice y del centro al foco, permite observar gráficamente los cambios de alargue o redondez que experimenta la representación gráfica de la elipse, cuando se conservan las condiciones iniciales, es decir $a > 0$, $c > 0$

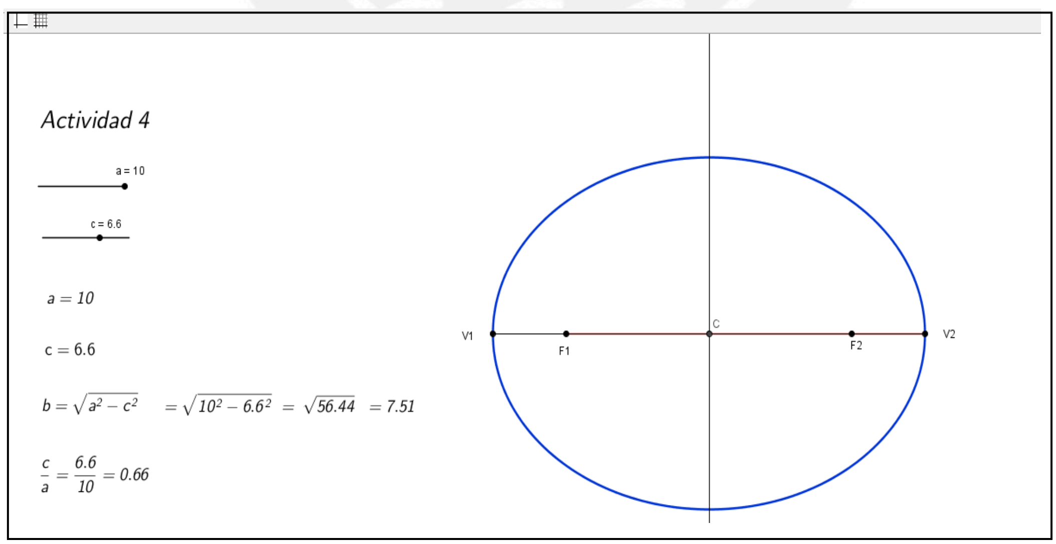


Figura 85. Actividad 4

Análisis a posteriori de la actividad 4

Como se había previsto, hay indicios para pensar que la excentricidad expresada como la *razón* $e=\frac{c}{a}$ fue instrumentada ya que *permitió cuantificar los valores y observar lo redonda o alargada que puede ser la representación gráfica de la elipse* . Además el proceso de instrumentalización de la elipse continuó debido a que la elipse fue enriquecida con una propiedad adicional. Creemos que los alumnos construyeron a la excentricidad como un esquema de acción instrumentada y le atribuyeron dicha componente a la elipse, cuyo valor permitió cuantificar los valores y observar lo redonda o alargada que puede ser la representación gráfica de la elipse. Se hicieron uso de las herramientas "Elige y mueve" sobre el deslizador, el texto numérico dinámico vinculado a las distancias del centro a los focos y a los vértices, la representación gráfica de una recta, circunferencia y elipse, los cuales se movilizaron como esquemas de uso. La influencia del Geogebra en la atribución de esta propiedad fue fundamental, pues creamos un deslizador que vinculara los parámetros de la curva. Al respecto Laborde et al. (2006), indican que la enseñanza de la geometría debería contribuir al reconocimiento de relaciones geométricas en un diagrama, al movimiento de objetos.

En el ítem a)

Análisis a priori

Creemos que haciendo uso del deslizador, al cual le hemos creado vinculaciones con algunos parámetros de la elipse, los alumnos podrán manipular dicha curva. Al inicio de las actividades, ambos grupos, observarán que la curva puede adoptar formas alargadas o redondas dependiendo que tan cerca o distante se deslicen los focos a los vértices de la elipse. Pensamos que esta construcción dinámica, permite observar que la forma de la elipse adopta distintos moldes cuando es manipulada por las herramientas diseñadas con este objetivo. Si la manipulación del deslizador hace que $c=0$ es decir si los focos coinciden con el centro de la circunferencia, observarán como la curva elíptica se transforma en una circunferencia, si en cambio $c=a$, es decir el foco coincide con uno de los vértices, la elipse cambia completamente a una recta horizontal, lo que origina que la elipse no mantenga sus condiciones iniciales de restricción $a > 0$, $c > 0$. Pensamos que los alumnos no tendrán ninguna dificultad en contestar a la pregunta.

Posibles esquemas de utilización

- La noción de la representación gráfica de una circunferencia, de una recta y los parámetros a y c de la elipse.
- El uso de la herramienta "Elige y mueve" en el deslizador

Parte predictiva de las acciones

Creemos que ambos equipos usarán la herramienta "Elige y mueve", luego arrastrarán el deslizador ocasionado que la elipse se alargue o adopte formas redondas. Los alumnos responden a la actividad indicando que la elipse adopta formas delgadas cuando los focos se aproximan a los vértices o formas redondas cuando se aproximan al centro de la elipse respectivamente.

A continuación se muestra el desarrollo de la actividad 4

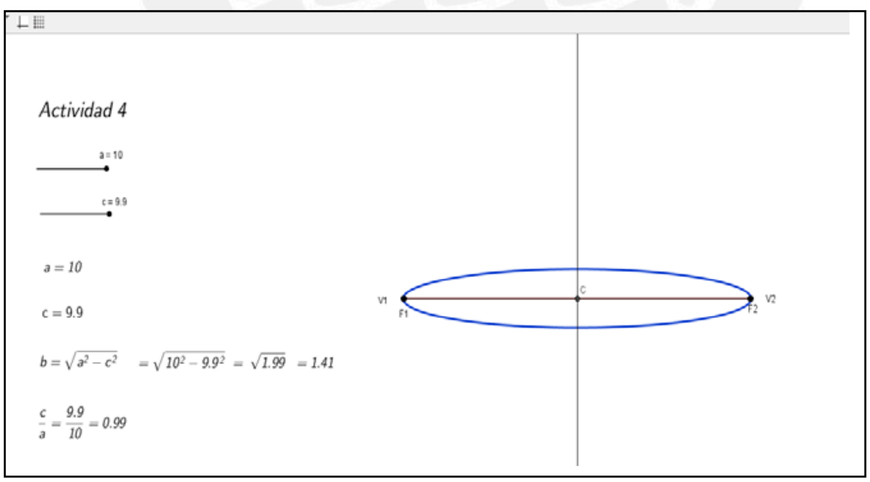


Figura 86. Desarrollo Actividad 4a

En la figura 86, la representación gráfica, no es un reflejo real del dinamismo que sucede con la gráfica cuando se manipula el valor de c, pero al menos nos permite ver cómo los focos de dicha elipse se aproximan a los vértices, manteniendo las propiedades de sus elementos, dicha interacción es una de las ventajas con las que se cuenta con los programas de AGD.

Análisis a posteriori

Como se había previsto, los equipos A y B, arrastran el deslizador provocando que los focos se aproximen a los vértices en algunos casos y al centro de la elipse en otros. La manipulación de la representación gráfica a través del deslizamiento de los focos les permitió observar que la forma de la elipse puede adoptar distintas formas gráficas, las cuales pueden llegar a representar, incluso formas circulares o lineales de acuerdo a la aproximación de los focos al centro o a los vértices. De acuerdo al análisis *a priori*, se inicia el proceso de instrumentación de la excentricidad.

Las figuras 87 y 88, representan formas que puede adoptar la elipse cuando la excentricidad toma valores cercanos a uno y a cero.

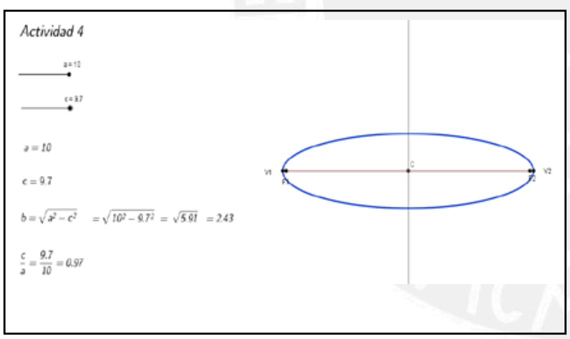


Figura 87. Gráfico forma alargada. Equipo A

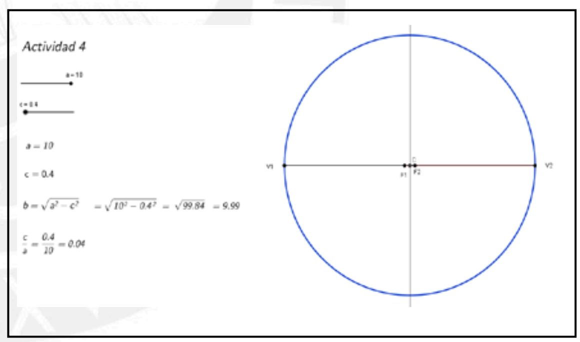


Figura 88. Gráfico forma redonda. Equipo A

Estamos de acuerdo con Sandoval (2009) cuando resalta el papel de la geometría dinámica como una herramienta que media entre el conocimiento perceptivo y geométrico. Esta representación dinámica les permite descubrir ciertas relaciones estructurales de la elipse, entre sus parámetros c y a.

En los gráficos anteriores, sólo hemos considerado la representación del equipo A ya que las representaciones de ambos equipos son muy similares. Los equipos, como habíamos previsto, redactan sus observaciones de acuerdo a la manipulación gráfica que sufre sus representaciones. Movilizan las nociones de recta, circunferencia y elipse para determinar las formas a las que se aproxima la elipse.

De acuerdo a la parte predictiva del análisis *a priori* los equipos toman en cuenta las condiciones iniciales de restricción, que indican que la elipse no puede adoptar forma circular o lineal.

Se muestra en la figura 89, la expresión del equipo A

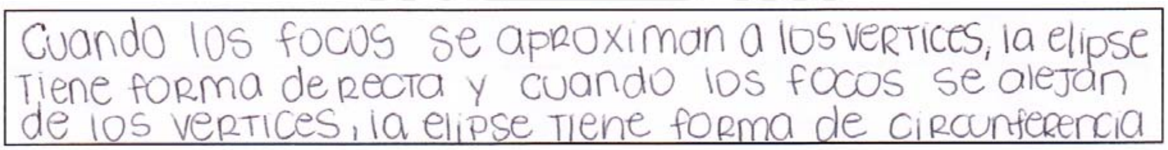

Cuando los focos se aproximan a los vertices, la elipse Tiene forma de recta y cuando los focos se alejan de los vertices, la elipse Tiene forma de circunferencia

Figura 89. 1° Enunciado 4a. Equipo B

En el caso del equipo A, los integrantes manipulan el deslizador y arrastran el foco hacia los vértices y al centro de la elipse. Ambos equipos consideran sólo formas aproximadas de la elipse. Los alumnos entienden por la expresión escrita que la elipse no puede adoptar otras formas que vayan más allá de sus condiciones iniciales.

Se muestra en la figura 90, la expresión del equipo B

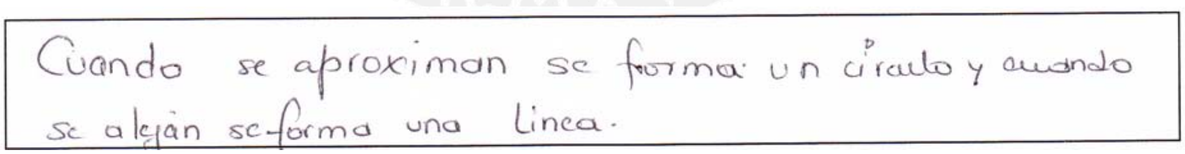

Cuando se aproximan se forma un circulo y cuando se alejan se forma una linea.

Figura 90. 2° Enunciado 4a. Equipo B

En el caso del equipo B, los alumnos tomaron un tiempo en manipular el deslizador y observar cómo la elipse podía ir tomando distintas posturas gráficas. En ambos casos existe un esquema de acción colectiva instrumentada puesto que los alumnos sociabilizaron sus acciones en grupo, ejemplificando este hecho con un discurso escrito.

De acuerdo a las respuestas mostradas, observamos que la geometría dinámica es un medio por el cual los alumnos pueden usarla como herramienta de validación cuando pueden manipular alguno de sus elementos, que en este ítem hemos asociado a las herramientas de arrastre. Al respecto Sandoval (2009) indica que la geometría dinámica contribuye al desarrollo de la comprensión de las ideas asociadas al arrastre y la construcción, lo que contribuye a la transición de lo perceptivo a lo teórico.

En el ítem b)

Análisis a priori.

Creemos que la vista gráfica y el texto dinámico guiarán a ambos equipos y señalarán el rango numérico en el que se hallan los valores de la excentricidad, de tal forma que su representación gráfica no adopte la forma circular ni lineal. Para hallar el intervalo numérico de la excentricidad, harán uso del deslizador, vista gráfica y texto dinámico. En el texto dinámico los alumnos observarán los cambios que se registran en la excentricidad, cuando el foco se aproxima o se aleja del vértice.

De esa forma, esperamos que los alumnos de ambos equipos, respondan que la excentricidad se halla entre cero y uno.

Posibles esquemas de utilización.

- Movilizan la noción de circunferencia, recta y las propiedades de los parámetros a y c de la elipse.
- El uso del deslizador, vista gráfica y el texto dinámico

Parte predictiva de las acciones.

Pensamos que señalarán la herramienta “Elige y mueve”, luego seleccionarán el deslizador c y observarán que los valores de la excentricidad se van actualizando en relación a la gráfica, la cual va adoptando posturas diversas. Para su respuesta, tomarán en cuenta que deben restringir aquellos valores que hacen que la elipse tenga representación lineal y circular.

Análisis a posteriori

Como esperábamos, los equipos A y B, continúan el proceso de instrumentación de la excentricidad de la elipse, movilizando para ello los las propiedades de los parámetros a y c de la elipse, el deslizador, vista gráfica de la circunferencia, elipse y el texto dinámico. Ambos equipos responden correctamente a la pregunta

El equipo A

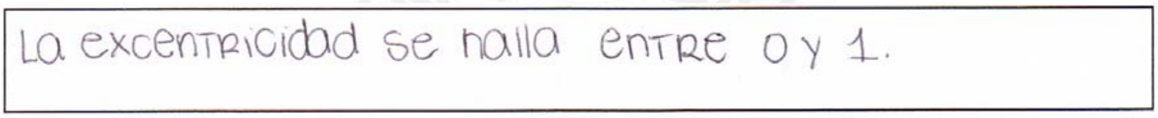

La excentricidad se halla entre 0 y 1.

Figura 91. Enunciado 4b. Equipo A

Las figuras 91 y 92, nos indica que el texto numérico el cual muestra los valores de la excentricidad vinculado a la manipulación de su representación gráfica contribuye a que los alumnos indiquen la variación de la excentricidad.

El equipo B

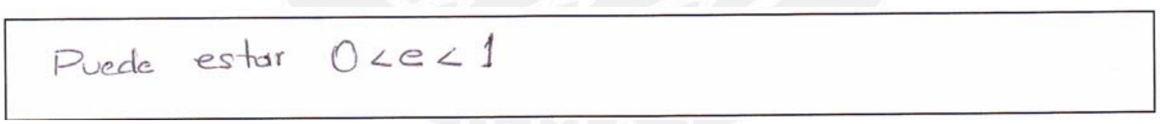

Puede estar $0 < e < 1$

Figura 92. Enunciado 4b. Equipo B

Las figuras anteriores nos muestran que existe un esquema de acción colectiva instrumentada puesto que los alumnos sociabilizaron sus acciones en grupo, trabajan con el mismo AGD, existe una coordinación de las acciones individuales y la integración de sus resultados lo muestran cuando ejemplifican este hecho con un discurso escrito.

En el ítem c)

Análisis a priori.

Creemos que los alumnos podrían estar instrumentados con la noción de elipse pues indicarán que el valor numérico de la excentricidad es aproximado a cero y por lo tanto vincularán este valor con una figura que se aproximaría a una circunferencia. Gráficamente arrastrarán el deslizador hasta que el texto numérico de la excentricidad se aproxime al valor numérico indicado. No tendrán ningún inconveniente en asociar el valor de la excentricidad 0.017 a la forma casi redonda de la elipse. Luego escribirán que la trayectoria elíptica de la tierra se asemeja a la de una circunferencia porque tiene excentricidad cercana a cero.

Posibles esquemas de utilización.

- Movilizan la noción de circunferencia, recta y elipse como vistas gráficas
- El uso del deslizador, vista gráfica y el texto dinámico

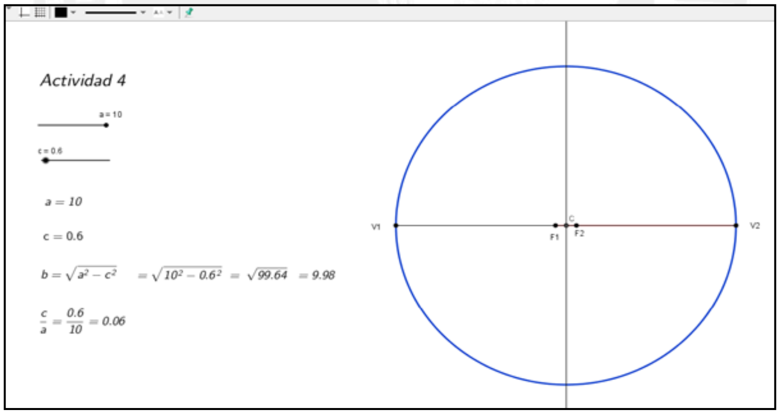


Figura 93 Desarrollo Actividad 4c

La elipse de la figura 93, adopta una forma casi circular, cuando la excentricidad toma valores cercanos a cero. Esto nos indica que hay indicios para suponer que los alumnos están instrumentándose con la noción de excentricidad porque responden qué tan redonda puede ser la gráfica de una elipse con el valor de la excentricidad.

Análisis a posteriori.

Como se había previsto, afirmamos que los alumnos están instrumentados con la excentricidad porque no tuvieron problemas en vincular el valor de la excentricidad de la tierra ($e = 0.017$) a la forma alargada o redonda de la elipse y ambos equipos respondieron que su forma es muy similar a la de una circunferencia porque la excentricidad es cercana a cero. En las figuras 94 y 95, ambos equipos responden que la trayectoria se asemejaría a la de una circunferencia

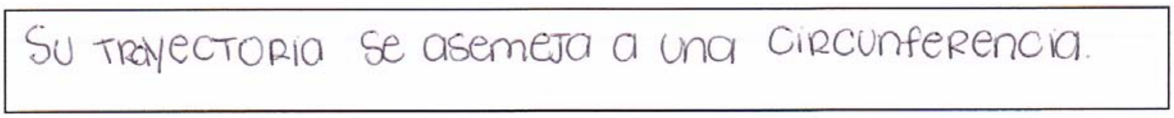

SU TRAYECTORIA SE ASEMEJA A UNA CIRCUNFERENCIA.

Figura 94. Enunciado 4c. Equipo A

Estamos de acuerdo con Sandoval (2009), cuando indica que los ambientes de geometría dinámica, ofrecen un campo de exploración que no es posible hallarlo en las representaciones con lápiz y papel. La excentricidad es un ejemplo de la comprensión intuitiva de la geometría.

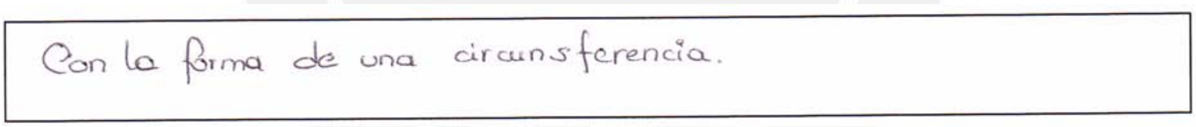

Con la forma de una circunsferencia.

Figura 95. Enunciado 4c. Equipo B

En ambos casos los alumnos manipulan la elipse cuando alejan y acercan los focos de los vértices. Existe un intento por relacionar los focos y vértices de manera gráfica, acción que no sería posible en un dibujo de naturaleza estática.

En el ítem d)

Análisis a priori.

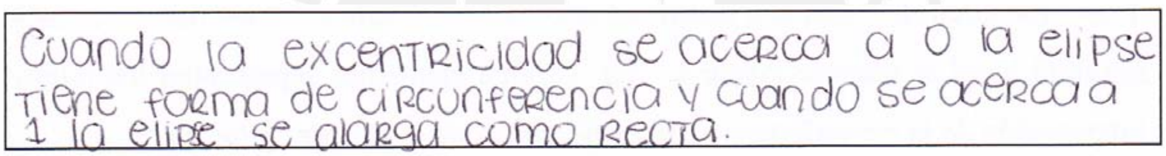
Creemos que los alumnos siguen instrumentados respecto a la excentricidad pues indicarán que de acuerdo al valor de la excentricidad, es decir para valores cercanos a cero o a uno, la elipse podrá tener forma redonda o alargada respectivamente.

Posibles esquemas de utilización.

- Movilizan la noción de circunferencia, recta y los parámetros a y c de la elipse, además de su vista gráfica.
- El uso del deslizador, vista gráfica y el texto dinámico

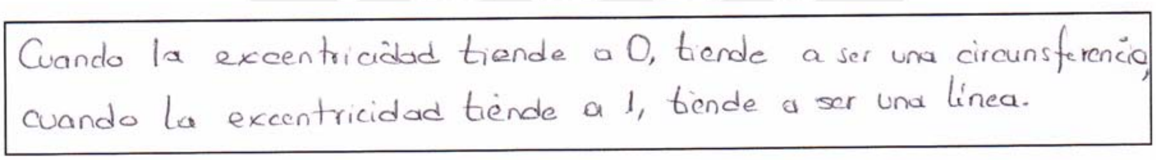
Análisis a posteriori.

De acuerdo a lo que habíamos previsto, los alumnos lograron redactar una interpretación de la excentricidad que se muestra en la parte inferior en las figuras 96 y 97.



Cuando la excentricidad se acerca a 0 la elipse tiene forma de circunferencia y cuando se acerca a 1 la elipse se alarga como recta.

Figura 96. Enunciado 4d. Equipo A



Cuando la excentricidad tiende a 0, tiende a ser una circunsferencia, cuando la excentricidad tiende a 1, tiende a ser una línea.

Figura 97. Enunciado 4d. Equipo B

El valor numérico de este indicador les permite señalar lo alargada o redonda que puede ser la representación gráfica de una elipse sin necesidad de representarla gráficamente. Debemos considerar en ambos casos los esquemas de acción colectiva instrumentada, teniendo en cuenta que los alumnos movilizaron sus esquemas de utilización de circunferencia, recta y semiejes, mostrando la explicitación en un discurso escrito. En la siguiente actividad continuamos con la instrumentalización de la elipse, la enriquecemos con otra propiedad llamada lado recto.

Análisis de la actividad 5

En el cuadro 13 presentamos la actividad 5, la cual consta de seis ítems. A continuación elaboramos el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada una de las partes correspondientes

Cuadro 13. Actividad 5

Actividad 5

Abra el archivo Actividad _5.ggb. Se muestran los focos V_1 y V_2 de una elipse

a) Si arrastra el deslizador hasta $d = 1$ se obtienen cuerdas pertenecientes a una elipse. De acuerdo a su vista gráfica ¿qué entiende usted por cuerda de una elipse?

b) La cuerda $\overline{V_1V_2}$ es el eje mayor. ¿Cuál de las cuerdas que observa corresponde al eje menor? ¿Por qué?

Trace el eje menor y describa su procedimiento.

c) La cuerda que pasa por uno de los focos de la elipse y es perpendicular al eje focal se llama lado recto ¿Cuál de las cuerdas que observa corresponde a dos de los lados rectos de la elipse? ¿Por qué?

d) Con la herramienta “Compás”, trace una circunferencia con centro en uno de los extremos del eje menor y radio de longitud igual al semieje mayor ($r = a$). ¿Qué elementos de la elipse representan los puntos de intersección de la circunferencia con el eje mayor de la elipse? ¿Por qué?

e) Trace los lados rectos de la elipse, luego oculte los trazos complementarios salvo el correspondiente al eje mayor y el eje menor de la curva.

f) Reto para el alumno . Compruebe que la longitud del lado recto de una elipse es $\frac{2b^2}{a}$. Para ello trace un triángulo en el interior de la elipse, cuyos vértices sean los focos y un extremo del lado recto de dicha

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad 5_ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente actividad.

Análisis a priori de la actividad 5

En esta actividad esperamos instrumentar *el lado recto de la elipse como dos cuerdas perpendiculares que pasan por sus focos*, y continuar instrumentalizando la elipse potenciándola con una propiedad adicional. Para ello movilizamos algunos esquemas de uso como el trazo de la cuerda de una circunferencia o parábola, la condición geométrica de una elipse , la relación de sus parámetros y el trazo de algunos de sus elementos como eje mayor, eje menor y focos, los cuales fueron instrumentados en actividades anteriores. Debido a que los alumnos están instrumentados con el trazo de la cuerda en una circunferencia o de una parábola por los esquemas previos que traen consigo, pensamos que los alumnos no tendrán inconvenientes en indicar que el segmento que une dos puntos distintos de una elipse corresponde a la definición de cuerda de una elipse. Creemos que sin embargo, no identificarán correctamente a las *dos cuerdas que corresponden al lado recto de la elipse*, porque no movilizarán las propiedades que lo definen, es decir la perpendicularidad al eje focal y el foco. Tampoco podrán movilizar de manera apropiada la herramienta "Compás" pues los alumnos no la movilizan como una herramienta que traslada distancias y todavía requieren de mayor familiarización. Según la clasificación de Rabardel (1995), dicha herramienta presentaría una restricción de acción. Finalmente los alumnos tendrán dificultades para hallar la *longitud del lado recto de la elipse* $\frac{2b^2}{a}$*, en términos de las longitudes de sus parámetros*, probablemente requieran de alguna orientación adicional que les permita movilizar la condición geométrica de la elipse como esquema de uso. En la figura 98 se muestra la representación gráfica de la pregunta 5.

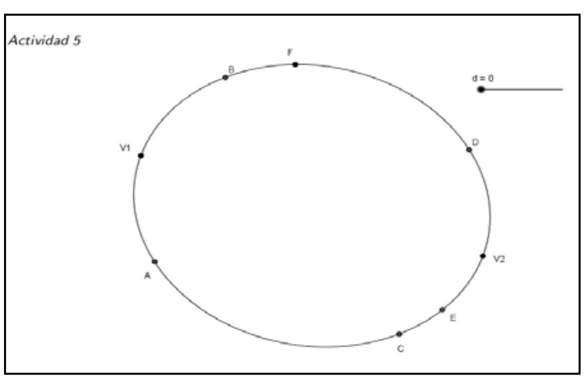


Figura 98. Actividad 5

Se observa en la figura anterior, a un deslizador que va tomando valores numéricos que se hallan comprendidos en el intervalo $d \in [0;1]$ lo que conduce a la aparición de los segmentos que representan las cuerdas de la elipse. Dichas cuerdas serán trazadas desde los extremos que se han marcado sobre el borde de la elipse, es decir $I = \{V_1; A; C; F\}$ hasta su correspondiente opuesto, es decir $F = \{V_2; B; D; E\}$

Análisis a posteriori de la actividad 5

Los alumnos de los equipos A y B instrumentaron la noción de lado recto de la elipse *como dos cuerdas perpendiculares que pasan por sus focos*, aunque presentaron algunas dificultades con el uso de algunas herramientas del AGD, específicamente la herramienta “Compás”, la cual no fue vinculada con la noción trasladar distancias. Al respecto y de acuerdo al análisis *a priori*, en el ítem 5d), los equipos necesitaron orientación del uso de dicha herramienta ya que se presentó una restricción de acción en la herramienta “Compas”, la cual condicionó las acciones de los alumnos. Tampoco se previó que en el ítem 5c), la relación $a^2 = b^2 + c^2$ evolucionara como esquema de uso en el equipo A, pues con el cálculo del parámetro c, los integrantes del equipo A, pudieron validar la posición del foco sobre el eje focal, haciendo uso de la Vista Hoja de Cálculo y determinar de este modo, el parámetro $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

En esta parte los alumnos del equipo B crearon una nueva propiedad en la elipse para validar la posición de los focos de la elipse, es decir construyeron y movilizaron un nuevo esquema de acción instrumentada que indica que la *distancia de uno de los extremos del eje menor de la elipse a uno de los focos es igual a la longitud del semieje mayor* para validar la posición de los focos de la elipse. Tampoco se previó que el ítem 5e) se presentaría una restricción de existencia con el uso de la herramienta “Muestra Objeto” cuando se ocultaron algunos objetos y que de acuerdo a Trouche (2004) la herramienta “Polígono” se inscribiría en una fase de personalización. Existen otras herramientas del Geogebra, como trazo de rectas paralelas, perpendiculares, intersección de puntos que siguen instrumentándose. Los alumnos presentaron dificultades en el ítem 5f) para hallar *longitud del lado recto de la elipse* $\frac{2b^2}{a}$*, en términos de las longitudes de sus parámetros* como se había previsto, aunque el equipo B pudo llegar a la respuesta de manera orientada, movilizando como esquema de uso la condición geométrica y la relación pitagórica de la elipse.

Se hicieron uso de las herramientas “Punto medio”, “Recta perpendicular”, “Recta paralela”, ”Segmento”, “Intersección de objetos”, “Compás”, el deslizador del Geoegebra, “Muestra objeto”, y algunas propiedades de los elementos de la elipse como trazo de la cuerda de una elipse, trazo de sus ejes, determinación de los vértices, focos, condición geométrica de la elipse.

En el ítem a)

Análisis a priori

Esperamos que los equipos arrastren el deslizador, el cual va tomando valores numéricos que se hallan comprendidos en el intervalo $d \in [0;1]$ y que permite que simultáneamente se formen cuatro segmentos que se formarán uniendo los extremos iniciales formado por los vértices $I = \{V_1;\ A;\ C;\ F\}$ con sus correlativos opuestos $F = \{V_2;\ B;\ D;\ E\}$, tal como se muestra en la figura 99, la cual solo es una aproximación de la situación dinámica real.

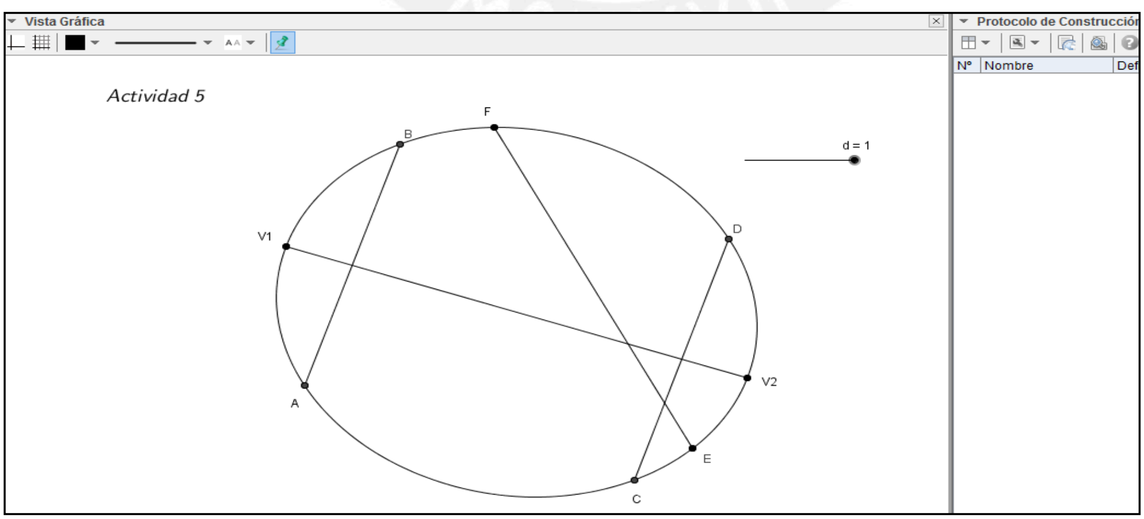


Figura 99. Desarrollo Actividad 5a

Ninguno de los equipos tendrá dificultades en contestar que una cuerda es un segmento cuyos extremos pertenecen a la elipse. Los alumnos movilizan nociones de cuerda relacionadas a la noción de segmento de una circunferencia o parábola, como lo muestran cuando movilizaron estos esquemas en el desarrollo de la prueba diagnóstico.

Posibles esquemas de utilización.

- Trazo de una cuerda de una circunferencia o parábola
- El uso de la herramienta "Elige y mueve" sobre el deslizador de la vista gráfica

Parte predictiva de las acciones.

Con la herramienta "Elige y mueve" el equipo arrastra el deslizador, observa la formación de las cuerdas y redacta su respuesta sobre la noción de elipse.

Análisis a posteriori.

Como se esperaba, describieron el significado de la cuerda. Para ello ambos equipos señalaron la herramienta "Elige y mueve", luego arrastraron el deslizador hasta que se posicione en el valor $d = 1$.

Se puede observar en la figura 100 cómo fueron trazadas las cuatro cuerdas $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{FE}, \overline{V_1V_2}$, cuando se arrastra el deslizador a la posición $d = 1$

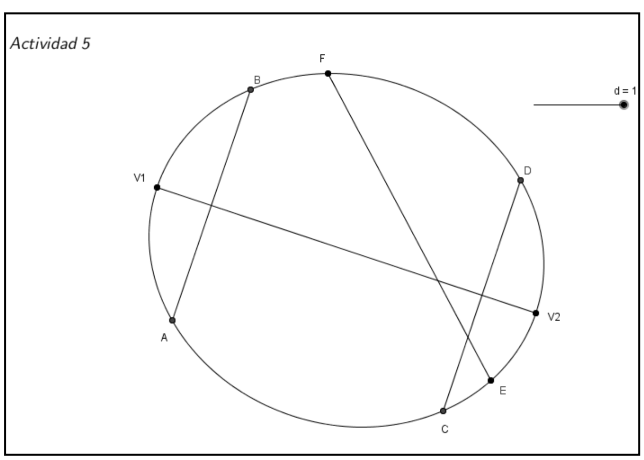


Figura 100. Gráfico 5a. Equipos A y B

Nuevamente creemos que es importante considerar la interactividad permanente entre el alumno y la representación gráfica por medio del deslizador del Geogebra, el cual permite que el alumno tenga manipulación directa con el segmento y en muchos casos como indica Laborde et al. (2006) acompañado de un comprensión intuitiva de la geometría.

Enseguida mostramos en las figuras 101 y 102, la descripción que elaboran de cuerda, ambos equipos.

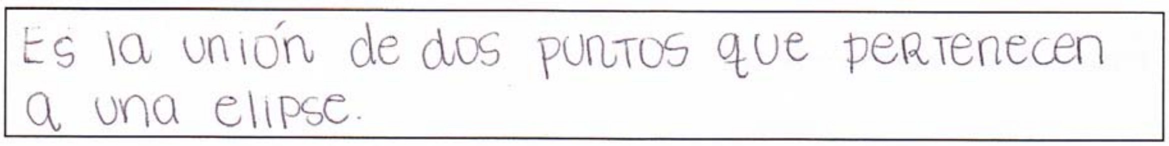

Es la unión de dos puntos que pertenecen a una elipse.

Figura 101. Enunciado 5a. Equipo A

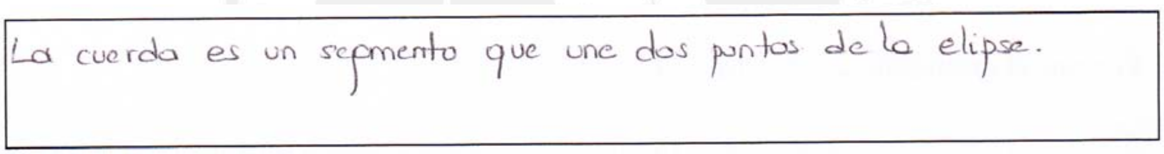

La cuerda es un segmento que une dos puntos de la elipse.

Figura 102. Enunciado 5a. Equipo B

En la parte cognitiva de la Ingeniería Didáctica de Artigue, consideramos la cuerda de la parábola y de la circunferencia como conocimientos previos de los alumnos. La redacción de los enunciados que se muestran en ambas figuras, indican que movilizaron la noción que traen consigo y que dio como resultado un esquema de actividad colectiva instrumentada.

En el ítems b)

Análisis a priori

Creemos que los alumnos de ambos equipos están instrumentados con el trazo del eje menor pues movilizarán la definición que indica que es un segmento perpendicular que pasa por el centro de una elipse. Pensamos que los alumnos de los equipos A y B, luego de hallar el centro de la elipse con la herramienta “Punto Medio” y constatar que no hay cuerda que pase por dicho punto, no tendrán ningún problema en señalar que el eje menor no se encuentra representado en la elipse. Luego trazarán el eje menor correspondiente a la elipse. Para ello los alumnos movilizarán esquemas de uso referente a la construcción del eje menor de la elipse. Trazarán una recta que contenga al eje menor de la elipse y que pasa por el centro de la elipse. Dicha recta se intersectará con la curva y con el uso de la herramienta “Punto de Intersección”, se determinan los extremos del eje menor. Luego se unen ambos puntos y se representa el eje menor de la elipse.

Como se muestra en la figura 103, creemos que las movilizaciones de las herramientas del Geogebra como “Punto medio”, “Recta Perpendicular”, “Recta Paralela”, “Intersección entre dos objetos” permitirán trazar el eje menor de la elipse.

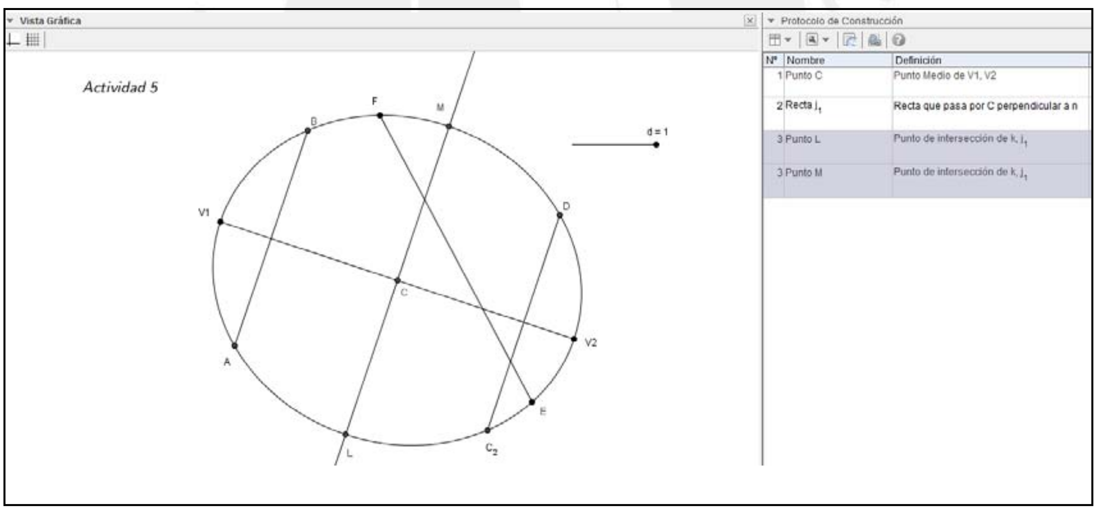


Figura 103. Desarrollo Actividad 5 b

Posibles esquemas de utilización:

- La noción de cuerda, mediatriz y nociones como el eje mayor, menor de una elipse, rectas perpendiculares, punto medio.

- Usa las herramientas a las herramientas: “Punto medio”, la herramienta “Perpendicular” o “Paralela”, la herramienta “Intersección entre dos objetos.

Parte predictiva de las acciones.

Con la herramienta “Punto medio” hacen clic en los extremos de la cuerda $\overline{V_1V_2}$ y crean el punto medio, luego con la herramienta “Perpendicular” hacen clic en el segmento $\overline{V_1V_2}$ y en el punto medio, con el objetivo de trazar el eje normal.

Luego con la herramienta “Intersección entre dos objetos” hacen clic en la curva, en el eje normal y hallan los extremos del eje menor.

Análisis a posteriori

Ambos equipos**,** como habíamos previsto, indican las razones por las que ninguna de las cuerdas trazadas corresponde a la definición de eje menor, como se muestra en las figuras 104 y 105.

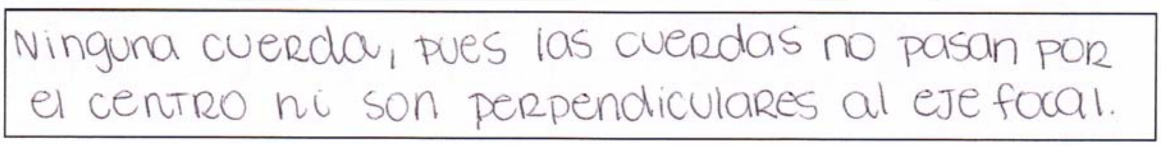

Ninguna cuerda, pues las cuerdas no pasan por el centro ni son perpendiculares al eje focal.

Figura 104. 1° Enunciado 5b. Equipo A

Esto indica que movilizan los saberes previos de la noción de cuerda, que traen consigo cuando trataron los temas de la circunferencia y parábola.

Se observa en la figura 105, que el equipo B indica que el eje menor debe pasar por el centro de la elipse, no menciona la perpendicularidad respecto al eje focal, pero en su respuesta indica que las cuerdas horizontales tampoco son válidas, como indica en la figura. Atribuimos esta respuesta a la falta de precisión en la redacción de los alumnos.

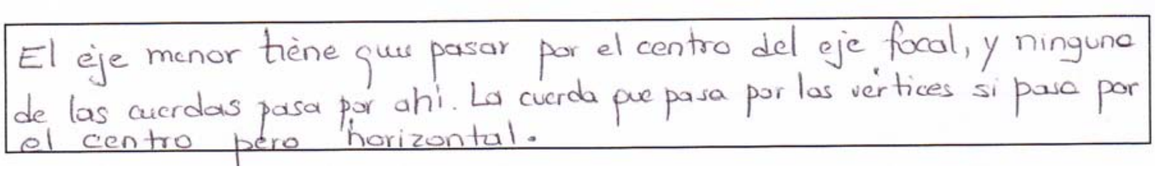

El eje menor tiene que pasar por el centro del eje focal, y ninguna de las cuerdas pasa por ahí. La cuerda que pasa por los vértices si pasa por el centro pero horizontal.

Figura 105. 1°Enunciado 5b. Equipo B

Afirmamos que ambos equipos están instrumentados respecto a la definición del eje menor de la elipse pues indican que es un segmento perpendicular al eje focal y que pasa por el centro de la elipse, su discurso escrito nos indica también de la movilización de un esquema de acción colectiva.

De acuerdo al análisis a priori, ambos equipos trazan los segmentos que representan el eje menor de la elipse. Como se tenía previsto, localizan los extremos de los ejes haciendo uso de las herramientas del Geogebra, y luego trazan el segmento correspondiente.

La figura 106 muestra gráficamente la descripción de las acciones. El equipo A, con la herramienta "Punto medio", selecciona los vértices de la elipse, crea el centro y lo renombra como el centro C de la elipse. Señala la herramienta "Recta perpendicular", selecciona el eje mayor y el centro C de la elipse.

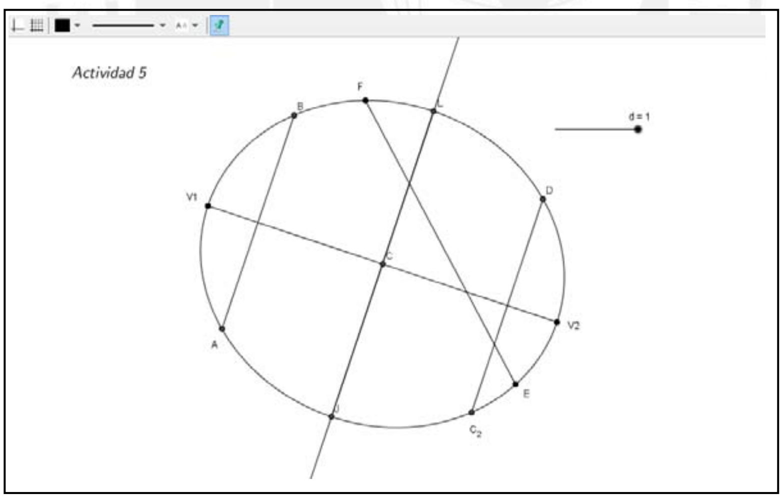


Figura 106. Gráfico 5b. Equipo A

Luego con la herramienta "Intersección de dos objetos", selecciona la curva y la recta perpendicular, se crean los extremos del eje menor. Finalmente, con la herramienta "Segmento entre dos puntos" seleccionan los extremos del eje menor y traza el segmento que corresponde al eje menor de la elipse.

La figura anterior que los alumnos del equipo *A* se hallan instrumentados con el trazo del eje menor de una elipse porque logran movilizar esquemas de uso para dicho trazo. Muestra también que están instrumentados respecto a algunas herramientas del Geogebra como uso de la recta perpendicular, del segmento de una recta, intersección de puntos, punto medio, los cuales son esquemas de uso, que posibilitan la representación gráfica del eje menor de la elipse, de acuerdo a las descripciones realizadas. Luego el equipo explica los pasos realizados para trazar el eje menor, que detallamos en la figura 107.

POR el punto medio se traza la recta perpendicular al eje mayor, esa recta se intersecta con la elipse y se hallan los puntos por donde se traza el eje menor.

Figura 107. 2° Enunciado 5b. Equipo A

El equipo *B* usa la herramienta "Mediatriz" para su trazo perpendicular. Básicamente ambos procedimientos son equivalentes. El equipo *B* señala la herramienta "Recta mediatriz", selecciona los vértices de la elipse y traza la mediatriz del eje mayor. Señala la herramienta "Intersección de dos objetos", selecciona la curva y la recta perpendicular, creándose los extremos del eje menor. Finalmente, con la herramienta "Segmento entre dos puntos" seleccionan los extremos del eje menor y se traza el segmento que corresponde al eje menor de la elipse, como se muestra en la figura 108. Dichas herramientas del Geogebra se hallan instrumentadas porque los alumnos aplican los procedimientos respectivos para su construcción.

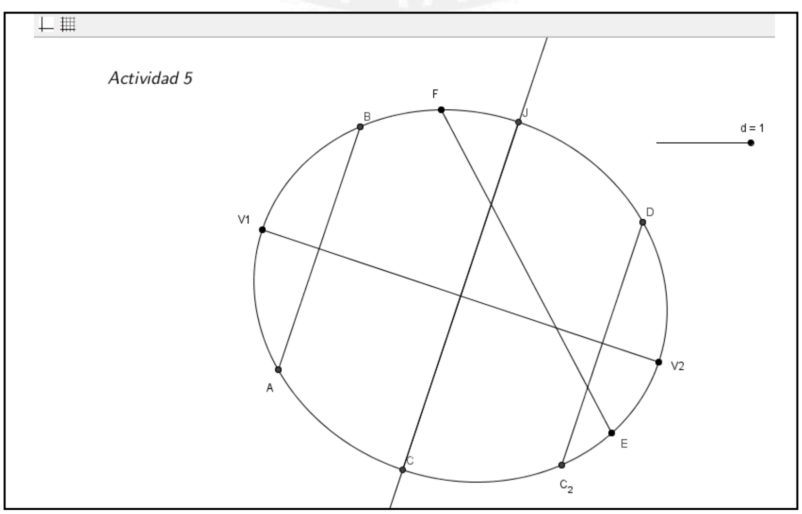


Figura 108. Gráfico 5b. Equipo B

El equipo B usa la herramienta “Mediatriz” del segmento $\overline{V_1V_2}$ para hallar la recta que contiene al eje normal de la elipse.

Luego proceden a contestar como se muestra en la redacción de la figura 109.

(1) Se traza la mediatriz del segmento $\overline{V_1V_2}$ (2) Se intersecta la mediatriz (eje normal) con la elipse (3) Se traza el segmento $\overline{JC}$ llamado eje menor.

Figura 109. 2° Enunciado 5b. Equipo B

Destacamos que los alumnos que están imbuidos en la realización de la tarea, movilizaron sus propios esquemas de utilización, y coordinaron de manera colectiva, para luego describir una misma clase de instrumento mediante un discurso escrito. De esta relación de dependencia es que emergen los esquemas de acción colectiva instrumentada, como se muestra en la figura 109.

El ítem c)

Análisis a priori

Creemos que los alumnos de ambos equipos encontrarán dificultades para indicar que las cuerdas que cruzan al eje focal no corresponden necesariamente a los lados rectos de la elipse, porque a pesar que creemos que los alumnos sí movilizan los esquemas de uso relacionados a los lados rectos de la elipse, basados en la definición de cuerdas perpendiculares que pasan por los focos, muchas veces toman como válidas deducciones que elaboran de percepciones de representaciones gráficas que pueden estar equivocadas. Esto en razón de lo que señala Sandoval (2009) quien indica que en ocasiones la representación estática de ciertas representaciones gráficas puede generar obstáculos que impiden llegar a la solución y que las deducciones son simples percepciones de representaciones estáticas. Pensamos que los alumnos necesitarán orientación para responder a esta pregunta ya que finalmente requerirán determinar la posición de los focos de la elipse, que son puntos por donde pasa el lado recto. Finalmente la discusión con argumentos y la intervención del profesor permitirá orientarlos en la respuesta.

Posibles esquemas de utilización.

- La mediatriz, trazo de la cuerda de una elipse, trazo de sus ejes, determinación de los vértices, focos, condición geométrica de la elipse, la relación de los parámetros $a^2 = b^2 + c^2$
- Uso de las herramientas “Recta perpendicular”, “Paralela”, “Segmento, “Puntos de intersección”, “Distancia”

Análisis a posteriori.

Ambos equipos lograron determinar que las cuerdas trazadas correspondían a los trazos de los lados rectos. No mostraron dificultades como se había previsto en el análisis *a priori*, esto probablemente se deba a que los alumnos, como mencionamos anteriormente tienen instrumentada la relación de los parámetros $a^2 = b^2 + c^2$ del artefacto, y la condición geométrica de la elipse que indica que dado un punto de la elipse, la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante igual a la longitud del eje mayor de la elipse , ya que los alumnos movilizaron dichos esquemas de uso para responder a la pregunta. A continuación describimos las acciones de ambos equipos.

El equipo A

Los alumnos movilizaron sus esquemas de uso, tal como la noción de los parámetros $a, b,$ y c, la relación de dichos parámetros expresada por medio de la relación $a^2 = b^2 + c^2$, las nociones del eje focal, eje normal, y el uso de las herramientas del Geoegebra, mediante las descripciones descritas a continuación.

El equipo A comprueba que la cuerda $\overline{AB}$ es perpendicular al eje focal trazando una recta perpendicular a dicho eje y que pasa por el punto A. Luego halla la distancia del centro al vértice (a), del centro al extremo del eje menor (b) y del centro al punto M ($\overline{CM}$). Entonces elaboran cálculos con la vista “Hoja de Cálculo” y comprueban que la relación $a^2 = b^2 + c^2$ no cumple para los valores hallados.

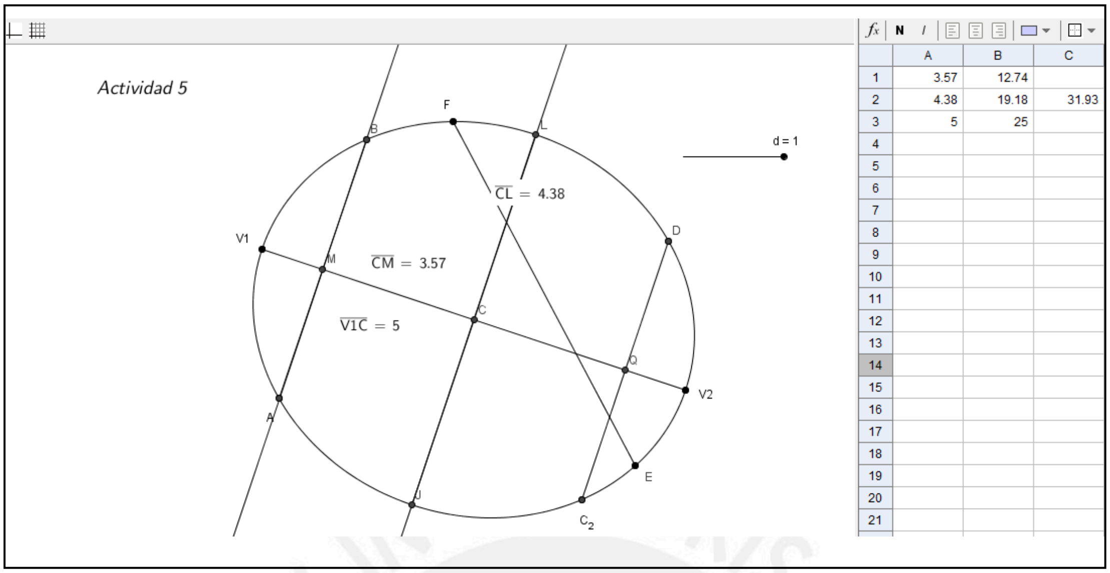


Figura 110. Gráfico 5c. Equipo A

Se muestra en la figura 110, la construcción del equipo A que valida su respuesta apoyándose primero con la herramienta "Distancia" para hallar los valores del centro al vértice, del centro al extremos del lado menor y del centro al punto M que se supone el foco. Luego haciendo uso de la relación $a^2 = b^2 + c^2$, que evoluciona como esquema de uso, elaboran los cálculos correspondientes en la vista de "Hoja de Cálculo" para validar el punto M como foco de la curva.

El uso de esta herramienta no estaba prevista, pero probablemente por el hecho de ser un programa que habitualmente emplean y por haber sido un tema que se trabajó en la Exploración del Geogebra, fue usado por el equipo A.

En todo caso, siguen enriqueciendo las propiedades del Geogebra, esto significa que el Geogebra continúa instrumentalizándose ya que los alumnos le atribuyen características adicionales.

Según Trouche (2004), el uso de esta Ventana de Hoja de Cálculo entraría a una fase de personalización porque ya están familiarizados con su uso

En la figura 111, se puede leer la justificación.

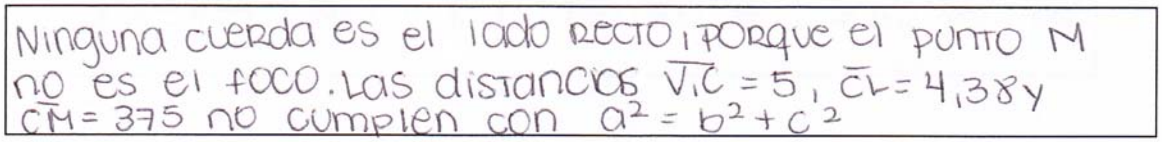

Ninguna cuerda es el lado recto, porque el punto M
no es el foco. Las distancias $\overline{V_1C} = 5$, $\overline{CL} = 4,38$ y
$\overline{CM} = 375$ no cumplen con $a^2 = b^2 + c^2$

Figura 111. Enunciado 5c. Equipo A

Los integrantes del equipo A, sostuvieron una discusión argumentada respecto al significado de la cuerda $\overline{AB}$. Inicialmente sostenían que la cuerda $\overline{AB}$ era el lado recto de la elipse. Cuando buscaron la forma de validar esta afirmación, usando el procedimiento descrito en la figura anterior. Luego que encontraron que las cuerdas no correspondían a los lados rectos, repitieron el procedimiento. Cuando confirmaron el resultado, llamaron al profesor para indicarle que inicialmente habían pensado que las cuerdas trazadas en el gráfico correspondían a los lados rectos, a lo que se les señaló que las percepciones no son una buena señal para realizar conjeturas.

Se puede decir que en el equipo A continúa instrumentalizando las herramientas del Geogebra porque enriqueció al programa con el uso de la Ventana Hoja de Cálculo. Además la justificación que usaron, descrita en la figura 111, indica que los alumnos movilizaron sus propios esquemas de utilización y consiguieron sociabilizar el esquema de acción colectiva instrumentada.

El equipo B

Traza el triángulo rectángulo LJM con la herramienta "Polígono" y luego comprueba con la herramienta "Distancia" si la distancia del extremo del eje menor al punto J ($\overline{LJ}$) es igual al semieje mayor (a).

En este caso, el equipo B, construyó una nueva propiedad para la elipse que indica que la distancia de uno de los extremos del eje menor a uno de los focos es igual a la longitud del semieje mayor, es decir 5 unidades.

De este modo movilizaron y construyeron dicho esquemas de acción instrumentada para resolver la tarea, es decir validaron que la distancia de uno de los extremos del eje menor de la elipse a uno de los focos no corresponde a la longitud del semieje mayor. Inferimos que la mediatriz y la condición geométrica de la elipse fueron movilizadas como esquemas de uso para la construcción de la nueva propiedad de la elipse. Asimismo continuaron con el proceso de instrumentalización de la elipse porque la enriquecieron con esta nueva propiedad y movilizaron esquemas de uso para movilizar las propiedades referidas a la mediatriz y a la condición geométrica de la elipse.

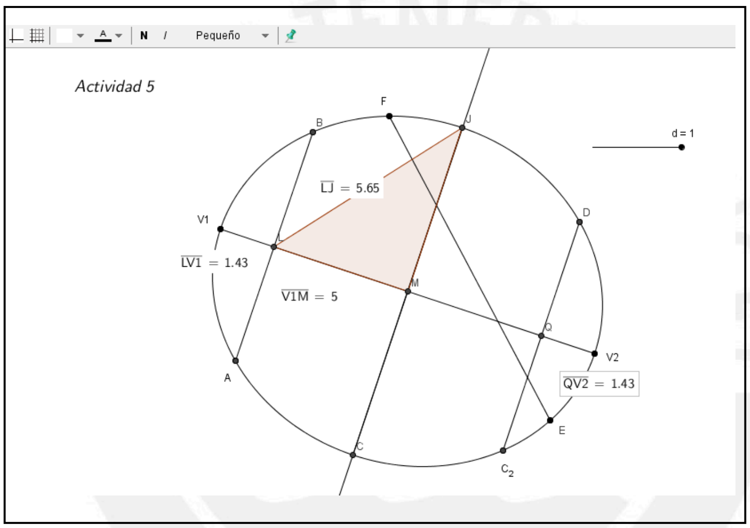


Figura 112. Gráfico 5c. Equipo B

En la construcción de la figura 112, no prevemos en nuestra parte predictiva, que los alumnos usarían la herramienta “Polígono” de manera personalizada, situación que según Trouche (2004) clasifica a la herramienta en la fase de personalización.

En la redacción de la figura 113, el equipo B indica que la cuerda $\overline{AB}$ no corresponde al lado recto porque halla la distancia del segmento $\overline{LJ}$ que no corresponde a la del semieje mayor.

La cuerda $\overline{AB}$ no pasa por el foco porque no cumple la relación del triangulo rectangulo. $\overline{LJ} = 5.65$ no es igual a $\overline{V_1M} = 5$. Tampoco la cuerda $\overline{C_2D}$ por estar a igual distancia.

Figura 113. Enunciado 5c. Equipo B

Luego halla las distancias de los segmentos $\overline{LV_1}$ y $\overline{QV_2}$ para mostrar que las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{C_2B}$ se hallan a igual distancia de los extremos y que por lo tanto tampoco se cumplirá que la cuerda $\overline{C_2B}$ pasa por el foco correspondiente.

Ambos equipos muestran esquemas de acción instrumentada colectiva porque agrupan de manera colectiva distintos esquemas de utilización de los integrantes del equipo.

En el ítem d)

Análisis a priori

Penamos que es necesaria la orientación del profesor en el uso de la herramienta "Compás". A pesar que esta herramienta fue presentada en el primer encuentro de Exploración del Geogebra, los alumnos tienen ciertas dificultades para manipularla, creemos que aún no la conciben como una herramienta que traslada distancias. Pensamos que se encuentra aún en la fase de Selección y Descubrimiento. Este impedimento del uso de la herramienta "Compás", según Rabardel (1995), es una restricción de estructuración de la acción.

La representación gráfica corresponde a la figura 114.

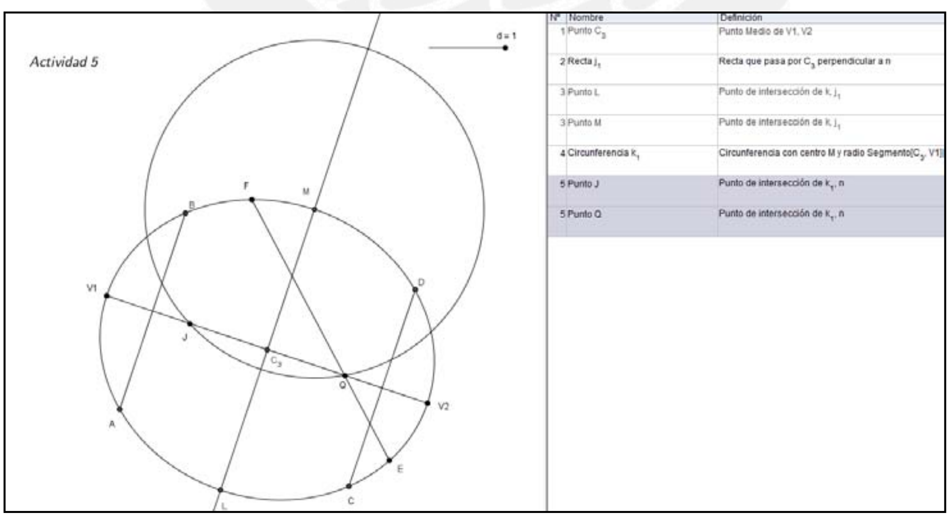


Figura 114. Desarrollo Actividad 5d

Luego de hacer uso de la herramienta "Compás", trazaran una circunferencia con centro en uno de los extremos del eje menor y radio la longitud del semieje mayor. Dicha circunferencia interceptará al eje focal de la elipse, en los puntos J y Q e indicarán que dichos puntos hallados corresponden a los focos de la elipse.

Para justificar la afirmación anterior, los alumnos de ambos equipos movilizarán la condición geométrica de la elipse que indica que la suma de las distancias desde un punto de la elipse es la longitud del eje mayor. Uno de los extremos del eje menor corresponde a uno de los puntos de la elipse. Pensamos que al ubicar los focos, los alumnos podrán trazar sin dificultades los segmentos que corresponden a los lados rectos de la elipse como se muestra en el siguiente ítem.

Posibles esquemas de utilización.

- La noción de circunferencia, la condición geométrica de la elipse.
- Usa las herramientas : "Compás", "Intersección de objetos"

Parte predictiva de las acciones.

Harán uso de la herramienta "Compás": con centro en uno de los extremos del eje menor y radio de longitud igual al semieje mayor, trazan una circunferencia, luego usan la herramienta "Intersección de dos objetos" e intersectan la circunferencia con el eje mayor, hallan los focos de la elipse y validan su resultado haciendo uso de la condición geométrica de la elipse.

Análisis a posteriori.

Como habíamos previsto, los alumnos de ambos equipos requieren orientación para trazar la circunferencia con la herramienta "Compás". Como se indicó en la parte predictiva la herramienta "Compás" tiene restricción de estructuración de la acción porque los alumnos no la perciben como una herramienta para trasladar distancias. Según Troche (2004) esta herramienta se halla en la fase de descubrimiento.

Luego de la orientación respectiva, ambos equipos hacen uso de la herramienta “Compás” para determinar los focos de la elipse. El equipo A inicia la instrumentación de la propiedad que indica que las distancias del extremo del eje menor a los focos es la longitud del semieje mayor, haciendo uso de la herramienta distancia del Geogebra. Mientras que el equipo B verifica que está instrumentado en dicha propiedad pues hay indicios que moviliza la propiedad de la mediatriz del segmento que une los focos y que movilizó en los ítems anteriores.

Se indica la descripción de las acciones del equipo A: con centro en uno de los extremos del eje menor y radio de longitud igual al semieje mayor, trazaron una circunferencia, luego usaron la herramienta “Intersección de dos objetos” e intersectaron la circunferencia con el eje mayor y hallaron los focos de la elipse, como se muestra en la figura 115

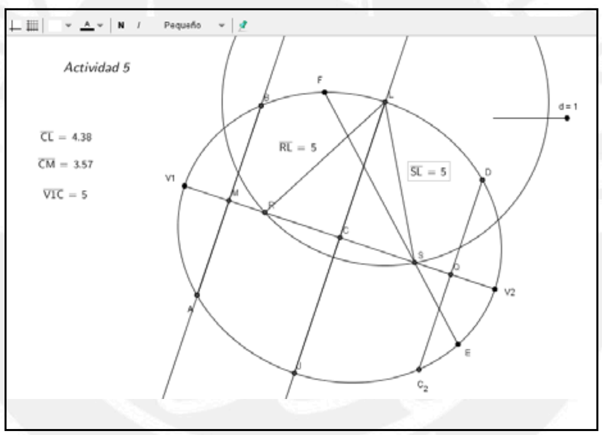


Figura 115. Gráfico 5d. Equipo A

El equipo A hace uso además del menú contextual y selecciona la herramienta “Posición absoluta en pantalla” en los textos correspondientes para trasladar las distancias al lado izquierdo de la vista gráfica.

Se muestra en la figura 116, que los alumnos sociabilizan para movilizar un esquema de acción colectiva que les permita indicar el motivo por lo que R y S son focos de la elipse.

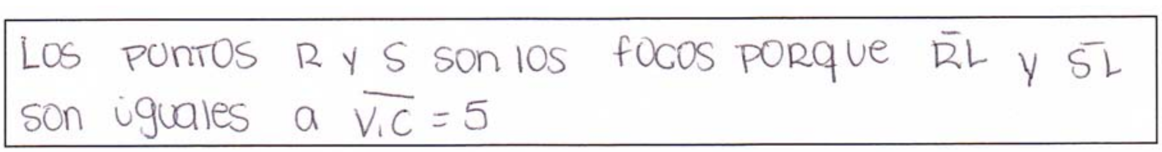


Figura 116. Enunciado 5d. Equipo A

Hay indicios para pensar que el equipo movilizó sus esquemas de circunferencia, triángulo isósceles, condición geométrica de la elipse, eje mayor, cuyo trabajo colectivo contribuyó a la emergencia de los esquemas de acción colectiva instrumentada.

Equipo *B*

Como se muestra en la figura 117, el equipo *B* halla los focos de la elipse usando la herramienta “Compás”, cuya descripción es similar a las acciones que elaboraron los alumnos del equipo A y que fueron señaladas en los párrafos anteriores.

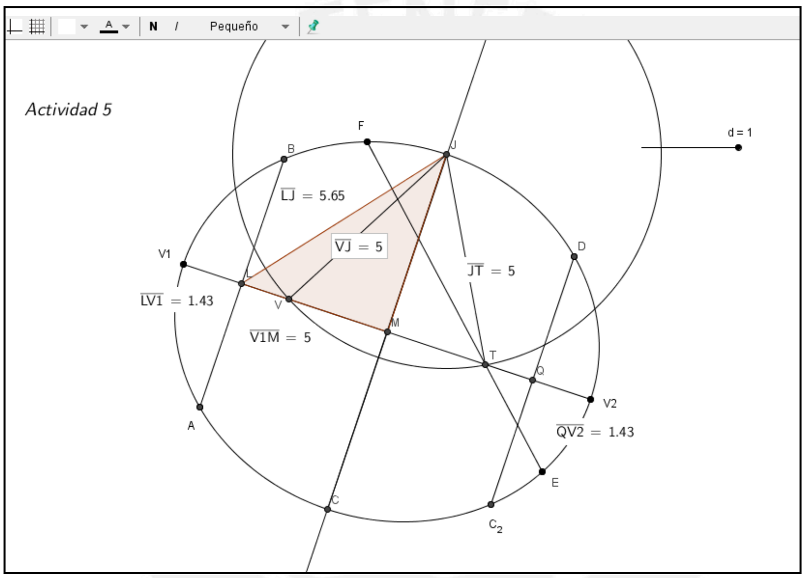


Figura 117. Gráfico 5d. Equipo B

El equipo *B* moviliza la propiedad que construyó en el ítem anterior. Indica que la distancia de uno de los extremos del eje menor a uno de los focos de la elipse corresponde a la longitud del semieje mayor. Se evidencia que dicha construcción es el resultado de una serie de procedimientos que los alumnos elaboraron de manera colectiva.

La distancia del foco al extremo del eje menor (5) es igual a la del centro a los vértices (5), por eso los puntos hallados V y T son los focos.

Figura 118. Enunciado 5d. Equipo B

En la figura 118, el equipo B, muestra que tiene instrumentada dicha propiedad porque puede expresarla mediante un discurso escrito, el cual es ejemplificado luego que los alumnos movilizaron sus esquemas de utilización para dar paso a dicho esquema de acción colectiva.

En el ítem e)

Análisis a priori

Trazarán correctamente los lados rectos de la elipse. En la actividad, también se solicita que los equipos oculten algunos de los objetos con la intención de hacer uso de esta herramienta. Esto último, podría propiciar en los alumnos limitaciones de modalidades de existencia por el manejo del mouse.

Creemos que las herramientas del Geogebra con las cuales se trazan rectas, segmentos, o puntos de intersección, continúan instrumentadas porque los alumnos pueden usarlas en las actividades, porque hay un conjunto de acciones que se repiten constantemente.

Creemos que hay indicios para indicar que la noción de lado recto se halla en proceso de instrumentación.

Posibles esquemas de utilización.

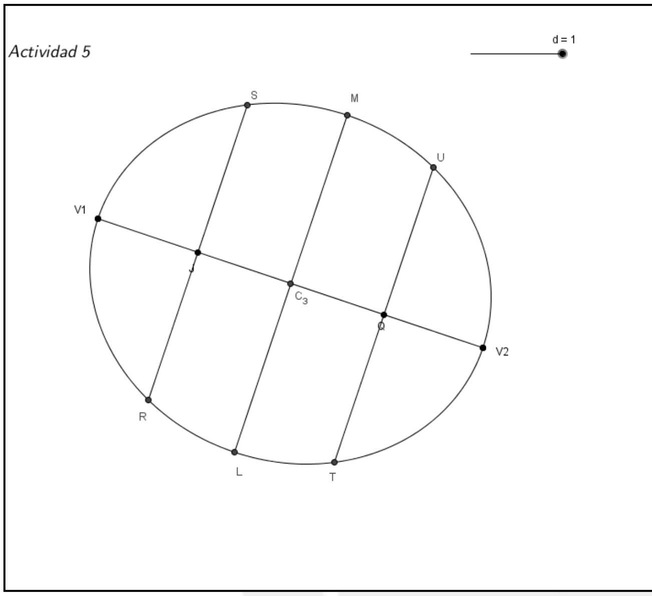
- La noción de recta, segmento, puntos de intersección, eje mayor, eje menor, localización de los focos de la elipse.
- Usa las herramientas : “Recta perpendicular”, “Recta paralela”, herramienta “Intersección”, herramienta “Segmento”, herramienta “Ocultar”

Parte predictiva de las acciones.

Señalan la “Recta perpendicular” haciendo clic sobre el eje focal y sobre uno de los focos de la elipse: obtienen una perpendicular que pasa por el foco, luego con la herramienta “Intersección” hallan los extremos del lado recto haciendo clic en la curva y en la recta perpendicular trazada.

Con la herramienta "Segmento" unen los puntos de intersección, y finalmente con la herramienta "Ocultar" se seleccionan todos los trazos que no se quieran visualizar.

En la figura 119, se muestra el trazo correspondiente a los lados rectos de una elipse y sus respectivos ejes mayor y menor, los demás elementos fueron ocultados



N°	Nombre	Definición
1	Punto C_3	Punto Medio de V1, V2
2	Recta j_1	Recta que pasa por C_3 perpendicular a n
3	Punto L	Punto de intersección de k, j_1
3	Punto M	Punto de intersección de k, j_1
4	Circunferencia k_1	Circunferencia con centro M y radio Segmento[C_3, V1]
5	Punto J	Punto de intersección de k_1, n
5	Punto Q	Punto de intersección de k_1, n
6	Recta r_1	Recta que pasa por Q perpendicular a n
7	Recta s_1	Recta que pasa por J perpendicular a n
8	Punto R	Punto de intersección de k, s_1
8	Punto S	Punto de intersección de k, s_1
9	Punto T	Punto de intersección de k, r_1
9	Punto U	Punto de intersección de k, r_1
10	Segmento a_2	Segmento [R, S]
11	Segmento d_2	Segmento [T, U]
12	Segmento e_2	Segmento [L, M]

Figura 119. Desarrollo Actividad 5e

Análisis a posteriori.

Como habíamos previsto, los segmentos que corresponden a los lados rectos de la elipse son trazados sin ninguna dificultad. Sin embargo, los equipos mostraron dificultades al momento de ocultar algunos objetos, ya que no logran seleccionar correctamente los objetos a ocultar. Esta acción es una restricción de modalidad de existencia, porque tienen dificultades en la manipulación de un material periférico como el mouse.

Luego de ocultar algunos de los objetos, los equipos muestran la representación de la elipse y de sus lados rectos como se observa en las siguientes figuras.

En las figuras 120 y 121 se muestra el trazo de los lados rectos que corresponden a las elipses representadas. Ambos equipos señalan la herramienta "Recta perpendicular", seleccionan el eje focal y uno de los focos de la elipse, entonces aparece la recta perpendicular. Luego con la herramienta "Intersección" se hallan los extremos del lado recto haciendo clic en la curva y en la recta perpendicular trazada. Con la herramienta "Segmento" se unen los puntos de intersección, finalmente con la herramienta "Mostrar objetos" se seleccionan todos los trazos que no se quieran visualizar.

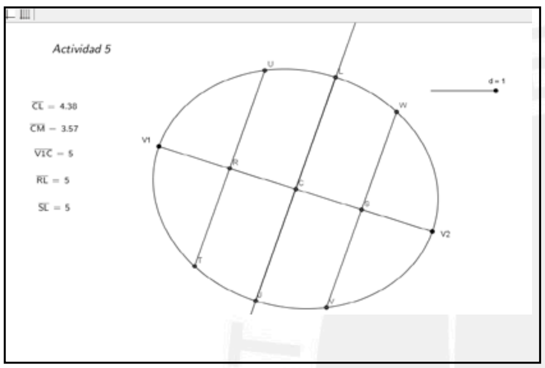


Figura 120. Gráfico 5e. Equipo A

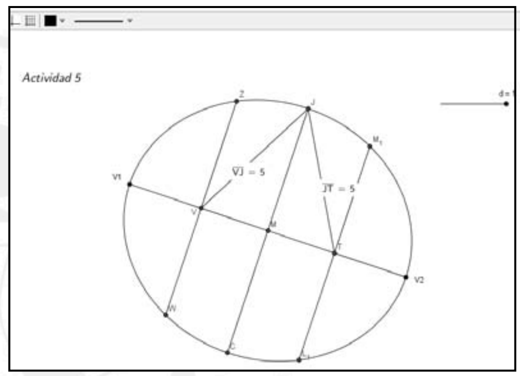


Figura 121. Gráfico 5e. Equipo B

De acuerdo a los esquemas de utilización, ambos equipos movilizan la recta, segmento, puntos de intersección, eje mayor, eje menor, localización de los focos de la elipse para elaborar el trazo que corresponde a los lados rectos de la elipse. Observamos que en esta actividad, los alumnos ubicaron los focos de la elipse, movilizando la condición geométrica de la elipse, es decir trazando una circunferencia con centro en uno de los extremos y radio el semieje mayor de la elipse. El equipo B aplica la propiedad que construyó y que enriqueció la instrumentalización de la elipse. Dicha propiedad indica que la distancia desde uno de los extremos del eje menor de la elipse a uno de los focos es el semieje mayor.

Durante este proceso de instrumentalización, hay indicios que el artefacto elipse, ha sido instrumentalizado con la condición geométrica de la elipse, con el trazo de los ejes de la elipse, excentricidad, ubicación de focos, relación entre los parámetros, trazo del lado recto de la elipse, etc.

En el ítem f)

Análisis a priori

Creemos que los alumnos tendrán dificultades para comprobar que la longitud del lado recto de la elipse en términos de los parámetros a y b. Probablemente la movilización de otros esquemas en este proceso de instrumentalización, como la construcción de la relación pitagórica en términos de los parámetros a, b y de alguna variable, pueda ser un impedimento para el desarrollo de esta actividad, es decir la dificultad para representar simbólicamente algunas longitudes de los triángulos.

Esperamos que los alumnos observen que el triángulo trazado es un triángulo rectángulo, ya que los catetos del triángulo que se construyó, están contenidos sobre el eje focal y el lado recto de la elipse. Probablemente requieran alguna orientación respecto a las magnitudes que le corresponde a cada lado del triángulo en términos de los parámetros o del lado recto de la elipse.

Posibles esquemas de utilización.

- La condición geométrica de la elipse, la relación entre los parámetros, el lado recto de la elipse, la relación Pitagórica, resolución ecuaciones y la representación gráfica del triángulo rectángulo

Parte predictiva de las acciones.

Se traza el triángulo rectángulo de acuerdo a las características del enunciado, es decir considerando a los vértices del triángulo como los focos de la elipse y un extremo de su lado recto. Creemos que los alumnos serán orientados a través de preguntas que les permita relacionar los lados del triángulo con la longitud solicitada y con los parámetros de la elipse.

Esperamos que los alumnos movilicen la condición geométrica de la elipse que en este caso indica que la suma de las distancias de dicho cateto y la hipotenusa es el parámetro $2a$. Pensamos que tendrán dificultad para indicar que la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo trazado es $2a - y$. Luego señalarán que la distancia entre los focos del triángulo corresponde al parámetro $2c$ y movilizarán la noción del teorema de Pitágoras que indica que la suma de los cuadrados de los catetos es la longitud de la hipotenusa. Posteriormente encontrarán la longitud del lado recto de la elipse en términos de los parámetros de la elipse.

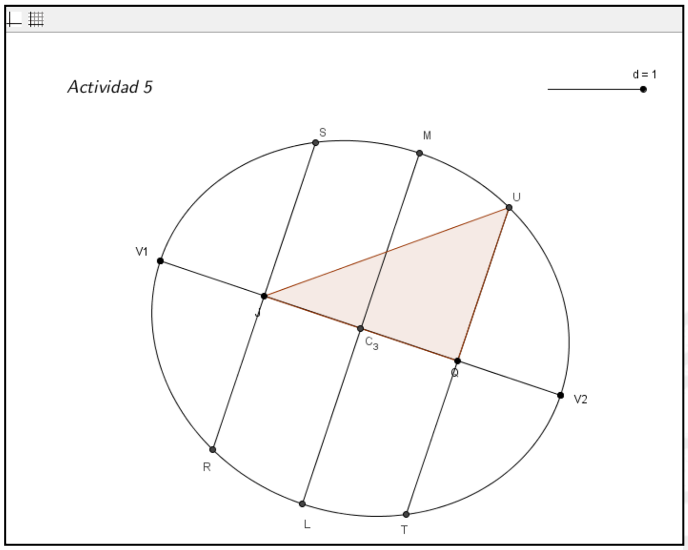


Figura 122. Desarrollo Actividad 5f

En la figura 122 se hace uso del Teorema de Pitágoras en el triángulo JUQ

Considerando que $\left|\overline{JU}\right| + \left|\overline{UQ}\right| = 2a$ (por la condición geométrica de la elipse)

Si $\left|\overline{UQ}\right| = y$ entonces en la ecuación anterior, se obtiene que $\left|\overline{JU}\right| = 2a - y$

Luego $4c^2 + y^2 = 4a^2 - 4ay + y^2$

Simplificando $y = \dfrac{a^2 - c^2}{a}$.

Considerando que $a^2 - c^2 = b^2 \rightarrow \mathrm{y} = \dfrac{b^2}{a}$ Luego la longitud del lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$

Creemos que los alumnos tendrán dificultad para representar simbólicamente la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo como $2a-y$, siendo $y=\dfrac{|LR|}{2}$. Es importante, alguna orientación con preguntas relacionadas al uso de alguna variable que represente al lado recto, porque es posible que tengan dificultades para hacerlo.

Análisis a posteriori.

Como esperábamos, se requirió de una orientación adicional por parte del profesor para que los alumnos puedan hallar la longitud del lado recto en términos de los parámetros de la elipse. Se requirieron de otros esquemas como señalamos en el análisis a priori, como la relación pitagórica, la resolución algebraica y representación simbólica de algunas longitudes de los triángulos.

Inicialmente, ambos equipos no tuvieron problemas para trazar en el interior de la elipse un triángulo rectángulo con vértices los focos y un extremo del lado recto, como se señala en el enunciado. Para ello hicieron uso de la herramienta "Polígono" del Geogebra debido a que están instrumentados con dicha herramienta.

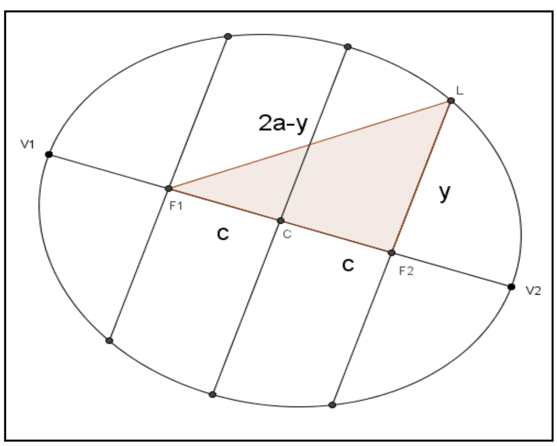


Figura 123 Gráfico Complementario

La figura 123, muestra la representación gráfica del triángulo rectángulo, en la que dos de los vértices coinciden con los focos y el tercer vértice con un extremo del lado recto.

Se les formuló preguntas para que relacionen uno de los catetos del triángulo como la mitad de la longitud de uno de los lados rectos, es decir $y = \frac{|LR|}{2}$. El equipo A movilizó la relación pitagórica y la condición geométrica de la elipse, pero desiste en el proceso de resolución algebraica. Posteriormente decidieron pasar a la siguiente actividad.

El equipo B, en cambio, señaló las longitudes de los catetos del triángulo como la distancia entre los focos (2c), y como la mitad de la longitud del lado recto $y = \frac{|LR|}{2}$. Luego movilizó la condición geométrica de la elipse y determinó a la hipotenusa como la expresión $2a - y$. Luego, formó la relación pitagórica, resolvió la ecuación algebraica y determinó la medida del lado recto de la elipse en términos de los semiejes a y b.

En la figura 124, se observa la solución de la actividad.

$$(2a-y)^2 = y^2 + (2c)^2$$
$$4a^2 - 4ay + y^2 = y^2 + 4c^2$$
$$a^2 - ay = c^2$$
$$\frac{a^2 - c^2}{a} = y$$
$$\frac{b^2}{a} = y$$
$$\text{Lado recto} = \frac{2b^2}{a}$$

Figura 124. Enunciado 5f. Equipo B

Los alumnos del equipo B movilizaron sus esquemas de utilización para resolver la tarea, dichos esquemas fueron coordinados y adaptados a la situación del ejercicio propuesto como esquemas de acción colectiva instrumentada. Destacamos que según el Enfoque Instrumental, podría darse también el caso también que puedan movilizar un mismo esquema o una misma clase de instrumento para esta situación. Creemos que el planteamiento del equipo B, es otro intento por mostrar que no se requiere de un sistema referencial para determinar la longitud del lado recto. Esto mostraría que el lado recto es totalmente independiente de cualquier sistema de referencia, es decir que la elipse puede ser trasladada o rotada y la característica de este elemento seguirá invariante.

Análisis de la actividad 6

En el cuadro 14 presentamos la actividad 6, la cual consta de tres ítems. A continuación elaboramos el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada una de las partes correspondientes

Cuadro 14. Actividad 6

ACTIVIDAD 6

Abra el archivo Actividad_6.ggb. Se muestra el eje mayor $\overline{V_1 V_2}$ de longitud $2a$ y el eje menor $\overline{MN}$ de longitud $2b$ de una elipse.

a) Determine los focos de la elipse usando construcciones geométricas y renombre los puntos como F_1 y F_2 . Luego describa su procedimiento y oculte los trazos que usó en la construcción geométrica

b) Con los dos focos F_1, F_2 y un punto de la elipse, trace la curva haciendo uso de la herramienta "Elipse" que aparece en la Ventana de Herramienteas. Luego elija Vista Algebraica y haga visible los ejes coordenados. Escriba las coordenadas de los vértices, focos y extremos del eje menor

V_1 (;)	V_2 (;)
F_1 (;)	F_2 (;)
M (;)	N (;)

Halle la longitud del eje mayor $(2a)$, del eje menor $(2b)$, la distancia entre los focos o distancia focal $(2c)$ y la longitud del lado recto

c) Halle una expresión algebraica que describa a todos los puntos $P\,(\mathrm{x};\mathrm{y})$ de la elipse que cumplen la condición geométrica : $\left|\overline{PF_1}\right| + \left|\overline{PF_2}\right| = 2a$. Use la distancia entre dos puntos

$$\sqrt{\qquad\qquad\qquad} + \sqrt{\qquad\qquad\qquad} =$$

Escriba en la parte inferior, dos expresiones algebraicas equivalentes a la expresión anterior. Para ello haga clic en la representación gráfica de la curva y escriba una de las expresiones que aparece sombreada en la Vista Algebraica. En el Menú Contextual de dicha expresión, aparece la otra equivalente.

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_6.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente pregunta

Análisis a priori de la actividad 6

En la actividad 6, esperamos haber logrado una *relación entre la condición geométrica de la elipse y la condición algebraica en el sistema de coordenadas cartesiano*, es decir la *representación analítica de la representación gráfica, tal forma que se tienda un puente entre el enfoque sintético y el analítico*. Esta propuesta integradora contribuye al fomento de otros saberes geométricos, como las construcciones geométricas, sin descuidar el enfoque algebraico tradicional en el sistema enseñanza y aprendizaje. Para ello movilizarán nuevamente como esquema de uso: la condición geométrica de la elipse y la expresión que corresponde a la distancia entre dos puntos, con el objetivo de escribir una expresión algebraica que vincule dicha representación a un sistema de coordenadas cartesiano

En la figura 125 mostramos la representación gráfica de la pregunta 6 ggb. La actividad se inicia haciendo uso de su instrumento condición geométrica de la elipse para determinar los focos de dicha representación, ya que desde el extremo de uno de los extremos del eje menor se puede trazar una circunferencia de radio igual a la longitud del semieje mayor, haciendo uso de la herramienta "Compás".

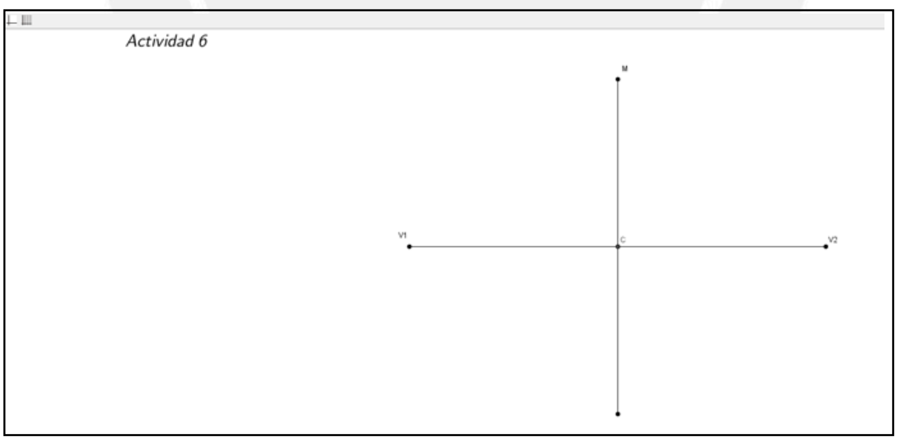


Figura 125. Actividad 6

Para ello, esperamos que los alumnos movilicen como esquemas de uso, la condición geométrica de la elipse o la herramienta "Compás" y determinen los focos de dicha curva. Luego, instrumentalizarán la herramienta "Elipse" que aparece en la Ventana de

Herramientas del Geogebra, ya que leerán el mensaje contextual que aparece en la herramienta "Elipse" y graficarán la curva, seleccionarán uno de los puntos de la elipse y los focos que fueron determinados. Es decir creemos que construyen y movilizan dicha herramienta como esquema de acción instrumentada.

Posteriormente, eligirán la Vista Algebraica y harán visible los ejes coordenados, y escribirán las coordenadas que corresponden a los vértices, focos, extremos del eje menor y la expresión algebraica de la elipse en un sistema de coordenadas cartesiano. Luego trazarán sus lados rectos y hallarán su longitud, haciendo uso de la herramienta "Distancia" del Geogebra.

Finalmente, mostramos que no es necesaria una ruptura entre el enfoque sintético y analítico, que por el contrario esta conectividad entre ambos criterios fomenta las construcciones geométricas en el sistema enseñanza y aprendizaje.

Análisis a posteriori de la actividad 6

Creemos que se estableció un puente entre el enfoque sintético y analítico. A partir de la condición geométrica de la elipse, que indica que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, resulta el eje mayor, y la distancia entre dos puntos del plano se logró establecer la *relación entre la condición geométrica de la elipse y la condición algebraica en el sistema de coordenadas cartesiano*, es decir la *representación analítica de la representación gráfica, tal forma que se tienda un puente entre el enfoque sintético y el analítico*

Afirmamos que los alumnos están instrumentados con la condición geométrica de la elipse o con la herramienta "Circunferencia dado su centro y radio" o la herramienta "Compás" porque lograron encontrar los focos de la elipse. Para determinar los focos de dicha curva, el equipo *A* movilizó la herramienta "Circunferencia dado su centro y radio". El centro de la circunferencia fue uno de los extremos del eje menor y su radio la semilongitud del eje mayor. El uso de la herramienta "Circunferencia dado su centro y radio" no fue prevista en el análisis *a priori* pero su aplicación es similar a la herramienta "Compás" y según

Trouche (2004), está en la fase de personalización pues los alumnos la encajan de acuerdo a sus necesidades. De manera correlativa, el equipo B movilizó la herramienta “Compás” y determinó los focos de acuerdo a lo pronosticado. Los alumnos representaron la elipse señalando los dos focos determinados por la herramienta “Compás” y un punto de paso.

Luego eligieron Vista Algebraica y visualizaron los ejes coordenados, determinando las coordenadas de los vértices, focos, extremos del eje menor, longitud de los parámetros y expresiones algebraicas en un sistema de coordenadas cartesiano, con el propósito de establecer un puente entre el enfoque sintético y analítico.

Para determinar la expresión algebraica movilizaron nuevamente el esquema de uso relativo a la condición geométrica y a la distancia entre dos puntos, luego determinaron la expresión algebraica correspondiente.

En la foto 126 se muestra el trazo de los focos de la elipse a través del uso de la herramienta “Compás”.

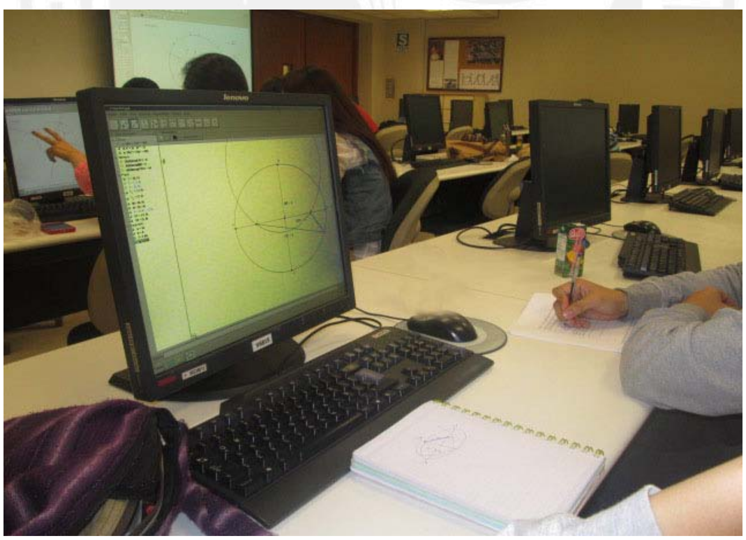


Figura 126. Construcción de los focos

Para calcular la longitud del lado recto de la elipse, en términos de los parámetros, el equipo B movilizó la relación $\frac{2b^2}{a}$ haciendo uso de la longitud de dichos parámetros.

Todo esto nos indica que los alumnos continúan instrumentados respecto a la noción de lado recto de la elipse porque pueden trazar la cuerda que los representa y además expresar la longitud del lado recto como la relación entre los parámetros de la elipse, es decir $\frac{2b^2}{a}$, donde los parámetros $a, b,$ indican las distancias desde el centro de la elipse a uno de los extremos del eje mayor y del eje menor respectivamente.

En el ítem a)

Análisis a priori

Esperamos que los alumnos movilicen como esquema de uso, la condición geométrica de la elipse o la herramienta “Compás” para determinar los focos de dicha curva, debido a que ambas nociones fueron instrumentadas en las actividades anteriores.

En la actividad anterior los alumnos se instrumentalizaron con dicha herramienta. En esta actividad, los alumnos la movilizaron como esquema de acción instrumentada, ya que lograron ubicar los focos de elipse.

Posibles esquemas de utilización

- La condición geométrica de la elipse
- La herramienta Compás

Parte predictiva de las acciones.

Los alumnos determinan los focos de la elipse haciendo uso de la herramienta “Compás”. Creemos que el proceso de construcción es similar al que elaboraron en la actividad anterior, es decir trazan una circunferencia con centro en uno de los extremos del eje menor de la elipse y toman por radio el semieje mayor de la elipse.

De esta manera, hay indicios para suponer que los alumnos podrían estar instrumentados con dicha herramienta, ya que encuentran los focos de la elipse mediante las construcciones respectivas.

La figura 127 representa los trazos que creemos los alumnos elaborarán para hallar los focos de la elipse.

Trazan la circunferencia con centro en uno de los extremos del eje menor y radio igual a la longitud del semieje mayor. La intersección de esta circunferencia con el eje focal determinará los focos F_1 y F_2.

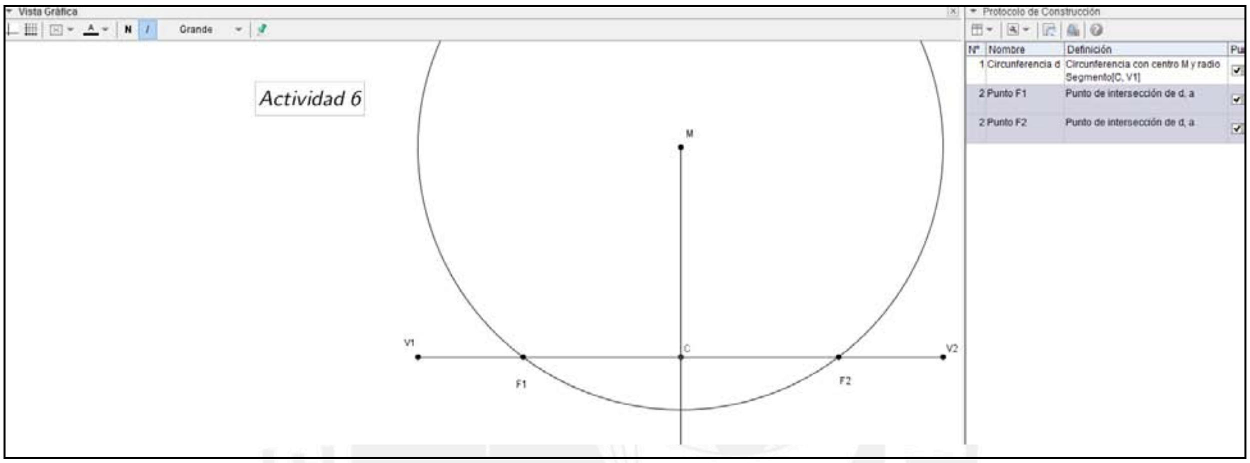


Figura 127. Desarrollo Actividad 6 a

Pensamos que los alumnos se encuentran instrumentados respecto a la herramienta “Compas” porque lograron determinar los focos de la elipse.

Análisis a posteriori

Los equipos lograron hallar los focos de la elipse como se tenía previsto.

El equipo A hizo uso de la herramienta “Circunferencia dado su centro y radio” para determinar los focos. El uso de dicha herramienta no se tenía previsto, según el análisis *a priori*. Sin embargo dicha herramienta, según Trouche (2004) está en la fase de personalización pues el alumno la encaja dentro de sus necesidades.

Además el uso de esta herramienta, involucra movilizar el esquema de la condición geométrica de la elipse y la noción de mediatriz de un segmento.

Se muestra el trazo del equipo A en la figura 128.

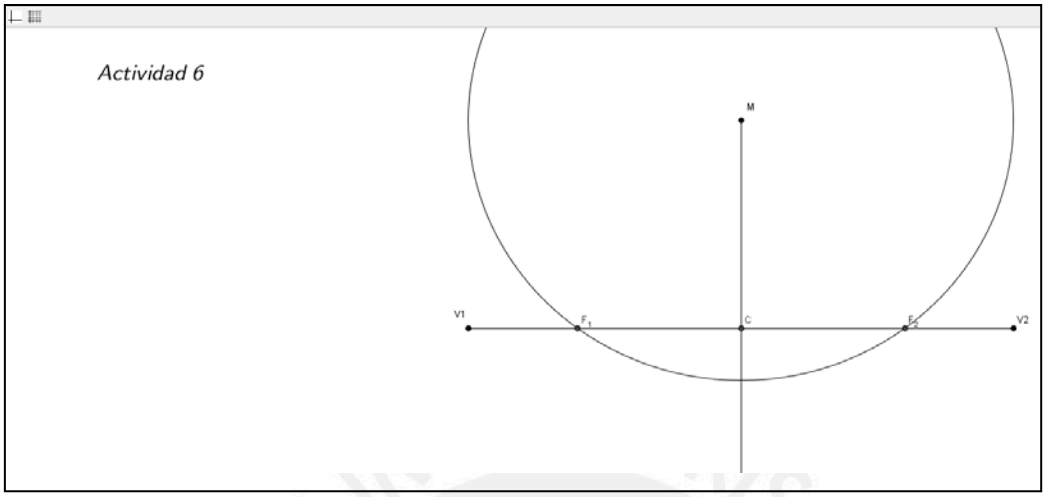


Figura 128 Gráfico 6a. Equipos A y B

Los alumnos del equipo A, muestran que están instrumentados con la condición geométrica de la elipse y con la mediatriz de un segmento, cuando hacen uso de la herramienta “Circunferencia dado su centro y radio”, ya que el radio equivale a la longitud del semieje mayor y el extremo superior de la elipse es el centro de la circunferencia que equidista de los focos. Se podría indicar que implícitamente el equipo A está instrumentalizando a la elipse porque la enriquece con la propiedad que indica que la distancia de uno de los extremos de la elipse a uno de los focos es la longitud del semieje mayor.

La figura 129, muestra que los alumnos movilizan esquemas de utilización, que generalizan esquemas de actividad colectiva instrumentada.

Se halla la distancia $V_1V_2 = 10$, es decir $2a = 10 \rightarrow a = 5$. Se toma el punto como centro de la circunferencia con radio 5 y cuando intersecta a $\overline{V_1V_2}$ se halla F_1 y F_2

Figura 129 Enunciado 6a. Equipo A

Según la expresión escrita que señala en la figura 130, el equipo B usa la herramienta "Compás", de acuerdo al análisis *a priori* y determina los focos de la elipse.

Se construye una circunsferencia de radio $\overline{CV_1}$ y se ubica su centro en M, luego se intersecta con V_1V_2 y se determinan los focos F_1 y F_2.

Figura 130. Enunciado 6a. Equipo B

De acuerdo a lo expresado, el equipo B se halla instrumentado con la herramienta "Compás" ya que logra movilizar sus propiedades para determinar los focos. Además movilizan esquemas de utilización, que generalizan esquemas de actividad colectiva instrumentada.

En el ítem b)

Luego que elijan la Vista Algebraica y hagan visible los ejes coordenados, escribirán las coordenadas que corresponden a los vértices, focos, extremos del eje menor. Trazarán sus lados rectos, hallarán su longitud así como la de los parámetros haciendo uso de la herramienta "Distancia" del Geogebra.

Análisis a priori.

Creemos que instrumentalizarán la representación gráfica de la elipse, ya que dicha herramienta contiene un mensaje contextual en la que se indica los requerimientos para el trazado. Luego harán uso de este instrumento para graficar la curva elíptica. Luego elegirán la Vista Algebraica y visualizaron los ejes coordenados, determinando las coordenadas de los vértices, focos, extremos del eje menor, longitud de los parámetros Nuestro interés radica en mostrar la complementariedad y la integración entre el enfoque sintético y el analítico, que además de contribuir al fomento de las construcciones geométricas no deja de lado el enfoque algebraico tradicional del sistema enseñanza y aprendizaje. Esta situación está respaldada por el trabajo de Fernández (2011) mencionado en el capítulo I de la Problemática.

En una de sus conclusiones afirma que las construcciones geométricas puntuales permiten emerger construcciones geométricas globales, y que haciendo uso de un sistema de ejes coordenados se consigue la representación algebraica de la curva, revelando así la posibilidad de la integración sintética y analítica.

Posibles esquemas de utilización

- La noción de eje mayor, eje menor y la noción de distancia focal, lado recto.
- Usa las herramientas “Elipse”, “Recta perpendicular” “ Intersección de dos objetos”, “Distancia”

Parte predictiva de las acciones:

Instrumentalizaron la herramienta “Elipse” y seleccionaron sus dos focos y un punto de la elipse. Con la herramienta “Recta perpendicular” trazan la recta perpendicular al eje focal por uno de los focos. Determinan los extremos del lado recto al intersectar la elipse y la recta perpendicular, con la herramienta “Distancia” seleccionan los extremos de los vértices, de los focos, extremos del eje menor y extremos del lado recto de la elipse como se muestra en la figura 131.

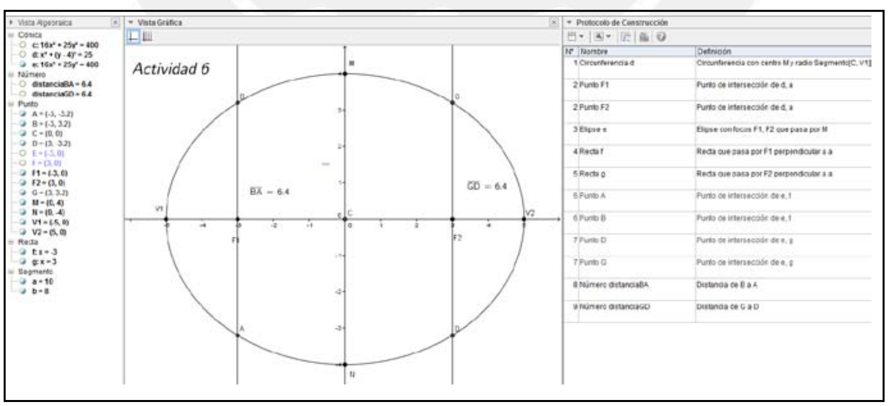


Figura 131. Desarrollo Actividad 6 b

Se ayuda de la vista algebraica y escribe:

V_1 (-5;0) , V_2 (+5;0) F_1 (-3;0) , F_2 (+3;0) F_1 (0;4) , F_2 (0;-4)

Esperamos se ayuden de la vista gráfica que ha incorporado los ejes coordenados y hallen las longitudes solicitadas:

Longitud del eje mayor $2a = 10$.

Longitud del eje menor $2b = 8$

La distancia entre los focos o la distancia focal $2c = 6$

Creemos que para hallar la longitud del lado recto, trazarán la cuerda que lo representa y con la herramienta "Distancia" encontrarán que la longitud es 6.4.

Análisis a posteriori.

Esta actividad tuvo por objetivo vincular el aspecto sintético y el analítico de la elipse. Creemos que el fomento de las construcciones geométricas y la determinación de puntos clave en la elipse como los focos, permitieron el trazo global de dicha curva. El uso de un AGD, específicamente el Geogebra, cumple un rol importante como agente mediador y contribuye solidariamente a la representación de esta gráfica en el sistema de coordenadas cartesiano.

El equipo A dibuja la elipse con la herramienta "Elipse", para ello usa los dos focos de la curva y un punto perteneciente a dicha curva. . Luego con la herramienta "Recta perpendicular" selecciona el eje focal y uno de los focos, entonces obtiene la recta que contiene a un lado recto. Con la herramienta "Intersección" halla los extremos del lado recto. Además hace visible las coordenadas de algunos puntos del gráfico, usando el Menú Contextual, y eligiendo dentro de la opción "Propiedades del objeto", la casilla "Nombre y valor". Con esta información, los alumnos visualizan las coordenadas de los puntos que muestran en la Vista Gráfica. Luego elija Vista Algebraica y haga visible los ejes coordenados y escribe las coordenadas de los vértices, focos y extremos del eje menor, así como la longitud de los parámetros correspondientes al eje mayor $(2a)$, eje menor $(2b)$, y a la distancia entre los focos o distancia focal $(2c)$ y la longitud del lado recto. En la figura 132, se muestran los trazos elaborados por el equipo A.

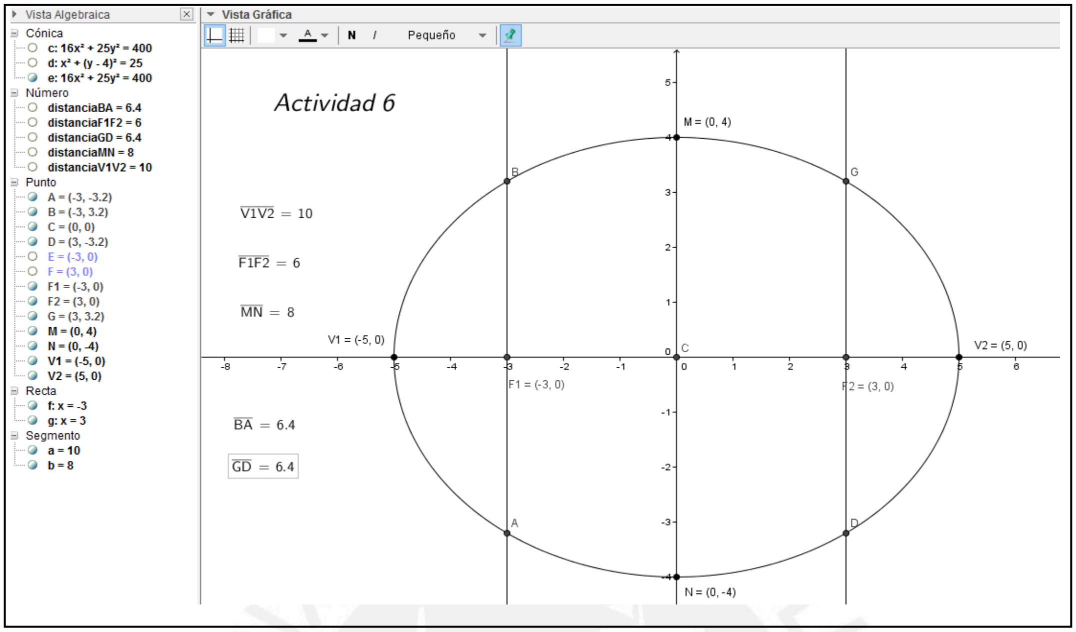


Figura 132. Gráfico 6b. Equipo A

En la figura 133 se observa las coordenadas de los vértices, focos y extremos del eje menor con los rótulos y valores respectivos, los cuales son trasladados hacia el lado izquierdo de su vista gráfica para otorgarle mayor claridad a sus resultados.

V_1 (-5 ; 0)	V_2 (5 ; 0)
F_1 (-3 ; 0)	F_2 (3 ; 0)
M (0 ; 4)	N (0 ; -4)

Figura 133. 1° Enunciado 6b. Equipo A

También observamos en la figura 134, que el equipo A se halla instrumentado con la noción de eje mayor, menor, distancia focal, longitud del lado recto, donde presentamos los resultados que obtuvieron, luego de hacer uso de la Vista Algebraica.

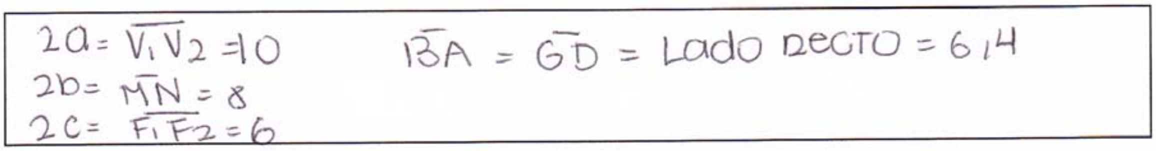


Figura 134. 2° Enunciado 6b. Equipo A

De esta forma, los alumnos continuaron avanzando en el proceso de instrumentalización de la elipse, ya que permanecieron enriqueciéndola con atributos. Continúan instrumentados con la noción de eje mayor, eje menor y distancia focal porque determinan sus longitudes. Están instrumentados con la noción de lado recto porque construyeron una cuerda perpendicular al eje focal que pasa por los focos y determinan su longitud.

El equipo B

En la figura 135, se muestran los trazos elaborados por el equipo B.

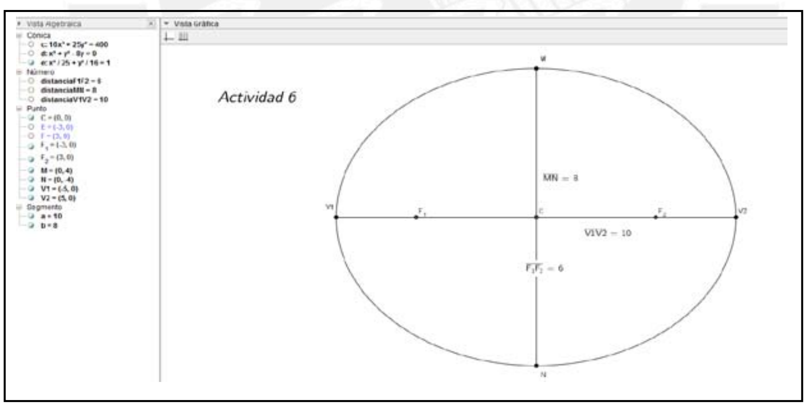


Figura 135. Gráfico 6b. Equipo B

Resaltamos que con respecto a la longitud del lado recto, el equipo B muestra que está instrumentado porque determinó la ubicación de los focos por donde trazará el lado recto y porque determinó su longitud, a diferencia del equipo A que se basó en la herramienta "Distancia".

Ya que el equipo B movilizó la relación entre los parámetros $\frac{2b^2}{a}$ para hallar la longitud del lado recto, nos conduce a suponer que los alumnos de cada equipo movilizaron sus propios esquemas e hicieron emerger su propio esquema de acción colectiva para el lado recto de la elipse.

El equipo B empleó la relación $\frac{2b^2}{a}$ para calcular la longitud del lado recto. Para ello determinó las coordenadas que corresponden a los vértices, focos y extremos del eje menor, como se muestra en la figura 136.

V_1 (-5 ; 0)	V_2 (5 ; 0)
F_1 (-3 ; 0)	F_2 (3 ;0)
M (0 ; 4)	N (0 ; -4)

Figura 136. 1° Enunciado 6b. Equipo B

A continuación, en la figura 137, los alumnos determinaron las longitudes de los ejes y la longitud de los parámetros de la elipse. Luego calculan la longitud del lado recto, usando la relación $\frac{2b^2}{a}$

Eje mayor 2a = 10	Distancia focal 2c = 6
Ejè menor 2b = 8	Lado recto = 6.4

Figura 137. 2° Enunciado 6b. Equipo B

Verificamos que en esta actividad, los alumnos están instrumentados en relación a algunas de las propiedades de la elipse. Los alumnos pueden movilizar como esquema de uso, la condición geométrica de la elipse y determinar los focos de dicha curva. Están instrumentados con la noción de lado recto porque pueden trazar una cuerda perpendicular al eje focal que pase por los focos. Se hallan instrumentados respecto a algunas técnicas para determinar los focos, como el uso de la herramienta “Compás” o “Circunferencia”. De igual forma con la noción de eje mayor, menor, distancia focal. Simultáneamente, la instrumentalización de la elipse no termina. Pensamos seguir potenciando este artefacto.

En el siguiente ítem, vincularon su representación gráfica a una expresión algebraica que obtuvieron porque movilizaron como esquema de uso la condición geométrica de la elipse.

En el ítem c)

Análisis a priori

Luego que elijan la Vista Algebraica y hagan visible los ejes coordenados, los alumnos movilizarán nuevamente la condición geométrica de la elipse, como esquema de uso para escribir una expresión algebraica que vincule dicha representación a un sistema de coordenadas cartesiano. Además creemos que será movilizada la expresión que corresponde a la distancia entre dos puntos del plano para determinar la expresión algebraica que describe a la elipse.

Posibles esquemas de utilización:

- Moviliza la noción de la distancia entre dos puntos pertenecientes a un sistema de ejes coordenados, la noción de la condición geométrica de la elipse y la noción de la vista gráfica y algebraica del Geogebra

Parte predictiva de las acciones

Los equipos hacen uso de la noción de distancia entre dos punto y la aplica a la condición geométrica de la elipse $\sqrt{(\mathrm{x}+3)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(\mathrm{x}-3)^2+(y-0)^2}=10$. Luego haciendo uso de la vista algebraica, obtendrán las ecuaciones $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ y $16x^2+25y^2=400$, expresiones que los alumnos probablemente aún no relacionen a los ejes mayor y menor de la elipse y que instrumentalizaremos en la próxima actividad.

Análisis a posteriori.

Para determinar la expresión algebraica movilizaron nuevamente el esquema de uso relativo a la condición geométrica y a la distancia entre dos puntos, luego escribieron la expresión algebraica correspondiente.

En el caso del equipo *A*, los alumnos movilizan la distancia entre dos puntos y la condición geométrica de a elipse. Es decir la distancia desde un punto $P(x;y)$ perteneciente a la elipse a los focos $F_1(-3;0)$ y $F_2(+3;0)$. También movilizamos la condición geométrica de la elipse que indica $|F_1P| + |F_2P| = 2a$, como se observa en la figura 138

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} = 10$$

Figura 138. 1° Enunciado 6c. Equipo A

La expresión simplificada que aparece en la figura 139, obedece a la representación en la Vista Algebraica, en la cual aparece sombreada cuando se selecciona la gráfica de la elipse.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{o} \quad 16x^2 + 25y^2 = 400$$

Figura 139. 2° Enunciado 6c. Equipo A

Una situación similar se presenta en el caso del equipo *B*.

En la figura 140, los alumnos movilizan la condición geométrica de la elipse que indica $|F_1P| + |F_2P| = 2a$ y además la distancia entre dos puntos.

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} = 10$$

Figura 140. 1° Enunciado 6c. Equipo B

La expresión $\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}=10$, mostrada en la figura anterior, fue obtenida, porque los alumnos estaban instrumentados con los esquemas distancia entre dos puntos del plano y condición geométrica de la elipse, es decir que la suma de las distancias del punto $P\,(x; y)$ a los focos es igual a la longitud del eje mayor.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad o \quad 16x^2 + 25y^2 = 400$$

Figura 141. 2° Enunciado 6c. Equipo B

En la figura 141, los alumnos encontraron la expresión algebraica, la cual describe la trayectoria de la elipse en un sistema de coordenadas cartesiano. Se seleccionó el botón secundario del mouse sobre la representación gráfica y se mostró en la Vista Algebraica la expresión simplificada algebraica. Las dos ecuaciones equivalentes se obtuvieron luego que los estudiantes movilizaran como esquemas de uso tanto la condición geométrica de la elipse como la distancia entre dos puntos y que haciendo uso del Geogebra permitiera visualizarlas de manera más simplificada. La elipse continúa siendo instrumentalizada por los alumnos, ya que una nueva propiedad le ha sido atribuida, se vinculó la condición geométrica de la elipse a su representación gráfica en el sistema coordenado. En la siguiente actividad instrumentalizaremos la expresión algebraica de la elipse, enriqueciéndola con una característica, es decir haciendo notar que existe una relación con los semiejes de la curva. Además, paralelamente, iniciaremos la instrumentación de esta expresión algebraica, movilizando dicha ecuación para distintos valores de los parámetros.

Análisis de la actividad 7

En el cuadro 15 presentamos la actividad 7, la cual consta de tres ítems. A continuación, elaboraremos el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada una de las partes correspondientes

Cuadro 15. Actividad 7

ACTIVIDAD 7

Abra el archivo actividad_7.ggb. Se muestra los deslizadores m y n. En la barra de entrada, ingrese la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$.

a) Luego de ingresar la expresión algebraica, arrastre los deslizadores hasta conseguir que las variables tomen los valores $n=m=10$. ¿Qué forma adopta la figura? Escriba su expresión algebraica

b) Si fija uno de los deslizadores en $n=10$ y el otro deslizador m se desplaza para valores distintos a 10

Cuando $m>n$ ¿Qué representan los valores de m y n para la elipse?

El eje focal que contiene eje mayor ¿coincide con uno de los ejes coordenados?

Determine la expresión algebraica de la elipse en los siguientes casos:

$n=10$	m = 12	$\frac{\quad}{(\quad)^2}+\frac{\quad}{(\quad)^2}=1$
$n=10$	m = 15	$\frac{\quad}{(\quad)^2}+\frac{\quad}{(\quad)^2}=1$
$n=10$	m = 20	$\frac{\quad}{(\quad)^2}+\frac{\quad}{(\quad)^2}=1$

Determine la expresión algebraica de la elipse con centro en el origen, eje focal el eje de abscisas, en términos del semieje mayor a y del semieje menor b

c) Si fija uno de los deslizadores en $n = 10$ y el otro deslizador m se desplaza para valores distintos a 10

Cuando $m < n$ ¿Qué representan los valores de m y n para la elipse?

El eje focal que contiene eje mayor ¿coincide con uno de los ejes coordenados?

Determine la expresión algebraica de la elipse con centro en el origen, eje focal el eje de ordenadas, cuando los deslizadores se hallan en los siguientes casos:

$n = 10$ m = 9 $\frac{}{(\quad)^2} + \frac{}{(\quad)^2} = 1$

$n = 10$ m = 7 $\frac{}{(\quad)^2} + \frac{}{(\quad)^2} = 1$

$n = 10$ m = 5 $\frac{}{(\quad)^2} + \frac{}{(\quad)^2} = 1$

Determine la expresión algebraica de la elipse con centro en el origen, eje focal el eje de ordenadas, en términos del semieje mayor a y del semieje menor b

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_7.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente pregunta

En la actividad anterior los alumnos vincularon la condición geométrica de la elipse y la condición algebraica en el sistema de coordenadas cartesiano, relacionando la representación gráfica de la elipse a la expresión algebraica movilizando para ello, la condición geométrica de la elipse y la distancia entre dos puntos como esquemas de usos.

Ahora continuamos instrumentalizando dicha expresión algebraica, de tal forma que en la ecuación $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ *relacionen las variables* m y n *a los semiejes de una elipse cuyo eje focal podría coincidir con el eje de abscisas o de ordenadas*. Para ello usaremos como mediadores de la actividad la herramienta "Deslizador", la Vista Algebraica y la Vista Gráfica del Geogebra.

Pensamos que podría haber alguna dificultad cuando los alumnos ingresen, los exponentes de la expresión algebraica $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$, ya que algunos símbolos que representan la función potencia no serán localizados, es decir se presentaría una restricción de acción del símbolo potencia, ligado a la estructura y al funcionamiento del programa, cuando usan la Barra de Entrada del Geogebra,

En la figura 142, se muestra la representación gráfica y algebraica de la pregunta 7 ggb.

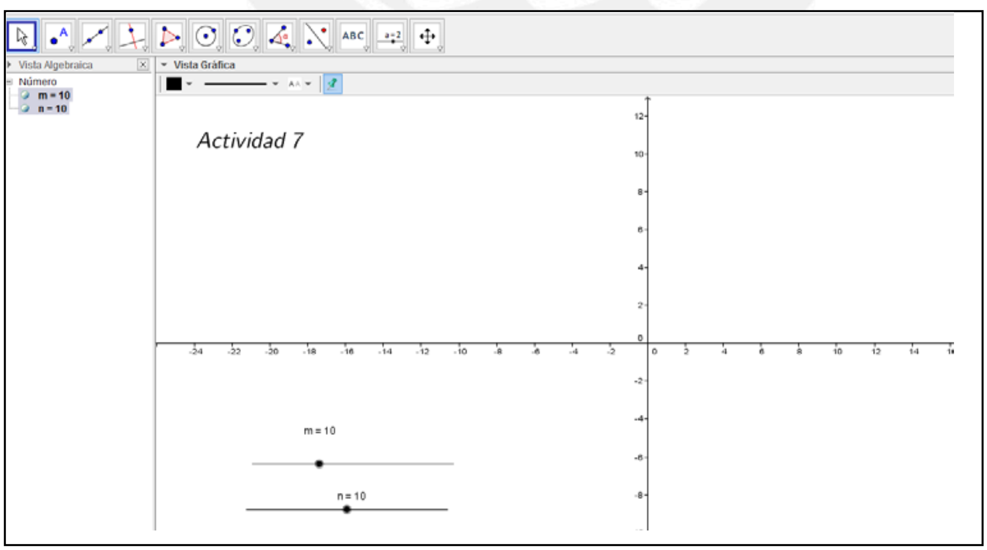


Figura 142. Actividad 7

La figura 142, es una representación estática que no refleja el dinamismo de lo que realmente sucede. Los alumnos ingresarán la expresión $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$. Si los alumnos fijan el deslizador $n=10$ y deslizan el valor de m, entonces observarán que cuando $m>n$, el valor de m es el semieje mayor de la elipse, contenido en el eje focal del eje de abscisas. De manera correlativa, cuando $m<n$, el valor de m, corresponde al semieje menor de la elipse, contenido en el eje normal de la elipse.

Hay indicios para suponer que los alumnos podrán instrumentalizar e instrumentar la expresión algebraica $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ porque relacionan los parámetros m y n a los semiejes de la elipse y porque representan gráficamente dicha ecuación para distintos valores de los parámetros m y n

Análisis a posteriori de la actividad 7

De acuerdo a nuestro análisis *a priori,* los alumnos lograron *instrumentalizar la expresión* $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$, *vinculando las variables* m y n *a los semiejes de una elipse con eje focal coincidente con el eje de abscisas en algunos casos y en otros con el eje de ordenadas*. *De igual forma instrumentaron dicha expresión debido a que vincularon las expresiones algebraicas a las representaciones algebraicas en los casos en los que las variables* m y n *asumen distintos valores.*

Para ello se fijó el valor de $n=10$, de tal forma que cuando $m>\mathrm{n}$, los alumnos señalaron que m es el semieje mayor de la elipse cuyo eje focal se halla sobre el eje de abscisas y en otro caso, es decir $m<\mathrm{n}$, los alumnos indicaron que m es el semieje menor de la elipse cuyo eje focal se hall sobre el eje de ordenadas. . Para ello se usó como mediadores de la actividad la herramienta “Deslizador”, la Vista Algebraica y la Vista Gráfica del Geogebra.

Con los resultados anteriores, los alumnos lograron escribir la expresión algebraica de una elipse con centro en el origen de coordenadas y eje focal coincidente a cualquiera de los ejes coordenados. El uso del Geogebra, permitió manipular el eje focal de la elipse.

Conforme a lo previsto, en esta actividad se presentó una restricción de acción, ligada a la estructura y funcionamiento del programa, específicamente dificultades para hallar el símbolo exponente de una de las variables que acompañan las expresiones algebraicas y que Rabardel (1995), tipifica como restricciones de acción. Al respecto, el Geogebra dispone de un Teclado virtual – visto en la primera sesión de exploración– desde donde se seleccionan los símbolos requeridos cuando se hace uso de la Barra de Entrada.

Los alumnos mostraron que están instrumentalizados e instrumentados con la elipse porque relacionaron los valores de los parámetros m *y* n *a los semiejes de la elipse y porque representaron gráficamente la elipse* $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ *cuando los parámetros* m *y* n *asumían distintos valores.* De igual forma, las nociones de eje mayor, menor de la elipse siguen instrumentadas ya que lograron ser movilizadas cuando se les vinculó a su expresión algebraica.

En el ítem a)

Análisis a priori

En esta parte los alumnos mostrarán que están instrumentados con el significado de la ecuación de una circunferencia porque logran identificar el radio de dicha curva. Además continúan instrumentando la Vista Algebraica del Geogebra, porque vincularán la representación gráfica y la algebraica por medio de la Vista Algebraica y Gráfica del Geogebra.

Los equipos harán uso del teclado de la computadora para ingresar los datos. Cuando necesiten el símbolo que representa al exponente, creemos tendrán problemas para identificarlo y buscarán la orientación con el profesor. La ubicación de dichos símbolos será una restricción de estructuración de la acción, a pesar que esto fue tratado en la primera sesión correspondiente a la Exploración del Geogebra.

Luego de este impase, los alumnos ingresarán sin dificultades la ecuación correspondiente, pulsarán "Enter" y obtendrán la gráfica de la circunferencia en la vista gráfica.

En la figura 143 se muestra una circunferencia, que los alumnos obtendrán luego de ingresar en la Barra de Entrada del Geogebra la ecuación $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ y de manipular los valores de m y n hasta conseguir $m=n=10$.

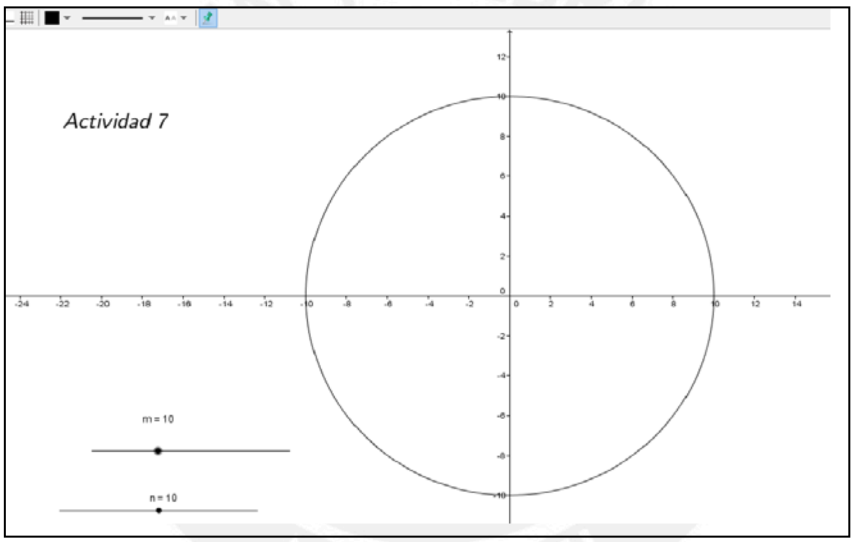


Figura 143. Desarrollo Actividad 7 a

Luego, en la Vista Algebraica los alumnos podrán vincular su expresión algebraica corresponde a la expresión $x^2+y^2=100$, luego que desplazan los deslizadores hasta $m=n=10$. Esto significa que los alumnos están instrumentados con la circunferencia porque logran determinar su radio, además hay indicios para suponer que continúan instrumentando la Vista Algebraica del Geogebra, porque vincularán la representación gráfica y la algebraica de la elipse.

Posibles esquemas de utilización.

- Circunferencia, eje mayor, menor de una elipse.
- Uso de las herramientas teclado virtual y la Vista Algebraica.

Parte predictiva de las acciones

Esperamos que luego de ingresada la expresión algebraica $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ a través de la Barra de Entrada, los alumnos identifiquen su representación gráfica como la de una circunferencia cuando los valores de $m= n = 10$. Pensamos que la ubicación del símbolo potencia será una restricción de estructuración de la acción cuando los alumnos digiten el símbolo que representa el exponente, que Según Rabardel (1995), han sido inscritos en la estructura y funcionamiento del artefacto e incorporadas por su diseñador.

Análisis a posteriori

En la Barra de Entrada ingresan la ecuación $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$. Se les dificulta ingresar el símbolo que representa a los exponentes de las variables. Ambos equipos tienen restricción de estructuración de la acción porque los símbolos se hallan ligados a la estructura y funcionamiento previsto por el diseñador. Se les hace recordar que en la sesión exploratoria se vio el uso del Teclado Virtual, la cual aparece en la herramienta "Vista". Luego, de ingresar la expresión, ambos equipos arrastran el deslizador hasta que $n=m=10$ y determinan la expresión algebraica que aparece en la Vista Algebraica, de acuerdo a lo planificado en el análisis *a priori*.

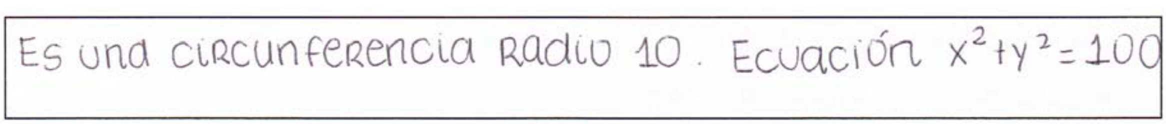


Figura 144 Enunciado 7a. Equipo A

La figura 144, muestra que los alumnos del equipo A están instrumentados con la ecuación de una circunferencia, ya que logran expresar que la ecuación $x^2+y^2=100$ es una circunferencia de radio 10 unidades.

Además no solamente lograron identificar el radio de dicha circunferencia sino que también vincularon su representación gráfica a la representación algebraica

La figura 145, muestra también que los alumnos del equipo B, están instrumentados con la ecuación de una circunferencia porque lograron identificar el radio de la circunferencia y vincularon su representación gráfica a la representación algebraica.

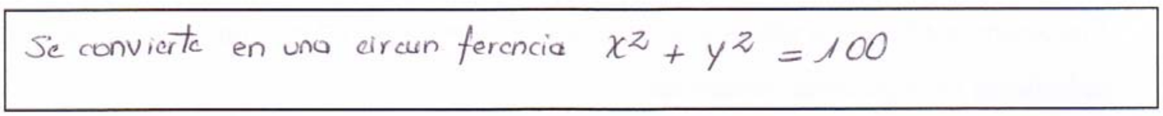

Se convierte en una circunferencia $x^2 + y^2 = 100$

Figura 145. Enunciado 7a. Equipo B

En el ítem b)

Análisis a priori

Pensamos que determinarán la expresión algebraica de la elipse con centro en el origen, eje focal el eje de abscisas, en términos del semieje mayor a y del semieje menor b.

Como $m > n$ los alumnos identificarán a la variable m como el semieje mayor de la elipse cuyo eje focal se halla sobre el eje de abscisas. En esta parte los alumnos continuarán instrumentándose con la noción de eje focal, eje mayor, eje menor e iniciarán la instrumentalización y la instrumentación de la expresión algebraica $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$, vinculando los parámetros m y n a los semiejes de la elipse y graficando dicha expresión analítica con dichos valores.

Luego, pensamos que determinarán la expresión algebraica de la elipse centrada en el origen, con eje focal el eje de abscisas, cuando los deslizadores se hallan en los tres casos que se ejemplifican.

Posibles esquemas de utilización.

- El eje mayor, eje menor y la expresión algebraica de la elipse en la Vista Algebraica

- Uso de las herramientas "Deslizador", la Vista Gráfica y Algebraica del Geogebra.

Parte predictiva de las acciones

Esperamos que deslicen m con valores mayores a n y observen el cambio simultáneo de la expresión algebraica y de la representación gráfica de la elipse. Luego creemos que identificarán sin problemas que el eje focal coincide con el eje de abscisas.

Los alumnos reemplazarán las variables m y n por valores numéricos asignados en el enunciado, con el fin de determinar un patrón en las expresiones algebraicas para cada caso.

Cuando el valor de $m = 12$ los alumnos observan la representación gráfica y escriben la expresión que aparece en la Vista Algebraica $\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1, \quad 12 > 10$

Con el valor de $m = 15$, los alumnos observan la representación gráfica y escriben la expresión que aparece en la Vista Algebraica $\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1, \quad 15 > 10$

Cuando el valor de $m = 20$ los alumnos observan la representación gráfica y escriben la expresión que aparece en la Vista Algebraica $\frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1, \quad 20 > 10$

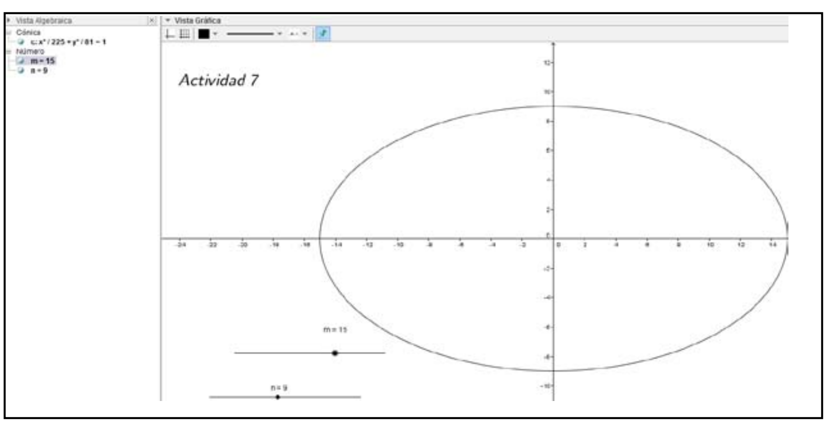


Figura 146. Desarrollo Actividad 7 b

La gráfica de la figura 146, representa la elipse cuando el valor de $m = 15$. Se puede observar que mientras $m > n$, la variable m representará el eje mayor de la elipse cuyo eje focal se halla sobre el eje de abscisas.

Luego cuando la longitud del semieje mayor es a , la del semieje menor es b y el eje focal es el eje de abscisas, los alumnos determinaron la expresión algebraica en términos de a y b , que indica que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Los alumnos identificaron que cuando el semieje mayor de la elipse $m = a$ se halla sobre el eje de las abscisas entonces dicho semieje se asocia al eje X en la expresión algebraica.

Consideramos que fue importante haber instrumentado algunas propiedades de la elipse como eje mayor, eje menor, eje focal, eje normal, Vista Algebraica y Gráfica de la elipse, ya que nos sirvieron de esquemas de uso para halla la representación algebraica.

Análisis a posteriori

Ambos equipos arrastraron los deslizadores de manera aleatoria. Luego fijaron el deslizador $n = 10$ y arrastraron el deslizador m , de tal forma que $m > n$.

Debido a que los alumnos responden de manera similar presentaremos sólo el análisis del equipo, como se observa en la figura 147.

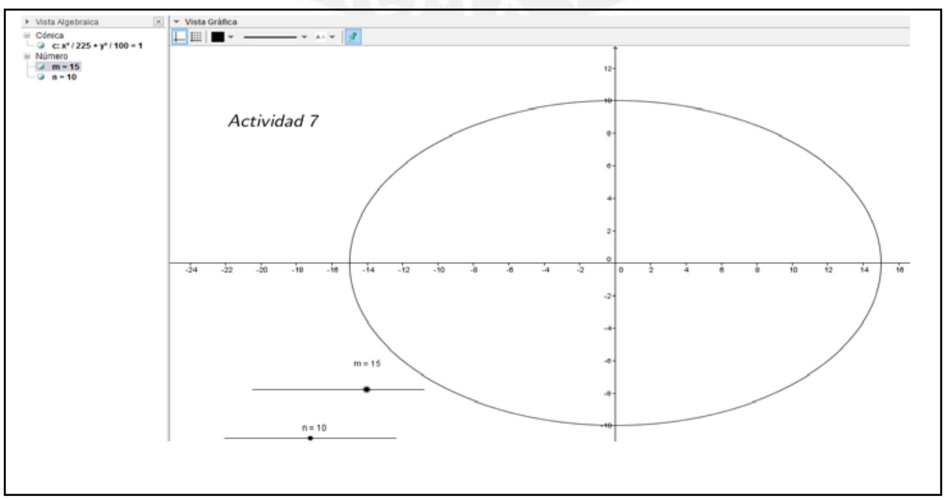


Figura 147. Gráfico 7b. Equipo A

El equipo A

Como se aprecia en la figura 147, luego de fijar el valor de $n = 10$ y deslizar m, de tal forma que $m > n$, los alumnos identificaron que la variable m correspondía al semieje mayor de la elipse porque los alumnos están instrumentados con la noción de los ejes mayor y menor de la elipse cuyo eje focal se observa gráficamente coincide con el eje de abscisas del plano.

Luego en la figura 148, se observa que el equipo indica la posición del eje focal respecto a los ejes coordenados

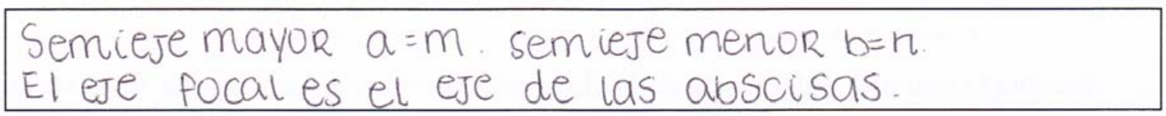

Semieje mayor a=m. semieje menor b=n.
El eje focal es el eje de las abscisas.

Figura 148. Enunciado Ejes 7b. Equipo A

Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$, los alumnos iniciaron la instrumentalización de la expresión algebraica ya que lograron vincular las variables m y n a los semiejes de una elipse cuyo eje focal coincide el eje de abscisas. Percibimos que dichas movilizaciones respecto a los ejes mayor y menor de la elipse, eje focal y Vista Gráfica influyeron en la respuesta de los alumnos.

De igual forma creemos que el equipo se instrumentalizó con la relación $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$, debido a que vincularon las expresiones algebraicas a las representaciones algebraicas en los casos indicados, es decir para los valores $n = 10$ y $m = \{12;15;20\}$, donde $m > n$.

En el siguiente cuadro, se presenta las distintas expresiones algebraicas que los alumnos deben representar gráficamente de acuerdo a los valores dados.

$n = 10$	m = 12	$\frac{x^2}{(12)^2} + \frac{y^2}{(10)^2} = 1$
$n = 10$	m = 15	$\frac{x^2}{(15)^2} + \frac{y^2}{(10)^2} = 1$
$n = 10$	m = 20	$\frac{x^2}{(20)^2} + \frac{y^2}{(10)^2} = 1$

Figura 149. Expresiones algebraicas 7b. Equipo A

En la figura 149 se muestran las expresiones algebraicas que corresponden a las distintas representaciones gráficas de la elipse que los alumnos movilizaron relacionándolas con los semiejes de la elipse y con la Vista Algebraica y la Vista Gráfica, del Geogebra. Podemos indicar que los alumnos están instrumentando la relación $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ vinculando los parámetros de la elipse a la gráfica correspondiente.

Previamente los alumnos identificaron a la variable m como el semieje mayor de la elipse debido a que movilizaron las nociones de los ejes mayor y menor, eje focal y Vista Gráfica de la elipse.

Además identificaron que el semieje mayor se halla sobre el eje de abscisas, lo que significa que la variable a, está asociada al eje X en la expresión algebraica.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Figura 150. Expresión Algebraica Origen 7b. Equipo A

Como se muestra en la figura 150, el equipo determinó la expresión de la elipse con centro en el origen, eje focal el eje de abscisas, longitud del semieje mayor a y longitud del semieje menor b, $a > b$.

Los alumnos identificaron que cuando el semieje mayor de la elipse $m = a$ se halla sobre el eje de las abscisas entonces dicho semieje se asocia al eje X en la expresión algebraica.

Consideramos que fue importante haber instrumentado algunas propiedades de la elipse como eje mayor, eje menor, eje focal, eje normal, Vista Algebraica y Gráfica de la elipse, ya que nos sirvieron de esquemas de uso para halla la representación algebraica.

Asimismo, el deslizador fue diseñado con el objetivo de vincular los parámetros de la representación gráfica con los de la expresión algebraica y así contribuir a la movilización de las propiedades de la elipse.

En el ítem c)

Es muy similar a la anterior, la desarrollamos de manera análoga.

Como $m < n$ los alumnos identificarán a la variable m como el semieje menor de la elipse de eje focal sobre el eje de ordenadas.

En esta parte los alumnos continuarán instrumentándose con la noción de eje focal, eje mayor, eje menor y con la interpretación de las expresiones de la Vista Algebraica del Geogebra e iniciarán la instrumentalización y la instrumentación de la expresión algebraica $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$, vinculando los parámetros m y n a los semiejes de la elipse y graficando dicha expresión analítica con dichos valores.

Luego, pensamos que determinarán la expresión algebraica de la elipse centrada en el origen, con eje focal el eje de ordenadas, cuando los deslizadores se hallan en los tres casos que se ejemplifican.

Posibles esquemas de utilización.

- El eje mayor, eje menor y la expresión algebraica de la elipse en la Vista Algebraica
- Uso de las herramientas "Deslizador", la Vista Gráfica y Algebraica del Geogebra.

Parte predictiva de las acciones

Esperamos que deslicen m con valores menores a n y observen el cambio simultáneo de la expresión algebraica y de la representación gráfica de la elipse. Luego creemos que identificarán sin problemas que el eje focal coincide con el eje de ordenadas.

Los alumnos reemplazarán las variables m y n por valores numéricos asignados en el enunciado, con el fin de determinar un patrón en las expresiones algebraicas para cada caso.

Cuando el valor de $m = 9$ los alumnos observan la representación gráfica y escriben la expresión que aparece en la Vista Algebraica $\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$, ya que $9 < 10$.

Con el valor de $m = 7$, los alumnos observan la representación gráfica y escriben la expresión que aparece en la Vista Algebraica $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$, $7 < 10$

Cuando el valor de $m = 5$ los alumnos observan la representación gráfica y escriben la expresión que aparece en la Vista Algebraica $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$, $5 < 10$

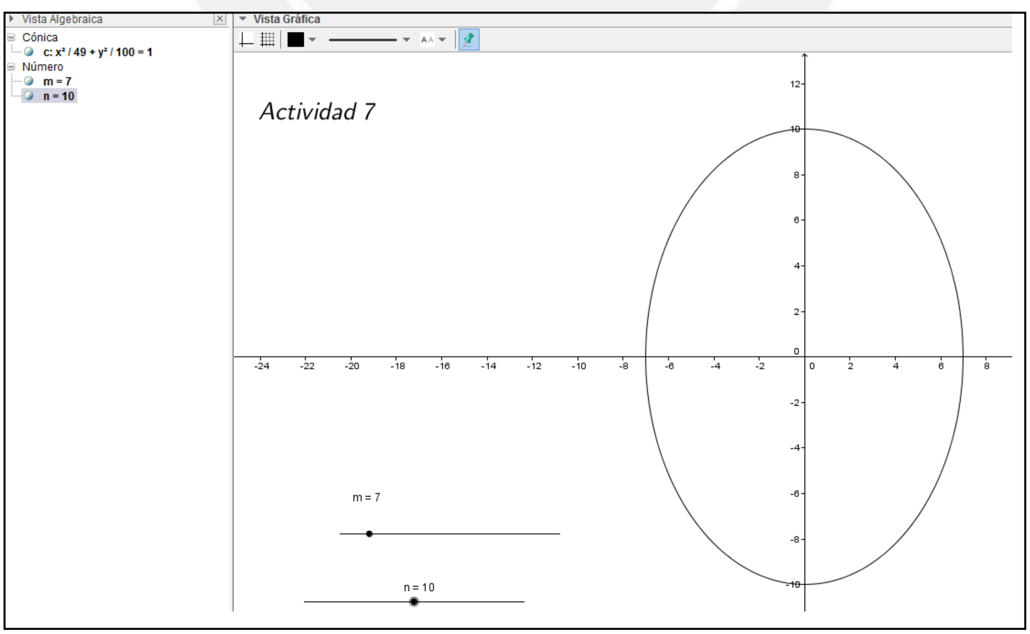


Figura 151. Desarrollo Actividad 7 c

La gráfica de la figura 151, representa la elipse cuando el valor de $m = 7$. Se puede observar que mientras $m < n$, la variable m representará el eje menor de la elipse cuyo eje focal se halla sobre el eje de abscisas.

Luego cuando la longitud del semieje mayor es a, la del semieje menor es b y el eje focal es el eje de ordenadas, los alumnos determinaron la expresión algebraica en términos de a y b, que indica que a $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Los alumnos identificaron que cuando el semieje mayor de la elipse $n = a$ se halla sobre el eje de ordenadas, entonces dicho semieje se asocia al eje Y en la expresión algebraica.

Consideramos que fue importante haber instrumentado algunas propiedades de la elipse como eje mayor, eje menor, eje focal, eje normal, Vista Algebraica y Gráfica de la elipse, ya que nos sirvieron de esquemas de uso, ya que se les pudo asociar para hallar la representación algebraica de la elipse.

Análisis a posteriori

Ambos equipos arrastraron los deslizadores de manera aleatoria. Luego fijaron el deslizador $n = 10$ y arrastraron el deslizador m, de tal forma que $m < 10$.

Debido a que los alumnos responden de manera similar y sin ninguna dificultad esta pregunta presentaremos sólo las respuestas del equipo B

El equipo B

Luego de fijar el valor de $n = 10$ y deslizar m, de tal forma que $m < n$, los alumnos identificaron que la variable n correspondía al semieje menor de la elipse porque los alumnos están instrumentados con la noción de los ejes mayor y menor de la elipse cuyo eje focal se observa gráficamente coincide con el eje de abscisas del plano.

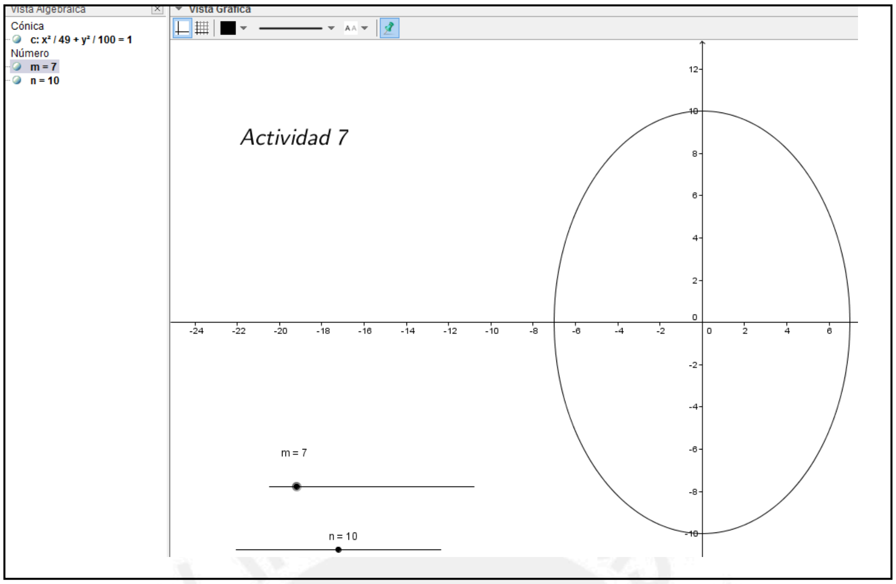


Figura 152. Gráfico 7c. Equipo B

Como se aprecia en la figura 152, los alumnos identificaron que el semieje mayor a de la elipse corresponde al valor n, y que el semieje menor b de la elipse corresponde al valor de m, luego de fijar el valor de $n=10$ y deslizar m, de tal forma que $m<n$.

Debido a que $m<n=10$, se cumplió que la longitud del semieje menor correspondió al valor de m y que la longitud del semieje mayor correspondió al valor de n. Por lo tanto el eje focal de la elipse que contiene al eje mayor, se encuentra sobre el eje de ordenadas.

Luego en la figura 153, observamos que el equipo continúa instrumentalizando la expresión $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ ya que movilizó las nociones de semiejes de la elipse, determinó que el semieje mayor es n, que el semieje menor es m, y que finalmente el eje focal es el eje de ordenadas.

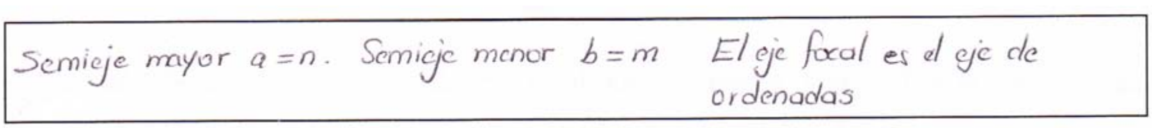


Figura 153. Enunciado 7c. Equipo B

Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$, los alumnos iniciaron la instrumentalización de la expresión algebraica ya que lograron vincular las variables m y n a los semiejes de una elipse cuyo eje focal coincide el eje de abscisas. Percibimos que dichas movilizaciones respecto a los ejes mayor y menor de la elipse, eje focal y Vista Gráfica influyeron en la respuesta de los alumnos.

De igual forma creemos que el equipo se instrumentalizó con la relación $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$, debido a que vincularon las expresiones algebraicas a las representaciones algebraicas en los casos indicados.

Según mostramos en la figura 154, el equipo B halla las expresiones algebraicas en los casos indicados, es decir para los valores $n=10$ y $m=\{5;7;9\}$, en el caso que $m<n$ . .

$n=10$	m = 9	$\frac{x^2}{(9)^2}+\frac{y^2}{(10)^2}=1$
$n=10$	m = 7	$\frac{x^2}{(7)^2}+\frac{y^2}{(10)^2}=1$
$n=10$	m = 5	$\frac{x^2}{(5)^2}+\frac{y^2}{(10)^2}=1$

Figura 154. Expresiones algebraicas 7c. Equipo B

Además identificaron que el semieje mayor se halla sobre el eje de ordenadas, lo que significa que la variable a, está asociada al eje Y en la expresión algebraica.

Podemos indicar que los alumnos están instrumentando la relación $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ ya que vincularon los parámetros de la elipse a la gráfica correspondiente.

Como se muestra en la figura 155, el equipo B determinó la expresión de la elipse con centro en el origen, eje focal el eje de ordenada, longitud del semieje mayor a y longitud del semieje menor b, $a > b$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Figura 155. Expresión Algebraica Origen. Equipo B

Los alumnos identificaron que cuando el semieje mayor de la elipse n se halla sobre el eje de las ordenadas, entonces dicho semieje se asocia al eje Y en la expresión algebraica. Consideramos que fue importante haber instrumentado algunas propiedades de la elipse como eje mayor, eje menor, eje focal, eje normal, Vista Algebraica y Gráfica de la elipse, ya que nos sirvieron de esquemas de uso para hallar la representación algebraica.

La creación del deslizador asociado a los parámetros de la elipse y a la expresión algebraica, influyeron en los alumnos para que movilizaran las propiedades de la elipse relativa a los ejes y a las Vistas del Geogebra.

En la presente actividad podemos afirmar que los alumnos pasaron por un proceso de instrumentalización respecto a la expresión algebraica $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ porque le atribuyeron propiedades a los parámetros m y n vinculándolos con los semiejes de la elipse. De igual forma, podemos decir que los alumnos instrumentaron dicha expresión, porque lograron vincularla a una representación gráfica cuando los parámetros m y n tomaron diversos valores.

En la siguiente actividad, la expresión algebraica $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ evoluciona como esquema de uso para escribir la expresión algebraica de una elipse con centro en cualquier punto (h, k) del plano y eje focal paralelo a cualquiera de los ejes coordenados.

Análisis de la actividad 8

En el cuadro 16 presentamos la actividad 8, la cual consta de tres ítems. A continuación elaboramos el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada una de las partes correspondientes.

Cuadro 16. Actividad 8

ACTIVIDAD 8

Abra el archivo Actividad_8.ggb. Se muestra una elipse con centro en el origen, eje focal el de abscisas y su expresión algebraica $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$.

a) Mueva el deslizador hasta que el nuevo centro de la elipse sea el punto $A(8,6)$

Escriba la expresión algebraica de la elipse en términos de su nuevo centro

$$\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}=1$$

¿Qué elementos se mantienen invariantes en la elipse?

b) Trace los lados rectos de la elipse con centro en A. Luego mueva el punto A y traslade la elipse sobre el plano de coordenadas.

Halle la expresión algebraica de la elipse cuando el centro A está sobre el eje de abscisas

Halle la expresión algebraica de la elipse cuando el centro A está sobre el eje de ordenadas

Halle la expresión algebraica de la elipse cuando el centro A está sobre los planos coordenados.

$$\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}=1 \qquad \frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}=1 \qquad \frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}=1$$

¿Qué elementos se mantienen invariantes en la elipse?

c) Escriba la expresión algebraica de una elipse con centro en cualquier punto (h, k) del plano, eje focal paralelo el eje de abscisas. Considere a la longitud del semieje mayor y b la longitud del semieje menor.

Escriba la expresión algebraica de una elipse con centro en cualquier punto (h, k) del plano, eje focal paralelo al eje de ordenadas. Considere a la longitud del semieje mayor y b la longitud del semieje menor

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_8.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente pregunta

Análisis a priori de la actividad 8

Creemos que los *alumnos evolucionan la expresión algebraica* $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ como esquema de uso y *lograrán expresar la ecuación algebraica de una elipse de la forma* $\frac{(x-h)^2}{m^2}+\frac{(y-k)^2}{n^2}=1$, *es decir una elipse con centro en cualquier punto* (h,k) *del plano y eje focal paralelo a cualquiera de los ejes coordenados.*

Para ello usaremos como mediador la herramienta "Deslizador", la Vista Algebraica y la Vista Gráfica del Geogebra. Además creemos que siguen instrumentados con el trazo del lado recto, porque lograrán obtener los focos de la elipse, por donde se trazaran las cuerdas de dicha curva. De igual forma, el uso de algunas herramientas del Geoegebra, como el trazo de rectas, circunferencias, puntos de intersección, nos hacen pensar que dichas herramientas se hallan en una fase de personalización.

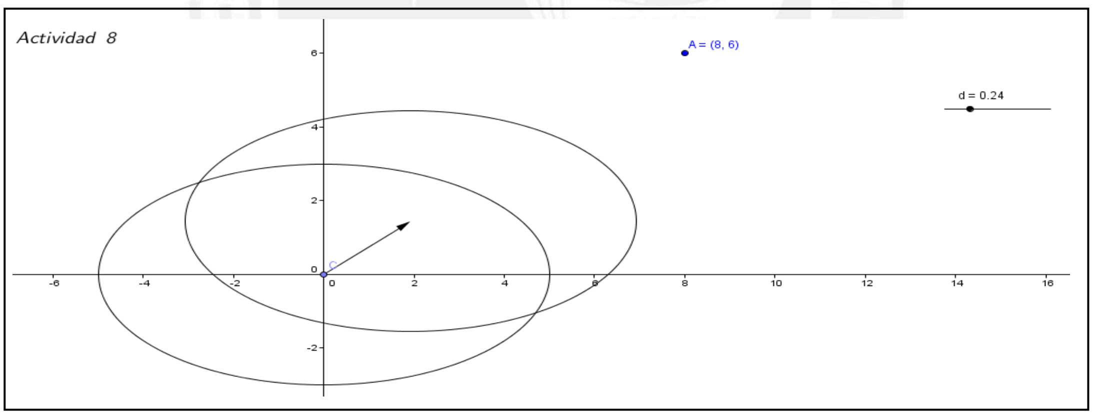


Figura 156. Actividad 8

En la figura 156, los alumnos trasladarán la elipse hacia el punto $A(8;6)$ que se visualiza en la zona gráfica, para ello usarán el deslizador. Luego escribirán la expresión algebraica de la elipse en términos de su nuevo centro $A(8;6)$, usando la Vista Algebraica. Paralelamente indicarán que tanto las longitudes del eje mayor y menor, así como su lado recto, se mantendrán sin variación, luego que la curva haya sido trasladada.

Análisis a posteriori de la actividad 8

Los equipos A y B, *lograron movilizar como esquema de uso la expresión algebraica* $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$, *de tal forma que expresaron la ecuación algebraica de una elipse de la forma* $\frac{(x-h)^2}{m^2}+\frac{(y-k)^2}{n^2}=1$, *es decir una elipse con centro en cualquier punto* (h,k) *del plano y eje focal paralelo a cualquiera de los ejes coordenados.*

Además, afirmamos que la movilización de las herramientas del Geogebra, como "Deslizador", la Vista Algebraica y Gráfica, influyeron en el desarrollo de la actividad ya que permitieron trasladar la elipse por el plano y vincular esta representación gráfica a su expresión algebraica que aparece en la Vista Algebraica.

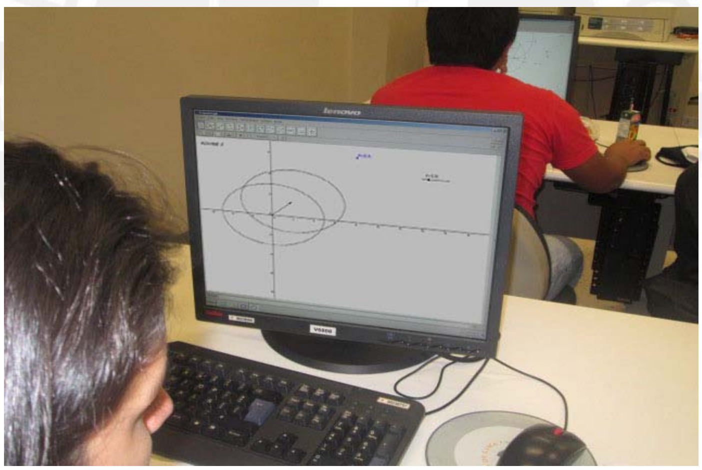


Figura 157. Traslación Elipse

En la figura 157, se muestra a una alumna trasladando la elipse centrada en el origen hacia otro punto distinto del origen de coordenadas, haciendo uso del deslizador. Posteriormente trazan los lados rectos de la elipse, lo cual nos indica que los alumnos permanecen instrumentados con esta noción.

Además, algunas herramientas del Geogebra, como trazos de rectas paralelas, perpendiculares, circunferencias, puntos de intersección, se encontraron en la fase de personalización. Trouche (2004) nos indica que en esta etapa el sujeto encaja las herramientas de acuerdo a su requerimiento. Luego, los alumnos nombraron a los ejes mayor y menor como elementos invariantes de la elipse al ser trasladada alrededor del plano. El lado recto fue omitido como propiedad invariante de la curva por la falta de visibilidad de este elemento en su representación gráfica.

Tampoco se tomó en cuenta que la función de la herramienta “Segmento de longitud fija” podría servir como radio de una circunferencia. Según Trouche (2004) cuando el sujeto hace uso de la herramienta en direcciones imprevistas por el fabricante, dicha herramienta puede ubicarse en una fase de Transformación.

En el ítem a)

Análisis a priori

Esperamos que el equipo vincule la representación gráfica de la elipse a su expresión algebraica en términos de su nuevo centro ubicado en el punto $A(8;6)$, porque movilizará como esquema de uso la expresión algebraica $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$. Dicha expresión algebraica vincula los parámetros m y n a los semiejes y a la representación gráfica de la elipse. Luego creemos que al comparar la curva antes y después de la traslación, señalará a los ejes y al lado recto de la elipse como elementos invariantes. Sus acciones estarán mediadas por la herramienta “Deslizador”, la vista algebraica y gráfica del Geogebra.

Posibles esquemas de utilización:

- La representación algebraica de la elipse y algunos elementos de la elipse como eje mayor, menor y eje focal.
- Usa la herramienta “Deslizador”, y la Vista Gráfica y Algebraica.

Parte descriptiva de las acciones

El equipo hace uso del deslizador y observa que la elipse de centro $(0;0)$ se traslada a un nuevo centro de coordenadas $A(8;6)$. Luego despliega la vista algebraica y escribe la expresión $\frac{(x-8)^2}{25}+\frac{(y-6)^2}{9}=1$ en términos de su nuevo centro.

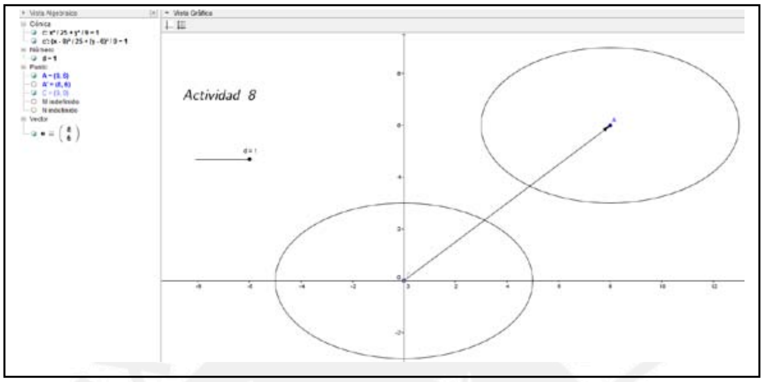


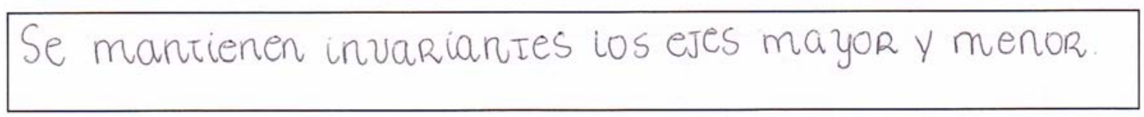
Figura 158. Desarrollo Actividad 8 a

En la figura 158, los alumnos usarán el deslizador d que permite trasladar el centro de la elipse al punto $A(8;6)$. Luego escribirán la expresión algebraica de la elipse en términos de su nuevo centro y señalarán que tanto el eje mayor y menor así como el lado recto, se mantienen invariantes en la curva trasladada.

Análisis a posteriori

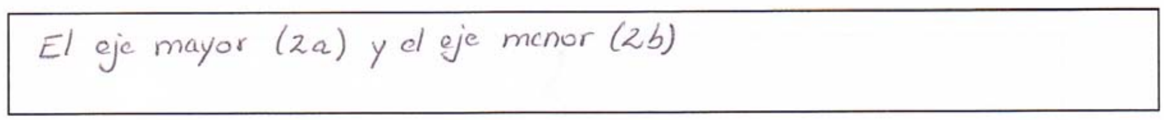
Los alumnos lograron vincular la representación gráfica de la elipse. Ambos equipos arrastran el deslizador hasta el punto $A(8.6)$ y consiguen trasladar la elipse de centro el origen de coordenadas a otra de centro $A(8.6)$. Luego hacen visible la vista algebraica y escriben la expresión $\frac{(x-8)^2}{25}+\frac{(y-6)^2}{9}=1$ que corresponde a ecuación de la curva trasladada.

Consideran al eje mayor y menor como elementos invariantes de la elipse cuando la curva es trasladada. No se previó que omitieran el lado recto de la elipse. Sin embargo este elemento es mencionado como elemento invariante en el siguiente ítem, probablemente porque inicialmente el lado recto es trazado en la elipse antes de ser trasladada.



Se mantienen invariantes los ejes mayor y menor.

Figura 159. Enunciado 8a. Equipo A



El eje mayor (2a) y el eje menor (2b)

Figura 160. Enunciado 8b. Equipo B

Como se muestra en las figuras 159 y 160, los alumnos sólo consideran a los ejes de la elipse como invariantes. Probablemente, omitan otras características como la longitud del lado recto por ejemplo, porque no observan su representación gráfica.

En el ítem b)

Análisis a priori

Pensamos que determinarán las ecuaciones de la elipse $\frac{(x-h)^2}{m^2}+\frac{(y-k)^2}{n^2}=1$ cuando el centro se ubica en el eje de abscisas, ordenadas o en cualquier otra posición del sistema de coordenadas cartesianas ya que se hallan instrumentados con la expresión algebraica $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$.

Creemos una vez trasladada la curva, trazarán los lados rectos de la elipse porque se hayan instrumentados con esta propiedad de la elipse. De igual forma no tendrán dificultades para obtener los focos de la elipse, porque pueden movilizar la condición geométrica de la elipse o hacer uso de la herramienta “Compás” del Geogebra. Para ello harán uso de las herramientas del que involucra el trazo de rectas, puntos de intersección, trazos de circunferencias, compás, que pensamos según Trocuhe (2004) se hallan en fase de personalización porque el sujeto las encaja dentro de su requerimiento.

También creemos que mencionará como elementos invariantes al eje mayor, eje menor, lado recto de la elipse, los cuales fueron mencionados como invariantes en el ítem anterior.

Posibles esquemas de utilización.

- La representación algebraica de la elipse y algunos elementos de la elipse como eje mayor, menor y eje focal..

- Usa la herramienta "Recta perpendicular", "Recta paralela", "Intersección de objetos", "Compás", "Elige y mueve", la Vista Gráfica y Algebraica.

Parte predicativa de las acciones.

Con la herramienta "Compás" traza una circunferencia con centro en uno de los extremos del eje menor y radio la longitud del semieje mayor de la elipse y encuentra los focos de la elipse, como se muestra en la figura 161. Luego con la herramienta "Recta perpendicular" selecciona el eje focal y los focos de la elipse, y traza la recta que contiene a los lados rectos de la elipse

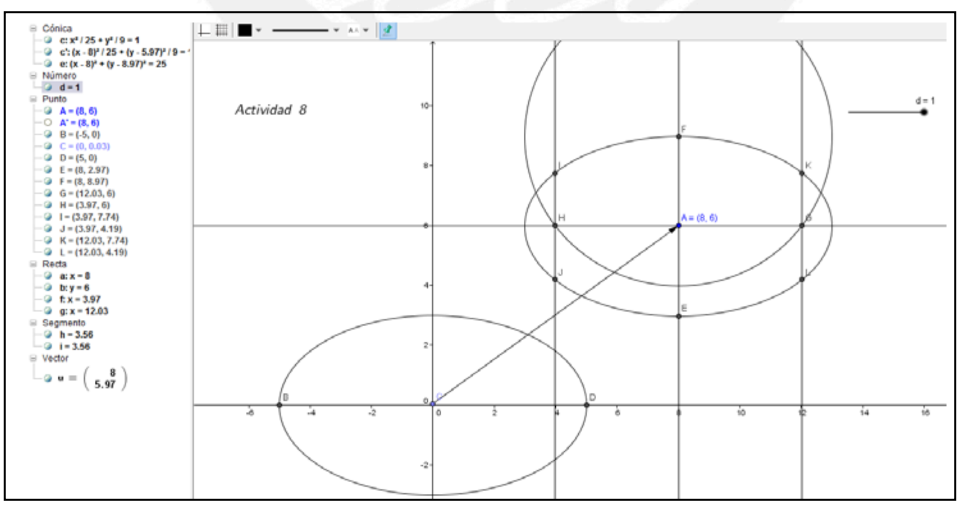


Figura 161. Desarrollo Actividad 8 b

Creemos que para determinar la longitud del semieje mayor de la elipse usará la elipse que tiene centro en el origen.

Arrastra la gráfica con la herramienta “Elige y mueve” a cualquier punto del eje de abscisas y obtiene la expresión algebraica solicitada.

Finalmente arrastra la gráfica con la herramienta “Elige y mueve” a cualquier punto del plano y obtiene la expresión algebraica solicitada.

Análisis a posteriori

De acuerdo a lo previsto, los alumnos determinaron las ecuaciones de la elipse $\frac{(x-h)^2}{m^2}+\frac{(y-k)^2}{n^2}=1$ cuando el centro se ubica en el eje de abscisas, ordenadas o en cualquier otra posición del sistema de coordenadas cartesianas ya que se hallan instrumentados con la expresión algebraica $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$.

Asimismo trazaron los focos de la elipse, haciendo uso de las construcciones geométricas, luego trazan sin dificultades los segmentos que representan a los lados rectos de la elipse. Esto nos indica que siguen existiendo indicios que la noción de lado recto se ha instrumentado. De igual forma el uso de las herramientas para dicha construcción, y que fue prevista también en el análisis *a priori*, nos indica que el trazo de rectas, puntos de intersección, trazos de circunferencias, compás, se hallan en fase de personalización porque según Trouche (2004) el sujeto las encaja dentro de su requerimiento.

El equipo A

Para determinar uno de los focos, halla el valor de $c=4$, haciendo uso de la relación $a^2=b^2+c^2$ ya que - por medio de las coordenadas que obtiene en la Vista Algebraica - puede determinar la longitud del semieje mayor $(a=5)$ y menor $(b=3)$. Luego, selecciona la herramienta “Segmento de Longitud Fija” (omite el trazo de la circunferencia) y con centro $A(8.6)$ traza un segmento de longitud $c=4$ equivalente al radio de una circunferencia centrada en A. Determina por defecto, el foco del lado derecho de la elipse.

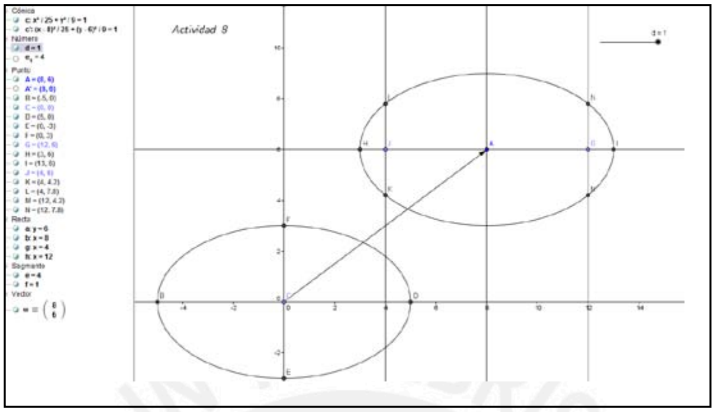


Figura 162 Gráfico 8b. Equipo A

En la figura 162, se muestra que los alumnos del equipo A omiten la mediación de la circunferencia para ubicar los focos de la elipse.

Similar procedimiento utiliza para encontrar el foco izquierdo, el equipo toma como extremo el vértice izquierdo de la elipse y traza un segmento de longitud $a - c = 1$ con la herramienta “Segmento de Longitud Fija”. Según Trouche (2004), el sujeto puede hacer uso de la herramienta en direcciones imprevistas por el diseñador, esta fase es conocida como fase de Transformación y no fue concebida en el análisis *a priori*.

Luego el equipo procede a trazar las rectas perpendiculares que contienen a los lados rectos de la elipse.

El equipo B.

Para determinar los focos, el equipo halla un extremo del eje menor de la elipse que tiene centro en el punto $A(8.6)$. Para ello, traza una recta que pasa por el centro de dicha elipse y que es perpendicular al eje focal. Luego, con la herramienta “Intersección”, determina ambos extremos del eje menor de la elipse, y los etiqueta como extremo superior D y extremo inferior B. Con centro en el extremo superior D y radio la longitud el semieje mayor, traza una circunferencia, con la herramienta “Compás”, determinando los focos de la elipse señalada. Luego son renombrados como los puntos $F1$ y $F2$

El trazo de los lados rectos de la elipse, se obtienen con la herramienta “Recta perpendicular”, al eje focal y que pasa por uno de los focos de la elipse.

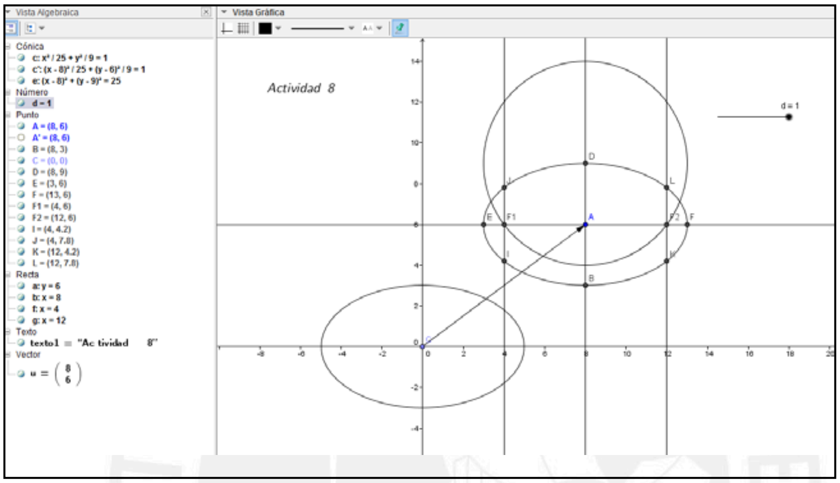


Figura 163 Gráfico 8b. Equipo B

Ambos equipos arrastran el deslizador hasta que el punto A logre ubicarse en tres posiciones distintas: el eje de abscisas, eje de ordenadas y finalmente en cualquier punto del plano.

En la figura 164 se muestran las expresiones algebraicas correspondientes a la elipse centrada en tres posiciones distintas del plano. Se muestra que la expresión $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$, ha sido movilizada como esquema de uso ya que los alumnos vinculan los parámetros de la expresión con los semiejes y con la representación gráfica de la elipse.

$$\boxed{\frac{(x-8)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1} \qquad \boxed{\frac{x}{25}+\frac{(y-6)^2}{9}=1} \qquad \boxed{\frac{(x-4,43)^2}{25}+\frac{(y-3,374)^2}{9}=1}$$

Figura 164 Expresiones Algebraicas 8b. Equipo A

Se observa que en la figura 165, el equipo A adiciona como elemento invariante, además de los ejes mayor y menor, la longitud del lado recto. Probablemente haya considerado incorporar el lado recto como elemento invariante debido a que esta cuerda es trazada y se convierte en visible.

Se mantienen invariantes los ejes mayor, menor y el lado recto.

Figura 165 Enunciado 8b. Equipo A

En la figura 166, mostramos la respuesta del equipo B, indicando las expresiones algebraicas de la elipse cuando el centro se halla sobre el eje de abscisas, luego cuando el centro está sobre el eje de ordenadas y sobre algún punto del plano cartesiano.

$$\frac{(x-6)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad \frac{x^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}=1 \qquad \frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$$

Figura 166 1° Expresiones Algebraicas 8b. Equipo B

Se muestra que la expresión $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$, ha sido movilizada como esquema de uso ya que los alumnos vinculan los parámetros de la expresión con los semiejes y con la representación gráfica de la elipse.

De igual forma, en la figura 167, el equipo B adiciona como propiedad invariante, además de los ejes mayor y menor, la longitud del lado recto.

Se mantienen sin cambiar los lados mayor y menor y también el lado recto.

Figura 167 Enunciado 8b. Equipo B

En el ítem c)

Parte predictiva

Esperamos que los equipos logren identificar la ecuación de la elipse que tiene centro en el punto (h,k) y eje focal paralelo a cualquiera de los ejes coordenados.

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	Eje focal paralelo el eje de abscisas
$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	Eje focal paralelo el eje de ordenadas.

Figura 168. Expresiones Algebraicas 8c

Se muestra en la figura 168, las expresiones algebraicas de una elipse con centro (h,k). El deslizador diseñado para la actividad, permitirá que los alumnos manipulen la elipse y la trasladen a un punto distinto al origen de coordenadas.

Posibles esquemas de utilización:

- Algunos elementos de la elipse y la representación algebraica de la curva
- La Vista Gráfica y Algebraica del Geogebra.

Entonces escribe las expresiones algebraicas de la elipse con centro en (h,k), longitud del semieje mayor (a) y la longitud del semieje menor (b)

Análisis a posteriori

Los alumnos no tienen dificultada para escribir las expresiones algebraicas de la elipse con centro en cualquier punto (h,k) del plano, eje focal paralelo a los ejes coordenados, considerando la longitud del semieje mayor (a) y la longitud del semieje menor.

Considerando que las respuestas son similares, tomaremos en cuenta la respuesta del equipo A

En la figura 169, se muestra la ecuación de la elipse con centro el punto $(\mathrm{h};\mathrm{k})$, eje focal paralelo el eje de abscisas, siendo a la longitud del semieje mayor y b la longitud del semieje menor.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Figura 169 1° Enunciado 8c. Equipo A

En la figura 170, se muestra la ecuación de la elipse con centro el punto $(\mathrm{h};\mathrm{k})$, eje focal paralelo el eje de ordenadas, siendo a la longitud del semieje mayor y b la longitud del semieje menor.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Figura 170 2° Enunciado 8c. Equipo A

Estas situaciones evidencian que el uso del Geogebra, como la Vista Algebraica, Gráfica, la creación de un deslizador y el diseño de la secuencia de actividades, permiten a los alumnos, el descubrimiento progresivo de algunas propiedades de la elipse. Inicialmente se instrumentalizó la expresión algebraica de la elipse, enriqueciendo sus parámetros a los semiejes, luego se instrumentó vinculando estos parámetros a sus representaciones gráficas. Finalmente la expresión algebraica evolucionó como esquema de uso, y se halló otra de la forma $\frac{(x-h)^2}{m^2}+\frac{(y-k)^2}{n^2}=1$, es decir una elipse con centro en cualquier punto (h,k) del plano y eje focal paralelo a cualquiera de los ejes coordenados.

La siguiente actividad propuesta tiene una sola pregunta y movilizaremos a la elipse como instrumento que media sobre un objeto determinado.

Análisis de la actividad 9

En el cuadro 17 presentamos la actividad 9, que consta de una sola pregunta. A continuación elaboramos el análisis *a priori* y *a posteriori* de la actividad correspondiente.

Cuadro 17. Actividad 9

ACTIVIDAD 9 - Reto para el alumno.

Abra el archivo Actividad_9.ggb se muestra el eje focal de una elipse paralelo al eje de abscisas, donde F_1 es uno de sus focos y M es el extremo del eje menor de la elipse.

Usando construcciones geométricas halle el otro foco F_2, los vértices V_1 y V_2 y el otro extremo N del eje menor. Luego con la herramienta "Elipse" dibuje la curva

Explique su procedimiento

En la vista gráfica haga visible los ejes coordenados. Luego encuentre:

Las coordenadas de los vértices
Las coordenadas de los focos
Las coordenadas de los extremos del eje menor
Los extremos del lado recto
La ecuación de la elipse

De acuerdo a su gráfico, sin necesidad de elaborar cálculos, ¿la excentricidad tendrá valores cercanos a cero o a uno?

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_9.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente pregunta

Análisis *a priori* de la actividad 9

En esta actividad los alumnos deberán dibujar una elipse, a partir de uno de los focos y un extremo del eje menor. Además deberán determinar todos los elementos que le han sido atribuidos a dicha curva. Creemos que los alumnos movilizarán las propiedades de la elipse, ya que el artefacto ha sido enriquecido con ciertas características que fueron emergiendo, evolucionando, y agrupándose a lo largo de las actividades.

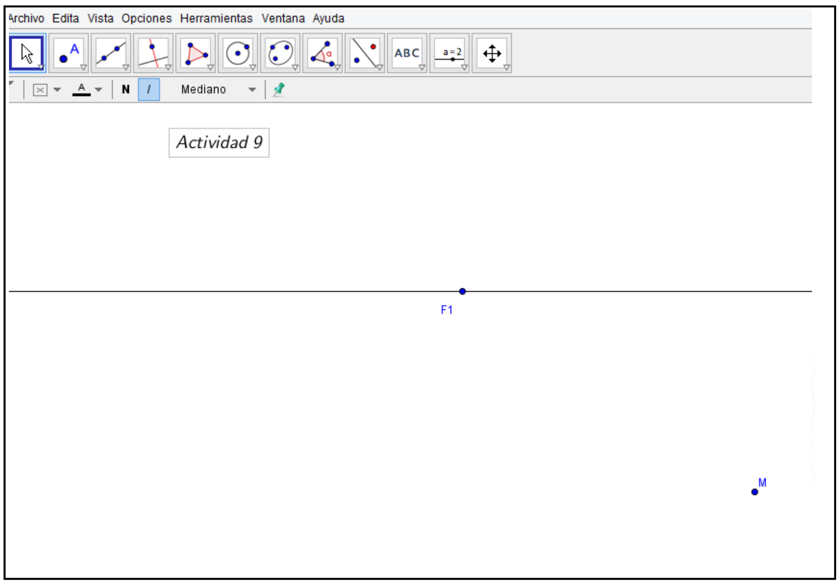


Figura 171. Actividad 9

La figura 171 muestra la actividad 9. *Creemos que los alumnos tienen instrumentadas las propiedades de la elipse que han atribuido, tales como la condición geométrica, la determinación de los focos, vértices, extremos del eje menor, la relación entre los parámetros, el lado recto, la excentricidad, la vinculación entre sus representaciones gráficas y las expresiones algebraicas, así como la representación de dichos elementos en el sistema de coordenadas cartesiano de acuerdo al uso de las Vista Algebraica y Vista Gráfica.*

Tomando como referencia las acciones en las actividades anteriores de los equipos A y B, esperamos que dichos equipos movilicen las propiedades de la elipse en relación con una clase de acciones, de tal forma, que los nuevos esquemas de utilización que fueron agregados de manera progresiva en las actividades previas, hayan favorecido la elaboración del instrumento elipse.

Posibles esquemas de utilización:

- La elipse y la representación algebraica de la curva
- Usa las herramientas "Recta perpendicular", "Intersección de dos objetos", "Circunferencia", "Elipse", "Renombrar" y "Vista Algebraica"

Parte predictiva de las acciones.

Existen distintas formas de proceder frente a esta situación. Mostraremos una de ellas, pero no por ello, la más eficiente ni la recomendada. Se muestra la elaboración de la elipse en la figura 171, y la descripción de las posibles acciones a continuación.

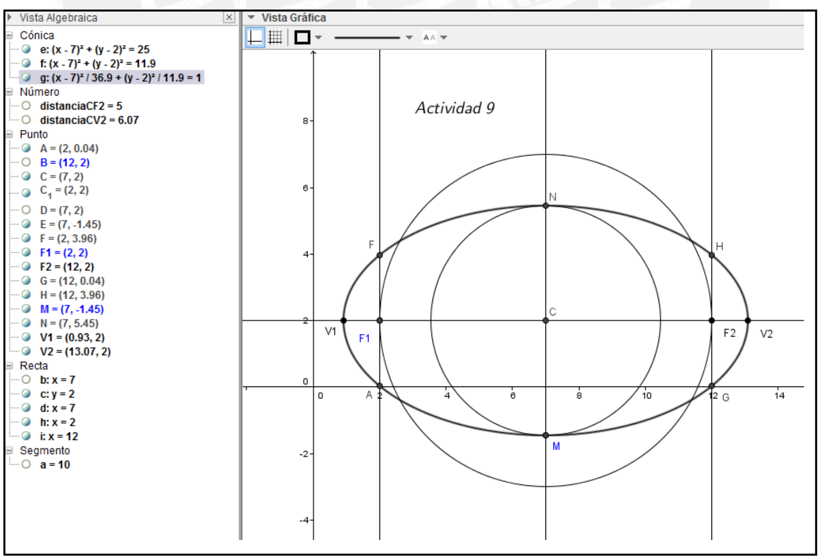


Figura 172. Desarrollo Actividad 9

Trazo del eje normal: Señala la herramienta "Recta Perpendicular" selecciona el eje focal de la elipse, el punto M y traza el eje normal de la elipse.

Crea el centro C de la elipse: Con la herramienta “Intersección de dos objetos” selecciona el eje focal, el eje normal y halla el centro de la elipse, con la herramienta “Renombrar” lo etiqueta como el punto C.

Crea el foco $F2$: Con la herramienta “Compás” toma como radio la distancia del centro al foco $F1$, como centro de la circunferencia el punto C, y traza la circunferencia.

Con la herramienta “Intersección de dos objetos”, selecciona el eje focal y la circunferencia y halla el foco. Con la herramienta “Renombrar” lo etiqueta como $F2$. Crea el extremo superior N del eje menor:

Con la herramienta “Compás” toma como radio la distancia del centro al extremo M del eje menor, como centro el punto C, y traza la circunferencia.

Con la herramienta “Intersección de dos objetos”, selecciona el eje normal, la circunferencia de radio $\overline{CM}$ y halla el extremo N que representa el extremo superior del eje menor.

Para realizar el trazo global de la elipse usa la herramienta “Elipse”, selecciona dos focos y un punto que pertenezca a la elipse y traza la curva.

Crea los vértices V_1 y V_2 de la elipse: Con la herramienta “Intersección de dos objetos”, selecciona el eje focal, y determina los vértices. Con la herramienta “Renombrar” los etiqueta como V_1 y V_2 .

Para insertar las coordenadas y la expresión gráfica de la elipse, se hace visible los ejes coordenados, la vista algebraica y escriben:

Las coordenadas de los vértices	$V_1\ (0.93;\ 2)\quad V_2\ (13.07;\ 2)$
Las coordenadas de los focos	$F_1\ (2;\ 2)\quad F_2\ (12;\ 2)$
Las coordenadas de los extremos del eje menor	$M_1\ (7;\ -1.45)\quad F_2\ (7;\ 5.45)$

Las coordenadas de los extremos del Lado Recto. $A_1 \ (2;\ 0.04) \quad F \ (2;\ 3.96)$

$A_1 \ (12;\ 0.04) \quad H \ (12;\ 3.96)$

Ecuación de la elipse $\dfrac{(x-7)^2}{36.9} + \dfrac{(y-2)^2}{11.9} = 1$

La excentricidad tendrá valores cercanos a uno porque la elipse tiene forma alargada

Estas acciones nos indicarían que hay indicios que instrumentaron las propiedades de la elipse.

Análisis a posteriori de la actividad 9

De acuerdo a nuestro análisis *a priori*, las acciones mostraron que *los alumnos movilizaron las propiedades del artefacto como por ejemplo: la condición geométrica de la elipse para determinar los focos, la noción de lado recto para el trazo de las cuerdas correspondientes, la excentricidad para elaborar una interpretación adecuada de la cercanía de los vértices y focos, los trazos de rectas paralelas, rectas perpendiculares, circunferencias, puntos de intersección, distancias y el uso del menú contextual, con el objetivo de concretar ciertos puntos básicos, además la identificación de las expresiones algebraicas y algunas coordenadas de la elipse de acuerdo a la interpretación de las Vista Algebraica y Vista* Gráfica.

El equipo A

En la figura 173, se muestra el gráfico del equipo A, cuyas acciones detallamos:

Halla las coordenadas del foco y del extremo del lado recto, cuyos puntos son datos del enunciado.

Trazo del eje normal: Señala la herramienta “Recta Perpendicular” selecciona el eje focal de la elipse, el punto M y traza el eje normal de la elipse.

Crea el centro C de la elipse: Con la herramienta “Intersección de dos objetos” selecciona el eje focal, el eje normal y halla el centro de la elipse, con la herramienta “Renombrar” lo etiqueta como C y halla las coordenadas.

Luego, para obtener el foco $F2$, emplea otras acciones a las previstas, Con la herramienta “Compás”, radio la distancia del centro a uno de los vértices y centro el extremo del eje menor, traza la circunferencia que intercepta al eje focal en los puntos $F1$ y $F2$

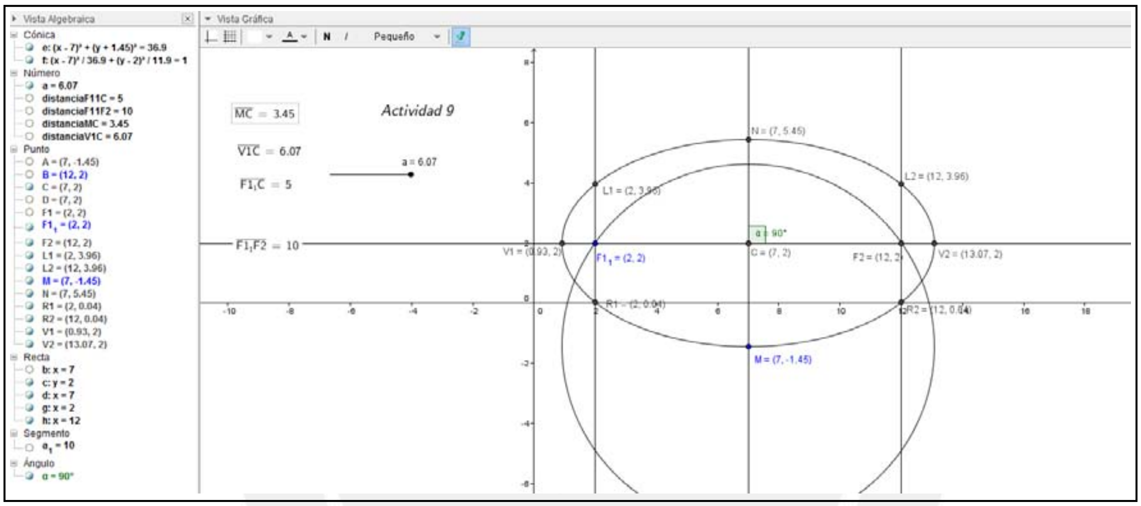


Figura 173. Gráfico 9 Equipo A

En la figura 173, se observa que movilizaron la condición geométrica de la elipse para determinar la posición de los focos. Como se había previsto, dicha condición geométrica evolucionó como un esquema de uso, la cual movilizaron para determinar los focos de la curva y luego determinar la representación del lado recto. De igual forma el uso de algunas herramientas del Geogebra como trazos de rectas paralelas, perpendicular, circunferencias, compás, puntos de intersección, distancias, uso del menú contextual, etc., nos proporcionan indicios que dichas herramientas también se hayan instrumentadas.

En ese mismo sentido el trazo de la curva con la herramienta “Elipse” nos permite la representación global de la elipse en la Vista Gráfica. La representación de la expresión algebraica y de las coordenadas respectivas como vértices, focos y extremos del lado recto, en la Vista Algebraica y Gráfica, nos proporciona evidencias que las construcciones geométricas sirven de puente para conectar al enfoque sintético y analítico que se le puede dar a la elipse. En la figura 174, el equipo describe el uso de la herramienta “Compás” para determinar uno de los focos, así como la explicación de la determinación de otros elementos.

Al tener dos puntos (M y F_1) aplico la circunferencia con centro M para obtener el F_2. Como tenía los puntos F_1 y F_2 (focos) y M (centro) se aplica la elipse y así se obtienen los vertices (V_1 y V_2) y trazo una linea perpendicular por el eje focal que pasa por M para hallar N.

Figura 174. 1° Enunciado 9. Equipo A

Percibimos indicios de instrumentación en: la condición geométrica de la elipse (para determinar los focos), y en algunas herramientas del Geogebra como rectas paralelas, perpendiculares, circunferencias, compás, puntos de intersección, distancias, uso del menú contextual (para realizar trazos que correspondan a determinar los vértices, extremos del eje menor). Además, esta actividad favoreció la construcción de un esquema de acción colectiva instrumentada, ya que los alumnos socializaron distintos esquemas de utilización, para redactar la descripción detallada en la figura.

La figura 175, muestra las coordenadas de los vértices, de los focos, de los extremos del eje menor, del lado recto y la expresión algebraica de la elipse. Dichas representaciones sirven nos evidencian que las construcciones geométricas son un nexo para vincular las representaciones sintéticas a las analíticas.

Las coordenadas de los vértices V_1 (0,93 ; 2) V_2 = (13,07 ; 2)

Las coordenadas de los focos F_1 = (2 ; 2) F_2 = (12 ; 2)

Las coordenadas de los extremos del eje menor M = (7 ; -1,45) N = (7 ; 5,45)

Los extremos del lado recto L_1 = (2 ; 3,96) R_1 = (2 ; 0,04) L_2 = (12 ; 3,96) R_2 = (12 ; 0,04)

La ecuación de la elipse $\frac{(x-7)^2}{6{,}07^2} + \frac{(y-2)^2}{3{,}45^2} = 1$

Figura 175. 2° Enunciado 9. Equipo A

En la figura 176, el equipo muestra de manera explícita que la excentricidad constituye una propiedad extrínseca atribuida por el sujeto para que la elipse pueda ser constituida como un instrumento.

exentricidad es cercana a uno porque la elipse se alarga

Figura 176. 3° Enunciado 9. Equipo A

La excentricidad es una característica de la elipse, que movilizamos con el uso de un deslizador que fue diseñada en una actividad anterior, el cual alarga y contrae la curva cuando los focos son arrastrados con la finalidad que la elipse adopte otras características en sus formas. Se observa que el alumno responde a la interpretación de la elipse a pesar que la figura no es susceptible de ser manipulada como en el diseño de la actividad original.

El equipo B

Las acciones que realiza el equipo B son distintas a las que elabora el equipo A, pero en ambos casos están referidas a las propiedades atribuidas por las acciones de los alumnos cuando moviliza los esquemas de utilización que trae consigo o que construye.

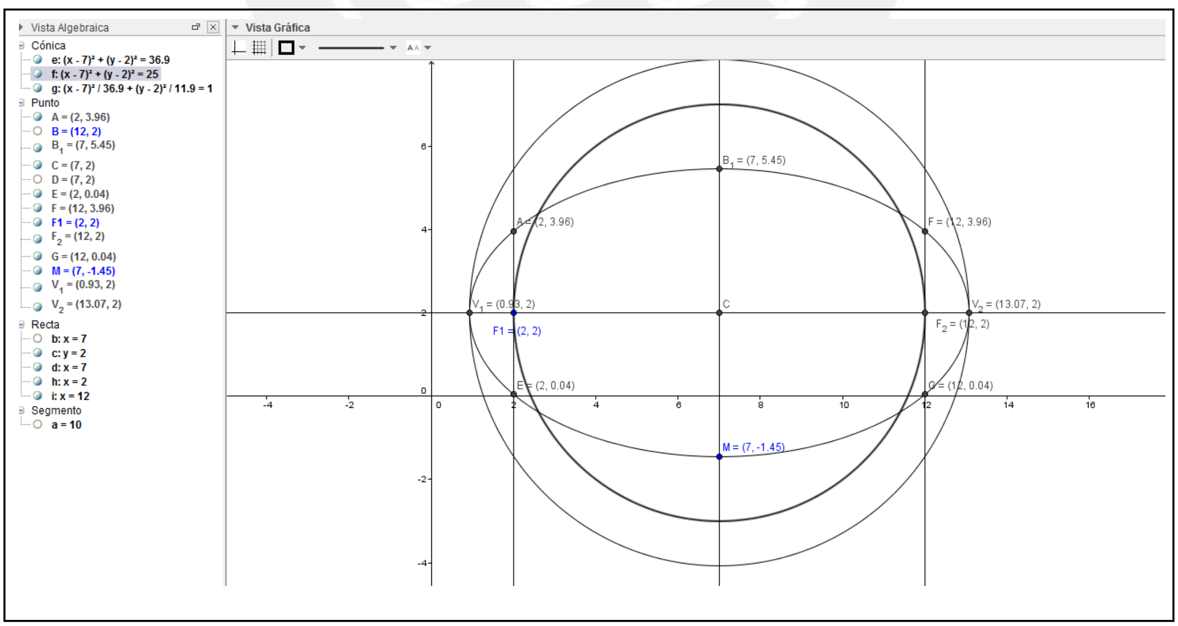


Figura 177. Gráfico 9 Equipo B

En la figura 177, se muestra las acciones del equipo B.

Traza el eje normal de la elipse, perpendicular al eje focal que contiene al punto M, uno de los extremos. Luego, determina el centro de la elipse intersectando ambos ejes.

Para hallar ambos vértices, hace uso de la condición geométrica de la elipse. Esto nos indica nuevamente que hay indicios de conservación de esta función conservada como propiedad del artefacto. Para ello encuentra la distancia del extremo del eje menor M a uno de los focos y la vincula con la distancia del centro a los vértices. Luego, toma este valor como radio y traza una circunferencia en el centro de la elipse.

Para determinar el siguiente foco F_2, traza una circunferencia de radio igual a la distancia del centro a uno de los focos con centro en el punto C de la elipse, como se había previsto en el análisis *a priori*. Luego con la herramienta "Elipse" traza la curva.

La figura 178, expresa las acciones que elabora para realizar la representación gráfica, que han sido explicadas con detalle en la parte superior.

- Encontré vértices a trazar circunferencia de radio $\overline{F_1M}$ ubicado en el centro C.
- Encontré focos con herramienta compás
- Dibujé elipse con los focos y un punto que puede ser M, V_1 o V_2.

Figura 178. 1° Enunciado 9. Equipo B

Al igual que el equipo A, percibimos indicios de instrumentación en la condición geométrica de la elipse (para determinar los focos), en algunas herramientas del Geogebra como rectas paralelas, perpendiculares, circunferencias, compás, puntos de intersección, distancias, uso del menú contextual (para realizar trazos que correspondieron a la determinación de los vértices, extremos del eje menor). De igual forma, esta actividad favoreció la construcción de un esquema de acción colectiva instrumentada, ya que los alumnos socializaron distintos esquemas de utilización que luego redactaron, descripción que fue descrita en la figura anterior.

En la figura 179, las expresiones algebraicas, las coordenadas de algunos puntos elementales como los vértices, los focos, los extremos del eje menor, los extremos del lado recto, nos revela que las construcciones geométricas son un nexo que puede trazar un vínculo entre las representaciones sintéticas a las analíticas.

Las coordenadas de los vértices	(0,93; 2) (13,07;2)
Las coordenadas de los focos	(2; 2) (12; 2)
Las coordenadas de los extremos del eje menor	(7; 5,45) (7; -1.45)
Los extremos del lado recto	(2; 3,96) (2; 0.04) (12; 3,96) (12; 0,04)
La ecuación de la elipse	$\frac{(x-7)^2}{36,9} + \frac{(y-2)^2}{11,9} = 1$

Figura 179. 2° Enunciado 9. Equipo B

En la figura 180, la interpretación que el equipo da a la excentricidad no es la correcta. Como expresa Rabardel (1995), ciertos hechos comienzan a tener estatus, pero el vocabulario e incluso las nociones todavía no están fijos.

Excentricidad tiene un valor cercano a 0

Figura 180. 3° Enunciado 9. Equipo B

En la siguiente actividad proponemos una actividad animada relacionada a la trayectoria elíptica de un cometa alrededor del sol y orientada a la evolución del instrumento.

Análisis de la actividad 10

En el cuadro 18 presentamos la actividad 10, que consta de la elaboración de una construcción animada.

Cuadro 18. Actividad10

ACTIVIDAD 10 – Construcción animada.

Abra el archivo Actividad_10.ggb. El cometa Halley describe una órbita elíptica alrededor del sol. La distancia más cercana del cometa al sol (perihelio) es aproximadamente $0.6UA$ y la más lejana (afelio) es aproximadamente $35UA$. La unidad astronómica (UA), es la distancia promedio de la tierra al sol para especificar grandes distancias ($1UA \approx 93\,000\,000$ millas)

Grafique en el sistema cartesiano la trayectoria elíptica del cometa y determine la expresión algebraica de la curva. ¿Qué relación tiene el valor numérico de la excentricidad y la forma gráfica de la elipse?

Expresión algebraica

Considere el origen del sistema cartesiano en el centro de la órbita y al sol en uno de los focos del eje de abscisas. Cuando termine pulse el botón secundario del mouse sobre el punto que representa el cometa Halley y elija “Animación automática” para generar movimiento en el cometa alrededor del sol. Deje visible la trayectoria de la elipse, el sol y el cometa. Para realizar cálculos numéricos puede ingresar “Vista Hoja de Cálculo” del Geogebra.

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_10.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo. Las actividades han terminado

Análisis a priori de la actividad 10

En el proceso de instrumentalización de la elipse se fueron agregando distintos esquemas de utilización que favorecieron en la elaboración de la elipse como un instrumento más eficaz. Creemos que la elipse puede ser movilizada en esta construcción animada que consiste en la construcción de la órbita elíptica de un cometa alrededor del sol, la cual fue descrita por el astrónomo británico Edmund Halley en 1705. *La situación planteada pretende utilizar el instrumento elipse aplicado en el campo de la astronomía*, y que los alumnos logren representar la trayectoria elíptica del cometa Halley alrededor del sol, siendo el sol uno de los focos de la elipse.

Creemos que no tendrán dificultades en construir la trayectoria elíptica de un cometa alrededor del sol. Pensamos que la movilización de algunas propiedades de la elipse, la representación gráfica y la influencia de algunas herramientas del Geogebra como esquemas de uso, permitirán resolver la actividad.

Pensamos que los alumnos además, harán una interpretación correcta de la excentricidad al afirmar que la excentricidad cercana a uno está asociada a una gráfica elíptica alargada como lo muestra su representación.

En la figura 181, mostramos la trayectoria elíptica del cometa, el sol y el centro de la elipse, los cuales creemos lograrán construir sin dificultades

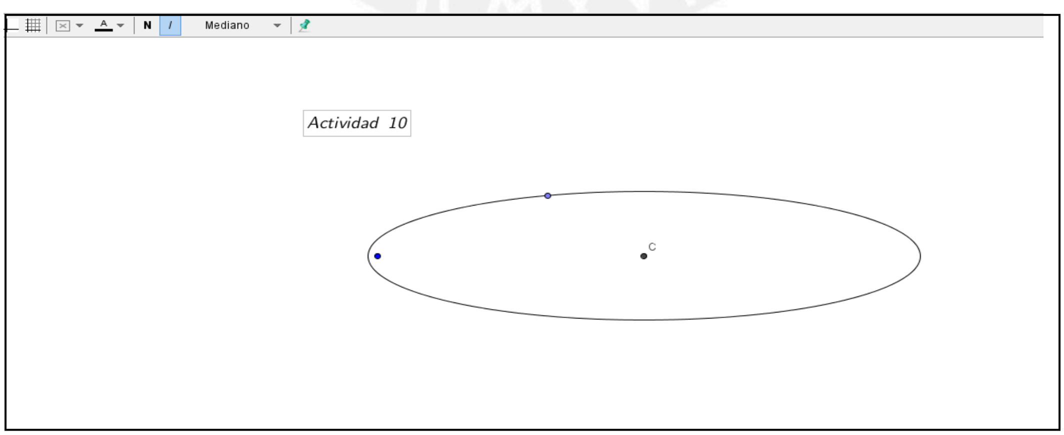


Figura 181. Actividad 10

Posibles esquemas de utilización,

- Las propiedades de la elipse y la expresión algebraica de la curva
- Usa las herramientas "Recta perpendicular", "Intersección de dos objetos", "Circunferencia", "Elipse", "Renombrar" , "Vista Algebraica" , "Vista Hoja de Cálculo", "Distancia", "Animación automática", Barra de Entrada

Parte predictiva de las acciones.

Con la herramienta "Elige y mueve" hace visible los ejes coordenados. Para determinar el centro en la Barra de Entrada digita $C = (0;0)$. También puede hacer uso de la herramienta "Intersección de dos objetos", en este caso los ejes coordenados.

Para determinar los vértices, en la Vista Hoja de Cálculo opera $\frac{(35 + 0.6)}{2} = 17.8$. Luego en la barra de entrada ingresa $V_1 = (-17.8,0)$ y $V_2 = (17.8,0)$. También puede determinar los vértices haciendo uso de la herramienta "Circunferencia" con centro en el punto C y radio de longitud igual a 17.8, luego con la herramienta "Intersección de objetos" halla los vértices.

En la figura 182 mostramos los trazos que los alumnos realizarán para la construcción de la trayectoria elíptica. Observamos que la Vista Hoja de Cálculo es visible para el cálculo de algunas operaciones que determinen la ubicación de otros elementos en la trayectoria.

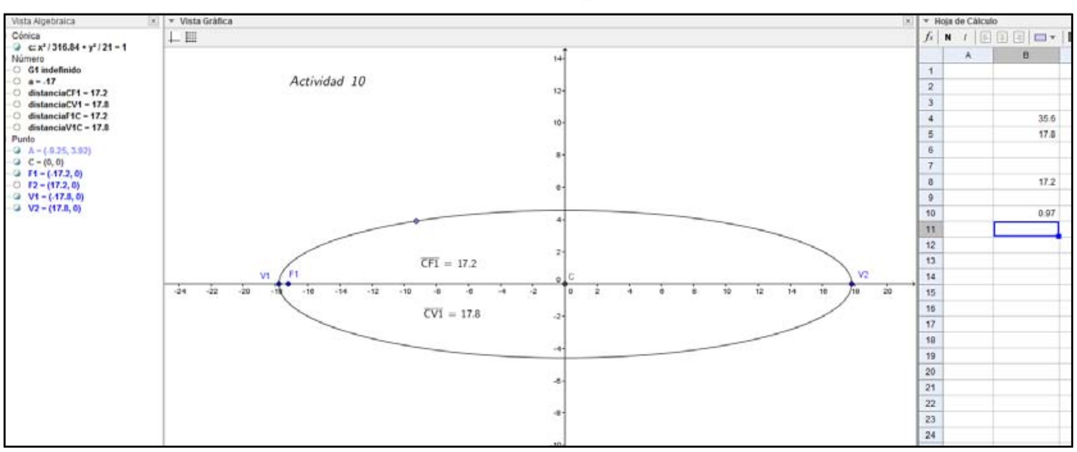


Figura 182. Desarrollo Actividad 10

Para determinar los focos en la Vista Hoja de Cálculo opera $17.8 - 0.6 = 17.2$. Luego en la barra de entrada ingresa $F_1 = (-17.2,0)$ y $F_2 = (17.2,0)$. También puede determinar los focos con la herramienta "Circunferencia" con centro en un vértice V_1 y radio de longitud igual a, luego con la herramienta "Intersección de objetos" hallar los focos.

Para dibujar la elipse, señala los focos F_1 y F_2 de la elipse y cualquiera de los vértices, entonces se dibuja la curva. Luego con la Herramienta "Distancia" calcula la distancia del centro al sol (c) y la distancia del centro a uno de los vértices (a). En la Vista Algebraica registra la expresión algebraica correspondiente a la representación gráfica.

No es necesario que halle el valor de la excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{17.2}{17.8} = 0.97$, basta que observe la forma alargada de la elipse para indicar que es alargada. En la vista algebraica también puede observar la ecuación la elipse $\frac{x^2}{316.84} + \frac{y^2}{21} = 1$

Por ejemplo, en la figura se muestra el trazo de los vértices que representan en un caso la distancia más cercana del cometa al sol (perihelio) y en otro la más lejana (afelio) del cometa a dicha estrella. De igual forma se observa la ubicación del sol situado en uno de los focos de la elipse de acuerdo a la información que se recoge sobre el cometa Halley y se le ubica sobre el eje de abscisas. La Vista Algebraica deberá inicialmente ser visible para determinar la expresión algebraica de la curva elíptica. Posteriormente, los alumnos dejarán visible la trayectoria, el sol y el cometa.

Para ocultar los puntos y rótulos trazados, con la herramienta "Elige y mueve" señala los puntos a ocultar y con el botón derecho selecciona "Muestra Objetos", entonces los puntos y los rótulos indicados se ocultan. Para ocular los ejes selecciona la casilla superior izquierda de la vista gráfica. Cierra la vista Algebraica y vista Hoja de Cálculo.

Para generar movimiento, con la herramienta "Punto" hace clic sobre la elipse. Luego pulsa el botón secundario del mouse y elige "Animación Automática"

Análisis a posteriori de las actividad 10

En esta última actividad, los alumnos elaboraron una construcción animada elaborando un esquema de acción instrumentada colectiva, ya que seleccionaron la estrategia más conveniente para cada grupo. De acuerdo al análisis *a priori*, las acciones de los alumnos evidenciaron que *la movilización del instrumento elipse en la trayectoria elíptica planetaria, influido por las herramientas del Geogebra, nos dan indicios del surgimiento y evolución del instrumento.* Al respecto Rabardel (1995), indica que el instrumento constituido puede ser efímero, relaciona únicamente las circunstancias singulares de la situación con las condiciones que el sujeto está confrontado, o puede tener un carácter permanente, disponible para acciones futuras. De igual forma, la descripción de la excentricidad nos indica que existen indicios que dicha característica está instrumentada pues describieron que la excentricidad se halla relacionada con la forma alargada o redonda de la representación gráfica.

Figura 183. Equipos en acción.

En la figura 183, se muestra a los equipos que sociabilizaron simultáneamente, interactuando de manera conjunta, para dar paso a los esquemas colectivos que describiremos a continuación.

El equipo A

Se observa en la figura 184, que algunas propiedades de los elementos de la elipse, específicamente la condición geométrica de la elipse, la representación gráfica y algunas herramientas del Geogebra permitieron resolver la actividad, como se detalla a continuación

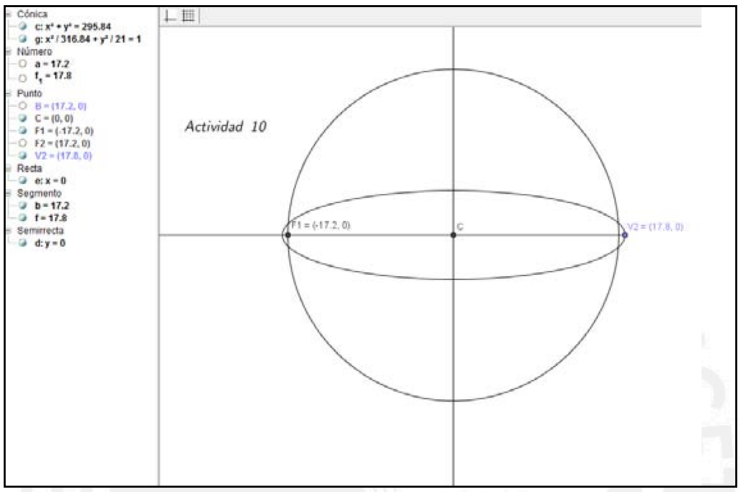


Figura 184. Gráfico 10 Equipo A

El equipo A moviliza esquemas de acción instrumentada colectiva en la construcción de su animación, porque moviliza acciones distintas a las que se previó en el análisis *a priori*, como el trazo de una circunferencia para determinar uno de los focos.

La descripción de las acciones:

El equipo A hace visible los ejes de coordenadas. Luego usa la Barra de Entrada e ingresa el centro $C(0;0)$ y las coordenadas de $F_2(17.2;0)$ sin hacer hace uso de la Vista Hoja de Cálculo como se había previsto.

Para hallar las coordenadas de dicho foco un integrante del equipo le pide a su compañero que calcule la suma de las distancias del perihelio y afelio, longitud que corresponde a la del eje mayor.

Con el resultado $0.6+35=35.6\ UA$, los alumnos determinan el valor de la longitud del semieje mayor. Con esta longitud del semieje mayor $(a=17.8)$, proceden a restar del semieje la longitud del perihelio, resultando $c=17.8-0.6=17.2\ UA$. Luego ingresan por medio de la Barra de Entrada las coordenadas del foco de la elipse que corresponde a $F_2(17.2;0)$.

Omiten el ingreso de las coordenadas relativas a F_1 por medio de la Barra de Entrada, y hacen uso de la intersección de la circunferencia centrada en $C(0;0)$, radio $\overline{F_2C}$ y el eje focal. Uno de los integrantes hace visible las coordenadas del foco $F_1(-17.2;0)$ con el objetivo de validar lo que habían anticipado cuando hallaron la distancia del centro a uno de los focos en la parte inicial.

Luego, el equipo ingresa las coordenadas del vértice $V_2(17.8;0)$ y con los dos focos creados y el vértice trazado dibuja la elipse. Inserta un punto sobre la elipse y activa la herramienta "Animación Automática" para generarle movimiento a la trayectoria.

La excentricidad es casi uno porque la gráfica de la elipse es alargada

Expresión Algebraica $\frac{x^2}{316.84}+\frac{y^2}{21}=1$

Figura 185. Enunciado 10. Equipo A

La figura 185 muestra que movilizaron la noción de excentricidad, la cual vincularon a la forma de la gráfica un valor numérico cercano uno. De igual forma asociaron la representación gráfica a la expresión algebraica que visualizaron en la Vista Algebraica. Para llegar a esta expresión, movilizaron la condición geométrica de la elipse y determinaron los parámetros a,b y c de la elipse.

El equipo B

La descripción de las acciones:

El equipo B, hace visible el eje de coordenadas y ubica el centro. Traza dos circunferencias concéntricas de radios $\overline{CV_1}$ y $\overline{CF_2}$, que corresponden a las distancias del centro al vértice y al foco respectivamente. Para determinar la longitud del eje mayor y la distancia del centro al foco, el equipo B usa similar estrategia que la del equipo A. Esto probablemente, porque al término de esta actividad, los equipos compartían avances de su proceso. Sin embargo, el equipo B no hace uso de la Barra de Entrada para la ubicación de los puntos que corresponden a los vértices y focos, sino que emplea la herramienta "Circunferencia" para el trazado de dichos puntos.

Finalmente, el equipo B usa la herramienta "Intersección de dos objetos" y logra hallar los vértices y focos situados al extremo derecho y aplica la herramienta "Elipse".

Inserta un punto sobre la elipse, activa la herramienta "Animación Automática" para generarle movimiento a la trayectoria.

En la figura 186 se puede observar las construcciones elaboradas por este equipo

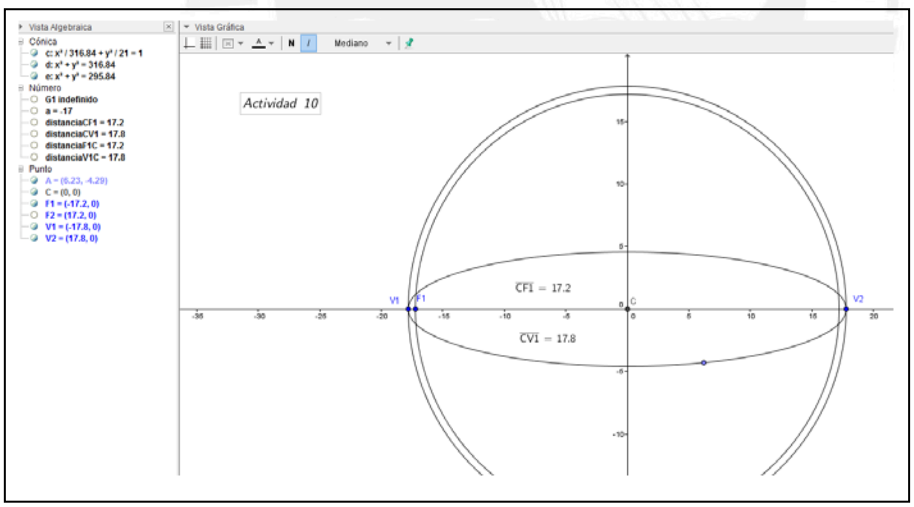


Figura 186. Gráfico 10 Equipo B

Se observa que la construcción de la órbita elíptica de un cometa alrededor del sol, proporciona indicios del surgimiento del instrumento elipse. Esto probablemente, debido al enriquecimiento de las propiedades del artefacto y al uso de algunas las herramientas del Geogebra, a lo largo de todas las secuencias de actividades.

Afirmamos que para que los alumnos movilicen las acciones anteriores, también movilizaron esquemas de acción colectiva instrumentada ya que dentro de las múltiples alternativas que tenían para desarrollar la actividad, seleccionaron la que mejor les convenía, elaborando una técnica distinta a la del equipo A y a la que se consideró en el análisis *a priori*, ya que se trazaron dos circunferencias, que tuvieron como radios la longitud de los parámetros a y c y la condición geométrica de la elipse.

En la figura 187 se muestra que los alumnos se apropiaron de la noción de excentricidad al asociar la forma alargada de la elipse con el valor numérico cercano a uno. De igual forma escriben la expresión algebraica de la elipse que determinaron al relacionar dicha expresión con la Vista Algebraica del Geogebra.

La forma alargada de la gráfica indica que la excentricidad es cercana a 1.

Expresión Algebraica $\frac{x^2}{316,84} + \frac{y^2}{21} = 1$

Figura 187. Enunciado 10. Equipo B

Como indica Rabardel (1995), el instrumento puede estar constituido de manera efímera, pues relaciona circunstancias singulares de la situación con las condiciones que el sujeto está confrontando. El enriquecimiento progresivo de las propiedades de la elipse en el desarrollo de las actividades, por parte de los alumnos, nos muestra que los procesos de instrumentalización e instrumentación, contribuyeron de manera solidaria al surgimiento y a la evolución del instrumento.

Análisis final de los resultados.

Respecto a la actividad 1, los alumnos que ya estaban instrumentados con la circunferencia como lugar geométrico, continuaron instrumentalizándola, debido a que la enriquecieron con una nueva propiedad, la cual fue construida movilizando esquemas de uso como la mediatriz de un segmento, circunferencia y triángulo isósceles. Dicha propiedad indica que *en una circunferencia con centro* C, *que contiene al punto interior fijo* Q, *es posible encontrar un punto* A *sobre cualquier radio* $\overline{CP}$, *de tal forma que resulte lo mismo sumar las medidas de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ *y las medidas de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$, *y que además esa suma es una constante.* Ambos equipos, no tuvieron dificultades en movilizar sus esquemas relacionados a la mediatriz de un segmento como conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento o como recta perpendicular por el punto medio de dicho segmento, la circunferencia como lugar geométrico y la noción de triángulo isósceles en términos de sus lados iguales, como se previó en el análisis *a priori* de la Ingeniería Didáctica.

En esta etapa, algunas herramientas del Geogebra referidas al trazo de la mediatriz, segmento, intersección de objetos, trazo de polígonos, distancia entre dos puntos, se encuentran en una fase de descubrimiento y selección. El equipo B tiene problemas con la herramienta "Intersección de dos Objetos", lo que ocasiona una restricción de la acción ligada a la estructura y funcionamiento del programa. Creemos que dicha herramienta del Geogebra debe ser mostrada de manera más puntual en las sesiones de exploración de este programa de AGD.

En la actividad 2, los alumnos continuaron instrumentalizando la circunferencia de centro C y radio $\overline{CP}$, debido a que fue enriquecida con otra característica adicional. En la actividad anterior, dijimos que el punto A en dicha circunferencia cumple con la condición que indica que resulta lo mismo sumar las distancias de los segmentos $\overline{CA}$ *y* $\overline{AQ}$ que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ siendo Q un punto fijo en el interior de la circunferencia. Ahora indicamos que dicho punto A que cumple con la propiedad anterior, corresponde a la trayectoria de una elipse, representación gráfica que se logró con el uso de la herramienta

“Activa Rastro” y que permitió el trazo de la curva a través del desplazamiento de dicho punto bajo ciertas restricciones de construcción.

Según el Enfoque Instrumental, el artefacto elipse dejó de ser abstracto para los alumnos porque hay reconocimientos en el artefacto de una de las propiedades de la elipse. Es así que acreditamos que se inicia el proceso de instrumentalización en la elipse debido a que iniciamos el enriquecimiento de una de las propiedades del artefacto por parte del sujeto, es decir que *si el punto A pertenece a una elipse y Q un punto fijo en el interior de la circunferencia, entonces el punto A cumple con la condición que la suma de las distancias de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$, es una constante igual al radio $\overline{CP}$ de la circunferencia*. En esta actividad, ambos equipos tuvieron dificultades en el uso de la herramienta “Activa Rastro” y notamos restricciones de existencia cuando el mouse fue soltado antes de completar el trazo, de intencionalidad cuando en un intento de desplazamiento el objeto desaparece y de acción por el desconocimiento de la propiedad de dicha herramienta que engrosa el trazo de la elipse.

En la actividad 3, los alumnos continuaron instrumentalizando la elipse, enriqueciéndola con las propiedades referidas al eje focal, eje mayor, eje normal y eje menor. De igual forma afirmamos que los alumnos de ambos equipos verificaron que estaban instrumentados con la condición geométrica de la elipse hallada en la actividad 2, porque pudieron calcular la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ que corresponden al radio de la circunferencia. Por otro lado, dicha condición geométrica de la elipse continuó instrumentalizándose, ya que otra característica fue adicionada, y los alumnos indicaron que *la suma de las medidas de los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ corresponde al eje mayor de la elipse*, este nuevo instrumento permitió expresar la condición geométrica de la elipse como una relación en la que se omita el radio de la circunferencia y por tanto omita también la representación gráfica de la circunferencia.

De igual forma, dicha condición geométrica de la elipse evolucionó como esquema de uso, ya que permitió construir otro nuevo esquema en términos de los parámetros de una elipse, cuya *relación geométrica se expresa como* $a^2 = b^2 + c^2$. Este descubrimiento progresivo de las propiedades de la elipse le va dando cierto significado al instrumento elipse.

Los alumnos de ambos equipos, movilizaron esquemas elementales como mediatriz, triángulo isósceles, el Teorema de Pitágoras y reutilizaron las herramientas del Geogebra, lo que les permite enriquecer las propiedades de la elipse. En esta situación, algunas herramientas adicionales como recta perpendicular o paralela, podrían estar en la fase de familiarización o de personalización. El equipo A, se familiariza con el uso de la propiedad que aparece en el texto numérico: “Posición absoluta en pantalla” y que permite arrastrar los textos a cualquier posición de la pantalla, mientras que el equipo B hace uso de la herramienta “Distancia” porque encaja esta herramienta de acuerdo a sus necesidades.

En la actividad 4, los alumnos construyeron la excentricidad como un esquema de acción instrumentada y le atribuyeron dicha propiedad a la elipse, para ello movilizaron como esquemas de uso el deslizador y un texto dinámico vinculado a las distancias del centro a los focos y a los vértices, los cuales fueron creados para esta actividad. La razón de la excentricidad $e = \frac{c}{a}$ *permitió cuantificar los valores y observar lo redonda o alargada que puede ser la representación gráfica de la elipse*. Para ello, incorporamos un texto dinámico que permitió relacionar los valores de los parámetros c y a pero de manera gráfica, acción que no sería posible en un dibujo de naturaleza estática. Esta circunstancia nos permitió además comprobar que la restricción $c < a$ evita que la curva pueda adoptar la forma de una recta o de una circunferencia. Movilizaron como esquemas de uso la noción de los parámetros a y c, la representación gráfica de la elipse.

En la actividad 5, inferimos que los alumnos de los equipos A *y* B, instrumentaron la noción *de lado recto de la elipse porque la identificaron como la cuerda perpendicular al eje focal que pasa por sus focos y trazaron los segmentos que representan a dichas cuerdas*. Para ello, los alumnos instrumentalizaron la herramienta “Compás”, y movilizaron dicha herramienta para localizar la posición de los focos.

De igual forma, en el análisis *a priori* no previmos que los alumnos podían ubicar los focos de la elipse, y por lo tanto trazar los lados rectos correspondientes. Por ejemplo, el equipo A movilizó la relación $a^2 = b^2 + c^2$ como esquema de uso y de manera personalizada la Vista Hoja de Cálculo, para determinar el parámetro c, por tanto la ubicación de los focos y de esa forma realizar el trazo del lado recto de la elipse. De manera análoga, el equipo B, construyó un nuevo esquema de acción instrumentada, una *nueva propiedad para la elipse, en la que se indicó que la distancia desde uno de los extremos del eje menor de la elipse hacia uno de los focos de dicha curva es la longitud del semieje mayor,* dicho esquema fue construido sobre la base de otros esquemas de uso como la condición geométrica de la elipse y la mediatriz de un segmento. Además el equipo B pudo llegar a determinar *la longitud del lado recto de la elipse* $\frac{2b^2}{a}$, movilizando como esquema de uso la condición geométrica y la relación pitagórica de la elipse.

Como se indicó en el análisis *a priori,* la herramienta "Compás" se encuentra en una fase de Descubrimiento con restricción en la acción. Encontramos también una restricción de existencia en el uso del mouse cuando se quiso ocultar algunas construcciones, restricción que no fue prevista en análisis *a priori*. Tampoco se previó que la herramienta "Polígono" y la Hoja de Cálculo se inscribiría en una fase de personalización para ambos equipos. Además, ciertas herramientas del Geogebra, como trazo de rectas paralelas, perpendiculares, intersección de puntos continuaron instrumentándose por las construcciones que los estudiantes elaboraron en la clase de acciones que realizaron.

En la actividad 6, esperamos haber establecido un vínculo entre el enfoque sintético y algebraico cuando se logró una relación *entre la condición geométrica de la elipse y la condición algebraica en el sistema de coordenadas cartesiano,* es decir la *representación analítica de la representación gráfica en un sistema de ejes coordenados, tal forma que se tienda un puente entre el enfoque sintético y el analítico*

La representación gráfica de la elipse se elaboró, considerando dos focos y un punto de la elipse. Se determinaron los focos de dicha curva, para ello el equipo A movilizó la herramienta “Circunferencia dado su centro y radio”. La utilización de dicha herramienta no fue prevista en el análisis *a priori* pero su aplicación es similar a la herramienta “Compás” y según la clasificación de Trouche (2004), dicha herramienta se halla en la fase de personalización pues los alumnos la encajaron de acuerdo a sus necesidades. De manera correlativa, verificamos que los alumnos del equipo B están instrumentados con la herramienta “Compás” porque determinaron los focos de acuerdo a lo previsto en el análisis *a priori*.

La gráfica global de la elipse se elaboró con el uso de la herramienta “Elipse” del Geogebra, señalando los dos focos y el punto de paso. Al respecto, dicha herramienta “Elipse”, fue instrumentalizada porque los alumnos se informaron de sus características leyendo la ventana del menú contextual, luego pasó por el proceso de instrumentación porque lograron representar la gráfica de la elipse. Con la selección de la Vista Algebraica, pudieron visualizar los ejes coordenados de la representación gráfica, determinando las coordenadas de los vértices, focos, extremos del eje menor, longitud de los parámetros y expresiones algebraicas en un sistema de coordenadas cartesiano, con el propósito de establecer un puente entre el enfoque sintético y analítico. La expresión algebraica fue obtenida porque los alumnos movilizaron el esquema de uso, relativo a la condición geométrica y a la distancia entre dos puntos, luego escribieron la expresión algebraica correspondiente.

Para el cálculo de la longitud del lado recto de la elipse, el equipo B movilizó la relación $\frac{2b^2}{a}$ haciendo uso de la longitud de los parámetros a, b y c Todo esto nos indica que los alumnos de ambos equipos continuaron instrumentado el lado recto de la elipse porque pudieron trazar la cuerda que los representa y además expresaron su relación haciendo uso de los parámetros de la elipse.

En la actividad 7, podemos afirmar que *los alumnos pasaron por un proceso de instrumentalización respecto a la expresión algebraica* $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ *porque le atribuyeron* *propiedades a los parámetros* m y n *vinculándolos con los semiejes de la elipse. De igual forma, podemos decir que los alumnos instrumentaron dicha expresión, porque lograron vincularla a una representación gráfica cuando los parámetros* m y n *tomaron diversos valores*.

Se usó como mediador, un deslizador, con el cual los alumnos logran manipular el eje focal de la elipse y posicionarlo sobre los ejes coordenados. No se pronosticó en el análisis *a priori* las dificultades ligadas a la estructura y funcionamiento del programa, específicamente problemas para ingresar el exponente de una de las variables haciendo uso del teclado como unidad periférica, lo cual está tipificado como restricciones de acción. Al respecto, el Geogebra dispone de un teclado Virtual desde donde se pueden seleccionar los símbolos y que fue analizado en la primera sesión exploratoria del programa. Suponemos que la Barra de Entrada, que sirve medio de ingreso de las expresiones se halla en proceso de instrumentalización. Las nociones de eje mayor, menor, eje focal continúan instrumentadas porque los alumnos logran aplicar dichas nociones a la expresión algebraica de la elipse.

En la actividad 8, los *alumnos movilizaron como esquema de uso, la expresión algebraica* $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$, *y lograron expresarla de la forma* $\frac{(x-h)^2}{m^2}+\frac{(y-k)^2}{n^2}=1$, *siendo el centro* (h,k) *cualquier punto del plano y el eje focal paralelo a los ejes coordenados*. Para ello, se creó la herramienta "Deslizador" vinculada a un vector, que se usó para trasladar la elipse por el plano cartesiano, lo que generó actualizaciones de sus expresiones algebraicas en la Vista Algebraica. Se trazaron los focos y sus lados rectos respectivos, debido a que están instrumentados con la noción de lado recto, es decir de toda cuerda perpendicular al eje focal que pasa por el foco, es un segmento que representa el lado recto. De igual forma el uso de las herramientas para dicha construcción, como el trazo de rectas, puntos de intersección, trazos de circunferencias, uso del compás, se hallan en fase de personalización porque según Trouche (2004) el sujeto las encaja dentro de su requerimiento. Se determinó que la herramienta del Geogebra: "Segmento de longitud fija" hizo las veces de radio de una circunferencia. Esto nos lleva a pensar que dicha herramienta, está en la fase de transformación porque se utilizó de manera diferente a la planificada por el creador. Al trasladar la elipse por el plano, los alumnos de ambos equipos consideraron como elementos invariantes el eje mayor, eje menor y el lado recto.

En la actividad 9, creemos que los alumnos están instrumentados con relación a la elipse visto que los alumnos dibujaron una elipse, a partir de uno de los focos y un extremo del eje menor. Además determinaron los elementos que le han sido atribuidos a dicha curva. Ambos equipos demostraron que elaboraron esquemas de acción colectiva instrumentada porque dibujaron la elipse seleccionando diversos tipos de construcciones. Por ello, *creemos que los alumnos movilizaron las propiedades de la elipse, ya que el artefacto ha sido enriquecido con dichas características que fueron emergiendo, evolucionando, y agrupándose a lo largo de las anteriores actividades*. Movilizaron nuevamente la condición geométrica de la elipse como esquema de uso, para determinar los focos y luego elaboraron el trazo de la elipse. La identificación de las expresiones algebraicas, nos indica que dicha expresión, fue vinculada a una representación gráfica cuando los parámetros m y n tomaron diversos valores. Además, las construcciones sirvieron de puente para vincular el enfoque sintético al analítico.

Finalmente la actividad 10, usa animación. Al respecto, estamos de acuerdo con Rabardel, cuando afirma que todo artefacto es elaborado con algún propósito y que los artefactos a los que se enfrentan los sujetos se caracterizan precisamente por ser elaborados para realizar funciones que se acompañan de la acomodación de esquemas, que puedan convertirse en medios que actúan sobre algún objeto determinado. En ese sentido, planteamos una actividad para la descripción del cometa Halley como órbita elíptica alrededor del sol. Los alumnos no tuvieron problemas para representar la trayectoria elíptica del cometa, por lo *tanto presumimos que la elipse se inscribe como medio para alcanzar determinada meta y pueda ser constituido como instrumento*. No tuvieron inconvenientes en interpretar la excentricidad sobre la base de la representación gráfica ni redactar la expresión algebraica de la elipse. Resaltamos que ambos equipos elaboran esquemas de acción instrumentada colectiva debido a que seleccionaron las construcciones que mejor les convenía.

CONSIDERACIONES FINALES

La realización de nuestro trabajo estuvo centrada en propiciar la instrumentalización de la noción de la elipse cuando los alumnos trabajan una secuencia de actividades mediadas por el Geogebra. Por tal motivo, creímos conveniente hacer uso del Enfoque Instrumental y de la Ingeniería Didáctica, como referentes para la orientación de nuestra investigación.

Pensamos que el referente metodológico nos ofreció subsidios para comprender la perspectiva de los alumnos en torno al objeto matemático que los rodea. El análisis preliminar que elaboramos en la primera fase metodológica, nos permitió caracterizar las tres dimensiones de la Ingeniería Didáctica: histórica, cognitiva y didáctica, las cuales permitieron tener en cuenta la complejidad del objeto matemático.

La primera dimensión logró enfocarnos en la historicidad de la elipse y en su tratamiento durante su evolución histórica, mostrando que no siempre hablar de cónicas significó encontrar expresiones algebraicas vinculadas a representaciones con ejes coordenados y que existen otros planteamientos que acarrean sus propias complejidades. Desde esa óptica planteamos la posibilidad de enfocar la noción de elipse basada en construcciones y representaciones geométricas, que nos permitieron transitar desde el contexto sintético al analítico, incorporando en nuestras actividades, un programa de AGD, específicamente el Geogebra, como mediador en nuestras secuencias de actividades.

Poco hubiésemos conseguido, si en el diseño de la secuencia de actividades no habríamos considerado los saberes previos señalados en el análisis cognitivo de la Ingeniería Didáctica. Las acciones que los alumnos evidenciaron en las actividades, fueron producto de las nociones previas que consigamos en nuestra prueba de diagnóstico, cuando caracterizamos a los sujetos de investigación en el capítulo 4. Para abordar este tema creímos conveniente tener en cuenta nociones de la mediatriz, circunferencia y parábola como lugar geométrico, y el reconocimiento de algunas propiedades de sus elementos como la cuerda, radio y lado recto. Estas propiedades estuvieron presentes en el desarrollo de las actividades, desarrolladas como esquemas de uso y orientadas hacia actividades específicas, relacionadas con algunas características de la elipse. En nuestra prueba de diagnóstico, específicamente en las preguntas cinco y seis, percibimos limitaciones en la identificación del lado recto como elemento invariante de la parábola, situación que respondió a la afirmación de Sandoval (2009) que indica que una representación estática no alcanza a ser concebida, al mismo tiempo, como objeto perceptivo y estructural. En nuestra fase de experimentación, en la actividad 5, una pregunta fue planteada en relación al lado recto de la elipse, lo que permitió que el alumno a través de representaciones dinámicas, valide y verifique sus conjeturas y desarrolle la actividad correspondiente.

En cuanto a la dimensión didáctica, pensamos que los procesos de aprendizaje pueden estar condicionados a las características de los sistemas de enseñanza, influidos por los textos universitarios en la enseñanza de las cónicas. Si bien todos los libros de texto muestran la condición geométrica de la elipse y su respectiva expresión algebraica, los procedimientos que usan para emerger y enriquecer los elementos que los constituyen son estrictamente algebraicos, usando similares procedimientos para establecer las demás componentes, escaseando actividades que correspondan a construcciones geométricas. Sólo el libro de Swokowski (2011) propone actividades con el uso de la calculadora, a diferencia de los otros libros de textos que hacen uso de papel y lápiz. El mismo autor le da un leve carácter dinámico a la definición de elipse al proponer la construcción de la elipse usando una cuerda sujeta por los extremos a un par de tachuelas, sin embargo los aspectos dinámicos como la trayectoria de una elipse, la interpretación de la excentricidad, la traslación de la elipse por los planos, han sido elaborados con procedimientos eminentemente algebraicos.

Sobre este contexto y sumado a las pocas investigaciones de los aspectos cognitivos de la noción de elipse, tomamos como base teórica el Enfoque Instrumental, que creímos pertinente porque nuestras actividades fueron diseñadas sobre el surgimiento y enriquecimiento de las propiedades de la elipse, que fueron asimilándose de manera progresiva, cuando los alumnos elaboraron construcciones geométricas mediadas por el Geogebra. Producto de este análisis, fuimos instrumentando las propiedades de la elipse, dichos esquemas de acción instrumentada evolucionaron a esquemas de uso y facilitaron las actividades propuestas en la secuencia de aprendizaje, minimizando las dificultades que se pudieron haber presentado.

Al término de nuestro estudio podemos señalar que hemos respondido a la pregunta de investigación ya que hay indicios que las actividades propuestas permitieron el surgimiento y el enriquecimiento progresivo de las propiedades de la elipse influenciado por el Geogebra. De esta forma, hicimos surgir la condición geométrica de la elipse, la relación entre sus parámetros $a^2 = b^2 + c^2$, la excentricidad, la ubicación de los vértices, focos, extremos del eje menor, el trazo de la longitud del lado recto y vincularemos la representación gráfica a la expresión algebraica correspondiente, identificando la relación entre los semiejes de la curva elíptica y los elementos de dicha expresión algebraica.

De igual forma, por medio de las acciones de los alumnos, logramos identificar los posibles esquemas de utilización que construyeron o movilizaron cuando trabajaron nuestra secuencia de aprendizaje. Al respecto nos basamos en los resultados determinados en la descripción del proceso de instrumentalización de la elipse. Así, detallamos que en la actividad 1, los alumnos continuaron instrumentalizando la circunferencia al enriquecerla con una propiedad adicional, movilizando esquemas de uso pre existentes como la mediatriz de un segmento, circunferencia y triángulo isósceles. En la actividad 2, dicha propiedad de la circunferencia evolucionó de esquema de acción instrumentada a esquema de uso y favoreció el inicio del proceso de instrumentalización en la elipse, la curva deja de ser un artefacto abstracto porque los alumnos señalaron que en una elipse, la suma de sus distancias desde un punto de la elipse, a otros dos puntos fijos en el interior de dicha curva, es una constante igual al radio de la circunferencia. Evidenciamos que dicha condición geométrica fue enriquecida en la actividad 3, ya que los alumnos señalaron que dicha constante llamada radio, corresponde al eje mayor de la elipse, logrando omitir el gráfico de la circunferencia. En la misma actividad, la condición geométrica evolucionó de esquema de acción instrumentada a esquema de uso porque permitió construir una nueva propiedad de la elipse, en términos de sus semiejes mayor, menor y la semidistancia focal, llamados parámetros, cuya relación se expresó como $a^2 = b^2 + c^2$.

Percibimos, que en la actividad 4, movilizaron los esquemas de uso relativo a los parámetros a, c, semiejes mayor y menor respectivamente, y la representación gráfica de la elipse. Esto contribuyó a la construcción de un nuevo esquema de acción instrumentada, lo que les permitió obtener representaciones alargadas o casi redondas, pero también cuantificadas mediante la incorporación de un texto dinámico del Geogebra que facilitó relacionar los valores de los parámetros c y a mediante la razón $\frac{c}{a}$ al que llamamos excentricidad. Con base a los esquemas de acción instrumentada construidos, como la relación entre los parámetros expresada como $a^2 = b^2 + c^2$, la condición geométrica y el teorema de Pitágoras inferimos que en la actividad 5, dichos esquemas se movilizaron como esquemas de uso para determinar los focos, trazar los lados rectos de la elipse y determinar su longitud $\frac{2b^2}{a}$. La herramienta "Compás", fue instrumentalizada e instrumentada como facilitador para dicho objetivo. Acreditamos que en otros pasajes la condición geométrica fue usada como esquema de uso, como en la actividad 6, en la que junto al esquema distancia entre dos puntos, determinaron la expresión algebraica de la elipse $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$, que luego continuaron instrumentalizando e instrumentando en las siguientes actividades 7 y 8, debido a que le atribuyeron otras propiedades a los parámetros m y n, porque lograron vincularla a una representación gráfica con ejes paralelos a los ejes coordenados y aplicaron dichos resultados cuando los parámetros m y n tomaron diversos valores.

Destacamos que los esquemas de acción colectiva instrumentada, fueron producto de la emergencia que detectamos del trabajo colectivo de los alumnos y que fueron ejemplificadas en muchos pasajes de nuestra secuencia de actividades cuando los integrantes de cada equipo intercambiaron esquemas de utilización y ejemplificaron en la redacción de sus textos.

Pensamos que el proceso de la Génesis Instrumental sucedió cuando las componentes artefactuales de la elipse se movilizaron como instrumentos para la apropiación de otras componentes. De esta forma, observamos como la condición geométrica de la elipse permitió construir en algunas ocasiones nuevas propiedades, como la relación $a^2 = b^2 + c^2$ y como la expresión algebraica de la elipse $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$. De la misma manera, percibimos Génesis Instrumental cuando la relación entre los parámetros $a^2 = b^2 + c^2$ y la condición geométrica de la elipse, permitieron determinar la posición de los focos, el trazo de los lados rectos y determinar su longitud en términos de los parámetros. Finalmente observamos dicho proceso, cuando la expresión algebraica de la elipse $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$, fue vinculada a una representación gráfica con ejes paralelos a los ejes coordenados cuando los parámetros m y n tomaron diversos valores.

Debemos resaltar, que el aspecto dinámico del Geogebra como herramienta integradora en la enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos y el conocimiento progresivo de las potencialidades de las herramientas y comandos, permitieron a los alumnos interactuar con la elipse, observar resultados y validar conjeturas, lo que permitió al Geogebra influir en el surgimiento y enriquecimiento de las propiedades de dicha curva. Mencionamos algunas acciones que el Geogebra nos permitió realizar, lo que definitivamente creemos que incidió en el proceso de instrumentalización de la elipse. Por ejemplo, el rastro que deja un conjunto de puntos que cumplen determinada condición geométrica, el cálculo de las distancias de los extremos del eje mayor para enriquecer el significado de la condición geométrica, la deformación de las representaciones gráficas a través de los deslizadores que permitió la interpretación de la excentricidad por las cercanías del foco al centro o vértices, la traslación de la curva vinculada a sus distintas expresiones algebraicas y a sus elementos invariantes, el trazo de cuerdas, rectas, puntos, y la interacción con otros compañeros durante el desarrollo de las actividades.

Al respecto, sin ser objeto de nuestra investigación, encontramos que en las actividades 5 y 9 hay indicios que los trazos de rectas paralelas, rectas perpendiculares, circunferencias, puntos de intersección, distancias, y el uso del menú contextual de algunas herramientas en Geogebra, han sido instrumentados.

De igual forma identificamos un conjunto de restricciones que según Rabardel (1995), el alumno debe identificar, comprender y administrar. Identificamos en el proceso, restricciones de existencia ligadas a las propiedades y usos del ordenador, como el manejo del mouse. De igual forma restricciones de intencionalidad en tanto este destinado a producir transformaciones, por ejemplo el zoom para el trazo de la elipse cuando se usa la herramienta "Activa Rastro". Finalmente restricciones de acción vinculadas a las modalidades de acción y anticipadas por el diseñador como la intersección de objetos, manejo del compás o búsqueda de símbolos en la barra de entrada. En ese mismo sentido, de acuerdo a Trouche (2004), señalamos cómo las herramientas que permitieron calcular distancias, trazar rectas, polígonos, puntos o arrastrar textos a cualquier posición de la pantalla, reconocer vistas gráficas o algebraicas, etc. ; transitaron de la fase descubrimiento y selección a la fase de personalización En la fase de transformación, la herramienta "Segmento de Longitud Fija" transitó por dicho escenario ya que con su uso se logró reemplazar el radio de una circunferencia.

Finalmente, queremos acotar que aunque algunas de las funciones señaladas tanto en la elipse como en el Geogebra, fueron conservadas de manera durable para cierta clase de acciones, dichas funciones deben ser observadas nuevamente en actividades posteriores para comprobar dicho nivel de instrumentalización.

Perspectivas en Futuras Investigaciones

Para futuras investigaciones en el campo de la matemática, pensamos que la elipse no es un producto terminado y son necesarias otras investigaciones. Es posible que movilizando la elipse como esquema de uso y movilizando otros conceptos como traslación y rotación de ejes, se logre una descripción de la elipse en un nuevo sistema de coordenadas, hallando su expresión algebraica y las propiedades de sus elementos, es decir proponemos analizar cómo nuestros resultados pueden describir una elipse y sus elementos cuando el eje focal de dicha curva no es paralelo a los ejes de abscisa y ordenada, esto nos permitiría a la vez verificar que algunas propiedades de la elipse han sido conservadas de manera durable en relación con una clase de situaciones. Del mismo modo, es posible que las investigaciones puedan apuntar al uso de la elipse como instrumento en la construcción de superficies cuádricas tales como, el elipsoide, paraboloide elíptico, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas; en donde algunas secciones transversales de estas superficies en ciertos planos son elipses. De igual forma realizar los procesos de instrumentalización de la parábola, hipérbola haciendo uso de algún programa de AGD, con la finalidad que se articulen ambos trabajos.

Así mismo, son necesarias otras investigaciones, de tal forma que la elipse pueda ser aplicada como instrumento en distintos campos del saber. Se pueden considerar aplicaciones en el campo de la Ciencia, como la descripción de la órbita elíptica de la tierra y otros planetas de nuestro sistema solar, en uno de cuyos focos se halla ubicado el sol; en el campo de la Medicina, específicamente el uso del litotriptor, el cual es un equipo médico que tiene como objetivo eliminar las piedras del organismo y cuyo funcionamiento está basado en la propiedad focal de la elipse y en el área de la Arquitectura con aplicaciones en maquetas, diseños, arcos semielípticos.

Finalmente, dejamos abierta la posibilidad de realizar una investigación más profunda acerca de los textos escolares o universitarios relacionada a la geometría analítica en la enseñanza de las cónicas, los cuales pueden estar condicionando los ambientes de enseñanza y aprendizaje, así como una revisión curricular a los temas de estudio.

REFERENCIAS

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 38, 97-140). México, DF. Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1990). *Epistémologie Et. Didactique. Reserches en Didactique Des Mathématiques.* Traducción por María Fernanda Espitia, 10(23) ,1-8.

Boyer, C. (1987). *Historia de la matemática.* Versión española de Mariano Martínez Pérez. Alianza Editorial, Madrid, España

Chumpitaz, D. (2013) *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediados por el software Geogebra con estudiantes de ingeniería*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Del Río Sánchez, J. (1990). *Concepciones erróneas en matemáticas. Revisión y evaluación de las investigaciones.* 205-219. Universidad de Salamanca.

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus,* (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia.

Gutierrez, A. (1991). *Procesos y habilidades en la visualización espacial*. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Valencia. Valencia (España). Recuperado de http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut92b.pdf

Gutierrez, A. (1996). *Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework.* Proceedings of the 20th PME Conference 1, 3-19. España. Recuperado de http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf.

Hernández, R., Fernández, C. & Batista, P. (2010). Metodología de la investigación. México: Editorial Mc Graw Hill. Quinta edición.

Jesus, G. (2012). *As Construções Geométricas e a Gênese Instrumental: o caso da mediatriz.* (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. and Strasser, R. (2006). *Teaching and Learning Geometry with Technology.* Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), 275–304, Sense Publishers. Recuperado de https://www.sensepublishers.com/media/457-handbook-of-research-on-the-psychology-of-mathematics-educationa.pdf.

Lehmann Ch. (2003). *Geometría Analítica.* Versión en español por R.García. México,D.F: Editorial LIMUSA, S.A. Trigésimo quinta impresión.

Leithold, L. (1998). *Matemáticas previas al cálculo*. México: Oxford Universit Press, Tercera edición.

Rabardel (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.

Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço*. (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele.* (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad de Antioquía, Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada. Medellín, Colombia.

Sandoval, I. (2009). *La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico*. Redalyc. Sistema de Información Científica. Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal, 21(1), 5–27.

Swokowski, E. y Jeffery Cole (2011) Álgeba y Trigonometría con Geometría Analítica. México: Thomson. Décimo tercera edición.

Silva, M. & De la Torre, F. (2011). *La Herramienta arrastre en funciones usando Geogebra*. Universidad Autónoma de Querétaro, México. Universidad de Coruña.

Trouche, L. (2004). *Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environmn (CBLE).* Guiding Students Command Process Through Instrumntal Orchestrations. LIRDEF & LIRMM, Université Montpellier II Recuperado http://www.edumatics.mathematik.uni-wuerzburg.de/de/mod4/media/reading/T

APENDICES

PRUEBA DE DIAGNÓSTICO

(APÉNDICE A)

Apellidos y Nombres

…………………………………………………………………………………………………..

Tiempo de duración 30 minutos

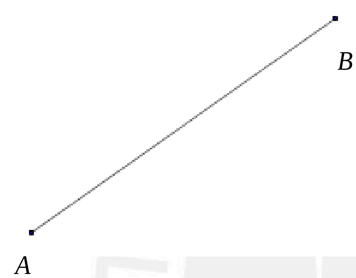
Fecha

Instrucciones

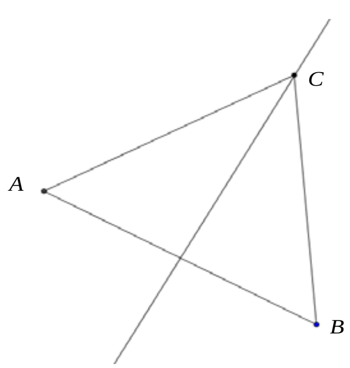
- La prueba consta de 6 preguntas
- Se permite el uso de útiles: lápices, escuadras, reglas.
- La prueba tiene como objetivo recabar información acerca de sus conocimientos de algunas de las propiedades del triángulo, la mediatriz, la circunferencia y la parábola.

1. Qué entiende usted por la mediatriz de un segmento?

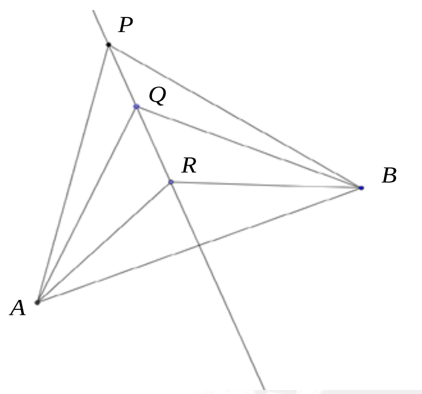
Represente gráficamente la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$. y describa su proceso de construcción

	Proceso de construcción

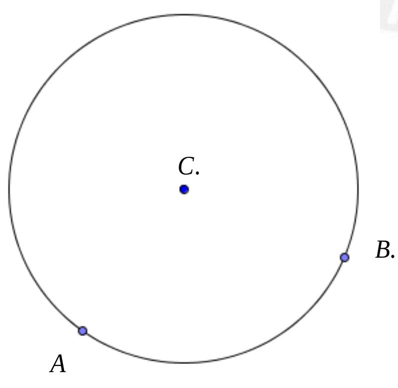
2. Se observa en la figura al triángulo ABC y la mediatriz relativa al segmento $\overline{AB}$. ¿Es el triángulo ABC escaleno, isósceles o equilátero? ¿por qué?

	Escriba aquí su respuesta.

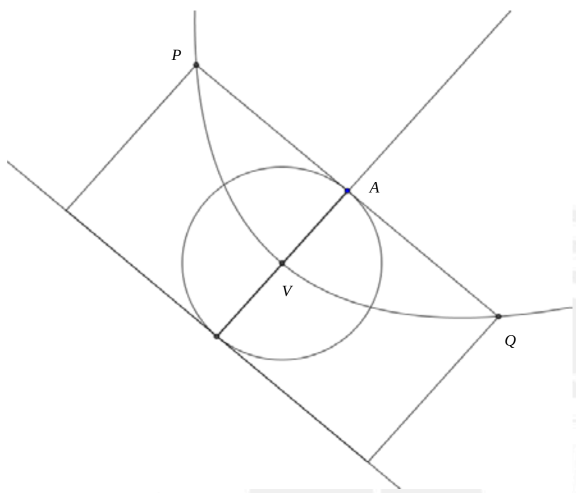
3. En la figura, se observan que los puntos P, Q y R están contenidos en la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, ¿qué propiedad común tienen estos puntos respecto a los extremos del segmento $\overline{AB}$?

	Escriba aquí su respuesta.

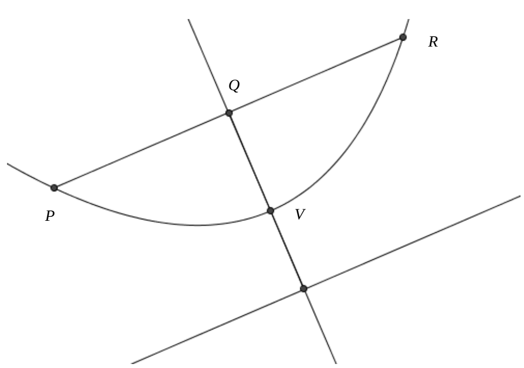
4. ¿Qué condición geométrica deben satisfacer los puntos A y B para que pertenezcan a la circunferencia de centro C y radio r? Si traza la mediatriz de la cuerda $\overline{AB}$, ¿el punto C puede estar contenida en ella? ¿por qué?

	Escriba aquí su respuesta.

5. Se muestra una circunferencia con centro V y dos cuadrados que intersectan a la parábola de vértice V, en los puntos P, Q , ¿Es posible afirmar que el segmento que une los puntos P y Q corresponde al lado recto de la parábola?

	Escriba aquí su respuesta.

6. La cuerda $\overline{PR}$ es paralela a la directriz de la parábola de vértice V e intersecta al eje focal en el punto Q. ¿Es posible afirmar que la cuerda $\overline{PR}$ representa el lado recto de la parábola y el punto Q representa su foco? ¿Por qué?

	Escriba aquí su respuesta.

EXPLORACIÓN DEL GEOGEBRA

(APÉNDICE B)

Integrantes del Equipo

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

Nombre del Equipo

…………………………………………………………………………………………………

Tiempo de duración 90 minutos (Encuentro 1)

Fecha

Instrucciones

- Este primer encuentro contiene 10 actividades
- Las actividades tienen como objetivo iniciar a los alumnos en el aprendizaje y manejo del uso de las propiedades del software Geogebra.
- En el escritorio de su computadora se muestra la carpeta Actividades _Elipse. Ubique en esta carpeta el archivo Encuentro1_ggb, el cual contiene las actividades propuestas en la plataforma Geogebra.
- Trabaje de manera simultánea con el archivo y con esta ficha de actividades.

Exploración del Geogebra

Reconociendo vista algebraica y vista gráfica

- Con la herramienta puedes desplazar la vista gráfica
- En la vista gráfica puedes exponer u ocultar los ejes
- En la vista gráfica puedes exponer u ocultar la cuadrícula
- En la barra de entrada ingresar la ecuación $y = x^2 - 1$. Haces uso del teclado virtual.
- Haz visible los ejes y con la herramienta desplazar , ubica la gráfica a un lugar aleatorio
- En la barra de menú, despliega la opción vista algebraica y observarás la regla de correspondencia de la gráfica trazada.
- Con la herramienta elige y mueve puedes arrastrar los objetos con el mouse o seleccionarlos y eliminarlos. Arrastra la gráfica $y = x^2 - 1$
- En la barra de menú, despliega la opción vista hoja de cálculo. Puedes ingresar números para realizar cualquier operación o puntos con coordenadas, funciones para insertarlos en la vista gráfica. Por ejemplo ingresa $y = x^2 + 3$ y el punto $A = (2,7)$
- Pulsando el botón secundario en cualquiera de los objetos puedes elegir la herramienta expone u oculta objeto . Luego borra todos los elementos.

Trazando puntos, rectas paralelas y perpendiculares.

- En la barra de entrada ubicada en la zona inferior de la ventana del Geogebra ingresa la recta $L : y = x - 3$ y el punto $A = (4,2)$
- Con la herramienta elige y mueve selecciona el punto A y haciendo clic en el botón secundario elige la opción renombra. Cambia el punto A por B
- Con la herramienta elige y mueve selecciona la gráfica de la recta y haciendo clic en el botón secundario elige la opción propiedades del objeto. Cambia de color y de estilo a la recta

- Por el punto A, traza una recta paralela a la recta L con la herramienta recta paralela
- Por el punto A, traza una recta perpendicular a la recta L con la herramienta recta perpendicular
- Luego Borre todos los elementos de la vista gráfica.

Explorando la herramienta deslizador, polígono y hallando puntos de intersección.

- Selecciona la herramienta deslizador a = 2 y haz clic sobre la vista gráfica. En la casilla nombre etiqueta la letra a por la letra m, los intervalos permanece iguales
- En la barra de entrada ingresa la recta $L: y = mx - 3$ y desplaza el deslizador. La recta toma distintas pendientes
- Con la herramienta intersección entre dos objetos , seleccione dos objetos y halle los puntos donde la recta L intersecta al eje de abscisa y ordenadas.
- Con la herramienta polígono , marque uno a uno los vértices y trace el triángulo cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos donde la recta intersecta a los ejes de abscisa y ordenadas
- Luego Borre todos los elementos de la vista gráfica.

Usando la herramienta distancia, ángulo y área de los objetos trazados

- Con la herramienta punto A marca un punto A sobre el eje de abscisas, un punto B sobre el eje de ordenadas y el punto O sobre el origen de coordenadas.
- Con la herramienta polígono dibuje el triángulo OAB
- Con la herramienta distancia cm , marque dos puntos y halle la distancia de los catetos y de la hipotenusa del triángulo trazado
- Con la herramienta ángulo , marque tres puntos o dos rectas y compruebe que el triángulo es recto en el vértice O
- Con la herramienta área cm^2 , seleccione el polígono y halle el área del triángulo.
- Luego arrastre el texto que corresponde al área, distancia y ángulo de los objetos, y llévelo a la esquina superior izquierda. Para ello ubique el mouse en cualquiera de

los textos y haga clic en el botón secundario del mouse, seleccione la herramienta posición absoluta en pantalla.

- Luego Borre todos los elementos de la vista gráfica.

Explorando la herramienta circunferencia y la mediatriz de un segmento.

- Oculte la vista algebraica y los ejes coordenados.
- Con la herramienta punto marca los puntos C_1, C_2, C_3 y P.
- Con la herramienta circunferencia centro- punto trace una circunferencia. Para ello seleccione el centro C_1 y uno de sus puntos P .
- Luego halle la longitud del radio r con la herramienta distancia . Arrastre la vista gráfica hasta hacer visible completamente la circunferencia
- Con la herramienta circunferencia centro – radio trace una circunferencia Para ello elija el centro C_2 y el radio de longitud r
- Con la herramienta circunferencia – compás trace una circunferencia. Para ello seleccione una abertura para el compás de longitud $\overline{C_1P}$ y el centro C_3
- Limpie los elementos de la vista gráfica.
  - Con la herramienta segmento entre dos puntos , trace el segmento $\overline{AB}$.
- Con la herramienta mediatríz , trace la mediatriz del segmento $\overline{AB}$
- Marque un punto cualquiera de la mediatriz con la herramienta punto y renómbrela como punto P
- Con la herramienta compás trace una circunferencia. Para ello seleccione una abertura para el compás de longitud $\overline{PA}$ y el centro el punto P
- Con la herramienta polígono, 1 e el triángulo APB.
- Luego compruebe con la herramienta que el triángulo APB es un triángulo isósceles.
- Luego limpie todos los elementos de la vista gráfica.

ACTIVIDADES PARA LA ELIPSE

(APÉNDICE C)

Integrantes del Equipo

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

Nombre del Equipo

……………………………………………………………………………………………………

Tiempo de duración 90 minutos

Fecha

Instrucciones

- Este segundo encuentro contiene las actividades 1, 2, 3, 4 y 5 de un total de 10.
- Lea cuidadosamente las preguntas. Sus respuestas serán consignadas en los recuadros que se muestran al final de cada enunciado
- En el escritorio de su computadora se muestra la carpeta Actividades _Elipse. Ubique en esta carpeta el archivo Encuentro2_ggb, el cual contiene las actividades propuestas en la plataforma Geogebra.
- Trabaje de manera simultánea con el archivo y con esta ficha de actividades.

ACTIVIDAD 1

En el archivo Actividad_1.ggb mostramos una circunferencia de centro C, de radio $\overline{CP}$ y un punto fijo Q en el interior de la circunferencia, de tal forma que $|\overline{CP}| > |\overline{CQ}|$.

a) Trace el segmento $\overline{PQ}$ y luego la mediatriz relativa a dicho segmento.

b) Determine el punto A sobre el radio $\overline{CP}$ que equidiste de los extremos del segmento $\overline{PQ}$

c) Con la herramienta "Polígono", marque los vértices del triángulo APQ.

De acuerdo a la longitud de sus lados ¿cómo clasifica al triángulo APQ?. ¿Por qué?

.

d) Utilizando el punto A como extremo de los segmentos, exprese la longitud del radio de la circunferencia como la suma de las medidas de dos segmentos. Muestre dos expresiones equivalentes

e) Si mueve el punto P sobre la circunferencia genera un desplazamiento del punto A. ¿por qué la suma de las medidas de los segmentos hallada en el ítem d) se mantiene constante? Puede hacer uso de la herramienta "Distancia" del Geogebra

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_1.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 2

En el archivo Actividad_2.ggb mostramos una circunferencia de centro C, de radio $r = \overline{CP}$ y un punto interior fijo a la circunferencia Q. Además el punto A pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ y al radio de la circunferencia

a) Mueva el punto P sobre la circunferencia. Calcule la longitud del radio como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ cuando el punto A se desplaza a dos posiciones distintas.

$\lvert\overline{AP}\rvert + \lvert\overline{CA}\rvert =$ + =

$\lvert\overline{AP}\rvert + \lvert\overline{CA}\rvert =$ + =

b) Mueva el punto P sobre la circunferencia, calcule la longitud del radio como la suma de las medidas de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$ cuando el punto A se desplaza a dos posiciones distintas.

$\lvert\overline{AQ}\rvert + \lvert\overline{CA}\rvert =$ + =

$\lvert\overline{AQ}\rvert + \lvert\overline{CA}\rvert =$ + =

c) ¿Qué propiedades geométricas justifica los resultados hallados en $a)$ y en $b)$

.

d) En el menú contextual del punto A seleccione “Active Rastro”, fije el estilo del punto al mínimo y luego desplace lentamente el punto P sobre la circunferencia. La trayectoria del punto genera una curva llamada elipse. La suma de las distancias del punto A a los puntos fijos Q y C, ¿es un resultado que se mantiene constante mientras A se desplace por la curva? ¿Por qué?

.

e) En la circunferencia de centro C, radio CP y un punto interior Q, exprese en términos de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{AC}$, la condición geométrica que debe cumplir el punto A para que su trayectoria forme la figura elíptica.

.

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_2.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente pregunta.

ACTIVIDAD 3

Abra el archivo Actividad_3.ggb. Se muestra una circunferencia de centro F_2, un punto fijo F_1 al interior de la circunferencia y un punto P sobre el radio de dicha circunferencia que se mueve sobre una elipse. Los puntos fijos F_1 y F_2 son llamados focos La recta que pasa por los focos se llama eje focal. El eje focal corta a la elipse en dos puntos V_1 y V_2 llamados vértices. La porción del eje focal comprendida entre los vértices se llama eje mayor.

a) Trace el eje mayor, renombre los vértices como V_1 y V_2 y calcule su longitud

b) Trace segmentos que unan P a los focos F_1 y F_2 . Luego desplace P sobre la elipse y registre sus resultados haciendo uso de la herramienta "Distancia".

$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = \quad + \quad = \quad / \ \overline{V_1V_2} \ / =$

$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = \quad + \quad = \quad / \ \overline{V_1V_2} \ / =$

$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = \quad + \quad = \quad / \ \overline{V_1V_2} \ / =$

c) Si P es un punto de la elipse con focos F_1 y F_2 y la longitud del eje mayor $\overline{V_1V_2}$ es $2a$, escriba la condición geométrica del punto P

d) La recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro C del segmento que une los focos se llama eje normal. El eje normal corta a la elipse en dos puntos. La porción del eje normal comprendida entre estos puntos se llama eje menor.

Trace el segmento que representa el eje menor y marque el centro C de la elipse, ¿el eje menor está contenida en la mediatriz del segmento que une los focos? ¿Por qué?

¿Cuál es la suma de las distancias de uno de los extremos del eje menor a los focos? ¿Por qué?

e) Con la herramienta "Polígono" trace el triángulo que tiene como vértices los focos de la elipse y un extremo del eje menor.

Considerando que la distancia del centro a uno de los vértices es a, que la distancia del centro a uno de los focos es c y que la distancia del centro a uno de los extremos del eje menor es b, halle b términos de a y c

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_3.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente pregunta.

ACTIVIDAD 4

Abra el archivo Actividad_4.ggb. Se muestra una elipse y dos focos F_1 y F_2

El deslizador a representa la distancia del centro a uno de los vértices, $a > 0$

El deslizador c representa la distancia del centro a uno de los focos, $c > 0$

Fijamos el deslizador $a = 10$

a) ¿Qué forma aproximada adopta la elipse, si sus focos se acercan a su centro y a los vértices de la elipse?

b) Se define la excentricidad como la razón $\frac{c}{a}$, ¿entre qué límites numéricos se halla la excentricidad para que la elipse mantenga las características de sus elementos?

c) Si la tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del sol y su excentricidad es menor a 0.0017, ¿con qué figura se aproximaría su trayectoria elíptica? ¿Por qué?

d) ¿Qué información le proporciona la excentricidad de una elipse?

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_4.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente pregunta.

ACTIVIDAD 5

Abra el archivo Actividad _5.ggb. Se muestran los focos V_1 y V_2 de una elipse.

a) Si arrastra el deslizador hasta $d = 1$ se obtienen cuerdas pertenecientes a una elipse. De acuerdo a su vista gráfica ¿qué entiende usted por cuerda de una elipse?

b) La cuerda $\overline{V_1V_2}$ es el eje mayor. ¿Cuál de las cuerdas que observa corresponde al eje menor? ¿Por qué?

Trace el eje menor y describa su procedimiento.

c) La cuerda que pasa por uno de los focos de la elipse y es perpendicular al eje focal se llama lado recto ¿Cuál de las cuerdas que observa corresponde a dos de los lados rectos de la elipse? ¿Por qué?

d) Con la herramienta "Compás", trace una circunferencia con centro en uno de los extremos del eje menor y radio de longitud igual al semieje mayor ($r = a$). ¿Qué elementos de la elipse representan los puntos de intersección de la circunferencia con el eje mayor de la elipse? ¿Por qué?

e) Trace los lados rectos de la elipse, luego oculte los trazos complementarios salvo el correspondiente al eje mayor y el eje menor de la curva

f) Reto para el alumno. Compruebe que la longitud del lado recto de una elipse es $\frac{2b^2}{a}$.

Para ello trace un triángulo en el interior de la elipse, cuyos vértices sean los focos y un extremo del lado recto de dicha

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad _5.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente pregunta.

ACTIVIDADES PARA LA ELIPSE

Integrantes del Equipo

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

Nombre del Equipo

…………………………………………………………………………………………………….

Tiempo de duración 90 minutos

Fecha

Instrucciones

- Este tercer encuentro contiene las actividades 6, 7, 8, 9 y 10 de un total de 10.
- Lea cuidadosamente las preguntas. Sus respuestas serán consignadas en los recuadros que se muestran al final de cada enunciado
- En el escritorio de su computadora se muestra la carpeta Actividades _Elipse. Ubique en esta carpeta el archivo Encuentro3_ggb, el cual contiene las actividades propuestas en la plataforma Geogebra.
- Trabaje de manera simultánea con el archivo y con esta ficha de actividades.

ACTIVIDAD 6

Abra el archivo Actividad_6.ggb. Se muestra el eje mayor $\overline{V_1 V_2}$ de longitud $2a$ y el eje menor $\overline{MN}$ de longitud $2b$

a) Determine los focos F_1 y F_2 de la elipse usando alguna construcción geométrica. Renombre los focos como F_1 y F_2 , describa sus pasos. Luego oculte la construcción geométrica.

b) Con los dos focos F_1, F_2 y un punto de la elipse, trace la curva haciendo uso de la herramienta "Elipse" que aparece en la Ventana de Herramientas. Luego elija Vista Algebraica y haga visible los ejes coordenados. Escriba las coordenadas de los vértices, focos y extremos del eje menor

V_1 (;)	V_2 (;)
F_1 (;)	F_2 (;)
M (;)	N (;)

Halle la longitud del eje mayor $(2a)$, del eje menor $(2b)$, la distancia entre los focos o distancia focal $(2c)$ y la longitud del lado recto.

c) Halle una expresión algebriaca que describa a todos los puntos $P\,(x;y)$ de la elipse, que cumplen la condición geométrica $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$. Use la distancia entre dos puntos.

$\sqrt{\qquad\qquad\qquad}$ + $\sqrt{\qquad\qquad\qquad}$ =

Escriba en la parte inferior, dos expresiones algebraicas equivalentes a la expresión anterior. Para ello haga clic en la representación gráfica de la curva y escriba una de las expresiones que aparece sombreada en la Vista Algebraica. En el Menú Contextual de dicha expresión, aparece la otra equivalente.

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_6.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente pregunta

ACTIVIDAD 7

Abra el archivo actividad_7.ggb. Se muestra los deslizadores m y n. En la barra de entrada, ingrese la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$.

a) Luego de ingresar la expresión algebraica, arrastre los deslizadores hasta conseguir que las variables tomen los valores $n=m=10$, ¿Qué forma adopta la figura? Escriba su expresión algebraica

b) Si fija uno de los deslizadores en $n=10$ y el otro deslizador m se desplaza para valores distintos a 10. Cuando $m>m$ ¿Qué representan los valores de m y n para la elipse? El eje focal que contiene al eje mayor ¿coincide con uno de los ejes coordenados?

Determine la expresión algebraica de la elipse con centro en el origen, eje focal el eje de abscisas, cuando los deslizadores se hallan en los siguientes casos:

$n=10$	m $=12$	$\frac{\quad}{(\quad)^2}+\frac{\quad}{(\quad)^2}=1$
$n=10$	m $=15$	$\frac{\quad}{(\quad)^2}+\frac{\quad}{(\quad)^2}=1$
$n=10$	m $=20$	$\frac{\quad}{(\quad)^2}+\frac{\quad}{(\quad)^2}=1$

Determine la expresión algebraica de la elipse con centro en el origen, eje focal el eje de abscisas, en términos del semieje mayor a y longitud del semieje menor b.

c) Si fija uno de los deslizadores en $n=10$ y el otro deslizador m se desplaza para valores distintos a 10. Cuando $m<m$ ¿Qué representan los valores de m y n para la elipse? El eje focal que contiene al eje mayor ¿coincide con uno de los ejes coordenados?

Determine la expresión algebraica de la elipse con centro en el origen, eje focal el eje de abscisas, cuando los deslizadores se hallan en los siguientes casos:

$n=10$	$\mathrm{m}=9$	$\dfrac{}{(\quad)^2}+\dfrac{}{(\quad)^2}=1$
$n=10$	$\mathrm{m}=7$	$\dfrac{}{(\quad)^2}+\dfrac{}{(\quad)^2}=1$
$n=10$	$\mathrm{m}=5$	$\dfrac{}{(\quad)^2}+\dfrac{}{(\quad)^2}=1$

Determine la expresión algebraica de la elipse con centro en el origen, eje focal el eje de abscisas, en términos del semieje mayor a y longitud del semieje menor b.

Al terminar su trabajo, guarde su archivo actividad_7.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente pregunta.

ACTIVIDAD 8

Abra el archivo Actividad_8.ggb. Se muestra una elipse con centro en el origen, eje focal el de abscisas y su expresión algebraica $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$.

a) Mueva el deslizador hasta que el nuevo centro de la elipse sea el punto $A(8,6)$

Escriba la expresión algebraica de la elipse en términos de su nuevo centro

$$\boxed{\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}=1}$$

¿Qué elementos se mantienen invariante en la elipse?

b) Trace los lados rectos de la elipse con centro en A. Luego mueva el punto A y traslade la elipse sobre el plano de coordenadas.

Halle la expresión algebraica de la elipse cuando el centro A está sobre el eje de abscisas

Halle la expresión algebraica de la elipse cuando el centro A está sobre el eje de ordenadas.

Halle la expresión algebraica de la elipse cuando el centro A está sobre uno de los planos coordenados.

$$\boxed{\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}=1} \qquad \boxed{\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}=1} \qquad \boxed{\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}=1}$$

¿Qué elementos se mantienen invariantes en la elipse?

c) Escriba la expresión algebraica de la elipse de centro en cualquier punto (h,k) del plano, eje focal paralelo al eje de abscisas. Considere a la longitud del semieje mayor y b la longitud del semieje menor

d) Escriba la expresión algebraica de la elipse de centro en cualquier punto (h,k) del plano, eje focal paralelo al eje de ordenadas. Considere a la longitud del semieje mayor y b la longitud del semieje menor.

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_8.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente pregunta.

ACTIVIDAD 9 - Reto para el alumno.

Abra el archivo Actividad_9.ggb se muestra el eje focal de una elipse paralelo al eje de abscisas, donde F_1 es uno de sus focos y M es el extremo del eje menor.

Usando construcciones geométricas halle el otro foco F_2, los vértices V_1 y V_2 y el otro extremo N del eje menor. Luego con la herramienta "Elipse" dibuje la curva

Explique su procedimiento

En la vista gráfica haga visible los ejes coordenados. Luego encuentre:

Las coordenadas de los vértices
Las coordenadas de los focos
Las coordenadas de los extremos del eje menor
Los extremos del lado recto
La ecuación de la elipse

De acuerdo a su gráfico, sin necesidad de elaborar cálculos, ¿la excentricidad tendrá valores cercanos a cero o a uno?

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_9.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Cierre el archivo y continúe con la siguiente pregunta

ACTIVIDAD 10 – Construcción animada.

Abra el archivo Actividad_10.ggb. El cometa Halley describe una órbita elíptica alrededor del sol. La distancia más cercana del cometa al sol (perihelio) es aproximadamente $0.6\,UA$ y la más lejana (afelio) es aproximadamente $35\,UA$. La unidad astronómica (UA), es la distancia promedio de la tierra al sol para especificar grandes distancias ($1UA \approx 93\,000\,000$ millas)

Grafique en el sistema cartesiano la trayectoria elíptica del cometa y determine la expresión algebraica de la curva. ¿Qué relación tiene el valor numérico de la excentricidad y la forma gráfica de la elipse?

Expresión algebraica

Considere el origen del sistema cartesiano en el centro de la órbita y al sol en uno de los focos sobre el eje de abscisas. Cuando termine pulse el botón secundario del mouse sobre el punto que representa el cometa Halley y elija “Animación automática” para generar movimiento en el cometa alrededor del sol. Deje visible la trayectoria de la elipse, el sol y el cometa. Para realizar cálculos numéricos puede ingresar a “Vista Hoja de Cálculo” del Geogebra

Al terminar su trabajo, guarde su archivo Actividad_10.ggb en la carpeta escritorio de la computadora asignada. Finalmente cierre el archivo.

FICHA DE OBSERVACIÓN

(APÉNDICE D)

Fecha Encuentro

Nombre del observador
…………………………………………………………………………………………………….

Nombre del equipo observado
……………………………………………………………………………………………………..

- Observar que los alumnos abran y guarden los archivos proporcionados.
- Describir detalladamente las acciones de los alumnos de manera secuencial durante el desarrollo de las actividades.
- Focalizar la atención en las acciones o en los comentarios de los alumnos cuando utilicen herramientas distancia o longitud, deslizador, la opción activa rastro del menú contextual y la elaboración de algunas construcciones sobre la vista gráfica.

Observaciones

ANEXO

PROGRAMA ANALÍTICO DE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICA I

UNIDAD 1

Conjunto de los Números Reales

Objetivos:

- Identificar los diferentes campos numéricos
- Operar con intervalos acotados , semiacotados y no acotados
- Resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado
- Utilizar el vocabulario y la notación adecuada

Contenidos: Los números reales. La recta real. Relación de orden en los números reales. Intervalos y operaciones con intervalos. Ecuaciones e inecuaciones de primer grado.

UNIDAD 2

Valor Absoluto

Objetivos:

- Interpretación del valor absoluto como distancia entre dos puntos
- Resolver ecuaciones e inecuaciones usando la interpretación del valor absoluto
- Resolver ecuaciones e inecuaciones usando las propiedades del valor absoluto.

Contenidos: El valor absoluto. Interpretación geométrica del valor absoluto. Resolución de ecuaciones e inecuaciones de grado uno con valor absoluto.

UNIDAD 3

Sistema de Coordenadas Cartesianas en el Plano

Objetivos:

- Ubicar los pares ordenados en un sistema de ejes coordenados
- Calcular la distancia entre dos puntos
- Obtener el punto medio de un segmento
- Determinar las coordenadas que dividen a un segmento en una razón.

Contenidos: Par ordenado. Distancia y punto medio entre dos puntos del plano. División de un segmento en una razón.

UNIDAD 4

La Línea Recta

Objetivos:

- Calcular e interpretar la pendiente de una recta
- Determinar tres expresiones equivalentes de la ecuación de una recta
- Calcular la distancia entre dos puntos y obtener su punto medio
- Determinar la pendiente de rectas paralelas y perpendiculares
- Calcular la distancia de un punto a una recta
- Resolver enunciados que relacionados a problemas relacionados con rectas.

Contenidos: La razón de cambio entre dos puntos. Pendiente de una recta. Ecuación de una recta. Representación gráfica de la recta. Posición de una recta en el plano: paralelismo y perpendicularidad. Rectas notables en un triángulo. Distancia de un punto a una recta.

UNIDAD 5

La Circunferencia

Objetivos:

- Determinar la ecuación canónica de una circunferencia
- Determinar la ecuación ordinaria de una circunferencia.
- Representar gráficamente la circunferencia en el plano cartesiano.
- Obtener la ecuación de la recta tangente a una circunferencia
- Calcular la distancia del centro a la recta tangente.

Contenidos: La condición geométrica de una circunferencia. Ecuación y elementos de una circunferencia. Representación gráfica de la circunferencia. La recta tangente a una circunferencia.

UNIDAD 6

La Parábola

Objetivos:

- Determinar la ecuación canónica de una parábola
- Determinar la ecuación ordinaria de una parábola
- Representar gráficamente una parábola en el plano cartesiano indicando sus elementos.

Contenidos: La condición geométrica de una parábola. Ecuación y elementos de una parábola. Representación gráfica de la parábola. .