PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ANÁLISIS DE LA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA REFERIDA A LOS NÚMEROS ENTEROS PRESENTE EN LIBROS DE TEXTO Y SU RELACIÓN CON LAS DIFICULTADES PRESENTADAS POR LOS ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE SECUNDARIA.

Tesis para optar el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas

Presentada por	**:**	**Fernando Eli Medina Carruitero**
Jurado	**:**	**Elizabeth Advíncula Clemente**
		Cecilia Gaita Iparraguirre (Asesora)
		Estela Vallejo Vargas

LIMA – PERÚ

2014

''Apunta muy alto, como a la luna,

y si no das en ella

darás en las estrellas que la rodean.''

DEDICATORIA:

El presente trabajo de investigación lo dedico a mi madre

que me ha brindado su incondicional apoyo

en todos los momentos más importantes de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por las personas que puso en mi camino, por su compañía en todo momento.

A la Directora de la maestría y asesora de mi tesis Mag. Cecilia Gaita, por su orientación, apoyo y dedicación en la elaboración de esta tesis.

A los profesores de la maestría que con cada uno de sus aportes y enseñanzas han contribuido con mi formación como docente de matemáticas.

RESUMEN

El punto de partida de esta investigación ha sido la dificultad que muestran los estudiantes en la comprensión de los números enteros, tema que se sugiere que sea desarrollado en primer año de secundaria, según el Diseño Curricular Nacional.

Si bien es cierto que existen muchos factores por los cuales este objeto matemático no es bien aprendido por los alumnos, consideramos que la organización del conocimiento matemático referido a los números enteros en el capítulo de un texto será un recurso valioso que podrá facilitar la enseñanza de este objeto matemático así como también puede obstaculizarla.

El presente documento está estructurado de la siguiente manera: En el capítulo 1 presentamos el problema de investigación, los antecedentes, la justificación, los objetivos y la hipótesis de investigación.

En el capítulo 2 presentamos los principales obstáculos epistemológicos presentes en el desarrollo histórico de los números enteros, así como las principales dificultades identificadas por distintos investigadores en el análisis de las respuestas de los alumnos en su trabajo con números enteros.

En el capítulo 3 presentamos la estructura algebraica de los números enteros con la finalidad de mostrar un análisis riguroso referido a los números enteros, desde la justificación de sus principales propiedades como su presentación como conjunto cociente; haciendo énfasis en las diferencias con respecto al conjunto de los números naturales.

En el capítulo 4 analizamos la organización matemática de los libros de texto de sexto grado de primaria y de primer año de secundaria de una editorial de mucha influencia en el contexto nacional. Para realizar este análisis, previamente, se han definido una serie de criterios basados en la forma en que es presentada la teoría dentro del capítulo, la justificación que se da a las propiedades, a los distintos significados que se dan al signo negativo, al tipo de problemas que presentan y a la relación que se muestra respecto al álgebra. Todo esto está relacionado con los obstáculos didácticos.

En el capítulo 5 se explica cómo se ha diseñado un instrumento a ser aplicado a un grupo de alumnos que han estudiado el capítulo de los números enteros utilizando el

libro de primer año de secundaria de la editorial Coveñas. Se presentan los resultados encontrados luego de la aplicación del instrumento y, apoyados en las investigaciones previas, se explican las posibles causas en las que puedan basarse los errores detectados.

En el capítulo 6 presento las conclusiones formuladas a partir del análisis de los libros y de las respuestas de los estudiantes. Por último, se dan recomendaciones para la organización matemática del libro.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE……………………………………………………………...…………10

CAPÍTULO 1: LA PROBLEMÁTICA

Esta tesis forma parte del proyecto *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em ambientes tecnológicos PEA-MAT/DIMAT* , desarollado entre la PUCP y la PUC-SP/Brasil que cuenta con el apoyo del Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

1.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

A partir de la experiencia profesional, a través de la cual hemos tenido la oportunidad de enseñar matemáticas desde segundo grado de primaria hasta cuarto año de secundaria, podemos tener una visión global no sólo de los contenidos enseñados en la Educación Básica Regular y de la manera en que son organizados los libros didácticos, sino también, de las dificultades que encuentran los alumnos cuando estudian determinados temas. Y es desde esta perspectiva que hemos identificado que uno de los objetos matemáticos que presenta una mayor dificultad para su comprensión es el de los números enteros y las operaciones entre ellos.

En el Diseño Curricular Nacional (2009), documento que señala qué contenidos son los adecuados para cada nivel de la etapa escolar en la Educación Básica Regular en todo el Perú, está previsto que un alumno de Primer año de Educación Secundaria adquiera, entre otros conocimientos matemáticos, los referidos a la representación, orden y operaciones con números naturales y a la representación, orden y operaciones con números enteros. Es decir, es en este año en el que se espera que los alumnos realicen la transición del conjunto de los números naturales, conjunto numérico con el que trabajaron toda su educación primaria, al conjunto de los números enteros cuya naturaleza es radicalmente distinta a la de los números naturales.

También creemos pertinente señalar que, de acuerdo al Diseño Curricular Nacional (2009), una de las capacidades consideradas en el área de matemática para el primer año de Educación Secundaria es: “Interpreta el significado de números naturales, enteros y racionales en diversas situaciones y contextos”. Y señalamos esto ya que algunos docentes podrían pensar que según esta capacidad es necesario plantear a los alumnos distintas situaciones de la vida real o modelos concretos a partir de los cuales surja la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales. En este trabajo se analizará la conveniencia de hacerlo de otra manera.

Después de todas estas consideraciones sobre nuestra experiencia profesional y sobre el Diseño Curricular creemos importante revisar libros de texto que utilizan los profesores en algunas instituciones educativas. Lo hacemos ya que consideramos que la principal guía del trabajo docente en las aulas son los libros de texto. Cuando decimos que es la principal guía nos referimos a que la mayoría de docentes, en sus clases, siguen el orden de los contenidos, la presentación y justificación de la importancia de cada tema y los problemas encontrados en cada unidad, según el enfoque propio del libro que estén utilizando.

De la revisión de varios libros de texto empleados en este nivel escolar, se ha visto que hay una tendencia a contextualizar todo contenido matemático; y el caso de los números enteros no es la excepción. Con esto no queremos decir que sea negativo contextualizar los contenidos en situaciones de la vida real, lo que en adelante llamaremos modelos concretos; al contrario, creemos que puede ser muy útil para que los alumnos logren interiorizar determinados contenidos matemáticos. Sin embargo, pensamos que quizá no todos los objetos matemáticos de estudio en la etapa escolar pueden justificar su aparición a partir de problemas de la vida diaria. Este es el caso de los números enteros. Dichos números no aparecieron para resolver problemas en contexto de la vida real, sino para dar respuesta a un tipo determinado de ecuaciones. Luego, se van a establecer un conjunto de reglas y propiedades que dan coherencia a este conjunto numérico; pero no debemos buscar la justificación de estas propiedades a través de modelos concretos. Este es el caso de la “regla de los signos” que se utiliza cuando multiplicamos números enteros.

Esto nos lleva a preguntarnos si es que habrá relación entre las dificultades que presentan los alumnos cuando estudian los números enteros y la justificación de su aparición y de sus propiedades tal y como las presentan los libros de texto.

Partiendo de esta inquietud, investigamos si existían trabajos en los que también se hubieran identificado dificultades por parte de los estudiantes al estudiar este nuevo objeto matemático. Así, encontramos que esta problemática había sido abordada en la investigación de Borjas (2009) en la que explica que en su experiencia como profesora de alumnos de primer ciclo básico notó las dificultades que presentaban sus alumnos con la adición y sustracción de números enteros, en particular, cuando tenían que realizar operaciones con números negativos. En dicho trabajo se pone en evidencia que los estudiantes tienen arraigada la idea de que, en un problema, sumar es añadir o ganar, mientras que restar significa quitar o perder. Además, se manifiesta que los modelos concretos que se utilizan en la enseñanza de números enteros justifican con facilidad la suma pero no la resta. Por ello, será necesario analizar los modelos concretos que son presentados en el capítulo referido a los números enteros de una determinada editorial. También consideramos necesario identificar potenciales obstáculos didácticos que podrían influir en el proceso de aprendizaje del concepto de número entero.

Por lo anterior, consideramos pertinente, y es el motivo de la presente investigación, analizar cómo es que algunos textos didácticos utilizados en colegios privados del Perú justifican la aparición de este nuevo conjunto numérico y de sus propiedades básicas y si es que esta justificación está ligada a modelos concretos, así como identificar como presentan la teoría, y cómo justifican sus propiedades.

1.2 ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

En la búsqueda de investigaciones que evidencien esta dificultad, encontramos, en primer lugar, el trabajo de Cid y Bolea (2010) en el cual se menciona que diversos autores (Bell, 1982, 1986; Liebeck, 1990; Bruno y Martinón, 1994) han reportado que los alumnos tienen dificultades para entender y manejar modelos concretos en el aprendizaje de los números enteros; con lo que una herramienta didáctica, como es la contextualización de los conocimientos matemáticos, pensada para ayudarles a dar sentido a la noción matemática se convierte, ahora, en una fuente añadida de problemas.

Los modelos concretos son aplicaciones de ciertos objetos matemáticos a situaciones de la vida diaria. Son ejemplos de modelos concretos los problemas de deudas y haberes o de pérdidas y ganancias, de personas que entran o salen de un recinto, de temperaturas, de altitudes por encima o debajo del mar, etc. En muchos colegios se utilizan estos modelos ya que la introducción de los números negativos se realiza en un entorno aritmético, dado que en ese momento todavía no se ha comenzado la enseñanza del álgebra.

También podemos citar el trabajo de Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991) quienes afirman que si bien es cierto que no se pueden justificar ciertas propiedades como la regla de los signos, por ejemplo, desde situaciones concretas, tampoco se debe presentar en un primer momento en el plano formal.

> La enseñanza del número entero no admite ser enteramente tratada en el plano concreto, aunque algunos autores se esfuercen en buscar situaciones concretas para justificar todas las propiedades de los enteros. Por otro lado, el situarlos de entrada en el plano formal, también tiene el peligro de reducirlos a un formalismo vacío, presto a ser olvidado y a causar errores. (Iriarte, Jimeno y Vargas Machuca, 1991, p.13)

En esta última investigación se analizan además las respuestas dadas por estudiantes a preguntas que requieren poner en funcionamiento la estructura algebraica y de orden de los números enteros, a partir de las cuales han tratado de identificar las ideas causantes de los errores que obstaculizan el aprendizaje de los números enteros. Las conclusiones a las que llegan estos autores son las siguientes:

1. Existe una separación entre el pensamiento académico y el natural: La utilización de ciertas palabras engañosas (palabras que utilizan en la vida cotidiana como: disminuir, aumentar, etc.) en algunas ocasiones no permite resolver correctamente algunos problemas de números enteros. Esto se debe básicamente a que en el conjunto de los números naturales, al ser todos sus elementos números positivos, aumentar un número a otro siempre resulta un número mayor a ambos. En los números enteros no va a suceder lo mismo necesariamente.

2. Se identifica la necesidad de tratamiento matemático de las situaciones de comparación en el currículo: Aquí se refiere a que cuando se hace la programación de las clases referidas al orden de los números enteros, se deben buscar problemas en los que los alumnos puedan aplicar lo aprendido a este tema. Los autores mencionan que las preguntas que se hacen dentro de un contexto de comparación como “es tantos años mayor que”, “ha costado tanto menos que”, suelen traducirlas de forma mecánica a una operación aritmética sin tener en cuenta la relación de orden en la que están inmersas. En el conjunto de los enteros los números tienen un signo, y éste debe ser tomado en cuenta en el momento de comparar dos números y no sólo el valor absoluto de los mismos.

3. Se identifica un paralelismo entre los obstáculos históricos y los obstáculos en el aprendizaje: Se identifica que históricamente el conocimiento que se poseía de los

números como expresiones de cantidad, obstaculizó durante siglos la aceptación de los negativos y la construcción de Z. Los errores de los estudiantes, mencionan, provienen en muchos casos de tratar las situaciones con números negativos con herramientas de la aritmética natural (número como cantidad, la adición como aumento, etc). Esta situación también se dio durante el desarrollo histórico del número entero.

4. Hay ausencia de representación de los procesos de pensamiento; la dificultad para reflexionar sobre el proceso queda de manifiesto en las respuestas: la mayoría sólo expresan los resultados, pero no el proceso que les llevó a ellos. Quizás esta falta de representación sea consecuencia de que en la enseñanza vigente se prima la obtención del resultado sobre el análisis de los procesos.

Las siguientes conclusiones se desprenden del análisis hecho por los autores sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de los números enteros:

Hay una ausencia de un modelo concreto unificador para el tema de los números enteros: La mayor dificultad para la enseñanza de los números enteros radica en la no existencia de un modelo concreto que explique todas las propiedades de Z. El intento de utilizar un modelo de este tipo que cubra totalmente el estudio de los enteros es contraproducente por dos motivos. El primero es que obstaculiza el aprendizaje al impedir la ruptura con lo real, necesaria para la construcción de Z. Como hemos dicho anteriormente, los números enteros no surgen debido a una situación de la vida cotidiana, sino por el avance de la matemática misma. Con esto nos referimos a la solución de ecuaciones del tipo $x + 3 = 2$, por ejemplo. Y el segundo motivo es que convence al alumno de la inutilidad de los negativos, ya que los ejemplos propuestos para justificar ciertas propiedades de los enteros se resuelven mejor en el marco del sentido común, y para ello basta el conjunto de los números naturales. Por otro lado, el tratamiento de los enteros desde un punto de vista exclusivamente formal es estéril pues lo formal no se puede imponer por decreto. Prueba de ello es que ni siquiera el objetivo mínimo de utilizar correctamente las reglas de cálculo llega a realizarse totalmente.

Se identifica una necesidad de provocar el conflicto que entraña el número entero: La enseñanza/aprendizaje de los números enteros, desde el punto de vista de los autores, ha de estar marcada por el conflicto, por la confrontación entre el conocimiento formal de los números y el conocimiento práctico que se posee de ellos como representación de lo real. En la actualidad, muchos profesores tratan de mostrar la necesidad de utilizar a los números enteros a partir modelos concretos y olvidan que este objeto matemático es el primer paso de abstracción por parte de los alumnos en la etapa escolar.

Otro aporte importante es el de Cid (2003), que en su trabajo hace referencia a algunos estudios, como por ejemplo:

> “Küchemann (1980, 1981) propone a los alumnos de 14 años un cuestionario sobre suma, resta y multiplicación de números enteros. Los mayores porcentajes de éxito se obtienen en las sumas, seguidas por las multiplicaciones, mientras que con las restas resultan ser las operaciones peor resueltas.” (Cid, 2003, p.13)

Esto se debe a que la sustracción de números enteros es de una complejidad mayor que el resto de operaciones. Si en una sustracción el minuendo es menor que el sustraendo, el resultado será un número negativo, y para hallar este resultado tendrán que recurrir, por ejemplo, a una recta numérica con el fin de hallar la respuesta de esa sustracción.

También podemos hacer referencia al trabajo de Bell (1982, citado en Cid, 2003). En esta investigación se menciona que en entrevistas realizadas a alumnos de 15 años, el 80% suman correctamente dos números enteros, pero solamente el 40% es capaz de restar sin errores.

Entendemos que, tanto en la investigación de Küchemann (1980, 1981) como en la de Bell (1982), cuando se hablan de sustracciones con enteros, se refieren a sustracciones en las que el minuendo es menor que el sustraendo. Realizar este tipo de operaciones requiere de un proceso distinto al que necesitaban con los números naturales. Recurrir a una recta numérica para dar la respuesta a este tipo de sustracciones es un paso novedoso para los estudiantes ya que necesitan hacer un cambio de registro de representación para resolver una operación, como es la adición, que hasta el momento era conocida por ellos.

1.2.1 SOBRE LA POSIBILIDAD DE ENCONTRAR SITUACIONES CONCRETAS DONDE SE REQUIERA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

A continuación se presentarán algunas ideas de Klein (1927, citado en Cid, 2003) que consideramos de suma importancia y que servirán de marco para nuestra investigación. La primera idea es que el número negativo es la primera noción matemática de la enseñanza elemental cuya génesis histórica no se produjo por una necesidad de modelizar el mundo físico y social. Y es por este motivo por el cual consideramos que buscar una justificación para la aparición de los números enteros a través de modelos concretos no es la más acertada. Esta afirmación deberá ser contrastada a través de la revisión de los principales textos y de las pruebas tomadas a los estudiantes.

La segunda idea es que la aparición de los números negativos en la escuela es “el primer paso de la matemática práctica a la matemática formal” y que, por consiguiente, el tratamiento didáctico que se le dé debe ser consecuente con estas ideas. Es decir, la justificación de las propiedades de los números enteros no puede ser respaldada por modelos concretos. Coincidimos con esta segunda idea ya que los estudiantes, antes de trabajar con números enteros, podían relacionar cada conocimiento aprendido con situaciones de la vida real. Con este nuevo objeto matemático no se podrá asociar cada propiedad a modelos concretos sino que se tendrá que explicar que las propiedades han aparecido para dar coherencia al nuevo conjunto numérico.

De otro lado, estamos de acuerdo con Cid (2010) cuando explica que la utilización del modelo concreto por parte de los alumnos para deducir las propiedades del número entero y de sus operaciones puede fomentar la aparición de creencias erróneas. Por ejemplo, el modelo de deudas y haberes puede facilitar que los estudiantes indiquen que -7 es mayor que -2 ya que una deuda de 7 euros es mayor que una de 2 euros.

En ese mismo trabajo se señala que el estudio epistemológico de los números enteros nos muestra que su razón de ser no proviene de unas supuestas magnitudes opuestas definidas en el ámbito de la aritmética, sino del ámbito del álgebra. Podemos encontrar evidencia de ello en el desarrollo histórico de las matemáticas. La razón por la que Diofanto se ve precisado a enunciar la regla de los signos tiene que ver con las peculiaridades de la solución de ecuaciones con coeficientes y soluciones enteros que corresponde al campo algebraico y no al aritmético. Todo ello plantea dudas respecto a introducir los números enteros negativos en el ámbito aritmético. Además se señala que la resolución aritmética de un problema se caracteriza por que el contexto está presente en cada etapa de la solución, mientras que en la solución de un problema algebraico, en particular al resolver una ecuación, el contexto se deja de lado.

El estudio de los números enteros requiere de una especial atención por parte de los investigadores en educación matemática. Según Godino (2002), cuando se presentan los números naturales, fraccionarios y decimales en la educación escolar, primaria para ser más exactos, se hace como expresión de tamaño o numerosidad (cardinalidad) de los conjuntos finitos, del lugar que ocupa un elemento dentro de un conjunto ordenado y de la medida de diferentes cantidades de magnitud. Además, las operaciones que se definen en estos conjuntos numéricos se corresponden con cierto tipo de acciones sobre las cantidades de magnitudes: agrupar (adición), separar (sustracción), reiterar (multiplicación) y repartir (división). Por este motivo, el estudio de los números naturales, fraccionarios y decimales y de sus operaciones entre ellos, se apoya sobre situaciones concretas.

También estamos de acuerdo con Godino (2002) cuando manifiesta que si bien es cierto que los problemas empíricos, que nosotros hemos llamado modelos concretos, inspiran a las matemáticas para la creación de objetos matemáticos. Una vez inventados adquieren “vida propia” y plantean nuevos problemas internos, distintos de los problemas empíricos que motivaron su introducción. A medida que progresamos en el estudio de las matemáticas nos vamos encontrando con objetos más complejos que son inventados o construidos respondiendo a necesidades internas de la propia matemática. Este es el caso de los números con signo (positivos y negativos), cuya construcción se debe, no tanto a la necesidad de modelizar matemáticamente situaciones del mundo sensible, sino a la problemática que plantea el desarrollo de una rama de las matemáticas: el álgebra. Es en el entorno del álgebra donde aparecen las condiciones que hacen posible y favorable la introducción de números con signo.

De acuerdo con Cid (2010), las razones por las que el entorno aritmético puede producir efectos no deseados son las siguientes:

1. La aritmética no es un buen lugar para iniciar la enseñanza de los números negativos pues la permanente contextualización numérica propia de este ámbito no permite justificar de una manera creíble la razón de ser de estos objetos.

2. La introducción escolar actual fomenta la concepción de que el número sólo puede entenderse como resultado de una medida, lo que parece ser un obstáculo epistemológico que la comunidad de matemáticos tuvo que salvar para poder aceptar plenamente los números positivos y negativos y justificar su estructura.
3. La familiaridad de los alumnos con los modelos concretos no parece ser tal, por lo que su presentación puede resultar una dificultad añadida, antes que una ayuda para el aprendizaje de los números negativos.

Sobre el punto 2, consideramos que la concepción de número, en los primeros años de la educación básica regular, corresponde a la idea de cantidad y no a la idea de medida. Si bien es cierto que ya desde la educación primaria los estudiantes trabajan con fracciones, desde nuestra experiencia consideramos que la concepción de número que mantienen hasta llegar a primer año de secundaria es la referida a cantidad y es la que está ligada a los números naturales.

De acuerdo con Cid (2010), la propuesta de iniciar los números negativos en un entorno algebraico, tiene que en simultaneo con la introducción del álgebra, pues no se puede ir muy lejos en álgebra sin números negativos.

Para introducir los números negativos, Cid (2010) enfatiza las diferencias entre el aritmética y el álgebra, pone de manifiesto la ruptura que supone el álgebra frente a la aritmética. El cálculo aritmético es un cálculo entre números, básicamente entre números naturales. En cambio, lo que caracteriza al cálculo algebraico es que la simetrización aditiva y multiplicación en el conjunto de los números naturales permite reducir las cuatro operaciones aritméticas a dos: la suma y el producto.

En la investigación de Cid (2010) se explicitan criterios que se utilizarían en la construcción del modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos:

1. La introducción de los números negativos y del álgebra elemental debe iniciarse simultáneamente ya que por un lado, los números negativos necesitan un entorno algebraico que ponga de manifiesto su razón de ser y contribuya a la superación de posibles obstáculos epistemológicos; mientras que, por otro lado, las técnicas de cálculo algebraico sólo pueden avanzar si se establecen las reglas de los signos.

2. El modelo epistemológico de referencia del álgebra elemental que propone utilizar es el de modelización algebraica porque permite resaltar las diferencias entre el trabajo algebraico y el aritmético, el primero tiene en cuenta desde sus inicios la consideración de las letras como parámetros y variables y obtiene como solución de los problemas un modelo algebraico que, a su vez, se convierte en objeto de estudio.
3. Propone inicialmente problemas verbales aritméticos directos y parametrizados; es decir, problemas cuya modelización inmediata viene dada por una fórmula.
4. De acuerdo con los estudios epistemológicos, en la construcción escolar del número negativo se distinguen cuatro etapas cuyos objetivos son los siguientes:
   a) Pasar de las operaciones entre números a las operaciones entre sumandos y sustraendos y del significado operativo de los signos “+” y “-” al significado predicativo y operativo unario. Es decir, el signo deja representar una operación para ser ahora parte del mismo número. Su razón de ser es la economía de gestión y justificación del cálculo algebraico. Con un ejemplo ilustraremos esta afirmación. Si el estudiante tiene la siguiente operación: 3 - 1, el alumno pasa de considerar el signo menos como una sustracción para entender el ejercicio del siguiente modo 3 + (-1), en donde el signo – pasa a ser parte del número 1.
   b) Reinterpretar los signos predicativos como signos operativos unarios y considerar la doble valencia de parámetros, variables o incógnitas como sumandos o sustraendos. En esta etapa se asume que el signo que acompaña a las letras es un signo operativo unario. Utilizando el ejemplo anterior: si el estudiante tiene que realizar la siguiente adición de números enteros 3 + (-1), ahora entiende que es equivalente a expresarlo del siguiente modo 3 – 1.
   c) Aceptar los sumandos y sustraendos como nuevos números que amplían los conjuntos numéricos ya conocidos.
   d) Entender la razón de la necesidad de asumir que un número no siempre puede interpretarse como una medida y que cada nueva ampliación numérica supone una modificación de las propiedades que cumplen “todos los números”.

Lo expuesto hasta el momento nos permite afirmar que los errores que presentan los alumnos cuando resuelven operaciones con números enteros no son algo anecdótico y es por este motivo que nos atrevemos a afirmar que el tema de la enseñanza de los números enteros no es algo trivial, sino que centremos nuestra atención en analizar las causas de esta dificultad. Los errores que muestran los alumnos cuando aprenden Z tienen orígenes de distinta naturaleza: epistemológico, didáctico y cognitivo.

Por ejemplo, se puede identificar una dificultad intrínseca al objeto matemático en sí mismo; es decir, obstáculos epistemológicos inherentes a los números enteros. Esto nos llevó a revisar investigaciones al respecto, encontrando entre ellas, la de Cid (2000) que lleva como título obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros. En ese trabajo de investigación se recogen aportes de otros investigadores en los que Cid se basa para realizar su análisis. Por ejemplo, Glaeser (1981, citado en Cid, 2000), manifiesta su intención de buscar obstáculos que se oponen a la comprensión y aprendizaje de los números negativos y para ello, busca los vestigios de esos obstáculos en el pasado.

Es necesario, y será parte de nuestro marco teórico, conocer cuáles son los obstáculos epistemológicos presentes en el desarrollo histórico de los números enteros. Si no entendemos cuáles son las dificultades intrínsecas al aprendizaje de los números enteros y que se han ido presentando a lo largo de la historia de las matemáticas no podremos prever las dificultades que presentarán nuestros alumnos, hoy en día, cuando se enfrenten por primera vez a este concepto.

1.2.2 SOBRE LA IMPORTANCIA DEL TEXTO EN LA JUSTIFICACIÓN DE LOS OBSTÁCULOS

Tampoco debemos dejar de lado los obstáculos didácticos que aparecen en el proceso de enseñanza en este objeto matemático. Estos obstáculos tienen que ver con la forma cómo los profesores enseñan los números enteros y también cómo se organizan los contenidos matemáticos en los libros.

En el trabajo de Carrillo (2012) se aborda la trascendencia de analizar los libros de texto y la estrecha relación entre ellos y el proceso de enseñanza. Al respecto, Gómez (2009, citado en Carrillo 2012), menciona que la pertinencia de este análisis está justificada sobre todo porque los libros de texto continúan siendo el principal documento curricular utilizado por el profesorado para enseñar matemáticas en el aula, al tiempo que son generadores potenciales de inconsistencias, ambigüedades, omisiones y otros conflictos a la hora de presentar los contenidos matemáticos. En esta misma línea, Vargas (2001, citado en Carrillo 2012), considera que los libros de texto no solo pueden facilitar sino también dificultar o, inclusive, impedir el aprendizaje escolar.

Por todo lo expuesto, y considerando que la concepción de número entero y sus operaciones serán de vital utilidad para trabajar los contenidos referidos al álgebra escolar (operaciones con polinomios, solución de ecuaciones, etc.) consideramos de gran importancia analizar el capítulo referido a los números enteros en el libro Matemática 1 de la Editorial Coveñas.

Y por ese motivo es que consideramos pertinente realizar el análisis de dos libros de texto, específicamente de un capítulo de cada texto, el que está referido a los números enteros, en donde podremos identificar la manera en que se justifica la aparición de este nuevo conjunto numérico, y si esta justificación va contextualizada en modelos concretos o como un objeto matemático que tiene sus raíces en el álgebra. Además reconoceremos cómo se organiza la teoría, y si los ejercicios y problemas planteados son los pertinentes. Todo este análisis será realizado a la luz de las investigaciones que hemos revisado sobre los obstáculos inherentes a los números enteros. En segundo lugar, podremos proponer recomendaciones para la organización del capítulo con todas las consideraciones presentes en las investigaciones que hemos consultado.

La presente investigación busca responder algunas preguntas que quedaron abiertas en los trabajos de Glaesser (1981) y Cid (2000).

En el primer caso, Glaesser (1981, citado en Cid 2000) concluye diciendo que sería necesario realizar experiencias con los alumnos para comprobar si alguno de los obstáculos puestos en evidencia en el estudio histórico se reproduce en los procesos de enseñanza actuales.

En la misma línea, Cid (2000) expresa que el obstáculo epistemológico tal como lo concibe Brousseau no ha sido contrastado experimentalmente. En nuestro marco teórico profundizaremos sobre la concepción de obstáculo epistemológico dada por Brousseau.

1.3 SOBRE LA PRESENTE INVESTIGACIÓN

En nuestro análisis, revisaremos la manera en que son presentados los capítulos referidos a los números enteros en los libros para sexto grado de primaria y primer año de secundaria, con la finalidad de tener una idea general de la organización matemática del tema números enteros en la editorial señalada anteriormente.

Investigaremos si es que utilizan modelos concretos para justificar la aparición de este nuevo conjunto numérico o si es que se presenta como una estructura axiomática que los alumnos deben aprender, o si es que surge como una consecuencia del desarrollo del álgebra. También analizaremos el modo en el que muestran las reglas de los signos y si es que estas surgen para dar coherencia a esta nueva estructura que se está formando. Después, reconoceremos si es que los autores han tenido en cuenta los obstáculos epistemológicos inherentes a los números enteros para la redacción y selección de ejercicios y problemas.

Luego constataremos las dificultades reales que presentan los alumnos que han utilizado uno de estos textos y para ello se aplicará un instrumento a través del cual se espera poner en evidencia que existen confusiones en relación a la idea de adición en los números enteros, al orden en este conjunto numérico, a la importancia del signo, al uso correcto de propiedades de los signos en los enteros y a la solución de ecuaciones; pese a que se desarrolló un proceso de instrucción previamente.

Debemos indicar que los alumnos a los que se aplicará la prueba no han estudiado el objeto matemático número entero ni han trabajado con el libro de sexto grado de primaria el año anterior.

Para terminar, propondremos recomendaciones sobre la organización del capítulo del libro que permita presentar la teoría referente a este nuevo conjunto numérico de una manera más adecuada y mejorar, en calidad y en variedad, los ejercicios y problemas presentes en el capítulo.

1.4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Las investigaciones revisadas y explicadas anteriormente permiten suponer que las dificultades en el aprendizaje de los números enteros están vinculadas con el modo en el que está organizado este tema en los libros de texto de matemáticas en la Educación Básica.

En esta investigación se plantea analizar la organización matemática del capítulo referido a los números enteros en los libros de sexto grado de primaria y de primer año de secundaria de la editorial Coveñas para dar respuesta con ello a los posibles errores que podrían cometer los estudiantes que hayan sido sujetos a ese proceso de instrucción y a través de una fase experimental, corroborar lo planteado a priori. De ser así, propondremos unas recomendaciones que podrían contribuir a superar las dificultades presentadas por los estudiantes.

1.5 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivo general: Analizar si la organización matemática del capítulo referido a los números enteros de los libros de texto para sexto grado de primaria y de primer año de secundaria de la editorial Coveñas favorece a que los alumnos superen los obstáculos epistemológicos que se presentan en el aprendizaje de los números enteros.

Objetivos específicos:

1. Identificar la manera en la que los libros de texto seleccionados dan inicio al tema, justifican la aparición del conjunto de los números enteros, los diferentes significados que dan al signo negativo, presentan la teoría, justifican las propiedades, los distintos tipos de problemas resueltos y propuestos que presentan y la relación que existe entre este nuevo conjunto numérico y el álgebra.
2. Comprobar si alguno de los obstáculos puestos en evidencia en el análisis de los libros y en los antecedentes se reproduce en las respuestas de los estudiantes que emplearon los textos de la editorial seleccionada.

3. Proponer recomendaciones para la organización matemática del capítulo referido a los números enteros del libro de texto seleccionado, en base a los resultados obtenidos.

1.6 HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Hipótesis 1:

Esperamos que el tratamiento que se dé a los números enteros en los libros de texto seleccionados sea muy parecido a la forma en que se presenta a los números naturales, sin reconocer la complejidad misma de este objeto matemático.

Hipótesis 2:

Los obstáculos que se han puesto en evidencia en los antecedentes se siguen reproduciendo en las respuestas de los estudiantes que utilizaron el libro de texto seleccionado.

1.7 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN EMPLEADO

Nuestra investigación es, en principio, una investigación bibliográfica, es decir, centramos nuestra atención en el análisis de capítulos de textos utilizados para la enseñanza de las matemáticas. En nuestro caso particular nos ocuparemos de los capítulos referidos a los números enteros para la Educación Básica Regular en los cuales pretendemos encontrar algunos motivos que justifiquen los errores que presentan los estudiantes cuando resuelven operaciones en este conjunto numérico. Para ello, debemos investigar cuáles son los errores persistentes a lo largo del desarrollo histórico de los números enteros al igual que en los procesos de enseñanza, motivo por el cual debemos investigar sobre los obstáculos epistemológicos referidos a los números enteros. Sin embargo, hemos querido incluir una parte experimental en la que podamos verificar la presencia de los errores, encontrados en las investigaciones previas, en los procesos de aprendizaje actuales. La presente investigación tiene tres partes.

En la primera etapa, analizaremos la organización matemática del capítulo referido a los números enteros en dos libros de texto de la editorial Coveñas, que son los libros de Matemática para sexto grado de primaria y para primer año de secundaria. Para ello definiremos siete criterios basados tanto en las investigaciones previas sobre los obstáculos que aparecen cuando los estudiantes aprenden los números enteros como en la revisión del mismo texto y nuestra experiencia profesional.

En la segunda parte diseñaremos un instrumento para determinar si los obstáculos encontrados en las investigaciones consultadas están presentes en los procesos de aprendizaje actuales y se predecirán las respuestas teniendo en cuenta el contenido del capítulo referido a los enteros, a las investigaciones previas y a nuestra experiencia profesional. Se aplicará el instrumento en el aula después de que los alumnos hayan estudiado el capítulo referido a los números enteros utilizando el libro mencionado anteriormente. De este modo podremos comprobar si la manera en la que los libros revisados presentan el tema de números enteros origina dificultades en los estudiantes. Se analizarán las respuestas teniendo en cuenta el contenido y la organización matemática del capítulo referido a los números enteros en el libro de primer año de secundaria.

Por último, se determinará si existe relación entre los errores identificados y la forma en que los textos abordaron el tema. A partir de lo anterior se propondrán unas recomendaciones para la organización matemática del capítulo referido a los números enteros que permitan superar las dificultades, que se evidencien a través del instrumento, referentes a este objeto matemático.

CAPÍTULO 2: OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS PRESENTES EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

El marco teórico que utilizaremos para realizar nuestro análisis será el de obstáculos epistemológicos. En particular, se considerarán los obstáculos de origen epistemológico presentes en el desarrollo histórico del concepto de los números enteros.

2.1 EL PAPEL DEL ERROR EN UNA INVESTIGACIÓN EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Brousseau (1976, citado en Artigue 1990) expresa el lugar que tiene el error en el aprendizaje de las matemáticas:

> El error y fracaso no tienen el papel simplificado que queremos a veces hacerles jugar. El error no es simplemente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como lo creemos de acuerdo a las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son erráticos e imprevisibles, ellos son establecidos como obstáculos. Adicionalmente dentro del funcionamiento del maestro y del estudiante, el error se constituye como el sentido del conocimiento adquirido. (Artigue, 1990, p.7)

A partir de la postura adoptada por Brousseau en el párrafo anterior respecto a los errores, consideramos que el análisis de los mismos debe ser una fuente permanente de estudio en didáctica de las matemáticas. Argumentar que las causas de esos errores son solo la ignorancia, el azar, al igual que otras razones externas a la matemática sería dar una solución superficial y externa al quehacer docente y al objeto matemático en sí mismo. En esta misma línea, concordamos con el autor cuando afirma que el error está ligado al sentido del nuevo conocimiento adquirido.

El trabajo de un investigador en didáctica de las Matemáticas no solo consiste en reconocer el proceso cognitivo que realiza un estudiante cuando aprende matemáticas sino también en identificar los obstáculos que encuentran los alumnos cuando aprenden un determinado concepto. De acuerdo con Artigue (1990), Brousseau precisa que el trabajo del investigador en Educación Matemática consiste fundamentalmente en:

a) Encontrar los errores recurrentes, mostrar que ellos se reagrupan alrededor de concepciones.
b) Encontrar los obstáculos en la historia de las matemáticas.
c) Confrontar los obstáculos históricos con los obstáculos de aprendizaje y establecer su carácter epistemológico.

En la presente investigación abordaremos las tres actividades mencionadas anteriormente respecto a nuestro objeto de estudio: El conjunto de los números enteros. Encontraremos los errores recurrentes a través de una prueba aplicada a un grupo de alumnos de primer año de secundaria que haya estudiado el capítulo referido a los números enteros siguiendo un determinado libro de texto. También mencionaremos los principales obstáculos que aparecieron en la historia de las matemáticas cuando se desarrolló el contenido de los números enteros. Luego confrontaremos si es que estos obstáculos siguen presentes en las respuestas de los estudiantes.

2.2 OBSTÁCULOS EPSTEMOLÓGICOS.

Contamos con las investigaciones de Cid (2000, 2002, 2003, 2010), quien ha presentado varios trabajos en los que ha estudiado los obstáculos epistemológicos presentes en el desarrollo histórico de los números enteros y ha recopilado la información encontrada por otros investigadores acerca de este objeto matemático.

De acuerdo con Cid (2000), la noción de obstáculo epistemológico que aparece por primera vez en el ámbito de la epistemología, y que fue dada por Bachelard, fue retomada por Brousseau en 1976 y redefinida en términos de la teoría de situaciones didácticas. En esta teoría se postula que un alumno adquiere un conocimiento cuando enfrentado a una situación-problema cuya solución exige ese conocimiento, es capaz de generarlo en forma de estrategia de resolución de la situación. El conocimiento es, por tanto, el resultado de la adaptación de un sujeto a un conjunto de situaciones en las que es útil como estrategia de resolución. La consecuencia inmediata de este postulado es que los conocimientos de un alumno sobre una noción matemática dependerán de la experiencia adquirida afrontando situaciones en las que dicha noción está implicada.

Sin embargo, en la enseñanza es imposible presentar para cada noción matemática el conjunto de todas las situaciones en las que ésta interviene, lo que obliga a elegir unas pocas de entre ellas. Y esa elección puede dar lugar a que el alumno adquiera una concepción, es decir, un conjunto de conocimientos referentes a la noción matemática que funcionan con éxito en ese subconjunto de situaciones, pero que no son eficaces e, incluso, provocan errores al utilizarse en otro subconjunto de situaciones.

En este sentido, podría darse el caso de que, acerca de una misma noción matemática y en un mismo sujeto, aparecieran dos concepciones contradictorias ligadas a dos subconjuntos de situaciones diferentes, lo que, tarde o temprano, obligaría al sujeto a integrar las dos concepciones limando los aspectos contradictorios o a rechazar una de ellas. También podríamos encontrarnos con una concepción a la que ya no fuera posible hacer evolucionar para que asumiera nuevos campos de problemas, en cuyo caso no quedaría más alternativa que el rechazo de la concepción y su sustitución por otra.

En estos casos, como señala Cid (2000), en los que la ampliación del campo de problemas exige la sustitución de la concepción antigua, válida hasta ese momento, por una nueva y, además, el sujeto que la posee se resiste a rechazarla y trata, a pesar de la constatación de su fracaso, de mantenerla, de adaptarla localmente, de hacerla evolucionar lo menos posible, se dice que esa concepción es un obstáculo. Y esa concepción obstáculo se pondrá de manifiesto a través de los errores que produce, errores que no serán fugaces ni erráticos, sino reproducibles y persistentes.

Brousseau (1989, citado en Cid, 2000) propone una lista de condiciones necesarias para calificar de obstáculo a una concepción:

a) Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.
b) Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.
c) Pero engendra respuestas falsas fuera de ese contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.
d) Este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se le confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca.

e) Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continúa manifestándose de forma intempestiva y obstinada.

Brousseau (1976, citado en Artigue, 1990) reconoce tres orígenes de los obstáculos que se encuentran en la enseñanza de las matemáticas:

a) Un origen ontogenético (cognitivo), correspondiente a los obstáculos vinculados a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los estudiantes dentro del proceso de enseñanza.
b) Un origen didáctico, para los obstáculos ligados al proceso de enseñanza en sí.
c) Un origen epistemológico, para los obstáculos relacionados a la resistencia de un saber mal adaptado.

Brousseau (1981, citado en Cid 2000) califica un obstáculo como epistemológico si se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo. En este caso, el rechazo explícito del obstáculo forma parte del saber matemático actual.

De este modo podemos observar que realizar un análisis sobre la naturaleza de los obstáculos no es algo trivial, sino que requiere de nuestra atención.

2.3 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS PRESENTES EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Glaeser (1981, citado en Cid, 2000) hace la primera referencia a obstáculos epistemológicos en los números negativos. Glaeser utiliza el término “obstáculo” equiparándolo a “dificultad”. En este sentido, el autor considera los siguientes obstáculos:

a) Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas: Se refiere al hecho observable en la obra de Diofanto, sobre la necesidad de efectuar cálculos algebraicos, por ejemplo multiplicar dos diferencias les lleva a enunciar la regla de signos, sin aceptar la existencia de los números negativos.
b) Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas: Glaeser manifiesta que en la obra de algunos matemáticos se constata que conciben la existencia de soluciones negativas de algunas ecuaciones, pero no las pueden

aceptar como cantidades reales, sino que son cantidades ficticias que expresan un defecto en el enunciado del problema.

c) Dificultad para unificar la recta real: Algunos matemáticos concebían que "lo negativo" neutralizaba o se oponía a "lo positivo". Esto favorecía la idea del modelo de dos semirrectas opuestas que funcionaban separadamente.

d) La ambigüedad de los dos ceros: Dificultad para pasar de un cero que significaba la ausencia de cantidad, a un cero elegido arbitrariamente. Ahora el cero es un punto de referencia en la recta numérica. No se podía admitir la existencia de cantidades que fueran "menos que la nada".

e) El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas: La superación de los obstáculos anteriores permiten aceptar los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa.

> Ya no se trata de descubrir en la Naturaleza ejemplos prácticos que "expliquen" los números enteros de un modo metafórico. Estos números ya no son descubiertos, sino inventados, imaginados. (Glaeser, 1981, p.337)

Duroux (1982, citado en Cid, 2000) considera que los dos primeros obstáculos epistemológicos propuestos por Glaeser: la "falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas" y la "dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas", no debieran ser considerados como tales pues sólo indican un déficit de conocimiento. Sin embargo, la "dificultad para unificar la recta real", puede ser, según Duroux, un síntoma de una posible concepción obstáculo caracterizada por considerar a los números negativos como objetos de naturaleza distinta de los positivos. La concepción del número como expresión de la medida de una cantidad de magnitud, concepción transmitida por la enseñanza elemental, puede estar en la base de la diferente consideración entre positivos y negativos, dado que entonces el número negativo sólo puede interpretarse como una medida "a la inversa", como un objeto compuesto de dos partes: el signo – y una medida; mientras que el positivo representa, sin más, una medida. Esto puede llevarnos a interpretar los números negativos como algo radicalmente distinto de los números naturales y no como su prolongación.

Otro referente para nuestro marco teórico son las investigaciones de Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991). En esta investigación han tratado de poner en manifiesto las ideas causantes de los errores y olvidos constatados que obstaculizan el aprendizaje de los números enteros. Estas ideas obstaculizadoras las han agrupado en dos apartados: Lo real como obstáculo, en donde la intuición primaria de número es como cantidad; y la imposición de lo formal como obstáculo, lo que requiere la ruptura de concepciones previas; si no es así, lo formal queda vacío de significado.

En el apartado titulado: Lo real como obstáculo, se expresa que el gran obstáculo para la aceptación y reconocimiento del número negativo fue la creencia que identifica número como cantidad y que se vio favorecida por la concepción que predominó hasta el siglo XIX: las matemáticas describen y demuestran verdades acerca del mundo real. En este sentido, el conocimiento del número entero exige la ruptura con algunas ideas que están muy ligadas al conocimiento que se posee de la aritmética práctica:

El número como expresión de cantidad: Mientras no se abandone el plano de lo real es difícil concebir los números negativos, porque simplemente, no son necesarios. La identificación de número con cantidad también va a obstaculizar la generalización de las operaciones aritméticas y de orden. “¿Puedes encontrar una situación real en la que tenga sentido –(-3)?”

La suma como aumento: La concepción ingenua de suma como acción de añadir una cantidad a otra, es la que hace que algunos estudiantes se queden sin contestar ante la pregunta: “¿Puedes encontrar un número que sumado a 5 dé 2?”

La multiplicación como multiplicación natural: La concepción de la suma como aumento se traslada también a la multiplicación. Cuando el estudiante trabajaba con números naturales, podía entender la multiplicación como la adición, un número de veces, una determinada cantidad. Es decir entendía que 3 x 4 es sumar tres veces cuatro, o sumar cuatro veces tres. Pero cuando el alumno debe resolver una multiplicación como (-2) x (-3) la concepción anterior de multiplicación no tiene sentido.

La sustracción como disminución: ¿Es posible encontrar un número que restado de 7 dé 10? La sustracción también permanece ligada al plano de la acción y la identifican con quitar y por tanto, con disminución.

El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural: “¿Cuál es el número mayor en una unidad a -3? En la serie natural los números van aumentando a medida que van estando más alejados del origen. El trasladar esa secuencia a los números negativos es la causa de que los alumnos muestren dificultad para responder la pregunta anterior".

Ignorar el signo: Este error consiste en ignorar sistemáticamente el signo que precede a las temperaturas negativas, identificando así los números negativos con los naturales. "-7 grados en Moscú, -3 grados en Budapest. Si alguien hubiera viajado de Moscú a Budapest, ¿habría notado una subida o una bajada de temperatura?" Algunos estudiantes, olvidando por completo el signo "menos" y operando como si se tratara de números naturales contestan: "una bajada porque 7 – 3 = 4". En el otro extremo están aquellos que siendo sensibles al signo "menos" responden: "una bajada de -4 grados".

Identificación de los símbolos literales con números positivos: "a no puede ser un número negativo, sería -a".

En el trabajo de Iriarte, Jimeno y Vargas Machuca (1991) se presentan una serie de dificultades que surgen durante el aprendizaje de los números enteros. Estas dificultades corresponden a la idea de obstáculo dada por Brousseasu y que hemos presentado anteriormente en este capítulo. Siendo este un trabajo que hemos considerado muy importante para la elaboración de la presente investigación, tanto para darnos un marco teórico sobre las posibles dificultades que presentan los estudiantes como para la elaboración de la prueba, es que adoptaremos, para esta tesis, el posicionamiento sobre obstáculos de acuerdo con Brousseau.

2.4 OTRAS CONSIDERACIONES SOBRE LOS OBSTÁCULOS QUE ENCUENTRAN LOS ALUMNOS CUANDO ESTUDIAN A LOS NÚMEROS ENTEROS.

En el apartado de la imposición de lo formal como obstáculo, de la investigación de Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991), encontramos que los libros de texto se olvidan con frecuencia que el avance del conocimiento de los números enteros ha supuesto la ruptura con concepciones previas, quedando reducidos a un formalismo vacío, que se constituye en errores, pues los estudiantes se ven inmersos en un terreno en el que no pueden orientarse porque carecen de intuiciones. En este caso no estamos hablando de obstáculos ya que su origen no está en la capacidad cognitiva de los estudiantes, ni en la práctica docente, ni en el objeto matemático en sí mismo; son dificultades que presentan los alumnos y que deberían ser tomadas en cuenta para el diseño de una sesión de clase como en la elaboración de textos didácticos. Estas dificultades que presentan los estudiantes, y que los investigadores Iriarte, Jimeno y Vargas Machuca han manifestado en su investigación pueden clasificarse del siguiente modo:

El manejo del orden lineal: Hay errores que son inherentes al concepto de orden: Fracaso en la inversión de una relación de orden ("Pedro tiene 5 canicas más que Juan y Juan tiene 3 canicas más que Enrique sabiendo que Pedro tiene 26 canicas ¿Cuántas tiene Enrique?"), la secuencia temporal como fuente de errores ("Sara gastó ayer 8 pesetas más que hoy. Ayer gastó 35 pesetas. ¿Cuántas ha gastado hoy?") y la identificación de una relación con su recíproca (qué número precede en 7 unidades a -3).

En estos ejemplos los investigadores quieren explicar que la palabra "más" no puede ser transcrita inmediatamente como adición, sino que para hallar el resultado hay que interpretar la situación presentada y tener en cuenta el orden de la información que aparece en cada problema.

Las reglas del cálculo como formalismo vacío: Si las reglas se encuentran vacías de contenido y significado son fáciles de olvidar y confundir. La regla de los signos es la que aparece más asumida. Las reglas de la adición resultan más difíciles de memorizar y provocan mayor número de errores. Debemos situarnos en el momento evolutivo de nuestros alumnos cuando aprenden el tema de números enteros. En primaria la matemática puede ser muy concreta y las propiedades aprendidas pueden provenir de una generalización de resultados que son evidentes después de hacer varios ejercicios similares o, incluso, pueden ser observados en la vida diaria. En primer año de secundaria, en particular en el momento en que se estudian los números enteros, las propiedades no son deducidas a partir de ejemplos de la vida diaria, sino más bien, de un formalismo matemático que conducen a un primer acercamiento a la abstracción matemática. La regla de signos, por ejemplo, no puede ser comprobada a través de ejemplos de la vida diaria y por este motivo los estudiantes podrían considerarlas carentes de sentido. Esa es una consideración que deben tener los docentes de matemática cuando explican la justificación de las propiedades en los enteros, y deben explicar que son reglas que dan sentido al nuevo conjunto numérico formado.

Los enteros estudiados y olvidados: Pese a haber estudiado el tema de los números enteros una vez que se les hace preguntas de razonamiento lógico, los alumnos no recuerdan lo aprendido. Por ejemplo, cuando los estudiantes son interrogados con la siguiente pregunta: ¿existe un número que sumado a 5 dé 1? Muchos alumnos, pese a haber estudiado el capítulo referido a los enteros mantienen su posición anterior, válida en los números naturales, en la que no existe un número que dé respuesta a la pregunta formulada.

En esta parte queremos poner énfasis en una conclusión dada en la investigación de Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca:

> La mayor dificultad para la enseñanza de los números enteros es la no existencia de un modelo concreto que explique todas las propiedades en Z. El intento de utilizar un modelo de este tipo que cubra totalmente el estudio de los enteros es contraproducente por dos motivos:
>
> a) Obstaculiza el aprendizaje al impedir la ruptura con lo real; necesaria para la construcción de Z. El aprendizaje del conjunto de los números enteros es un primer paso de abstracción matemática que se da desde la etapa escolar.
>
> b) Convence al alumno de la inutilidad de los negativos, ya que los ejemplos propuestos para justificar ciertas propiedades de los enteros se resuelven mejor en el marco del sentido común.
>
> Por otro lado el tratamiento de los enteros desde un punto de vista exclusivamente formal es estéril pues lo formal no se puede imponer por decreto. Prueba de ello es que ni siquiera el objetivo mínimo de utilizar correctamente las reglas de cálculo llega a realizarse totalmente. (Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca, 1991, p. 17 y 18)

Este último párrafo se refiere a que abordar los números enteros exclusivamente en un nivel abstracto tampoco garantiza el aprendizaje de este objeto matemático. Ejemplo de ello es que las propiedades de adición y multiplicación de números con signo, que son típicamente enseñadas como una teoría abstracta y acabada, tampoco son aprendidas (o aplicadas) correctamente por los estudiantes.

CAPÍTULO 3: ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

De acuerdo con Carranza (1990) primero haremos una breve referencia a algunas propiedades del conjunto de números naturales, ya que muchas de las propiedades presentes en este conjunto numérico nos servirán para el tratamiento de los números enteros.

3.1 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Se define al conjunto de los números naturales por inducción matemática como conjunto sucesor, es decir, se presentan dos axiomas a partir de los cuales se construye todo el conjunto de los números naturales:

i) $0 \in N$
ii) Si $a \in N$ entonces $(a + 1) \in N$

Además, de acuerdo con Pascual (1964) vamos a recordar algunas propiedades para la adición y multiplicación de números naturales. Considerando a, b y c ϵ N:

1. Propiedad conmutativa:

$a + b = b + a$

$a . b = b . a$

2. Propiedad asociativa:

$(a+b)+c = a + (b+c)$

$(a.b).c = a.(b.c)$

3. Elementos neutros:

$a + 0 = 0 + a = a$ → El 0 es el elemento neutro en la adición

$a . 1 = 1 . a = a$ → El 1 es el elemento neutro en la multiplicación

4. Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición:

(a+b).c = a.c + b.c

En las ecuaciones, donde a y b ϵ N y además x es una incógnita:

a + x = b y a . x = b

no tienen siempre solución en N. Para que exista un x ϵ N, la primera exige que b ≥ a, y la segunda que a|b.

Tratamos ahora de construir un conjunto Z, en el cual la ecuación a + x = b tenga solución, cualesquiera que sean a ϵ Z y b ϵ Z.

3.2 CONJUNTO N x N

Recordemos que se llama producto cartesiano, A x B, de dos conjuntos A y B, al conjunto formado por todos los pares ordenados (a,b), a ϵ A y b ϵ B. En particular, el conjunto N x N es el conjunto de todos los pares ordenados de números naturales.

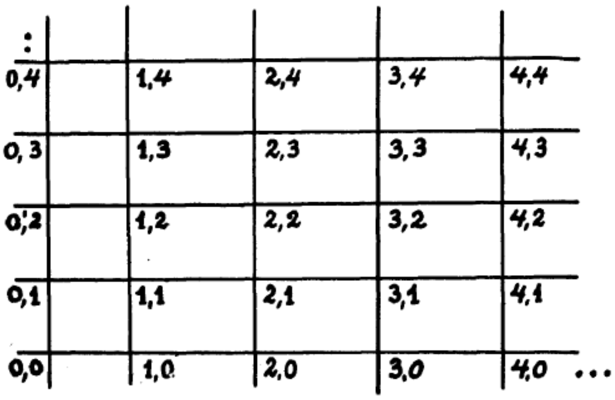
3.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE N x N

El conjunto N puede representarse por puntos equidistantes sobre una semirrecta:

Figura 3.1: Representación gráfica de N

Pascual (1964)

Si consideramos dos semirrectas de origen común O, podemos representar el conjunto N x N por los puntos vértices de un retículo:



⋮					
0,4	1,4	2,4	3,4	4,4	
0, 3	1,3	2,3	3,3	4,3	
0,2	1,2	2,2	3,2	4,2	
0,1	1,1	2,1	3,1	4,1	
0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	...

Figura 3.2: Conjunto N x N en un retículo

Pascual (1964)

3.4 RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

En el conjunto producto N x N definiremos la relación binaria E, denotada ~:

E : (a,b) ~ (a´, b´) ↔ a + b´= b´+ a.

Se trata de una relación de equivalencia, en efecto:

I. Es reflexiva:

Pues como a + b = b + a , ya que en N la adición es conmutativa → (a,b) ~ (a,b)

II. Es simétrica:

Pues si (a,b) ~ (a´,b´) → a + b´= b + a´→ b + a´ = a + b´ y luego

a´+ b = b´+ a → (a´,b´) ~(a,b)

III. Es transitiva:

(a,b) ~ (a´, b´) y (a´,b´) ~ (a´´, b´´) De aquí se desprende lo siguiente:

a + b´= b + a´ y que a’+ b’’ = b’ + a’’ es decir,

a + b’ + a’ + b’’ = b + a’ + b’ + a’’ entonces,

a + b’’ = b + a’’ → (a, b) ~ (a’’, b’’)

3.5 CONJUNTO Z

Al conjunto cociente $\frac{N\,x\,N}{E}$, o sea, al conjunto de clases de equivalencia le llamaremos conjunto Z de los números enteros. Un número entero es, por tanto, cada elemento (clase) del conjunto cociente $\frac{N\,x\,N}{E}$. Es decir, representando estos elementos por letras griegas, y usando el signo = para la relación de equivalencia E:

$$Z = \begin{Bmatrix} \alpha = (a,b) = (a',b') = \cdots \\ \beta = (c,d) = (c',d') = \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}$$

3.6 ELEMENTOS CANÓNICOS DE LOS NÚMEROS ENTEROS:

Dado un número entero: α = (a,b) = … , pueden ocurrir tres casos:

1° Si a > b, α = (a, b) = (a-b, 0) = (m, 0), m ϵ N.

2° Si a = b, α = (a, b) = (0,0)

3° Si a < b, α = (a, b) = (0, b-a) = (0, n), n ϵ N.

Es decir, cualquier número entero α puede representarse por una de estas tres formas:

(m,0), (0,0), (0,n), llamadas formas canónicas del número entero, o elementos canónicos de la clase.

3.7 NOTACIÓN

Convenimos en designar estos elementos canónicos por las notaciones:

(m,0) = + m

(0,0) = 0

(0,n) = - n

En las cuales los signos + y – son simplemente signos predicativos, es decir, no indican operaciones de adición o sustracción, sino que son parte del mismo número y que indican su carácter de positivo o negativo. Tenemos, pues, clasificado el conjunto Z en:

Z^+ , un subconjunto de los enteros positivos (+ m).

0 , entero nulo o cero (0,0)

Z^- , subconjunto de los enteros positivos (- n)

3.8 INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE $\frac{N\,x\,N}{E}$

Las clases de equivalencia, elementos del conjunto $\frac{N\,x\,N}{E}$, están formadas por los elementos N x N, situados sobre una misma semirrecta paralela a la diagonal (0,0) (1,1)… , y los elementos canónicos son los puntos orígenes de estas semirrectas, o sea, situados sobre las semirrectas Ox y Oy.

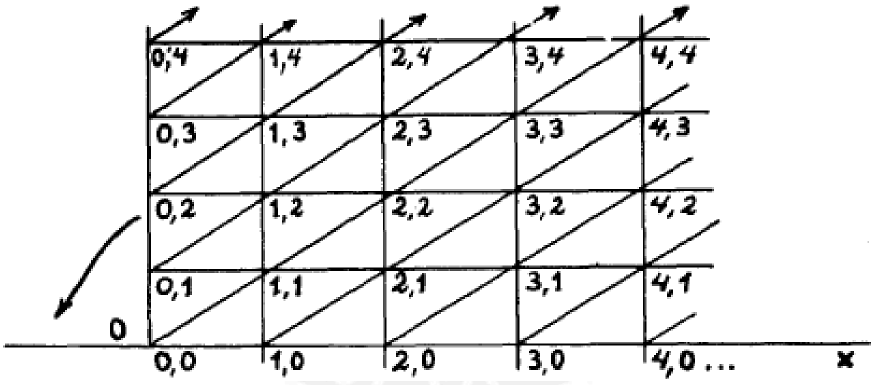


Figura 3.3: Interpretación gráfica de $\frac{N\,x\,N}{E}$

Pascual (1964)

Como hemos indicado anteriormente, los números enteros son los elementos canónicos, es decir los que son origen de las semirrectas paralelas a la diagonal que pasa por el (0,0), ya que representan a todos los demás elementos de la clase.

3.9 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE Z

Si ahora damos un giro a la semirrecta Oy hasta colocarla en la prolongación de la semirrecta Ox, tendremos representado el conjunto Z sobre puntos de la recta YX.

Figura 3.4: Representación gráfica de Z

Pascual (1964)

3.10 ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Definición: (a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)

a) La adición que hemos definido en N x N es, pues, estable frente a la relación E, o sea, es una operación definida en Z. Por tanto utilizaremos los elementos canónicos. Se presentan los siguientes casos:

I. (m,0) + (n,0) = (m+n,0)

Es decir, (+m) + (+n) = + (m+n)

II. a) Si m > n :

(m, 0) + (0, n) = (m, n) = (m-n, 0),

Es decir: (+m) + (-n) = (m-n)

b) Si m < n :

(m, 0) + (0, n) = (m, n) = (0, n-m)

Es decir: (+m) + (-n) = - (n-m)

c) Si m = n:

(m, 0) + (0, n) = (m, n) = (0, 0)

Es decir: (+m) + (-m) = 0

III. (0, m) + (0, n) = (0, m+n)

Que se puede escribir: (-m) + (-n) = - (m + n)

Que constituyen la conocida regla de los signos de la adición de números enteros.

Son inmediatas las propiedades:

b) Conmutativa:
(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)

c) Asociativa:
[(a,b) + (c,d)] + (e,f) = (a,b) + [(c,d) + (e,f)]

d) Elemento neutro:
(a,b) + 0 = 0 + (a,b) = (a,b)

e) Elementos opuestos: Cualquiera que sea (a,b) ϵ Z, se le puede asociar un (a',b') ϵ Z, tal que: (a,b) + (a',b') = 0
En efecto, si (a,b) = + m ↔ (a',b') = -m
(a,b) = - n ↔ (a',b') = + n
(a,b) = 0 ↔ (a',b') = 0

Para verificar a), c), d) y e) utilizamos la idea que el conjunto Z es un grupo aditivo y para verificar b) utilizamos, además, la idea que es conmutativo.

f) Propiedad propia de la estructura algebraica:
Si a, b, c ϵ Z:
Si a = b → a + c = b + c

3.11 ISOMORFISMO ENTRE N Y Z^+

Podemos establecer la siguiente correspondencia biunívoca entre el conjunto N de los números naturales y el subconjunto Z^+ de los enteros positivos:

$$\forall n : n \in N \leftrightarrow (+n) \in Z^+$$

Esta correspondencia es compatible con las operaciones de adición definidas en ambos conjuntos. Es decir, cualesquiera que sean a y b, naturales:

a ↔ + a

b ↔ + b

a + b ↔ (+a) + (+b) = + (a+b)

Por tanto, el semigrupo aditivo N es isomorfo al semigrupo aditivo Z^+. Identificando ambos conjuntos, se tiene:

$$N \approx Z^+ \subset Z$$

3.12 RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN a + x = b

1° Si b > a, x = b – a, x ϵ N.

2° Si b = a, x = 0, x ϵ N.

3° Si b < a, operaremos en el conjunto Z sustituyendo a y b por sus correspondientes en el isomorfismo N ↔ Z^+:

(+a) + x = + b → (-a) + (+a) + x = (+b) + (-a) → x = (+b) + (-a) = - (a-b), x ϵ Z^-.

Expresado de otra forma:

Dada la ecuación: a + x = b, ¿será cierto que x = b – a?

a + x = a + (b - a)

a + (b + (-a))

a + ((-a) + b)

(a + (-a)) + b

0 + b

b

3.13 MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Definición:

(a, b) x (c, d) = (ac + bd, ad + bc).

a) Propiedad uniforme:

$$\left.\begin{array}{r}(a,b)=(a',b')\to a+b'=b+a'\\ (c,d)=(c',d')\to c+d'=d+c'\end{array}\right\}\to \left.\begin{array}{c}ac+b'c=bc+a'c\\ bd+a'd=ad+b'd\\ a'c+a'd'=a'd+a'c'\\ b'd+b'c'=b'c+b'd'\end{array}\right\}$$

$$\to ac+bd+a'd'+d'c'=bc+ad\,a'c'+b'd'$$

$$\to (ac+bd,ad+bc)=(a'c'+b'd',a'd'+b'c')$$

$$\to\ (a,b)\text{x}(c,d)=(a',b')\text{x}\,(c',d').$$

Por tanto, la multiplicación, inicialmente definida en el conjunto NxN, es estable frente a la relación de equivalencia E, es decir, es una operación definida en Z. El producto (a,b)x(c,d) es independiente de los elementos elegidos en cada clase. Operando con los elementos canónicos se obtiene:

i) (+ m) . (+ n) = + m.n

Pues: (+m) . (+n) = (m,0) . (n,0) = (m.n + 0, 0 + 0) = (m.n,0) = +m.n

ii) (+ m) . (- n) = - m.n

En efecto: (+m) . (-n) = (m,0) . (0,n) = (0 + 0, m.n + 0) = (0, m.n) = -m.n

iii) (- m) . (+ n) = - m.n

Pues: (-m) . (+n) = (0,m) . (n,0) = (0 + 0, 0 + m.n) = (0,m.n) = -m.n

iv) (- m) . (- n) = + m.n

En efecto: (-m) . (-n) = (0,m) . (0,n) = (m.n + 0, 0 + 0) = (m.n,0) = +m.n

Éstas son las igualdades que constituyen la conocida “regla de signos” de la multiplicación de números enteros.

Son inmediatas las propiedades:

b) Conmutativa:

$$\alpha \text{ x } \beta = \beta \text{ x } \alpha$$

c) Asociativa:

$$(\alpha \text{ x } \beta) \text{ x } \gamma = \alpha \text{ x } (\beta \text{ x } \gamma)$$

d) Elemento neutro:

$$\alpha \, . \, (+\, 1) = (+1) \, . \, \alpha = \alpha$$

3.14 PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

La multiplicación de números enteros es distributiva sobre la adición:

$$(\alpha + \beta) \, . \, \gamma = \alpha \, . \, \gamma + \beta \, . \, \gamma$$

3.15 ANILLO Z DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Un conjunto C se dice que tiene estructura de anillo, o que se es un anillo cuando en él están definidas dos operaciones internas, por ejemplo, adición y multiplicación, tales que por la primera es un grupo aditivo conmutativo, y la segunda es asociativa y distributiva sobre la primera. Cuando la segunda es, además, conmutativa, el anillo se llama conmutativo o abeliano. Si la multiplicación posee elemento neutro (unidad), es un anillo unitario o con unidad. Diremos, por tanto, que el conjunto Z es un anillo conmutativo y con unidad. Se trata además de un dominio de integridad, por ser unitario y no tener divisores de cero, es decir, $\alpha \, . \, \beta = 0$ lo que implica que $\alpha = 0$ o $\beta = 0$.

3.16 ISOMORFISMO

La correspondencia $N \leftrightarrow Z^+$ es también compatible con la multiplicación. Por tanto, ambos semigrupos son también isomorfos, como en el caso de la adición, respecto a la operación de multiplicar:

$N \leftrightarrow Z^+$

$a \leftrightarrow +\, a$

$b \leftrightarrow +\, b$

$a \, . \, b \leftrightarrow (+\, a) \, . \, (+\, b) = +\, (a \, . \, b)$

3.17 OBSERVACIONES

- Dado un número entero $\alpha \neq 1$, no existe un elemento $\alpha^{-1} \in Z$, tal que: $\alpha \cdot \alpha^{-1} = +1$. Por tanto, la ecuación: a . x = b, tampoco tiene solución en Z cuando a no divide a b. La solución de esta ecuación, en el caso general, exige, pues, una ampliación del conjunto Z, es decir, la construcción del cuerpo Q de los números racionales.

- Hemos hecho esta breve referencia a la estructura algebraica de los números enteros ya que este conjunto numérico tiene propiedades que no pueden ser explicadas a través de modelos concretos, sino que se justifican en la estructura de anillo de este conjunto. Nos referimos, en particular, a la regla de signos en la multiplicación de números enteros.

- También queremos hacer referencia que cuando se trabaja con números naturales los signos + y – juegan roles operativos, es decir, indican una operación entre dos números. Cuando se estudia a los números enteros, éstos mismos signos además tienen un carácter predicativo, es decir, indican si el número es positivo o negativo.

Este aspecto será considerado para la revisión de libros de texto.

CAPÍTULO 4: IDENTIFICACIÓN DE OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS EN TEXTOS

4.1 CRITERIOS PARA EL ANÁLISIS DE TEXTOS

Para analizar la organización matemática hemos elaborado una serie de criterios teniendo como base nuestra experiencia profesional como docentes y las investigaciones revisadas acerca de los obstáculos que encuentran los alumnos cuando estudian a los números enteros. Es necesario establecer criterios ya que estos van a enfocar nuestra atención en los puntos que consideramos más importantes. En la siguiente tabla se presentan los criterios que utilizaremos en nuestro análisis y se plantean algunas posibilidades que podemos encontrar en los capítulos.

Aspecto a analizar	**Posibilidades**
Criterio 1: Inicio del capítulo.	Teoría, situación, ejercicio.
Criterio 2: Justificación de la aparición del nuevo objeto matemático.	Para dar respuesta a modelos concretos. Como una herramienta para otros contenidos matemáticos. No justifican.
Criterio 3: Diferentes significados del signo negativo.	Pérdidas, posición respecto a un origen, etc.
Criterio 4: Aparición de la teoría.	Al inicio del capítulo. Primero presenta ejercicios o problemas y luego la teoría.
Criterio 5: Justificación de las propiedades.	A partir de modelos concretos. Conjunto de reglas que dan coherencia a este nuevo sistema numérico.
Criterio 6: Problemas resueltos y propuestos.	Abarcan distintos modelos concretos o solo algunos.
Criterio 7: Relación con el álgebra	Utilizan el álgebra para justificar la aparición de los números enteros, o es una aplicación del conocimiento aprendido al final del capítulo. Es decir, después de haber estudiado los números enteros, se

	plantean ecuaciones en donde el alumno aplicará propiedades de los números enteros.

Tabla 1

Criterios para analizar el capítulo de un texto

En esta tabla hemos colocado una serie de criterios que también podrían ser utilizados para analizar la organización matemática del capítulo en el que se estudie cualquier otro objeto matemático.

4.2 DESCRIPICIÓN DEL LIBRO DE SEXTO GRADO DE PRIMARIA

Como un objetivo de la presente investigación es analizar la organización matemática del tema de números enteros, entonces creemos necesario revisar el capítulo referido a este objeto matemático en el libro de sexto grado de primaria, aun cuando los alumnos a los que se les aplicará la prueba no hayan trabajado con este libro, e inclusive no hayan estudiado a los números enteros en sexto grado.

El libro seleccionado es utilizado en muchos colegios particulares del Perú. Esto se debe posiblemente a la cantidad de ejercicios que presenta y a la teoría organizada en cada capítulo. El libro de sexto grado de primaria forma parte de la serie Megamatic que cuenta con un libro de matemáticas para cada grado de Primaria. El autor presenta en este libro a los números enteros como el cuarto capítulo. En los capítulos anteriores abordaron los siguientes temas:

1. Conjuntos.
2. Numeración.
3. Múltiplos, divisores y divisibilidad.

Creemos importante mencionar que en el capítulo titulado Numeración, se presentan temas como cambios de base, ejercicios y problemas con las operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación utilizando métodos aritméticos y el tema de ecuaciones. En este último tema desarrolla la resolución de ecuaciones. Lo mencionamos ya que en capítulos anteriores los alumnos no han tenido que resolver ecuaciones.

El autor explica que para resolver ecuaciones de la forma x + 11 = 16, se debe aplicar la propiedad de las igualdades que dice: Si en ambos miembros de una igualdad sumamos o restamos el mismo número, la igualdad se mantiene.

Luego añade que otra forma de resolver una ecuación del tipo mencionado anteriormente es transponiendo términos. Esto consiste en lo siguiente:

Si pasamos del primer miembro al segundo miembro un término positivo, éste pasará con signo cambiado, es decir; negativo.

Si pasamos del primer miembro al segundo miembro un término negativo, éste pasará con signo cambiado, es decir; positivo.

Creemos que ésta es una regla práctica que puede ayudar a los estudiantes; sin embargo, consideramos que primero los alumnos deben tener bien clara y manejar la propiedad de las igualdades que se ha mencionado anteriormente en los alumnos.

4.2.1 SEGÚN EL CRITERIO 1: INICIO DEL CAPÍTULO

El capítulo empieza con la pregunta: “¿Cuánto es 8 - 9?” Luego aparecen una serie de restas sin solución en las que el minuendo es menor que el sustraendo.

Entendemos que el autor plantes estas preguntas con el fin de provocar un conflicto en los alumnos. Trata de dar un sentido amplio a una operación conocida por los estudiantes: La sustracción. Un sentido en donde el resultado no será una cantidad que puedan encontrar en la realidad: un número negativo.

El texto continúa de este modo: “Supongamos que 8 – 9 = x, entonces x + 9 = 8; pero, ¿hay algún número natural que sumado con 9 sea igual a 8? No existe dicho número natural”

El texto se toma la licencia de expresar en términos algebraicos la situación planteada al inicio ya que en capítulos anteriores ha enseñado a plantear y resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. Además, ha enseñado a transponer términos de un miembro al otro de la ecuación.

4.2.2 SEGÚN EL CRITERIO 2: JUSTIFICACIÓN DE LA APARICIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS

La ecuación planteada anteriormente, nos lleva a la necesidad de ampliar el conjunto numérico conocido hasta ese entonces: El conjunto de los números naturales.

El autor prosigue: “Para que la sustracción se pueda efectuar en todos los casos, se pensó en los números negativos.

Z = {… , -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, …}”

Además agrega dos notas:

“1. El signo positivo se puede sobrenteder.

2. El número entero 0 no es positivo ni negativo.”

Es aquí en donde el autor establece la forma que tienen los números enteros, ahora tienen signo. Luego, ubica a los números enteros en una recta numérica, sin embargo, no da ninguna justificación sobre la relación de orden en los números enteros.

4.2.3 SEGÚN EL CRITERIO 3: DIFERENTES SIGNIFICADOS DEL SIGNO NEGATIVO

Después de ello, el autor expresa: “Los números enteros también son útiles para representar situaciones como las siguientes:

Un carro avanza 300 metros: +300m. Un carro retrocede 200 metros: -200m.

Una persona gana S/. 720: +S/.720. Una persona pierde S/. 480: -S/.480.

Las ventas de una empresa aumentaron en 30%: +30%.

Las ventas disminuyeron en 20%: -20%.

Hace mucho calor, estamos a 31 grados Celsius sobre cero: +31°.

Hace mucho frío, estamos a 4 grados bajo cero: -4°.”

El autor ha tratado de presentar situaciones reales en donde se hace uso de números negativos. En estas situaciones, el número negativo es asociado a pérdidas y posición respecto a un punto de referencia. La única diferencia entre estos dos significados que se dan al signo negativo se refiere al cero. En caso de pérdidas, el cero es la ausencia de cantidad, significado parecido que tiene el cero en los números naturales, mientras que en el sentido de posición respecto a un punto de referencia, el cero no implica ausencia de una magnitud sino que es un punto respecto al cual se ordenan los demás números.

4.2.4 SEGÚN EL CRITERIO 4: APARICIÓN DE LA TEORÍA

La teoría aparece al inicio de cada apartado del capítulo y después se presentan una serie de ejercicios en los que se pretende adiestrar a los estudiantes en los contenidos referidos a los números enteros y sus propiedades. Si bien es cierto que el capítulo empieza con algunas situaciones que despiertan el interés por este nuevo objeto matemático, solo aparecen a modo de motivación mas no como un conjunto de situaciones a partir de las cuales surja la necesidad de la aparición de este nuevo conjunto numérico. Por ejemplo:

Valor absoluto de un número

“El valor absoluto de un número entero es la distancia del punto que le corresponde al origen. Para indicar el valor absoluto de un número entero, se escribe el número entero entre barras.”

Entendemos que cuando el autor menciona el punto que le corresponde, se refiere al punto que le corresponde en la recta numérica.

Seguido a esto el autor presenta una serie de ejercicios para calcular el valor absoluto de números enteros, como por ejemplo: |-50| - |+49| + |-32| - |+27|

Así, se presentan ejercicios de multiplicación y potenciación con valores absolutos.

También presenta ejercicios de áreas y perímetros de figuras en las que los lados miden, por ejemplo: |-4|, |-13|, etc.

También da una definición de números enteros opuestos como la que sigue:

“Dos números enteros son opuestos cuando tienen igual valor absoluto, pero diferente signo; cada uno es el opuesto del otro.”

4.2.5 SEGÚN EL CRITERIO 5: JUSTIFICACIÓN DE LAS PROPIEDADES

Debemos mencionar que establecer una relación de orden en este nuevo conjunto numérico es de gran importancia ya que servirá de apoyo para poder enseñar la adición y sustracción de los números enteros.

Un factor que debemos considerar es que hasta el momento los alumnos conocen la representación en la recta numérica de los números naturales y para establecer qué número es mayor que otro bastaba con reconocer cuál de los dos números está más lejos del cero; el que esté más alejado es el mayor.

Sin embargo, en este nuevo conjunto numérico la afirmación anterior no se cumple ya que, por ejemplo, - 11 no es mayor que -1, aunque sabemos que -11 está más alejado del cero. Suponemos que este criterio puede ser una fuente de errores para los alumnos.

En el caso de la comparación de los números enteros, el autor define la relación “menor que” ubicando los dos números en la recta e indica que “a” es menor que “b” si “a” está a la izquierda de “b”.

En el texto se indica que si en la recta numérica, los números están ordenados en forma creciente, de izquierda a derecha. Si nos fijamos en un número entero cualquiera, éste será mayor que cualquier número entero que esté antes de él.

Está información será muy importante para la adición y sustracción de números enteros.

Luego, aparece una serie de ejercicios para identificar al número anterior y posterior de números enteros, calcular el valor absoluto y comparar dos números enteros.

Luego, el autor presenta los siguientes criterios para realizar la adición de números enteros. Estos criterios servirán como reglas para sumar o restar números enteros.

El autor contempla dos casos:

a) Adición de números enteros del mismo signo.

Aparecen varios ejercicios resueltos y después el autor formaliza la idea: "Para sumar números enteros del mismo signo, se suman sus valores absolutos y al resultado se le coloca el mismo signo".

b) Adición de números enteros de diferente signo.

Del mismo modo, aparecen varios ejercicios resueltos y después el autor afirma: "Para sumar dos números enteros de diferente signo, se restan sus valores absolutos y el resultado lleva el mismo signo que el número de mayor valor absoluto".

Después de enunciar estos criterios, el autor utiliza otra representación para explicar la adición y sustracción de números enteros: la recta numérica. Suponemos que esta segunda forma de representación es utilizada para, de algún modo, justificar los resultados obtenidos con los criterios presentados anteriormente.

Después de esto el autor presenta un listado de las propiedades que se cumplen en la adición de números enteros. Por ejemplo:

"Propiedad de clausura: Esta propiedad afirma que la suma de dos números enteros siempre es un número entero; por esta razón también se afirma que el conjunto de los números enteros es cerrado con respecto a la adición.

Si a y b representan a dos números enteros cualesquiera, entonces a + b es un número entero."

De ese modo se presentan las propiedades conmutativa, asociativa, elemento neutro, elemento opuesto o inverso aditivo, aditiva y cancelativa. Es decir, primero presenta la teoría, luego utiliza variables para expresar con letras las propiedades descritas.

Después, el autor presenta una serie de ejercicios de adición con números enteros y expresa que "al trabajar con las rectas numéricas se muestra que restar un entero y sumar el opuesto de ese entero, producen el mismo resultado."

Cuando se trabaja con operaciones combinadas con signos de agrupación se debe tener en cuenta lo siguiente, según el autor:

"1. Todo paréntesis precedido por un signo + puede ser eliminado, escribiendo luego los números contenidos en su interior, cada cual con su propio signo.

2. Todo paréntesis precedido por un signo – puede ser eliminado, escribiendo luego los números contenidos en su interior cada cual con el signo cambiado."

Además añade: "Cuando en una operación combinada aparecen varios signos de agrupación, unos dentro de otros, se empieza eliminando el que está cada vez más al interior."

Las dos propiedades mencionadas anteriormente no presentan mayor explicación en el capítulo que la que nosotros hemos transcrito en este documento. Consideramos que el texto justifica estas propiedades a partir del concepto de opuesto de un número; por ejemplo, cuando un signo menos precede a un signo de agrupación, en realidad va a devolver los opuestos de cada uno de los números que están en el interior del signo de agrupación.

Toda esta técnica es reforzada con una serie de ejercicios resueltos y propuestos sobre operaciones combinadas.

4.2.6 SEGÚN EL CRITERIO 6: PROBLEMAS

En esta investigación, consideramos como problema a una situación presentada en un contexto extramatemático y que necesite aplicar la teoría y propiedades de los números enteros para su resolución.

El capítulo presenta muy pocos problemas resueltos y propuestos. Los pocos problemas que presenta son ligados a temperaturas y sobre descender o ascender (posición respecto a un punto de referencia).

A continuación, presentamos un problema resuelto en el libro:

"Un submarino desciende 40 metros y luego desciende 12 metros más. ¿A qué profundidad se encuentra ahora? Expresa tu respuesta con un número entero.

Resolución:

Desciende 40 metros: = -40m

Luego desciende 12 metros = -12m

Profundidad a la que se encuentra ahora, es: (-40 m) + (-12 m) = -52m”

Cuando el autor indica: “Expresa tu respuesta con un número entero” es para inducir al alumno a que en su respuesta incluya el signo negativo, ya que el estudiante podría limitarse a decir como respuesta: “a 52 metros de profundidad”.

Además consideramos que este problema no es el más conveniente para un primer encuentro con los números negativos ya que su resolución no obliga al alumno a utilizar el signo negativo. El estudiante podría simplemente sumar 40m + 12m y responder que el submarino bajó 52 metros.

El texto presenta muy pocos problemas y todos son del mismo tipo que hemos presentado hasta el momento.

4.2.7 SEGÚN EL CRITERIO 7: RELACIÓN CON EL ÁLGEBRA

Las relaciones con el álgebra que encontramos en este capítulo son las siguientes:

a) Expresa la pregunta inicial como una ecuación.
b) Expresa con variables algunas propiedades de los números enteros con la finalidad de generalizar los resultados.

En todo el capítulo no se ha justificado la aparición de los números enteros, ni de sus propiedades a partir de ecuaciones; tampoco se ha planteado la solución de ninguno de los problemas por medio de ecuaciones, salvo la pregunta inicial.

4.3 DESCRIPCIÓN DEL LIBRO DE PRIMER AÑO DE SECUNDARIA

El autor presenta el capítulo referido a los números enteros como quinto capítulo. En los capítulos anteriores se abordaron los siguientes temas:

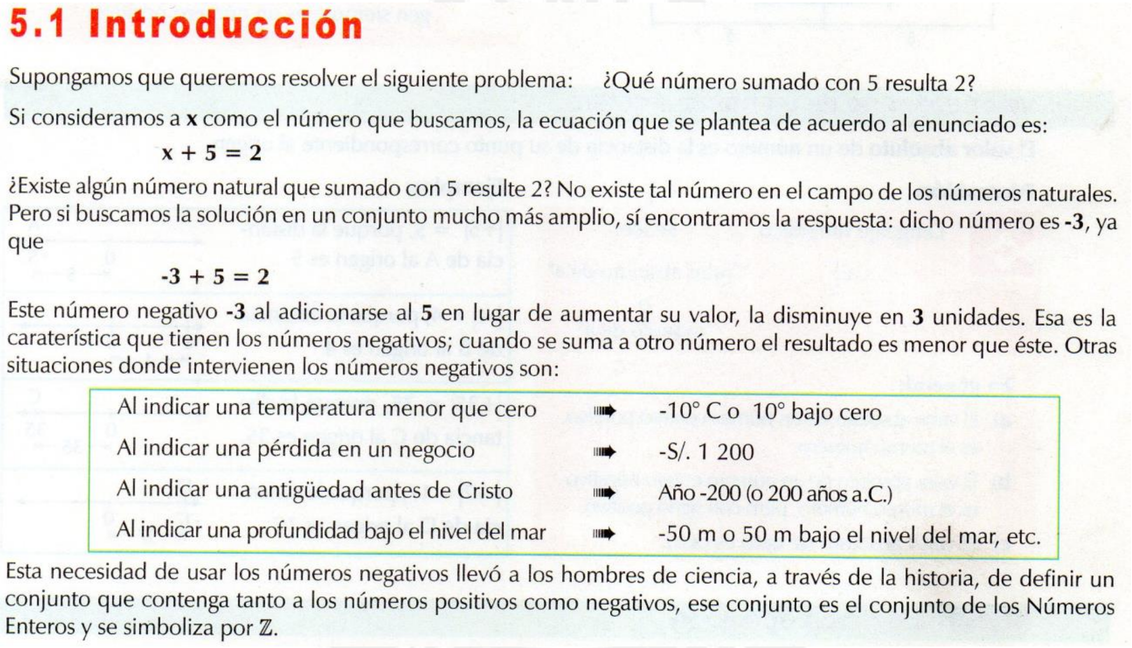
1. Teoría de conjuntos.
2. Números naturales.
3. Sistemas de numeración.

4. Divisibilidad.

Creemos importante mencionar que en ninguno de los capítulos anteriores se ha trabajado con ecuaciones, es decir, todos los problemas han sido resueltos en un entorno aritmético.

4.3.1 SEGÚN LOS CRITERIOS 1 Y 2: INICIO DEL CAPÍTULO Y JUSTIFICACIÓN DE LA APARICIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS

El capítulo referido a los números enteros empieza con la siguiente introducción:



5.1 Introducción

Supongamos que queremos resolver el siguiente problema: ¿Qué número sumado con 5 resulta 2?

Si consideramos a **x** como el número que buscamos, la ecuación que se plantea de acuerdo al enunciado es:

$$x + 5 = 2$$

¿Existe algún número natural que sumado con 5 resulte 2? No existe tal número en el campo de los números naturales. Pero si buscamos la solución en un conjunto mucho más amplio, sí encontramos la respuesta: dicho número es **-3**, ya que

$$-3 + 5 = 2$$

Este número negativo **-3** al adicionarse al **5** en lugar de aumentar su valor, la disminuye en **3** unidades. Esa es la caraterística que tienen los números negativos; cuando se suma a otro número el resultado es menor que éste. Otras situaciones donde intervienen los números negativos son:

Al indicar una temperatura menor que cero ➠ -10° C o 10° bajo cero
Al indicar una pérdida en un negocio ➠ -S/. 1 200
Al indicar una antigüedad antes de Cristo ➠ Año -200 (o 200 años a.C.)
Al indicar una profundidad bajo el nivel del mar ➠ -50 m o 50 m bajo el nivel del mar, etc.

Esta necesidad de usar los números negativos llevó a los hombres de ciencia, a través de la historia, de definir un conjunto que contenga tanto a los números positivos como negativos, ese conjunto es el conjunto de los Números Enteros y se simboliza por $\mathbb{Z}$.

Figura 4.1 Introducción del capítulo de los números enteros (Página 207)

Como vemos en la figura 4.1 el capítulo empieza con una pregunta.

La primera idea que el texto pretende dejar en claro es la ruptura de la idea de adición como aumento. Para ello, formula la pregunta: ¿Qué número sumado con 5 resulta 2? Un poco después se va a referir a que cuando sumamos un número negativo a otro positivo en vez de aumentar su valor, disminuye.

Luego, traduce esta pregunta inicial utilizando herramientas del álgebra.

Queremos hacer notar que después de plantear la ecuación x + 5 = 2, el autor da inmediatamente la respuesta, indicando que el valor de la incógnita es -3. Esto lo hace ya que, como hemos revisado en el libro anterior, en sexto grado de primaria ya hace una presentación de los números enteros. Sin embargo, consideramos que no debería ser así debido a que no en todos los colegios se trabaja con la misma editorial en todos los grados, ya que formalmente, según el Diseño Curricular Nacional, es un tema que recién se enseña en primer año de secundaria. Para muchos alumnos puede no ser obvio que el número que sumado a 5, de modo que el resultado sea 2, es -3.

Por último pone como ejemplos otros modelos concretos en los que trata de aplicar números negativos a la vida real y menciona que la necesidad de usar estos números llevó a los hombres de ciencia a definir un nuevo conjunto numérico Z.

Consideramos que si bien es cierto que los estudiantes, a esta edad, asimilan de una manera más rápida los nuevos contenidos matemáticos cuando pueden relacionarlos con actividades concretas de su vida diaria, creemos importante que el docente pueda dejar en claro a sus alumnos que el tema de los números enteros es un primer paso para desarrollar una abstracción matemática, y que estos números no aparecieron para dar respuestas a problemas de la vida diaria sino para dar respuesta a problemas que surgieron dentro de la matemática misma. Un ejemplo de este tipo de problemas sería la solución de un determinado tipo de ecuaciones.

4.3.2 SEGÚN EL CRITERIO 3: DIFERENTES SIGNIFICADOS DEL SIGNO NEGATIVO

El autor presenta al inicio del capítulo las siguientes situaciones:

Indicar una temperatura menor que cero → -10 °C

Indicar una pérdida en un negocio → - S/. 1 200

Al indicar una antigüedad antes de Cristo → Año -200

Indicar una profundidad bajo el nivel del mar → - 50m

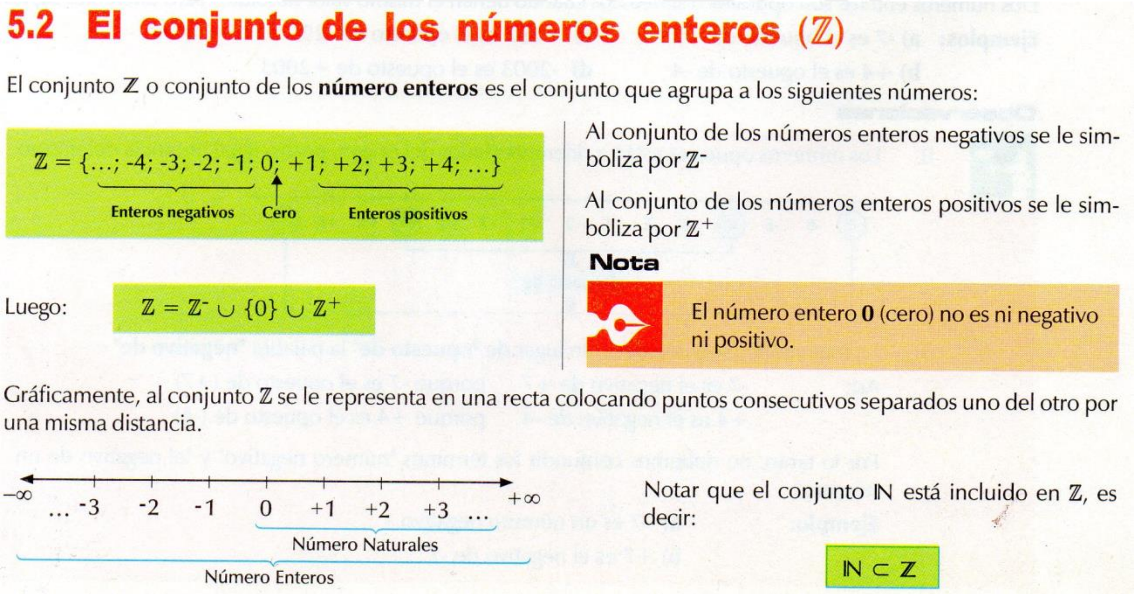
En estas situaciones el autor trata de mostrar que el signo negativo toma los significados de pérdida (en un negocio) y de punto de referencia respecto a un origen (temperatura, años antes de Cristo, profundidad bajo el nivel del mar).

Páginas después, cuando el autor trata de presentar la adición de números enteros lo hace asociando nuevamente los signos + y – a ganancias y pérdidas. Después de ello explica la adición de enteros utilizando la recta numérica; es decir, el signo es una ubicación respecto a un punto de referencia.

Si bien es cierto que la idea de ganancias y pérdidas es bastante conocida por los alumnos, consideramos que la presentación de la adición utilizando la recta numérica es más conveniente ya que motiva al alumno a utilizar números con signo para dar los resultados.

4.3.3 SEGÚN EL CRITERIO 4: APARICIÓN DE LA TEORÍA

En la organización matemática del capítulo referido a los números enteros la teoría aparece al inicio de cada sección. Después, se presentan algunos ejercicios resueltos y luego largas listas de ejercicios para reforzar la técnica aprendida. Esto se puede apreciar en la siguiente figura:



5.2 El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$)

El conjunto $\mathbb{Z}$ o conjunto de los **número enteros** es el conjunto que agrupa a los siguientes números:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots; \underbrace{-4; -3; -2; -1}_{\text{Enteros negativos}}; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cero}}}{0}; \underbrace{+1; +2; +3; +4; \ldots}_{\text{Enteros positivos}}\}$$

Al conjunto de los números enteros negativos se le simboliza por $\mathbb{Z}^-$

Al conjunto de los números enteros positivos se le simboliza por $\mathbb{Z}^+$

Nota

El número entero **0** (cero) no es ni negativo ni positivo.

Luego: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$

Gráficamente, al conjunto $\mathbb{Z}$ se le representa en una recta colocando puntos consecutivos separados uno del otro por una misma distancia.

Notar que el conjunto $\mathbb{N}$ está incluido en $\mathbb{Z}$, es decir:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Figura 4.2 Definición que da el autor sobre los números enteros (Página 207)

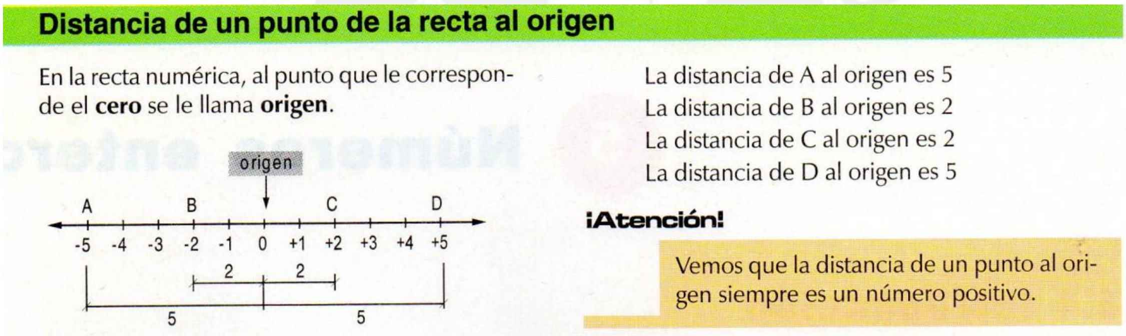
En la figura 4.2, el autor trata de ubicar esos nuevos objetos en un nuevo conjunto. No define este nuevo objeto matemático ya que al ser un conjunto infinito solo se puede determinar por comprensión y para ello tendría que recurrir a la noción de conjunto cociente; pero si nos da una idea sobre cómo son sus elementos. Es en este momento en donde aparece el símbolo Z. Además, hace una observación sobre el número cero indicando que no es positivo ni negativo.

Quizá se podría presentar al conjunto de los números enteros del siguiente modo:

Z = {+a ó –a/ a ϵ N}

Otro aspecto muy importante, es que por primera vez los alumnos aprecian que el signo es parte del número y ya no es solo una operación. A nuestra consideración, esta es una de las ideas fundamentales de este capítulo y que el autor no enfatiza lo suficiente. También debemos señalar que en la recta numérica presentada en la teoría de esta sección, aparece la siguiente idea: Números naturales: {0; +1; +2; +3; …}. Es decir, el autor está dejando ver que N = Z^+ U {0}.

Después, ubica a los elementos de este nuevo conjunto en la recta numérica, como también se muestra en la siguiente figura:



Distancia de un punto de la recta al origen

En la recta numérica, al punto que le corresponde el **cero** se le llama **origen**.

La distancia de A al origen es 5
La distancia de B al origen es 2
La distancia de C al origen es 2
La distancia de D al origen es 5

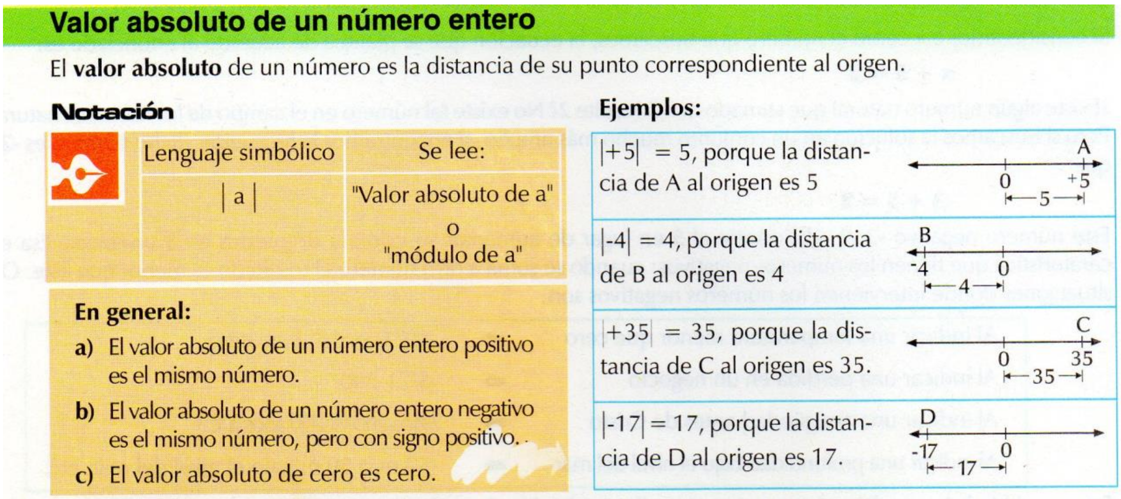
¡Atención!

Vemos que la distancia de un punto al origen siempre es un número positivo.

Figura 4.3 Distancia de un punto de la recta al origen (Página 208)

En la figura 4.3 se introduce la idea de distancia y añade una advertencia en la que refiere que la distancia siempre es un número positivo. Esto le servirá de base para definir el valor absoluto de un número como la distancia de su punto correspondiente (en la recta numérica) al origen.

Es muy importante analizar cómo el autor presenta el concepto de valor absoluto de un número ya que es la primera vez que los estudiantes tienen conocimiento de este objeto matemático. Además, creemos pertinente que el texto presente dicho concepto en este momento ya que será necesario para explicar después la idea de números opuestos. Al respecto, mostramos la siguiente figura:



Valor absoluto de un número entero

El **valor absoluto** de un número es la distancia de su punto correspondiente al origen.

Notación

Lenguaje simbólico	Se lee:
| a |	"Valor absoluto de a" o "módulo de a"

En general:

a) El valor absoluto de un número entero positivo es el mismo número.

b) El valor absoluto de un número entero negativo es el mismo número, pero con signo positivo.

c) El valor absoluto de cero es cero.

Ejemplos:

$|+5| = 5$, porque la distancia de A al origen es 5

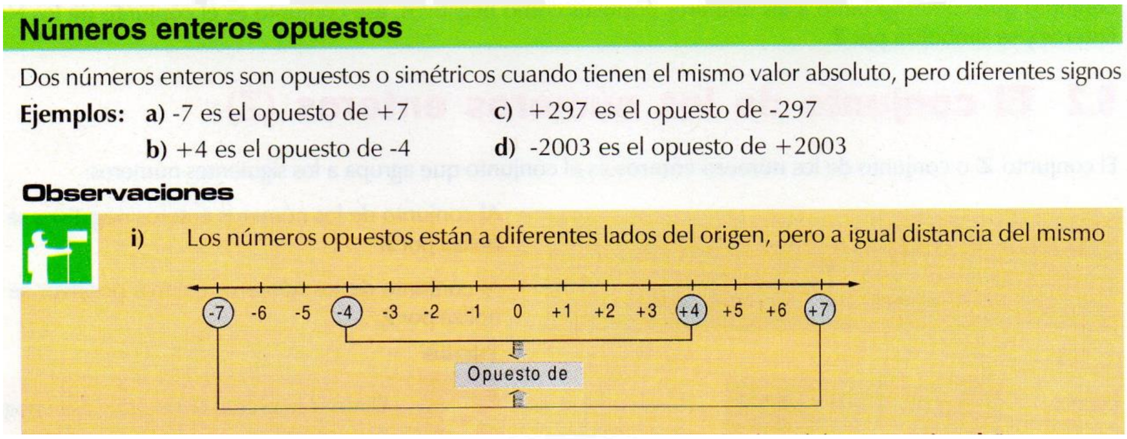
$|-4| = 4$, porque la distancia de B al origen es 4

$|+35| = 35$, porque la distancia de C al origen es 35.

$|-17| = 17$, porque la distancia de D al origen es 17.

Figura 4.4 Valor absoluto de un número entero (Página 208)

Además, en la figura 4.4 se introduce la notación (dos barras) que caracteriza a este objeto matemático y nos da una regla para hallar el valor absoluto de cualquier número. Esta regla la acompaña con ejemplos. Otro concepto que introduce el texto es el de números enteros opuestos, que mostramos a continuación.



Números enteros opuestos

Dos números enteros son opuestos o simétricos cuando tienen el mismo valor absoluto, pero diferentes signos

Ejemplos: **a)** -7 es el opuesto de +7 **c)** +297 es el opuesto de -297

b) +4 es el opuesto de -4 **d)** -2003 es el opuesto de +2003

Observaciones

i) Los números opuestos están a diferentes lados del origen, pero a igual distancia del mismo

Figura 4.5 Números enteros opuestos (Página 208)

En la figura 4.5, el texto pretende formalizar la idea intuitiva que tienen los alumnos sobre el opuesto de un número. También hace una diferencia entre “número negativo” y “el negativo de un número”.

A continuación se presenta una lista de ejercicios propuestos bajo el título de taller:

El primer bloque de ejercicios es como el siguiente: Escriba en el espacio indicado los símbolos Z^- o Z^+, según corresponda: - 8 ϵ …..

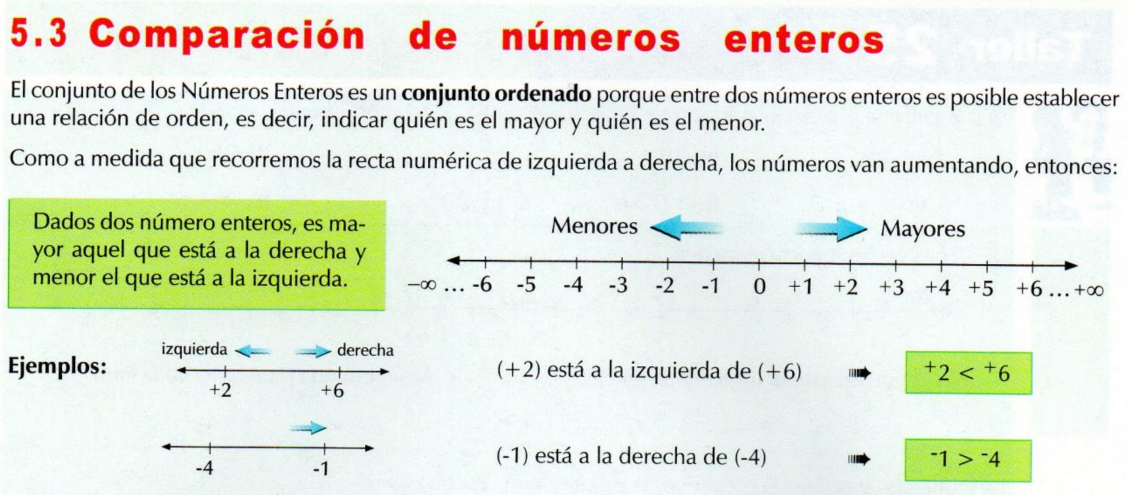
En el siguiente bloque se presenta una recta numérica y se les pide ubicar determinados números positivos y negativos en la misma.

En los siguientes ejercicios se les hace una serie de preguntas como: ¿Cuál es el valor absoluto de -8? o ¿Cuál es el módulo de 124? Sin embargo, debemos mencionar que en la teoría presentada hasta el momento no se ha utilizado la palabra módulo.

Después se les presenta ejercicios para calcular el valor absoluto de números como por ejemplo: $|-7| = \ldots$, y luego se les pide completar espacios en donde deben colocar los opuestos de una serie de números propuestos.

Para terminar esta lista de ejercicios, se les presenta una serie de conjuntos determinados por comprensión, en los que los elementos están tomados del conjunto de los números enteros, y se les pide expresarlos por extensión.

En la siguiente figura, el texto presenta el procedimiento que utiliza para comparar dos números enteros:



5.3 Comparación de números enteros

El conjunto de los Números Enteros es un **conjunto ordenado** porque entre dos números enteros es posible establecer una relación de orden, es decir, indicar quién es el mayor y quién es el menor.

Como a medida que recorremos la recta numérica de izquierda a derecha, los números van aumentando, entonces:

Dados dos número enteros, es mayor aquel que está a la derecha y menor el que está a la izquierda.

Ejemplos:

(+2) está a la izquierda de (+6) ➠ $^{+}2 < {}^{+}6$

(-1) está a la derecha de (-4) ➠ $^{-}1 > {}^{-}4$

Figura 4.6 Comparación de números enteros (Página 210)

En la figura 4.6 se aprecia que dentro del desarrollo de la teoría el autor manifiesta que a medida que recorremos la recta numérica de izquierda a derecha los números van aumentando; sin embargo, no ha hecho ninguna explicación previa sobre el motivo de esta afirmación. Quizá el autor está tomando esta proposición como una definición.

En esta sección, se establece la idea de conjunto ordenado y se da una regla práctica para saber cuándo un número entero es mayor que otro, haciendo referencia que el número que esté a la derecha es mayor que el que está a la izquierda. Luego, compara los números positivos y negativos con el cero.

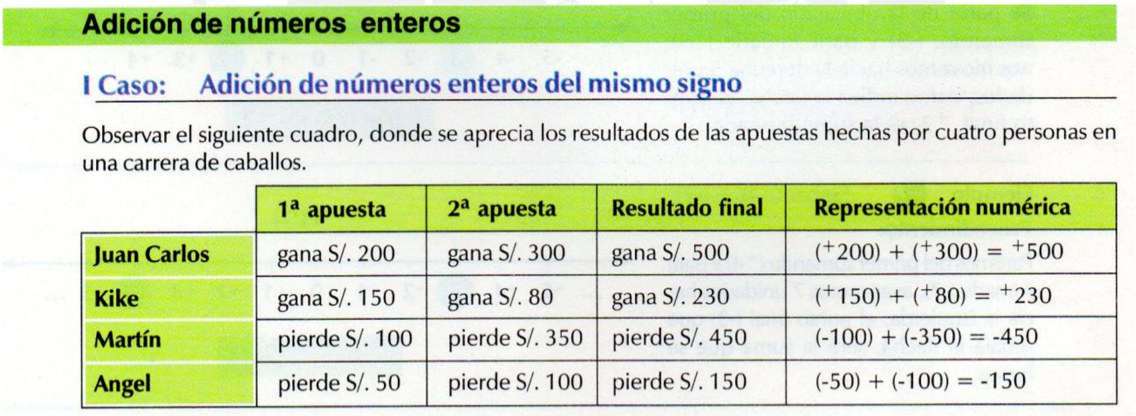
Después de ello, el autor presenta tres propiedades en las que indica que observando la recta numérica siempre se cumple que: Cualquier número positivo es mayor que cero, cualquier número negativo es menor que cero y cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.

Después de esta teoría vienen una serie de ejercicios como el que sigue:

Completa escribiendo en cada espacio en blanco los símbolos, > , < o =, según corresponda: + 4 ☐- 6

Estos ejercicios buscan afianzar la técnica necesaria para comparar dos números enteros.

Ahora presentamos el procedimiento indicado por el texto para realizar la adición de números enteros con el mismo signo.



Adición de números enteros

I Caso: Adición de números enteros del mismo signo

Observar el siguiente cuadro, donde se aprecia los resultados de las apuestas hechas por cuatro personas en una carrera de caballos.

	1ª apuesta	2ª apuesta	Resultado final	Representación numérica
Juan Carlos	gana S/. 200	gana S/. 300	gana S/. 500	$(^{+}200) + (^{+}300) = {}^{+}500$
Kike	gana S/. 150	gana S/. 80	gana S/. 230	$(^{+}150) + (^{+}80) = {}^{+}230$
Martín	pierde S/. 100	pierde S/. 350	pierde S/. 450	(-100) + (-350) = -450
Angel	pierde S/. 50	pierde S/. 100	pierde S/. 150	(-50) + (-100) = -150

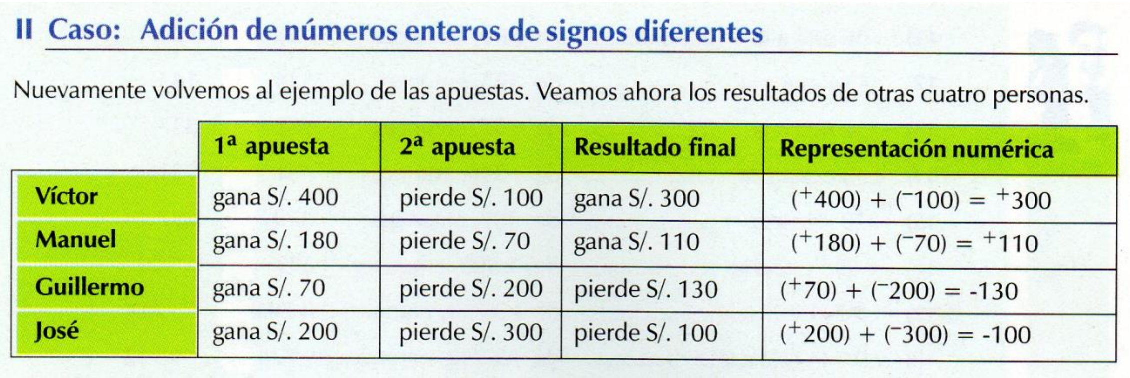
Figura 4.7 Adición de números enteros con el mismo signo (Página 211)

En la figura 4.7 podemos observar la manera en que se empiezan a presentar las operaciones básicas de adición y sustracción dentro de este nuevo conjunto numérico.

Utiliza un modelo concreto para presentar la adición de números enteros del mismo signo: ganancias y pérdidas en una serie de apuestas. El autor indica que para la suma de dos o más números positivos es otro número positivo. También afirma que la suma de dos o más números negativos es otro número negativo. Por último el autor trata de institucionalizar lo presentado hasta el momento con la regla práctica en la que indica que para sumar números enteros del mismo signo, se suman los valores absolutos de los sumandos y a dicha suma se le antepone el signo común.

Consideramos que esta sería una mejor manera de presentar la adición en sexto grado de primaria.

Ahora mostramos el procedimiento propuesto por el texto para la adición de números enteros de diferente signo.



II Caso: Adición de números enteros de signos diferentes

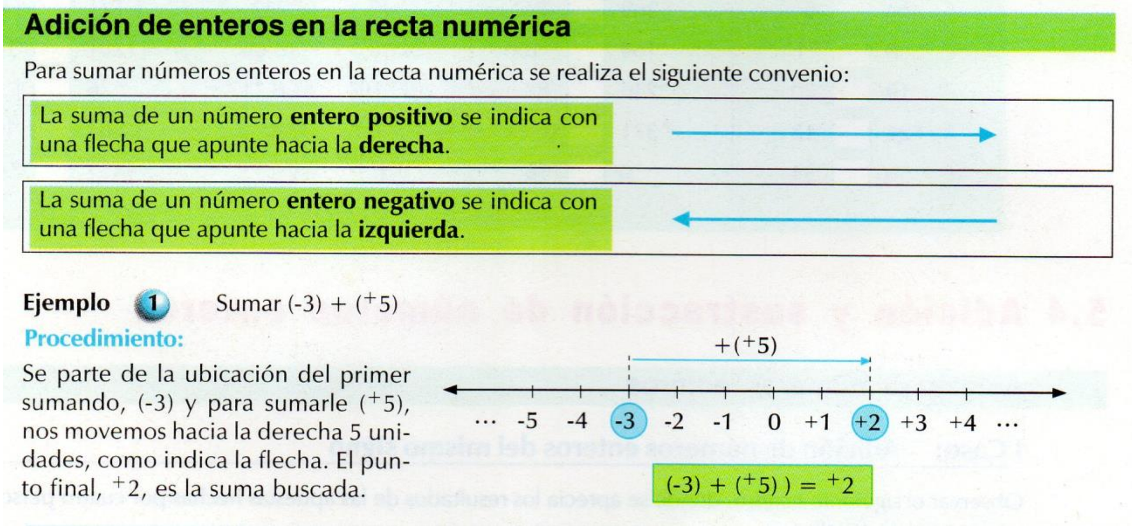
Nuevamente volvemos al ejemplo de las apuestas. Veamos ahora los resultados de otras cuatro personas.

	1ª apuesta	2ª apuesta	Resultado final	Representación numérica
Víctor	gana S/. 400	pierde S/. 100	gana S/. 300	$(^{+}400) + (^{-}100) = {}^{+}300$
Manuel	gana S/. 180	pierde S/. 70	gana S/. 110	$(^{+}180) + (^{-}70) = {}^{+}110$
Guillermo	gana S/. 70	pierde S/. 200	pierde S/. 130	$(^{+}70) + (^{-}200) = -130$
José	gana S/. 200	pierde S/. 300	pierde S/. 100	$(^{+}200) + (^{-}300) = -100$

Figura 4.8 Adición de números enteros de signos diferentes (Página 212)

Como podemos apreciar en la figura 4.8, se utiliza el mismo modelo concreto para dar sentido a la adición de números enteros de signos diferentes. Debemos notar que siempre presenta el primer sumando como un número positivo y no como negativo. Esto traerá conflicto en los estudiantes cuando tengan que sumar dos números enteros en el que el primer sumando sea un número negativo y el segundo sea positivo. Esto permite mostrar que este modelo concreto no logra ilustrar de manera completa la adición de números enteros. Al igual que en el apartado anterior termina dando una regla práctica en la que se indica que se halla la diferencia de sus valores absolutos y a ese resultado se le antepone el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.

A continuación, el texto presenta otro registro de representación: la recta numérica.



Adición de enteros en la recta numérica

Para sumar números enteros en la recta numérica se realiza el siguiente convenio:

La suma de un número **entero positivo** se indica con una flecha que apunte hacia la **derecha**.

La suma de un número **entero negativo** se indica con una flecha que apunte hacia la **izquierda**.

Ejemplo ① Sumar $(-3) + ({}^{+}5)$

Procedimiento:

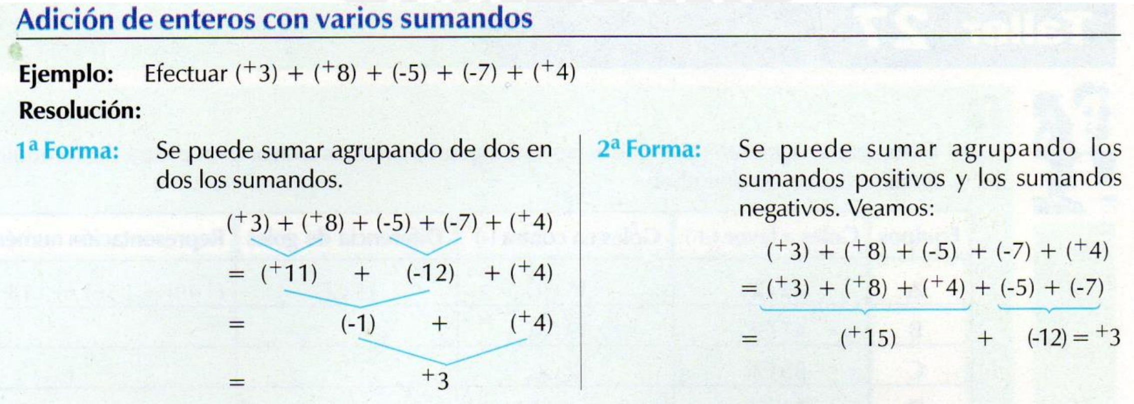
Se parte de la ubicación del primer sumando, (-3) y para sumarle $({}^{+}5)$, nos movemos hacia la derecha 5 unidades, como indica la flecha. El punto final, $^{+}2$, es la suma buscada.

$(-3) + ({}^{+}5)\,) = {}^{+}2$

Figura 4.9 Adición de enteros en la recta numérica (Página 212)

En la figura 4.9 vemos que el autor utiliza este apartado para representar a través de la recta numérica la justificación de la adición de números de distinto signo en la que el primer sumando tiene signo negativo. A través de nuestra práctica profesional consideramos que esta es una de las representaciones más significativas en el aprendizaje de los alumnos. Sin embargo, no debemos olvidar que, tal como dice el título de este apartado, la utilidad del uso de la recta numérica solo es pertinente para la adición de números enteros y no para la sustracción. Consideramos que no sería útil usar este razonamiento para restas de este tipo: (2) – (-5).

Después, el texto presenta el procedimiento para la adición de enteros con varios sumandos:



Adición de enteros con varios sumandos

Ejemplo: Efectuar $({}^{+}3) + ({}^{+}8) + (-5) + (-7) + ({}^{+}4)$

Resolución:

1ª Forma: Se puede sumar agrupando de dos en dos los sumandos.

$$\begin{aligned} &\underbrace{({}^{+}3) + ({}^{+}8)} + \underbrace{(-5) + (-7)} + ({}^{+}4) \\ &= \underbrace{({}^{+}11) \quad + \quad (-12)} \quad + ({}^{+}4) \\ &= \underbrace{(-1) \quad + \quad ({}^{+}4)} \\ &= {}^{+}3 \end{aligned}$$

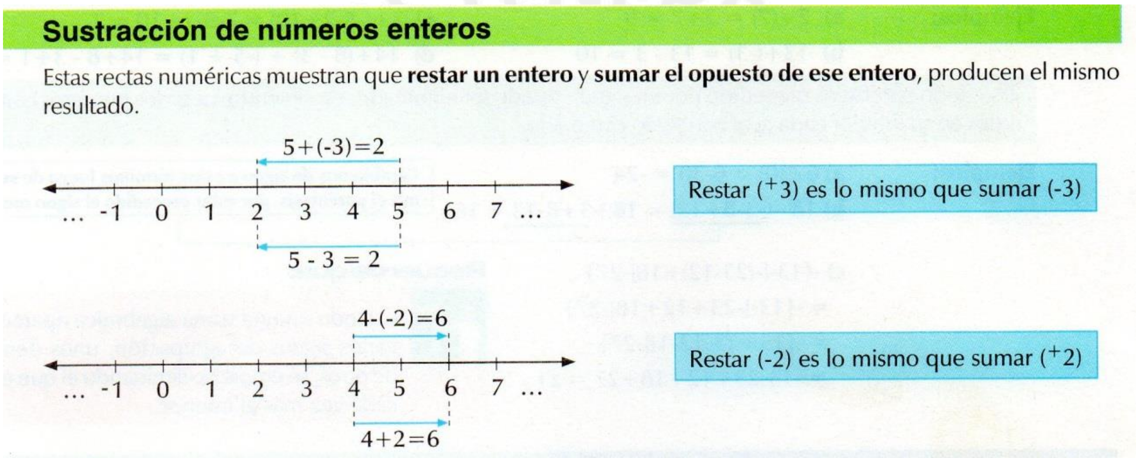
2ª Forma: Se puede sumar agrupando los sumandos positivos y los sumandos negativos. Veamos:

$$\begin{aligned} &({}^{+}3) + ({}^{+}8) + (-5) + (-7) + ({}^{+}4) \\ &= \underbrace{({}^{+}3) + ({}^{+}8) + ({}^{+}4)} + \underbrace{(-5) + (-7)} \\ &= \quad ({}^{+}15) \quad + \quad (-12) = {}^{+}3 \end{aligned}$$

Figura 4.10 Adición de enteros con varios sumandos (Página 213)

En la figura 4.10 observamos una primera aproximación a las operaciones combinadas con números enteros. Es posible utilizar estas dos formas ya que estamos trabajando solo con adición de números enteros, en donde podemos aplicar las propiedades conmutativa y asociativa. Teniendo en cuenta nuestra experiencia profesional, consideramos que sería mucho más pertinente utilizar simplemente la propiedad de las operaciones combinadas en la que se menciona que si tenemos que realizar varias operaciones del mismo rango se resuelve de izquierda a derecha; de este modo se podría evitar que los alumnos cometan errores al resolver operaciones combinadas con varias operaciones utilizando alguna de las dos formas presentadas por el autor para la adición de números enteros.

A continuación mostramos el procedimiento que presenta el autor para realizar la sustracción de números enteros:



Sustracción de números enteros

Estas rectas numéricas muestran que **restar un entero** y **sumar el opuesto de ese entero**, producen el mismo resultado.

$5+(-3)=2$

$5 - 3 = 2$

Restar ($^+3$) es lo mismo que sumar (-3)

$4-(-2)=6$

$4+2=6$

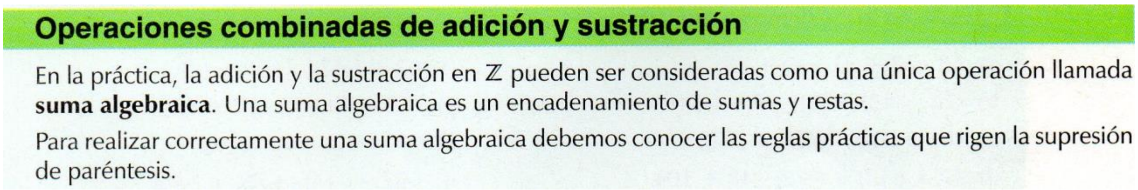
Restar (-2) es lo mismo que sumar ($^+2$)

Figura 4.11 Sustracción de números enteros (Página 217)

En la figura 4.11 el texto relaciona restar un entero con sumar el opuesto de ese entero y para esto se tiene que utilizar una recta numérica. Cabe destacar que es importante que el autor relacione estas nuevas operaciones con la recta numérica ya que, como mencionamos en las páginas anteriores, de este modo se consigue un aprendizaje más significativo. El autor nos sugiere la siguiente regla: Para calcular la diferencia entre dos números enteros, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo. Es decir, para cualquier par de enteros a y b se cumple que a – b = a + (-b) , donde (-b) es el opuesto del sustraendo b.

Creemos importante que ya desde este momento el autor empiece a generalizar algunas reglas utilizando variables ya que, de este modo, se va introduciendo de a pocos el álgebra.

El autor presenta el procedimiento de resolución de operaciones de adición y sustracción de números enteros:



Operaciones combinadas de adición y sustracción

En la práctica, la adición y la sustracción en $\mathbb{Z}$ pueden ser consideradas como una única operación llamada **suma algebraica**. Una suma algebraica es un encadenamiento de sumas y restas.

Para realizar correctamente una suma algebraica debemos conocer las reglas prácticas que rigen la supresión de paréntesis.

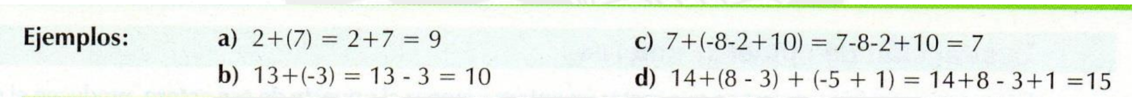
Figura 4.12 Operaciones combinadas de adición y sustracción (Página 217)

En la figura 4.12, el autor explica que tanto la adición como la sustracción pueden ser agrupadas dentro de una misma operación a la cual le llama suma algebraica.

Otra idea importante que plantea el autor es el criterio que hay que seguir para eliminar los signos de agrupación en operaciones combinadas con números enteros.

Las reglas a las que hace mención el autor son las siguientes:

1. Todo paréntesis precedido por un signo + puede ser eliminado, escribiendo luego los números contenidos en su anterior, cada cual con su propio signo. El autor presenta los ejemplos que observamos en la página 4.13.



Ejemplos:

a) 2+(7) = 2+7 = 9

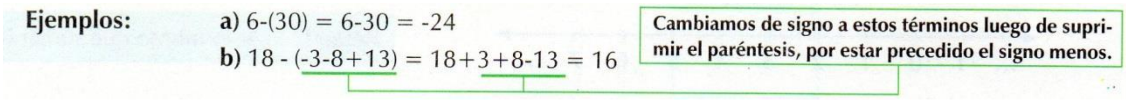
b) 13+(-3) = 13 - 3 = 10

c) 7+(-8-2+10) = 7-8-2+10 = 7

d) 14+(8 - 3) + (-5 + 1) = 14+8 - 3+1 =15

Figura 4.13 Ejemplos (Página 218)

2. Todo paréntesis precedido por un signo + puede ser eliminado, escribiendo luego los números contenidos en su interior cada cual con signo cambiado. El autor presenta los ejemplos que observamos en la figura 4.14.



Ejemplos:

a) 6-(30) = 6-30 = -24

b) 18 - (-3-8+13) = 18+3+8-13 = 16

Cambiamos de signo a estos términos luego de suprimir el paréntesis, por estar precedido el signo menos.

Figura 4.14 Ejemplos (Página 218)

Por último el autor indica que cuando en una suma algebraica aparecen varios signos de agrupación, unos dentro de otros, se empieza eliminando el que está cada vez más al interior.

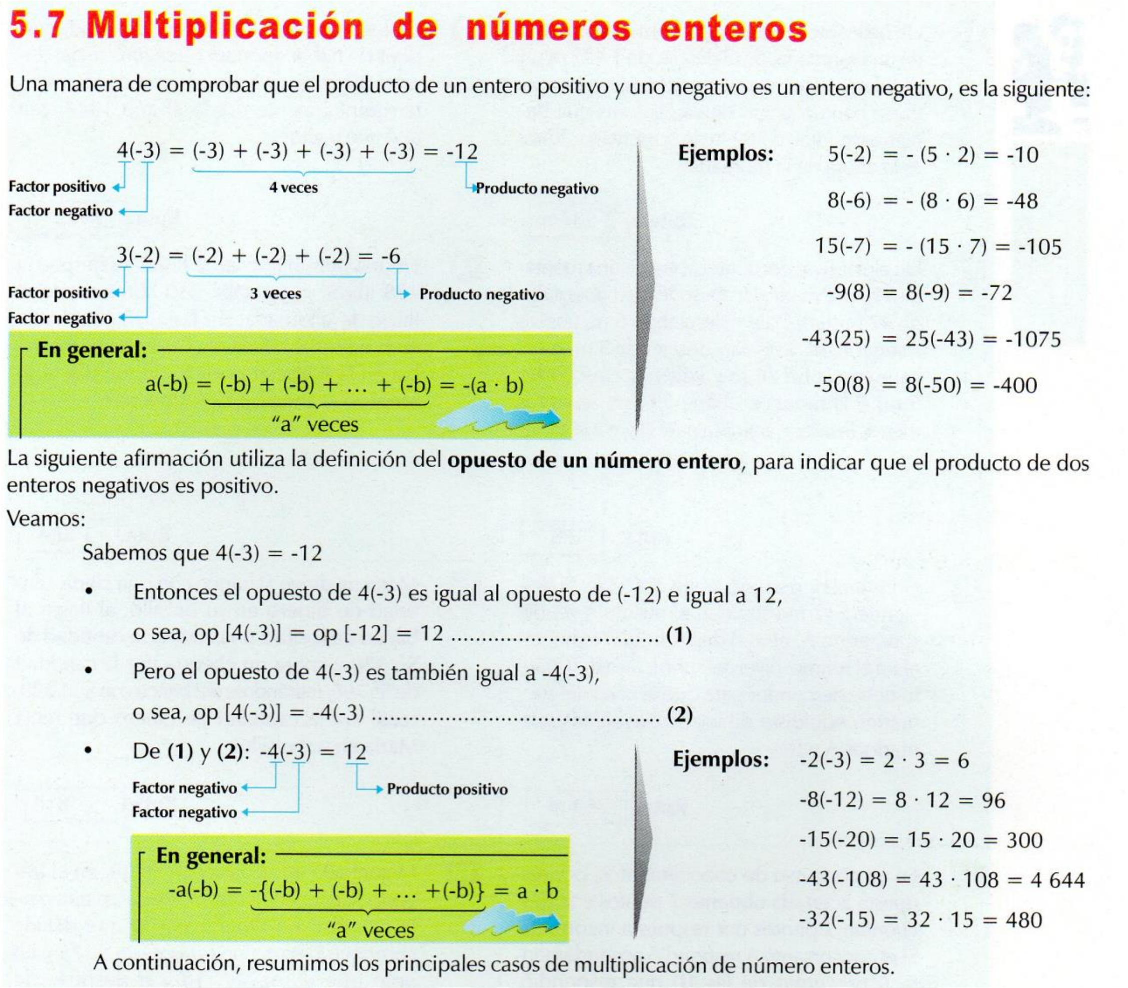
Después de esta teoría, el autor presenta una extensa lista de ejercicios de adición y sustracción de números enteros algunos sin signos de agrupación y otros con signos. Es en esta lista de ejercicios en la que el texto presenta ejercicios como el siguiente:

$$(8 – 4 + 7 - 2) + (-13 + 5 - 7) – (-4 -3 +8)$$

Indicamos esto porque antes, en todos los ejercicios propuestos, los signos tenían un sentido predicativo, por ejemplo: (-4) – (+8), ahora el signo recupera el sentido que tenía cuando se trabajaba con números naturales; es decir, ahora tiene un sentido operativo.

El profesor debe tener un especial cuidado en esta sección ya que, habiendo empezado el capítulo insistiendo en el sentido predictivo que ahora toman los signos + y -, lo que es característico de los números enteros y, al presentar ahora ejercicios en donde los signos mencionados anteriormente representan operaciones, puede provocar errores por parte de los estudiantes.

Después de haber presentado las operaciones combinadas de adición y sustracción, el texto presenta la multiplicación de números enteros del siguiente modo:



5.7 Multiplicación de números enteros

Una manera de comprobar que el producto de un entero positivo y uno negativo es un entero negativo, es la siguiente:

$$4(-3) = \underbrace{(-3) + (-3) + (-3) + (-3)}_{\text{4 veces}} = -12$$

Factor positivo

Factor negativo

Producto negativo

$$3(-2) = \underbrace{(-2) + (-2) + (-2)}_{\text{3 veces}} = -6$$

Factor positivo

Factor negativo

Producto negativo

En general:

$$a(-b) = \underbrace{(-b) + (-b) + \ldots + (-b)}_{\text{“a” veces}} = -(a \cdot b)$$

Ejemplos:

$5(-2) = -(5 \cdot 2) = -10$

$8(-6) = -(8 \cdot 6) = -48$

$15(-7) = -(15 \cdot 7) = -105$

$-9(8) = 8(-9) = -72$

$-43(25) = 25(-43) = -1075$

$-50(8) = 8(-50) = -400$

La siguiente afirmación utiliza la definición del **opuesto de un número entero**, para indicar que el producto de dos enteros negativos es positivo.

Veamos:

Sabemos que $4(-3) = -12$

- Entonces el opuesto de $4(-3)$ es igual al opuesto de (-12) e igual a 12, o sea, op $[4(-3)]$ = op $[-12] = 12$ .... **(1)**
- Pero el opuesto de $4(-3)$ es también igual a $-4(-3)$, o sea, op $[4(-3)] = -4(-3)$ .... **(2)**
- De **(1)** y **(2)**: $-4(-3) = 12$

Factor negativo

Factor negativo

Producto positivo

En general:

$$-a(-b) = -\underbrace{\{(-b) + (-b) + \ldots + (-b)\}}_{\text{“a” veces}} = a \cdot b$$

Ejemplos:

$-2(-3) = 2 \cdot 3 = 6$

$-8(-12) = 8 \cdot 12 = 96$

$-15(-20) = 15 \cdot 20 = 300$

$-43(-108) = 43 \cdot 108 = 4\ 644$

$-32(-15) = 32 \cdot 15 = 480$

A continuación, resumimos los principales casos de multiplicación de número enteros.

Figura 4.15 Multiplicación de números enteros (Página 226)

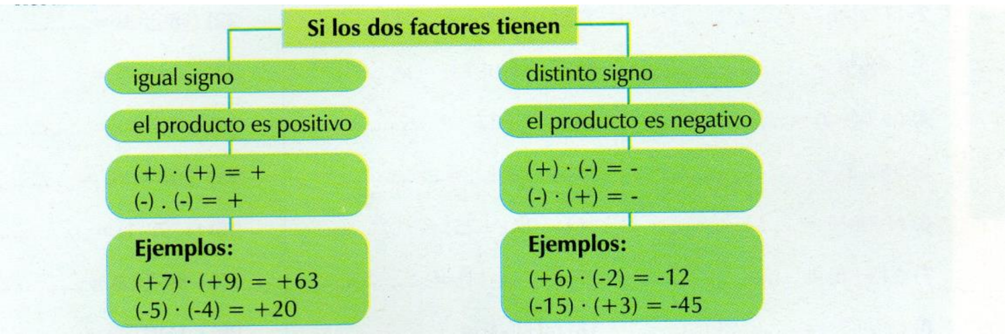
En la figura 4.15, el autor trata de justificar de forma detallada las reglas de los signos en la multiplicación de números enteros, incluso la idea de que la multiplicación de dos números negativos nos da un número positivo.

Para comprobar que el producto de un entero positivo por uno negativo es un entero negativo utiliza la idea que tienen los alumnos de multiplicación de dos números naturales. En nuestra práctica profesional hemos observado que esta forma de explicar es muy asequible para los estudiantes ya que extienden un procedimiento ya conocido en este nuevo conjunto numérico. Después de su explicación el autor generaliza esta justificación utilizando variables para luego presentar seis ejemplos del mismo tipo.

Para explicar que la multiplicación de dos números enteros negativos nos da un número entero positivo utiliza la idea de opuesto de un número entero. Esto se debe a que, en este caso, no tendría sentido extender la idea de multiplicación que utilizan los estudiantes cuando trabajan con números naturales ya que, por ejemplo, no tendría sentido sumar un número “- a” veces.

En el ejemplo que utiliza: -4(-3) = 12, notamos que la explicación es coherente y de fácil entendimiento por parte de los alumnos; sin embargo, consideramos que el autor comete un error al generalizar este resultado utilizando la idea de multiplicación de los números naturales, ya que la idea que se utilizó fue la de opuesto de un número.

Por último, el autor resume lo aprendido en el siguiente esquema:



Si los dos factores tienen

igual signo

el producto es positivo

(+) · (+) = +
(-) . (-) = +

Ejemplos:
(+7) · (+9) = +63
(-5) · (-4) = +20

distinto signo

el producto es negativo

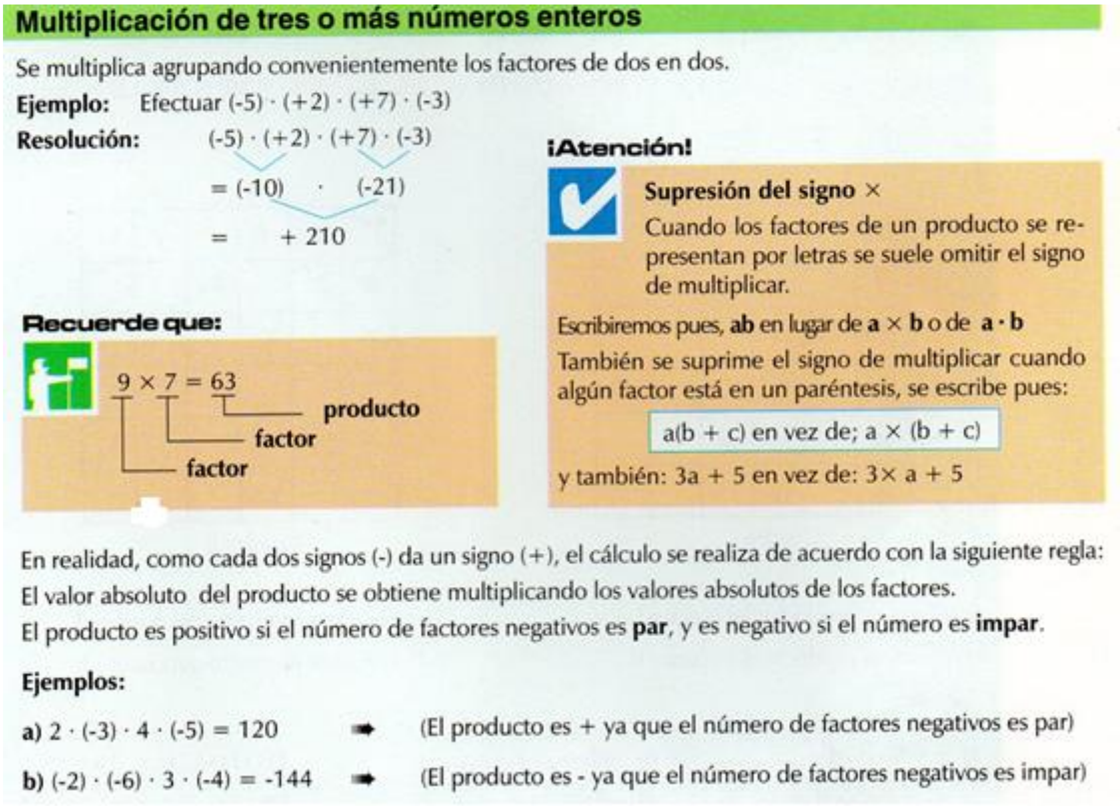
(+) · (-) = -
(-) · (+) = -

Ejemplos:
(+6) · (-2) = -12
(-15) · (+3) = -45

Figura 4.16 Regla de los signos (Página 227)

En la figura 4.16 el que el autor resume y organiza la regla de signos de la multiplicación de los números enteros.

Después de presentar la regla de los signos para la multiplicación, el texto presenta la multiplicación de tres o más números enteros.



Multiplicación de tres o más números enteros

Se multiplica agrupando convenientemente los factores de dos en dos.

Ejemplo: Efectuar (-5) · (+2) · (+7) · (-3)

Resolución: (-5) · (+2) · (+7) · (-3)

= (-10) · (-21)

= + 210

Recuerde que:

9 × 7 = 63

producto

factor

factor

¡Atención!

Supresión del signo ×

Cuando los factores de un producto se representan por letras se suele omitir el signo de multiplicar.

Escribiremos pues, **ab** en lugar de **a** × **b** o de **a · b**

También se suprime el signo de multiplicar cuando algún factor está en un paréntesis, se escribe pues:

a(b + c) en vez de; a × (b + c)

y también: 3a + 5 en vez de: 3× a + 5

En realidad, como cada dos signos (-) da un signo (+), el cálculo se realiza de acuerdo con la siguiente regla:

El valor absoluto del producto se obtiene multiplicando los valores absolutos de los factores.

El producto es positivo si el número de factores negativos es **par**, y es negativo si el número es **impar**.

Ejemplos:

a) 2 · (-3) · 4 · (-5) = 120 ➡ (El producto es + ya que el número de factores negativos es par)

b) (-2) · (-6) · 3 · (-4) = -144 ➡ (El producto es - ya que el número de factores negativos es impar)

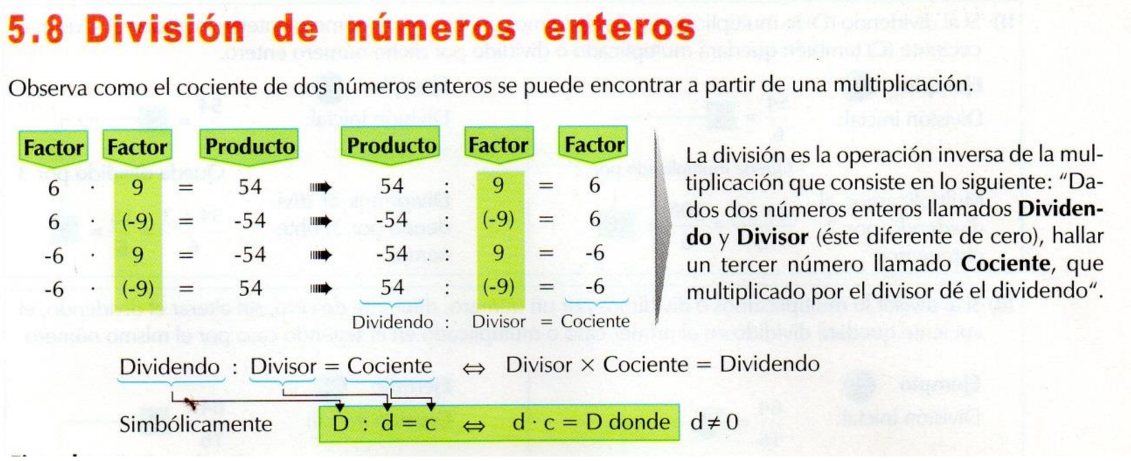
Figura 4.17 Multiplicación de tres o más números enteros (Página 227)

Destacamos que en la figura 4.17 el autor introduce el signo . como símbolo equivalente de x para la multiplicación de variables (letras). Al final da una regla práctica sobre como hallar el resultado cuando se multiplican más de dos números enteros.

Queremos hacer mención que en la nota del libro sobre la supresión del signo x, el autor señala que cuando haya una multiplicación, se escribirá ab en vez de a x b ó a . b. En nuestra opinión, aquí se debió explicar que esto es posible ya que se están multiplicando variables simbolizadas por letras; si estuviésemos multiplicando dos números no podemos omitir los signos x ó . utilizados para la esta operación.

A continuación el autor presenta un taller de ejercicios mostrando una larga serie de ejercicios del mismo tipo sobre la multiplicación de números enteros: (+2)x(-3)= …

Después de esto, el texto presenta la división de números enteros.



5.8 División de números enteros

Observa como el cociente de dos números enteros se puede encontrar a partir de una multiplicación.

Factor		Factor		Producto		Producto		Factor		Factor
6	·	9	=	54	➡	54	:	9	=	6
6	·	(-9)	=	-54	➡	-54	:	(-9)	=	6
-6	·	9	=	-54	➡	-54	:	9	=	-6
-6	·	(-9)	=	54	➡	54	:	(-9)	=	-6
						Dividendo	:	Divisor	=	Cociente

La división es la operación inversa de la multiplicación que consiste en lo siguiente: "Dados dos números enteros llamados **Dividendo** y **Divisor** (éste diferente de cero), hallar un tercer número llamado **Cociente**, que multiplicado por el divisor dé el dividendo".

Dividendo : Divisor = Cociente ⇔ Divisor × Cociente = Dividendo

Simbólicamente $D : d = c \Leftrightarrow d \cdot c = D$ donde $d \neq 0$

Figura 4.18 División de números enteros (Página 231)

En la figura 4.18 el autor explica la idea de división de dos números enteros haciendo uso de la idea de multiplicación. Primero muestra cuatro ejemplos en los que va a recordar los términos de dividendo, divisor y cociente.

Después, muestra cinco ejemplos más del mismo tipo de los mencionados anteriormente para finalmente enunciar la regla de los signos para la división del siguiente modo:

Regla de los signos

(+) : (+) = +

(-) : (-) = +

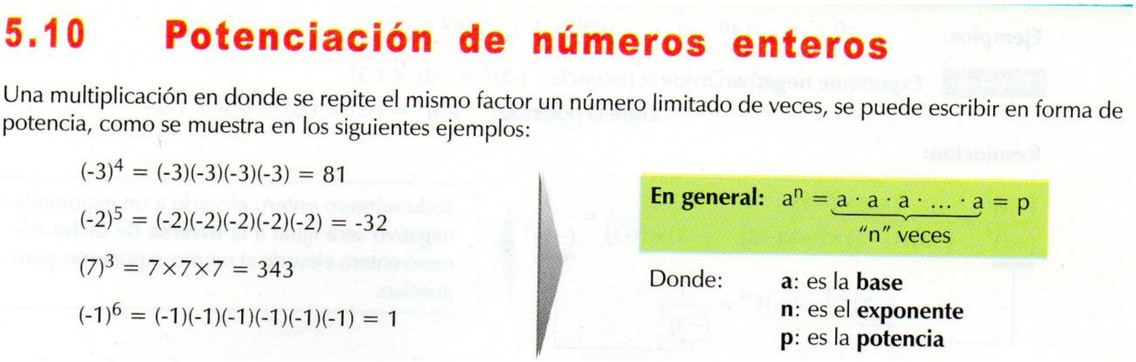
(+) : (-) = -

(-) : (+) = -

Entendemos que el autor trata de justificar esta regla a partir de los ejercicios presentados anteriormente. Sin embargo, consideramos que una justificación no puede estar basada en ejemplos particulares.

Además el autor hace la observación que la división de un número por cero no está definida.

Después, el autor recuerda lo aprendido sobre la división exacta y la división inexacta. También presenta el algoritmo de la división. Para resolver los ejercicios de división de números enteros el autor utiliza directamente la regla de signos que hemos presentado anteriormente.



5.10 Potenciación de números enteros

Una multiplicación en donde se repite el mismo factor un número limitado de veces, se puede escribir en forma de potencia, como se muestra en los siguientes ejemplos:

$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$

$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

$(7)^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$

$(-1)^6 = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = 1$

En general: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{“n” veces}} = p$

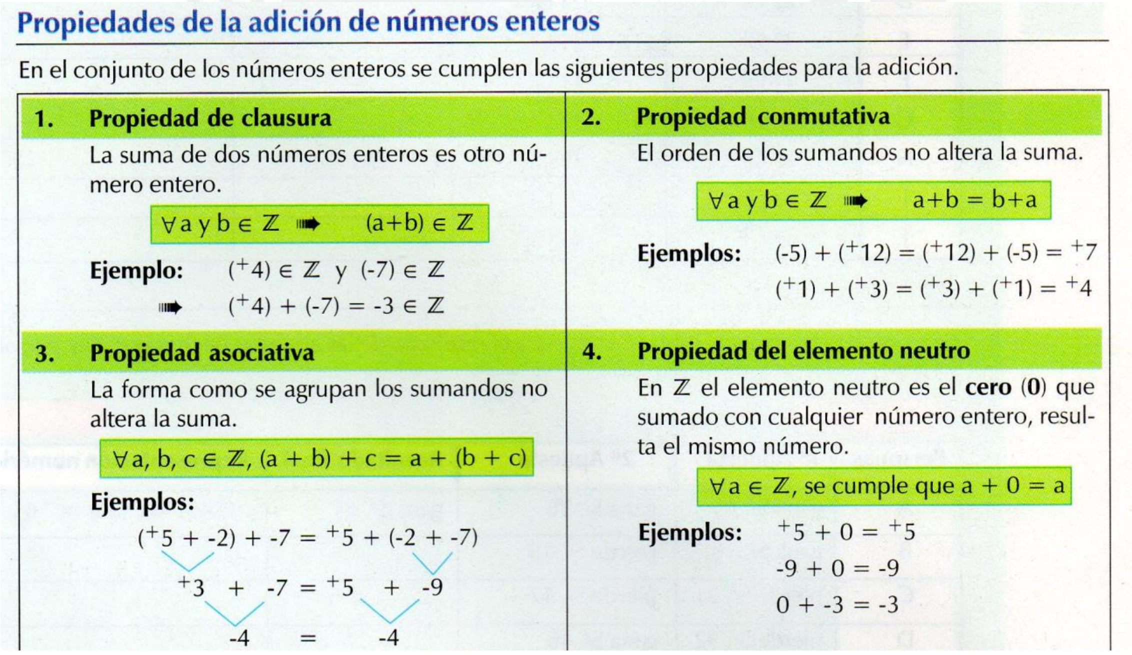
Donde:
a: es la **base**
n: es el **exponente**
p: es la **potencia**

Figura 4.19 Potenciación de números enteros (Página 239)

En la figura 4.19 el autor presenta la potenciación de números enteros, dando una forma general y nombrando los elementos de esta operación. Como vemos en el escaneo, el autor no contempla la posibilidad de que el exponente sea negativo.

4.3.4 SEGÚN EL CRITERIO 5: JUSTIFICACIÓN DE LAS PROPIEDADES

A continuación mostramos parte de la tabla presentada por el texto sobre las propiedades de la adición de números enteros.



Propiedades de la adición de números enteros

En el conjunto de los números enteros se cumplen las siguientes propiedades para la adición.

1. Propiedad de clausura

La suma de dos números enteros es otro número entero.

$\forall a \text{ y } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{Z}$

Ejemplo: $(^{+}4) \in \mathbb{Z}$ y $(-7) \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow (^{+}4) + (-7) = -3 \in \mathbb{Z}$

2. Propiedad conmutativa

El orden de los sumandos no altera la suma.

$\forall a \text{ y } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+b = b+a$

Ejemplos: $(-5) + (^{+}12) = (^{+}12) + (-5) = {}^{+}7$
$(^{+}1) + (^{+}3) = (^{+}3) + (^{+}1) = {}^{+}4$

3. Propiedad asociativa

La forma como se agrupan los sumandos no altera la suma.

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a + b) + c = a + (b + c)$

Ejemplos:

$(^{+}5 + -2) + -7 = {}^{+}5 + (-2 + -7)$

${}^{+}3 + -7 = {}^{+}5 + -9$

$-4 = -4$

4. Propiedad del elemento neutro

En $\mathbb{Z}$ el elemento neutro es el **cero** (**0**) que sumado con cualquier número entero, resulta el mismo número.

$\forall a \in \mathbb{Z}$, se cumple que $a + 0 = a$

Ejemplos: ${}^{+}5 + 0 = {}^{+}5$
$-9 + 0 = -9$
$0 + -3 = -3$

Figura 4.20 Propiedades de la adición de números enteros (Página 213)

En la figura 4.20, el autor presenta las propiedades de una manera formal seguida de ejemplos. El texto no presenta justificaciones de las propiedades, sino que las enuncia, las generaliza utilizando variables y presenta un par de ejemplos en cada caso.

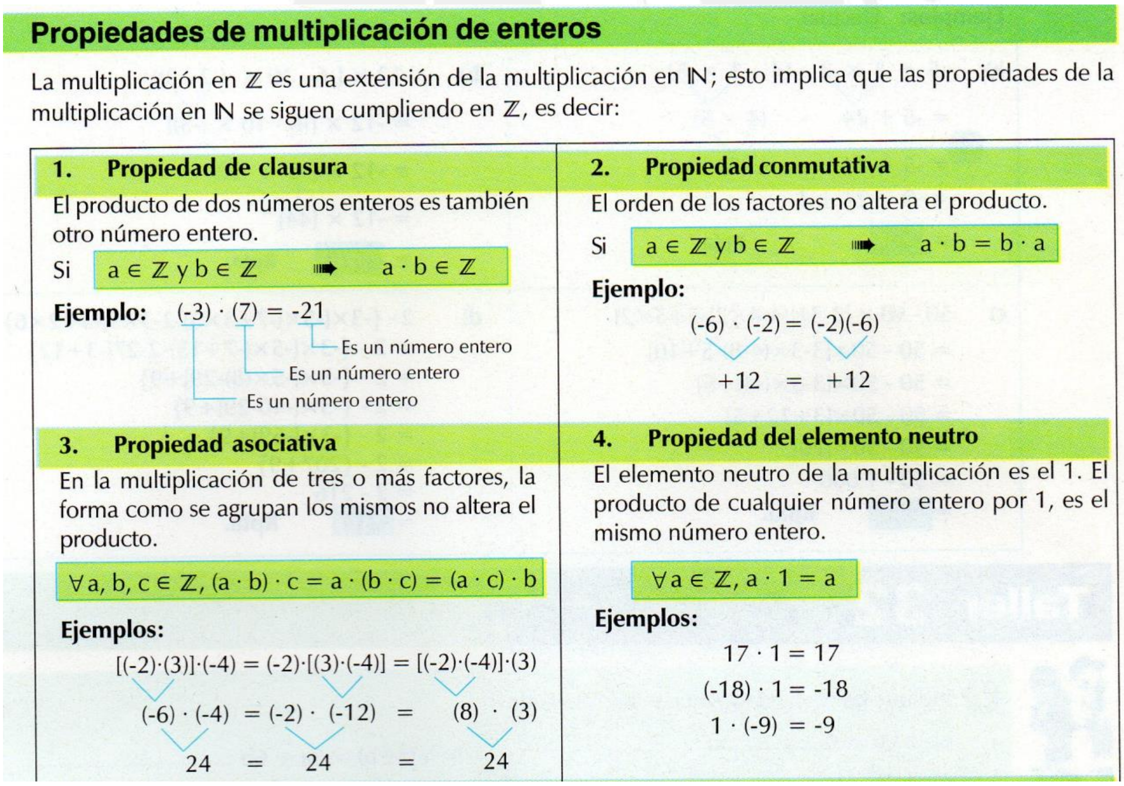
Observamos que el modo en el que el autor presenta las propiedades es una primera aproximación al uso de variables para generalizar los resultados de operaciones con números enteros. También presenta, del mismo modo, las justificaciones de las propiedades del inverso aditivo o elemento opuesto, la propiedad aditiva y de la propiedad cancelativa.

Estas dos últimas propiedades son de mucha importancia para la solución de ecuaciones. En la propiedad aditiva se nos indica lo siguiente si $x = a \rightarrow x + n = a + n$, y luego presenta un ejemplo.

En la propiedad cancelativa, el autor indica: Si $x + c = b + c \rightarrow x = b$, luego presenta dos ejemplos.

Seguido a esto, se presenta una serie de ejercicios en las que el autor pretende afianzar lo aprendido. Los ejercicios son del siguiente modo:

Modelos concretos de la misma naturaleza que los utilizados para explicar la adición de números entero (ganancias y pérdidas), hallar sumas y restas utilizando la recta numérica y mencionar qué propiedades fueron utilizadas en unos ejercicios dados. Por último el autor presenta una extensa lista de ejercicios, todos de la misma forma, en los que hay que hallar sumas y restas de números enteros.



Propiedades de multiplicación de enteros

La multiplicación en ℤ es una extensión de la multiplicación en ℕ; esto implica que las propiedades de la multiplicación en ℕ se siguen cumpliendo en ℤ, es decir:

1. Propiedad de clausura

El producto de dos números enteros es también otro número entero.

Si $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ ➠ $a \cdot b \in \mathbb{Z}$

Ejemplo: $(-3) \cdot (7) = -21$

Es un número entero

Es un número entero

Es un número entero

2. Propiedad conmutativa

El orden de los factores no altera el producto.

Si $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ ➠ $a \cdot b = b \cdot a$

Ejemplo:

$(-6) \cdot (-2) = (-2)(-6)$

$+12 = +12$

3. Propiedad asociativa

En la multiplicación de tres o más factores, la forma como se agrupan los mismos no altera el producto.

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot c) \cdot b$

Ejemplos:

$[(-2)\cdot(3)]\cdot(-4) = (-2)\cdot[(3)\cdot(-4)] = [(-2)\cdot(-4)]\cdot(3)$

$(-6) \cdot (-4) = (-2) \cdot (-12) = (8) \cdot (3)$

$24 = 24 = 24$

4. Propiedad del elemento neutro

El elemento neutro de la multiplicación es el 1. El producto de cualquier número entero por 1, es el mismo número entero.

$\forall a \in \mathbb{Z}, a \cdot 1 = a$

Ejemplos:

$17 \cdot 1 = 17$

$(-18) \cdot 1 = -18$

$1 \cdot (-9) = -9$

Figura 4.21 Propiedades de multiplicación de enteros (Página 229)

En la figura 4.21 el autor presenta una relación de propiedades que se cumplen en la multiplicación de números enteros: formaliza utilizando variables y coloca algunos ejemplos.

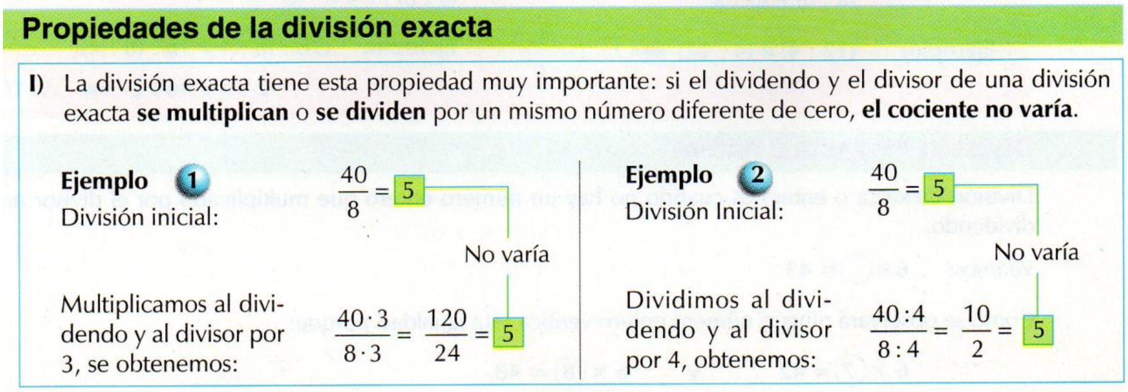
Del mismo modo presenta las propiedades: multiplicativa del cero o del elemento absorbente, distributiva, multiplicativa y de cancelación. Creemos importante explicar cómo el autor presenta las dos últimas propiedades ya que serán utilizadas para la solución de ecuaciones.

En la propiedad multiplicativa se presenta: Si x = a → n . x = n . a , luego el autor presenta dos ejemplos. En la propiedad de cancelación se indica: a . x = a . b → x = b , a ≠0. Y también presenta dos ejemplos.

Después de todas estas propiedades el autor presenta un orden para resolver operaciones combinadas de adición, sustracción y multiplicación en Z. El orden que presenta es el siguiente:

1. Se efectúan las operaciones indicadas dentro de los símbolos de agrupación de adentro hacia afuera.
2. Se efectúan los productos.
3. Se efectúan las adiciones y sustracciones.

A continuación presenta una relación de ejercicios resueltos y propuestos, todos del mismo tipo, en donde deben aplicar el orden mencionado anteriormente para resolver las operaciones combinadas.



Propiedades de la división exacta

I) La división exacta tiene esta propiedad muy importante: si el dividendo y el divisor de una división exacta **se multiplican** o **se dividen** por un mismo número diferente de cero, **el cociente no varía**.

Ejemplo ①

División inicial: $\frac{40}{8} = \boxed{5}$

No varía

Multiplicamos al dividendo y al divisor por 3, se obtenemos: $\frac{40\cdot 3}{8\cdot 3} = \frac{120}{24} = \boxed{5}$

Ejemplo ②

División Inicial: $\frac{40}{8} = \boxed{5}$

No varía

Dividimos al dividendo y al divisor por 4, obtenemos: $\frac{40:4}{8:4} = \frac{10}{2} = \boxed{5}$

Figura 4.22 Propiedades de la división exacta (Página 231)

En la figura 4.22 el texto presenta una lista de propiedades de la división exacta:

II. Si al dividendo lo multiplicamos o lo dividimos por cualquier número entero sin alterar al divisor, el cociente también quedará multiplicado o dividido por dicho número entero.

III. Si al divisor lo multiplicamos o dividimos por un número, diferente de cero, sin alterar el dividendo, el cociente quedará dividido en el primer caso o multiplicado en el segundo caso por el mismo número.

IV. Propiedad distributiva: El cociente de dividir una suma indicada de varios números enteros entre un divisor diferente de cero es igual a la suma de los cocientes de cada sumando entre el mismo divisor.

V. Propiedad del elemento neutro: Es el uno como divisor. El cociente de dividir cualquier número entero entre uno es el mismo número.

VI. Propiedad del elemento absorbente: Es el cero como dividendo. El cociente de dividir cero entre cualquier número diferente de cero, siempre es cero.

El autor también deja en claro que la división no es conmutativa ni asociativa.

También se presentan dos propiedades para la división inexacta:

I. Si se multiplica el dividendo y el divisor por un mismo número diferente de cero, el cociente no varía, pero el resto queda multiplicado por ese mismo número.

II. Si se dividen el dividendo y el divisor por un mismo número diferente de cero, el cociente no varía, pero el resto queda dividido por dicho número.

El autor presenta un ejemplo para cada una de las propiedades mencionadas anteriormente.

Luego se presenta una larga lista de ejercicios en la que hay que aplicar la regla de signos para la división de números enteros y operaciones combinadas.

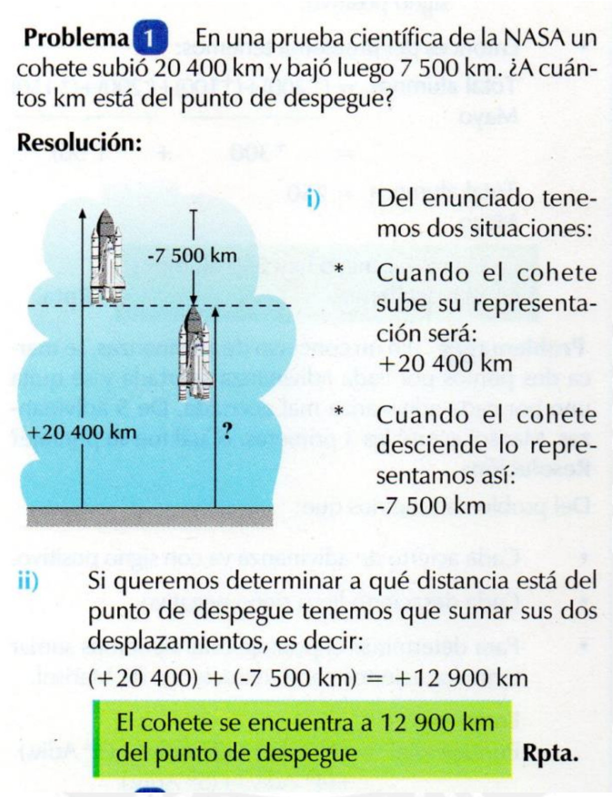
4.3.5 SEGÚN EL CRITERIO 6: PROBLEMAS

En esta investigación, consideramos problema a una situación presentada en un contexto extramatemático y que necesite aplicar la teoría y propiedades de los números enteros para su resolución.

Presentamos ahora el análisis de cuatro problemas que son los más representativos por englobar a todos los demás problemas del capítulo. Esperamos que sean problemas que no se puedan resolver solo conociendo el conjunto de los números naturales si no que hagan que sea necesario ampliar el conjunto numérico conocido hasta el momento.

A continuación mostramos el primer problema de esta sección a manera de ejemplo, luego citaremos otros problemas representativos presentados en el texto.

5.6 Problemas que se resuelven mediante la adición y sustracción de números enteros



Problema 1 En una prueba científica de la NASA un cohete subió 20 400 km y bajó luego 7 500 km. ¿A cuántos km está del punto de despegue?

Resolución:

i) Del enunciado tenemos dos situaciones:

* Cuando el cohete sube su representación será: +20 400 km

* Cuando el cohete desciende lo representamos así: -7 500 km

ii) Si queremos determinar a qué distancia está del punto de despegue tenemos que sumar sus dos desplazamientos, es decir:

(+20 400) + (-7 500 km) = +12 900 km

El cohete se encuentra a 12 900 km del punto de despegue **Rpta.**

Figura 4.23 Enunciado de problema (Página 221)

En el problema que podemos apreciar en la figura 4.23 vemos que detrás del signo negativo está la idea de pérdida y no de posición respecto a un punto de referencia como podría pensarse al considerar que el contexto es de distancias.

Consideramos que no es un problema adecuado para que los alumnos interioricen la idea de número entero ya que los alumnos podrían llegar a la solución utilizando la resta 20 400 – 7 500 y obtendrían la respuesta correcta sin hacer uso de números enteros.

Otro problema que presenta el autor es el siguiente: “Al realizar un trabajo de investigación con osos polares muertos, un grupo de científicos cogió uno de ellos y comprobó que tenía una temperatura de -5 °C y luego de inyectarle una cierta sustancia su temperatura subió 38 °C. ¿Cuál es la temperatura final del oso polar?”

El autor lo resuelve del siguiente modo:

i) La temperatura inicial del oso fue: -5 °C
ii) La temperatura después de la inyección al oso sube: +38 °C
iii) Su temperatura final será la suma de ambas temperaturas:
(-5 °C) + (+38 °C) = +33 °C

La temperatura final del oso es de +33 °C.

El autor ha presentado un problema en donde se debe aplicar necesariamente las propiedades aprendidas sobre los números enteros. Detrás de este problema está la idea del signo negativo como ubicación respecto a un punto de referencia.

Otro problema que presenta el autor es el siguiente: "Si Nayeli sale de su casa y camina 8 cuadras hacia el norte y luego 9 cuadras hacia el sur, ¿a qué distancia de su casa se encuentra?"

El autor lo resuelve de la siguiente manera:

Consideremos los avances hacia el norte como positivos, y hacia el sur como negativos. Entonces:

i) Si Nayeli se dirige al norte quiere decir que avanzó 8 cuadras, es decir: +8 C
ii) Cuando Nayeli camina a sur está retrocediendo 9 cuadras, puesto que el sur está opuesto al norte, o sea: -9 C
iii) Para saber a qué distancia está de su casa habrá que sumar ambas cantidades:
(+8 C) + (-9 C) = -1 C

Respuesta: Se encuentra a una cuadra de su casa.

Creemos que este problema no es pertinente para desarrollar en los alumnos la idea de número entero ni sus propiedades. En primer lugar, si la pregunta es referida a una distancia, la respuesta siempre va a ser positiva. En segundo lugar, exige que el alumno razone de modo que ubique los avances hacia el norte como positivos y los del sur como negativos; sin embargo, no tendría que ser necesariamente así. Enfatizamos que, en este ejemplo, el uso del signo es prescindible, ya que como la respuesta es una distancia respecto al origen siempre se puede hacer que la respuesta sea positiva. En tercer lugar, la notación que utiliza no facilita el entendimiento por parte del alumno. El autor en ningún momento explica que significa la letra C que escribe en la resolución. Nosotros suponemos que significa cuadras.

Luego de haber afianzado la técnica de resolución de problemas se presentan una serie de modelos concretos, en particular, problemas resueltos y propuestos sobre resolución de ecuaciones de primer grado.

Luego, el autor presenta el siguiente problema: "Un cangrejo avanza hacia el norte 20 pasos, retrocede hacia el sur 8 pasos, vuelve a avanzar 6 pasos y finalmente retrocede 5 pasos. Averiguar:

i) ¿Cuántos pasos dio en total este cangrejo?

ii) ¿A cuántos pasos se encuentra del punto de partida, y en qué sentido?”

Resolución del autor:

i) Como nos preguntan cuántos pasos da en total el cangrejo, sólo hay que sumar todos ellos, so tomar en cuenta el avance o el retroceso, es decir: 20 + 8 + 6 + 5 = 39 Respuesta: El cangrejo da 39 pasos.

ii) Para hallar a cuántos pasos se encuentra del punto de partida, consideramos a los pasos que avanza como positivos y a los pasos que retrocede como negativos, luego: (+20) + (-8) + (+6) + (-5) = +13

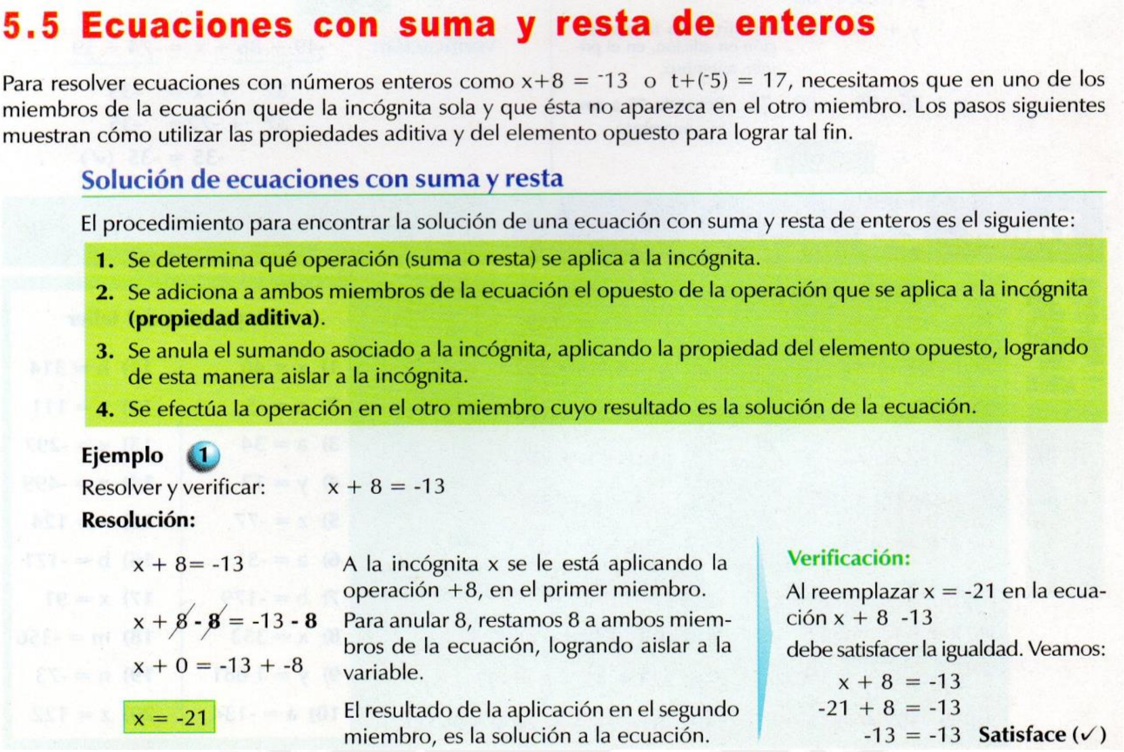
Este problema nos parece muy interesante ya que permite que el alumno identifique cuando es necesario otorgarle un signo a una determinada magnitud. En los dos cálculos se trata de los mismos valores absolutos; sin embargo, en un caso no es necesario darles un signo y en el segundo sí.

Como conclusión de lo discutido, se tiene que muchas veces los problemas contextualizados que se presentan a los alumnos para justificar la necesidad de usar los números negativos suelen tener una resolución perfectamente válida en el campo de los números naturales. Desde nuestra perspectiva esto es contraproducente ya que puede crear la idea de inutilidad de este nuevo conjunto numérico en los estudiantes.

4.3.6 SEGÚN EL CRITERIO 7: RELACIÓN CON EL ÁLGEBRA

Al analizar la organización matemática del capítulo referido a los números enteros del libro nos damos cuenta que el álgebra no forma parte de la justificación por la cual aparece este nuevo conjunto numérico, sino que es una aplicación del conocimiento aprendido.

A continuación mostramos la sección correspondiente a las ecuaciones y la adición y sustracción de números enteros.



5.5 Ecuaciones con suma y resta de enteros

Para resolver ecuaciones con números enteros como $x+8 = {}^{-}13$ o $t+({}^{-}5) = 17$, necesitamos que en uno de los miembros de la ecuación quede la incógnita sola y que ésta no aparezca en el otro miembro. Los pasos siguientes muestran cómo utilizar las propiedades aditiva y del elemento opuesto para lograr tal fin.

Solución de ecuaciones con suma y resta

El procedimiento para encontrar la solución de una ecuación con suma y resta de enteros es el siguiente:

1. Se determina qué operación (suma o resta) se aplica a la incógnita.
2. Se adiciona a ambos miembros de la ecuación el opuesto de la operación que se aplica a la incógnita **(propiedad aditiva)**.
3. Se anula el sumando asociado a la incógnita, aplicando la propiedad del elemento opuesto, logrando de esta manera aislar a la incógnita.
4. Se efectúa la operación en el otro miembro cuyo resultado es la solución de la ecuación.

Ejemplo ①

Resolver y verificar: $x + 8 = -13$

Resolución:

$x + 8 = -13$ A la incógnita x se le está aplicando la operación +8, en el primer miembro.

$x + \cancel{8}\ \mathbf{-}\ \cancel{\mathbf{8}} = -13\ \mathbf{-\ 8}$ Para anular 8, restamos 8 a ambos miembros de la ecuación, logrando aislar a la variable.

$x + 0 = -13 + -8$

$\boxed{x = -21}$ El resultado de la aplicación en el segundo miembro, es la solución a la ecuación.

Verificación:

Al reemplazar $x = -21$ en la ecuación $x + 8\ \ -13$ debe satisfacer la igualdad. Veamos:

$x + 8 = -13$

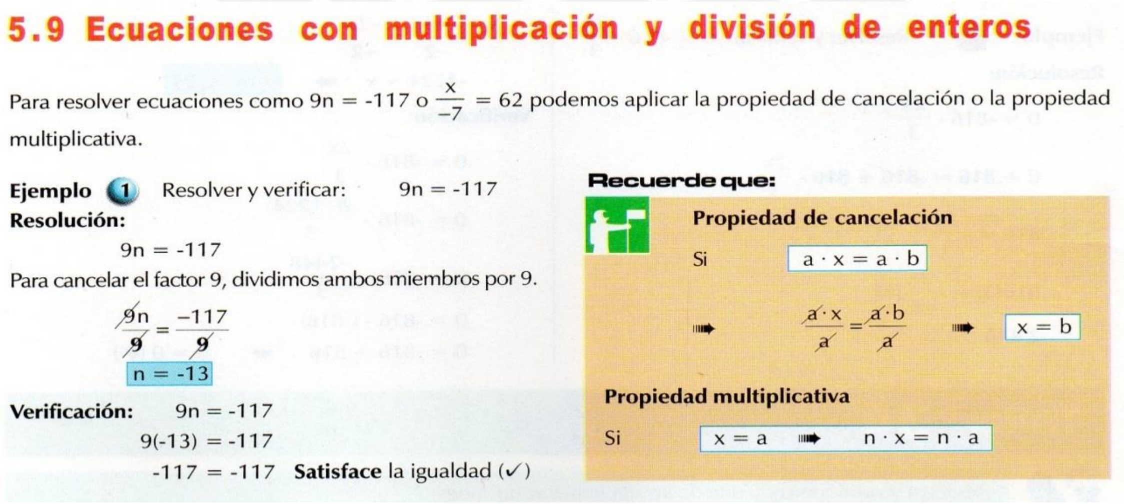
$-21 + 8 = -13$

$-13 = -13$ **Satisface** (✓)

Figura 4.24 Ecuaciones con suma y resta de enteros (Página 219)

En la figura 4.24, el autor establece una relación entre los números enteros y el álgebra. Y ésta se da para resolver ecuaciones. El autor establece unas propiedades para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita del tipo x + a = b.

A continuación, se presentan una serie de ejercicios resueltos y propuestos con la finalidad de afianzar la técnica mencionada en el texto para resolver ecuaciones.



5.9 Ecuaciones con multiplicación y división de enteros

Para resolver ecuaciones como $9n = -117$ o $\frac{x}{-7} = 62$ podemos aplicar la propiedad de cancelación o la propiedad multiplicativa.

Ejemplo ① Resolver y verificar: $9n = -117$

Resolución:

$9n = -117$

Para cancelar el factor 9, dividimos ambos miembros por 9.

$\frac{\cancel{9}n}{\cancel{9}} = \frac{-117}{\cancel{9}}$

$\boxed{n = -13}$

Verificación: $9n = -117$

$9(-13) = -117$

$-117 = -117$ **Satisface** la igualdad (✓)

Recuerde que:

Propiedad de cancelación

Si $\boxed{a \cdot x = a \cdot b}$ ➠ $\frac{\cancel{a}\cdot x}{\cancel{a}} = \frac{\cancel{a}\cdot b}{\cancel{a}}$ ➠ $\boxed{x = b}$

Propiedad multiplicativa

Si $\boxed{x = a \Rightarrow n \cdot x = n \cdot a}$

Figura 4.25 Ecuaciones con multiplicación y división de enteros (Página 235)

En la figura 4.25 el autor utiliza el álgebra para aplicar la multiplicación y división de números enteros. Propone una serie de ecuaciones, como la del ejemplo, para afianzar la técnica aprendida.

Además, se da unas propiedades que luego podrán ser aplicadas directamente en la solución de ecuaciones: la de cancelación y multiplicativa. Sin embargo, debemos dejar en claro que la propiedad de cancelación que expresa el autor no es una propiedad válida siempre en el conjunto de los números enteros, en general es válida en los números racionales.

Después de esto, el autor propone una lista de ecuaciones similares al ejemplo anterior para que los alumnos practiquen lo aprendido.

4.4 COMPARACIÓN DE LA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DE LOS CAPÍTULOS REFERIDOS A LOS NÚMEROS ENTEROS EN LOS LIBROS DE SEXTO DE PRIMARIA Y DE PRIMERO DE SECUNDARIA SEGÚN LOS CRITERIOS UTILIZADOS EN NUESTRO ANÁLISIS.

En la siguiente tabla mostramos, a manera de resumen, los criterios con los que hemos analizado los libros de texto y lo que hemos encontrado en los libros de sexto de primaria y primer año de secundaria.

Criterio	Libro de sexto grado	Libro de primer año
1. Inicio del capítulo	Con una pregunta: ¿Cuánto es 8 - 9? Luego expresa esta pregunta del siguiente modo: 8 – 9 = x, para después indicar que esa ecuación es equivalente a esta x + 9 = 8.	Con una pregunta: ¿Qué número sumado con 5 resulta 2? Después plantea la ecuación x + 5 = 2, para dar inmediatamente la respuesta: -3.
2. Justificación de la aparición de los números enteros.	Los números enteros surgen ante la necesidad de resolver ecuaciones como la que se mostró al inicio del capítulo.	Los números enteros surgen ante la necesidad de dar respuesta a modelos concretos: Para indicar una temperatura menor que cero, pérdida en un negocio, profundidad bajo el nivel del mar.

3. Diferentes significados del signo negativo.	El signo negativo está asociado a pérdidas y a posición respecto a un punto de referencia.	El signo negativo tiene los significados de pérdida y punto de referencia respecto a un origen.
4. Aparición de la teoría.	Al inicio de cada apartado. Luego presentará ejercicios y problemas.	Al inicio de cada apartado, después algunos ejercicios resueltos y una larga lista de ejercicios para reforzar la técnica aprendida.
5. Justificación de las propiedades.	No justifica las propiedades. Solo las enuncia y presenta ejemplos.	No justifica las propiedades. Solo las enuncia y presenta ejemplos
6. Problemas.	Pocos problemas y son referidos a temperaturas y a descender o ascender, haciendo más énfasis en el segundo caso. Además presenta problemas que no requieren de conocimiento sobre números enteros.	Presenta una sección con una cantidad regular de problemas. Los problemas están referidos a pérdidas, ubicación respecto a un punto de referencia, distancias. En la mayoría de los casos presenta problemas para cuya resolución es necesario comprender las propiedades de los números enteros.
7. Relación con el álgebra.	Al inicio, expresa una pregunta de tipo aritmético con una ecuación. Además, expresa con variables algunas propiedades de los números enteros con la	El álgebra no aparece como una justificación para la aparición del conjunto de los números enteros sino más bien como una aplicación de las propiedades aprendidas

	finalidad de generalizar los resultados.	sobre los números enteros para la resolución de ecuaciones.

Tabla 2

Comparación de la organización matemática de los capítulos referidos a los números enteros de los libros de sexto grado y primer año de secundaria.

En la comparación que hemos presentado queremos resaltar que si bien en el libro de sexto grado de primaria el autor justifica la aparición de los números enteros ante la necesidad de resolver cierto tipo de ecuaciones, en primer año de secundaria la justificación aparece para dar respuesta a modelos concretos. A nuestro parecer, si el autor pretendía que desde primaria los estudiantes asocien la aparición de este conjunto numérico como una necesidad intramatemática, asociarla después a problemas contextualizados podría traer confusiones en los alumnos.

4.5 POSIBLES CONFLICTOS

Después de haber hecho un análisis del capítulo referido a los números enteros del libro de primer año de secundaria presentamos los posibles conflictos que puede ocasionar dicha organización matemática en los estudiantes que lo utilicen. Mencionamos solo el análisis del libro de primer año ya que es el libro que han utilizado los estudiantes a los que se aplicará la prueba. Después de aplicar la prueba podremos contrastar los resultados con nuestro análisis a priori. Si bien es cierto que también hemos analizado el capítulo de sexto, este libro no fue utilizado por los estudiantes.

La suma como aumento: Hasta el momento los alumnos identificaban que en una adición la suma es un número mayor que los sumandos; sin embargo, este es un obstáculo que debe superarse cuando se trabaja con números enteros. Por ejemplo, ante una pregunta como la siguiente: encontrar un número que sumado a 5 de 2 podría ser una fuente de errores en los estudiantes.

Noción de orden: Hasta el capítulo referido a los números naturales los alumnos identificaban como número menor el que esté más cerca al cero, y por ese motivo podrían pensar que el -1 es menor que -2 ya que 1 es menor que 2. Ante preguntas en las que los estudiantes tengan que ordenar números enteros en una recta numérica o comparar dos enteros podrían presentar errores si es que no han superado este obstáculo.

El número tiene un signo propio: En este nuevo conjunto numérico el signo + o – no solo son utilizados para representar operaciones si no que ahora son parte del mismo número. Ante una pregunta como: "¿Cuántas operaciones hay que realizar en el siguiente ejercicio? (+3) – (-2)" Los alumnos podrían pensar que hay tres operaciones que realizar en vez de una. También se le podría presentar algún problema en el que sea importante considerar el signo del número para poder resolverlo.

Uso de las propiedades: En el estudio de este nuevo conjunto numérico aparecen nuevas propiedades respecto a los signos. La conocida "regla de los signos" aparece por primera vez cuando se trabaja con los números enteros. Por este motivo consideramos que posiblemente presentar ejercicios en donde tengan que aplicar esta "regla de los signos" podría ser una fuente de errores.

Relación con el Álgebra: Cuando los alumnos resuelven algunas ecuaciones de primer grado pueden encontrar una solución negativa. Además, para resolver ecuaciones con números enteros se necesitan aplicar correctamente algunas de las propiedades desarrolladas en este capítulo.

CAPÍTULO 5: IDENTIFICACIÓN DE LOS CONFLICTOS DE LOS ESTUDIANTES EN RELACIÓN A LOS NÚMEROS ENTEROS

5.1 DISEÑO DEL INSTRUMENTO

Del análisis del libro y de los resultados de investigaciones previas sobre los obstáculos epistemológicos presentes en el estudio de los números enteros se han identificado posibles obstáculos didácticos para el aprendizaje de los números enteros. Los más destacados se refieren a identificar siempre la suma como aumento, a la asociación del orden en los números enteros teniendo como referencia al cero, a la importancia de considerar que el número entero tiene un signo propio, al efecto del tratamiento de los números enteros en modelos concretos en contraste de la presentación de las propiedades en contextos formales y a la dificultad para aplicar las propiedades de los enteros en contextos algebraicos. En lo que se refiere al aspecto referido al orden queremos precisar lo siguiente: Si bien es cierto que el texto presenta una definición, que a la vez es una técnica, para comparar dos números enteros (indicando que se deben ubicar ambos números en la recta numérica y el que esté más a la derecha es el mayor) hemos considerado como aspecto a analizar la asociación del orden de este nuevo conjunto numérico con el orden de los números naturales ya que consideramos que este obstáculo será más fuerte que la influencia del docente y la utilización misma del texto.

Con estas consideraciones y con los aportes que hemos tomado de las investigaciones previas que hemos señalado en esta investigación, se ha visto necesario construir un instrumento donde se pueda verificar o rechazar estas hipótesis. A continuación se presentan los ítems a explorar y sus preguntas correspondientes en el instrumento.

Aspecto a analizar	Pregunta
La suma como aumento	1a) ¿Es posible encontrar un número que sumado a 8 resulte 12? De ser así, ¿cuál es ese número? 1b) ¿Es posible encontrar un número que sumado a 5 resulte 2? De ser así, ¿cuál es ese número?
Asociación del orden de los números enteros tomando como referencia al	2) Ubica los siguientes números en la recta numérica que se presenta a continuación

cero.	ordenándolos de menor a mayor: -5; 4; -2; -1; 3; 2; -4; 5; -3; 1; 0. 3) Completa los recuadros escribiendo <, > o =, según corresponda: **1** ☐ **3** **- 1** ☐ **0** **5** ☐ **-1** **-3** ☐ **2** **-10** ☐ **-2**
Importancia del signo de los números enteros.	4) ¿Cuál es el resultado del siguiente ejercicio: (-2) – (+3)? ¿Cuántas operaciones en total realizaste para resolverlo? 5 a) En Puno están a -7 °C y en Cerro de Pasco a -3 °C. Si alguien se traslada de Puno a Cerro de Pasco, ¿notará una subida o una disminución en la temperatura? 5 b) Hace una hora el termómetro marcaba 2 °C. Si la temperatura ha descendido 7 °C, ¿qué temperatura marca ahora el termómetro?
Dificultades que aparecen al realizar operaciones con números enteros cuando el tema ha sido abordado a través de un modelo concreto.	6) Resuelve, paso a paso, los siguientes ejercicios: a) -14 + (-16) – (-32) + (-10) b) (-3)(-2) + (-3)(+4)
Dificultad para aplicar la propiedad de los enteros que indica que la igualdad se preserva al sumar una constante en ambos términos.	7) Resuelve, paso a paso, la siguiente ecuación: 4 – 2x = 6

Tabla 3 Ítems a analizar y sus respectivas preguntas en el instrumento

5.2 ANÁLISIS A PRIORI

Consideramos que la idea de que el resultado de sumar dos números siempre nos va a dar un número mayor a ambos sumandos será un obstáculo difícil de superar para los alumnos a pesar de haber estudiado el capítulo de los números enteros. Por ese motivo creemos que la respuesta a la primera pregunta será negativa ya que van a considerar que ningún número sumado a 5 nos podría dar 2.

En las preguntas 2 y 3 se solicita a los estudiantes ordenar números enteros. En la pregunta 2 se pedirá que ubiquen en una recta numérica una serie de números negativos y en la pregunta 3 comparar pares de números. Posiblemente, algunos estudiantes no van a considerar el signo negativo y van a ordenar dichos números según sus valores absolutos. Por ejemplo, podrían pensar que 1 es menor que -2. Sin embargo, creemos que el libro ha presentado ejercicios similares a los presentados en la prueba motivo por el cual consideramos que la mayoría de los alumnos darían la respuesta correcta.

En las preguntas 4 y 5 queremos analizar si los estudiantes entienden la importancia de considerar el signo como parte del número entero. En la pregunta 4 buscamos verificar si los estudiantes entienden que ahora el signo también toma un sentido predicativo; es decir, ya no representa solo una operación sino que ahora es parte del mismo número. Posiblemente, los alumnos van a responder que tienen que resolver tres operaciones en esa pregunta ya que ven tres signos. En la pregunta 5, en la que se les pide realizar algunas simples operaciones aritméticas con números enteros esperamos que en el apartado a), los estudiantes respondan que en Cerro de Pasco la temperatura es menor que en Puno, ya que en Cerro de Pasco están a -3° y en Puno a -7. En el apartado b), esperamos que algunos alumnos no interpretarán el enunciado en términos de una operación con números enteros.

En la pregunta 6 hemos presentado dos ejercicios en los que queremos comprobar si los alumnos han aprendido las reglas prácticas de adición, sustracción y multiplicación de números enteros. Consideramos que la mayoría de los alumnos no ha comprendido estas reglas ya que cuando el autor presenta los métodos de resolución de este tipo de ejercicios lo hace de una manera poco entendible en su afán de mostrar varios caminos para llegar a la solución.

Por último, en la pregunta 7, consideramos que la mayoría de los alumnos no van a utilizar correctamente las reglas de los signos en la solución de ecuaciones y, por ejemplo, cuando tengan que trasponer el 6 al otro miembro de la ecuación, lo hagan manteniendo el mismo signo positivo. Cuando revisemos las respuestas de los estudiantes nos centraremos en analizar el primer paso de la solución de la ecuación. No nos detendremos en analizar los demás pasos ya que se necesitarían propiedades de los números racionales.

5.3 EXPERIMENTACIÓN

La prueba fue aplicada en las dos secciones de primer año de secundaria del colegio Santa Margarita. Rindieron la prueba 29 alumnos de la sección A, de los cuales 15 son hombres y 14 son mujeres. En la sección de primero B rindieron la prueba 26 alumnos, 13 hombres y 13 mujeres.

Se asignó un tiempo de 20 minutos para la prueba y todos la terminaron en el tiempo propuesto. La prueba fue resuelta de forma individual y sin uso de calculadoras.

Los investigadores no dimos ningún tipo de asesoría sobre cómo resolver las preguntas, solo dimos una indicación general al inicio de la misma para referirnos a que debían escribir en la hoja absolutamente todos los procedimientos que vayan a resolver por triviales que los podrían parecerles y que podrían utilizar cualquier conocimiento estudiado durante el año.

En este apartado queremos dejar en claro que el profesor del curso utilizó el libro de matemáticas para primer año de secundaria como guía metodológica para enseñar todos los temas del año, en particular, para enseñar el capítulo de los números enteros y los alumnos lo utilizaron como libro de texto.

También queremos mencionar que los estudiantes a los que se les aplicó la prueba no estudiaron el tema de los números enteros en sexto grado de primaria.

5.4 RESULTADOS

A continuación describiremos los resultados obtenidos para cada una de las preguntas de la prueba. Debemos señalar que la primera parte de la pregunta 1 indicaba:

¿Es posible encontrar un número que sumado a 8 resulte 12? De ser así, ¿cuál es ese número?

Esta primera parte tenía como única finalidad asegurarnos que el alumno entendía este tipo de pregunta. La respuesta era obvia, y por ese motivo los 55 estudiantes, es decir el 100%, llegó a la respuesta correcta: Sí era posible encontrar ese número, y es el número 4.

Pregunta 1: ¿Es posible encontrar un número que sumado a 5 resulte 2? De ser así, ¿cuál es ese número?

Respuestas que dieron los estudiantes:

a) Sí es posible. El número es -3. → 39 alumnos → 71% (respuesta correcta)

b) Sí es posible. El número es -7. → 3 alumnos → 5%

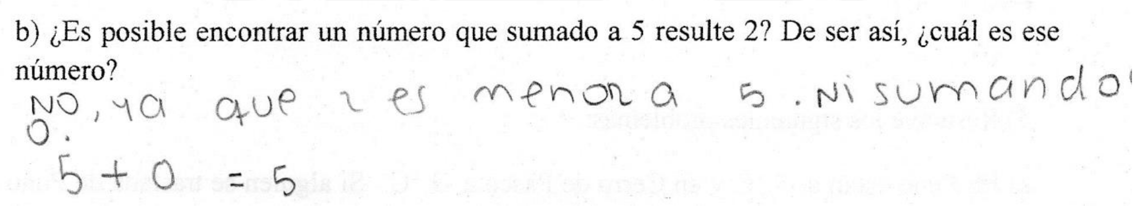
c) Sí es posible. El número es 7. → 1 alumno → 2%

d) No es posible. → 12 alumnos → 22%

Creemos importante indicar que de los 39 alumnos que respondieron correctamente la pregunta, 4 de ellos hallaron el número pedido planteando y resolviendo una ecuación.

Además queremos mostrar las respuestas de dos estudiantes que afirmaron que no era posible encontrar dicho número y sus respectivas justificaciones.

Respuesta del estudiante 1:



b) ¿Es posible encontrar un número que sumado a 5 resulte 2? De ser así, ¿cuál es ese número?

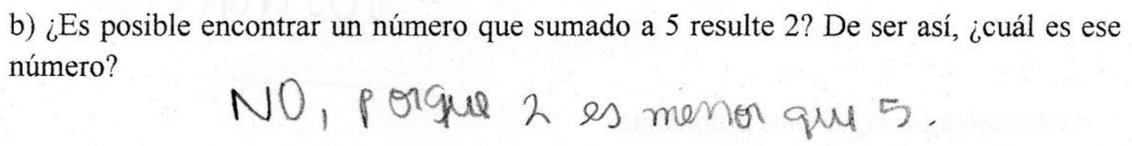
NO, ya que 2 es menor a 5. Ni sumando
0.
5 + 0 = 5

Figura 5.1

Respuesta de Alba

En la figura 5.1 observamos que el menor número que conoce el estudiante es el cero.

Respuesta del estudiante 2:



b) ¿Es posible encontrar un número que sumado a 5 resulte 2? De ser así, ¿cuál es ese número?

NO, porque 2 es menor que 5.

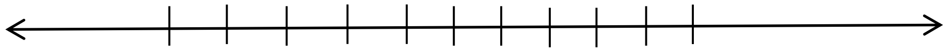
Figura 5.2

Respuesta de Mariafe

En la figura 5.2 vemos que la alumna no considera que la respuesta pueda ser un número negativo.

Pregunta 2:

Ubica los siguientes números en la recta numérica que se presenta a continuación ordenándolos de menor a mayor: -5; 4; -2; -1; 3; 2; -4; 5; -3; 1; 0.



Respuestas que dieron los estudiantes:

a) -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5 → 52 alumnos → 94% (respuesta correcta)

b) -1; -2; -3: -4; -5; 0; 1; 2; 3; 4; 5 → 1 alumno → 2%

c) 5; 4; 3; 2; 1; 0; -1; -2; -3; -4; -5 → 2 alumnos → 4%

Pregunta 3:

Completa los recuadros escribiendo < , > o =, según corresponda:

1 ☐ 3

- 1 ☐ 0

5 ☐ -1

-3 ☐ 2

-10 ☐ -2

Respuestas que dieron los estudiantes:

a) < , <, >, <, < → 52 alumnos → 94% (respuesta correcta)

b) <, >, >, <, > → 1 alumno → 2%

c) >, >, <, >, > → 1 alumno → 2%

d) >, <, >, <, < → 1 alumno → 2%

Pregunta 4:

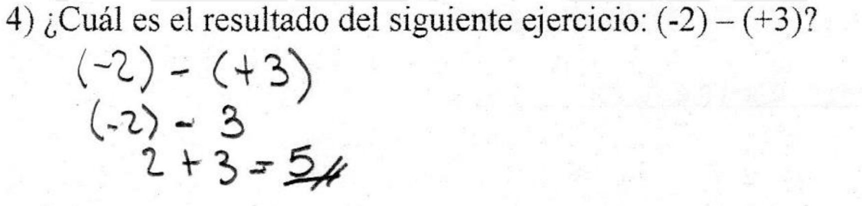
¿Cuál es el resultado del siguiente ejercicio: (-2) – (+3)?

Respuestas que dieron los estudiantes:

a) -5	→	40 alumnos	→	73% (respuesta correcta)
b) 5	→	5 alumnos	→	9%
c) 1	→	7 alumnos	→	12%
d) -6	→	2 alumnos	→	4%
e) 6	→	1 alumno	→	2%

Presentamos a continuación las respuestas de dos alumnos que dieron como respuestas 5 y 1 respectivamente y sus justificaciones.

Alumno 1:



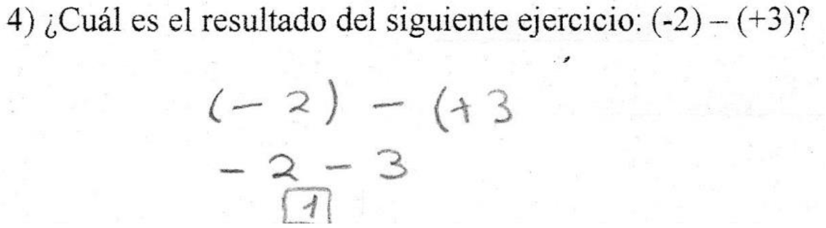
4) ¿Cuál es el resultado del siguiente ejercicio: (-2) – (+3)?

(-2) - (+3)
(-2) - 3
2 + 3 = 5//

Figura 5.3

Respuesta de Tamara

Alumno 2:



4) ¿Cuál es el resultado del siguiente ejercicio: (-2) – (+3)?

(– 2) – (+ 3
– 2 – 3
$\boxed{1}$

Figura 5.4

Respuesta de Gonzalo

¿Cuántas operaciones en total realizaste para resolverlo?

a) Una operación → 25 alumnos → 45% (respuesta correcta)

b) Dos operaciones → 28 alumnos → 51%

c) Otras respuestas → 2 alumnos → 4%

Pregunta 5 a:

En Puno están a -7 °C y en Cerro de Pasco a -3 °C. Si alguien se traslada de Puno a Cerro de Pasco, ¿notará una subida o una disminución en la temperatura?

Respuestas que dieron los estudiantes:

a) Subida → 51 alumnos → 93% (respuesta correcta)

b) Disminución → 4 alumnos → 7%

Pregunta 5 b:

Hace una hora el termómetro marcaba 2 °C. Si la temperatura ha descendido 7 °C, ¿qué temperatura marca ahora el termómetro?

Respuestas que dieron los estudiantes:

a) -5 °C → 54 alumnos → 98% (respuesta correcta)

b) Otra respuesta → 1 alumno → 2%

Pregunta 6 a:

Resuelve, paso a paso, el siguiente ejercicio: -14 + (-16) – (-32) + (-10)

Respuestas que dieron los estudiantes:

a) - 8 → 33 alumnos → 60% (respuesta correcta)

Los alumnos que dieron como respuesta – 8 resolvieron los ejercicios de forma adecuada utilizando correctamente las propiedades de la adición y sustracción de números enteros y realizando los cálculos de izquierda a derecha.

b) 52 → 5 alumnos → 10%

Los estudiantes que dieron como respuesta 52 reconocen que se trata de una suma pero aplican la regla de los signos de la multiplicación, al momento de realizar – 14 + (-16) dan como respuesta parcial 30 con signo positivo.

c) Otras respuestas → 14 alumnos → 25%

Los alumnos que dieron otras respuestas cometieron errores al no resolver las operaciones de izquierda a derecha sino en otro orden.

d) No terminan el ejercicio → 3 alumnos → 5%

Pregunta 6 b:

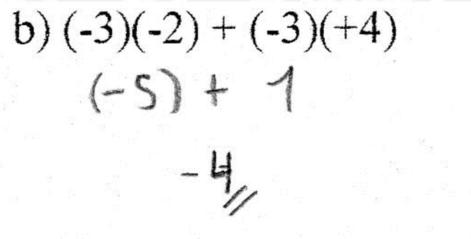
Resuelve, paso a paso, el siguiente ejercicio: (-3)(-2) + (-3)(+4)

Respuestas que dieron los estudiantes:

a) - 6 → 25 alumnos → 45% (respuesta correcta)

b) - 4 → 7 alumnos → 13%

A continuación presentamos la solución de un estudiante que obtuvo -4:



b) (-3)(-2) + (-3)(+4)

(-5) + 1

-4//

Figura 5.5

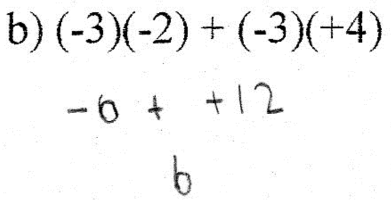
Respuesta de Salvador

En la figura 5.5 vemos que el alumno no reconoció que los paréntesis significan multiplicación sino que lo entiende como una adición de números enteros.

c) Otras respuestas

- Ha multiplicado pero ha utilizado mal la regla de los signos → 32%

A continuación presentamos la solución de un estudiante que no utilizó correctamente la regla de los signos:



b) (-3)(-2) + (-3)(+4)

$-6 + +12$

6

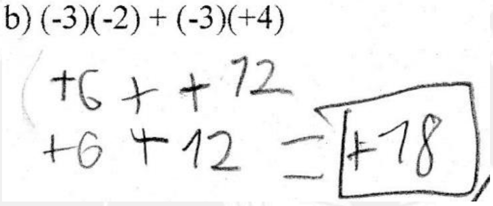
Figura 5.6

Respuesta de Eduarda

En la figura 5.6 se muestra que la estudiante multiplicó los valores absolutos de los números enteros pero ha utilizado mal la regla de los signos.

- Ha utilizado bien la regla de los signos en la primera parte → 7%

A continuación mostramos un ejemplo de este caso:



b) (-3)(-2) + (-3)(+4)

$+6 + +12$

$+6 + 12 = \boxed{+18}$

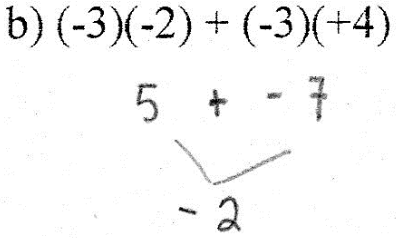
Figura 5.7

Respuesta de Jorge

En esta respuesta vemos que el alumno utilizó bien la regla de los signos en la primera parte de la operación.

- Utilizó bien la regla de los signos pero ha sumado los números enteros→ 3%

A continuación presentamos un ejemplo de este caso:



b) (-3)(-2) + (-3)(+4)

$5 + -7$

-2

Figura 5.8

Respuesta de Ivana

En la figura 5.8 la estudiante utilizó bien la regla de los signos pero en vez de multiplicar, sumó los números enteros.

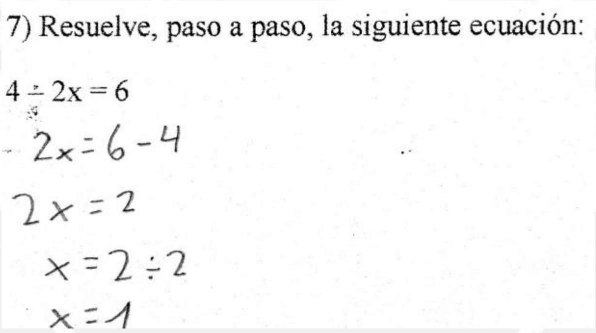
Pregunta 7:

Resuelve, paso a paso, la siguiente ecuación: 4 – 2x = 6

Respuestas que dieron los estudiantes:

a) - 1	→	8 alumnos	→	15% (respuesta correcta)
b) 1	→	25 alumnos	→	45%
c) 5	→	22 alumnos	→	40%

Considerando los altos porcentajes de los alumnos que dieron respuestas incorrectas, presentamos una de cada tipo:



7) Resuelve, paso a paso, la siguiente ecuación:

4 – 2x = 6

$2x = 6 - 4$

$2x = 2$

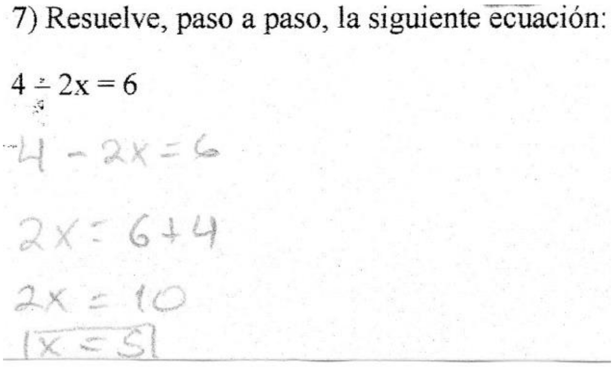
$x = 2 \div 2$

$x = 1$

Figura 5.9

Respuesta de Víctor

En la figura 5.9 vemos que el estudiante se dio cuenta que podía sumar -4 en ambos miembros de la ecuación sin modificar la igualdad; sin embargo, cambia el signo del coeficiente de la incógnita. Este error va a hacer que la respuesta final no sea la correcta.



7) Resuelve, paso a paso, la siguiente ecuación:

$4 - 2x = 6$

$-4 - 2x = 6$

$2x = 6 + 4$

$2x = 10$

$\boxed{x = 5}$

Respuesta 5.10

Respuesta de Salvador

En la figura 5.10 se puede observar la respuesta que dio un estudiante y los errores cometidos. En primer lugar aplicó mal la propiedad que dice que se puede sumar un mismo número entero en ambos lados de la ecuación y la igualdad se mantiene. Sin embargo, en un lado de la ecuación sumó -4 y en el otro lado sumó +4. Además cambia el signo del coeficiente de la incógnita.

5.5 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

A continuación presentamos las explicaciones que hacemos sobre las respuestas que presentaron los estudiantes en cada pregunta.

Cuando en la pregunta 1 se les presenta: ¿Es posible encontrar un número que sumado a 5 resulte 2? De ser así, ¿cuál es ese número? 12 alumnos, es decir el 22% respondió que no es posible. Pese a que el 78% de alumnos llegó a la respuesta correcta, consideramos que pudo redactarse esta pregunta de modos distintos para así verificar si verdaderamente se ha superado este obstáculo. Por este motivo consideramos que el obstáculo epistemológico propio de los números enteros referido a superar la concepción de la suma como aumento sigue presente en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Es decir, de los 55 alumnos, 12 no consideran que exista un número que sumado a 5 de como resultado 2.

En la pregunta 2, en la que se pide ubicar un conjunto de números enteros en una recta numérica, 52 de los 55 alumnos respondieron de una manera adecuada. Es decir, el 94% de los alumnos no presentan dificultad con identificar cómo se ubica cada número en la recta. Esto debido a que los ejercicios resueltos y propuestos del libro permiten que los alumnos puedan reconocer la correcta ubicación de los números en la recta numérica.

En la pregunta 3 se les pide comparar dos números enteros utilizando los símbolos <, >, o =. El 94%, 52 alumnos, logran comparar de manera correcta las cinco parejas de números que se les presenta. Los demás errores los consideramos anecdóticos ya que son tres alumnos que han cometido algún error entre las 5 parejas de números pero en el resto lo hacen bien.

Con los resultados obtenidos en las dos preguntas anteriores podemos afirmar que la noción de orden en el conjunto de los números enteros no es difícil de entender por parte de los alumnos, sino que, en su mayoría, los estudiantes responden de manera correcta las situaciones que les fueron presentadas.

En la pregunta 4 se les pide realizar una operación sencilla de sustracción de dos números enteros, 40 alumnos dieron la respuesta correcta. Los errores que se presentaron se debieron a que algunos alumnos llegaban a la expresión -2 -3 y daban como respuesta final 1.   Consideramos que las preguntas formuladas fueron las correctas ya que ambas nos proporcionan un igual resultado.

En la pregunta 5 a, en donde se les pedía comparar dos números enteros dados en un contexto de temperaturas, 51 alumnos dieron la respuesta correcta interpretando de manera correcta que -3 es mayor que -7. El 7%, 4 alumnos, respondieron que al pasar de una temperatura de -7 °C a -3 °C sentirían una disminución de temperatura. Entendemos que esto se debe a que un grupo pequeño de alumnos no logra comparar dos números enteros en un contexto dado.

En la pregunta 5 b, se pide, a través de un problema de temperaturas, hacer la resta 2 – 7. El 98 %, 54 alumnos, dieron la respuesta correcta: -5. Solo un alumno dio otra respuesta que nosotros la consideramos como anecdótica.

Después del análisis de las preguntas 5 a y 5 b podemos verificar que los alumnos tienen en cuenta la importancia del signo de los números enteros y tienen clara la noción de orden en este conjunto numérico, lo cual corrobora el resultado obtenido en la pregunta 4.

En la pregunta 6 a, se pide realizar una operación combinada de adición y sustracción de números enteros. En esta pregunta 33 alumnos, que corresponde al 60%, encontraron la respuesta correcta aplicando correctamente las propiedades de la adición y sustracción de los enteros. Sin embargo también debemos decir que 22 alumnos no llegan a la respuesta correcta por diversos motivos: Uno de esos errores lo cometen al inicio del ejercicio cuando intentan resolver – 14 + (- 16) y dan como respuesta 30, es decir reconocen que es una suma pero aplican la regla de multiplicación de los signos. No se había previsto que apliquen la regla de signos en las sumas. Debemos indicar que no se tenían casos en los que se reportaran estos errores en las investigaciones previas. Otro error fue que no siguieron el orden establecido para resolver una serie de operaciones del mismo nivel (como lo son la adición y sustracción) que establece que se deben resolver las operaciones de izquierda a derecha. Consideramos que en la prueba se debió incluir otras preguntas con las que podamos corroborar los resultados obtenidos en este apartado.

En la pregunta 6 b, los estudiantes deben aplicar la regla de los signos para luego resolver una adición de dos números enteros. Lo que nos pareció más interesante es que la mayoría de alumnos (30 de 55 estudiantes), el 55% para ser más precisos, no llegó a la respuesta correcta. Esto se debe a la complejidad inherente que tiene la comprensión de esta regla para multiplicar dos números con signo. Consideramos que los alumnos asumen esta regla como una propiedad impuesta y carente de significado para ellos. El 13% de los alumnos no reconoce que el signo de paréntesis significa multiplicación ya que en vez de multiplicar han sumado los números presentes en dicha operación. También nos parece interesante mencionar que un grupo considerable de alumnos ha cometido errores al utilizar la regla de los signos y otro grupo de estudiantes ha multiplicado los signos correctamente pero ha sumado los valores absolutos de dichos números.

Queremos dejar en claro que no estaba previsto que los alumnos no reconozcan que los paréntesis son equivalentes al signo x que indica multiplicación. Sería recomendable, en una siguiente experiencia, considerar otra pregunta donde explícitamente se pida que multipliquen para reconocer si realizan adecuadamente o no la operación de multiplicación.

En la pregunta 7, los alumnos tienen resolver una ecuación de primer grado. Lo primero que debemos señalar es que solo 8 alumnos, el 15%, lograron llegar a la respuesta correcta, mientras que 47 alumnos, el 85%, dieron una respuesta equivocada.

Los principales errores se debieron a que los alumnos no aplicaron de una manera adecuada la propiedad que indica que cuando se suma un mismo número entero en ambos miembros de la ecuación, la igualdad se mantiene. Además un error generalizado fue el siguiente:

$$\begin{gathered} 4 \quad - 2x = 6 \\ 2x = 6 - 4 \end{gathered}$$

Consideramos, también, que uno de los motivos del bajo porcentaje de acierto es que recién en este grado los estudiantes aprenden a resolver ecuaciones de primer grado, lo cual añade un nivel de dificultad a la pregunta.

5.6 CONTRASTACIÓN DE LOS ERRORES QUE REPORTABAN LOS ANTECEDENTES, EL ANÁLISIS A PRIORI Y LAS RESPUESTAS DADAS POR LOS ESTUDIANTES.

En la investigación realizada por Iriarte, Jimeno y Vargas Machuca (1991) se reporta que algunos estudiantes no pueden responder la pregunta sobre si existe algún número que sumado a 5 de 2. En nuestro análisis a priori también hemos considerado esta posibilidad ya que, a nuestro parecer, el libro a través de su teoría y ejemplos no logra superar el obstáculo de considerar la suma de dos números como una cantidad mayor que los sumandos; propiedad que se cumple en los números naturales. En el instrumento aplicado vemos que el 22% de los estudiantes responden que no es posible encontrar dicho número.

En esta misma investigación se sostiene que algunos estudiantes trasladan la noción de orden que utilizaban cuando trabajaban con números naturales a los números enteros, es decir, consideran que, por ejemplo, -2 es menor que -3. Sin embargo, en nuestro análisis previo hemos considerado que éste no sería un tema de mayor dificultad para los estudiantes ya que el libro propone una lista suficiente de ejercicios para afianzar la técnica de comparación de dos números enteros. Nuestro análisis a priori fue confirmado con las respuestas de los alumnos ante la prueba tomada, ya que el 94% de los estudiantes dieron la respuesta correcta, y el 6% restante cometieron errores anecdóticos.

Sobre la importancia de considerar el signo como parte del mismo número, los investigadores antes mencionados sostienen que, cuando se presenta un modelo concreto a los estudiantes referido a cálculos con números con signo, algunos no dan la respuesta correcta ya que no comprenden que el signo tiene un papel ahora predicativo. En nuestro análisis previo hemos coincidido con estos investigadores ya que en la mayoría de problemas encontrados en el capítulo del libro referido a los números enteros no se establece una importancia real de utilizar el signo. Sin embargo, en las dos preguntas referidas a este ítem el 93% y el 98% de los estudiantes, respectivamente, dieron la respuesta correcta.

En las investigaciones de Bell (1982, citado en Cid, 2003) y Küchemann (1982, citado en Cid, 2003) se pone en manifiesto la dificultad que presentan los estudiantes para realizar operaciones de adición, sustracción y multiplicación con números enteros. En nuestro análisis a priori hemos considerado que estos errores se mantendrán ya que la manera en que el libro resuelve los ejercicios de este tipo no favorece al aprendizaje de los estudiantes. En los resultados de las preguntas aplicadas a los alumnos sobre este tema obtuvieron un porcentaje de acierto de un 60% en la primera y un 45% en la segunda. Las operaciones elementales con números con signo sigue siendo de una mayor dificultad para los estudiantes.

Godino (2002) sostiene que el entorno algebraico es el más favorable para justificar la aparición de los números enteros. En nuestro análisis a priori hemos considerado que, como el capítulo del libro referido a los números enteros no justifica la aparición de este nuevo conjunto numérico desde el álgebra sino que es un apartado al final del capítulo para aplicar algunas de las propiedades aprendidas, motivo por el cual consideramos que los alumnos presentaran dificultad para resolver ecuaciones de primer grado en este año escolar. Esto se vio reflejado en la prueba aplicada en la que solo el 15% de los estudiantes logró resolver la ecuación de una manera adecuada.

CONCLUSIONES Y CUESTIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Objetivo específico 1:

Identificar la manera en la que los libros de texto seleccionados dan inicio al tema, justifican la aparición del conjunto de los números enteros, los diferentes significados que dan al signo negativo, presentan la teoría, justifican las propiedades, los distintos tipos de problemas resueltos y propuestos que presentan y la relación que existe entre este nuevo conjunto numérico y el álgebra.

Hipótesis 1:

Esperamos que el tratamiento que se dé a los números enteros en los libros de texto seleccionados sea muy parecido a la forma en que se presenta a los números naturales, sin reconocer la complejidad misma de este objeto matemático.

Conclusiones:

1.1 La organización matemática del tema en los dos textos de años consecutivos tiene una intención clara de afianzar las técnicas necesarias para resolver ejercicios referidos al objeto matemático número entero, es decir, presenta primero la teoría para luego proponer una larga lista de ejercicios resueltos y propuestos.

1.2 La justificación para la introducción de este nuevo conjunto numérico se lleva a cabo desde un entorno aritmético, asociándola a dar solución a problemas que corresponden a modelos concretos. Desde nuestra perspectiva esto no es conveniente ya que el objeto matemático número entero no surge para dar solución a problemas de la vida real sino que aparece para dar solución a problemas intramatemáticos.

1.3 La mayoría de problemas contextualizados resueltos y propuestos en el texto corresponden a modelos concretos que pueden ser resueltos en el conjunto de los números naturales. Esto ocasiona que los estudiantes no encuentren sentido a la utilidad de este nuevo conjunto numérico, al nuevo carácter predicativo que adquieren los signos + y -, y a las nuevas propiedades que aparecen cuando se estudian las operaciones básicas en los números enteros.

1.4 Se observa que no se aprovecha el contexto algebraico para introducir este conjunto numérico sino como un medio más en el que se pueden aplicar los números enteros.

Objetivo específico 2:

Comprobar si alguno de los obstáculos puestos en evidencia en el análisis del libro y en los antecedentes se reproduce en las respuestas de los estudiantes que emplearon los textos de la editorial seleccionada.

Hipótesis 2:

Los obstáculos que se han puesto en evidencia en los antecedentes se siguen reproduciendo en las respuestas de los estudiantes que utilizaron el libro de texto seleccionado.

Conclusión 2:

Se ha identificado que las dificultades más frecuentes son, en primer lugar, que no aplican de una manera adecuada la propiedad que indica que siempre que se suma un número entero en ambos miembros de una ecuación la igualdad se mantiene. En segundo lugar, no aplican de una manera adecuada las propiedades de adición y sustracción de números enteros. Esto se debe a que no siguieron el orden sugerido que indicaba que se deben resolver operaciones de izquierda a derecha; además, algunos alumnos cometieron errores al sumar y restar dos números enteros ya que olvidaban los signos que los precedían. Esto muestra que no han comprendido que los signos adquieren, ahora, un rol predicativo y no solo operativo.

Las dificultades menos frecuentes son las referidas a que no aplican correctamente la regla de los signos en la multiplicación de números enteros y a la concepción de la suma como aumento, es decir, que el resultado de la suma de dos números enteros es un número mayor que los sumandos.

El obstáculo referido a la asociación del orden en los números enteros tomando como referencia al cero no se ha manifestado en las repuestas de los estudiantes ya que la pregunta que pretendía medir la aparición de esta dificultad fue muy parecida a las preguntas presentadas en el libro, y además, a que los alumnos habían trabajado en clase una técnica que no pasaba por comparar los números en relación a su distancia al cero.

Objetivo específico 3:

Proponer recomendaciones para la organización matemática del capítulo referido a los números enteros de los libros de texto seleccionados, en base al análisis del texto y de las respuestas de los estudiantes.

Conclusión 3:

3.1 Considerando que se ha encontrado que el texto hace referencia a modelos concretos para justificar la aparición de este nuevo conjunto numérico para luego enunciar su definición y sus propiedades de una forma abstracta, que los estudiantes que han seguido este capítulo del libro han presentado dificultad para la aplicación de las propiedades para la adición, sustracción y multiplicación de números enteros y que las investigaciones previas indican que el álgebra, en particular la resolución de ecuaciones, son un entorno adecuado para justificar la aparición de este objeto matemático, recomendamos que la solución de ecuaciones debe servir para formalizar el conjunto de los números enteros en vez de los modelos concretos que solo podrían llevar a una asociación de las propiedades de los números enteros con los números naturales. Otros modelos algebraicos serán útiles para ampliar este conjunto numérico hacia los números racionales.

3.2 Dada la complejidad misma del objeto matemático número entero recomendamos que el profesor que enseñe este capítulo debe ser consciente de los obstáculos epistemológicos presentes en los números enteros para que así pueda cuestionar la organización matemática del capítulo del libro. En particular, el docente debe evitar forzar la presentación de las propiedades a través de modelos concretos. Además, estos obstáculos son inherentes a la naturaleza misma de este conjunto numérico y tener conciencia de ellos servirán para poder predecir algunas respuestas erróneas que puedan dar los estudiantes y direccionar el quehacer docente para superar estos obstáculos.

Objetivo general:

Analizar si la organización matemática del capítulo referido a los números enteros de los libros de texto para sexto grado de primaria y de primer año de secundaria de la editorial Coveñas favorece a que los alumnos superen los obstáculos epistemológicos que se presentan en el aprendizaje de los números enteros.

Conclusión:

En relación al objetivo general y teniendo en cuenta los resultados de la prueba que rindieron los estudiantes que emplearon el texto se concluye que el capítulo referido a los números enteros del libro de primer año de educación secundaria permite superar las dificultades que presentan los alumnos en lo que se refiere a reconocer la noción de orden en los números enteros, entender la importancia de considerar el signo al comparar dos números enteros y realizar operaciones de adición y sustracción de dos números enteros. Sin embargo, los resultados de la prueba aplicada no permiten asegurar que la organización matemática del capítulo sea favorable para la resolución de operaciones combinadas con números enteros, para la aplicación de la regla de los signos y para la solución de ecuaciones de primer grado.

CUESTIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

1. De este trabajo se confirma que el entorno aritmético no es el más apropiado para introducir el conjunto de los números enteros y, en cambio, el entorno algebraico sí lo es. Los trabajos revisados de Cid (2010) y Godino (2002) lo confirman pero no brindan pautas específicas. Queda pendiente diseñar situaciones que permitan introducir el conjunto de los números enteros desde un entorno algebraico, siendo más específicos, desde la resolución de ecuaciones de primer grado.

2. En esta investigación hemos abordado los obstáculos epistemológicos rastreando el desarrollo histórico de los números enteros y las dificultades que tuvieron que ser superadas por los matemáticos en su debido momento. Además hemos analizado los obstáculos didácticos referidos a los números enteros al analizar la organización matemática del capítulo referido a este objeto matemático en un libro de texto.

Queda pendiente investigar sobre los obstáculos cognitivos presentes en el estudio de los números enteros.

3. Si bien el instrumento considerado no permitió verificar que los estudiantes tienen dificultades con las operaciones que no se pueden justificar de manera concreta (multiplicación y división) sería interesante diseñar situaciones en las que sea favorable presentar estas operaciones y luego diseñar un instrumento que evalúe su efectividad.

REFERENCIAS:

Artigue, M., & AA VV. (1990). Epistemología y didáctica. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10.

Borjas, D. (2009). Aprendizaje de los números enteros una "experiencia significativa" en estudiantes de séptimo grado de la escuela nacional de música. Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

Carranza, C. & Kong, M. (1990). Teoría de Conjuntos y Números Naturales. Lima: CONCYTEC.

Carrillo, M. (2012). Análisis de la Organización Matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar Matemática Quinto grado de Educación Primaria. Tesis de maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros. Trrabajo presentado en el *XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Abril, Cangas, España*.

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (Vol. 2, pp. 529-542). Zaragoza, España: Publicaciones de la Universidad de Zaragoza.

Cid, E. (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. *Pre-publicaciones del Seminario Matemático "García de Galdeano",* (25), 1-40.

Cid, E., & Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. Montpellier: IUFM de Montpellier*.

Cid, E., Godino, J. & Batanero, C. (2002) Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Extraído el 30 de noviembre de 2013 desde http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf

Coveñas, M. (2010), Matemática 1. Lima. *Coveñas.*

Coveñas, M. (2010), Megamatic 6. Lima. *Coveñas.*

Glaeser, G. (1981), 'Epistémologie des nombres relatifs', Recherches en Didactique des mathématiques, 2(3), 303-346.

Iriarte, M., Jimeno, M., y Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma*, *7*, 13-18.

Ministerio de Educación del Perú (2009). *Diseño curricular Nacional*. Extraído el 8 de octubre de 2013 desde: http://www.minedu.gob.pe/normatividad/reglamentos/DisenoCurricularNacional.pdf

Pascual Ibarra, J.R. (1964). Construcción algebraica del anillo z de los números enteros. *Enseñanza media.* Madrid, 1964, n. 137; p. 357-365.

ANEXOS

Ficha de trabajo

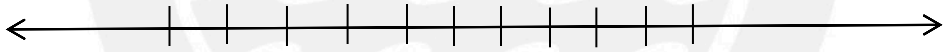
Nombre: _________________________________

1) Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Es posible encontrar un número que sumado a 8 resulte 12? De ser así, ¿cuál es ese número?

b) ¿Es posible encontrar un número que sumado a 5 resulte 2? De ser así, ¿cuál es ese número?

2) Ubica los siguientes números en la recta numérica que se presenta a continuación ordenándolos de menor a mayor: -5; 4; -2; -1; 3; 2; -4; 5; -3; 1; 0.



3) Completa los recuadros escribiendo < , > o =, según corresponda:

1 ☐ 3

- 1 ☐ 0

5 ☐ -1

-3 ☐ 2

-10 ☐ -2

4) ¿Cuál es el resultado del siguiente ejercicio: (-2) – (+3)?

¿Cuántas operaciones en total realizaste para resolverlo?

¿Cuáles fueron esas operaciones?

5) Resuelve los siguientes problemas:

a) En Puno están a -7 °C y en Cerro de Pasco a -3 °C. Si alguien se traslada de Puno a Cerro de Pasco, ¿notará una subida o una disminución en la temperatura?

b) Hace una hora el termómetro marcaba 2 °C. Si la temperatura ha descendido 7 °C, ¿qué temperatura marca ahora el termómetro?

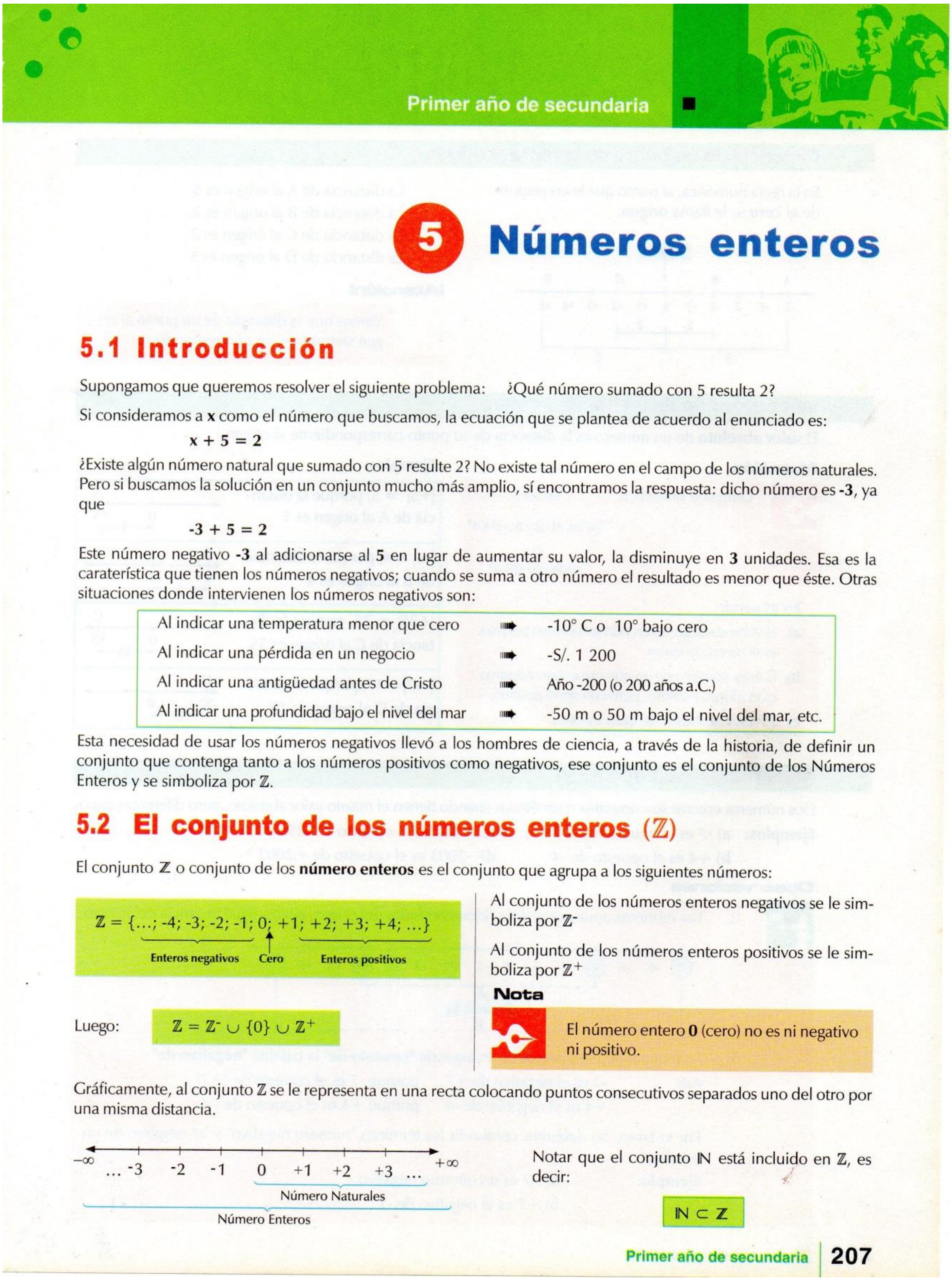
6) Resuelve, paso a paso, los siguientes ejercicios:

a) -14 + (-16) – (-32) + (-10)

b) (-3)(-2) + (-3)(+4)

7) Resuelve, paso a paso, la siguiente ecuación:

4 – 2x = 6



5 Números enteros

5.1 Introducción

Supongamos que queremos resolver el siguiente problema: ¿Qué número sumado con 5 resulta 2?

Si consideramos a **x** como el número que buscamos, la ecuación que se plantea de acuerdo al enunciado es:

$$x + 5 = 2$$

¿Existe algún número natural que sumado con 5 resulte 2? No existe tal número en el campo de los números naturales. Pero si buscamos la solución en un conjunto mucho más amplio, sí encontramos la respuesta: dicho número es **-3**, ya que

$$-3 + 5 = 2$$

Este número negativo **-3** al adicionarse al **5** en lugar de aumentar su valor, la disminuye en **3** unidades. Esa es la caraterística que tienen los números negativos; cuando se suma a otro número el resultado es menor que éste. Otras situaciones donde intervienen los números negativos son:

Al indicar una temperatura menor que cero	➠	-10° C o 10° bajo cero
Al indicar una pérdida en un negocio	➠	-S/. 1 200
Al indicar una antigüedad antes de Cristo	➠	Año -200 (o 200 años a.C.)
Al indicar una profundidad bajo el nivel del mar	➠	-50 m o 50 m bajo el nivel del mar, etc.

Esta necesidad de usar los números negativos llevó a los hombres de ciencia, a través de la historia, de definir un conjunto que contenga tanto a los números positivos como negativos, ese conjunto es el conjunto de los Números Enteros y se simboliza por $\mathbb{Z}$.

5.2 El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$)

El conjunto $\mathbb{Z}$ o conjunto de los **número enteros** es el conjunto que agrupa a los siguientes números:

$$\mathbb{Z} = \{\underbrace{\ldots; -4; -3; -2; -1}_{\text{Enteros negativos}}; \underset{\uparrow\ \text{Cero}}{0}; \underbrace{+1; +2; +3; +4; \ldots}_{\text{Enteros positivos}}\}$$

Luego: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$

Al conjunto de los números enteros negativos se le simboliza por $\mathbb{Z}^-$

Al conjunto de los números enteros positivos se le simboliza por $\mathbb{Z}^+$

Nota

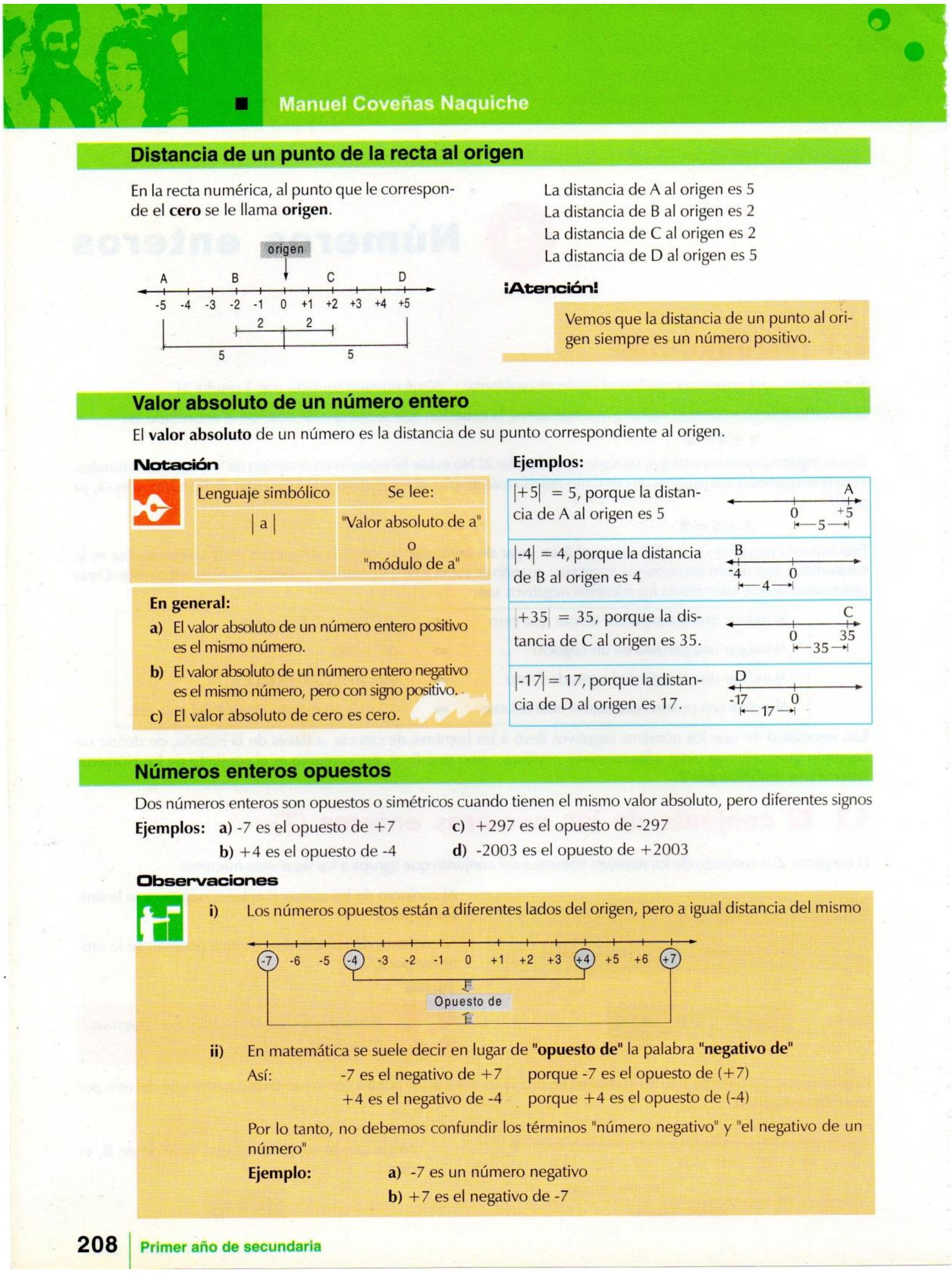
El número entero **0** (cero) no es ni negativo ni positivo.

Gráficamente, al conjunto $\mathbb{Z}$ se le representa en una recta colocando puntos consecutivos separados uno del otro por una misma distancia.

$$\underbrace{-\infty \quad \ldots\ -3 \quad -2 \quad -1 \quad \underbrace{0 \quad +1 \quad +2 \quad +3\ \ldots}_{\text{Número Naturales}}\quad +\infty}_{\text{Número Enteros}}$$

Notar que el conjunto $\mathbb{N}$ está incluido en $\mathbb{Z}$, es decir:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$



Distancia de un punto de la recta al origen

En la recta numérica, al punto que le corresponde el **cero** se le llama **origen**.

La distancia de A al origen es 5
La distancia de B al origen es 2
La distancia de C al origen es 2
La distancia de D al origen es 5

¡Atención!

Vemos que la distancia de un punto al origen siempre es un número positivo.

Valor absoluto de un número entero

El **valor absoluto** de un número es la distancia de su punto correspondiente al origen.

Notación

Lenguaje simbólico	Se lee:
| a |	"Valor absoluto de a" o "módulo de a"

En general:

a) El valor absoluto de un número entero positivo es el mismo número.

b) El valor absoluto de un número entero negativo es el mismo número, pero con signo positivo.

c) El valor absoluto de cero es cero.

Ejemplos:

$|+5| = 5$, porque la distancia de A al origen es 5

$|-4| = 4$, porque la distancia de B al origen es 4

$|+35| = 35$, porque la distancia de C al origen es 35.

$|-17| = 17$, porque la distancia de D al origen es 17.

Números enteros opuestos

Dos números enteros son opuestos o simétricos cuando tienen el mismo valor absoluto, pero diferentes signos

Ejemplos: **a)** -7 es el opuesto de +7 **c)** +297 es el opuesto de -297
b) +4 es el opuesto de -4 **d)** -2003 es el opuesto de +2003

Observaciones

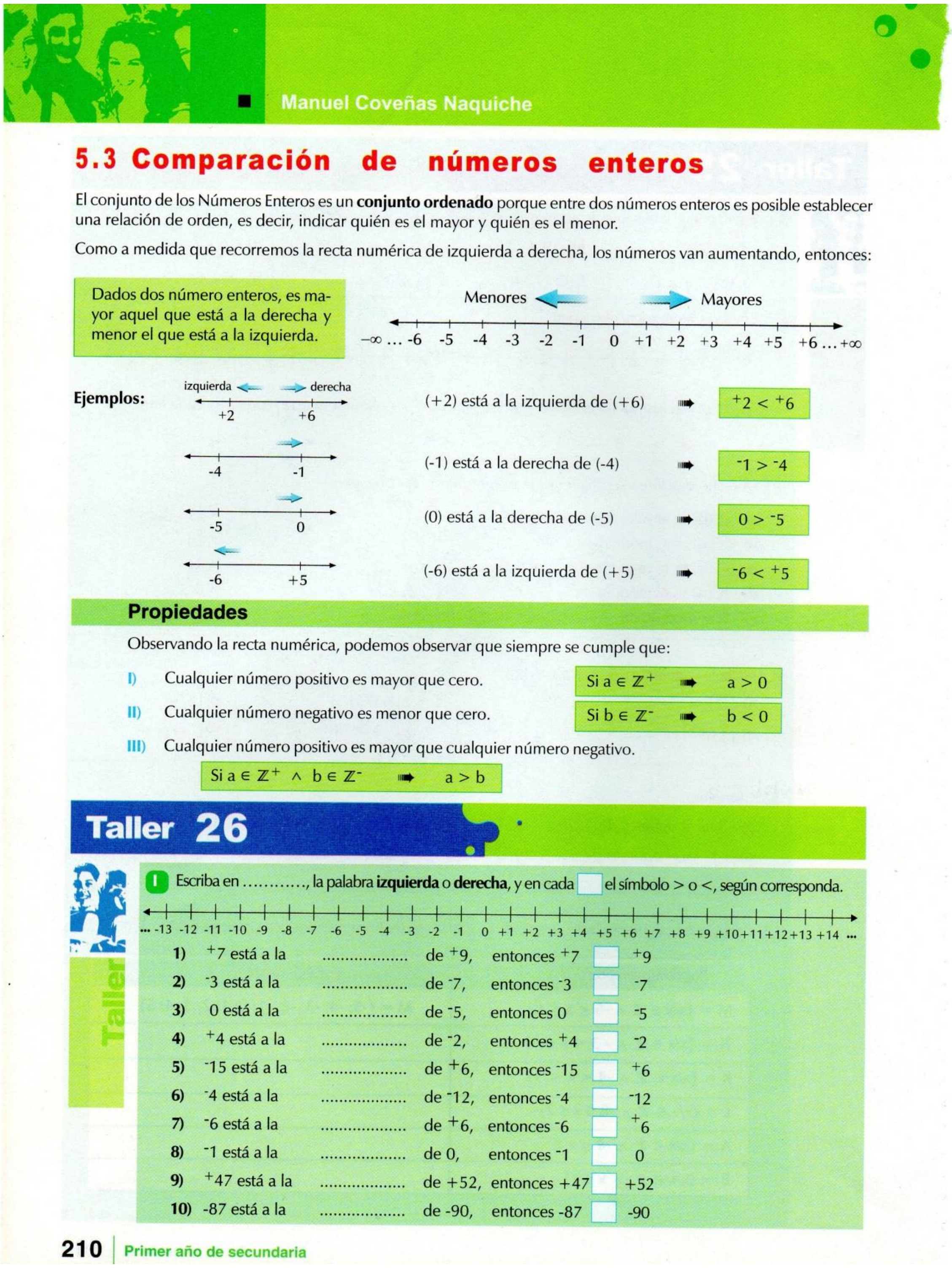
i) Los números opuestos están a diferentes lados del origen, pero a igual distancia del mismo

ii) En matemática se suele decir en lugar de **"opuesto de"** la palabra **"negativo de"**

Así: -7 es el negativo de +7 porque -7 es el opuesto de (+7)
+4 es el negativo de -4 porque +4 es el opuesto de (-4)

Por lo tanto, no debemos confundir los términos "número negativo" y "el negativo de un número"

Ejemplo: **a)** -7 es un número negativo
b) +7 es el negativo de -7



5.3 Comparación de números enteros

El conjunto de los Números Enteros es un **conjunto ordenado** porque entre dos números enteros es posible establecer una relación de orden, es decir, indicar quién es el mayor y quién es el menor.

Como a medida que recorremos la recta numérica de izquierda a derecha, los números van aumentando, entonces:

Dados dos número enteros, es mayor aquel que está a la derecha y menor el que está a la izquierda.

Ejemplos:

(+2) está a la izquierda de (+6) ➠ $^{+}2 < {}^{+}6$

(-1) está a la derecha de (-4) ➠ $^{-}1 > {}^{-}4$

(0) está a la derecha de (-5) ➠ $0 > {}^{-}5$

(-6) está a la izquierda de (+5) ➠ $^{-}6 < {}^{+}5$

Propiedades

Observando la recta numérica, podemos observar que siempre se cumple que:

I) Cualquier número positivo es mayor que cero. Si $a \in \mathbb{Z}^{+}$ ➠ $a > 0$

II) Cualquier número negativo es menor que cero. Si $b \in \mathbb{Z}^{-}$ ➠ $b < 0$

III) Cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.

Si $a \in \mathbb{Z}^{+} \wedge b \in \mathbb{Z}^{-}$ ➠ $a > b$

Taller 26

I Escriba en …………, la palabra **izquierda** o **derecha**, y en cada ☐ el símbolo > o <, según corresponda.

1) $^{+}7$ está a la .... de $^{+}9$, entonces $^{+}7$ ☐ $^{+}9$

2) $^{-}3$ está a la .... de $^{-}7$, entonces $^{-}3$ ☐ $^{-}7$

3) 0 está a la .... de $^{-}5$, entonces 0 ☐ $^{-}5$

4) $^{+}4$ está a la .... de $^{-}2$, entonces $^{+}4$ ☐ $^{-}2$

5) $^{-}15$ está a la .... de $^{+}6$, entonces $^{-}15$ ☐ $^{+}6$

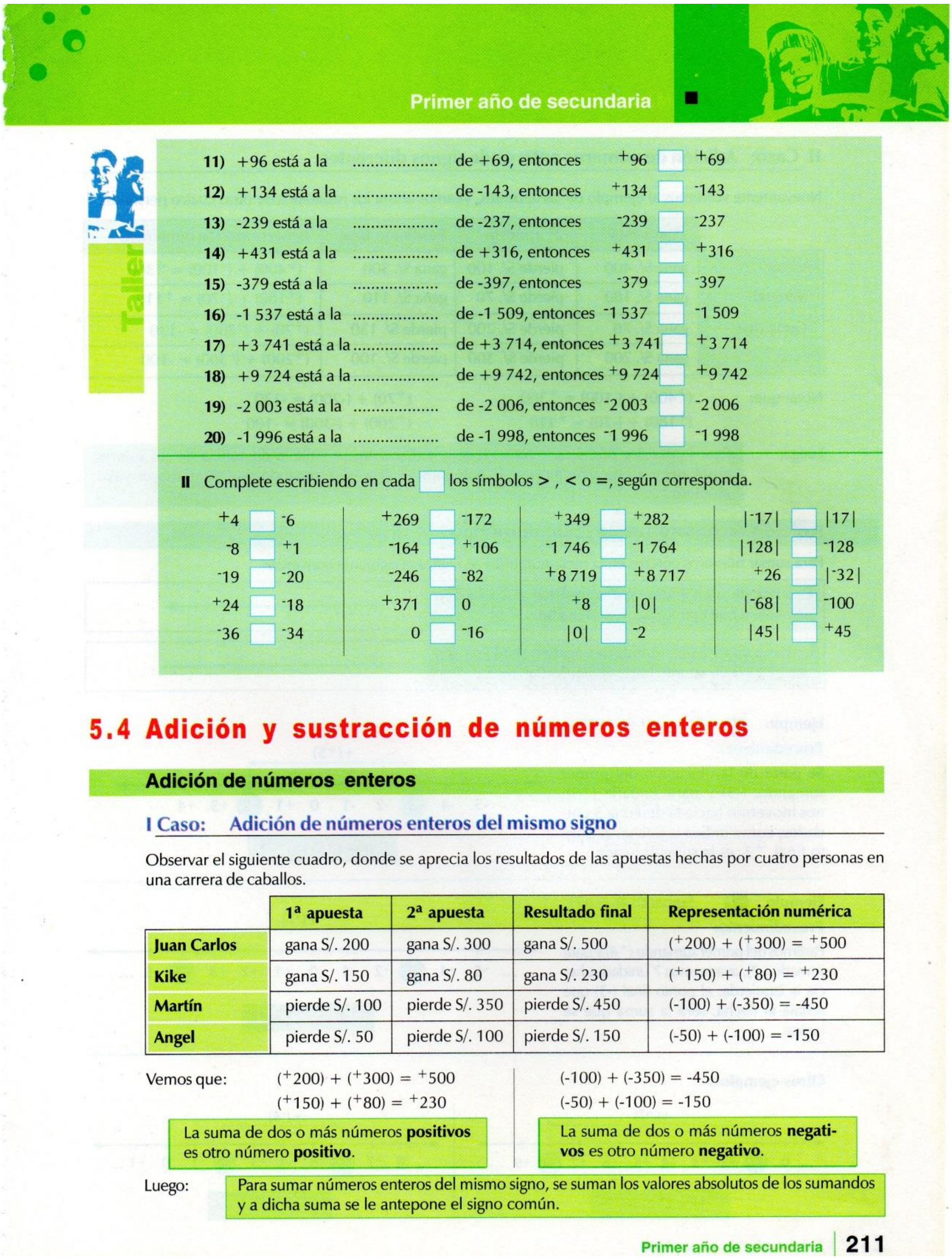
6) $^{-}4$ está a la .... de $^{-}12$, entonces $^{-}4$ ☐ $^{-}12$

7) $^{-}6$ está a la .... de $^{+}6$, entonces $^{-}6$ ☐ $^{+}6$

8) $^{-}1$ está a la .... de 0, entonces $^{-}1$ ☐ 0

9) $^{+}47$ está a la .... de +52, entonces +47 ☐ +52

10) -87 está a la .... de -90, entonces -87 ☐ -90



Taller

11) +96 está a la .... de +69, entonces $^{+}96$ ☐ $^{+}69$

12) +134 está a la .... de -143, entonces $^{+}134$ ☐ $^{-}143$

13) -239 está a la .... de -237, entonces $^{-}239$ ☐ $^{-}237$

14) +431 está a la .... de +316, entonces $^{+}431$ ☐ $^{+}316$

15) -379 está a la .... de -397, entonces $^{-}379$ ☐ $^{-}397$

16) -1 537 está a la .... de -1 509, entonces $^{-}1\,537$ ☐ $^{-}1\,509$

17) +3 741 está a la.................. de +3 714, entonces $^{+}3\,741$ ☐ $^{+}3\,714$

18) +9 724 está a la.................. de +9 742, entonces $^{+}9\,724$ ☐ $^{+}9\,742$

19) -2 003 está a la .... de -2 006, entonces $^{-}2\,003$ ☐ $^{-}2\,006$

20) -1 996 está a la .... de -1 998, entonces $^{-}1\,996$ ☐ $^{-}1\,998$

II Complete escribiendo en cada ☐ los símbolos **>** , **<** o **=**, según corresponda.

$^{+}4$ ☐ $^{-}6$
$^{-}8$ ☐ $^{+}1$
$^{-}19$ ☐ $^{-}20$
$^{+}24$ ☐ $^{-}18$
$^{-}36$ ☐ $^{-}34$

$^{+}269$ ☐ $^{-}172$
$^{-}164$ ☐ $^{+}106$
$^{-}246$ ☐ $^{-}82$
$^{+}371$ ☐ 0
0 ☐ $^{-}16$

$^{+}349$ ☐ $^{+}282$
$^{-}1\,746$ ☐ $^{-}1\,764$
$^{+}8\,719$ ☐ $^{+}8\,717$
$^{+}8$ ☐ $|0|$
$|0|$ ☐ $^{-}2$

$|^{-}17|$ ☐ $|17|$
$|128|$ ☐ $^{-}128$
$^{+}26$ ☐ $|^{-}32|$
$|^{-}68|$ ☐ $^{-}100$
$|45|$ ☐ $^{+}45$

5.4 Adición y sustracción de números enteros

Adición de números enteros

I Caso: Adición de números enteros del mismo signo

Observar el siguiente cuadro, donde se aprecia los resultados de las apuestas hechas por cuatro personas en una carrera de caballos.

	1ª apuesta	2ª apuesta	Resultado final	Representación numérica
Juan Carlos	gana S/. 200	gana S/. 300	gana S/. 500	$(^{+}200) + (^{+}300) = {}^{+}500$
Kike	gana S/. 150	gana S/. 80	gana S/. 230	$(^{+}150) + (^{+}80) = {}^{+}230$
Martín	pierde S/. 100	pierde S/. 350	pierde S/. 450	(-100) + (-350) = -450
Angel	pierde S/. 50	pierde S/. 100	pierde S/. 150	(-50) + (-100) = -150

Vemos que:

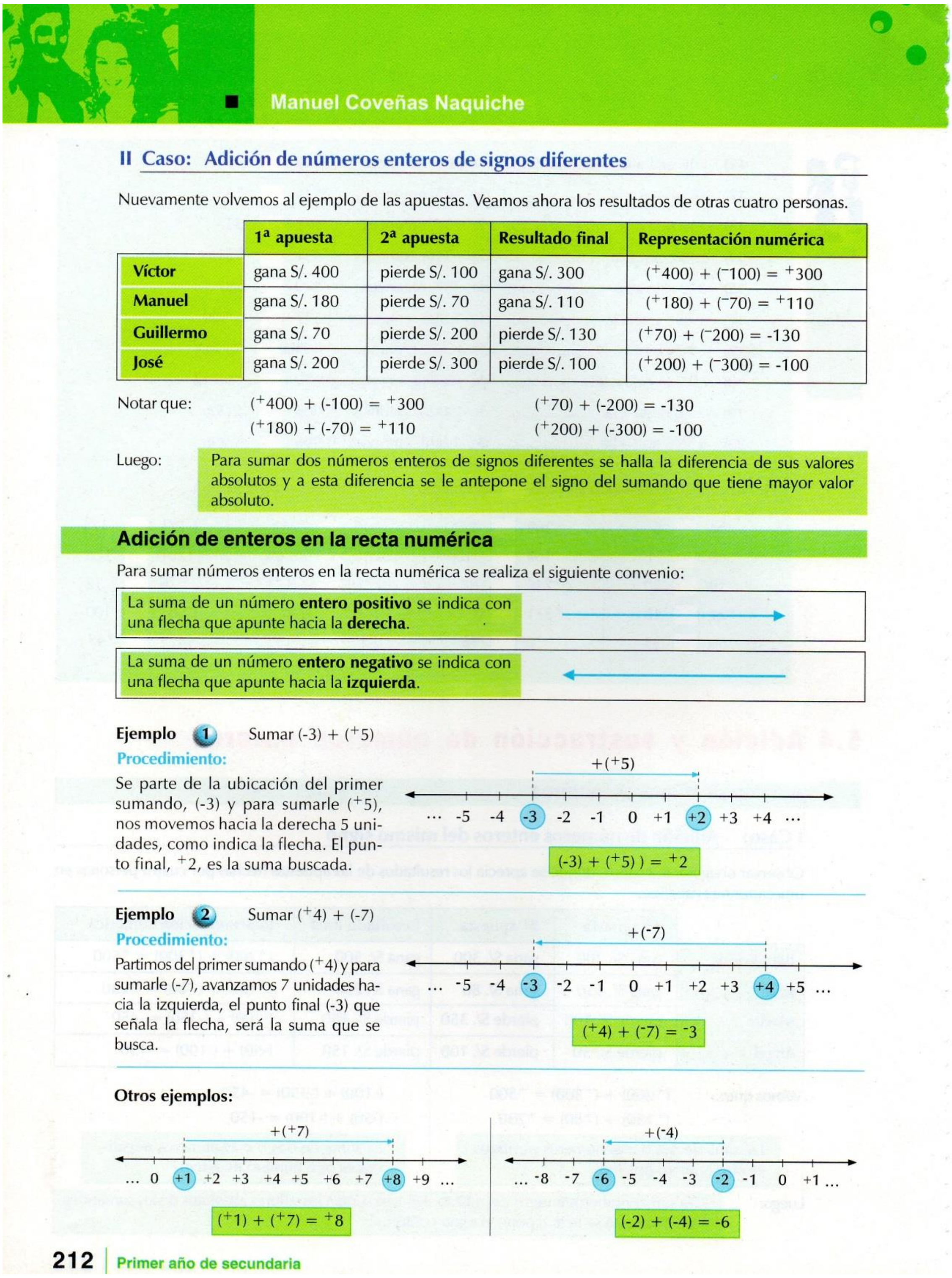
$(^{+}200) + (^{+}300) = {}^{+}500$
$(^{+}150) + (^{+}80) = {}^{+}230$

La suma de dos o más números **positivos** es otro número **positivo**.

(-100) + (-350) = -450
(-50) + (-100) = -150

La suma de dos o más números **negativos** es otro número **negativo**.

Luego: Para sumar números enteros del mismo signo, se suman los valores absolutos de los sumandos y a dicha suma se le antepone el signo común.



II Caso: Adición de números enteros de signos diferentes

Nuevamente volvemos al ejemplo de las apuestas. Veamos ahora los resultados de otras cuatro personas.

	1ª apuesta	2ª apuesta	Resultado final	Representación numérica
Víctor	gana S/. 400	pierde S/. 100	gana S/. 300	$(^{+}400) + (^{-}100) = {}^{+}300$
Manuel	gana S/. 180	pierde S/. 70	gana S/. 110	$(^{+}180) + (^{-}70) = {}^{+}110$
Guillermo	gana S/. 70	pierde S/. 200	pierde S/. 130	$(^{+}70) + (^{-}200) = -130$
José	gana S/. 200	pierde S/. 300	pierde S/. 100	$(^{+}200) + (^{-}300) = -100$

Notar que:

$(^{+}400) + (-100) = {}^{+}300$

$(^{+}180) + (-70) = {}^{+}110$

$(^{+}70) + (-200) = -130$

$(^{+}200) + (-300) = -100$

Luego: Para sumar dos números enteros de signos diferentes se halla la diferencia de sus valores absolutos y a esta diferencia se le antepone el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.

Adición de enteros en la recta numérica

Para sumar números enteros en la recta numérica se realiza el siguiente convenio:

La suma de un número **entero positivo** se indica con una flecha que apunte hacia la **derecha**. →

La suma de un número **entero negativo** se indica con una flecha que apunte hacia la **izquierda**. ←

Ejemplo ① Sumar $(-3) + (^{+}5)$

Procedimiento:

Se parte de la ubicación del primer sumando, (-3) y para sumarle $(^{+}5)$, nos movemos hacia la derecha 5 unidades, como indica la flecha. El punto final, $^{+}2$, es la suma buscada.

$(-3) + (^{+}5)\ ) = {}^{+}2$

Ejemplo ② Sumar $(^{+}4) + (-7)$

Procedimiento:

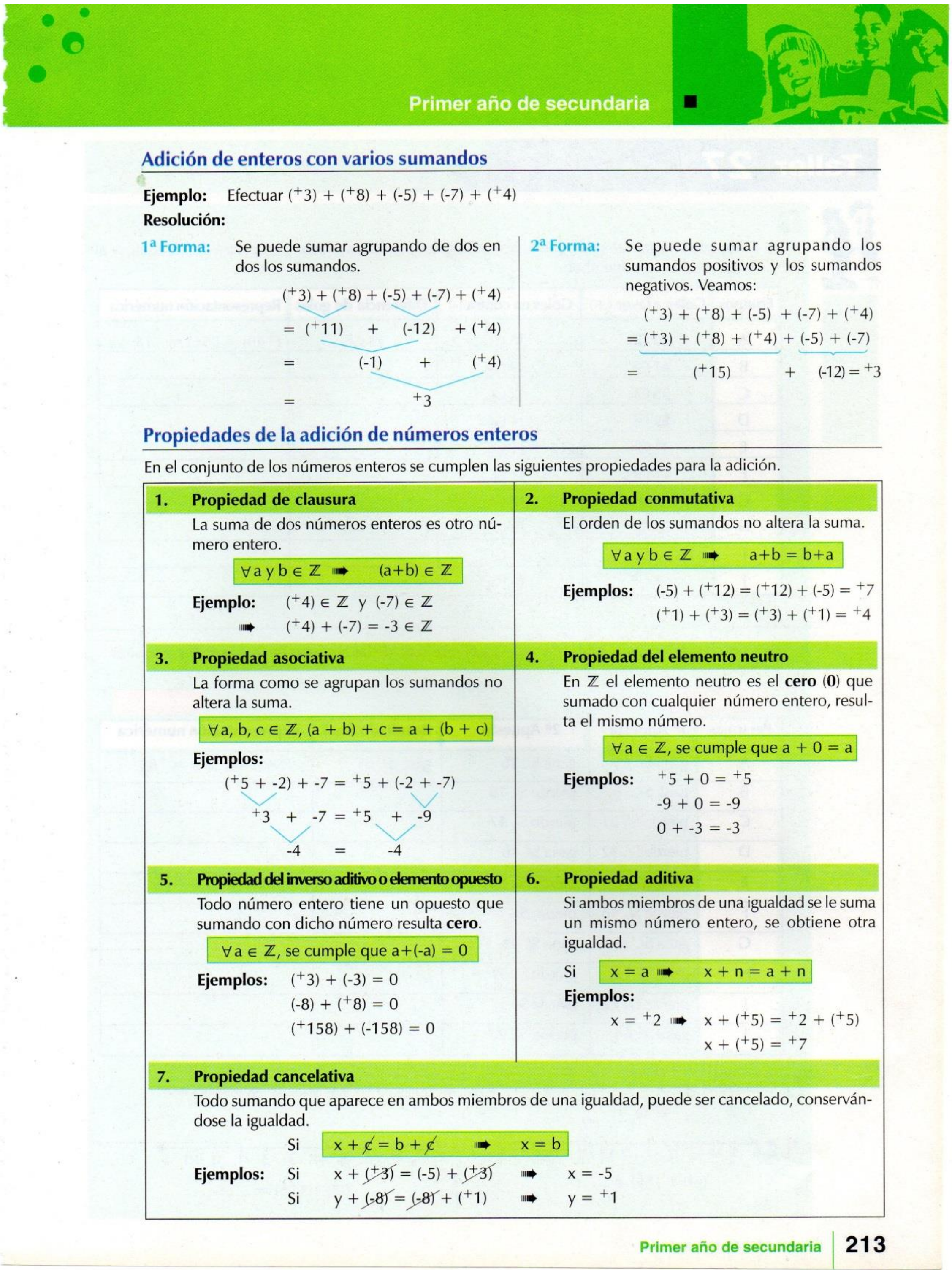
Partimos del primer sumando $(^{+}4)$ y para sumarle (-7), avanzamos 7 unidades hacia la izquierda, el punto final (-3) que señala la flecha, será la suma que se busca.

$(^{+}4) + (^{-}7) = {}^{-}3$

Otros ejemplos:

$(^{+}1) + (^{+}7) = {}^{+}8$

$(-2) + (-4) = -6$



Adición de enteros con varios sumandos

Ejemplo: Efectuar $(^+3) + (^+8) + (-5) + (-7) + (^+4)$

Resolución:

1ª Forma: Se puede sumar agrupando de dos en dos los sumandos.

$$(^+3) + (^+8) + (-5) + (-7) + (^+4)$$
$$= (^+11) + (-12) + (^+4)$$
$$= (-1) + (^+4)$$
$$= {}^+3$$

2ª Forma: Se puede sumar agrupando los sumandos positivos y los sumandos negativos. Veamos:

$$(^+3) + (^+8) + (-5) + (-7) + (^+4)$$
$$= \underbrace{(^+3) + (^+8) + (^+4)} + \underbrace{(-5) + (-7)}$$
$$= (^+15) + (-12) = {}^+3$$

Propiedades de la adición de números enteros

En el conjunto de los números enteros se cumplen las siguientes propiedades para la adición.

1. Propiedad de clausura

La suma de dos números enteros es otro número entero.

$\forall a \text{ y } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{Z}$

Ejemplo: $(^+4) \in \mathbb{Z}$ y $(-7) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (^+4) + (-7) = -3 \in \mathbb{Z}$

2. Propiedad conmutativa

El orden de los sumandos no altera la suma.

$\forall a \text{ y } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+b = b+a$

Ejemplos: $(-5) + (^+12) = (^+12) + (-5) = {}^+7$

$(^+1) + (^+3) = (^+3) + (^+1) = {}^+4$

3. Propiedad asociativa

La forma como se agrupan los sumandos no altera la suma.

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a + b) + c = a + (b + c)$

Ejemplos:

$$(^+5 + -2) + -7 = {}^+5 + (-2 + -7)$$
$$^+3 + -7 = {}^+5 + -9$$
$$-4 = -4$$

4. Propiedad del elemento neutro

En $\mathbb{Z}$ el elemento neutro es el **cero (0)** que sumado con cualquier número entero, resulta el mismo número.

$\forall a \in \mathbb{Z}$, se cumple que $a + 0 = a$

Ejemplos: $^+5 + 0 = {}^+5$

$-9 + 0 = -9$

$0 + -3 = -3$

5. Propiedad del inverso aditivo o elemento opuesto

Todo número entero tiene un opuesto que sumando con dicho número resulta **cero**.

$\forall a \in \mathbb{Z}$, se cumple que $a+(-a) = 0$

Ejemplos: $(^+3) + (-3) = 0$

$(-8) + (^+8) = 0$

$(^+158) + (-158) = 0$

6. Propiedad aditiva

Si ambos miembros de una igualdad se le suma un mismo número entero, se obtiene otra igualdad.

Si $x = a \Rightarrow x + n = a + n$

Ejemplos:

$x = {}^+2 \Rightarrow x + (^+5) = {}^+2 + (^+5)$

$x + (^+5) = {}^+7$

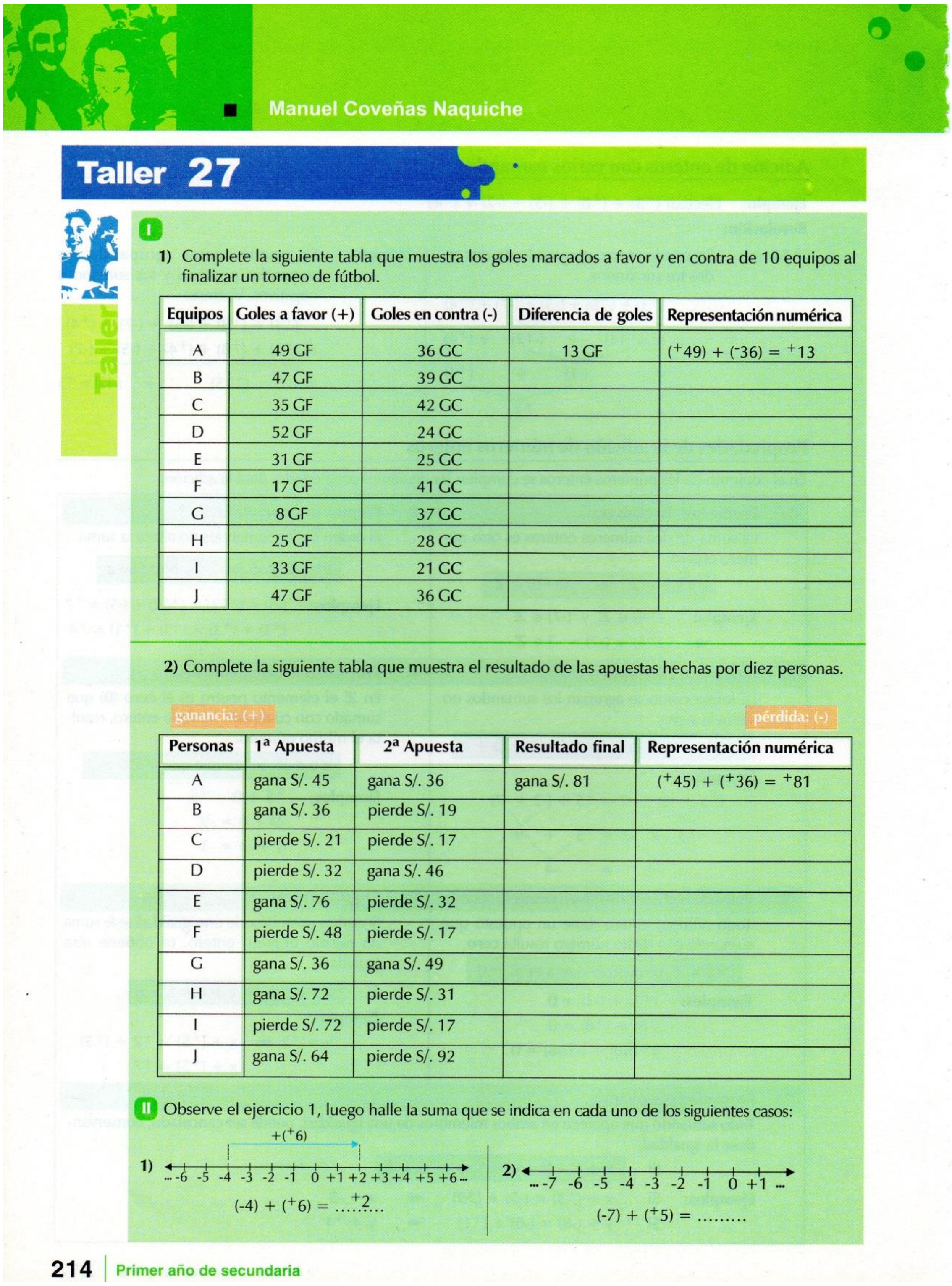
7. Propiedad cancelativa

Todo sumando que aparece en ambos miembros de una igualdad, puede ser cancelado, conservándose la igualdad.

Si $x + \cancel{c} = b + \cancel{c} \Rightarrow x = b$

Ejemplos: Si $x + \cancel{(^+3)} = (-5) + \cancel{(^+3)} \Rightarrow x = -5$

Si $y + \cancel{(-8)} = \cancel{(-8)} + (^+1) \Rightarrow y = {}^+1$



Taller 27

I

1) Complete la siguiente tabla que muestra los goles marcados a favor y en contra de 10 equipos al finalizar un torneo de fútbol.

Equipos	Goles a favor (+)	Goles en contra (-)	Diferencia de goles	Representación numérica
A	49 GF	36 GC	13 GF	$(^{+}49) + (^{-}36) = {}^{+}13$
B	47 GF	39 GC		
C	35 GF	42 GC		
D	52 GF	24 GC		
E	31 GF	25 GC		
F	17 GF	41 GC		
G	8 GF	37 GC		
H	25 GF	28 GC		
I	33 GF	21 GC		
J	47 GF	36 GC		

2) Complete la siguiente tabla que muestra el resultado de las apuestas hechas por diez personas.

ganancia: (+)

pérdida: (-)

Personas	1ª Apuesta	2ª Apuesta	Resultado final	Representación numérica
A	gana S/. 45	gana S/. 36	gana S/. 81	$(^{+}45) + (^{+}36) = {}^{+}81$
B	gana S/. 36	pierde S/. 19		
C	pierde S/. 21	pierde S/. 17		
D	pierde S/. 32	gana S/. 46		
E	gana S/. 76	pierde S/. 32		
F	pierde S/. 48	pierde S/. 17		
G	gana S/. 36	gana S/. 49		
H	gana S/. 72	pierde S/. 31		
I	pierde S/. 72	pierde S/. 17		
J	gana S/. 64	pierde S/. 92		

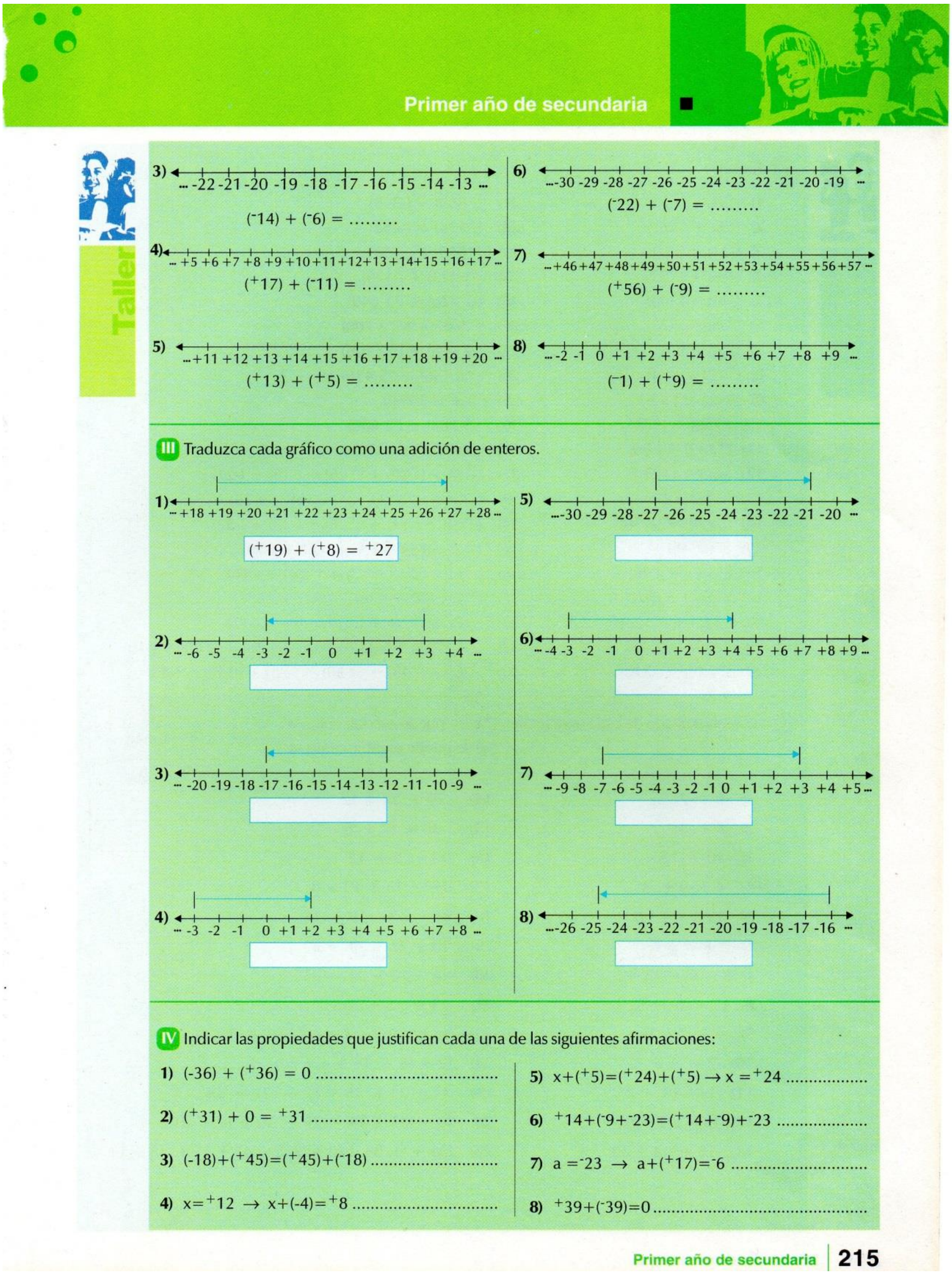
II Observe el ejercicio 1, luego halle la suma que se indica en cada uno de los siguientes casos:

1)

$(-4) + (^{+}6) =$ …+2…

2)

$(-7) + (^{+}5) =$ ………



Taller

3) ... -22 -21 -20 -19 -18 -17 -16 -15 -14 -13 ...

$(^{-}14) + (^{-}6) =$ ....

4) ... +5 +6 +7 +8 +9 +10 +11 +12 +13 +14 +15 +16 +17 ...

$(^{+}17) + (^{-}11) =$ ....

5) ... +11 +12 +13 +14 +15 +16 +17 +18 +19 +20 ...

$(^{+}13) + (^{+}5) =$ ....

6) ... -30 -29 -28 -27 -26 -25 -24 -23 -22 -21 -20 -19 ...

$(^{-}22) + (^{-}7) =$ ....

7) ... +46 +47 +48 +49 +50 +51 +52 +53 +54 +55 +56 +57 ...

$(^{+}56) + (^{-}9) =$ ....

8) ... -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 ...

$(^{-}1) + (^{+}9) =$ ....

III Traduzca cada gráfico como una adición de enteros.

1) ... +18 +19 +20 +21 +22 +23 +24 +25 +26 +27 +28 ...

$(^{+}19) + (^{+}8) = {}^{+}27$

2) ... -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 ...

3) ... -20 -19 -18 -17 -16 -15 -14 -13 -12 -11 -10 -9 ...

4) ... -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 ...

5) ... -30 -29 -28 -27 -26 -25 -24 -23 -22 -21 -20 ...

6) ... -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 ...

7) ... -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 ...

8) ... -26 -25 -24 -23 -22 -21 -20 -19 -18 -17 -16 ...

IV Indicar las propiedades que justifican cada una de las siguientes afirmaciones:

1) $(-36) + (^{+}36) = 0$ ....

2) $(^{+}31) + 0 = {}^{+}31$ ....

3) $(-18)+(^{+}45)=(^{+}45)+(^{-}18)$ ....

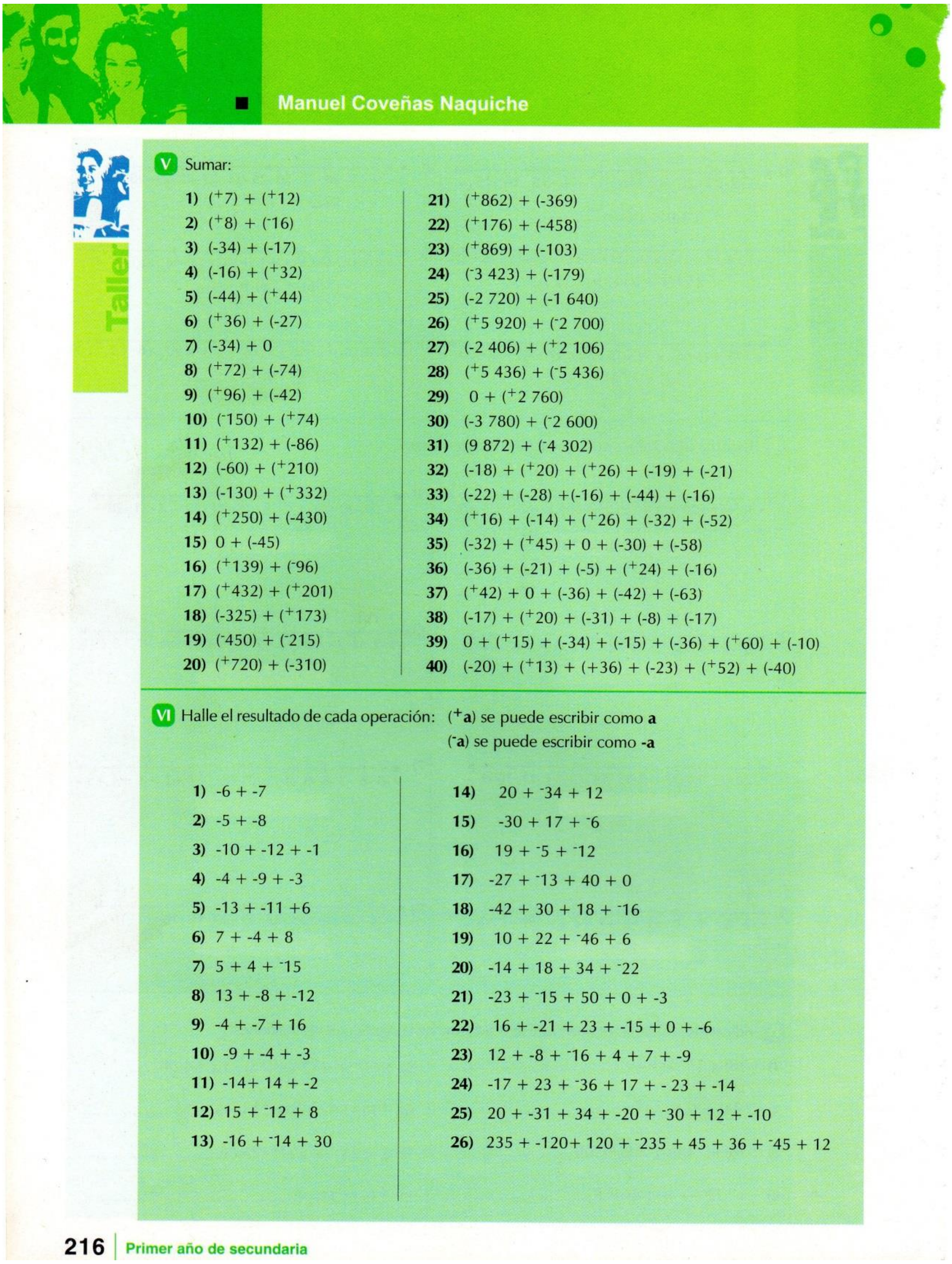
4) $x={}^{+}12 \rightarrow x+(-4)={}^{+}8$ ....

5) $x+(^{+}5)=(^{+}24)+(^{+}5) \rightarrow x = {}^{+}24$ ....

6) ${}^{+}14+(^{-}9+{}^{-}23)=(^{+}14+{}^{-}9)+{}^{-}23$ ....

7) $a = {}^{-}23 \rightarrow a+(^{+}17)={}^{-}6$ ....

8) ${}^{+}39+(^{-}39)=0$ ....



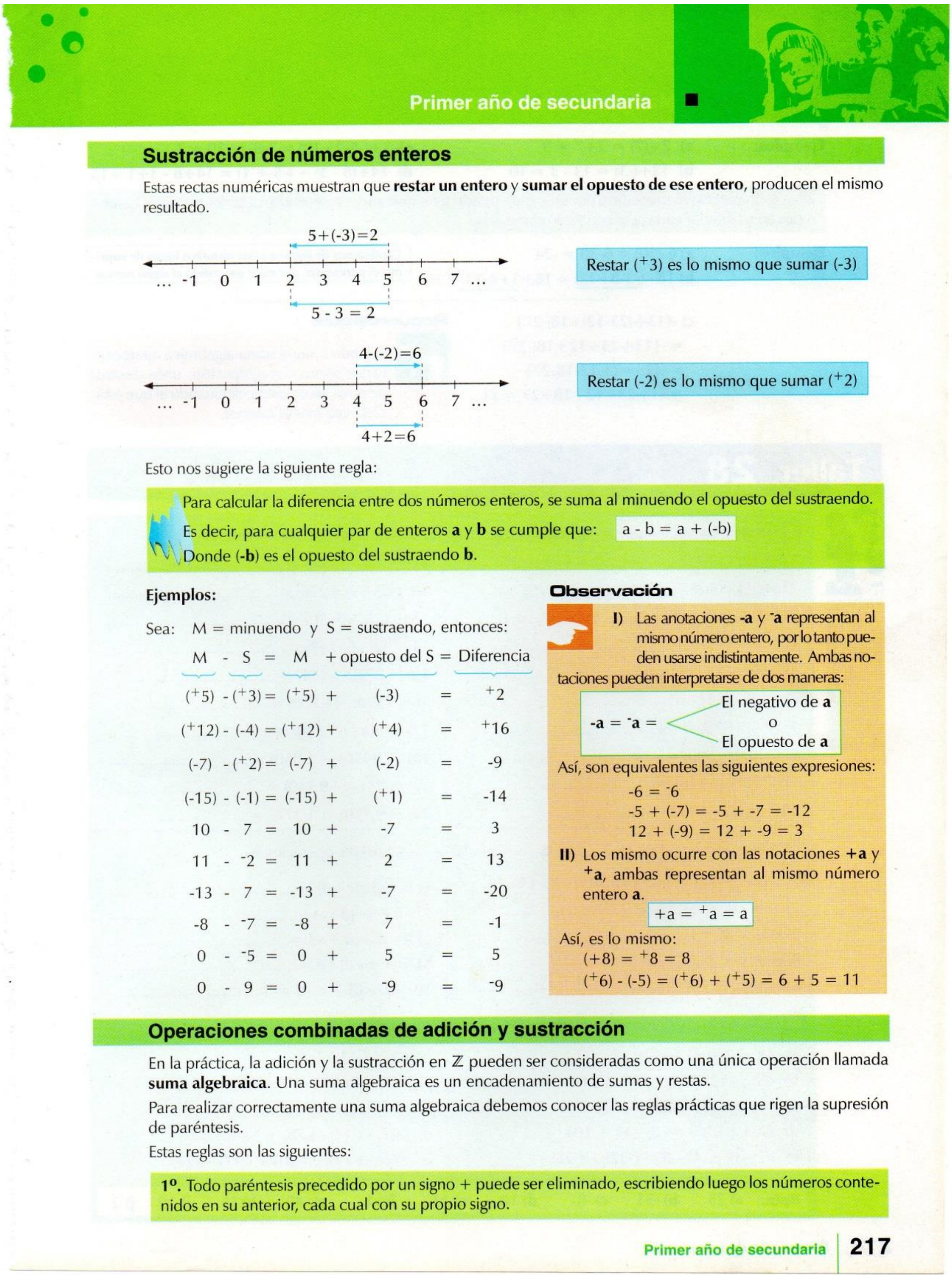
Taller

V Sumar:

1) $(^{+}7) + (^{+}12)$
2) $(^{+}8) + (^{-}16)$
3) $(-34) + (-17)$
4) $(-16) + (^{+}32)$
5) $(-44) + (^{+}44)$
6) $(^{+}36) + (-27)$
7) $(-34) + 0$
8) $(^{+}72) + (-74)$
9) $(^{+}96) + (-42)$
10) $(^{-}150) + (^{+}74)$
11) $(^{+}132) + (-86)$
12) $(-60) + (^{+}210)$
13) $(-130) + (^{+}332)$
14) $(^{+}250) + (-430)$
15) $0 + (-45)$
16) $(^{+}139) + (^{-}96)$
17) $(^{+}432) + (^{+}201)$
18) $(-325) + (^{+}173)$
19) $(^{-}450) + (^{-}215)$
20) $(^{+}720) + (-310)$
21) $(^{+}862) + (-369)$
22) $(^{+}176) + (-458)$
23) $(^{+}869) + (-103)$
24) $(^{-}3\ 423) + (-179)$
25) $(-2\ 720) + (-1\ 640)$
26) $(^{+}5\ 920) + (^{-}2\ 700)$
27) $(-2\ 406) + (^{+}2\ 106)$
28) $(^{+}5\ 436) + (^{-}5\ 436)$
29) $0 + (^{+}2\ 760)$
30) $(-3\ 780) + (^{-}2\ 600)$
31) $(9\ 872) + (^{-}4\ 302)$
32) $(-18) + (^{+}20) + (^{+}26) + (-19) + (-21)$
33) $(-22) + (-28) +(-16) + (-44) + (-16)$
34) $(^{+}16) + (-14) + (^{+}26) + (-32) + (-52)$
35) $(-32) + (^{+}45) + 0 + (-30) + (-58)$
36) $(-36) + (-21) + (-5) + (^{+}24) + (-16)$
37) $(^{+}42) + 0 + (-36) + (-42) + (-63)$
38) $(-17) + (^{+}20) + (-31) + (-8) + (-17)$
39) $0 + (^{+}15) + (-34) + (-15) + (-36) + (^{+}60) + (-10)$
40) $(-20) + (^{+}13) + (+36) + (-23) + (^{+}52) + (-40)$

VI Halle el resultado de cada operación: $(^{+}\mathbf{a})$ se puede escribir como **a**
$(^{-}\mathbf{a})$ se puede escribir como **-a**

1) $-6 + -7$
2) $-5 + -8$
3) $-10 + -12 + -1$
4) $-4 + -9 + -3$
5) $-13 + -11 +6$
6) $7 + -4 + 8$
7) $5 + 4 + {}^{-}15$
8) $13 + -8 + -12$
9) $-4 + -7 + 16$
10) $-9 + -4 + -3$
11) $-14+ 14 + -2$
12) $15 + {}^{-}12 + 8$
13) $-16 + {}^{-}14 + 30$
14) $20 + {}^{-}34 + 12$
15) $-30 + 17 + {}^{-}6$
16) $19 + {}^{-}5 + {}^{-}12$
17) $-27 + {}^{-}13 + 40 + 0$
18) $-42 + 30 + 18 + {}^{-}16$
19) $10 + 22 + {}^{-}46 + 6$
20) $-14 + 18 + 34 + {}^{-}22$
21) $-23 + {}^{-}15 + 50 + 0 + -3$
22) $16 + -21 + 23 + -15 + 0 + -6$
23) $12 + -8 + {}^{-}16 + 4 + 7 + -9$
24) $-17 + 23 + {}^{-}36 + 17 + - 23 + -14$
25) $20 + -31 + 34 + -20 + {}^{-}30 + 12 + -10$
26) $235 + -120+ 120 + {}^{-}235 + 45 + 36 + {}^{-}45 + 12$



Sustracción de números enteros

Estas rectas numéricas muestran que **restar un entero** y **sumar el opuesto de ese entero**, producen el mismo resultado.

$5+(-3)=2$

… -1 0 1 2 3 4 5 6 7 …

$5-3=2$

Restar ($^+3$) es lo mismo que sumar (-3)

$4-(-2)=6$

… -1 0 1 2 3 4 5 6 7 …

$4+2=6$

Restar (-2) es lo mismo que sumar ($^+2$)

Esto nos sugiere la siguiente regla:

Para calcular la diferencia entre dos números enteros, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.
Es decir, para cualquier par de enteros **a** y **b** se cumple que: $\boxed{a - b = a + (-b)}$
Donde (**-b**) es el opuesto del sustraendo **b**.

Ejemplos:

Sea: M = minuendo y S = sustraendo, entonces:

$$\underbrace{M} - \underbrace{S} = \underbrace{M} + \underbrace{\text{opuesto del S}} = \underbrace{\text{Diferencia}}$$

$(^+5) - (^+3) = (^+5) + (-3) = {}^+2$

$(^+12) - (-4) = (^+12) + (^+4) = {}^+16$

$(-7) - (^+2) = (-7) + (-2) = -9$

$(-15) - (-1) = (-15) + (^+1) = -14$

$10 - 7 = 10 + -7 = 3$

$11 - {}^-2 = 11 + 2 = 13$

$-13 - 7 = -13 + -7 = -20$

$-8 - {}^-7 = -8 + 7 = -1$

$0 - {}^-5 = 0 + 5 = 5$

$0 - 9 = 0 + {}^-9 = {}^-9$

Observación

I) Las anotaciones **-a** y **$^-$a** representan al mismo número entero, por lo tanto pueden usarse indistintamente. Ambas notaciones pueden interpretarse de dos maneras:

-a = **$^-$a** = El negativo de **a** o El opuesto de **a**

Así, son equivalentes las siguientes expresiones:

$-6 = {}^-6$

$-5 + (-7) = -5 + -7 = -12$

$12 + (-9) = 12 + -9 = 3$

II) Los mismo ocurre con las notaciones **+a** y **$^+$a**, ambas representan al mismo número entero **a**.

$\boxed{+a = {}^+a = a}$

Así, es lo mismo:

$(+8) = {}^+8 = 8$

$(^+6) - (-5) = (^+6) + (^+5) = 6 + 5 = 11$

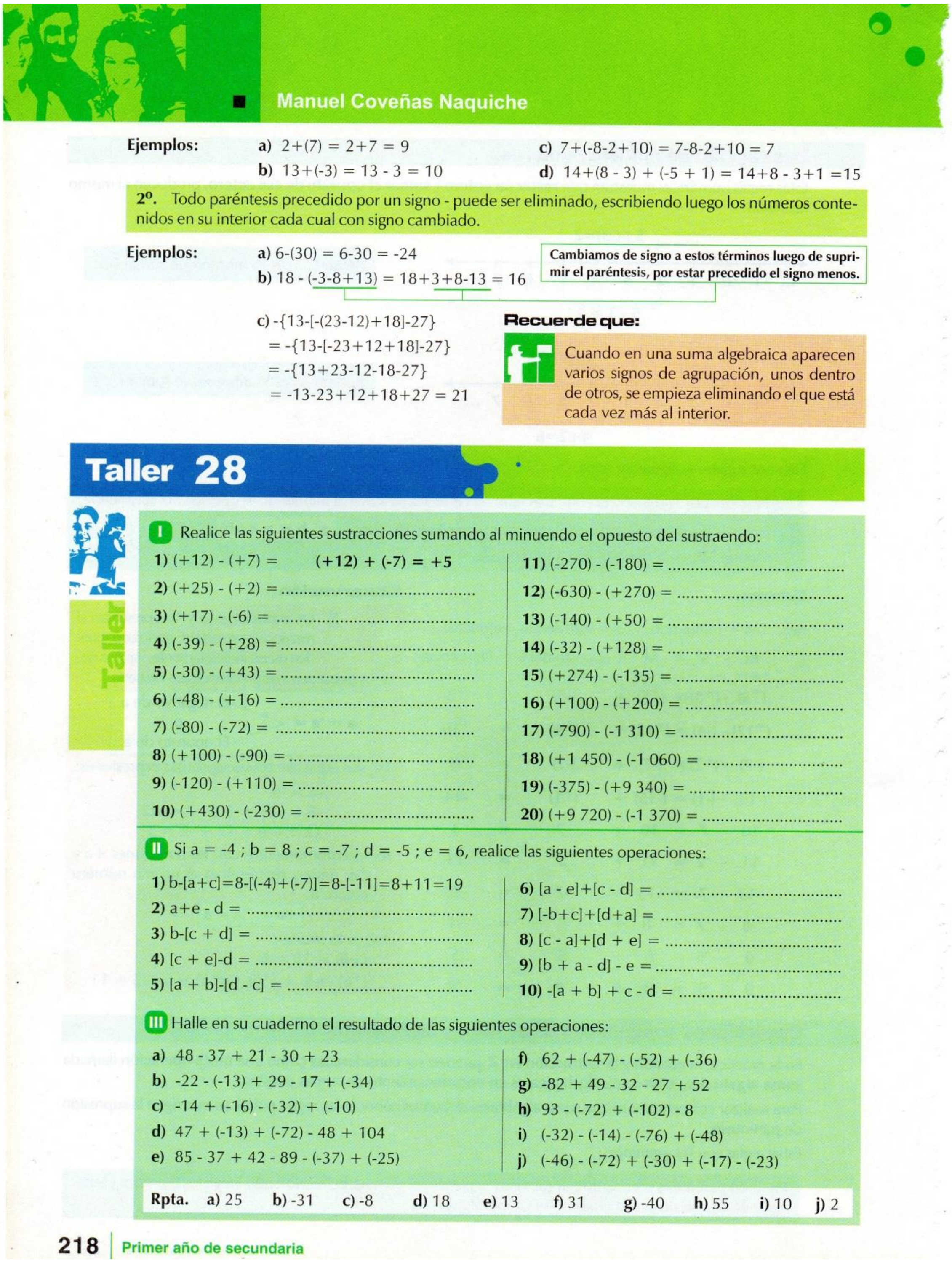
Operaciones combinadas de adición y sustracción

En la práctica, la adición y la sustracción en ℤ pueden ser consideradas como una única operación llamada **suma algebraica**. Una suma algebraica es un encadenamiento de sumas y restas.

Para realizar correctamente una suma algebraica debemos conocer las reglas prácticas que rigen la supresión de paréntesis.

Estas reglas son las siguientes:

1º. Todo paréntesis precedido por un signo + puede ser eliminado, escribiendo luego los números contenidos en su anterior, cada cual con su propio signo.



Ejemplos:

a) 2+(7) = 2+7 = 9

b) 13+(-3) = 13 - 3 = 10

c) 7+(-8-2+10) = 7-8-2+10 = 7

d) 14+(8 - 3) + (-5 + 1) = 14+8 - 3+1 =15

2º. Todo paréntesis precedido por un signo - puede ser eliminado, escribiendo luego los números contenidos en su interior cada cual con signo cambiado.

Ejemplos:

a) 6-(30) = 6-30 = -24

b) 18 - $\underline{(-3-8+13)}$ = 18+$\underline{3+8-13}$ = 16

Cambiamos de signo a estos términos luego de suprimir el paréntesis, por estar precedido el signo menos.

c) -{13-[-(23-12)+18]-27}
= -{13-[-23+12+18]-27}
= -{13+23-12-18-27}
= -13-23+12+18+27 = 21

Recuerde que:

Cuando en una suma algebraica aparecen varios signos de agrupación, unos dentro de otros, se empieza eliminando el que está cada vez más al interior.

Taller 28

I Realice las siguientes sustracciones sumando al minuendo el opuesto del sustraendo:

1) (+12) - (+7) = **(+12) + (-7) = +5**
2) (+25) - (+2) = ...
3) (+17) - (-6) = ...
4) (-39) - (+28) = ...
5) (-30) - (+43) = ...
6) (-48) - (+16) = ...
7) (-80) - (-72) = ...
8) (+100) - (-90) = ...
9) (-120) - (+110) = ...
10) (+430) - (-230) = ...
11) (-270) - (-180) = ...
12) (-630) - (+270) = ...
13) (-140) - (+50) = ...
14) (-32) - (+128) = ...
15) (+274) - (-135) = ...
16) (+100) - (+200) = ...
17) (-790) - (-1 310) = ...
18) (+1 450) - (-1 060) = ...
19) (-375) - (+9 340) = ...
20) (+9 720) - (-1 370) = ...

II Si a = -4 ; b = 8 ; c = -7 ; d = -5 ; e = 6, realice las siguientes operaciones:

1) b-[a+c]=8-[(-4)+(-7)]=8-[-11]=8+11=19
2) a+e - d = ...
3) b-[c + d] = ...
4) [c + e]-d = ...
5) [a + b]-[d - c] = ...
6) [a - e]+[c - d] = ...
7) [-b+c]+[d+a] = ...
8) [c - a]+[d + e] = ...
9) [b + a - d] - e = ...
10) -[a + b] + c - d = ...

III Halle en su cuaderno el resultado de las siguientes operaciones:

a) 48 - 37 + 21 - 30 + 23
b) -22 - (-13) + 29 - 17 + (-34)
c) -14 + (-16) - (-32) + (-10)
d) 47 + (-13) + (-72) - 48 + 104
e) 85 - 37 + 42 - 89 - (-37) + (-25)
f) 62 + (-47) - (-52) + (-36)
g) -82 + 49 - 32 - 27 + 52
h) 93 - (-72) + (-102) - 8
i) (-32) - (-14) - (-76) + (-48)
j) (-46) - (-72) + (-30) + (-17) - (-23)

Rpta. **a)** 25 **b)** -31 **c)** -8 **d)** 18 **e)** 13 **f)** 31 **g)** -40 **h)** 55 **i)** 10 **j)** 2

Taller

IV Halle el resultado de cada una de las siguientes operaciones combinadas.

a) $(8 - 4 + 7 -2) + (-13 + 5 - 7) - (-4 - 3 + 8)$
b) $(-16 + 7 - 5) + (12 - 5 - 8) - (-7 + 2 + 9)$
c) $[(-4 + 12) + (7 - 3)] - [(9 + 6 - 5) - (8 - 12)]$
d) $23 - [-(17 + 14 - 35) + 24] - [8 - 4 -(3 + 7)]$
e) $30 - (18 - 19 + 21) - (23 - 20 - 2) - [12 - (8-5)]$
f) $(-36 + 24) + (18 - 15) - (39 + 7 - 42)$
g) $\{87 -[(49 - 26) - 33]\} - 85 + (12 - 7 + 8)$
h) $21 -\{-(31 + 8) + [-5-(4 - 9)]\}-[-(3 - 7)]$
i) $57 - (41 - 36) - \{53-[26+(13 - 45)]+12\}$
j) $\{39-[27 - 42 - (19 - 35) + 18] -37\}+8$
k) $23 -[-(21 - 56) + 19] - (54 + 8 - 37)+26$
l) $62-(14 - 17 + 15) - [12+(36 + 41)-18] + 35$

Rpta. **a)** -7 **b)** -19 **c)** -2 **d)** 1 **e)** 0 **f)** -13 **g)** 25 **h)** 56 **i)** -19 **j)** -9 **k)** -30 **l)** 14

V Resuelve suprimiendo paréntesis, corchetes y llaves.

a) $-9+\{5 - 2 - [4 + 3 - (7 + 6 - 9)+5]\} - 4$
b) $3+\{4 - 5 - 3+[6 - (2 + 3) - 5] + 9\} +5$
c) $-[4 + 3 - 5 - 8 + (7 - 9) - 3] +8$
d) $-(6 + 4 - 7) + [- 8 + 5 - (3 - 2) + 7] - 9$
e) $1 - 6 + [4 - 3 - (7 + 6 - 5) - 8] + 9 - (7 + 6)$
f) $13 - (4 + 3 - 5) + [7 - (3 + 2 - 6) + 8] - 3$
g) $22 - [- 5 + 7 - (8 + 3 - 4) + 13 - 12 + 6] +8$
h) $\{- 8 + 7 - [- 4 + 5 - (3 + 2 - 8) + 9] - 5\} +4$
i) $18 - \{4 + 7 - [5 + 4 - 3 + (8 - 2) + 6] -7\}$
j) $(-12 + 7) + (-6 - 5) - [4 + 3 -(5 - 8) + 17]$

Rpta. **a)** -18 **b)** 9 **c)** 19 **d)** -9 **e)** -24 **f)** 24 **g)** 28 **h)** -15 **i)** 32 **j)** -43

5.5 Ecuaciones con suma y resta de enteros

Para resolver ecuaciones con números enteros como $x+8 = {}^{-}13$ o $t+({}^{-}5) = 17$, necesitamos que en uno de los miembros de la ecuación quede la incógnita sola y que ésta no aparezca en el otro miembro. Los pasos siguientes muestran cómo utilizar las propiedades aditiva y del elemento opuesto para lograr tal fin.

Solución de ecuaciones con suma y resta

El procedimiento para encontrar la solución de una ecuación con suma y resta de enteros es el siguiente:

1. Se determina qué operación (suma o resta) se aplica a la incógnita.
2. Se adiciona a ambos miembros de la ecuación el opuesto de la operación que se aplica a la incógnita (**propiedad aditiva**).
3. Se anula el sumando asociado a la incógnita, aplicando la propiedad del elemento opuesto, logrando de esta manera aislar a la incógnita.
4. Se efectúa la operación en el otro miembro cuyo resultado es la solución de la ecuación.

Ejemplo ①

Resolver y verificar: $x + 8 = -13$

Resolución:

$x + 8= -13$ A la incógnita x se le está aplicando la operación +8, en el primer miembro.

$x + \cancel{8} \mathbf{-} \cancel{\mathbf{8}} = -13 \mathbf{- 8}$ Para anular 8, restamos 8 a ambos miembros de la ecuación, logrando aislar a la variable.

$x + 0 = -13 + -8$

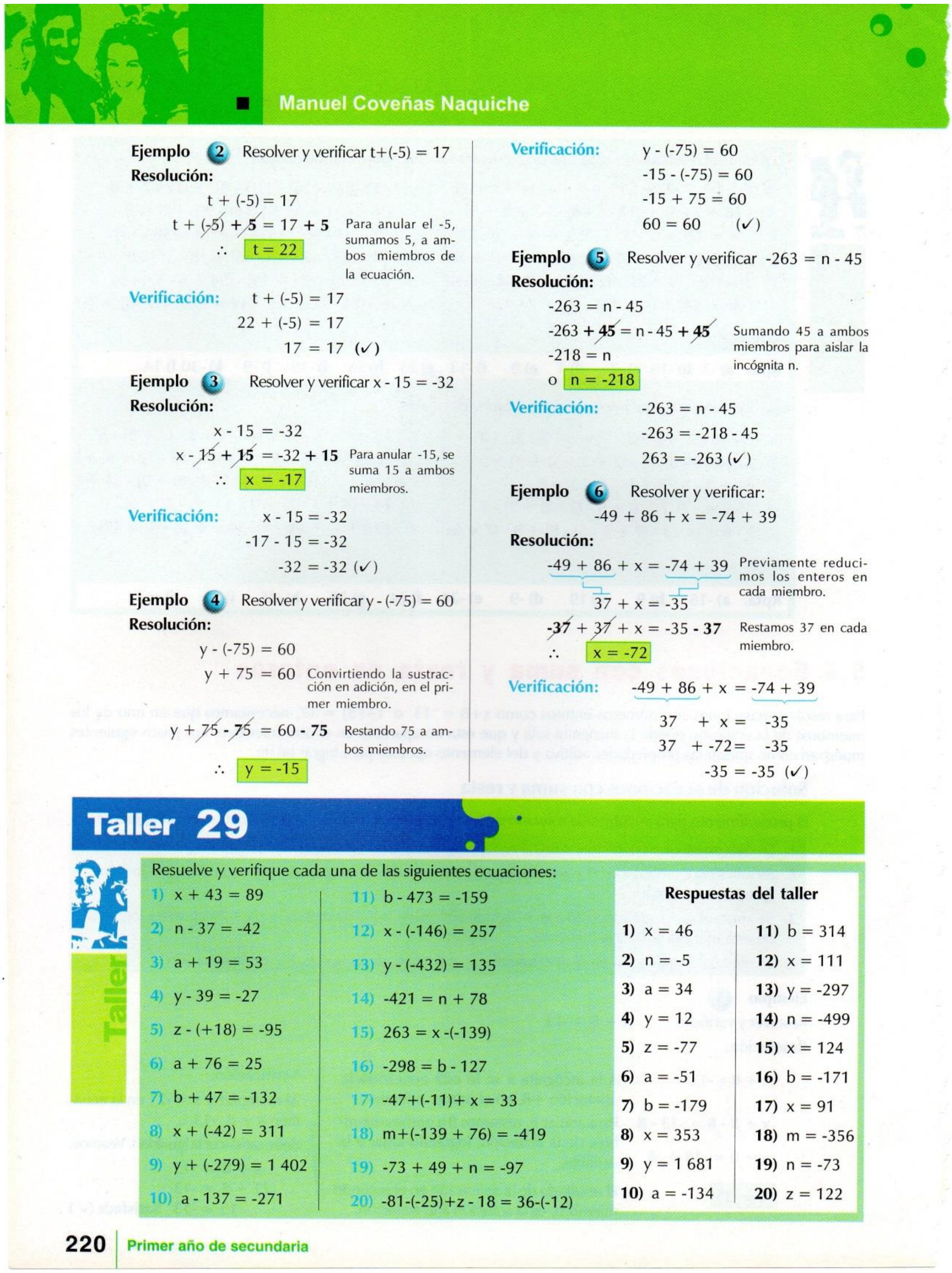
$\boxed{x = -21}$ El resultado de la aplicación en el segundo miembro, es la solución a la ecuación.

Verificación:

Al reemplazar x = -21 en la ecuación x + 8 -13

debe satisfacer la igualdad. Veamos:

$$\begin{aligned} x + 8 &= -13 \\ -21 + 8 &= -13 \\ -13 &= -13 \end{aligned}$$ **Satisface** (✓)



Ejemplo ② Resolver y verificar $t+(-5) = 17$

Resolución:

$t + (-5) = 17$

$t + (\cancel{-5}) + \cancel{5} = 17 + 5$ Para anular el -5, sumamos 5, a ambos miembros de la ecuación.

$\therefore \boxed{t = 22}$

Verificación: $t + (-5) = 17$

$22 + (-5) = 17$

$17 = 17$ (✓)

Ejemplo ③ Resolver y verificar $x - 15 = -32$

Resolución:

$x - 15 = -32$

$x - \cancel{15} + \cancel{15} = -32 + 15$ Para anular -15, se suma 15 a ambos miembros.

$\therefore \boxed{x = -17}$

Verificación: $x - 15 = -32$

$-17 - 15 = -32$

$-32 = -32$ (✓)

Ejemplo ④ Resolver y verificar $y - (-75) = 60$

Resolución:

$y - (-75) = 60$

$y + 75 = 60$ Convirtiendo la sustracción en adición, en el primer miembro.

$y + \cancel{75} - \cancel{75} = 60 - 75$ Restando 75 a ambos miembros.

$\therefore \boxed{y = -15}$

Verificación: $y - (-75) = 60$

$-15 - (-75) = 60$

$-15 + 75 = 60$

$60 = 60$ (✓)

Ejemplo ⑤ Resolver y verificar $-263 = n - 45$

Resolución:

$-263 = n - 45$

$-263 + \cancel{45} = n - 45 + \cancel{45}$ Sumando 45 a ambos miembros para aislar la incógnita n.

$-218 = n$

o $\boxed{n = -218}$

Verificación: $-263 = n - 45$

$-263 = -218 - 45$

$263 = -263$ (✓)

Ejemplo ⑥ Resolver y verificar:

$-49 + 86 + x = -74 + 39$

Resolución:

$\underbrace{-49 + 86}_{37} + x = \underbrace{-74 + 39}_{-35}$ Previamente reducimos los enteros en cada miembro.

$37 + x = -35$

$\cancel{-37} + \cancel{37} + x = -35 - 37$ Restamos 37 en cada miembro.

$\therefore \boxed{x = -72}$

Verificación: $\underbrace{-49 + 86} + x = \underbrace{-74 + 39}$

$37 + x = -35$

$37 + -72 = -35$

$-35 = -35$ (✓)

Taller 29

Resuelve y verifique cada una de las siguientes ecuaciones:

1) $x + 43 = 89$
2) $n - 37 = -42$
3) $a + 19 = 53$
4) $y - 39 = -27$
5) $z - (+18) = -95$
6) $a + 76 = 25$
7) $b + 47 = -132$
8) $x + (-42) = 311$
9) $y + (-279) = 1\,402$
10) $a - 137 = -271$
11) $b - 473 = -159$
12) $x - (-146) = 257$
13) $y - (-432) = 135$
14) $-421 = n + 78$
15) $263 = x -(-139)$
16) $-298 = b - 127$
17) $-47+(-11)+ x = 33$
18) $m+(-139 + 76) = -419$
19) $-73 + 49 + n = -97$
20) $-81-(-25)+z - 18 = 36-(-12)$

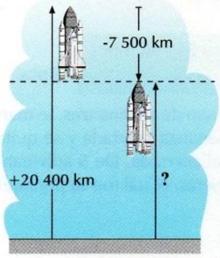
Respuestas del taller

1) $x = 46$
2) $n = -5$
3) $a = 34$
4) $y = 12$
5) $z = -77$
6) $a = -51$
7) $b = -179$
8) $x = 353$
9) $y = 1\,681$
10) $a = -134$
11) $b = 314$
12) $x = 111$
13) $y = -297$
14) $n = -499$
15) $x = 124$
16) $b = -171$
17) $x = 91$
18) $m = -356$
19) $n = -73$
20) $z = 122$

5.6 Problemas que se resuelven mediante la adición y sustracción de números enteros

Problema 1 En una prueba científica de la NASA un cohete subió 20 400 km y bajó luego 7 500 km. ¿A cuántos km está del punto de despegue?

Resolución:



i) Del enunciado tenemos dos situaciones:

- * Cuando el cohete sube su representación será: +20 400 km
- * Cuando el cohete desciende lo representamos así: -7 500 km

ii) Si queremos determinar a qué distancia está del punto de despegue tenemos que sumar sus dos desplazamientos, es decir:

(+20 400) + (-7 500 km) = +12 900 km

El cohete se encuentra a 12 900 km del punto de despegue **Rpta.**

Problema 2 Al realizar un trabajo de investigación con osos polares muertos, un grupo de científicos cogió uno de ellos y comprobó que tenía una temperatura de -5° C y luego de inyectarle una cierta sustancia su temperatura subió 38° C. ¿Cuál es la temperatura final del oso polar?

Resolución:

i) La temperatura inicial del oso fue: -5° C

ii) La temperatura después de la inyección al oso sube: +38° C

iii) Su temperatura final será la suma de ambas temperaturas:

$(^{-}5°\ C) + (^{+}38°\ C) = {}^{+}33°$

La temperatura final del oso es de $^{+}33°$ C **Rpta.**

Problema 3 Si Nayeli sale de su casa y camina 8 cuadras hacia el norte y luego 9 cuadras hacia el sur, a ¿qué distancia de su casa se encuentra?

Resolución:

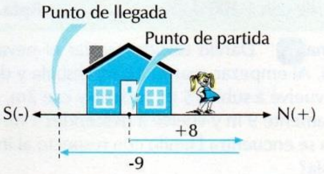
Consideremos los avances hacia el norte como positivos, y hacia el sur como negativos. Entonces:

i) Si Nayeli se dirige al norte quiere decir que avanzó 8 cuadras, es decir: $^{+}8$ C

ii) Cuando Nayeli camina al sur está retrocediendo 9 cuadras, puesto que el sur está opuesto al norte, o sea: $^{-}9$ C

iii) Para saber a qué distancia está de su casa habrá que sumar ambas cantidades:

$(^{+}8\ C) + (^{-}9\ C) = {}^{-}1\ C$



Se encuentra a una cuadra de su casa. **Rpta.**

Problema 4 Un cangrejo avanza hacia el norte 20 pasos, retrocede hacia el sur 8 pasos, vuelve a avanzar 6 pasos y finalmente retrocede 5 pasos. Averiguar:

i) ¿Cuántos pasos dio en total este crustáceo?

ii) ¿A cuántos pasos se encuentra del punto de partida, y en qué sentido?

Resolución:

i) Como nos preguntan cuántos pasos da en total el cangrejo, sólo hay que sumar todos ellos, sin tomar en cuenta el avance o el retroceso, es decir:

20 + 8 + 6 + 5 = 39

El cangrejo da 39 pasos **Rpta.**

ii) Para hallar a cuántos pasos se encuentra del punto de partida, consideramos a los pasos que avanza como positivos y a los pasos que retrocede como negativos, luego:

$(^{+}20) + (^{-}8) + (^{+}6) + (^{-}5) = {}^{+}13$

El cangrejo se encuentra a 13 pasos del punto de partida, en sentido norte. **Rpta.**

Problema 5 El cajero automático "Scoth" inició sus operaciones con 800 dólares; si hasta el medio día tuvo retiros por un total de 600 dólares luego del cual se le colocó otra remesa de 1 000 dólares, ¿con cuánto dinero "Scoth" reinició sus operaciones en la tarde?

Resolución:

Recordemos lo siguiente:

- Cuando se efectúa un retiro de dinero, la cantidad deberá considerase con signo negativo.
- Cuando se efectúa remesas de dinero, la cantidad deberá considerarse con signo positivo.
- Del problema tenemos:

Saldo inicial + ($^{-}$retiros) + ($^{+}$remesas) = Saldo en la tarde

$$\underbrace{800 + (^{-}600)}_{^{+}200} + (^{+}1\,000)$$

$$^{+}200 \quad + \quad 1\,000 = {}^{+}1\,200$$

El cajero "Scoth" reinició sus operaciones en la tarde con 1 200 dólares. **Rpta.**

Problema 6 Danilo decide escalar el nevado del Pastoruri. Al empezar avanza 18 m, resbala y desciende de 4 m, vuelve a subir 15 m, resbala y cae 2m, asciende nuevamente 9 m y vuelve a descender 1 m. ¿A qué distancia se encuentra Danilo con respecto al inicio de su travesía?

Resolución:

Tomemos en cuenta que:

- Cuando Danilo avance o asciende, las cantidades se consideran con signo positivo.
- Cuando Danilo resbale o desciende las cantidades se consideran con signo negativo.

Por tanto, para determinar la distancia con respecto al inicio se sumarán todas los desplazamientos de Danilo.

Luego del problema tenemos:

Distancia con respecto al inicio (D):

$$D = \underbrace{(^{+}18) + (^{-}4)} + \underbrace{(^{+}15) + (^{-}2)} + \underbrace{(^{+}9) + (^{-}1)}$$

$$D = \quad +14 \quad + \quad 13 \quad + \quad 8$$

$$D = \quad +35$$

La distancia en la que se encuentra Danilo con respecto al inicio de su travesía es 35 m **Rpta.**

Problema 7 En una Academia Preuniversitaria los alumnos del ciclo anual y semianual son 200 y 100 respectivamente en el mes de diciembre. ¿Cuántos alumnos habrá en el mes de mayo del año siguiente, sabiendo que los alumnos del ciclo anual se retiraron en abril y se matricularon para ese ciclo 150 alumnos nuevos?

Resolución:

- Debemos tener en cuenta antes de resolver este problema lo siguiente:
  - Cuando los alumnos se retiran se les considera son signo negativo.
  - Cuando los alumnos se matriculan o forman parte de un ciclo se les considera con signo positivo.
- Entonces del problema tenemos:

Total alumnos Mayo $= \underbrace{(^{+}200)+(^{+}100)}+\underbrace{(^{-}200)+(^{+}150)}$

$= \quad ^{+}300 \quad + \quad (^{-}50)$

Total alumnos Mayo $= 250$

En el mes de mayo hay 250 alumnos en esta academia. **Rpta.**

Problema 8 En un concurso de adivinanzas, se marca dos puntos por cada adivinanza acertada y se quita uno por cada adivinanza mal acertada. De 5 adivinanzas, Marisol acertó las 3 primeras. ¿Cuál fue su puntaje?

Resolución:

Del problema tenemos que:

- Cada acierto de adivinanza va con signo positivo.
- Cada desacierto lleva signo negativo.
- Para determinar el puntaje total debemos sumar tanto los aciertos como desaciertos de Marisol.

Entonces:

Puntaje total = (1ª Adiv.)+(2ª Adiv.)+(3ª Adiv.)+(4ª Adiv.)+(5ª Adiv.)

Puntaje total $= \underbrace{(^{+}2) + (^{+}2)} + \underbrace{(^{+}2) + (^{-}1)} + (^{-}1)$

Puntaje total $= \quad +4 \quad + \quad 1 \quad - \quad 1$

Puntaje total $= 4$

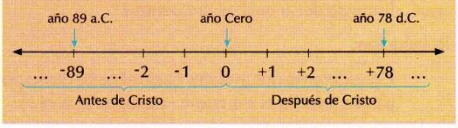
Marisol obtuvo 4 puntos **Rpta.**

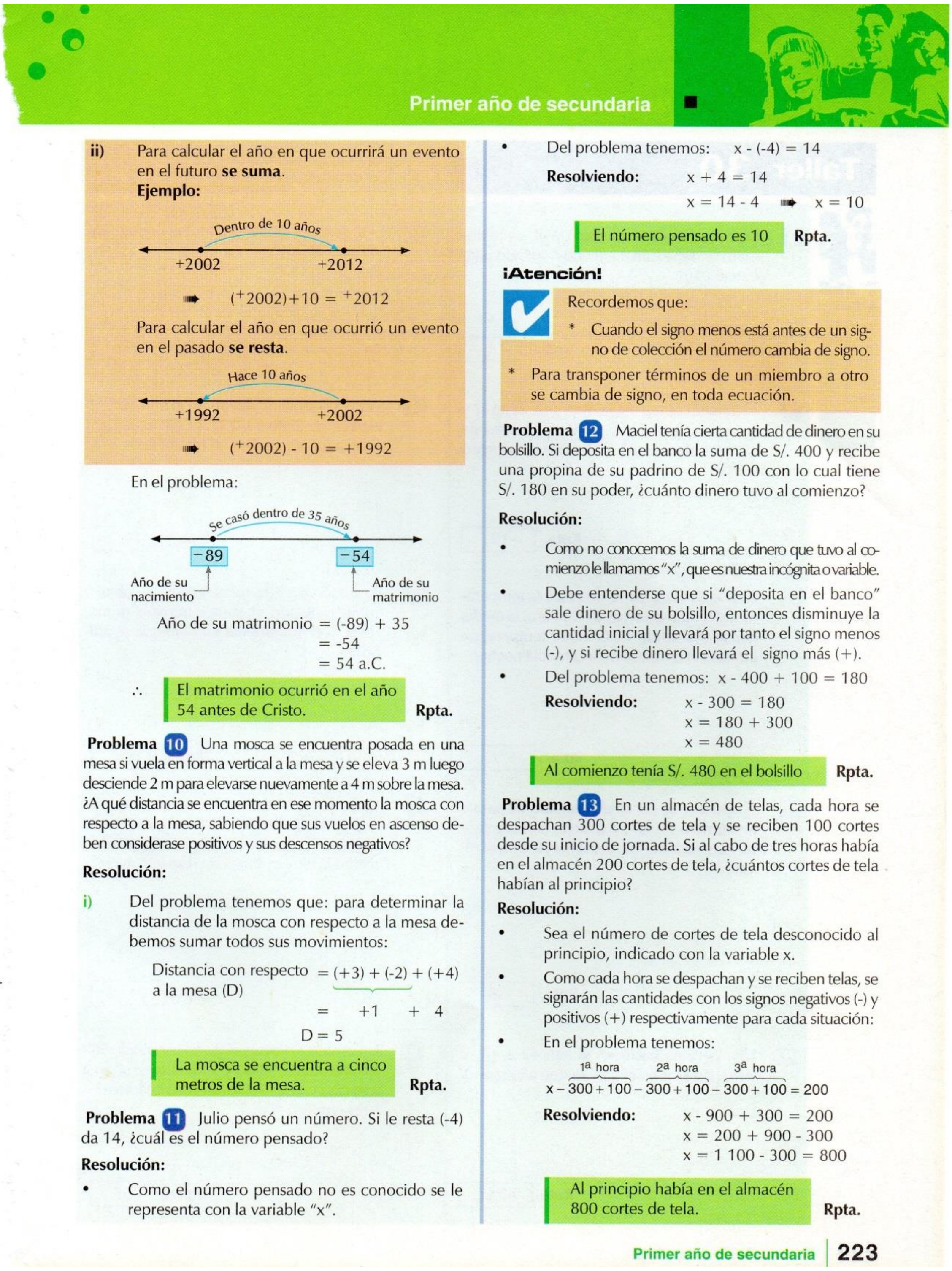
Problema 9 Cierto habitante de la Roma antigua nació en el año 89 a.C. Si se casó a los 35 años, ¿en qué año ocurrió su matrimonio?

Resolución:

Recuerde que:

i) Los años antes de Cristo (a.C.) se consideran como negativos y los años después de Cristo (d.C.) como positivos.





ii) Para calcular el año en que ocurrirá un evento en el futuro **se suma**.

Ejemplo:

Dentro de 10 años

+2002 +2012

➠ $(^{+}2002)+10 = {}^{+}2012$

Para calcular el año en que ocurrió un evento en el pasado **se resta**.

Hace 10 años

+1992 +2002

➠ $(^{+}2002) - 10 = +1992$

En el problema:

Se casó dentro de 35 años

−89 −54

Año de su nacimiento

Año de su matrimonio

$$\begin{aligned}\text{Año de su matrimonio} &= (-89) + 35\\ &= -54\\ &= 54 \text{ a.C.}\end{aligned}$$

∴ El matrimonio ocurrió en el año 54 antes de Cristo. **Rpta.**

Problema ⑩ Una mosca se encuentra posada en una mesa si vuela en forma vertical a la mesa y se eleva 3 m luego desciende 2 m para elevarse nuevamente a 4 m sobre la mesa. ¿A qué distancia se encuentra en ese momento la mosca con respecto a la mesa, sabiendo que sus vuelos en ascenso deben considerase positivos y sus descensos negativos?

Resolución:

i) Del problema tenemos que: para determinar la distancia de la mosca con respecto a la mesa debemos sumar todos sus movimientos:

$$\begin{aligned}\text{Distancia con respecto a la mesa (D)} &= \underbrace{(+3) + (-2)} + (+4)\\ &= \quad +1 \quad + \quad 4\\ D &= 5\end{aligned}$$

La mosca se encuentra a cinco metros de la mesa. **Rpta.**

Problema ⑪ Julio pensó un número. Si le resta (-4) da 14, ¿cuál es el número pensado?

Resolución:

- Como el número pensado no es conocido se le representa con la variable "x".
- Del problema tenemos: $x - (-4) = 14$

Resolviendo: $x + 4 = 14$

$x = 14 - 4$ ➠ $x = 10$

El número pensado es 10 **Rpta.**

¡Atención!

Recordemos que:

* Cuando el signo menos está antes de un signo de colección el número cambia de signo.

* Para transponer términos de un miembro a otro se cambia de signo, en toda ecuación.

Problema ⑫ Maciel tenía cierta cantidad de dinero en su bolsillo. Si deposita en el banco la suma de S/. 400 y recibe una propina de su padrino de S/. 100 con lo cual tiene S/. 180 en su poder, ¿cuánto dinero tuvo al comienzo?

Resolución:

- Como no conocemos la suma de dinero que tuvo al comienzo le llamamos "x", que es nuestra incógnita o variable.
- Debe entenderse que si "deposita en el banco" sale dinero de su bolsillo, entonces disminuye la cantidad inicial y llevará por tanto el signo menos (-), y si recibe dinero llevará el signo más (+).
- Del problema tenemos: $x - 400 + 100 = 180$

Resolviendo: $x - 300 = 180$

$x = 180 + 300$

$x = 480$

Al comienzo tenía S/. 480 en el bolsillo **Rpta.**

Problema ⑬ En un almacén de telas, cada hora se despachan 300 cortes de tela y se reciben 100 cortes desde su inicio de jornada. Si al cabo de tres horas había en el almacén 200 cortes de tela, ¿cuántos cortes de tela habían al principio?

Resolución:

- Sea el número de cortes de tela desconocido al principio, indicado con la variable x.
- Como cada hora se despachan y se reciben telas, se signarán las cantidades con los signos negativos (-) y positivos (+) respectivamente para cada situación:
- En el problema tenemos:

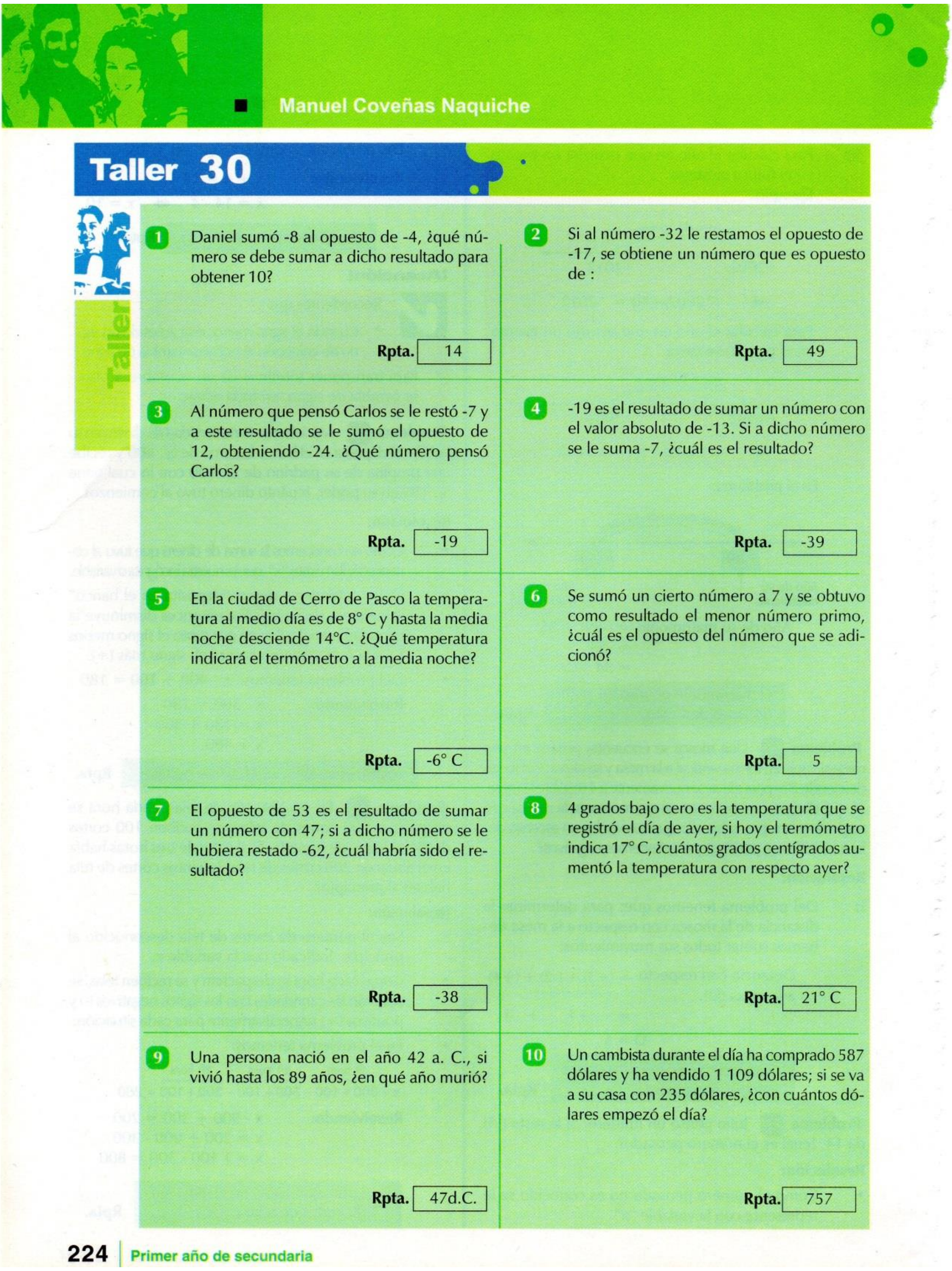
$$x - \overbrace{300 + 100}^{1^{a}\text{ hora}} - \overbrace{300 + 100}^{2^{a}\text{ hora}} - \overbrace{300 + 100}^{3^{a}\text{ hora}} = 200$$

Resolviendo: $x - 900 + 300 = 200$

$x = 200 + 900 - 300$

$x = 1\,100 - 300 = 800$

Al principio había en el almacén 800 cortes de tela. **Rpta.**



Taller 30

1 Daniel sumó -8 al opuesto de -4, ¿qué número se debe sumar a dicho resultado para obtener 10?

Rpta. 14

2 Si al número -32 le restamos el opuesto de -17, se obtiene un número que es opuesto de :

Rpta. 49

3 Al número que pensó Carlos se le restó -7 y a este resultado se le sumó el opuesto de 12, obteniendo -24. ¿Qué número pensó Carlos?

Rpta. -19

4 -19 es el resultado de sumar un número con el valor absoluto de -13. Si a dicho número se le suma -7, ¿cuál es el resultado?

Rpta. -39

5 En la ciudad de Cerro de Pasco la temperatura al medio día es de 8° C y hasta la media noche desciende 14°C. ¿Qué temperatura indicará el termómetro a la media noche?

Rpta. -6° C

6 Se sumó un cierto número a 7 y se obtuvo como resultado el menor número primo, ¿cuál es el opuesto del número que se adicionó?

Rpta. 5

7 El opuesto de 53 es el resultado de sumar un número con 47; si a dicho número se le hubiera restado -62, ¿cuál habría sido el resultado?

Rpta. -38

8 4 grados bajo cero es la temperatura que se registró el día de ayer, si hoy el termómetro indica 17° C, ¿cuántos grados centígrados aumentó la temperatura con respecto ayer?

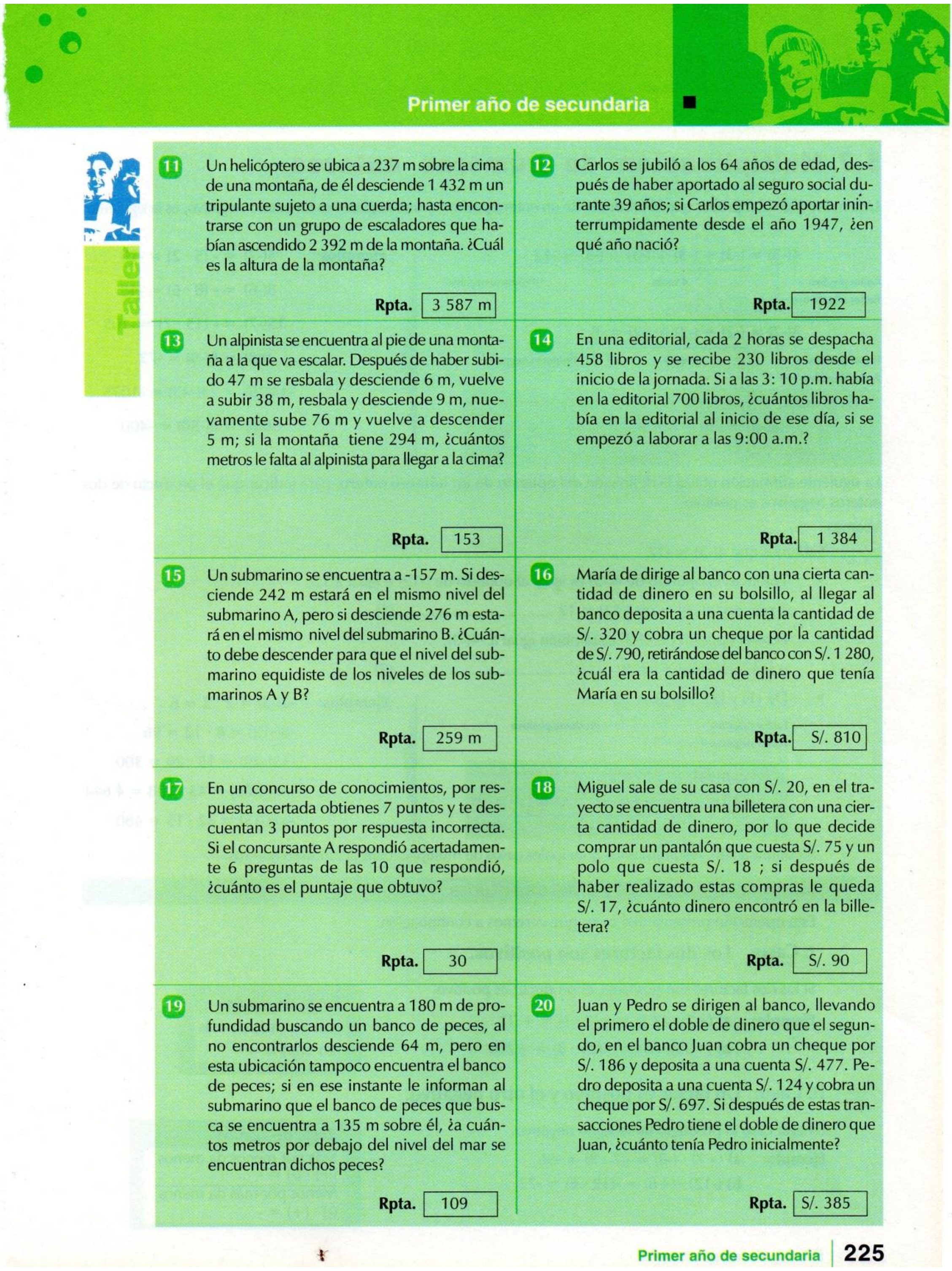
Rpta. 21° C

9 Una persona nació en el año 42 a. C., si vivió hasta los 89 años, ¿en qué año murió?

Rpta. 47d.C.

10 Un cambista durante el día ha comprado 587 dólares y ha vendido 1 109 dólares; si se va a su casa con 235 dólares, ¿con cuántos dólares empezó el día?

Rpta. 757



11 Un helicóptero se ubica a 237 m sobre la cima de una montaña, de él desciende 1 432 m un tripulante sujeto a una cuerda; hasta encontrarse con un grupo de escaladores que habían ascendido 2 392 m de la montaña. ¿Cuál es la altura de la montaña?

Rpta. 3 587 m

12 Carlos se jubiló a los 64 años de edad, después de haber aportado al seguro social durante 39 años; si Carlos empezó aportar ininterrumpidamente desde el año 1947, ¿en qué año nació?

Rpta. 1922

13 Un alpinista se encuentra al pie de una montaña a la que va escalar. Después de haber subido 47 m se resbala y desciende 6 m, vuelve a subir 38 m, resbala y desciende 9 m, nuevamente sube 76 m y vuelve a descender 5 m; si la montaña tiene 294 m, ¿cuántos metros le falta al alpinista para llegar a la cima?

Rpta. 153

14 En una editorial, cada 2 horas se despacha 458 libros y se recibe 230 libros desde el inicio de la jornada. Si a las 3: 10 p.m. había en la editorial 700 libros, ¿cuántos libros había en la editorial al inicio de ese día, si se empezó a laborar a las 9:00 a.m.?

Rpta. 1 384

15 Un submarino se encuentra a -157 m. Si desciende 242 m estará en el mismo nivel del submarino A, pero si desciende 276 m estará en el mismo nivel del submarino B. ¿Cuánto debe descender para que el nivel del submarino equidiste de los niveles de los submarinos A y B?

Rpta. 259 m

16 María de dirige al banco con una cierta cantidad de dinero en su bolsillo, al llegar al banco deposita a una cuenta la cantidad de S/. 320 y cobra un cheque por la cantidad de S/. 790, retirándose del banco con S/. 1 280, ¿cuál era la cantidad de dinero que tenía María en su bolsillo?

Rpta. S/. 810

17 En un concurso de conocimientos, por respuesta acertada obtienes 7 puntos y te descuentan 3 puntos por respuesta incorrecta. Si el concursante A respondió acertadamente 6 preguntas de las 10 que respondió, ¿cuánto es el puntaje que obtuvo?

Rpta. 30

18 Miguel sale de su casa con S/. 20, en el trayecto se encuentra una billetera con una cierta cantidad de dinero, por lo que decide comprar un pantalón que cuesta S/. 75 y un polo que cuesta S/. 18 ; si después de haber realizado estas compras le queda S/. 17, ¿cuánto dinero encontró en la billetera?

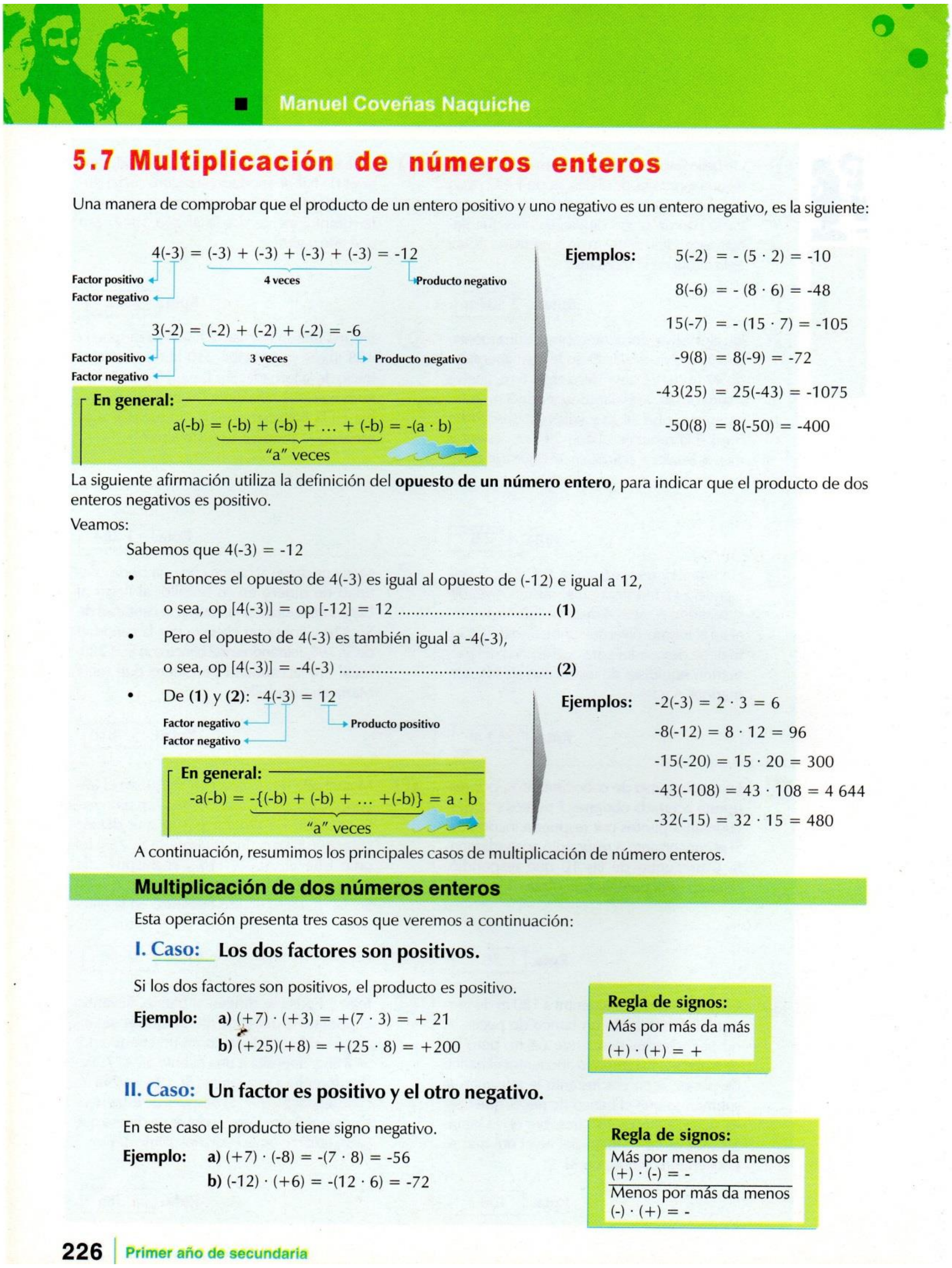
Rpta. S/. 90

19 Un submarino se encuentra a 180 m de profundidad buscando un banco de peces, al no encontrarlos desciende 64 m, pero en esta ubicación tampoco encuentra el banco de peces; si en ese instante le informan al submarino que el banco de peces que busca se encuentra a 135 m sobre él, ¿a cuántos metros por debajo del nivel del mar se encuentran dichos peces?

Rpta. 109

20 Juan y Pedro se dirigen al banco, llevando el primero el doble de dinero que el segundo, en el banco Juan cobra un cheque por S/. 186 y deposita a una cuenta S/. 477. Pedro deposita a una cuenta S/. 124 y cobra un cheque por S/. 697. Si después de estas transacciones Pedro tiene el doble de dinero que Juan, ¿cuánto tenía Pedro inicialmente?

Rpta. S/. 385



5.7 Multiplicación de números enteros

Una manera de comprobar que el producto de un entero positivo y uno negativo es un entero negativo, es la siguiente:

$$4(-3) = \underbrace{(-3) + (-3) + (-3) + (-3)}_{\text{4 veces}} = -12$$

Factor positivo

Factor negativo

Producto negativo

$$3(-2) = \underbrace{(-2) + (-2) + (-2)}_{\text{3 veces}} = -6$$

Factor positivo

Factor negativo

Producto negativo

En general:

$$a(-b) = \underbrace{(-b) + (-b) + \ldots + (-b)}_{\text{"a" veces}} = -(a \cdot b)$$

Ejemplos:

$5(-2) = -(5 \cdot 2) = -10$

$8(-6) = -(8 \cdot 6) = -48$

$15(-7) = -(15 \cdot 7) = -105$

$-9(8) = 8(-9) = -72$

$-43(25) = 25(-43) = -1075$

$-50(8) = 8(-50) = -400$

La siguiente afirmación utiliza la definición del **opuesto de un número entero**, para indicar que el producto de dos enteros negativos es positivo.

Veamos:

Sabemos que 4(-3) = -12

- Entonces el opuesto de 4(-3) es igual al opuesto de (-12) e igual a 12, o sea, op [4(-3)] = op [-12] = 12 .... **(1)**
- Pero el opuesto de 4(-3) es también igual a -4(-3), o sea, op [4(-3)] = -4(-3) .... **(2)**
- De **(1)** y **(2)**: -4(-3) = 12

Factor negativo

Factor negativo

Producto positivo

En general:

$$-a(-b) = -\underbrace{\{(-b) + (-b) + \ldots + (-b)\}}_{\text{"a" veces}} = a \cdot b$$

Ejemplos:

$-2(-3) = 2 \cdot 3 = 6$

$-8(-12) = 8 \cdot 12 = 96$

$-15(-20) = 15 \cdot 20 = 300$

$-43(-108) = 43 \cdot 108 = 4\,644$

$-32(-15) = 32 \cdot 15 = 480$

A continuación, resumimos los principales casos de multiplicación de número enteros.

Multiplicación de dos números enteros

Esta operación presenta tres casos que veremos a continuación:

I. Caso: Los dos factores son positivos.

Si los dos factores son positivos, el producto es positivo.

Ejemplo: **a)** $(+7) \cdot (+3) = +(7 \cdot 3) = +21$

b) $(+25)(+8) = +(25 \cdot 8) = +200$

Regla de signos:

Más por más da más

$(+) \cdot (+) = +$

II. Caso: Un factor es positivo y el otro negativo.

En este caso el producto tiene signo negativo.

Ejemplo: **a)** $(+7) \cdot (-8) = -(7 \cdot 8) = -56$

b) $(-12) \cdot (+6) = -(12 \cdot 6) = -72$

Regla de signos:

Más por menos da menos

$(+) \cdot (-) = -$

Menos por más da menos

$(-) \cdot (+) = -$

III. Caso: Los dos factores son negativos

Si los dos factores son negativos, el producto es positivo.

Ejemplos:

a) (-5) · (-3) = +(5 · 3) = +15
b) (-9) · (-12) = +(9 · 12) = +108

Regla de signos:
Menos por menos da más
(-) . (-) = +

Resumiendo:

Si los dos factores tienen

igual signo
el producto es positivo
(+) · (+) = +
(-) . (-) = +
Ejemplos:
(+7) · (+9) = +63
(-5) · (-4) = +20

distinto signo
el producto es negativo
(+) · (-) = -
(-) · (+) = -
Ejemplos:
(+6) · (-2) = -12
(-15) · (+3) = -45

Multiplicación de tres o más números enteros

Se multiplica agrupando convenientemente los factores de dos en dos.

Ejemplo: Efectuar (-5) · (+2) · (+7) · (-3)

Resolución:

$$\underbrace{(-5)\cdot(+2)}\cdot\underbrace{(+7)\cdot(-3)}$$
$$=\underbrace{(-10)\quad\cdot\quad(-21)}$$
$$=\quad +210$$

¡Atención!

Supresión del signo ×
Cuando los factores de un producto se representan por letras se suele omitir el signo de multiplicar.

Escribiremos pues, **ab** en lugar de **a** × **b** o de **a · b**

También se suprime el signo de multiplicar cuando algún factor está en un paréntesis, se escribe pues:

a(b + c) en vez de; a × (b + c)

y también: 3a + 5 en vez de: 3× a + 5

Recuerde que:

$$\underbrace{9}_{\text{factor}} \times \underbrace{7}_{\text{factor}} = \underbrace{63}_{\text{producto}}$$

En realidad, como cada dos signos (-) da un signo (+), el cálculo se realiza de acuerdo con la siguiente regla:
El valor absoluto del producto se obtiene multiplicando los valores absolutos de los factores.
El producto es positivo si el número de factores negativos es **par**, y es negativo si el número es **impar**.

Ejemplos:

a) 2 · (-3) · 4 · (-5) = 120 ➠ (El producto es + ya que el número de factores negativos es par)

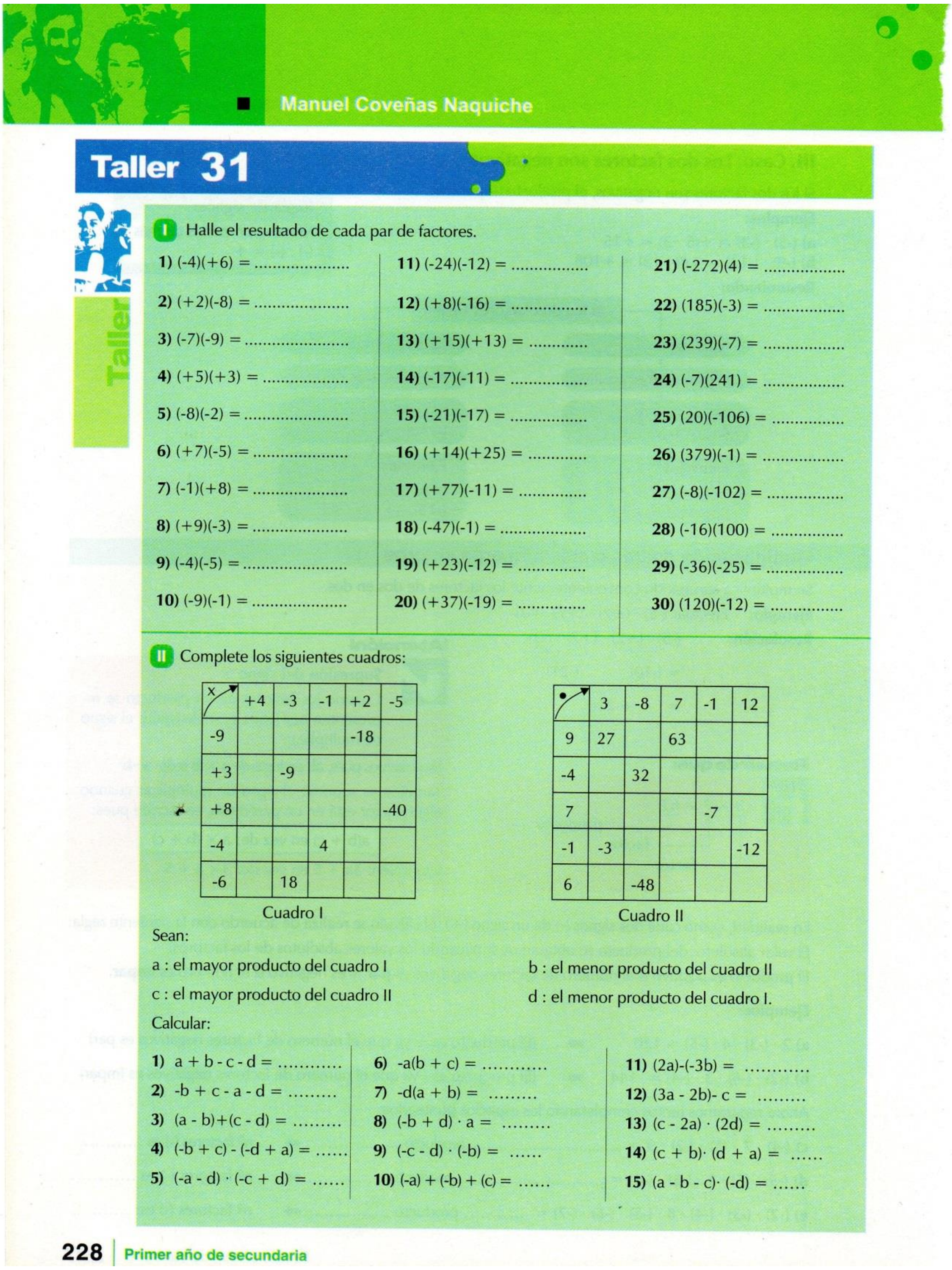
b) (-2) · (-6) · 3 · (-4) = -144 ➠ (El producto es - ya que el número de factores negativos es impar)

Ahora repasemos juntos completando los espacios punteados:

c) (-4) · 7 · (5) · (-2) · 9 = ... producto .... ➠ nº factores (-) es ....

d) (-5) · (6) · 1 · (-3) · (-4) = ... producto .... ➠ nº factores (-) es ....

e) (-2) · (-3) · (-4) · 8 · (-5) · (-6) · (-7) = ... producto .... ➠ nº factores (-) es: ....



Taller 31

I Halle el resultado de cada par de factores.

1) (-4)(+6) = ...

2) (+2)(-8) = ...

3) (-7)(-9) = ...

4) (+5)(+3) = ...

5) (-8)(-2) = ...

6) (+7)(-5) = ...

7) (-1)(+8) = ...

8) (+9)(-3) = ...

9) (-4)(-5) = ...

10) (-9)(-1) = ...

11) (-24)(-12) = ...

12) (+8)(-16) = ...

13) (+15)(+13) = ...

14) (-17)(-11) = ...

15) (-21)(-17) = ...

16) (+14)(+25) = ...

17) (+77)(-11) = ...

18) (-47)(-1) = ...

19) (+23)(-12) = ...

20) (+37)(-19) = ...

21) (-272)(4) = ...

22) (185)(-3) = ...

23) (239)(-7) = ...

24) (-7)(241) = ...

25) (20)(-106) = ...

26) (379)(-1) = ...

27) (-8)(-102) = ...

28) (-16)(100) = ...

29) (-36)(-25) = ...

30) (120)(-12) = ...

II Complete los siguientes cuadros:

x	+4	-3	-1	+2	-5
-9				-18	
+3		-9			
+8					-40
-4			4		
-6		18			

Cuadro I

•	3	-8	7	-1	12
9	27		63		
-4		32			
7				-7	
-1	-3				-12
6		-48			

Cuadro II

Sean:

a : el mayor producto del cuadro I

c : el mayor producto del cuadro II

b : el menor producto del cuadro II

d : el menor producto del cuadro I.

Calcular:

1) a + b - c - d = ...

2) -b + c - a - d = ...

3) (a - b)+(c - d) = ...

4) (-b + c) - (-d + a) = ...

5) (-a - d) · (-c + d) = ...

6) -a(b + c) = ...

7) -d(a + b) = ...

8) (-b + d) · a = ...

9) (-c - d) · (-b) = ...

10) (-a) + (-b) + (c) = ...

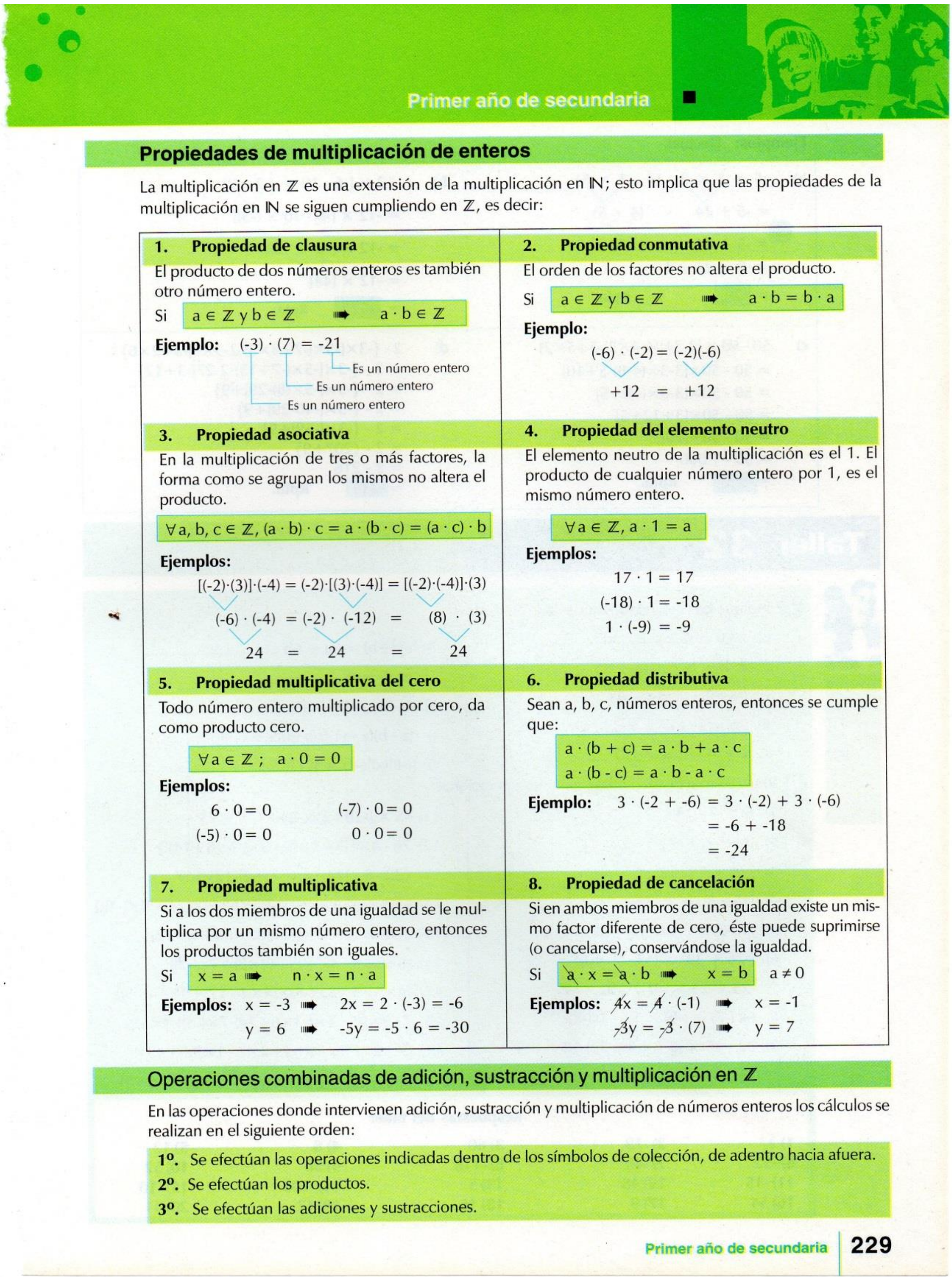
11) (2a)-(-3b) = ...

12) (3a - 2b)- c = ...

13) (c - 2a) · (2d) = ...

14) (c + b)· (d + a) = ...

15) (a - b - c)· (-d) = ...



Propiedades de multiplicación de enteros

La multiplicación en $\mathbb{Z}$ es una extensión de la multiplicación en $\mathbb{N}$; esto implica que las propiedades de la multiplicación en $\mathbb{N}$ se siguen cumpliendo en $\mathbb{Z}$, es decir:

1. Propiedad de clausura

El producto de dos números enteros es también otro número entero.

Si $a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}$

Ejemplo: $(-3) \cdot (7) = -21$

Es un número entero
Es un número entero
Es un número entero

2. Propiedad conmutativa

El orden de los factores no altera el producto.

Si $a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$

Ejemplo:

$$\underbrace{(-6) \cdot (-2)}_{+12} = \underbrace{(-2)(-6)}_{+12}$$

3. Propiedad asociativa

En la multiplicación de tres o más factores, la forma como se agrupan los mismos no altera el producto.

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot c) \cdot b$

Ejemplos:

$$[(-2)\cdot(3)]\cdot(-4) = (-2)\cdot[(3)\cdot(-4)] = [(-2)\cdot(-4)]\cdot(3)$$
$$(-6) \cdot (-4) = (-2) \cdot (-12) = (8) \cdot (3)$$
$$24 = 24 = 24$$

4. Propiedad del elemento neutro

El elemento neutro de la multiplicación es el 1. El producto de cualquier número entero por 1, es el mismo número entero.

$\forall a \in \mathbb{Z}, a \cdot 1 = a$

Ejemplos:

$17 \cdot 1 = 17$
$(-18) \cdot 1 = -18$
$1 \cdot (-9) = -9$

5. Propiedad multiplicativa del cero

Todo número entero multiplicado por cero, da como producto cero.

$\forall a \in \mathbb{Z} ;\ a \cdot 0 = 0$

Ejemplos:

$6 \cdot 0 = 0$ $\quad (-7) \cdot 0 = 0$
$(-5) \cdot 0 = 0$ $\quad 0 \cdot 0 = 0$

6. Propiedad distributiva

Sean a, b, c, números enteros, entonces se cumple que:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-2 + -6) &= 3 \cdot (-2) + 3 \cdot (-6) \\ &= -6 + -18 \\ &= -24 \end{aligned}$$

7. Propiedad multiplicativa

Si a los dos miembros de una igualdad se le multiplica por un mismo número entero, entonces los productos también son iguales.

Si $x = a \Rightarrow n \cdot x = n \cdot a$

Ejemplos: $x = -3 \Rightarrow 2x = 2 \cdot (-3) = -6$
$y = 6 \Rightarrow -5y = -5 \cdot 6 = -30$

8. Propiedad de cancelación

Si en ambos miembros de una igualdad existe un mismo factor diferente de cero, éste puede suprimirse (o cancelarse), conservándose la igualdad.

Si $\cancel{a} \cdot x = \cancel{a} \cdot b \Rightarrow x = b \quad a \neq 0$

Ejemplos: $\cancel{4}x = \cancel{4} \cdot (-1) \Rightarrow x = -1$
$\cancel{-3}y = \cancel{-3} \cdot (7) \Rightarrow y = 7$

Operaciones combinadas de adición, sustracción y multiplicación en $\mathbb{Z}$

En las operaciones donde intervienen adición, sustracción y multiplicación de números enteros los cálculos se realizan en el siguiente orden:

1º. Se efectúan las operaciones indicadas dentro de los símbolos de colección, de adentro hacia afuera.
2º. Se efectúan los productos.
3º. Se efectúan las adiciones y sustracciones.

Ejemplos: Efectuar.

a) -5 + 3 × 8 - (4 - 1 × 5)
= -5 + 24 - (4 - 5)
= -5 + 24 - (- 1)
= -5 + 24 + 1
= $\boxed{20}$ **Rpta.**

b) -12 × [-6 - 10 × (-2 - 3)]
= -12 × [-6 - 10 × (-5)]
= -12 × [-6 + 50]
= -12 × [44]
= $\boxed{-528}$ **Rpta.**

c) 50 - 50 × [3-3×(4-4×2)-5+5×2]
= 50 - 50×[3-3×(4-8)-5+10]
= 50 - 50×[3-3×(-4)+5]
= 50 - 50×[3+12+5]
= 50 - 50×[20]
= 50 - 1 000
= $\boxed{-950}$ **Rpta.**

d) 2 - {-3×[-5×(-7+3×5)-2-3×9]-3+2×6}
= 2 - {-3×[-5×(-7+15)-2-27]-3+12}
= 2 - {-3×[-5×(8)-29]+9}
= 2 - {-3×[-40-29]+9}
= 2 - {-3×[-69]+9}
= 2 - {207+9}
= 2 - 216
= $\boxed{-214}$ **Rpta.**

Taller 32

I Indique las propiedades que se han aplicado.

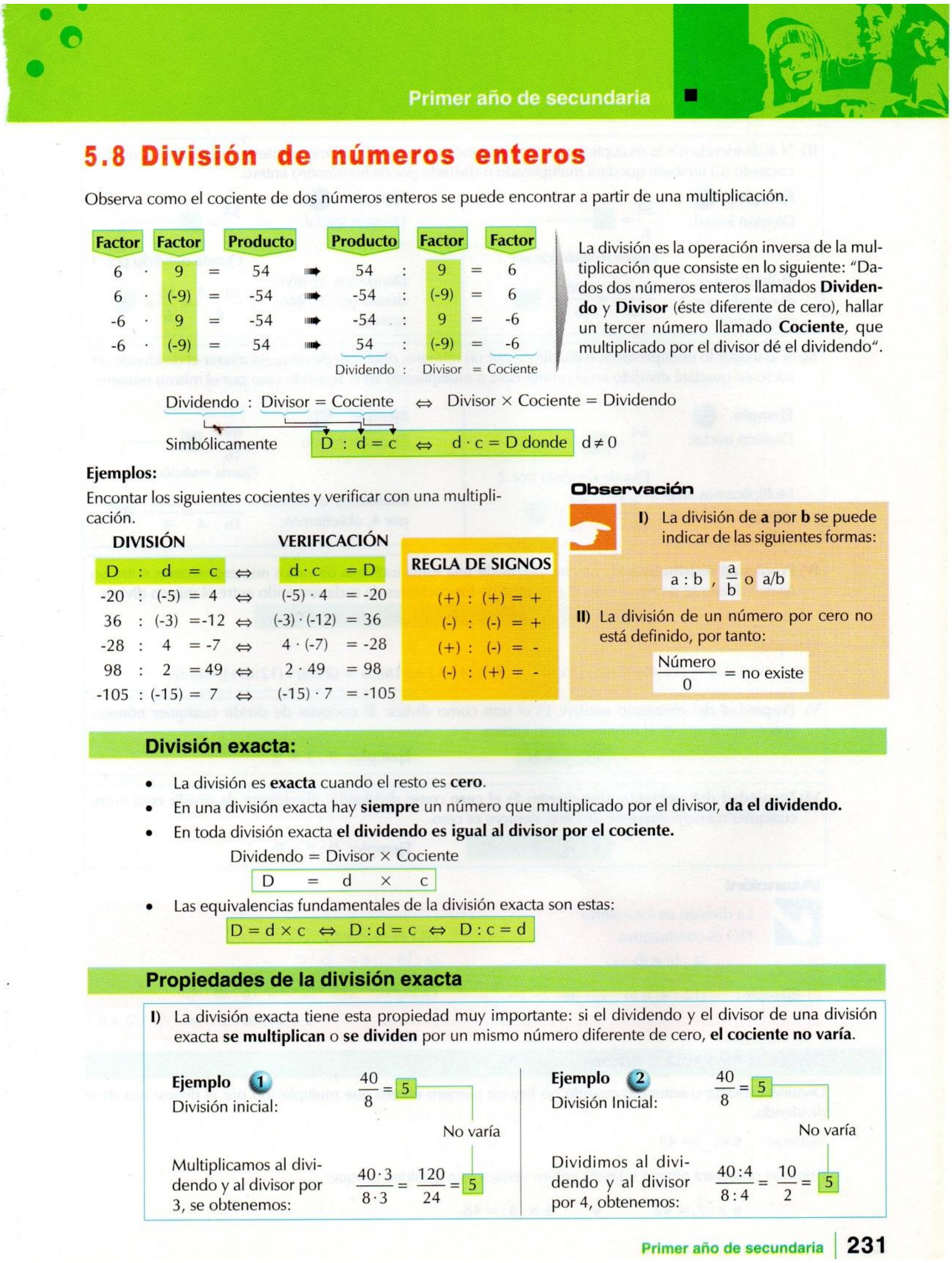
a) x · 0 = 0 ....
b) 8· b = b· 8 ....
c) (-5+9)a = -5a + 9a ....
d) 7b = 7· 3 → b = 3 ....
e) x = -5 → 6x = -30 ....
f) 6(a+b) = 6a + 6b ....
g) m· 1 = m ....
h) 7(-5x) = [7· (-5)]x ....
i) (a+b)(x+y) =(a+b)x + (a+b)y ....
j) [(-8)(x)](-4) = [(-8)(-4)](x) ....

II Realice en su cuaderno las siguientes operaciones:

1) 6 × 7 - 15
2) 8 - 9 × 3
3) -24 + 7 × 12
4) (15 - 7) × 3 - 16
5) 7x(-6) + (-4 + 22) × 3
6) (-26 + 39) × (14 - 3 × 6)
7) -25 + 23 ×(-4) + (-9) × (-8)
8) 6x (-7) + (-9) × 12 - 4x(-8)
9) 82 - 35 × [6 × (-3)+22]-12 × (-9)
10) 32-[-5+3 ×(-2)+(-3) × (-5+8)]
11) -5 × [-38+2×(-24+47)] + 25
12) 76 - 4×{-5+3×[9+5×(-3×5+14)]}
13) {32 - 8×[23+4×(-7)+9]-12}+17
14) (-12)×{45+6×(-12)-(-3×6+9)×[24-(-5)×(-4)]}
15) 7×(-3)-15+(3×6-5)×[2×(-9+4)+12]
16) -8+3×6+4x(-7)+(-6)×[9+3×(-7)]
17) [4×6 - 5×3+(-8)×(4×2 - 17)+8×(-4 - 5)]
18) 7 - 3×[-5 - 4×(-3×6+24)-7×(-5)]-3×(-9)
19) 38 - 2×[-5+6×(-3+2×7 - 1×9)]-4×3
20) 43-{-6×[-4×(-16+5×2)-5 - 8×3]-5×6+2}

Respuestas del taller

1) 27	**2)** -19	**3)** 60	**4)** 8	**5)** 12
6) -52	**7)** -45	**8)** -118	**9)** 50	**10)** 52
11) -15	**12)** 48	**13)** 5	**14)** -108	**15)** -10
16) 54	**17)** 9	**18)** 16	**19)** 12	**20)** 41



5.8 División de números enteros

Observa como el cociente de dos números enteros se puede encontrar a partir de una multiplicación.

Factor		Factor		Producto		Producto		Factor		Factor
6	·	9	=	54	➡	54	:	9	=	6
6	·	(-9)	=	-54	➡	-54	:	(-9)	=	6
-6	·	9	=	-54	➡	-54	:	9	=	-6
-6	·	(-9)	=	54	➡	54	:	(-9)	=	-6
						Dividendo	:	Divisor	=	Cociente

La división es la operación inversa de la multiplicación que consiste en lo siguiente: "Dados dos números enteros llamados **Dividendo** y **Divisor** (éste diferente de cero), hallar un tercer número llamado **Cociente**, que multiplicado por el divisor dé el dividendo".

Dividendo : Divisor = Cociente ⇔ Divisor × Cociente = Dividendo

Simbólicamente $D : d = c \Leftrightarrow d \cdot c = D$ donde $d \neq 0$

Ejemplos:

Encontar los siguientes cocientes y verificar con una multiplicación.

DIVISIÓN		VERIFICACIÓN
D : d = c	⇔	d · c = D
-20 : (-5) = 4	⇔	(-5) · 4 = -20
36 : (-3) = -12	⇔	(-3) · (-12) = 36
-28 : 4 = -7	⇔	4 · (-7) = -28
98 : 2 = 49	⇔	2 · 49 = 98
-105 : (-15) = 7	⇔	(-15) · 7 = -105

REGLA DE SIGNOS

(+) : (+) = +

(-) : (-) = +

(+) : (-) = -

(-) : (+) = -

Observación

I) La división de **a** por **b** se puede indicar de las siguientes formas:

$a : b$, $\frac{a}{b}$ o a/b

II) La división de un número por cero no está definido, por tanto:

$\frac{\text{Número}}{0}$ = no existe

División exacta:

- La división es **exacta** cuando el resto es **cero**.
- En una división exacta hay **siempre** un número que multiplicado por el divisor, **da el dividendo.**
- En toda división exacta **el dividendo es igual al divisor por el cociente.**

Dividendo = Divisor × Cociente

$D = d \times c$

- Las equivalencias fundamentales de la división exacta son estas:

$D = d \times c \Leftrightarrow D : d = c \Leftrightarrow D : c = d$

Propiedades de la división exacta

I) La división exacta tiene esta propiedad muy importante: si el dividendo y el divisor de una división exacta **se multiplican** o **se dividen** por un mismo número diferente de cero, **el cociente no varía**.

Ejemplo ①

División inicial: $\frac{40}{8} = \boxed{5}$

No varía

Multiplicamos al dividendo y al divisor por 3, se obtenemos: $\frac{40 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{120}{24} = \boxed{5}$

Ejemplo ②

División Inicial: $\frac{40}{8} = \boxed{5}$

No varía

Dividimos al dividendo y al divisor por 4, obtenemos: $\frac{40 : 4}{8 : 4} = \frac{10}{2} = \boxed{5}$

II) Si al dividendo (D) lo multiplicamos o lo dividimos por cualquier número entero sin alterar el divisor, el cociente (C) también quedará multiplicado o dividido por dicho número entero.

Ejemplo ①

División inicial: $\frac{54}{6} = \boxed{9}$

Queda multiplicado por 2

Multiplicamos al dividendo por 2, obtenemos: $\frac{2\times 54}{6} = \frac{108}{6} = \boxed{18}$

Ejemplo ②

División inicial: $\frac{54}{6} = \boxed{9}$

Queda dividido por 3

Dividimos al dividendo por 3, obtenemos: $\frac{54\ :\ 3}{6} = \frac{18}{6} = \boxed{3}$

III) Si al divisor lo multiplicamos o dividimos por un número, diferente de cero, sin alterar el dividendo, el cociente quedará dividido en el primer caso o multiplicado en el segundo caso por el mismo número.

Ejemplo ①

División inicial: $\frac{64}{16} = \boxed{4}$

Queda dividido por 2

Multiplicamos al divisor por 2, obtenemos: $\frac{64}{16\times 2} = \frac{64}{32} = \boxed{2}$

Ejemplo ②

División inicial: $\frac{64}{16} = \boxed{4}$

Queda multiplicado por 4

Dividimos al divisor por 4, obtenemos: $\frac{64}{16\ :\ 4} = \frac{64}{4} = \boxed{16}$

IV) Propiedad distributiva: El cociente de dividir una suma indicada de varios números enteros entre un divisor diferente de cero es igual a la suma de los cocientes de cada sumando entre el mismo divisor.

$$(a + b + c + d) : (e) = (a : e) + (b : e) + (c : e) + (d : e)$$

Ejemplos :

i) $(12+8+16):4 = (12:4)+(8:4)+(16:4)$

ii) $[24+12+(-18)]:6 = (24:6)+(12:6)+[(-18):6]$

V) Propiedad del elemento neutro: Es el **uno** como divisor. El cociente de dividir cualquier número entero entre uno es el mismo número entero.

$$N : 1 = N$$

Ejemplo: $9 : 1 = 9$

VI) Propiedad del elemento absorbente: Es el **cero** como dividendo. El cociente de dividir cero entre cualquier número diferente de cero, siempre es cero.

$$0 : N = 0\ ;\ (N\neq 0)$$

Ejemplo: $0 : 8 = 0$

¡Atención!

La división en los enteros NO es conmutativa.

$(a : b) \neq (b : a)$

Ejemplo: $(12 : 4) \neq (4 : 12)$ ➠ $\therefore\ 3 \neq \frac{1}{3}$

* NO es asociativa.

$(a : b) : c \neq a : (b : c)$

Ejemplo: $(16 : 8) : 4 \neq 16 : (8 : 4)$

$2 : 4 \neq 16 : 2$ ➠ $\therefore\ 1/2 \neq 8$

División inexacta o entera

División inexacta o entera es cuando no hay un número entero que multiplicado por el divisor nos da el dividendo.

Veamos: $6\times \bigcirc = 45$

Como se observará ningún número entero verifica esta igualdad porque:

$6 \times \textcircled{7} = 42$ y $6 \times \textcircled{8} = 48$

Como verá, el 7 es pequeño y el 8 es grande.

La expresión 6 × ○ = 45, lo indicaremos así: $\begin{array}{r|l} 45 & \underline{6} \\ \boxed{3} & \textcircled{7} \end{array}$

Esta división ha sido **INEXACTA** o **ENTERA**, porque ha quedado resto (residuo), que es 3.

Lo cual lo podemos expresar así: $6 \times \textcircled{7} + \boxed{3} = 45$

La operación que nos permite calcular los números que hay que colocar en el círculo y en el cuadrado, se llama **DIVISIÓN ENTERA**.

Problema: Tenemos 58 manzanas para colocar en montones de 9 manzanas cada uno.

Resolución:

Se pueden hacer 6 montones de 9 manzanas y sobran 4.

Escribimos la división: $\begin{array}{r|l} 58 & \underline{9} \\ 4 & 6 \end{array} \Rightarrow 58 = 9 \times \textcircled{6} + \boxed{4}$

- En toda división inexacta o entera, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el resto:

  Dividendo = divisor × cociente + resto

  $D = d \times c + r$

- En la división inexacta hay un cociente y un resto por defecto.

  Ejemplo: Si 37 lapiceros se reparten entre 9 alumnos, a cada uno sólo le puede corresponder 4 lapiceros y sobraría 1.

  Esto lo expresamos así: $\begin{array}{r|l} 37 & \underline{9} \\ 1 & 4 \end{array}$ ó $\begin{array}{r|l} D & \underline{d} \\ r & c \end{array}$

  $\Rightarrow \boxed{D = d \times c + r}$

  (División inexacta por defecto)

- En la división inexacta hay también un cociente por exceso y un resto por exceso.

  Ejemplo: Vamos a colocar 75 niños que quieren ir de excursión y alquilamos varias combis. En cada combi sólo pueden ir 12 niños. ¿Cuántas combis se necesitan?

  $\begin{array}{r|l} 75 & \underline{12} \\ 3 & 6 \end{array}$ Fijándonos en el ejemplo podemos observar que sobran 3 niños que también han de ir de excursión. Por lo que no se necesitan, como parece, 6 combis, sino 7 para que así vayan todos porque quedarían 9 asientos libres, veamos:

  $\begin{array}{r|l} 75 & \underline{12} \\ 9 & 7 \end{array}$ ó $\begin{array}{r|l} D & \underline{d} \\ r' & c' \end{array} \Rightarrow \boxed{D = d \times c' - r'}$

  (División Inexacta por Exceso)

  En toda división inexacta o entera, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente por exceso menos el resto por exceso.

  Dividendo = divisor × cociente **(exceso)** - resto **(exceso)**

  $D = d \times c' - r'$

- En toda división inexacta, el resto ha de ser **menor que el divisor**

  $\boxed{r < d}$

Propiedades de la división entera o inexacta

I) Si se multiplica el dividendo y el divisor por un mismo número diferente de cero, el cociente no varía, pero el resto queda multiplicado por ese mismo número.

Ejemplo: División Inicial: $\begin{array}{r|l} 42 & \underline{5} \\ \boxed{2} & 8 \end{array}$

Se multiplica el dividendo y el divisor por 3, obteniendo: $\begin{array}{r|l} 42 \times 3 & \underline{5 \times 3} \\ ? & 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 126 & \underline{15} \\ \boxed{6} & 8 \end{array}$

Queda multiplicado por 3.

II) Si se dividen el dividendo y el divisor por un mismo número diferente de cero, el cociente no varía, pero el resto queda dividido por dicho número.

Ejemplo: División Inicial: $\begin{array}{r|l} 60 & \underline{8} \\ \boxed{4} & 7 \end{array}$

Se divide al dividendo y al divisor por 4, obteniendo: $\begin{array}{r|l} 60 : 4 & \underline{8 : 4} \\ ? & 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 15 & \underline{2} \\ \boxed{1} & 7 \end{array}$

Queda dividido por 4.

Taller 33

I Calcular el cociente:

1) 63 : (-9) =

2) -45 : (-5) =

3) 56 : 7 =

4) 48 : (-12) =

5) -121 : 11 =

6) 36 : 4 =

7) 108 : (-12) =

8) -45 : 5 =

9) 80 : 16 =

10) -18 : (-2) =

11) -15 : 15 =

12) -120 : (-12) =

13) -64 : (-8) =

14) -16 : 1 =

15) -24 : 6 =

16) 0 : (-6) =

17) $\frac{0}{-5} =$

18) $\frac{24}{-24} =$

19) $\frac{60}{12} =$

20) $\frac{-8}{8} =$

21) $\frac{-10}{10} =$

22) $\frac{-40}{5} =$

23) $\frac{0}{7} =$

24) $\frac{81}{-9} =$

25) $\frac{-42}{7} =$

26) $\frac{-48}{-6} =$

27) $\frac{49}{1} =$

28) $\frac{121}{-11} =$

II Complete el siguiente cuadro: (colocar un aspa si la división es inexacta).

:	4	12	6	32	8	41	9	72	132
1 476									
2 952									
5 412									
6 048									
19 008									

III Colocar dentro de las figuras los números convenientes para que estas igualdades sean ciertas:

a) 52 = 6× ☐ + 4

b) ◯ = 5×12+3

c) 49 = ☐×5+14

d) 75 = 7 × 9 +☐

e) ◯ =7× 12 + 3

f) 92 = ☐ × 8 + 4

g) 147 = 28 ×5 + ☐

h) 248 = 11× ☐ +6

i) 396 = ☐ × 19 + 16

j) 409 = 12 × ☐ + 13

k) ◯ = 17 × 16 +18

l) 555 = 49 × 11 + ☐

IV Resuelve:

a) (-7+2)(-3)+[5-(-8):(+2)+(-4)]+(-9):(+3)

b) [-4+3(-2)+5]+[7-(-12):(+4)-9] :(-1)

c) [12+(-8+3) · (-4)]:[(-9):(-3)-1]

d) (-7+8-5) · (-3)+[8-(-10):(+2)-7]· (-2)

e) [17-4:(-2)+3]·(-2)+36:(-4)+(-2)×5

f) [4+12:(-2)+4(-3)]:[4+15:(-3)-4(-2)]+2

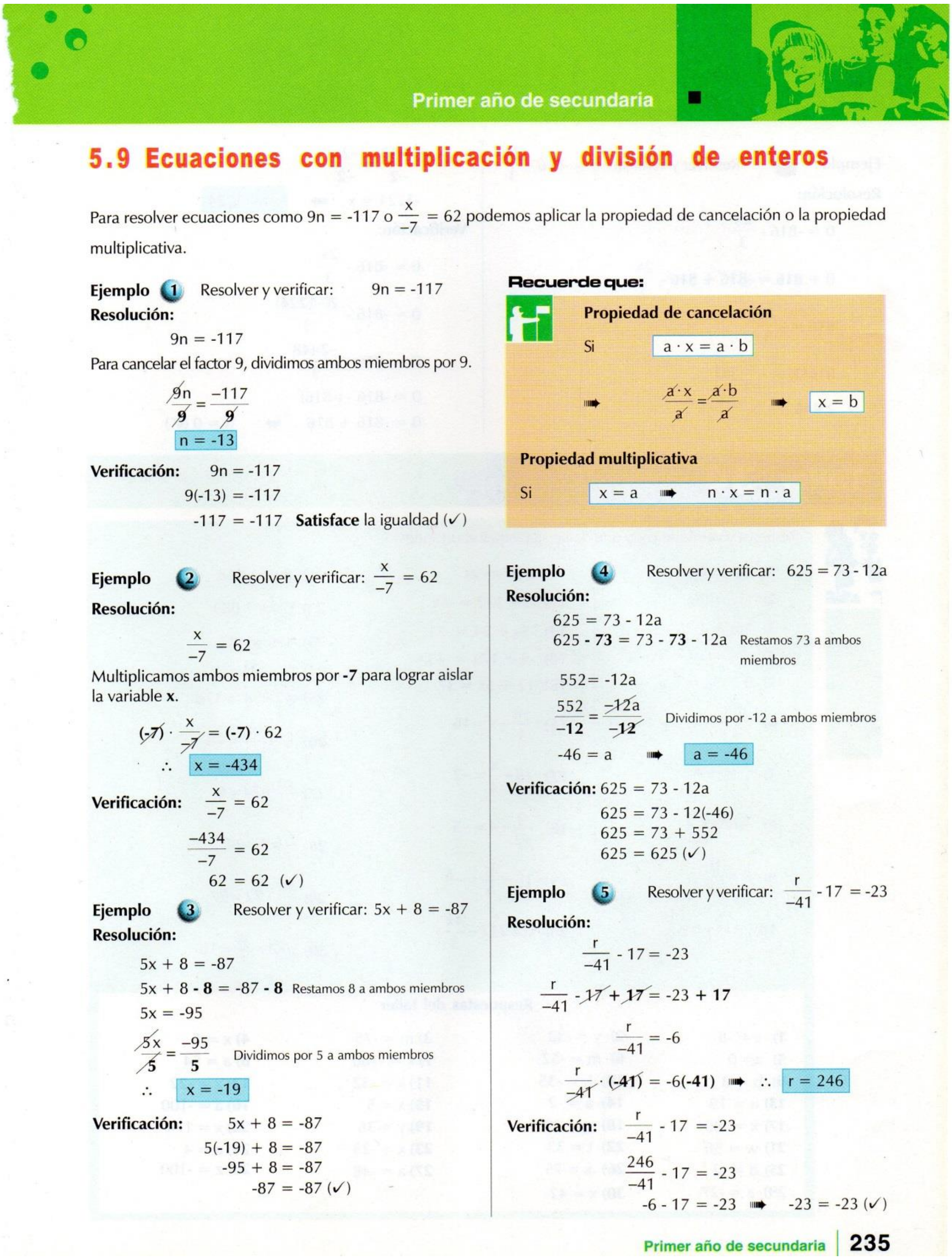
g) [-7+4(-2)]:(-4-1)+2[-3+4:(-2)+7]

h) [23-3(9)+4]:[-7+2(-4)]+(-8):(-2)+5

i) 5+{3(-6)+[4+(-12):(-3)+2]:(-5)}:(-4)

j) (-18):(+6)+[-9+24:(-3)+7(-2)]+4(-3)

Rptas. IV **a)** 17 **b)** -6 **c)** 16 **d)** 0 **e)** -63 **f)** 0 **g)** 7 **h)** 9 **i)** 10 **j)** -46



5.9 Ecuaciones con multiplicación y división de enteros

Para resolver ecuaciones como 9n = -117 o $\frac{x}{-7} = 62$ podemos aplicar la propiedad de cancelación o la propiedad multiplicativa.

Ejemplo ① Resolver y verificar: 9n = -117

Resolución:

9n = -117

Para cancelar el factor 9, dividimos ambos miembros por 9.

$$\frac{\cancel{9}n}{\cancel{\mathbf{9}}} = \frac{-117}{\cancel{\mathbf{9}}}$$

$$\boxed{n = -13}$$

Verificación: 9n = -117

9(-13) = -117

-117 = -117 **Satisface** la igualdad (✓)

Recuerde que:

Propiedad de cancelación

Si $\boxed{a \cdot x = a \cdot b}$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{a} \cdot x}{\cancel{a}} = \frac{\cancel{a} \cdot b}{\cancel{a}} \Rightarrow \boxed{x = b}$$

Propiedad multiplicativa

Si $\boxed{x = a \Rightarrow n \cdot x = n \cdot a}$

Ejemplo ② Resolver y verificar: $\frac{x}{-7} = 62$

Resolución:

$$\frac{x}{-7} = 62$$

Multiplicamos ambos miembros por **-7** para lograr aislar la variable **x**.

$$\cancel{(-7)} \cdot \frac{x}{\cancel{-7}} = \mathbf{(-7)} \cdot 62$$

$$\therefore \boxed{x = -434}$$

Verificación: $\frac{x}{-7} = 62$

$$\frac{-434}{-7} = 62$$

62 = 62 (✓)

Ejemplo ③ Resolver y verificar: 5x + 8 = -87

Resolución:

5x + 8 = -87

5x + 8 **- 8** = -87 **- 8** Restamos 8 a ambos miembros

5x = -95

$$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{\mathbf{5}}} = \frac{-95}{\mathbf{5}}$$ Dividimos por 5 a ambos miembros

$$\therefore \boxed{x = -19}$$

Verificación: 5x + 8 = -87

5(-19) + 8 = -87

-95 + 8 = -87

-87 = -87 (✓)

Ejemplo ④ Resolver y verificar: 625 = 73 - 12a

Resolución:

625 = 73 - 12a

625 **- 73** = 73 **- 73** - 12a Restamos 73 a ambos miembros

552= -12a

$$\frac{552}{\mathbf{-12}} = \frac{\cancel{-12}a}{\cancel{\mathbf{-12}}}$$ Dividimos por -12 a ambos miembros

-46 = a ➠ $\boxed{a = -46}$

Verificación: 625 = 73 - 12a

625 = 73 - 12(-46)

625 = 73 + 552

625 = 625 (✓)

Ejemplo ⑤ Resolver y verificar: $\frac{r}{-41} - 17 = -23$

Resolución:

$$\frac{r}{-41} - 17 = -23$$

$$\frac{r}{-41} \cancel{-17} \cancel{\mathbf{+17}} = -23 \mathbf{+ 17}$$

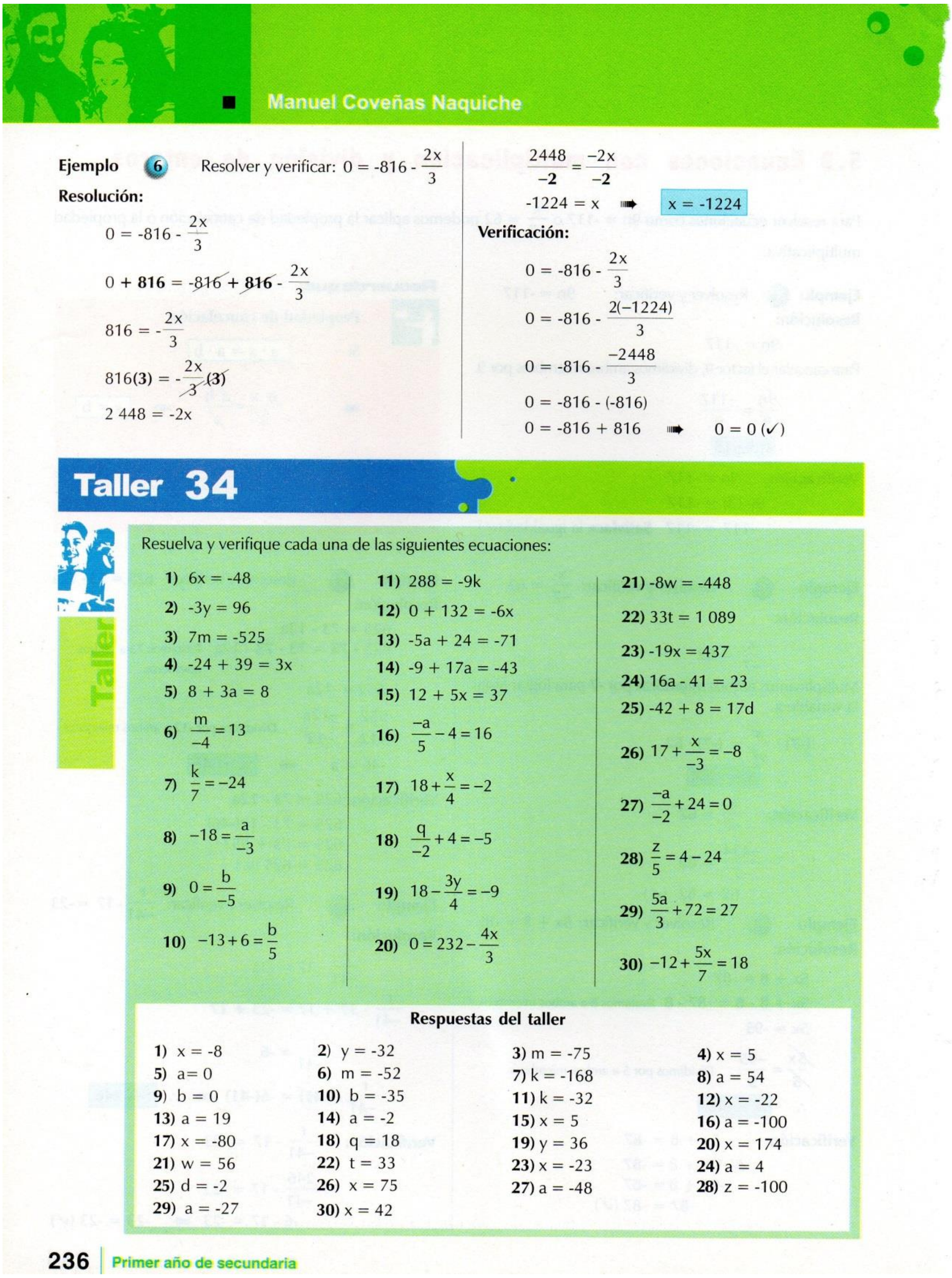
$$\frac{r}{-41} = -6$$

$$\frac{r}{\cancel{-41}} \cdot \cancel{\mathbf{(-41)}} = -6\mathbf{(-41)} \Rightarrow \therefore \boxed{r = 246}$$

Verificación: $\frac{r}{-41} - 17 = -23$

$$\frac{246}{-41} - 17 = -23$$

-6 - 17 = -23 ➠ -23 = -23 (✓)



Ejemplo ⑥ Resolver y verificar: $0 = -816 - \frac{2x}{3}$

Resolución:

$$0 = -816 - \frac{2x}{3}$$

$$0 + \mathbf{816} = \cancel{-816} + \cancel{\mathbf{816}} - \frac{2x}{3}$$

$$816 = -\frac{2x}{3}$$

$$816(\mathbf{3}) = -\frac{2x}{\cancel{3}}\cancel{(\mathbf{3})}$$

$$2\,448 = -2x$$

$$\frac{2448}{\mathbf{-2}} = \frac{-2x}{\mathbf{-2}}$$

$-1224 = x$ ➠ $\boxed{x = -1224}$

Verificación:

$$0 = -816 - \frac{2x}{3}$$

$$0 = -816 - \frac{2(-1224)}{3}$$

$$0 = -816 - \frac{-2448}{3}$$

$$0 = -816 - (-816)$$

$0 = -816 + 816$ ➠ $0 = 0$ (✓)

Taller 34

Resuelva y verifique cada una de las siguientes ecuaciones:

1) $6x = -48$

2) $-3y = 96$

3) $7m = -525$

4) $-24 + 39 = 3x$

5) $8 + 3a = 8$

6) $\frac{m}{-4} = 13$

7) $\frac{k}{7} = -24$

8) $-18 = \frac{a}{-3}$

9) $0 = \frac{b}{-5}$

10) $-13 + 6 = \frac{b}{5}$

11) $288 = -9k$

12) $0 + 132 = -6x$

13) $-5a + 24 = -71$

14) $-9 + 17a = -43$

15) $12 + 5x = 37$

16) $\frac{-a}{5} - 4 = 16$

17) $18 + \frac{x}{4} = -2$

18) $\frac{q}{-2} + 4 = -5$

19) $18 - \frac{3y}{4} = -9$

20) $0 = 232 - \frac{4x}{3}$

21) $-8w = -448$

22) $33t = 1\,089$

23) $-19x = 437$

24) $16a - 41 = 23$

25) $-42 + 8 = 17d$

26) $17 + \frac{x}{-3} = -8$

27) $\frac{-a}{-2} + 24 = 0$

28) $\frac{z}{5} = 4 - 24$

29) $\frac{5a}{3} + 72 = 27$

30) $-12 + \frac{5x}{7} = 18$

Respuestas del taller

1) $x = -8$ **2)** $y = -32$ **3)** $m = -75$ **4)** $x = 5$

5) $a = 0$ **6)** $m = -52$ **7)** $k = -168$ **8)** $a = 54$

9) $b = 0$ **10)** $b = -35$ **11)** $k = -32$ **12)** $x = -22$

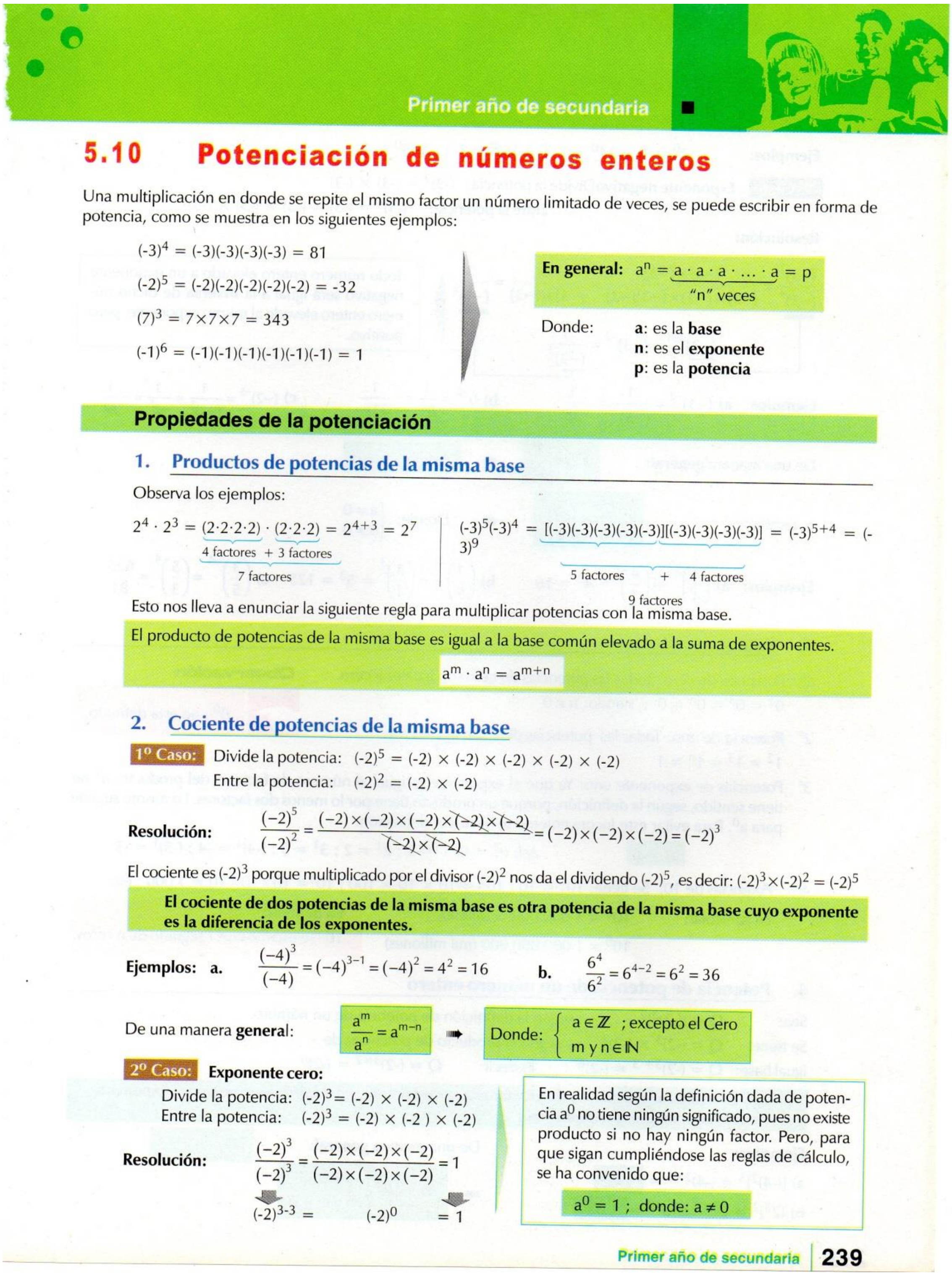
13) $a = 19$ **14)** $a = -2$ **15)** $x = 5$ **16)** $a = -100$

17) $x = -80$ **18)** $q = 18$ **19)** $y = 36$ **20)** $x = 174$

21) $w = 56$ **22)** $t = 33$ **23)** $x = -23$ **24)** $a = 4$

25) $d = -2$ **26)** $x = 75$ **27)** $a = -48$ **28)** $z = -100$

29) $a = -27$ **30)** $x = 42$



5.10 Potenciación de números enteros

Una multiplicación en donde se repite el mismo factor un número limitado de veces, se puede escribir en forma de potencia, como se muestra en los siguientes ejemplos:

$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$

$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

$(7)^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$

$(-1)^6 = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = 1$

En general: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{“n” veces}} = p$

Donde:
a: es la **base**
n: es el **exponente**
p: es la **potencia**

Propiedades de la potenciación

1. Productos de potencias de la misma base

Observa los ejemplos:

$$2^4 \cdot 2^3 = \underbrace{\underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{4 factores}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{+\text{ 3 factores}}}_{\text{7 factores}} = 2^{4+3} = 2^7$$

$$(-3)^5(-3)^4 = \underbrace{\underbrace{[(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)]}_{\text{5 factores}}\underbrace{[(-3)(-3)(-3)(-3)]}_{+\text{ 4 factores}}}_{\text{9 factores}} = (-3)^{5+4} = (-3)^9$$

Esto nos lleva a enunciar la siguiente regla para multiplicar potencias con la misma base.

El producto de potencias de la misma base es igual a la base común elevado a la suma de exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2. Cociente de potencias de la misma base

1° Caso: Divide la potencia: $(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$
Entre la potencia: $(-2)^2 = (-2) \times (-2)$

Resolución: $$\frac{(-2)^5}{(-2)^2} = \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times\cancel{(-2)}\times\cancel{(-2)}}{\cancel{(-2)}\times\cancel{(-2)}} = (-2)\times(-2)\times(-2) = (-2)^3$$

El cociente es $(-2)^3$ porque multiplicado por el divisor $(-2)^2$ nos da el dividendo $(-2)^5$, es decir: $(-2)^3 \times (-2)^2 = (-2)^5$

El cociente de dos potencias de la misma base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.

Ejemplos: **a.** $\dfrac{(-4)^3}{(-4)} = (-4)^{3-1} = (-4)^2 = 4^2 = 16$ **b.** $\dfrac{6^4}{6^2} = 6^{4-2} = 6^2 = 36$

De una manera **general**: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ➠ Donde: $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \text{ ; excepto el Cero} \\ m \text{ y } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2° Caso: **Exponente cero:**

Divide la potencia: $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$
Entre la potencia: $(-2)^3 = (-2) \times (-2\ ) \times (-2)$

Resolución: $$\frac{(-2)^3}{(-2)^3} = \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)}{(-2)\times(-2)\times(-2)} = 1$$

$(-2)^{3-3} = \quad (-2)^0 \quad = 1$

En realidad según la definición dada de potencia a^0 no tiene ningún significado, pues no existe producto si no hay ningún factor. Pero, para que sigan cumpliéndose las reglas de cálculo, se ha convenido que:

$a^0 = 1$; donde: $a \neq 0$

Ejemplos: $7^0 = 1$; $14^0 = 1$; $(-16)^0 = 1$; $345^0 = 1$

3º Caso: **Exponente negativo** Divide la potencia: $(-3)^2 = (-3) \times (-3)$

Entre la potencia: $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

Resolución:

$$\frac{(-3)^2}{(-3)^4} = \frac{\cancel{(-3)}\times\cancel{(-3)}}{(-3)\times(-3)\times\cancel{(-3)}\cancel{(-3)}} = \frac{1}{(-3)\times(-3)} = \frac{1}{(-3)^2}$$

$$(-3)^{2-4} = (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2}$$

Todo número entero elevado a un exponente negativo será igual a la **Inversa** de dicho número entero elevado al mismo exponente, pero positivo.

Ejemplos: **a)** $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$ **b)** $6^{-3} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ **c)** $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-2^5} = -\frac{1}{32}$

De una manera **general:** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ➠ Donde: $a \neq 0$

o también: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ ➠ Donde: $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Ejemplos: **a)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 4^2 = 16$ **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{1}\right)^3 = 5^3 = 125$ **c)** $\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$

3. Potencias notables

1° Potencias de cero: Todas las potencias de cero son iguales a cero.
$0^2 = 0^3 = 0^n = 0$; siendo: $n \neq 0$

Observación

0^0 ; no está definido.

2° Potencia de uno: Todas las potencias de 1 son iguales a 1.
$1^2 = 1^3 = 1^n = 1$

3° Potencias de exponente uno: Ya que el exponente es igual al número de factores del producto, a^1 no tiene sentido, según la definición, porque un producto tiene por lo menos dos factores. Lo mismo sucede para a^0. Para evitar este inconveniente se hace por definición:

$a^1 = a$ Así: $0^1 = 0$; $1^1 = 1$; $2^1 = 2$; $3^1 = 3$; $(-4)^1 = -4$; $(-5)^1 = -5$.

4° Potencias de 10: Se tiene: $10^1 = 10$; $10^2 = 10 \times 10 = 100$; $10^3 = 10\times10\times10 = 1\ 000$; etc.

En particular: $10^6 = 1\ 000\ 000$ (1 millón)
$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$ (mil millones)

En general:
10^n se escribe con 1 seguido de n ceros.

4. Potencia de potencia de un número entero

Sea: $Q = [(-2)^3]^2$; según la definición de potencia de un número.
Se tiene: $Q = (-2)^3 \times (-2)^3$; y según el producto de potencias de
igual base: $Q = (-2)^{3+3} = (-2)^6$ Es decir: $Q = (-2)^{3\times2} = (-2)^6$

La potencia de una potencia de un número es otra potencia del mismo número cuyo exponente es el producto de los exponentes.

Ejemplos:
a) $[(-4)^2]^3 = (-4)^{2\times3} = (-4)^6$
b) $(2^5)^2 = 2^{5\times2} = 2^{10} = 1\ 024$

De una manera **general:** $(a^n)^m = a^{n\times m}$

➠ Donde: $\begin{cases} a \neq 0 \\ n \text{ y } m \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

5. Potencia de un producto

Sea: $Q = [(-2) \times 5]^3$, según la definición de potencia de un número.

Se tiene: $Q = [(-2) \times 5] \times [(-2) \times 5] \times [(-2) \times 5]$,

ordenando dichos factores se tiene:

$$Q = \underline{[(-2)\times(-2)\times(-2)]}\times\underline{[5\times5\times5]}$$

$$Q = \underline{(-2)^3} \times \underline{(5)^3}$$

Es decir: $Q = [(-2) \times 5]^3 = \underline{(-2)^3 \times (5)^3}$

Para elevar un producto indicado a una potencia, se eleva cada factor del producto a dicha potencia.

Ejemplos:

a) $Q = [(-8) \cdot (5) \cdot (-2)]^3 = (-8)^3 \cdot (5)^3 \cdot (-2)^3$

b) $Q = [(-4)^3 \cdot 5^2]^3 = [(-4)^3]^3 \cdot [5^2]^3 = (-4)^9 \cdot 5^6$

De una manera **general:**

$(a.b.c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ ➠ Donde: $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ a, b, y\ c; \neq 0 \end{cases}$

6. Potencia de un cociente

Sea: $\left(\frac{6}{-2}\right)^3$, por definición de potencias se tiene: $\left(\frac{6}{-2}\right)^3 = \frac{6}{-2} \times \frac{6}{-2} \times \frac{6}{-2} = \frac{6^3}{(-2)^3}$

Es decir: $\left(\frac{6}{-2}\right)^3 = \frac{6^3}{(-2)^3}$

Para elevar un cociente a una potencia se elevan los dos términos del cociente a dicha potencia.

Ejemplo:

a) $\left(\frac{2}{-5}\right)^2 = \frac{(2)^2}{(-5)^2} = \frac{4}{25}$

b) $\left(\frac{16}{-4}\right)^3 = \frac{16^3}{-4^3}$

De una manera **general:** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;

➠ Donde: $n \in \mathbb{Z}$
a y b $\neq 0$

5.11 Radicación de números enteros

Raíz cuadrada de un número entero

La **raíz cuadrada** de 64 es 8, ya que $8^2 = 64$

La **raíz cuadrada** de 64 también es -8 ya que $(-8)^2 = 64$

Cada número positivo tiene dos raíces cuadradas. Por ejemplo: 25 tiene como raíces cuadradas 5 y -5, ya que $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$

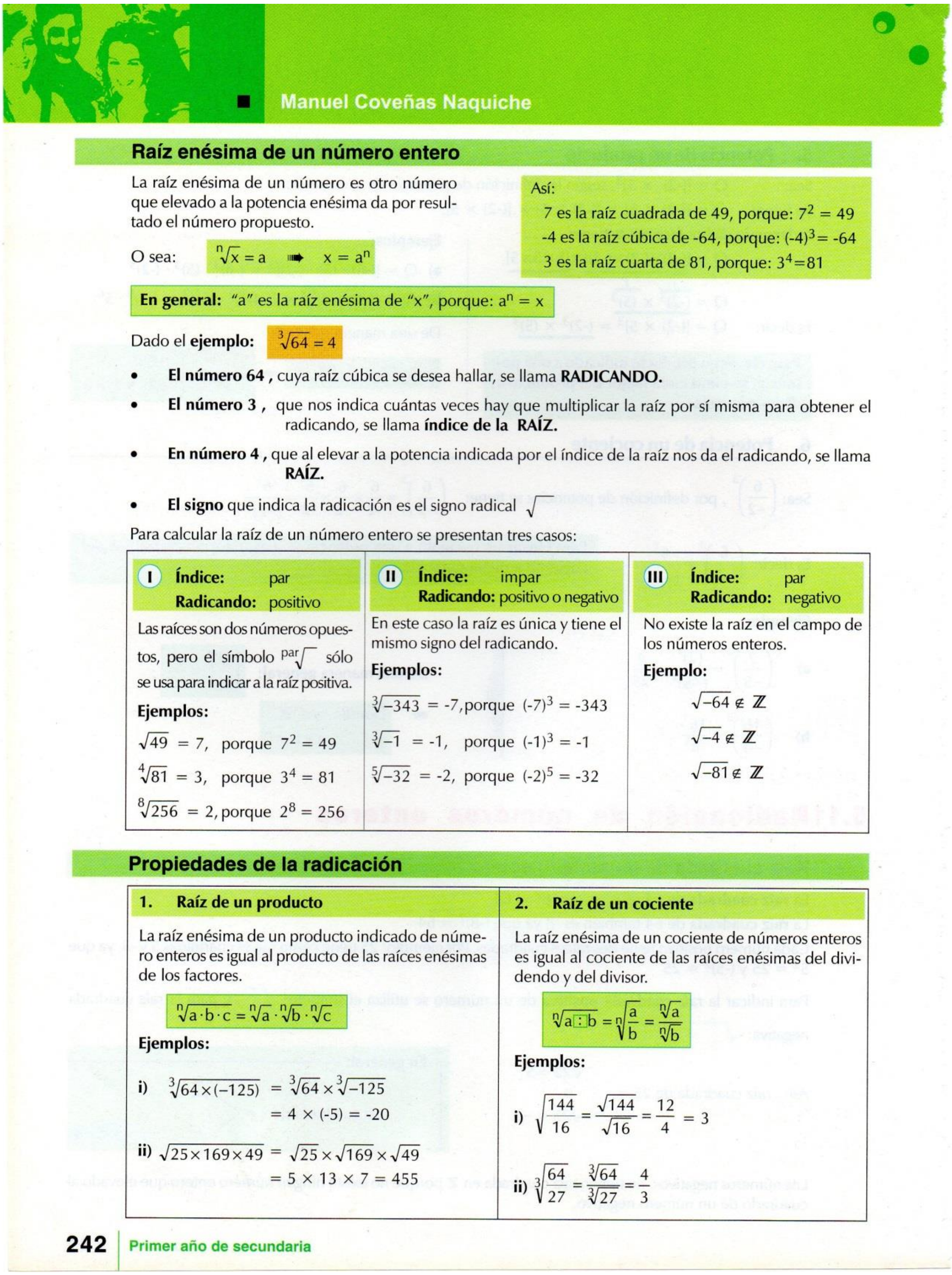
Para indicar la raíz **cuadrada positiva** de un número se utiliza el símbolo: $\sqrt{\ }$, y para la raíz cuadrada negativa: $-\sqrt{\ }$

Así: raíz cuadrada de 25 = $\sqrt{25} = 5$ o $-\sqrt{25} = -5$

En general:

raíz cuadrada de x = $\sqrt{x}$ o $-\sqrt{x}$

Los números negativos, no tienen raíz cuadrada en $\mathbb{Z}$ porque no existe ningún número entero que elevado al cuadrado dé un número negativo.



Raíz enésima de un número entero

La raíz enésima de un número es otro número que elevado a la potencia enésima da por resultado el número propuesto.

O sea: $\sqrt[n]{x} = a \quad \Rightarrow \quad x = a^n$

Así:
7 es la raíz cuadrada de 49, porque: $7^2 = 49$
-4 es la raíz cúbica de -64, porque: $(-4)^3 = -64$
3 es la raíz cuarta de 81, porque: $3^4 = 81$

En general: "a" es la raíz enésima de "x", porque: $a^n = x$

Dado el **ejemplo:** $\sqrt[3]{64} = 4$

- **El número 64 ,** cuya raíz cúbica se desea hallar, se llama **RADICANDO.**
- **El número 3 ,** que nos indica cuántas veces hay que multiplicar la raíz por sí misma para obtener el radicando, se llama **índice de la RAÍZ.**
- **En número 4 ,** que al elevar a la potencia indicada por el índice de la raíz nos da el radicando, se llama **RAÍZ.**
- **El signo** que indica la radicación es el signo radical $\sqrt{}$

Para calcular la raíz de un número entero se presentan tres casos:

I **Índice:** par **Radicando:** positivo	**II** **Índice:** impar **Radicando:** positivo o negativo	**III** **Índice:** par **Radicando:** negativo
Las raíces son dos números opuestos, pero el símbolo $\sqrt[par]{}$ sólo se usa para indicar a la raíz positiva. **Ejemplos:** $\sqrt{49} = 7$, porque $7^2 = 49$ $\sqrt[4]{81} = 3$, porque $3^4 = 81$ $\sqrt[8]{256} = 2$, porque $2^8 = 256$	En este caso la raíz es única y tiene el mismo signo del radicando. **Ejemplos:** $\sqrt[3]{-343} = -7$, porque $(-7)^3 = -343$ $\sqrt[3]{-1} = -1$, porque $(-1)^3 = -1$ $\sqrt[5]{-32} = -2$, porque $(-2)^5 = -32$	No existe la raíz en el campo de los números enteros. **Ejemplo:** $\sqrt{-64} \notin \mathbb{Z}$ $\sqrt{-4} \notin \mathbb{Z}$ $\sqrt{-81} \notin \mathbb{Z}$

Propiedades de la radicación

1. Raíz de un producto	**2. Raíz de un cociente**
La raíz enésima de un producto indicado de números enteros es igual al producto de las raíces enésimas de los factores. $\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$ **Ejemplos:** **i)** $\sqrt[3]{64 \times (-125)} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{-125} = 4 \times (-5) = -20$ **ii)** $\sqrt{25 \times 169 \times 49} = \sqrt{25} \times \sqrt{169} \times \sqrt{49} = 5 \times 13 \times 7 = 455$	La raíz enésima de un cociente de números enteros es igual al cociente de las raíces enésimas del dividendo y del divisor. $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ **Ejemplos:** **i)** $\sqrt{\frac{144}{16}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{16}} = \frac{12}{4} = 3$ **ii)** $\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4}{3}$

3. Raíz de una potencia

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}$$

Ejemplos:

i) $\sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$

ii) $\sqrt{7^6} = \left(\sqrt{7}\right)^6 = 7^{6/2} = 7^3 = 343$

iii) $\sqrt[10]{25^{15}} = 25^{15/10} = 25^{3/2} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$

4. Raíz de raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[m\cdot n\cdot p]{a}$$

i) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} = \sqrt[3]{8} = 2$

pero también $512 = 2^9$, luego:

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} = \sqrt[9]{2^9} = 2^{9/9} = 2^1 = 2$

ii) $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{72}}}} = \sqrt[2\cdot 4\cdot 3]{3^{72}} = \sqrt[24]{3^{72}}$

$= 3^{72/24} = 3^3 = 27$

Observación

- En la radicación **NO SE CUMPLE** la propiedad Conmutativa.

  Es decir: $\sqrt[n]{a} \neq \sqrt[a]{n}$ **Ejemplo:** $\sqrt[3]{8} \neq \sqrt[8]{3}$

- En la raíz de una potencia se puede simplificar el exponente del radicando con el índice de la raíz, cuando sea posible.

  Ejemplos: **i)** $\sqrt[\cancel{6}]{64^{\cancel{8}}} = \sqrt[3]{64^4} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^4 = 4^4 = 256$

  ii) $\sqrt[\cancel{3}]{9^{\cancel{3}}} = 9$ **iii)** $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[\cancel{10}]{2^{\cancel{10}}} = 2$

Ejercicios resueltos Aplicando propiedades

Ejercicio 1 Simplificar las expresiones

a) $\dfrac{3^7\times 6^8\times 5^4\times a^{10}}{3^5\times 6^7\times 5\times a^6}$ **b)** $\dfrac{x^8\cdot y^9\cdot z^6}{x^5\cdot y^8\cdot z^3}$

Resolución:

a) $\dfrac{3^7}{3^5}\times\dfrac{6^8}{6^7}\times\dfrac{5^4}{5}\times\dfrac{a^{10}}{a^6} = 3^{7-5}\times 6^{8-7}\times 5^{4-1}\times a^{10-6}$

$= 3^2\times 6\times 5^3\times a^4$

$= 9\times 6\times 125\times a^4$

$= \boxed{6\,750\,a^4}$

b) $\dfrac{x^8}{x^5}\cdot\dfrac{y^9}{y^8}\cdot\dfrac{z^6}{z^3} = x^{8-5}\cdot y^{9-8}\cdot z^{6-3} = \boxed{x^3\cdot y\cdot z^3}$

Ejercicio 2 Reducir: $P = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n}$; obtenemos:

$P = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} = (2)^3 + (4)^2 + (5)^2$

$= 8 + 16 + 25 = 49 \Rightarrow \therefore \boxed{P = 49}$ **Rpta.**

Ejercicio 3 Reducir: $R = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\dfrac{-2}{6}\right)^{-1} - 3^{-3}$

Resolución:

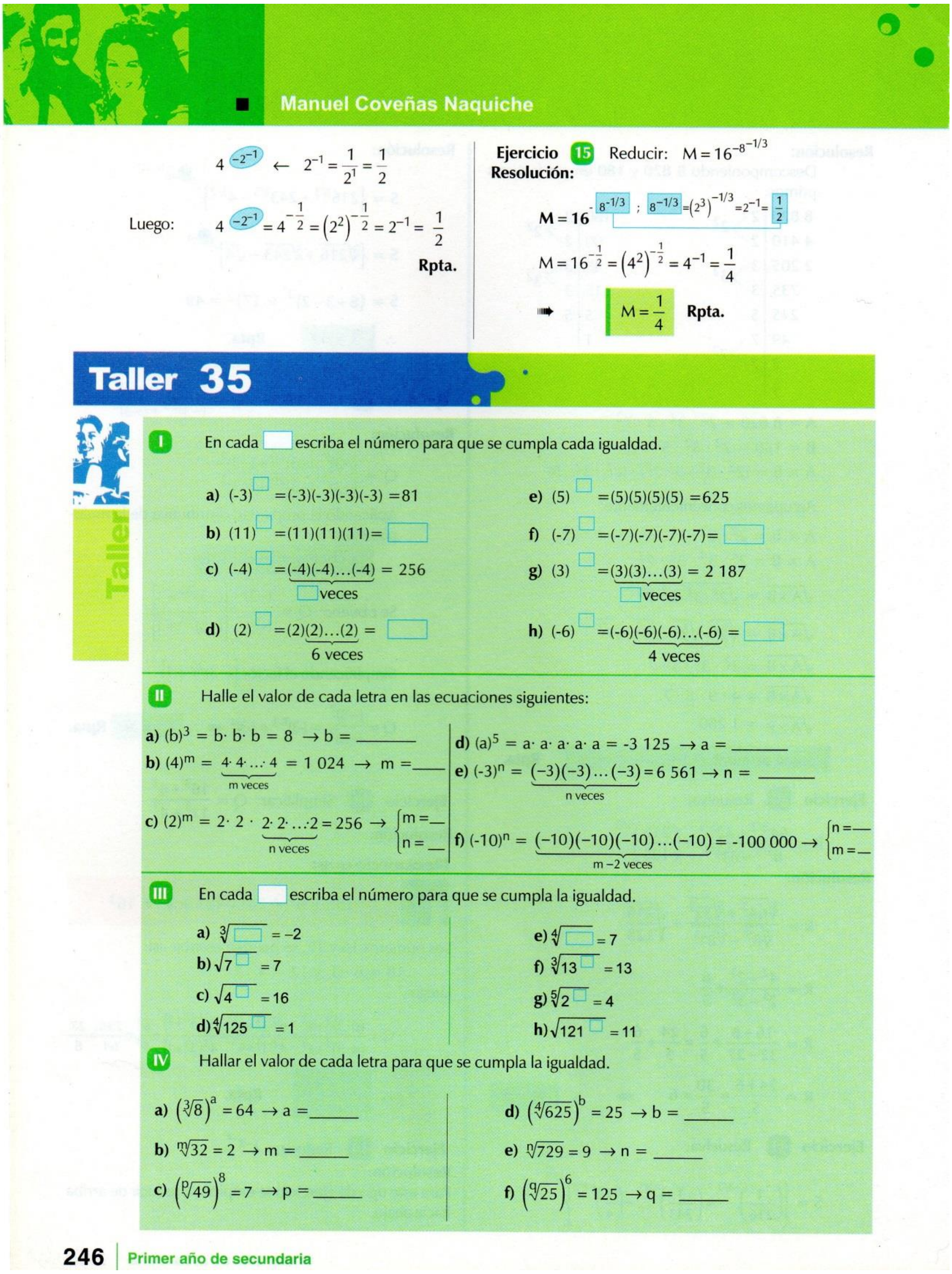
$$R = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{-2}{6}\right)^{-1} - 3^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{-2}\right)^1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$R = \frac{9}{4} + \frac{6}{-2} - \frac{1}{27} = \frac{9}{4} - 3 - \frac{1}{27}$$

Sacando M.C.M. de (4;1 y 27) = 108

$$R = \frac{243 - 324 - 4}{108} = \frac{-85}{108}$$

$\boxed{R = \dfrac{-85}{108}}$ **Rpta.**



$$4^{\boxed{-2^{-1}}} \leftarrow 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

Luego: $$4^{\boxed{-2^{-1}}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \left(2^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Rpta.

Ejercicio 15 Reducir: $M = 16^{-8^{-1/3}}$

Resolución:

$$\mathbf{M = 16}^{-\boxed{8^{-1/3}}} \; ; \; \boxed{8^{-1/3}} = \left(2^3\right)^{-1/3} = 2^{-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$M = 16^{-\frac{1}{2}} = \left(4^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

➠ $\boxed{M = \frac{1}{4}}$ **Rpta.**

Taller 35

I En cada $\square$ escriba el número para que se cumpla cada igualdad.

a) $(-3)^{\square} = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$

b) $(11)^{\square} = (11)(11)(11) = \square$

c) $(-4)^{\square} = \underbrace{(-4)(-4)\ldots(-4)}_{\square \text{ veces}} = 256$

d) $(2)^{\square} = (2)\underbrace{(2)\ldots(2)}_{6 \text{ veces}} = \square$

e) $(5)^{\square} = (5)(5)(5)(5) = 625$

f) $(-7)^{\square} = (-7)(-7)(-7)(-7) = \square$

g) $(3)^{\square} = \underbrace{(3)(3)\ldots(3)}_{\square \text{ veces}} = 2\,187$

h) $(-6)^{\square} = (-6)\underbrace{(-6)(-6)\ldots(-6)}_{4 \text{ veces}} = \square$

II Halle el valor de cada letra en las ecuaciones siguientes:

a) $(b)^3 = b \cdot b \cdot b = 8 \rightarrow b =$ ______

b) $(4)^m = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4}_{m \text{ veces}} = 1\,024 \rightarrow m =$ ______

c) $(2)^m = 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ veces}} = 256 \rightarrow \begin{cases} m = \_\_ \\ n = \_\_ \end{cases}$

d) $(a)^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = -3\,125 \rightarrow a =$ ______

e) $(-3)^n = \underbrace{(-3)(-3)\ldots(-3)}_{n \text{ veces}} = 6\,561 \rightarrow n =$ ______

f) $(-10)^n = \underbrace{(-10)(-10)(-10)\ldots(-10)}_{m-2 \text{ veces}} = -100\,000 \rightarrow \begin{cases} n = \_\_ \\ m = \_\_ \end{cases}$

III En cada $\square$ escriba el número para que se cumpla la igualdad.

a) $\sqrt[3]{\square} = -2$

b) $\sqrt{7^{\square}} = 7$

c) $\sqrt{4^{\square}} = 16$

d) $\sqrt[4]{125^{\square}} = 1$

e) $\sqrt[4]{\square} = 7$

f) $\sqrt[3]{13^{\square}} = 13$

g) $\sqrt[5]{2^{\square}} = 4$

h) $\sqrt{121^{\square}} = 11$

IV Hallar el valor de cada letra para que se cumpla la igualdad.

a) $\left(\sqrt[3]{8}\right)^a = 64 \rightarrow a =$ ______

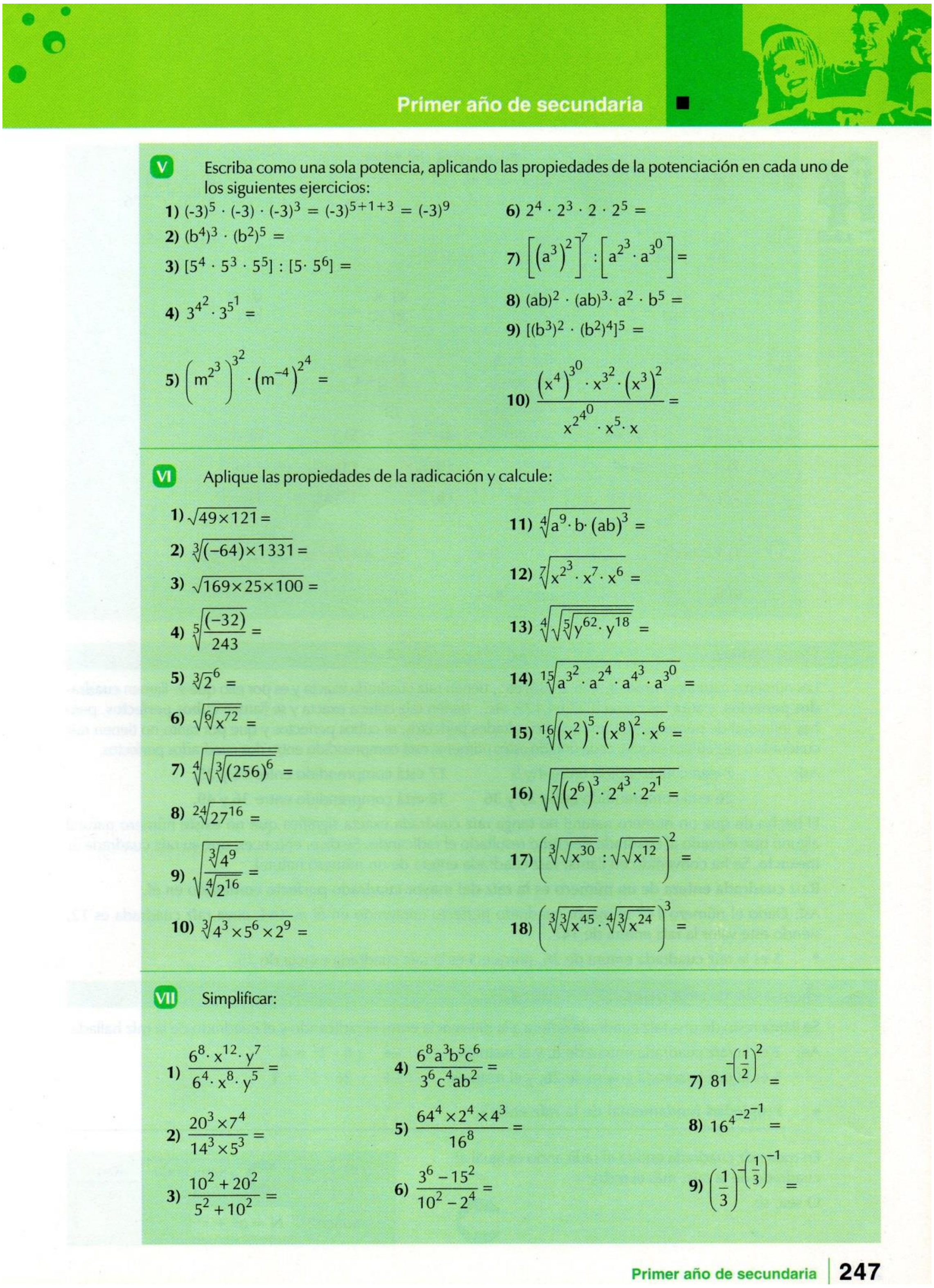
b) $\sqrt[m]{32} = 2 \rightarrow m =$ ______

c) $\left(\sqrt[p]{49}\right)^8 = 7 \rightarrow p =$ ______

d) $\left(\sqrt[4]{625}\right)^b = 25 \rightarrow b =$ ______

e) $\sqrt[n]{729} = 9 \rightarrow n =$ ______

f) $\left(\sqrt[q]{25}\right)^6 = 125 \rightarrow q =$ ______



V Escriba como una sola potencia, aplicando las propiedades de la potenciación en cada uno de los siguientes ejercicios:

1) $(-3)^5 \cdot (-3) \cdot (-3)^3 = (-3)^{5+1+3} = (-3)^9$

2) $(b^4)^3 \cdot (b^2)^5 =$

3) $[5^4 \cdot 5^3 \cdot 5^5] : [5 \cdot 5^6] =$

4) $3^{4^2} \cdot 3^{5^1} =$

5) $\left(m^{2^3}\right)^{3^2} \cdot \left(m^{-4}\right)^{2^4} =$

6) $2^4 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 2^5 =$

7) $\left[\left(a^3\right)^2\right]^7 : \left[a^{2^3} \cdot a^{3^0}\right] =$

8) $(ab)^2 \cdot (ab)^3 \cdot a^2 \cdot b^5 =$

9) $[(b^3)^2 \cdot (b^2)^4]^5 =$

10) $\dfrac{\left(x^4\right)^{3^0} \cdot x^{3^2} \cdot \left(x^3\right)^2}{x^{2^{4^0}} \cdot x^5 \cdot x} =$

VI Aplique las propiedades de la radicación y calcule:

1) $\sqrt{49 \times 121} =$

2) $\sqrt[3]{(-64) \times 1331} =$

3) $\sqrt{169 \times 25 \times 100} =$

4) $\sqrt[5]{\dfrac{(-32)}{243}} =$

5) $\sqrt[3]{2}^{6} =$

6) $\sqrt{\sqrt[6]{x^{72}}} =$

7) $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{(256)^6}}} =$

8) $\sqrt[24]{27^{16}} =$

9) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{4^9}}{\sqrt[4]{2^{16}}}} =$

10) $\sqrt[3]{4^3 \times 5^6 \times 2^9} =$

11) $\sqrt[4]{a^9 \cdot b \cdot (ab)^3} =$

12) $\sqrt[7]{x^{2^3} \cdot x^7 \cdot x^6} =$

13) $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[5]{y^{62} \cdot y^{18}}}} =$

14) $\sqrt[15]{a^{3^2} \cdot a^{2^4} \cdot a^{4^3} \cdot a^{3^0}} =$

15) $\sqrt[16]{\left(x^2\right)^5 \cdot \left(x^8\right)^2 \cdot x^6} =$

16) $\sqrt{\sqrt[7]{\left(2^6\right)^3 \cdot 2^{4^3} \cdot 2^{2^1}}} =$

17) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{x^{30}}} : \sqrt{\sqrt{x^{12}}}\right)^2 =$

18) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{45}}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{24}}}\right)^3 =$

VII Simplificar:

1) $\dfrac{6^8 \cdot x^{12} \cdot y^7}{6^4 \cdot x^8 \cdot y^5} =$

2) $\dfrac{20^3 \times 7^4}{14^3 \times 5^3} =$

3) $\dfrac{10^2 + 20^2}{5^2 + 10^2} =$

4) $\dfrac{6^8 a^3 b^5 c^6}{3^6 c^4 a b^2} =$

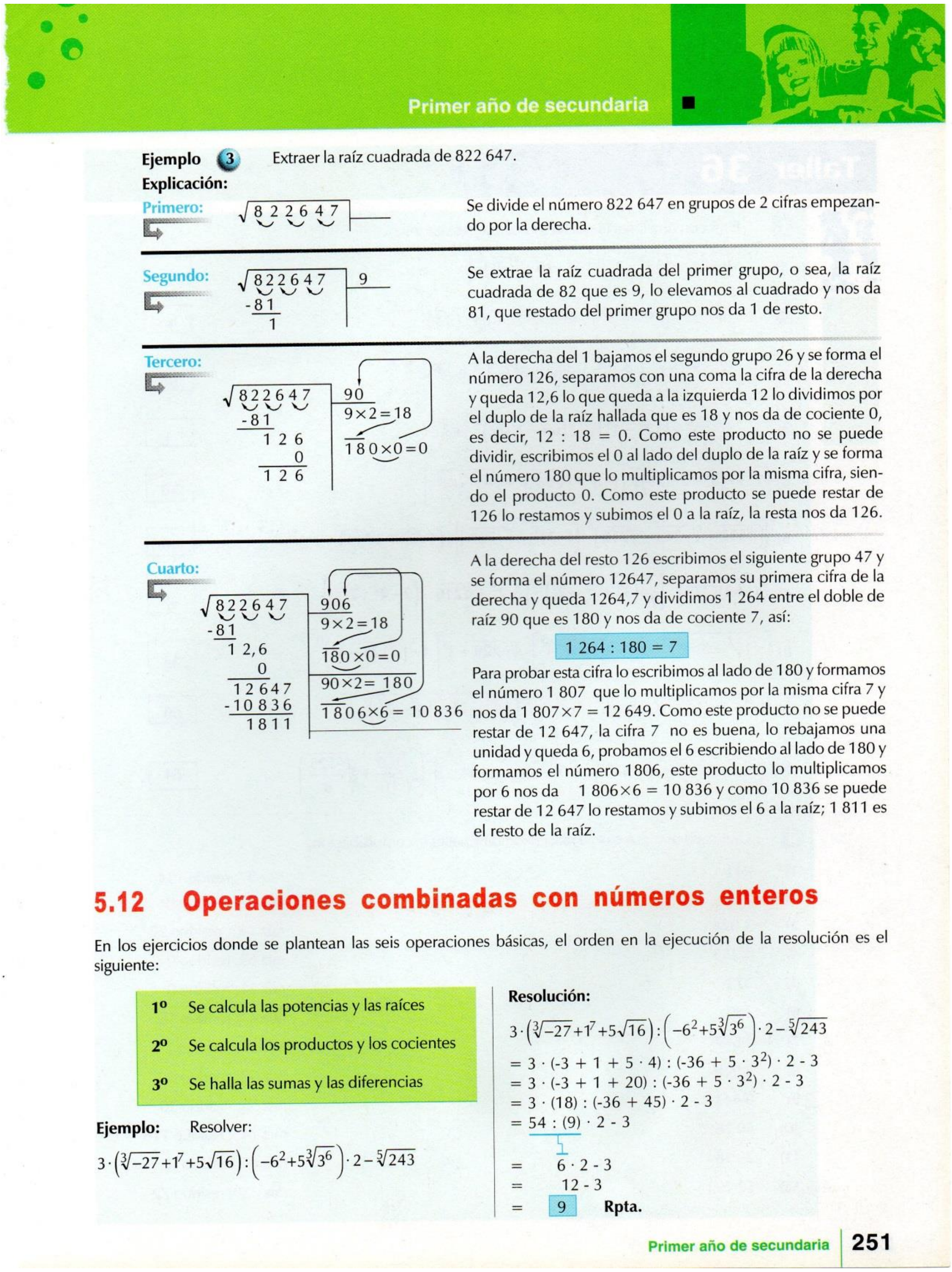
5) $\dfrac{64^4 \times 2^4 \times 4^3}{16^8} =$

6) $\dfrac{3^6 - 15^2}{10^2 - 2^4} =$

7) $81^{-\left(\frac{1}{2}\right)^2} =$

8) $16^{4^{-2^{-1}}} =$

9) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} =$



Ejemplo ③ Extraer la raíz cuadrada de 822 647.

Explicación:

Primero:

```
√8 2 2 6 4 7 |____
```

Se divide el número 822 647 en grupos de 2 cifras empezando por la derecha.

Segundo:

```
√822647 | 9
 -81    |
   1    |
```

Se extrae la raíz cuadrada del primer grupo, o sea, la raíz cuadrada de 82 que es 9, lo elevamos al cuadrado y nos da 81, que restado del primer grupo nos da 1 de resto.

Tercero:

```
√822647 | 90
 -81    | 9×2=18
   126  | 180×0=0
     0  |
   126  |
```

A la derecha del 1 bajamos el segundo grupo 26 y se forma el número 126, separamos con una coma la cifra de la derecha y queda 12,6 lo que queda a la izquierda 12 lo dividimos por el duplo de la raíz hallada que es 18 y nos da de cociente 0, es decir, 12 : 18 = 0. Como este producto no se puede dividir, escribimos el 0 al lado del duplo de la raíz y se forma el número 180 que lo multiplicamos por la misma cifra, siendo el producto 0. Como este producto se puede restar de 126 lo restamos y subimos el 0 a la raíz, la resta nos da 126.

Cuarto:

```
√822647  | 906
 -81     | 9×2=18
   1 2,6 | 180×0=0
       0 | 90×2= 180
   12647 | 1806×6= 10 836
 -10 836 |
    1811 |
```

A la derecha del resto 126 escribimos el siguiente grupo 47 y se forma el número 12647, separamos su primera cifra de la derecha y queda 1264,7 y dividimos 1 264 entre el doble de raíz 90 que es 180 y nos da de cociente 7, así:

1 264 : 180 = 7

Para probar esta cifra lo escribimos al lado de 180 y formamos el número 1 807 que lo multiplicamos por la misma cifra 7 y nos da 1 807×7 = 12 649. Como este producto no se puede restar de 12 647, la cifra 7 no es buena, lo rebajamos una unidad y queda 6, probamos el 6 escribiendo al lado de 180 y formamos el número 1806, este producto lo multiplicamos por 6 nos da 1 806×6 = 10 836 y como 10 836 se puede restar de 12 647 lo restamos y subimos el 6 a la raíz; 1 811 es el resto de la raíz.

5.12 Operaciones combinadas con números enteros

En los ejercicios donde se plantean las seis operaciones básicas, el orden en la ejecución de la resolución es el siguiente:

1º Se calcula las potencias y las raíces

2º Se calcula los productos y los cocientes

3º Se halla las sumas y las diferencias

Ejemplo: Resolver:

$$3\cdot\left(\sqrt[3]{-27}+1^7+5\sqrt{16}\right):\left(-6^2+5\sqrt[3]{3^6}\right)\cdot 2-\sqrt[5]{243}$$

Resolución:

$$3\cdot\left(\sqrt[3]{-27}+1^7+5\sqrt{16}\right):\left(-6^2+5\sqrt[3]{3^6}\right)\cdot 2-\sqrt[5]{243}$$

$= 3 \cdot (-3 + 1 + 5 \cdot 4) : (-36 + 5 \cdot 3^2) \cdot 2 - 3$

$= 3 \cdot (-3 + 1 + 20) : (-36 + 5 \cdot 3^2) \cdot 2 - 3$

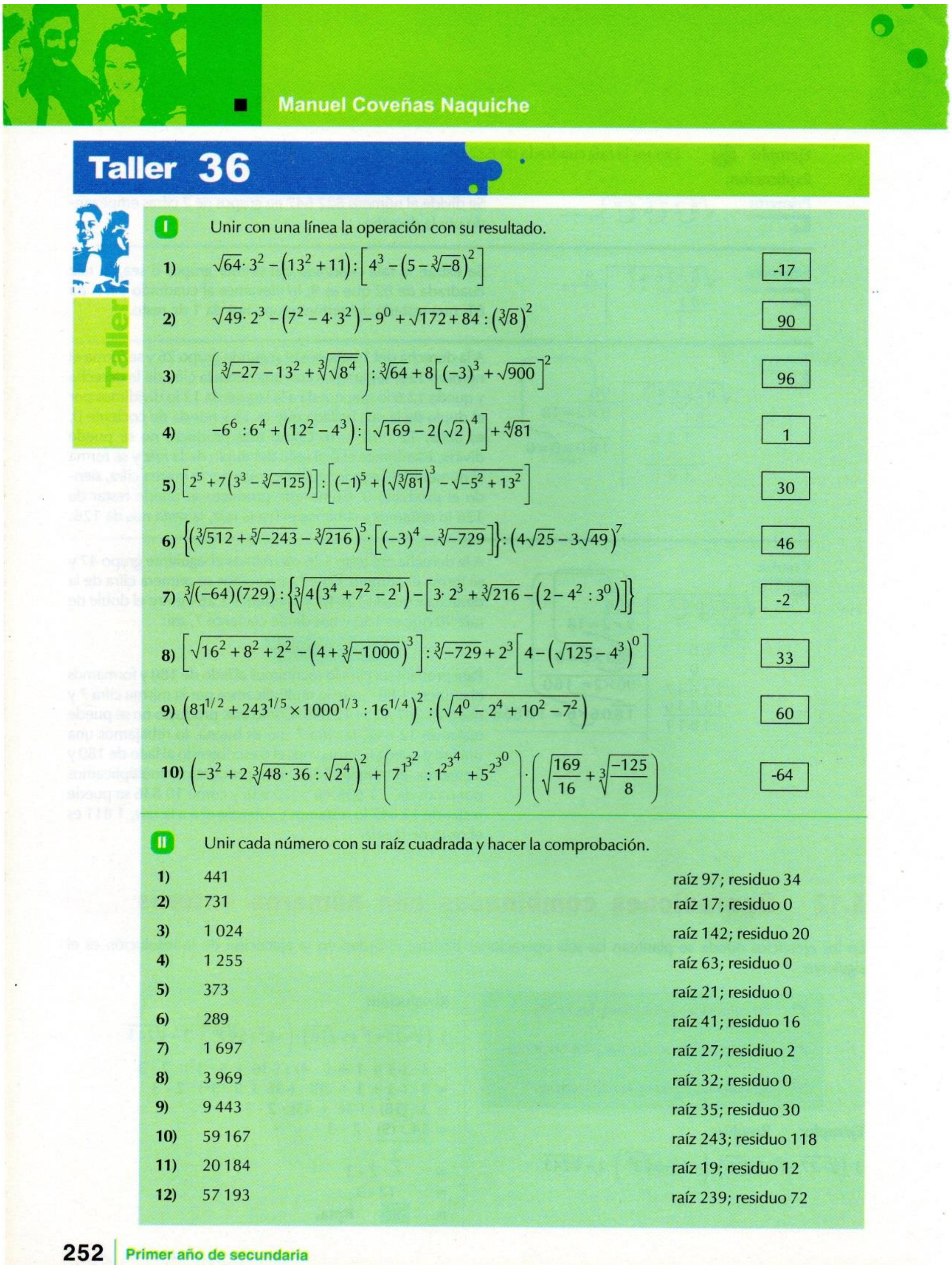
$= 3 \cdot (18) : (-36 + 45) \cdot 2 - 3$

$= \underbrace{54 : (9)} \cdot 2 - 3$

$= 6 \cdot 2 - 3$

$= 12 - 3$

$= \boxed{9}$ **Rpta.**



Taller 36

I Unir con una línea la operación con su resultado.

1) $\sqrt{64}\cdot 3^2-\left(13^2+11\right):\left[4^3-\left(5-\sqrt[3]{-8}\right)^2\right]$ $\boxed{-17}$

2) $\sqrt{49}\cdot 2^3-\left(7^2-4\cdot 3^2\right)-9^0+\sqrt{172+84}:\left(\sqrt[3]{8}\right)^2$ $\boxed{90}$

3) $\left(\sqrt[3]{-27}-13^2+\sqrt[3]{\sqrt{8^4}}\right):\sqrt[3]{64}+8\left[(-3)^3+\sqrt{900}\right]^2$ $\boxed{96}$

4) $-6^6:6^4+\left(12^2-4^3\right):\left[\sqrt{169}-2\left(\sqrt{2}\right)^4\right]+\sqrt[4]{81}$ $\boxed{1}$

5) $\left[2^5+7\left(3^3-\sqrt[3]{-125}\right)\right]:\left[(-1)^5+\left(\sqrt{\sqrt[3]{81}}\right)^3-\sqrt{-5^2+13^2}\right]$ $\boxed{30}$

6) $\left\{\left(\sqrt[3]{512}+\sqrt[5]{-243}-\sqrt[3]{216}\right)^5\cdot\left[(-3)^4-\sqrt[3]{-729}\right]\right\}:\left(4\sqrt{25}-3\sqrt{49}\right)^7$ $\boxed{46}$

7) $\sqrt[3]{(-64)(729)}:\left\{\sqrt[3]{4\left(3^4+7^2-2^1\right)}-\left[3\cdot 2^3+\sqrt[3]{216}-\left(2-4^2:3^0\right)\right]\right\}$ $\boxed{-2}$

8) $\left[\sqrt{16^2+8^2+2^2}-\left(4+\sqrt[3]{-1000}\right)^3\right]:\sqrt[3]{-729}+2^3\left[4-\left(\sqrt{125}-4^3\right)^0\right]$ $\boxed{33}$

9) $\left(81^{1/2}+243^{1/5}\times 1000^{1/3}:16^{1/4}\right)^2:\left(\sqrt{4^0-2^4+10^2-7^2}\right)$ $\boxed{60}$

10) $\left(-3^2+2\sqrt[3]{48\cdot 36}:\sqrt{2^4}\right)^2+\left(7^{1^{3^2}}:1^{2^{3^4}}+5^{2^{3^0}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{169}{16}}+\sqrt[3]{\frac{-125}{8}}\right)$ $\boxed{-64}$

II Unir cada número con su raíz cuadrada y hacer la comprobación.

1)	441	raíz 97; residuo 34
2)	731	raíz 17; residuo 0
3)	1 024	raíz 142; residuo 20
4)	1 255	raíz 63; residuo 0
5)	373	raíz 21; residuo 0
6)	289	raíz 41; residuo 16
7)	1 697	raíz 27; residiuo 2
8)	3 969	raíz 32; residuo 0
9)	9 443	raíz 35; residuo 30
10)	59 167	raíz 243; residuo 118
11)	20 184	raíz 19; residuo 12
12)	57 193	raíz 239; residuo 72