PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

UN ESTUDIO, DESDE EL ENFOQUE LÓGICO SEMIÓTICO, DE LAS DIFICULTADES DE ALUMNOS DE TERCER AÑO DE SECUNDARIA EN RELACIÓN A LOS POLINOMIOS

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

PRESENTADA POR:

ANA KARINA DELGADO BOLIVAR.

ASESORA DE TESIS:

MAG. ELIZABETH ADVÍNCULA CLEMENTE

MIEMBROS DEL JURADO:

DR. FRANCISCO UGARTE GUERRA.

MAG. ELIZABETH ADVÍNCULA CLEMENTE.

MAG. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE.

Lima, 2011

Dedicatoria:

A mi familia,
por su incondicional apoyo.

Agradecimiento:

Aprende de cuanto te puedan enseñar todas las personas que caminan a tu lado. Un agradecimiento especial a la Magister Elizabeth Advíncula Clemente por el apoyo brindado.

INDICE

CAPÍTULO III : METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS A PRIORI Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

INTRODUCCIÓN

Al reflexionar sobre nuestro trabajo pedagógico en el aula encontramos dificultades y errores que nuestros alumnos evidencian en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Muchas veces estos errores pasan desapercibidos y no siempre se indaga por las causas que los originaron. Sin embargo, conocer la naturaleza de los errores de nuestros alumnos, permitirá diseñar estrategias que provean al alumno de herramientas para superar estas situaciones de conflicto y acceder al nuevo conocimiento matemático.

El presente trabajo de investigación muestra una clasificación de los errores, en el tratamiento de polinomios, que frecuentemente cometen los alumnos del tercer año de educación secundaria, en una institución pública y el análisis de las posibles causas que los originan. Es decir, el estudio analiza los aspectos más relevantes sobre las dificultades y errores que presentan los alumnos en la construcción del lenguaje algebraico desde el marco teórico del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), describiendo el esquema teórico que se utiliza y las técnicas de análisis para interpretar los resultados.

En el capítulo 1, se presentan los antecedentes de esta investigación, entre los que se encuentran los estudios relacionados con investigaciones en álgebra, tales como los presentados en los simposios de la Sociedad de Educación Matemática Española, realizados en España desde 1996, que corresponden a importantes resultados de tesis doctorales y de estudios de grupos reconocidos en el campo de la Didáctica de la Matemática.

En el primer capítulo, además, se detalla la formulación y justificación del problema de investigación enfatizando el papel que cumple el error en el aprendizaje del conocimiento matemático.

En el capítulo 2, se describe el marco teórico de la investigación, que se basa en la Teoría del Enfoque lógico semiótico, tomando en cuenta la clasificación de errores algebraicos en alumnos de educación secundaria que propone Socas (1997).

En el capítulo 3, se describe la metodología de investigación. En esta investigación se usa una metodología de tipo cualitativo, ya que se pretende comprender y describir los errores. Se diseñaron tres tipos de instrumentos para recoger la información: cuestionarios, guías de repaso y fichas de entrevista personal.

En el capítulo 4, se presenta el análisis a priori y el análisis de los resultados obtenidos, luego de la aplicación de los cuestionarios y de la entrevista.

En el capítulo 5, se presentan las conclusiones de la investigación, y se sugieren algunos temas de investigación a partir de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO I
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Antecedentes.

En una primera etapa, los estudios sobre errores en el aprendizaje de las Matemáticas consistían en contar el número de situaciones incorrectas que se presentaban en una variedad de situaciones problemáticas y luego en hacer un análisis de los tipos de errores detectados, para así llegar a una clasificación y proceder a examinar e identificar su posible causa a partir de la solución correcta. Finalmente, se hacían inferencias sobre los factores del contenido matemático que podían haber conducido al error.

Así, en esta primera etapa tenemos los trabajos de Bruekner (1935), citados por Socas (2007), que junto con otros investigadores orientaron los trabajos a cinco objetivos:

- Listar técnicas potencialmente erróneas.
- Determinar la distribución de frecuencias de estas técnicas erróneas en los agrupamientos por edades.
- Analizar las dificultades especiales, en particular las relativas a la división y las operaciones con el cero.
- Determinar la persistencia de técnicas erróneas e individuales.
- Tratar de clasificar y agrupar los errores.

A partir de estos objetivos, Bruekcner y Bond (1984), citados por Socas (2007), presentan investigaciones que han tenido influencia en estudios realizados en España.

En una segunda etapa, en la década de los ochenta, se tomó conciencia de que el error era parte de los procesos de enseñanza-aprendizaje. Esto suponía profundizar en el mismo proceso de construcción de los objetos matemáticos que siguen los alumnos como un recurso para saber acerca de su pensamiento matemático.

Uno de los estudios de la segunda etapa, denominado proyecto SESM (Strategies and Errors in Secundary Mathematics) aporta importantes avances al estudio de errores relacionados al lenguaje algebraico. Dicho proyecto se desarrolló en el Reino Unido en los años 1980 y 1983, según Booth citado por Socas (2007), quien realizó diferentes análisis acerca de la naturaleza de los errores cometidos. Entre los posibles orígenes de errores que se analizaron figuran: la naturaleza y el significado de los símbolos y las letras, el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra, la comprensión de la Aritmética por parte de los estudiantes, y el uso inapropiado de reglas de procedimiento. Los tres primeros aspectos se dan en el paso conceptual de la aritmética al álgebra y el último se debe a generalizaciones equivocadas sobre operadores o números.

Los trabajos de Mulhern (1989), citados por Socas (2007), muestran una serie de métodos de investigación en el tratamiento de los errores en Matemáticas, los que se habían utilizado hasta finales de los ochenta: contar el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas, analizar los tipos de errores cometidos y analizar los patrones de error que se dan en problemas construidos para provocar errores.

Actualmente, profesores e investigadores sobre el desarrollo del pensamiento algebraico señalan la existencia de dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, y por ello el interés de profundizar en el estudio del álgebra. Dentro de estas investigaciones, en el ámbito del álgebra escolar, tenemos las realizadas por la Sociedad Matemática Española (SEIEM). La SEIEM justifica y fundamenta la práctica investigadora que desarrollan grupos pertenecientes a distintas universidades españolas desde 1996. En el año 2007, en el XI Simposio de la Sociedad de Educación Matemática Española se presentaron varias ponencias, dentro de las cuales destacamos tres: la ponencia de Molina, de la Universidad de Granada; la de García, de la Universidad de Jaén; y la ponencia de Socas, de la Universidad de La Laguna.

La ponencia de Molina aborda resultados de su tesis doctoral (2006), en la que describe una propuesta de integración del álgebra dentro del currículo de Educación Primaria, denominado Early-Algebra[1]. Molina presenta la evolución de dicha propuesta y observa como la mayoría de investigaciones parten de la aritmética para acceder al álgebra. En su estudio muestra, diferentes estrategias usadas por los alumnos, los cuales evidencian gran variedad de pensamiento, y los momentos en los que aparece el uso del pensamiento relacional. A partir de estos estudios, la autora, plantea desarrollar cambios curriculares en la educación primaria y, por ende, en la educación secundaria.

La ponencia de García, también ofrece resultados de su tesis doctoral (2005), cuyo estudio se encuentra en el programa epistemológico, dentro del marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). El autor aborda fenómenos didácticos partiendo de la modelización de su componente matemática, frente a los marcos que modelizan los aspectos cognitivos. Muestra estudios previos en los cuales se evidencian la fuerte relación entre la aritmética y el álgebra, donde el álgebra se presenta como una aritmética generalizada que provoca limitaciones cuando se usa como referencia para describir, formular, interpretar y abordar problemas didácticos, especialmente en lo relacionado a las "condiciones de vida" del álgebra escolar. Propone, además, un modelo epistemológico de referencia de la proporcionalidad y de las relaciones funcionales, y cómo se viene abordando la proporcionalidad en los documentos curriculares y en los libros de texto.

---

[1]Early-algebra, se diferencia de lo que se denomina pre-algebra en la educación primaria, pues plantea la introducción de modos de pensamiento algebraicos y promueve en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemática

Socas (2007) expone los resultados de las investigaciones realizadas por el grupo de pensamiento algebraico del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de La Laguna, relacionado con el lenguaje algebraico. La ponencia aborda el tema de las dificultades y los errores en la construcción del lenguaje algebraico (Socas, 1997), utilizando como marco teórico de estudio el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Este enfoque se encuentra dentro del programa cognitivo, y trata de elaborar “Modelos de Competencia” (modelos teóricos y

prácticos) que aporten supuestos básicos para poder interpretar los fenómenos de estudio en educación matemática. El enfoque describe dos modelos de competencia para el lenguaje algebraico: el formal y el cognitivo, que son la base para el estudio de los errores de los alumnos. En el modelo de competencia formal explica la relación entre el lenguaje algebraico y los objetos matemáticos. El modelo de competencia cognitivo lo organiza a través de tres componentes: representaciones semióticas, estudios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación, y dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra.

Socas, como parte de sus investigaciones, diseña y aplica una prueba escrita a un grupo de alumnos de educación secundaria. Con los resultados obtenidos en esta prueba escrita realiza una clasificación de errores atendiendo a sus supuestos orígenes, los que indaga con mayor profundidad a través de una entrevista realizada a un grupo de alumnos.

En este trabajo de tesis, también tomamos en cuenta el trabajo de Martínez (2001), quien realiza un estudio sobre los procedimientos algebraicos. Este estudio muestra los errores cometidos por los alumnos de bachillerato español en las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de expresiones algebraicas. Así por ejemplo, en un cuestionario de opciones múltiples plantea la siguiente pregunta:

¿Cuál de las siguientes igualdades es cierta?

a) $x^2y + 2xy^2 + 4xy^2 = x^2y + 2xy^2$ b) $xy + xy = 2x2y$

c) $ab - 2ab = ab$ d) $2x - x = 1$

De los resultados obtenidos, el 34% de alumnos eligió el inciso c), lo que indica que los alumnos tienen problemas con el manejo de signos. Un 27% eligió el inciso b), lo que se interpreta que los alumnos consideran que la reducción de términos semejantes se hace sumando por separado las variables involucradas. Y un 15% eligió el inciso d), que puede interpretarse como que la variable x carece de significado.

Por otro lado, Olfos (2002) en su estudio sobre la iniciación al álgebra desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, con alumnos de una escuela chilena, de séptimo y octavo grado básico y primero de media, describe algunas hipótesis de los procesos de reconstrucción del álgebra y una de ellas es la que identifica al álgebra como una aritmética generalizada. Este estudio pone en evidencia que el uso de letras en fórmulas, expresiones y ecuaciones es trabajado sin profundidad teórica. Es decir, la letra se usa como número o como número desconocido. Asimismo, afirma que la iniciación del álgebra, en el contexto chileno, se realiza con las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

En cuanto a una clasificación específica de errores de tipo algebraico, tenemos en cuenta a Socas (1997), quien los agrupa en tres ejes. El primero, relativo a errores que tienen su origen en un obstáculo; el segundo, relacionado a errores que tienen su origen en una ausencia de sentido; y el tercero, dirigido a errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

Al respecto, mostramos a manera de ejemplo algunos casos en los que se presentan errores cometidos por alumnos de educación secundaria, que corresponde a aquellos que tienen su origen en una ausencia de sentido, tales como:

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{x+y}$, en este caso el error es cometido por alumnos que no dominan las operaciones con fracciones.

b) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, en este caso el error es causado por el uso inapropiado de de la propiedad de linealidad de la siguiente estructura $(x.y)^2 = x^2.y^2$. Este procedimiento puede interpretarse señalando que los alumnos conectaron la regla conocida y el problema que no les es familiar.

Socas afirma que incorporar estos ejemplos en las clases escolares permitiría mejorar la comprensión de contenidos matemáticos, ya que se podría reconocer una serie de propiedades ocultas que generan estos errores.

Engler, Gregorini, Müller**,** Vrancken y Hecklein (2002), citando a Rico (1995), quien utiliza la taxonomía de Radatz para clasificar los errores a partir del procesamiento de la información, coinciden en la determinación de las siguientes categorías generales: errores por dificultades de lenguaje; errores por dificultad para obtener información espacial; errores por el aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos; errores por asociaciones incorrectas o a la rigidez del pensamiento; y errores por la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. También destacan la teoría de los constructos personales para interpretar algunos de los errores más comunes cometidos por los alumnos durante su aprendizaje de matemáticas, como las reversiones binarias, los errores inducidos por el lenguaje o la notación, los errores por recuperación de un esquema previo, los errores producidos por una representación inadecuada y las reglas que producen otras reglas.

1.2 Formulación y justificación

Al referirnos al error consideramos a Del Puerto (2005) quien afirma: "que en la actualidad el error es considerado como parte inseparable del proceso de aprendizaje. Los investigadores en educación matemática sugieren diagnosticar y tratar seriamente los errores de los alumnos, discutir con ellos sus concepciones erróneas, y presentarles luego situaciones matemáticas que les permitan corregir sus ideas”(p.2).

Desde esta perspectiva es importante saber cuál es la naturaleza y el origen de las concepciones erróneas de nuestros alumnos, para poder superar el conflicto que pueda surgir entre estas concepciones erróneas y el nuevo conocimiento a formarse. Cabe mencionar que las dificultades, como son los constantes errores, bloquean los procesos de construcción y comunicación de conocimientos matemáticos debido a que los alumnos no son capaces de valorar sus errores por si mismos.

Socas(1997) manifiesta que es importante para el profesor tener conocimiento acerca de los errores más frecuentes que cometen los alumnos al realizar operaciones en Matemática, porque les provee de información sobre la forma en que éstos resuelven ejercicios utilizando diferentes procedimientos en álgebra.

En el estándar 5 del bloque de álgebra, para el grupo etario de alumnos de 13 a 16 años de educación secundaria, las recomendaciones de la NCTM (1991), sugieren que el currículo de matemáticas debe dar continuidad al estudio de conceptos y métodos algebraicos para que los estudiantes sean capaces de :

- Representar situaciones que requieran variables en expresiones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones y matrices;
- Utilizar tablas y gráficas como herramientas para interpretar expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones;
- Operar con expresiones algebraicas y matrices y resolver ecuaciones e inecuaciones;
- Apreciar la potencia de la abstracción y el simbolismo matemáticos.

Según este documento, el álgebra es el lenguaje con el cual se comunica la mayor parte de la matemática, pues es un medio para trabajar con conceptos a nivel abstracto. La representación algebraica es esta etapa secundaria es más compleja que en la primaria, pues los símbolos pueden representar objetos en vez de números, como por ejemplo “P+Q” que denota la suma de dos polinomios. Este concepto de representación algebraica constituye un requisito imprescindible en toda la matemática, incluyendo la estadística, el álgebra lineal, las matemáticas discretas y el análisis. Además, el uso creciente de los métodos cuantitativos en las ciencias naturales, en la economía, en la psicología y la sociología han transformado los procesos algebraicos en una herramienta imprescindible.

Por otro lado, las programaciones de matemática del nivel secundario, del 2006 al 2010 de todas las instituciones educativas públicas peruanas se han desarrollado siguiendo el Diseño Curricular Nacional (aprobado en el 2005, y aplicado desde el 2006), que presenta los contenidos por ciclos. Desde el segundo grado de secundaria se consideran los contenidos básicos de las siguientes operaciones con expresiones algebraicas:
Polinomios

- Monomios y polinomios. Grado de un polinomio
- Adición y sustracción de polinomios
- Productos notables
- Multiplicación y división de polinomios. División sintética
- Cocientes notables.
- Factorización: casos. Ecuaciones lineales y cuadráticas.

A partir de esta información, se puede observar que en el segundo grado de secundaria se abordan las expresiones algebraicas, específicamente con polinomios, al considerarse que las cuestiones básicas como la reducción de términos semejantes con coeficientes enteros y racionales, y la multiplicación de binomios, son conceptos que un alumno de tercer año de educación secundaria deberá resolver sin mayor dificultad. Según el Diseño Curricular Nacional, para el tercero de secundaria la reducción de términos algebraicos semejantes (suma, resta y multiplicación), serán prerrequisitos necesarios para la resolución de ecuaciones e inecuaciones (inecuaciones cuadráticas). Justamente son estos los conocimientos que serán analizados en la presente investigación.

Por otro lado, se puede mencionar que las dificultades observadas en los alumnos corresponden a errores en suma, resta y multiplicación de monomios, que obstaculizan el aprendizaje de las operaciones con polinomios en el tercer año de educación secundaria. De allí la importancia por conocer las causas de los errores para plantear soluciones a los procesos de aprendizaje en las sesiones de clase.

En conclusión, en esta investigación se presentará un estudio sobre la clasificación de los errores cometidos por los alumnos del tercer año de secundaria en el tratamiento de polinomios, para analizar y establecer sus posibles causas. Estas simplificaciones involucrarán operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios. Para ese cometido, nuestro trabajo responderá a las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué tipos de errores cometen con frecuencia los alumnos del tercer año de educación secundaria en el tratamiento de polinomios?
- ¿Cuáles son las posibles causas de los errores frecuentes que cometen los alumnos del tercer año de educación secundaria en el tratamiento de polinomios?

1.3 Objetivos de la Investigación

- Clasificar los errores, según la clasificación propuesta por Socas (1997), cometidos por los alumnos del tercer año de educación secundaria en el tratamiento de polinomios identificando las posibles causas que originan estos errores.
- Analizar los errores que cometen con frecuencia los alumnos del tercer año de educación secundaria en el tratamiento de polinomios, a partir de los resultados obtenidos después de la aplicación del cuestionario y de la entrevista, identificando algunas causas posibles que los originan.

CAPÍTULO II
MARCO TEÒRICO

2.1 El papel del error en el aprendizaje

Rico (1995) manifiesta que el error es un conocimiento deficiente e incompleto, además es una posibilidad, y una realidad permanente en el conocimiento científico. Sin embargo el objetivo del aprendizaje es la adquisición de conocimiento verdadero, pero los procesos de aprendizaje incluyen errores sistemáticos.

A lo largo de la historia del conocimiento humano, filósofos y epistemólogos de la ciencia se han ocupado de reflexionar acerca del conocimiento erróneo, las condiciones que hacen posible este conocimiento y el impacto que puede tener en el avance de la ciencia. A continuación se seleccionan algunas ideas de autores como Popper y Bachelard asi como también la posición del constructivismo con respecto a los errores en el aprendizaje.

2.1.1 Popper

Rico (1995) cita a Popper para destacar el papel que tienen los errores en la adquisición del conocimiento científico. Popper plantea la siguiente pregunta: ¿cuál es la fuente última del conocimiento?, que es respondida por varias posturas de las cuales tomaremos solo tres.

La primera postura considera que el empirismo y el racionalismo pueden responder a esta pregunta. El empirismo señala a la observación como fuente última del conocimiento, mientras que el racionalismo, considera como fundamento la intuición intelectual de ideas claras y distintas.

La segunda postura está enfocada en la Teoría de la verdad manifiesta. Esta doctrina plantea la necesidad de explicar la falsedad. De allí que Popper señala que la verdad es difícil de alcanzar y cuando se encuentra, se puede volver a perder. Afirma también que dicha teoría puede conducir al autoritarismo, debido a que la verdad no es manifiesta y necesita de reinterpretaciones constantes, por lo que una autoridad interviene para establecer cuál es la verdad.

La tercera postura se dirige a resultados epistemológicos de su reflexión:

- No hay fuentes últimas de conocimiento, toda fuente y sugerencia debe aceptarse y someterse a un examen crítico.
- La fuente más importante de nuestro conocimiento es la tradición. La mayor parte de las cosas que sabemos la hemos aprendido del ejemplo o porque lo hemos leído o escuchado.
- Todo parte de nuestro conocimiento por tradición y es susceptible de examen crítico y puede ser abandonado.
- El conocimiento no puede partir de la nada. El avance del conocimiento consiste, principalmente, en la modificación del conocimiento anterior.
- No hay ningún criterio que permita conocer la verdad. Pero sí poseemos criterios que permiten conocer el error y la falsedad. La claridad y distinción no son criterios de verdad, pero la oscuridad y la confusión indican el error. Análogamente, la coherencia no basta para establecer la verdad, pero la incoherencia y la inconsistencia permiten establecer la falsedad.

2.1.2 Bachelard

La noción de obstáculo epistemológico, dada por Bachelard, da una explicación sobre la aparición de los errores en la adquisición del conocimiento.

Bachelard, citado por Rico (1995), en su obra “La Formación del espíritu científico” manifiesta que

> Cuando se investigan las condiciones psicológicas de las progresiones de la ciencia hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos; en el acto mismo de conocer, íntimamente, es donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones; es allí doce mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí, donde discerniremos causas de inercia que llamaremos osbtáculos epistemológicos. ... en efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza (p.4)

Esta aproximación de creación y adquisición del conocimiento en la comunidad científica, se ha usado en el estudio y análisis de los errores que se presentan en el pensamiento científico.

2.1.3 Constructivismo

Las posiciones mostradas anteriormente se complementan con los siguientes planteamientos constructivistas señalados por Rico (1995):

- Todo conocimiento matemático es construido a través de un proceso de abstracción reflexiva.
- Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.
- Las estructuras cognitivas están en desarrollo cognitivo. La actividad con propósito induce a la transformación de las estructuras existentes.

Si los errores van a aparecer de forma sistemática en la construcción del conocimiento, entonces el proceso de construcción debe incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación a través del ejercicio de la crítica de sus propias producciones.

De las posturas de los autores mencionados y del constructivismo, Rico hace las siguientes precisiones con respecto a las consecuencias que se dan en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas:

- Los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje.
- Los errores no aparecen por azar, pues surgen en un marco conceptual que se basa en conocimientos adquiridos anteriormente.
- Es necesario que se modifique la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes, y por el contrario se debe prevenir estos errores y considerarlos en el proceso de aprendizaje.
- Todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores.

Se debe admitir que cuando un alumno comete un error está expresando el carácter incompleto de su conocimiento y es necesario que los compañeros y el docente ayuden a completar dicho conocimiento.

Un objetivo permanente de la enseñanza de las matemáticas en el sistema escolar es lograr un correcto aprendizaje de las matemáticas por parte de nuestros alumnos, por ello las respuestas incorrectas que se evidencian en sus producciones se considera como señal de deficiencia en el logro del objetivo trazado. Por ello el estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas ha sido permanentemente un problema de interés en la Educación Matemática.

En diferentes periodos, de los últimos veinte años, el análisis de errores en educación Matemática se ha orientado por las corrientes predominantes en pedagogía y psicología, además ha sido condicionado por objetivos y formas de organización del currículo de matemáticas en los diferentes sistemas educativos.

2.2 Teoría del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS)

Socas (2007), afirma que El Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna, del cual es miembro, considera que no solo se debería centrar la atención en las respuestas correctas de los alumnos, sino en los errores que cometen los alumnos durante su proceso de aprendizaje de matemáticas. Las investigaciones, sobre los errores cometidos por los estudiantes al operar en el lenguaje algebraico, han permitido establecer una clasificación de los errores en función de su origen y causas. Con relación a los errores, la investigación de este grupo ha ido en dos ámbitos: las dificultades inherentes a las matemáticas, y las dificultades de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Cabe destacar que Socas (2007) precisa que "el propósito general del Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de la Laguna es determinar en el marco de una teoría del conocimiento algebraico las dificultades y errores que tienen los alumnos de la ESO (Educación Secundaria Obligatoria de España) para comprender y trabajar con competencia, objetos matemáticos relativos al pensamiento algebraico" (p.24)

El marco de la Teoría del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), es un marco en construcción que viene desarrollando el Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna, caracterizándose por orientar la investigación hacia la elaboración de dos modelos de competencias: el formal y el cognitivo, para entender y actuar en fenómenos y situaciones problemáticas que se dan en el microsistema educativo en relación con la construcción del conocimiento algebraico. El ELOS centra su atención en las investigaciones relacionadas en el aprendizaje del lenguaje algebraico.

El Enfoque Lógico Semiótico toma como punto de partida el microsistema educativo, que está formado por tres elementos básicos: profesores, alumnos y disciplina de estudio (que constituyen el denominado triángulo didáctico); y por dos componentes: el sociocultural y la institución escolar.

El microsistema está caracterizado por tres relaciones esenciales, materializados en modelos de competencia: formal, cognitivo y de enseñanza. Cabe señalar que en el presente trabajo de investigación sólo se tomarán en cuenta los dos primeros modelos, el formal y el cognitivo. El modelo de competencia de enseñanza está orientado a errores que se pueden presentar a partir de propuestas de enseñanza, por ello este modelo no se toma.

2.2.1 Modelos de Competencia

A continuación se detallan los modelos de competencia que desarrolló el grupo de investigación de la Universidad de la Laguna para el Enfoque Lógico Semiótico.

2.2.1.1 Modelo de competencia formal para el lenguaje algebraico

Este modelo permitirá dar una explicación a las relaciones que se presentan entre el lenguaje algebraico y el objeto matemático.

El modelo de competencia formal se caracteriza por tres aspectos de los objetos algebraicos: funcional, fenomenológico y conceptual**.** Estos aspectos se organizan de acuerdo a la perspectiva semiótica de Pierce, donde se observa la organización de los signos del lenguaje algebraico y sus procesos de significación.

Con respecto al aspecto funcional, Socas (2007) caracteriza a los fenómenos de naturaleza didáctico matemático mediante tres entidades básicas:

- Expresiones semióticas, que constituyen las manifestaciones externas del sistema matemático de signos, como por ejemplo términos, símbolos, tablas, gráficos, palabras, y asumen las funciones expresivas y señalizadoras del lenguaje algebraico.

- Descripciones algebraicas, que se refieren a las definiciones, propiedades y características de los objetos algebraicos y a sus relaciones, como por ejemplo: los conceptos, las proposiciones, los procedimientos, los algoritmos, las operaciones, etc.
- Argumentaciones algebraicas, que son las referidas a las demostraciones para probar propiedades del álgebra.

Con respecto al aspecto fenomenológico, este se describe como:

> El desarrollo de capacidades para dar significado a los signos del álgebra, usarlos para mostrar cantidades y cantidades de cantidades, manejar lo desconocido, hacer y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular y lo particular en lo general; es decir, ser conscientes de los procesos de sustitución formal, generalización y modelización, y controlarlos (Socas, 2007,p. 26)

Respecto al aspecto conceptual del lenguaje algebraico, este se caracteriza por la dualidad objeto-proceso. Esta dualidad se asocia a las nociones de conocimiento conceptual y procedimental. El conocimiento conceptual se basa en relaciones y depende de la cantidad e intensidad de las conexiones que se dan entre las redes de representación interna. Se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado. El conocimiento procedimental depende del sistema de representación simbólico que necesita de las reglas sintácticas. Dicho conocimiento se genera a partir de aprendizajes rutinarios (Socas, 2007).

El análisis de este modelo concluye en que el pensamiento algebraico se desarrolla en tres aspectos relacionados: operacional, estructural y procesual. Socas (2010) explica que esta es una manera de organizar el conocimiento matemático. Donde lo operacional, se refiere a operaciones, algoritmos y técnicas; lo estructural, se refiere a definiciones, propiedades y estructuras; y lo procesual, se refiere a procesos de sustitución formal, generalización y modelización. El autor sugiere que se puede prescindir de esta organización y tomar la organización de los estadios de desarrollo.

2.2.1.2 Modelo de competencia cognitivo para el lenguaje algebraico

El modelo de competencia cognitivo está organizado en tres componentes: las representaciones semióticas, los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación en Álgebra, y las dificultades y errores en el aprendizaje del Álgebra.

A. Las representaciones semióticas

Castro y Castro, afirman que:

> los autores se centran en los medios que principalmente aportan información visual, las representaciones, que son las notaciones simbólicas o gráficas específicas para cada noción mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes. (Castro y Castro, 1997, citado en Pecharromán, 2008, p.36).

Un sistema de representación es un medio que aporta una información visual acerca de las notaciones simbólicas o gráficas para cada concepto y procedimiento matemático, asi como sus características y propiedades importantes.

El Enfoque Lógico Semiótico utiliza la fenomenología de Peirce (Socas, 2007) para analizar, comprender y gestionar los fenómenos didácticos matemáticos en Educación Matemática. Según Peirce:

> Un Signo o representamen es algo que representa algo para alguien en algún aspecto o carácter. Se dirige a alguien, es decir crea en la mente de esa persona un signo equivalente o, quizás aún más desarrollado. A este signo creado yo lo llamo interpretante del primer signo. El signo esta en lugar de algo, su Objeto. Representa a este objeto no en todos sus aspectos, pero con referencia a una idea que

> he llamado a veces el Fundamento del Representamen (Peirce, 1987, citado en Hernández et als., 2004, p. 169)

El signo, según Socas (2007), tiene una relación entre un representamen (es un signo en cierto aspecto o carácter que lo conecta con el objeto), su objeto (es un signo para un objeto al que equivale ese pensamiento) y el interpretante (es un signo para algún pensamiento que lo interpreta). En consecuencia, un signo obtiene su significado por su necesaria referencia a otros signos; o sea el significado de un signo es el conjunto de signos que permite desarrollarlo y explicarlo.

Por lo anterior, el enfoque lógico semiótico adopta la siguiente postura: todo signo pertenece a un sistema de signos y en él puede ser analizado y comprendido. Desde este punto de vista, según Hernández et als. (2004), el enfoque analiza la construcción y el aprendizaje del conocimiento didáctico matemático teniendo como base dos nociones:

- Fenómenos didácticos matemáticos, que son situaciones en las que se realizan actividades de matematización o actividades de profesionalización matemática.
- Todo sistema didáctico debe estar organizado alrededor de un contexto, un referente y un significado.

El modelo de competencia, que describe la noción de representación en el Enfoque Lógico Semiótico viene dado por el contexto; los referentes: signo, objeto y significado; y las tres relaciones duales que se dan entre los referentes: signo-significado, signo-objeto y objeto-significado.

La noción de representación en el ELOS es una modificación según las condiciones del concepto de semiosis de Pierce. Es decir, la representación es un signo que tiene las siguientes características:

- Ciertos caracteres que le son propios.
- Establece una relación estrechamente vinculado con el significado
- Establece una relación vinculado con el significado a través del objeto.

Además, la noción de representación establece la relación entre el objeto matemático, el signo y el significado. Los sistemas de representación semióticos (SRS) son utilizados para comunicar los objetos matemáticos.

Por otro lado, la cualidad del signo es la representación y sus diferentes formas, y se puede establecer relaciones entre el signo y el objeto matemático, y entre el signo y el significado. De allí que el objeto matemático es entendido en su relación con el contexto y su fenomenología.

B. Los estadios de desarrollo cognitivo

El Sistema Representación Semiótica, es un medio donde se encuentran los estadios de desarrollo cognitivo que permitirán alcanzar competencias en el alumno. Estos estadios son: semiótico, estructural y autónomo Socas (2007).

La explicación siguiente, de los estadios de desarrollo, concuerda con las descripciones hechas para el ELOS y para la clasificación de errores según Socas (1997).

- Estadio semiótico, en este estadio el alumno aprende y usa los nuevos signos con los significados que le suministran los signos antiguos ya conocidos y manipulados por el alumno.
- Estadio estructural, en este estadio el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo, se recurre entonces a la observación de regularidades y comportamientos de patrones para dotarlos de significado.
- Estadio autónomo, es aquel en el que los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior.

Este es el proceso de generalización en matemáticas. Aquí el sistema nuevo es fuente de dificultades para el aprendizaje del alumno, al no poder controlar con el sistema antiguo los elementos del nuevo sistema, como es el caso del lenguaje algebraico en relación al lenguaje aritmético, en el estadio semiótico.

C. Dificultades y errores en el aprendizaje del Álgebra

Dificultades

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se sitúan en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. En la práctica, estas dificultades se concretan en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos a través de los errores.

Las dificultades se organizan, según su procedencia, en cinco categorías:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos. Según Socas (1997) hay que considerar dos status: el estatus operacional, donde los objetos son vistos como un proceso y el estatus conceptual, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual. Además, Socas (1997) afirma que los objetos matemáticos son comunicados, esencialmente, de forma escrita a través de signos matemáticos (lenguaje matemático) apoyados por el lenguaje ordinario que comúnmente es utilizado en ese momento para los alumnos. De allí que se puede decir que la interpretación de los signos se ve favorecida.

  Sin embargo, el uso del lenguaje ordinario o habitual y el lenguaje matemático genera conflictos; y debido a esto se obstaculiza el significado y no se destaca el concepto, como se puede apreciar en los siguientes ejemplos de expresiones verbales usadas por los docentes: “añadir un cero en la multiplicación por 10”, “reducir una expresión algebraica que connota hacerla más pequeña”, identificar una letra, que tiene un significado algebraico, con una determinada fruta como por ejemplo: $4x + 3y$ es igual “a cuatro peras mas tres manzanas”. Estas dificultades pertenecen al dominio del lenguaje matemático, que es la pragmática, y se refiere al estudio del sentido que se da al discurso en función del contexto en el que se enuncia.

Otro aspecto que es fuente de confusión en los alumnos de secundaria, es el referido a la sintaxis del lenguaje de los signos, por ejemplo lo relacionado a las reglas formales de las operaciones.

Para Socas (1997) las dificultades y los errores que se originan en el desarrollo de los signos matemáticos se localizan convenientemente al analizar los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos, tomando como ejemplo algunos objetos matemáticos. Así, en el proceso de usar correctamente los exponentes podemos diferenciar tres etapas distintas: el estadio semiótico, el estadio estructural y el estadio autónomo.

En primer lugar, para el uso correcto de exponentes, el sistema nuevo de signos (conocimiento nuevo que va a aprender el alumno) es caracterizado por el sistema antiguo (conocimientos previos del alumno), que son las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir. Con estos elementos se definen el sistema nuevo 4^5 o a^5 como:

$4^5 = 4x4x4x4x4$ o $a^5 = axaxaxaxa$

El aprendizaje de estos signos nuevos constituye el primer estadio denominado **estadio semiótico**.

En el **estadio estructural**, que es el segundo estadio, el sistema nuevo se estructura en función del antiguo (sistema nuevo en el estadio semiótico), de la forma siguiente:

$4^5 x 4^3 = (4x4x4x4x4)x(4x4x4x4) = 4^8$ y luego se llega al esquema general siguiente $a^5 x a^3 = a^8$, que puede ser expresado como $a^m x a^n = a^{m+n}$. Asimismo, se puede obtener mediante el sistema antiguo, un esquema para la división $a^5 : a^3 = \frac{a.xaxaxaxa}{axaxa} = a.xa = a^2$ que puede ser expresado como $a^m : a^n = a^{m-n}$, que es una propiedad de exponentes. También, en este estadio, aparecen signos que obligan a dar restricciones para los exponentes, por ejemplo, m>n, pues a^0 y a^{-2} no se pueden explicar con el sistema antiguo.

Sin embargo, se puede recurrir, según Socas, a la observación de regularidades y comportamientos patrones para darles significado, de la siguiente manera:

$4^2 = 4x4 = 16$

$4^1 = 4$

$4^0 = 1$

$4^{-1} = \frac{1}{4}$

Por otro lado, aun se evidencian signos que no pueden ser explicados con el sistema antiguo ni con las regularidades y comportamientos patrones. Estos signos tienen significados que no dependen del sistema anterior, por ejemplo: $e^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{e^2}$ o $e^{i\pi} = -1$. Estos elementos pertenecen al sistema nuevo del tercer estadio denominado **estadio autónomo.**

De esta manera Socas describe el proceso de generalización de las Matemáticas.

- Dificultades asociadas a las rupturas en relación a los modos de pensamiento matemático. En este bloque también se señalan las diferencias que se establecen en Matemáticas sobre la lógica escolar y la lógica social. La lógica escolar es, en muchos casos, desarticulada con la lógica social, debido a que se plantea ciertas situaciones buscando el interés matemático dentro de un contexto absurdo. Por otro lado, la lógica social obstaculiza el verdadero sentido de los objetos matemáticos. Así por ejemplo, cuando se dice, María mide un metro sesenta, no se trata del número 1,60, sino de dos números enteros con dos unidades distintas, el metro y el centímetro. A estas dificultades, también, se le asocia la transición de lo natural a entero, la transición de lo natural a lo decimal, la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico, etc.

- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, estas son aquellas dificultades que tienen que ver con la institución escolar, con el currículo de Matemáticas y con los métodos de enseñanza.
- Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo, son aquellas que están referidas a los estadios de desarrollo intelectual, que se pueden apreciar por las formas típicas de razonamiento y por las tareas que los alumnos pueden realizar. Cabe señalar que esta información es un insumo que repercute de manera crucial en el diseño de una sesión de aprendizaje.
- Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas. Los aspectos que influyen en este bloque están en relación con las actitudes de los profesores de matemáticas hacia sus alumnos, estilos de enseñanza y creencias hacia las Matemáticas que son transmitidas. El miedo a la equivocación y por ende al fracaso forman parte de las actitudes emocionales negativas que presentan los alumnos hacia las matemáticas.

En esta investigación se consideraran las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo.

Obstáculos

Herscovic (citado por Socas,1997) se refiere por primera vez a la noción de obstáculo en la adquisición de esquemas conceptuales del aprendiz y relaciona la teoría de aprendizaje de Piaget para la explicación del mismo.

Además Tall (citado por Socas, 1997) detalla obstáculos cognitivos, distinguiendo dos tipos: obstáculos basados en la secuencia de un tema y obstáculos basados en casos simples. Finalmente, Socas (1997) precisa la definición de obstáculo como un conocimiento adquirido y no una falta de conocimiento. Este conocimiento tiene un dominio de eficacia en un determinado contexto. El alumno utiliza dicho conocimiento para generar respuestas incorrectas y es aquí donde el dominio resulta falso. El obstáculo muestra resistencia cuanto mas haya demostrado su eficacia en otros dominios de validez.

Errores

El error, se define, según Socas (2007) como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado y no solo como consecuencia de la falta de conocimiento en el alumno. El error va a tener diferentes procedencias debido a los intentos de los alumnos de adaptar un conocimiento a situación nueva.

El análisis de los errores se describirá tomando la propuesta del marco teórico sugerido por Socas (1997) en el que se considera tres ejes, que permiten analizar el origen del error.

El siguiente esquema representa los componentes del modelo de competencia cognitiva en forma resumida:

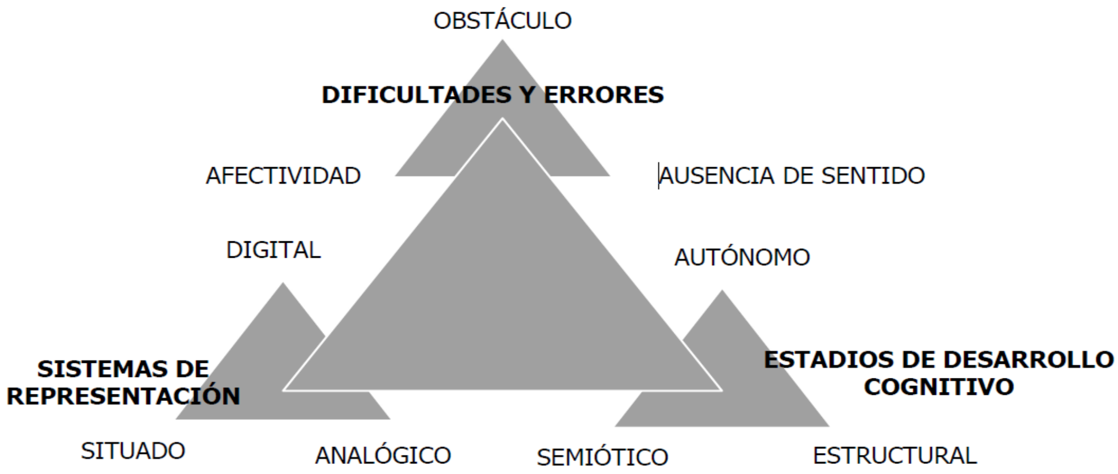


Figura 1. Modelo de competencia cognitiva

(Socas , 2007, p.34)

2.2.2 Estudio presentado en la XI SEIEM bajo el marco teórico ELOS

Para efectos de explicar cómo se ejecutó el análisis de la comprensión matemática según el ELOS, tomaremos en cuenta los reportes y resultados del trabajo de investigación "Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización" que fueron presentados en el XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (2007).

Esta investigación tuvo dos fases de análisis. La primera consistió en obtener información de cada individuo y del grupo a través del contenido matemático en sus aspectos operacional, estructural y procesual y una clasificación de errores según el contenido matemático donde se podría vislumbrar algunos orígenes. La segunda fase consistió en seleccionar a un grupo de estudiantes y se observó cómo resolvieron las tareas del cuestionario para un determinado contenido y como resolvieron en situación de entrevista. La entrevista de un grupo pequeño de estudiantes permitió estudiar los niveles de comprensión semiótico, estructural y autónomo, y analizar el origen de los errores en términos afectivos, ausencia de sentido y en términos de obstáculos

El análisis de la comprensión matemática, según el modelo de competencia cognitiva, se realiza por cualquiera de estas dos vías:

- Estableciendo relaciones entre dos componentes: el sistema de representación y las dificultades y los errores del alumno frente al objeto algebraico tratado.
- Estableciendo relaciones entre tres componentes: los sistemas de representación, los estadios de desarrollo del objeto y las dificultades y errores.

En el simposio, Socas (2007) tomó en cuenta la segunda vía de descripción, porque relaciona los tres componentes del modelo de competencia cognitivo. A continuación se detallarán las relaciones existentes entre los sistemas de representación, los estadios de desarrollo y las dificultades y errores.

Sistemas de representación

Con respecto a los sistemas de representación, se tiene que la noción de representación, está caracterizado por el **contexto**, los **referentes**: signo, objeto y significado; y las **relaciones** que se dan entre los referentes: signo-significado, signo-objeto y objeto-significado. Estos conceptos permiten identificar el esquema tomado del marco de la teoría ELOS.

El fenómeno didáctico matemático debe tener un contexto porque es necesario "determinar a qué se refiere, es decir, necesita una referencia contextual en la que el contexto determina la cualidad del fenómeno o situación problemática (Hernández , Noda, Palarea y Socas, 2004 , p.170).

El **contexto** es determinado por una muestra de 60 estudiantes de la I.E.S San Matías, en la Laguna (Tenerife – España).

Los **referentes** que se toman en consideración en relación con los problemas son: la estructura superficial y la estructura profunda.

La estructura superficial queda determinada por los diferentes **sistemas de representación** que se utilizan para su presentación, que según Hernández, Noda, Palarea y Socas (2004) son:

- Representación analógica, donde se señalan las representaciones de tipo icónico, geométrico y gráfico, que en el contexto y el nivel temático a examinar, permiten al estudiante llegar a la solución del ejercicio.
- Representación digital, donde se detallan las representaciones formales como son los algoritmos numéricos, fórmulas, ecuaciones y otros, que en el contexto y el nivel temático a examinar permiten al estudiante obtener la solución del ejercicio.

La estructura profunda que se toma en consideración son los procesos de lenguaje algebraico: sustitución formal, generalización y modelización.

Con respecto a las **relaciones entre los referentes**, Socas (2007), cita los trabajos de Skemp, Hiebert y Carpenter para reflexionar acerca de la comprensión en Matemática, y toma el modelo de coordinación de registros de Duval, en cuanto a la relación establecida entre el representante de un registro y el concepto, e integra los aspectos entre el significante y significado de Seassure. Es decir, Socas (2007) manifiesta que la adaptación del modelo fenomenológico de Peirce a la propuesta de Duval supone considerar la triada: **signo-objeto-significado**, como unidad indisoluble que integrará mas unidades en relación con las diferentes representaciones del objeto matemático.

De allí que la adquisición de los conceptos matemáticos en un individuo se presentará cuando haya una coordinación, sin contradicciones, entre las diferentes representaciones del objeto matemático.

Estadios de desarrollo

Una de las relaciones entre los referentes es la relación **objeto-significado,** donde se considera los **estadios de desarrollo** del signo para el objeto cognitivo representado y en cada uno de ellos se determinan dos categorías de comportamiento.

1. Estadio semiótico

En el estadio semiótico, el alumno aprende y usa los nuevos signos con los significados que le suministran los signos antiguos ya conocidos y manipulados por el alumno.

En este estadio se determinan dos categorías:

Categoría 1A, en esta categoría el alumno manifiesta ideas no precisas sobre el objeto matemático y combina de forma incoherente diferentes representaciones semióticas.

Categoría 1B, en esta categoría el alumno reconoce los elementos de un sistema de representación semiótica que se relaciona con el objeto matemático.

2. Estadio estructural

En el estadio estructural el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo, se recurre entonces a la observación de regularidades y comportamientos patrones para dotarlos de significado.

En este estadio se detallan dos categorías:

Categoría 2A, en esta categoría el alumno conoce un sistema de representación semiótico y realiza transformaciones en el interior del sistema de representación.

Categoría 2B, en esta categoría el alumno realiza correctamente conversiones de un sistema de representación semiótico a otro; en estas actividades de conversión hay un sistema que el alumno controla y facilita la conversión al otro.

3. Estadio Autónomo

En el estadio autónomo los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior.

En este estadio se determinan dos categorías que son:

Categoría 3A, en esta el alumno articula dos sistemas de representación semióticos. Pueden tomar cualquiera de ellos independientemente del otro. El alumno maneja autónomamente los dos sistemas de representación semióticos.

Categoría 3B, en esta el alumno articula coherentemente sistemas de representación semióticos y ejerce un control sobre las representaciones semióticas que utiliza. Tiene conocimiento del objeto matemático como estructura y puede controlar aspectos coherentes e incoherentes del mismo.

Dificultades y errores

Para el vértice de las dificultades y errores en el aprendizaje, el error es estudiado desde tres perspectivas diferentes: Obstáculo, ausencia de sentido y afectividad.

El estudio de las dificultades, según Socas (2007) se hace desde tres niveles diferentes que llama: producto, proceso y origen. El estudio de errores a nivel de producto se realiza tomando la estructura superficial en los ámbitos de del objeto: el operacional, estructural y procesual. El estudio de errores a nivel de proceso se realiza tomando la estructura superficial y estructura profunda, y se trabaja con al menos dos representaciones semióticas. Aquí los errores pueden ser analizados en los estadios semiótico, estructural y autónomo. El estudio de los errores a nivel de origen, considera la estructura superficial y la profunda del objeto algebraico, en los estadios de desarrollo asi como también en los ámbitos de actuación del objeto: operacional, estructural y procesual. El origen de los errores es analizado en términos de ausencia de sentido, obstáculo y actitudes afectivas.

A continuación se describirán los aportes que se tomaron en cuenta para esta tesis respecto del marco teórico del ELOS.

2.2.3 Adaptación del modelo de competencia cognitivo del ELOS para la investigación

El análisis de la comprensión matemática, según el modelo de competencia cognitivo, se realizará tomando en cuenta las relaciones entre dos componentes: las dificultades y errores y los estadios de desarrollo.

Dificultades y errores

Dentro de las **dificultades** se han delimitado dos, las asociadas a los objetos matemáticos y las asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo que se explicitan en la sección 2.2.1.2 , parte C.

La organización de los **errores** se describe según lo propuesto en la clasificación de Socas(1997) que consiste en tres ejes:

- Errores que tienen su origen en un obstáculo
- Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido
- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales

Esta clasificación se describirá con mas detalle en la sección 2.3.

El contexto, lo determina la muestra de 32 alumnos del tercer año de secundaria, de la I.E. “San Luis María Montfort”, y de este grupo se tomó dos alumnos para la entrevista.

Los referentes a tomar en cuenta son los detallados para la estructura profunda caracterizada en el tratamiento de polinomios.

En cuanto a las **relaciones entre los referentes** tomaremos en cuenta, la del objeto-significado, donde se detallarán los estadios de desarrollo del objeto cognitivo. En estos estadios no se hace uso de categorías, sino que se consideraran los conceptos y ejemplos de la clasificación de Socas (1997).

Estadios de desarrollo

Los estadios nos proporcionarán información acerca de los prerrequisitos o sistema antiguo de los alumnos, los que se deben conocer para proponer actividades previas y construir así el conocimiento nuevo o el sistema nuevo.

El estudio de los errores en el tratamiento de polinomios de los objetos matemáticos estructurado por los estadios semiótico, estructural y autónomo se organizará de forma jerárquica según Socas (1997), donde cada estadio siguiente se fundamenta en el estadio anterior.

Los estadios propuestos por Socas (1997) son tres:

- Estadio semiótico, en este estadio el alumno aprende y usa los nuevos signos con los significados que le suministran los signos antiguos ya conocidos y manipulados por el alumno.
- Estadio estructural, en este estadio el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo, se recurre

entonces a la observación de regularidades y comportamientos de patrones para dotarlos de significado.

- Estadio autónomo, es aquel en el que los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior.

Cabe resaltar que en el estadio semiótico los alumnos aprenden signos nuevos que adquieren significado con los signos de su sistema antiguo. En el segundo estadio, el estructural, el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo.

Para este trabajo de investigación se ha tomado dos estadios de desarrollo a través de los cuales el alumno pasa de los conocimientos antiguos, que ya posee, al conocimiento nuevo. Estos estadios son los siguientes:

Estadio de desarrollo	Descripción	Errores que identifican cada etapa
Sistema antiguo	Esta etapa no es considerada estadio. Aquí el alumno presenta errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. Por lo tanto, diremos que la organización de su sistema antiguo no permite acceder al sistema nuevo y como consecuencia no puede acceder al estadio semiótico.	Ejemplo de errores del algebra que tienen su origen en la aritmética: a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$ b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1+1}{x+y}$ c)-(x+y)=-x+y
1er Estadio: Estadio semiótico	Si el alumno presenta ausencia de errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, entonces diremos que la comprensión matemática del alumno se ubica en el estadio semiótico. Por otro lado, si el alumno presenta errores de procedimiento, entonces diremos que la comprensión matemática del alumno se ubica en el estadio semiótico.	Ejemplo de errores de procedimiento: a) $(x+y)^2=x^2+y^2$ b) $x(y.z)=x.y.x.z$
2do Estadio: Estadio estructural	Si el alumno presenta ausencia de errores de procedimiento, entonces diremos que el alumno se ubica en el estadio estructural.	Ausencia de errores de procedimiento.

2.3 Clasificación de los errores algebraicos en educación secundaria

En este trabajo se considerará la clasificación de los errores según la organización que propone Socas (1997). Estos errores son de tipo algebraico y se encontraron con frecuencia en alumnos de educación secundaria obligatoria (España), cuando se trabajaron con polinomios. La clasificación de errores hacia aspectos específicos nos permite diagnosticar y evaluar con mayor eficacia las causas posibles que originan dichos resultados equívocos. Para desarrollar una actitud racional hacia la matemática es necesario dar sentido a los objetos matemáticos que los alumnos conocen y practican. Por lo tanto es necesaria una clasificación específica de los errores que oriente el trabajo de investigación.

Esta organización se desarrolla en tres ejes:

- Errores que tienen su origen en un obstáculo.
- Errores que tiene su origen en una ausencia de sentido.
- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

El primer eje está relacionado con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos. El segundo eje esta relacionado con los procesos de pensamiento matemático. El tercer eje está relacionado con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. En esta investigación se tomará en cuenta los dos primeros ejes.

2.3.1 Errores que tienen su origen en un obstáculo

Sobre los errores que tienen su origen en un obstáculo, Ruano, Socas y Palarea (2008) manifiestan que este tipo de errores tienen un origen cognitivo. Dentro de este tipo de errores se encuentran los errores referidos a la necesidad de clausura y los errores de concatenación.

2.3.1.1 Errores relacionados a la necesidad de clausura

Para algunos alumnos los polinomios, como por ejemplo: $(12y+2)$ son enunciados incompletos y por ello tienden a cerrar estos enunciados dándole un resultado como $14y$. Pues en aritmética el signo = generalmente precede al resultado de un operación del tipo 12+2 = 4 , por lo tanto al signo igual se le confiere el sentido de signo totalizador. Sin embargo en álgebra la existencia de polinomios como $(12y+2)$ donde no es posible terminar el cálculo como en la aritmética hace que el alumno cometa el error de clausura: $(12y+2)=14y$. Según Esquinas (2009) se puede favorecer la correcta significación de la relación de igualdad, introduciendo ejemplos de sumas en las que se desconoce un sumando incluso los dos o relaciones de igualdad como omisión de número, como por ejemplo: …. +3=5, 4+2=….+1, etc.

2.3.1.2 Errores relacionados a la concatenación

Una fuente de dificultad con respecto a los errores es la concatenación, lo que se refleja en la yuxtaposición de dos símbolos. Concatenación en aritmética, denota adición implícita, mientras que en álgebra denota multiplicación. Esto se refiere al siguiente error: al sustituir 2 en la expresión $3x$ los alumnos obtienen 32, cuando deberían obtener 6. Dicha dificultad se presenta en los inicios del álgebra.

2.3.2 Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido

Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se originan en los estadios de desarrollo semiótico, estructural y autónomo, y se relacionan con los siguientes tipos de errores:

2.3.2.1 Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética

Los errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética se manifiestan en el estadio semiótico. El significado de los signos es el mismo en ambas ramas de la matemática: la aritmética y el álgebra, donde ésta última se considera como una aritmética generalizada. Esto implica que para entender la generalización de relaciones y procesos se necesita que éstos sean asimilados en el campo de la aritmética.

Éstos son ejemplos de este tipo de errores, relacionados a la falta de dominio de las operaciones con fracciones:

a) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{1}{(5+8)}$ que lo extienden a $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$.

b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{(1+1)}{(5+8)}$ que lo extienden a $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1+1}{x+y}$

c) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{1}{(5.8)}$ que lo extienden a $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x.y}$

d) $\frac{6}{18}+\frac{7}{45}=\frac{(6+7)}{2.9.5}$ que lo extienden a $\frac{k}{m.n}+\frac{p}{m.r}=\frac{k+p}{m.n.r}$

Otro tipo de error asociado a esta clasificación se presenta cuando el signo menos va colocado delante de un paréntesis o de una fracción, pues genera lo siguiente: $-(3+5)= -3+5$ error que se extiende a $-(a+b)=-a+b$. A este error se le va a denominar uso inadecuado del paréntesis.

El origen de este error es atribuido a problemas no superados en la aritmética relacionados con la supresión de signos de colección como el paréntesis.

Socas (2007) en sus conclusiones afirma que el origen del uso incorrecto del paréntesis sería un obstáculo didáctico relacionado con la forma de enseñar el uso de los paréntesis en el estudio de los números enteros. De alli que, en las operaciones combinadas con signos de colección donde se suele seguir la estrategia de “dentro hacia afuera”, resolviéndose en primer lugar las operaciones que están dentro del paréntesis, luego los que están dentro del corchete y por último las que están dentro de la llave. Entonces al resolver $-(a+b)=-a+b$, los alumnos se bloquean al no poder resolver el paréntesis o porque omiten el paréntesis y actúan como si no estuvieran.

En esta clasificación también, se pueden incluir errores del tipo $6(x+y)=6x+y$, donde hay omisión del paréntesis. La mala aplicación de las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas provoca este tipo de errores. Es decir, en $6(x+y)=6x+y$ no se ha aplicado correctamente la propiedad distributiva por la cual se obtendrá el resultado correcto siguiente: $6(x+y)=6x+6y$. Hacemos esta especificación pues Socas (2007) clasifica los errores de omisión de paréntesis dentro de los errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.

2.3.2.2 Errores de procedimiento

Los errores de procedimiento se originan en el estadio estructural. La mayoría de ellos están relacionados con el uso inapropiado de las fórmulas o reglas de procedimientos. Estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores que se justifican en la falta de linealidad de los operadores, según Socas (1997). La linealidad o propiedad de linealidad es una forma de trabajar con un objeto matemático descomponiéndolo en cada una de sus partes, para luego realizar un tratamiento con cada una de ellas.

La estructura siguiente $(x.y)^2 = x^{2}.y^2$ en la que se relaciona el producto y la potencia se extiende fácilmente como un error al caso de la suma de la siguiente manera: $(x+y)^2 = x^2+y^2$ de un modo natural. En este caso el error es conocido como el uso inapropiado de la propiedad de linealidad, debido a que los alumnos usan una regla conocida $(x.y)^2 = x^2.y^2$ y lo aplican a una nueva situación $(x+y)^2 = x^2+y^2$, que no corresponde para encontrar la respuesta. Con este procedimiento los alumnos creen que han conectado una regla conocida y el problema que no les era familiar.

En Ruano et al. (2008) se muestran errores relativos a la extensión de la propiedad distributiva que tiene como posible origen la enseñanza de las propiedades básicas como suma, resta, multiplicación y división. A manera de ejemplo mencionamos los errores producidos por el mal uso de la propiedad distributiva, tal como se muestra en el siguiente caso: el alumno utiliza $3.(3+5)=3.3+3.5$ y $a.(b+c)=a.b+a.c$ en la siguiente operación $3.(4.5)=3.4.3.5$, que generalizando resulta $a.(b.c)=a.b.a.c$, lo cual es un error de procedimiento, según esta clasificación.

2.3.2.3 Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico

Este tipo de errores se originan en el estadio autónomo y son de naturaleza estrictamente algebraica pues no tienen referencia explícita en la aritmética. Como ejemplo de ello tenemos el sentido del signo = en su paso de la aritmética al algebra y la sustitución formal. Este tipo de error no se tomará en cuenta para el análisis que se realizará en esta investigación, porque no trabajamos con ecuaciones.

A continuación se presenta una tabla de resumen con la clasificación de errores que utilizaremos en el presente trabajo.

Eje	Tipos de errores
Eje 1:Errores que tienen su origen en un obstáculo	Errores de concatenación
	Errores de necesidad de clausura
Eje 2:Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética
	Errores de procedimiento
	Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico

2.4 Anillo

Definición 1

Un conjunto A provisto de dos leyes internas adición y multiplicación posee la estructura de ***anillo*** para estas dos leyes si solo si:

- A posee la estructura de *grupo conmutativo* para la adición.
- La multiplicación es *asociativa*.
- La multiplicación es *distributiva* por la izquierda y por la derecha con respecto a la adición.

En símbolos:

- $\forall a, b,c \in A,\ (a + b) + c = a + (b + c)$ (Propiedad asociativa de la adición)
- $\forall a, b \in A,\ a + b = b + a$ (Propiedad conmutativa de la adición)
- $(\exists 0 \in A)\ (\forall a \in A)\ a + 0 = 0 + a = a$ (Propiedad del cero)
- $(\forall a \in A)\ (\exists -a \in A),\ a + (-a) = -a + a = 0$ (Propiedad del opuesto)
- $\forall a, b,c \in A,\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Propiedad asociativa de la multiplicación)
- $\forall a, b,c \in A,\ a(b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (Propiedad distributiva a izquierda)
- $\forall a, b,c \in A,\ (b + c)a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ (Propiedad distributiva a derecha)

Si además, la multiplicación es conmutativa, se dice que A es *anillo conmutativo* o *abeliano*.

$\forall a, b \in A,\ a \cdot b = b \cdot a$

Si la multiplicación tiene elemento neutro 1, se dice que el anillo es unitario.

$(\exists 1 \in A)\ (\forall a \in A)\ a \,.\, 1 = 1 \,.\, a = a$

Cuando en un anillo existen elementos a, b tales que

$$a \neq 0 \text{ y } \ b \neq 0 \quad \Longrightarrow ab = 0$$

se dice que a y b son verdaderos divisores de cero o simplemente divisores de cero.

Se llama ***dominio de integridad*** o ***anillo íntegro*** un anillo conmutativo no reducido a cero y desprovisto de divisores de cero.

Ejemplos : (**Z** , +, **.**); (□ , +, **.**); (□ , +, **.**); (□ , +, **.**).

2.4.1 Anillo de Polinomios

Definición 2

Una ***sucesión*** con valores en el conjunto E es cualquier función de □ en E.

$$\boldsymbol{s}: \square \to E$$
$$n \to s(n)$$

y representamos los valores $s(n)$ como s_n. A los que llamaremos ***coeficientes de la sucesión.***

$$\boldsymbol{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots)$$

$$\boldsymbol{s}(0) = s_0, \quad \boldsymbol{s}(1) = s_1, \quad \boldsymbol{s}(2) = s_2, \quad \boldsymbol{s}(3) = s_3, \quad \boldsymbol{s}(4) = s_4, \quad \ldots$$

Ejemplos

1. $\boldsymbol{x} = (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ $\quad x_i = 0, \forall i \in$ □ .

2. $\boldsymbol{y} = (1, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ $\quad y_i = 1, \forall i \in$ □ .

3. $\boldsymbol{z} = (1, -1, -1, 1, \ldots, (-1)^i, \ldots)$ $\quad z_i = (-1)^i, \forall i \in$ □ .

4. $\boldsymbol{p} = (1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ $\quad p_0 = 1, p_i = 0, \text{ si } i \geq 1.$

5. $\boldsymbol{q} = (0, 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ $\quad q_1 = 1, p_i = 0, \text{ si } i \neq 1.$

6. $\boldsymbol{r} = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ $\quad r_2 = 1, r_i = 0, \text{ si } i \neq 2.$

Las sucesiones del último tipo jugarán un papel esencial en nuestra discusión.

Definición 3

Sean $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ sucesiones,

$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)$, $\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3, ..., y_m, ...)$.

Se dice que las **sucesiones son iguales**

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ si y solo si para todo i: $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i$.

En particular, $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) = (0, 0, 0, 0, ..., 0, ...)$ si y solo si

$\boldsymbol{x}_i = 0$ para todo i.

Para nuestro propósito consideraremos, no la totalidad de sucesiones, sino las denominadas sucesiones nulas.

Definición 4

Una **sucesión** es ***casi nula*** si y solo si existe un índice $m \in \mathbb{N}$ tal que $\boldsymbol{x}_i = 0$ si $i > m$.

Es decir, se trata de las sucesiones tales que desde un índice m, en adelante todos los coeficientes son iguales a 0. Se suele decir que los coeficientes son **casi todos 0**.

2.4.2 Polinomios

Con **P** denotamos al conjunto formado por la ***sucesión nula*** y todas las ***sucesiones casi nulas*** definidas en un anillo conmutativo unitario.

Definición 5

Denominamos ***polinomio*** con coeficientes en un anillo conmutativo unitario A a una sucesión nula o una sucesión casi nula.

Definiremos una adición y una multiplicación en el conjunto **P**, así como un producto externo de un elemento de **A** por un elemento de **P**.

Definición 6

Sean $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ dos polinomios, denominamos suma de $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, denotado por $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ al polinomio cuyo coeficiente i es: $(x + y)_i = x_i + y_i$

Es decir:

$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots , x_i, \ldots, x_m, 0, 0, 0, \ldots)$

$\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, y_2, \ldots , y_i, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots)$

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots , x_i + y_i, \ldots, x_p, 0, 0, 0, \ldots)$

$p = \max \{m, n\}$

Definición 7

El polinomio $\boldsymbol{0} = (0, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0 \ldots)$ lo denominamos **polinomio** cero o **nulo**.

Definición 8

En el conjunto **P** de los polinomios con coeficientes en un anillo conmutativo unitario definimos la adición de polinomios:

$+ : \mathbf{P} \times \mathbf{P} \to \mathbf{P}$

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$

El conjunto **P** de los polinomios con coeficientes en un anillo conmutativo unitario A, provisto de la adición (**P**, +) es un grupo abeliano, es decir:

a) La adición de polinomios es asociativa: $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$

b) La adición de polinomios posee elemento neutro $\boldsymbol{0}$.

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{P}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

c) Todo polinomio admite un polinomio opuesto.

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{P}, \exists -\boldsymbol{x} \in \mathbf{P} / \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.

d) La adición de polinomios es conmutativa: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

Definición 9

Dado $\boldsymbol{x} \in \mathbf{P}$, denominamos opuesto de $\boldsymbol{x}$ al polinomio denotado por $-\boldsymbol{x} \in \mathbf{P}$ definido por:

$-\boldsymbol{x} = (-x_0, -x_1, -x_2, \ldots , -x_i, \ldots, -x_m, 0, 0, \ldots)$, tal que

$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots , x_i, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)$

Por ejemplo el opuesto de $\boldsymbol{x} = (2, -3, 0, 1, -1, 0, 0, 0, \ldots)$ es

$-\boldsymbol{x} = (-2, 3, 0, -1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$

Vamos a definir un **producto de un elemento del anillo conmutativo unitario A por un elemento de P**.

Definición 10

Sea a un elemento del anillo conmutativo unitario **A** y $\boldsymbol{x}$ un polinomio de **P**.

$$a.\boldsymbol{x} = a.(x_0, x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots) = (ax_0, ax_1, ax_2, \dots, ax_m, 0, 0, \dots)$$

Es decir

$$(ax)_i = ax_i \qquad \forall x \in \mathbf{P}.$$

El nuevo producto externo satisface las propiedades siguientes:

1) $a.(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a.\boldsymbol{x} + a.\boldsymbol{y}$ $\quad \forall a \in \mathbf{A}, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{P}$.

2) $(a + b).\, \boldsymbol{x} = a.\boldsymbol{x} + b.\boldsymbol{x}$ $\quad \forall a, b \in \mathbf{A}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{P}$.

3) $(a.b).\boldsymbol{x} = a.(b.\boldsymbol{x})$ $\quad \forall a, b \in \mathbf{A}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{P}$.

4) $1.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ $\quad$ ***1*** elemento de neutro de **A**, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{P}$.

Ejemplo:

Sea el polinomio:

$\boldsymbol{x} = (-2, 3, -1, 0, 3, 0, 0, 0, 0, \dots)$

$\boldsymbol{x} = (-2, 0, 0, \dots) + (0, 3, 0, 0, \dots) + (0, 0, -1, 0, 0, \dots) + (0, 0, 0, \dots) + (0,0,0,0, 3,0,0, \dots)$

$\boldsymbol{x} = -2\, .(-1,0,0, \dots) + 3.(0,1,0,0,\dots) + -1.(0,0,1,0,0,\dots) + 0.(0,0,0, 1,\dots) + 3.(0,0,0,0, 1,0,0, \dots)$

Es decir, hemos logrado representar al polinomio $\boldsymbol{x}$, como una combinación lineal de sucesiones casi nulas del tipo (1, 0, 0, 0, ...); (0, 1, 0, 0, 0, ...); (0, 0, 1, 0, 0, 0, ...); ... con coeficientes en **A**.

Definición 11

Denominamos indeterminada del conjunto de los polinomios con coeficientes en el anillo conmutativo unitario A, al polinomio (0, 1, 0, 0, 0, ...) al que lo representamos por X.

Luego:

$$X = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$$

La indeterminada es un polinomio particular y determinado.

Ahora debemos definir el producto de dos polinomios.

Definición 12

Sean los polinomios ***x***, ***y:***

$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots , x_i, \ldots, x_m, 0, 0, 0, \ldots)$

$\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, y_2, \ldots , y_i, \ldots, y_n, 0, 0, 0, \ldots)$

denominamos producto de ***x***, ***y***, denotado por ***x.y*** al polinomio:

$(z_0, z_1, z_2, \ldots , z_k, \ldots, z_{m+n}, 0, 0, 0, \ldots)$, tal que

$$z_k = x_0y_k + x_1y_{k-1} + x_2y_{k-2} + x_{k-1}y_1 + x_ky_0 = \sum_{k=i+j} x_iy_i$$

En el conjunto **P** de los polinomios con coeficientes en un anillo conmutativo unitario definimos la **multiplicación de polinomios**:

Definición 13

$\boldsymbol{.}: \mathbf{P} \times \mathbf{P} \to \mathbf{P}$

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{x} \,.\, \boldsymbol{y}$

El conjunto **P** de los polinomios con coeficientes en un anillo conmutativo unitario, provisto de la adición (**P**, **.**) verifica las propiedades::

a) La multiplicación de polinomios es asociativa: (***x*** **.** ***y***) **.** ***z*** = ***x*** **.** (***y*** **.** ***z***)

b) La multiplicación de polinomios es conmutativa ***x*** **.** ***y*** = ***y*** **.** ***x***

Ejemplo:

Dada la indeterminada X = (0, 1, 0, 0, 0, ...), hallamos:

$X^2 = X.X = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots) \,.\, (0, 1, 0, 0, 0, \ldots) = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$

$X^3 = X^2.X = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots) \,.\, (0, 1, 0, 0, 0, \ldots) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$

$X^4 = X^3.X = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots) \,.\, (0, 1, 0, 0, 0, \ldots) = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$

$X^5 = X^4.X = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots) \,.\, (0, 1, 0, 0, 0, \ldots) = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,\ldots)$ ...

Teorema

Para todo polinomio ***a*** = $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, 0, \ldots)$ se cumple.

$(1, 0, 0, 0, ...)\ (a_0, a_1, a_2, ..., a_m, 0, 0, 0, ...) = (a_0, a_1, a_2, ..., a_m, 0, 0, 0, ...)$

Demostración:

$1.a_0 = a^0$

$1.a_1 + 0.a_0 = a_1 + 0 = a_1$

$1.a_2 + 0.a_1 + 0.a_0 + = a_1 + 0 + 0 = a_2$

....

$1.a_m + 0.a_{m-1} + ... + 0.a_0 = a_m + 0 + 0 + ... + 0 = a_m$

El papel del polinomio (1, 0, 0, 0, ...) es el de ser elemento neutro de la multiplicación, es decir hace el papel de 1.

Por esta razón identificaremos (1, 0, 0, 0, ...) →1

Representación usual de un polinomio

Sea el polinomio:

$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, a_2, ..., a_m, 0, 0, 0, ...)$

$= (a_0, 0, 0, ..., 0, 0, 0, 0, ...) +$

$(0, a_1, 0, ..., 0, 0, 0, 0, ...) +$

$(0, 0, a_2, 0, ..., 0, 0, 0, 0, ...) +$

...

$= (0_0, 0, 0, ..., a_m, 0, 0, 0, ...)$

$\boldsymbol{a} = a_0\ (1, 0, 0, ..., 0, 0, 0, 0, ...) +$

$a_1\ (0, 1, 0, ..., 0, 0, 0, 0, ...) +$

$a_2\ (0, 0, 1, ..., 0, 0, 0, 0, ...) +$

$a_3\ (0, 0, 0, 1, ..., 0, 0, 0, 0, ...) +$

... +

$a_m\ (0, 0, 0, ..., 1, 0, 0, 0, ...)$

$\boldsymbol{a} = a_0\ (1) + a_1X + a_2X^2 + a_3X^2 + a_4X^4 + ... + a_mX^m$

O más brevemente:

$\boldsymbol{a} = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^2 + a_4X^4 + ... + a_mX^m$

$a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_m \in \mathbf{A}, a_m \neq 0.$

Anillo de polinomios

El conjunto P de todos los polinomios con coeficientes en el anillo conmutativo unitario A verifica todas las propiedades del anillo conmutativo unitario A. Luego, P es un anillo conmutativo unitario.

El elemento X se denomina indeterminada. El anillo P se denota por A[X].

$$P = A[X]$$

En adelante los elementos de A[X] los denotaremos por a[X], p[X], q[X], ...

Definición 14

Sea $\boldsymbol{a}(X) \neq 0$, se llama grado de $\boldsymbol{a}(X)$ al máximo de los índices i tales que $a_i \neq 0$. Al polinomio 0 no le signamos grado.

$$gr(\boldsymbol{a}(x)) = n, \text{ si } a_n \neq 0 \text{ y } a_i = 0, \forall\, i > n.$$

Definición 15

Si $\boldsymbol{a}(X) \neq 0$, $\boldsymbol{a}(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^2 + a_4X^4 + ... + a_nX^n$ si $n = gr(\boldsymbol{a}(X))$ al coeficiente a_n se le denomina coeficiente principal de $\boldsymbol{a}(X)$. Se dice que $\boldsymbol{a}(X)$ es mónico si $a_n = 1$.

Definición 16

Un polinomio $\boldsymbol{a}(X) = A[X]$ tiene grado cero si y sólo si $\boldsymbol{a}(X) = \boldsymbol{a} \in A - \{0\}$. Los polinomios con el polinomio 0 constituyen los llamados ***polinomios constantes***.

Ejemplos: 8; 12; −6; 4; −3

Definición 17

Los polinomios de grado 1 tienen la expresión general $a.X + b$, $a, b \in A$, $a \neq 0$.

Ejemplos: 2X +2; 3X; −X +1;4X−2; −5X

Los polinomios de grado1, ***mónicos***, tienen la expresión general $X + b$, $b \in A$.

Ejemplos: $X - 2$; $X + 3$; $X-6$; $X + 4$; $X - 8$

Definición 18

Los polinomios de grado 2 tienen la expresión general

$$a.X^2 + b.X + c,\ a, b, c \in A,\ a \neq 0.$$

Ejemplos: $3\ X^2 + 2X + 2$; $2X^2 - 3X$; $-4X^2 - X + 1$; $4X^2 - 2$; X^2Los polinomios de grado 2, ***mónicos***, tienen la expresión general

$$X^2 + b.X + c,\ b, c \in A.$$

Ejemplos: $X^2 + 2$; $X^2 - 2X$; $X^2 - X + 2$; $X^2 - 1$; X^2

Binomio

Definición 19

Un binomio es un polinomio con dos términos no nulos.

Ejemplos: $4X^2 + 2X^2$; $X^2 - 3X$; $-4X^2 - 1$; $8X^2 - 2$;$1 + X^2$

Trinomio

Definición 20

Un trinomio es un polinomio de tres términos no nulos.

Ejemplos: $4X^2 + 2X^2 + 1$ $X^4 - 3X^2 + 1$; $-4X^5 - 8X^2 + 1$; $8X^2 - 2X - 1$

CAPÍTULO III
METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1 Descripción de la metodología

En este capítulo se describirá en forma breve la metodología que se usará en esta investigación.

El trabajo de Socas (2007) presentado en la XI SEIEM pertenece al programa cognitivo según Bruno (2007). Además, el marco teórico, enfoque lógico semiótico, en el cuál se apoya esta investigación, es de corte cognitivo. Por estas razones conviene realizar una metodología de tipo cualitativo ya que se pretende comprender y describir los errores que los alumnos cometen con frecuencia en el tratamiento de polinomios. Para responder a los objetivos de investigación se diseñaron los siguientes instrumentos: cuestionarios, guías de repaso y fichas de entrevistas. Así, también, se incluirán dentro del análisis las limitaciones que se presenten en cuanto a los recursos humanos y materiales.

Por otro lado, para validar y dar consistencia a una metodología de investigación cualitativa se utiliza distintos criterios, siendo uno de ellos el de la triangulación.

Según Elliot (2000, p. 50), la triangulación "implica la obtención de relatos acerca de una situación de enseñanza desde tres puntos de vista bastante distintos: los correspondientes al profesor, a los alumnos y a un observador participante."

Según, Boggino (2004, p. 81) la triangulación "constituye un modo de validación de los resultados aceptado en la comunidad científica dentro del campo de la investigación cualitativa." Boggino (2004) sustenta la existencia de cuatro tipos de triangulación al referir la siguiente clasificación:

triangulación de fuentes de información, triangulación metodológica, triangulación teórica y triangulación de investigadores.

Para la investigación en curso se priorizó la triangulación teórica, que consiste en analizar la información desde dos o más posiciones teóricas (teoría del ELOS y la clasificación de los errores de Socas). Sin embargo, también se considera la triangulación metodológica, que se plasmó con el uso de varios recursos como la entrevista, la observación y la revisión de la planificación curricular docente (Diseño Curricular Nacional del 2005). La triangulación de investigadores se desarrolló a través de la docente-investigadora (tesista), y una observadora externa (la asesora). Además, ayudó como participante externo eventual, por correo electrónico, el Dr. Martin Socas, quien brindó un acercamiento a su propuesta realizada en el XI Simposio.

3.1.1 Fases de la metodología

La metodología tuvo dos fases de ejecución. En la primera fase se realiza un acercamiento a los contenidos matemáticos, a través del análisis preliminar, que los alumnos han estudiado, luego se propone una clasificación de errores para luego elaborar los instrumentos que recogerán la información, en este caso el cuestionario y la entrevista. Las actividades de la entrevista se elaboran en función de los resultados del cuestionario. En la segunda fase se analiza cómo han resuelto las preguntas del cuestionario y se procede a clasificarlos según lo que se propone en el marco teórico. Seguidamente se determina los posibles orígenes en términos de la clasificación de errores según Socas (1997), que son errores que tienen su origen en una ausencia de sentido y errores que tienen su origen en un obstáculo.

Por último, se realiza una entrevista a dos alumnas, cuyos procedimientos mostrados en el cuestionario se encuentran dentro de la clasificación de errores propuesta, y se realiza el estudio de los niveles de comprensión semiótico y estructural. A partir de los resultados de la entrevista se obtiene un análisis más fino el origen de los errores.

A continuación se presentan las acciones que se realizaron en esta investigación.

Resumen de acciones que se realizaron			
Intervención 1	Primera fase	Planificación	-Análisis preliminar, en el cual se realiza una revisión del diseño curricular nacional del 2005 y contenidos desarrollados en textos de matemática de tercero de secundaria. -Elaboración del cuestionario exploratorio Nº1 -Elaboración de tabla de clasificación de errores según Socas (1997)
	Segunda fase (Incompleta)	Aplicación	-Aplicación del cuestionario exploratorio Nº1 -Corrección del cuestionario exploratorio Nº1 -Tabulación y clasificación de las respuestas encontradas en el cuestionario exploratorio Nº1
		Análisis	-Valoración cuantitativa de los resultados a través del cuestionario exploratorio Nº1. -Análisis cuantitativo y cualitativo de los errores.
		Resultados	-Conclusiones generales de los resultados.
Intervención 2	Primera fase	Planificación	-Valoración de los resultados de la primera fase, a través de la docente-investigadora, la asesora y los alumnos. -Diseño de tres sesiones de repaso -Reajuste y elaboración de cuestionario exploratorio Nº2. -Elaboración de la tabla de clasificación de errores según Socas (1997) a partir del cuestionario exploratorio Nº2. -Elaboración de la entrevista.
	Segunda fase	Aplicación	-Implementación de las sesiones de repaso. -Revisión de las respuestas de los alumnos mostrados en las guías de repaso. -Aplicación del cuestionario exploratorio Nº2 y corrección del mismo. -Aplicación de la entrevista.
		Análisis	-Valoración cuantitativa de los errores a través de las respuestas de los alumnos en el cuestionario exploratorio Nº2. -Tabulación y clasificación de los errores. -Análisis cuantitativo y cualitativo de los errores. -Análisis cualitativo de la entrevista.
		Resultados	-Conclusiones generales de los resultados.

3.1.2 Descripción de las fases de la metodología

Intervención 1

Primera Fase

Se realizó el análisis del Diseño Curricular Nacional del 2005, con respecto a contenidos de segundo año de secundaria y de textos de matemática del tercer año de educación secundaria. Cabe mencionar que no se tuvo acceso a la información por parte del docente que estuvo a cargo en el año anterior del grupo de alumnos que constituyen nuestra muestra, pues ya no laboraba en la institución.

El cuestionario exploratorio Nº1 se elaboró teniendo en cuenta la clasificación de los errores de Socas(1997) y los contenidos según el diseño curricular nacional . Este instrumento fue validado por el Dr. Martín Socas, la asesora y la docente investigadora.

Para el análisis a priori de los errores del cuestionario exploratorio Nº1 se elaboró una tabla de la clasificación en función a los ejes de errores, teniendo en cuenta las preguntas, los objetivo, la descripción de los posibles errores y la respuesta correcta.

Por otro lado, para una mejor organización y análisis de los resultados del cuestionario exploratorio Nº1, se elaboró otra tabla donde se incluía las preguntas en orden ascendente, la respuesta de los alumnos, la descripción del procedimiento, la clasificación de errores según ejes, el tipo de error, el número de alumnos y el porcentaje de errores clasificados.

Aplicación

El cuestionario exploratorio Nº1 se aplicó el 24 de noviembre del 2010 a 32 alumnos del tercer año de secundaria de la I.E.P. “San Luis María Montfort”. Después de la aplicación se procedió a corregir las pruebas y luego se organizó la información en las tablas correspondientes al análisis de los resultados. Al corregir las pruebas se presentaron errores que no estaban previstos, pero se puso énfasis en los errores que tenían relación con la clasificación de Socas (1997).

Luego, se procedió a contabilizar los errores según las preguntas del cuestionario en la tabla estructurada. Seguidamente se procedió a describir el del procedimiento que habían utilizado los alumnos al desarrollar las preguntas del cuestionario. Luego se identificó el error según la clasificación de Socas(1997), se contabilizó la cantidad de alumnos que se equivocaron en dicho error y finalmente se obtuvo el porcentaje.

Análisis

La valoración cuantitativa mostró que había un alto porcentaje de algunas preguntas sin contestar. Lo cual motivo a reflexionar acerca de las causas por las cuales se obtuvieron estos resultados.

Se realizó una exploración acerca de esta situación y se encontró que los alumnos, en su mayoría, no recordaban los conceptos y propiedades del álgebra desarrollados en el grado en que se encontraban, pues esto lo habían revisado en el primer trimestre, es decir, hace seis meses.

Resultados

Debido a la poca información obtenida por los resultados del cuestionario exploratorio Nº1 y las justificaciones de los alumnos, se planificó un nuevo ciclo para ejecutar la investigación.

Intervención 2

Planificación

Se realizaron entrevistas informales a los alumnos para indagar acerca de las dificultades encontradas en el cuestionario exploratorio Nº1.

Con los insumos anteriores se diseñaron tres sesiones de repaso. Estas sesiones tuvieron una estructura de refuerzo de los contenidos que anteriormente habían sido desarrolladas en segundo grado, con respecto a las operaciones con expresiones algebraicas. Las sesiones se estructuraron en forma de Guías de repaso, donde se especificaba la teoría y se proponía actividades para desarrollar. Las secciones de las guías estaban elaboradas en función al cuestionario exploratorio Nº2 que se les iba a tomar.

El cuestionario exploratorio Nº2 se elaboró teniendo en cuenta la clasificación de errores de Socas (1997), los contenidos de segundo grado de secundaria según el Diseño Curricular Nacional del 2005 .

La tabla de clasificación de errores se volvió a reajustar en función al cuestionario exploratorio Nº2.

La elaboración de la entrevista se realizó para recoger información acerca de los estadios de desarrollo propuestos por Socas(2007) y también para aportar información acerca de las causas que originan los errores. Se diseñó una ficha de trabajo para la entrevista personal con preguntas a desarrollar. Estas preguntas se relacionaban con las preguntas propuestas en el cuestionario Nº2.

Aplicación

Se implementó las tres sesiones de repaso. Las producciones de los alumnos en las tres sesiones se recogieron a través de las actividades desarrolladas en las guías de repaso.

El cuestionario Nº2, se aplicó el 15 de diciembre del 2010 a 34 alumnos de la I.E.P. “San Luis María Montfort”. Después de la ejecución de las tres sesiones de repaso, se procedió a la corrección de las pruebas y se contabilizaron los errores. Seguidamente se procedió a clasificar los errores según Socas (1997) y finalmente se obtuvieron los porcentajes. Los procedimientos que no se llegaron a clasificar también se detallaron en el análisis de los resultados.

Las entrevistas se realizaron uno y dos días después del cuestionario Nº2 con cada alumna.

Análisis

Después de la corrección de los cuestionarios se procedió a la valoración cuantitativa y cualitativa de los errores del cuestionario.

Se analizó la entrevista a partir de los procedimientos que presentan los alumnos al desarrollar la ficha de trabajo y del aporte de la aproximación del modelo de Socas (2007) con respecto a los estadios de desarrollo.

Resultados

Los datos obtenidos permiten discutir con orden y amplitud el análisis a priori; y el análisis de los resultados para finalmente obtener las conclusiones del trabajo de investigación.

3.2 Análisis preliminar

3.2.1 Análisis del Diseño Curricular Nacional del 2005

En esta sección presentamos un análisis del Diseño Curricular Nacional (DCN) de la Educación Peruana editado en el año 2005. La ley General de Educación Nº 28044 señala la necesidad de currículos básicos, comunes a todo el país, articulado entre los diferentes niveles y modalidades.

Este documento es el currículo oficial que guía la planificación de todas las áreas de la Educación Básica Regular del Perú (EBR). La EBR organiza articuladamente los niveles de inicial, primaria y secundaria. El DCN del 2005, ha sido utilizado para elaborar las programaciones de matemática para los años 2009 y 2010 de los grados de la institución educativa donde se realizó la investigación. Se revisaron los contenidos de segundo y tercer año de secundaria, donde la organización de contenidos, en el componente de Número, relaciones y funciones, es la siguiente:

Para 2do grado de secundaria:

Polinomios

- Monomios y polinomios. Grado de un polinomio.
- Adición y sustracción de polinomios.
- Productos Notables.
- Multiplicación y división de polinomios. División sintética.
- Cocientes Notables.
- Factorización: casos. Ecuaciones lineales y cuadráticas.

Para 3er grado de secundaria:

- La recta real. Intervalos acotados y no acotados. Operaciones con intervalos.
- Ecuaciones con valor absoluto.
- Inecuaciones racionales. Inecuaciones cuadráticas. Resolución de ecuaciones e inecuaciones por factorización y completando cuadrados.

La revisión del diseño curricular permite conocer que en 2do grado de secundaria se trabajan operaciones con expresiones algebraicas, específicamente operaciones con polinomios. Además, al no estar especificados los subcontenidos, se entiende que cada docente planificará los contenidos de su programación curricular anual de acuerdo a la bibliografía que use. En los textos de segundo y tercer año de secundaria se aprecia también que se toman como referencia el diseño curricular básico para organizar los contenidos.

Un aspecto importante, con respecto a los contenidos en el tercer grado de secundaria, es revisar la suma y resta de términos semejantes usando la propiedad distributiva y la multiplicación de polinomios para iniciar el trabajo con las ecuaciones e inecuaciones. Estos conceptos son imprescindibles como prerrequisitos para iniciar todo tratamiento de ecuaciones y factorización.

3.2.2 Descripción de libros de Matemática de tercer año de educación secundaria

En esta sección se presenta el análisis de los contenidos de las unidades didácticas que corresponden al álgebra de dos libros de matemática del tercer año de educación secundaria, uno del Ministerio de Educación y el otro de la editorial Santillana.

Los puntos a analizar en estos dos textos escolares son los siguientes:

- Teoría de exponentes
- Reducción de términos semejantes
- Supresión de signos de agrupamiento o colección
- Adición y sustracción de polinomios
- Multiplicación de polinomios
- Cuadrado de dos términos o cuadrado de un binomio

Libro de Gálvez, R. (2008). Matemática 3ero de Secundaria. Lima. Ediciones el Nocedal S.A.C.

El libro que analizamos a continuación es del tercer año de educación secundaria y es distribuido gratuitamente en todas las instituciones escolares públicas por el Ministerio de Educación. Los alumnos usan este texto de manera obligatoria. En este texto no esta presente ninguno de las puntos antes mencionados. La unidad 1 es la que corresponde a los contenidos algebraicos se inicia con una relación de ejercicios denominados proceso de recuperación de saberes previos, donde sugiere que antes de empezar dicha unidad, el alumno debe recordar los contenidos siguientes: conjuntos numéricos, operaciones y propiedades, ecuaciones lineales en una variable, inecuaciones lineales en una variable, valor absoluto, operaciones con conjuntos y factorización.

Luego se describe una nota histórica con respecto a los orígenes de la ecuación de primer grado.

Seguidamente se explicita los contenidos de la unidad, que son: la recta real, intervalos acotados y no acotados, ecuaciones con valor absoluto, ecuaciones cuadráticas racionales, ecuaciones racionales y por último desarrolla el tema de inecuaciones cuadráticas e inecuaciones racionales.

Luego de la revisión de este texto se puede concluir, que la organización se ajusta al DCN del 2005, pero de manera muy vertical, pues no desarrolla subtemas que puedan apoyar la introducción de cada unidad.

Asimismo, el texto no sugiere al alumno ni al docente realizar un diagnóstico de conocimientos previos con respecto a los puntos mencionados. Consideramos que en la parte de prerrequisitos debería incluirse algún aspecto sobre la suma y resta de términos semejantes y operaciones con monomios. La introducción de la recta real no ofrece mayores acercamientos a las expresiones algebraicas. En este texto, se da por entendido que el alumno de tercero de secundaria ya conoce y utiliza los puntos mencionados.

Libro de Ediciones Santillana S.A.(2008). Matemática 3. Lima–Perú. Primera edición.

Los contenidos referidos al Álgebra se encuentran en las unidades 2,3,4,5 y 7 del texto. En la unidad 2, denominada expresiones algebraicas, se inicia con la recuperación de conocimientos previos, detallando la suma y resta de términos semejantes con ejercicios exploratorios, multiplicación y división de polinomios sencillos. Seguidamente se desarrolla el tema de expresiones algebraicas que incluye los subtemas de valor numérico y término algebraico.

A continuación introduce el tema de polinomios, cuyos subtemas se refieren a grado relativo y absoluto, y polinomios especiales. Luego el siguiente tema a desarrollarse es el de operaciones con polinomios, donde tiene como subtemas la adición, sustracción, multiplicación y división de polinomios. Esta unidad termina con el subtema de métodos para dividir polinomios. No se encontró un subtema de supresión de signos de colección pero si se incluye en las actividades propuestas. En cuanto a la teoría de exponentes no se encuentra como tema, sin embargo, en el capítulo 1 se expone un tema acerca de la potenciación de números reales con algunas generalizaciones.

La unidad 3, se denomina productos y cocientes notables, sugiere una recuperación de saberes previos donde se detallan actividades cortas relacionadas con expresiones algebraicas, operaciones con monomios y operaciones con polinomios . Seguidamente se introduce el tema de productos notables, iniciando con los subtemas de cuadrado de un binomio, suma por diferencia de dos términos y producto de dos binomios.

En las unidades 2 y 3 no se han detallado aspectos relacionados con la teoría de exponentes.

En la unidad 4, denominada factorización y fracciones algebraicas, se empieza con una apertura acerca de los conocimientos previos sobre operaciones con fracciones, propiedad distributiva y productos notables. Luego se desarrollan los temas de factorización, fracciones algebraicas y ecuaciones fraccionarias.

En la unidad 5, denominada ecuaciones e inecuaciones de segundo grado, se inicia con los saberes previos en cuanto a lenguaje algebraico, resolución de ecuaciones de primer grado y productos notables. Seguidamente se introduce el tema de ecuaciones de segundo grado o cuadráticas y ecuaciones reducibles a una ecuación cuadrática.

En la unidad 7, denominada sistema de ecuaciones de primer grado, se da el mismo tratamiento que en las anteriores unidades. La unidad se inicia con los conocimientos previos relativos a ecuación de primer grado con una incógnita, ecuación de primer grado con dos incógnitas y sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Luego se introduce los temas de sistema de ecuaciones con dos incógnitas, métodos de resolución, sistema de ecuaciones con tres incógnitas y métodos de resolución y matrices.

En este texto se da evidencia de una mayor articulación con los contenidos básicos del DCN del 2005 en relación al álgebra.

Los puntos mencionados al inicio están desarrollados en su totalidad en este libro, a excepción de la teoría de exponentes y supresión de signos de colección. Sin embargo, estos dos temas se dan como parte complementaria en el bloque de ejercicios. Las actividades señaladas en las secciones de conocimientos previos aportan significativamente a la introducción y este esquema es el que tienen todas las unidades del texto.

Los contenidos de los libros mencionados nos dan información acerca de los temas tratados y de los tipos de ejercicios que se han desarrollado en el área Matemática para el tercer año de secundaria, grado que esta está en estudio. Esta información servirá de apoyo en la elaboración de las preguntas para el cuestionario y la entrevista.

3.3 Diseño y aplicación de los cuestionarios y entrevista

3.3.1 Diseño del cuestionario exploratorio Nº1

La elaboración del cuestionario exploratorio Nº1 se realizó tomando en cuenta lo siguiente:

- Clasificación de los errores según Socas (1997)
- Los contenidos de segundo grado de secundaria según el diseño curricular nacional del 2005 del área de matemática.

La clasificación de errores de Socas(1997) detalla errores asociados a los contenidos de operaciones con polinomios revisados, como son suma de dos expresiones algebraicas con coeficientes fraccionarios, reducción de términos semejantes y cuadrado de un binomio. De allí que muestra ejemplos de errores que cometen los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO-España) al resolver operaciones de este tipo.

Los alumnos de la muestra revisaron en segundo año de secundaria contenidos relacionados a operaciones con polinomios, es decir, adición, sustracción y multiplicación de polinomios.

Con la información obtenida de los contenidos desarrollados por los alumnos de la muestra y con el marco teórico de la clasificación de Socas (1997) se elaboró el cuestionario exploratorio Nº1.

En el diseño del cuestionario exploratorio Nº1 , se usó como modelo el formato del cuestionario aplicado en el trabajo de Martínez (2001), que tenía un esquema de preguntas con opciones múltiples, que incluía, hasta cinco alternativas de respuesta. Este cuestionario constaba de dos partes. La primera, presentaba igualdades que contenían implícitamente operaciones aritméticas y algebraicas. La segunda parte del cuestionario planteaba ejercicios que implicaban necesariamente la ejecución de operaciones algebraicas, a excepción de la primera pregunta.

A continuación se muestra el cuestionario de Martínez.

DATOS SOLICITADOS

Nombre del alumno:______________________Grado: 1° Grupo:__Esp._____No. Lista_________

Responsable : Dr. Crisólogo Dolores Flores. Fecha de aplicación: 15/01/01 Puntaje:____Calif._____

PRIMERA PARTE

Indicaciones: Selecciona el inciso que corresponde a la respuesta correcta y escríbelo en el paréntesis de la derecha (Valor 2 puntos c/u)

1. ¿Cuál de las siguientes igualdades es verdadera? ....( )

   a) $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{2}-\frac{2}{2}+\frac{10}{2}=\frac{11}{6}$ d) Ninguna de las anteriores

2. ¿Cuál es la expresión equivalente a la expresión: $\frac{3}{x}+\frac{4}{x}$? ....( )

   a) $\frac{7}{2x}$ b) $\frac{12}{x^2}$ c) $7x$ d) $\frac{7}{x}$

3. ¿Cuál de las siguientes igualdades es cierta? ....( )

   a) $x^2y-2xy^2+4xy^2=x^2y+2xy^2$ b) $xy+xy=2x2y$ c) $ab-2ab=ab$ d) $2x-x=1$

4. ¿Cuál de las siguientes factorizaciones es **incorrecta**? ....( )

   a) $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$ b) $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ c) $5x^2y+10xy^2=xy(x+2y)$ d) $x-2xy=x(1-2y)$

5. ¿ Para qué valor de x se satisface la ecuación: $3x-1=8$ ....( )

   a) $x=0$ b) $x=-1$ c) $x=2$ d) $x=3$ e) Otro

Las preguntas de esta primera parte del cuestionario o prueba objetiva mostrado buscan obtener información acerca de los procedimientos aritméticos y algebraicos que los alumnos pueden utilizar en la solución de cada ejercicio. Una prueba objetiva no permite al alumno describir su procedimiento. Por otro lado, las opciones múltiples podrían generar que el alumno marque al azar cualquier respuesta sin desarrollar el ejercicio propuesto y ello podría producir imprecisiones para el análisis las causas del origen de los errores.

SEGUNDA PARTE

Indicaciones : resuelve los ejercicios y problemas siguientes escribiendo los procedimientos necesarios (Valor 5 puntos c/u)

1. Realice las siguientes operaciones (no use calculadora) y simplifique el resultado:

a) $\frac{3}{4}+1\frac{1}{3}-\frac{7}{4}=$ **b)** $(a+b)(a-b)(a+b)=$ **c)** $\frac{x^2-2x+1}{x-1}=$

2. Resuelve las siguientes Ecuaciones:

a) $3x-(x+3)=x+4$ **b)** $6(3x-1)=5(4x+3)$

3. El denominador de una fracción excede al numerador en dos unidades. Si cada término de la fracción se aumenta en cinco unidades la fracción es $\frac{4}{5}$. Hallar la fracción.

NOTA: Si no le vasta esta hoja, puede utilizar el reverso para escribir sus procedimientos generales

La segunda parte de este cuestionario se muestra más flexible en cuanto al procedimiento que el alumno pueda tomar al resolver los ejercicios propuestos. Este cuestionario nos dio idea del formato de ejercicios con polinomios que podíamos incluir en el cuestionario exploratorio Nº1.

Por otro lado la investigación es de tipo cualitativa y se necesita un análisis minucioso de los procedimientos de los alumnos para determinar los posibles orígenes de los errores que puedan cometer. Por todo ello, se decide que el instrumento cuestionario exploratorio Nº1 no sea una prueba objetiva pues esto no nos permitiría identificar el procedimiento que siguen los alumnos.

A partir de estas reflexiones que se hizo de este instrumento, se generó un cuestionario de preguntas que debían ser desarrolladas por los alumnos.

Uno de los objetivos de la investigación señala que se debe clasificar los errores según Socas (1997) y es por ello que ésta clasificación se concretiza en la preguntas del cuestionario exploratorio Nº1, de la siguiente manera:

- Errores de concatenación para la primera pregunta. Por ejemplo al sustituir 2 en 3x, el alumno obtiene 32 y no 6.
- Errores de álgebra que tienen su origen en la aritmética, relacionados a las fracciones, para la segunda pregunta. Por ejemplo al sumar dos monomios de la forma siguiente:

  $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{1}{(5+8)}$ que lo extienden a $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$.

  $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{(1+1)}{(5+8)}$ que lo extienden a $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1+1}{x+y}$

- Errores de procedimiento, relacionados a la propiedad de linealidad, para la tercera pregunta. Por ejemplo al desarrollar el siguiente binomio $(x+y)^2 = x^2+y^2$, error extendido de la potencia de un producto $(x.y)^2 = x^2.y^2$.
- Errores del algebra que tienen su origen en la aritmética, relacionados al uso inadecuado del paréntesis, para la cuarta pregunta. Por ejemplo al eliminar paréntesis en $12y+2=14y$ que se extiende a $-(x+y) = -x+y$
- Errores de necesidad de clausura para la quinta pregunta. Por ejemplo en $12y+2=14y$, el alumno trata de "cerrar" la operación.
- Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, relacionados a la omisión de paréntesis, para la sexta pregunta. Por ejemplo cuando se tiene $6(x+y) = 6x+y$, donde los alumnos no aplican correctamente la propiedad distributiva.

También, las preguntas se diseñaron tomando en cuenta los contenidos relacionados con las operaciones con polinomios que, los alumnos de la muestra, llevaron en el año anterior.

Cabe resaltar que una descripción más detallada de la conexión de los errores y las preguntas se da en el análisis a priori.

El cuestionario exploratorio Nº1 se encuentra en el anexo 1.

3.3.2 Aplicación del cuestionario exploratorio Nº1

El cuestionario exploratorio Nº1 se aplicó 35 alumnos seleccionados para la investigación, en grupos de 15 alumnos y 20 alumnos, que cursaban el 3er año de educación secundaria en la Institución Educativa "San Luis María Montfort", ubicada en la localidad de Ñaña, distrito de Chaclacayo. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 14 y 15 años.

La aplicación del cuestionario exploratorio Nº1, se realizó el 24 de noviembre del 2010 y tuvo una duración de 30 minutos aproximadamente, con un adicional de 5 minutos.

Se informó a los alumnos que el cuestionario tenía una nota en el criterio de comunicación matemática (nombre que se le da a un criterio de evaluación del área de matemática en el nivel de secundaria) que tiene un peso del 25% de la nota final del área, con la finalidad de que desarrollen el cuestionario con honestidad y responsabilidad.

El cuestionario se dividió en 6 preguntas y el calificativo total fue de 20 puntos. Para la validación de este cuestionario se realizó el cruce de información entre la docente-investigadora, la asesora y un observador externo. El observador externo estuvo representado por el Dr. Martin Socas, quien a través del correo electrónico dio su opinión acerca de la factibilidad de las preguntas del cuestionario exploratorio Nº1, calificando el cuestionario como "adecuado".

3.3.3 Diseño y aplicación de sesiones de repaso

Luego de la aplicación del cuestionario exploratorio Nº1 se observó un alto porcentaje de preguntas dejadas en blanco por los alumnos. Por esta razón se decidió realizar una encuesta exploratoria para indagar sobre la causa de estos resultados. Esta encuesta fue tomada después de que se les devolvió los cuestionarios Nº1 corregidos y consistió en pedirles que escribieran en una hoja las posibles causas por las que no contestaron las preguntas. Luego se realizó un diálogo verbal para comentar las razones de esta dificultad. Se escucharon las respuestas y sugerencias de los alumnos. La encuesta permitió saber que un alto porcentaje de alumnos manifestaba que no recordaba los temas de operaciones con polinomios pues era un tema que ya habían revisado en segundo grado de educación secundaria (un año anterior), y las aplicaciones las habían realizado en el primer trimestre; del año en curso, es decir, hace seis meses aproximadamente; pues en el momento de la aplicación del primer cuestionario los alumnos se encontraban cursando la mitad del tercer trimestre. Por este motivo se decide elaborar tres sesiones de repaso.

Las sesiones de repaso se elaboraron teniendo cuenta las respuestas desarrolladas de los alumnos en el primer cuestionario exploratorio y los resultados de la encuesta informal que se realizó. Se elaboraron 3 sesiones de repaso, cada sesión contaba con una guía de trabajo. La guía de trabajo incluía un resumen de la teoría, ejemplos, ejercicios propuestos relacionados con sus errores y sobre temas que se tomaron en el primer cuestionario exploratorio.

El tiempo para cada sesión de repaso fue de 45 minutos cada una y se realizó una por día. Al término de cada sesión se recogieron las guías desarrolladas para recabar información.

Las guías de trabajo se muestran en los anexos.

3.3.4 Diseño del cuestionario exploratorio Nº2

Para el diseño del cuestionario exploratorio Nº2 se tomó en cuenta:

- La clasificación de los errores según Socas (1997).
- Los contenidos de segundo grado de secundaria según el diseño curricular básico del 2005 del área de matemática.
- Las preguntas del cuestionario exploratorio Nº1.
- Las guías de trabajo de las sesiones de repaso que incluyen las actividades resueltas por los alumnos.

Los contenidos asociados a la clasificación de errores de Socas (1997) están relacionados a las operaciones con polinomios, específicamente la reducción de términos semejantes, suma de monomios con coeficientes fraccionarios y cuadrado de un binomio.

Los contenidos de las sesiones de repaso estaban relacionadas a la introducción de conceptos básicos estudiados en segundo grado acerca de polinomios, cuadrado de un binomio, operaciones con expresiones algebraicas y las preguntas del cuestionario exploratorio Nº1.

En la elaboración de las preguntas del cuestionario exploratorio Nº2 se mantuvieron los mismos criterios que se propusieron para el cuestionario exploratorio Nº1 que fue validado por el Dr. Martin Socas a través del correo electrónico. Para el cuestionario exploratorio Nº2, se hizo la revisión con la asesora. El cuestionario exploratorio Nº2 se puede visualizar en el anexo 9.

Las preguntas organizadas para el cuestionario exploratorio Nº2 según la clasificación de Socas (1997), fue de la siguiente manera.

- Errores de concatenación para la primera pregunta.

  <u>Pregunta 1</u>: Si $x = 21$, ¿a qué es igual $5 + 8x$?

  En esta pregunta se verificará errores al sustituir 21 en 8x donde el alumno obtendrá 821 y no 168.

- Errores de álgebra que tienen su origen en la aritmética, relacionados a las fracciones, para la segunda pregunta.

  Pregunta 2: Reduce $\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x$

  Se verificará errores al reducir los monomios, como por ejemplo, de la forma siguiente:

  $\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x = \frac{1x - 4x}{2 - 5} = \frac{3x}{-3}$

- Errores de procedimiento, relacionados a la propiedad de linealidad, para la tercera pregunta.

  Pregunta 3: ¿Es correcto $(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 4y^2$?

  Aquí se verificará errores como:

  La igualdad $(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 4y^2$ es correcta.

- Errores del algebra que tienen su origen en la aritmética, relacionados al uso inadecuado del paréntesis, para la cuarta pregunta.

  Pregunta 4: Reduce la siguiente expresión $3x - (y - 5x)$

  En esta pregunta se verificará errores referidos al signo que antecede al paréntesis, como se observa a continuación.

  $3x - (y - 5x) = 3x - y - 5x$

- Errores de necesidad de clausura para la quinta pregunta.

  Pregunta 5: Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor $5x + 2$?

  En esta pregunta se verificará errores referidos a la necesidad del alumno de cerrar una operación indicada con un solo término, como se observa a continuación:

  $5x + 2 = 5(2y) + 2 = 10y + 2 = 12y$

- Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, relacionados a la omisión de paréntesis, para la sexta pregunta

  Pregunta 6: Si $x = y + 3$, ¿cuál es el valor de $4x + 3y$?

  En esta pregunta se verificará errores referidos a omisión de paréntesis en la sustitución.

  $4x + 3 = 4(y + 3) + 3y = 4y + 3 + 3y = 7y + 3$

Las modificaciones entre los cuestionarios exploratorios Nº1 y Nº2 no fueron demasiado sustanciales. Recordemos que el primer cuestionario exploratorio había sido validado por el Dr. Martin Socas (a quien se le considera como participante externo) y en el siguiente se hizo el cruce de información del cuestionario entre la docente-investigadora y la asesora. Por esta razón se conservaron las estructuras propias de las preguntas del cuestionario exploratorio Nº1 y los cambios obedecieron a usar otras formas de presentación o dificultad de los mismos, como se detalla en la siguiente tabla.

Preguntas de los cuestionarios exploratorios Nº1 y Nº2.	
Preguntas del cuestionario exploratorio Nº1	**Preguntas del cuestionario exploratorio Nº2**
Pregunta 1 Si $x = 6$, ¿a qué es igual $8x$?	**Pregunta 1** Si $x = 21$, ¿a qué es igual $5 + 8x$?
Pregunta 2 Resuelve la siguiente suma $\frac{5x}{3} + \frac{x}{3}$	**Pregunta 2** Reduce $\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x$
Pregunta 3 Desarrolla el siguiente binomio al cuadrado $(x + y)^2$	**Pregunta 3** ¿Es correcto $(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 4y^2$?
Pregunta 4 Reduce la siguiente expresión: $3x - (y + x)$	**Pregunta 4** Reduce la siguiente expresión: $3x - (y - 5x)$
Pregunta 5 Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor $5x + 3$?	**Pregunta 5** Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor $5x + 2$?
Pregunta 6 Si $x = y + 3$, ¿cuál es el valor de $5x + 3y$?	**Pregunta 6** Si $x = y + 3$, ¿cuál es el valor de $4x + 3y$?

En el análisis a priori del cuestionario exploratorio Nº2, se ha elaborado mas detalles relacionadas con lo que se espera de cada respuesta.

3.3.5 Aplicación del cuestionario exploratorio Nº2

El cuestionario exploratorio Nº 2 se aplicó a 32 alumnos, en dos grupos y con una duración de 30 minutos, para cada grupo. El grupo de alumnos es el mismo que se tuvo para la aplicación del primer cuestionario exploratorio, a excepción de dos alumnos que faltaron por diferentes motivos. Cabe resaltar que una de las dificultades de la aplicación de este cuestionario fue el momento académico en el que se encontraban los alumnos, pues era la última semana de clase del año escolar y los alumnos tenían varias evaluaciones en dicha semana.

3.3.6 Diseño y aplicación de la entrevista

La entrevista se diseñó tomando en cuenta las preguntas y resultados de los cuestionarios exploratorios Nº1 y Nº2. Las preguntas propuestas en la entrevista tenían como finalidad indagar acerca de los estadios de desarrollo en el cual podrían encontrarse las alumnas. Estos estadios fueron descritos en la sección 2.1.3 del marco teórico relacionados a la adaptación tomada del Enfoque Lógico Semiótico.

La ficha de trabajo de la entrevista constaba de 3 actividades, donde cada una de ellas contenía ejercicios ubicados consecutivamente de menor a mayor dificultad. La primera actividad, que consta de cuatro ejercicios, estaba dirigida a indagar sobre la reducción de términos semejantes y las dificultades que podían tener los alumnos acerca del signo que antecedía al paréntesis. La segunda actividad, que consta de dos ejercicios, estaba dirigida a explorar sobre los errores en cuanto a las operaciones con fracciones. En la tercera actividad se plantearon siete ejercicios, dirigidos a explorar los errores en cuanto a las operaciones con potencias.

En la actividad Nº1, se plantean las preguntas a) y b) relacionadas con la pregunta 5 de los cuestionarios exploratorios Nº1 y Nº2, donde se evidencia el error de necesidad de clausura, al encontrar procedimientos como $10y + 2 = 12y$.

En esta actividad, también se proponen los ejercicios c) y d) que nos pueden llevar al origen de los errores con respecto a la supresión de los signos de colección.

En la actividad Nº 2, se proponen dos ejercicios, el primero relacionado a la suma de fracciones en el contexto aritmético, y el segundo relacionado a la suma de monomios con coeficientes fraccionarios. Esta actividad permitirá recoger información acerca de los errores que tienen su origen en la aritmética.

Por otro lado, se espera que algunos errores esten asociados al uso inadecuado del procedimiento $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$, porque este tipo de procedimiento fue usado por la mayoría de alumnos en el desarrollo de los cuestionarios Nº1 y Nº2.

En la actividad Nº 3, se busca recoger información con respecto al sistema antiguo de los alumnos, pues los ejercicios a), b),c) y d) fueron propuestas con esta intención. Esta actividad también busca indagar acerca de los errores de procedimiento, para ello los ejercicios e),f) y g) cumplen este propósito. Con esta información se podría delimitar la comprensión matemática del alumno en el estadio estructural o en el estadio semiótico.

La entrevista se aplicó a dos alumnas del tercer año de secundaria que desarrollaron el cuestionario exploratorio Nº2, denominadas L y C. Estas alumnas evidenciaban en sus cuestionarios errores que tienen su origen en un obstáculo y errores que tienen su origen en una ausencia de sentido. Para desarrollar la ficha se programó un tiempo de 30 minutos, pero se les dio un tiempo adicional de 10 a 15 minutos para cada una de las actividades, pues la entrevistadora preguntaba para obtener más información sobre los procedimientos que iban presentando en la solución de las preguntas.

La entrevista constaba de la aplicación de una Ficha escrita que ellas debían resolver en forma individual y luego con la docente contrastarían sus respuestas.

Iniciada la resolución de la ficha escrita, se observaba el desarrollo y se les iba haciendo preguntas de inspección a cada una en forma individual para obtener información del porque de sus respuestas.

Terminada la ficha, se corrigió cada una de las actividades y se daban pautas de cómo se debía resolver dichas actividades. Paralelamente se preguntaba por los procedimientos realizados y las alumnas manifestaban diferentes causas por las cuales cometieron errores, explicando los conceptos utilizados para darle solución a las actividades.

La ficha que se utilizó para la entrevista se encuentra en el anexo 11 y las respuestas a la ficha se encuentran en el anexo 12.

CAPITULO IV

ANÁLISIS A PRIORI Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1 Análisis a priori del cuestionario exploratorio Nº1

En este punto se presenta el análisis a priori, es decir, las respuestas posibles que los alumnos podrían dar a las preguntas del cuestionario exploratorio Nº1. Las respuestas pueden estar influenciadas de acuerdo a los conocimientos previos que los alumnos traen, producto de la enseñanza recibida en los años que revisaron temas de álgebra, correspondiente al segundo grado de educación secundaria, según el diseño curricular nacional que rige para todas la instituciones públicas del estado peruano.

El cuestionario se elaboró para ser tomado a un grupo de 35 alumnos, que es el total de los alumnos que asisten regularmente. Se esperaba que rindieran el cuestionario exploratorio la totalidad de alumnos; sin embargo los alumnos podían ausentarse por diferentes motivos. El cuestionario fue programado para 30 minutos.

Tabla 1. Posibles respuestas de los alumnos para el cuestionario exploratorio Nº1.

EJE1 :ERRORES QUE TIENEN SU ORIGEN EN UN OBSTÁCULO			
Preguntas	**Objetivo**	**Respuesta adecuada**	**Descripción de posibles errores**
<u>**Pregunta 5**</u> Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor $5x+3$?	Determinar errores en los que se observa necesidad de clausura.	Se reemplaza el valor de la variable $x = 2y$ en $5x+3$ y se obtiene: $5x+3 = 5(2y)+3 = 10y+3$ El resultado es $10y+3$	Los alumnos pueden resolver de la siguiente manera: $5(2y)+3 = 10y+3 = 13y$ Este error se explica por la necesidad de dar un resultado y no dejarlo como operación indicada, pues el alumno considera incompleta la solución si es que no obtiene un solo término. Esto posiblemente obedece a un pensamiento numérico.
<u>**Pregunta 1**</u> Si $x = 6$, ¿a qué es igual $8x$?	Determinar errores de concatenación.	Se resuelve siguiendo el concepto de sustitución en álgebra de la siguiente manera: $8x = 8(6) = 48$ El resultado es 48.	Los alumnos pueden resolver de la siguiente manera: $x = 6$ entonces $8x = 86$ Este error se presenta en los inicios de la enseñanza del álgebra, que se denomina yuxtaposición de dos símbolos, al no reconocer o diferenciar un número de dos cifras.
<u>**Pregunta 6**</u> Si $x = y+3$, ¿cuál es el valor de $5x+3y$?	Determinar errores con respecto al uso inadecuado del paréntesis.	Se sustituye x por $(y+3)$ en $5x+3y$, y obtenemos: $5x+3y = 5(y+3)+3y = 5y+15+3y = 8y+$ El resultado es : $8y+15$.	Los alumnos pueden resolver de la siguiente manera: $5x+3y = 5y+3+3y$ Este error sucede cuando se omiten los paréntesis en la sustitución.

EJE 2 : ERRORES QUE TIENEN SU ORIGEN EN UNA AUSENCIA DE SENTIDO			
Preguntas	**Objetivo**	**Respuesta adecuada**	**Descripción de posibles errores**
<u>Pregunta 2</u> Resuelve la siguiente suma $\frac{5x}{3}+\frac{x}{3}$	Determinar errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética relacionados con las fracciones.	Cuando los dos términos de la suma son semejantes, se operan los coeficientes de la siguiente manera: $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{b} = \frac{(a+c)x}{b}$ Luego, $\frac{5x}{3}+\frac{x}{3}=\frac{5x+x}{3}=\frac{6x}{3}=2x$ El resultado es $2x$.	Esta pregunta permite evidenciar errores que los alumnos pueden cometer al no dominar las operaciones con fracciones en aritmética. Con esta pregunta se quiere explorar la suma y resta de dos expresiones algebraicas de coeficientes fraccionarios. Los posibles errores que pueden cometer los alumnos son: a) $\frac{5x}{3}+\frac{x}{3}=\frac{6x}{6}=x$ b) $\frac{5x}{3}+\frac{x}{3}=\frac{6x}{9}=\frac{2x}{3}$ c) $\frac{5x}{3}+\frac{x}{3}=\frac{5x}{3}$

Pregunta 3 Desarrolla el siguiente binomio al cuadrado $(x+y)^2$	Determinar errores de procedimiento relacionados con la propiedad de linealidad.	La pregunta se puede resolver según el siguiente procedimiento: $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x.x + x.y + y.x + y.y$ $= x^2 + 2xy + y^2$	Los alumnos pueden cometer el siguiente error : $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ Este error es de linealidad, posiblemente extendido de $(x.y)^2 = x^2y^2$
Pregunta 4 Reduce la siguiente expresión: $3x - (y+x)$	Determinar errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética referidos al uso inadecuado del paréntesis cuando es antecedido por el signo negativo.	La solución de esta pregunta se obtiene de aplicar la supresión de paréntesis con respecto al signo. $3x-(y+x) = 3x-y-x = 3x-x-y = 2x-y$ El resultado es $2x-y$.	Los alumnos pueden cometer el siguiente error : $3x-(y+x)=3x-y+x=4x$ Aquí se expresa el error del signo con respecto a la supresión de paréntesis. En la entrevista que detalla Socas (2007) hace referencia a este error como uso inadecuado de los paréntesis.

4.2 Análisis a priori del cuestionario Nº2 y de la entrevista

4.2.1 Análisis a priori del cuestionario exploratorio Nº2

En este punto se presenta el análisis a priori de las preguntas del cuestionario exploratorio Nº2. Las respuestas pueden estar influenciadas de acuerdo a los conocimientos previos, que los alumnos traen, producto de la enseñanza en años anteriores, pues llevaron temas correspondientes al segundo grado de educación secundaria, en las que se revisaron temas de álgebra según el diseño curricular nacional.

El cuestionario se elaboró para ser tomado a un grupo de 32 alumnos, que es el total de los alumnos que asisten regularmente. Se espera que rindan el cuestionario exploratorio los 32 alumnos. El cuestionario está programado para 30 minutos.

Tabla 2. Posibles respuestas de los alumnos para el cuestionario exploratorio Nº2.

EJE1 :ERRORES QUE TIENEN SU ORIGEN EN UN OBSTÁCULO			
Preguntas	**Objetivo**	**Respuesta adecuada**	**Descripción de posibles errores**
<u>Pregunta 5</u> Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor $5x + 2$?	Determinar errores relacionados con la necesidad de clausura.	Se sustituye $x = 2y$ y se obtiene: $5x + 2 = 5(2y) + 2 = 10y + 2$ El resultado es $10y + 2$.	Los alumnos pueden resolver de la siguiente manera: $5x + 2 = 5(2y) + 2 = 10y + 2 = 12y$ Este error se explica por la necesidad de dar un resultado, pues el alumno considera incompleta la solución si es que no obtiene un solo término. Tampoco identifica los términos semejantes y por ello obtiene finalmente 12y.
<u>Pregunta 1</u> Si $x = 21$, ¿a qué es igual $5 + 8x$?	Determinar los errores de concatenación.	Esta pregunta puede ser resuelta siguiendo el concepto de sustitución en álgebra de la siguiente manera: $5 + 8x = 5 + 8(21) = 173$ El resultado es 173.	Los alumnos pueden resolver de la siguiente manera: Para $x = 21$ entonces $8x = 821$ Este error se presenta en los inicios de la enseñanza del álgebra, que se denomina yuxtaposición de dos símbolos, en el que el alumno asume que $8x$ es una sola cifra y no un producto de dos cantidades.
<u>Pregunta 6</u> Si $x = y + 3$, ¿cuál es el valor de $4x + 3y$?	Determinar errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética referidos al uso inadecuado del paréntesis.	Se sustituye x por $y + 3$ en el binomio $4x + 3y$ y se obtiene : $4x + 3y = 4(y + 3) + 3y = 4y + 12 + 3y = 7y + 1$ El resultado es : $7y + 12$.	El error que pueden cometer es el siguiente: $4x + 3y = 4(y + 3) = 4y + 3 + 3y = 7y + 3$ El uso inadecuado del paréntesis se manifiesta al omitirlo en la sustitución. Esto llevará al alumno a realizar solo el primer producto y no el segundo para obtener finalmente 7y+3. Por otro lado también se puede esperar que en esta pregunta cometa el error de necesidad de clausura al obtener finalmente 10y.

EJE 2 :ERRORES QUE TIENEN SU ORIGEN EN UNA AUSENCIA DE SENTIDO			
Preguntas	**Objetivo**	**Respuesta adecuada**	**Descripción de posibles errores**
Pregunta 2 Reduce $\frac{1}{2}x-\frac{4}{5}x$	Determinar errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, relacionados con las operaciones con fracciones.	Como los términos son semejantes, se opera según el procedimiento siguiente: $\frac{ax}{b}+\frac{cx}{d}=\frac{(a.d+b.c)x}{b.d}$ Luego, $\frac{1x}{2}-\frac{4x}{5}=\frac{1x}{2}+\frac{-4x}{5}=\frac{1x.5-2.4x}{2.5}=\frac{5x-8x}{10}=\frac{-3x}{10}$ El resultado es $\frac{-3x}{10}$	Esta pregunta permite evidenciar errores que los alumnos pueden cometer al no dominar las operaciones con fracciones en aritmética. Con esta pregunta se quiere explorar la suma y resta de dos expresiones algebraicas de coeficientes fraccionarios. Los posibles errores que los alumnos pueden cometer en esta pregunta son: a) $\frac{1}{2}x-\frac{4}{5}x=\frac{1x-4x}{2-5}=\frac{3x}{-3}$ b) $\frac{1}{2}x-\frac{4}{5}x=\frac{1x-4x}{2.5}=\frac{3x}{10}$

<u>Pregunta 3</u> ¿Es correcto $(3x+2y)^2 = 9x^2 + 4y^2$?	Determinar errores de procedimiento relacionados con la propiedad de linealidad.	Para afirmar la veracidad o falsedad de la igualdad propuesta se puede desarrollar el binomio al cuadrado, de la siguiente forma: $(3x+2y)^2 = (3x+2y)(3x+2y)$ $\begin{array}{r} 3x+2y \\ 3x+2y \\ \hline +6xy+4y^2 \\ 9x^2+6xy \\ \hline 9x^2+12xy+4y^2 \end{array}$ Por lo tanto: $(3x+2y)^2 = (3x+2y).(3x+2y)$ $= 9x^2+12xy+4y^2$ Tambien puede hacer uso del siguiente procedimiento: $(3x+2y)^2 = (3x+2y)(3x+2y)$ $= 3x.3x+3x.2y+2y.3x+2y.2y$ $= 9x^2+6xy+6yx+4y^2$ $= 9x^2+12xy+4y^2$ Por tanto el resultado es $9x^2+12xy+4y^2$	Los alumnos pueden afirmar que es correcta la igualdad: $(3x+2y)^2 = 9x^2 + 4y^2$ En este caso el error es causado por el uso inapropiado de de la propiedad de linealidad de la siguiente estructura $(a.b)^2 = a^2.b^2$. Aquí los alumnos usan una regla conocida $(a.b)^2 = a^2.b^2$ que han aprendido y lo aplican de manera incorrecta a esta nueva situación $(a+b)^2 = a^2+b^2$. Con este procedimiento los alumnos creen que han conectado la regla conocida y el problema que no les era familiar.

Pregunta 4 Reduce la siguiente expresión: $3x-(y-5x)$	Determinar errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética referidos al uso inadecuado del paréntesis cuando el signo negativo le antecede.	La solución de esta pregunta se obtiene de aplicar la supresión de paréntesis con respecto al signo de la siguiente manera: $3x-(y-5x)=3x-y+5x=3x+5x-y=8x-y$ El resultado es $8x-y$	Los alumnos pueden cometer el siguiente error : $3x-(y-5x)=3x-y-5x$ Aquí se expresa el error con respecto al signo que antecede al paréntesis. Socas (2007), en la entrevista clínica, hace referencia a este error como al uso inapropiado de la regla de los paréntesis, que puede tener como origen problemas de la aritmética no superados.

4.2.2 Análisis a priori de la entrevista

Para la entrevista se han seleccionado preguntas relacionadas a los errores que se han detectado en el cuestionario exploratorio Nº2, según la clasificación de Socas (1997).

A continuación se presenta el análisis a priori de la entrevista a través de una tabla en la que se mostrarán los siguientes aspectos:

- Preguntas, a las que se enfrentaron los alumnos en la entrevista.
- Finalidad de cada pregunta, que permitirá identificar el sistema antiguo de los alumnos y clasificar los errores según Socas (1997).
- Posibles errores, donde se describirán los errores que se esperan que cometan los alumnos al resolver los ejercicios.
- Respuesta, donde se describirán los procedimientos adecuados que se esperan en cada pregunta.

Tabla 3. Posibles respuestas de los alumnos de la actividad Nº1 de la entrevista.

Preguntas de Actividad Nº 1	Finalidad	Posibles errores	Respuesta adecuada
Ejercicio a) Escribe de forma más simplificada la siguiente suma $3x+5y$	Este ejercicio está planteado para que el alumno identifique términos semejantes, mostrando términos con variables distintas.	Si realiza la reducción escribiendo como resultado final $8x$ u $8y$ entonces el error que cometerá será el de necesidad de clausura.	Para desarrollar el ejercicio es necesario aplicar el concepto de términos semejantes. Por lo tanto el resultado es $3x+5y$. No se pueden reducir porque $3x$ y $5y$ no son términos semejantes.
Ejercicio b) Escribe de forma más simplificada la siguiente suma $3x+5x$	Este ejercicio está planteado para que el alumno identifique términos semejantes, mostrando términos con variables semejantes, y realice la reducción de términos.	Si realiza la reducción escribiendo como resultado 8 entonces se podrá clasificar este error como de necesidad de clausura, pues está tratando el ejercicio con un pensamiento numérico.	Este ejercicio se resuelve aplicando el concepto de reducción de términos semejantes: $3x+5x=(3+5)x=8x$ El resultado es $8x$.
Ejercicio c) Escribe de forma más simplificada la siguiente suma $3x-(y+x)$	Este ejercicio pretende obtener información acerca de cómo el signo que antecede al paréntesis afecta a los términos internos, para clasificar este error como errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.	Al realizar la reducción la supresión de signos de colección, como el paréntesis, el signo negativo afectará a los términos internos. Entonces al describir el siguiente procedimiento $3x-y+x$ está cometiendo el error de uso inadecuado del paréntesis, que se clasifica en los errores que está incluido su origen en la aritmética.	Este ejercicio se resuelve aplicando la regla del signo negativo que antecede al paréntesis. $3x-(y+x)=3x-y-x=3x-x-y=2x-y$ El resultado es $2x-y$.
Ejercicio d) Escribe de forma más simplificada la siguiente suma $5y-(-5x-3)$	Este ejercicio tiene mayor complejidad que el anterior y pretende obtener información acerca de cómo el signo que antecede al paréntesis afecta a los términos internos, para clasificar este error como errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.	El error que se espera que cometan es la omisión del paréntesis y el signo que le antecede, de la siguiente forma: $5y-(-5x-3)=5y-5x-3$ que luego se clasificará en errores que tienen su origen en la aritmética.	Este ejercicio se resuelve aplicando la regla del signo negativo que antecede al paréntesis. $5y-(-5x-3)=5y+5x+3$ El resultado es $5y+5x+3$.

Tabla 4. Posibles respuestas de los alumnos de la actividad Nº2 de la entrevista.

Preguntas de Actividad Nº 2	Finalidad	Posibles errores	Respuesta adecuada
Ejercicio a) Suma $\frac{5}{3}+\frac{3}{7}$	En esta pregunta se pretende explorar los errores que cometen los alumnos al realizar operaciones con fracciones en el contexto aritmético.	Los errores que se podrían presentar para esta pregunta están asociados al uso del inadecuado del procedimiento siguiente $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+b.c}{b.d}$. Como: a) $\frac{5}{3}+\frac{3}{7}=\frac{5+3}{3+7}=\frac{8}{11}$ b) $\frac{5}{3}+\frac{3}{7}=\frac{35}{9}$	La solución puede darse usando el procedimiento siguiente $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+b.c}{b.d}$ Como se muestra a continuación $\frac{5}{3}+\frac{3}{7}=\frac{5.7+3.3}{3.7}=\frac{35+9}{21}=\frac{44}{21}$ El resultado es $\frac{44}{21}$.
Ejercicio b) Suma $\frac{5x}{3}+\frac{3x}{7}$	En esta pregunta se pretende explorar los errores que cometen los alumnos al realizar operaciones con expresiones algébricas con coeficientes fraccionarios en el contexto algebraico, para así clasificar los errores que tienen su origen en la aritmética, y con ello indagar acerca de los estadios de desarrollo. .	Los errores que se podrían presentar para esta pregunta están asociados al uso inadecuado del procedimiento siguiente $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+b.c}{b.d}$ y la reducción de términos semejantes.	La solución puede darse usando el procedimiento siguiente $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+b.c}{b.d}$ Como se muestra a continuación: $\frac{5x}{3}+\frac{3x}{7}=(\frac{5}{3}+\frac{3}{7})x=(\frac{5.7+3.3}{3.7})=\frac{44x}{21}$ El resultado es $\frac{44x}{21}$

Tabla 5. Posibles respuestas de los alumnos de la actividad Nº3 de la entrevista.

Preguntas de Actividad Nº 3	Finalidad	Posibles errores	Respuesta adecuada
Ejercicio a) Desarrolla la siguiente potencia 3^2	Esta pregunta tiene como finalidad explorar acerca de los conceptos básicos de potenciación en el contexto aritmético.	Los errores esperados son los siguientes: a) $3^2 = 3.2 = 6$ b) $3^2 = 3 + 2 = 5$	Para desarrollar la potencia de un número racional de exponente natural se puede proceder de la siguiente manera: $3^2 = 3.3 = 9$ El resultado es 9
Ejercicio b) Desarrolla la siguiente potencia $(3x)^2$	En esta pregunta se trata de explorar conocimientos de la potenciación con monomios.	Los errores que se esperan son los siguientes: a) $(3x)^2 = 3x^2$ b) $(3x)^2 = 3.2x = 5x$ c) $(3x)^2 = 3.2x^2 = 6x^2$	Para desarrollar esta potencia $(3x)^2$ se puede proceder de la siguiente manera: $(3x)^2 = (3x)(3x) = (3.3)(x.x) = 9x^2$
Ejercicio c) Desarrolla la siguiente potencia $4x^2$	Esta pregunta trata de explorar si los alumnos reconocen un término.	Los errores que se esperan son los siguientes: a) $4x^2 = (4x)^2 = 16x^2$ b) $4x^2 = 8x^2$.	El desarrollo podría ser $4x^2 = 4.x.x$ ó $4x^2 = 2.2.x.x$

Ejercicio d) Desarrolla la siguiente potencia $(2.3)^2$	Esta pregunta indagará sobre el uso de la propiedad de potenciación de un producto en el contexto aritmético.	Los posibles errores que se esperan en esta pregunta son los siguientes: a) $(2.3)^2 = 5^2$ b) $(2.3)^2 = 2.2.3.3 = 24$	Para resolver esta potencia se puede hacer uso de la definición de potencia $(2.3)^2 = (2.3)(2.3) = 2.2.3.3 = 4.9 = 36$ El resultado es 36. También se puede usar propiedades de la potenciación: $(2.3)^2 = 2^2.3^2 = 4.9 = 36$
Ejercicio e) Desarrolla la siguiente potencia $(x.y)^2$	Esta pregunta tiene como finalidad explorar el uso de la propiedad de la potencia de un producto.	Los posibles errores que se pueden presentar son: a) $(x.y)^2 = 2x.2y$ b) $(x.y)^2 = 2xy$	Para desarrollar la potencia de este ejercicio se puede usar la definición de potencia $(x.y)^2 = (x.y).(xy) = x.x.y.y = x^2y^2$ El resultado es x^2y^2 También se puede usar las propiedades de la potencia de un producto de la siguiente forma: $(x.y)^2 = x^2y^2$

Ejercicio f) Desarrolla la potencia $(x+y)^2$	Esta pregunta tiene como finalidad encontrar errores de procedimiento que están relacionados con la propiedad de linealidad para luego ubicar su comprensión matemática según los diferentes estadios de desarrollo.	El error que se espera es el siguiente: $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ Este es un error de procedimiento que se ubica en el eje de errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	El alumno puede desarrollar la potencia de usando el siguiente procedimiento: $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$ $\begin{array}{r} x+y \\ x+y \\ \hline xy+y^2 \\ x^2+xy \quad \\ \hline x^2+2xy+y^2 \end{array}$ Por lo tanto, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. También se puede seguir el siguiente procedimiento $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x.x + y.x + y.x + y.y$ $= x^2 + 2xy + y^2$ Por lo tanto, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Ejercicio g) Desarrolla la siguiente potencia $(5x+2y)^2$	Esta pregunta tiene como finalidad encontrar errores de procedimiento que están relacionados con la propiedad de linealidad, pero que presenta mayor dificultad respecto al ejercicio anterior.	El error que se espera en esta pregunta es el siguiente: $(5x+2y)^2 = (5x)^2 + (2y)^2$ $= 25x^2 + 4y^2$	Este ejercicio se puede desarrollar usando el siguiente procedimiento: $(5x+2y)^2 = (5x+2y)(5x+2y)$ $\begin{array}{r} 5x+2y \\ 5x+2y \\ \hline 10xy+4y^2 \\ 25x^2+10xy \qquad \\ \hline 25x^2+20xy+4y^2 \end{array}$ El resultado es $25x^2 + 20xy + 4y^2$. Otro procedimiento adecuado a usar es el siguiente: $(5x+2y)^2 = (5x+2y)(5x+2y)$ $= 5x.5x + 5x.2y + 2y.5x + 2y.2y$ $= 25x^2 + 10xy + 4y^2$

4.3 Análisis de los resultados del cuestionario exploratorio Nº1

En esta sección se presenta los análisis de los resultados de la aplicación del cuestionario exploratorio Nº1 a 34 alumnos. El análisis que se presenta es de carácter cualitativo pues interesa caracterizar y clasificar los errores frecuentes que cometen los alumnos al resolver preguntas como las que se proponen en este cuestionario.

El análisis de las producciones de los alumnos se realiza a partir de sus respuestas a las preguntas planteadas y esta información se muestra en la tabla 6, donde se clasifican las respuestas de 34 alumnos según la clasificación de errores de Socas.

Tabla 6. Resultados del cuestionario exploratorio Nº1.

Preguntas	Respuesta de los alumnos	Descripción del procedimiento	Clasificación de errores según ejes	Tipo de error	Número de alumnos	%
Pregunta 1: Si $x = 6$, ¿a qué es igual $8x$?	No se encontraron los errores previstos en el análisis a priori.	Ningún alumno presentó el error $8x = 8(6) = 86$	Eje 1: Errores que tienen su origen en un obstáculo	Concatenación	Ningún alumno	0%
Pregunta 2: Resuelve la siguiente suma $\frac{5x}{3} + \frac{x}{3}$	$\frac{5x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{3x+8x}{3+3} = \frac{11x}{6}$	Dos alumnos suman los denominadores uno a uno.	Eje 2: Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores que tienen su origen en la aritmética.	02	5, 88%
	$\frac{5x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{3+x+5x+3}{3+3} = \frac{4x+8x}{6} = \frac{12x}{6}$	Un alumno suma los denominadores de cada fracción linealmente obteniendo 6.	Eje 2: Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores que tienen su origen en la aritmética.	01	2,94%
	$\frac{5x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{15x + 3x}{3 + 3} = \frac{18x}{6} = 3x$	Dos alumnos suman los denominadores uno a uno.	Eje 2: Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	02	5,88%
Pregunta 3 : Desarrolla el siguiente		Los alumnos cometen el error de linealidad, posiblemente	Eje 2: Errores que tienen su origen en	Errores de procedimientos con		

binomio al cuadrado $(x+y)^2$	$(x+y)^2 = x^2 + y^2$	extendido de la siguiente igualdad: $(x.y)^2 = x^2.y^2$	una ausencia de sentido.	respecto a la propiedad de linealidad.	06	17,64%
Pregunta 4 : Reduce la siguiente expresión $3x-(y+x)$	$3x-(y+x) = 3x-y+x$ $= 4x-y$	Los alumnos omiten el paréntesis al simplificar la expresión dada.	Eje 2 :Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.	02	5,88%
	$3x-(y+x) = 3x-y+x$ $= 3-y$	Los alumnos omiten el paréntesis al simplificar la expresión dada. Además, cometen errores en la reducción de términos.	Eje2: Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.	01	2,94%
Pregunta 5 : Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor de $5x+3$?	$5x+3 = 5(2y)+3 = 10y+3$ $= 13y$	Los alumnos reemplazan el valor de x por $2y$.Realizan la operación de multiplicación correctamente, pero suman términos que no son semejantes.	Eje 1: Errores que tienen su origen en un obstáculo.	Errores de necesidad de clausura.	08	23,53%
	$5x+3 = 8x$	Los alumnos no realizan la sustitución. Tampoco reconocen los términos semejantes y los reducen incorrectamente.	Eje 1: Errores que tienen su origen en un obstáculo.	Errores de necesidad de clausura.	02	5,88%
Pregunta 6 : Si $x = y+3$, ¿cuál es el valor de $5x+3y$?	No se encontraron los errores previstos en el análisis a priori.	No se encontraron procedimientos iguales o similares a lo previsto que era: $5x+3y = 5(y+3)+3y = 5y+3+3$ que había sido considerado para clasificar este procedimiento como errores que tienen su origen en la aritmética con respecto al uso inadecuado del paréntesis.	Eje2: Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética referidos al uso inadecuado del paréntesis.	00	00%

En la siguiente tabla se muestra un consolidado de la cantidad de repuestas correctas, no contestadas y respuestas incorrectas del cuestionario exploratorio Nº1, que fue tomada a 34 alumnos. Esta información nos permitirá tener una visión global de los resultados obtenidos en forma cuantitativa.

Tabla 7. Consolidado de respuestas correctas, no contestadas y respuestas incorrectas.

Preguntas	Respuestas Correctas		No contesta		Respuestas incorrectas	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
Pregunta 1	**13**	**38,23%**	**08**	**23,53%**	**13**	**38,23%**
Pregunta 2	**08**	**23,53%**	**02**	**5,88%**	**24**	**70,59%**
Pregunta 3	**01**	**2,94%**	**12**	**35,29%**	**21**	**61,76%**
Pregunta 4	**01**	**2,94%**	**14**	**41,18%**	**19**	**55,88%**
Pregunta 5	**08**	**23,53%**	**06**	**17,65%**	**20**	**58,82%**
Pregunta 6	**05**	**14,71%**	**13**	**38,23%**	**16**	**47,06%**

La siguiente tabla muestra un consolidado con los tipos de errores clasificados según Socas (1997) indicando cantidades y porcentajes de alumnos que cometieron determinados errores, de un total de 34 alumnos.

Tabla 8. Porcentaje de errores clasificados del cuestionario exploratorio Nº1.

Preguntas	Tipo de errores	Eje	Nº de alumnos	Porcentaje
Pregunta 1	Concatenación	Errores que tienen su origen en un obstáculo.	**00**	**00,00%**
Pregunta 2	Errores que tienen su origen en la aritmética(relacionados a las fracciones).	Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	**05**	**14,71%**
Pregunta 3	Errores de procedimiento (relacionados al uso inadecuado de linealidad).	Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	**06**	**17,64%**
Pregunta 4	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética (relacionado al uso inadecuado del paréntesis cuando le antecede el signo negativo).	Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	**03**	**8,82%**
Pregunta 5	Necesidad de clausura.	Errores que tienen su origen en un obstáculo.	**10**	**29,41%**
Pregunta 6	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética (relacionado al uso inadecuado del paréntesis).	Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	**00**	**00,00%**

A partir de los resultados mostrados en las tablas 6, 7 y 8 se realiza el análisis respectivo de los resultados del cuestionario exploratorio Nº1.

- En la pregunta 1, un 38,23% de alumnos contestaron correctamente, un 23,53% no contestó y un 38,23% contestaron incorrectamente. En las respuestas incorrectas no se encontraron los errores que se esperaban, que eran los referidos a errores de concatenación. Sin embargo, solo 13 alumnos respondieron correctamente la pregunta. Otros procedimientos encontrados que no se han considerado en el análisis a priori son los siguientes:

	Resolución adecuada	Otros procedimientos sin clasificar
Pregunta 1: Si $x = 6$, ¿a qué es igual $8x$?	$8x = 8(6) = 48$ El resultado es 48	$6x + 8x = 14x$
		$\frac{6}{x} + \frac{8}{x} = \frac{6+8x}{x} = \frac{14x}{x}$
		$8x = 64$
		$(8x)+(6) = x$ $8+6 = x$ $14 = x$
		$3x+4 = 8x$ $7x = 8x$ $x = 8x$
		$8x - x = 6$ $x - x = 6+8$ $2x = 14$ $x = 7$

En estos procedimientos se puede observar que los alumnos tienden a relacionar una expresión u operación algebraica con una ecuación y tratan de encontrar el valor de la variable. Según Olfos (2002), esto puede deberse a que las ecuaciones de primer grado con una incógnita han sido emblemáticamente la iniciación del álgebra.

- En la pregunta 2, el 23,54% de alumnos resolvieron correctamente esta pregunta, un 5,88% no contestaron y el 70,59% respondieron incorrectamente. El resultado de las respuestas incorrectas es bastante alto, pues 24 alumnos se equivocaron al menos en algún procedimiento, evidenciando en que persisten las dificultades con respecto a las operaciones con fracciones tanto en el ámbito aritmético como en el algebraico. De las respuestas incorrectas, 5 alumnos cometen errores que corresponden con lo especificado en el análisis a priori, que se clasifican como errores que tienen su origen en la aritmética. Otros procedimientos encontrados no considerados en el análisis a priori son los siguientes:

<table>
<tr><td rowspan="4">Pregunta 2
Resuelve la siguiente suma
$\frac{5x}{3}+\frac{x}{3}$</td><td>Resolución adecuada.</td><td>Otros procedimientos sin clasificar.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Los dos términos de la suma son semejantes por lo tanto se opera los coeficientes según el procedimiento siguiente:
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$
$\frac{5x}{3}+\frac{x}{3}=\frac{5x+3}{3}=\frac{6x}{3}=2x$

El resultado es $2x$.</td><td>$\frac{5x}{3}+\frac{x}{3}=\frac{5x+3}{3+x}=\frac{8x}{4x}=\frac{8}{4}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{5x}{3}+\frac{x}{3}=\frac{8x+4x}{6}=\frac{12}{6}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{5x}{3}+\frac{x}{3}=\frac{5x+3}{x+3}=\frac{8x}{3x}$</td></tr>
</table>

Los procedimientos mostrados están relacionados con la inadecuada aplicación del procedimiento $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.

- En la pregunta 3, los resultados muestran que el 2,94% respondieron correctamente, el 35,29% dejó las preguntas en blanco y el 61,76% respondieron incorrectamente. Del total de las preguntas que se tomó en el cuestionario, esta pregunta tiene uno de los más altos porcentajes de respuestas sin contestar, lo que brinda escasa información para el análisis. Sin embargo, se encontraron procedimientos en un 17,64% que evidenciaban errores de procedimiento pertenecientes a los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.

Otros procedimientos encontrados que no se consideraron en el análisis a priori son los siguientes:

	Resolución adecuada.	Otros procedimientos sin clasificar.
Pregunta 3 Desarrolla el siguiente binomio al cuadrado $(x+y)^2$	$(x+y)^2 = (x+y).(x+y)$ $\begin{array}{r} x+y \\ x+y \\ \hline xy+y^2 \\ x^2+xy \quad \\ \hline x^2+2xy+y^2 \end{array}$ Por lo tanto: $(x+y)^2 = x^2+2x+y^2$	$(x+y)^2 = 2x+2y$
		$(x+y)^2 = x^2$
		$(x+y)^2 = 2x+2y+2 = 4xy+2 = 6xy$
		$(x+y)^2 = xy+xy = xy$

En estos procedimientos se presentan errores de uso inadecuado respecto a la definición de cuadrado de un binomio y además errores relacionados con la reducción de términos como en el caso de $xy+xy=xy$ ó $2x+2y=4xy$. También, se observan errores de necesidad de clausura como $4xy+2=6xy$.

- En la pregunta 4, solo un alumno respondió correctamente, que representa el 2,94%, el 41,18% de los alumnos dejaron la pregunta sin contestar y el 55,88% contestaron incorrectamente. Las preguntas sin contestar corresponden a un alto porcentaje de alumnos. De las respuestas contestadas incorrectamente, el 29,41% se ajustan a la clasificación de errores del álgebra que tiene su origen en la aritmética, referentes al uso inadecuado del paréntesis cuando le antecede un signo negativo, pues los alumnos omiten el paréntesis al momento de realizar la supresión.

Otros procedimientos encontrados que no se consideraron en el análisis a priori son los siguientes:

	Resolución adecuada.	Otros procedimientos sin clasificar.
Pregunta 4 Reduce la siguiente expresión: $3x - (y + x)$	$3x - (y + x) = 3x - y - x$ $= 3x - x - y$ $= 2x - y$ El resultado es $2x - y$	$3x - (y + x) = 3x - y + x$ $-x = 3 + x$ $x = 3 - y$ $x = 3y$
		$3x - (y + x) = 3x - y + x = 3$
		$3x - (y + x) = 3xy - 3x^2$

En el primer procedimiento, se muestra la persistencia de asociar el desarrollo de una expresión algebraica con una ecuación. En el segundo procedimiento se observa que no se toma en cuenta la variable pues el alumno da como resultado el número tres. En el tercer procedimiento un alumno ha confundido el operador de sustracción con el de multiplicación.

- En la pregunta 5, se tiene que el 23,53% ha respondido correctamente la pregunta, el 17,65% no contestó y el 58,82% lo hicieron incorrectamente. En esta pregunta se esperaban errores con respecto a la necesidad de clausura, que corresponden al eje de errores que tienen origen en un obstáculo. De las respuestas incorrectas , el 29,41% de los alumnos cometen este tipo de error.

Otro procedimiento encontrado que no se consideró en el análisis a priori es el siguiente.

	Resolución adecuada.	Otro procedimiento sin clasificar.
Pregunta 5 Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor de $5x + 3$?	Reemplazamos el valor de la variable en $5x + 3$ $5x + 3 = 5(2y) + 3 = 10y + 3$ El resultado es $10y + 3$	$5x + 3 = 5(2y) + 3 = 10y + 3$ $y = \frac{3}{10} = 0,3$

En este procedimiento sin clasificar, se evidencia que el alumno sustituye y opera las polinomios correctamente, sin embargo asocia el resultado a una ecuación para luego despejar la variable y, y así obtener un valor numérico.

- En la pregunta 6, el 14,70% respondió correctamente, el 38,23% no contestó la pregunta y el 47,06% tuvo respuestas incorrectas. Con respecto a las preguntas no contestadas se considera demasiado alto el porcentaje, lo que podría generar dificultades en el análisis de los errores.

	Resolución adecuada.	Otros procedimientos sin clasificar.
Pregunta 6 Si $x = y + 3$, ¿cuál es el valor de $5x + 3y$?	Se sustituye x por $y + 3$ en $5x + 3y$, y se obtiene: $5x + 3y = 5(y + 3) + 3y$ $= 5y + 15 + 3y$ $= 8y + 15$ El resultado es $8y + 15$	Se sustituye $x = 3y$ $5x + 3y = 5(3y) + 3y$ $= 15y + 3y$ $= 18y$

El procedimiento sin clasificar sólo lo realizó un alumno, quien reemplazó el valor de la variable x, por $3y$, obteniendo un resultado incorrecto. El error al reemplazar $y+3$ por $3y$ se le puede considerar error de necesidad de clausura.

Reflexión de los resultados del cuestionario exploratorio Nº1

Los porcentajes 23,53%, 35,29%, 41,18% y 38,23% obtenidos respectivamente, en las preguntas 1,3, 4 y 6 de la tabla 6 indican que hay un alto índice de preguntas que no fueron contestadas. Estos resultados motivaron la decisión de tomar una encuesta informal para indagar las razones por las que los alumnos no resolvieron estas preguntas.

En la encuesta informal los alumnos manifestaron que se habían olvidado de cómo resolver este tipo de operaciones algebraicas. También, dieron como justificación que los temas del tercer trimestre, que estaban revisando en el momento correspondiente a Estadística, no tenían mucha relación con el álgebra. Mencionaron que los temas de algebra para tercer año de secundaria se había desarrollado en el primer trimestre, aproximadamente entre los meses de marzo y mayo. Por este motivo se realizaron sesiones de repaso, y se programó una nueva aplicación del cuestionario, que se le denominó cuestionario exploratorio Nº2.

4.4 Análisis de los resultados del cuestionario exploratorio Nº2

En esta sección se presenta los análisis de los resultados de la aplicación del cuestionario exploratorio Nº2 a 32 alumnos. El análisis que se presenta es de carácter cualitativo pues interesa caracterizar y clasificar los errores frecuentes que cometen los alumnos al resolver preguntas como las que se proponen en este cuestionario.

El análisis de las producciones de los alumnos se realizan a partir de sus respuestas a las preguntas planteadas.

La organización de la información recogida se muestra en la tabla 9. En esta tabla se clasifican las respuestas de 32 alumnos según la clasificación de errores de Socas.

Tabla 9. Resultados del cuestionario exploratorio Nº2.

Preguntas	Respuestas de los alumnos	Descripción del procedimiento	Clasificación de errores según ejes.	Tipo de error	Número de alumnos	%
Pregunta 1: Si $x = 21$, ¿a que es igual $5 + 8x$?	No se encontraron los errores previstos.	Ningún alumno presentó el error : $8x = 8(21) = 821$.	Eje 1: Errores que tienen su origen en un obstáculo.	Concatenación	Ningún alumno	0%
Pregunta 2: Suma: $\frac{1x}{2} - \frac{4x}{5}$	$\frac{1x}{2} - \frac{4x}{5} = \frac{1-4}{2-5} = \frac{-3}{-3}$	Dos alumnos reducen linealmente la expresión. Suman numerador con numerador y denominador con denominador. Además, omiten la variable en los procedimientos y en el resultado final.	Eje 2: Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética relacionados a las operaciones con fracciones.	02	6,25%
	$\frac{1x}{2} - \frac{4x}{5} = \frac{5}{7}$	Un alumno aplica inadecuadamente la sustracción de fracciones. Opera de forma lineal sumando numerador con numerador y denominador con denominador. Además, omite la variable obteniendo un resultado numérico.	Eje 2: Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética relacionados a las operaciones con fracciones.	01	3,13%

Pregunta 3: ¿Es correcto $(3x+2y)^2 = 9x^2+4y^2$?	Si es correcta porque $(3x^2+2y)^2 = (3x)^2+(2y)^2$	Nueve alumnos afirman que la igualdad es correcta, elevan al cuadrado cada término del paréntesis. Sin embargo no lo resuelven y lo dejan indicado. Quizás por que en el enunciado se mostraba este resultado. Este error se puede clasificar como una aplicación inadecuada de la propiedad de linealidad, posiblemente extendido de $(x.y)^2 = x^2.y^2$	Eje 2: Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores de procedimiento respecto a la propiedad de linealidad.	09	28,13%
	Responden que es correcto porque $(3x+2y)^2 = (3x)^2.(2y)^2 = 9x^2+4y^2$	Un alumno manifiesta que esta igualdad es correcta indicando que el procedimiento para justificar esta igualdad es elevar al cuadrado cada término que esta dentro del paréntesis. Pero asocia el producto en su primer paso y luego le asocia la adición.	Eje 2: Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores de procedimiento respecto a la propiedad de linealidad.	01	3,13%
	El alumno responde : “Si porque todo lo que está elevado por el exponente $(\ )^2$, todo lo que esta dentro del paréntesis se multiplica dos veces”.	La justificación informal que describe el alumno quiere decir que los términos elevados al cuadrado deben multiplicarse por sí mismos. Este error se puede clasificar como una aplicación inadecuada de la propiedad de linealidad, posiblemente extendido de $(x.y)^2 = x^2.y^2$	Eje 2: Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores de procedimiento respecto a la propiedad de linealidad.	01	3,13%

Pregunta 4: Reduce la siguiente expresión $3x - (y - 5x)$	$3x - (y - 5x) = 3x - y - 5x$ $= 3x - 5x - y$ $= -2x - y$	El signo que antecede al paréntesis solo afecta al primer término, mas no al segundo. Este error se puede clasificar como error de procedimiento.	Eje 2: Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética relacionados a las operaciones con fracciones.	05	15,63%
Pregunta 5 Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor de $5x + 2$?	$5x + 2$ $5(2y) + 2$ $10y + 2$ $12y$	Los alumnos realizan la sustitución correctamente. Reemplazan el valor de x por $2y$, realizan la operación de multiplicación entre 5 y el monomio $2y$, pero al sumar cometen el error de tratar a $10y$ y 2 como dos términos semejantes obteniendo como el monomio $12y$.	Eje 1: Errores que tienen su origen en un obstáculo.	Errores de necesidad de clausura.	09	28,13%
Pregunta 6 Si $x = y + 3$, ¿cuál es el valor de $4x + 3y$?	No se encontró ningún error previsto.	Ningún alumno presentó el error de multiplicar el término externo con el primer miembro del paréntesis y luego adicionar el término siguiente, tal como se muestra a continuación: $4x + 3y = 4(y + 3) + 3y$ $= 4y + 3 + 3y$ $= 4y + 3y + 3$ $= 7y + 3$ Este error de procedimiento está referido al uso inadecuado del paréntesis.		Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética relacionados a las operaciones con fracciones.	00	00%

La tabla 10 muestra un consolidado de las repuestas correctas, no contestadas y las respuestas incorrectas del cuestionario exploratorio Nº2 que fue tomada a 32 alumnos, que permitirá tener una visión global de los resultados obtenidos en forma cuantitativa.

Tabla 10. Consolidado de respuestas correctas, no contestadas y respuestas incorrectas del cuestionario exploratorio N°2.

Preguntas	Respuestas Correctas		No contesta		Respuestas incorrectas	
	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje	Cantidad	Porcentaje
Pregunta 1	**22**	**68,75%**	**01**	**3,12%**	**09**	**28,13%**
Pregunta 2	**02**	**6,25%**	**05**	**15,63%**	**25**	**78,13%**
Pregunta 3	**08**	**25,00%**	**05**	**15.63%**	**19**	**59,38%**
Pregunta 4	**12**	**37,50%**	**04**	**12,50%**	**16**	**50,00%**
Pregunta 5	**12**	**37,50%**	**02**	**6,25%**	**18**	**56,25%**
Pregunta 6	**12**	**37,50%**	**05**	**15,63%**	**15**	**46,88%**

La siguiente tabla 11 muestra un consolidado de los tipos de errores clasificados según Socas (1997) indicando cantidades y porcentajes de alumnos que cometieron determinados errores de un total de 32 alumnos.

Tabla 11. Porcentaje de errores clasificados del cuestionario exploratorio Nº2.

Preguntas	Tipo de errores	Eje	Nº de alumnos	Porcentaje
Pregunta 1	Concatenación.	Errores que tienen su origen en un obstáculo.	**00**	**00,00%**
Pregunta 2	Errores que tienen su origen en la aritmética(relacionados a las fracciones).	Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	**03**	**9,38%**
Pregunta 3	Errores de procedimiento (relacionados al uso inadecuado de linealidad).	Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	**11**	**34,37%**
Pregunta 4	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética (relacionado al uso inadecuado del paréntesis cuando le antecede el signo negativo).	Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	**05**	**15,63%**
Pregunta 5	Necesidad de clausura.	Errores que tienen su origen en un obstáculo	**09**	**28,13%**
Pregunta 6	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética (relacionado al uso inadecuado del paréntesis).	Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	**00**	**00,00%**

A partir de los resultados mostrados en las tablas 9, 10 y 11 se realiza el análisis respectivo de los resultados del cuestionario exploratorio Nº2.

- En la pregunta 1, un 68,75% de alumnos contestaron correctamente y un 3,12% no contestaron la pregunta. El porcentaje de las preguntas incorrectas fue de 28,13%. En las respuestas incorrectas no se evidenciaron errores de concatenación. Otros procedimientos encontrados que no se consideraron en el análisis a priori son los siguientes:

<table>
<tr><td rowspan="3">Pregunta 1:
Si $x = 21$,
¿a qué es igual $5 + 8x$?</td><td>Resolución Adecuada.</td><td>Otros procedimientos sin clasificar.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$8x = 8(21) = 168$
El resultado es 168</td><td>$5 + 8x = 5 + 8.(21) = 105 + 168x$</td></tr>
<tr><td>$x = 21$
$x + 8x$
$x + 168x = 169$</td></tr>
</table>

En el primer procedimiento dos alumnos realizaron correctamente la sustitución, pero no el cálculo de la operación combinada. Además, se observa que tienden a no desaparecer la variable, agregándole al final un monomio.

Por otro lado, para el segundo desarrollo un alumno busca asociar los procedimientos a una ecuación y dar un valor numérico como resultado.

- En la pregunta 2, el 6,25% de alumnos respondieron correctamente, el 15,63% no contestaron y el 78,13% respondieron incorrectamente. De las respuestas incorrectas, un 9,38% de alumnos cometieron errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.

  Algunos errores significativos, dentro de los procedimientos sin clasificar, que no se relacionan con lo mencionado en el análisis a priori son:

	Resolución adecuada.	Otros procedimientos sin clasificar.
Pregunta 2: Resuelve lo siguiente $\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x$	Los dos denominadores de las fracciones a desarrollar son semejantes por lo tanto se opera los coeficientes según el procedimiento siguiente: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$ Por ello, $\frac{1x}{2} - \frac{4x}{5} = \frac{1x}{2} + \frac{-4x}{5}$ $= \frac{1x.5-2.4x}{2.5}$ $= \frac{5x-8x}{10}$ $= \frac{-3x}{10}$ El resultado es $\frac{-3x}{10}$.	$\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x = \frac{x.5-2.4x}{2.5}$ $= \frac{5x-8x}{10} = \frac{3x}{10}$
		$\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x = \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{5-8}{10} = \frac{3}{10}$
		$\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x = \frac{1}{2} - \frac{4}{5} = \frac{5-8}{10}x$ $= \frac{3}{10}$
		$\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x = \frac{(8-5)}{10}x = \frac{3}{10}$
		$\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x = \frac{5}{8}$

En todos los desarrollos utilizan inadecuadamente el procedimiento $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$. Este tipo de error lo comete el 31,25% del total de alumnos, es decir 10 alumnos. Por otro lado, en el segundo desarrollo se observa una persistencia del alumno, pues opera solo valores numéricos y omite la variable. En el tercer procedimiento se muestra un desarrollo con la variable, pero al dar el resultado final omite la variable.

- En la pregunta 3, el 25% de los alumnos contestaron correctamente, el 15,63% no contestaron la pregunta y el 59,38% respondieron incorrectamente. De las respuestas incorrectas se pudo contabilizar y clasificar los errores de procedimiento referidos a la propiedad de linealidad, que tenían como posible origen a un uso inadecuado de la estructura de la forma $(x.y)^2 = x^2.y^2$ en la resolución del cuadrado de un binomio. Estos errores clasificados representan el 34,39% del total de respuestas.

Algunos errores significativos, dentro de los procedimientos sin clasificar, que no se mencionan en el análisis a priori se muestran a continuación:

	Resolución adecuada.	Otros procedimientos sin clasificar.
Pregunta 3: ¿Es correcto $(3x+2y)^2 = 9x^2 + 4y^2$?	$(3x+2y)^2 = (3x+2y)(3x+2y)$ $3x+2y$ $3x+2y$ $+6xy+4y$ $9x^2+6xy$ $9x^2+12xy+4y^2$ El resultado es $9x^2+12xy+4y^2$ Por lo tanto, la igualdad propuesta no es correcta.	$3x+2y$ $3x+2y$ $+6xy+4y$ $9x+6xy$ $9x+12xy+4y$

Los errores cometidos en este procedimiento se relacionan con dificultades para multiplicar monomios, en este caso afirman que $2y.2y = 4y$, donde solo operan la parte numérica y no multiplican las variables. Esto mismo se observa para $3x.3x = 9x$.

- En la pregunta 4, el 37,50% de alumnos respondieron correctamente, 12,50% no contestaron y el 50% respondieron incorrectamente. La pregunta se planteó para recoger información acerca de los errores relacionados al uso inadecuado del paréntesis, cuando el signo negativo antecede al paréntesis. Estos errores, según la clasificación, pertenecen a los errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. En el estudio se encontró que un 15,62% de alumnos comete este tipo de errores.

Otros procedimientos que no se consideraron en el análisis a priori son los siguientes:

<table>
<tr><td rowspan="4">Pregunta 4:

Reduce la siguiente expresión:

$3x-(y-5x)$</td><td>Resolución adecuada</td><td>Otros procedimientos sin clasificar</td></tr>
<tr><td rowspan="3">La solución de esta pregunta se obtiene de aplicar la supresión de paréntesis con respecto al signo.
$3x-(y-5x)=3x-y+5x$
$=3x+5x-y=8x-y$
El resultado es $8x-y$</td><td>$3x-(y-5x)=3x+y-5x$
$=-2x+y$</td></tr>
<tr><td>$3x-(y-5x)=3x-y+5x$
$=3x+4y$</td></tr>
<tr><td>$3x-(y-5x)=3x+y-5x$
$=3x-5x+y$
$=2x+y$</td></tr>
</table>

En el primer procedimiento se observa que el signo menos (-) afecta a los términos del paréntesis, pero de manera equivocada. La misma situación se presenta en el tercer procedimiento. En el segundo procedimiento se realiza la supresión de signos de agrupamiento correctamente, pero el alumno comete un error en la reducción de términos semejantes.

- En la pregunta 5, un 37,50% de los alumnos respondieron correctamente, 6,25% de alumnos no contestó la pregunta y el 56,25% respondió incorrectamente. Del total de respuestas incorrectas, nueve alumnos, que representan el 26,47%, presentaron errores de necesidad de clausura pues el desarrollo que mostraron fue el siguiente $5x+2=5(2y)+2=10y+2=12y$. Observándose el error en la reducción de $10y+2=12y$. Además, este mismo error se ha observado en el desarrollo de otras preguntas como en la pregunta seis, donde operan $7y+12$ y obtienen $19y$.

Otros procedimientos encontrados que no se consideraron en el análisis a priori son los siguientes:

Pregunta 5 Si $x=2y$, ¿cuál es el valor $5x+2$?	Resolución adecuada.	Otros procedimientos sin clasificar.
	En esta pregunta se sustituye el valor de x en un binomio y se obtiene $5x+2=5(2y)+2=10y+2$ El resultado es $10y+2$	$5x+2=5x+2(2y)=5x+4y$ $=9xy$
		$5x+2=5x+2(2y)=10xy+4y$
		$5x+2=5x+2(2y)=20y$

En el primer desarrollo el alumno sustituye correctamente el valor de la variable, pero se equivoca al reducir los términos que no son semejantes.

En el segundo desarrollo, parece que confunde la suma con la multiplicación pues al parecer ha seguido el siguiente procedimiento completo: $5x+2=5x+2(2y)=5(x).(2y)+4y=10xy+4y$

En el tercer desarrollo puede haber confundido la suma con la multiplicación siguiendo un procedimiento como el siguiente:

$5x+2=5x+2(2y)=5x.4y=20y$.

- En la pregunta 6, un 37,15% respondieron correctamente, el 15,63% no contestaron y 46,88% respondieron incorrectamente.

  En esta pregunta no se encontraron los errores previstos, pero se encuentran procedimientos como los siguientes:

<table>
<tr><td rowspan="5">Pregunta 6
Si $x = y + 3$, ¿cuál es el valor de $4x + 3$?</td><td>Resolución adecuada.</td><td>Otros procedimientos sin clasificar.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$4x + 3y = 4(y + 3) + 3y$
$= 4y + 12 + 3y$
$= 7y + 12$

El resultado es $7y + 12$</td><td>$4x + 3y = 4(y + 3) + 3y$
$= 4y + 12 + 3y$
$= 7y + 12$
$= 19y$</td></tr>
<tr><td>$4x + 3y = 3(y + 3) + 3y$
$= 3y + 9 + 3y$
$= 6y + 9$</td></tr>
<tr><td>$4x + 3y = 4x + 3y(x + 3)$
$= 4x + 3y + x + 3$
$= 5x + 3y + 3$</td></tr>
<tr><td>$4x + 3y = 4x + 3(3) = 12x + 9$</td></tr>
</table>

En el primer desarrollo se tiene un 9,38% de alumnos. En este caso se observa el error de necesidad de clausura al operar $7y + 12$ y dar como resultado $19y$.

En el segundo desarrollo, un alumno no sustituyó correctamente el valor de x, además confunde el operador de la multiplicación con la suma, también omite el paréntesis en la expresión $3y(x + 3)$ y da como resultado $3y + x + 3$.

En el tercer desarrollo, un alumno tiene dificultad con la sustitución, al reemplazar en la variable y mas no en la variable x. Además no reconoce el valor a sustituir.

Reflexión de los resultados del cuestionario exploratorio Nº2

- La pregunta 1 fue respondida incorrectamente por un 28,13% de alumnos. Pero de estas respuestas incorrectas ninguna pertenece a errores de concatenación. Este tipo de errores generalmente se presenta en los inicios del álgebra, y si no se han presentado en los alumnos de tercer año de secundaria significa que estos errores no han persistido y posiblemente ya no se manifestarán. Además el porcentaje de respuestas correctas es bastante alto en comparación con las incorrectas.

- En la pregunta 2, un 9,38% de alumnos cometieron errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, referidos a las operaciones con fracciones. Este tipo de error está clasificado en el eje de errores del álgebra que tienen su origen en una ausencia de sentido. Si el alumno tiene dificultades con las operaciones con fracciones es de esperar que también tendrá dificultades con las operaciones que implican monomios con coeficientes fraccionarios. De allí que este tipo de errores se seguirá presentando.

  Por otro lado, el 28,13% de alumnos cometieron errores que mostraban el uso inadecuado del procedimiento $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. También, se observa la persistencia de operar solo con las fracciones, pues la variable se omite tanto en el proceso como en el resultado. Esto indica que la posible causa de los errores en esta pregunta es efectivamente las dificultades con las operaciones fraccionarias.

- La pregunta 3 fue respondida incorrectamente por el 59,38% de alumnos. De estos un 34,39% de alumnos comete errores de procedimiento referidos a la propiedad de linealidad. Este tipo de error está clasificado en el eje de errores que tienen su origen en una ausencia de sentido. Los alumnos precisamente justifican su resultado con el uso de la estructura $(x.y)^2 = x^2.y^2$ en el desarrollo de $(x+y)^2$ dando como resultado $x^2 + y^2$.

- La pregunta 4 fue respondida incorrectamente por el 50% de alumnos. De éstos un 15,62% de alumnos presenta errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética relacionado con el uso inadecuado del paréntesis, cuando le antecede un signo negativo, de la forma $3x - (y - 5x) = 3x - y - 5x$. En un diagrama de flechas utilizado en la misma pregunta por un alumno en el cuestionario exploratorio Nº1, se puede apreciar que hace uso de la propiedad de distributividad y posiblemente este aplicando también la ley de signos de la multiplicación para eliminar el paréntesis. Esta puede ser una causa de los errores que se presentan en esta pregunta.

- La pregunta 5 tuvo un 56,25% de alumnos que lo respondieron incorrectamente. De éstos un 26,47% cometen errores de necesidad de clausura, clasificados en el eje de errores que tienen su origen en un obstáculo. El procedimiento que evidencia este error es el siguiente $10y + 2 = 12y$. Aquí se puede evidenciar que el alumno no ha identificado los términos semejantes. Según Socas, el origen atribuido a este error es la necesidad del alumno de terminar una operación con un solo término como se hace en operaciones aritméticas, y es precisamente este tipo de pensamiento el que persiste en operaciones algebraicas.

- La pregunta 6, fue respondida incorrectamente por un 46,88% de alumnos. Sin embargo ningún alumno mostró errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, relacionado a la omisión de paréntesis, que era lo que se esperaba en esta pregunta. El procedimiento que evidenciaría este error fue $4x + 3y = 4(y + 3) = 4y + 3 + 3y = 7y + 3$ .Por otro lado, se evidenciaron errores de necesidad de clausura como $7y + 12 = 19y$.

4.5 Análisis de los resultados de la entrevista

Para profundizar en el análisis del origen del error a nivel individual se realizaron dos entrevistas personales a dos alumnas. Estas alumnas evidenciaban en sus cuestionarios errores que tienen su origen en una ausencia de sentido. Estos errores nos permitirán ubicar a las alumnas en los diferentes estadios de desarrollo y a su vez obtener causas puntuales de los errores cometidos.

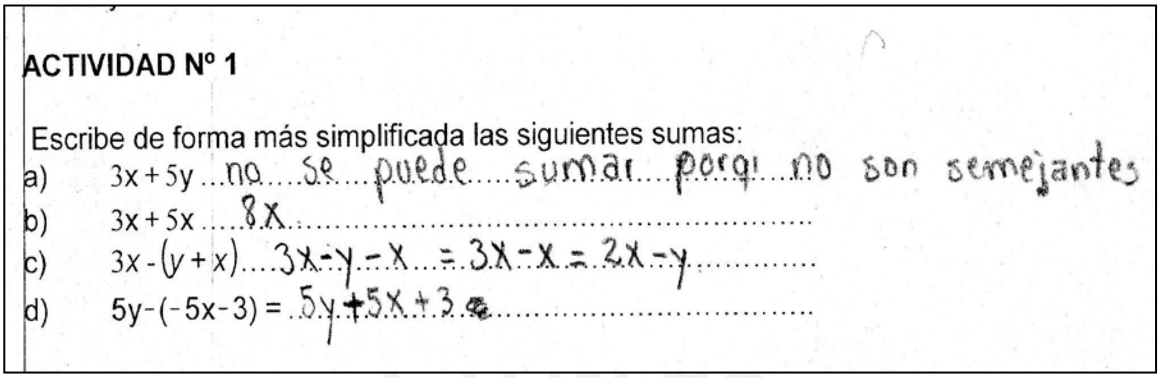
Resultados de la entrevista realizada a la alumna C:

La alumna entrevistada se caracteriza porque sus producciones en el cuestionario exploratorio Nº2 presentaron errores de procedimiento y errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. Se le denominará alumna C, para efectos de detallar sus procedimientos en la entrevista.

En este análisis nos remitiremos a describir los errores clasificados como errores del álgebra que tiene su origen en la aritmética referidos al uso inadecuado del paréntesis, cuando le antecede el signo negativo, errores de procedimiento relacionados con el uso incorrecto de la propiedad de linealidad y otros procedimientos ayuden a identificar las posibles causas que originan estos errores. Aquí también se detallará sobre los estadios de desarrollo en los que se encuentra la alumna. La entrevista completa de la alumna C se encuentra en el anexo 11.

A continuación se muestra el análisis de cada actividad de la alumna C.

En la actividad Nº1, de la ficha de entrevista personal de la alumna C, se planteó con la finalidad de recoger información acerca del uso inadecuado del paréntesis.


ACTIVIDAD Nº 1

Escribe de forma más simplificada las siguientes sumas:

a) $3x + 5y$ ...no se puede sumar porq no son semejantes

b) $3x + 5x$ 8x

c) $3x - (y + x)$...3x-y-x = 3x-x = 2x-y

d) $5y-(-5x-3) =$ 5y+5x+3

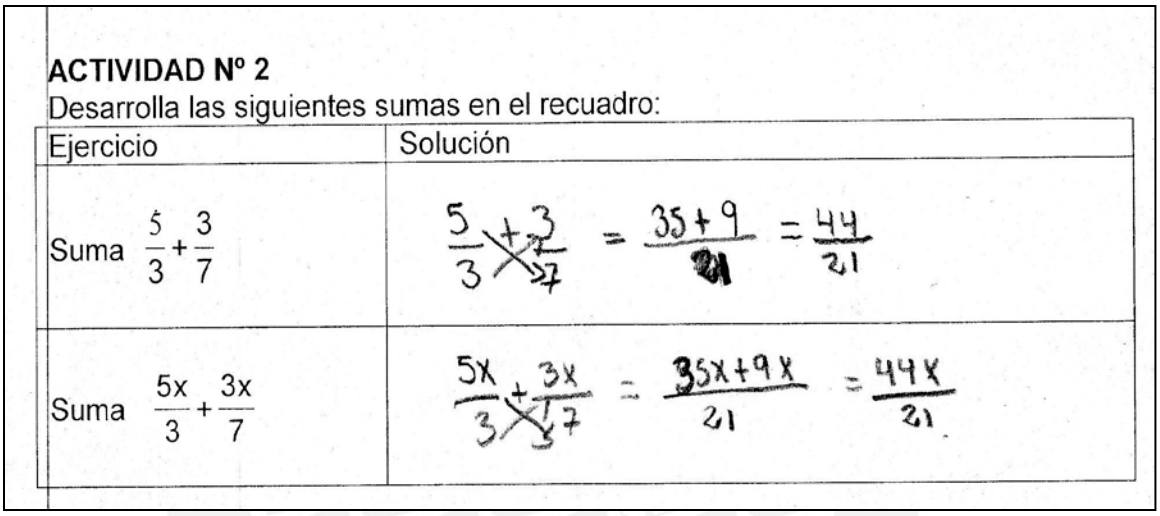
La alumna C, desarrolla correctamente los ejercicios a) y b) de esta actividad, reconociendo los términos semejantes porque recuerda las operaciones básicas con monomios. Revisando su respuesta en la pregunta 5 del cuestionario exploratorio Nº2, esta alumna no utiliza la reducción de términos semejantes para el resultado de $10y + 2$, pues escribió 12y. Al preguntarle por que se equivocó al desarrollar esta pregunta en el cuestionario, ella responde que se olvidó el tema. Entonces podemos concluir que faltó mayor práctica sobre este tipo de ejercicios, pues la alumna si conoce la reducción de términos semejantes.

En los ejercicios c) y d), la alumna pidió asesoría, pues no recordaba las reglas de la supresión de paréntesis cuando le antecede un signo negativo. Cuando se le pregunta si tiene otro procedimiento para resolver, hace referencia a la ley de signos de la multiplicación. Y precisamente con esta ley realiza una comprobación al término de su respuesta.

Con los resultados mostrados anteriormente para la actividad 1, se puede concluir que la alumna C no evidencia errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, referidos al uso inadecuado del paréntesis cuando le antecede el signo negativo. Según Socas (1997), este tipo de errores se manifiesta en el estadio semiótico.

Por lo tanto, como la alumna C no presenta errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, referidos al uso inadecuado del paréntesis cuando le antecede el signo negativo, posiblemente su comprensión estaría en el estadio semiótico.

En la actividad Nº2 se propuso indagar acerca de los errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, referidos a las operaciones con fracciones.



ACTIVIDAD Nº 2

Desarrolla las siguientes sumas en el recuadro:

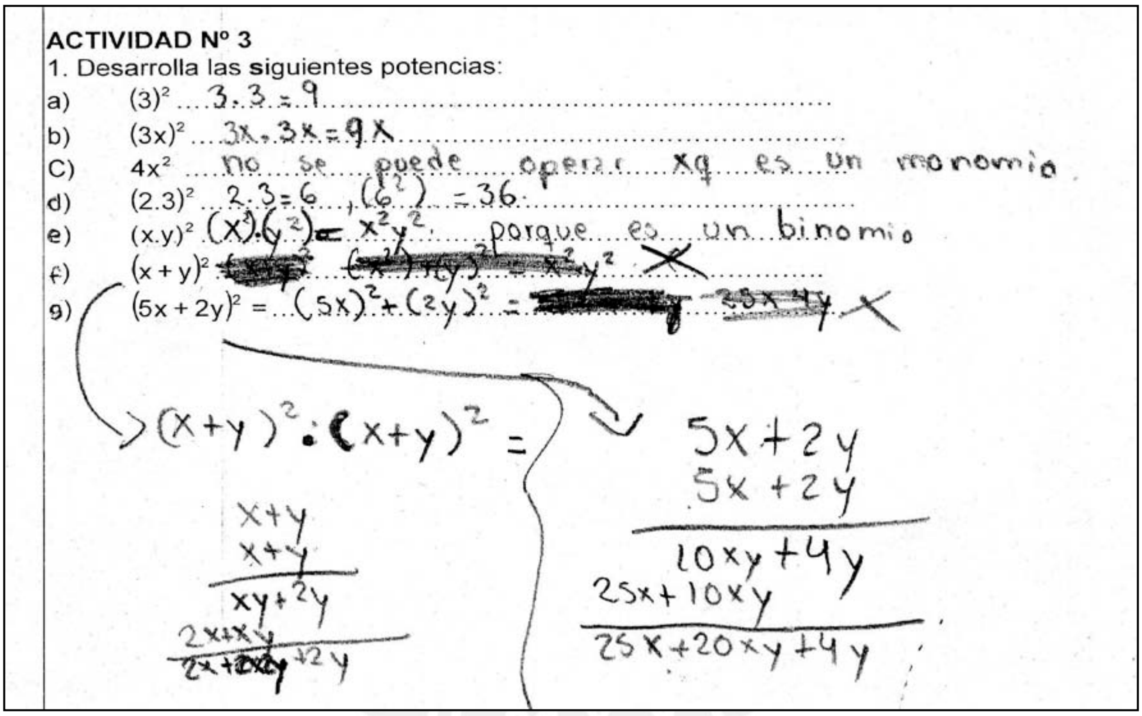
Ejercicio	Solución
Suma $\frac{5}{3}+\frac{3}{7}$	$\frac{5}{3}+\frac{3}{7}=\frac{35+9}{21}=\frac{44}{21}$
Suma $\frac{5x}{3}+\frac{3x}{7}$	$\frac{5x}{3}+\frac{3x}{7}=\frac{35x+9x}{21}=\frac{44x}{21}$

La alumna C, resolvió correctamente los dos ejercicios, usando el procedimiento $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$ para la adición de fracciones y para la adición de términos semejantes con fracciones. A este procedimiento la alumna lo denominó regla de “flechas”, las mismas que usa en su procedimiento. En ningún momento preguntó acerca del mínimo común múltiplo. La alumna C no tuvo mayores dificultades para desarrollar esta actividad y tampoco pidió asesoría. Esto puede deberse a que ha resuelto con seguridad el primer ejercicio y, a partir de este, se ha guiado para la resolución del siguiente. Lo que nos indica que aún se apoya en el pensamiento numérico para ejercicios algebraicos.

La seguridad que tiene la alumna para resolver el segundo ítem de la actividad se debe a la resolución apropiada de la suma de fracciones, pues a partir de este, según sus respuestas verbales, se ha guiado para la resolución del siguiente. Lo que nos indica que aun se apoya en el mismo pensamiento numérico.

Estos procedimientos evidencian que la alumna C, no presenta errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, referido a las operaciones con fracciones y posiblemente se encuentra en el estadio semiótico.

En la actividad Nº3 se propuso para indagar acerca de los errores de procedimiento relacionado al uso inadecuado de la propiedad de linealidad.



ACTIVIDAD Nº 3

1. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(3)^2$ 3.3 = 9

b) $(3x)^2$ 3x.3x = 9x

C) $4x^2$ no se puede operar xq es un monomio

d) $(2.3)^2$ 2.3 = 6 , (6^2) = 36

e) $(x.y)^2$ $(x^2)(y^2) = x^2y^2$ porque es un binomio

f) $(x+y)^2$ ~~$(x^2)+(y)^2 = x^2+y^2$~~

g) $(5x+2y)^2 = (5x)^2+(2y)^2 =$ ~~$25x+4y$~~

$(x+y)^2 : (x+y)^2 =$

$x+y$
$x+y$
$xy+^2y$
$2x+xy$
$2x+2xy+2y$

$5x+2y$
$5x+2y$
$10xy+4y$
$25x+10xy$
$25x+20xy+4y$

La alumna C, realizó correctamente los ejercicios a), b), c) y d). En la e) da un procedimiento correcto con el uso de la potencia de un producto, pero escribe una justificación incorrecta, afirmando que x.y es un binomio. Esto puede deberse a la presencia de dos variables.

En los ejercicios f) y g) de esta actividad tuvo dificultades al desarrollar el binomio al cuadrado, pues responde en un primer momento que el resultado final es x^2+y^2, y este resultado está asociado al de error de linealidad. La alumna C justifica su resultado incorrecto debido al desarrollo del ejercicio anterior donde se le pedía desarrollar $(x.y)^2$, cuyo resultado era igual a $x^2.y^2$. Se le explicó que debía multiplicar por sí mismo el binomio, y luego lo resolvió escribiendo $(x+y)^2\,(x+y)^2$. Aparentemente parece un error de notación, pues seguidamente muestra su procedimiento de desarrollo del binomio al cuadrado.

En su procedimiento comete errores en cuanto a la multiplicación de dos términos algebraicos, es decir escribe: $y.y = 2y$ y $x.x = 2x$. Al final da el resultado siguiente: $(x^2 + y^2) = 2x + 2xy + 2y$.

En el ejercicio g) se le pide nuevamente desarrollar el cuadrado de un binomio $(5x+2y)^2$ y da como resultado $25x+20xy+4y$, donde los errores se presentan al aplicar incorrectamente la multiplicación de términos algebraicos, pues sólo multiplica los coeficientes y no las variables.

Los resultados muestran que la alumna C, tiene errores de procedimiento referidos a la propiedad de linealidad. Estos errores se presentan en el estadio estructural.

Finalmente, con este último resultado se puede afirmar que la comprensión matemática de la alumna C, efectivamente se encuentra en el estadio semiótico.

Resultados de la entrevista realizada a la alumna L:

Los resultados de la entrevista siguiente, son de la segunda alumna. Esta se caracteriza porque presentó errores de procedimiento y errores que tienen su origen en la aritmética en el desarrollo de cuestionario exploratorio Nº2. A esta segunda alumna se le denominará alumna L para efectos de detallar sus procedimientos en la entrevista.

En este análisis nos remitiremos a describir los errores clasificados como errores del álgebra que tiene su origen en la aritmética referidos al uso inadecuado del paréntesis, cuando le antecede el signo negativo, errores de procedimiento relacionados con el uso incorrecto de la propiedad de linealidad y otros procedimientos que aporten información sobre los estadios de desarrollo.

La entrevista de la alumna L se encuentra en el anexo 12. A continuación se muestra el análisis de cada actividad de la alumna L.

En la actividad Nº1 se planteó para indagar acerca de los errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, relativos al uso inadecuado del paréntesis cuando le antecede un signo negativo.

ACTIVIDAD Nº 1

Escribe de forma más simplificada las siguientes sumas:

a) $3x+5y$ ...... Porque no son terminos semejantes.......

b) $3x+5x$ ...... $3x+5x=8x$ ......

c) $3x-(y+x)$ ... $3x-(y+x)=3x+y+x=3x+x+y=4x+y$ ......

d) $5y-(-5x-3)=$ $5y+5x+3=5y+3x$ ......

La alumna L resuelve los ejercicios a) y b) correctamente sin asesoría, reconociendo los términos semejantes. Cuando se le pregunta por la dificultad del ejercicio b), la alumna L manifiesta que lo resuelve correctamente, pues afirma que ya conoce los procedimientos con polinomios en la variable x, esto quiere decir, que ha resuelto ejercicios con polinomios similares donde se involucra una variable.

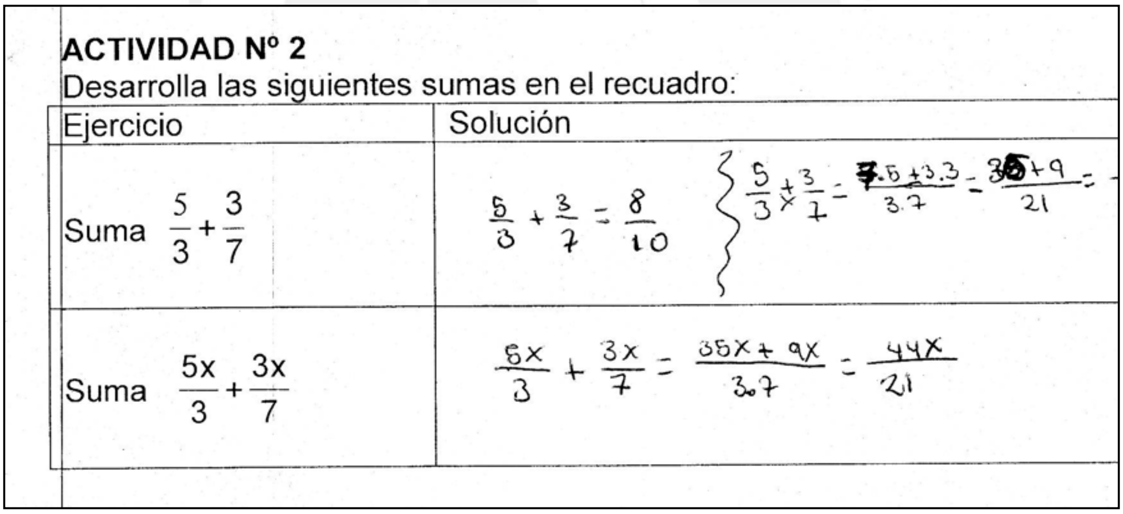
En el ejercicio c) pide ayuda para iniciar su desarrollo. Se le hace recordar la regla para suprimir signos de agrupación, pero aún asi se equivoca. Cuando se le pide que explique verbalmente su procedimiento, hace uso de la ley de los signos de la multiplicación pues indica verbalmente que “menos por mas da más” y nuevamente “menos por más da más” por lo tanto da como resultado la expresión $3x+y+x$ a partir de $3x-(y+x)$. Este error se clasifica como un error del álgebra que tiene su origen en la aritmética. Una posible causa de este error se afianza en el uso equivocado de la ley de signos de la multiplicación.

La alumna L resuelve correctamente el ejercicio d), lo hace correctamente, pero con la corrección de que “menos por más es menos”. Estos errores provienen de la regla de signos de la multiplicación con números enteros.

La alumna L evidencia errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, que se presentan en el estadio semiótico.

Por lo tanto, se podría decir que la alumna L tiene dificultades en la organización de sus elementos matemáticos que conforman su sistema antiguo.

En la actividad Nº2, se propuso dos ejercicios para indagar acerca de errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética referidos a las operaciones con fracciones.


ACTIVIDAD Nº 2
Desarrolla las siguientes sumas en el recuadro:

Ejercicio	Solución
Suma $\frac{5}{3}+\frac{3}{7}$	$\frac{5}{3}+\frac{3}{7}=\frac{8}{10}$; $\frac{5}{3}+\frac{3}{7}=\frac{7.5+3.3}{3.7}=\frac{35+9}{21}=$
Suma $\frac{5x}{3}+\frac{3x}{7}$	$\frac{5x}{3}+\frac{3x}{7}=\frac{35x+9x}{3.7}=\frac{44x}{21}$

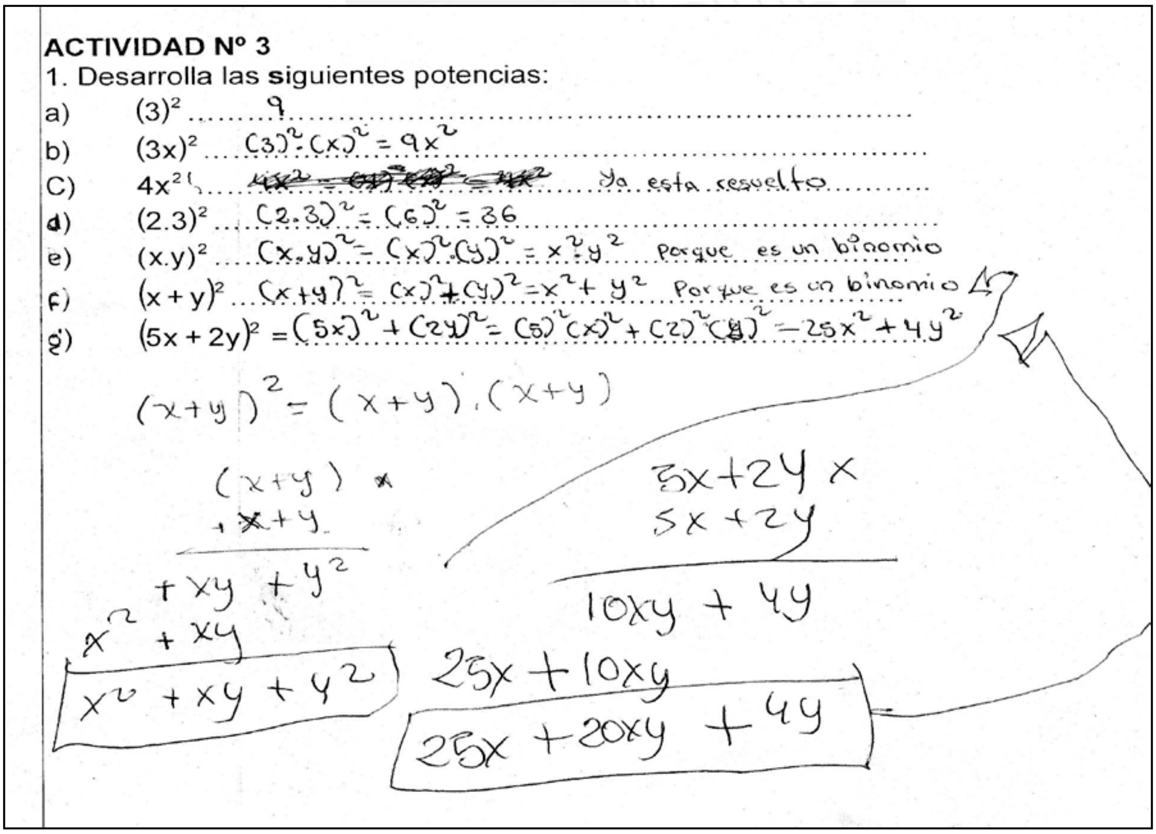
El primer ejercicio, es una suma de dos fracciones, donde la alumna duda en cuanto al procedimiento a utilizar. En un primer momento lo desarrolla sumando linealmente numerador con numerador y denominador con denominador. Esto evidencia errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, referidos a las operaciones con fracciones. Luego escribe otro procedimiento usando inadecuadamente lo siguiente $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$. Este procedimiento, según, la alumna es más cómodo que el procedimiento que necesita la extracción del mínimo común múltiplo. Sin embargo no da el resultado final.

El segundo ejercicio estaba planteado para observar procedimientos de suma de términos semejantes con coeficientes fraccionarios. La alumna se guía del segundo procedimiento presentado en el ejercicio anterior, para resolver la suma de términos semejantes. Se le indica que el segundo procedimiento es el correcto.

Los resultados mostrados evidencian que la alumna L, presenta dudas al operar fracciones.

Los resultados anteriores confirman que tiene errores con respecto a la organización de su sistema antiguo y no podrá acceder al estadio semiótico y por ende al estadio estructural

En la actividad Nº3 se propuso indagar acerca de los errores de procedimiento referidos a la propiedad de linealidad.



ACTIVIDAD Nº 3

1. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(3)^2$ 9

b) $(3x)^2$ ... $(3)^2 \cdot (x)^2 = 9x^2$

C) $4x^2$ ... ~~4x²~~ ... Ya esta resuelto

d) $(2.3)^2$ ... $(2.3)^2 = (6)^2 = 36$

e) $(x.y)^2$ ... $(x.y)^2 = (x)^2 (y)^2 = x^2 y^2$ Porque es un binomio

f) $(x+y)^2$ ... $(x+y)^2 = (x)^2 + (y)^2 = x^2 + y^2$ Porque es un binomio

g) $(5x+2y)^2 = (5x)^2 + (2y)^2 = (5)^2 (x)^2 + (2)^2 (y)^2 = 25x^2 + 4y^2$

$(x+y)^2 = (x+y) \cdot (x+y)$

$(x+y)$ ×
$x+y$

$+xy + y^2$
$x^2 + xy$

$\boxed{x^2 + xy + y^2}$

$5x + 2y$ ×
$5x + 2y$

$10xy + 4y$
$25x + 10xy$

$\boxed{25x + 20xy + 4y}$

La alumna L resuelve los ejercicios a), b),c) y d) adecuadamente.

En el ejercicio a), la alumna da como resultado 9, pero no describe su procedimiento.

En el ejercicio b), se sugiere a la alumna que siempre describa sus resultados y es asi como lo hace.

En el ejercicio c), indica "que ya está resuelto", lo cual evidencia que reconoce un término algebraico.

En el ejercicio d), se le pide desarrollar la potencia $(2.3)^2$ y lo desarrolla operando los números que están dentro del paréntesis, de la siguiente forma $(2.3)^2 = (6)^2 = 36$. El resultado es correcto, sin embargo no se observa la aplicación de la propiedad de potencia de un producto.

En el ejercicio e), resuelve la potencia $(x.y)^2$ usando la propiedad de linealidad, de la siguiente manera: $(x.y)^2 = x^2y^2$. Se le pregunta que justifique esta igualdad, entonces responde "porque es un binomio".

En el ejercicio f), la alumna apoya su procedimiento guiándose del ejercicio e) y da como resultado lo siguiente $(x+y)^2 = x^2 + y^2$. Luego justifica este desarrollo escribiendo "porque es un binomio". La docente no le hace la corrección respectiva y ella procede a desarrollar el ejercicio g).

En el ejercicio g), procede de la misma manera que en el anterior, así como se muestra en el siguiente resultado, $(5x+2y)^2 = (5)^2(x)^2 + (2)^2(y)^2 = 25x^2 + 4y^2$.

Entonces se le vuelve a explicar cómo se desarrolla el cuadrado de un binomio, es decir, que debe multiplicar la base por sí misma y luego la multiplicación verticalmente o utilizando la propiedad distributiva. Entonces la alumna L escribe finalmente su segundo resultado para las letras f) y g). El ejercicio f) lo desarrolla correctamente, pero en el ejercicio g) comete errores en la multiplicación de monomios tal es así que $2y.2y$ da como resultado 4y, omitiendo el producto de las variables. Lo mismo ocurre, para el producto de

$5x.5x$ pues da como resultado $25x$ .Lo que no ocurre cuando multiplica $5x$ con $2y$ dando como resultado $10xy$.

En las ejercicios f) y g) los resultados eran los esperados. La alumna L, al tener errores del estadio semiótico, también tendría errores en estadio estructural que es un estadio superior al semiótico.

Por lo tanto, la comprensión matemática de la alumna L tendrá dificultades para ubicarse en el primer estadio, que es el semiótico, debido a la falta de organización de su sistema antiguo.

Reflexión de los resultados de la entrevista

- En la actividad Nº1, la alumna C no evidencia errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, referidos al uso inadecuado del paréntesis, cuando le antecede el signo negativo. Por otro lado, la alumna L sí comete errores de este tipo. Una de las causas que se le asocia es la inadecuada aplicación de la ley de multiplicación al suprimir paréntesis, pues así lo han manifestado. Sin embargo Socas(1997) afirma que una posible causa de este tipo de errores podría ser la manera de cómo se enseña el uso del paréntesis en el estudio de los números enteros.

- En la actividad Nº2, la alumna C resuelve correctamente los dos ejercicios propuestos, usando el procedimiento $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. Además se guía del ejercicio de la suma de fracciones para resolver el segundo, el de la suma términos semejantes con coeficientes fraccionarios. Como la alumna C no comete errores que tienen su origen en la aritmética, se podría afirmar que el estadio de desarrollo en el que se encuentra es el semiótico.

  La alumna L tiene dudas al operar con fracciones y esto nos lleva a afirmar que tiene errores con respecto a la organización de su sistema antiguo. Lo cual indicaría que no ha podido acceder al primer estadio de desarrollo, que es el semiótico.

- En la actividad Nº3, la alumna C comete errores de procedimiento, que pertenecen al eje de errores que tienen su origen en una ausencia de sentido. La causa que se le asocia a este error es el uso inadecuado de la propiedad de linealidad, lo cual indicaría que su estadio de desarrollo sigue siendo el semiótico y no el siguiente, que es el estructural. Por otro lado, la alumna L también comete este tipo de error, pero en su caso era de esperarse pues no ha accedido al primer estadio.

CAPÍTULO V
CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones de este trabajo de investigación y se sugieren algunos futuros temas de investigación.

Entre las conclusiones tenemos:

1. Los alumnos del tercer año de educación secundaria, que responden a la muestra, cometen con frecuencia errores al abordar el tratamiento de polinomios. Los tipos de errores, que ellos cometen, según nuestro estudio son: errores de necesidad de clausura, errores del álgebra que tienen origen en la aritmética y errores de procedimiento.

2. La clasificación de errores según Socas (1997) está vigente, pues son errores que los alumnos siguen presentando en el tratamiento de polinomios.

3. El origen atribuido a los errores de necesidad de clausura es la necesidad que tiene el alumno de cerrar un enunciado incompleto, es decir reducir a un solo término la adición de dos términos que no son semejantes.

4. Los errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, relacionados a la supresión de paréntesis cuando le antecede un signo negativo, tiene como origen el uso inadecuado de la ley de signos de la multiplicación.

5. Los errores del álgebra que tienen origen en la aritmética, relacionados a operaciones de polinomios con coeficientes fraccionarios tiene su origen a las dificultades de las operaciones con fracciones.

6. Uno de los errores más frecuentes fue el uso inadecuado del procedimiento $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, en las operaciones con polinomios con coeficientes fraccionarios.

7. El origen atribuido a los errores de procedimiento, relacionados a la aplicación del cuadrado de un binomio, es el uso inadecuado de la propiedad de linealidad.

8. Las preguntas del cuestionario exploratorio Nº2 permitieron identificar los errores que cometen frecuentemente los alumnos en el tratamiento de polinomios, según la clasificación de Socas (1997), y a su vez clarificar su posible origen.

8. La entrevista permitió encontrar que el uso inadecuado de la ley de signos de la multiplicación era una causa asociada a los errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, relacionados a la supresión de signos cuando le antecede el signo negativo. Esta causa no estaba en la clasificación original de Socas.

9. La entrevista, permitió constatar que el uso inadecuado de la propiedad de linealidad era la causa de los errores de procedimiento referidos al cuadrado de un binomio. Con respecto a los estadios de desarrollo, la entrevista permitió ubicar a la primera alumna en el estadio semiótico y a la segunda alumna en ningún estadio, debido a los errores encontrados según la clasificación de Socas (1997).

9. Las entrevistas tuvieron un papel importante en la comprobación de las causas asociadas a los errores según la clasificación propuesta por Socas. Además se identificaron otras causas que no pudieron ser plenamente identificadas con el cuestionario.

10. Al parecer, todos los seres humanos, independientemente del desarrollo científico que alcancen, generan preconceptos que los conducen a

cometer errores, que se presentan como posibilidades permanentes en la consolidación del conocimiento y pueden llegar a formar parte del conocimiento científico empleado por las personas o los colectivos.

Temas de investigación sugeridos:

Como futuros temas de investigación se sugieren:

- Realizar un contraste de los procedimientos algebraicos de los alumnos del segundo y tercer año de secundaria para obtener mayor información de la evolución de los errores frecuentes, que no son los caracterizados por Socas y a su vez involucrar a los docentes de cada grado para realizar un análisis más profundo de los errores.
- Explorar y analizar el sistema antiguo (prerrequisitos) de los alumnos, para establecer qué tipo de tareas deben incluirse en el sistema nuevo, usando el marco teórico ELOS respecto a un contenido específico.
- Diseñar una propuesta de enseñanza que tome en cuenta el análisis y clasificación de los errores que presentan con frecuencia los alumnos al simplificar polinomios.

Referencias Bibliográficas

Bruno, A. (2007).Seminario de Investigación I. Contrastando Enfoques de Investigación en Álgebra. *Investigación en Educación Matemática X*I, *Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM), 15-17.

Del Puerto, S., Minnaard, C. y Seminara, S. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemática. Conferencia Argentina de Educación Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación.* Recuperado el 10 de junio de 2010 desde http://www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf

Engler, A., Gregorini, M., Müller, E., Vrancken, S. y Hecklein M.(s.f). Los errores en el aprendizaje de Matemática. Universidad Nacional del Litoral. Sociedad Argentina de Educación Matemática. Recuperado el 13 de abril de 2011 desde http://www.soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf

Esquinas, A. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente.* Tesis doctoral. Facultad de Educación. Universidad Complutense de Madrid. Recuperado el 04 de enero de 2011 desde http://eprints.ucm.es/8283/1/T30670.pdf

Gálvez, R. (2008). Matemática 3ero de Secundaria. Lima. Ediciones el Nocedal S.A.C.

Hernández, J.; Noda, A.; Palarea, M.ª M.; Socas, M. M. (2004). Sistemas de representación en la resolución de problemas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 6*, 159-188. ISSN: 1695-6613.

Leithold, L.(1998). Matemáticas previas al cálculo: funciones gráficas y geometría analítica. 3era ed.

Martínez, L. (2001).Un estudio acerca de los procedimientos aritméticos y algebraicos en estudiantes de bachillerato.
Recuperado el 19 de mayo de 2010 desde http://www.cimateuagro.org/tesis/

Ministerio de Educación (2005). Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular-Proceso de articulación. 1era Edición. Lima-Perú.

Miller, Ch.; Heeren, V. y Hornsby, J. (2006). Matemática: razonamiento y aplicaciones. Décima edición. México, D.F.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado el 04 de octubre de 2010 desde http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM07-2822.PDF

National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM,1991). Professional Standards for Mathematics Teachers. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Olfos, R. (2002*).* Iniciación al algebra, entre la básica y la media. Análisis en el aula desde la teoría antropológica de lo didáctico (TAD*)*. Recuperado el 5 de Junio de 2010 desde http://cimm.ucr.ac.cr/.../Algebra%20Teaching/.../Olfos%20Ayarza,%20R.%20Iniciacion%20al%20algebra,...

Pecharroman, C. (2008). *Aprendizaje de las propiedades globales de funciones a través de sus gráficas*. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid. Recuperado el 17 de diciembre desde https://www.educacion.es/teseo/imprimirFicheroTesis.do?fichero=10534

Queysanne, Michel. (1971). Algebra Básica. Primera edición. España.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Recuperado el 29 de mayo del 2011 desde http://funes.uniandes.edu.co/486/

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra, 61-74. Recuperado el 24 de junio de 2010 de http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Ruano2008Analisis.pdf

Santillana (2008). Matemática 3 para tercer grado de secundaria. Lima-Perú. Editorial Santillana.

Stewart, J., Redlin, R. y Watson, S.(2007). Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Quinta edición.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154) Barcelona: Horsori. Recuperado el 18 de junio de 2010 de cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/SocasM97-2532.PDF

Socas, M.M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática X*I, Séptimo *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM), 19-52

Socas, M. M. (5 de noviembre, 2010). *Respuesta al cuestionario enviado por la tesista.* Mensaje enviado a https://correo.pucp.edu.pe/read.php?sec=11&msgno=2281&folder=INBOX&first

=0&lugar=7&pagina=&sesion=0804201120272707f154bcd94a302fa36616e1b5aa71d9&prioridad=3

Steward, J.; Redlin, L. y Watson, S. (2007). Precálculo: matemáticas para el cálculo. Quinta edición. Mexico.

Swokowski, E. & Cole, J. (1993). Precalculus: Functions and Graphs. Brook Cole Publishing Company. United States of America.

ANEXO

ANEXO 1: CUESTIONARIO EXPLORATORIO N º1

Cuestionario exploratorio Nº1

Examen de Matemática **Criterio: Comunicación Matemática** **3er grado de Educación Secundaria**
Nombres y Apellidos: ……………………………………………………………..
Fecha: ………………………………..……   Duración: 8:30am - 9:00am

Instrucciones:

Lee atentamente y responde las siguientes preguntas.

1. Si $x = 6$, ¿a qué es igual $8x$? (3 puntos)

2. Resuelve la siguiente suma $\frac{5x}{3} + \frac{x}{3}$ (3 puntos)

3. Desarrolla el siguiente binomio al cuadrado $(x + y)^2$. (3 puntos)

4. Reduce la siguiente expresión $3x - (y + x)$ (3 puntos)

5. Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor de $5x + 3$? (4 puntos)

6. Si $x = y + 3$, ¿cuál es el valor $5x + 3y$? (4 puntos)

ANEXO 2: RESPUESTAS AL CUESTIONARIO Nº1

Examen de Matemática
Criterio: Comunicación Matemática
3er grado de Educación Secundaria

Nº 8

Nombre y Apellidos: Lida Cerron Valverde

Fecha: 24/11/10 **Duración: de 8:30am -9:00am**

Instrucciones:

Lee atentamente cada pregunta y desarrolla

1.¿Si $x = 6$, a que es igual $8x$? (3puntos)

8X
8(6)
48

3

2.Resuelve la siguiente suma $\frac{5x}{3} + \frac{x}{3}$. (3puntos)

$\frac{5x}{3} * \frac{x}{3} =$

$\frac{18x}{9x} = 2x$

error multiplico en diagonal y lo escribió en el numerador y denominador así $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

0

3. Desarrolla el siguiente binomio al cuadrado $(x + y)^2$. (3 puntos)

$(x+y)^2$
$2x+2y$

- Multiplico la variable por el exponente

0

4. Reduce la siguiente expresión $3x - (y + x)$. (3puntos)

$3x - (y+x)$
$3x - y + x$
$3x - y + x$
$3x + x - y$
$4x - y$

- omite parentesis.
- Reduce bien

1.0

5. Realiza las siguiente sustitución y desarrolla. (4 puntos)

Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor de $5x + 3$?

$5x + 3$
$5(2y) + 3$
$8y + 3 - 5$
$6y + 2$
y
4

sustituye bien, pero cambia ~~los factores~~ y desaparece un factor y opero. los numeros.

2.0

6. Realiza las siguiente sustitución y desarrolla. (4puntos)

Si $x = y + 3$, ¿cuál es el valor $5x + 3y$?

$5x + 3y$
$5(y+3) + 3(y+3)$
$5(3y) + 3(3y)$
$15y + 9y$
$6y$

- Suma $y + 3 = 3y$ confundiendo la reducción de termino

2.0

Examen de Matemática
Criterio: Comunicación Matemática
3er grado de Educación Secundaria

N° 7

Nombre y Apellidos: Nattaly Evelin Casia Terres

Fecha: 24/11/10 **Duración: de 8:30am -9:00am**

Instrucciones:

Lee atentamente cada pregunta y desarrolla

1.¿Si $x = 6$, a que es igual $8x$? (3puntos)

$8(6) = 48$

3

2.Resuelve la siguiente suma $\frac{5x}{3} + \frac{x}{3}$. (3puntos)

$\frac{5x+3}{3+x} = \frac{8X}{4X} = \frac{8}{4}$

suma en forma diagonal

0

3. Desarrolla el siguiente binomio al cuadrado $(x+y)^2$. (3 puntos)

0 En blanco

4. Reduce la siguiente expresión $3x - (y + x)$. (3puntos)

$3x - y + x$

$4x - y$

- omite parentesis
- reduce bien

1.0

5. Realiza las siguiente sustitución y desarrolla. (4 puntos)

Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor de $5x + 3$?

$5(2y) + 3$

$10y + 3$

$13y$

3.5

6. Realiza las siguiente sustitución y desarrolla. (4puntos)

Si $x = y + 3$, ¿cuál es el valor $5x + 3y$?

$5(y+3) + 3y$

$5(4y)$

$20y + 3y =$

- sustituye bien pero, suma los terminos del parentesis.

2.0

N°29

26

Examen de Matemática
Criterio: Comunicación Matemática
3er grado de Educación Secundaria

Nombre y Apellidos: Luisa Taype Orellana

Fecha: 24 / 11 / 10 **Duración: de 8:30am -9:00am**

Instrucciones:

Lee atentamente cada pregunta y desarrolla

1.¿Si $x = 6$, a que es igual $8x$? (3puntos)

~~$x = 6$ $8(6$ $x = 6$ $8x =$ $8(6$~~

$x = 6$
$8x = 8(6) = 48$

2.Resuelve la siguiente suma $\frac{5x}{3} + \frac{x}{3}$. (3puntos)

$$\frac{5x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{8x + 4x}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

3. Desarrolla el siguiente binomio al cuadrado $(x + y)^2$. (3 puntos)

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2$$

4. Reduce la siguiente expresión $3x - (y + x)$. (3puntos)

$3x - (y + x)$
$3x - y - x$
$3x - x - y$
$2x - y$

5. Realiza las siguiente sustitución y desarrolla. (4 puntos)

Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor de $5x + 3$?

$5x + 3$
$5(2y) + 3$
$10y + 3$

6. Realiza las siguiente sustitución y desarrolla. (4puntos)

Si $x = y + 3$, ¿cuál es el valor $5x + 3y$?

$5x + 3y$
$5(y+3) + 3y$
$5y + 15 + 3y$
$8y + 15$

ANEXO 3: GUÍA Nº1

GUÍA Nº 01
3ER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

TEMA: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. **TÉRMINO ALGEBRAICO**

Es una combinación de números y letras que se relacionan entre sí por la multiplicación o división. Las letras se denominan variables.

Ejemplos:

a) x^2y b) $2x^3y^4z$ c) $\frac{1}{3}x^{1/2}y^3$ d) $x^{1/3}y$

Elementos de un término algebraico

Sea el término algebraico $T(x;y) = 5x^2y^3$

donde:

Variables: **x e y**

Coeficiente: **5** (incluye la parte numérica o constante)

Parte literal: x^2y^3 (incluye las variables con sus respectivos exponentes)

2. **TÉRMINOS SEMEJANTES**

Dos términos son semejantes si tienen la misma parte literal.

Ejemplos:

a) $5x$ y $7x$ son términos semejantes porque tienen la misma parte literal.

b) $6x^2z^3$ y $\frac{3}{2}x^2z^3$ son términos semejantes porque tienen la misma parte literal.

OBSERVACIÓN: $-3x$ y $4z$ **no** son términos semejantes porque no tienen la misma parte literal.

3. **EXPRESIONES ALGEBRAICAS**

Es una combinación de letras y números que se relacionan entre sí por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación o división. En otras palabras, una expresión algebraica se obtiene al combinar términos algebraicos que se relacionan entre sí por la adición o sustracción.

Ejemplos:

a) $2a$ b) $5x^{1/2}$ c) $(a+x)$ d) $\frac{4}{x}+2xy-6$

4. POLINOMIOS

Un polinomio es una expresión algebraica cuyos exponentes son números naturales.

Ejemplos:

a) $\frac{1}{2}x$ b) $3x^2 - 4x^4$ c) $\frac{1}{3}x^2 - x^5 + 2$

d) $x^3 - 5x + x^2$

Los polinomios de un solo término se denominan monomios; los de dos términos, binomios; y los de tres términos, trinomios.

Ejemplos:

a) $3x$, $-5xy$, $\frac{2}{3}x^2$ son monomios

b) $x+y$, $5xy+3x$, $-\frac{2}{3}x+4x^2$ son binomios

c) $3x^2+5xy+3$, x^2+5x+4 son trinomios

ACTIVIDADES:

1.Completar la tabla siguiente:

Expresión Algebraica	Nombre	Coeficientes	Variables	Parte Literal
$x+y$				
$-5xy$				
$4ab+3x-5$				
$\frac{3}{7}xy-2x$				
$6a$				

5. REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Para reducir dos o más términos semejantes del mismo o diferente signo, se suman o restan los coeficientes y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplos:

a)Reducir la siguiente expresión: $3x + 4x$

El resultado es igual a $7x$

b)Reducir la siguiente expresión: $\frac{3}{6}x - 2x$

El resultado es $\frac{9}{6}x$

ACTIVIDADES:

Reducir las siguientes expresiones:

a)$3x + 4x =$ .... d)$\frac{4}{6}x + \frac{3}{2}x =$ ....

b)$-4x + 8x =$ .... e)$-4x + 8 =$ ....

c) $-8m + 5m =$ .... f) $-4x + 8y =$ ....

d) $-4x - 8x =$ ....g)$\frac{3}{2}x$ **+** $\frac{1}{5}x$ **=** ....

Responder:

En los ejercicios e) y f) ¿se pueden aplicar la reducción de términos semejantes? ¿Por qué?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

ANEXO 4: GUIA Nº2

GUÍA Nº 2

3ER GRADO DE EDUCACION SECUNDARIA

TEMA: CUADRADO DE UN BINOMIO DE LA FORMA $(x+y)^2$

1. **CUADRADO DE UN MONOMIO**

Para elevar un monomio al cuadrado se eleva al cuadrado su coeficiente y su parte literal.

Ejemplo 1:

Elevar al cuadrado $3y$.

Solución: $(3y)^2 = 3^2.y^2 = 9y^2$

Por lo tanto $(3y)^2 = 9y^2$

Ejemplo 2:

Elevar al cuadrado $(5xy)^2$:

Solución : $(5xy)^2 = 5^2.x^2y^2 = 25x^2y^2$

Por lo tanto $(5xy)^2 = 25x^2y^2$

Actividades:

Desarrollar:

a) $(3m)^2 =$.................................

b) $(4xy)^2 =$.................................

c) $(7y)^2 =$....................................

2. **CUADRADO DE UN BINOMIO**

Elevar al cuadrado $(a+b)$ equivale a multiplicar este binomio por sí mismo, es decir:

$(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$

Entonces $(a+b).(a+b)$ es:

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a+b} \\ ab+b^2 \\ \underline{a^2+ab} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Por lo tanto: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Actividades:

Desarrollar los siguientes binomios al cuadrado y escribir el resultado de cada uno de ellos.

a) $(3+y)^2 =$..

b) $(6a+y)^2 =$..

c) $(7x+11)^2 =$..

d) $(3y+8)^2 =$..

e) $(1+4x)^2 =$..

ANEXO 5: GUÍA Nº3

<u>GUÍA Nº 3</u>

3ER GRADO DE EDUCACION SECUNDARIA

TEMA: OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. **SUPRESIÓN DE PARÉNTESIS**

El paréntesis es un signo de agrupación, y para suprimirlo se tiene en cuenta el signo que va delante del paréntesis

Ejemplo 1:

Reducir: $2x+(3-4x)$

Como el signo que precede al paréntesis es positivo, se escribe las cantidades que están dentro del paréntesis con el **mismo signo**.

$$2x+(3-4x)=2x+3-4x=-2x+3$$

Ejemplo 2:

Reducir: $3y-(5x-6y)$

Como el signo que precede al paréntesis es negativo, se escribe las cantidades que están dentro del paréntesis con **diferente signo.**

$$3y-(5x-6y)=3y-5x+6y=9y-5y$$

Actividades:

Reducir las siguientes expresiones:

a) $4-(x+6y)=$ ………………………………………………………………

b) $3x+7+(x-6y)=$ …………………………………………………………

c) $5-4y-(7x+5y)=$ ………………………………………………………..

d) Elabora 3 ejercicios similares a los anteriores en tu cuaderno.

2. **OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS**

Ejemplo:

Si $x=4$, ¿a qué es igual $5x$?

Reemplazamos el valor de x en $5x$: $5x=5(4)=20$

Actividades:

a) Si $x=3$**,** ¿a qué es igual $5x$?

b) Si $x=4y$, ¿a qué es igual $5x$?

c) Si $x=6y$, ¿a qué es igual $10x$?

d) Si $x=6+y$, ¿a qué es igual $10x$?

e) Si $a=3$, ¿a qué es igual $16+4a$? ?

f) ¿Es correcto $(3a+2)^2=(3a)^2+2^2$?Justifica tu respuesta.

g) ¿Es correcto $\frac{3x}{7}+\frac{2x}{5}=\frac{5x}{12}$? Justifica tu respuesta.

ANEXO 6: RESPUESTAS A LA GUIA Nº1

Gerson Valverde Lída

GUÍA Nº 01

3ER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

TEMA: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. TÉRMINO ALGEBRAICO

Es una combinación de números y letras que se relacionan entre sí por la multiplicación o división. Las letras se denominan variables.

Ejemplos:

a) x^2y b) $2x^3y^4z$ c) $\frac{1}{3}x^{1/2}y^3$ d) $x^{1/3}y$

Elementos de un término algebraico

Sea el término algebraico $T(x;y) = 5x^2y^3$

donde:

Variables: **x e y**

Coeficiente: **5** (incluye la parte numérica o constante)

Parte literal: x^2y^3 (incluye las variables con sus respectivos exponentes)

2.TÉRMINOS SEMEJANTES

Dos términos son semejantes si tienen la misma parte literal.

Ejemplos:

a)**5x** y **7x** son términos semejantes porque tienen la misma parte literal.

b)$6x^2z^3$ y $\frac{3}{2}x^2z^3$ son términos semejantes porque tienen la misma parte literal.

OBSERVACIÓN: $-3x$ y $4z$ **no** son términos semejantes porque no tienen la misma parte literal.

3.EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Es una combinación de letras y números que se relacionan entre sí por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación o división. En otras palabras, una expresión algebraica se obtiene al combinar términos algebraicos que se relacionan entre sí por la adición o sustracción.

Ejemplos:

a) 2a b) $5x^{1/2}$ c) $(a + x)$ d) $\frac{4}{x} + 2xy - 6$ $-3x^{1/3} + 4x$

4.POLINOMIOS

Un polinomio es una expresión algebraica cuyos exponentes son números naturales.

Ejemplos:

a) $\frac{1}{2}x$ b) $3x^2 - 4x^4$ c) $-\frac{1}{3}x^2 - x^5 + 2$ $x^3 - 5x + x^2$

Los polinomios de un solo término se denominan monomios; los de dos términos, binomios; y los de tres términos, trinomios.

Ejemplos:

a) $3x$, $-5xy$, $\frac{2}{3}x^2$ son monomios

b) $x + y$, $5xy + 3x$, $-\frac{2}{3}x + 4x^2$ son binomios

c) $3x^2 + 5xy + 3$, $x^2 + 5x + 4$ son trinomios

ACTIVIDADES:

1.Completa la tabla siguiente:

Expresión algebraica	Nombre	Coeficientes	Variables	Parte Literal
$x + y$	Binomios	1	x+y	x'+y'
$-5xy$	Monomio	-5	xy	xy
$4ab + 3x - 5$	trinomio	4, 3, 5	ab, x	ab', x'
$\frac{3}{7}xy - 2x$	[illegible]nomio	$\frac{3}{7}$, 2	xy, x	x'y', x'
6a	Expresiones A.	6	a	a

5.REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Para reducir dos o más términos semejantes del mismo o diferente signo, se suman o restan los coeficientes y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplos:

a)Reducir la siguiente expresión: $3x + 4x$

El resultado es igual a $7x$

b)Reducir la siguiente expresión: $\frac{3}{6}x - 2x$

El resultado es $\frac{9}{6}x$

ACTIVIDADES:

Reducir las siguientes expresiones:

a) $3x + 4x =$ 7x

b) $-4x + 8x =$ 4x

c) $-8m + 5m =$ -3m

d) $-4x - 8x =$ -12x

d) $\frac{4}{6}x + \frac{3}{2}x =$ $\frac{7}{8}x$

e) $-4x + 8 =$ -4x + 8

f) $-4x + 8y =$ -4x + 8y

g) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{5}x =$ $\frac{4}{7}x$

Responder:

En los ejercicios e) y f) ¿se pueden aplicar la reducción de términos semejantes? ¿Por qué?

F), e) no se puede porque no son términos semejantes.

Casia

GUÍA N° 01

3ER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

TEMA: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. TÉRMINO ALGEBRAICO

Es una combinación de números y letras que se relacionan entre si por la multiplicación o división. Las letras se denominan variables.

Ejemplos:

a) x^2y b) $2x^3y^4z$ c) $\frac{1}{3}x^{1/2}y^3$ d) $x^{1/3}y$

Elementos de un término algebraico

Sea el término algebraico $T(x;y)=5x^2y^3$

donde:

Variables: **x e y**

Coeficiente: **5** (incluye la parte numérica o constante)

Parte literal: $\mathbf{x^2y^3}$ (incluye las variables con sus respectivos exponentes)

2.TÉRMINOS SEMEJANTES

Dos términos son semejantes si tienen la misma parte literal.

Ejemplos:

a)**5x y 7x** son términos semejantes porque tienen la misma parte literal.

b)$6x^2z^3$ y $\frac{3}{2}x^2z^3$ son términos semejantes porque tienen la misma parte literal.

OBSERVACIÓN: $-3x$ y $4z$ **no** son términos semejantes porque no tienen la misma parte literal.

3.EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Es una combinación de letras y números que se relacionan entre sí por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación o división. En otras palabras, una expresión algebraica se obtiene al combinar términos algebraicos que se relacionan entre sí por la adición o sustracción.

Ejemplos:

a) $2a$ b) $5x^{1/2}$ c) $(a+x)$ d) $\frac{4}{x}+2xy-6$ $-3x^{1/3}+4x$

4.POLINOMIOS

Un polinomio es una expresión algebraica cuyos exponentes son números naturales.

Ejemplos:

a)$\frac{1}{2}x$ b) $3x^2-4x^4$ c) $-\frac{1}{3}x^2-x^5+2$ x^3-5x+x^2

Los polinomios de un solo término se denominan monomios; los de dos términos, binomios; y los de tres términos, trinomios.

Ejemplos:

a)$3x$, $-5xy$, $\frac{2}{3}x^2$ son monomios

b)$x+y$; $5xy+3x$; $-\frac{2}{3}x+4x^2$ son binomios

c)$3x^2+5xy+3$; x^2+5x+4 son trinomios

ACTIVIDADES:

1.Completa la tabla siguiente:

Expresión algebraica	Nombre	Coeficientes	Variables	Parte Literal
$x+y$	binomio	1	x y	x' + y'
$-5xy$	monomio	−5	x y	x' y'
$4ab+3x-5$	Trinomio	4, 3, 5	ab, x	ab' x'
$\frac{3}{7}xy-2x$	Binomio	$\frac{3}{7}$, 2.	xy , x	xy , x
$6a$	monomio	6	a	a'

5.REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Para reducir dos o más términos semejantes del mismo o diferente signo, se suman o restan los coeficientes y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplos:

a)Reducir la siguiente expresión: $3x+4x$

El resultado es igual a $7x$

b)Reducir la siguiente expresión: $\frac{3}{6}x-2x$

El resultado es $\frac{9}{6}x$

ACTIVIDADES:

Reducir las siguientes expresiones:

a)$3x+4x=$ 7X

b)$-4x+8x=$ 4X

c) $-8m+5m=$ −3m

d) $-4x-8x=$ −12 X

d) $\frac{4}{6}x+\frac{3}{2}x=$ $\frac{7}{8}$ x

e) $-4x+8=$ ....

f) $-4x+8y=$ ....

g) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{5}x=$ $\frac{4}{7}$ x

Responder:

En los ejercicios e) y f) ¿se pueden aplicar la reducción de términos semejantes? ¿Por qué?

no son terminos semejantes.

ANEXO 7: RESPUESTAS A LA GUÍA Nº2

Cerron Valverde Lida

GUÍA Nº 2
3ER GRADO DE EDUCACION SECUNDARIA

TEMA: CUADRADO DE UN BINOMIO DE LA FORMA $(x+y)^2$

1.CUADRADO DE UN MONOMIO

Para elevar un monomio al cuadrado se eleva al cuadrado su coeficiente y su parte literal.

Ejemplo 1:

Elevar al cuadrado 3y .

Solución: $(3y)^2 = 3^2.y^2 = 9y^2$

Por lo tanto $(3y)^2 = 9y^2$

Ejemplo 2:

Elevar al cuadrado $(5xy)^2$:

Solución : $(5xy)^2 = 5^2.x^2y^2 = 25x^2y^2$

Por lo tanto $(5xy)^2 = 25x^2y^2$

Actividades:

Desarrollar:

a) $(3m)^2 =$ ....$(3)^2.(m)^2 = 9m^2$....

b) $(4xy)^2 =$.$(4)^2.(x)^2.(y)^2 = 16x^2y^2$...

c) $(7y)^2 =$ ...$(7)^2.(y)^2 = 49y^2$........

2.CUADRADO DE UN BINOMIO

Elevar al cuadrado $(a+b)$ equivale a multiplicar este binomio por sí mismo, es decir:

$(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$

Entonces $(a+b).(a+b)$ es:

$$
\begin{array}{r}
a+b \quad \times \\
\underline{a+b} \\
ab+b^2 \\
\underline{a^2+ab \quad\;\;} \\
a^2+2ab+b^2
\end{array}
$$

Por lo tanto: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Actividades:

Desarrollar los siguientes binomios al cuadrado y escribir el resultado de cada uno de ellos.

a) $(3+y)^2 =$ ......$9+6y+y^2$..........................

b) $(6a+y)^2 =$ .....$36a + 12ay + y^2$.............

c) $(7x+11)^2 =$ ....$49x$ .... $+154x+121$.........

d) $(3y+8)^2 =$ ......$9y + 48y + 64$................

e) $(1+4x)^2 =$ ......$1\cancel{+}8x$ ... $+16x$...............

$(3+y).(3+y)$

$$\begin{array}{r} 3+y \times \\ 3+y \\ \hline 3y+y^2 \\ 9+3y \\ \hline \boxed{9+6y \quad y^2} \end{array}$$

$(6a+y).(6a+y)$

$$\begin{array}{r} 6a+y \times \\ 6a+y \\ \hline 6ay+y^2 \\ 36a+6ay \\ \hline 36a+12ay \quad y^2 \end{array}$$

$(1+4x).(1+4x)$

$$\begin{array}{r} 1+4x \\ 1+4x \\ \hline 4x+16x \\ 1+4x \\ \hline 1+8x+16x \end{array}$$

Casia.

GUÍA Nº 2

3ER GRADO DE EDUCACION SECUNDARIA

TEMA: CUADRADO DE UN BINOMIO DE LA FORMA $(x+y)^2$

1.CUADRADO DE UN MONOMIO

Para elevar un monomio al cuadrado se eleva al cuadrado su coeficiente y su parte literal.

Ejemplo 1:

Elevar al cuadrado 3y .

Solución: $(3y)^2 = 3^2.y^2 = 9y^2$

Por lo tanto $(3y)^2 = 9y^2$

Ejemplo 2:

Elevar al cuadrado $(5xy)^2$:

Solución : $(5xy)^2 = 5^2.x^2y^2 = 25x^2y^2$

Por lo tanto $(5xy)^2 = 25x^2y^2$

Actividades:

Desarrollar:

a) $(3m)^2 =$ $3^2 . m^2 = 9m^2$

b) $(4xy)^2 =$ $4^2 . x^2 y^2 = 16x^2y^2$

c) $(7y)^2 =$ $7^2 . y^2 = 49y^2$

2.CUADRADO DE UN BINOMIO

Elevar al cuadrado $(a+b)$ equivale a multiplicar este binomio por sí mismo, es decir:

$(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$

Entonces $(a+b).(a+b)$ es:

$$
\begin{array}{r}
a+b \quad \times \\
\underline{a+b} \\
ab+b^2 \\
\underline{a^2+ab \quad\quad} \\
a^2 + 2ab + b^2
\end{array}
$$

Por lo tanto: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Actividades:

Desarrollar los siguientes binomios al cuadrado y escribir el resultado de cada uno de ellos.

a) $(3+y)^2 =$ $9 + 6y + y^2$

b) $(6a+y)^2 =$ $36a + 12ay + y^2$

c) $(7x+11)^2 =$ $49x + 154x + 121$

d) $(3y+8)^2 =$ $9y + 48y + 64$

e) $(1+4x)^2 =$ $1 + 8x + 16x$

a). $3+y$ x.
$3+y$
$3y+y^2$
$9+3y$
$9+6y+y^2$

b) $6a+y$ x
$6a+y$
$6ay+y^2$
$36a+6ay$
$36a+12ay+y^2$

c). $7x+11$ x
$7x+11$
$77x+121$
$49x+77x$.
$49x+154x+121$

d) $3y+8$ x
$3y+8$.
$24y+64$
$9y+24y$
$9y.+48y+64$

e) $1+4x$. x
$1+4x$
$4x+16x$
$1+4x$
$1+8x+16x$

ANEXO 8: RESPUESTA A LA GUÍA Nº3

Casia

GUÍA Nº 3
3ER GRADO DE EDUCACION SECUNDARIA

TEMA: OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.SUPRESIÓN DE PARÉNTESIS

El paréntesis es un signo de agrupación, y para suprimirlo se tiene en cuenta el signo que va delante del paréntesis

Ejemplo 1:

Reducir $2x + (3 - 4x)$

Como el signo que precede al paréntesis es positivo, se escribe las cantidades que están dentro del paréntesis con el **mismo signo**.

$$2x + (3 - 4x) = 2x + 3 - 4x = -2x + 3$$

Ejemplo 2:

Reducir $3y - (5x - 6y)$

Como el signo que precede al paréntesis es negativo, se escribe las cantidades que están dentro del paréntesis con **diferente signo.**

$$3y - (5x - 6y) = 3y - 5x + 6y = 9y - 5y$$

Actividades:

Reducir las siguientes expresiones:

a) $4 - (x + 6y) =$ $4 - x - 6y$

b) $3x + 7 + (x - 6y) =$ $3x + x + 7 - 6y = 4x + 7 - 6y$

c) $5 - 4y - (7x + 5y) =$ $5 - 4y - 7x - 5y = -4y - 5y - 7x + 5 = -9y - 7x + 5$

d) Elabora 3 ejercicios similares a los anteriores en tu cuaderno.

2.OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejemplo:

Si $x = 4$, ¿a qué es igual $5x$?

Reemplazamos el valor de x en $5x$: $5x = 5(4) = 20$

Actividades:

a)Si $x = 3$, ¿a qué es igual $5x$?

b)Si $x = 4y$, ¿a qué es igual $5x$?

c)Si $x = 6y$, ¿a qué es igual $10x$?

d)Si $x = 6 + y$, ¿a qué es igual $10x$?

e)Si $a = 3$, ¿a qué es igual $16 + 4a$? ?

f)¿Es correcto $(3a + 2)^2 = (3a)^2 + 2^2$?Justifica tu respuesta. no porque son ecuaciones cuadraticas.

$$\begin{array}{r} 3a + 2 \\ 3a + 2 \\ \hline 6a + 4 \\ 9a + 6a \\ \hline 9a + 12a + 4 \end{array}$$

g)¿Es correcto $\frac{3x}{7} + \frac{2x}{5} = \frac{5x}{12}$? Justifica tu respuesta. ← es incorrecto

$$\frac{3x}{7} + \frac{2x}{5} = \frac{15x + 14x}{35} = \frac{29x}{35}$$

d) elabora 3 ejercicios.

- $4+5y-(3x+6y)=4+5y-3x-6y=5y-6y-3x+4$
$=1y-3x+4$

- $4x+8+(2x-3y)=4x+8+2x-3y=4x+2x-3y+8$
$=6x-3y+8$

- $3x+6-(x+2y)=3x+6-x-2y=3x-x-2y+6$
$=2x-2y+6$

a). si $x=3$

$5x=5(3)$
$=15$

b). $x=4y$

$5x=5(4y)$
$=20y$

c). $x=6y$

$10x=10(6y)$
$=60y$

d). $x=6+y$

$10x=10(6+y)$
$=60+10y$

e). $a=3$

$16+4a=16+4(3)$
$=16+12$
$=28$

Gerron
Valuede

GUÍA Nº 3

3ER GRADO DE EDUCACION SECUNDARIA

TEMA: OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.SUPRESIÓN DE PARÉNTESIS

El paréntesis es un signo de agrupación, y para suprimirlo se tiene en cuenta el signo que va delante del paréntesis

Ejemplo 1:

Reducir $2x + (3 - 4x)$

Como el signo que precede al paréntesis es positivo, se escribe las cantidades que están dentro del paréntesis con el **mismo signo**.

$$2x + (3 - 4x) = 2x + 3 - 4x = -2x + 3$$

Ejemplo 2:

Reducir $3y - (5x - 6y)$

Como el signo que precede al paréntesis es negativo, se escribe las cantidades que están dentro del paréntesis con **diferente signo.**

$$3y - (5x - 6y) = 3y - 5x + 6y = 9y - 5y$$

Actividades:

Reducir las siguientes expresiones:

a) $4 - (x + 6y) =$ $4 - x - 6y =$ ....

b) $3x + 7 + (x - 6y) =$ $3x + 7 + x - 6y = 3x + x + 7 - 6y = 4x + 7 - 6y$ ....

c) $5 - 4y - (7x + 5y) =$ $5 - 4y - 7x + 5y = 5 - 4y + 5y - 7x =$ ~~9y~~ $-9y - 7x + 5$ ....

d) Elabora 3 ejercicios similares a los anteriores en tu cuaderno.

2.OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejemplo:

Si $x = 4$, ¿a qué es igual $5x$?

Reemplazamos el valor de x en $5x$: $5x = 5(4) = 20$

Actividades:

a)Si $x = 3$, ¿a qué es igual $5x$? $5x = 5(3) = 15$

b)Si $x = 4y$, ¿a qué es igual $5x$? $5x = 5(4y) = 20y$

c)Si $x = 6y$, ¿a qué es igual $10x$? $10x = 10(6y) = 60x$

d)Si $x = 6 + y$, ¿a qué es igual $10x$? $10x = 10(6+y) =$ ~~60y~~ $= 60 + 10y$

e)Si $a = 3$, ¿a qué es igual $16 + 4a$? ? $16 + 4(3) = 16 + 12 = 28$

f)¿Es correcto $(3a + 2)^2 = (3a)^2 + 2^2$? Justifica tu respuesta. porque es un cuadrado de un bino

g)¿Es correcto $\frac{3x}{7} + \frac{2x}{5} = \frac{5x}{12}$? Justifica tu respuesta. porque no se tiene que multiplicar en aspa

$$\frac{3x}{7} + \frac{2x}{5} = \frac{7.2x + 3x.5}{7.5} = \frac{14x + 15x}{35} = \frac{29x}{35}$$

$$\begin{array}{r} 3a + 2 \\ 3a + 2 \\ \hline 6a + 4 \\ 9a + 6a \\ \hline 9a\ 12a + 4 \end{array}$$

a) $8-(y+5x) = 8-y+5x$

b) $5x+5+(x-3y) = 5x+5+x-3y = 5x+x+5-3y = 6x+5-3y$

c) $4x+8-(2x+9y) = 4x+8-2x-9y = 4x-2x+8-9y = 2x+8-9y$

ANEXO 9: CUESTIONARIO EXPLORATORIO Nº2

Cuestionario exploratorio Nº2

Examen de Matemática
Criterio: Comunicación Matemática
3er grado de Educación Secundaria

Nombres y Apellidos: ……………………………………………………………..

Fecha: ………………………………..……. **Duración: 8:30am - 9:00am**

Lee atentamente y responde las siguientes preguntas.

1. Si $x = 21$, ¿a qué es igual $5 + 8x$? (3 puntos)

2. Opera $\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x$ (3 puntos)

3. ¿Es correcto $(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 4y^2$? (3 puntos)

4. Reduce la siguiente expresión $3x - (y - 5x)$ (3 puntos)

5. Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor de $5x + 2$? (4 puntos)

6. Si $x = y + 3$, ¿cuál es el valor $4x + 3y$? (4 puntos)

ANEXO 10: RESPUESTAS AL CUESTIONARIO Nº2

Examen de Matemática
Criterio: Comunicación Matemática
3er grado de Educación Secundaria

Nombres y Apellidos: Cerron Valverde Lida

Fecha: 15/12/10 **Duración: 8:30am - 9:00am**

Lee atentamente y responde las siguientes preguntas.

1. Si $x = 21$, ¿a qué es igual $5 + 8x$? (3 puntos)

$5+8(21) = 5+168 = 173$

2. ~~Suma~~ Reduce: $\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x$ (3 puntos)

$\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x = \frac{5-8}{2\cdot 5} = \frac{3}{10}$

3. ¿Es correcto $(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 4y^2$? ¿Por qué? (3 puntos)

$$\begin{array}{r} 3x+2yx \\ 3x+2y \\ \hline 6yx+4y \\ 9x+6yx \\ \hline 9x+12yx+4y \end{array}$$

no porque cuando se multiplica sale $9x+12yx+4y$

4. Reduce la siguiente expresión: $3x - (y - 5x)$. (3 puntos)

$3x-(y-5x)$
$3x-y+5x$
$3x+5x-y$
$8x-y$

5. Si $x = 2y$ ¿cuál es el valor de $5x + 2$? (4 puntos)

$5(2y)+2 = 10y+2 = 12y$

6. Si $x = y + 3$, ¿cuál es el valor de $4x + 3y$? (4 puntos)

1) $4(y+3)+3y =$
2) $4y+12+3y$
3) $4y+3y+12$
4) $7y+12$

Examen de Matemática
Criterio: Comunicación Matemática
3er grado de Educación Secundaria

Nombres y Apellidos: Nattaly Casia Terres

Fecha: 15 -12 - 10 **Duración: 8:30am - 9:00am**

Lee atentamente y responde las siguientes preguntas.

1. Si $x = 21$, ¿a qué es igual $5 + 8x$? (3 puntos)

$5+8x$
$5+8(21)$
$5+168 = 173$

2. Suma: $\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x$ (3 puntos)

$\frac{1x}{2} - \frac{4x}{5} = \frac{8x-5x}{10} = \frac{3x}{10}$

3. ¿Es correcto $(3x+2y)^2 = 9x^2 + 4y^2$? ¿Por qué? (3 puntos)

$3x+2y$ x
$3x+2y$
$6xy+4y$
$9x+6xy$
$9x+12xy+4y$

no porqi no son ecuaciones Cuadraticas

4. Reduce la siguiente expresión: $3x-(y-5x)$. (3 puntos)

$3x-y+5x = 3x+5x-y$
$= 8x-y$

5. Si $x = 2y$ ¿cuál es el valor de $5x+2$? (4 puntos)

$5x+2$
$5(2y)+2$
$10y+2 = 12y$

6. Si $x = y+3$, ¿cuál es el valor de $4x+3y$? (4 puntos)

$4x+3y$
$4(y+3)+3y$
$4+4y+3y$
$4+7y$

ANEXO 11: FICHA DE ENTREVISTA PERSONAL

Ficha de entrevista

Entrevista Personal

Nombres y Apellidos: ………………………………………………………………………..
Fecha: …………………………….. Duración: 30min
Grado y Sección: ………………...

ACTIVIDAD Nº 1

Escribe de forma más simplificada las siguientes sumas:

a) $3x+5y$ ……………………………………………………………………………
b) $3x+5x$ ……………………………………………………………………………
c) $3x-(y+x)$…………………………………………………………………………..
d) $5y-(-5x-3)=$ …………………………………………………………………………

ACTIVIDAD Nº 2

Desarrolla las siguientes sumas en el recuadro:

Ejercicio	Solución
Suma $\frac{5}{3}+\frac{3}{7}$	
Suma $\frac{5x}{3}+\frac{3x}{7}$	

ACTIVIDAD Nº 3

1. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(3)^2=$……………………………………………………………….
b) $(3x)^2=$ ……………………………………………………………….
c) $4x^2=$ ……………………………………………………………..
d) $(2.3)^2=$……………………………………………………………….
e) $(x.y)^2=$…………………………………………………………….
f) $(x+y)^2=$ …………………………………………………………..
g) $(5x+2y)^2=$……………………………………………………….

ANEXO 12: RESPUESTAS A LA FICHA DE ENTREVISTA PERSONAL

Entrevista Personal

Nombres y Apellidos: Cerron Valverde Pida
Fecha: 17/12/10 Duración: 30 min
Grado y Sección: 3° "A"

ACTIVIDAD Nº 1

Escribe de forma más simplificada las siguientes sumas:

a) $3x+5y$ ...... Porque no son terminos semejantes

b) $3x+5x$ ...... $3x+5x=8x$

c) $3x-(y+x)$ ... $3x-(y+x)=3x+y+x=3x+x+y=4x+y$

d) $5y-(-5x-3)=$ $5y+5x+3=5y+3x$

ACTIVIDAD Nº 2

Desarrolla las siguientes sumas en el recuadro:

Ejercicio	Solución
Suma $\frac{5}{3}+\frac{3}{7}$	$\frac{5}{3}+\frac{3}{7}=\frac{8}{10}$ $\left\{ \frac{5}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{7.5+3.3}{3.7}=\frac{35+9}{21}=\frac{44}{21}\right.$
Suma $\frac{5x}{3}+\frac{3x}{7}$	$\frac{5x}{3}+\frac{3x}{7}=\frac{35x+9x}{3.7}=\frac{44x}{21}$

ACTIVIDAD Nº 3

1. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(3)^2$ 9

b) $(3x)^2$ ... $(3)^2(x)^2=9x^2$

C) $4x^2$ ... ~~$4x^2 = (4)^2(x)^2 = 4x^2$~~ ya esta resuelto

d) $(2.3)^2$ ... $(2.3)^2=(6)^2=36$

e) $(x.y)^2$ ... $(x.y)^2=(x)^2(y)^2=x^2y^2$ Porque es un binomio

f) $(x+y)^2$ ... $(x+y)^2=(x)^2+(y)^2=x^2+y^2$ Porque es un binomio

g) $(5x+2y)^2=(5x)^2+(2y)^2=(5)^2(x)^2+(2)^2(y)^2=25x^2+4y^2$

$(x+y)^2=(x+y).(x+y)$

$$\begin{array}{r} (x+y)\ \times \\ x+y \\ \hline +xy+y^2 \\ x^2+xy \\ \hline \boxed{x^2+xy+y^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x+2y\ \times \\ 5x+2y \\ \hline 10xy+4y \\ 25x+10xy \\ \hline \boxed{25x+20xy+4y} \end{array}$$

Entrevista Personal

Nombres y Apellidos: Nathaly Casia Terres

Fecha: 17-12-10 Duración:

Grado y Sección: 3ro A

ACTIVIDAD Nº 1

Escribe de forma más simplificada las siguientes sumas:

a) $3x+5y$ no se puede sumar porq no son semejantes

b) $3x+5x$ $8x$

c) $3x-(y+x)$ $3x-y-x = 3x-x = 2x-y$

d) $5y-(-5x-3) =$ $5y+5x+3$

ACTIVIDAD Nº 2

Desarrolla las siguientes sumas en el recuadro:

Ejercicio	Solución
Suma $\frac{5}{3}+\frac{3}{7}$	$\frac{5}{3}+\frac{3}{7} = \frac{35+9}{21} = \frac{44}{21}$
Suma $\frac{5x}{3}+\frac{3x}{7}$	$\frac{5x}{3}+\frac{3x}{7} = \frac{35x+9x}{21} = \frac{44x}{21}$

ACTIVIDAD Nº 3

1. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(3)^2$ $3.3=9$

b) $(3x)^2$ $3x.3x=9x$

C) $4x^2$ no se puede operar xq es un monomio

d) $(2.3)^2$ $2.3=6$, $(6^2) = 36$

e) $(x.y)^2$ $(x^2)(y^2) = x^2y^2$ porque es un binomio

f) $(x+y)^2$ [illegible] $\cancel{(x^2)+(y)^2 = x^2y^2}$

g) $(5x+2y)^2 =$ $(5x)^2+(2y)^2 =$ [illegible] $\cancel{25x\ 4y}$

$(x+y)^2 : (x+y)^2 =$

$$\begin{array}{r} x+y \\ x+y \\ \hline xy+^2y \\ 2x+xy \\ \hline 2x+2xy+2y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x+2y \\ 5x+2y \\ \hline 10xy+4y \\ 25x+10xy \\ \hline 25x+20xy+4y \end{array}$$

ANEXO 13: ENTREVISTA DE CORREO ELECTRONICO AL DR. MARTIN SOCAS

Fecha: 05 de noviembre de 2010

Entrevistado: Dr. Martin Socas Robayna

<u>PREGUNTAS SOBRE EL MARCO DEL ENFOQUE LOGICO SEMIOTICO</u>

1.-Quisiera que me brindara mas explicación con respecto al concepto de signo desde su punto de vista en relación con el objeto matemático. ¿Qué papel juega el signo en el contenido de las expresiones algebraicas?

Puedes leerte el siguiente trabajo que espero que clarifique algunas cuestiones como signo, objeto y significado, así como sus relaciones en la noción de representación:

- Hernández, J.; Noda, A.; Palarea, M.ª M.; Socas, M. M. (2004). Sistemas de representación en la resolución de problemas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 6*, 159-188. ISSN: 1695-6613.

Te adjunto la versión electrónica.

2. ¿El Enfoque Lógico Semiótico clasifica los errores de acuerdo a Socas (1997), o es otra adaptación, pues en el documento de la Ponencia del 7mo Simposio de la SEIEM no se especifica los ejemplos de los errores mas frecuentes?

El objetivo terminal de ELOS es la comprensión del origen de los errores en Matemáticas en los alumnos. La Ponencia del 7mo Simposio de la SEIEM está escrita con este propósito. En el camino para alcanzar este objetivo surgen diferentes necesidades, una de ellas es la organización y clasificación de las dificultades y de los errores que cometen, en este sentido es el trabajo de Socas (1997).

3. ¿Con respecto a la entrevista que se realiza, quisiera saber específicamente cual es la finalidad?

La entrevista tiene como finalidad aportar información relevante al objetivo Terminal y también a las posibles conjeturas sobre la naturaleza del error que uno puede hacer a partir de las respuestas del cuestionario.

4. ¿Qué debo considerar para realizar la clasificación de errores y presentar un posterior análisis?

Instrumentos adecuados: El cuestionario y la entrevista a un número pequeño de alumnos, en este caso, al menos tres.

5. ¿Cuál es la relación entre la clasificación de errores y los estadios de desarrollo cognitivo, para ubicar a los alumnos?

Los errores en el ELOS tienen una triple vía de organización o clasificación:

1. Mediante la competencia matemática formal, es decir, la consideración de la Matemática como una disciplina científica. En este caso se considera: errores operacionales, estructurales y procesuales.

2. Mediante los estadios de desarrollo cognitivos, errores en el estadio semiótico, estructural y autónomo.

3. Conjeturas sobre su procedencia en los alumnos: Ausencia de significado, obstáculos y actitudes afectivas y emocionales

6. ¿Qué tipo de errores clasifican al alumno en el estadio autónomo?¿Por qué?

Los errores no sitúan al alumno en un estadio determinado, es la ausencia de dificultades y errores el que lo sitúa. Sin embargo, la presencia de dificultades y errores en un determinado tipo de actividades propias de un estadio le sitúa para esas actividades en el estadio anterior.

Los errores del estadio autónomo, son los errores, en este caso, propios del Álgebra y de su escritura algebraica, sin referencia específica, a los estadios anteriores. Ahora bien, para identificar estos errores en un alumno determinado, este debe estar situado en este estadio de desarrollo (Para determinar la situación de un alumno en un estadio de desarrollo ver Socas (2001, 2007), Depoll (2004).

7. ¿A qué se refiere sobre los aspectos operacional, estructural y procesual del Modelo de Competencia Formal?

Se trata de una manera de organizar el conocimiento matemático desde la Disciplina Matemáticas, en tres aspectos relacionados.

Operaciones, que comprende: operaciones, algoritmos y técnicas.

Estructuras, que comprende: definiciones, propiedades y estructuras.

Procesos, que comprende: sustitución formal, generalización y modelización (véase el artículo referenciado de Ruano, Socas y Palarea, 2008).

Ayuda a organizar los errores.

Esta forma de organización, se puede prescindir y tomar únicamente la organización de los estadios de desarrollo como se hace en el cuestionario propuesto.

8. ¿A cada estadio le corresponde las categorías indicadas en el Plan de Tesis que le envío o hay errores de interpretación?

Es apropiada la interpretación para la propuesta.

9. ¿Considera que la prueba que está en el Plan de tesis va a conseguir clasificar los errores o me sugiere más preguntas?

Me parece adecuado el plan de trabajo

10. ¿Es posible acceder a su tesis doctoral a través del internet? Pues he tratado de ubicarla y no la he podido encontrar.

Mi Tesis Doctoral fue sobre Análisis Matemático:

Socas, M. M. (1990). *Sobre la transformación integral de Hankel-Clifford en ciertos espacios de funciones generalizadas* (236 páginas.) ISBN: 84-7756-159-1. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de La Laguna. Colección: Trabajos de investigación. (L).

Si te puedo dar las referencias de otras Tesis Doctorales en Educación Matemática que han utilizado Enfoque Lógico Semiótico, como único marco teórico de la tesis o como parte del marco teórico.

En el primer caso: "Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas" de Cristina Pecharromán Gómez, Universidad de Valladolid. 2008.

En el segundo caso: "La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PCS)" de Ramón A. Depool Rivero, Universidad de La Laguna. 2004.