

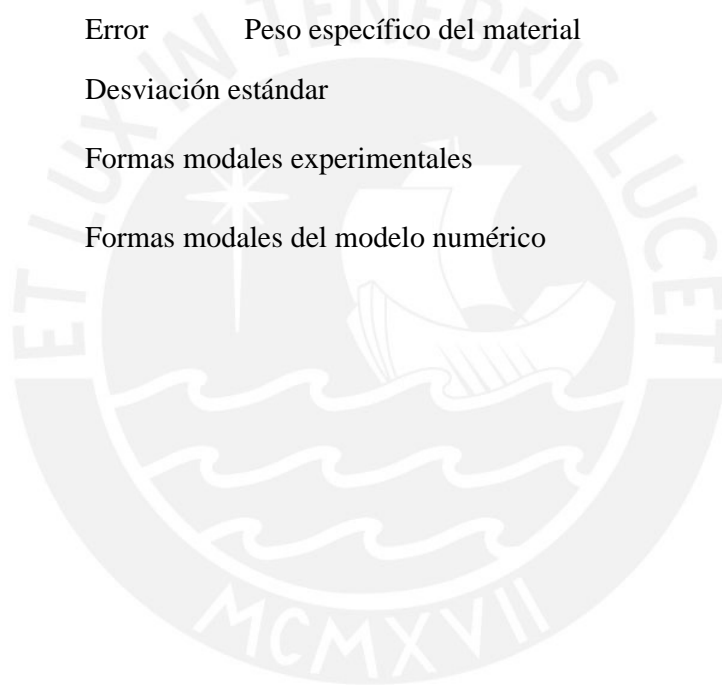
ANEXO

Herramienta para el proceso de calibración de modelos numéricos

Lista de Símbolos

b	Valor medio de la variable desconocida (base)
ℓ	Valor más bajo de la variable desconocida (lower)
u	Valor más alto de la variable desconocida (upper)
i	Número de términos de la expresión general de la función error
j	Modos de vibración
n, N	Número de variables desconocidas
x, X	Variables desconocidas
y	Ecuaciones que dependen de los parámetros modales experimentales
A, B, C	Constantes a resolver siguiendo el enfoque Douglas-Reid
E	Módulo de elasticidad del material
Y	Ecuaciones que dependen de los parámetros modales analíticos
$consfr$	Matriz solución de constantes de frecuencias (Douglas-Reid)
$consmac$	Matriz solución de constantes de valores <i>MAC</i> (Douglas-Reid)
f_{EXP}	Resultado de las frecuencias del ensayo experimental
f_{FE}	Resultado de las frecuencias del modelo analítico
m_w	Número de modos de vibración para frecuencias
m_ζ	Número de modos de vibración para formas modales
$PPfrec$	Vector de modificación de pesos ponderados para frecuencias
$PPmac$	Vector modificación de pesos ponderados para valores <i>MAC</i>
W_f	Matriz diagonal de pesos ponderados para frecuencias
W_{mac}	Matriz diagonal de pesos ponderados para valores <i>MAC</i>
CV	Coefficiente de varianza
FT	Matriz de frecuencias de las combinaciones de Douglas-Reid
FO	Función objetivo
MAC	Modal Assurance Criterion
MAC	Matriz de correlación de formas modales de las combinaciones de Douglas-Reid

WF	Matriz ponderada de frecuencias
$WMAC$	Matriz ponderada de valores MAC
$f(x)$	Función que se desea optimizar
$K(x)$	Ecuación que depende de las variables x
$fval$	Valor de la función objetivo al finalizar el proceso de optimización
$exitflag$	Condición para determinar si el proceso de optimización se llevó a cabo con éxito.
$xfinal$	Valor final de las variables x (X)
$iteraciones$	Número total de iteraciones del proceso de optimización.
	Error
	Peso específico del material
	Desviación estándar
W_j^{exp}	Formas modales experimentales
W_j^{FE}	Formas modales del modelo numérico



Lista de Figuras

Figura A.1: Esquema que muestra el análisis de sensibilidad	8
Figura A.2: Esquema que muestra el proceso de optimización	9
Figura A.3: Mínimo global y mínimo local [16]	10
Figura A.4: Módulos que conforman el algoritmo OPTIMIZAR	16
Figura A.5 Diagrama de flujo de la herramienta propuesta OPTIMIZAR	18
Figura A.6: Menú (a) Ingreso de información inicial (b) Modo de Ingreso de datos	21
Figura A.7 Menú para aplicar pesos ponderados: (a) selección del enfoque y, (b) modificación de los pesos ponderados	22
Figura A.8: Resultados gráficos: (a) valor final de las variables desconocidas y, (b) variación de la función objetivo durante el proceso de optimización	23
Figura A.9: Viga de 4 tramos con modulo elasticidad constante	25
Figura A.10: Propiedades del material (a) modelo experimental E_1 (b) modelo analítico E_0	26
Figura A.11: Menú (a) ingreso de información inicial (b) modo de ingreso de datos	28
Figura A.12 Menú para aplicar pesos ponderados: (a) selección del enfoque, y (b) modificación de los pesos ponderados	28
Figura A.13: Resultados del ejemplo 1 (a) Valor numérico del parámetro óptimo (b) Desarrollo del proceso de optimización	29
Figura A.14: Resultados del ejercicio 2: (a) valor final de las variables desconocidas y, (b) variación de la función objetivo durante el proceso de optimización	30
Figura A.15: Gráficos FMAC del ejemplo1: (a) antes del proceso de optimización, y (b) después del proceso de optimización	30
Figura A.16: Viga de 4 tramos con módulo de elasticidad variable	31
Figura A.17: características del material para el modelo experimental del ejemplo 2: (a) para los dos primeros tramos, y (b) para los dos últimos tramos	31
Figura A.18: características del material para el modelo analítico del ejemplo 2: (a) para los dos primeros tramos, y (b) para los dos últimos tramos	32
Figura A.19: Menú (a) ingreso de información inicial (b) modo de ingreso de datos	34
Figura A.20 Menú para aplicar pesos ponderados: (a) selección del enfoque y, (b) modificación de los pesos ponderados	34
Figura A.21: Resultados del ejemplo 2: (a) valor final de las variables desconocidas y, (b) variación de la función objetivo durante el proceso de optimización	35
Figura A.22: Comparación del FMAC del ejemplo2: (a) antes del proceso de optimización, (b) después del proceso de optimización	35
Figura A.23: Modelo experimental desarrollado en SAP2000 (a) vista en elevación, y (b) perspectiva	36
Figura A.24: Comparación gráfica entre las formas modales: a) modelo experimental y, b) modelo analítico	37
Figura A.25: Menú (a) ingreso de información inicial (b) modo de ingreso de datos	39
Figura A.26 Menú para aplicar pesos ponderados: (a) selección del enfoque y, (b) modificación de los pesos ponderados	39
Figura A.27: Resultados del ejercicio 3: (a) valor final de las variables desconocidas y, (b) variación de la función objetivo durante el proceso de optimización	40
Figura A.28: Comparación del FMAC del ejemplo3: (a) antes del proceso de optimización, (b) después del proceso de optimización	41
Figura A.29: Ejemplo 4: (a) elevación del muro instrumentado, (b) vista lateral, y (c) vista frontal y transversal de la estructura estudiada	42
Figura A.30: Desarrollo de los Modelos Numéricos (a) Modelo 1 considerando interacción entre muros (b) Modelo 2 asumiendo el muro instrumentado desacoplado (c) Modelo 3 considerando solo el muro instrumentado	43

Figura A.31: Menú (a) ingreso de información inicial (b) modo de ingreso de datos..... 45

Figura A.32 Menú para aplicar pesos ponderados: (a) selección del enfoque y, (b) modificación de los pesos ponderados 46

Figura A.33 Menú para aplicar pesos ponderados: (a) selección del enfoque y, (b) modificación de los pesos ponderados 47

Figura A.34: Resultados del ejemplo 4: (a) valor final de las variables desconocidas y, (b) variación de la función objetivo durante el proceso de optimización..... 48

Figura A.35: Gráfica FMAC del ejemplo 4: (a) antes del proceso de optimización, (b) después del proceso de optimización..... 48

Figura A.36: Formas modales Experimentales vs FEM (a) formas modales experimentales y (b) formas modales numéricas FEM (valor de frecuencia en Hz)..... 49



Lista de Tablas

Tabla A.1: Hoja de Excel para el ingreso de datos	20
Tabla A.2: Comparación de los resultados de los modelos experimental y analítico, antes del proceso de optimización.....	26
Tabla A.3: Rango de valores considerados para módulo de elasticidad siguiendo el método Douglas-Reid	27
Tabla A.4: Ingreso de la información en la hoja de Excel para el ejemplo 1 -“Vigacaso1”	27
Tabla A.5: Comparación de los resultados de los modelos experimental y analítico, después del 1° proceso de optimización del ejemplo 1	29
Tabla A.6: Rango de valores considerados para el módulo de elasticidad en el 2° proceso de optimización para el ejemplo 1.....	29
Tabla A.7: Resultados finales después del proceso de optimización del ejemplo 1.....	29
Tabla A.8: Comparación de los resultados de los modelos experimental y analítico, antes del proceso de optimización del ejemplo 2.....	32
Tabla A.9: Rango de valores considerados del módulo de elasticidad para el proceso de optimización del ejemplo 2.....	33
Tabla A.10: Ingreso de la información en la hoja de Excel para el ejemplo 2 -“Vigacaso2”	33
Tabla A.11: Resultados finales después del proceso de optimización del ejemplo 2.....	34
Tabla A.12: Comparación de los resultados de los modelos experimental y analítico, después del proceso de optimización del ejemplo 2.....	35
Tabla A.13: Comparación de los resultados de los modelos experimental y analítico, antes del proceso de optimización.....	37
Tabla A.14: Rango de valores dados para las variables desconocidas del ejemplo 3	38
Tabla A.15: Hoja Excel para el ejemplo 3 -“Tubo”	38
Tabla A.16: Resultados finales después del proceso de optimización del ejemplo 3.....	40
Tabla A.17: Comparación de los resultados de los modelos experimental y analítico, después de proceso de optimización.....	40
Tabla A.18: Comparación de los resultados obtenidos aplicando los tres enfoques de matrices de ponderación	41
Tabla A.19: Valores de frecuencia experimental y numérica, obtenidos para cada modelo	44
Tabla A.20: Valores considerados del módulo de elasticidad para el proceso de optimización del ejemplo 4.....	44
Tabla A.21: Información de ingreso en Excel denominado “Chokepukio”	45
Tabla A.22: Valores de frecuencias y MAC resultantes después del 1° proceso de optimización ejemplo 4.....	46
Tabla A.23: Valores de frecuencias y MAC resultantes después del 2° proceso de optimización ejemplo 4.....	47
Tabla A.24: Valores de las variables calibradas obtenidos después de la optimización	48

CAPÍTULO 1

Conceptos fundamentales del proceso de optimización de modelos numéricos

Resumen

En este capítulo se presentan los conceptos básicos necesarios para comprender el proceso de optimización y su importancia en la obtención de modelos numéricos confiables. En la primera parte del capítulo se define el análisis de sensibilidad como un método para identificar cuáles son las variables que tienen mayor influencia en el comportamiento de una estructura. Seguidamente se define el proceso de optimización como una herramienta para hallar los valores más óptimos de las variables identificadas en el análisis de sensibilidad. Luego se explica en qué consiste la optimización de parámetros modales y como se plantea la función objetivo en base a los parámetros modales de frecuencia y formas modales de vibración. Esta función objetivo es una ecuación que relaciona los parámetros modales analíticos y experimentales a través de un error, que debe ser minimizado aplicando un proceso de optimización. Para plantear esta función objetivo se debe hacer uso del enfoque Douglas - Reid y del criterio de exactitud modal (MAC). El enfoque Douglas – Reid establece un procedimiento para construir la función objetivo pre-estableciendo valores medios, altos y bajos para las variables desconocidas que se desean optimizar. Con el criterio de exactitud modal se comparan los valores analíticos y experimentales de las formas modales de vibración, de tal manera que la unidad representa la correlación perfecta entre estos dos valores. Finalmente, se describen los enfoques para establecer ciertas matrices de ponderación que podrían modificar, a criterio del evaluador, las relaciones de error entre los parámetros modales.

Contar con el modelo numérico confiable de una estructura es importante para realizar un adecuado análisis o diseño estructural [10]. Sin embargo, una estructura real está sujeta a muchas variables que influyen en su comportamiento. Las variables que pueden influir en la respuesta de una estructura pueden ser el tipo de cargas, el comportamiento del material, las condiciones de frontera y las conexiones entre los diferentes elementos que la conforman. El rango de variación de estas variables influye de manera significativa en la respuesta de la estructura por lo que, encontrar los valores óptimos significa que la respuesta estructural será también confiable. El proceso de optimización permite obtener los valores más óptimos para estas variables a través del planteamiento de una ecuación de error que debe ser minimizada.

1.1 Análisis de sensibilidad

El comportamiento de una estructura depende de ciertos factores de su entorno que influyen en la respuesta óptima. El objetivo de realizar un análisis de sensibilidad es identificar cuáles de estos factores tienen una mayor influencia y modifican el comportamiento de la estructura. Según Komkov et. al [9], el análisis de sensibilidad para el diseño estructural se define como la relación que existe entre las variables disponibles y la respuesta de una estructura.

En función del tipo de variables, el análisis de sensibilidad puede ser de dos tipos [9]: a) sensibilidad de parámetros, donde las variables que más influyen en la respuesta esperada son las que corresponden al problema de equilibrio, como por ejemplo el módulo de elasticidad o el momento de inercia y, b) sensibilidad de formas, donde las variables están relacionadas con la geometría de la estructura, la posición de las cargas o las condiciones de borde.

Si las variables no se definen correctamente el modelo numérico de la estructura no representará de manera apropiada su comportamiento estructural. Por lo tanto, para realizar adecuadamente el análisis de sensibilidad es necesario llevar a cabo un proceso parametrizado sobre la estructura, modificando paso a paso cada una de las variables y observando que pasa con la respuesta. Una vez identificados cuáles son los factores que tienen más influencia en la respuesta analizada éstos se pueden modificar a través de un proceso de optimización de tal modo que el modelo numérico represente el comportamiento real de la estructura estudiada. La Figura A.1 muestra un esquema del análisis de sensibilidad.

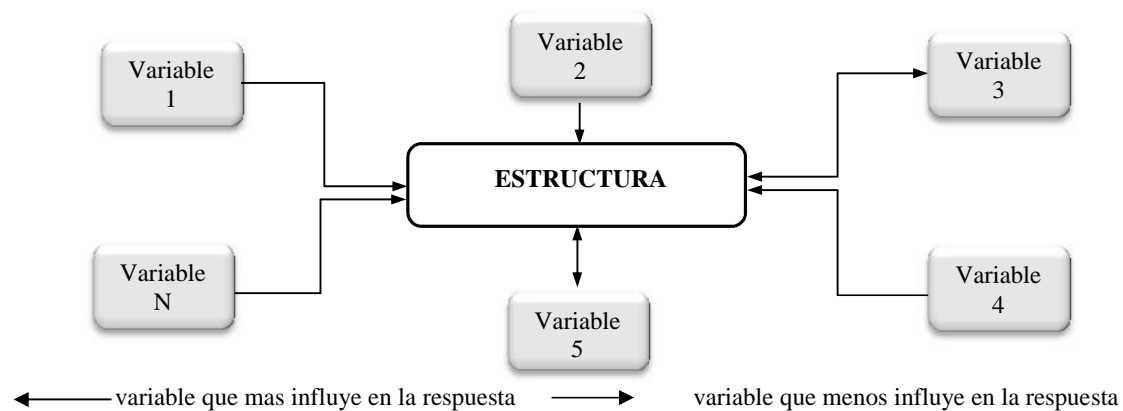


Figura A.1: Esquema que muestra el análisis de sensibilidad

1.2 Proceso de optimización

La optimización es un proceso matemático que consiste en encontrar una solución óptima a un problema planteado mediante la definición de una ecuación que se conoce como función objetivo. Los métodos de optimización dependen de las características de esta función y se dividen en dos grupos: a) optimización de funciones lineales, y b) optimización de funciones no lineales. Asimismo, la función objetivo depende de ciertas variables identificadas previamente en un análisis de sensibilidad y cuyo valor se desconoce. Estas variables están sujetas a restricciones que limitan la zona de búsqueda de la solución la cual está definida por un rango determinado de valores donde es posible encontrar el valor óptimo [16]. El método de mínimos cuadrados es un procedimiento para optimizar funciones no lineales que consiste en encontrar el mínimo de una función basada en una suma de cuadrados y está dado por la ecuación 1:

$$\min f(x) = \|K(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^m K_i(x)^2 \tag{1}$$

donde i representa el número de términos que componen la función $f(x)$ y $K(x)$ es una ecuación que depende de una variable x , cuyo valor óptimo se desea conocer.

La Figura A.2 muestra un esquema de cómo se lleva a cabo el proceso de optimización y las diferentes iteraciones que se deben de realizar antes de encontrar la respuesta deseada. En este esquema se puede observar que las variables que se desean optimizar que influyen en los parámetros de comparación se someterán a un proceso de optimización. Los resultados obtenidos serán evaluados y si la respuesta es deseada el proceso culmina. En caso contrario, si la respuesta no es la deseada, el proceso de optimización debe llevarse a cabo nuevamente.

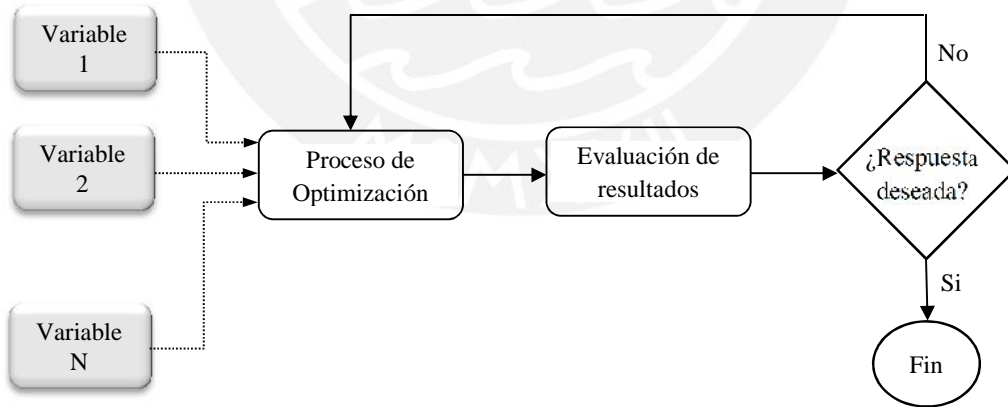


Figura A.2: Esquema que muestra el proceso de optimización

Para optimizar funciones no lineales en base a mínimos cuadrados existen varios algoritmos y su elección depende de las características del problema a resolver. Cada algoritmo tiene su propio método de solución. Por ejemplo, el algoritmo de *Gauss-Newton* es un sistema iterativo de cuadrados lineales que se aproximan al problema no lineal y tiene la ventaja de que para ser resuelto no es necesario hallar la segunda derivada

(Hessiana) de la función [8]. El algoritmo *Newton-Raphson* se basa en el método de la secante y la matriz de las primeras derivadas (Jacobiano) no debe ser singular [5]. En general, para hacer uso de los algoritmos es necesario que el número de ecuaciones disponibles sea mayor o igual que el número de variables. Sin embargo, existen algoritmos para trabajar con más variables que ecuaciones disponibles. Por ejemplo, el algoritmo de *Levenberg–Marquardt* que es eficiente para trabajar con problemas relacionados al ajuste de curvas [13] y con funciones indeterminadas.

Cuando se obtiene una solución óptima "x" se puede asumir que el resultado corresponde a un *mínimo global* de la función objetivo. Esto quiere decir que en todo el dominio de la función no existe otra solución "x" que presente un valor menor. Este concepto no se aplica cuando se trabaja con restricciones que limitan la zona de búsqueda (Trust-region method). En algunos casos, el valor obtenido de x corresponde al mínimo de la zona analizada, pero no necesariamente representa el mínimo global de la función. Este valor recibe el nombre de *mínimo local* [16]. Una función objetivo puede tener solo un mínimo global, pero podría tener varios mínimos locales. La restricción de la zona de búsqueda tiene la ventaja de que evita que el resultado se aleje del valor óptimo y se reduzca el coste computacional del algoritmo.

La Figura A.3 muestra un ejemplo de mínimo local y mínimo global correspondiente a la función $f(x)=(1-x)\sin x$. Se puede observar que al colocar alguna restricción en la zona de búsqueda ($x \in [0,+4]$) el valor óptimo correspondería a un mínimo local. Por otro lado, si se evalúa la función en un rango mayor ($x \in [-4,+4]$), el valor obtenido sería un mínimo global.

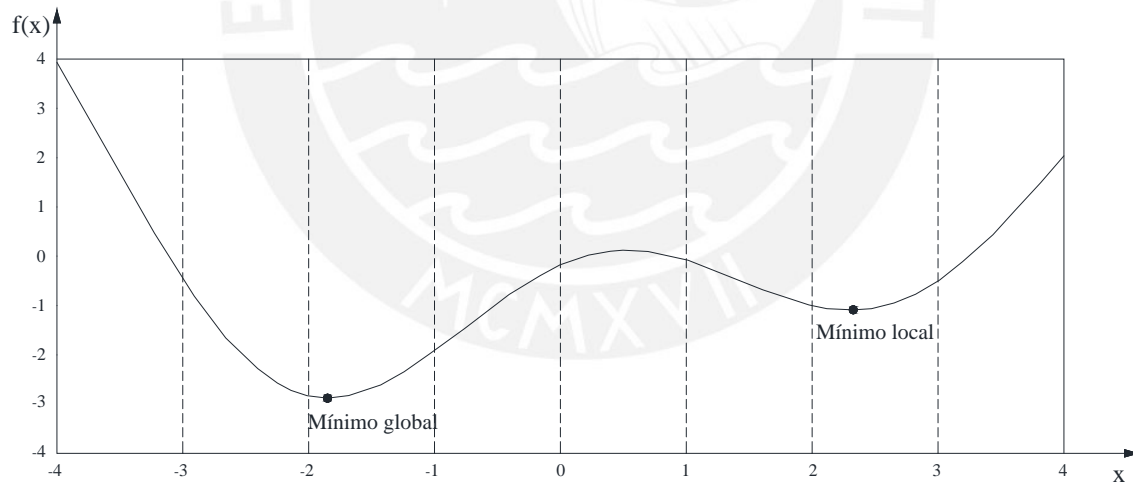


Figura A.3: Mínimo global y mínimo local [16]

1.3 Proceso de optimización de parámetros modales

Cuando la respuesta dinámica de un modelo numérico es similar al de la estructura real se puede decir que dicho modelo numérico es confiable [14]. La respuesta dinámica de una estructura está definida por tres parámetros modales: frecuencias de vibración, amortiguamiento y formas modales de vibración.

El proceso de optimización de parámetros modales consiste en minimizar el error que existe entre los parámetros modales numéricos, obtenidos a través de un modelo matemático, y los parámetros modales experimentales,

obtenidos a través de un ensayo experimental. Estos parámetros modales dependen de los valores de ciertas variables desconocidas que deben haber sido identificadas previamente en el análisis de sensibilidad. Por lo tanto, el proceso de optimización de parámetros modales tiene como objetivo encontrar los valores óptimos para estas variables desconocidas de tal manera que el error entre estos parámetros modales, analíticos y experimentales, se minimice. Para llevar a cabo este proceso se utiliza la herramienta de mínimos cuadrados no lineales, debido a las características de no linealidad de la función objetivo. La ecuación 2 muestra la forma general de la función objetivo:

$$V = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 \tag{2}$$

donde las variables: y , Y hacen referencia a las ecuaciones que dependen de los parámetros modales experimentales y analíticos respectivamente, cuyo error se desea minimizar y el subíndice i representa cada uno de los n términos que se compararán.

El proceso de optimización de parámetros modales se realiza a través de una ecuación llamada función objetivo o función error que relaciona las frecuencias y formas modales de vibración. Esta relación se efectúa planteando ecuaciones que dependan de las variables desconocidas identificadas en el análisis de sensibilidad. Estas ecuaciones se establecen usando el método de Douglas-Reid, tal como lo plantea Ramos et al. [15].

El método de Douglas-Reid [6] consiste en establecer ecuaciones que dependen de las variables desconocidas X . Las ecuaciones que representan los resultados analíticos para frecuencias y formas modales de vibración se han planteado de acuerdo a las expresiones mostradas en las ecuaciones 3 y 4.

$$f_{j,FE} = C_j^f + \sum_{N=1}^{2N+1} A_{j,N}^f X_N + B_{j,N}^f X_N^2 \tag{3}$$

$$W_{j,FE} = C_j^w + \sum_{N=1}^{2N+1} A_{j,N}^w X_N + B_{j,N}^w X_N^2 \tag{4}$$

donde, el subíndice j hace referencia a los modos de vibración que se desean calibrar; N hace referencia al número de variables desconocidas (X) que se desean calcular; A , B y C son constantes de la ecuación de segundo grado planteada por Douglas-Reid, para frecuencias (f) y formas modales (w).

Para calcular las constantes de las ecuaciones del método Douglas-Reid, se asigna un valor medio (base - X^b), un valor inferior (lower- X^l) y un valor superior (upper- X^u) a cada variable desconocida. Estos valores se pueden dar en función de estudios similares y a juicio del evaluador. Seguidamente, se realiza una serie de combinaciones para establecer ecuaciones que conlleven a resolver el valor de las constantes. Si se tienen N variables desconocidas, se deberán realizar $2N+1$ combinaciones. En la ecuación 5 se muestra el desarrollo de la ecuación 3 para un modo de vibración.

$$\begin{cases} X_{1,1}^b & X_{2,1}^b & \dots & X_{N,1}^b & (X_{1,1}^b)^2 & (X_{2,1}^b)^2 & \dots & (X_{N,1}^b)^2 & 1 & A_{j,1} & f_{j,1} \\ X_{1,2}^\ell & X_{2,2}^b & \dots & X_{N,2}^b & (X_{1,2}^b)^2 & (X_{2,2}^b)^2 & \dots & (X_{N,2}^b)^2 & 1 & A_{j,2} & f_{j,2} \\ X_{1,3}^u & X_{2,3}^b & \dots & X_{N,3}^b & (X_{1,3}^b)^2 & (X_{2,3}^b)^2 & \dots & (X_{N,3}^b)^2 & 1 & \vdots & f_{j,3} \\ X_{1,4}^b & X_{2,4}^\ell & \dots & X_{N,4}^b & (X_{1,4}^b)^2 & (X_{2,4}^b)^2 & \dots & (X_{N,4}^b)^2 & 1 & A_{j,N} & f_{j,4} \\ X_{1,5}^b & X_{2,5}^u & \dots & X_{N,5}^b & (X_{1,5}^b)^2 & (X_{2,5}^b)^2 & \dots & (X_{N,5}^b)^2 & 1 & B_{j,1} & f_{j,5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & B_{j,2} & f_{j,6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & f_{j,7} \\ X_{1,2N+1}^b & X_{2,2N+1}^b & \dots & X_{N,2N+1}^b & (X_{1,2N+1}^b)^2 & (X_{2,2N+1}^b)^2 & \dots & (X_{N,2N+1}^b)^2 & 1 & B_{j,N} & \vdots \\ X_{1,2N+1}^b & X_{2,2N+1}^b & \dots & X_{N,2N+1}^b & (X_{1,2N+1}^b)^2 & (X_{2,2N+1}^b)^2 & \dots & (X_{N,2N+1}^b)^2 & 1 & C_1 & f_{j,2N+1} \end{cases} \quad (5)$$

Las combinaciones de la ecuación 5 se ejecutan una a una en el modelo numérico que se desea calibrar para obtener los resultados de los parámetros modales para cada una de las combinaciones. Con estos resultados se tienen $2N+1$ ecuaciones y $2N+1$ constantes para resolver. Teniendo el valor de las constantes será posible reemplazarlo en las ecuaciones (3) y (4) dejando como incógnitas los valores X de las variables desconocidas. Este proceso se lleva a cabo para cada modo de vibración j que se desea calibrar.

Para comparar las formas modales () de una estructura se plantea hacer uso de un indicador de correlación de formas modales basado en el *criterio de exactitud modal* (MAC- Modal Assurance Criterion) propuesto por Allemang [2]. Este criterio establece una relación entre dos vectores: el vector de desplazamientos modales obtenidos en los ensayos experimentales (EXP) y el vector de desplazamientos modales obtenidos del modelo numérico (FE). La ecuación 6 muestra la relación entre estos dos vectores.

$$MAC = \frac{\left| \sum_{j=1}^n w_j^{EXP} w_j^{FE} \right|^2}{\sum_{j=1}^n \left(w_j^{EXP} \right)^2 \sum_{j=1}^n \left(w_j^{FE} \right)^2} \quad (6)$$

donde los superíndices EXP y FE representan los resultados experimentales y analíticos respectivamente; w_j son los vectores de desplazamiento modal para cada modo de vibración j y n es el número total de modos de vibración que se desean comparar.

La cercanía del valor MAC a la unidad indica una mayor correspondencia entre los vectores experimental y numérico, lo que implica una correlación perfecta entre las formas modales del modelo numérico y las formas modales de la estructura real. La ecuación número 7 muestra la función objetivo para parámetros modales de frecuencias y formas modales de vibración.

$$v = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{m_w} W_{f,j} \left(\frac{f_{j,FE}^2 - f_{j,EXP}^2}{f_{j,EXP}^2} \right)^2 + \sum_{j=1}^{m_c} W_{w,j} (W_{FE} - W_{EXP})^2 \right] \quad (7)$$

El segundo término de la función objetivo mostrada en la ecuación 7 se puede modificar si se hace la comparación de las formas modales () en función de los valores MAC. En este caso el escenario analítico es la comparación de los vectores de formas modales analíticas versus los vectores de formas modales experimentales ($MAC_{FE/EXP}$) haciendo uso del criterio MAC. Por otro lado, el escenario experimental es la comparación entre el vector de formas modales experimentales consigo mismo ($MAC_{EXP/EXP}$). Por lo tanto, la ecuación 7 de la función objetivo toma la forma que se muestra en la ecuación 8

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{m_w} W_{f,j} \left(\frac{f_{j,FE}^2 - f_{j,EXP}^2}{f_{j,EXP}^2} \right)^2 + \sum_{j=1}^{m_\phi} W_{MAC,j} \left(MAC_{j,FE/EXP} - MAC_{j,EXP/EXP} \right)^2 \right] \quad (8)$$

El escenario experimental de la correlación de vectores de forma modal ($MAC_{EXP/EXP}$) significa que como existe una perfecta correspondencia entre el vector de formas modales experimentales consigo mismo el valor MAC para este caso será la unidad. La ecuación 9 muestra la expresión final de la función objetivo.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{m_w} W_{f,j} \left(\frac{f_{j,FE}^2 - f_{j,EXP}^2}{f_{j,EXP}^2} \right)^2 + \sum_{j=1}^{m_\phi} W_{MAC,j} \left(MAC_{j,FE/EXP} - 1 \right)^2 \right] \quad (9)$$

donde, $f_{j,FE}$ es la frecuencia de vibración teórica y $f_{j,EXP}$ es la frecuencia de vibración experimental, $MAC_{j,FE/EXP}$ es el escenario analítico para formas modales de vibración, aplicando el criterio MAC, $W_{f,j}$ y $W_{MAC,j}$ son matrices de ponderación para el modo de vibración j para frecuencias de vibración y formas modales de vibración respectivamente. Finalmente, es necesario realizar la modificación de la ecuación 4 del método de Douglas-Reid para realizar la comparación de las formas modales en función de valores MAC. Esta modificación se muestra en la ecuación 10.

$$MAC_{j,FE/EXP} = C_j^{MAC} + \sum_{N=1}^{2N+1} A_{j,N}^{MAC} X_N + B_{j,N}^{MAC} X_N^2 \quad (10)$$

donde A , B , y C son las constantes de las ecuaciones de Douglas –Reid, usando el indicador de correlación de vectores de formas modales (MAC).

Las *matrices de ponderación* son matrices diagonales que dependen de los resultados obtenidos aplicando el método de Douglas-Reid y se usan a juicio del evaluador en caso de que desee incrementar o reducir la participación de alguno o algunos de los términos de la función objetivo.

Para aplicar estas matrices de ponderación Ramos et al. [15] hace uso de dos enfoques: a) Fristwell and Mottershead (1985) y b) Fristwell and Mottershead modificado, una variante de la propuesta original de Fristwell and Mottershead. Una tercera propuesta es la de usar la Inversa de la Matriz.

El enfoque de Fristwell and Mottershead propone que las matrices de ponderación se calculen en base a las desviaciones estándar de los resultados hallados en las combinaciones realizadas aplicando el método de Douglas-Reid (ecuación 11). En este caso se halla una sola matriz de ponderación que afecta todo el error de frecuencias, independientemente del número de modos de vibración que se desea calibrar. El enfoque de Fristwell and Mottershead modificado propone que las matrices de ponderación sean calculadas también en base a la desviación estándar, pero dividida entre el vector de frecuencias de vibración (o valores *MAC*, según sea el caso- ecuación 12). En este enfoque existirá una matriz de ponderación para cada modo de vibración que se desea calibrar. Finalmente, el enfoque de la inversa de la matriz es más sencilla y se propone que la matriz de ponderación sea la inversa de los resultados de frecuencias de vibración (o valores *MAC*, según sea el caso- ecuación 13)

$$W = [\text{diag} (\dagger_1^2, \dagger_2^2, \dots, \dagger_j^2)]^{-1} \quad (11)$$

$$W = [\text{diag} (CV_1, CV_2, \dots, CV_j)]^{-1}; CV_j = \dagger_j / f_j \quad (12)$$

$$W = [\text{diag} (FT)]^{-1} \quad (13)$$

donde W es la matriz diagonal de ponderación, \dagger_j es la desviación estándar de los resultados obtenidos para frecuencias de vibración y valores *MAC* aplicando el método de Douglas-Reid. CV es el coeficiente de varianza, f_j es la frecuencia de vibración para el modo j , y FT es la matriz de frecuencias de vibración obtenidas al aplicar el método de Douglas-Reid.

La elección del enfoque estará en función de los resultados que se vayan obteniendo en la calibración. Se debe recordar que inclusive los valores ponderados que se hallan obteniendo pueden modificarse a juicio del evaluador. Es así que si es necesario disminuir el error en alguno o algunos de los parámetros modales en cada uno de los modos de vibración se pueden multiplicar las matrices ponderadas correspondientes a dichos parámetros por un factor.

CAPÍTULO 2

Presentación de la herramienta automatizada para la optimización de modelos numericos

Resumen

En este capítulo se describe la herramienta propuesta para realizar la optimización de parámetros modales. Para explicarlo adecuadamente, el algoritmo se ha dividido en cinco módulos, cada uno de los cuales presenta un sub algoritmo en base a la metodología establecida en el capítulo I de este manual. En el primer módulo se realiza la lectura de los datos desde una hoja Excel previamente preparada. En el segundo módulo se ejecuta una subrutina para resolver las ecuaciones planteadas por Douglas-Reid en base a los datos de entrada. En el tercer módulo se realiza una subrutina para hacer uso de las matrices de ponderación dando como opción la aplicación de alguno de los tres enfoques descritos en el primer capítulo (Fristwell and Mottershead, Fristwell and Mottershead modificado e Inversa de la matriz). En el cuarto módulo se realiza una subrutina para crear la función objetivo en base las constantes halladas en el módulo 2. Finalmente en el quinto módulo se presenta una subrutina para llevar a cabo el proceso de optimización y obtener los resultados de las variables optimizadas. En la segunda parte de este capítulo se muestra una guía paso a paso para ejecutar la herramienta propuesta.

2.1 Algoritmo OPTIMIZAR

El algoritmo OPTIMIZAR se ha desarrollado en MatLab [11] en base a la resolución de pequeñas subrutinas que se realizan de forma automática y que siguen la metodología explicada en el capítulo I. En la Figura A.4 se muestran los módulos en los cuales se presenta la herramienta.

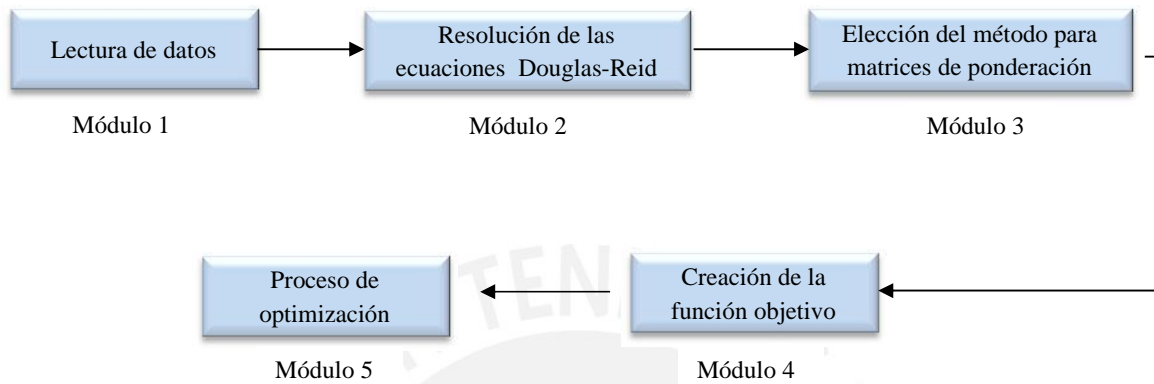


Figura A.4: Módulos que conforman el algoritmo OPTIMIZAR

Módulo 1: Lectura de los datos de entrada.

En este primer módulo el algoritmo solicita los datos de entrada, que consisten en los resultados de las combinaciones realizadas usando el enfoque Douglas-Reid para frecuencias y valores MAC. En esta primera parte el algoritmo posibilita dos opciones de ingreso de los datos: a) llamando una hoja Excel tipo y b) ingresando manualmente las matrices con los resultados de las combinaciones. En la primera opción se cuenta con una hoja Excel donde previamente se han colocado los datos de entrada necesarios para ejecutar el algoritmo. Estos datos de entrada son el número de variables desconocidas, el número de modos de vibración que se desean calibrar, las frecuencias experimentales y las combinaciones realizadas para frecuencias y valores MAC. La segunda opción solicita el ingreso manual de los datos necesarios para ejecutar el algoritmo. Estos datos deben ingresarse en vectores o matrices según sea el caso.

Módulo 2: Resolución de las ecuaciones Douglas-Reid

En este módulo se lleva a cabo la solución matricial de las constantes de las ecuaciones de Douglas-Reid. Esta solución consiste en una serie de matrices ordenadas según las combinaciones planteadas y en función del número de variables desconocidas y el número de modos de vibración que se desean optimizar. Esta parte del algoritmo es automática y da como resultado dos matrices de constantes (para frecuencias y valores MAC) por cada modo de vibración.

Módulo 3: Elección del método para matrices de ponderación

En la tercera parte el algoritmo pregunta por el enfoque que se desea usar para aplicar los pesos ponderados. En esta etapa el algoritmo muestra una tabla con cuatro opciones: a) Fristwell and Mottershead Modificado, b) Inversa de la Matriz, c) Fristwell and Mottershead, y d) Ninguno. La elección del tipo de enfoque a usar para el cálculo de los pesos ponderados queda a juicio del evaluador. Adicionalmente se da la opción de incrementar o disminuir estos pesos ponderados dependiendo de si se desea acrecentar o disminuir la participación de alguno o algunos de los términos que participan en la función objetivo. Se recomienda que en el primer proceso de optimización los pesos ponderados no se modifiquen. A partir del segundo proceso (si fuera necesario) los pesos ponderados pueden modificarse paso a paso para afinar los resultados.

Módulo 4: Creación de la función objetivo

En la cuarta parte el algoritmo genera la función objetivo. Este proceso también es automático y se ha programado usando inicialmente variables simbólicas que luego se concatenan para formar la función objetivo. Esta función objetivo está conformada por dos partes: a) el error que relaciona las frecuencias numéricas y las frecuencias experimentales y b) la relación entre los valores MAC y la unidad. Para formar la función objetivo se toman los valores obtenidos en el módulo 2 de las constantes de Douglas-Reid para frecuencias y valores MAC para cada modo de vibración y para cada variable desconocida.

Módulo 5: Proceso de optimización

En la quinta y última parte se realiza el proceso de optimización propiamente dicho. Para llevar a cabo este proceso es necesario que el algoritmo reconozca la función objetivo desarrollada en el módulo 4 como una función de MatLab. Para esto se usa el comando $Funcion = matlabFunction(P, 'vars', \{x\})$, donde P es el nombre de la función objetivo creada en la cuarta parte del algoritmo y x son las variables simbólicas. Por último se hace una llamada al proceso de optimización a través del comando *lsqnonlin*. Algunos parámetros de la optimización se han colocado por defecto, como por ejemplo el número máximo de iteraciones ($niter = 1E4$), la tolerancia de la función objetivo ($1E-6$) y la tolerancia del valor de las variables ($1E-6$). Estos valores pueden ser modificados a criterio del evaluador.

Para resolver el proceso de optimización la caja de herramientas del MatLab presentan tres tipos de algoritmos disponibles: Trust-region reflective, Gauss –Newton y Levenberg–Marquardt. La herramienta de optimización propuesta usa el algoritmo Trust-region reflective por lo que es necesario que el número de ecuaciones sea mayor o igual al número de variables. En el proceso de optimización de parámetros modales se puede establecer una ecuación por cada modo de vibración. Por lo tanto, si se establecen N variables desconocidas es necesario que se calibren al menos N modos de vibración. En la Figura A.5 se muestra el diagrama de flujo en el que se basa la herramienta OPTIMIZAR.

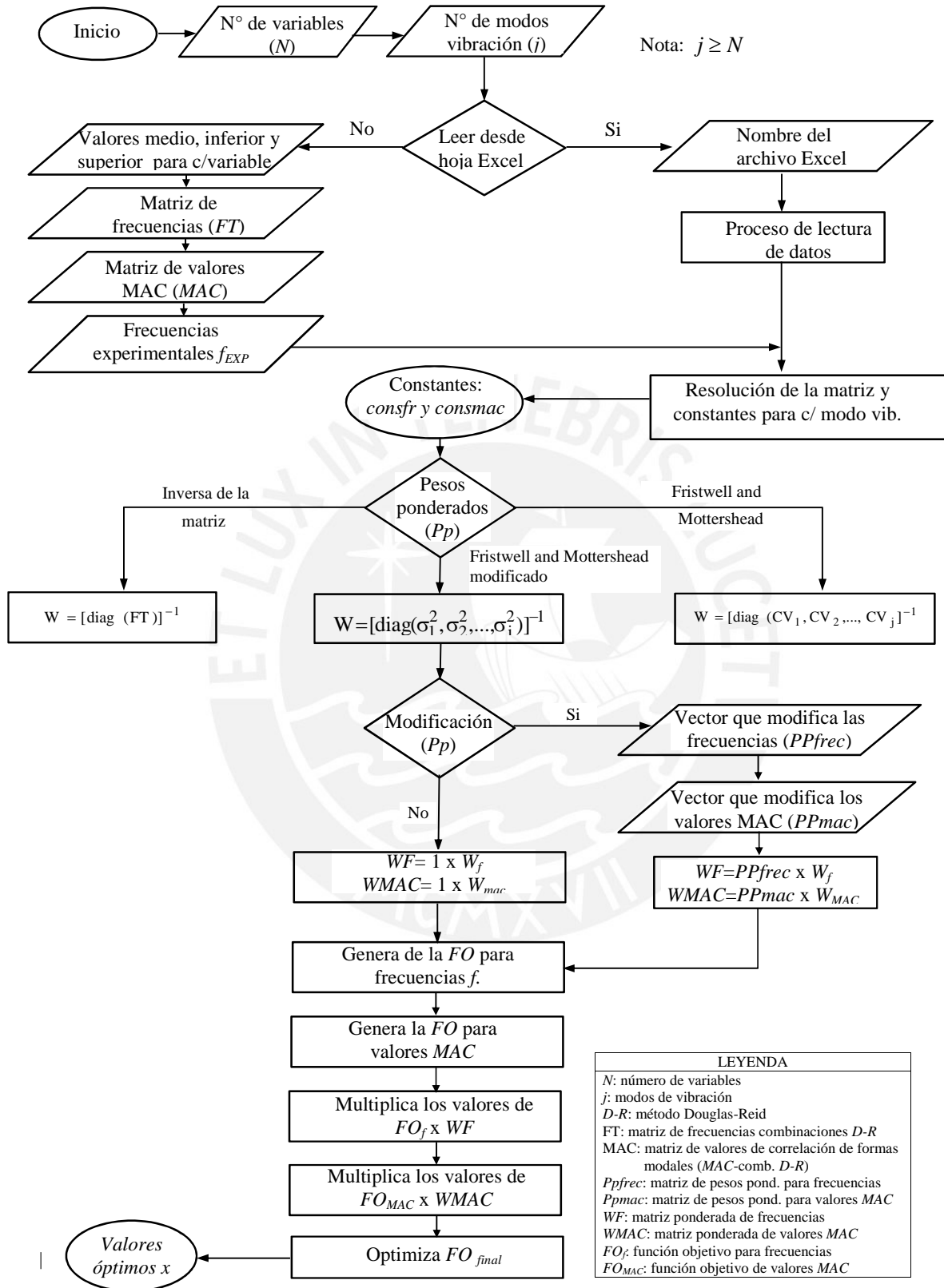


Figura A.5 Diagrama de flujo de la herramienta propuesta OPTIMIZAR

2.2 Guía para el uso de la herramienta OPTIMIZAR

2.2.1 Pasos Preliminares

Antes de ejecutar la herramienta se debe realizar un análisis de sensibilidad para saber cuáles son las variables que afectan de manera más significativa el comportamiento dinámico de la estructura. Estas variables pueden ser el módulo de elasticidad (E), las condiciones de borde, la geometría de la estructura, etc. dependiendo del tipo de respuesta que se busca obtener. De este análisis de sensibilidad se obtendrá un número determinado N de variables desconocidas (X).

El objetivo de emplear el enfoque de Douglas-Reid es hallar las constantes de las ecuaciones que intervendrán en la función objetivo. El primer paso es pre-establecer tres valores para cada variable (X) desconocida: un valor base (X^b), un valor más bajo (X^l) y un valor más alto (X^u). Estos valores se pueden determinar en base a estudios similares y a juicio del evaluador. Con los valores dados a las variables desconocidas (X) se plantearán $2N+1$ combinaciones para resolver las constantes.

2.2.2 Preparación de la información de entrada

Adjunto al algoritmo se entrega un modelo de hoja en Excel para el ingreso de la información de entrada y que comprende cuatro secciones. Como se muestra en la Tabla 1 la primera sección consta de la información inicial de entrada: (a) donde se deben indicar el número de variables desconocidas “ X ” a resolver con la herramienta, (b) el número de modos de vibración que se desean calibrar, y (c) el número de combinaciones (generado automáticamente). En la segunda y tercera sección se deben ingresar los resultados de frecuencias de vibración y valores MAC para cada combinación realizada con los valores X^b , X^l y X^u dados para cada variable y aplicando el enfoque Douglas-Reid. En la cuarta sección se ingresa el rango de los valores X^b , X^l y X^u pre-establecidos para cada variable desconocida. Por último, en la quinta sección se colocan los resultados experimentales obtenidos para frecuencias de vibración. La información de las formas modales experimentales ya no se ingresa en esta tabla 1 debido a que para el cálculo de los valores MAC ya se ha incluido.

La tabla A.1 puede ser modificada según la cantidad de variables a optimizar. En el caso de tener más variables desconocidas y/o más modos de vibración se deberán incrementar filas y/o columnas, según sea el caso. Así mismo, la ruta de la hoja de Excel debe coincidir con la misma carpeta de destino en la que se encuentra el algoritmo.

Tabla A.1: Hoja de Excel para el ingreso de datos

Número de variables		N			}	Información inicial
Número de Modos		j				
Combinaciones		$2N+1$			}	Frecuencias analíticas
FT [Hz]	Comb	Modo 1	Modo 2	... Modo j		
1	1	$f_{1,1}$	$f_{2,1}$	$f_{j,1}$	}	
2	2	$f_{1,2}$	$f_{2,2}$	$f_{j,2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
$2N+1$	$2N+1$	$f_{1,(2N+1)}$	$f_{2,(2N+1)}$	$f_{j,(2N+1)}$	}	Valores MAC
MAC	Comb	Modo 1	Modo 2	... Modo j		
1	1	$MAC_{1,1}$	$MAC_{2,1}$	$MAC_{j,1}$	}	
2	2	$MAC_{1,2}$	$MAC_{2,2}$	$MAC_{j,2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
$2N+1$	$2N+1$	$MAC_{1,(2N+1)}$	$MAC_{2,(2N+1)}$	$MAC_{j,(2N+1)}$	}	Rango de la variable
VAR	X_1	X_2	... X_N			
Medio	x_1^b	x_2^b	... x_N^b			
Inferior	x_1^l	x_2^l	... x_N^l			
Superior	x_1^u	x_2^u	... x_N^u		}	Frecuencias experimentales
Resultados experimentales		Modo 1	Modo 2	...Modo j		
Frecuencias [Hz]		f_1	f_2	f_j		

2.2.3 Ejecución del algoritmo

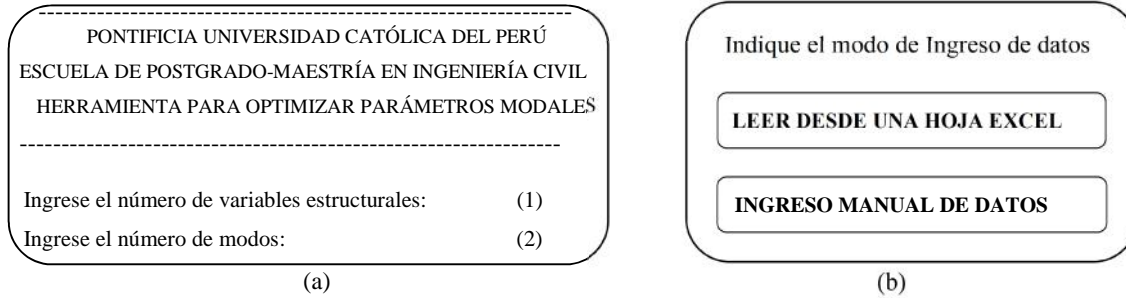
Para ejecutar la herramienta se debe abrir el editor del MatLab y ubicar la carpeta donde se encuentra el algoritmo. En el Command Window se mostrarán automáticamente una serie de ventanas para ingresar o seleccionar las alternativas más convenientes.

Como se muestra en la Figura A.6a, al iniciar la ejecución de la herramienta de optimización se solicita el ingreso de la siguiente información:

- 1) “Ingrese el número de variables”: donde se coloca el número de parámetros que se desea optimizar.
- 2) “Ingrese el número de modos”: donde se coloca el número de modos que considere conveniente analizar.

Seguidamente el programa presenta el menú donde el algoritmo permite ingresar los datos de entrada de dos maneras (Figura A.6b): a) mediante una hoja Excel o b) de forma manual.

- a) La primera opción es “Leer desde una hoja Excel”: Al elegir esta opción el algoritmo solicita el nombre del archivo Excel (*NOMBRE.xlsx*) ubicado en la misma carpeta del algoritmo.
- b) La segunda opción es “Ingreso manual de datos”. Al escoger esta opción se ingresan manualmente las matrices de combinaciones de frecuencias y de MAC. Seguidamente se ingresan los vectores fila que contienen los valores medio, inferior y superior para cada variable desconocida y para cada modo de vibración. Finalmente se ingresa el vector fila que contiene los resultados de las frecuencias de vibración experimentales.



(a)

(b)

Figura A.6: Menú (a) Ingreso de información inicial (b) Modo de Ingreso de datos

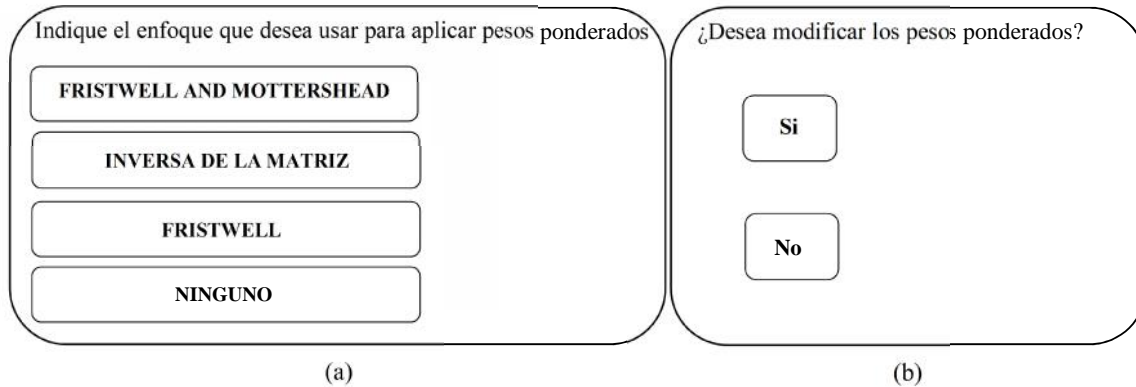
2.2.4 Primeros resultados

Los primeros resultados que se obtienen con el algoritmo son las matrices de las constantes de frecuencias y de *MAC* resueltas con la aplicación del método de Douglas-Reid. Estas matrices se han denominado *constantes_{fr}* y *constantes_{mac}*, respectivamente. Estas matrices se concatenarán con las ecuaciones de función objetivo para cada modo de vibración y para cada variable desconocida.

2.2.5 Matrices de ponderación

En esta etapa la herramienta preguntará qué método se desea usar para aplicar los pesos ponderados. Para ello se muestra una ventana con cuatro opciones: a) Fristwell and Mottershead, b) Inversa de la matriz, c) Fristwell and Mottershead modificado, y d) Ninguno (Figura A.7a).

Seguidamente el algoritmo preguntará si se desean modificar estas matrices de pesos ponderados (Figura 4b). Por lo general, en la primera ejecución del algoritmo la modificación de los pesos ponderados no es necesaria por lo que el evaluador podrá escoger la opción negativa. En las posteriores ejecuciones del algoritmo es posible que el evaluador desee incrementar o disminuir la influencia de alguno de los factores que forman parte de la función objetivo. En este último caso se podrá escoger la opción afirmativa para lo cual se le pedirá un vector fila con los factores por los cuales desea multiplicar cada componente de la función objetivo. Este vector de modificación de pesos ponderados deberá tener la misma dimensión de los modos que se desean calibrar.



Indique el enfoque que desea usar para aplicar pesos ponderados

FRISTWELL AND MOTTERSHEAD

INVERSA DE LA MATRIZ

FRISTWELL

NINGUNO

(a)

¿Desea modificar los pesos ponderados?

Si

No

(b)

Figura A.7 Menú para aplicar pesos ponderados: (a) selección del enfoque y, (b) modificación de los pesos ponderados

2.2.6 Generación de la función objetivo y proceso de optimización

La herramienta genera de manera automática la función objetivo haciendo uso de variables simbólicas que luego son transformadas en ecuaciones. Una vez generada la función objetivo el algoritmo procede a ejecutar el proceso de optimización en base a ciertos parámetros que se han establecido por defecto. Sin embargo, el usuario podrá modificar estos parámetros si así lo ve por conveniente. Estos parámetros son:

- El número de iteraciones máximas *niter*, que por defecto se encuentra en $1E4$. El usuario podrá incrementar o disminuir el número de iteraciones máximas con el objetivo de agilizar el proceso o llegar a resultados más exactos.
- La tolerancia de la función objetivo, que por defecto se encuentra en $1E-6$. Esta tolerancia puede incrementarse o disminuirse de acuerdo a la exactitud que busque obtener el evaluador.
- La tolerancia de los valores finales de las variables, que por defecto se encuentra en $1E-6$
- El rango de la zona de búsqueda, que por defecto se toma el vector de valores medios (b), más bajos (ℓ) y más altos (u) empleados en el método de Douglas-Reid.

Adicionalmente, en el algoritmo se da la opción de modificar el rango de la zona de búsqueda de los valores óptimos, a través de la pregunta ¿Desea modificar el rango de la zona de búsqueda?. Si el usuario opta por la opción “si”, entonces deberá ingresar tres vectores filas para establecer el valor de inicio, el límite inferior y el límite superior de la zona de búsqueda. Si el usuario elige la opción “no” el algoritmo usará como valores de zona de búsqueda los mismos empleados en el método Douglas-Reid (base, lower y upper).

Seguidamente la herramienta lleva a cabo el proceso de optimización de manera automática haciendo uso del comando *lsqnonlin*. Se debe tomar en cuenta que el proceso de optimización aplica el método *Trust-region reflective*, porque los valores óptimos se buscan en un rango específico lo cual conlleva a obtener mínimos locales.

2.2.7 Salida e interpretación de los resultados

Los resultados de salida son los valores optimizados de las variables desconocidas (x_{final}) para cada variable, el valor final de la función objetivo (f_{val}) y el valor de cierre del proceso ($exitflag$). Cuando f_{val} se aproxima a cero indica que los valores de x_{final} son más óptimos. Cuando $exitflag$ es igual a 3 indica que el proceso se llevó a cabo con éxito.

Finalmente el algoritmo muestra dos gráficos (Figura A.8). El primer gráfico muestra la variación de las variables desconocidas X (*current point*) con respecto al número de iteraciones, y el segundo gráfico muestra la variación de la función objetivo con respecto al número de iteraciones. Para ajustar el redondeo de decimales, se manipuló el script origen del archivo *optimplotresnorm* que por defecto tiene MatLab. Por lo tanto, es necesario que este script modificado se encuentre en la misma carpeta de la herramienta.

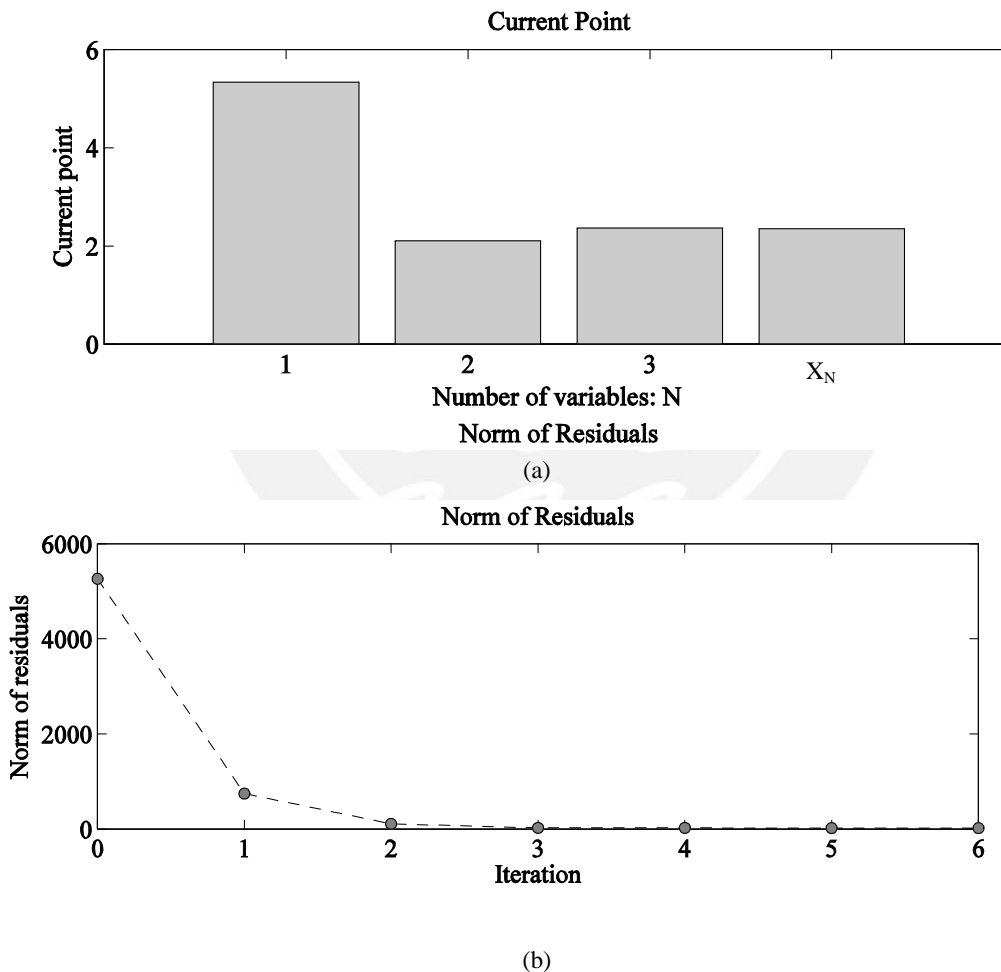


Figura A.8: Resultados gráficos: (a) valor final de las variables desconocidas y, (b) variación de la función objetivo durante el proceso de optimización

CAPÍTULO 3

Ejemplos de aplicación

Resumen

En este capítulo se presentan cuatro ejemplos de aplicación de la herramienta de optimización propuesta. En los tres primeros ejemplos se han asumido los datos experimentales en base a un modelo ficticio denominado “*modelo experimental*” en el cual se tiene control absoluto de los resultados. Luego se ha desarrollado un modelo numérico (*modelo analítico*) con condiciones diferentes a las del modelo experimental. El cuarto ejemplo de aplicación es el de una estructura real. Para obtener los parámetros modales experimentales de esta estructura se llevó a cabo una campaña experimental. Seguidamente se desarrollaron tres modelos analíticos de los cuales se escogió el más sencillo para ser optimizado. El objetivo de estos ejemplos de aplicación es demostrar que la herramienta de optimización propuesta es eficiente y que el comportamiento dinámico de los modelos analíticos optimizados tiene una alta correspondencia con el comportamiento dinámico de los modelos experimentales

3.1 Ejemplo 1: Viga con módulo de elasticidad constante

Este primer ejemplo consiste en una viga de cuatro tramos de igual longitud, de sección rectangular, perfectamente empotrada en sus extremos, tal como se muestra en la Figura A.9. Para desarrollar este ejemplo se construyeron dos modelos. El primer modelo es un modelo ficticio denominado “*Modelo experimental*”, donde se obtuvieron los resultados experimentales, y el segundo modelo denominado “*Modelo analítico*” que es el que se desea calibrar. En ambos modelos, las propiedades mecánicas de los materiales fueron consideradas homogéneas. Luego, se calculó el error entre frecuencias experimentales y analíticas. Las formas modales de vibración para ambos modelos (analítico y experimental) eran exactamente iguales por lo que los valores MAC eran igual a la unidad. Esto es lógico ya que en este caso la única variable que se modifica es el módulo de elasticidad, mientras que todas las otras propiedades de la estructura (características geométricas, propiedades del material y condiciones de borde) se mantienen constantes.

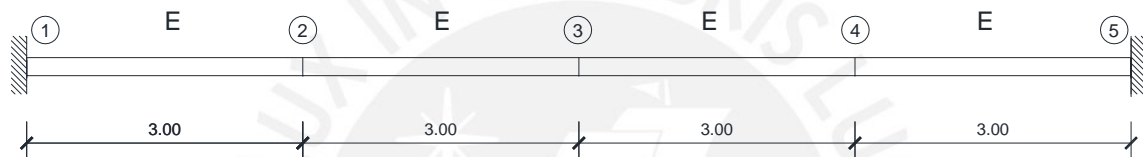


Figura A.9: Viga de 4 tramos con modulo elasticidad constante

Consideraciones para el desarrollo de los modelos

En este ejemplo se desarrollaron dos modelos en el software SAP2000 [4]. Las vigas fueron modeladas con elementos tipo FRAME y se consideró una sección constante de 0.30 m x 0.50 m. La viga de 12 m de longitud fué dividida en cuatro tramos iguales de 3 m. Los extremos de la viga (nudos 1 y 5) se consideraron perfectamente empotrados. Las características geométricas y las propiedades del material de las vigas de los dos modelos fueron similares, a excepción del módulo de elasticidad. En el modelo experimental se consideró un módulo de elasticidad (E_i) igual a 5 GPa, mientras que en el modelo analítico se consideró un módulo de elasticidad (E_a) igual a 8 GPa. En la Figura A-10 se muestra las características del material del modelo analítico y del modelo experimental donde se puede observar el cambio en el valor del módulo de elasticidad.

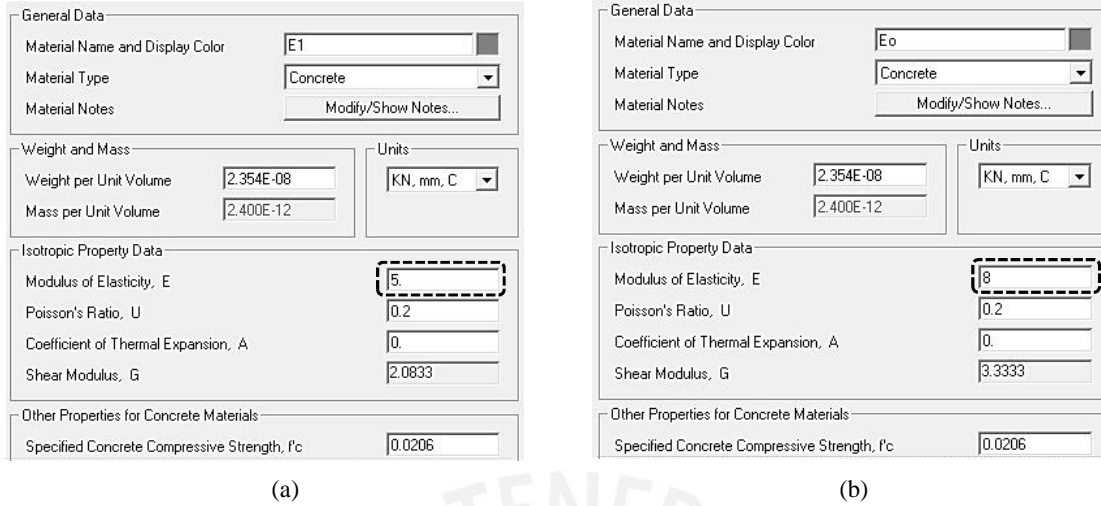


Figura A.10: Propiedades del material (a) modelo experimental E_1 (b) modelo analítico E_0

En la tabla A.2 se resumen los resultados obtenidos de frecuencias y valores MAC para ambos modelos (experimental y analítico) antes del proceso de optimización y para los tres primeros modos de vibración. En esta tabla A.2, se observa que los valores MAC se corresponden perfectamente mientras que la diferencia entre frecuencias de vibración es de alrededor del 26%. Esto último evidencia la imprecisión del modelo analítico.

Tabla A.2: Comparación de los resultados de los modelo experimental y analítico, antes del proceso de optimización

Modo	M. Experimental Frecuencia [Hz]	M. Analítico Frecuencia [Hz]	Error [%]	MAC
1	5.53	7.00	26.00%	1.00
2	14.46	18.29	26.00%	1.00
3	22.74	28.77	26.00%	1.00

3.1.2 Proceso de Optimización

Debido a la imprecisión del modelo analítico se ha llevado a cabo un proceso de optimización para calibrar las frecuencias de vibración de los tres primeros modos de la estructura. Para el desarrollo de la función objetivo se utilizó el método de Douglas-Reid. Este método establece que se debe dar un valor medio (base), inferior (lower) y superior (upper) a las variables desconocidas que se desean optimizar.

La herramienta OPTIMIZAR emplea el algoritmo Trust-region reflective para realizar el proceso de optimización. Por lo tanto, es necesario que existan igual o mayor número de ecuaciones que de variables. En este ejemplo se tiene una variable por lo que es necesario establecer una o más ecuaciones para resolverla. Cada set de resultados de parámetros modales (frecuencia y formas modales de vibración) permite construir una ecuación. En este caso se calibrarán tres modos de vibración lo que significa que se plantearán tres ecuaciones para resolver una variable.

En este ejemplo la variable desconocida es el módulo de elasticidad a la que se le ha asignado los valores que se muestran en la Tabla A.3.

Tabla A.3: Rango de valores considerados para módulo de elasticidad siguiendo el método Douglas-Reid

Valor de la variable desconocida	Base	Lower	Upper
Módulo de elasticidad E [GPa]	3	0.9	8

La información requerida para el desarrollo del programa fue ingresada en la hoja de Excel adjunta a la herramienta, tal como se muestra en la Tabla A.4. Esta hoja de datos fue guardada bajo el nombre “Vigacaso1.xlsx” y su ruta se ubicó en la misma carpeta donde se ubica el algoritmo.

Tabla A.4: Ingreso de la información en la hoja de Excel para el ejemplo 1 -“Vigacaso1”

Número de variables		1			
Número de Modos		3			
Combinaciones		3			
FT [Hz]	Comb	Modo 1	Modo 2	Modo 3	
1	b	4.28	11.20	17.62	
2	ℓ	2.35	6.14	9.65	
3	u	7.00	18.29	28.77	
MAC	Comb	Modo 1	Modo 2	Modo 3	
1	b	1.00	1.00	1.00	
2	ℓ	1.00	1.00	1.00	
3	u	1.00	1.00	1.00	
VAR	X ₁				
Base	3				
Lower	0.9				
Upper	8				
Resultados Experimentales					
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	
Frecuencia [Hz]		5.53	14.46	22.74	

Para llevar a cabo el proceso de optimización se ejecuta la herramienta OPTIMIZAR desde el editor del MatLab. Al dar inicio al algoritmo se presenta la ventana donde se ingresa la información inicial (Figura A.11a). Luego, la herramienta muestra el menú para elegir la forma de ingresar los datos, tal como se observa en la Figura A.11b. En este ejemplo se escogió la opción “Leer desde una hoja de Excel”. Para ello se ingresó el nombre del archivo “Vigacaso1.xlsx”, donde se consignaron los datos de entrada.

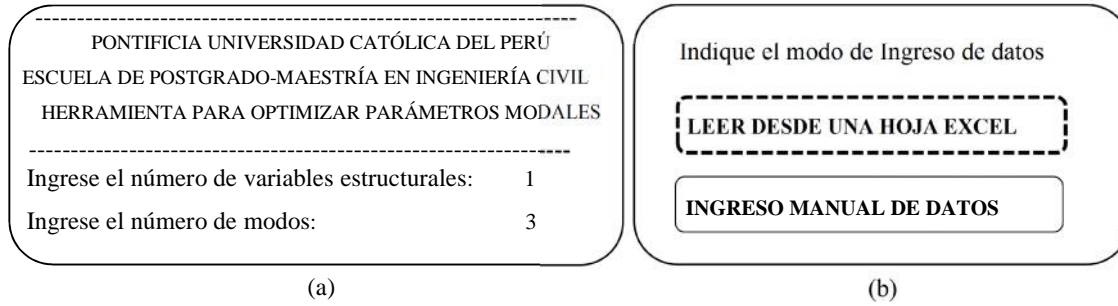


Figura A.11: Menú (a) ingreso de información inicial (b) modo de ingreso de datos

Seguidamente en el Command Window (Figura A.12a) se visualiza el menú donde se puede elegir el tipo de enfoque para la aplicación de pesos ponderados. Para este ejemplo se seleccionó la opción “Inversa de la matriz”. Luego, a la pregunta de si se desea modificar los pesos ponderados (Figura A.12b) se eligió la opción “No”.

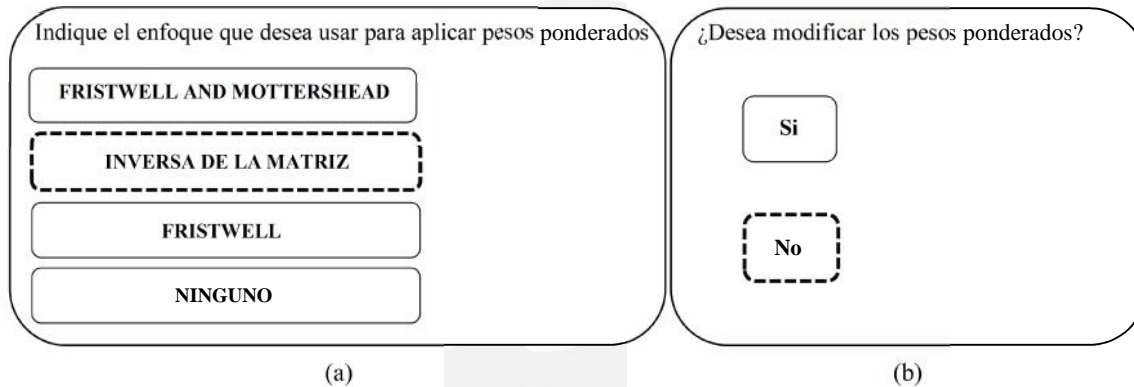


Figura A.12 Menú para aplicar pesos ponderados: (a) selección del enfoque, y (b) modificación de los pesos ponderados

Automáticamente la herramienta muestra el resultado de la variable desconocida que en este caso corresponde al módulo de elasticidad óptimo. El valor obtenido fue $E_0 = 4.66 \text{ GPa}$, y el valor final de la función objetivo $f_{val} = 1.76E-8$. Se puede observar que este valor final de la función objetivo tiende a cero lo que indica que el resultado obtenido de la variable desconocida es óptimo y que el error ha quedado minimizado.

La Figura A.13a presenta la variación del valor del módulo de elasticidad que se está optimizando con respecto a las iteraciones que realiza la herramienta. Al culminar el proceso de optimización la herramienta muestra el valor final del módulo de elasticidad óptimo E_0 y la curva que denota la variación del error a medida que avanza el proceso de optimización (Figura A.13b).

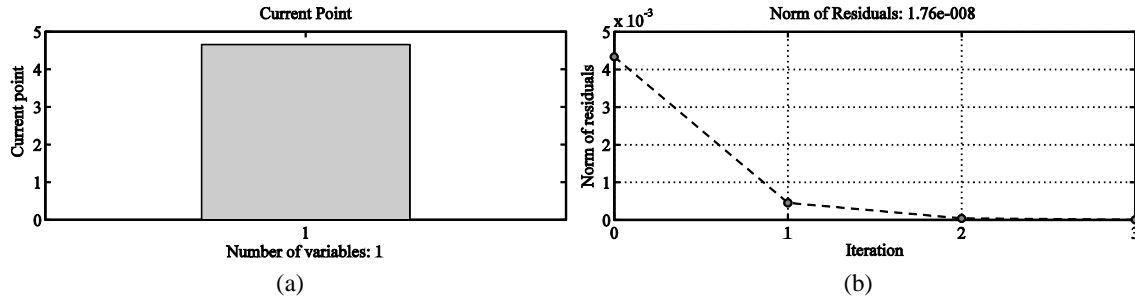


Figura A.13: Resultados del ejemplo 1 (a) Valor numérico del parámetro óptimo (b) Desarrollo del proceso de optimización

En la tabla A.5 se muestra la comparación entre los parámetros modales del modelo experimental y los parámetros modales del modelo analítico después del primer proceso de optimización. En esta tabla se puede observar que la relación de valores MAC denota alta correspondencia entre el modelo analítico y el modelo experimental y el error entre frecuencias experimentales y numéricas ha disminuido a 3.5%.

Tabla A.5: Comparación de los resultados de los modelos experimental y analítico, después del 1° proceso de optimización del ejemplo 1

Modo	M. Experimental Frecuencia [Hz]	M. Analítico Frecuencia [Hz]	Error [%]	MAC
1	5.53	5.34	-3.5%	1.00
2	14.46	13.96	-3.5%	1.00
3	22.74	21.95	-3.5%	1.00

Para obtener resultados más refinados se procedió a un segundo proceso de optimización. Para ello se modificó el rango de valores del módulo de elasticidad. Los valores del módulo de elasticidad medio, más bajo y más alto se presentan en la Tabla A.6.

Tabla A.6: Rango de valores considerados para el módulo de elasticidad en el 2° proceso de optimización para el ejemplo 1

Valor de la variable desconocida	Base	Lower	Upper
Módulo de elasticidad [GPa]	6	3	8

Los valores finales después del proceso de optimización se muestran en la tabla A.7, donde se describe el significado de cada uno de ellos.

Tabla A.7: Resultados finales después del proceso de optimización del ejemplo 1

Resultado	Valor	Descripción
xfinal=	4.85	valor final para la variable desconocida (E_0)
fval=	6.19E-8	valor final de la función objetivo (o error)
exitflag	3	el proceso se llevó a cabo con éxito
iteraciones	4	número total de iteraciones

Adicionalmente, en la Figura A.14 se visualiza el resultado final del módulo de elasticidad óptimo E_0 después del segundo proceso de optimización y la curva que muestra la variación de la función objetivo a medida que avanza el proceso de optimización.

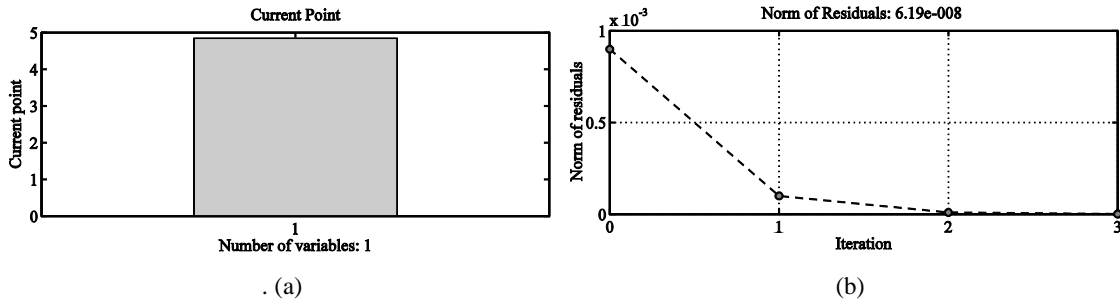


Figura A.14: Resultados del ejercicio 2: (a) valor final de las variables desconocidas y, (b) variación de la función objetivo durante el proceso de optimización

La Figura A.15 muestra la comparación gráfica entre las frecuencias y los valores MAC experimentales y analíticas antes y después del segundo proceso de optimización mediante el criterio FMAC [1]. En el FMAC el tamaño del punto denota la mayor o menor correspondencia entre los vectores de formas modales analíticas y experimentales (MAC) y su mayor cercanía a la línea inclinada a 45° denota una mayor correlación de frecuencias analíticas y experimentales. En el FMAC de la Figura A.15b se puede observar una alta correspondencia entre las formas modales (valores MAC) y el error entre frecuencias experimentales y analíticas después del segundo proceso de optimización es 0.37%.

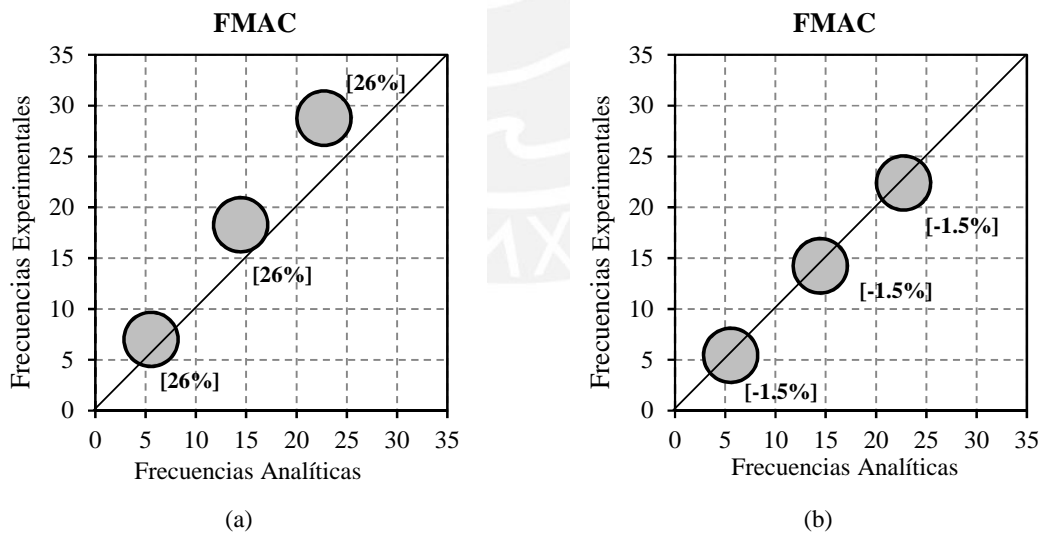


Figura A.15: FMAC del ejemplo1: (a) antes del proceso, y (b) después del proceso de optimización.

* El error entre frecuencias está indicado entre corchetes

3.2 Ejemplo 2: Viga con módulo de elasticidad variable

El segundo ejemplo de aplicación consiste en una viga de sección rectangular de cuatro tramos de igual longitud y perfectamente empotrada en sus extremos. Para desarrollar este ejemplo se realizaron dos modelos. El primer modelo denominado “*Modelo experimental*” que corresponde a un modelo ficticio del cual se obtuvieron los resultados experimentales, y el segundo modelo denominado “*Modelo analítico*” cuyos parámetros modales se desean calibrar. Ambos modelos fueron desarrollados considerando dos material diferentes: un módulo de elasticidad E_1 para los dos primeros tramos y un módulo de elasticidad E_2 para los dos últimos tramos tal como se muestra en la Figura A.16.

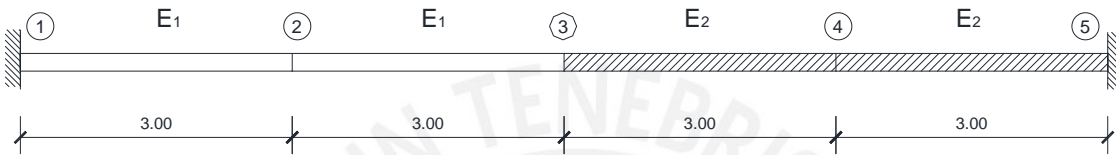


Figura A.16: Viga de 4 tramos con módulo de elasticidad variable

Consideraciones para el desarrollo de los modelos

En este ejemplo se desarrollaron dos modelos con el software SAP2000 [4]. Las vigas fueron modeladas con elementos tipo FRAME y se consideró una sección constante de 0.30 m x 0.50 m. La viga de 12 m de longitud fue dividida en cuatro tramos iguales de 3 m. Los extremos de la viga (nudos 1 y 5) se consideraron perfectamente empotrados. Las características geométricas y las propiedades del material de las vigas de los dos modelos fueron similares a excepción del módulo de elasticidad. En la Figura A.17 se muestran las características del material empleadas para los dos primeros tramos (Figura A.17a) y para los dos últimos tramos (Figura A.17b) del modelo experimental. En esta figura se puede observar la variación del módulo de elasticidad.

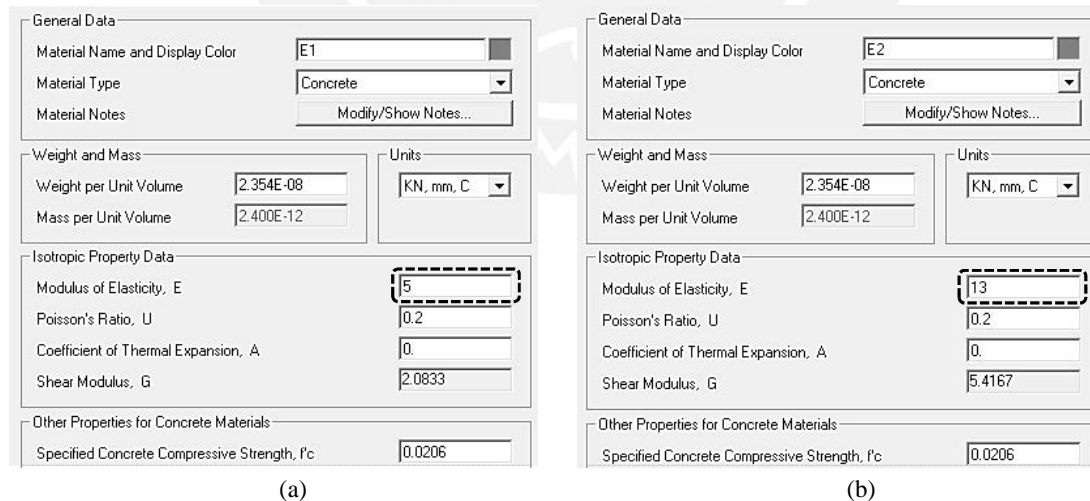


Figura A.17: características del material para el modelo experimental del ejemplo 2: (a) para los dos primeros tramos, y (b) para los dos últimos tramos

Para el modelo analítico se consideraron las mismas propiedades del material del modelo experimental a excepción del módulo de elasticidad que para este caso se consideró constante y con un valor diferente al del modelo experimental. En la Figura A.18 se muestran las características de los materiales consideradas para el modelo analítico donde se puede observar el valor del módulo de elasticidad para los dos primeros tramos (Figura A.18a) y para los dos últimos tramos (Figura A.18b), que para este ejemplo es similar.

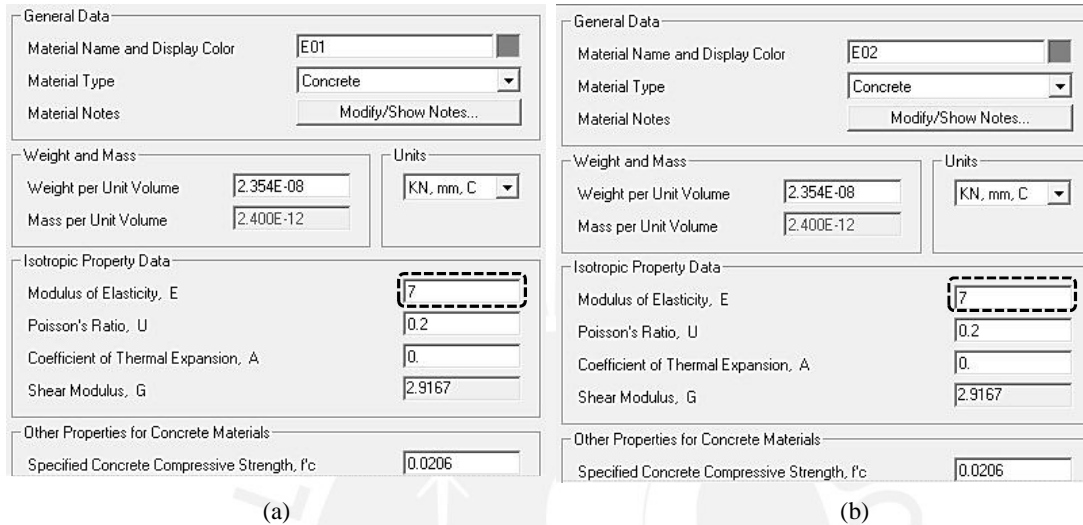


Figura A.18: características del material para el modelo analítico del ejemplo 2: (a) para los dos primeros tramos, y (b) para los dos últimos tramos

La comparación de los resultados en frecuencias y valores MAC de ambos modelos, para los tres primeros modos de vibración se presenta en la Tabla A.7. En esta tabla se observa que los valores MAC para cada modo de vibración son cercanos a la unidad y que el máximo error en frecuencias entre los valores analíticos y experimentales es de 13%.

Tabla A.8: Comparación de los resultados de los modelos experimental y analítico, antes del proceso de optimización del ejemplo 2

Modo	M. Experimental Frecuencia [Hz]	M. Analítico Frecuencia [Hz]	Error [%]	MAC
1	6.72	6.54	-2.68%	0.98
2	17.60	17.11	-2.78%	0.90
3	31.07	26.91	-13.39%	0.91

3.2.2 Proceso de Optimización

Debido a la imprecisión que denota el modelo analítico se ha llevado a cabo un proceso de optimización para calibrar las frecuencias de vibración de los tres primeros modos de vibración de la estructura. Para el desarrollo de la función objetivo se utilizó el método de Douglas-Reid. Este método establece que se debe dar un valor medio (base), inferior (lower) y superior (upper) a las variables desconocidas que se desean optimizar.

La herramienta OPTIMIZAR emplea el algoritmo Trust-region reflective para realizar el proceso de optimización. Por lo tanto, es necesario que existan igual o mayor número de ecuaciones que de variables. En

este ejemplo se tienen dos variables por lo que es necesario establecer dos o más ecuaciones para resolverlas. Cada set de resultados de parámetros modales (frecuencia y formas modales de vibración) permite construir una ecuación. En este caso se calibrarán tres modos de vibración lo que significa que se plantearán tres ecuaciones para resolver las dos variables.

Para este ejemplo las dos variables desconocidas son los módulos de elasticidad E_{01} y E_{02} y a las que se les asignó un valor alto, medio y bajo tal como se muestra en la Tabla A.9.

Tabla A.9: Rango de valores considerados del módulo de elasticidad para el proceso de optimización del ejemplo 2

Valor de la variable desconocida	Base	Lower	Upper
E_1 [GPa]	5	3	9
E_2 [GPa]	9	5	15

La información requerida para la ejecución de la herramienta fue ingresada en la hoja de Excel adjunta al algoritmo, tal como se muestra en la Tabla A.10. Esta hoja Excel fue guardada bajo el nombre de “Vigacaso2.xlsx” y su ruta se ubicó en la misma carpeta del algoritmo.

Tabla A.10: Ingreso de la información en la hoja de Excel para el ejemplo 2 -“Vigacaso2”

Número de variables	2			
Número de Modos	3			
Combinaciones	5			
FT [Hz]	Comb	Modo 1	Modo 2	Modo 3
1	E_1b-E_2b	6.27	16.43	27.33
2	E_1l-E_2b	5.34	13.96	25.37
3	E_1u-E_2b	7.42	19.40	30.51
4	E_1b-E_2l	5.53	14.46	22.74
5	E_1b-E_2u	6.89	18.02	32.75
MAC	Comb	Modo 1	Modo 2	Modo 3
1	E_1b-E_2b	0.99	0.98	0.98
2	E_1l-E_2b	1.00	0.99	0.99
3	E_1u-E_2b	0.98	0.89	0.91
4	E_1b-E_2l	0.98	0.89	0.91
5	E_1b-E_2u	1.00	1.00	1.00
VAR	X_1	X_2		
Base	5	9		
Lower	3	5		
Upper	9	20		
Resultados Experimentales	Modo 1	Modo 2	Modo 3	
Frecuencia [Hz]	6.72	17.60	31.07	

Para llevar a cabo el proceso de optimización se ejecuta la herramienta OPTIMIZAR desde el editor del MatLab. Al dar inicio al algoritmo se presenta la ventana donde se ingresa la información inicial (Figura A.19a). Luego, la herramienta muestra el menú para elegir la forma de ingresar los datos, tal como se observa en la Figura A.19b. En este ejemplo se escogió la opción “Leer desde una hoja de excel”. Para ello se ingresó el nombre del archivo “Vigacaso2.xlsx”.

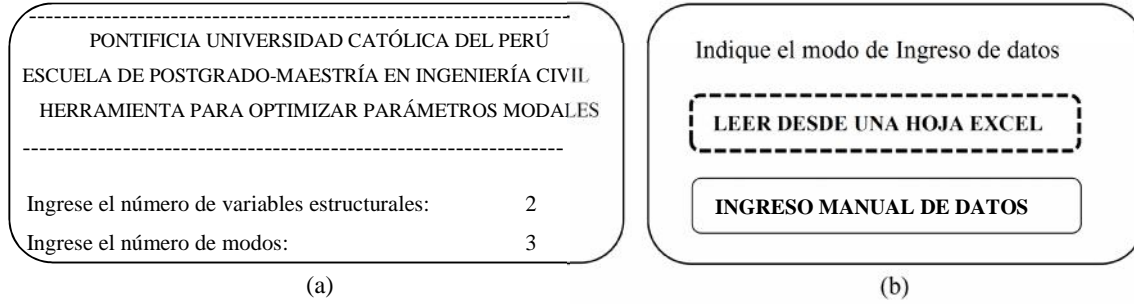


Figura A.19: Menú (a) ingreso de información inicial (b) modo de ingreso de datos

Seguidamente en el Command Window (Figura A.19a) se visualiza el menú donde se puede elegir el tipo de enfoque para la aplicación de pesos ponderados. Para este ejemplo se seleccionó la opción “*Fristwell and Mottershead*”. Luego, a la pregunta de si se desea modificar los pesos ponderados (Figura A.19b) se eligió la opción “No”.

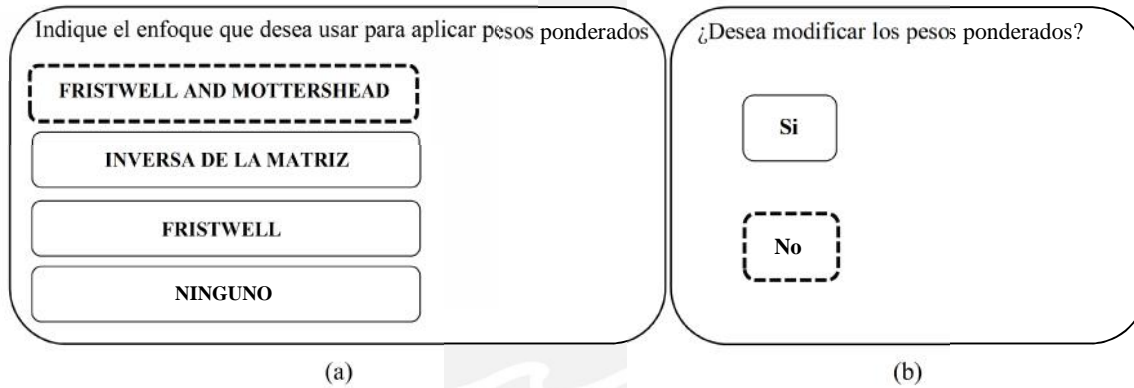


Figura A.20 Menú para aplicar pesos ponderados: (a) selección del enfoque y, (b) modificación de los pesos ponderados

Los valores finales después del proceso de optimización se muestran en la tabla A.11, donde se describe el significado de cada uno de ellos.

Tabla A.11: Resultados finales después del proceso de optimización del ejemplo 2

Resultado	Valor	Descripción
xfinal=	5.03	valor final para la variable desconocida número 1 (E_1)
fval=	12.70	valor final para la variable desconocida número 2 (E_2)
exitflag	3.30E-5	valor final de la función objetivo (o error)
iteraciones	3	el proceso se llevó a cabo con éxito
	27	número total de iteraciones

Adicionalmente, en la Figura A.21 se visualiza el resultado final del módulo de elasticidad óptimo E_{01} y E_{02} después del proceso de optimización y la curva que muestra la variación de la función objetivo a medida que avanza el proceso de optimización.

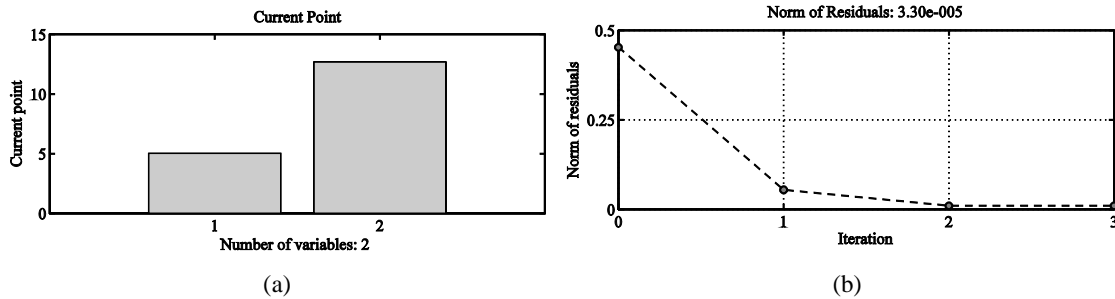


Figura A.21: Resultados del ejemplo 2: (a) valor final de las variables desconocidas y, (b) variación de la función objetivo durante el proceso de optimización

En la tabla A.12 se muestra la comparación de los parámetros modales entre el modelo experimental y el modelo analítico optimizado. En esta tabla se puede observar que la relación de valores MAC denota una alta correspondencia entre las formas modales de ambos modelos y que el error máximo entre las frecuencias experimentales y analíticas es de 0.8% aproximadamente.

Tabla A.12: Comparación de los resultados del modelo experimental y analítico, después del proceso de optimización del ejemplo 2

Modo	M. Experimental Frecuencia [Hz]	M. Analítico Frecuencia [Hz]	Error [%]	MAC
1	6.72	6.70	-0.32%	1.00
2	17.60	17.56	-0.22%	1.00
3	31.07	30.83	-0.77%	1.00

La Figura A.22 muestra la comparación gráfica entre las frecuencias y los valores MAC experimentales y analíticas antes y después del proceso de optimización mediante el criterio FMAC [1]. En el FMAC de la Figura A.22b se puede observar una alta correspondencia entre las formas modales (valores MAC) y un error tolerable entre frecuencias experimentales y analíticas después del proceso de optimización.

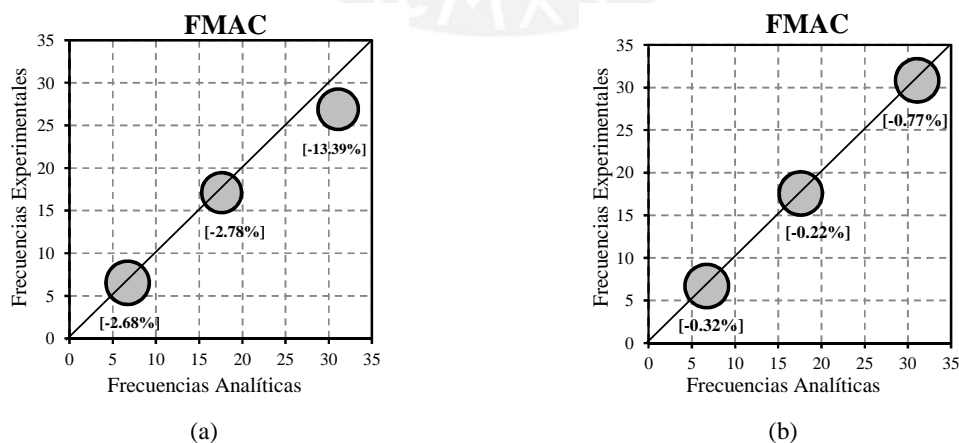


Figura A.22: FMAC del ejemplo2: (a) antes del proceso, (b) después del proceso de optimización

* El error entre frecuencias está indicado entre corchetes

3.3 Ejemplo 3: Torre conformada por paredes de dos materiales diferentes

El tercer ejemplo consiste en una torre de sección rectangular en planta y cuyas paredes están conformadas por dos materiales de diferente módulo de elasticidad y diferente peso específico. Para desarrollar este ejemplo se realizaron dos modelos. El primer modelo denominado “*Modelo experimental*” que corresponde a un modelo ficticio del cual se obtuvieron los resultados experimentales, y el segundo modelo denominado “*Modelo analítico*” cuyos parámetros modales se desean calibrar.

Consideraciones para el desarrollo de los modelos

El modelo experimental se desarrolló con el programa SAP2000 [4], donde se modeló una torre tubular de sección constante de 2 m x 2 m y de 10 m de altura. Cada pared de la torre está conformada por un elemento tipo shell de 0.25 m de espesor. Para efectos del ejemplo, se consideró que tres de sus paredes estaban hechos de un material (MAT1) y la cuarta pared de otro material (MAT2), tal como se muestra en la Figura A.23. Las características del material 1 son: $E_1=10$ GPa, $\gamma_1=3.35E-05$ N/mm³, y del material 2 son: $E_2=8$ GPa, $\gamma_2=2.55E-05$ N/mm³.

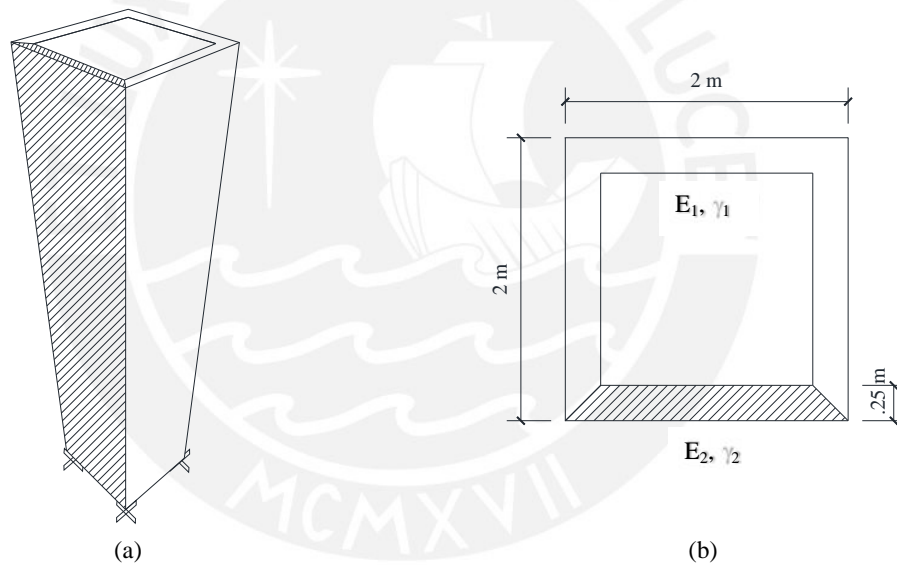


Figura A.23: Modelo experimental desarrollado en SAP2000 (a) vista en elevación, y (b) perspectiva

Seguidamente se desarrolló un modelo analítico, con las mismas características geométricas considerando, igualmente que las paredes de la torre son de diferentes materiales. Las propiedades de los materiales consideradas para el modelo analítico son: $E_1=6$ GPa, $\gamma_1=2.75E-05$ N/mm³ para el material 1 y $E_2=6$ GPa, $\gamma_2=2.75E-05$ N/mm³ para el material 2. Una comparación entre los resultados de los parámetros modales experimentales y analíticos se muestran en la tabla A.13. En esta tabla se puede observar que el error entre las frecuencias experimentales y analíticas se encuentra alrededor del 15% y que los valores MAC son menores que el valor aceptable de 0.75 [15] para el primer y segundo modos de vibración. También se puede observar que el tercer y cuarto modos tienen un valor MAC de 1.00 lo que supondría una correspondencia perfecta entre el modelo analítico y el modelo experimental (en el tercer y cuarto modos de vibración).

Tabla A.13: Comparación de los resultados de los modelos experimental y analítico, antes del proceso de optimización

Modo	M. Experimental Frecuencia [Hz]	M. Analítico Frecuencia [Hz]	Error [%]	MAC
1	5.84	5.03	-13.99%	0.73
2	5.96	5.03	-15.64%	0.73
3	17.47	14.91	-14.65%	1.00
4	20.78	17.72	-14.73%	1.00

En la Figura A.22 se muestra una comparación gráfica entre el comportamiento dinámico del modelo experimental (Figura A.24a) y el modelo analítico (Figura A.24b) para una mejor visualización.

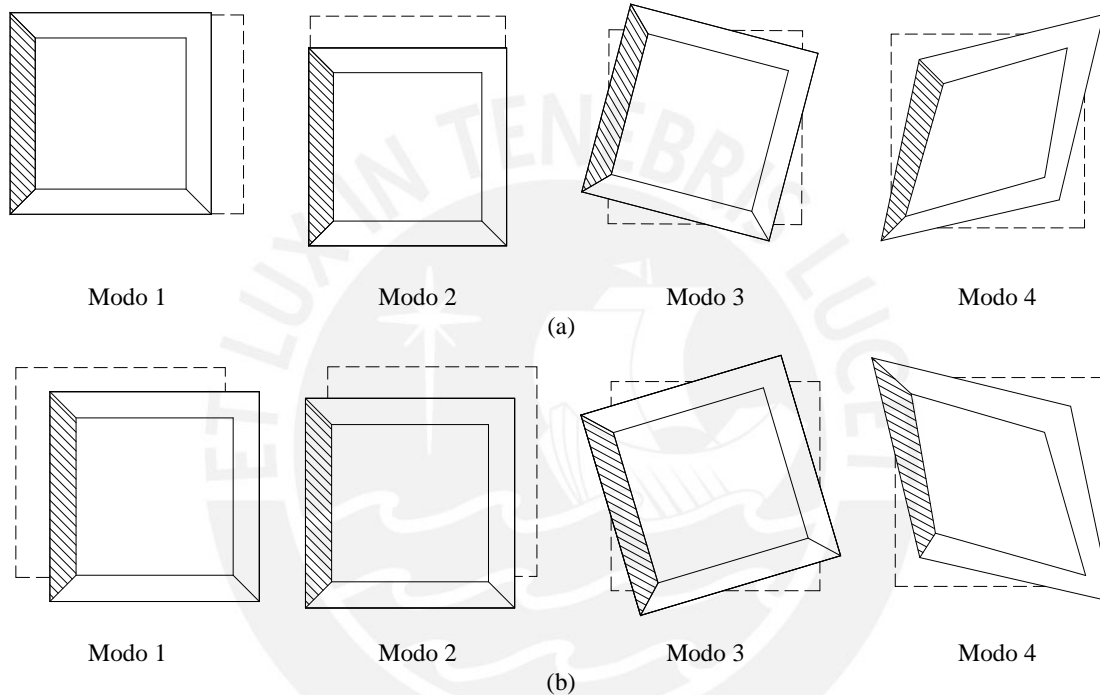


Figura A.24: Comparación gráfica entre las formas modales: a) modelo experimental y, b) modelo analítico

Para lograr que los parámetros modales del modelo analítico sean similares a los del modelo experimental, se ha llevado a cabo un proceso de optimización.

3.3.2 Proceso de Optimización

Debido a la imprecisión que denota el modelo analítico se ha llevado a cabo un proceso de optimización para calibrar las frecuencias de vibración de los tres primeros modos de vibración de la estructura. Para el desarrollo de la función objetivo se utilizó el método de Douglas-Reid. Este método establece que se debe dar un valor medio (base), inferior (lower) y superior (upper) a las variables desconocidas que se desean optimizar.

La herramienta OPTIMIZAR emplea el algoritmo Trust-region reflective para realizar el proceso de optimización. Por lo tanto, es necesario que existan igual o mayor número de ecuaciones que de variables. En este ejemplo se tienen cuatro variables por lo que es necesario establecer tres o más ecuaciones para resolverlas. Cada set de resultados de parámetros modales (frecuencia y formas modales de vibración) permite construir una

ecuación. En este caso se calibrarán cuatro modos de vibración lo que significa que se plantearán cuatro ecuaciones para resolver las cuatro variables. Estas cuatro variables son el módulo de elasticidad (E_1 y E_2) y el peso específico (γ_1 y γ_2). En la tabla A.14 se muestran los valores medio, bajo y alto, dados para las variables desconocidas.

Tabla A.14: Rango de valores dados para las variables desconocidas del ejemplo 3

Variable desconocida	Base	Lower	Upper
Módulo de elasticidad E_1 [GPa]	7	4	12
Módulo de elasticidad E_2 [GPa]	7	4	12
Peso específico γ_1 [N/mm ²]	2.40E-05	2.00E-05	3.50E-05
Peso específico γ_2 [N/mm ²]	2.40E-05	2.00E-05	3.50E-05

La información requerida para el desarrollo del programa fue ingresado en la hoja de Excel adjunta al algoritmo, (Tabla A.15). Esta tabla se guardó con el nombre “Tubo.xlsx” y se ubicó en la misma carpeta donde se encuentra el algoritmo.

Tabla A.15: Hoja Excel para el ejemplo 3 -“Tubo”

Número de variables		4			
Número de Modos		4			
Combinaciones		9			
FT [Hz]	Combinaciones	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
1	$E_1b-E_2b- \gamma_1b- \gamma_2b$	5.38	5.38	15.96	18.97
2	$E_1l-E_2b- \gamma_1b- \gamma_2b$	4.29	4.47	12.80	15.24
3	$E_1u-E_2b- \gamma_1b- \gamma_2b$	6.46	6.76	19.31	23.04
4	$E_1b-E_2l- \gamma_1b- \gamma_2b$	4.92	5.15	14.69	17.54
5	$E_1b-E_2u- \gamma_1b- \gamma_2b$	5.66	5.89	16.90	20.12
6	$E_1b-E_2b- \gamma_1l- \gamma_2b$	5.69	5.69	16.90	20.08
7	$E_1b-E_2b- \gamma_1u- \gamma_2b$	4.94	4.94	14.66	17.42
8	$E_1b-E_2b- \gamma_1b- \gamma_2l$	5.48	5.48	16.26	19.32
9	$E_1b-E_2b- \gamma_1b- \gamma_2u$	5.73	6.05	17.05	20.40
MAC	Comb	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
1	$E_1b-E_2b- \gamma_1b- \gamma_2b$	4.15E-2	4.15E-2	9.98E-2	9.97E-2
2	$E_1l-E_2b- \gamma_1b- \gamma_2b$	0.04E-2	0.03E-2	9.98E-2	9.97E-2
3	$E_1u-E_2b- \gamma_1b- \gamma_2b$	100E-2	9.99E-2	9.96E-2	9.97E-2
4	$E_1b-E_2l- \gamma_1b- \gamma_2b$	100E-2	9.99E-2	9.96E-2	9.97E-2
5	$E_1b-E_2u- \gamma_1b- \gamma_2b$	0.04E-2	0.03E-2	9.99E-2	9.98E-2
6	$E_1b-E_2b- \gamma_1l- \gamma_2b$	0.03E-2	0.03E-2	0.9949	9.93E-2
7	$E_1b-E_2b- \gamma_1u- \gamma_2b$	0.03E-2	0.03E-2	100E-2	9.96E-2
8	$E_1b-E_2b- \gamma_1b- \gamma_2l$	0.03E-2	0.03E-2	9.99E-2	9.96E-2
9	$E_1b-E_2b- \gamma_1b- \gamma_2u$	0.03E-2	0.03E-2	9.93E-2	9.91E-2
VAR		X_1	X_2	X_3	X_4
Base		7.00	7.00	2.80	2.80
Lower		4.00	4.00	2.40	2.40
Upper		12.00	12.00	3.50	3.50
Resultados Experimentales					
	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	
Frecuencia [Hz]	5.844	5.96	17.468	20.781	

Para llevar a cabo el proceso de optimización debe ejecutarse la herramienta OPTIMIZAR desde el editor del MatLab. Al dar inicio al algoritmo se presenta la ventana donde se ingresa la información inicial (Figura A.23a). Luego, la herramienta muestra el menú para elegir la forma de ingresar los datos, tal como se observa en la Figura A.25b. En este ejemplo se escogió la opción “Leer desde una hoja de excel”. Para ello se ingresó el nombre del archivo “*Tubo.xlsx*”.

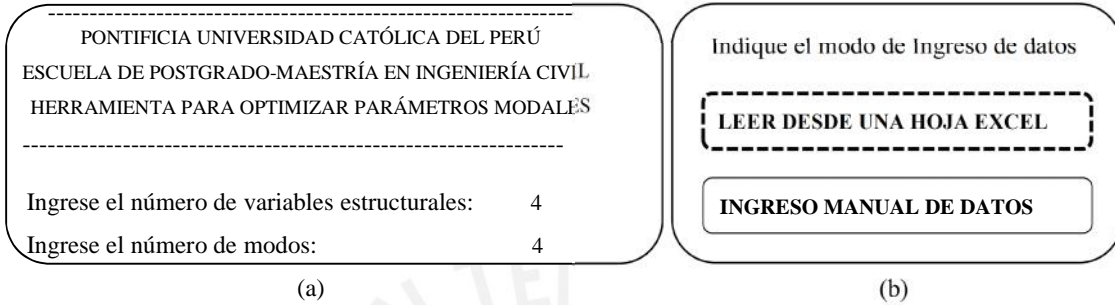


Figura A.25: Menú (a) ingreso de información inicial (b) modo de ingreso de datos

A continuación se visualiza la ventana para indicar el tipo de enfoque para la aplicación de pesos ponderados que se desea emplear (ver Figura A.26a). Para el presente ejercicio se escogió la opción “*Fritswell and Mottershead modificado*”, y ante la pregunta “¿Desea modificar los pesos ponderados?”, se seleccionó la opción “No”, ver Figura A.26b.

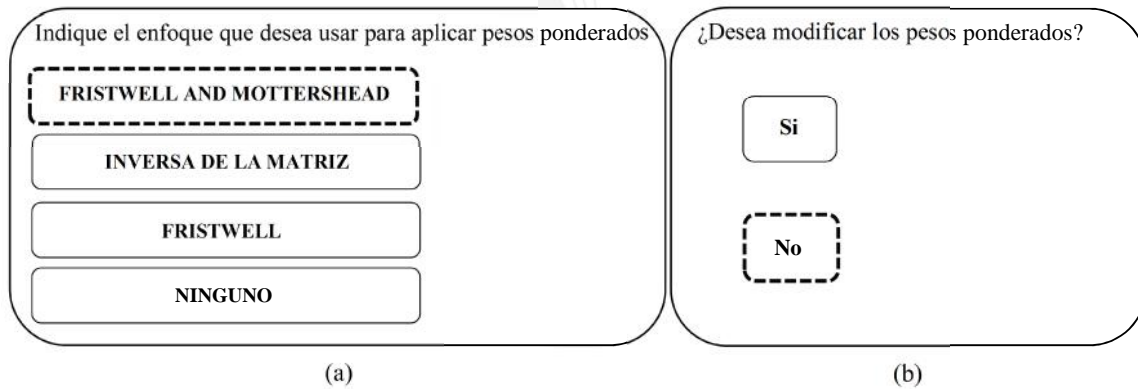


Figura A.26 Menú para aplicar pesos ponderados: (a) selección del enfoque y, (b) modificación de los pesos ponderados

Los valores finales después del proceso de optimización se muestran en la tabla A.16, donde se describe el significado de cada uno de ellos.

Tabla A.16: Resultados finales después del proceso de optimización del ejemplo 3

Resultado	Valor	Descripción
x _{final} =	10.11	valor final para la variable desconocida número 1 (E_1)
	5.21	valor final para la variable desconocida número 2 (E_2)
	2.95	valor final para la variable desconocida número 3 (E_3)
	2.60	valor final para la variable desconocida número 4 (E_4)
f _{val} =	1.11E-4	valor final de la función objetivo (o error)
exitflag	3	el proceso se llevó a cabo con éxito
iteraciones	83	número total de iteraciones

Adicionalmente, el algoritmo muestra gráficamente la variación de los valores de X (variables desconocidas) y de la función objetivo, conforme avanzan las iteraciones. El resultado final se muestra en la Figura A.27.

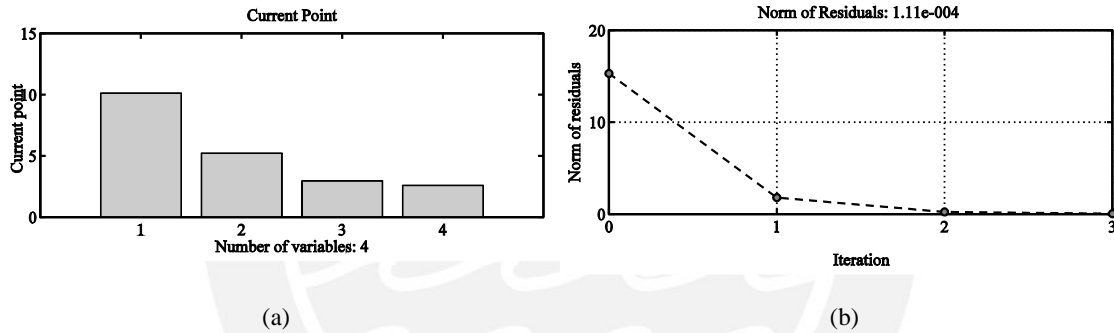


Figura A.27: Resultados del ejercicio 3: (a) valor final de las variables desconocidas y, (b) variación de la función objetivo durante el proceso de optimización

La comparación de los parámetros modales entre el modelo experimental y modelo optimizado se muestra en la tabla A.17. Debido a que el error entre frecuencias es menor al 5% y que los valores MAC muestran una correlación perfecta entre los dos modelos, no se ha llevado a cabo un segundo proceso de optimización.

Tabla A.17: Comparación de los resultados de los modelos experimental y analítico, después de proceso de optimización

Modo	M. Experimental Frecuencia [Hz]	M. Analítico Frecuencia [Hz]	Error [%]	MAC
1	5.84	5.73	-2.04%	1.00
2	5.96	6.05	1.53%	1.00
3	17.47	17.05	-2.41%	1.00
4	20.78	20.40	-1.83%	1.00

La tabla A.18 muestra una comparación entre los resultados obtenidos con cada uno de los enfoques de matrices de ponderación. En esta tabla se puede observar que el resultado de las variables desconocidas es similar y que la función objetivo más pequeña se obtiene al aplicar el enfoque de la Inversa de la Matriz.

Tabla A.18: Comparación de los resultados obtenidos aplicando los tres enfoques de matrices de ponderación

Enfoque	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ρ_1 (N/mm ³)	ρ_2 (N/mm ³)	fval
Fristwell and Mottershead modificado	10.11	5.21	2.95E-05	2.60E-05	1.105E-04
Inversa de la Matriz	10.04	5.17	2.95E-05	2.93E-05	8.018E-07
Fristwell and Mottershead	10.05	5.17	2.93E-05	2.91E-05	4.091E-05

La Figura A.28 muestra la comparación gráfica entre las frecuencias y los valores MAC experimentales y analíticas antes y después del proceso de optimización mediante el criterio FMAC [1]. En el FMAC el tamaño del punto denota la mayor o menor correspondencia entre los vectores de formas modales analíticas y experimentales (MAC) y su mayor cercanía a la línea inclinada a 45° denota una mayor correlación de frecuencias analíticas y experimentales. En la Figura A.28b se observa una alta correspondencia entre las formas modales (valores MAC) y que el máximo error entre frecuencias experimentales y analíticas después del proceso de optimización es de 2.41%.

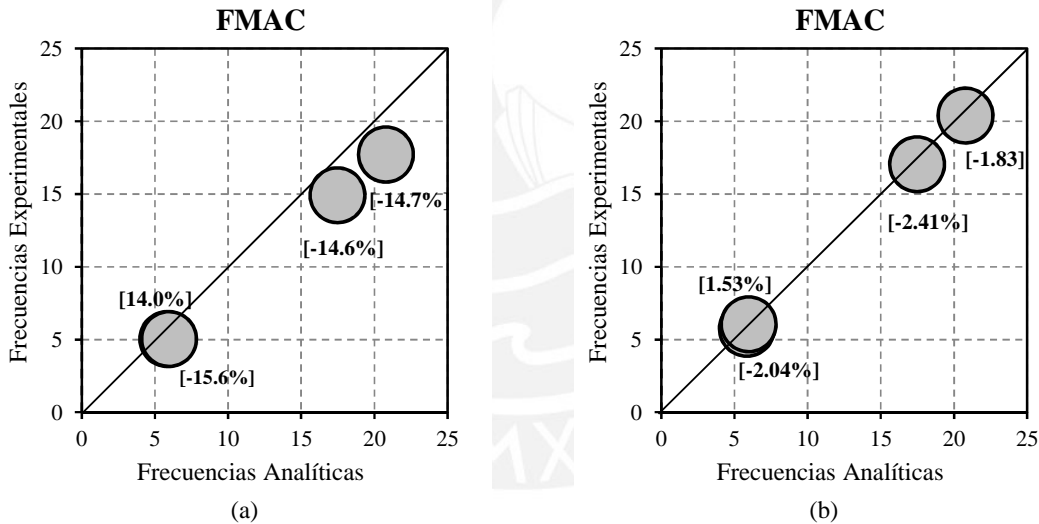


Figura A.28: FMAC del ejemplo3: (a) antes del proceso , (b) después del proceso de optimización

* El error entre frecuencias está indicado entre corchetes

3.4 Ejemplo 4: Muro de Mampostería de albañilería de piedra en “Chokepukio - Cusco”

El ejemplo final consiste en calibrar el modelo numérico de un muro de albañilería de piedra ubicado en el Sitio Arqueológico Chokepukio en Cusco, a fin que las formas modales y frecuencias del modelo sean similares a los obtenidos en la campaña experimental de vibración.

La mampostería del muro está compuesta de piedras irregulares interpuestas con juntas de mortero de barro de espesor entre 2.5 y 10 cm, con una altura de 9 m. y una longitud de 18 m. aproximadamente (Figura A.29a). Otra de las características del muro es la ubicación de aberturas como una puerta y nichos. También se observa el deterioro del muro debido a la presencia de vegetación en la parte superior de éste. Además, la inclinación de la pared evidencia posibles problemas estructurales. Esta inclinación se controla mediante unos tirantes de madera apoyados en el otro muro. Esta interacción entre las dos paredes se puede observar en la Figura A.29b y A.29c.

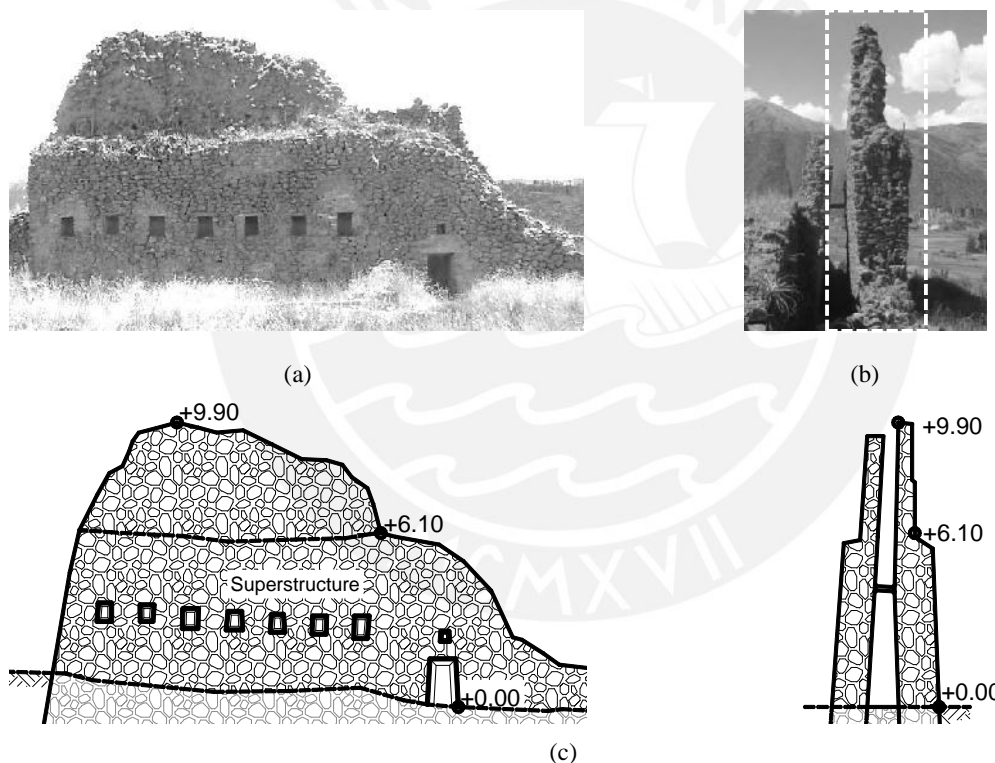


Figura A.29: Ejemplo 4: (a) elevación del muro instrumentado, (b) vista lateral, y (c) vista frontal y transversal de la estructura estudiada

Consideraciones para el desarrollo de los modelos

Como parte del proceso se realizaron tres modelos numéricos (Figura 30) que fueron desarrollados en el software DIANA TNO [18] con el objetivo de obtener un modelo numérico que represente de manera adecuada a la estructura en estudio. Inicialmente se construyeron modelos teniendo en cuenta la mampostería como un

material continuo y homogéneo con un módulo de elasticidad de 0.8 GPa y el peso específico de 27.5 kN/m³, de acuerdo con los valores propuestos por Brignola [3].

Los modelos fueron construidos utilizando principalmente elementos sólidos isoparamétricos de ocho nodos tipo HX24L. En todos los modelos, las paredes se han considerado con diferentes espesores de altura correspondientes a los cambios de sección. De la misma manera, el espesor de la longitud de la pared instrumentado se consideró variable a partir de 1.20 m en el lado izquierdo, a 1.50 m de la puerta hacia el lado derecho.

El primer modelo fue construido teniendo en cuenta la interacción entre la pared instrumentada y el otro situado detrás de él, a través de la celosía de madera existente, tal como se presenta en la figura A.30a. Los puntales de madera eran consideradas como piezas de eucalipto con un módulo de elasticidad de 15,000 MPa [16], se modela como elementos tipo viga L12BE. El modelo FE resultante presenta 26 459 unidades de ladrillo y 31 233 grados de libertad. El segundo modelo considerado se creó asumiendo la pared instrumentada como desacoplada y la simulación de la interacción de los puntales de madera como resortes de compresión con la rigidez axial equivalente, ver fig. A.30b. El modelo FE resultante presenta 22 010 unidades de ladrillo y 25 281 grados de libertad. Por último, un tercer modelo se construyó asumiendo las dos paredes como completamente desvinculados (sólo se consideró la pared instrumentada, ver Figura A.30c). Este último modelo FE presenta 22 010 unidades de ladrillo y 25 281 grados de libertad

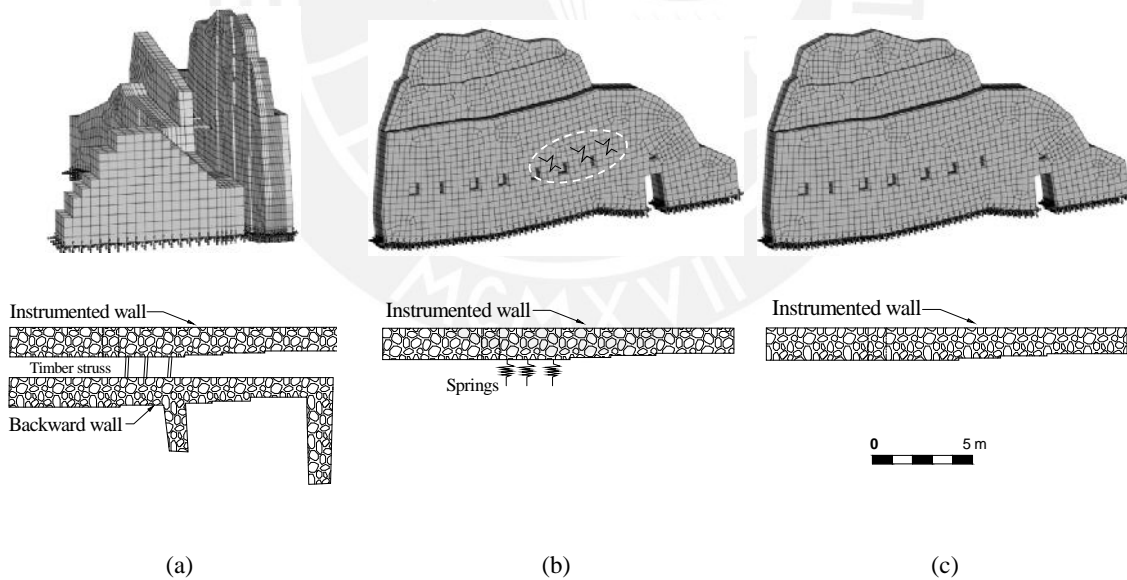


Figura A.30: Desarrollo de los Modelos Numéricos (a) Modelo 1 considerando interacción entre muros (b) Modelo 2 asumiendo el muro instrumentado desacoplado (c) Modelo 3 considerando solo el muro instrumentado

La Tabla A.19 resume los resultados de frecuencias analíticas obtenidas para cada modelo antes del proceso de optimización, donde se observa que el Modelo 3 presenta menos errores en las frecuencias (máxima diferencia en frecuencias igual a 45%), lo que evidencia una mejor precisión en comparación con los otros modelos, mientras que los valores de MAC son mejores en el Modelo 1 (valor más bajo MAC de 0.57). Entre estos

modelos, se prefirió aplicar la calibración mediante un proceso de optimización al modelo 3, debido a su simplicidad y menor demanda computacional.

Tabla A.19: Valores de frecuencia experimental y numérica, obtenidos para cada modelo

Modo	Experimental [Hz]	Modelo 1[Hz]	Modelo 2[Hz]	Modelo 3[Hz]
1	2.00	2.67 [34%]	2.72 [36%]	2.40 [20%]
2	3.16	4.81 [52%]	5.06 [60%]	4.32 [37%]
3	4.37	5.94 [36%]	6.36 [45%]	5.95 [36%]
4	5.10	6.67 [31%]	7.58 [49%]	7.41 [45%]

* El error en frecuencias se indica entre paréntesis

3.4.1 Proceso de Optimización

En este estudio se seleccionaron las variables desconocidas a través del análisis de sensibilidad donde se evaluó un conjunto de parámetros que incluyeron los aspectos geométricos, las condiciones de contorno y las propiedades del material (por ejemplo, el módulo de elasticidad y peso específico). La conclusión de este análisis de sensibilidad fue que las variables con mayor influencia en los parámetros modales fueron el módulo de elasticidad y el peso específico. Por otra parte, se consideró que la estructura estaba conformada por un tipo de material en la parte inferior y por otro tipo de material en la parte superior. La aplicación del enfoque de Douglas Reid requiere la definición de valores medio, inferior y superior para cada variables que se desea optimizar (módulo de elasticidad y peso específico). Estos valores se presentan en la Tabla A.20.

Tabla A.20: Valores considerados del módulo de elasticidad para el proceso de optimización del ejemplo 4

Valor	Módulo de elasticidad [10^{-1} GPa]		Peso específico [10kN/m^3]	
	Parte inferior (E_1)	Parte superior(E_2)	Parte inferior (ρ_1)	Parte superior(ρ_2)
Base	8.00	8.00	2.75	2.75
Lower	3.00	2.10	2.00	2.00
Upper	13.00	13.00	3.50	3.50

La información necesaria para el desarrollo del algoritmo fue ingresada en la hoja Excel adjunta, tal como se muestra en la Tabla A.21. El archivo fue guardado bajo el nombre “Chokepukio.xlsx” y ubicado en la misma carpeta del algoritmo.

Tabla A.21: Información de ingreso en Excel denominado “Chokepukio”

Número de variables		4				
Número de Modos		4				
Combinaciones		9				
FT [Hz]	Comb	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	
1	E ₁ b-E ₂ b- ₁ b- ₂ b	2.40	4.32	5.95	7.41	
2	E ₁ ℓ-E ₂ b- ₁ b- ₂ b	1.54	2.83	4.44	5.35	
3	E ₁ u-E ₂ b- ₁ b- ₂ b	2.92	5.95	6.67	8.56	
4	E ₁ b-E ₂ ℓ- ₁ b- ₂ b	2.13	3.82	4.58	6.01	
5	E ₁ b-E ₂ u- ₁ b- ₂ b	2.47	4.48	6.65	8.07	
6	E ₁ b-E ₂ b- ₁ ℓ- ₂ b	2.47	4.62	6.38	8.10	
7	E ₁ b-E ₂ b- ₁ u- ₂ b	2.32	4.05	5.63	6.92	
8	E ₁ b-E ₂ b- ₁ b- ₂ ℓ	2.69	4.64	6.48	7.94	
9	E ₁ b-E ₂ b- ₁ b- ₂ u	2.18	4.03	3.56	7.03	
MAC	Comb	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	
1	E ₁ b-E ₂ b- ₁ b- ₂ b	0.975	0.858	0.916	0.489	
2	E ₁ ℓ-E ₂ b- ₁ b- ₂ b	0.974	0.783	0.762	0.462	
3	E ₁ u-E ₂ b- ₁ b- ₂ b	0.971	0.903	0.950	0.645	
4	E ₁ b-E ₂ ℓ- ₁ b- ₂ b	0.961	0.938	0.961	0.845	
5	E ₁ b-E ₂ u- ₁ b- ₂ b	0.975	0.818	0.803	0.482	
6	E ₁ b-E ₂ b- ₁ ℓ- ₂ b	0.974	0.877	0.942	0.669	
7	E ₁ b-E ₂ b- ₁ u- ₂ b	0.975	0.833	0.855	0.485	
8	E ₁ b-E ₂ b- ₁ b- ₂ ℓ	0.975	0.822	0.824	0.487	
9	E ₁ b-E ₂ b- ₁ b- ₂ u	0.974	0.874	0.938	0.626	
VAR	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄		
Base	8	8	2.75	2.75		
Lower	3	3	2.00	2.00		
Upper	13	13	3.50	3.50		
Resultados Experimentales						
		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	
Frecuencia [Hz]		2.00	3.16	4.37	5.10	

Para llevar a cabo el proceso de optimización se ejecuta a la herramienta OPTIMIZAR desde el editor del MatLab. Al dar inicio al algoritmo se presenta la ventana donde se ingresa la información inicial (Figura A.31a). Luego, la herramienta muestra el menú para elegir la forma de ingresar los datos, tal como se observa en la Figura A.31b. En este ejemplo se escogió la opción “Leer desde una hoja de Excel”. Para ello se ingresó el nombre del archivo “Chokepukio.xlsx”.

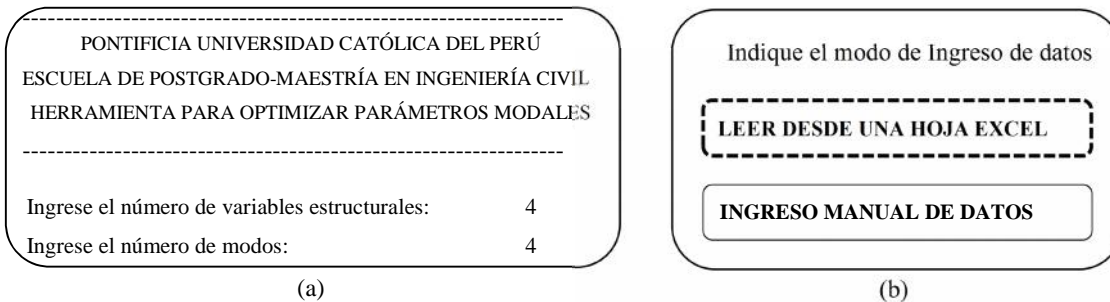


Figura A.31: Menú (a) ingreso de información inicial (b) modo de ingreso de datos

Seguidamente en el Command Window (Figura A.32a) se visualiza el menú donde se puede elegir el tipo de enfoque para la aplicación de pesos ponderados. Para este ejemplo se seleccionó la opción “*Fristwell and Mottershead*”. Luego, a la pregunta de si se desea modificar los pesos ponderados (Figura A.32b) se eligió la opción “No”.

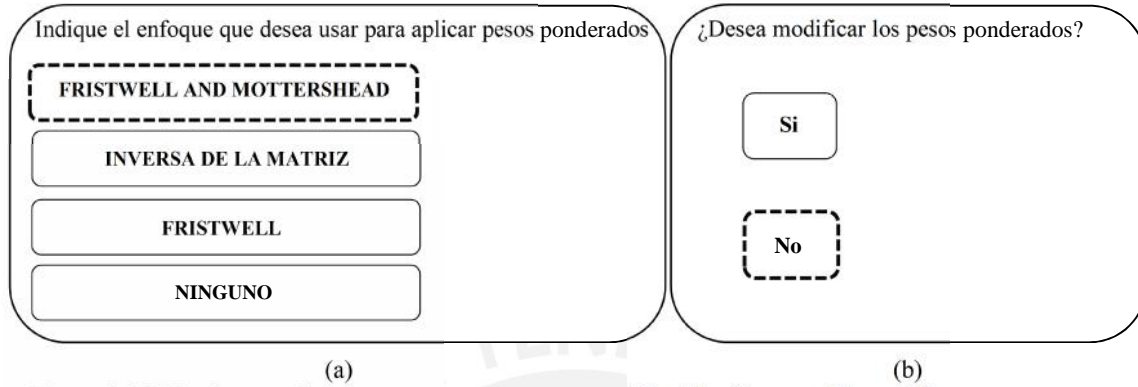


Figura A.32 Menú para aplicar pesos ponderados: (a) selección del enfoque y, (b) modificación de los pesos ponderados

Los resultados obtenidos después del proceso de optimización fueron: los módulos de elasticidad óptimos $E_{01}=6.41$ GPa y $E_{02}=3.00$ GPa y los pesos específicos $\rho_1=2.93E-05$ N/mm³ y $\rho_2=2.70E-05$ N/mm³. El valor final de la función objetivo dio un valor de $fval=2.025$. La tabla A.22 muestra una comparación entre los parámetros modales obtenidos en la campaña experimental y los parámetros modales del modelo analítico después del proceso de optimización. En esta tabla se puede observar que los valores MAC denotan alta correspondencia, y la diferencia máxima entre frecuencias experimentales y analíticas es de 11.96%.

Tabla A.22: Valores de frecuencias y MAC resultantes después del 1° proceso de optimización ejemplo 4

Modo	M. Experimental Frecuencia [Hz]	M. Analítico Frecuencia [Hz]	Error [%]	MAC
1	2.00	1.98	-0.67%	0.97
2	3.16	3.54	11.96%	0.93
3	4.37	4.31	-1.44%	0.95
4	5.10	5.59	-9.60%	0.71

Para obtener resultados más refinados se llevó a cabo un segundo proceso de optimización donde se incorporaron pesos de ponderación a fin de obtener mejores resultados. Para ello, se aplicó el mismo enfoque de matriz de ponderación (ver Figura A.33a) pero en el menú de pregunta ¿Desea modificar los pesos ponderados? Se seleccionó la opción “Si” (ver Figura A.33b) y luego se ingresó el vector de pesos ponderados para frecuencias y valores MAC.

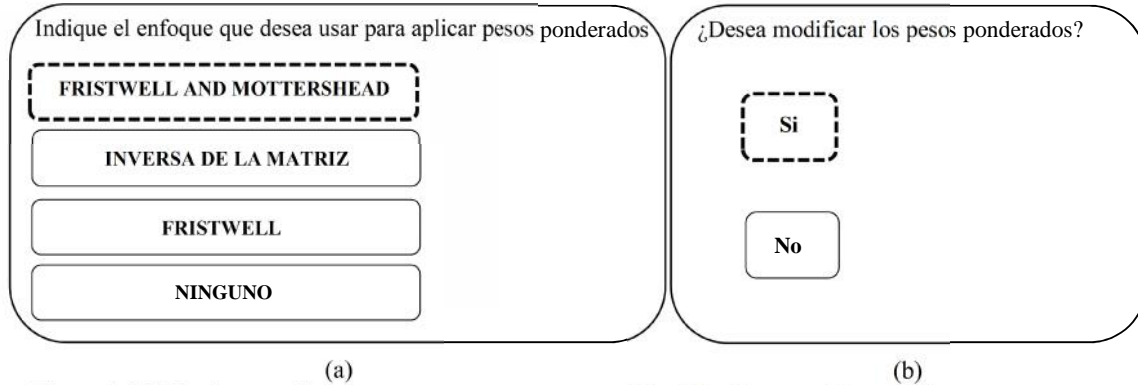


Figura A.33 Menú para aplicar pesos ponderados: (a) selección del enfoque y, (b) modificación de los pesos ponderados

Los vectores de ponderación ingresados para este ejemplo son: a) para frecuencias: [1, 1.5, 1,1], y b) para valores MAC: [1, 1, 1,1]. Los resultados obtenidos después del segundo proceso de calibración fueron: para los módulos de elasticidad $E_{01}=6.25$ GPa y $E_{02}=3.00$ GPa y los pesos específicos $\rho_1=2.87E-05$ N/mm³ y $\rho_2=2.69E-05$ N/mm³. El valor final de la función objetivo fue $fval= 2.092$. Este valor es similar al obtenido en el primer proceso de optimización.

La tabla A.23 resume los resultados obtenidos después del segundo proceso de optimización, donde la diferencia entre frecuencias experimentales y analíticas queda reducida a 11.46%, y un valor de MAC igual 0.71. Este valor MAC se puede mejorar a través de un tercer proceso de optimización.

Tabla A.23: Valores de frecuencias y MAC resultantes después del 2° proceso de optimización ejemplo 4

Modo	M. Experimental Frecuencia [Hz]	M. Analítico Frecuencia [Hz]	Error [%]	MAC
1	2.00	1.97	-1.33%	0.96
2	3.16	3.52	11.46%	0.92
3	4.37	4.31	-1.44%	0.95
4	5.10	5.58	-9.59%	0.71

En el tercer proceso de optimización se aplicó el mismo enfoque para aplicar la matriz de pesos ponderados pero se modificó el rango de los valores *lower* de la variable que representa al módulo de elasticidad E_2 igual a 2.10 GPa. Así mismo, se modificaron los pesos ponderados para frecuencias y valores MAC a los siguientes vectores [1, 8, 1,1] y [1, 1, 1,2], respectivamente.

Los resultados obtenidos después del tercer proceso de calibración fueron: para los módulos de elasticidad $E_{01}=5.80$ GPa y $E_{02}=2.10$ GPa y los pesos específicos $\rho_1=2.53E-05$ N/mm³ y $\rho_2=2.53E-05$ N/mm³. El valor final de la función objetivo fue $fval= 1.84$. Este valor es más pequeño que el obtenido en el primer y segundo proceso de optimización. La Figura 28b muestra de forma gráfica el resultado final de las variables después del tercer proceso de optimización y la variación del error a medida que avanza el proceso de optimización. (Figura A.34)

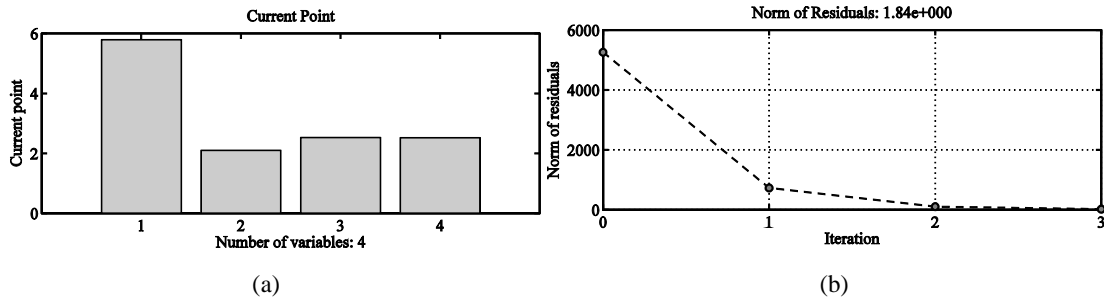


Figura A.34: Resultados del ejemplo 4: (a) valor final de las variables desconocidas y, (b) variación de la función objetivo durante el proceso de optimización

Finalmente, la Tabla A.24 muestra los valores iniciales y los valores finales de las variables después del tercer proceso de optimización.

Tabla A.24: Valores de las variables calibradas obtenidos después de la optimización

Parámetros de calibración	$E_{\text{parte inferior}} (E_{01})$ [10 ⁻¹ GPa]	$E_{\text{parte superior}} E_{02}$ [10 ⁻¹ GPa]	parte inferior 1 [10kN/m3]	parte superior 2 [10kN/m3]
Valor Base	8.00	8.00	2.750	2.750
Valor Final	5.80	2.10	2.532	2.527

La Figura A.35 muestra la comparación gráfica entre las frecuencias y los valores MAC experimentales y analíticas antes y después del proceso de optimización mediante el criterio FMAC [1]. En el FMAC el tamaño del punto denota la mayor o menor correspondencia entre los vectores de formas modales analíticas y experimentales (MAC) y su mayor cercanía a la línea inclinada a 45° denota una mayor correlación de frecuencias analíticas y experimentales. En la figura A.35b se puede observar una alta correspondencia entre las formas modales (valores MAC) y las frecuencias de vibración.

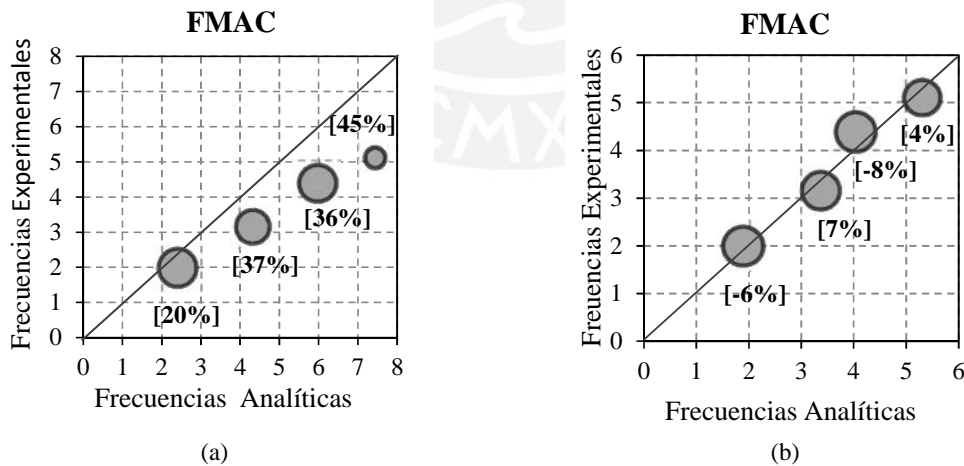


Figura A.35: FMAC del ejemplo 4: (a) antes del proceso, (b) después del proceso de optimización

* El error entre frecuencias está indicado entre corchetes

En la Figura A.36 se muestra la comparación grafica los cuatro primeros modos naturales corresponden a los modelos experimentales y numéricos para una mejor visualización. Estos resultados evidencian la utilidad del proceso de optimización y la confiabilidad del modelo numérico actualizado con respecto a su uso en una etapa adicional de la evaluación estructural.

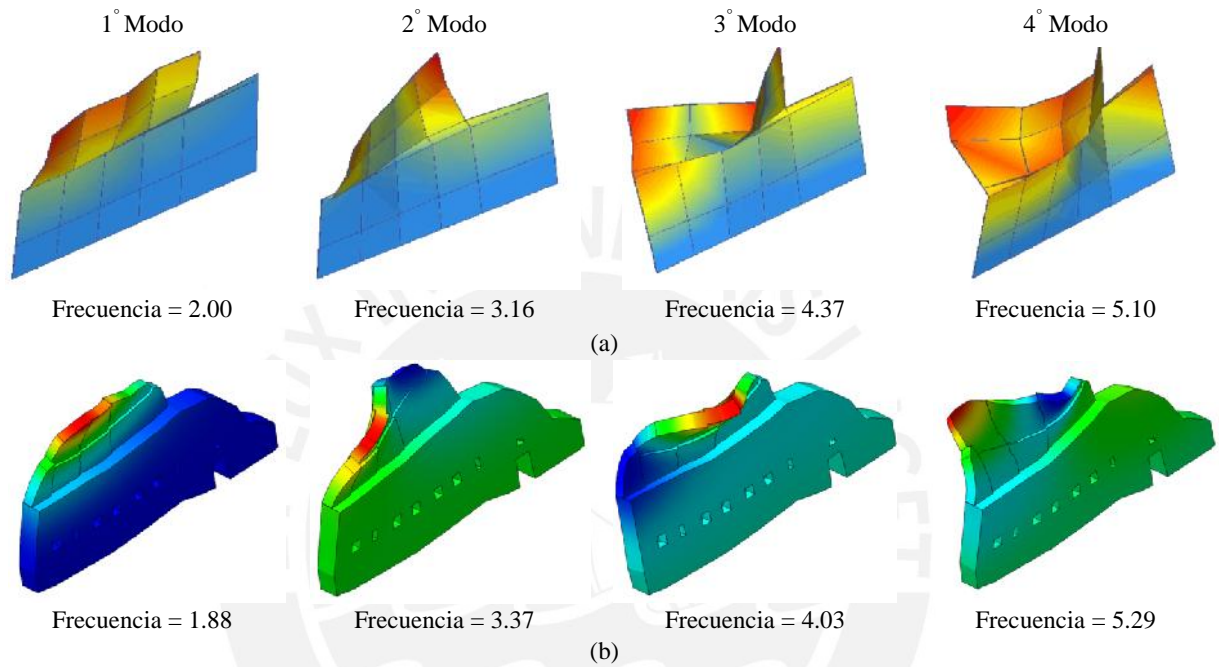
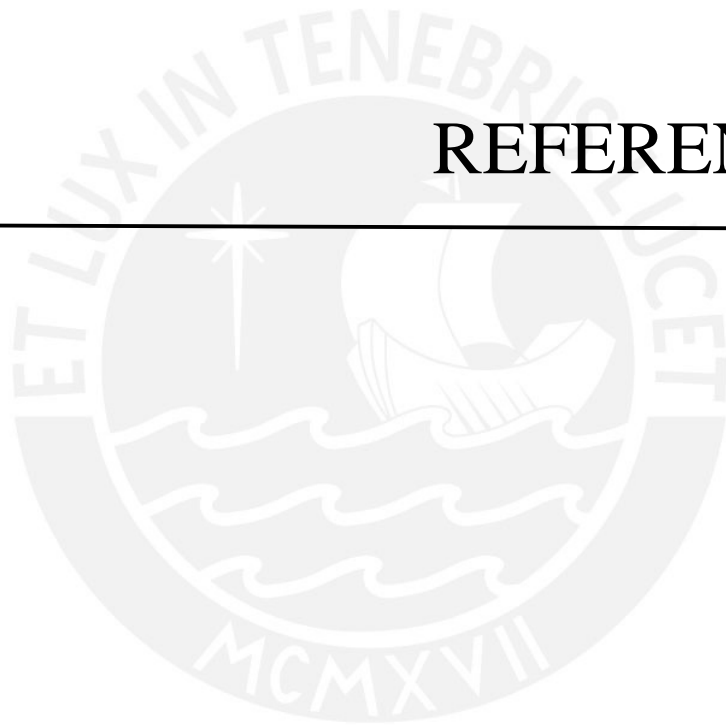


Figura A.36: Formas modales Experimentales vs FEM (a) formas modales experimentales y (b) formas modales numéricas FEM (valor de frecuencia en Hz)

REFERENCIAS



- [1] Alaboz, M., Ramos L.F, Aguilar, R; Dynamic Identification and Modal Updating of S. Torcato Church. SAHC 2010: 7th International Conference on Structural Analysis of Historical Constructions, Shanghai, China, pp.110-116, (2010)
- [2] Allemang, J R., “The Modal Assurance Criterion – Twenty Years of Use and Abuse.” Journal of Sound and Vibration, 14-21pp, (2003)
- [3] Brignola, A., Frumento S., Lagomarsino S., Podesta E.; Identification of Shear Parameters of Masonry Panels Through the In-Situ Diagonal Compression Test, J. Architectural Heritage 3:1, pp. 52-73, (2008).
- [4] CSI-SAP2000, Computers and Structures Inc, USA, (2013).
- [5] Deuffhard, P., Newton Methods for Nonlinear Problems. Affine Invariance and Adaptive Algorithms. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 35. ISBN 3-540-21099-7. Springer, Berlin, (2004)
- [6] Douglas-Reid, B.M., W.H.; Dynamic tests and system identification of bridges, Journal Struct. Div., ASCE, 108, 2295-2312, (1982)
- [7] Lluís, G. y Oñate, E., Análisis de sensibilidad con comportamiento no lineal del material y su aplicación en el diseño asistido de estructuras. Universitat Politècnica de Catalunya. Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria, (1997).
- [8] Gratton, S. , Lawless, A.S., Nichols, N.K., Approximate Gauss-Newton methods for nonlinear least squares problems, SIAM Journal on Optimization (SIOPT), 18 (1). pp. 106-132. ISSN 1052-6234, (2007).
- [9]. Komkov, Haug, E. J., y Choi, K. K V. Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. Academic Press. Inc.,(1986).
- [10] Louren o P B.; Recommendations for restoration of ancient buildings and the survival of a masonry chimney. Journal of Construction and Building Materials 20, pp. 239–251, (2006).
- [11] MathWorks. MatLab user manual, Release 7.2, The MathWorks, Natick, MA., (2011).
- [12] McEwan, G., Gibaja A., Chatfield, M.; Arquitectura Monumental en Cuzco del Período Intermedio Tardío: Evidencias de Continuidades en la Reciprocidad Ritual y el Manejo Administrativo entre lo Horizontes Medio y Tardío, Boletín de Arqueología PUCP N.º 9, pp. 257-280, (2005).
- [13] Marquardt, D., An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1963, Vol. 11, No. 2 : pp. 431-441.
- [14] Trišovi , N., About Eigensensitivity Analysis of Mechanical Structures. Journal of Theoretical and Applied Mechanics Series: Special Issue - Address to Mechanics, Vol. 40 (S1), pp. 263-275, Belgrade, (2012).
- [15] Ramos, L.F., Aguilar, R., Lourenço, P.B., Moreira, S.; Dynamic structural health monitoring of Saint Torcato Church, Journal of Mechanical Systems and Signal Processing, (2012).
- [16] Puig, D; Implementación del Algoritmo de mínimos cuadrados aplicado al diseño de dispositivos de microondas, Gandía (2010).
- [17] Sánchez M.; Caracterización y Utilización de la madera de E. grandis. En V Jorn Ftales de E.R. Ccdia, (1990).
- [18] TNO “Displacement method ANALyser”, version 9.4.4, Cd-Rom, Netherland., (2013).