PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS

Espacios Fibrados, Clases Caraterísticas y el Isomorfismo de Thom

Tesis
para optar el grado de
Magister en Matemática

Presentado por:
Merwil Luciano Arroyo Flores

Asesor
Dr. Percy Braulio Fernández Sánchez

Jurado
Dr. Christiam Bernardo Figueroa Serrudo
Dr. Jesús Abad Zapata Samanez

Lima – Perú
2013

Agradecimiento

Expreso mi agradecimiento a todas las personas que directa o indirectamente hicieron posible el desarrollo de éste trabajo:
A mi familia en especial a mi madre Santos Blanca por ser siempre mi guía y apoyar en todo momento difícil de mi vida, a cada uno de mis cinco hermanos por su apoyo desinteresado.

A Isidora mi novia una persona que con sus sabios concejos y compañía fue muy importante para que logre terminar este proyecto.

A mi asesor el Dr. Percy Fernández por aceptar muy amablemente ser su tesista y ayudarme a aclarar mis dudas y logre una mejor madurez matemática.

A cada uno de mis profesores de la maestría como Maynard Kong, Christiam Figueroa y en especial a mi honorable jurado por sus observaciones valiosas y mostrar siempre buena disposición a ayudarnos.

A la universidad en especial al Vicerrectorado de Investigación de la Pontificia Universidad Católica del Perú por el apoyo brindado para el desarrollo de esta tesis mediante el proyecto DGI 2013-0047.

Merwil Luciano, Arroyo Flores

Lima, marzo del 2013

Introducción

La Topología Algebraica es una rama de las matemáticas, donde la idea fundamental es asociar objetos algebraicos a los espacios topológicos y/o variedades, de manera que la estructura asociada sea un invariante, en ese sentido estudiando las propiedades algebraicas del objeto asociado podemos extraer consecuencias sobre la geometría y la topología del espacio.
La cohomología de Rham y la cohomología con soporte compacto, son los dos principales invariantes topológicos de una variedad C^∞, en ambos casos son herramientas algebraicas, que se trata de cierta estructura algebraica extraída de una variedad diferenciable, permitirá distinguir si dos variedades son o no homeomorfas.

El cálculo de los grupos de cohomología de una variedad no es tan fácil, con esa idea se introdujo una buena técnica como es la secuencia de Mayer Vietoris para ambos invariantes introducida por Leopoldo Vietoris(1850), esta técnica calcula grupos de cohomología de una variedad que es posible expresarla como la unión de dos conjuntos abiertos no necesariamente disjuntos, entonces así se puede determinar los grupos de cohomología de la variedad en términos de los grupos de cohomología de estos abiertos. Así mismo y con esa misma necesidad se obtuvo la Dualidad de Poincaré para una variedad orientable de dimensión n, que establece el isomorfismo entre el grupo de cohomología de Rham y el dual de la cohomología con soporte compacto, éste isomorfismo es mucho más importante cuando la variedad orientable no es compacta.

Con el propósito de seguir buscando más objetos algebraicos que permitan proporcionar más información geométrica y/o topológica del espacio se empieza estudiar la variedad producto, cuya generalización conduce a la variedad producto local en ese sentido se obtiene una nueva variedad a partir de otra(espacio base) llamado(Espacio Fibrado) donde su espacio total está formado por fibras(sub-variedades) en particular y en el que más trabajaremos es cuando las fibras sean espacios vectoriales a estos fibrados los llamaremos **Fibrados Vectoriales** ya teniendo un fibrado y la noción de paralelismo en el espacio ambiente $\mathbb{R}^n$ se generaliza a espacios fibrados y se obtiene un operador algebraico llamada conexión, asociada a éste tenemos definida la curvatura. Con todo esto obtenemos las llamadas clases características que se iniciaron en 1935 con Whitney

y en 1942 por Shing-Shen Chern, éstas son invariantes que miden en cierta manera como se aparta esa estructura producto local de una estructura producto. Las clases características que se expresan usando la forma de curvatura con coeficientes reales o complejos gracias a Chern, tienen muchas aplicaciones por eso que es motivo de estudio en esta tesis, por ejemplo, para resolver el problema de encontrar el número de campos de vectores linealmente independientes en la esfera. También han sido usadas para formular el Teorema del índice, que iguala un invariante analítico de ciertas variedades con un invariante topológico de la variedad y una razón particular es probar el teorema generalizado de Gauss-Bonnet.
Ahora estamos interesados en establecer un isomorfismo entre la cohomología de un fibrado y la cohomología de su espacio base, entonces la pregunta es ¿De qué manera podemos establecer un isomorfismo explicito entre ambos grupos de cohomología? la respuesta que no siempre es posible, entonces para que éste sea posible necesitamos primero que la variedad (espacio base) sea orientable y éste es posible gracias a René Thom cuyo teorema lleva el mismo nombre **Isomorfismo de Thom**.

Este trabajo está dividido en cinco capítulos; el primer capítulo se hace una exposición ligera de la cohomología de Rham así como una exposición de la secuencia de Mayer Vietoris y lo mas importante la Dualidad de Poincaré que son los pilares fundamentales en el éxito de este trabajo. En el segundo y tercer capítulo se hace un estudio de los espacios fibrados pero concentrándonos más en los fibrados vectoriales las operaciones entre ellos y la conexión y curvatura éste último es la base fundamental para las clases características. En el capítulo cuatro empezamos a hablar de los polinomios invariantes que son una herramienta clásica que permite hacer un estudio detallado de las clases características principalmente en las Clases de Chern para fibrados vectoriales complejos la misma que se construye en base a la 2-forma de curvatura. Finalmente en el capítulo cinco se empieza trabajando una herramienta que permite calcular los grupos de cohomología de un espacio producto llamada la Fórmula de Künneth, posteriormente se construye un nuevo fibrado llamado el fibrado de esferas que se usará en poder probar el isomorfismo de Thom, además se define el índice de una sección y se concluye con el teorema generalizado de Gauss-Bonnet.

El trabajo ha sido hecho en base a mucho esfuerzo, dedicación, y doy gracias a Dios por haberme guiado siempre y así poder lograr todas las metas trazadas .
Agradezco anticipadamente a los lectores por las observaciones que tengan a bien formular.

El Autor

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Cohomología de Rham

Empezamos éste capítulo estudiando brevemente la cohomología de Rham; que es una colección de espacios vectoriales obtenidos dentro del cálculo de la exactitud de un complejo de formas diferenciables asociado a una variedad dada; que aporta información acerca de la arquitectura del espacio.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, denotamos por $\Omega^k(M)$ al espacio de $k-$formas diferenciales en M; donde el operador derivada exterior $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ goza de la propiedad $d \circ d = 0$ la misma que hace que la secuencia

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

sea semiexacta. Por otro lado se dice que una $k-$forma $w \in \Omega^k(M)$ es **cerrada** si y sólo si $dw = 0$. Y decimos que es **exacta** si y sólo si existe $u \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $du = w$; el hecho que $d \circ d = 0$; implica que $\mathrm{Im}\big(d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\big)$ está contenido en el $\mathrm{Ker}\big(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\big)$. Con eso definimos el $k-$ésimo grupo de **cohomología de Rham** como el espacio vectorial cociente

$$H^k(M) = \frac{\mathrm{Ker}\big(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\big)}{\mathrm{Im}\big(d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\big)}$$

en particular $H^k(M) = 0$ para $k < 0$ y $k > n = \mathrm{dim}M$; además $H^0(M)$ es el núcleo de $d : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \Omega^1(M)$. Decimos que dos clases $[w] = [w']$ si y sólo si $w - w'$ es una forma exacta. También podemos deducir que $H^0(M)$ es el espacio de las funciones constantes sobre las componentes conexas de M y como consecuencia de esto se tiene que $\mathrm{dim}H^0(M)$ es el número de componentes conexas de M.

El producto exterior de formas induce un producto $H^k(M) \times H^l(M) \to H^{k+l}(M)$ que hace que $H^*(M)$ sea un álgebra graduada. Si M, N son dos variedades diferenciales y $\phi : M \to N$ una aplicación suave entre las variedades, la aplicación $\phi^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ induce una aplicación lineal

$$H^k(\phi) : H^k(N) \to H^k(M).$$

Por otro lado si tenemos dos aplicaciones $f_0, f_1 : M \to N$ homotópicas entre variedades diferenciales, entonces

$$H^k(f_0) = H^k(f_1) : H^k(N) \to H^k(M).$$

Ahora decimos que dos variedades M y N tienen el mismo tipo de homotopía si existen aplicaciones diferenciales $f_0 : M \to N$ y $f_1 : N \to M$ tal que $f_0 \circ f_1$ y $f_1 \circ f_0$ son homotópicas a la id_M y id_N respectivamente. Con esto si una variedad diferenciable M tiene el mismo tipo de homotopía que un punto fijo c de M, entonces tienen grupos de cohomología isomorfos, de ese modo se sabe que $\mathbb{R}^n$ tiene el mismo tipo de homotopía que un punto, por lo tanto

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

De la misma forma se tiene $H^k(M \times \mathbb{R}^n) = H^k(M)$. Una subvariedad diferenciable $A \subseteq M$ es un **retracto** de M si existe una aplicación diferenciable $r : M \to A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Es decir $r \circ i = i_A$ donde $i : A \to M$ es la inclusión y i_A es la identidad en A. Y decimos que A es un **retracto por deformación** de M si $i \circ r$ es homotópica a la identidad i_M en M. De esa manera decimos que si A es un retracto por deformación de M, entonces $H^k(A) = H^k(M)$.

1.2. Cohomología de un Complejo de Cadenas

En esta sección definiremos la cohomología para un complejo de cadenas que nos dará importantes resultados que luego nos permitirá particularizar y facilitará la pruebas en ciertos resultados sobre todo en la prueba de la Secuencia de Mayer Vietoris.

Definición 1.1. *Sean A, B y C espacios vectoriales y α, β aplicaciones lineales, la secuencia* $\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow \cdots$ *decimos que es una* ***secuencia exacta*** *en B si la imagen de α coincide con el núcleo de β; esto es,* $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}(\beta)$*, la secuencia completa, es exacta si lo es en cada uno de los espacios vectoriales.*

Una secuencia de la forma: $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ se llama secuencia corta, esta secuencia es exacta si α es inyectiva, β es sobreyectiva y $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}(\beta)$ en este caso la llamaremos **secuencia exacta corta**.

Definición 1.2. *Se define un* ***complejo de cadenas*** *como una secuencia* $A^* = \{A^k, d^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *de espacios vectoriales y aplicaciones lineales* $d^k : A^k \to A^{k+1}$ *tales que* $d^{k+1} \circ d^k = 0$.

La igualdad $d^{k+1} \circ d^k = 0$ implica que $\operatorname{Im} d^k \subseteq \operatorname{Ker}(d^{k+1})$ así esta secuencia no necesariamente es exacta.
Si un complejo de cadenas es exacta, entonces induce las secuencias exactas cortas.

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} d^{k-1} \xrightarrow{i} A^k \xrightarrow{d^k} \operatorname{Im} d^k \longrightarrow 0\ ,$$

donde $i : \operatorname{Im} d^{k-1} \to A^k$ es la inclusión, además tenemos los isomorfismos

$$\frac{A^{k-1}}{\operatorname{Im} d^{k-2}} \cong \frac{A^{k-1}}{\operatorname{Ker} d^{k-1}} \cong \operatorname{Im} d^{k-1}.$$

Si A, C son espacios vectoriales de dimensión finita y $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ es una secuencia exacta corta, deducimos que B también es de dimensión finita además $B \cong A \oplus C$.

Observación 1.1. *Dado una transformación lineal entre espacios vectoriales* $f : A \to B$ *ésta induce la secuencia exacta corta*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} \operatorname{Im}(f) \longrightarrow 0\ .$$

En consecuencia; tenemos que $A \cong \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ *y* $\dim A = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$.

Definición 1.3. *Dado un complejo de cadenas* $A^* = \{A^p, d^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ *definimos el* p*-ésimo espacio vectorial de cohomología del complejo de cadenas* A^* *como:*

$$H^p(A^*) = \frac{\operatorname{Ker}(d^p)}{\operatorname{Im}(d^{p-1})}.$$

A los elementos de $\operatorname{Ker}(d^p)$ *se les llama* $p-$ *cociclos y de* $\operatorname{Im}(d^{p-1})$ *se les llama* $p-$ *cobordes y los elementos de* $H^p(A^*)$ *se llaman clases de cohomología.*

Definición 1.4. *Sea* $A^* = \{A^k, d_A^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $B^* = \{B^k, d_B^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *complejos de cadenas, Una aplicación entre complejos de cadenas* $f : A^* \to B^*$ *es una familia de aplicaciones lineales* $f^k : A^k \to B^k$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{k+2} \arrow[r, "d_A^{k+2}"] \arrow[d, "f^{k+2}"] & A^{k+1} \arrow[r, "d_A^{k+1}"] \arrow[d, "f^{k+1}"] & A^k \arrow[r, "d_A^k"] \arrow[d, "f^k"] & A^{k-1} \arrow[r, "d_A^{k-1}"] \arrow[d, "f^{k-1}"] & A^{k-2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{k-2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{k+2} \arrow[r, "d_B^{k+2}"] & B^{k+1} \arrow[r, "d_B^{k+1}"] & B^k \arrow[r, "d_B^k"] & B^{k-1} \arrow[r, "d_B^{k-1}"] & B^{k-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Esto es $f^{k-1} \circ d_A^k = d_B^k \circ f^k, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Lema 1.1. *Una aplicación de cadenas $f : A^* \to B^*$ induce una aplicación lineal*

$$\begin{array}{rcccl} f^* & : & H^p(A^*) & \to & H^p(B^*) \\ & & [a] & \to & [f^p(a)]. \end{array}$$

Demostración. La demostración consiste en probar que f^* esta bien definida, sea $[a] \in H^p(A^*)$, éste es un co-ciclo por lo tanto $d^p(a) = 0$, donde a es un representante de la clase dada; entonces $[a] = a + \mathrm{Im}(d_A^{p-1})$. Ahora si tomamos dos clases iguales en $H^p(A^*)$, digamos $[a_1] = [a_2]$ entonces $(a_1 - a_2) \in \mathrm{Im}(d_A^{p-1})$ así tenemos que $(a_1 - a_2) = d_A^{p-1}(b)$ para algún b de A^{p-1} y $f^p(a_1 - a_2) = f^p(d_A^{p-1}(b)) = d_B^{p-1}(f^{p-1}(b))$ por lo tanto tenemos que $(f^p(a_1) - f^p(a_2)) \in \mathrm{Im}(d_B^{p-1})$ entonces $[f^p(a_1)] = [f^p(a_2)]$. $\square$

Una secuencia exacta corta de complejos de cadenas.

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \longrightarrow 0$$

consiste de una familia de secuencias exactas cortas

$$0 \longrightarrow A^p \xrightarrow{f^p} B^p \xrightarrow{g^p} C^p \longrightarrow 0\ ,$$

para todo p.

Lema 1.2. *Sea* $0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \longrightarrow 0$, *una secuencia exacta corta de complejos de cadenas entonces la secuencia*

$$H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*)$$

es exacta.

Demostración. Debemos probar que la imagen de f^* coincide con el núcleo de g^* lo haremos por doble inclusión.

(i) $\mathrm{Im}(f^*) \subset \mathrm{Ker}(g^*)$, esto se puede probar con la siguiente composición $g^* \circ f^* = 0$. Claro esto es evidente, pues por hipótesis tenemos $g^p \circ f^p = 0$ y ello implica que $g^* \circ f^*([a]) = g^*([f^p(a)]) = [g^p(f^p(a))] = 0$.

(ii) $\mathrm{Ker}(g^*) \subset \mathrm{Im}(f^*)$, considere $[b]$ una clase de cohomología en $H^p(B^*)$ tal que $g^*[b] = 0$, probemos que $[b]$ pertenece a la imagen de f^*. Como $g^*[b] = 0$ entonces $g^p(b) = d_C^{p-1}(c)$ para algún c de C^{p-1} y como g^{p-1} es sobreyectiva entonces existe b_1 en B^{p-1} tal que $g^{p-1}(b_1) = c$ luego se sigue que $g^p(b - d_B^{p-1}(b_1)) = 0$ por lo tanto existe a en A^p con $f^p(a) = b - d_B^{p-1}(b_1)$. Veamos que a es un p-cociclo esto se puede ver de la conmutatividad del diagrama (ver definición de complejo de cadenas) luego tenemos

$$f^{p+1}(d_A^p(a)) = d_B^p(f^p(a)) = d_B^p(b - d_B^{p-1}(b_1)) = 0$$

puesto que b es un p- cociclo y $d^p \circ d^{p-1} = 0$. De la inyectividad f^{p+1} tenemos que $d_A^p(a) = 0$, es decir a es co-ciclo. Tenemos $[a]$ esta en $H^p(A^*)$ por lo tanto $f^*([a]) = [b - d_B^{p-1}(b_1)] = [b]$, así [b] pertenece a la imagen de f^*.
De (i) y (ii) la secuencia es exacta.

□

De la familia de secuencias exactas cortas $0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \longrightarrow 0$, formamos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "f^{p-1}"] \arrow[d, "d_A^{p-1}"'] & B^{p-1} \arrow[r, "g^{p-1}"] \arrow[d, "d_B^{p-1}"'] & C^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_C^{p-1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^p \arrow[r, "f^p"] \arrow[d, "d_A^p"'] & B^p \arrow[r, "g^p"] \arrow[d, "d_B^p"'] & C^p \arrow[r] \arrow[d, "d_C^p"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{p+1} \arrow[r, "f^{p+1}"] \arrow[d] & B^{p+1} \arrow[r, "g^{p+1}"] \arrow[d] & C^{p+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

conmutativo. En seguida damos una definición de suma importancia que nos permitirá conectar una clase en dimensión p en otra clase en dimensión $(p+1)$ y eso es posible gracias a la definición del **homomorfismo conector** ∂^*.

Definición 1.5. *Consideremos una secuencia exacta corta de complejos de cadenas* $0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \longrightarrow 0$, *definimos el homomorfismo lineal*

$$\partial^* : H^p(C^*) \to H^{p+1}(A^*)$$

que asigna, a cada clase $[c]$ *de* $H^p(C^*)$ *la clase* $\partial^*([c]) = [(f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1})(c))]$ *con las mismas notaciones de la definición de complejo de cadenas.*

La aplicación g^p no posee inversa la notación $(g^p)^{-1}(c)$ indica la imagen inversa de c que está contenida en B^p, líneas más adelante se ve que la clase $[(f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1})(c))]$ independe del valor de la preimagen de c vía g^p. En esta definición veremos que la clase $[(f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1})(c))]$ es un co-ciclo, esto es $d_A^{p+1}\big([(f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1})(c))]\big) = 0$ con esos fines sea $b \in (g^p)^{-1}(c)$ y usando la conmutatividad del diagrama (1), se tiene que

$$f^{p+2}\Big(d_A^{p+1}\big((f^{p+1})^{-1}\big)(d_B^p(b))\Big) = d_B^{p+1} f^{p+1}(f^{p+1})^{-1} d_B^p(b) = d_B^{p+1} d_B^p(b) = 0$$

y de la inyectividad de f^{p+2} se consigue lo que queríamos. Ahora veremos la buena definición de ∂^* para esto considere $b, b' \in (g^p)^{-1}(c)$ esto es $g^p(b') = g^p(b) = c$; y desde que $g^p(b) = c$ y $d^p_C(c) = 0$ entonces se concluye que $d^p_B(b) \in \mathrm{Im} f^{p+1}$, por otro lado si $f^{p+1}(a) = d^p_B(b)$ usando la conmutatividad del diagrama y el hecho que f^{p+2} es inyectiva se tiene que $d^{p+1}_A(a) = 0$, además como $g^p(b') = g^p(b) = c$ y $f^{p+1}(a) = d^p_B(b)$, $f^{p+1}(a') = d^p_B(b')$, entonces $[a] = [a'] \in H^{p+1}(A^*)$, lo cual demuestra la buena definición.

Ahora usando la aplicación operador conector ∂^*, tenemos la siguiente secuencia

$$H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \qquad (2)$$

veamos que ésta es **exacta**, esto es $\mathrm{Im} g^* = \mathrm{Ker}\partial^*$ para probar esta igualdad procedemos a hacerlo por doble inclusión, si hacemos

$$\partial^* \circ g^*([b]) = \partial^*\big([g^p(b)]\big) = [(f^{p+1})^{-1} d^p_B((g^p)^{-1} g^p(b))] = [(f^{p+1})^{-1} d^p_B(b)] = 0$$

entonces, se tiene que $\mathrm{Im} g^* \subset \mathrm{Ker}\partial^*$. Faltaría la otra inclusión para esto sea $c \in C^p$ tal que $\partial^*([c]) = 0$, esto es $[(f^{p+1})^{-1}(d^p_B((g^p)^{-1})(c))] = 0$ de donde se tiene que $(f^{p+1})^{-1}(d^p_B((g^p)^{-1})(c)) = d^p_A(a')$ para algún $a' \in A^p$, por lo tanto $d^p_B(g^p)^{-1}(c) = f^{p+1} d^p_A(a') = d^p_B f^p(a')$ y tomando los extremos de esta última igualdad tenemos $d^p_B\big((g^p)^{-1} - f^p(a')\big) = 0$ con esto se tiene $g^p\big((g^p)^{-1} - f^p(a')\big) = c$, de ahí obtenemos $g^*\big[(g^p)^{-1} - f^p(a')\big] = [c]$, entonces $[c] \in \mathrm{Im} g^*$ eso muestra la otra inclusión con lo que se tiene la exactitud de la secuencia, esto es para cualquier $p \in \mathbb{Z}$.

De la misma forma tenemos la secuencia

$$H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*) \qquad (3)$$

exacta, probaremos dicha exactitud, ósea $\mathrm{Im}\partial^* = \mathrm{Ker} g^*$ en efecto

$$f^* \circ \partial^*[c] = f^*\big[(f^{p+1})^{-1}(d^p_B((g^p)^{-1})(c))\big] = \big[d^p_B(g^p)^{-1}(c)\big] = 0$$

eso muestra que $\mathrm{Im}\partial^* \subset \mathrm{Ker} g^*$, para ver la otra inclusión supongamos que $f^*([a]) = 0$, entonces $f^{p+1}(a) = d^p_B(b)$ para algún $b \in B^p$ luego $g^p(b) \in C^p$ así hacemos

$$\partial^*[g^p(b)] = \big[(f^{p+1})^{-1}(d^p_B((g^p)^{-1})g^p(b))\big] = \big[(f^{p+1})^{-1}(d^p_B(b)\big] = [a]$$

por lo tanto $[a] \in \mathrm{Im}\partial^*$, luego secuencia dada en (3) es exacta.

Juntando el Lema(1.2) y (2), (3) obtenemos una secuencia exacta larga, esto lo formalizamos en la siguiente proposición.

Proposición 1.1. *Sea* $0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \longrightarrow 0$ *una secuencia exacta corta de complejos de cadenas. Entonces la secuencia larga*

$$\cdots \longrightarrow H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

Esta proposición facilitará la prueba de la Secuencia de Mayer Vietoris que presentaremos en seguida.

1.3. Secuencia de Mayer Vietoris

Leopoldo Vietoris $(1891-2002)$, es uno de los topólogos quién descubrió esta técnica que da excelentes resultados para el cálculo de grupos de cohomología. Por lo que en esta sección nos ocuparemos del estudio de las secuencia de Mayer Vietoris que nos permite calcular los grupos de cohomología de $H^*(U_1 \cup U_2)$ en términos de $H^*(U_1)$ y $H^*(U_2)$, donde U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Esta técnica también se puede generalizar para abiertos de una variedad diferenciable.

Empezaremos dando un teorema que facilitará la llegada de la **secuencia de Mayer Vietoris.**

Teorema 1.1. *Sea U_1, U_2 subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ con unión $U = U_1 \cup U_2$, sea $i_v : U_v \to U$ y $j_v : U_1 \cap U_2 \to U_v$ para $v = 1, 2$ las respectivas inclusiones, entonces la secuencia*

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $I^p(w) = (i_1^*(w), i_2^*(w))$ y $J^p(w_1, w_2) = j_1^*(w_1) - j_2^*(w_2)$.

Demostración. Sea V, W abiertos de $\mathbb{R}^n$, dada una $p-$forma $w = \sum f_I dx_I$ en $\Omega^p(W)$ y $\phi : V \to W$ una aplicación diferenciable, entonces podemos escribir

$$\phi^*(w) = \sum (f_I \circ \phi) d\phi_{i_1} \wedge ... \wedge d\phi_{i_p}$$

en la prueba usaremos ϕ como inclusión de un abierto en $\mathbb{R}^n$ ósea $\phi_i(x) = x_i$ donde los ϕ_i son las componentes de la aplicación ϕ entonces $d\phi_{i_1} \wedge ... \wedge d\phi_{i_p} = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$ para abreviar cierta notación escribimos $dx_I = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$ por lo tanto $\phi^*(w)$ se escribe de la forma $\sum (f_I \circ \phi) dx_I$ en ese sentido tomaremos $\phi = i_v, j_v$ para $v = 1, 2$; con lo cual tenemos

$$i_v^*(w) = \sum (f_I \circ i_v) dx_I \text{ y } j_v^*(w) = \sum (f_I \circ j_v) dx_I \text{ para } v = 1, 2.$$

Probemos que I^p es inyectiva, tome $I^p(w) = \left(\sum (f_I \circ i_1) dx_I, \sum (f_I \circ i_2) dx_I\right) = 0$, por lo tanto $f_I \circ i_v = 0$ para todo v esto implica que $f_I = 0$ en U, luego $w = \sum f_I dx_I = 0$. Ahora veremos que $\mathrm{Ker} J^p = \mathrm{Im} I^p$, esto se hará por doble inclusión, para ver $\mathrm{Im} I^p \subset \mathrm{Ker} J^p$ hacemos

$$J^p \circ I^p(w) = j_1^* i_1^*(w) - j_2^* i_2^*(w) = j^*(w) - j^*(w) = 0,$$

donde $j : U_1 \cap U_2 \to U$ es la inclusión. Para ver la otra inclusión considere dos p-formas

$$w_1 = \sum f_I dx_I \in \Omega^p(U_1) \text{ y } w_2 = \sum g_I dx_I \in \Omega^p(U_2) :$$

con $J^p(w_1, w_2) = 0$. Obteniendo que estas formas restrictas a $U_1 \cap U_2$ coinciden; es decir $j_1^*(w_1) = j_2^*(w_2)$, de ahí se deduce que $f_I \circ j_1 = g_I \circ j_2$ en $U_1 \cap U_2$, luego $f_I(x) = g_I(x)$ para todo $x \in U_1 \cap U_2$, entonces podemos definir una aplicación diferenciable $h_I : U \to \mathbb{R}$ dado por

$$h_I(x) = \begin{cases} f_I(x), & x \in U_1 \\ g_I(x), & x \in U_2 \end{cases}$$

de esta manera se tiene que $I^p(\sum h_I dx_I) = (w_1, w_2)$, por lo tanto $(w_1, w_2) \in \text{Im } I^p$.

Por último falta demostrar que J^p es sobreyectiva, probaremos que para toda forma $w = \sum f_I dx_I \in \Omega^p(U_1 \cap U_2)$ existe $(w_1, w_2) \in \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2)$ tal que $J^p(w_1, w_2) = w$; con ese fin considere $\{\rho_1, \rho_2\}$ partición de la unidad subordinada a la cobertura abierta $\{U_1, U_2\}$; esto es $\rho_v : U \to [0, 1]$ con $\text{sop}(\rho_v) \subset U_v$ tal que $\rho_1(x) + \rho_2(x) = 1$ para $x \in U$. Si elegimos $f : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable; usando la partición de la unidad elegida podemos extender f a U_1 y U_2 respectivamente. Si $\text{sop}(\rho_1) \cap U_2 \subset U_1 \cap U_2$ la extendemos en U_2 de la forma

$$f_2(x) = \begin{cases} -\rho_1(x) f(x) & \text{si } x \in U_1 \cap U_2 \\ 0 & \text{si } x \in U_2 - \text{sop}(\rho_1) \end{cases}$$

análogamente, se extiende a U_1 de la forma

$$f_1(x) = \begin{cases} \rho_2(x) f(x) & \text{si } x \in U_1 \cap U_2 \\ 0 & \text{si } x \in U_1 - \text{sop}(\rho_2). \end{cases}$$

Notemos que $f_1(x) - f_2(x) = f(x)$ esto es para todo $x \in U_1 \cap U_2$. Aplicamos la situación de arriba para extender las funciones $f_I : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}$, obteniéndose las funciones $f_{I,v} : U_v \to \mathbb{R}$. Por lo tanto construimos las formas $w_v = \sum f_{I,v} dx_I \in \Omega^p(U_v)$ tal que

$$J^p(w_1, w_2) = \sum (f_{I,1} \circ j_1) dx_I - \sum (f_{I,2} \circ j_2) dx_I = \sum (f_{I,1} - f_{I,2}) dx_I = w.$$

donde $w = \sum f_I dx_I \in \Omega^p(U_1 \cap U_2)$. Eso completa la exactitud de la secuencia exacta corta. $\square$

El siguiente teorema es de suma importancia por lo que es necesario incluirlo en nuestro trabajo. La primera aplicación será la prueba de la Dualidad de Poincaré y por último facilitará la prueba del Isomorfismo de Thom enunciada y probada en el Capítulo 5.

Usando la misma notación del Teorema(1.1) enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 1.2. ***Secuencia de Mayer Vietoris*** *Sea U_1, U_2 abiertos de $\mathbb{R}^n$ con unión $U = U_1 \cup U_2$. Entonces existe una secuencia exacta larga de espacios vectoriales de cohomología*

$$\cdots \longrightarrow H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U) \longrightarrow \cdots$$

donde, $I^*([w]) = (i_1^*[w], i_2^*[w])$ y $J^*([w_1],[w_2]) = j_1^*[w_1] - j_2^*[w_2]$.

Demostración. La demostración está basada en el Teorema(1.1) y luego se aplica a la Proposición(1.1). □

En la demostración hecha en el Teorema(1.1) se tomó un sistema coordenado local donde las formas diferenciales se podrían escribir de la forma $w = \sum f_I dx_I$; éste tipo de representación no es necesaria para dicha prueba. Motivo por el cual la prueba vale si M es una variedad diferenciable con cubrimiento $\{U_1, U_2\}$. Así la Secuencia de Mayer Vietoris también se aplicar para una variedad que es cubierta por dos abiertos.

En lo que sigue M será considerada como una variedad diferenciable de Hausdorff y enumerable. Ahora considere U, V abiertos de M con $V \subset U$ y sea $i : V \to U$ la inclusión. Entonces existe una aplicación i_* definida de la forma

$$i_* : \Omega_c^*(V) \to \Omega_c^*(U),$$

$$i_*(w)|_V = w, \; i_*(w)|_{U-\mathrm{sop}(w)} = 0; \text{ para } w \in \Omega_c^*(V). \qquad (4)$$

donde $\Omega_c^*(U)$ es el espacio de formas con soporte compacto en U. Así tenemos una aplicación lineal

$$i_* : H_c^p(V) \to H_c^p(U) \qquad (5)^1$$

Dada $W \subset V$ y una segunda inclusión $j : W \to U$, con la propiedad $(i \circ j)_*(w) = i_* \circ j_*(w)$; entonces $(H_c^p(-), i_*)$ se convierte en un funtor contravariante en la categoría de subconjuntos abiertos y inclusiones en una variedad diferenciable.

Sea U_1 y U_2 abiertos de una variedad M con unión $U = U_1 \cup U_2$ y considere $i_v : U_v \to U$, $j_v : U_1 \cap U_2 \to U_v$ para $v = 1, 2$ la respectivas inclusiones. Entonces la secuencia

$$0 \longrightarrow \Omega_c^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{J_p} \Omega_c^p(U_1) \oplus \Omega_c^p(U_2) \xrightarrow{I_p} \Omega_c^p(U) \longrightarrow 0 \qquad (6)$$

es una secuencia exacta corta, donde $J_p(w) = (j_{1*}(w), -j_{2*}(w))$ y $I_p(w_1, w_2) = i_{1*}(w_1) + i_{2*}(w_2)$. Para probar dicha exactitud debemos probar que J_p es inyectiva lo cual es inmediato según (4). Ahora se probará que $\mathrm{Im} J_p = \mathrm{Ker} I_p$ éste lo haremos por doble inclusión; la inclusión $\mathrm{Im} J_p \subseteq \mathrm{Ker} I_p$ se obtiene de el hecho que $I_p \circ J_p(w) = 0$; faltaría

[1] $H_c^p(U)$ denota el grupo de cohomología con soporte compacto definido como el cociente entre $Ker(d : \Omega_c^p(U) \to \Omega_c^{p+1}(U))$ y $Im(d : \Omega_c^{p-1}(U) \to \Omega_c^p(U))$

ver la otra inclusión $\text{Ker}I_p \subseteq \text{Im}J_p$, para ello considere $w_1 \in \Omega_c^p(U_1)$ y $w_2 \in \Omega_c^p(U_2)$ tal que $I_p(w_1, w_2) = 0$ lo que implica que $w_1 = -w_2$ en $U_1 \cap U_2$, así se tiene que $J_p(w = w_1) = (w_1, w_2)$. Obteniéndose la otra inclusión. Por último para la sobreyectividad de I_p considere $\{\rho_1, \rho_2\}$ partición de la unidad subordinada a la cobertura $\{U_1, U_2\}$ con $\text{sop}(\rho_v) \subset U_v$. Dada una forma $w \in \Omega_c^p(U)$ entonces la forma $\rho_1 w$ tiene soporte compacto en U_1, ésta forma tiene soporte compacto puesto que $\text{sop}(\rho_1 w) \subset \text{sop}(\rho_1) \cap \text{sop}(w)$ está contenido en un compacto($\text{sop}(w)$) y como M es de Hausdorff. De la misma manera sucede con la forma $\rho_2 w$ que tiene soporte compacto en U_2. Por lo tanto la forma w es la imagen vía I_p del par de formas $(\rho_1 w, \rho_2 w)$, con lo cual I_p es sobreyectiva. Esto completa la prueba de la exactitud de (6).

En resumen como (6) es una secuencia exacta corta, se puede aplicar a la Proposición(1.1) y ahí se obtiene la **Secuencia de Mayer Vietoris para cohomología con soporte compacto**.

$$\cdots \longrightarrow H_c^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{J_*} H_c^p(U_1) \oplus H_c^p(U_2) \xrightarrow{I^*} H_c^p(U) \xrightarrow{\partial^*} H_c^{p+1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \cdots . \qquad (7)$$

Esta secuencia será de suma importancia en la construcción de la Dualidad de Poincaré.

1.4. Dualidad de Poincaré

La Dualidad de Poincaré es uno de los resultados más importantes de éste trabajo; por eso que es necesario incluirlo, así como su demostración para tener un mejor entendimiento. Empezamos dando algunas ideas de la construcción de dicho isomorfismo.

Dada una variedad diferenciable orientable compacta M de dimensión n; la Dualidad de Poincaré afirma que $H^p(M) \cong H^{n-p}(M)^*$ donde $H^{n-p}(M)^*$ denota el espacio vectorial dual de $H^{n-p}(M)$.

La prueba que presentamos en éste trabajo se hará por inducción a través de un cubrimiento abierto de M. La justificación se establecerá de manera muy general sin considerar en la hipótesis que M es compacta. es decir se probará que

$$H^p(M) \cong H_c^{n-p}(M)^*, \forall p \in \{0, ..., n\};$$

donde $H_c^{n-p}(M)$ es la cohomología de Rham con soporte compacto sobre una variedad orientable M(no necesariamente compacta)
En el caso que M sea compacta, entonces $\Omega^*(M) = \Omega_c^*(M)$ en consecuencia se tiene que $H^*(M) = H_c^*(M)$.

Por otro lado sabemos que $H_c^*(M)$ no necesariamente es un funtor contravariante, en la categoría de aplicaciones diferenciales. Sin embargo si $\varphi : M \to N$, es una aplicación propia entre variedades diferenciales, ósea $\varphi^{-1}(K)$ es compacto, para todo compacto K de N. Entonces si w es una forma con soporte compacto sobre N, se tiene que $\varphi^*(w)$ es una forma con soporte compacto sobre M.

$$\mathrm{sop}_M \varphi^*(w) \subset (\varphi^*)^{-1}(\mathrm{sop}_N(w)),$$

donde $\varphi^* : \Omega_c^p(N) \to \Omega_c^p(M)$. En consecuencia φ^* induce una aplicación $H_c^p(\varphi) : H_c^p(N) \to H_c^p(M)$ así $H_c^p(\varphi)$ se convierte en un funtor contravariante de la categoría de formas diferenciales con soporte compacto en la categoría de funciones diferenciales propias.

Observación 1.2. *Sea M una variedad diferenciable conexa orientable de dimensión n entonces tenemos el isomorfismo.*

$$\int_M : H_c^n(M) \to \mathbb{R},$$

vea [4] *Corolario(10.14) del Teorema(10.13).*

En el siguiente ejemplo se determina los grupos de cohomología con soporte compacto de $\mathbb{R}^n$, éste ayudará a la prueba de la Dualidad de Poincaré.

Ejemplo 1.1.

$$H_c^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & q = n \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}$$

Veamos la prueba del ejemplo. En los casos $q = 0$ y $q = n$ usamos la observación(**??**); con lo cual $H_c^q(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$. Faltaría ver los casos en que $0 < q < n$, esto quiere decir que tendremos que probar que la secuencia

$$\Omega_c^{q-1}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d^{q-1}} \Omega_c^q(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d^q} \Omega_c^{q+1}(\mathbb{R}^n)$$

es exacta. Ya tenemos que toda forma exacta es cerrada, esto por $d^q \circ d^{q-1} = 0$. Ahora tenemos que ver que toda forma cerrada con soporte compacto es una forma exacta con soporte compacto; para ello identificaremos a $\mathbb{R}^n$ con $S^n - \{p_0\}$ así trabajaremos en $S^n - \{p_0\}$. El conjunto $\Omega_c^q(S^n - \{p_0\})$ contiene todas las formas que se eliminan en una vecindad de p_0, por lo tanto es un subcomplejo de $\Omega_c^q(S^n)$. Consideremos w una forma cerrada en $\Omega_c^q(S^n - \{p_0\})$; y como $H^q(S^n) = 0$, en $0 < q < n$ entonces w es exacta en $\Omega^q(S^n)$, esto quiere decir que existe τ en $\Omega^{q-1}(S^n)$ tal que $d(\tau) = w$, debemos probar que τ se elimina en una vecindad de p_0. Consideremos W una vecindad de p_0 difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ tal que $w|_W = 0$.
En el caso que $q = 1$, entonces τ se convierte en una aplicación en S^n que es constante

en W esto quiere decir que $\tau|_W = a$, así definimos $k = \tau - a$ en $\Omega^0_c(S^n - p_0)$ por lo tanto $d(k) = w$.
En el caso que $2 \leq q < n$, tenemos que W es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ entonces se tiene $H^{q-1}(W) = H^{q-1}(\mathbb{R}^n)$ y que $\tau|_W$ es una forma cerrada, para hallar σ en $\Omega^{q-1}(W)$ con $d(\sigma) = \tau|_W$, elegimos una aplicación diferenciable $\varphi : S^n \to [0,1]$ con $sopp(\varphi) \subset W$, que toma el valor de 1 en una vecindad de p_0, más pequeña que W digamos $U \subset W$ la forma $\varphi \circ \sigma$ en W se puede extender a S^n y le asignamos el valor de cero en $S^n - W$, sea $\widetilde{\sigma}$ la forma extendida y $k = \tau - d(\widetilde{\sigma})$, entonces $k|_U = 0$ y $d(k) = d(\tau) + dd(\widetilde{\sigma}) = w$. Luego existe k en $\Omega^q_c(S^n)$ tal que $d(k) = w$, entonces la secuencia es exacta.

Sea A un espacio vectorial, denotemos $A^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(A, \mathbb{R})$ al conjunto de aplicaciones lineales de A en $\mathbb{R}$ llamado el dual del espacio vectorial A.
Es fácil ver que si la secuencia $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ donde A, B y C son espacios vectoriales, es exacta; entonces la secuencia

$$C^* \xrightarrow{\psi^*} B^* \xrightarrow{\varphi^*} C^* \ ,$$

es exacta.
Entonces se puede dualizar la Secuencia de Mayer Vietoris para soporte compacto dada en (7). Así se tiene

$$\cdots \longrightarrow H^{q+1}_c(U_1 \cap U_2)^* \xrightarrow{\partial^i} H^q_c(U)^* \xrightarrow{I^i} H^q_c(U_1)^* \oplus H^q_c(U_2) \xrightarrow{J^i} H^q_c(U_1 \cap U_2)^* \longrightarrow \cdots$$

donde $I^i(\alpha) = (i_1'(\alpha), i_2'(\alpha))$ y $J^i(\alpha_1, \alpha_2) = j^i_1(\alpha_1) - j^i_2(\alpha_2)$.

Por otro lado si tenemos una familia $\{U_\alpha/\alpha \in I\}$ de abiertos disjuntos dos a dos de una variedad M con $U = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$; entonces tenemos el isomorfismo dado por:

$$H^q_c(U) \simeq \Pi_{\alpha \in A} H^q_c(U_\alpha); \ \ [w] \to [i^*_\alpha(w)]; \alpha \in I. \qquad (8)$$

Ahora considere a M como una variedad orientable de dimensión n. Definimos el producto exterior sobre formas con soporte compacto como:

$$\begin{array}{cccccc} \wedge & : & \Omega^p(M) \times \Omega^{n-p}_c(M) & \to & \Omega^n_c(M) \\ & & (w_1, w_2) & \to & (w_1 \wedge w_2), \end{array}$$

donde $\mathrm{sop}(w_1 \wedge w_2) \subseteq \mathrm{sop}(w_1) \cap \mathrm{sop}(w_2)$, así ésta induce una aplicación bilineal a nivel de grupos de cohomología

$$H^p(M) \times H^{n-p}_c(M) \to H^n_c(M).$$

Por la Observación(1.2) tenemos que $\int_M : H^n_c(M) \to \mathbb{R}$ es un isomorfismo, entonces obtenemos una aplicación bilineal

$$\begin{array}{cccccc} \int_M & : & H^p(M) \times H^{n-p}_c(M) & \to & \mathbb{R} \\ & & ([w_1], [w_2]) & \to & \int_M w_1 \wedge w_2; \end{array}$$

que de esa manera define una **aplicación lineal**

$$D_M^p : H^p(M) \to H_c^{n-p}(M)^*.$$

En esta sección demostraremos que ésta aplicación es un isomorfismo. Para la prueba daremos algunos lemas previos.

Lema 1.3. *Sean U,V subconjuntos abiertos de M con $V \subseteq U \subseteq M$ entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} H^p(U) \arrow[r, "H^p(i)"] \arrow[d, "D_U^p"] & H^p(V) \arrow[d, "D_V^p"] \\ H_c^{n-p}(U)^* \arrow[r, "i^!"] & H_c^{n-p}(V)^* \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Se probará que $D_V^p \circ H^p(i) = i^! \circ D_U^p$. Tome $i : V \to U$ como la inclusión; considere $w \in \Omega^p(U)$ y $\tau \in \Omega_c^{n-p}(V)$ formas cerradas representantes de las clases de cohomología de $[w]$ y $[\tau]$ respectivamente; hacemos la composición

$$D_V^p \circ H^p(i)([w])([\tau]) = D_V^p([i^*(w)])[\tau] = \int_V i^*(w) \wedge \tau, \qquad (\alpha)$$

donde $i^* : \Omega^p(U) \to \Omega^p(V)$. Por otro lado componemos

$$i^! \circ D_U^p([w])([\tau]) = D_U^p([w])(i_*(\tau)) = \int_U w \wedge i_*(\tau), \qquad (\beta)$$

donde $i_* : \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$, además $\operatorname{sopp}_U(w \wedge i_*(\tau)) \subset \operatorname{sopp}_U(i_*(\tau)) = \operatorname{sopp}_V(\tau)$, así podemos integrar (β) sobre V, por otro lado tenemos que $i^*(w) \wedge \tau$ y $w \wedge i_*(\tau)$ coinciden sobre V entonces $(\alpha) = (\beta)$ y esto es para cualquier par de formas luego se tiene la igualdad requerida. $\square$

Lema 1.4. *Considere U_1 y U_2 subconjuntos abiertos de M donde $U = U_1 \cup U_2$. Entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} H^p(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\partial^*"] \arrow[d, "D_{U_1\cap U_2}^p"] & H^{p+1}(U) \arrow[d, "D_U^{p+1}"] \\ H_c^{n-p}(U_1 \cap U_2)^* \arrow[r, "(-1)^{p+1}\partial^!"] & H_c^{n-p-1}(U)^* \end{tikzcd}$$

es conmutativo; donde ∂^* es el homomorfismo conector y $\partial^!$ es una aplicación lineal.

Demostración. La prueba consiste en obtener la igualdad $(-1)^{p+1}\partial^! \circ D_{U_1\cap U_2}^p = D_U^{p+1} \circ \partial^*$.

Sea $w \in \Omega^p(U_1 \cap U_2)$ y $\tau \in \Omega_c^{n-p-1}(U)$ dos formas cerradas representantes de las clases de cohomología de $[w]$,$[\tau]$ respectivamente; considere $i_1 : U_1 \to U$, $i_2 : U_2 \to U$ y también $j_1 : U_1 \cap U_2 \to U_1$, $j_2 : U_1 \cap U_2 \to U_2$ como las inclusiones. Tome $w_1 \in \Omega^p(U_1)$ y $w_2 \in \Omega^p(U_2)$ escribimos $w = j_1^*(w_1) - j_2^*(w_2)$; y sea $k \in \Omega^{p+1}(U)$ una $(p+1)$-forma cerrada con $i_1^*(k) = dw_1$, $i_2^*(k) = dw_2$ entonces k es un representante de la clase $\partial([w])$. Entonces tenemos que

$$D_U^{p+1} \circ \partial^*([w])([\tau]) = D_U^{p+1}([k])([\tau]) = \int_U k \wedge \tau. \qquad (\theta_1)$$

Por otro lado tenemos la aplicación

$$\begin{array}{rcccl} \partial_* & : & H_c^{n-p-1}(U) & \to & H_c^{n-p}(U_1 \cap U_2) \\ & & [\tau] & \to & \partial_*([\tau]). \end{array}$$

Podemos escribir $\tau = \tau_1 + \tau_2$; donde $\tau_1, \tau_2 \in \Omega_c^{n-p-1}(U)$ y $\mathrm{sop}(\tau_1) \subset U_1$, $\mathrm{sop}(\tau_2) \subset U_2$ y sea $\sigma = j_1^*(d\tau_1) = -j_2^*(d\tau_2)$ y

$$\begin{array}{rcccl} j_1^*(U_1) & : & \Omega_c^{n-p}(U_1) & \to & \Omega_c^{n-p}(U_1 \cap U_2) \\ & & d\tau_1 & \to & j_1^*(d\tau_1), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} -j_2^*(U_2) & : & \Omega_c^{n-p}(U_2) & \to & \Omega_c^{n-p}(U_1 \cap U_2) \\ & & d\tau_2 & \to & -j_2^*(d\tau_2). \end{array}$$

Entonces σ es una $(n-p)$-forma cerrada representante de la clase de cohomología de $\partial_*([\tau])$ por lo tanto,

$$\partial^! \circ D^p_{U_1 \cap U_2}([w])([\tau]) = D^p_{U_1 \cap U_2}([w])([\tau]) = \int_{U_1 \cap U_2} w \wedge \sigma. \qquad (\theta_2)$$

Ahora mostraremos que (θ_1) es igual (θ_2) multiplicada por $(-1)^{p+1}$. Por un lado se tiene que

$$\begin{aligned} \int_U k \wedge \tau &= \int_U k \wedge (\tau_1 + \tau_2) = \int_U k \wedge \tau_1 + \int_U k \wedge \tau_2 \\ &= \int_{U_1} dw_1 \wedge \tau_1 + \int_U dw_2 \wedge (\tau_2 \qquad (\beta_1) \end{aligned}$$

donde $\mathrm{sop}(\tau_1) \subset U_1$ y $\mathrm{sop}(\tau_2) \subset U_2$ y sabemos que

$$d(w_r \wedge \tau_r) = d(w_r) \wedge \tau_r + (-1)^p w_r \wedge d(\tau_r) \qquad r = 1, 2 \qquad (*)$$

y como consecuencia del Teorema de Stokes[2] se tiene que $\int_{U_r} d(w_r \wedge \tau_r) = 0$. $\qquad (**)$
Por lo tanto aplicando la integral en (*) se tiene que

$$\int_{U_r} d(w_r \wedge \tau_r) = \int_{U_r} d(w_r) \wedge \tau_r + (-1)^p \int_{U_r} w_r \wedge d(\tau_r) \qquad r = 1, 2$$

[2]**Teorema de Stokes.** Sea M una variedad orientable de dimensión m y w una $(m-1)$ forma con soporte compacto, entonces $\int_{\partial M} i^*(w) = \int_M dw$, donde $i : \partial M \to M$ es la inclusión y ∂M denota la frontera de M.

y aplicando (**) obtenemos

$$(-1)^{p+1}\int_{U_r} w_r \wedge d(\tau_r) = \int_{U_r} d(w_r) \wedge \tau_r.$$

Así

$$(-1)^{p+1}\int_{U} k \wedge \tau = \int_{U_1} w_1 \wedge d(\tau_1) + \int_{U_2} w_2 \wedge d(\tau_2).$$

Por otra parte $d(\tau_1)\mid_{U_1} = j_{1*}(\sigma)$ y $d(\tau_2)\mid_{U_2} = -j_{2*}(\sigma)$ y se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{U_1} w_1 \wedge d(\tau_1) + \int_{U_2} w_2 \wedge d(\tau_2) &= \int_{U_1} w_1 \wedge j_{1*}(\sigma) - \int_{U_2} w_2 \wedge j_{2*}(\sigma) \\
&= \int_{U_1\cap U_2} j_1^*(w_1) \wedge \sigma - \int_{U_1\cap U_2} j_2^*(w_2) \wedge \sigma \\
&= \int_{U_1\cap U_2} w \wedge \sigma. \qquad (\beta_2)
\end{aligned}$$

Luego comparando (β_1) y (β_2) se concluye que (θ_1) es igual a (θ_2) entonces se obtiene que el diagrama es conmutativo.

□

Corolario 1.1. *Tenemos las siguientes afirmaciones:*

i. Sea U_1 y U_2 subconjuntos abiertos de M, supongamos que U_1, U_2 y $U_1 \cap U_2$ satisface la Dualidad de Poincaré. Entonces $U = U_1 \cup U_2$ satisface la Dualidad de Poincaré.

ii. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de subconjuntos abiertos disjuntos dos a dos de M donde cada U_α satisface la Dualidad de Poincaré. Entonces $U = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ satisface la Dualidad de Poincaré.

iii. Cada subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ difeomorfo a éste; satisface la Dualidad de Poincaré.

Demostración.

i. Tome $U = U_1 \cup U_2$; la prueba consiste en demostrar que $H^p(U) \simeq H_c^{n-p}(U)^*$. Por hipótesis tenemos $H^p(U_1) \simeq H_c^{n-p}(U_1)$, $H^p(U_2) \simeq H_c^{n-p}(U_2)$ y $H^p(U_1 \cap U_2) \simeq H^{n-p}(U_1 \cap U_2)^*$; en base a esto construimos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^{p-1}(U_1)\oplus H^{p-1}(U_2) \arrow[r, "J^*"] \arrow[d, "D^{p-1}_{U_1}\oplus D^{p-1}_{U_2}"'] & H^{p-1}(W) \arrow[r, "\partial^*"] \arrow[d, "D^{p-1}_W"'] & H^p(U) \arrow[r, "I^*"] \arrow[d, "D^p_U"'] & H^p(U_1)\oplus H^p(U_2) \arrow[r, "J^*"] \arrow[d, "D^p_{U_1}\oplus D^p_{U_2}"'] & H^p(W) \arrow[d, "D^p_W"] \\
H_c^{n-p+1}(U_1)^*\oplus H_c^{n-p+1}(U_2)^* \arrow[r, "J^i"] & H_c^{n-p+1}(W)^* \arrow[r, "(-1)^p\partial^i"] & H_c^{n-p}(U)^* \arrow[r, "I^i"] & H_c^{n-p}(U_1)^*\oplus H_c^{n-p}(U_2)^* \arrow[r, "J^i"] & H_c^{n-p}(W)^*
\end{tikzcd}$$

donde $W = U_1 \cap U_2$. Éste es conmutativo por el Lema(1.3) y el Lema(1.4) y además las dos secuencias de las filas son exactas. Por hipótesis D^p_W, $D^p_{U_1} \oplus D^p_{U_2}$ son isomorfismos y por el Lema Cinco se concluye que D^p_U es un isomorfismo para todo p.

ii. Por hipótesis tenemos que $H^p(U_\alpha) \simeq H^{n-p}(U_\alpha)^* \ \forall\alpha \in A$. Demostraremos que $H^p(U) \simeq H^{n-p}(\cup_{\alpha\in A}U_\alpha)^*$; para eso consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} H^p(U) \arrow[r] \arrow[d, "D_U^p"'] & \prod_{\alpha\in A} H^p(U_\alpha) \arrow[d, "\prod D^p_{U_\alpha}"] \\ H_c^{n-p}(U)^* \arrow[r] & \prod_{\alpha\in A} H_c^{n-p}(U_\alpha)^* \end{tikzcd}$$

las filas horizontales son isomorfismos por (8). También por hipótesis $\prod D^p_{U_\alpha}$ es un isomorfismo, entonces D_U^p es un isomorfismo.

iii. Como $U \subset \mathbb{R}^n$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, entonces $H^p(U) \simeq H^p(\mathbb{R}^n)$. Y por el Ejemplo(1.1) se tiene $H_c^{n-p}(U) \simeq H_c^{n-p}(\mathbb{R}^n)$. Usando el Lema de Poincaré y el ejemplo antes mencionado se tiene que $H_c^p(U) \cong H^{n-p}(U) = 0$ esto es para todo $p \neq 0$. Sólo faltaría probar que $D_U^0 : H^0(U) \to H_c^n(U)^*$ es un isomorfismo, esto es suficiente viendo que la aplicación $\int_U : H_c^n(U) \to \mathbb{R}$ es diferente de cero. Entonces, D_U^p es un isomorfismo.

□

En particular $H_c^n(U)^* \simeq \mathbb{R}$, además si (h, U') es una carta de M, entonces todo subconjunto abierto de M difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ satisface la Dualidad de Poincaré, esto es $D^p_{U'}$ es un isomorfismo para todo p.
La demostración de la Dualidad de Poincaré se basa en el siguiente teorema; que puede ser demostrada en base a inducción sobre abiertos que cubren a la variedad.

Teorema 1.3. *Sea M una variedad diferenciable n-dimensional dotada de una cobertura abierta $V = (V_\alpha)_{\alpha\in I}$. Supóngase que $\mathcal{U}$ es una colección de subconjuntos abiertos de M que satisface las cuatro condiciones.*

i. $\emptyset \in \mathcal{U}$

ii. Cualquier subconjunto abierto $U \subset V_\alpha$ difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, pertenece a $\mathcal{U}$

iii. Si U_1,U_2 y $U_1 \cap U_2$ pertenecen a $\mathcal{U}$, entonces $U_1 \cup U_2$ pertenece a $\mathcal{U}$

iv. Si U_1, U_2,.... es una sucesión de subconjuntos abiertos disjuntos dos a dos, con $U_i \in \mathcal{U}$ entonces $\cup U_i \in \mathcal{U}$.

Entonces M pertenece a $\mathcal{U}$.

Para la demostración del teorema usaremos el siguiente lema y la Proposición(1.2).

Lema 1.5. *Además de las hipótesis del Teorema(1.3); supongamos que U_1, U_2,.... es una sucesión de abiertos relativamente compactos de M, con las siguientes propiedades.*

i. $\cap_{j\in J}U_j \in \mathcal{U}$, para cualquier subconjunto finito J

ii. $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *es localmente finito.*

Entonces la unión $U_1 \cup U_2 \cup ....$ *pertenece a* $\mathcal{U}$.

Demostración. Sabemos que U_1, U_2,.... son conjuntos relativamente compactos que cumplen las cuatro condiciones del Teorema(1.3); además de las dos hipótesis dadas por el lema. Empezamos la prueba para el caso finito. Ósea se probará que $U_{j_1} \cup U_{j_2}, ..., \cup U_{j_m} \in \mathcal{U}$, la justificación la haremos por inducción sobre m.
Si $m = 1, 2$ aplicamos (i) y la condición(iii) del Teorema(1.3); con lo cual $U_{j_1} \cup U_{j_2} \in \mathcal{U}$. En el caso que $m \geq 3$ supongamos que se cumple para $(m-1)$-índices, ósea $V = U_{j_2} \cup U_{j_3}, ..., \cup U_{j_m} \in \mathcal{U}$ entonces $U_{j_1} \cap V = \bigcup_{v=2}^{m} (U_{j_1} \cap U_{j_v}) \in \mathcal{U}$ aplicando Teorema(1.3)-(iii) a la secesión $\{U_{j_1} \cap U_{j_v}\}_{j\in\mathbb{N}}$, donde $U_i \cap U_j \in \mathcal{U}$ y por la parte(i), se concluye que $U_{j_1} \cup U_{j_2}, ..., \cup U_{j_m} \in \mathcal{U}$. Y esto completa la prueba para el caso finito. Además de eso obtenemos que

$$\bigcup_{v=1}^{m} (U_{i_v} \cap U_{j_v}) \in \mathcal{U}, \qquad (*)$$

donde $i_1, j_1, i_2, j_2, ..., i_m, j_m$ son $2m$-índices.

Veamos el caso más general. Para esto definamos; un conjunto de índices I_m y conjuntos abiertos W_m de forma inductiva.
Si $m = 1$, entonces $I_1 = \{1\}$ y $W_1 = U_1$. Si $m \geq 2$ entonces

$$I_m = \{m\} \cup \{i/i > m, U_i \cap W_{m-1} \neq \emptyset\} - \bigcup_{j=1}^{m-1} I_j$$

y

$$W_m = \bigcup_{i\in I_m} U_i \qquad (**)$$

Se prueba que I_m es un conjunto finito; esto se puede hacer por inducción. Si I_{m-1} es finito, por lo tanto W_{m-1} es relativamente compacto(pues es unión finita de relativamente compactos). Por la condición(ii) implica que W_{m-1} intercepta a un número finito de U_i esto por que la familia $\{U_i\}$ es localmente finita. Así I_m es un conjunto finito de índices, para todo m. Por otro lado si $m \geq 2$; m no pertenece a ningún I_j con $j < m$ con lo cual por la definición de I_m, éste pertenece a I_m. Así concluimos que $\mathbb{N}$ es la unión disjuntos de conjuntos finitos I_m.
En el caso en que $I_m = \emptyset$, entonces $W_m = \emptyset \in \mathcal{U}$ por Teorema(1.3)-(i). Como la unión finita esta en $\mathcal{U}$, así $W_m = \bigcup_{i\in I_m} U_i \in \mathcal{U}$.
Así como se tiene $(*)$ se puede obtener

$$W_m \cap W_{m+1} = \bigcup_{(i,j)\in I_m \times I_{m+1}} (U_i \cap U_j) \in \mathcal{U}$$

Notemos que si $k \geq m+2$ y por $(**)$ se tiene $W_m \cap W_k = \emptyset$. Si la intersección es no vacía, entonces no existiría $i \in I_k$ con $W_m \cap U_i \neq \emptyset$, y por $(**)$ $i \in I_j$ para algunos $j \leq (m+1)$.

Ahora usamos la condición(iv) del Teorema(1.3) para notar que los tres conjuntos $W^{(0)} = \bigcup_{j=1}^{\infty} W_{2j}$, $W^{(1)} = \bigcup_{j=1}^{\infty} W_{2j-1}$ y $W^{(0)} \cap W^{(1)} = \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j \cap W_{j+1}$,estan en $\mathcal{U}$. Y por Teorema(1.3)-(iii) se tiene

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = W^{(0)} \cup W^{(1)} \in \mathcal{U}.$$

$\square$

Proposición 1.2. *Si U es un subconjunto abierto arbitrario de $\mathbb{R}^n$ y $V = (V_i)_{i \in I}$ una cobertura abierta de U; entonces podemos hallar una secuencia de puntos $\{x_j\}$ en U y números reales positivos r_j que satisface las siguientes condiciones:*

i. $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{r_j}(x_j)$ *($B_{r_j}(x_j)$ es la bola abierta con centro en x_j y radio r_j).*

ii. Para cada j existe un $i(j) \in I$ con $B_{2r_j}(x_j) \subset V_{i(j)}$.

iii. Todo $x \in U$ tiene una vecindad W que intercepta sólo una familia finita de bolas $B_{2r_j}(x_j)$.

Demostración. Todo conjunto U abierto de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir de la forma $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$, donde K_m es un compacto de la forma $K_m = \bar{B}_{2^m}(0) - \bigcup_{x \in (\mathbb{R}^n - U)} B_{1/2^m}(x)$ (adicionalmente $K_0 = K_{-1} = \emptyset$). Si $m \geq 1$, se tiene que K_m esta contenido en el interior de K_{m+1}; ahora definimos los siguientes conjuntos $B_m = K_m - \mathrm{Int}(K_{m-1})$, $U_m = \mathrm{Int}(K_{m+1}) - K_{m-2}$, se puede deducir que B_m es compacto y U_m es abierto, además $B_m \subseteq U_m$ por último $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$. Luego para cada $x \in B_m$ podemos encontrar $r(x) > 0$ tal que $B_{2r(x)}(x)$ esté contenido tanto en U_m y en al menos uno de los $V_i(V = (V_i)_{i \in I}$ cobertura abierta de $U)$. El Teorema de Heine-Borel para B_m asegura la existencia de $x_{m,j} \in B_m$ y $r_{m,j} > 0$ tal que:
(α) $B_m \subseteq \bigcup_{j=1}^{d_m} B_{r_{m,j}}(x_{m,j})$.
(β) Cada $B_{2r_{m,j}}(x_{m,j})$ esta contenido en U_m y en al menos en algunos de los conjuntos abiertos V_i. Entonces

$$U = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{d_m} B_{r_{m,j}}(x_{m,j}) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m \subseteq U. \qquad (\theta)$$

La parte(i) se deduce de θ. Para(ii), en β se tiene que para cada j existe $i(j)$ tal que $B_{2r_j}(x_j) \subset V_{i(j)}$. Por último (iii); dado $x \in U$ escogemos $m_0 \geq 1$ con $x \in U_{m_0}$ y $U_m \cap U_{m_0} = \emptyset$ cuando $m \geq m_0 + 3$, entonces deducimos que U_{m_0} intercepta a $B_{2r}(x_{m,j})$ para $m \leq m_0 + 2$.

$\square$

Demostración. **del Teorema(1.3)**

Primero consideremos el caso especial en que $W \subset \mathbb{R}^n$ con cobertura abierta $V =$

$(V_\beta)_{\beta\in I}$ y para esto considere la norma del máximo en $\mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

donde las bolas abiertas son cubos de la forma $U_j = \prod_{i=1}^{n}(a_i^j, b_i^j)$. Por equivalencia de normas y la Proposición(1.2), tenemos las tres propiedades.

i. $W = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{U}_j$.

ii. $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es localmente finito.

iii. Cada U_j está contenido en algún abierto V_β.

La intersección finita $U_{j_1}\cap, ..., \cap U_{j_m}$ también se puede escribir de la forma $\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ la cual es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, entonces por el Lema(1.5) se concluye que $W \in \mathcal{U}$.

Para el caso general M es considerada como una variedad diferenciable de dimensión n; elegimos una carta (h, U) donde $h : U \to W$ y W es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ difeomorfo a éste, la cobertura abierta de W es $(V_\beta)\beta \in J$ con lo cual $(h^{-1}(V_\beta))_{\beta\in J}$ es una cobertura abierta de U. Aplicando el caso especial anterior para W; se concluye que $U \in \mathcal{U}$. Esto es para cualquier abierto coordenado de la variedad.
Si M es compacto aplicamos el argumento del Lema(1.5) a una cobertura abierta finita de M, donde cada uno de estos es un abierto coordenado, así $M \in \mathcal{U}$. Para el caso no compacto hacemos uso de una cobertura localmente finita de M por una secuencia de abiertos coordenados relativamente compactos. □

El objetivo de esta sección es probar la Dualidad de Poincaré, entonces hemos probado todos los resultados previos que ayudarán a dicho objetivo, que mencionaremos a continuación.

Teorema 1.4. ***Dualidad de Poincaré*** *Sea M una variedad diferenciable orientable n-dimensional, entonces la aplicación*

$$D_M^p : H^p(M) \to H^{n-p}(M)^*$$

es un isomorfismo para todo $p \in \{0, ..., n\}$.

Demostración. Para la prueba definimos la siguiente colección

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq M/U \text{abierto}, D_U^p \text{es un isomorfismo para todo } p \in \{0, ..., n\}\};$$

por lo comentarios posteriores al Corolario(1.1) se tiene que ésta colección es distinto del vacío, tome $V = (V_\beta)_{\beta\in B}$ una cobertura abierta de M. El Corolario(1.1) garantiza que cumplen las condiciones del Teorema(1.3); por lo tanto $M \in \mathcal{U}$, así D_M^p es un isomorfismo.

□

Terminamos éste capítulo dando una proposición que nos proporciona una secuencia exacta larga para un par (N, M), donde M es una subvariedad compacta de la variedad compacta N; éste será muy usado en el Capítulo(v). El Lema que sigue es necesario incluirlo pues ayudará a la demostración de dicha proposición, también conviene recordar ciertos conocimientos de topología diferencial.
Denotemos por U al complemento de $M(U = N - M)$; ahí tenemos las inclusiones $i : U \to N$, $j : M \to N$, con lo cual la aplicación lineal $j^* : \Omega^q(N) \to \Omega^q(M)$ es sobreyectiva.
Como M y N son variedades compactas, entonces existe un encajamiento en $\mathbb{R}^k$ con lo cual se puede considerar a M, N como subvariedades de $\mathbb{R}^k$. Por otro lado el Teorema de la Vecindad Tubular garantiza la existencia de abiertos en $V_M \subset \mathbb{R}^k$ y $V_N \subset \mathbb{R}^k$ con $M \subset V_M$, $N \subset V_N$ y una extensión de las inclusiones i_N, i_M a retracciones $r_M : V_M \to M$ y $r_N : V_N \to N$ de M y N respectivamente. Así tenemos las aplicaciones lineales

$$r_M^* : \Omega^q(M) \to \Omega^q(V_M) \text{ y } r_N^* : \Omega^q(N) \to \Omega^q(V_N).$$

Como M es una subvariedad de $\mathbb{R}^k$, el triple (V_M, i_M, r_M) existe por el Teorema de la Vecindad Tubular donde se tiene que $r_M \circ i_M = \mathrm{id}_M$ y $i_M \circ r_M$ es homotópica a id_{V_M}, entonces

$$i_M^* : H^q(V_M) \to H^q(M) \text{ es un isomorfismo .} \qquad (9)$$

Lema 1.6. *Sea M una subvariedad compacta de la variedad compacta N donde $j : M \to N$ es la inclusión, entonces tenemos las siguientes afirmaciones:*

i. Si $w \in \Omega^q(M)$ es una forma cerrada, entonces existe una $q-$forma $\tau \in \Omega^q(N)$ tal que $j^*(\tau) = w$ y que $d\tau$ se anule en algún conjunto abierto de N que contenga a M.

ii. Si $\tau \in \Omega^q(N)$ con $\mathrm{sop}_N(d\tau) \cap M = \emptyset$ y $j^*(\tau)$ es exacta; entonces existe una forma $\sigma \in \Omega^{q-1}(N)$ tal que $\tau - d\sigma$ es idénticamente cero en algún abierto de N que contiene a M.

Demostración. Considere a N como una subvariedad de $\mathbb{R}^k$, por el Teorema de la Vecindad Tubular existen los triples, (V_N, i_N, r_N) y (V_M, i_M, r_M) de N y M respectivamente de donde podemos asumir que $V_M \subseteq V_N$. También necesitamos tomar una función suave $\varphi : N \to [0, 1]$ tal que $\mathrm{sop}_N(\varphi) \subseteq N \cap V_M$ y esta función toma el valor de 1 en algún abierto $W \subset N \cap V_M$ con $M \subset W$ y el valor de cero en el complemento.
Para la prueba de (i) tome la forma $w \in \Omega^q(M)$ cerrada; entonces tenemos la forma $\tilde{w} = r_M^*(w) \in \Omega^q(N \cap V_M)$‘, así $\tilde{w}$ la podemos extender hasta N usando la aplicación φ, por lo tanto tenemos la existencia de una forma $\tau = \varphi\tilde{w}$ en N tal que $j^*(\tau) = j^*(\varphi r_M^*(w)) = j^*(r_M^*(w)) = (r_M \circ j)^*(w) = \mathrm{id}_M(w) = w$ y como w es cerrada, es decir $dw = 0$, se concluye que $d\tau = d(\varphi r_M^*(w)) = 0$ en algún abierto $W \subset N \cap V_M$

que contiene a M esto completa la prueba de (i).

En la prueba de (ii) tenemos por hipótesis que $\tau \in \Omega^q(N)$ y $r_N^* : \Omega^q(N) \to \Omega^q(V_N)$; recordando que $V_M \subset V_N$, entonces podemos definir la forma $\tilde{\tau}$ como

$$\tilde{\tau} = r_N^*(\tau)|_{V_M} \in \Omega^q(V_M)$$

y por propiedad de la derivada exterior se tiene $d(r_N^*\tau) = r_N^*(d\tau)$ además la hipótesis $\text{sop}_N(d\tau) \cap M = \emptyset$, implica que $r_N^*(d\tau)$ se anula en una vecindad que cubre M, por lo tanto V_M se puede elegir donde $d\tilde{\tau} = 0$. Por otro lado tomemos $i_N \circ j = i_M : M \to V_N$ de ahí se tiene que

$$i_M^*(\tilde{\tau}) = (i_N \circ j)^*(r_N^*(\tau)) = j^* \circ i_N^* \circ r_N^*(\tau) = j^*(\tau)$$

y desde que $j^*(\tau) = i_M^*(\tilde{\tau})$ es exacta y cerrada $d(i_M^*(\tilde{\tau})) = i_M^*(d\tilde{\tau}) = 0$, por lo tanto $[i_M^*(\tilde{\tau})] = 0$ en $H^q(M)$ y usando (9) donde i_M^* es un isomorfismo se concluye que $[\tilde{\tau}] = 0$ en $H^q(V_M)$. Si tenemos la inclusión $i_N|_{N\cap V_M} : N \cap V_M \to V_M$ así se tiene la aplicación lineal $i_N^* : \Omega^q(V_M) \to \Omega^q(N \cap V_M)$ y usando el hecho que $[\tilde{\tau}] = 0$ en $H^q(V_M)$, $[i_N^*(\tilde{\tau})] = [(r_N \circ i_N)^*\tau] = [\tau|_{N\cap V_M}] = 0$; entonces encontramos que $\tau|_{N\cap V_M}$ es exacta. En consecuencia existe una $(q-1)$-forma $\sigma_0 \in \Omega^{q-1}(N \cap V_M)$ tal que $d\sigma_0 = \tau|_{N\cap V_M}$; esta forma σ_o se puede extender usando la aplicación φ así encontramos una forma $\sigma = \varphi\sigma_o$ en N tal que $\tau = d\sigma$ en un abierto W de N que contiene a M, por lo tanto $\tau - d\sigma = 0$ en W.

□

Proposición 1.3. *Sea M una subvariedad compacta de la variedad compacta N donde U es el complemento$(U = N - M)$ y $j : M \to N$, $i : U \to N$ las respectivas inclusiones. Entonces existe una secuencia exacta larga*

$$\cdots \longrightarrow H^{q-1}(M) \xrightarrow{\delta} H_c^q(U) \xrightarrow{i_*} H^q(N) \xrightarrow{j^*} H^q(M) \longrightarrow \cdots.$$

Demostración. Como la aplicación j es la inclusión, se tiene que $j^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$ es sobreyectiva y denotemos por $\Omega^*(N, M)$ al núcleo de j^* esto es:

$$\Omega^*(N, M) = \{w \in \Omega^*(N)/j^*(w) = 0\}$$

con lo cual tenemos una secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow \Omega^*(N, M) \longrightarrow \Omega^*(N) \xrightarrow{j^*} \Omega^*(M) \longrightarrow 0$$

y denotamos por $H^*(N, M)$ la cohomología de $(\Omega^*(N, M), d)$. Entonces por la Proposición(1.1) se tiene una secuencia exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H^{q-1}(M) \longrightarrow H^q(N, M) \longrightarrow H^q(N) \xrightarrow{j^*} H^q(M) \longrightarrow \cdots. \qquad (*)$$

Por otro lado la inclusión $i : U \to N$, induce una aplicación $i_* : \Omega_c^*(U) \to \Omega^*(N)$ ésta tiene imagen en $\Omega^*(N, M)$. Para completar la demostración debemos probar que

$$i_* : \Omega_c^*(U) \to \Omega^*(N, M)$$

induce un isomorfismo en grupos de cohomología $H^q(i_*) : H_c^q(U) \to H^q(N, M)$ nuestro trabajo consiste en probar que ésta aplicación es justamente un isomorfismo, primero veamos la inyectividad. Sea la clase $[w] \in H_c^q(U)$ tal que $H^q(i_*)[w] = 0$ ésta es representada por la q-forma cerrada en $w \in \Omega_c^q(U)$, de ahí $H^q(i_*)[w] = [i_*(w)] = 0$ por lo tanto existe algún $\tau \in \Omega^{q-1}(N, M)$ tal que $d\tau = i_*(w)$, además como $\tau \in \Omega^{q-1}(N, M)$ se tiene que $j^*(\tau) = 0$, así $j^*(\tau)$ es exacta y como $\mathrm{sop}_N(d\tau) \subseteq U$ aplicamos el Lema(1.6)-(ii) donde garantiza la existencia de $\sigma \in \Omega^{q-2}(N)$ tal que $\tau - d\sigma$ es nula en algún abierto de N que contiene a M, por lo tanto la forma $k = \tau - d\sigma$ esta en $\Omega_c^{q-1}(U)$ con la cual se tiene que $dk = w$, así la forma w es exacta y cerrada a la vez, entonces $[w] = 0$. Finalmente se prueba la sobreyectividad sea $[w] \in H^q(N, M)$ ésta clase esta representada por la forma $w \in \Omega^q(N, M)$ así $j^*(w) = 0$, en ese sentido aplicamos el Lema(1.6)-(ii) donde nos da la existencia de una $\sigma \in \Omega^{q-1}(N)$ con la propiedad que $w - d\sigma$ es nula en W donde éste es una vecindad de M, esto quiere decir que $w = d\sigma$ en W. Observe que

$$d(j^*(\sigma)) = j^*(d\sigma) = j^*(w) = 0, \text{ en } W$$

de donde obtenemos que $j^*(\sigma)$ es una forma cerrada en W; ahora aplicamos el Lema(1.6)-(i) donde garantiza la existencia de una forma $\tau \in \Omega^{q-1}(N)$ con $j^*(\sigma) = j^*(\tau)$ y que $d\tau$ es nula en alguna vecindad de M; por lo tanto se tiene que $j^*(\sigma - \tau) = 0$ con lo cual $(\sigma - \tau) \in \Omega^{q-1}(N, M)$. Y definamos

$$k = \big(w - d(\sigma - \tau)\big)|_U = (w - d\sigma)|_U + d\tau|_U \in \Omega_c^q(U),$$

así tenemos la existencia de $k \in \Omega_c^q(U)$ tal que $H^q(i_*)[k] = [i_*(k)] = [w - d(\sigma - \tau)] = [w]$. Con esto se concluye que $H^q(i_*) : H_c^q(U) \cong H^q(N, M)$ es un isomorfismo y reemplazando éste isomorfismo en $(*)$, tenemos la secuencia exacta larga deseada.

$\square$

Capítulo 2

Fibrados y Fibrados Vectoriales

En este capítulo estudiaremos una estructura llamada Fibrado y/o Fibrado Vectorial que está asociada a un espacio topológico (espacio base) que será de suma importancia trabajar, para poder hablar de clases características y estos a la vez nos proporcionarán información topológica del espacio base, de la misma forma se estudiarán las secciones en fibrados como por ejemplo los campos vectoriales y las formas diferenciales que son secciones del fibrado tangente y cotangente respectivamente, así el espacio de secciones sobre un fibrado nos permitirá definir nuevas estructuras como la conexión y posteriormente la curvatura en dicho fibrado, que es un concepto necesario para poder hablar de clases características. Empezamos dando las definiciones necesarias para abarcar en el objetivo deseado.

2.1. Definición y Ejemplos

Empezamos dando la definición más general de fibrado; posteriormente expondremos el ejemplo más común (fibrado trivial) y luego se dará la definición de fibrado vectorial que en éste trabajo tiene más importancia.

Definición 2.1. *Un **fibrado** $\xi = (E, B, F, \pi)$ consiste de tres espacios topológicos E B y F y una aplicación continua $\pi : E \to B$ tal que satisface la siguiente condición, para cada punto $b \in B$ tiene una vecindad U_b y un homeomorfismo $h : U_b \times F \to \pi^{-1}(U_b)$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} U_b \times F \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "prj_1"] & \\ E \arrow[r, "\pi"'] & B \end{tikzcd}$$

es conmutativo. De ahí se deduce que $h(\{c\} \times F) \subset \pi^{-1}(c)$.

El espacio E es llamado espacio total, B es llamado espacio base y F la fibra típica.

Un fibrado es llamado **diferenciable** si B, F y E son variedades diferenciales de dimensión n, m y $(n+m)$ respectivamente(así B y F son subvariedades de E) y $\pi : E \to B$ es una aplicación diferenciable donde h es un difeomorfismo. Entonces $U \times F \simeq \pi^{-1}(U)$ así $F \simeq \pi^{-1}(c)$.

Ejemplo 2.1. *El ejemplo más obvio de fibrado es el* ***fibrados trivial*** *dado por*

$$\epsilon_B^E = (B \times F, B, F, \pi)$$

donde $\pi : B \times F \to B$ es la proyección en el primer factor, en éste caso las fibras son $\{p\} \times F$ para todo $p \in B$.

Por la definición de fibrado podemos decir entonces, que todo fibrado es localmente trivial y a éste homeomorfismo local h se le llama **trivialización**.

Definición 2.2. *Un* ***Fibrado Vectorial*** *$\xi = (E, B, V, \pi)$ es un fibrado de fibra típica V(espacio vectorial) y $\pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial para todo $x \in B$, donde el homeomorfismo local $h : U_b \times V \to \pi^{-1}(U_b)$ puede ser escogido de modo que $h(x, -) : V \to \pi^{-1}(x)$ sea un isomorfismo lineal para todo $x \in U_b$.*

Un fibrado vectorial puede ser real o complejo dependiendo de V y de la aplicación $h(x, -)$. Pero nosotros nos concentraremos es fibrados vectoriales reales. Un fibrado vectorial es diferenciable[1] si es un fibrado vectorial que es un fibrado diferenciable.

La dimensión del fibrado vectorial es la dimensión de la fibra $\pi^{-1}(x)$; un fibrado vectorial de dimensión uno se le llama **fibrado de línea**.
Si $\xi = (E, B, V, \pi)$ es un fibrado vectorial con lo cual en algunos casos sólo escribiremos ξ y denotaremos por $E(\xi)$ al espacio total E y por ξ_b a cada fibra $F_b(\xi) = \pi^{-1}(b)$. Ahora si $W \subset B$ entonces escribiremos el fibrado vectorial ξ por $\xi\mid_W = (E(\xi\mid_W), W, V, \pi)$ donde $E(\xi\mid_W) = \pi_\xi^{-1}(W)$.
Sea ξ un fibrado vectorial a los homeomorfismo $h_j : U_j \times V \to \pi^{-1}(U_j)$ y $h_k : U_k \times V \to \pi^{-1}(U_k)$, en adelante los llamaremos trivializaciones y a los abiertos U_j abiertos trivializantes. Supongamos que la intersección $U_{jk} = U_j \cap U_k$ es no vacía, entonces la aplicación $h_j \circ h_k^{-1}$ queda expresada de la forma:

$$\begin{array}{rcccl} h_j \circ h_k^{-1} & : & U_{jk} \times V & \to & U_{jk} \times V \\ & & (p, v) & \to & (p, h_{jk}(p).v) \end{array}$$

donde $h_{jk}(p) = h_j \circ (h_k|_{\{p\}\times V})^{-1}$ entonces definen funciones con valores en $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$

$$h_{jk} : U_{jk} \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$$

[1]Generalmente omitiremos la palabra diferenciable, esto será obvio cuando estemos trabajando con variedades diferenciables.

que son llamados **co-ciclos**, éstos gozan de las siguientes propiedades:

i. $h_{jj} = I$ en U_j

ii. $h_{jk} \circ h_{kj} = I$, en U_{jk}

iii. $h_{jk} \circ h_{kl} \circ h_{jl} = I$, en $U_{jkl} = U_j \cap U_k \cap U_l$.

También es imprescindible dar la siguiente definición. Diremos que un fibrado vectorial real $\xi = (E, M, \pi_\xi)$ es **orientable** si existe una familia de trivializaciones de E tal que las funciones de transición(co-ciclos) correspondientes toman valores en $\mathrm{GL}_m^+(\mathbb{R})$[2], donde m es la dimensión del fibrado.
Ahora veamos algunos ejemplos se fibrados vectoriales.

Ejemplo 2.2. *Un ejemplo muy importante es el* ***fibrado canónico de líneas*** *que lo construiremos de la siguiente forma. Considere $S^1 \subset \mathbb{C}$ donde $(S^1, \cdot)$ tiene estructura de grupo y ¨$\cdot$¨ es la multiplicación usual de números complejos, ahora tome la esfera unitaria en $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, hacemos actuar S^1 en S^{2n+1} de la forma $S^1 \times S^{2n+1} \to S^{2n+1}, (\lambda, u) \to \lambda u$ entonces, obtenemos el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n = \frac{S^{2n+1}}{S^1}$. Ahora hacemos actuar S^1 en $S^{2n+1} \times \mathbb{C}$ de la forma:*

$$S^1 \times (S^{2n+1} \times \mathbb{C}) \to S^{2n+1} \times \mathbb{C}, (\lambda, (z, u)) \to (\lambda z, \lambda^{-1} u)$$

por lo tanto, obtenemos el espacio de órbitas denotado por:

$$S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbb{C} = \{[z, u]/(z, u) \in S^{2n+1} \times \mathbb{C}\}$$

en este definimos la aplicación $\pi : S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^n, [z, v] \to [z]$ que está bien definida y además es continua. Considere $U_j = \{[z_0, ..., z_n] \in \mathbb{CP}^n / z_j \neq 0\}$ cubrimiento abierto de $\mathbb{CP}^n$; ahora definimos para cada $j = 0, ..., n$ las trivializaciones locales

$$h_j : U_j \times \mathbb{C} \to \pi^{-1}(U_j) = \{[z, u]/[z] \in U_j\},$$

de la forma $h_j([z], t) = [z, \frac{t}{z_j}] \in \pi^{-1}(U_j)$ ésta aplicación está bien definida donde su inversa de define de la forma $h_j^{-1}([z, u]) = ([z], u z_j) \in U_j \times \mathbb{C}$ por lo tanto los h_j son efectivamente una biyección, para ver la continuidad considere el abierto $U_{ij} = U_i \cap U_j$ entonces el cambio de coordenadas

$$h_j^{-1} \circ h_i : U_{ij} \times \mathbb{C} \to U_{ij} \times \mathbb{C}$$

viene dada por $h_j^{-1} \circ h_i([z], t) = h_j^{-1}([z, \frac{t}{z_i}]) = ([z], t\frac{z_j}{z_i})$ claramente es una aplicación continua, e induce una familia de aplicaciones

$$h_{ji} : U_{ij} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \text{ dadas por } h_{ji}([z_0, ..., z_n]) = \frac{z_j}{z_i}$$

[2]Denota el grupo de matrices con determinante positivo

que son los co-ciclos del fibrado. Por lo tanto $S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbb{C}$ *es un fibrado de líneas que en adelante denotaremos por* $H_n = S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbb{C}$.

Ejemplo 2.3. *El* ***fibrado tangente*** *sea* M *una variedad diferenciable de dimensión* n *contenida en* $\mathbb{R}^{n+k}$ *definimos el siguiente conjunto*

$$TM = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^{n+k} / v \in T_pM\} = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

probamos que $\xi = (TM, M, \mathbb{R}^n, \pi)$ *tiene estructura de fibrado vectorial donde* $\pi : TM \to M$ *esta dada por* $\pi(p, v) = p$*; cada fibra es* $\pi^{-1}(p) = T_pM$ *para cada* $p \in M$*, escogemos una vecindad* U *al rededor de éste punto y una parametrización* $g : W \to U$ *tal que* $g(p) = q$*, donde* $W \subset \mathbb{R}^n$ *definimos la aplicación*

$$\begin{array}{rcccl} h & : & U \times \mathbb{R}^n & \to & \pi^{-1}(U) \\ & & (x, v) & \to & h(x, v) = Dg_{g^{-1}(x)}(v) \end{array}$$

así $h : \mathbb{R}^n \to T_pM$ *es un isomorfismo. Luego* ξ *es un fibrado vectorial.*

Ejemplo 2.4. *El* ***fibrado normal*** *Sea* M *una variedad diferenciable de dimensión* n *contenida en* $\mathbb{R}^{n+k}$ *el espacio* $N_pM = (T_pM)^{\perp}$ *es el espacio ortogonal a* T_pM*.Definimos el siguiente conjunto* $NM = \bigcup_{p \in M} N_pM \subset M \times \mathbb{R}^{n+k}$ *se prueba que el cuadrúple* $\xi = (NM, M, \mathbb{R}^n, \pi)$ *tiene estructura de fibrado vectorial donde* $\pi(p, v) = p$ *con* $v \in N_pM$*. Para cada* p_0 *en* M*, produce campos vectoriales* $X_1, .., X_n$ *tal que* $X_1(p), .., X_n(p)$ *constituye una base de* T_pM *esto es para todo* p *que esta en una vecindad de* p_0 *y usando el teorema de completación de base existen vectores* $V_1, .., V_k$ *tal que* $\{X_1(p), .., X_n(p), V_1, .., V_k\}$ *constituyen una base de* $\mathbb{R}^{n+k}$ *desde que el determinante* $det(X_1(p), .., X_n(p), V_1, ..V_k)$ *es distinto de cero y de la continuidad de ésta aplicación hace que esta base sea siempre distinto de cero en una vecindad de* p_0*, y aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, tenemos* $X_1, .., X_n, Y_1, ..., Y_k : W \to \mathbb{R}^{n+k}$ *defnidas en una vecindad* $p_0 \in W$ *con la propiedad de que son bases ontonormales para cada* $p \in M$ *es decir* $X_1(p), ..., X_n(p)$ *es base de* T_pM *y* $Y_1(p), ..., Y_k(p)$ *es base de* N_pM*. Podemos definir* $h : W \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(W)$ *dada por* $h(p, t) = \sum_{i=1}^{k} t_i Y_i(p)$ *la cual es una trivialización local, por lo tanto* ξ *es un fibrado vectorial de dimensión* k.

Para obviar algunas notaciones sólo usaremos $\xi = (E, B, \pi)$ para denotar a un fibrado vectorial o simplemente ξ.

Definición 2.3. *Considere los fibrados vectoriales* $\xi = (E, B, \pi)$ *y* $\xi' = (E', B', \pi')$

i. Una aplicación (diferenciable) entre fibrados vectoriales(diferenciales) ξ *y* ξ' *es una pareja de aplicaciones continuas (ó diferenciales)* $(f, \hat{f}) : \xi \to \xi'$ *donde*

$f : B \to B'$ y $\hat{f} : E \to E'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\hat{f}"] & B \arrow[d, "f"] \\ E' \arrow[r, "\pi'"] & B' \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

ii. Un homomorfismo(diferenciable) entre fibrados vectoriales(diferenciales) ξ y ξ' es una aplicación de fibras tal que $\hat{f} : \pi^{-1}(x) \to (\pi')^{-1}(f(x))$ es lineal para todo $x \in B$.

Ejemplo 2.5. *Sea M y M' variedades diferenciales y $f : M \to M'$ una aplicación diferenciable, entonces f induce una aplicación*

$$T_pf = D_pf : T_pM \to T_{f(p)}M'$$

la derivada de f que es una aplicación lineal.

Definición 2.4. *Sea ξ y η dos fibrados vectoriales con el mismo espacio base B, estos fibrados son isomorfos si existen homomorfismo de fibrados $(id_B, \hat{f})$, $(id_B, \hat{g})$ tal que $\hat{f} \circ \hat{g} = id$ y $\hat{g} \circ \hat{f} = id$.*

Presentamos otra forma de construir el Fibrado Canónico de Líneas y probaremos que éste es isomorfo al fibrado construido en el Ejemplo(2.2). Considere el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ de dimensión n. Con la finalidad de construir un fibrado vectorial cuya fibra sobre el punto $[w] \in \mathbb{CP}^n$ sea una recta que pasa por w y el origen $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. En ese sentido considere

$$L^* = \{([w], z) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : \exists t \in \mathbb{C}, z = tw\}.$$

La aplicación proyección $\pi : L^* \to \mathbb{CP}^n$, esta definida de la forma $\pi([w], z) = [w]$; éste es fibrado vectorial de línea sobre $\mathbb{CP}^n$. Para justificar esto veamos sus trivializaciones para esto considere $U_j = \{[x_0, ..., x_n]/x_j \neq 0\}$ luego definimos

$$h_j : U_j \times \mathbb{C} \to \pi^{-1}(U_j);\ \ ([w], t) \to \Big([w], \frac{t}{w_j}w\Big).$$

Ahora si elegimos otro abierto U_i hacemos la composición

$$h_i^{-1} \circ h_j : U_{ij} \times \mathbb{C} \to \pi^{-1}(U_{ij}) \to U_{ij} \times \mathbb{C},$$

entonces así tenemos que $h_i^{-1} \circ h_j([w], t) = \Big([w], t\frac{w_i}{w_j}\Big)$ con lo cual sus co-ciclos quedan representados de la forma

$$h_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}); [w_0, .., w_n] \to \frac{w_i}{w_j}.$$

A éste fibrado se le llama **Fibrado de Líneas Tautológico**. Veremos que éste es isomorfo al fibrado construido en el Ejemplo(2.2)

$$\begin{array}{ccc} S^{2n+1}\times_{S^1}\mathbb{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{CP}^n \\ \downarrow{\hat{f}} & & \downarrow{id} \\ L^* & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{CP}^n \end{array}$$

donde la aplicación $\hat{f}$ esta definida de la forma $\hat{f}([z,t]) = ([z], tz)$ y su inversa esta dada por $\hat{f}^{-1}([z],u]) = \hat{f}^{-1}([z],tz]) = [z,t]$. Con lo cual los fibrados en mención son **isomorfos**.

Lema 2.1. *Sea ξ y η dos fibrados vectoriales(diferenciales) con el mismo espacio base B y $E(\xi)$, $E(\eta)$ sus respectivos espacios totales. Una aplicación continua(diferenciable) $\hat{f} : E(\xi) \to E(\eta)$ que aplica la fibra ξ_b isomórficamente en la fibra η_b, es un isomorfismo.*

Demostración. Por hipótesis se tiene que $\hat{f}$ es continua(diferenciable), además una biyección, por lo tanto, faltaría probar que $\hat{f}^{-1}$, es continua(diferenciable). Considere $U \subset B$ abierto en B donde ξ y η se trivializan respectivamente, entonces demostremos que $\hat{f}^{-1} : \pi_\eta^{-1}(U) \to \pi_\xi^{-1}(U)$ es continua(diferenciable), por otro lado, tenemos las trivializaciones locales $h : U\times\mathbb{R}^n \to \pi_\xi^{-1}(U)$ y $k : U\times\mathbb{R}^n \to \pi_\eta^{-1}(U)$ de ξ y η, así $h(x,-) : \mathbb{R}^n \to \pi_\xi^{-1}(x)$ y $k(x,-) : \mathbb{R}^n \to \pi_\eta^{-1}(x)$ son isomorfismos. Ahora hacemos la composición

$$U\times\mathbb{R}^n \xrightarrow{k} \pi_\eta^{-1}(U) \xrightarrow{\hat{f}} \pi_\xi^{-1}(U) \xrightarrow{h^{-1}} U\times\mathbb{R}^n$$

así obtenemos la aplicación $F = k\circ\hat{f}\circ h^{-1} : U\times\mathbb{R}^n \to U\times\mathbb{R}^n$, donde $F(x,-)$, es un isomorfismo que viene dada por $F(x,v) = (x, F_2(x,v))$, donde $F_2(x,v)$ es la aplicación lineal que se obtiene, en cada punto de la aplicación $U \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Como $F_2(x,-)$ es un isomorfismo entonces posee inversa $F_2^{-1}(x,-)$, esto nos permitirá definir F^{-1}, de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcrcl} F^{-1} = h\circ\hat{f}^{-1}\circ k^{-1} & : & U\times\mathbb{R}^n & \to & U\times\mathbb{R}^n \\ & & (x,v) & \to & F^{-1}(x,v) = (x, F_2^{-1}(x,v)) \end{array}$$

y como la inmersión

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ F_2(x,-) & \to & F_2^{-1}(x,-) \quad ,\forall x\in U,\ \text{es diferenciable} \end{array}$$

por lo tanto, continua luego $F^{-1}(x,v) = (x, F_2^{-1}(x,v))$, es continua(diferenciable), así, $\hat{f}^{-1}$ es continua(diferenciable). □

Éste lema será de mucha importancia, para probar cuando dos fibrados vectoriales son isomorfos, de hecho en lo que sigue del trabajo usará muy seguido.

2.2. Suma de Whitney

En ésta sección construiremos un fibrado vectorial, a partir de dos fibrados vectoriales ξ, η sobre el mismo espacio base B, éste nuevo fibrado vectorial lo llamaremos **suma de whitney**; o también suma directa de fibrados vectoriales por la forma como se definirán sus fibras.

Sea ξ y η dos fibrados vectoriales sobre el mismo espacio base B y $E(\xi)$, $E(\eta)$ su respectivo espacio total, la **suma whiney** de ξ y η es otro fibrado vectorial denotado por $\xi \oplus \eta = (E(\xi \oplus \eta), B, \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m, \pi_{\xi\oplus\eta})$, donde el espacio total esta definido por:

$$E(\xi \oplus \eta) = \{(v, w) \in E(\xi) \times E(\eta)/\pi_\xi(v) = \pi_\eta(w)\};$$

y la aplicación proyección es $\pi_{\xi\oplus\eta}(v, w) = \pi_\xi(v) = \pi_\eta(w)$ y cada fibra es de la forma $(\xi\oplus\eta)_b = \xi_b\oplus\eta_b$. De hecho $\xi\oplus\eta$, así definido tiene estructura de fibrado vectorial. Si U es un abierto de B donde ξ y η se trivializan, entonces las aplicaciones $h : U\times\mathbb{R}^n \to \pi_\xi(U)$ y $k : U \times \mathbb{R}^m \to \pi_\eta(U)$ son homeomorfismos, con lo cual podemos definir de forma natural la aplicación dada por:

$$\begin{array}{rcrcl} h \oplus k & : & U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \to & \pi_\xi^{-1}(U) \oplus \pi_\eta^{-1}(U) \\ & & (x, v, w) & \to & h \oplus k(x, v, w) = (h(x, v), k(x, w)). \end{array}$$

Así definida es un homeomorfismo, y restricta a cada fibra es un isomorfismo.

Definición 2.5. *El **producto interno** en un fibrado vectorial ξ es una aplicación $\phi : E(\xi \oplus \xi) \to \mathbb{R}$ tal que $\phi : \xi_b \oplus \xi_b \to \mathbb{R}$ en un producto interno en la fibra ξ_b.*

Proposición 2.1. *Todo fibrado vectorial sobre una variedad compacta B tiene un producto interno.*

Demostración. Sea ξ el fibrado vectorial sobre la variedad compacta B, elegimos una trivialización local $h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to \pi_\xi^{-1}(U_i)$. Como B es compacta de un cubrimiento arbitrario podemos extraer un cubrimiento finito digámos $U_1, ..., U_r$, ahora elijamos una partición de la unidad $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ subordinada a dicho cubrimiento, es decir $\text{sop}(\alpha_i) \subset U_i$. El producto interno en $\mathbb{R}^n$ induce un producto interno en $\{x\} \times \mathbb{R}^n$, luego h_i induce un producto interno en $\pi_\xi^{-1}(x)$ digamos $\phi_i : \pi_\xi^{-1}(x) \oplus \pi_\xi^{-1}(x) \to \mathbb{R}$ dada por $\phi_i(h_i(x, v), h_i(x, w)) = \langle v, w\rangle$, $\forall x \in U_i$ donde $\langle , \rangle$ es el producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$. Entonces podemos definir la aplicación

$$\phi(v, w) = \sum_{i=1}^{r} \phi_i(v, w)\alpha_i(\pi_\xi(v));$$

es fácil ver que esta aplicación, satisface las condiciones de producto interno en $\pi_\xi^{-1}(x)$, $\forall \in B$ por lo tanto ésta define un producto interno en ξ. $\square$

Sea M una variedad diferenciable el producto interno en el fibrado tangente sobre M, es la misma que la métrica riemanniana. Si $f : W \to M$ una parametrización en M. Una métrica riemanniana en M, es una función ϕ que a cada punto se le asigna una aplicación bilineal $\phi(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

i. Simétrica $\phi(p)(v, w) = \phi(p)(w, v)\ \forall v, w \in T_pM$.

ii. Positiva, si $v \neq 0$ entonces $\phi(p)(v.v) > 0$.

tal que la aplicación $p \to \phi(p)(D_p(f(v_1)), D_p(f(v_2)))$, es diferenciable en W.

2.3. Secciones en un Fibrado Vectorial

En seguida introducimos un concepto muy importante que nos permitirá seguir obteniendo más información sobre los fibrados.

Definición 2.6. *Una* ***Sección*** *en un fibrado $\xi = (E, B, \pi)$ es una aplicación $s : B \to E$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "s"] \arrow[dr, "id_B"] & \\ E \arrow[r, "\pi"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, esto es $s(x) \in \pi^{-1}(x)$.

El conjunto de todas las secciones de un fibrado vectorial, es un $\Omega^0(M)$[3]- espacio vectorial que denotaremos por $\Gamma(\xi)$ donde la operación suma, es la operación suma en las fibras, y el elemento cero es el cero de alguna fibra de E.

Ejemplo 2.6. *Para cualquier fibrado vectorial ξ sobre B se tiene bien definida una sección global $s : B \to E$ dada por $s(x) = 0$ para todo $x \in B$, a ésta se le llama la* ***sección nula****.*

Ejemplo 2.7. *El ejemplo clásico de secciones, son los campos vectoriales que son las secciones del fibrado tangente. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y TM el fibrado tangente una sección del fibrado tangente TM, es llamado compo vectorial*

$$\begin{array}{rcrcl} s & : & M & \to & TM \\ & & p & \to & s(p) = (p, X_p) \in \{p\} \times T_pM \end{array}$$

[3] Denota el anillo de las funciones diferenciables de M en $\mathbb{R}$.

Considere $s : B \to M$, una sección en el fibrado ξ y $h_j : U_j \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_j)$, una trivialización del fibrado ξ. La sección s en U_j puede ser representada de la forma $h_j^{-1}(s(p)) = (p, s_j(p))$, donde $s_j : U_j \to \mathbb{R}^n$. Ahora veamos que pasa en la intersección no vacía de dos abiertos trivializantes de M, digamos $U_{jk} = U_j \cap U_k$, entonces una sección s puede ser representada por $h_j^{-1}(s(p)) = (p, s_j(p))$ en U_j, y también puede ser representada por $h_k^{-1}(s(p)) = (p, s_k(p))$ en U_k, donde $s_j : U_j \to \mathbb{R}^n$ y $s_k : U_k \to \mathbb{R}^n$, entonces en la intersección se tiene

$$(p, s_k(p)) = h_k^{-1}(s(p)) = h_k^{-1} \circ h_j(p, s_j(p)) = (p, h_{kj}s_j(p)),$$

por lo tanto $s_k = h_{kj}s_j$. en U_{jk} donde h_{kj} son los co-ciclos.

Si ξ es un fibrado vectorial diferenciable, entonces denotaremos por $\Omega^0(\xi)$ al subespacio vectorial de secciones diferenciales.

Definición 2.7. *Sea $\xi = (E, B, \mathbb{R}^n, \pi)$ un fibrado vectorial de dimensión n un* ***referencial*** *de ξ en $U \subset B$ es un conjunto de secciones $\{s_1, ..., s_n\} \in \Gamma(\xi \mid_U)$ de tal manera que $\{s_1(x), ..., s_n(x)\}$ es una base de ξ_x para todo x en U.*

Si M es una variedad diferenciable, de dimensión n y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ una parametrización de M, entonces, $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ es un referencial de TM en el abierto coordenado $f(U)$.
Localmente siempre podemos conseguir referenciales, esto es, si $h_j : U_j \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_j)$ es una trivialización del fibrado ξ entonces, podemos tomar referenciales de la forma:

$$s_\alpha^j(x) = h_j(x, e_\alpha), \alpha \in \{1, ..., n\}$$

donde $\{e_\alpha\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.
Si $\{s_1^j(x), ..., s_n^j(x)\}$ es un referencial en U_j y $\{s_1^k(x), ..., s_n^k(x)\}$ es un referencial en U_k, entonces en el abierto U_{jk} siempre es posible hallar una matriz invertible de funciones definidas en U_{jk}, de orden $(n \times n)$, que relaciona los referenciales de la siguiente forma.

$$s_\alpha^j = \sum_\beta f_{\alpha\beta}^{jk} s_\beta^k.$$

Por otro, se sabe que localmente siempre es posible elegir un referencial $\{s_1(x), ..., s_n(x)\}$, y además si ξ tiene un producto interno, usando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, obtenemos una base ortonormal y decimos que $\{s_1, ..., s_n\}$ es un **referencial ortonormal**.
Considere ξ, η fibrados vectoriales sobre el mismo espacio base B y $(id_B, \hat{f})$ un homomorfismo de ξ en η, consideremos $\{s_i\}$ y $\{t_i\}$ referenciales sobre $U \subset B$, entonces $\hat{f}_x : \xi_x \to \eta_x$ puede ser representada por una matriz y luego podemos obtener una aplicación.

$$ad(\hat{f}) : U \to M_n(\mathbb{R})$$

esto quiere decir que para cada punto $x \in U$ se tiene asignada una matriz de la forma $\hat{f}_x : \xi_x \to \eta_x$, $ad(\hat{f})$ depende del referencial dada. De hecho $\hat{f}_x : \xi_x \to \eta_x$ es un isomorfismo si y sólo si $ad(\hat{f}_x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Si los fibrados vectoriales ξ, η tienen un producto interno y $\{s_i\}$, $\{t_i\}$ son estructuras ortonormales entonces $\hat{f}_x$ es una isometría si $ad(\hat{f}_x) \in O_n$ el subgrupo ortonormal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Lema 2.2. *Sea ξ, η fibrados vectoriales(diferenciales) sobre una misma base compacta B, que tienen un producto interno. Si $\hat{f} : \xi \to \eta$ es un isomorfismo entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que todo homomorfismo $\hat{g} : \xi \to \eta$ que satisface $\|\hat{f}_b - \hat{g}_b\| < \epsilon$ para $b \in B$, es también un isomorfismo.*

Demostración. Sea $\{U^i\}_{i=1}^r$ un cubrimiento finito de B, y considere referenciales $s = \{s^i\}_{i=1}^n$ y $t = \{t^i\}_{i=1}^n$ de ξ y η respectivamente tomados en U^i. entonces, $\hat{f}$, $\hat{g}$ quedan representados por las aplicaciones $ad(\hat{f}) : B \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y $ad(\hat{f}) : B \to M_n(\mathbb{R})$, donde $\hat{f}_x : \xi_x \to \eta_x$ es un isomorfismo para todo $x \in U^i$ y como la aplicación $\phi : U^i \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U^i)$, dada por $\phi(b, x_1, ..., x_n) = x_1 s_1(b) + ... + x_n s_n(b)$ con $\phi(b, x_1, ..., x_n) = h(b, x_1, ..., x_n)$ donde h es la trivialización local de ξ; es un isomorfismo de fibrados, por lo tanto $ad(\hat{f}_x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \forall x \in U^i$. Entonces $ad(\hat{f})(U^i) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, ahora tome $ad(\hat{f}_x)$ la matriz asociada a $\hat{f}_x$, tome la vecindad $V(ad(\hat{f}_x), \epsilon_i) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ esto es para todo x en U^i, luego $\|ad(\hat{f}_x - ad(\hat{g}_x\| < \epsilon_i$, así $ad(\hat{g}_x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ahora tome $\epsilon = min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_r\}$ de donde se tiene, $V(ad(\hat{f}_x), \epsilon) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ por consiguiente $ad(\hat{g}_x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ para todo x en B, esto implica que $\hat{g}_x$ es un isomorfismo y aplicando el Lema(2.1) se concluye que $\hat{g}$ es un isomorfismo.

□

El próximo resultado muestra que, no existe distinción alguna entre las nociones de continuo y diferenciable si el espacio base B, es una variedad diferenciable compacta.

Lema 2.3. *Sea ξ, η dos fibrados vectoriales diferenciables sobre una variedad diferenciable compacta B. Si ξ, η son continuamente isomorfas entonces, son diferencialmente isomorfas.*

Demostración. Por hipótesis existe un isomorfismo continuo entre ξ y η, digamos $\hat{f} : \xi \to \eta$. Como B es compacta; de un cubrimiento arbitrario podemos extraer un cubrimiento finito $\{U^i\}_{i=1}^r$; además ξ, η tienen un producto interno por lo tanto siempre existen referenciales ortonormales $s^i = (s_1^i, ..., s_n^i)$, $t^i = (t_1^i, ..., t_n^i)$ de ξ y η respectivamente en U^i. Sabemos que la aplicación $\hat{f} : \xi \to \eta$ es continua además es un isomorfismo con lo cual, en cada U^i induce una aplicación continua $ad(\hat{f}^i) : U^i \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de modo que en cada punto x de U^i, se obtiene un isomorfismo $ad(\hat{f}_x{}^i)$; considere una aplicación diferenciable $G^i : U^i \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de modo que $\|G^i(x) - ad(\hat{f}_x{}^i)\| < \epsilon$ y aplicando el lema anterior se tiene que $G^i(x)$ es un isomorfismo para todo x en U^i. En base a esto construiremos un homomorfismo diferenciable, $\hat{g} : \pi_{\xi}^{-1}(U^i) \to \pi_{\eta}^{-1}(U^i)$ tal que

$$\hat{g}^i|_{\xi_b} = \hat{g_b}^i(\sum_k \lambda_k s^k(b)) = \sum_{k,v} t^k.G^i_{kv}(b).\lambda_b$$

luego $ad(\hat{g}^i) = G^i$, así $\|\hat{f}_b - \hat{g_b}^i\| < \epsilon$ esto es para todo b en U^i, ahora usando la partición de la unidad $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$subordinada a la cobertura abierta dada, la misma que nos permite definir

$$\hat{g} : \xi \to \eta, \text{ de la forma, } \hat{g_b} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(b)\hat{g_b}^i$$

entonces, $\|\hat{f}_b - \hat{g_b}\| = \|\hat{f}_b - \sum_{i=1}^r \alpha_i(b)\hat{g_b}^i\| \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i(b)\|\hat{f}_b - \hat{g_b}^i\| < \sum_{i=1}^r \alpha_i(b)\epsilon = \epsilon$ aplicando el lema anterior y el Lema(2.1), se concluye que $\hat{g} : \xi \to \eta$ es un isomorfismo diferenciable.

□

2.4. Complementar de un Fibrado Vectorial

En los ejemplos (2.3) y (2.4) se construyó dos fibrados vectoriales asociadas a una subvariedad $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$, llamados fibrado tangente y fibrado normal, que ahora en adelante denotaremos por τ y ν respectivamente, donde la dimensión de las fibras de τ es n y, y de las fibras de ν es k, se puede decir que la suma de whitney $\tau \oplus \nu$ es un fibrado trivial donde las fibras son $\tau_x \oplus \nu_x = \mathbb{R}^{n+k}, \forall x \in M$. Si ϵ^{n+k} es un fibrado trivial sobre M, de dimensión $(n+k)$ entonces, la aplicación $\hat{f} : \tau \oplus \nu \to \epsilon^{n+k}$, es un isomorfismo.
Esto motiva para la presentación y demostración del siguiente teorema, que será de mucha importancia en el desarrollo de nuestro trabajo.

Denotaremos por ϵ^k a un fibrado trivial de dimensión k, sobre B.

Teorema 2.1. *Sea ξ un fibrado vectorial sobre una base compacta B. Entonces existe un fibrado vectorial η tal que $\xi \oplus \eta$ es isomorfo a ϵ^k, para un k suficientemente grande.*

A éste fibrado η lo llamaremos el **complementar** de ξ.

Demostración. Como B es compacto de un cubrimiento arbitrario elegimos un cubrimiento finito $\{U^i\}_{i=1}^r$ y considere las trivializaciones $h_i : U^i \times \mathbb{R}^n \to \pi_{\xi}^{-1}(U^i)$ y tome la partición de la unidad con $Sop(\alpha_i) \subset U^i$; la composición

$$\pi_{\xi}^{-1}(U^i) \xrightarrow{h_i^{-1}} U^i \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{prj_2} \mathbb{R}^n$$

nos da una aplicación $f^i = prj_2 \circ h_i^{-1} : \pi_{\xi}^{-1}(U^i) \to \mathbb{R}^n$. Ahora definimos la aplicación

$$
\begin{array}{rccl}
S & : & E(\xi) & \to & B \times \mathbb{R}^{nr} \\
 & & v & \to & S(v) = (\pi_\xi(v), \alpha_1(\pi_\xi(v))f^1(v), ..., \alpha_r(\pi_\xi(v))f^r(v))
\end{array}
$$

podemos notar que, $prj_1 \circ S = \pi_\xi$ donde $prj_1 : B \times \mathbb{R}^{nr} \to B$, S es una aplicación de fibras. Éste induce un homomorfismo $S : \xi \to \epsilon^{nr}$ donde ϵ^{nr} es el fibrado trivial.
Notemos que

$$
\begin{array}{rcccl}
S|_{\xi_b} & : & \xi_b & \to & \{b\} \times \mathbb{R}^{nr} \\
 & & v & \to & S_{\xi_b}(v) = (b, \alpha_1(b)f^1(v), ..., \alpha_r(b)f^r(v))
\end{array}
$$

veamos que ésta es inyectiva para eso se usemos la definición, si $S_{\xi_b}(v) = (b, 0)$ donde $v \in \xi_b$, esto implica que $(b, \alpha_1(b)f^1(v), ..., \alpha_r(b)f^r(v)) = (b, 0)$ y como $b \in U^i$ para algún i luego, $\alpha_i(b) \neq 0$ para éste i por lo tanto, si $\alpha_i(b)f^i(v) = 0$ implica que $f^i(v) = 0$ así $v = 0$. Con esto tenemos que $S|_{\xi_b}(\xi_b)$ es una fibra en el fibrado $B \times \mathbb{R}^{nr}$ de dimensión n que lo indicaremos por $S(\xi_b)$.
Como $\mathbb{R}^{nr}$ tiene un producto interno, con lo cual podemos definir el siguiente cuádruple

$$\eta = (E(\eta), B, \mathbb{R}^{nr-n}, prj_1),$$

donde $E(\eta) = \{(b, v)/b \in B, v \in (S(\xi_b))^\perp\}$ y $prj_1 : E(\eta) \to B$ dada por: $prj_1(b, v) = b$ probaremos que éste es un fibrado vectorial.

Sabemos que ξ es un fibrado vectorial donde las trivializaciones son $h_j : U^j \times \mathbb{R}^n \to \pi_\xi^{-1}(U^j)$, elijamos un referencial en una vecindad V de $b \in U^j$(la vecindad puede ser más pequeña que U^j), de la forma $h_j^\alpha(b, e_\alpha) = s_\alpha(b)$ donde $\alpha \in \{1, .., n\}$ así $\{s_\alpha(b)\}_{\alpha=1,..,n}$ forma una base de ξ_b esto es $\forall b \in V \subseteq U^j$, además se tiene que, $S : \xi_b \to S(\xi_b)$ es un isomorfismo entonces, $\{S(s_\alpha(b))\}_{\alpha=\{1,..,n\}}$ es una base de $S(\xi_b)$ por el proceso de ortonormalización de Gram-Smhithd la podemos considerar como una base ortonormal de $S(\xi_b)$ y como $S(\xi_b) \oplus S(\xi_b)^\perp = \{b\} \times \mathbb{R}^{nr}$ luego obtenemos que $\dim(S(\xi_b)^\perp) = nr - n$. Ahora aplicamos el teorema de completación de base para obtener una base $\{S(s_1(b)), ..., S(s_n(b)), F'_{n+1}(b), ..., F'_{nr}(b)\}$ para $\{b\} \times \mathbb{R}^{nr}$, observemos que los vectores $\{F'_{n+1}(b), ..., F'_{nr}(b)\}$ forman parte de la base sólo en el punto b, pero eso se puede extender a una vecindad de b puesto que $\det(S(s_1(b)), ..., S(s_n(b)), F'_{n+1}(b), ..., F'_{nr}(b)) \neq 0$ es una función continua. Luego ortonormalizando $F'_{n+1}(b), ..., F'_{nr}(b)\}$ se obtiene una base para $S(\xi_b)^\perp$ digamos $\{v_1(b), ..., v_{nr-n}(b)\}$. Con esto ya podemos definir

$$
\begin{array}{rcccl}
k_j & : & U^j \times \mathbb{R}^{nr-n} & \to & prj_1^{-1}(U^j) \\
 & & (b, z) & \to & k_j(b, z) = \sum_{j=1}^{nr-n} z_j v_j(b),
\end{array}
$$

donde $z = (z_1, ..., z_{nr-n})$, por la forma como se ha definido se tiene que k_j es un homeomorfismo local tal que $k_j(b, -) : \mathbb{R}^{nr-n} \to prj_1^{-1}(b)$ es un isomorfismo. Luego η es

un fibrado vectorial.
Sólo faltaría probar que $\xi \oplus \eta$ es isomorfo a ϵ^{nr}, donde tenemos la inclusión $E(\eta) \to B \times \mathbb{R}^{nr}$, dada por $(b, w) \to (prj_1(b, w), s(w)^{\perp})$ donde $s(w)^{\perp} \in S(\xi_b)^{\perp}$ y $s(v) = (\alpha_1(\pi_{\xi}(v))f^1(v), ..., \alpha_r(\pi_{\xi}(v))f^r(v))$ ahora podemos definir la aplicación

$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & \xi \oplus \eta & \to & \epsilon^{nr} \\ & & (v, w) & \to & s(v) \oplus s(w)^{\perp} \end{array}$$

así ϕ es continua y un isomorfismo de fibras, luego por el Lema(2.1), se concluye que ϕ es un isomorfismo de fibrados vectoriales.

□

2.5. Fibrado Inducido e Invarianza por Homotopía

Antes de construir el fibrado inducido, construiremos un conjunto $Vect_n(B)$ que contiene a las clases de isomorfismo de un fibrado sobre una misma base B, de dimensión n esto es

$$Vect_n(B) = \{[\xi]/\xi \text{ fibrado vectorial de dimensión } n \},$$

donde $[\xi] = \{\eta/\eta \text{ es isomorfo a } \xi\}$. La suma directa de fibrados vectoriales induce una aplicación

$$\begin{array}{rcccl} \oplus & : & Vect_n(B) \times Vect_m(B) & \to & Vect_{n+m}(B) \\ & & ([\xi_1], [\xi_2]) & \to & [\xi_1] \oplus [\xi_2] = [\xi_1 \oplus \xi_2]. \end{array}$$

Ahora el conjunto $Vect(B) = \bigcup_{n=0}^{\infty} Vect_n(B)$, es un semigrupo abeliano con la operación $\oplus$(cerrada y asociativa). En el caso que $n = 0$ tenemos $Vect(B) = Vect_0(B) = \epsilon^0$.
En lo que sigue hacemos la descripción del **grupo de Grothendieck**. Considere $(V, +)$ un semigrupo abeliano, a partir de éste construimos un grupo abeliano de la siguiente forma, sea $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \times V$,

$$\text{decimos que } (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y sólo si, } \exists z \in V \text{ tal que } x_1 + y_2 + z = y_1 + x_2 + z$$

así ¨$\sim$¨ es una relación de equivalencia, entonces definimos el conjunto

$$K(V) = \frac{V \times V}{\sim} = \{[(x, y)]/x, y \in V\}$$

luego $(K(V), +)$ es un grupo abeliano, también se puede escribir de la forma

$$K(V) = \frac{V \times V}{\sim} = \{[(x, y)]/x - y = (x + z) - (y + z), z \in V\},$$

donde

$$\begin{cases} -[(x, y)] = [(y, x)] \text{ y } [(x, x)] = 0 \\ [(x_1, y_1)] + [(x_2, y_2)] = [(x_1 + x_2, y_1 + y_2)]. \end{cases}$$

Siguiendo la misma idea concluimos diciendo que $(K(Vect(B)), \oplus)$ es un grupo abeliano, en el caso que B es compacto usaremos la notación $KO(B) = K(Vect(B))$. Por el Teorema(2.1), los elementos de $KO(B)$ son de la forma $[\xi] - [\epsilon^k]$ donde, $[\xi]$ denota la clases de isomorfismo del fibrado vectorial ξ. Ósea

$$KO(B) = \{[\xi] = [(\xi_1, \xi_2)]/[\xi] = [\xi_1] - [\xi_2]\}$$

esto es pues

$$[\xi_1] - [\xi_2] = ([\xi_1] \oplus [\eta_2]) - ([\xi_2] \oplus [\eta_2]) = [\xi_1 \oplus \eta_2] - [\xi_2 \oplus \eta_2] = [\xi] - [\epsilon^k]$$

donde η_2 es el complemento de ξ_2.

Ahora presentamos el fibrado inducido.

Definición 2.8. *Sea $f : X \to B$ una aplicación continua(diferenciable) y ξ un fibrado vectorial(diferenciable) sobre B luego el **fibrado inducido** denotado por $f^*\xi$ es un fibrado vectorial sobre X.*

Veamos una breve descripción de la construcción del fibrado inducido. El espacio total esta dado por

$$E(f^*\xi) = \{(x, v) \in X \times E(\xi)/f(x) = \pi_\xi(v)\}$$

y la proyección $\pi_{f^*\xi} : E(f^*\xi) \to X$ dada por $\pi_{f^*\xi}(x, v) = x$ note que, $\pi_{f^*\xi} = prj_1$ así definido el espacio total de $f^*\xi$ y la proyección, hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E(f^*\xi) \arrow[r, "prj_2"] \arrow[d, "prj_1"'] & E(\xi) \arrow[d, "\pi_\xi"'] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

conmute, esto significa que las fibras sobre $b \in B$ se corresponden con las fibras sobre $f^{-1}(b)$.
Si $h_j : U_j \times \mathbb{R}^n \to \pi_\xi^{-1}(U_j)$ es una trivialización de ξ, entonces

$$\begin{array}{rcccl} k_j & : & f^{-1}(U_j) \times \mathbb{R}^n & \to & prj_1^{-1}(f^{-1}(U_j)) \\ & & (x, u) & \to & k_j(x, u) = (x, h_j(f(x), u)), \end{array}$$

es una trivialización para $f^*\xi$.

Observación 2.1. *Si ξ, η son dos fibrados vectoriales isomorfos, sobre la mima base B y $f : X \to B$ una aplicación continua entonces $f^*\xi$ y $f^*\eta$ son fibrados vectoriales isomorfos, sobre X.*

Si $f : X \to B$ es una función continua, por la observación anterior f induce un homomorfismo

$$f^* : Vect(B) \to Vect(X)$$

que junto con $g : Y \to B$(aplicación continua) y ξ (un fibrado vectorial sobre B) goza de las siguientes propiedades:

i. $(g \circ f)^*\xi \cong f^* \circ g^*\xi$.

ii. $id^*\xi \cong \xi$.

donde ξ es el representante de alguna clase de equivalencia.

2.5.1. Invarianza por Homotopía en Fibrados Vectoriales

Una propiedad fundamental del fibrado inducido la vemos en el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Sea X, un espacio topológico compacto y $f_0, f_1 : X \to B$ aplicaciones homotópicas. Si ξ es un fibrado vectorial sobre B entonces, los fibrados $f_0^*\xi$ y $f_1^*\xi$ son isomorfos.*

Demostración. Por hipótesis $f_0, f_1 : X \to B$ son aplicaciones homotópicas entonces, existe $F : X \times I \to B$ homotopía entre f_0, f_1 donde $I = [0, 1]$; por lo tanto podemos definir una familia de aplicaciones $f_t : X \to B$ tal que $f_t(x) = F(x, t)$, la composición

$$X \times I \xrightarrow{prj_1} X \xrightarrow{f_t} B$$

induce un fibrado vectorial sobre $X \times I$ que denotaremos por $\zeta = (f_t \circ prj_1)^*\xi$, de la misma forma la aplicación $F : X \times I \to B$ induce un fibrado vectorial sobre $X \times I$ que se denotará por $\eta = F^*\xi$. En el caso que $I = \{t\}$ se tiene que $F = f_t \circ prj_1$, por lo tanto, $\zeta = \eta$, así podemos obtener un isomorfismo de fibrados,

$$\begin{tikzcd} \zeta \arrow[r, "\hat{h}"] \arrow[dr] & \eta \arrow[d] \\ & X \times \{t\}. \end{tikzcd}$$

El primer paso es extender el homomorfismo $\hat{h}$ de fibrados, sobre $X \times [t-\epsilon, t+\epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$. De la compacidad de X podemos elegir un cubrimiento finito $\{U_1, ..., U_l\}$ tome ϵ_i asociada a cada U_i y considere las trivializaciones de ζ, η dadas por: $r_i : (U_i \times [t-\epsilon_i, t+\epsilon_i]) \times \mathbb{R}^n \to \pi_\zeta^{-1}(U_i \times [t-\epsilon_i, t+\epsilon_i])$, $s_i : (U_i \times [t-\epsilon_i, t+\epsilon_i]) \times \mathbb{R}^n \to \pi_\eta^{-1}(U_i \times [t-\epsilon_i, t+\epsilon_i])$

$$\begin{tikzcd} \zeta \arrow[r, "\hat{h_i}"] \arrow[dr, "\pi_\zeta"'] & \eta \arrow[d, "\pi_\eta"] \\ & U_i \times [t-\epsilon_i, t+\epsilon_i]. \end{tikzcd}$$

Recordemos que si dos fibrados se trivializan sobre el mismo abierto estos son isomorfos. Éste es el caso entonces, $\hat{h_i}$ es un isomorfismo.

Ahora considere $\{\alpha_i\}_{i=\{1,..,l\}}$ la partición de la unidad con $\mathrm{sop}(\alpha_i) \subset U_i$ y considere $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_i\}$, entonces formamos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \zeta \arrow[r, "\hat{k}"] \arrow[dr] & \eta \arrow[d] \\ & X \times [t-\epsilon, t+\epsilon] \end{tikzcd}$$

donde $\hat{k}$ queda definida de la forma:

$$\hat{k}(v) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i(prj_1 \circ \pi_\zeta(v))\hat{h_i}(v),$$

cuando $\pi_\zeta(v) \in X \times \{t\}$, $\hat{h_i}(v) = \hat{h}(v)$ y como $\sum \alpha_i = 1$ se tiene, $\hat{k} = \hat{h}$ en $X \times \{t\}$, así $\hat{k}$ es un isomorfismo en $X \times \{t\}$. Finalmente demostremos que $\hat{k}$ es un isomorfismo en una vecindad $X \times [t-\epsilon_1, t+\epsilon_1]$ de $X \times \{t\}$. Como X es compacto es suficiente demostrar que $\hat{k}$ es un isomorfismo en una vecindad $V(x,t)$ de $X \times \{t\}$. Para esto considere e, s referenciales de ζ y η respectivamente en una vecindad W del punto (x,t). Por ahora tenemos que

$$ad(\hat{k}) : X \times [t-\epsilon, t+\epsilon] \to M_n(\mathbb{R})$$

y también $ad(\hat{k}) : X \times \{t\} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ esto es $ad(\hat{k})(x,t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y como $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es abierto y $ad(\hat{k})(x,t)$ es una matriz invertible, por la continuidad del determinante se concluye, que $ad(\hat{k})(x,t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en $U_j \times [t-\epsilon_j, t+\epsilon_j]$, ahora tomando $\epsilon_1 = \text{mín}\{\epsilon_j\}$ y por la compacidad de $X \times [t-\epsilon_1, t+\epsilon_1]$ se tiene $ad(\hat{k})(x,t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ cuando $(x,t) \in X \times [t-\epsilon_1, t+\epsilon_1]$ por lo tanto, $\hat{k}$ es un isomorfismo luego $f_0^*\xi$ y $f_1^*\xi$ son fibrados isomorfos.

$\square$

Antes de presentar el siguiente corolario damos algunas observaciones, que son afirmaciones que son fáciles de justificar.

Observación 2.2. *Sea ξ un fibrado vectorial.*

i. Si ξ es un fibrado vectorial sobre un punto entonces, ξ es un fibrado trivial.

ii. Si $f : X \to B$, continua(diferenciable) y ξ un fibrado trivial sobre B entonces, $f^*\xi$ es un fibrado trivial sobre X.

Corolario 2.1. *Todo fibrado vectorial sobre una base B contráctil, es trivial.*

Demostración. Como B es contráctil entonces, tiene el mismo tipo de homotopía que la de un punto esto quiere decir que existen aplicaciones $f : B \to \{p\}$ y $g : \{p\} \to B$ continuas tal que, $g \circ f$ es homotópica a id_B, usando el teorema anterior y la observación(2.1) tenemos $(g \circ f)^*\xi \cong id_B^*\xi \cong \xi$, así $f^* \circ g^*\xi \cong \xi$. Por otro lado observamos que $g^*\xi$ es un fibrado sobre $\{p\}$ y por la Observación(2.2) es trivial, además como f es continua entonces $f^*g^*\xi$ es trivial, luego ξ es trivial.

□

2.6. Operaciones con Fibrados Vectoriales

Las operaciones más importantes con fibrados vectoriales son producto tensorial y el producto exterior; en ése sentido abordamos esta sección hablando del producto tensorial de módulos, que es el caso más general del producto tensorial de espacios vectoriales finalmente el producto exterior.

2.6.1. Producto Tensorial y Exterior de Módulos

Antes de presentar la construcción del producto tensorial y exterior, será necesario introducir algunas operaciones sobre módulos. Sea R un anillo con unidad, $(V,+,\cdot)$ es un $R-$módulo si sólo si, $(V,+)$ es un grupo abeliano y la aplicación $R\times V\to V$ dada por $(r,v)\to rv$ satisface las condiciones.

$$\begin{cases} r(v+w)=rv+rw \\ (r+s)v=rv+sw \\ (rs)v=r(sv) \\ 1\cdot v=v, \forall r,s\in R, \forall v,w\in V. \end{cases}$$

Un $R-$ módulo $(V,+,\cdot)$, se llama módulo libre si y sólo si, V posee una base. Además decimos que $M\subset V$ es un submódulo de V, si es un módulo por si sólo con las mismas operaciones.
Considere V,W dos $R-$módulos, una aplicación $f:V\to W$ se llama homomorfismo de $R-$módulos si satisface $f(v+w)=f(v)+f(w)$ y $f(rv)=rf(v)$ $\forall v,w\in V$ y $\forall r\in R$. Si f es una biyección entonces decimos que f es un isomorfismo.
Sea V,W módulos sobre el anillo R, considere las funciones de la forma

$$\begin{array}{ccc} V\times W & \to & R \\ (v_i,w_i) & \to & 0 \end{array}\text{, salvo para un número finito de puntos.}$$

Denotaremos por $R[V\times W]$ al conjunto de funciones de la forma $\sum_{i=1}^{n} r_i(v_i,w_i)$ donde $r_i\in R$. Por la forma como se definió $R[V\times W]$ éste es un $R-$módulo libre con base $V\times W$.

En $R[V \times W]$ consideremos el submódulo $R(V, W)$ de elementos de la forma:

$$\begin{cases} (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ (rv, w) - r(v, w) \\ (v, rw) - r(v, w); \text{ donde } v_i \in V, w_i \in W \text{ y } r \in R. \end{cases} \tag{1}$$

Ahora ya estamos en condición de dar la definición formal del producto tensorial.

Definición 2.9. *Considere V, W dos $R-$módulos, definimos el* ***producto tensorial*** *que denotaremos por $V \otimes_R W$, como*

$$V \otimes_R W = \frac{R[V \times W]}{R(V, W)}.$$

Las clases de equivalencia de $V \otimes_R W$ son denotadas $\overline{(v, w)} = w \otimes w$. Todo elemento de $V \otimes_R W$ se escribe como $\sum_{i=1}^{n} r_i(v_i \otimes w_i)$, la proyección canónica restricta a $V \times W$ esta dada por

$$\begin{array}{rcccl} \pi & : & V \times W & \to & V \otimes_R W \\ & & (v, w) & \to & v \otimes w \end{array}$$

ésta es $R-$bilineal por (1). Entonces tenemos:

$$\begin{cases} (v_1 + v_2) \otimes w = (v_1 \otimes w) + (v_2 \otimes w) \\ v \otimes (w_1 + w_2) = (v \otimes w_1) + (v \otimes w_2) \\ r(v \otimes w) = (rv \otimes w) \\ r(v \otimes w) = (v \otimes rw); \text{ donde } v_i \in V, w_i \in W \text{ y } r \in R. \end{cases} \tag{2}$$

Para la prueba de resultados en adelante el que más utilizaremos es la propiedad universal del producto tensorial, que la presentamos en el siguiente lema.

Lema 2.4. *Considere V, W y U tres $R-$módulos. Dada una aplicación $R-$ bilineal $f : V \times W \to U$, entonces existe una única aplicación $R-$lineal $\overline{f} : V \otimes_R W \to U$ tal que $f = \overline{f} \circ \pi$.*

Demostración. Definamos la aplicación:

$$\begin{array}{rcccl} \widehat{f} & : & R[V \times W] & \to & U \\ & & \sum_{i=1}^{n} r_i(v_i, w_i) & \to & \sum_{i=1}^{n} r_i f(v_i, w_i), \end{array}$$

así $\widehat{f}$ es $R-$lineal y como f es $R-$ bilineal por consiguiente, $\widehat{f}|_{R(V,W)} = 0$, con lo cual $\widehat{f}$ es independiente de los elementos de $R(V, W)$. Ahora podemos extender $\widehat{f}$ a una aplicación $\overline{f} : V \otimes_R W \to U$ dada por $\overline{f}(v \otimes w) = f(v, w)$, eso demuestra la existencia;

ahora para la unicidad supongamos que $\overline{g} : V \otimes_R W \to U$ es otra aplicación $R-$lineal tal que $\overline{g}(v \otimes w) = f(v, w)$, considere $x \in V \otimes_R W$ entonces

$$\overline{g}(x) = \overline{g}(\sum_{i=1}^{n} r_i(v_i \otimes w_i)) = \sum_{i=1}^{n} r_i \overline{g}(v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(v_i, w_i) = \overline{f}(x)$$

luego $\overline{f}$ es única.

$\square$

Sea $\varphi : V \to V'$ y $\psi : W \to W'$, homomorfismos de $R-$módulos, éstas inducen una aplicación $R-$bilineal $\varphi \times \psi : V \times W \to V' \times W'$ definida por $\varphi \times \psi(v, w) = (\varphi(v), \psi(w))$, hacemos la composición

$$V \times W \xrightarrow{\varphi \times \psi} V' \times W' \xrightarrow{\pi'} V' \otimes_R W'$$

entonces $\pi' \circ (\varphi \times \psi)$ es $R-$bilineal, por lo tanto por el lema anterior existe un única aplicación $R-$lineal

$$\begin{array}{rcccl} \varphi \otimes \psi & : & V \otimes_R W & \to & V' \otimes_R W' \\ & & (v \otimes w) & \to & \varphi(v) \otimes \psi(w). \end{array}$$

El lema que damos a continuación sólo es válido para módulos libres o en particular para espacios vectoriales.

Lema 2.5. *Considere V, V' dos $R-$ módulos libres con bases B, B' respectivamente entonces, $V \otimes_R V'$ es un $R-$ módulo libre con base $\{b \otimes b' / b \in B, b' \in B'\}$.*

Demostración. Como $\pi : V \times V' \to V \otimes_R V'$ es R-bilineal, entonces todo elemento $v \otimes v'$ se puede escribir de la forma: $v \otimes v' = \sum_{i,j=1}^{n,m} r_{ij}(b_i \otimes b'_j)$ donde $b_i \in B$, $b'_j \in B'$ y $r_{ij} \in R$. Sólo faltaría probar que $\{b \otimes b' / b \in B, b' \in B'\}$ es linealmente independiente para esto considere

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} r_{ij}(b_i \otimes b'_j) = 0, \qquad (*)$$

ahora definamos las aplicaciones lineales
$\varphi_{i_0} : V \to R$ con $\varphi_{i_0}(b_i) = 0$ si $i_0 \neq i$ y $\varphi_{i_0}(b_i) = 1$ si $i_0 = i$ y $\psi_{j_0} : V' \to R$ con $\psi_{j_0}(b'_j) = 0$ si $j_0 \neq j$ y $\psi_{j_0}(b'_j) = 1$ si $j_0 = j$; entonces existe una única aplicación lineal $\varphi_{i_0} \otimes \psi_{j_0} : V \otimes_R V' \to R \otimes_R R'$. Se hace la composición

$$V \otimes_R V' \xrightarrow{\varphi_{i_0} \otimes \psi_{j_0}} R \otimes_R R' \xrightarrow{mult} R,$$

donde ¨*mult*¨ es el operador multiplicación en el anillo R, entonces obtenemos una aplicación lineal $f = mult \circ \varphi_{i_0} \otimes \psi_{j_0}$, aplicando f en $(*)$ tenemos:

$$f(\sum_{i,j=1}^{n,m} r_{ij}(b_i \otimes b'_j)) = \sum_{i,j=1}^{n,m} r_{ij} f(b_i \otimes b'_j) = \sum_{i,j=1}^{n,m} r_{ij} \varphi_{i_0}(b_i).\psi_{j_0}(b'_j) = 0$$

por lo tanto $r_{ij} = 0$.

$\square$

En seguida presentamos algunas propiedades del producto tensorial, en esta oportunidad sólo probaremos dos ellas.

Proposición 2.2. *Sea V, V_1,V_2 y V_3 $R-$módulos entonces tenemos:*

i. $R \otimes_R V \cong V$.

ii. $V_1 \otimes_R V_2 \cong V_2 \otimes_R V_1$.

iii. $(V_1 \otimes_R V_2) \otimes_R V_3 \cong V_1 \otimes_R (V_2 \otimes_R V_3)$.

iv. $(V_1 \oplus V_2) \otimes_R V_3 \cong V_1 \otimes_R V_3 \oplus V_2 \otimes_R V_3$.

Demostración. Para la parte (i) definimos una aplicación bilineal

$$\begin{array}{rcccl} B & : & R \times V & \to & V \\ & & (r, v) & \to & rv, \end{array}$$

entonces por la propiedad universal del producto tensorial existe una única aplicación lineal $f : R \otimes_R V \to V$ tal que $f(r \otimes v) = rv$ ahora demostremos que f es un isomorfismo. Si $x \in R \otimes_R V$, entonces se puede escribir $x = \sum_{i=1}^{n} r_i \otimes v_i$ también $x = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot 1 \otimes v_i$ y por la bilinealidad de $\ddot{\otimes}$ tenemos $x = 1 \otimes \sum_{i=1}^{n} r_i v_i = 1 \otimes z$ donde $z \in V$. Ahora veamos la inyectividad sea $x, y \in R \otimes_R V$ ósea $x = 1 \otimes z_1$ y $y = 1 \otimes z_z$, por lo tanto si $f(x) = f(y)$ entonces $1x = 1y$. Para la sobreyectividad dado $z \in V$ existe $1 \otimes z$ tal que $f(1 \otimes z) = z$, luego f es isomorfismo.

Para la prueba de (ii) tome $\pi' : V_2 \times V_1 \to V_2 \otimes_R V_1$ la aplicación bilineal entonces, podemos definir la aplicación $\varphi : V_1 \times V_2 \to V_2 \otimes_R V_1$ de la forma $\varphi(v, w) = \pi'(w, v)$ así φ es bilineal y por el Lema(2.4) existe una única aplicación lineal $\overline{\varphi} : V_1 \otimes_R V_2 \to V_2 \otimes_R V_1$ tal que $\overline{\varphi}(v \otimes w) = \pi'(w, v)$; ahora invirtiendo los roles sea $\pi : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes_R V_2$ la aplicación bilineal definimos $\psi : V_2 \times V_1 \to V_1 \otimes_R V_2$ de la forma $\psi(w, v) = \pi(v, w)$ luego, ψ es bilineal y por el Lema(2.4) existe una única aplicación lineal $\overline{\psi} : V_2 \otimes_R V_1 \to V_1 \otimes_R V_2$ tal que $\overline{\psi}(w \otimes v) = \pi(v, w)$. Ahora hacemos las composiciones

$$\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}(v \otimes w) = \overline{\psi}(\pi'(w, v)) = \overline{\psi}(w \otimes v) = \pi(v, w) = v \otimes w = id_{V_1 \otimes_R V_2} \text{ y}$$

$$\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}(w \otimes v) = \overline{\varphi}(\pi(v, w)) = \overline{\varphi}(v \otimes w) = \pi'(w, v) = w \otimes v = id_{V_2 \otimes_R V_1},$$

por lo tanto $\overline{\varphi}$ es un isomorfismo.

$\square$

La construcción del producto tensorial de k, $R-$módulos es totalmente análoga a la construcción ya hecha para dos $R-$módulos, por lo tanto se puede generalizar la propiedad universal del producto tensorial. Sea $f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_k \to W$ una aplicación $R-$ multilineal de módulos entonces, existe una única aplicación lineal $\overline{f} : V_1 \otimes_R V_2 \otimes_R ... \otimes_R V_k \to W$ tal que $f = \overline{f} \circ \pi$.

Por la asociatividad del producto tensorial podemos escribir $\underbrace{V \otimes_R V \otimes_R ... \otimes_R V}_{k-veces} = \bigotimes_R^k V$ y considere el $R-$submódulo $A^k(V) \subseteq \bigotimes_R^k V$ donde sus elementos están generados por el conjunto

$$\{v_1 \otimes ... \otimes v_k / v_i \in V \text{ y } v_{i_0} = v_{i_0+1} \text{ para algún } i_0\}.$$

Definición 2.10. *Definimos el $k-$ **producto exterior** como el módulo cociente*

$$\Lambda_R^k(V) = \frac{\bigotimes_R^k V}{A^k(V)},$$

donde las clases de equivalencia serán denotadas por: $\overline{v_1 \otimes ... \otimes v_k} = v_1 \wedge_R ... \wedge_R v_k$.

La imagen de $v_1 \otimes ... \otimes v_k$ por la proyección canónica viene dada por:

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 & : & \bigotimes_R^k V & \to & \Lambda_R^k(V) \\ & & (v_1 \otimes ... \otimes v_k) & \to & v_1 \wedge_R ... \wedge_R v_k, \end{array}$$

así $\pi_1(v_1 \otimes ... \otimes v_k) = 0$ si y sólo si $v_{i_0} = v_{i_0+1}$.
Haciendo la composición

$$V \times ... \times V \xrightarrow{\pi} \bigotimes_R^k V \xrightarrow{\pi_1} \Lambda_R^k(V)$$

obtenemos una aplicación $\rho = \pi_1 \circ \pi$, $R-$alternante. Si $\sigma : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., k\}$ es una permutación, entonces tenemos que

$$v_1 \wedge_R .... \wedge_R v_k = \text{sign}(\sigma)(v_{\sigma(1)} \wedge_R ... \wedge_R v_{\sigma(k)})$$

Lema 2.6. *Sea $w : V \times ... \times V \to W$ una aplicación $R-$alternante entonces, existe una única aplicación $R-$lineal $\overline{w} : \Lambda_R^k(V) \to W$ tal que $w = \overline{w} \circ \rho$.*

Demostración. La aplicación w es alternante por consiguiente $R-$multilineal entonces, induce una única aplicación $R-$lineal $\widehat{w} : \bigotimes_R^k V \to W$ tal que $\widehat{w}(v_1 \otimes ... \otimes v_k) = w(v_1, ..., v_k)$ por otro lado como w es alternante se tiene que $\widehat{w}$ se anula en $A^k(V)$ por lo tanto es independiente de las relaciones con lo cual podemos definir $\overline{w} : \Lambda_R^k(V) \to W$ de la forma $\overline{w}(v_1 \wedge_R ... \wedge_R v_k) = w(v_1, ..., v_k)$ esto proporciona la existencia. Además como $\pi_1 \circ \pi(V \times ... \times V) = \Lambda_R^k(V)$, $\overline{w}$ es única.

□

Sea V, W dos $R-$ espacios vectoriales de dimensión finita y $\mathrm{Alt}^k(V)$ es el conjunto de aplicaciones alternas. En lo que sigue para simplificar la notación usaremos $V \otimes W$, $\bigotimes^k(V)$, $\Lambda^k(V)$ y $\mathrm{Hom}(V,W)$.

Sea $V^* = \mathrm{Hom}(V,R)$ el espacio vectorial dual de V; el producto exterior de formas alternas permite definir la aplicación

$$\begin{array}{rcrcl}\varphi & : & V^* \times ... \times V^* & \to & \mathrm{Alt}^k(V)\\ & & (T_1,...,T_k) & \to & \varphi(T_1,...,T_k) = T_1 \wedge ... \wedge T_k\end{array}$$

así φ es alternante y por el lema anterior, existe una única aplicación $R-$lineal

$$\begin{array}{rcrcl}\overline{\varphi} & : & \Lambda^k(V^*) & \to & \mathrm{Alt}^k(V)\\ & & (T_1 \wedge_R ... \wedge_R T_k) & \to & \overline{\varphi}(T_1 \wedge_R ... \wedge_R T_k) = T_1 \wedge ... \wedge T_k.\end{array} \tag{3}$$

Teorema 2.3. *Tenemos las siguientes afirmaciones:*

i. La aplicación $\overline{\varphi}$ dada en (3) es un isomorfismo.

ii. Si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base de V entonces, $\{e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k}/i_1 < ... < i_k\}$ es una base de $\Lambda^k(V)$.

iii. Los espacios vectoriales $\Lambda^k(V^*)$ y $\Lambda^k(V)^*$ son isomorfos.

Demostración. i Para demostrar que $\overline{\varphi}$ es un isomorfismo es suficiente verificar que $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} = \dim \mathrm{Alt}^k(V)$ donde n es la dimensión de V. Tome $\{T_{i_1} \wedge ... \wedge T_{i_k}/1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n\}$ una base para $\mathrm{Alt}^k(V)$, por la forma como se definió $\overline{\varphi}$ entonces éste es sobreyectiva por consiguiente $\dim \Lambda^k(V^*) \geq \binom{n}{k}$; por otro lado se sabe que $\{v_1 \otimes ... \otimes v_k/v_i \in B\}$ donde $(\{v_i\}$ base de $V)\}$ es una base de $\bigotimes_V^k$. Por el Lema(2.5) entonces, $\overline{v_1 \otimes ... \otimes v_k} = v_1 \wedge_R ... \wedge_R v_k$ genera $\Lambda^k(V)$ y como $\dim \Lambda^k(V^*) = \dim \Lambda^k(V)$ se concluye $\dim \Lambda^k(V^*) \leq \binom{n}{k}$ aplicando el teorema de la dimensión, $\overline{\varphi}$ es inyectiva. Así es un isomorfismo.

ii Esto se puede obtener de la parte (i) y de (3).

iii Definimos la función $\overline{g} : \mathrm{Alt}^k(V) \to \Lambda^k(V)$. Para esto considere $w \in \mathrm{Alt}^k(V)$ una aplicación k-alternante, luego por el Lema(2.6) w induce una única aplicación lineal $\overline{g}(w) : \Lambda^k(V) \to R$. Por consiguiente, $\overline{g}$ es lineal e inyectiva. De la parte (i) tenemos $\dim \Lambda^k(V) = \dim \mathrm{Alt}^k(V)^*$. Por lo tanto $\overline{g}$ es un isomorfismo.

□

2.6.2. Fibrado Dual, Producto Tensorial de Fibrados, Homomorfismo de Fibrados y Producto Exterior de Fibrados.

La idea fundamental de ésta sección es construir nuevos fibrados vectoriales a partir de otros fibrados vectoriales que darán. Sea B espacio topológico, consideremos dos fibrados vectoriales $\xi = (E(\xi), \mathbb{R}^n, \pi_\xi)$ y $\eta = (E(\eta), \mathbb{R}^m, \pi_\eta)$ definidos sobre la misma base B.

1. ξ^*, **el dual de un fibrado vectorial** ξ**.**
   Tenemos que ξ es un fibrado vectorial. Queremos construir un fibrado vectorial ξ^* cuyas fibras sean ξ_x^* donde ξ_x son las fibras de ξ, para tal caso empezamos definiendo la unión disjunta $E(\xi^*) = \bigcup_{x\in B} \xi_x^*$ y la proyección

$$\begin{array}{rcrcl} \pi_{\xi^*} & : & E(\xi^*) & \to & B \\ & & f & \to & \pi_{\xi^*}(f) = x, \text{ donde } f \in \xi_x^*. \end{array}$$

   Considere $h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to \pi_\xi^{-1}(U_i)$ las trivializaciones locales para ξ donde $h_i^{-1}(x, -) : \xi_x \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, a partir de éstas se construirán aplicaciones de la forma:

$$\begin{array}{rcrcl} h_i^* & : & U_i \times (\mathbb{R}^n)^* & \to & (\pi_{\xi^*})^{-1}(U_i) \\ & & (x, f) & \to & h_i^*(x, f) = f \circ h_i^{-1}(x, -); \end{array}$$

   entonces h_i^* son las trivializaciones locales para ξ^*. Si $h_{ji} : U_{ij} \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ son los co-ciclos de ξ, veamos los co-ciclos para ξ^*, para esto hagamos la composición

$$U_{ij} \times (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{h_i^*} (\pi^*)^{-1}(U_{ij}) \xrightarrow{(h_j^*)^{-1}} U_{ij} \times (\mathbb{R}^n)^*$$

$$(h_j^*)^{-1} \circ h_i^*(x, f) = (x, f \circ h_i^{-1}(x, -) \circ h_j(x, -)) = (x, f h_{ji}^{-1}(x))$$

   por lo tanto, los co-ciclos quedan determinados de la forma

$$\begin{array}{rcrcl} (h_{ji})^* & : & U_{ij} & \to & \mathrm{Aut}((\mathbb{R}^n)^*) \\ & & x & \to & (h_{ji})^*(x)(f) = f h_{ji}^{-1}(x). \end{array}$$

2. $\xi \otimes \eta$, **el producto tensorial de fibrados vectoriales.**
   En éste caso tome ξ y η dos fibrados vectoriales dados. Considere el conjunto $E(\xi \otimes \eta) = \bigcup_{x\in B}(\xi_x \otimes \eta_x)$ donde ξ_x, η_x son las fibras de ξ y η respectivamente; junto con la proyección

$$\begin{array}{rcrcl} \pi_{\xi\otimes\eta} & : & E(\xi \otimes \eta) & \to & B \\ & & v \otimes w & \to & \pi_{\xi\otimes\eta}(v \otimes w) = x \text{ donde } v \in \xi_x, w \in \eta_x. \end{array}$$

   Tenemos que $h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to \pi_\xi^{-1}(U_i)$ son las trivializaciones locales de ξ y $k_i : U_i \times \mathbb{R}^m \to \pi_\eta^{-1}(U_i)$ son las trivializaciones locales de η, en base a estas definimos las aplicaciones

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi_i & : & U_i \times (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m) & \to & \pi_{\xi\otimes\eta}^{-1}(U_i) \\ & & (x, v \otimes w) & \to & \varphi_i(x, v \otimes w) = h_i(x, v) \otimes k_i(x, w), \end{array}$$

que son las trivializaciones locales para $\xi\otimes\eta$. Sea $h_{ji}: U_{ij} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y $k_{ji}: U_{ij} \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ los co-ciclos correspondientes a ξ y η respectivamente, ahora veamos los co-ciclos para $\xi \otimes \eta$, para eso hacemos la composición

$$U_{ij} \times (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m) \xrightarrow{\varphi_i} (\pi_{\xi\otimes\eta})^{-1}(U_{ij}) \xrightarrow{\varphi_j^{-1}} U_{ij} \times \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(x, v \otimes w) = \varphi_j^{-1}(h_i(x,v) \otimes k_i(x,w)) = (x, h_{ji}(x)v) \otimes (x, k_{ji}(x)w)$$

entonces, las funciones

$$\begin{array}{rcll} \varphi_{ji} : U_{ij} & : & & \to \ \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m) \\ & & x & \to \ \varphi_{ji}(x)(v \otimes w) = h_{ji}(x)v \otimes k_{ji}(x)w \end{array}$$

son efectivamente los co-ciclos de $\xi \otimes \eta$.

3. **Hom(ξ, η), el homomorfismo de fibrados vectoriales.**
Nuestro interés ahora es construir el fibrado $\mathrm{Hom}(\xi,\eta)$ cuyas fibras son $\mathrm{Hom}(\xi_x, \eta_x)$ donde ξ_x,η_x son las fibras de los fibrados ξ y η respectivamente, con esa idea considere $\mathrm{Hom}(E(\xi), E(\eta)) = \bigcup_{x\in B} \mathrm{Hom}(\xi_x, \eta_x)$ junto con la proyección $\pi_{\mathrm{Hom}(\xi,\eta)} : \mathrm{Hom}(E(\xi), E(\eta)) \to B$ dada por: $\pi_{\mathrm{Hom}(\xi,\eta)}(f) = x$ tal que $f \in \mathrm{Hom}(\xi_x, \eta_x)$. Por otro lado tenemos $h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to \pi_\xi^{-1}(U_i)$ y $k_i : U_i \times \mathbb{R}^m \to \pi_\eta^{-1}(U_i)$ las trivializaciones locales de ξ y η respectivamente, en base a éstas definimos las aplicaciones

$$\begin{array}{rcrcl} H_i & : & U_i \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) & \to & \pi_{\mathrm{Hom}(\xi,\eta)}(U_i) \\ & & (x, f) & \to & H_i(x,f) = k_i(x,-) \circ f \circ h_i^{-1}(x,-) \end{array}$$

que constituyen las trivializaciones locales de $\mathrm{Hom}(\xi,\eta)$. Veamos ahora los co-ciclos de $\mathrm{Hom}(\xi,\eta)$ en base a $h_{ji} : U_{ij} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y $k_{ji} : U_{ij} \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$, para eso hacemos la composición:

$$U_{ij} \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \xrightarrow{H_i} (\pi_{\mathrm{Hom}(\xi,\eta)})^{-1}(U_{ij}) \xrightarrow{H_j^{-1}} U_{ij} \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$H_j^{-1} \circ H_i(x,f) = (x, k_j^{-1} \circ k_i(x,-) \circ f \circ (h_j^{-1} \circ h_i)^{-1}(x,-)) = (x, k_{ji}(x) \circ f \circ h_{ji}^{-1}(x))$$

es decir: $H_j^{-1} \circ H_i(x,f) = (x, H_{ji}(x)f)$ donde

$$\begin{array}{rcrcl} H_{ji} & : & U_{ij} & \to & \mathrm{Aut}(\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \\ & & x & \to & H_{ji}(x)f = k_{ji}(x) \circ f \circ h_{ji}^{-1}(x) \end{array}$$

estos constituyen los co-ciclos correspondientes al fibrado $\mathrm{Hom}(\xi,\eta)$.

4. **$\Lambda^k\xi$, el producto exterior del fibrados vectoriales ξ.**
Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, en espíritu de la Definición(2.10) tenemos un producto exterior $\Lambda^k V$ alterno, de la misma forma podemos tener el producto exterior $\Lambda^k \xi_x$ alterno donde ξ_x es la fibra del fibrado vectorial

ξ. Nuestro interés es construir un fibrado vectorial $\Lambda^k\xi$ cuyas fifras sean $\Lambda^k\xi_x$. En ese sentido consideramos $E(\Lambda^k\xi) = \bigcup_{x\in B} \Lambda^k\xi_x$ junto con la aplicación proyección $\pi_{\Lambda^k\xi} : E(\Lambda^k\xi) \to B$ definida como $\pi_{\Lambda^k\xi}(v_1 \wedge_{\mathbb{R}} .... \wedge_{\mathbb{R}} v_k) = x$ tal que $v_i \in \xi_x$, por otro lado tenemos las trivializaciones locales $h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to (\pi_\xi)^{-1}(U_i)$ de ξ, en base a estas construimos las funciones:

$$\begin{array}{rccl} H_i & : & U_i \times \Lambda^k\mathbb{R}^n & \to & (\pi_{\Lambda^k\xi})^{-1}(U_i) \\ & & (x, e_{a_1} \wedge_{\mathbb{R}} .... \wedge_{\mathbb{R}} e_{a_k}) & \to & h_i(x, e_{a_1}) \wedge_{\mathbb{R}} .... \wedge_{\mathbb{R}} h_i(x, e_{a_k}), \end{array}$$

donde $e_1, ..., e_n$ es alguna base de $\mathbb{R}^n$, éstas son las trivializaciones locales para $\Lambda^k\xi$. Para ver los co-ciclos veamos que sucede en la intersección U_{ij}

$$U_{ij} \times \Lambda^k\mathbb{R}^n \xrightarrow{H_i} (\pi_{\Lambda^k\xi})^{-1}(U_{ij}) \xrightarrow{H_j^{-1}} U_{ij} \times \Lambda^k\mathbb{R}^n$$

luego hacemos la composición

$$\begin{aligned} H_j^{-1} \circ H_i(x, e_{a_1} \wedge_{\mathbb{R}} .... \wedge_{\mathbb{R}} e_{a_k}) &= H_j^{-1}(h_i(x, e_{a_1}) \wedge_{\mathbb{R}} .... \wedge_{\mathbb{R}} h_i(x, e_{a_k})) \\ &= h_j^{-1} \circ h_i(x, e_{a_1}) \wedge_{\mathbb{R}} ... \wedge_{\mathbb{R}} h_j^{-1} \circ h_i(x, e_{a_k}) \\ &= (x, h_{ji}(x)e_{a_1} \wedge_{\mathbb{R}} ... \wedge_{\mathbb{R}} h_{ji}(x)e_{a_k}) \end{aligned}$$

por lo tanto los co-ciclos vienen representados por:

$$\begin{array}{rccl} H_{ji} & : & U_{ji} & \to & \mathrm{Aut}(\Lambda^k\mathbb{R}^n) \\ & & x & \to & H_{ji}(x) = \underbrace{h_{ji}(x) \wedge_{\mathbb{R}} .... \wedge_{\mathbb{R}} h_{ji}(x)}_{k-veces} \end{array}$$

Cabe mencionar que cuando ξ es el fibrado tangente τ, las secciones de éste fibrado son las $k-$formas diferenciales.

Para terminar con esta sección presentamos un lema que relaciona algunos isomorfismos entre fibrados vectoriales. Pero antes hacemos una breve descripción del material técnico a usar.
Si V, W son $R-$ espacios vectoriales de dimensión finita podemos obtener una aplicación $\psi : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ definida por $\psi(f \otimes w) = f_w$, donde $f_w : V \to W$, $f_w(v) = f(v)w$ por lo tanto,ψ es $R-$lineal además inyectiva, también por el Lema(2.5) $V^* \otimes W$ y $\mathrm{Hom}(V, W)$ tienen la misma dimensión por lo tanto, ψ es un isomorfismo.

Lema 2.7. *Sea ξ y η fibrados vectoriales sobre la misma base entonces, tenemos los siguientes isomorfismos:*

i. $\xi \cong \xi^{**}$

ii. $\xi^* \otimes \eta \cong \mathrm{Hom}(\xi, \eta)$

Demostración. .

i. Por el Lema(2.1) es suficiente establecer una aplicación continua $\psi : \xi \to \xi^{**}$ que aplique isomórficamente fibras de ξ en fibras de ξ^{**}. En ese sentido definamos $\psi(v) : \xi^* \to \mathbb{R}$ tal que $\psi_v(g) = g(v)$ donde $g \in \xi^*_x$. Para demostrar que ψ es continua veamos que la representación local es continua, para eso considere $h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to (\pi_\xi)^{-1}(U_i)$, $h_i^* : U_i \times (\mathbb{R}^n)^* \to (\pi_{\xi^*})^{-1}(U_i)$ y $h_i^{**} : U_i \times (\mathbb{R}^n)^{**} \to (\pi_{\xi^{**}})^{-1}(U_i)$ las trivializaciones de los fibrados ξ, ξ^* y ξ^{**} respectivamente entonces, expresamos la representación local de la forma: $(h_i^{**})^{-1} \circ \psi \circ h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to U_i \times (\mathbb{R}^n)^{**}$

$$\begin{aligned}(h_i^{**})^{-1} \circ \psi \circ h_i(x,v) &= (h_i^{**})^{-1}\psi_{h_i(x,v)} \\ &= (x, \psi_{h_i(x,v)} \circ h_i^*) \\ &= (x, f(v)) \text{ donde } f \in (\mathbb{R}^n)^*,\end{aligned}$$

por lo tanto ψ es continua entonces, ψ es un isomorfismo de fibrados.

ii. Con la misma idea de la parte (i) y en espíritu a los comentarios previos a éste lema definimos la aplicación

$$\begin{aligned}\psi \quad : \quad \xi^* \otimes \eta &\to \operatorname{Hom}(\xi, \eta) \\ (f \otimes w) &\to \psi(f \otimes w)v = f(v)w\end{aligned}$$

para demostrar la continuidad de ésta aplicación, demostremos la continuidad de la expresión local para eso considere las trivializaciones $\varphi_i : U_i \times ((\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^m) \to (\pi_{\xi^* \otimes \eta})^{-1}(U_i)$ del fibrado $\xi^* \otimes \eta$ y $\phi_i : U_i \times \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to (\pi_{\operatorname{Hom}(\xi,\eta)})^{-1}(U_i)$ las trivializaciones del fibrado $\operatorname{Hom}(\xi, \eta)$, por lo tanto, la representación local de ψ es $\phi_i^{-1} \circ \psi \circ \varphi_i : U_i \times ((\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^m) \to U_i \times \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ que puede ser expresada de la forma

$$\phi_i^{-1} \circ \psi \circ \varphi_i(x, f \otimes w) = (x, \phi_i^{-1} \circ \psi_{f \circ \varphi_i^{-1}(x,-)\phi_i(x,w)} \varphi_i(x, -))$$

aplicando $v \in \mathbb{R}^n$ y usando la definición de ψ tenemos:
$\phi_i^{-1} \circ \psi \circ \varphi_i(x, f \otimes w)v = (x, f(v)w)$, la misma que es una aplicación continua luego, ψ es un isomorfismo de fibrados.

□

2.7. Complexificación de un Fibrado Vectorial

Sea ξ un fibrado vectorial complejo de dimensión n, éste induce un fibrado vectorial real $\xi_{\mathbb{R}}$ de dimensión $2n$ esto puede ser posible haciendo perder la estructura compleja de las fibras de ξ.

Por otro lado si ξ es un fibrado vectorial real de dimensión n sobre B, éste induce un fibrado vectorial complejo $\xi_{\mathbb{C}}$ esto puede hacerse complexificando las fibras de ξ, y obtenemos

$$\xi_{\mathbb{C}} = \bigcup_{x \in B} \xi_x \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

entonces queda definido un fibrado vectorial complejo de dimensión n sobre B, que se llama la **complexificación** de ξ.

Sea $V = (V, +, \cdot)$ un $\mathbb{C}-$espacio vectorial, la estructura $\overline{V} = (V, +, *)$ es también un $\mathbb{C}-$espacio vectorial donde la operación ¨$*$¨ está definida de la forma $z * v = \overline{z} \cdot v$, a $\overline{V}$ se le conoce como espacio vectorial conjugado de V. La aplicación

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & \rightarrow & V \oplus V \\ & & v \otimes z & \rightarrow & \varphi(v \otimes z) = (zv, \overline{z}v) \end{array}$$

es un $\mathbb{R}-$ isomorfismo de $\mathbb{C}-$espacios vectoriales, lo que a nosotros nos interesa es un $\mathbb{C}-$isomorfismo para esto cambiamos el segundo sumando del rango de φ por $\overline{V}$(espacio vectorial conjugado) y redefinimos φ de la forma

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & \rightarrow & V \oplus \overline{V} \\ & & v \otimes z & \rightarrow & \varphi(v \otimes z) = (zv, \overline{z} * v), \end{array} \qquad (4)$$

se verifica que ésta aplicación es un $\mathbb{C}-$isomorfismo. Por otro lado identificamos a $\overline{V}$ con V^*(dual de V) mediante la aplicación $\phi : \overline{V} \rightarrow V^*$ de la forma $\phi(v)w = \langle w, v \rangle$ se puede probar que ϕ es un $\mathbb{C}-$isomorfismo, por lo tanto tenemos

$$V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V \oplus V^*. \qquad (5)$$

Lema 2.8. *Tenemos los siguientes isomorfismos:*

i. Para un fibrado vectorial real η tenemos: $(\eta_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong \eta \oplus \eta$

ii. Para un fibrado vectorial complejo ξ tenemos: $(\xi_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \xi \oplus \xi^*$

Demostración. Para (i) usamos los comentarios previos a éste lema. El fibrado vectorial real η induce un fibrado vectorial complejo $\eta_{\mathbb{C}}$ complexificando sus fibras es decir $(\eta_x)_{\mathbb{C}} = \eta_x \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. El fibrado vectorial complejo $\eta_{\mathbb{C}}$ induce un fibrado vectorial real $(\eta_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ donde sus fibras son de la forma: $((\eta_x)_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = \eta_x \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \cong \eta_x \oplus \eta_x$ que son las fibras del fibrado $\eta \oplus \eta$ por lo tanto, podemos definir una aplicación continua entre estos fibrados de ahí se tiene que los fibrados son isomorfos.

Para (ii) tenemos que ξ es un fibrado vectorial complejo de dimensión n éste fibrado induce un fibrado vectorial real $\xi_{\mathbb{R}}$ donde sus fibras son $\mathbb{R}-$espacios vectoriales de dimensión $2n$. Ahora $\xi_{\mathbb{R}}$ induce un fibrado vectorial complejo $(\xi_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ cuyas fibras son

$((\xi_x)_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = (\xi_x)_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. La idea es aplicar el Lema(2.1) para eso necesitamos definir una aplicación continua $\psi : (\xi_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \to \xi \oplus \xi^*$ que proporcione un isomorfismo de fibras entonces definimos $\psi(v \otimes z) = (zv, \phi(v))$ donde $\phi(v)$ es como (5) por lo tanto ψ nos da un isomorfismo de fibras, faltaría ver la continuidad, para eso tenemos que ver la continuidad de su expresión local en ese sentido considere $h_i : U_i \times \mathbb{C}^n \to \pi_\xi^{-1}(U_i)$, $h_i' : U_i \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to (\pi_\xi, \pi_\xi)^{-1}(U_i)$ y $k_i : U_i \times \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^* \to (\pi_{\xi\oplus\xi^*})^{-1}(U_i)$ las trivializaciones de los fibrados ξ, $(\xi_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ y $\xi \oplus \xi^*$ respectivamente entonces, la expresión local queda expresada de la forma

$$\begin{aligned} k_i^{-1} \circ \psi \circ h_i'(x, v, v) &= k_i^{-1} \circ \psi(h_i(x, v), h_i(x, v)) \\ &= k_i^{-1} \circ \psi(h_i(x, v) \otimes z), \text{ donde } z \in \mathbb{C} \\ &= k_i^{-1}(zh_i(x, v), \phi(v)), \text{ donde } \phi(v) \in \xi_x^* \\ &= (x, h_i^{-1}(x, \varsigma) \oplus \phi(\varsigma) \circ h_i(x, -)), \text{ donde } \varsigma \in \xi_x \end{aligned}$$

y la aplicación $\phi(\varsigma) \circ h_i(x, -) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, es de la forma $\phi(\varsigma)(h_i(x, v)) = \langle h_i(x, v), \varsigma \rangle$. Así ψ es continua por lo tanto, es un isomorfismo de fibrados vectoriales.

□

2.8. Propiedades Fundamentales

En esta parte desarrollaremos algunas propiedades fundamentales que son necesarias para nuestros objetivos, entonces la idea de ésta sección es básicamente en relacionar las secciones de un fibrado con las secciones de otros fibrados.

Sea ξ un fibrado vectorial diferenciable sobre M, tenemos que el espacio de las secciones diferenciables $\Omega^0(\xi)$ del fibrado ξ es un $\Omega^0(M)-$módulo, donde la multiplicación actúa de la forma $(fs)(x) = f(x)s(x)$ donde $s \in \Omega^0(\xi)$ y $f \in \Omega^0(M)$. En virtud a la Definición(2.9) y (2.10) tenemos $\Omega^0(\xi) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\eta)$[4] y $\Lambda^k(\Omega^0(\xi))$ son nuevos $\Omega^0(M)-$módulos.
Generalmente $\Omega^0(\xi)$ no es un $\Omega^0(M)-$módulo libre, en la proposición siguiente damos el caso cuando éste es módulo libre.

Proposición 2.3. *Un fibrado vectorial ξ es trivial si y sólo si, el conjunto de secciones $\{s_i(x)\}_{i=1}^n$ forman una base de ξ_x para todo $x \in M$.*

Demostración. Para la primera implicación suponga que ξ es trivial sobre M con espacio total E entonces existe un homeomorfimo $h : M \times \mathbb{R}^n \to E$. Sea $s_i : M \to E$ las funciones definidas por $s_i(x) = h_i(x, e_i)$, donde $\{e_i\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y como h es un isomorfismo en cada fibra entonces se concluye que el conjunto $\{s_i(x)\}_{i=1}^n$ forman una base de ξ_x para todo $x \in M$. Para la otra implicación considere $s_1, ..., s_n$ secciones

[4] ξ y η son fibrados vectoriales reales.

linealmente independientes; en base a éstas definimos la aplicación $h : M \times \mathbb{R}^n \to E$ dada por:

$$h(x, v) = v_1 s_1(x) + ... + v_n s_n(x),$$

donde $v = (v_1, ..., v_n)$ así h es continua y mapea cada fibra del fibrado trivial en la correspondiente fibra en ξ isomórficamente y por el Lema(2.1) h es un isomorfismo de fibrados. Entonces ξ es trivial. Esto quiere decir que si ξ es un fibrado vectorial(diferenciable) admite secciones globales entonces el fibrado es trivial. □

Para entender mejor considere a L como un fibrado de línea(diferenciable) sobre M tome el fibrado vectorial(diferenciable) $\mathrm{Hom}(L, L)$ y sea $s : M \to \mathrm{Hom}(L, L)$ la aplicación definida por $s(p) = (p, id_{L_p})$ ésta aplicación es suave no nula y mapea cada $p \in M$ en la fibra sobre p de $\mathrm{Hom}(L, L)$ luego es una sección global por lo tanto, el fibrado $\mathrm{Hom}(L, L) = L^* \otimes L$[5] es trivial.
Ésta proposición muestra también que el espacio de secciones sobre el fibrado trivial es un $\Omega^0(M)-$módulo libre.

Lema 2.9. *Sea ξ un fibrado vectorial sobre una variedad diferenciable compacta M. Entonces $\Omega^0(\xi)$ es suma directa de $\Omega^0(M)-$módulos libres finitamente generados.*

Demostración. Por un lado tenemos: $\Omega^0(\xi) \oplus \Omega^0(\eta) \cong \Omega^0(\xi \oplus \eta)$ y usando el Teorema(2.1) obtenemos:

$$\Omega^0(\xi) \oplus \Omega^0(\eta) \cong \Omega^0(\xi \oplus \eta) = \Omega^0(\epsilon^{n+k})$$

donde η es complementar de ξ; por la proposición anterior ϵ^{n+k} es un $\Omega^0(M)$-módulo libre, y sabemos que todo módulo libre es suma directa de módulos libres finitamente generados luego, $\Omega^0(\xi)$ es un $\Omega^0(M)$-módulo libre que es suma directa de módulos libres finitamente generados.

□

Un $R-$módulo se llama proyectivo si es sumando directo de un $R-$módulo libre[6]. Usando el lema anterior se tiene que $\Omega^0(\xi)$ en un $\Omega^0(M)-$módulo proyectivo, además $\mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\xi), \Omega^0(M))$ también es un $\Omega^0(M)$-módulo proyectivo.
Por otro lado si tenemos P un $R-$módulo proyectivo y además es finitamente generado entonces concluimos diciendo que P es un R-módulo libre.
Si tenemos P_1 y P_2 dos $R-$módulos proyectivos finitamente generados. Entonces tenemos los siguientes isomorfismos:

$$P_1 \cong P_1^{**} \text{ y } \mathrm{Hom}_R(P_1, P_2) \cong P_1^* \otimes_R P_2 \qquad (6)$$

[5] L^* es el fibrado dual de L

[6] Decimos que P es un módulo proyectivo cuando hay un módulo Q que la suma directa de los dos es un módulo libre F.

Como son proyectivos y finitamente generados entonces libres por lo tanto la demostración es análoga al caso de espacios vectoriales.

Teorema 2.4. *Sea ξ y η fibrados vectoriales sobre la misma base M (variedad diferenciable). Se tiene los siguientes isomorfismos:*

i. $\Omega^0(\mathrm{Hom}(\xi,\eta)) \cong \mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\xi),\Omega^0(\eta))$.

ii. $\Omega^0(\xi^*) \cong \mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\xi),\Omega^0(M))$.

iii. $\Omega^0(\xi\otimes\eta) \cong \Omega^0(\xi)\otimes_{\Omega^0(M)}\Omega^0(\eta)$.

Demostración. i. Definimos una aplicación

$$F : \Omega^0(\mathrm{Hom}(\xi,\eta)) \to \mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\xi),\Omega^0(\eta))$$

dada por $F(\hat{\varphi})(s) = \hat{\varphi}(s)$, donde $\hat{\varphi} \in \Omega^0(\mathrm{Hom}(\xi,\eta))$ F así es un $\Omega^0(M)$-homomorfismo. Solo faltaría ver que ésta es una biyección.

Veamos la inyectividad. Si $F(\hat{\varphi}) = 0$ entonces, demostraremos que $\hat{\varphi} = 0$ que es lo mismo probar que $\hat{\varphi}_x : \xi_x \to \eta_x$ es una aplicación lineal nula para todo x en M; para tal efecto fijemos $x \in M$ y tome una vecindad $V(x)$ centrada en x donde ξ se trivializa, sea $v \in \xi_x$ y tome una sección $s_v \in \Omega^0(\xi)$ tal que $s_v(x) = v$ (esto es posible siempre existen secciones donde ξ se trivializa) ahora hallaremos una sección global lo haremos extendiendo la sección local que tenemos, para esto tome una función f diferenciable en M tal que $\mathrm{sop}(f) \subset V(x)$ con lo cual podemos reemplazar s_v por fs_v. Ahora

$$F(\hat{\varphi})(s_v) = F(\hat{\varphi})(fs_v) = 0$$

entonces, $\hat{\varphi}_x(v) = 0$, $\forall x \in M$ por lo tanto, F es inyectiva.

Para la sobreyectividad, considere $\phi \in \mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\xi),\Omega^0(\eta))$ debemos definir un homomorfismo diferenciable $\hat{\varphi} : \xi \to \eta$ de modo que $\hat{\varphi}_x = \phi(s_v)(x)$ donde s_v es una sección en $\Omega^0(\xi)$ y $s_v(x) = v \in \xi_x$. Sabemos que $\hat{\varphi}$ es un homomorfismo de fibrados y además $F(\hat{\varphi}) = \phi$. Para ver la buena definición de ésta tome $s_v(x) = s'_v(x)$ luego, $s_v(x) - s'_v(x) = 0$ aplicando ϕ(homomorfismo) obtenemos, $\phi(s_v(x)) = \phi(s'_v(x))$ con eso $\hat{\varphi}$ está bien definida. Ahora veamos que $\hat{\varphi}$ es un homomorfismo de fibrados vectoriales, para esto considere un referencial local $\{e_1, ..., e_k\}$ de ξ tomada en un abierto trivializante $U \subset M$ con éste referencial podemos generar secciones localmente

$$s(p) = \sum_i f_i(p)e_i(p) \text{ para todo } p \in U$$

donde f_i son aplicaciones diferenciables en U la idea es extender esta sección para eso tome $\lambda : M \to \mathbb{R}$ con $\mathrm{sop}(\lambda) \subset U$ y $\lambda(x) = 1$ (esta aplicación siempre existe) luego, λs es la extensión de s ahora hacemos $\phi(s) = \phi(\lambda s + (1-\lambda)s) = \phi(\lambda s) + (1-\lambda)\phi(s)$ obtenemos que $\phi(s)(x) = \phi(\lambda s)(x)$ donde $\lambda s = \sum_i (\lambda f_i) e_i$, por otro lado las funciones λf_i se pueden extender diferencialmente a todo M y obtenemos las aplicaciones diferenciales g_i de modo que $g_i(x) = f_i(x) = 0$. Entonces, definimos el homomorfismo diferenciable

$$\phi(\lambda s)(x) = \sum_i g_i(x)\phi(e_i) \in \Omega^0(\eta)$$

pero como $g_i(x) = 0$ tenemos $\phi(\lambda s)(x) = 0$, esto garantiza que existe un homomorfismo $\hat{\varphi}$ diferenciable(esto es verdad puesto que los g_i son diferenciables) con $\hat{\varphi}_x = \phi(s_v)(x)$ para todo x en M y además $F(\hat{\varphi}) = \phi$.

ii. Note que éste es un caso particular de (i) en la situación que $\eta = \epsilon^1$ es el fibrado trivial de dimensión 1.

iii.

$$\begin{aligned}
\Omega^0(\xi \otimes \eta) &\cong \Omega^0(\mathrm{Hom}(\xi^*, \eta)), \text{ esto por Lema(2.7) parte } ii \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\xi^*), \Omega^0(\eta)), \text{ esto por la parte } i \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\xi), \Omega^0(M)), \Omega^0(\eta)), \text{ por } ii \\
&\cong (\mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\xi), \Omega^0(M)))^* \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\eta) \\
&\cong (\Omega^0(\xi))^{**} \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\eta) \cong \Omega^0(\xi)) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\eta)
\end{aligned}$$

los dos últimos isomorfismo se obtienen a partir de (6).

□

Capítulo 3

Conexión y Curvatura

La conexión es un objeto matemático definido en una variedad diferenciable que permite establecer una relación o "**conectar**"la geometría local en torno a un punto con la geometría local en torno a otro punto. La conexión es el objeto que establecerá como derivar secciones y así comparar las fibras sobre puntos diferentes de la base.

3.1. Conexión

En esta sección estudiaremos la conexión; en un fibrado vectorial ξ sobre una variedad diferenciable M y la representación local de éste haciendo uso de los referenciales locales que siempre existe.

Definición 3.1. *Una* ***Conexión*** *en ξ es una aplicación $\mathbb{R}-$lineal*

$$\nabla : \Omega^0(\xi) \to \Omega^1(M) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi)$$

que satisface la regla de ***Leibnitz*** $\nabla(f.s) = df \otimes s + f.\nabla s$ *donde* $f \in \Omega^0(M)$, $s \in \Omega^0(\xi)$ *y d es la derivada exterior exterior.*

En el caso que ξ sea un fibrado vectorial complejo el espacio de las secciones en ξ es un $\mathbb{C}-$ espacio vectorial[1]. Entonces, en la definición anterior se exigirá que ∇ sea una aplicación $\mathbb{C}-$ lineal y la denotaremos por $\nabla_{\mathbb{C}}$.

Sea τ el fibrado tangente sobre M; por lo tanto las 1-formas diferenciales en M es el espacio de las secciones del fibrado τ^*(dual de τ) esto es $\Omega^1(M) = \Omega^0(\tau^*)$. Usando los isomorfismo del Teorema(2.4)-(i-ii) tenemos

$$\Omega^1(M) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi) \cong \Omega^0(\mathrm{Hom}(\tau, \xi)) \cong \mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\tau), \Omega^0(\xi)). \qquad (*)$$

[1]El espacio de secciones sobre un fibrado vectorial complejo será denotado por $\Omega^0(\xi, \mathbb{C})$.

En la Definición(3.1) podemos cambiar el rango de ∇ por cualquiera de los isomorfismos dados en $(*)$ según convenga.
Sea X un campo vectorial, que es una sección del fibrado tangente τ es decir $X \in \Omega^0(\tau)$, ésta induce una aplicación

$$\begin{array}{rcccl} Ev_X & : & \Omega^1(M) & \to & \Omega^0(M) \\ & & df & \to & d_X(f) = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \text{ donde } X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}; \end{array}$$

así Ev_X es $\Omega^0(M)-$lineal. Por otro lado tomando la identidad en $\Omega^0(\xi)$ y por la propiedad universal del producto tensorial estas inducen una única aplicación $\Omega^0(M)-$lineal, que denotaremos de la misma forma y está dada por:

$$\begin{array}{rcccl} Ev_X := Ev_X \otimes id & : & \Omega^1(M) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi) & \to & \Omega^0(\xi) \\ & & df \otimes s & \to & Ev_X(df \otimes s) = d_X(f)s. \end{array}$$

Haciendo la composición $\nabla_X = Ev_X \circ \nabla : \Omega^0(\xi) \to \Omega^0(\xi)$ entonces obtenemos una aplicación $\mathbb{R}-$lineal. aplicamos $(f.s)$ y usando la Definición(3.1) se tiene

$$\nabla_X(f.s) = Ev_X \circ \nabla(f.s) = d_X(f)s + f\nabla_X(s),$$

donde $f \in \Omega^0(M)$ y $d_X(f)$ indica la derivada direccional de f en la dirección del campo X. Por lo tanto, una conexión nos permite tomar derivadas direccionales de las secciones.
Por otro lado, si cambiamos el rango de ∇ por $\mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\tau), \Omega^0(\xi))$ y fijando $s \in \Omega^0(\xi)$. Entonces, la aplicación.

$$\begin{array}{rcccl} \nabla s & : & \Omega^0(\tau) & \to & \Omega^0(\xi) \\ & & X & \to & \nabla_X(s), \text{ es } \Omega^0(M) - \text{lineal en } X; \end{array}$$

en consecuencia, se tiene $\nabla_{gX+hY}(s) = g\nabla_X(s) + h\nabla_Y(s)$ donde $g, h \in \Omega^0(M)$ y X, Y son campos vectoriales.
Sea U una vecindad de p y para $v \in T_pM$ podemos definir $\nabla_v(s) = \nabla_X(s(p)) \in \xi_p$ entonces tomando $X_p \in T_pM$ se tiene.

$$\nabla_{X_p}(s) = (\nabla s)(X_p) \qquad (1)$$

por lo tanto (1) verifica las siguientes propiedades.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla_{X_p}(f.s) & = & d_{X_p}(f)s(p) + f(p)\nabla_{X_p}(s) \\ \nabla_{aX_p+bY_p}(s) & = & a\nabla_{X_p}(s) + b\nabla_{Y_p}(s), \end{array} \right. \qquad (2)$$

donde X_p, Y_p son vectores el espacio tangente T_pM y a, b números reales. Así (2) define una conexión.

Ejemplo 3.1. *Considere M una variedad diferenciable de dimensión n, en $\mathbb{R}^{n+k}$, su fibrado tangente es $\tau = \{(p,v) \in M \times \mathbb{R}^{n+k} / v \in T_pM\}$; sea $s : M \to \tau$ una sección donde $s(p) \in T_pM$. Definimos una conexión en el fibrado tangente de la siguiente forma*

$$\nabla_{X_p}(s) = j_p(d_{X_p}(s)) \in T_pM, \qquad (3)$$

donde, X_p y $ds_p : T_pM \to \mathbb{R}^{n+k}$ usando una notación adecuada escribimos $ds_p(X_p) = d_{X_p}(s) \in \mathbb{R}^{n+k} = T_pM \oplus N_pM$, y $j_p : T_pM \oplus N_pM \to T_pM$ es la proyección ortogonal. Podemos probar que (3) satisface las propiedades de (2). Veamos una de ellas

$$\begin{aligned} \nabla_{X_p}(f.s) &= j_p(d_{X_p}(f.s)) = j_p(d_{X_p}(f).s(p) + f(p)d_{X_p}(s)) \\ &= j_p(d_{X_p}(f).s(p)) + j_p(f(p)d_{X_p}(s)) \\ &= d_{X_p}(f).s(p) + f(p)\nabla_{X_p}(s). \end{aligned}$$

Luego (3) es una conexión.

Como consecuencia de la regla de Leibnitz tenemos que el operador conexión ∇ es local. Ahora veamos la representación local de éste operador.
Sea p en M y U una vecindad de p donde ξ se trivializa, por lo tanto, podemos escoger un referencial en U como $\{e_1, ..., e_k\} \subset \Omega^0(\xi)$ tal que $\{e_1(p), ..., e_k(p)\}$ es una base de ξ_p para todo $p \in U$. Entonces los elementos de $\Omega^1(U) \otimes_{\Omega^0(U)} \Omega^0(\xi|_U)$ se escriben de forma única de la siguiente manera $\sum A_i \otimes e_i$, para algunos $A_i \in \Omega^1(U)$.
Si tenemos que ∇ es una conexión en ξ, entonces podemos escribir

$$\nabla(e_j) = \sum_{j=1}^{k} A_{ij} \otimes e_i \qquad (4),$$

para algunas 1-formas $A_{ij} \in \Omega^1(U)$, esta matriz de 1-formas es de orden $k \times k$ llamada la forma de conexión respecto a $e = (e_1, ..., e_k)$, que denotaremos por A.
Por otro lado, dada la matriz A de 1-formas en U y un referencial en donde ξ se trivializa que definen una conexión en $\Omega^0(\xi\ |_U)$ como en (4); si $s \in \Omega^0(\xi\ |_U)$ se puede escribir de la forma $s = \sum_{i=1}^{k} s_i e_i$ donde $s_i \in \Omega^0(U)$. Entonces $\nabla(s) = \nabla(\sum s_i e_i) = \sum ds_i \otimes e_i + \sum s_i \nabla(e_i)$ usando (4) se tiene

$$\nabla(s) = \sum ds_i \otimes e_i + \sum s_i \sum A_{ij} \otimes e_i = \sum (ds_j + s_i A_{ij}) \otimes e_j.$$

Usando la matriz A de forma de conexión podemos escribir

$$\nabla(s_1, ..., s_k) = (ds_1, ..., ds_k) + (s_1, ..., s_k)A. \qquad (5)$$

Ejemplo 3.2. *Sea M una variedad diferenciable compacta; y ξ un fibrado vectorial sobre M por el Teorema(2.1) se tiene que $\xi \oplus \eta \cong \epsilon^{n+k}$ donde η es el fibrado complementar de ξ. Dada la inclusión $i : \xi \to \epsilon^{n+k}$ y la proyección $j : \epsilon^{n+k} \to \xi$ éstas inducen* *las respectivas aplicaciones*

$$i_* : \Omega^0(\xi) \to \Omega^0(\epsilon^{n+k}) \text{ y } j_* : \Omega^0(\epsilon^{n+k}) \to \Omega^0(\xi).$$

Ahora damos una conexión $\nabla_0 : \Omega^0(\epsilon^{n+k}) \to \Omega^1(M) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\epsilon^{n+k})$ *en el fibrado trivial* ϵ^{n+k} *como en (5) esto en posible debido que existen referenciales globales. Ahora hacemos la composición*

$$\nabla = (id \otimes j_*) \circ \nabla_0 \circ i_* : \Omega^0(\xi) \to \Omega^1(M) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi)$$

se tiene que $\nabla(s) = (id \otimes j_*)(\nabla_0(i_* s))$,*donde* $i_*(s) = s \circ i$, *define una conexión en* ξ.

Observe que

$$\Omega^0(\epsilon^{n+k}) \cong \underbrace{\Omega^0(M) \oplus .... \oplus \Omega^0(M)}_{(n+k)-veces},$$

entonces podemos expresar

$$\Omega^1(M) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\epsilon^{n+k}) \cong \underbrace{\Omega^1(M) \oplus ..... \oplus \Omega^1(M)}_{(n+k)-veces}$$

por lo tanto la conexión ∇_0 puede expresarse de la forma $\nabla_0 = \underbrace{d \oplus .... \oplus d}_{(n+k)-veces}$ donde d es la derivada exterior.

Como se mencionó que una conexión es un operador local, esto quiere decir que para cada abierto de M donde ξ se trivializa siempre tenemos una conexión, la idea es obtener una conexión global la proposición que sigue da tal resultado.

Proposición 3.1. *Sea* ξ *un fibrado vectorial sobre una variedad diferenciable* M, *entonces* ξ *admite una conexión.*

Demostración. Considere $\{U_i\}$ una cobertura abierta localmente finita de M, donde éstos abiertos son trivializantes, es decir en cada abierto U_i el fibrado ξ se trivializa, esto es existe un difeomorfismo $h_i : U_i \times V \to \pi_\xi^{-1}(U_i)$ tal que $\pi_\xi \circ h_i = pr_1$; para cada abierto U_i tenemos una conexión ∇_i en $\xi|_{U_i}$ como es (5), tomamos la partición de la unidad $\{\alpha_i\}$ subordinada a la cobertura abierta, entonces definimos el operador $\mathbb{R}$-lineal

$$\nabla(s) = \sum_i \alpha_i . \nabla_i(s),$$

éste satisface la regla de Leibnitz, por lo tanto define una conexión en ξ. □

Observación 3.1. *Sea* $\xi = (E, M, \pi_\xi)$ *un fibrado vectorial sobre* M, *con la propiedad de que para todo* $\zeta \in E$ *y cada* $\alpha : I \to M$ *con* $\alpha(0) = \pi_\xi(\zeta)$, *existe un único* $P_\alpha^\zeta : I \to E$ *tal que* $P_\alpha^\zeta(0) = \zeta$, *llamado* ***transporte paralelo*** *a lo largo de* α, *el cual permite conectar las fibras. Cada* P_α^ζ *induce un isomorfismo entre* $\xi_{\alpha(0)}$ *y* $\xi_{\alpha(1)}$ *esto es* $\zeta \to P_\alpha^\zeta(1)$

Sea ∇ una conexión en ξ y $\alpha : I \to M$ una curva diferenciable, $w(t)$ una sección a lo largo de α esto es $w(t) \in \Omega^0(\xi_{\alpha(t)})$, donde $w(t) = w(\alpha(t))$ para algún $w \in \Omega^0(\xi)$. Entonces, existe un único operador llamado **Derivada Covariante**, denotada por $\frac{Dw}{dt}$ que significa la derivada covariante de la sección w a lo largo de α, y satisface las siguientes propiedades

i. $\frac{D(w_1+w_2)}{dt} = \frac{Dw_1}{dt} + \frac{Dw_2}{dt}$.

ii. $\frac{D(f.w)}{dt} = \frac{df}{dt}w + f\frac{Dw}{dt}$.

iii. $\frac{Dw}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}w$.

Veamos la representación local de la derivada covariante, considere U abierto de M(Variedad diferenciable de dimensión n), donde ξ se trivializa, y sea $\alpha(t) \subset U$, elijamos (U, x) una carta local de M, en estas cartas locales podemos tomar una base $\frac{\partial}{\partial x_i}$, por otro lado $e = \{e_1, ..., e_k\}$ es un referencial de $\Omega^0(\xi|_U)$, podemos escribir $\alpha(t) = x^{-1}(u_1(t), ..., u_n(t))$, donde $u_i(t)$ son funciones diferenciables. Por lo tanto, escribimos $w(t) = \sum_{i=1}^{k} w_i(t)e_i(t)$ con $e_i(t) = e_i(\alpha(t))$.
Luego tenemos

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{D}{dt}(\sum_{i=1}^{k} w_i(t)e_i(t)) = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{dw_i}{dt}e_i(t) + w_i(t)\nabla_{\alpha'(t)}(e_i)\right) \qquad (6)$$

como $\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{du_i}{dt}.\partial_i$, además $\nabla_{\partial_j}(e_i)$ es una sección en $\Omega^0(\xi|_U)$ entonces, lo podemos escribir como combinación lineal usando la base e, $\nabla_{\partial_j}(e_i) = \sum_{v=1}^{k} \Gamma_{ji}^{v} e_v$; luego se tiene

$$\nabla_{\alpha'(t)}(e_i) = \nabla e_i(\sum_{i=1}^{n} \frac{du_i}{dt}.\partial_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{du_j}{dt}\nabla_{\partial_j}(e_i) = \sum_{j,v} \frac{du_j}{dt}\Gamma_{ji}^{v}e_v \qquad (7)$$

remplazando (7) en (8) obtenemos

$$\frac{Dw}{dt} = \sum_{l=1}^{k}\left(\frac{dw_l}{dt} + \sum_{i,j}\frac{du_j}{dt}\Gamma_{ji}^{l}w_i\right)e_l.$$

Decimos que una sección w a lo largo de $\alpha(t)$ es paralela si $\frac{Dw}{dt} = 0$.

Sea ξ un fibrado vectorial, introducimos la siguiente notación:

$$\Omega^i(\xi) = \Omega^i(M) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi) \qquad (8)$$

donde, $\Omega^i(M)$ es el espacio de $i-$formas en M.
Ahora **extenderemos** el operador conexión ∇, a un operador d^∇ :

$$d^\nabla : \Omega^i(\xi) \to \Omega^{i+1}(\xi) \qquad (9)$$

que satisface la regla de Leibnitz $d^{\nabla}(w \otimes s) = dw \otimes s + w \otimes d^{\nabla}(s)$.

Sea ξ y η fibrados vectoriales sobre M, luego podemos definir un producto $\Omega^0(M)$-bilineal de la forma

$$\begin{array}{rcccl} \wedge & : & \Omega^i(\eta) \otimes \Omega^j(\xi) & \rightarrow & \Omega^{i+j}(\eta \otimes \xi) \\ & & ((w \otimes t) \otimes (\tau \otimes s)) & \rightarrow & (w \otimes t) \wedge (\tau \otimes s) = w \wedge \tau \otimes (s \otimes t), \end{array} \quad (10)$$

donde $w \in \Omega^i(M)$, $\tau \in \Omega^j(M)$, $s \in \Omega^0(\xi)$, $t \in \Omega^0(\eta)$ y $w \wedge \tau$ es el producto exterior de formas.
Sea ϵ^1 el fibrado trivial de dimensión 1, sabemos que $\Omega^i(\epsilon^1) = \Omega^i(M)$. Supongamos que en (10) remplazamos $\eta = \epsilon^1$. Entonces éste operador puede expresarse de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcccl} \wedge & : & \Omega^i(M) \otimes \Omega^j(\xi) & \rightarrow & \Omega^{i+j}(M \otimes \xi) \\ & & (w_1 \otimes (w_2 \otimes s)) & \rightarrow & w_1 \wedge w_2 \otimes s, \end{array} \quad (11)$$

y en el caso que $i = 0$, se tiene $w \wedge s = w \otimes s$. Usando estos comentarios previos probamos el siguiente lema.

Lema 3.1. *Sea ρ_1, ρ_2 y ρ_3 elementos de $\Omega^i(\xi_1), \Omega^j(\xi_2)$ y $\Omega^k(\xi_3)$ respectivamente. Entonces el producto definido en (10) satisface las siguientes propiedades*

i. $(\rho_1 \wedge \rho_2) \wedge \rho_3 = \rho_1 \wedge (\rho_2 \wedge \rho_3)$.

ii. $1 \wedge \rho = \rho$, *donde 1 es la unidad del anillo* $\Omega^0(M)$.

Demostración. Para (i) tomemos $\rho_1 = w_1 \otimes s_1$, $\rho_2 = w_2 \otimes s_2$ y $\rho_3 = w_3 \otimes s_3$

$$(\rho_1 \wedge \rho_2) \wedge \rho_3 = (w_1 \wedge w_2 \otimes s_1 \otimes s_2) \wedge (w_3 \otimes s_3) = w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3) \otimes s_1 \otimes (s_2 \otimes s_3) = \rho_1 \wedge (\rho_2 \wedge \rho_3).$$

Para la parte (ii) $1 \wedge \rho = 1 \otimes \rho = \rho$ □

Éste lema se torna más importante en el caso que $\xi_1 = \epsilon^1$, $\xi_2 = \epsilon^1$ entonces así $\Omega^i(\xi_1) = \Omega^i(M))$ y $\Omega^j(\xi_2) = \Omega^j(M))$. Entonces la propiedad (i) del lema se escribe $(w \wedge \tau) \wedge \rho_3 = w \wedge (\tau \wedge \rho_3)$, para $w \in \Omega^i(M), \tau \in \Omega^j(M)$.

Aprovechando el operador ¨$\wedge$¨ definido y la conexión ∇ en ξ. La regla de Leibnitz para d^{∇}, puede escribirse de la siguiente forma

$$d^{\nabla}(\tau \otimes s) = d\tau \wedge s + (-1)^j \tau \wedge \nabla(s) \quad (12)$$

donde $\tau \in \Omega^j(M)$ y $s \in \Omega^0(\xi)$. Ahora demos el siguiente lema.

Lema 3.2. *Para cada ∇, existe un único operador $\mathbb{R}-$lineal, $d^{\nabla} : \Omega^j(\xi) \rightarrow \Omega^{j+1}(\xi)$, que satisface:*

i. $d^{\nabla} = \nabla$, *cuando* $j = 0$

ii. $d^{\nabla}(w \wedge t) = dw \wedge t + (-1)^i w \wedge d^{\nabla}(t)$, *cuando* $w \in \Omega^i(M)$, $t \in \Omega^j(\xi)$.

Demostración. Para la existencia es suficiente con (12), pues por la Proposición(3.1) siempre existe conexión, y para la unicidad es suficiente tomar dos operadores que satisface (i) y (ii) se prueba que se trata del mismo operador.
Para la parte (i) hacer $j = 0$ en (12). Y para la parte (ii) lo obtenemos de:

$$\begin{aligned}
d^{\nabla}(w \wedge t) = d^{\nabla}(w \wedge (\tau \otimes s)) &= d^{\nabla}((w \wedge \tau) \otimes s), \text{ usando 12 tenemos} \\
&= d(w \wedge \tau) \otimes s + (-1)^{i+j}(w \wedge \tau) \wedge \nabla(s) \\
&= (dw \wedge \tau) + (-1)^i w \wedge d\tau) \otimes s + (-1)^{i+j}(w \wedge \tau) \wedge \nabla(s) \\
&= dw \wedge \tau) \otimes s + (-1)^i w \wedge d\tau \otimes s + (-1)^{i+j}(w \wedge \tau) \wedge \nabla(s) \\
&= dw \wedge (\tau \otimes s) + (-1)^i w \wedge d^{\nabla}(\tau \otimes s) \\
&= dw \wedge t + (-1)^i w \wedge d^{\nabla} t.
\end{aligned}$$

□

Ahora tomemos una secuencia de $\Omega^0(M)-$módulos

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\xi) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(\xi) \xrightarrow{d^{\nabla}} \Omega^2(\xi) \longrightarrow \cdots$$

note que en el caso que ξ sea el fibrado trivial de dimensión 1 es decir ϵ^1, se obtiene el complejo de Rham

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \longrightarrow \cdots,$$

donde la conexión coincide con el diferencial exterior d además se cumple que $d \circ d = 0$.

3.2. Curvatura

En general cuando ξ, es cualquier fibrado vectorial no siempre la composición $d^{\nabla} \circ \nabla$ es nula, ésta composición nos da una aplicación que la denotaremos por:

$$F^{\nabla} = d^{\nabla} \circ \nabla : \Omega^0(\xi) \to \Omega^2(\xi)$$

Proposición 3.2. $F^{\nabla} = d^{\nabla} \circ \nabla$, *es* $\Omega^0(M)$*-lineal.*

Demostración. Tomemos dos secciones s_1, s_2 en $\Omega^0(\xi)$ se verifica inmediatamente que $F^{\nabla}(s_1 + s_2) = F^{\nabla}(s_1) + F^{\nabla}(s_2)$. Veamos la otra propiedad de la linealidad, tome $f \in \Omega^0(M)$ y $s \in \Omega^0(\xi)$ aplicando en F^{∇} tenemos

$$\begin{aligned}
F^{\nabla}(f.s) &= d^{\nabla}(df \otimes s + f \otimes \nabla(s)) \\
&= d^{\nabla}(df \otimes s) + d^{\nabla}(f \otimes \nabla(s)) \\
&= d(df) \wedge s + (-1)^1 df \wedge \nabla(s) + df \wedge \nabla(s) + (-1)^0 f \wedge d^{\nabla}(\nabla(s)) \\
&= f.d^{\nabla}(\nabla(s)) = f.F^{\nabla}(s).
\end{aligned}$$

□

Ésta proposición muestra que $F^\nabla \in \mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\xi), \Omega^2(\xi))$. Usando los isomorfismo del Teorema(2.4) tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\xi), \Omega^2(\xi)) &\cong \mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\xi), \Omega^0(\xi) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^2(M)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\xi), \Omega^0(\xi)) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^2(M) \\
&\cong \Omega^0(\mathrm{Hom}(\xi, \xi)) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^2(M) \\
&\cong \Omega^2(M) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\mathrm{Hom}(\xi, \xi)) \\
&\cong \Omega^2(\mathrm{Hom}(\xi, \xi))
\end{aligned}$$

por lo tanto, $F^\nabla \in \Omega^2(\mathrm{Hom}(\xi, \xi))$ con lo cual a F^∇ la llamaremos una 2-forma.

Definición 3.2. *Una 2-forma $F^\nabla \in \Omega^2(\mathrm{Hom}(\xi, \xi))$ es llamada forma de **Curvatura** del fibrado vectorial (ξ, ∇).*

Una conexión ∇, en el fibrado ξ, es llamada **conexión plana** si y sólo si $F^\nabla = 0$. Con lo cual todo fibrado trivial tiene conexión plana. También podemos decir que la curvatura mide cuando una conexión deja de ser plana.

Considere dos campos vectoriales X, Y éste par induce una aplicación $\Omega^0(M)$-lineal $Ev_{X,Y} : \Omega^2(M) \to \Omega^0(M)$, dada $w \to w(X, Y)$, usando la propiedad universal del producto tensorial esta induce una única aplicación $\Omega^0(M)$-lineal

$$Ev_{X,Y} := Ev_{X,Y} \otimes id : \Omega^2(M) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\mathrm{Hom}(\xi, \xi)) \to \Omega^0(M) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\mathrm{Hom}(\xi, \xi))$$

$$Ev_{X,Y} : \Omega^2(\mathrm{Hom}(\xi, \xi)) \to \Omega^0(\mathrm{Hom}(\xi, \xi)), \text{dada por } F^\nabla \to F^\nabla_{X,Y}$$

donde $F^\nabla_{X,Y}(p) : \xi_p \to \xi_p$, puede ser determinada por los valores $X_p, Y_p \in T_pM$.

Ahora veamos la representación local de $F^\nabla = d^\nabla \circ \nabla$, donde $\nabla(e_i) = \sum_j A_{ij} \otimes e_j$ según (4)

$$\begin{aligned}
d^\nabla(\nabla(e_i)) = d^\nabla(\sum_j A_{ij} \otimes e_j) &= \sum_j d^\nabla(A_{ij} \otimes e_j) \\
&= \sum_j (dA_{ij} \otimes e_j) - \sum_j (A_{ij} \wedge \nabla(e_j)) \\
&= \sum_j (dA_{ij} \otimes e_j) - \sum_j (A_{ij} \wedge \sum_v A_{jv} \otimes e_v \\
&= \sum_v (dA_{iv} \otimes e_v - (\sum_j A_{ij} \wedge A_{jv}) \otimes e_v).
\end{aligned}$$

Entonces, $F^\nabla(e_i) = \sum_v (dA - A \wedge A)_{iv} \otimes e_v$, como F^∇ es un tensor con lo cual si se quiere determinar $F^\nabla_{X_p, Y_p}$, bastará evaluar el referencial en el punto p, y $(dA - A \wedge A)_{X_p, Y_p}$.

Por lo tanto podemos expresar la curvatura de la siguiente manera

$$F^{\nabla} = dA - A \wedge A. \qquad (13)$$

Considere una aplicación $\Omega^0(M)-$bilineal $\wedge : \Omega^i(\xi) \times \mathrm{Hom}(\Omega^0(\xi), \Omega^2(\xi)) \to \Omega^{i+2}(\xi)$ dada por $\wedge((w \otimes s), G) \to w \wedge G(s)$. Con esta definición podemos presentar el siguiente lema.

Lema 3.3. *Sea $w \otimes s \in \Omega^i(\xi)$, y $F^{\nabla}-$forma de curvatura, Entonces, la composición*

$$d^{\nabla} \circ d^{\nabla} : \Omega^i(\xi) \to \Omega^{i+2}(\xi), \text{ viene dada por } w \wedge F^{\nabla}.$$

Demostración. Como $w \otimes s \in \Omega^i(M)_{\Omega^0(M)}\Omega^0(\xi)$, podemos aplicar el Lema(3.2)

$$\begin{aligned} d^{\nabla}(d^{\nabla}(w \otimes s)) &= d^{\nabla}(dw \otimes s + (-1)^i w \wedge \nabla(s)) \\ &= d^{\nabla}(dw \otimes s) + (-1)^i d^{\nabla}(w \wedge \nabla(s)) \\ &= d(dw) \otimes s + (-1)^{i+1} dw \wedge \nabla(s) + (-1)^i (dw \wedge \nabla(s) + \\ &\quad (-1)^i w \wedge d^{\nabla}(\nabla(s))) \\ &= (-1)^{2i} w \wedge F^{\nabla}(s) \end{aligned}$$

así se obtiene la igualdad deseada. □

Ejemplo 3.3. *En el Ejemplo(2.2) hemos construido el fibrado vectorial canónico de líneas H_n, en éste ejemplo construiremos una conexión y curvatura para el caso $n = 1$. Sea $H = S^3 \times_{S^1} \mathbb{C}$ el fibrado vectorial sobre $\mathbb{CP}^1$ donde su espacio total es $E(H) = \{(L, u) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2 : u \in L\}$ y L es una recta que pasa por el origen, H puede ser incluido en el fibrado trivial $\epsilon^2 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2$, mediante la aplicación de fibrados*

$$i : S^3 \times_{S^1} \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2 \text{ dada por } [z_1, z_2, u] \to ([z_1, z_2], uz_1, uz_2)$$

se puede ver que éste es un homomorfismo de fibrados vectoriales. Por el Teorema(2.1) existe el complementar $H^{\perp}$ de H donde su espacio total esta dada por

$$E(H^{\perp}) = \{(L, v) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2 : v \in L^{\perp}\}$$

tal que $H \oplus H^{\perp} \cong \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2$. Ahora definimos la proyección $j : \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2 \to E(H)$ dada por $j(L, u_1, u_2) = (L, u)$ donde u es la proyección ortogonal de (u_1, u_2) en la recta L. En el caso que $L = [z_1, z_2]$ con $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ entonces, $j(L, u_1, u_2) = (u_1, u_2)P_L$ donde P_L es la matriz de 2×2 dada por:

$$P_L = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 z_1 & \bar{z}_1 z_2 \\ \bar{z}_2 z_1 & \bar{z}_2 z_2 \end{pmatrix}$$

en realidad si L contiene al vector unitario $z = (z_1, z_2)$ entonces, la proyección ortogonal ¨j¨ queda expresada de la forma

$$j_L(u_1, u_2) = (\bar{z}_1 u_1 + \bar{z}_2 u_2)(z_1, z_2).$$

Se usa la conexión $\nabla_0 = (d, d)$ *en el fibrado trivial* $\epsilon^2 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2$*, para definir una conexión en el fibrado* H *sobre* $\mathbb{CP}^1$*; hacemos la composición*

$$\Omega^0(H) \xrightarrow{i_*} \Omega^0(\epsilon^2) \xrightarrow{\nabla_0} \Omega^1(\epsilon^2) \xrightarrow{j_*} \Omega^1(H)$$

por lo tanto, $\nabla = j_* \circ \nabla_0 \circ i_*$ *define una conexión en el fibrado* H*, ahora hallaremos la matriz* A *de forma de conexión como en (4) para eso considere una parametrización local de* $\mathbb{CP}^1$

$$g : \mathbb{R}^2 \to U_1 \subset \mathbb{CP}^1; g(x, y) = [1, z]$$

donde $z = x + iy$ *y considere una sección* $e : U_1 \to H$ *definida en* U_1*, mediante la aplicación ¨i¨ esta sección puede incluirse en el fibrado trivial* ϵ^2 *de la forma*

$$e(g(x, y)) = (g(x, y), (1, z)) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2,$$

como en el fibrado trivial tenemos una conexión $\nabla_0 = (d, d)$ *por lo tanto*

$$\nabla_0(e) = (g(x, y), (0, dz)), \ \textit{donde } dz = dx + idy$$

En el caso que $L = [1, z]$*, la matriz de la proyección, se expresa de la forma:*

$$P_{[1,z]} = \frac{1}{1 + |z|^2} \begin{pmatrix} 1 & z \\ \bar{z} & |z|^2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \nabla(e) = j_* \circ \nabla_0(i_*(e)) &= j_* \circ \nabla_0(g(x, y), (1, z)) = j_*(g(x, y), (0, dz)) \\ &= (g(x, y), (0, dz) \cdot P_{[1,z]}) \\ &= (g(x, y), \frac{1}{1 + |z|^2}(\bar{z}dz, |z|^2 dz)) \\ &= \frac{\bar{z}}{1 + |z|^2} dz \otimes (g(x, y), (1, z)) = A_{g(x,y)} \otimes e \end{aligned}$$

entonces, la matriz de forma de conexión en coordenadas locales es $A_{g(x,y)} = \frac{\bar{z}}{1+|z|^2} dz$ *con* $z(x, y) = x + iy$.

Usaremos $F^\nabla = dA_{g(x,y)} - A_{g(x,y)} \wedge A_{g(x,y)}$ *como en (13), para determinar la 2-forma de curvatura.*

Podemos observar que $A \wedge A = 0$ *puesto que* $dz \wedge dz = 0$ *esto puede calcularse usando propiedades de la derivada exterior de formas diferenciales*

$$dz \wedge dz = (dx + idy) \wedge (dx + idy) = 0$$

y también

$$d\bar{z} \wedge dz = (dx - idy) \wedge (dx + idy) = 2idx \wedge dy$$

ahora calculamos

$$dA_{g(x,y)} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(\frac{\bar{z}}{1+|z|^2}\Big)d\bar{z}\wedge dz = \frac{2i}{(1+|z|^2)^2}dx\wedge dy$$

por lo tanto, la 2-forma de curvatura expresada en coordenadas locales en el fibrado H viene dada por:

$$F^{\nabla}_{g(x,y)} = \frac{2i}{(1+|z|^2)^2}dx\wedge dy.$$

3.2.1. La Conexión y Curvatura en Algunos Fibrados

Sea ξ,η, dos fibrados vectoriales sobre M, y ∇_ξ,∇_η una conexión en ξ,η respectivamente; y considere $f: M'\to M$, una aplicación diferenciable. Usando las conexiones que tenemos, se dará una conexión en los fibrados $f^*\xi$, ξ^*, $\mathrm{Hom}(\xi,\eta)$ y $\xi\otimes\eta$.

La aplicación diferenciable f, induce una aplicación $\Omega^0(M)-$lineal definida de la siguiente forma $f^*:\Omega^0(\xi)\to\Omega^0(f^*\xi)$, $s\to s\circ f$. De la misma forma f induce la aplicación $\Omega^0(M)-$lineal $f^*:\Omega^i(M)\to\Omega^i(M')$, dada por $w\to f^*(w)$.
Para tales objetivos empezamos dando el siguiente lema.

Lema 3.4. *Sea $f: M'\to M$, una aplicación diferenciable y ∇_ξ una conexión en ξ, entonces existe una única conexión $f^*(\nabla_\xi)$ en $f^*\xi$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(\xi) \arrow[r, "\nabla_\xi"] \arrow[d, "f^*"'] & \Omega^1(\xi) \arrow[d, "f^*"'] \\
\Omega^0(f^*\xi) \arrow[r, "f^*(\nabla_\xi)"] & \Omega^1(f^*\xi)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Tenemos que demostrar la existencia de una aplicación $\mathbb{R}-$lineal

$$f^*(\nabla_\xi):\Omega^0(f^*\xi)\to\Omega^1(f^*\xi)$$

que satisface la ragla de Leibnitz, además que sea única, sabiendo que el diagrama conmuta. Primero veamos la existencia para eso establecemos un isomorfismo de $\Omega^0(M)-$módulos de la forma:

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^1(M')\otimes_{\Omega^0(M)}\Omega^0(\xi) & \to & \Omega^1(f^*\xi)\\
\phi'\otimes s & \to & \phi' f^*(s)
\end{array}$$

efectivamente éste es un isomorfismo. Usando éste isomorfismo se prueba que

$$\Omega^1(f^*\xi) = \Omega^1(M')\otimes_{\Omega^0(M)}\Omega^0(f^*\xi)\cong\Omega^1(M')\otimes_{\Omega^0(M)}\Omega^0(\xi)$$

por otro lado, el pull-back de 1-formas induce una aplicación $\Omega^0(M)-$lineal

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0(M') \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^1(M) & \to & \Omega^1(M') \\ \phi \otimes w & \to & \phi f^*(w) \end{array}$$

ésta aplicación junto con la identidad en $\Omega^0(\xi)$, inducen una única aplicación $\Omega^0(M)-$lineal

$$\rho : \Omega^0(M') \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^1(\xi) \to \Omega^1(M') \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi)$$

note que el rango de ρ es isomorfo a $\Omega^1(f^*\xi)$.
De la misma forma la aplicación ∇_ξ es $\mathbb{R}$-lineal y junto con la identidad en $\Omega^0(M')$ inducen una única aplicación $1 \otimes \nabla_\xi : \Omega^0(M') \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi) \to \Omega^0(M') \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^1(\xi)$, $\mathbb{R}-$lineal. Entonces

$$\rho \circ (1 \otimes \nabla_\xi) : \Omega^0(M') \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi) \to \Omega^1(M') \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi)$$

es una aplicación $\mathbb{R}-$lineal. El diferencial exterior d junto con la identidad en $\Omega^0(\xi)$ inducen una única aplicación $\mathbb{R}-$lineal

$$d \otimes 1 : \Omega^0(M') \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi) \to \Omega^1(M') \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi),$$

por lo tanto existe la aplicación $f^*(\nabla_\xi) : \Omega^0(f^*\xi) \to \Omega^1(f^*\xi)$, $\mathbb{R}-$lineal dada por $f^*(\nabla_\xi) := \rho \circ (1 \otimes \nabla_\xi) + d \otimes 1$. Para ver que ésta define una conexión veamos la regla de Leibnitz.

$$f^*(\nabla_\xi)(f(f' \otimes s)) := \rho \circ (1 \otimes \nabla_\xi)(f' \otimes fs) + d \otimes 1(f' \otimes fs) := df \otimes (f' \otimes s) + f.f^*(\nabla_\xi)(f' \otimes s).$$

Para la unicidad suponga que existe otro $g^*(\nabla_\xi)$ tal que $f^* \circ \nabla_\xi = g^*(\nabla_\xi) \circ f^*$ entonces, $g^*(\nabla_\xi) \circ f^* = f^*(\nabla_\xi) \circ f^*$ por lo tanto, $g^*(\nabla_\xi) = f^*(\nabla_\xi)$.

□

Si $e = \{e_1, ..., e_n\}$ es un referencial en $\xi|_U$[2] y $A(e)$ es la matriz de forma de conexión para ∇_ξ con respecto al referencial e, entonces $f^*(A(e))$ es la matriz de forma de conexión para $f^*(\nabla_\xi)$, con respecto al referencial $f^*(e) = \{e_1 \circ f, ..., e_n \circ f\}$ en $f^*\xi|_{f^{-1}(U)}$.

Veamos la forma de curvatura $F^{f^*(\nabla_\xi)}$ en el fibrado $f^*\xi$. Sabiendo que F^{∇_ξ} es la forma de curvatura en el fibrado ∇_ξ; en el Lema(3.4) obtendremos otro diagrama conmutativo si cambiamos ∇_ξ por $d^{\nabla_\xi} : \Omega^1(\xi) \to \Omega^2(\xi)$ y formamos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega^0(\xi) \arrow[r, "F^{\nabla_\xi}"] \arrow[d, "f^*"'] & \Omega^2(\xi) \arrow[d, "f^*"'] \\ \Omega^0(f^*\xi) \arrow[r, "F^{f^*(\nabla_\xi)}"] & \Omega^2(f^*\xi). \end{tikzcd}$$

[2]El fibrado ξ tiene base M usamos la notación $\xi|_U$ para denotar que el fibrado esta restringido a un abierto U de M.

Ahora sea $\mathrm{Hom}(\xi,\xi)$ un fibrado vectorial, el fibrado inducido vía la aplicación f es $f^*\mathrm{Hom}(\xi,\xi)$ que es isomorfo al fibrado $\mathrm{Hom}(f^*\xi, f^*\xi)$, por lo tanto,

$$\Omega^2(\mathrm{Hom}(f^*\xi, f^*\xi)) = f^*\Omega^2(\mathrm{Hom}(\xi,\xi)), \text{ así } F^{f^*(\nabla_\xi)} = f^*(F^{\nabla_\xi}).$$

En seguida definiremos una conexión en el producto tensorial $\xi\otimes\eta$. En virtud al Teorema(2.4)-(iii), $\Omega^0(\xi\otimes\eta) \cong \Omega^0(\xi)\otimes_{\Omega^0(M)}\Omega^0(\eta)$ y a la definición del producto $\Omega^0(M)-$bilineal en (10) definimos

$$\nabla_{\xi\otimes\eta}(s\otimes t) = \nabla_\xi(s)\wedge t + s\wedge\nabla_\eta(t) \qquad (14)$$

ésta aplicación es $\mathbb{R}-$lineal y satisface la regla de Leibnitz, por lo tanto define una conexión en $\xi\otimes\eta$.
Usando (12) y el Lema(3.2) $\nabla_{\xi\otimes\eta}$ puede extender a $d^\nabla : \Omega^i(\xi\otimes\eta)\to\Omega^{i+1}(\xi\otimes\eta)$ y puede escribirse de la forma:

$$d^\nabla(s\otimes t) = d^\nabla s\otimes t + (-1)^i s\otimes d^\nabla t,$$

donde $s\in\Omega^i(\xi)$ y $t\in\Omega^j(\eta)$ y d^∇ corresponde a $\nabla = \nabla_\xi,\ \nabla_\eta$ respectivamente.

Ahora definiremos una conexión en el fibrado dual ξ^*, para eso se define la pareja no-singular

$$(,) : \Omega^i(\xi)\otimes\Omega^j(\xi^*) \xrightarrow{\ \wedge\ } \Omega^{i+j}(\xi\otimes\xi^*) \longrightarrow \Omega^{i+j}(M)$$

de la forma $(w\otimes s, \tau\otimes s^*) = (w\wedge\tau)\otimes\langle s, s^*\rangle$ donde,

$$\langle,\rangle : \Omega^0(\xi)\otimes\mathrm{Hom}_{\Omega^0(M)}(\Omega^0(\xi),\Omega^0(M)) \cong \Omega^0(\xi^*)\to\Omega^0(M)$$

corresponde a la evaluación. Si ∇_ξ es una conexión en ξ, definimos una conexión en ∇_{ξ^*} requiriendo que

$$d(s,s^*) = (\nabla_\xi(s), s^*) + (s, \nabla_{\xi^*}(s^*)). \qquad (15)$$

La definición en (14) permite definir una conexión en el fibrado $\mathrm{Hom}(\xi,\eta)$ debido al isomorfismo de fibrados vectoriales $\xi^*\otimes\eta\cong\mathrm{Hom}(\xi,\eta)$; alternativamente podemos definir otra conexión en éste fibrado. La aplicación evaluación $\Omega^0(\mathrm{Hom}(\xi,\eta))\times\Omega^0(\xi)\to\Omega^0(\eta)$ induce una aplicación $\Omega^0(M)-$bilineal $(,) : \Omega^i(\xi)\times\Omega^j(\mathrm{Hom}(\xi,\eta))\to\Omega^{i+j}(\eta)$ y define una conexión
$\hat\nabla = \nabla_{\mathrm{Hom}(\xi,\eta)}$ en $\mathrm{Hom}(\xi,\eta)$ por la fórmula

$$\nabla_\eta((s,\phi)) = (\nabla_\xi(s),\phi) + (s,\hat\nabla(\phi))$$

donde $s\in\Omega^0(\xi)$ y $\phi\in\Omega^0(\mathrm{Hom}(\xi,\eta))$. Podemos también extender a una aplicación

$$d^{\hat\nabla} : \Omega^i(\mathrm{Hom}(\xi,\eta))\to\Omega^{i+1}(\mathrm{Hom}(\xi,\eta)),$$

con la propiedad $d^{\nabla}((s,\phi)) = (d^{\nabla}(s),\phi) + (-1)^i(s, d^{\hat{\nabla}}(\phi))$ donde $s \in \Omega^i(\xi)$, $\phi \in \Omega^j(\mathrm{Hom}(\xi,\eta))$ y d^{∇} corresponde a $\nabla = \nabla_\xi$, ∇_η respectivamente.

Considere a ξ como un fibrado vectorial real de dimensión k, y $e = \{e_1, ..., e_k\}$ un referencial en un abierto trivializante U con lo cual tenemos los isomorfismos

$$\xi|_U \cong U \times \mathbb{R}^k \text{ y } \mathrm{Hom}(\xi,\xi)|_U \cong U \times M_k(\mathbb{R}),$$

éstos a la vez inducen

$$\Omega^n(\xi|_U) \cong \Omega^n(U)^{\oplus k} \text{ y } \Omega^n(\mathrm{Hom}(\xi,\xi)|_U) \cong M_k(\Omega^n(U)).$$

Si ∇ es una conexión en ξ, con representación local dada en (5), entonces induce la aplicación

$$d^{\nabla} : \Omega^n(U)^{\oplus k} \to \Omega^{n+1}(U)^{\oplus k} \text{ dada por } d^{\nabla}(s_1, ..., s_k) = (ds_1, ..., ds_k) + (s_1, ..., s_k) \wedge A,$$

donde A es la matriz de forma de conexión. De la misma forma si $\hat{\nabla}$ es una conexión en el fibrado $\mathrm{Hom}(\xi,\xi)$, por lo tanto induce la aplicación

$$d^{\hat{\nabla}} : M_k(\Omega^n(U)) \to M_k(\Omega^{n+1}(U)), d^{\hat{\nabla}}\phi = d\phi - (A \wedge \phi - (-1)^n \phi \wedge A). \qquad (16)$$

Si en U tomamos otro referencial e', entonces $e = Ge'$ donde $G \in \mathrm{GL}_k(\Omega^0(U))$, asociado a estos referenciales tenemos las 2-formas de curvatura $F^{\nabla}(e)$ y $F^{\nabla}(e')$ que se relacionan de la forma

$$F^{\nabla}(e) = GF^{\nabla}(e')G^{-1}.$$

Teorema 3.1. ***Identidad de Bianchi*** *Sea d^{∇} la extensión de la conexión ∇ entonces $d^{\nabla}F^{\nabla} = 0$.*

Demostración. Como F^{∇} es $\Omega^0(M)-$ lineal depende únicamente del valor de la sección puntualmente, es decir si s, s' secciones en $\Omega^0(\xi)$ con $s(x) = s'(x)$ entonces $F^{\nabla}(s(x)) = F^{\nabla}(s'(x))$, por lo tanto es suficiente demostrar para F^{∇} en su representación local $F^{\nabla} = dA - A \wedge A$. Usando (16) para $n = 2$ tenemos $d^{\nabla}\phi = d\phi - A \wedge \phi + \phi \wedge A$, remplazando ϕ por la matriz F^{∇} tenemos:

$$\begin{aligned} d^{\nabla}F^{\nabla} &= dF^{\nabla} - A \wedge F^{\nabla} + F^{\nabla} \wedge A \\ &= d(dA - A \wedge A) - A \wedge F^{\nabla} + F^{\nabla} \wedge A \\ &= -d(A \wedge A) - A \wedge dA + A \wedge A \wedge A + dA \wedge A - A \wedge A \wedge A \\ &= -dA \wedge A + A \wedge dA - A \wedge dA + dA \wedge A = 0. \end{aligned}$$

□

Ahora veamos el homomorfismo traza $Tr : \mathrm{Hom}(V,V) \to \mathbb{R}$, que puede ser definida sin consideración a alguna base de V; como la composición

$$Tr : \mathrm{Hom}(V,V) \xrightarrow{\phi} V^* \otimes V \xrightarrow{ev} \mathbb{R} \ \text{ así } Tr(f) = g(v)$$

donde $\phi(f) = g \otimes v$. Ésta induce un $\Omega^0(M)-$homomorfismo traza $Tr : \mathrm{Hom}(\xi,\xi) \to \epsilon^1$ en fibrados vectoriales, y ésta a su vez induce una traza

$$\begin{array}{rcl} Tr : \Omega^i(\mathrm{Hom}(\xi,\xi)) \cong \Omega^i(M) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi^*) & \to & \Omega^i(M) \\ \phi = w \otimes s \otimes s^* & \to & Tr(\phi) = (s,s^*)w \end{array} \quad (17)$$

donde $w \in \Omega^i(M)$, $s \in \Omega^0(\xi)$, $s^* \in \Omega^0(\xi^*)$ y (s,s^*) es la evaluación.

Teorema 3.2. *Sea d^∇ la derivación asociada a la conexión $\nabla = \nabla_{\mathrm{Hom}(\xi,\xi)}$, y $\phi \in \Omega^i(\mathrm{Hom}(\xi,\xi))$, entonces tenemos*

$$dTr\phi = Tr(d^\nabla \phi).$$

Demostración. Sea $\phi \in \Omega^i(\mathrm{Hom}(\xi,\xi)) \cong \Omega^i(M) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi) \otimes_{\Omega^0(M)} \Omega^0(\xi^*)$, entonces $\phi = w \otimes s \otimes s^*$ donde $w \in \Omega^i(M)$, $s \in \Omega^0(\xi)$ y $s^* \in \Omega^0(\xi^*)$, ahora hallando la derivación $d^\nabla \phi$ tenemos:

$$\begin{aligned} d^\nabla(w \otimes s \otimes s^*) &= dw \otimes (s \otimes s^*) + (-1)^i w \otimes \nabla(s \otimes s^*) \\ &= dw \otimes (s \otimes s^*) + (-1)^i w \otimes (\nabla_\xi(s) \otimes s^* + s \otimes \nabla_{\xi^*}(s^*)) \end{aligned}$$

tomando la traza a éste operador se tiene

$$\begin{aligned} Tr(d^\nabla \phi) &= dw(s,s^*) + (-1)^i w \wedge ((\nabla_\xi(s),s^*) + (s,\nabla_{\xi^*}(s^*))) \\ &= (s,s^*)dw + (-1)^i w \wedge d(s,s^*) \\ &= (s,s^*)dw + (-1)^{2i} d(s,s^*) \wedge w \\ &= d((s,s^*)w) = dTr\phi. \end{aligned}$$

□

Combinando éste teorema con la Identidad de *Bianchi* se tiene que $d(TrF^\nabla) = 0$, entonces TrF^∇ define una 2-forma cerrada.

Nosotros hemos probado varios resultados para fibrados vectoriales reales, estos son completamente análogos para fibrados vectoriales complejos ξ para éste caso la conexión ∇ en ξ tiene que ser $\mathbb{C}-$lineal, además se tomará el módulo $\Omega^i(M;\mathbb{C})$ con coeficientes complejos en ves de $\Omega^i(M)$ además se cambiará $\otimes_\mathbb{R}$ por $\otimes_\mathbb{C}$ y $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}$ por $\mathrm{Hom}_\mathbb{C}$.
Si ξ es un fibrado vectorial complejo sobre M entonces, $[Tr(F^\nabla)] \in H^2(M;\mathbb{C})$ es una 2-forma cerrada. En forma más general $\underbrace{F^\nabla \wedge .... \wedge F^\nabla}_{k-veces} \in \Omega^{2k}(\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(\xi,\xi))$, entonces $Tr(F^\nabla \wedge .... \wedge F^\nabla)$ es una $2k-$forma cerrada en $\Omega^{2k}(M;\mathbb{C})$; por lo tanto podemos dar la siguiente definición:

Definición 3.3. *Sea* (ξ, ∇) *un fibrado vectorial complejo con conexión* ∇*. Definimos la* ***Clase característica de Chern*** *como la clase de cohomología*

$$ch_k(\xi, \nabla) = \frac{(-1)^k}{2\pi\sqrt{-1}k!}\Big[Tr(F^{\nabla} \wedge .... \wedge F^{\nabla})\Big] \in H^{2k}(M; \mathbb{C}).$$

Capítulo 4

Clases Características

En éste capítulo vamos a estudiar las clases de cohomología que se pueden asociar a un fibrado vectorial, estas clases son invariantes en fibrados vectoriales isomorfos. Para poder asociar las clases de cohomología a cierto fibrado vectorial es necesario estudiar los polinomios invariantes, por eso que en esta primera parte estudiaremos ciertas propiedades de estos polinomios.

4.1. Polinomios Invariantes

Considere la matriz $A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, denotaremos por $P(A)$ a un polinomio de n^2 variables, éstos serán considerados como polinomios homogéneos es decir está formado por monomios de igual grado, y que el grado de éste monomio será el grado del polinomio P.

Definición 4.1. *Sea $A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ un polinomio $P(A)$, es llamado invariante si y sólo si $P(A) = P(gAg^{-1})$ para todo $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Todo polinomio determina una función $P : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, ésta función queda únicamente determinada por dicho polinomio.

Dada la matriz A, podemos asociarle el polinomio característico dado por:

$$\sigma(t) = \det(I + tA) = \sum_{i=0}^{n} \sigma_i(A)t^i \text{ con } \sigma_0(A) = 1,$$

cada polinomio $\sigma_i(A)$ es un polinomio invariante, esto pues los autovalores de A son independientes por cambio de base es decir A y gAg^{-1} tienen los mismos autovalores, donde $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Considere la aplicación $s(t) = -t\frac{d}{dt}\log(\det(I - tA))$ la misma que se puede expresar como series de potencias

$$s(t) = -t\frac{d}{dt}\log(\det(I - tA)) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k(A)t^k, \qquad (*)$$

donde el polinomio característico se puede expresar en términos de la aplicación $s(t)$ de la forma $\sigma(t) = \exp(\int \frac{s(-t)}{t} dt)$ eso puede verse resolviendo la ecuación diferencial dada en $(*)$.

La observación que sigue simplificará la justificación de algunos resultados posteriores.

Observación 4.1. *El conjunto de matrices diagonalizables $D \subset M_n(\mathbb{C})$ es denso en $M_n(\mathbb{C})$.*

Probaremos que el conjunto de matrices con autovalores todos distintos es denso en $M_n(\mathbb{C})$. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $\epsilon > 0$ existe una matriz $A_\epsilon \in M_n(\mathbb{C})$ que tiene valores propios todos distintos tal que $\|A - A_\epsilon\| < \epsilon$. Dada la matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ Por el Teorema de Schur existe una matriz unitaria $U \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $T = (T_{ij}) = U^{-1}AU$ donde T es una matriz es triangular superior y los elementos de la diagonal principal son los autovalores de A.
Dados números complejos $T_{11}, T_{22}, ..., T_{nn}$ siempre podemos escoger n números complejos $e_1, e_2, ..., e_n$ tales que $|e_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ y $T_{11} + e_1, T_{22} + e_2, ..., T_{nn} + e_n$ son todos distintos. Ahora tome la matriz $E = \mathrm{diag}(e_1, e_2, .., e_n)$, entonces la matriz $T + E$ es una matriz triangular con elementos $T_{11} + e_1, T_{22} + e_2, ..., T_{nn} + e_n$ en su diagonal principal; siendo éstos números sus autovalores; definamos la matriz $A_\epsilon = U^{-1}(T + E)U$ con valores propios distintos y elijamos la norma de Frobenius[1]

$$\|A - A_\epsilon\| = \|U^{-1}TU - U^{-1}(T + E)U\| = \|U^{-1}EU\|.$$

La norma de Frobenius es unitariamente invariante con lo cual $\|U^{-1}EU\| = \|E\| = (|e_1|^2 + ... + |e_n|^2)^{1/2} < \left(\frac{\epsilon^2}{n} + ... + \frac{\epsilon^2}{n}\right)^{1/2} < \epsilon$; por lo tanto se consigue que $\|A - A_\epsilon\| < \epsilon$.

Ahora podemos apoyarnos en éste resultado para simplificar la prueba en algunos resultados.

Lema 4.1. *Para cada matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ se tiene que $s_k(A) = Tr(A^k)$.*

Demostración. Por la observación anterior es suficiente trabajar con una matriz diagonal $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ entonces, $\sigma(t) = \det(I - tA) = (1 - t\lambda_1)...(1 - t\lambda_n)$ y la función $s(t)$ se expresa de la forma

$$s(t) = -t\frac{d}{dt}\log(\det(I - tA)) = -t\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n}\log(1 - t\lambda_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n}\frac{t\lambda_i}{1 - t\lambda_i}.$$

Usando la serie geométrica ésta se puede expresar de la forma:

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_i^k t^k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k\Big)t^k.$$

[1]Si $A = (a_{ij})_{nm}$la norma de Frobenius se define como $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$.

Note que si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ entonces $A^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k)$, así $s_k(A) = Tr(A^k)$; con lo cual es suficiente con una matriz diagonal pues ésta la puedo aproximar mediante sucesión de matrices diagonales, esto es, si $A \in M_n(\mathbb{C})$ por la observación anterior $A = \lim g_n D_n g_n^{-1}$, y como la traza es una función continua entonces, $Tr(A) = \lim Tr(g_n D_n g_n^{-1}) = \lim Tr(D_n)$. □

Lema 4.2. *Para un polinomio de n^2 variables tenemos:*

$$s_k(A) - s_{k-1}(A)\sigma_1(A) + s_{k-2}(A)\sigma_2(A) - ...... + (-1)^k k\sigma_k(A) = 0.$$

Demostración. Por la Observación(4.1) es suficiente hacer la prueba para una matriz diagonal $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$; definamos las funciones

$$\bar{\sigma}(t) = \det(I - tA) = (1 - t\lambda_1)...(1 - t\lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k(A) t^k$$

y $s(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{t\lambda_i}{1-t\lambda_i} = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A) t^k$ multiplicamos ambas funciones.

$$\bar{\sigma}(t)s(t) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{t\lambda_i}{1 - t\lambda_i}\Big)(1 - t\lambda_1)....(1 - t\lambda_n) = -t\frac{d\bar{\sigma}}{dt}$$

por otro lado $-t\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k\sigma_k(A) t^k$ luego

$$s_k(A) - s_{k-1}(A)\sigma_1(A) + s_{k-2}(A)\sigma_2(A) - ...... = (-1)^{k-1} k\sigma_k(A).$$

□

Observe que en el lema anterior $s_k(A)$ es un polinomio con coeficientes enteros y variables $\sigma_1(A), ..., \sigma_k(A)$, también $\sigma_k(A)$ es un polinomio con coeficientes racionales y variables $s_1(A), ..., s_k(A)$ es decir

$$s_k(A) = Q_k(\sigma_1(A), ..., \sigma_k(A))$$

$$\sigma_k(A) = P_k(s_1(A), ..., s_k(A))$$

por ejemplo

$$s_1(A) = \sigma_1(A), s_2(A) = \sigma_1(A)^2 - 2\sigma_2(A) \text{ y } \sigma_2(A) = \frac{1}{2}(s_1(A)^2 - s_2(A)).$$

Si consideramos A_1 y A_2 matrices de orden n_1^2 y n_2^2 respectivamente, entonces

$$A_1 \oplus A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

es una matriz de orden $(n_1 + n_2)^2$ y la matriz $A_1 \otimes A_2$ tiene orden $(n_1 n_2)^2$. Por lo tanto tenemos las siguientes identidades

i. $\sigma_k(A_1 \oplus A_2) = \sum_{i=0}^{k} \sigma_i(A_1)\sigma_{k-i}(A_2)$.

ii. $s_k(A_1 \oplus A_2) = s_k(A_1) + s_k(A_2)$. (1)

iii. $s_k(A_1 \otimes A_2) = s_k(A_1)s_k(A_2)$.

Los polinomios $\sigma_i(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $i = 1, .., n$ definidos de la forma:

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i) = \sum_{i=0}^{n} \sigma_i(\lambda_1, ..., \lambda_n)t^i$$

son llamados **polinomios simétricos elementales** en las variables $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Observación 4.2. *Todo polinomio $P \in \mathbb{C}[\lambda_1, ..., \lambda_n]$ invariante por permutaciones*[2] *puede escribirse de la forma:*

$$P(\lambda_1, ..., \lambda_n) = p(\sigma_1(\lambda_1, ..., \lambda_n), ..., \sigma_n(\lambda_1, ..., \lambda_n)),$$

donde p es un polinomio de $n-$variables y σ_i son los polinomios simétricos elementales.

Vea [9]. Pág.191.

Teorema 4.1. *Todo polinomio invariante $P : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, puede escribirse de la forma*

$$P(A) = p(\sigma_1(A), ..., \sigma_n(A)),$$

donde p es un polinomio de $n-$variables y σ_i son los polinomios simétricos elementales.

Demostración. Por la Observación(4.1) es suficiente probar para matrices diagonales, así considere $A = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in M_n(\mathbb{C})$. Tome además una permutación $s : \{1, ..., n\} \to \{1, .., n\}$ en S_n, ésta permutación induce una aplicación $\mathbb{C}-$lineal $S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ de la forma $S(z_1, .., z_n) = (z_{s(1)}, ..., z_{s(n)})$, si denotamos por S a la matriz asociada a la aplicación S, entonces tenemos

$$S.\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n).S^{-1} = \text{diag}(\lambda_{s(1)}, ..., \lambda_{s(n)})$$

y como P es invariante se tiene $P(diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)) = P(\text{diag}(\lambda_{s(1)}, ..., \lambda_{s(n)}))$ esto es para toda permutación $s \in S_n$, ahora se puede aplicar la observación anterior; esto quiere decir que existe un polinomio p de tal manera que

$$P(\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)) = p(\sigma_1(\lambda_1, ..., \lambda_n), ..., \sigma_n(\lambda_1, ..., \lambda_n)).$$

De la densidad del conjunto de matrices diagonalizables tenemos que $A = \lim g_n D_n g_n^{-1}$, aplicando P se tiene que $P(A) = P(\lim g_n D_n g_n^{-1})$ y por la continuidad de P, se consigue que $P(A) = \lim P(D_n)$, entonces

$$P(A) = p(\sigma_1(A), ..., \sigma_n(A))$$

para toda matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$. □

[2]Un polinomio P es invariante por permutaciones si dada una permutación $\sigma : \{1, .., n\} \to \{1, ..., n\}$ en S_n(grupo de permutaciones) se tiene que $P(\lambda_1, ..., \lambda_n) = P(\lambda_{\sigma(1)}, ..., \lambda_{\sigma(n)})$.

4.2. Clases Características en Fibrados Vectoriales Complejos

En la Definición(3.3) se expresó las $k-$Clase Característica de Chern, usando el homomorfismo traza, en ésta sección se buscará otra forma diferente de expresar estas clases usando los polinomios invariantes, para eso consideremos ξ como un fibrado vectorial diferenciable complejo de dimensión n, sobre una variedad diferenciable compacta M y $\Omega^*(M;\mathbb{C})$ denotará el espacio de formas con coeficientes complejos.

Sea P un polinomio invariante y $A=(A_{ij})_{k\times k}$ la matriz con elementos en $A_{ij}\in\Omega^2(M;\mathbb{C})$, y como el producto exterior de formar de orden par es conmutativo, entonces el polinomio $P(A)$ en la variables A_{ij}, pertenece a $P(A)\in\Omega^{2k}(M;\mathbb{C})$ y esta bien definido de forma más general podemos definir

$$P:\Omega^2(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\xi,\xi))\to\Omega^{2k}(M;\mathbb{C}).$$

Sea U un abierto donde ξ se trivializa, entonces $\xi|_U\cong U\times\mathbb{C}^n$ esto induce un isomorfismo $\mathrm{Hom}(\xi,\xi)|_U\cong U\times M_n(\mathbb{C})$ por lo tanto tenemos:

$$\Omega^2(\mathrm{Hom}(\xi,\xi)|_U)\cong\Omega^2(U;M_k(\mathbb{C}))\cong M_n(\Omega^2(U;\mathbb{C})).$$

En U tenemos un referencial e, asociado a éste tenemos la 2-forma de curvatura $F^\nabla(e)$, si en éste abierto tomamos otro referencial e' entonces asociado a éste referencial tenemos otra 2-forma de curvatura $F^\nabla(e')$, que se relacionan de la forma $F^\nabla(e)=GF^\nabla(e')G^{-1}$ donde $e=Ge'$. Si aplicamos un polinomio invariante P de grado k, se consigue que $P(F^\nabla(e))=P(F^\nabla(e'))$, en consecuencia $P(F^\nabla(e))$ define una $2k-$forma global en M independiente a cualquier trivialización de ξ.

Lema 4.3. *Para cada polinomio invariante P de grado k y una conexión ∇ en el fibrado vectorial complejo ξ de dimensión n, se tiene que $P(F^\nabla)$ es una $2k-$forma cerrada.*

Demostración. Por demostrar que $dP(F^\nabla)=0$; para esto considere U un abierto trivializante y $A=(A_{ij})$ la matriz de forma conexión asociada a ∇, por otro lado sabemos que $F^\nabla=dA-A\wedge A=(F_{ij})$ y por los comentarios previos al lema, $P(F^\nabla)$ define una $2k-$forma global en M. Usando la identidad de Bianchi tenemos:

$$d(F^\nabla)=A\wedge F^\nabla-F^\nabla\wedge A.$$

Por otro lado, si derivamos $P(F^\nabla)$ ésta derivada se expresaría de la siguiente forma:

$$dP(F^\nabla)=\sum_{ij}\frac{\partial P}{\partial A_{ij}}(F^\nabla)\wedge dF_{ij}=Tr\big[P'(F^\nabla)\wedge dF^\nabla\big],\qquad(*)$$

donde $P'(F^\nabla) = \left(\frac{\partial P}{\partial A_{ij}}(F^\nabla)\right)^t$ es la matriz transpuesta de las derivadas parciales de P respecto de las variables A_{ij}, para ver la igualdad dada en $(*)$, la hacemos de la siguiente forma

$$Tr\big[P'(F^\nabla)\wedge dF^\nabla\big] = Tr\Big[\sum\big(\frac{\partial P}{\partial A_{ij}}(F^\nabla)\big)^t \wedge dF_{ij}\Big] = \sum \frac{\partial P}{\partial A_{ji}}(F^\nabla)\wedge dF_{ji}.$$

Ahora demostremos que $P'(F^\nabla)\wedge F^\nabla = F^\nabla \wedge P'(F^\nabla)$, ésta igualdad se prueba para una matriz A arbitraria en $M_n(\mathbb{C})$ y luego la aplicamos a nuestro caso, como P es un polinomio invariante se tiene que $P(AB) = P(BA)$, donde A ó B es invertible, considere E_{ij} la matriz cuadrada donde toma el valor de 1 en la posición (i,j) y cero en las demás posiciones, así la matriz $(I + tE_{ij})$ es invertible, por lo tanto

$$P((I + tE_{ij})A) = P(A(I + tE_{ij})) \qquad (**)$$

la matriz E_{ij} puede expresarse de la forma $E_{ij} = (e_{rs})$ donde, $e_{rs} = \delta_{ir}.\delta_{js}$ y δ_{ij} representa el delta de Kronecker[3]
También tenemos:

$$(E_{ji}A)_{rs} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad r \neq j \\ A_{is}, & \text{si} \quad r = j \end{cases} \quad (AE_{ji})_{rs} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad s \neq i \\ A_{rj}, & \text{si} \quad s = i \end{cases} \qquad (***)$$

Luego derivamos $(**)$ respecto a t y evaluando en $t = 0$, se tiene:

$$\sum_{rs} \frac{\partial P}{\partial A_{rs}}(E_{ji}A)_{rs} = \sum_{rs} \frac{\partial P}{\partial A_{rs}}(AE_{ji})_{rs}.$$

Usando $(***)$ se consigue que:

$$\sum_s A_{is}\frac{\partial P}{\partial A_{js}} = \sum_r \frac{\partial P}{\partial A_{ri}}A_{rj} \text{ por lo tanto, } AP(A)^t = P(A)^t A.$$

Si cambiamos A por F^∇ se consigue la igualdad deseada $P'(F^\nabla)\wedge F^\nabla = F^\nabla \wedge P'(F^\nabla)$.
Usando éste resultado en $(*)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} dP(F^\nabla) &= Tr\big[P'(F^\nabla)\wedge(A\wedge F^\nabla - F^\nabla\wedge A)\big] \\ &= Tr\big[P'(F^\nabla)\wedge A\wedge F^\nabla - P'(F^\nabla)\wedge F^\nabla\wedge A\big] \\ &= Tr\big[(P'(F^\nabla)\wedge A)\wedge F^\nabla - F^\nabla\wedge(P'(F^\nabla)\wedge A)\big] \\ &= Tr\big[(P'(F^\nabla)\wedge A)\wedge F^\nabla - (P'(F^\nabla)\wedge A)\wedge F^\nabla\big] = 0 \end{aligned}$$

□

[3] El delta de Kronecker esta dada de la forma $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Éste lema dice que, si P es un polinomio invariante de grado k, entonces $P(F^{\nabla})$ es una $2k-$forma cerrada, por lo tanto define una clase de cohomología es decir $[P(F^{\nabla})] \in H^{2k}(M;\mathbb{C})$.
El siguiente lema muestra que la clase $[P(F^{\nabla})]$ es independiente de la elección de la conexión ∇ en ξ.

Lema 4.4. *Si P es un polinomio invariante de grado k, entonces la clase $[P(F^{\nabla})] \in H^{2k}(M;\mathbb{C})$ de cohomología es independiente de la conexión.*

Demostración. Tenemos que ξ es un fibrado vectorial complejo sobre M; para demostrar la independencia de la conexión, elegimos ∇_0, ∇_1 dos conexiones en ξ y tome la proyección $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ en el primer factor, entonces $\pi^*\xi$ es el fibrado vectorial inducido sobre $M \times \mathbb{R}$, como ∇_q(q=0,1) son dos conexiones en ξ, entonces por el Lema(3.4) existe una única conexión $\tilde{\nabla}_q = \pi^*(\nabla_q)$ en $\pi^*\xi$ talque el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega^0(\xi) \arrow[r, "\nabla_q"] \arrow[d, "\pi^*"'] & \Omega^1(\xi) \arrow[d, "\pi^*"'] \\ \Omega^0(\pi^*\xi) \arrow[r, "\pi^*(\nabla_q)"] & \Omega^1(\pi^*\xi) \end{tikzcd}$$

conmuta. Por la Proposición(3.1) la aplicación, $\tilde{\nabla}(s)(p,t) = (1-t)\tilde{\nabla}_0(s)(p,t)+t\tilde{\nabla}_1(s)(p,t)$ con $(p,t) \in M \times \mathbb{R}$, define una conexión en $\pi^*\xi$; por otro lado las inclusiones $i_0 : M \to M \times \mathbb{R}$ definidos de la forma $i_0(p) = (p,0)$ y $i_1 : M \to M \times \mathbb{R}$ como $i_1(p,1) = (p,1)$, inducen homomorfismos $i_q^* : \Omega^0(\pi^*\xi) \to \Omega^0(\xi)$ para cada $q = 0,1$ entonces por el Lema(3.4) el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega^0(\pi^*\xi) \arrow[r, "\tilde{\nabla}"] \arrow[d, "i_q^*"'] & \Omega^1(\pi^*\xi) \arrow[d, "i_q^*"'] \\ \Omega^0(\xi) \arrow[r, "\nabla_q"] & \Omega^1(\nabla_q) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, por lo tanto $i_0^*(\tilde{\nabla}) = \nabla_0$ y $i_1^*(\tilde{\nabla}) = \nabla_1$, en consecuencia

$$i_0^*(F^{\tilde{\nabla}}) = F^{\nabla_0} \text{ también } i_1^*(F^{\tilde{\nabla}}) = F^{\nabla_1}$$

por lo tanto $i_q^*(P(F^{\tilde{\nabla}})) = P(F^{\nabla_q})$ para cada $q = 0,1$ y como $[P(F^{\tilde{\nabla}})]$ es una clase cerrada, y además i_0, i_1 son aplicaciones homotópicas, entonces

$$[P(F^{\nabla_0})] = i_0^*([P(F^{\tilde{\nabla}})]) = i_1^*([P(F^{\tilde{\nabla}})]) = [P(F^{\nabla_1})].$$

□

Sea ξ, ξ' fibrados vectoriales diferenciables complejos y $\hat{f} : \xi \to \xi'$ un isomorfismo diferenciable, así $\hat{f}$ induce una aplicación $\hat{f}_* : \Omega^0(\xi) \to \Omega^0(\xi')$ de la forma $\hat{f}_*(s) = \hat{f} \circ s$, así $\hat{f}_*$ es un isomorfismo. Ahora elegimos conexiones ∇, ∇' en ξ y ξ' respectivamente de tal manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(\xi) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\hat{f}_*"'] & \Omega^1(\xi) \arrow[d, "\hat{f}_*"'] \\
\Omega^0(\xi') \arrow[r, "\nabla'"] & \Omega^1(\xi')
\end{tikzcd}$$

conmute, y considere referenciales locales e, e' de ξ y ξ' respectivamente donde éstos se trivializan, entonces las matrices $F^{\nabla}(e)$, $F^{\nabla'}(e')$ son semejantes esto quiere decir que $F^{\nabla}(e) = GF^{\nabla'}(e')G^{-1}$, aplicando el polinomio invariante P se tiene que $P(F^{\nabla}(e)) = P(F^{\nabla'}(e'))$, esto dice que fibrados isomorfos definen clases de cohomología idénticas. Esto nos permitirá demostrar cuando dos fibrados vectoriales no son isomorfos.

Los ejemplos más importantes de polinomios invariantes homogéneos son:

$$P(A) = \sigma_k(A) \text{ y } P(A) = s_k(A) = Tr(A^k)$$

ahora ya podemos presentar la siguiente definición.

Definición 4.2. *Sea ξ un fibrado vectorial complejo de dimensión n sobre M, y los polinomios simétricos elementales $\sigma_k, s_k : M_n(\Omega^2(M;\mathbb{C})) \to \Omega^{2k}(M;\mathbb{C})$, $k = 1,..,n$. Definimos:*

i. La k-ésima Clase de Chern del fibrado vectorial complejo ξ es

$$c_k(\xi) = \left[\sigma_k\Big(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}F^{\nabla}\Big)\right] \in H^{2k}(M;\mathbf{C}).$$

ii. La k-ésima Clase Característica de Chern es

$$ch_k(\xi) = \frac{1}{k!}\left[s_k\Big(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}F^{\nabla}\Big)\right] \in H^{2k}(M;\mathbf{C}).$$

Donde ∇ es una conexión compleja en ξ; además en el caso que $k = 0$, se define $c_0(\xi) = 1$ y $ch_0(\xi) = \dim \xi$.

Note que esta definición se encuentra en relación con la Definición(3.3).
Por otro lado, usando la notación $ch_k(\xi) = \frac{1}{k!}s_k(\xi)$ tenemos por el Lema(4.1) que

$$s_k(\xi) = Q_k(c_1(\xi), ..., c_k(\xi)) \text{ y } c_k(\xi) = P_k(s_1(\xi), ..., s_k(\xi))$$

para ciertos polinomios Q_k y P_k. Entonces tenemos por ejemplo

$$ch_1(\xi) = c_1(\xi) \text{ y } ch_2(\xi) = \frac{1}{2}c_1^2(\xi) - c_2(\xi).$$

4.2.1. Clases Chern de un Fibrado de Línea

Sea, L un fibrado vectorial complejo lineal sobre M, considere U un abierto trivializante con lo cual $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(L,L)|_U \cong U \times \mathbb{C}$ por lo tanto, $\Omega^2(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(L,L)|_U) \cong \Omega^2(U;\mathbb{C})$. Entonces $F^\nabla \in \Omega^2(U;\mathbb{C})$ y por otro lado $s_k : \Omega^2(M;\mathbb{C}) \to \Omega^2(M;\mathbb{C})$ está dada por:

$$s_k(F^\nabla) = Tr((F^\nabla)^k) = \underbrace{F^\nabla \wedge ..... \wedge F^\nabla}_{k-veces}.$$

Con lo cual obtenemos:

$$ch_k(L) = \frac{1}{k!}ch_1(L)^k, \text{ también } ch_k(L) = \frac{1}{k!}c_1(L)^k$$

así $ch_k(L)$ puede verse como el $k-$ésimo término de la serie de potencias de la aplicación $e^{c_1(L)} = \sum \frac{1}{k!}c_1(L)^k$.

Considere el fibrado canónico de líneas H_n sobre $\mathbb{CP}^n$ con espacio total

$$E(H_n) = \{(L,u) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}/u \in L\}$$

como H_n es un fibrado de línea, tenemos que la Clases de Chern $c_k(H_n) = 0$, cuando $k > 1$.

Teorema 4.2. *El homomorfismo integración de $c_1(H_1)$ es -1.*

Demostración. Sea $U_0 = \{[z_0, z_1]/z_0 \neq 0\}$ un abierto de $\mathbb{CP}^1$ y tome $g : \mathbb{C} \to U_0 \subset \mathbb{CP}^1$ dada por $g(x,y)$=[1,z] donde $z = x + iy$, una parametrización de éste abierto, la aplicación g induce la aplicación $g^* : \Omega^2(U_0) \to \Omega^2(\mathbb{C})$ de la forma, $F^\nabla \to g^*F^\nabla$, por el Ejemplo(2.3) se tiene que $g^*F^\nabla = F^\nabla_{g(x,y)} = \frac{2i}{(1+|z|^2)^2}dx \wedge dy$, por otro lado la clase $c_1(H_1)$ está dada por:

$$c_1(H_1) = \Big[\sigma_1\Big(\frac{-1}{2\pi i}F^\nabla\Big)\Big] = \Big[\frac{-1}{2\pi i}F^\nabla\Big].$$

Entonces

$$\int_{U_0} c_1(H_1) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{-1}{2\pi i}F^\nabla_{g(x,y)} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{-2i}{2\pi i(1+|z|^2)^2}dx \wedge dy$$

para integrar la última igualdad usamos coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ donde $dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$ y $dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$, por lo tanto, $dx \wedge dy = rdr \wedge d\theta$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{-1}{\pi(1+|z|^2)}dx \wedge dy = \frac{-1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{rdr \wedge d\theta}{(1+r^2)^2} = -\int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)^2} = -1.$$

Esto dice también que $\int_{U_0} F^\nabla = 2\pi i$.

$\square$

4.2.2. Clases Características de Chern de Operaciones con Fibrados

En esta parte de nuestro trabajo hallaremos las Clases de Chern y las Clases Características de Chern de algunos fibrados; como el fibrado inducido $f^*\xi$, de la suma de Witney $\xi_0 \oplus \xi_1$, del producto tensorial de fibrados $\xi_0 \otimes \xi_1$ y por último de ξ^*.
Para abreviar notación en algunas ocasiones escribiremos $P(\xi)$ en ves de $P(F^{\nabla}(e))$.

Teorema 4.3. *Sea $f : N \to M$, una aplicación diferenciable y ξ un fibrado vectorial complejo sobre M. Entonces para cada polinomio invariante P, tenemos $f^*[P(\xi)] = [P(f^*\xi)]$.*

Demostración. Tenemos que $f^*\xi$ es un fibrado vectorial sobre N, y ∇ es una conexión en ξ asociada a ésta conexión tenemos la forma de curvatura F^{∇}. Por el Lema(3.4) existe una conexión $f^*(\nabla)$ en el fibrado $f^*\xi$ y asociada a ésta conexión se tiene la forma de curvatura $F^{f^*(\nabla)}$ que está dada de la forma $F^{f^*(\nabla)} = f^*(F^{\nabla})$. Si P es un polinomio invariante tenemos $P(F^{f^*(\nabla)}) = f^*(P(F^{\nabla}))$.

$\square$

Teorema 4.4. *Sea ξ_0 y ξ_1 fibrados vectoriales complejos sobre M, donde ∇_0, ∇_1 su respectiva conexión, tenemos:*

i. $ch_k(\xi_0 \oplus \xi_1) = ch_k(\xi_0) + ch_k(\xi_1)$.

ii. $c_k(\xi_0 \oplus \xi_1) = \sum_{r=0}^{k} c_r(\xi_0)c_{k-r}(\xi_1)$.

Demostración. Usando el isomorfismo $\Omega^0(\xi_0) \oplus \Omega^0(\xi_1) \cong \Omega^0(\xi_0 \oplus \xi_1)$, definiremos una conexión

$$\nabla_{\xi_0\oplus\xi_1} : \Omega^0(\xi_0 \oplus \xi_1) \to \Omega^1(\xi_0 \oplus \xi_1)$$

de la forma $\nabla_{\xi_0\oplus\xi_1}(s_0 \oplus s_1) = \nabla_0(s_0) \oplus \nabla_1(s_1)$; así podemos extender de la forma $d^{\nabla_{\xi_0\oplus\xi_1}} = d^{\nabla_0} \oplus d^{\nabla_1}$ por lo tanto, asociada a ésta conexión tenemos definida la forma de curvatura

$$F^{\nabla_{\xi_0\oplus\xi_1}} = d^{\nabla_{\xi_0\oplus\xi_1}} \circ \nabla_{\xi_0\oplus\xi_1} = F^{\nabla_0} \oplus F^{\nabla_1} \in \Omega^2(\mathrm{Hom}(\xi_0 \oplus \xi_1, \xi_0 \oplus \xi_1)).$$

Si U es un abierto de M lo más pequeño, donde ξ_0,ξ_1 y $\xi_0 \oplus \xi_1$ se trivializan, entonces podemos elegir un referencial e, con lo cual la representación matricial de la forma de curvatura $F^{\nabla_{\xi_0\oplus\xi_1}}$ de la suma de Whitney está dada por:

$$F^{\nabla_{\xi_0\oplus\xi_1}}(e) = \begin{pmatrix} F^{\nabla_0}(e) & 0 \\ 0 & F^{\nabla_1}(e) \end{pmatrix} \in M_{n+m}(\Omega^2(U;\mathbb{C})),$$

usando las identidades dadas en (1) se tiene que $s_k(F^{\nabla_{\xi_0\oplus\xi_1}}(e)) = s_k(F^{\nabla_0}(e)) + s_k(F^{\nabla_1}(e))$

por lo tanto

$$ch_k(\xi_0 \oplus \xi_1) = \frac{1}{k!}\Big[s_k\Big(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}F^{\nabla_0}(e)\Big)\Big] + \frac{1}{k!}\Big[s_k\Big(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}F^{\nabla_1}(e)\Big)\Big].$$

Para la otra igualdad usamos la identidad

$$\sigma_k(F^{\nabla_{\xi_0\oplus\xi_1}}(e)) = \sum_{r=0}^{k}\sigma_r(F^{\nabla_0}(e)) \wedge \sigma_{k-r}(F^{\nabla_1}(e))$$

luego se tiene la igualdad deseada.

□

Teorema 4.5. *Sea ξ_0 y ξ_1, fibrados vectoriales complejos entonces*

$$ch_k(\xi_0 \otimes \xi_1) = \sum_{r=0}^{k} ch_r(\xi_0)ch_{k-r}(\xi_1)$$

Demostración. Considere ∇_0, ∇_1 conexiones en los fibrados ξ_0, ξ_1 respectivamente, en (3.14) se definió una conexión; $\nabla(s_0 \otimes s_1) = \nabla_0(s_0) \wedge s_1 + s_0 \wedge \nabla_1(s_1)$ en el fibrado $\xi_0 \otimes \xi_1$, junto con su extensión, para el caso $n = 1$ y se escribe de la forma

$$d^{\nabla}(w \otimes s_0 \otimes s_1) = d^{\nabla_0}(w \otimes s_0) \wedge s_1 - s_0 \wedge d^{\nabla_1}(w \otimes s_1),$$

donde $w \in \Omega^1(M)$, $s_0 \in \Omega^0(\xi_0)$ y $s_1 \in \Omega^0(\xi_1)$. Ahora hallamos la forma de curvatura como la composición

$$F^{\nabla}(s_0 \otimes s_1) = d^{\nabla} \circ \nabla(s_0 \otimes s_1) = d^{\nabla_0} \circ \nabla_0(s_0) \wedge s_1 + s_0 \wedge d^{\nabla_1} \circ \nabla_1(s_1),$$

por lo tanto, la 2-forma de curvatura queda expresada así, $F^{\nabla} = F^{\nabla_0} \wedge id + id \wedge F^{\nabla_1}$ donde $id : \Omega^0(\xi_r) \to \Omega^0(\xi_r)$ para $r = 0, 1$. Por otro lado para hallar las Clases de Chern tenemos que determinar $s_k(F^{\nabla}) = Tr((F^{\nabla})^{\wedge k})$ donde Tr es el homomorfismo traza ver (3.17), empezamos determinando $(F^{\nabla})^{\wedge k}$.

$$(F^{\nabla})^{\wedge k} = \underbrace{F^{\nabla} \wedge ..... \wedge F^{\nabla}}_{k-veces} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(F^{\nabla_0}\right)^{\wedge i} \wedge \left(F^{\nabla_1}\right)^{\wedge(k-i)}.$$

El producto tensorial de aplicaciones lineales induce una aplicación entre los fibrados

$$\mathrm{Hom}(\xi_0, \xi_0) \otimes \mathrm{Hom}(\xi_1, \xi_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\xi_0 \otimes \xi_1, \xi_0 \otimes \xi_1),$$

ésta aplicación junto con (3.10), definen la aplicación

$$\wedge : \Omega^i(\mathrm{Hom}(\xi_0, \xi_0)) \otimes \Omega^i(\mathrm{Hom}(\xi_1, \xi_1)) \longrightarrow \Omega^{i+j}(\mathrm{Hom}(\xi_0 \otimes \xi_1, \xi_0 \otimes \xi_1))$$

entonces podemos formar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Omega^i(\mathrm{Hom}(\xi_0, \xi_0)) \otimes \Omega^j(\mathrm{Hom}(\xi_1, \xi_1)) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "Tr\otimes Tr"'] & \Omega^{i+j}(\mathrm{Hom}(\xi_0 \otimes \xi_1, \xi_0 \otimes \xi_1)) \arrow[d, "Tr"] \\
\Omega^i(M;\mathbb{C}) \otimes \Omega^j(M;\mathbb{C}) \arrow[r, "\wedge"] & \Omega^{i+j}(M;\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

es decir $Tr(\phi \wedge \varphi) = Tr(\phi) \wedge Tr(\varphi)$. Sabiendo que la traza es un $\Omega^0(M)$-homomorfismo y usando la conmutatividad del diagrama tenemos:

$$s_k(F^{\nabla}) = Tr\Big(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(F^{\nabla_0}\right)^{\wedge i} \wedge \left(F^{\nabla_1}\right)^{\wedge(k-i)}\Big) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} s_i(F^{\nabla_0}) s_{k-i}(F^{\nabla_1}).$$

Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} ch_k(\xi_0 \otimes \xi_1) &= \frac{1}{k!}\Big[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} s_i(F^{\nabla_0}) s_{k-i}(F^{\nabla_1})\Big] \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k-i)!.i!}\Big[s_i(F^{\nabla_0}) s_{k-i}(F^{\nabla_1})\Big] \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\Big[s_i(F^{\nabla_0})\Big] \frac{1}{(k-i)!}\Big[s_{k-i}(F^{\nabla_1})\Big] \\ &= \sum_{i=0}^{k} ch_i(\xi_0) ch_{k-i}(\xi_1). \end{aligned}$$

□

Sea ξ un fibrado vectorial complejo; en lo que sigue hallaremos las Clases de Chern y las Clases Características de Chern del fibrado vectorial ξ^*, pero primero abordaremos dos teoremas que ayudarán a determinar dichas Clases.

Teorema 4.6. ***Principio de Splitting*** *Para un fibrado vectorial complejo ξ de dimensión n, sobre una variedad diferenciable compacta M, existe una variedad $T = T(\xi)$ y una aplicación propia diferenciable $f : T \to M$ tal que*

i. La aplicación $f^* : H^k(M) \to H^k(T)$ es inyectiva.

ii. El fibrado inducido es isomorfo a $f^*\xi \cong \gamma_1 \oplus .... \oplus \gamma_n$, para ciertos $\gamma_1, ..., \gamma_n$ fibrados vectoriales complejos de línea.

Prueba. Vea. [4]. Pág.201. Teorema(18.10).

Teorema 4.7. *Sea ξ un fibrado vectorial complejo sobre M. Existe precisamente un conjunto de clases de cohomología $c_k(\xi)$ en $H^{2k}(M; \mathbb{C})$ dependiendo sólo de la clases de isomorfismo de ξ tal que:*

i. La integración de la clase $c_1(H_1)$ es -1, $c_k(H_n) = 0$ cuando $k > 1$ y $c_0(H_n) = 1$.

ii. $f^*(c_k(\xi)) = c_k(f^*\xi)$.

iii. $c_k(\xi_0 \oplus \xi_1) = \sum_{r=0}^{k} c_r(\xi_0) c_{k-r}(\xi_1)$, donde ξ_0, ξ_1 son fibrados vectoriales complejos.

Demostración. Podemos notar que las Clases de Chern de la Definición(4.2) satisface las tres condiciones, faltaría demostrar la parte de unicidad.

Considere L un fibrado vectorial complejo de línea sobre M, por el Teorema(2.1) L tiene su complemento $L^{\perp}$ tal que $L \oplus L^{\perp} = M \times \mathbb{C}^{n+1}$, esto quiere decir que $L_x \oplus L_x^{\perp} = \{x\} \times \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}$ para cada x en M, entonces $L_x = (L, x)$ donde $x \in M$ y L es una recta contenida en $\mathbb{C}^{n+1}$, es un subespacio vectorial de dimensión uno contenida en $\{x\} \times \mathbb{C}^{n+1}$; así tenemos la proyección $proj_2 : M \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ en la segunda componente. Ahora definimos la aplicación

$$\pi : M \to \mathbb{CP}^n; x \to \pi(x) = proj_2(L_x),$$

por otro lado se tiene el fibrado canónico de líneas $H_n = \{(l, u) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} / u \in l\}$ sobre $\mathbb{CP}^n$, mediante π tenemos el fibrado inducido sobre M

$$\begin{tikzcd} \pi^* H_n \arrow[r, "prj_2"] \arrow[d, "prj_1"] & H_n \arrow[d, "\pi_1"] \\ M \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{CP}^n, \end{tikzcd}$$

donde $\pi^* H_n = \{(x, (l, u)) \in M \times H_n, \text{ tal que } \pi_1(l, u) = \pi(x)\}$ y las fibras de $\pi^* H_n$ son isomorfas a las fibras de H_n; la aplicación $\hat{\pi} : L \to H_n$ entre fibrados vectoriales de línea definida de la forma $\hat{\pi}(x, v) = (l', v)$ donde $l' = prj_2(l'_x)$ y $v \in l'$, define un isomorfismo de fibras. Formamos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "prj_1"] & \pi^* H_n \arrow[d, "prj_1"] \\ M \arrow[r, "id"] & M \end{tikzcd}$$

conmutativo, donde ψ se define de la forma $\psi(x, v) = (x, (l, v))$, donde $[v] = l$, entonces tenemos isomorfismos de fibras. En seguida se prueba que L es isomorfo al fibrado $\pi^* H_n$; sólo faltaría ver la diferenciabilidad para eso usamos la expresión local de ψ; tome U un abierto de M, y considere $h : U \times \mathbb{C} \to L|_U$ dada por $h(x, z) = (x, ze)$, una trivialización del fibrado L, donde e es la dirección de la recta l y $k : U \times \mathbb{C} \to \pi^* H_n|_U$ dada de la forma $k(x, z) = (x, [ze], ze)$ es una trivialización del fibrado $\pi^* H_n$, la inversa está dada por $k^{-1}(x(l, v)) = (x, z)$ donde $l = [ze]$. La expresión local queda expresada de la forma

$$k^{-1} \circ \psi \circ h(x, z) = k^{-1}(\psi(x, z)) = k^{-1}(z, [ze], ze) = (z, e),$$

entonces ψ es diferenciable por lo tanto $\pi^* H_n \cong L$. De la parte (ii) se tiene que $\pi^* c_k(H_n) = c_k(\pi^* H_n)$, ósea $\pi^* c_k(H_n) = c_k(L)$, y como $c_k(H_n) = 0$ cuando $k > 1$, entonces $c_k(L) = 0$ para $k > 1$ esto es para cualquier fibrado de línea. Entonces podemos observar que (i) y (ii) determinan las Clases de Chern de un fibrado de línea arbitrario. Si tenemos $L_1, ..., L_n$ fibrados de línea, usando la parte (iii) y (i) se tiene que las Clases de Chern del fibrado $L_1 \oplus ... \oplus L_n$ queda únicamente determinado por $c_1(L_1), ..., c_1(L_n)$, por ejemplo $c_k(L_1 \oplus L_2) = c_k(L_1) + c_1(L_1)c_{k-1}(L_2) + c_k(L_2)$, así se puede expandir la suma cuando tenga n fibrados de línea. Usando el Teorema(4.6) si ξ es un fibrado vectorial complejo, entonces $c_k(f^*\xi) = f^*(c_k(\xi))$, donde el fibrado $f^*\xi = \gamma_1 \oplus ... \oplus \gamma_n$ y como f^* es inyectiva entonces $c_k(\xi)$ quedan únicamente determinadas por $c_1(\gamma_1), ..., c_1(\gamma_n)$. □

Dada el álgebra graduada $H^*(M;\mathbb{C}) = \bigoplus_{i\geq 0} H^{2i}(M;\mathbb{C})$ de cohomología; se define la clase total como

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + ... \in H^*(M;\mathbb{C}) \qquad (2)$$

llamada la **Clase Total de Chern** . Si L es un fibrado línea entonces $c(L) = 1 + c_1(L)$. Por otro lado si tenemos $L_1, ..., L_n$ fibrados de línea entonces

$$c(L_1 \oplus .... \oplus L_k) = \prod_{r=1}^{k}(1 + c_1(L_r)) = \sum_{i=0}^{k} \sigma_i(c_1(L_1), c_1(L_2), ..., c_1(L_k)), \qquad (3)$$

por lo tanto se sigue que $c_i(L_1 \oplus .... \oplus L_k) = \sigma_i(c_1(L_1), c_1(L_2), ..., c_1(L_k))$ por ejemplo $c_1(L_1 \oplus .... \oplus L_k) = c_1(L_1) + ... + c_1(L_k)$ y $c_k(L_1 \oplus .... \oplus L_k) = c_1(L_1)....c_1(L_k)$.

La siguiente proposición nos proporciona las Clases y las Clases Características de Chern del fibrado vectorial dual ξ^* en términos de las respectivas clases del fibrado ξ.

Proposición 4.1. *Para un fibrado vectorial complejo ξ de dimensión n se tiene:*

i. *Si $k > n$ entonces, la clase $c_k(\xi) = 0$.*

ii. *Las Clases de Chern y las Clases Características de Chern del fibrado ξ^*, se determinan de la forma $c_k(\xi^*) = (-1)^k c_k(\xi)$, $ch_k(\xi^*) = (-1)^k ch_k(\xi)$.*

iii. *Si η es un fibrado vectorial real entonces, $c_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}}) = 0$ y $ch_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}}) = 0$.*

Demostración. Para la parte(i), en el caso que γ sea un fibrado de línea por el Teorema(4.7) entonces $\gamma \cong \pi^* H_n$ y así $c_k(\gamma) = 0$ cuando $k > 1$. Ahora para el caso general usamos el Principio de Splitting tomemos $\xi = \gamma_1 \oplus ..... \oplus \gamma_n$, donde $\gamma_1, ..., \gamma_n$ son fibrados de línea. Por lo tanto por (3) se tiene

$$c(\xi) = \prod_{r=1}^{k}(1 + c_1(\gamma_r)) = \sum_{i=0}^{k} \sigma_i(c_1(\gamma_1), ..., c_1(\gamma_k)),$$

donde $c_i(\xi) = \sigma_i(c_1(\gamma_1), ..., c_1(\gamma_n))$; estos son polinomios que dependen únicamente de las clases $c_1(\gamma_1), ..., c_1(\gamma_n)$, por lo tanto en el caso que $k > \dim \xi$ se tiene que $c_k(\xi) = 0$.

Ahora veamos la parte(ii) sea γ un fibrado de línea complejo y por el Lema(2.7)-(ii), se tiene que $\gamma^* \otimes \gamma = \operatorname{Hom}(\gamma, \gamma)$, pero $\operatorname{Hom}(\gamma, \gamma)$ es un fibrado trivial de dimensión uno entonces, tiene conexión plana(en el sentido de la Definición(3.2)), por lo tanto $c_1(\gamma^* \otimes \gamma) = c_1\big(\operatorname{Hom}(\gamma, \gamma)\big) = 0$, ahora aplicando el Teorema(4.5) para el caso en que $k = 1$, con lo cual obtenemos $ch_1(\gamma^*) + ch_1(\gamma) = 0$, así $ch_1(\gamma^*) = -ch_1(\gamma)$, y como $c_1(\gamma) = ch_1$ se tiene $c_1(\gamma^*) = -c_1(\gamma)$. Por lo tanto

$$c(\xi^*) = c(\gamma_1^* \oplus .... \oplus \gamma_n^*) = \prod_{j=1}^{n}(1 + c_1(\gamma^*)) = \prod_{j=1}^{n}(1 - c_1(\gamma^*)),$$

haciendo la multiplicación del término de la derecha, se puede mostrar inductivamente que $c_k(\xi^*) = (-1)^k \sum \sigma_k(c_1(\gamma_1), .., c_1(\gamma_1))$ con lo cual $c_k(\xi^*) = (-1)^k c_k(\xi)$. Para el otro caso, como γ es un fibrado de línea y las Clases características dependen de las Clases de Chern, entonces $ch_k(\gamma) = 0$ cuando $k > 1$, y como $ch_1(\xi) = c_1(\xi)$; así que la Clase característica completa de Chern de un fibrado de línea es $ch(\gamma) = 1 + ch_1(\gamma) = 1 + c_1(\gamma)$, por lo tanto $ch_k(\xi^*) = (-1)^k ch_k(\xi)$.
Para demostrar la parte(iii), primero se probará que para un fibrado vectorial real η éste es isomorfo a su dual, es decir $\eta \cong \eta^* = \operatorname{Hom}(\eta, \mathbb{R})$. Como η es un fibrado vectorial sobre una variedad diferenciable M compacta, entonces éste tiene un producto interno elegimos un producto interno $\langle , \rangle$ en η y definimos la aplicación

$$\psi : \eta \to \operatorname{Hom}(\eta, \mathbb{R}); \psi(v) = \langle u, - \rangle,$$

donde restricta a cada fibra $\psi_x : \eta_x \to \operatorname{Hom}(\eta_x, \mathbb{R})$ dada por $\psi_x(v)u = \langle u, v\rangle$ es un isomorfismo, Para demostrar que es un isomorfismo de fibrados faltaría ver la diferenciabilidad de ψ veamos su expresión local. Tome U un abierto de M donde ambos fibrados se trivializan, considere $h : U \times \mathbb{R}^n \to \eta|_U$ una trivialización de η y $k : U \times (\mathbb{R}^n)^* \to \operatorname{Hom}(\eta, \mathbb{R}|_U)$ la trivialización del fibrado η^* donde su inversa está dada por $k^{-1}(g) = g \circ k(x, -)$, hagamos la composición

$$k^{-1} \circ \psi \circ h(x, v) = k^{-1}(\psi(x, v)) = \psi(h(x, v)) \circ k(x, -)$$

la última igualdad es una aplicación $\psi(h(x, v)) \circ k(x, -) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal, evaluando en un vector tenemos que $\psi(h(x, v)) \circ k(x, u) = \langle h(x, v), k(x, u)\rangle$ la cual es diferenciable, en consecuencia los fibrados en cuestión son isomorfos.
El isomorfismo vale para fibrados reales, por lo tanto

$$(\eta_{\mathbb{C}})^*_{\mathbb{R}} \cong (\eta_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong (\eta^*_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}, \text{ entonces } (\eta_{\mathbb{C}})^* \cong (\eta^*_{\mathbb{C}}).$$

De esta forma se tiene que $c_k(\eta_{\mathbb{C}}) = c_k(\eta^*_{\mathbb{C}})$ también $ch_k(\eta_{\mathbb{C}}) = ch_k(\eta^*_{\mathbb{C}})$, ahora usando la propiedad(ii) para el fibrado complejo $\eta_{\mathbb{C}}$

$$c_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}}) = c_{2k+1}((\eta_{\mathbb{C}})^*) = (-1)^{2k+1} c_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}})$$

igualando los extremos de la ecuación se tiene que $c_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}}) = 0$, y de la misma forma se tiene $ch_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}}) = 0$. $\square$

En virtud a ésta propiedad damos la siguiente definición

Definición 4.3. *Sea η un fibrado vectorial real, definimos las Clases y las Clases Características de* ***Pontryagin*** *respectivamente como:*

$$p_k(\eta) = (-1)^k c_{2k}(\eta_{\mathbb{C}}) \text{ y } ph_k(\eta) = (-1)^k ch_{2k}(\eta_{\mathbb{C}})$$

La Clase Total de Pontryagin se define como $p(\eta) = 1 + p_1(\eta) + ...$

En el siguiente ejemplos se determinará las Clases de Chern del fibrado tangente sobre el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^n$.

Ejemplo 4.1. *En éste ejemplo estamos interesados en calcular las Clases de Chern del fibrado tangente τ sobre espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$. Primero identificaremos a τ con el fibrado $\mathrm{Hom}(H, H^{\perp})$, donde $H = H_n$ es el fibrado canónico de líneas y $H^{\perp}$ es su complemento; las fibras del fibrado vectorial complejo $\mathrm{Hom}(H, H^{\perp})$, son de la forma $\mathrm{Hom}(L, L^{\perp}) \cong \mathbb{C}^n$ para cada recta $L \subset \mathbb{C}^{n+1}$ y las fibras del fibrado tangente τ son espacios tangentes $T_L\mathbb{CP}^n$. Definimos una aplicación de la forma*

$$g_L : \mathrm{Hom}(L, L^{\perp}) \to U_L \subset \mathbb{CP}^n; \phi \to Gra(\phi),$$

donde U_L es una vecindad de L, que contiene a todas las rectas que son consideradas como la gráfica de aplicaciones lineales; esto puede verse de la forma: como $\phi : L \to L^{\perp}$ es lineal $\phi(z) = z(a_1, .., a_n)$ entonces, el gráfico de ϕ se expresa de la forma $Gra(\phi) = \{(z, z(a_1, .., a_n)) : z \in L\} = [1, a_1, .., a_n] \in U_L$. Ahora defínase la inversa de g_L como

$$g_L^{-1} : U_L \subset \mathbb{CP}^n \to \mathrm{Hom}(L, L^{\perp}); [w_0, ..., w_1] \to (\hat{1}, \frac{w_1}{w_0}, ..., \frac{w_n}{w_0}),$$

donde $\hat{1}$ significa que se omite, por lo tanto cada (g_L^{-1}, U_L) es una carta coordenada holomorfa; como $\mathrm{Hom}(L, L^{\perp})$ se identifica con $\mathbb{C}^n$, y el espacio tangente a $\mathbb{C}^n$ en cualquier punto es $\mathbb{C}^n$. La parametrización g_L induce un isomorfismo en sus respectivos espacios tangentes

$$(Dg_L)_0 : \mathrm{Hom}(L, L^{\perp}) \to T_L\mathbb{CP}^n$$

éste define el isomorfismo requerido. Por otro lado se sabe que $H \oplus H^{\perp} = \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ y el fibrado dual de H es $H^* = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C})$ y como H es un fibrado de línea se tiene que $\mathrm{Hom}(H, H) = \epsilon^1$ donde ϵ^1 es un fibrado trivial de dimensión uno. Usando el Teorema(4.7)-(iii) calculamos las Clases de Chern del fibrado $\tau \oplus \epsilon^1$

$$c_k(\tau \oplus \epsilon^1) = \sum_{i=0}^{k} c_i(\tau) c_{k-i}(\epsilon^1)$$

se consigue que $c_k(\tau \oplus \epsilon^1) = c_k(\tau)$ para cada k, en consecuencia sus respectivas Clases Totales son iguales ósea $c(\tau \oplus \epsilon^1) = c(\tau)$, usamos ésta igualdad para calcular las Clases *de Chern de* τ

$$\tau \oplus \epsilon^1 \cong \mathrm{Hom}(H, H^{\perp}) \oplus \mathrm{Hom}(H, H) \cong \mathrm{Hom}(H, H \oplus H^{\perp})) = \underbrace{H^* \oplus ... \oplus H^*}_{(n+1)veces}.$$

Usando el hecho que H^* *es un fibrado de línea, y por el Proposición(4.1) se consigue que* $c_1(H^*) = -c_1(H)$*, además* $c_k(H^*) = 0$ *cuando* $k > 1$*, para hallar la Clase Total Chern se usa (3)*

$$c(\tau) = c(H^* \oplus ... \oplus H^*) = \prod_{i}^{n+1}(1 + c_1(H_i^*)) = (1 - c_1(H))^{n+1}$$

la última parte de la igualdad es el desarrollo de la fórmula binomial general, así obtenemos:

$$c_k(\tau) = (-1)^k \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} c_1(H)^k.$$

4.3. La Clase de Euler

En ésta sección, estamos interesados en definir las clases de Euler, para un fibrado vectorial real, para esto consideremos a ξ como un fibrado vectorial real de dimensión $2k$ sobre una variedad compacta M. Empezamos ésta sección estudiando un tipo de polinomio homogéneo de grado n en $n(2n-1)$ variables llamado Pfaffian, que denotaremos por $\mathrm{Pf}(A)$, donde $A \in \mathfrak{so}_{2n}$[4] es una matriz antisimétrica.

Sea la matriz $A = (A_{ij})_{2n\times 2n}$ definimos el operador alterno asociada a la matriz A de la forma

$$w(A) = \sum_{i<j} A_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n}), \text{ donde } \{e_i\} \text{ es la base canónica de } \mathbb{R}^{2n}.$$

En el caso que $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene, $w(A) = a_1 e_1 \wedge e_2$.
Definimos el $\mathrm{Pf}(A)$ por la ecuación

$$\underbrace{w(A) \wedge .... \wedge w(A)}_{n-veces} = n!\mathrm{Pf}(A)\mathrm{vol},$$

donde $\mathrm{vol} = e_1 \wedge ... \wedge e_n$ y A una matriz antisimétrica. Si A es una matriz de bloques de la forma

$$A = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 & a_n \\ -a_n & 0 \end{pmatrix} \right) \qquad (*)$$

se tiene que $w(A) = a_1 e_1 \wedge e_2 + a_2 e_3 \wedge e_4 + ... + a_n e_{2n-1} \wedge e_{2n}$, por lo tanto obtenemos que

$$w(A) \wedge ... \wedge w(A) = n!(a_1.a_2...a_n)\mathrm{vol}.$$

De éste modo se obtiene $\mathrm{Pf}(A) = a_1.a_2..a_n$ y se deduce la relación $\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$.

Lema 4.5. *Si $A \in \mathfrak{so}_{2n}$ y $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ una matriz arbitraria entonces:*

i. $\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$.

ii. $\mathrm{Pf}(B.A.B^t) = \mathrm{Pf}(A)\det(B)$.

Demostración. Como la matriz es antisimétrica entonces tenemos la existencia de $g \in O_{2n}$ tal que

$$gAg^{-1} = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 & a_n \\ -a_n & 0 \end{pmatrix} \right)$$

[4] $\mathfrak{so}_{2n}$ denota al espacio de matrices antisimétricas y A^t denotará a la matriz transpuesta de A.

(Vea. [4]. Pág.231) con eso tenemos que $\mathrm{Pf}(gAg^{-1})^2 = (a_1...a_n)^2 = \det(gAg^{-1}) = \det(A)$, usando la parte (ii) y el hecho que $g^{-1} = g^t$ se concluye que $\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$ esto es para todo $A \in \mathfrak{so}_{2n}$.
Demostremos las parte (ii) dada la matriz $B = (B_{vi})$ considere los elementos $u_i = Be_i \in \mathbb{R}^{2n}$ donde los $\{e_i\}$ forman una base de $\mathbb{R}^{2n}$ entonces escribimos $u_i = \sum_{v=1}^{2n} B_{vi}e_i$, así tenemos que

$$\tau = \sum A_{ij}u_i \wedge u_j = \sum B_{vi}A_{ij}B_{rj}e_v \wedge e_r = \sum (BAB^t)_{vr}e_v \wedge e_r$$

de donde se tiene $\tau = w(BAB^t)$ y haciendo

$$w(BAB^t) \wedge w(BAB^t) \wedge .... \wedge w(BAB^t) = \tau \wedge .... \wedge \tau = n!\mathrm{Pf}(A)u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_{2n} \qquad (*)$$

y como sabemos que $u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_{2n} = \det(B)e_1 \wedge ... \wedge e_{2n}$ además remplazando en $(*)$ se tiene que

$$w(BAB^t) \wedge w(BAB^t) \wedge .... \wedge w(BAB^t) = n!\mathrm{Pf}(A)\det(B)e_1 \wedge ... \wedge e_{2n}$$

de donde concluye que $\mathrm{Pf}(B.A.B^t) = \mathrm{Pf}(A)\det(B)$. □

Si $A \in M_n(\mathrm{C})$ es una matriz compleja la **realificación** de la matriz A es una aplicación de $M_n(\mathrm{C})$ en $M_{2n}(\mathbb{R})$ en donde un elemento $a + ib$ se escribe de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Esta aplicación induce una función de $\mathfrak{su}_n \subset M_n(\mathrm{C})$ en $\mathfrak{so}_{2n} \subset M_{2n}(\mathrm{R})$ donde $\mathfrak{su}_n$ es el conjunto de matrices antihermitiana. Desde que A es antihermitiana entonces existe una base ortonormal conformado por autovectores donde sus autovalores son imaginarios puros esto es ia_j para $(1 \leq j \leq n)$, CON lo cual podemos asumir que $A = \mathrm{diag}(-ia_1, .., -ia_n)$ así obtenemos que $\det(A) = (-i)^n a_1...a_n$ con $a_i \in \mathbb{R}$ y

$$ia_j = \begin{pmatrix} 0 & -a_j \\ a_j & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}_2.$$

De esta manera tenemos $\mathrm{Pf}(A_{\mathbb{R}})) = (-1)^n a_1..a_n$ de ahí se concluye que

$$\mathrm{Pf}(A_{\mathbb{R}}) = (-1i)^n \det(A).$$

Sea ξ un fibrado vectorial real sobre una variedad compacta M en ξ tenemos un producto interno(métrica), éste induce un producto interno de parejas definido de la forma

$$\begin{aligned} \langle , \rangle \quad : \quad \Omega^i(\xi) \otimes \Omega^j(\xi) &\to \Omega^{i+j}(M) \\ (w_1 \otimes s_1, w_2 \otimes s_2) &\to w_1 \wedge w_2 \otimes \langle s_1, s_2 \rangle, \end{aligned}$$

donde s_1, s_2 son secciones en ξ, y $\langle , \rangle : \xi_p \oplus \xi_p \to \mathbb{R}$ es el producto interno en la fibra ξ_p dada de la forma $\langle s_1(p), s_2(p) \rangle$ para cada $p \in M$, y $w_1 \in \Omega^i(M)$, $w_2 \in \Omega^j(M)$.

Definición 4.4. *Sea ξ un fibrado vectorial real de dimensión $2k$ sobre M, con producto interno. Una conexión ∇ en $(\xi, \langle,\rangle)$ se llama **métrica ortogonal** si*

$$d\langle s_1, s_2\rangle = \langle \nabla s_1, s_2\rangle + \langle s_1, \nabla s_2\rangle$$

donde, d es la derivada usual en $\mathbb{R}$, y diremos que la métrica ortogonal de conexión ∇ es compatible con la métrica $\langle,\rangle$.

Sea U un abierto de M donde ξ se trivializa, elegimos un referencial ortonormal $e = \{e_1, .., e_{2k}\}$ local, esto quiere decir que $e = \{e_1(p), .., e_{2k}(p)\}$ es una base ortonormal de ξ_p para todo p en U, y tome $A = (A_{ij})$ la matriz de forma de conexión asociada a dicho referencial, $\nabla e_i = \sum_{j=1}^{2k} A_{ij} \otimes e_j$. Como e es ortonormal se tiene que $\langle e_i, e_k\rangle = \delta_{ik}$ en U, además $d(\langle e_i, e_k\rangle) = 0$ para toda pareja (i, k).
Si consideramos que ∇ es una métrica ortogonal, entonces

$$\begin{aligned}
d(\langle e_i, e_k\rangle) &= \langle \nabla e_i, e_k\rangle + \langle e_i, \nabla e_k\rangle \\
0 &= \langle \sum_j A_{ij} \otimes e_j, e_k\rangle + \langle e_i, \sum_j A_{kj} \otimes e_j\rangle \\
&= \sum_j A_{ij}\langle e_j, e_k\rangle + \sum_j A_{kj}\langle e_i, e_j\rangle = A_{ik} + A_{ki} \\
0 &= A_{ik} + A_{ki}
\end{aligned}$$

de donde se deduce que A es una matriz antisimétrica, con respecto a un referencial ortonormal. Y de la misma forma si A es una matriz antisimétrica entonces ∇ es una métrica ortogonal de conexión. Por otro lado asociada a éste referencial ortonormal tenemos la forma de curvatura $F^{\nabla}(e) = dA - A \wedge A \in M_{2k}(\Omega^2(U))$, donde A es la matriz antisimétrica de forma de conexión, así $F^{\nabla}(e)$ también se convierte en una matriz antisimétrica. Por lo tanto se puede aplicar el polinomio Pf y se consigue que $\mathrm{Pf}(F^{\nabla}(e)) \in \Omega^{2k}(U)$.
Si en U tomamos otro referencial ortonormal e', y además suponemos que ξ es orientable (Vea.Pág.26) entonces, la matriz de cambio de base $B_p \in \mathrm{SO}_{2k}$[5] entonces, $F^{\nabla}(e') = B_p F^{\nabla}(e) B_p^{-1}$ aplicando el polinomio Pf y usando el Lema(4.6)-(ii) se tiene

$$\mathrm{Pf}(F^{\nabla}(e')) = \mathrm{Pf}(B_p F^{\nabla}(e) B_p^{-1}) = \det(B_p)\mathrm{Pf}(F^{\nabla}(e)) = \mathrm{Pf}(F^{\nabla}(e))$$

por lo tanto $\mathrm{Pf}(F^{\nabla}(e))$ define una $2k-$forma, global en M y por el Lema(4.4) se muestra que $\mathrm{Pf}(F^{\nabla})$ es una forma cerrada que define una clase de cohomología, esto es $[\mathrm{Pf}(F^{\nabla})] \in H^{2k}(M)$.

Si ξ es un fibrado vectorial sobre M, entonces éste tiene una métrica de conexión, como el fibrado se trivializa en abiertos de M, esto quiere decir que localmente tiene

[5] SO_{2k} es el grupo de matrices ortogonales. Si $A \in \mathrm{SO}_{2k}$ entonces $A^t = A^{-1}$.

una métrica de conexión ∇_α compatible con un producto interno $g = \langle , \rangle$. Usando la partición de la unidad diferenciable $(\rho)_{\alpha\in I}$ y por la Proposición(3.1) se tiene que $\nabla = \sum \rho_\alpha \nabla_\alpha$ define una conexión en ξ, ahora veamos que esto es una métrica de conexión, si cada ∇_α es una métrica de conexión compatible con $g = \langle , \rangle$ entonces encaja en la Definición(4.4)

$$d\langle s_1, s_2\rangle = \langle \nabla_\alpha s_1, s_2\rangle + \langle s_1, \nabla_\alpha s_2\rangle$$

por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} d\langle s_1, s_2\rangle &= \langle \nabla s_1, s_2\rangle + \langle s_1, \nabla s_2\rangle = \langle \sum \rho_\alpha \nabla_\alpha s_1, s_2\rangle + \langle s_1, \sum \rho_\alpha \nabla_\alpha s_2\rangle \\ &= \sum \rho_\alpha \big(\langle \nabla_\alpha s_1, s_2\rangle + \langle s_1, \nabla_\alpha s_2\rangle\big) \\ &= \sum \rho_\alpha d(s_1, s_2) = d(s_1, s_2). \end{aligned}$$

Considere las aplicaciones continuas i_ν y π

$$M \xrightarrow{i_\nu} M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} M$$

dadas por $i_\nu(x) = (x, \nu)$ para$(\nu = 0, 1)$ y $\pi(x, t) = x$. Si ξ es un fibrado sobre M entonces $\tilde{\xi} = \pi^*(\xi)$ es el fibrado inducido sobre $M \times \mathbb{R}$, por lo tanto $i_\nu^*(\tilde{\xi}) = \xi$.

Lema 4.6. *Sea ξ un fibrado vectorial diferenciable sobre M, dado los productos internos g_ν y métricas de conexión ∇_ν para $(\nu = 0, 1)$ en ξ entonces, existe un producto interno $\tilde{g}$ en $\tilde{\xi}$ y una métrica de conexión $\tilde{\nabla}$ compatible con $\tilde{g}$ tal que $i_\nu^*(\tilde{g}) = g_\nu$ y $i_\nu^*(\tilde{\nabla}) = \nabla_\nu$.*

Demostración. Si g_ν es un producto interno en ξ entonces $\pi^*(g_\nu)$ es un producto interno en $\tilde{\xi}$, así mismo si ∇_ν son conexiones en ξ por lo tanto $\pi^*(\nabla_\nu)$ son conexiones en $\tilde{\xi}$. Considere la partición de la unidad $\{\rho_0, \rho_1\}$ subordinada a la cobertura abierta $M\times(-\infty, 3/4)$ y $M\times(1/4, \infty)$. Entonces $\tilde{g} = \rho_0\pi^*(g_0)+\rho_1\pi^*(g_1)$ define un producto interno en $\tilde{\xi}$, de tal manera que $i_0^*(\tilde{g}) = \pi^*(g_0)$ en $M\times(-\infty, 1/4)$ y también $i_1^*(\tilde{g}) = \pi^*(g_1)$ en $M \times (3/4, \infty)$. Ahora considere $\tilde{\nabla}'$ cualquier métrica de conexión compatible con el producto interno $\tilde{g}$, por lo tanto se tiene tres conexiones $\pi^*(\nabla_0)$,$\tilde{\nabla}'$ y $\pi^*(\nabla_1)$ compatibles con $\tilde{g}$ sobre los abiertos $M \times (-\infty, 1/4)$, $M \times (1/8, 7/8)$ y $M \times (3/4, \infty)$ respectivamente; ahora usamos la partición de la unidad diferenciable $\{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$ subordinada a dicha cobertura para pegar las conexiones y obtenemos una conexión $\tilde{\nabla} = \rho_0\pi^*(\nabla_0) + \rho_1\pi^*(\nabla_0) + \rho_2\tilde{\nabla}'$ en $M \times \mathbb{R}$ compatible con $\tilde{g}$ de tal manera que $i_\nu^*(\tilde{\nabla}) = \nabla_\nu$.

□

Corolario 4.1. *La clase de cohomología $[\mathrm{Pf}(F^\nabla)] \in H^{2k}(M)$ es independiente del producto interno y de la métrica de conexión compatible.*

Demostración. Consideremos dos métricas de conexión junto con sus productos internos compatibles, (g_0, ∇_0), (g_1, ∇_1) y tomemos el producto interno y la métrica de conexión en $\tilde{\xi}$, definida en lema anterior $(\tilde{g}, \tilde{\nabla})$. Si $F^{\tilde{\nabla}}$ es la forma de curvatura asociada a la conexión $\tilde{\nabla}$, y F^{∇_ν} la forma de curvatura asociada a las conexiones ∇_ν para$(\nu = 0, 1)$ por lo tanto, $i_\nu^*(F^{\tilde{\nabla}}) = F^{\nabla_\nu}$ aplicando el polinomio Pfaffian se tiene $i_\nu^*(\mathrm{Pf}(F^{\tilde{\nabla}})) = \mathrm{Pf}(F^{\nabla_\nu})$. Además como las aplicaciones i_0, i_1 son homotópicas entonces $i_0^* = i_1^* : H^k(M \times \mathbb{R}) \to H^k(M)$

$$[\mathrm{Pf}(F^{\nabla_0})] = i_0^*(\mathrm{Pf}(F^{\tilde{\nabla}})) = i_1^*(\mathrm{Pf}(F^{\tilde{\nabla}})) = [\mathrm{Pf}(F^{\nabla_1})].$$

□

Definición 4.5. *Sea ξ un fibrado vectorial real orientada de dimensión $2k$ definimos la clase de cohomología*

$$e(\xi) = \left[\mathrm{Pf}\left(\frac{-F^{\nabla}}{2\pi}\right)\right] \in H^{2k}(M),$$

llamada la ***Clase de Euler.***

Ejemplo 4.2. *Tome M como una superficie en $\mathbb{R}^3$ orientada con métrica riemaniana, definimos el fibrado cotangente(dual) τ^* sobre M, podemos notar que $\Omega^0(\tau^*|_U) = \Omega^1(U)$ entonces elegimos un referencial ortonormal $e = \{e_1, e_2\}$ de 1-formas, de tal manera que $e_1 \wedge e_2 = vol$ en U. Si ∇ es una métrica ortogonal en τ^* entonces la matriz de forma de conexión es antisimétrica esto es*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ -A_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto $\nabla e_1 = A_{12} \otimes e_2$ y $\nabla e_2 = -A_{12} \otimes e_1$ donde $A_{12} = a_1 e_1 + a_2 e_2$ para ciertas funciones diferenciales a_1, a_2; esto es llamada la conexión de Levi-Civita. Por otro lado podemos notar que $A_{12} \wedge A_{12} = (a_1 e_1 + a_2 e_2) \wedge (a_1 e_1 + a_2 e_2) = 0$, entonces la forma de curvatura

$$F^{\nabla}(e) = dA - A \wedge A = \begin{pmatrix} 0 & dA_{12} \\ -dA_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

en este caso el $\mathrm{Pf}(F^{\nabla}(e)) = dA_{12}$, esta es llamada la ***forma de Gauss-Bonnet****, y la Curvatura Gaussiana $\kappa \in \Omega^0(M)$ es definida por la fórmula*

$$-\kappa vol = \mathrm{Pf}(F^{\nabla}).$$

Ahora nuestro interés es definir la clase de Euler para un fibrado complejo, para esto considere a ξ como un fibrado vectorial complejo de dimensión k, sobre M con una conexión hermitiana que denotaremos por $\langle,\rangle_{\mathbb{C}}$. Una conexión ∇ en ξ es una métrica ortogonal(unitaria) si se cumple que

$$d\langle s_1, s_2\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \nabla s_1, s_2\rangle_{\mathbb{C}} + \langle s_1, \nabla s_2\rangle_{\mathbb{C}},$$

donde s_1, s_2 son secciones en $\Omega^0(\xi)$. Sea U un abierto de M donde ξ se trivializa, elegimos un referencial ortonormal $e = \{e_1, ..., e_k\}$ así $\langle e_i, e_j\rangle_{\mathbb{C}} = \delta_{ij}$, si $A = (A_{ij})$ es la matriz de forma de conexión asociada al referencial e, entonces $\nabla e_i = \sum_j A_{ij} \otimes e_j$, aprovechando que la conexión es una métrica ortogonal, conseguimos que $A_{ij} + \bar{A}_{ji} = 0$ por lo tanto la matriz de 1-formas de conexión es antihermitiana. El fibrado vectorial complejo $(\xi, \langle,\rangle_{\mathbb{C}})$ con métrica ortogonal, induce un fibrado vectorial real $\xi_{\mathbb{R}}$ de dimensión $2k$, entonces una métrica ortogonal $\langle,\rangle$ para éste fibrado es la parte real de la métrica de ξ, $\langle,\rangle = \mathrm{Re}(\langle,\rangle_{\mathbb{C}})$, la matriz de forma de conexión del fibrado $\xi_{\mathbb{R}}$, asociada al referencial $e' = \{e_1, ..., e_k, ie_1, .., ie_k\}$ es la matriz antisimétrica $(A_{\mathbb{R}})_{2k\times 2k}$. Entonces la Clase de Euler del fibrado complejo ξ, es la Clase de Euler de $\xi_{\mathbb{R}}$ que se denotará por $e(\xi_{\mathbb{R}})$.

Teorema 4.8. *Tenemos las siguientes afirmaciones:*

i. Para ξ fibrado vectorial complejo de dimensión k se tiene, $e(\xi_{\mathbb{R}}) = c_k(\xi)$.

ii. Para ξ_1 y ξ_2 fibrados vectoriales reales orientados se tiene, $e(\xi_1 \oplus \xi_2) = e(\xi_1)e(\xi_2)$.

iii. Si $f : N \to M$ una aplicación diferenciable y ξ un fibrado vectorial real sobre M entonces, $e(f^*\xi) = f^*(e(\xi))$.

Demostración. Para la parte(i), dado el fibrado vectorial complejo con una métrica hermitiana $(\xi, \langle,\rangle_{\mathbb{C}})$, por los comentarios previos a éste teorema el fibrado ξ induce un fibrado vectorial real $\xi_{\mathbb{R}}$, donde la matriz de forma de conexión es $A_{\mathbb{R}}$ asociada al referencial e', por lo tanto la forma de curvatura es $F^{\nabla}_{\mathbb{R}}$, que se relaciona con F^{∇} de la forma

$$\mathrm{Pf}\ \big(F^{\nabla}_{\mathbb{R}}\big) = (-i)^k \det\big(F^{\nabla}\big),$$

donde F^{∇} es la forma de curvatura de $(\xi, \langle,\rangle_{\mathbb{C}})$; usando esta igualdad se tiene

$$\mathrm{Pf}\ \Big(\frac{-F^{\nabla}_{\mathbb{R}}}{2\pi}\Big) = (-i)^k \det\Big(\frac{-F^{\nabla}}{2\pi}\Big) = \Big(\frac{i}{2\pi}\Big)^k \sigma_k(F^{\nabla}) = \sigma_k\Big(\frac{iF^{\nabla}}{2\pi}\Big)$$

eso completa la prueba. Para(ii) tenemos dos fibrados orientados con métricas $(\xi_1, \langle,\rangle)$ y $(\xi_2, \langle,\rangle)$ y métricas ortogonales ∇_1 y ∇_2 respectivamente; entonces la métrica ortogonal en $\xi_1 \oplus \xi_2$, esta dada por $\nabla = \nabla_1 \oplus \nabla_2$, si tomamos U un abierto en M donde ambos fibrados se trivializan y elegimos referenciales ortonormales e' en $\xi_1|_U$ y e'' en $\xi_2|_U$, por lo tanto la matriz de forma de conexión asociada al referencial $\{e', e''\}$ esta dada por $A = A_1 \oplus A_2$, donde A_1 es la matriz de forma de conexión asociada al referencial e' y A_2 es la matriz de forma de conexión asociada al referencial e'', de la misma forma tenemos la forma de curvatura que estará dada por $F^{\nabla} = F^{\nabla_1} \oplus F^{\nabla_2}$ en consecuencia tenemos

$$\mathrm{Pf}\big(F^{\nabla_1} \oplus F^{\nabla_2}\big) = \mathrm{Pf}\big(F^{\nabla_1}\big)\mathrm{Pf}\big(F^{\nabla_2}\big)$$

de ahí obtenemos que $e(\xi_1 \oplus \xi_2) = e(\xi_1)e(\xi_2)$. Para la demostración de la parte(iii) usamos la forma de curvatura en $f^*\xi$ dada de la forma $f^*\big(F^{\nabla}\big)= F^{f^*(\nabla)}$, aplicando el Pf y usando la propiedades del Pull-back se tiene $f^*\big(\mathrm{Pf}\big(F^{\nabla}\big)\big)= \mathrm{Pf}\big(F^{f^*(\nabla)}\big)$ de ahí se tiene $e(f^*\xi) = f^*(e(\xi))$. □

El Principio de Splitting real que presentamos en seguida ayuda a justificar que las Clases de Euler son únicas, salvo una constante real.

Teorema 4.9. ***Principio de Splitting Real*** *Para un fibrado vectorial real ζ orientable sobre M, entonces existe una variedad diferenciable $T = T(\zeta)$, y una aplicación propia diferenciable $f : T \to M$ tal que:*

i. $f^* : H^*(M) \to H^*(T)$ *es inyectiva.*

ii. $f^*\zeta = \gamma_1 \oplus .... \oplus \gamma_n$ *cuando* $\dim \zeta = 2n$ *y* $f^*\zeta = \gamma_1 \oplus .... \oplus \gamma_n \oplus \epsilon^1$ *en el caso que* $\dim \zeta = 2n + 1$*; donde* $\gamma_1, ..., \gamma_n$ *son fibrados reales orientados bi-dimensionales y* ϵ^1 *es un fibrado de línea trivial.*

Demostración. Vea.[4]. Pág.197. Teorema(19.7). □

El Teorema siguiente, muestra que si existe una clase de cohomología asociada a un fibrado real éste es la Clase de Euler salvo una constante real.

Teorema 4.10. *Suponga que para cada clase de isomorfismo de fibrados vectoriales reales ζ^{2n} orientados de dimensión $2n$ sobre M, tiene asociada una clase $\hat{e}(\zeta^{2n}) \in H^{2n}(M)$ que satisface:*

i. $f^*(\hat{e}(\zeta)) = \hat{e}(f^*(\zeta))$*, donde* $f : N \to M$ *es una aplicación diferenciable*

ii. $\hat{e}(\zeta \oplus \zeta') = \hat{e}(\zeta)\hat{e}(\zeta')$*, para fibrados vectoriales reales orientables sobre la misma base.*

Entonces existe una constante real $a \in \mathbb{R}$ tal que $\hat{e}(\zeta^{2n}) = a^n e(\zeta^{2n})$.

Demostración. Considere L un fibrado de línea complejo sobre M, éste fibrado induce un fibrado vectorial real $L_{\mathbb{R}}$ de dimensión dos, ahora se define $c(L) = \hat{e}(L_{\mathbb{R}})$, entonces por la condición(i) del teorema se tiene que $f^*(c(L)) = c(f^*L)$, usando los argumentos de la demostración del Teorema(4.7), se tiene que las clases $c(L)$ dependen únicamente de la clase uno de Chern $c_1(L)$, esto quiere decir que existe una constante real a tal que $c(L) = ac_1(L)$, luego se tiene que $\hat{e}(L_{\mathbb{R}}) = ae(L_{\mathbb{R}})$, por otro lado si γ es un fibrado real orientable sobre M de dimensión dos, éste fibrado es de la forma $L_{\mathbb{R}}$ esto se ve de la siguiente manera γ_x es una fibra orientada(espacio vectorial real orientado de dimensión dos) a éste le daremos estructura compleja donde la suma es la misma, sólo falta la multiplicación por $\sqrt{-1}$ esto se define como la rotación de positiva en $\pi/2$. Por lo tanto para cualquier fibrado real orientado de dimensión dos se tiene $\hat{e}(\gamma) = ae(\gamma)$. Si $\zeta^{2n} = \gamma_1 \oplus ... \oplus \gamma_n$ donde γ_i son fibrados vectoriales orientables bi-dimensionales, usando el Teorema(4.8)-(iii) se consigue que $\hat{e}(\zeta^{2n}) = a^n e(\zeta^{2n})$. Veamos el caso general donde ζ^{2n} es un fibrado vectorial orientable real, por el Principio de Splitting Real, parte (ii) tenemos $f^*(\zeta^{2n}) = \gamma_1 \oplus ... \oplus \gamma_n$, así $\hat{e}(f^*\zeta^{2n}) = \hat{e}(\gamma_1 \oplus ... \oplus \gamma_n)$ aplicando la primera y segunda condición del teorema se tiene $f^*(\hat{e}(\zeta^{2n})) = f^*(a^n e(\zeta^{2n}))$ y por la inyectividad de f^*, se concluye la igualdad deseada $\hat{e}(\zeta^{2n}) = a^n e(\zeta^{2n})$.

□

Ahora definimos las **Clases de Pontryagin** para un fibrado vectorial ζ real, como:

$$p_k(\zeta) = (-1)^k c_{2k}(\zeta_{\mathbb{C}})$$

y la **Clase Total de Pontryagin** se define de la forma $p(\zeta) = 1 + p_1(\zeta) + p_2(\zeta) + ...$. Terminamos esta sección dando un importante resultado que relaciona las Clases de Pontryagin con la Clase de Euler.

Proposición 4.2. *Sea ζ un fibrado vectorial real orientable de dimensión $2k$, entonces $p_k(\zeta) = e(\zeta)^2$.*

Demostración. Debemos probar que $e(\zeta)^2 = (-1)^k c_{2k}(\zeta_{\mathbb{C}})$ donde ζ es el fibrado vectorial real orientable, con métrica $\langle , \rangle$ que es compatible con la métrica de conexión ∇, entonces $e(\zeta)$ es representado localmente por $\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^k \mathrm{Pf}\big(F^{\nabla}(e)\big)$, acá e es un referencial ortonormal elegido en un abierto trivializante del espacio base; por otro lado complexificamos el fibrado ζ, así obtenemos un fibrado vectorial complejo $\zeta_{\mathbb{C}}$ de dimensión $2k$, para dotarle de una métrica a éste fibrado complexificamos la métrica la misma que quedaría expresada de la forma $\langle v \otimes r, w \otimes z \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v, w \rangle \otimes r\bar{z}$, de ésa manera e es un referencial ortonormal con la métrica complexificada, que es compatible con una métrica hermitiana elegida ∇, por lo tanto A es la matriz antihermitiana de forma de conexión asociada a dicho referencial, en consecuencia $F^{\nabla}(e)$ es la matriz antihermitiana de forma de curvatura, entonces $c_{2k}(\zeta_{\mathbb{C}})$ es representado localmente por $\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{2k} \det\big(F^{\nabla}(e)\big)$, usando la propiedad de que $\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$, se tiene el resultado deseado. □

Capítulo 5

El Isomorfismo de Thom y la Fórmula General de Gauss-Bonnet

Éste es uno de los capítulos más importante de nuestro trabajo, acá se relacionará la cohomología del espacio total E de un fibrado ξ, con la cohomología de su espacio base M. Pero nuestro principal objetivo es establecer el Isomorfismo de Thom. En el caso que el espacio base M sea una variedad compacta se escribirá éste isomorfismo en forma explicita en términos de la Clase de Thom; finalmente usando ésta clase y el isomorfismo dado encontraremos la Fórmula General de Gauss-Bonnet.

5.1. La Fórmula de Künneth y el Teorema de Leray-Hirsch

En esta parte demostraremos la Fórmula de Künneth, que permite calcular los grupos de cohomología de un espacio producto en términos de los grupos de cohomología de cada uno de los productos

$$H^*(M \times F) \cong H^*(M) \otimes H^*(F), \qquad (*)$$

donde M y F son variedades diferenciales. La demostración se hará por inducción sobre abiertos de uno de los productos y luego se aplica el Teorema(1.3) para obtener el resultado mas general.
Como $(*)$ puede presentarse de la forma

$$H^n(M \times F) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(M) \otimes H^q(F) \text{ para todo } n. \qquad (**)$$

Con la cual demostraremos $(**)$ usando las ideas establecidas.

Las proyecciones

$$\begin{tikzcd} M \times F \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\pi"] & F \\ M & \end{tikzcd}$$

dan origen a las aplicaciones $\pi^* : H^k(M) \to H^k(M \times F)$ y $\rho^* : H^l(F) \to H^l(M \times F)$ y éstas inducen la aplicación

$$H^k(M) \otimes H^l(F) \to H^{k+l}(M \times F) \text{ de la forma } w \otimes \phi \to \pi^* w \wedge \rho^* \phi,$$

por lo tanto queda bien definida la aplicación

$$\psi : H^*(M) \otimes H^*(F) \to H^*(M \times F).$$

Demostraremos que ψ es un isomorfismo. Considere $\mathcal{V}$ una cobertura abierta de M, y $\mathcal{U}$ colección de abiertos donde se cumple que ψ es un isomorfismo; se probará las cuatro condiciones del Teorema(1.3).La primera condición es trivial, para la segunda condición considere U un abierto en $\mathcal{V}$ difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ así se tiene $H^*(U) = H^*(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ y cómo $H^*(U \times F) = H^*(F)$ entonces ψ es un isomorfismo. Para la condición tres considere $U, V \in \mathcal{U}$ y también $U \cap V \in \mathcal{U}$ ósea tenemos los tres isomorfismos; $\psi : H^*(U \times F) \to H^*(U) \otimes H^*(F)$, $\psi : H^*(V \times F) \to H^*(V) \otimes H^*(F)$ y $\psi : H^*((U \cap V) \times F) \to H^*(U \cap V) \otimes H^*(F)$ por demostrar que $\psi : H^*((U \cup V) \times F) \to H^*(U \cup V) \otimes H^*(F)$ es un isomorfismo, en ese sentido tomemos la secuencia de Mayer-Vietoris para $U \cup V$ y un $p-$fijo

$$\cdots \longrightarrow H^p(U \cup V) \xrightarrow{I^*} H^p(U) \oplus H^p(V) \xrightarrow{J^*} H^p(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

si tensorizamos por $H^{n-p}(F)$. Entonces obtenemos la secuencia

$$\cdots \longrightarrow H^p(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) \xrightarrow{I^* \otimes i} \Big(H^p(U) \otimes H^{n-p}(F)\Big) \oplus \Big(H^p(V) \otimes H^{n-p}(F)\Big) \xrightarrow{J^* \otimes i} H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) \longrightarrow \cdots .$$

Por otro lado la siguiente secuencia

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{p=0}^n H^p(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) \longrightarrow \bigoplus_{p=0}^n \Big(\big(H^p(U) \otimes H^{n-p}(F)\big) \oplus \big(H^p(V) \otimes H^{n-p}(F)\big)\Big) \longrightarrow \bigoplus_{p=0}^n H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) \longrightarrow \cdots$$

sigue conservando la exactitud. Ahora podemos formar el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigoplus H^p(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \bigoplus\big((H^p(U) \otimes H^{n-p}(F)) \oplus (H^p(V) \otimes H^{n-p}(F))\big) \arrow[r] \arrow[d, "\psi \oplus \psi"] & \bigoplus H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) \arrow[d, "\psi"] \\ H^n((U \cup V) \times F) \arrow[r] & H^n(U \times F) \oplus H^n(V \times F) \arrow[r] & H^n((U \cap V) \times F) \end{tikzcd}$$

el cual es conmutativo, excepto posiblemente en el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \bigoplus\Big(H^p(U\cap V)\otimes H^{n-p}(F)\Big) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\psi"'] & \bigoplus\Big(H^{p+1}(U\cup V)\otimes H^{n-p}(F)\Big) \arrow[d, "\psi"] \\ H^n((U\cap V)\times F) \arrow[r, "\delta^*"] & H^{n+1}((U\cup V)\times F) \end{tikzcd}$$

verificaremos que el diagrama es conmutativo, sea $w\otimes\phi$ en $H^p(U\cup V)\otimes H^{n-p}(F)$ entonces

$$\psi\circ\delta^*(w\otimes\phi)=\psi(\delta^*(w)\otimes\phi)=\pi^*(\delta^*(w))\wedge\rho^*(\phi). \qquad (\theta)$$

También se tiene

$$\delta^*\circ\psi(w\otimes\phi)=\delta^*(\pi^*(w)\wedge\rho^*(\phi)). \qquad (\beta)$$

Ahora considere $\{\alpha_U,\alpha_V\}$ la partición de la unidad subordinada a la cobertura $\{U,V\}$ esto es, $\alpha_U w+\alpha_V w=w$ y como $w\in H^p(U\cap V)$, se tiene que $dw=0$, entonces $d(\alpha_U(w))=-d(\alpha_V(w))$ en $U\cap V$, ahora podemos definir

$$\delta^*(w)=\begin{cases}-d(\alpha_V w), & \text{en } U\\ d(\alpha_U w), & \text{en } V\end{cases}$$

el conjunto $\{\pi^*\alpha_U,\pi^*\alpha_V\}$ forma una partición de la unidad en $(U\cup V)\times F$ subordinada a la cobertura $\{U\times F, V\times F\}$ entonces definimos

$$\pi^*\delta^*(w)=\begin{cases}-d(\pi^*(\alpha_V w)), & \text{en } U\times F\\ d(\pi^*(\alpha_U w)), & \text{en } V\times F\end{cases}$$

entonces ¨β¨queda de la siguiente manera

$$\delta^*(\pi^*(w)\wedge\rho^*(\phi))=d\big(\pi^*\alpha_U(\pi^*w\wedge\rho^*\phi)\big)=d\big((\pi^*\alpha_U)\pi^*w\wedge\rho^*\phi\big)=d\big(\pi^*(\alpha_U w)\wedge\rho^*\phi\big)$$

de la última igualdad tenemos que es de la forma $\pi^*(\delta^*w)\wedge\rho^*(\phi)$, por lo tanto es igual a ¨θ¨, entonces el diagrama es conmutativo y por el Lema Cinco se concluye que la aplicación $\psi:\bigoplus H^p(U\cup V)\otimes H^{n-p}(F)\to H^n((U\cup V)\times F)$ es un isomorfismo.
Para la condición (iv) considere el conjunto $\{U_1,..,U_r...\}$ de abiertos disjuntos dos a dos en $\mathcal{U}$, entonces tenemos

$$H^*\big(\cup U_i\times F\big)\cong\big(H^*(U_1)\oplus...\oplus H^*(U_1)\oplus..\big)\otimes H^*(F)\cong H^*\big(\cup U_i\big)\otimes H^*(F),$$

en consecuencia la Fórmula de Künneth vale para M.

El **Teorema de Leray-Hirsch** que presentaremos en seguida es una primera relación entre la cohomología del espacio total E de un fibrado, y la cohomología de su base M.

Para tales fines empezamos dando la siguiente definición.
Sea $\pi : E \to M$, un fibrado diferenciable sobre M con fibra F, el producto

$$H^i(M) \otimes H^j(E) \to H^{i+j}(E) \text{ dada por } a.e = \pi^*(a) \wedge e, \qquad (1)$$

donde $a \in H^i(M)$, $e \in H^j(E)$ y $\pi^* : H^i(M) \to H^i(E)$, hace que $H^*(E)$ llegue a ser un módulo graduado sobre el álgebra graduada $H^*(M)$.
Considere $\xi = (E, F, M, \pi)$ un fibrado diferenciable (no necesariamente vectorial) y $i_p : F_p \to E$, la inclusión. Supóngase que existen clases de cohomología globales $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ en $H^{n_\alpha}(E)$, con la propiedad que:

$$\{i_p^*(e_\alpha) \mid \alpha \in A\} \text{ es una base del espacio vectorial } H^*(F_p) \qquad (2)$$

entonces queda definida la aplicación

$$\psi : H^*(M) \otimes R\{e_\alpha / \alpha \in A\} \to H^*(E), \;\; \psi(a \otimes e) = \pi^*(a) \wedge e \qquad (\theta)$$

Teorema 5.1. *En el sentido de la definición en (2) el espacio vectorial $H^*(E)$, es $H^*(M)$-módulo libre, con base $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$.*

Demostración. La demostración equivale a probar que la aplicación ψ definida en ´θ¨ es un isomorfismo, y dicha prueba se hace en base a inducción sobre abiertos de M y luego se aplica Teorema(1.3), se sigue de forma análoga a la prueba de la Fórmula de Künneth, por eso omitiremos la demostración en éste trabajo. Sabiendo que si ψ es un isomorfismo tenemos:

$$H^*(E) \cong H^*(M) \otimes R\{e_\alpha / \alpha \in A\} \cong H^*(M) \otimes H^*(F)$$

por lo tanto $H^*(E)$ es un módulo libre sobre $H^*(M)$ con base $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$. □

5.2. Isomorfismo de Thom

En adelante indicaremos a $\xi = (E, M, \pi_\xi)$ como un fibrado vectorial real orientable de dimensión m, sobre la base M (de dimensión n). **El Isomorfismo de Thom** permite calcular los grupos de cohomología con soporte compacto $H_c^*(E)$ del espacio total del fibrado ξ, en términos de los grupos de cohomología del espacio base $H^*(M)$, específicamente $H_c^{q+m}(E) \cong H_c^q(M)$ para cualquier $q \in \{0, .., n\}$. Incorporaremos dos proposiciones que ayudarán a establecer dicho isomorfismo.

Proposición 5.1. *Para un fibrado vectorial $\xi = (E, M, \pi_\xi)$, se tiene que $H^q(E) \cong H^q(M)$.*

Demostración. Considere la sección $s : x \to (x, 0)$ que encaja difeomorficamente M en E. Para probar la proposición es suficiente ver que $M \times \{0\}$ es un retracto por deformación de E; con esa idea tenemos la aplicación $\pi_\xi : E \to M \times \{0\}$ de donde resulta que $\pi_\xi \circ s : M \times \{0\} \to M \times \{0\}$ es la identidad en $M \times \{0\}$ de donde se tiene que $M \times \{0\}$ es un retracto de E. Ahora veamos que pasa con la composición $s \circ \pi_\xi : E \to E$ para eso definamos la aplicación $F : E \times [0,1] \to E$ de la forma $F(v,t) = tv + (1-t)s \circ \pi_\xi(v)$, con eso se tiene que $s \circ \pi_\xi$ es homotópica a la id_E así $M \times \{0\}$ es un retracto por deformación de E y por los comentarios hechos previos a la Sección(1.2) se concluye que

$$H^q(E) \cong H^q(M \times \{0\}) = H^q(M).$$

□

Para aplicar la Dualidad de Poincaré a la variedad E, de necesita que éste sea una variedad orientable, la siguiente proposición proporcionará tal resultado.

Proposición 5.2. *Sea $\xi = (E, M, \pi)$ un fibrado vectorial orientado de dimensión m, y M es una variedad orientada de dimensión n, Entonces E es una variedad orientable de dimensión $(n+m)$.*

Demostración. De la orientabilidad de M existe un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha) | \alpha \in J\}$, tal que para todo $\alpha, \beta \in J$ y $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ se tiene que $\det\big(D(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x))\big) > 0$; por otro lado tenemos las trivilizaciones locales del fibrado $h_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^m \to E|_{U_\alpha}$, dando origen a las funciones de transición(co-ciclos) $h_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, debemos demostrar la existencia de un atlas en E, para eso tome de la forma $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha, (\psi_\beta, id) \circ h_\beta^{-1}) | \beta \in J\}$ ahora hallemos las funciones de transición

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{(\psi_\beta^{-1}, id)} U_\beta \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{h_\beta} E|_{U_\alpha \cap U_\beta} \xrightarrow{h_\alpha^{-1}} U_\alpha \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{(\psi_\alpha, id)} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

las aplicaciones de cambio de coordenadas es,

$$(\psi_\alpha, id) \circ h_\alpha^{-1} \circ h_\beta \circ (\psi_\beta^{-1}, id) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

que se puede expresar de la forma

$$(\psi_\alpha, id) \circ h_\alpha^{-1} \circ h_\beta \circ (\psi_\beta^{-1}, id)(x,y) = \big(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x), h_{\alpha\beta}(\psi_\alpha^{-1}(x))y\big),$$

la matriz jacobiana del cambio de coordenadas es:

$$J = \begin{pmatrix} D(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x)) & * \\ 0 & h_{\alpha\beta}(\psi_\alpha^{-1}(x)) \end{pmatrix}$$

el determinante de ésta matriz es el producto de los bloques de la diagonal de la matriz el primer bloque tiene determinante positivo por la orientabilidad de la variedad M y el segundo bloque tiene determinante positivo por la orientabilidad del fibrado.

□

El espacio total E tiene dimensión $(n+m)$ como variedad donde $n = \dim M$ y m es la dimensión de la fibra. Usando la proposición anterior ya podemos aplicar la Dualidad de Poincaré para E entonces

$$H_c^{m+q}(E) \cong H^{(n+m)-(q+m)}(E)^* = H^{n-q}(E)^* \cong H^{n-q}(M)^* \cong H_c^q(M)$$

el segundo isomorfismo es por la Proposición(5.1) y el tercer isomorfismo es de la Dualidad de Poincaré para M.

Ésta prueba es válida para una variedad diferenciable orientable. En lo que sigue se establecerá el **Isomorfismo de Thom** de forma explícita cuando M sea una variedad compacta orientable. Para tales objetivos se construirá un nuevo fibrado usando el fibrado vectorial ξ con un producto interno $\langle , \rangle$, las fibras de éste fibrado a construir serán esferas S^m, y a éste espacio lo llamaremos **fibrado de esferas** . Con esa idea considere la Suma de Whitney $\xi \oplus 1 = \bigcup_{p \in M} \xi_p \oplus \mathbb{R}$, éste es un fibrado vectorial real donde 1 representa el fibrado de línea sobre M, tome

$$S_p = \{v = (w, z) \in \xi_p \oplus \mathbb{R} \mid \langle v, v \rangle = 1\},$$

ahora tomemos la unión $S(\xi \oplus 1) = \bigcup_{p \in M} S_p$ y la proyección definida por $\pi : S(\xi \oplus 1) \to M$, $\pi(v) = p$, con $v \in \pi^{-1}(p)$. Así $S(\xi \oplus 1)$ es el fibrado de esferas sobre M por lo tanto las fibras son homeomorfas a la esfera $S^m \cong \pi^{-1}(p)$; también la orientación de ξ_p induce una orientación en cada fibra $\pi^{-1}(p)$, con lo cual tenemos el isomorfismo

$$\int : H^m(\pi^{-1}(p)) \to \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Vea Observación(1.2). Y Por el Teorema(5.1) se tiene que $H^*(S(\xi \oplus 1))$ es un $H^*(M)-$módulo libre; por otro lado tenemos la sección $s_\infty : M \to S(\xi \oplus 1)$ definida por $s_\infty(p) = (0, 1_p) \in \xi_p \oplus \mathbb{R}$. Si a la esfera $\pi^{-1}(p)$ le quitamos el punto $s_\infty(p)$ entonces por la proyección estereográfica se tiene $\pi^{-1}(p) - s_\infty(p) \cong \xi_p$, ahora si hacemos esto globalmente entonces se puede identificar el espacio total E de ξ, con $S(\xi \oplus 1) - s_\infty(M)$.

En la siguiente definición se introduce lo que es la clase orientadora de todo fibrado vectorial real orientado que será de suma importancia para éste objetivo.

Definición 5.1. *Sea ξ un fibrado vectorial real orientado,* ***una clase de orientación*** *para ξ es una clase se cohomología $u \in H^m(S(\xi \oplus 1))$ que satisface:*

i. $s_\infty^*(u) = 0$.

ii. Para cada $p \in M$, la restricción de u a la fibra $\pi^{-1}(p)$ tiene integral 1.

En el sentido de esta definición el siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de la clase orientadora para ξ.

Teorema 5.2. *Cada fibrado vectorial real orientado ξ, admite una única clase de orientación $u \in H^m(S(\xi \oplus 1))$, y además $H^*(S(\xi \oplus 1))$ es un $H^*(M)-$módulo libre con base $\{1, u\}$.*

Demostración. Por el Teorema(5.1) tenemos que; $H^*(S(\xi \oplus 1))$ es un $H^*(M)-$módulo libre. Por otro lado tenemos

$$H^q(\pi^{-1}(p)) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & q = 0, m \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

donde $\pi^{-1}(p)$ son las fibras(esferas) de $S(\xi \oplus 1)$. La aplicación $i_p : \pi^{-1}(p) \to S(\xi \oplus 1)$ es la inclusión, entonces $i_p^* : H^m(S(\xi \oplus 1)) \to H^m(\pi^{-1}(p))$ es la restricción de las clases en las fibras, y como $u \in H^m(S(\xi \oplus 1))$ es una clase orientadora y por el isomorfismo dado en (3), se concluye que la base es $\{1, u\}$. Faltaría demostrar la existencia y unicidad de la clase u, es decir tenemos que demostrar que existe una única clase u que satisface la Definición(5.1), en las siguientes líneas se justificará porque sólo es necesario demostrar la condición (ii) de la definición de **clase de orientación**. Si tomamos una clase u que satisface la Definición(5.1), y supongamos que existe otra clase $v \in H^*(S(\xi \oplus 1))$ que satisface sólo la condición Definición(5.1)-(ii) entonces es de la forma

$$v = x.1 + a.u = \pi^*(x) + \pi^*(a) \wedge u \qquad (\alpha)$$

para algún $x \in H^m(M)$ y $a \in H^0(M)$. Podemos notar que la restricción de la clase $\pi^*(x)$ a la fibra $\pi^{-1}(p)$ se anule para todo $p \in M$ y elegimos a ¨a¨ como la función constante 1 en cada vecindad de p, entonces $i_p^*(v) == i_p^*(\pi^*(x)) + i_p^*(1 \wedge u)$ por lo tanto

$$s_\infty^*(v) = x + s_\infty^*(u) \qquad (\beta)$$

y $s_\infty^*(v) = 0$ si y sólo si $x = -s_\infty^*(u)$, con lo cual esto indica que es suficiente probar la condición Definición(5.1)-(ii). Para la unicidad supóngase que existen dos clases u y v que satisface las dos condiciones de la Definición(5.1) entonces tenemos que en (β) la clase x es nula asimismo remplazando en (α) y habiendo elegido la función localmente constante a como 1, entonces se concluye que $u = v$.

Para la existencia de la clase u, que satisface la condición Definición(5.1)-(ii) se hará en base al Teorema(1.3), usamos la notación $S_U = \pi^{-1}(U)$ donde U es un abierto de M. Consideremos $\mathcal{U}$ la colección de abiertos de M que en cada abierto de esta colección cumple el teorema es decir $U \in \mathcal{U}$ si y sólo si existe una clase en $H^m(S_U)$ con integral 1 en cada fibra $\pi^{-1}(p)$ para todo $p \in U$; también consideremos a $\mathcal{V} = (V_\beta)_{\beta \in I}$ como una cobertura abierta de M donde $S(\xi \oplus 1)|_{V_\beta}$ es trivial. Ahora verifiquemos las cuatro condiciones del Teorema(1.3), la primera condición es trivial.

Para la condición(ii) considere $U \in V_\beta$ difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, entonces S_U es trivial y es de la forma $S_U = U \times S^m$, además $H^m(S_U) = H^m(U \times S^m) \cong H^m(S^m)$ y por el isomorfismo

$$\int : H^m(S^m) \to \mathbb{R}$$

existe una clase $u \in H^m(S_U) \cong H^m(S^m)$, con integral 1.

Ahora veamos la tercera condición, para eso considere U_1, U_2 y $U_1 \cap U_2$ en $\mathcal{U}$ así tenemos las clases $u_r \in H^m(S_{U_r})$ para $r = 1, 2$ que restricta a cada fibra tiene integral 1, considere la secuencia de Mayer Vietoris

$$H^m(S_{U_1 \cup U_2}) \xrightarrow{I^*} H^m(S_{U_1}) \oplus H^m(S_{U_2}) \xrightarrow{J^*} H^m(S_{U_1 \cap U_2})$$

de la exactitud de la secuencia se tiene que $(u_1, u_2) \in \mathrm{Ker} J^* = \mathrm{Im} I^*$, entonces existe una clase $u \in H^m(S_{U_1 \cup U_2})$ tal que $I^*(u) = (u_1, u_2)$ con restricción u_r en S_{U_r}, ésta clase tiene integral 1 sobre cada fibra $\pi^{-1}(p)$ para todo $p \in U_1 \cup U_2$, por lo tanto $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}$. Por último considere la secuencia de abiertos $U_1, U_2, ..$ disjuntos dos a dos en $\mathcal{U}$ con unión $U = \cup_r U_r$ por lo tanto tenemos el isomorfismo

$$H^m(S_U) \to \bigoplus_r H^m(S_{U_r}) \text{ dada por } w \to i_r^*(w),$$

donde $i_r : U_r \to U$ es la inclusión, también tenemos $u_r \in H^m(S_{U_r})$ entonces existe $u \in H^m(S_U)$ tal que los u_r son la imagen de algún u, como la clase u restricta a U_r coincide con la clase u_r, entonces u restricta a cada fibra $\pi^{-1}(p)$ tiene integral 1 para todo p en U. En consecuencia $M \in \mathcal{U}$. $\square$

En lo que se ha trabajado hasta ahora en éste capítulo no se exigió que M sea compacta, para lo que sigue se considerará a M como una variedad diferenciable orientable compacta, con lo cual tenemos que $s_\infty(M)$ es una subvariedad compacta de la variedad compacta $S(\xi \oplus 1)$ y además sabemos que $S(\xi \oplus 1) - s_\infty(M) \cong E$ y $s_\infty(M) \cong M$, por lo tanto de acuerdo a la Proposición(1.3) se tiene la secuencia exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H_c^q(E) \xrightarrow{i_*} H^q(S(\xi \oplus 1)) \xrightarrow{s_\infty^*} H^q(M) \xrightarrow{\delta} H_c^{q+1}(E) \xrightarrow{i_*} \cdots,$$

ahora si hacemos la composición $s_\infty^* \circ \pi^* = (\pi \circ s_\infty)^* = \mathrm{id}$ se concluye que s_∞^* es sobreyectiva y por la exactitud de la secuencia se tiene $\delta = 0$ y i_* es inyectiva, con lo que la secuencia larga, se convierte en una secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow H_c^q(E) \xrightarrow{i_*} H^q(S(\xi \oplus 1)) \xrightarrow{s_\infty^*} H^q(M) \longrightarrow 0\,.$$

Ahora ya estamos en condición de presentar el **Isomorfismo de Thom**.

Teorema 5.3. ***(Isomorfismo de Thom)*** *Considere a $\xi = (E, M, \pi)$ como un fibrado vectorial real orientado $m-$dimensional con espacio total E, sobre una variedad diferenciable compacta M. Entonces existe una única clase $U \in H_c^m(E)$ con integral 1 sobre cada fibra ξ_p y la aplicación*

$$\phi : H^q(M) \to H_c^{m+q}(E) \text{ definida por; } \phi(x) = x.U = \pi^*(x) \wedge U$$

*es un isomorfismo. La clase $\phi(1) = U$ es llamada la **Clase de Thom**.*

Demostración. Usando la secuencia exacta corta dada en (4)

$$0 \longrightarrow H_c^m(E) \xrightarrow{i_*} H^m(S(\xi \oplus 1)) \xrightarrow{s_\infty^*} H^m(M) \longrightarrow 0$$

la clase de orientación $u \in H^m(S(\xi \oplus 1))$ es de la forma $u = i_*(U)$ donde $U \in H_c^m(E)$, la inyectividad de i_* demuestra la unicidad y la sobreyectividad de s_∞^* muestra la existencia, por lo tanto la clase U queda únicamente determinada. El operador ¨.¨ es el definido en (1) y por el Teorema(5.2) muestra que $H_c^*(E)$ es un $H^*(M)-$módulo libre y como ϕ

$$\phi(e.x) = \phi(e \wedge x) = \pi^*(e \wedge x) \wedge U = \pi^*(e) \wedge \phi(x) = e.\phi(x);\ e, x \in H^q(M)$$

es un $H^*(M)-$homomorfismo, por lo tanto es un isomorfismo.

□

Usando las mismas notaciones de éste teorema donde se tiene el isomorfismo $\phi : H^m(M) \to H_c^{m+m}(E)$. La clase $\hat{e}(\xi) \in H^m(M)$ la definimos de la forma

$$\phi(\hat{e}(\xi)) = U \wedge U. \qquad (5)$$

El producto exterior en $H_c^*(E)$ es anticonmutativo así $U \wedge U = 0$ en el caso que m sea impar, en consecuencia $\phi(\hat{e}(\xi)) = 0$, por la inyectividad de ϕ se tiene que $\hat{e}(\xi) = 0$ para un fibrado vectorial real de dimensión impar.
La clase $\hat{e}(\xi) \in H^m(M)$ satisface las condiciones del Teorema(4.10), entonces tenemos

$$\hat{e}(\xi^m) = a^{m/2} e(\xi^m)$$

donde $e(\xi^m)$ es la Clase se Euler y $a \in \mathbb{R}$.

Lema 5.1. *Sea $s : M \to E$, una sección diferenciable arbitraria en un fibrado vectorial ξ real orientado con espacio total E y donde U es la Clase de Thom, entonces $s^*(U) = \hat{e}(\xi)$.*

Demostración. El lema equivale a probar que $\phi(s^*(U)) = U \wedge U$, la sección s es propia puesto que $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$, si C es un compacto en M, entonces $s^{-1}(\pi^{-1}(C)) = C$, la imagen inversa via s de todo compacto $\pi^{-1}(C)$ en E es un compacto en M; por lo tanto la aplicación s induce un homomorfismo

$$s^* : H_c^*(E) \to H_c^*(M) = H^*(M).$$

Sea $w \in \Omega_c^m(E)$ una forma cerrada que es un representante de la clase U, ésta define una clase $[w] \in H^m(E)$; por otro lado tenemos que la aplicación $s \circ \pi : E \to E$ es homotópica a la id_E por lo tanto $[w] = [\pi^*(s^*(w))]$; usando la definición en (5) tenemos

$$\phi(s^*(U)) = \pi^*(s^*(U)) \wedge U = U \wedge U$$

□

La Proposición(5.1) muestra que la Clase de Euler para un fibrado vectorial real orientado sobre una variedad compacta, se puede definir como $s^*(U) = e(\xi)$.

5.3. Fórmula de Gauss-Bonnet

En esta última parte deL trabajo extenderemos a secciones el concepto índice de un campo vectorial con singularidades aisladas; en ese sentido considere a $\xi = (E, M, \pi)$ un fibrado vectorial real orientado sobre una variedad compacta M, donde $\dim\xi = \dim M = m$ y denotemos por $s_0 : M \to E$ a la sección nula que se define como $s_0(p) = 0 \in \xi_p$ es decir es el cero de cada fibra, y tome una segunda sección diferenciable $s : M \to E$ y como $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$ entonces $D_p(\pi \circ s) = D_{s(p)}\pi.D_p(s) = \mathrm{id}_{T_pM}$ por lo tanto el homomorfismo $D_ps : T_pM \to T_{s(p)}E$ es inyectiva y de la misma forma se consigue que $D_ps_o : T_pM \to T_{s_0(p)}E$ es monomorfismo.

Definición 5.2. *un punto $p \in M$ es un cero o una singularidad para la sección s, si $s(p) = s_0(p)$. Y diremos que s es **transversal** en p si*

$$D_ps(T_pM) \cap D_ps_0(T_pM) = 0 \qquad (6)$$

s es llamada transversal a s_0 si (6) se mantiene para todos los ceros de s.

Sabemos que la aplicación $D_ps_o : T_pM \to T_0E$ es un monomorfismo, por lo tanto el espacio $T_{s_0(p)}E$ es la suma directa del espacio tangente $D_ps_0(T_pM)$ con el espacio tangente en $T_{s_0(p)}(s_0(M))$ éste último se identifica con la fibra ξ_p, y como D_ps_0 es un isomorfismo en su imagen, entonces $T_{s_0(p)}E \cong T_pM \oplus \xi_p$. Con ésta identificación, (6) es equivalente a decir que $D_ps(T_pM)$ es el gráfico del isomorfismo lineal $A : T_pM \to \xi_p$, ambos espacios vectoriales son isomorfos, entonces definimos el **índice local de s** en un cero o una singularidad $p \in M$ como:

$$i(s,p) = \begin{cases} +1, & \text{si } A \text{ preserva orientación} \\ -1, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Dado una trivialización local de ξ en U ósea $\xi|_U = U \times \mathbb{R}^m$ identificamos la restricción de s como la aplicación diferenciable $F : U \to \{p\} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$, entonces la aplicación $A : T_pU \to \xi_p$ se corresponde con el homomorfismo $D_pF : T_pU \to \mathbb{R}^m$ y si p es un cero de F entonces se verifica (6) por lo tanto A es un isomorfismo así $i(s,p) = \pm 1$ dependiendo si A preserva o no la orientación. El teorema de la aplicación inversa garantiza que F es un difeomorfismo local por lo tanto p es un cero aislado, en resumen si $s : M \to E$ es una sección transversal a la sección s_0 y como M es compacto entonces el número de ceros de s es finito, ósea s intercepta en un número finito de puntos a la sección nula.

Nuestro trabajo concluye con la demostración del siguiente teorema, que relaciona la Clase de Thom con el índice de s en p(ceros de s).

Teorema 5.4. *Sea ξ un fibrado vectorial real orientado sobre una variedad M compacta donde $dim\xi = dimM = m$. Si s es transversal a la sección cero, entonces*

$$\int \hat{e}(\xi) = \sum_{p} i(s,p), \qquad (7)$$

donde la suma es sobre los ceros de s.

La demostración requiere incorporar cierto material técnico como el Lema(5.2), por eso postergamos su justificación.

Considere $p_1, ..., p_k$ ceros de una sección s; en la primera parte del lema siguiente se construirá una forma cerrada $w \in \Omega_c^m(E)$ que es representante de la clase $U \in H_c^m(E)$. Para eso considere $V_1, .., V_k$ vecindades abiertas de los ceros de s donde ξ se trivializa ósea $\varphi_i^{-1} : \xi_{V_i} \cong V_i \times \mathbb{R}^m$; definimos $f_i : \xi_{V_i} \to \mathbb{R}^m$ como la composición de φ_i^{-1} con la proyección de $V_i \times \mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m$.

Lema 5.2. *Con la misma notación usada líneas arriba, dada la forma cerrada $w \in \Omega_c^m(E)$ con integral 1 sobre cada fibra, entonces V_i y f_i de eligen tal que*

$$w|_{\xi_{V_i}} = f_i^*(w_i), \; 1 \leq i \leq k,$$

donde $w_i \in \Omega_c^m(\mathbb{R}^m)$ son formas con $\int_{\mathbb{R}^m} w_i = 1$.

Demostración. Para la prueba construiremos una aplicación diferenciable $h : M \to M$ con las siguientes propiedades:
(α) h homotópica a la id_M
(β) h es constante igual a p_i en las vecindades abiertas V_i de p_i para $i = 1, .., k$.
En ese sentido consideremos una aplicación diferenciable $G : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ que satisface

$$\begin{cases} G(x,0) = 0 & \text{para } \{x \in \mathbb{R}^m / \|x\| \leq 1/2\} \\ G(x,1) = x & \text{para } x \in \mathbb{R}^m \\ G(x,t) = x & \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ y } x \in \mathbb{R}^m - \{x \in \mathbb{R}^m / \|x\| \leq 1/2\}. \end{cases} \qquad (8)$$

Por ejemplo podemos tomar la aplicación diferenciable

$$G(x,t) = \big((1 - t\rho(\|x\|)) + t\big)x$$

donde $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida de la forma,

$$\rho(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } y \geq 1, \end{cases}$$

la aplicación G así definida cumple con las condiciones dadas en (8). Ahora elegimos (W_i, φ_i) cartas donde los W_i son abiertos disjuntos en M con la propiedad $\varphi_i(p_i) = 0$, así tenemos los difeomorfismo $\varphi_i : W_i \to \mathbb{R}^m$ para $1 \leq i \leq k$, con lo cual definimos una homotopía $F : M \times \mathbb{R} \to M$ de la forma

$$F(p,t) = \begin{cases} \varphi_i^{-1} \circ G(\varphi_i(p), t) & \text{si } p \text{ pertenece a } W_i \\ p & \text{si } p \text{ no pertenece a } \cup_i W_i \end{cases}$$

por lo tanto tomamos $h(p) = F(p,0)$ así esta verifica la propiedad (α), y si tomamos $V_i = \varphi_i^{-1}\big(\{x \in \mathbb{R}^m / \|x\| \leq 1/2\}\big)$, entonces $h(p) = F(p,0) = p_i$ para todo $p \in V_i$ con lo cual se cumple la propiedad (β).
Como h es homotópica a la identidad se tiene por el Teorema(2.2) que el fibrado $\xi' = h^*(\xi)$ es isomorfo a ξ es decir existe un aplicación diferenciable $\tilde{h} : E(\xi') \to E(\xi)$ que aplica isomórficamente la fibra ξ'_p en la fibra $\xi_{h(p)}$ que hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{h}} & E \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow{h} & M \end{array}$$

conmute, donde $E' = E(\xi')$ y $E = E(\xi)$; dada la forma cerrada $w \in \Omega_c^m(E)$ de tal manera que restricta a cada fibra ξ_p de ξ tenga integral 1 esto es $\int i_p^* w = 1$, donde $i : \xi_p \to E$ es la inclusión , entonces la forma $w' = \tilde{h}^*(w)$ tiene integral 1 sobre cada fibra de ξ', para ver esta última parte sabemos que $E' = \{(p,v) \in M \times E / h(p) = \pi(v)\}$, por lo cual la inclusión $i'_p : \xi'_p \to E'$ la podemos definir de la forma $i'(p,v) = (p, i(v))$, entonces

$$\int i'^*_p(\tilde{h}^*(w)) = \int (\tilde{h} \circ i'_p)^*(w) = \int \mathrm{id}^*(w) = 1,$$

así w' tiene integral 1 sobre cada fibra ξ'_p. De la condición (β) se tiene que $h(V_i) = p_i$ y como el diagrama es conmutativo, entonces tenemos el isomorfismo $\tilde{h} : \xi'_p \subset E'_{V_i} \to \xi_{p_i}$ esto es para todo $p \in V_i$ y además fijamos un isomorfismo $\varphi_i^{-1}(p, -) : \xi_{p_i} \to \mathbb{R}^m$, entonces tenemos el isomorfismo

$$\xi'_p \xrightarrow{\tilde{h}} \xi_{p_i} \xrightarrow{\varphi_i^{-1}(p,-)} \mathbb{R}^m \ ; \ \forall p \in V_i$$

y sea $w_i \in \Omega_c^m(\mathbb{R}^m)$ que se corresponda con $w|_{\xi_{p_i}} \in \Omega_c^m(\xi_p)$, de f_i y bajo el isomorfismo tenemos

$$w'|_{\xi'_{V_i}} = f_i^*(w_i); \ \int_{\mathbb{R}^m} w_i = 1, \ 1 \leq i \leq k$$

$\square$

Demostración del Teorema(5.4). Usando la misma información del Lema(5.2), donde los abiertos V_i los remplazaremos por vecindades abiertas W_i de los puntos p_i más pequeñas de tal manera que $\overline{W}_i \subset V_i$; los V_i se toman de forma que la función

$f_i \circ (s|_{V_i}) : V_i \to \mathbb{R}^m$ aplique difeomorficamente V_i en algún abierto de $\mathbb{R}^m$ esto es posible por el teorema de la aplicación inversa. Sabemos que $\text{sop}_E(w)$ es compacto y tomemos el abierto $M - \cup_i W_i$, así podemos encontrar una constante $c > 0$, de tal manera que la sección s se reduce gradualmente y se obtiene la sección $\tilde{s} = cs$ que satisface

$$\text{sop}_{\mathbb{R}^m}(w_i) \subset f_i(\tilde{s}(V_i)) \text{ y } \tilde{s}\Big(M - \cup_i W_i\Big) \cap \text{sop}_E(w) = \emptyset;\ 1 \le i \le k.$$

Ahora sea la clase $e(\xi) \in H^m(M)$, que es representada por la $m-$forma $\tilde{s}^*(w)$ que es idénticamente nula en $M - \cup_i W_i$, entonces por el lema anterior se tiene:

$$\tilde{s}^*(w)|_{V_i} = \big(f_i \circ (\tilde{s}|_{V_i})\big)^*(w_i),$$

donde $f_i \circ (\tilde{s}|_{V_i})$ es un difeomorfismo de V_i en un abierto de $\mathbb{R}^m$ que contiene a $\text{sop}_{\mathbb{R}^m}(w_i)$. La derivada de éste isomorfismo puede o no preservar la orientación dependiendo del valor de $i(\tilde{s}, p_i) = i(s, p_i) = \pm 1$

$$\begin{aligned} \int e(\xi) &= \int_M \tilde{s}^*(w) = \sum_{i=1}^{k} \int_{V_i} \big(f_i \circ (\tilde{s}|_{V_i})\big)^*(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} i(s, p_i) \int_{\mathbb{R}^m} w_i = \sum_p i(s, p), \end{aligned}$$

donde p es un cero de s, y la penúltima igualdad es el cambio de variables para integrales.

Ejemplo 5.1. *Sea H el fibrado canónico de líneas sobre $\mathbb{CP}^1$ y H^* es el fibrado dual de H, si de éste vemos su estructura real entonces obtenemos un fibrado vectorial real orientado $\xi^2 = (H^*)_{\mathbb{R}}$ 2-dimensional sobre $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, recordando el espacio total de H viene dado por*

$$E(H) = \{(L, z) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2 / z \in L\} \subset \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2$$

y $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2$ es el fibrado trivial sobre $\mathbb{CP}^1$, en el Ejemplo(3.3) tenemos la aplicación inclusión $i : E(H) \to \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2$ definida por $([z_0, z_1, u]) \to ([z_0, z_1], uz_0, uz_1)$, con lo cual existe un epimorfismo $i^* : (\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2)^* \to E(H^*)$ definida de la forma $i^*(f) = f \circ i$. Definimos una sección constante $s' : \mathbb{CP}^1 \to (\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2)^*$ en el dual del fibrado trivial dado por $s'([z_0, z_1])([z_0, z_1], w_0, w_1) = w_1$, por lo cual podemos tomar una sección $s : \mathbb{CP}^1 \to E(H^*)$ en H^* de la forma $s = i^* \circ s'$ que en coordenadas locales quedaría expresada de la forma $s([z_0, z_1])([z_0, z_1, w]) = z_1 w$ el único cero de esta sección es $p_0 = [1, 0] \in \mathbb{CP}^1$ que se encuentra sobre la carta coordenada $U_0 = \{[1, z]/z \in \mathbb{C}\}$, con lo cual la sección restricta $s|_{U_0}$ se representa como una función $U_0 \to \mathbb{C}$ que lleva $[1, z]$ en z. Sí s es transversal a la sección nula en el punto $p_0 = [1, 0]$ y como s es la identidad entonces su derivada $D_{p_0} s$ es la identidad con lo cual ésta preserva la orientación, por lo tanto $i(s, p_0) = 1$ y por el Teorema(5.4) se concluye que $\int \hat{e}(\xi^2) = 1$.

Éste ejemplo me permite ver que $\hat{e}(\xi) = e(\xi)$, cuando el fibrado esta definido sobre una variedad M compacta; hasta ahora tenemos $\hat{e}(\xi^{2m}) = a^m e(\xi^{2m})$ probaremos que la constante $a = 1$, si consideramos $\xi^2 = (H^*)_{\mathbb{R}}$, entonces el ejemplo muestra que $\int \hat{e}(\xi^2) = 1$ y por el Teorema(4.8)-(i) se tiene $e(\xi^2) = c_1(H^*)$ y por el Teorema(4.7)-(i) y la Proposición(4.1)-(ii) se consigue $\int c_1(H^*) = 1$, entonces

$$\int \hat{e}(\xi^2) = \int c_1(H^*) = \int e(\xi^2)$$

y como la integral es inyectiva se consigue que $\hat{e}(\xi^2) = e(\xi^2)$, para ver la forma general se usa el **Princio de Splitting Real** y el Teorema(4.10)-(i)-(ii)

$$f^*(\hat{e}(\xi^{2m})) = \hat{e}(f^*(\xi^{2m})) = \hat{e}(\gamma_1 \oplus .. \oplus \gamma_m) = e(\gamma_1)...e(\gamma_m) = f^*(e(\xi^{2m}))$$

donde f^* es inyectiva, así se tiene que $\hat{e}(\xi^{2m}) = e(\xi^{2m})$.

En el caso que dim$\xi = m$(impar) en la discusión de la definición en (5), se concluye que $\hat{e}(\xi) = 0$ por lo tanto por el Teorema(5.4) la suma de los índices de cualquier sección en éste fibrado es cero. Si ξ es de dimensión par y admite una sección sin ceros entonces la suma de los índices de s es cero.
Como aplicación del Teorema(5.4) damos el siguiente teorema y como consecuencia de éste se obtiene la fórmula general de Gauss-Bonnet.

Teorema 5.5. *Considere a M como una variedad diferenciable compacta y τ_M el fibrado tangente, entonces*

$$\int e(\tau_M) = \chi(M).$$

Demostración. Aplicamos el Teorema(5.4) considerando a $\xi = \tau_M$, y donde una sección se convierte en un campo vectorial X, por lo tanto

$$\int \hat{e}(\tau_M) = \sum_p i(X,p),$$

donde p son los ceros de el campo vectorial, aplicando el Teorema de Poincaré-Hopf, cuando X tiene ceros aislados, entonces Index$(X) = \chi(M)$[1] $= \sum_p i(X,p)$ (Vea. [2]. Pág. 129) así de obtiene la igualdad deseada. □

Ahora combinamos el Teorema(5.5), y el hecho que $\hat{e}(\xi^{2m}) = e(\xi^{2m})$, donde ξ^{2m} es un fibrado vectorial real orientado sobre una variedad compacta M de dimensión $2m$, entonces se obtiene la **Fórmula General de Gauss-Bonnet**

$$\int_M \mathrm{Pf}\Big(\frac{-F^{\nabla}}{2\pi}\Big) = \chi(M^{2m}).$$

[1] Si M es una variedad compacta de dismensión m con lo cual sus grupos de cohomología son de dimensión finita. Los $i-$números de Betti son dados de la forma $b_i(M) = \dim_{\mathbb{R}} H^i(M)$, entonces la característica de Euler de M esta dada de la siguiente manera $\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i b_i(M)$.

Bibliografía

[1] **Andrew H. Wallace**, *An Introduction to Algebraic Topology*; Pergamon Press, 1963.

[2] **Bott Raoul and Loring W.Tu**, *Differential Forms in Algebraic Topology*;Springer-Verla 1924.

[3] **Do Carmo**, *Differential Geometry of curves and Surfaces*;Prentice-Hall Inc, New Jersey 1976.

[4] **Ib.Madsen and J.Tornehave**, *From calculus to cohomology de Rham cohomology and characteristic classes*;Cambridge, NewYork 1997.

[5] **M. Hirsch**, *Differential Topology*; Springer-Verlag, New York i976.

[6] **J. Milnor**, *Morse Theory*;Princeton University Press, New Jersey 1963.

[7] **J. Milnor and J. Stasheff**, *Characteristic Classes*; Annals of Math studies, Princeton University Press, New Jersey 1974.

[8] **R. Munkres**, *Elements of Algebraic Topology*; Perseus Books, 1984.

[9] **S.Lang**, *Álgebra*; Springer-Verlag, New York 1993.