PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE LETRAS Y CIENCIAS HUMANAS

Operaciones combinatorias en adolescentes y jóvenes universitarios

Tesis para optar por el título de Licenciado en Psicología con mención en Psicología Educacional que presenta el

Bachiller:

Juan Augusto Morales Giraldo

Asesora:

Susana Frisancho Hidalgo

Lima, 2013

Resumen

En la teoría del desarrollo cognitivo de Jean Piaget, las operaciones combinatorias emergen al inicio de la formación del pensamiento formal y hacen referencia a la capacidad de las personas para concebir y organizar sistemáticamente todas las posibilidades y dimensiones que pueden interactuar como elementos y causas de un problema o suceso complejo. Debido a que este desarrollo ya debe haberse dado en el contexto escolar y es esencial en el contexto universitario, el objetivo de esta investigación fue evaluar la capacidad combinatoria de un grupo de estudiantes de una universidad privada de Lima. Se contó con la participación de 12 alumnos (seis mujeres y seis varones) que cursaban sus primeros ciclos de formación universitaria y cuyas edades estuvieron entre los 16 y 20 años. Teniendo como referencia el método crítico de Jean Piaget, se utilizaron seis tareas con estructura combinatoria que se tomaron de las investigaciones de este autor y de otros trabajos sobre el tema. Los resultados muestran que la mayoría de estudiantes resolvió apropiadamente los problemas planteados, aunque algunos exhibieron una serie de dificultades y otros no pudieron resolver varias de las tareas. El análisis y explicación de estas variaciones en el desempeño de los participantes, se realizó desde una aproximación sistémica y articulada de los conceptos más importantes de la teoría de Piaget y considerando la importancia de la capacidad combinatoria para el desarrollo cognitivo y el pensamiento científico en el contexto universitario.

Palabras clave: Pensamiento formal, operaciones formales, combinatoria, desarrollo cognitivo adolescente, pensamiento científico, educación superior.

Abstract

In Jean Piaget's theory of cognitive development, combinatorial operations emerge at the onset of formal operational thought and refer to the logical capacity of people for conceiving and organizing systematically all possibilities and dimensions that can interact as elements or causes of a complex problem. Because this development should already occur during basic education and since it is essential for higher education, the objective of this study was to evaluate this combinatorial capacity in a group of students from a private university in Lima. Assuming the critical method of Jean Piaget, twelve university freshmen (six women and six men) aged between 16 and 20 years, participated in solving six tasks with combinatorial structure that were taken from Piaget's research and other papers on the subject. The results show that most students properly resolved the proposed problems, although some exhibited a number of difficulties and others could not solve several tasks. The analysis and explanation of these variations in performance was carried out from a systemic and coordinated approach of the most important concepts of Piaget's theory and considering the importance of combinatorial capacity for cognitive development and scientific thought in higher education.

Key words: Formal thought, formal operations, combinatory, adolescent cognitive development, scientific thought higher education.

Tabla de contenido

Introducción

Este estudio explora las capacidades que un grupo de estudiantes universitarios exhibe al resolver problemas de combinatoria. La investigación se organiza en tres partes: en la primera se presentan las consideraciones teóricas que plantean y delimitan el objetivo del estudio, en la segunda se detallan los instrumentos para la recolección de los datos y en la tercera se organizan y discuten los resultados. A continuación se desarrolla la primera parte de este documento.

En la publicación *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, Inhelder y Piaget (1955) sintetizan sus investigaciones acerca del desarrollo cognitivo entre ambas etapas con el objetivo de caracterizar el pensamiento del adolescente por oposición al pensamiento del niño, describiendo los cambios y mecanismos que explican cómo el sujeto construye progresivamente una manera más compleja de comprender la realidad. Denominaron *pensamiento operatorio formal* a la etapa del desarrollo cognitivo que va constituyéndose en el transcurso de la adolescencia (Piaget, 1972/2008), definiendo el inicio de esta etapa por la inserción paulatina de los niños en la vida social de los adultos y no solamente a partir de los cambios fisiológicos de la pubertad como suele hacerse. Esto porque consideraron que si bien la maduración neurológica podría delimitar algunas posibilidades y condiciones iniciales que permitirían la evolución del sistema cognitivo en un medio físico y social donde se actualizarían estas posibilidades, es principalmente la acción e interacción de los individuos, que corresponde al funcionamiento propio de la inteligencia, lo que genera las transformaciones cognitivas que van darle al individuo adolescente o adulto herramientas más poderosas para ordenar su mundo subjetivo y lo real (Inhelder y Piaget, 1955).

En el modelo del desarrollo cognitivo de Piaget, el pensamiento formal es un logro tardío que muestra una mayor evolución del pensamiento lógico de la persona en relación a sus capacidades cognitivas previas. Es fundamental para el entendimiento y la solución de problemas complejos que implican la acción de diversos sistemas o dimensiones que interactúan en un acontecimiento, así como para el desarrollo de juicios sobre la realidad que sean más elaborados y críticos. Es condición necesaria pero no suficiente para el desarrollo del pensamiento científico, ya que este es una evolución que prolonga el pensamiento formal en mayores niveles de abstracción lógica y empírica debido a la necesidad de coherencia teórica y de verificación experimental que define la actividad científica como la conocemos actualmente (Beth y Piaget, 1968; Piaget y García, 1982/2008).

Es importante recordar que Piaget explica el desarrollo de conocimientos como un proceso de constante cambio (dialéctico) y mejora progresiva (equilibración), que describe una creciente apertura de posibilidades y de establecimiento de necesidades que dan lugar a la construcción de las estructuras más complejas del pensamiento. En esta perspectiva, la construcción del pensamiento formal se evidencia cuando el sujeto puede interactuar con lo real construyendo y considerando un conjunto ilimitado de posibilidades coordinadas, al mismo tiempo que se vuelve capaz de reelaborar y establecer indefinidamente necesidades lógicas que ha construido en el curso del desarrollo y que van a permitirle entender lo real de forma más organizada. Ambos aspectos están presentes en la actividad científica de los sujetos con pensamiento formal que, histórica y socialmente, han desarrollado las formalizaciones de los sistemas lógicos y matemáticos además de haber creado herramientas lo suficientemente complejas para abstraer datos empíricos del mundo que no pueden percibirse directamente, como en el caso de la física, química, biología y otras ciencias (Piaget, 1981/1987, 1986; Piaget y García, 1982/2008).

De manera más precisa, las manifestaciones fundamentales del pensamiento formal pueden observarse en comportamientos cognitivos generales como: el razonamiento proposicional e interproposicional, que manifiesta la capacidad para articular lógicamente un grupo indefinido de proposiciones; en el razonamiento hipotético-deductivo o la capacidad para razonar a partir de cualquier proposición para luego inferir sus valores de verdad; y en la operatividad a mayores niveles de abstracción que permite hacer operaciones sobre operaciones previas de forma ilimitada. Estos aspectos funcionales del pensamiento formal, están relacionados a un grupo de herramientas de organización llamadas *esquemas operatorios formales*, que se expresan en nociones lógicas como la de combinatoria, proporción, probabilidad, correlación, coordinación de sistemas de referencia, entre otras, que el sujeto construye y utiliza para resolver un amplio campo de problemas complejos. El modelo de Piaget plantea un sincronismo general en la formación de estas capacidades, pero considerándolas instrumentos posibles que van a mantenerse latentes hasta consolidarse en el transcurso de la adolescencia y adultez, cuando las interacciones con el medio y los intereses del individuo generen la necesidad de desplegarlas y/o coordinarlas (Piaget, 1972/2008; Moshman, 1977; White & Ferstenberg, 1978). A continuación se describe con mayor detalle la construcción del pensamiento formal, con la finalidad de entender mejor los procesos y esquemas que lo caracterizan.

Formación del sistema de conjunto del pensamiento formal

Según Piaget e Inhelder (1955, 1972/2008), el pensamiento formal es posible debido a la formación de un sistema de conjunto superior a las organizaciones del pensamiento operatorio concreto, construido por el niño en la etapa previa, cuando muestra una serie de capacidades lógicas básicas (como por ejemplo, la noción de número, longitud, peso, volumen y las operaciones aditivas y multiplicativas de clasificación o establecimiento de relaciones) que le permiten organizar diversos aspectos de lo real. Específicamente, al final de la etapa de las operaciones concretas el niño tiene a su disposición dos grandes sistemas operatorios diferenciados pero desarticulados: el de clasificación y de relaciones u ordenamientos (Piaget, 1967). Ambos están caracterizados por posibilitar operaciones *reversibles*, es decir, que pueden efectuarse en sentido contrario, permitiendo una consideración adecuada del proceso o transformación que caracteriza una acción o suceso y no solo la percepción de sus condiciones iniciales y resultados. Esta *reversibilidad*, además, define el nivel de equilibrio[*] de estas construcciones.

Por un lado, al sistema de clasificación le corresponde una reversibilidad por *inversión* o *negación* que anula la operación efectuada: si $A + A' = B$, podría hacerse $B – A = A'$. Por otro lado, al sistema de relaciones le corresponde una reversibilidad por *reciprocidad* que neutraliza, iguala o compensa la operación realizada: si $A < B$, podría aumentarse A hasta que $A = B$. Sin embargo, ambas estructuras y sus reversibilidades están desarticuladas y exhiben una serie de limitaciones en las organizaciones posibles de la realidad. Cuando un niño interactúa con el ambiente, la herramienta más compleja que tiene para organizar los fenómenos es la operación multiplicativa (de clasificación o de correspondencias) y esto le sirve muy bien para adaptarse y resolver problemas ante situaciones cotidianas (Piaget, 1976). Pero cuando los fenómenos se tornan más complejos e invocan varios niveles de organización como causas interactuando, la operación multiplicativa no es suficiente y solo incrementa los resultados de las operaciones, pudiendo incrementar las contradicciones. Ante esto, los procesos

[*]El equilibrio en el modelo de Piaget (1969, 1978, 2006) se entiende como momentos o fases del desarrollo en las que se ha logrado una estabilidad relativa a las relaciones del sistema. Son estados específicos del proceso general de equilibración, dado por mecanismos de asimilación y acomodación, que definen la tendencia general del desarrollo cognitivo hacia lograr mejores formas de conocimiento.

equilibradores que caracterizan la evolución del conocimiento, integran las estructuras operatorias concretas que posee el niño, en un solo sistema con *doble reversibilidad* y por lo tanto con un equilibrio más estable y dinámico al mismo tiempo (Piaget, 1978). Esta construcción puede analizarse desde dos perspectivas complementarias e indisociables.

Funcionalmente, observando el comportamiento experimental del sujeto o atendiendo a los resultados del uso de sus operaciones ante un problema complejo, ocurre una *disociación formal de los factores*: en lugar de usar la operación multiplicativa, el pensamiento invierte el sentido de la operación haciendo *abstracción* de los niveles de organización, los elementos y relaciones que involucra un acontecimiento específico. Luego, para conocer los efectos posibles de cada factor, sus elementos se organizan y combinan mediante *neutralizaciones* y *variaciones* sistemáticas posibles, siguiendo un procedimiento similar al de "cambiar un valor dejando todos los demás sin cambiar". Mientras que en la etapa de las operaciones concretas el niño puede combinar factores aislándolos para ver el efecto que tienen, al inicio de la construcción de las operaciones formales los factores también pueden *neutralizarse* (cuando no pueden aislarse) y no solo para observar el efecto que tienen, sino para observar simultáneamente el efecto que generan las variaciones de los otros. Esto marca el aspecto funcional de la coordinación de las operaciones de clasificación y de establecimiento de relaciones en un solo sistema (Inhelder y Piaget, 1955).

Estructuralmente o centrando la atención en las operaciones mismas y sus coordinaciones, la construcción del pensamiento formal implica la creación de un *conjunto de las partes*. Si tomamos como ejemplo una matriz multiplicativa de dos o tres entradas (que el operador concreto puede construir con mayor o menor facilidad), se pueden generar asociaciones de base que luego van a combinarse de todas las formas posibles debido a una *generalización* de la operación aditiva (sustituciones y adjunciones) sobre las asociaciones multiplicativas simples de la matriz. En la figura A, se observa que dados dos elementos (A y B) y sus complementarios (A' y B') pueden formarse cuatro asociaciones de base que formalmente pueden combinarse en dieciséis grupos posibles que constituyen un *conjunto de las partes* y, en este caso, un retículo similar al de las operaciones de la lógica binaria o proposicional. Lo que ocurre entonces, puede entenderse como una reorganización, integración y superación de las operaciones aditivas y multiplicativas de la etapa anterior (Inhelder y Piaget, 1955; Shin & Steffe, 2009)

	B	B'
A	AB	AB'
A'	A'B	A'B'

1 = AB
2 = AB'
3 = A'B
4 = A'B'

Ø
1, 2, 3, 4
1+2, 1+3, 1+4, 2+3, 2+4, 3+4
1+2+3, 1+2+4, 1+3+4, 2+3+4
1+2+3+4

Figura 1. Ejemplo de construcción del conjunto de la partes

Ahora, este "conjunto de las partes" está vinculado por las propiedades del grupo de las cuatro transformaciones INRC o grupo de Klein, que es otra estructura esencial que define el pensamiento formal. Este grupo coordina las dos reversibilidades y permite que a cada operación posible (Identidad), le corresponda una operación inversa (Negación) que la anula, otra operación inversa en otro sistema de referencia que la compensa o neutraliza (Recíproca), y una operación en el segundo sistema de referencia que anula y compensa las dos inversiones en relación a la primera operación (Correlativa). Además, estas operaciones están vinculadas de tal manera que cuando una no puede efectuarse, la combinación de las otras puede generar resultados similares. Sólo para citar algunos ejemplos, ocurre que N = RC porque la reciproca tiene una relación de reversibilidad por negación con la correlativa y R = CN porque la operación correlativa tiene una relación de reversibilidad por neutralización o compensación con la operación negativa; de esto puede inferirse que C = NR porque la operación correlativa es una doble reversibilidad o inversión y finalmente, se tiene que I = NRC porque las dos inversiones en conjunción con su doble reversibilidad implican el retorno a la operación idéntica (Inhelder y Piaget, 1955).

Estas son las características principales de la construcción del pensamiento formal, de la formación del sistema combinatorio que generará el universo de posibilidades operatorias y necesidades lógicas que complejizarán y darán mayor autonomía al entendimiento y a la interacción que los adolescentes y adultos tiene sobre el mundo (Piaget, 1970, 1973). A continuación, se desarrollará específicamente lo relacionado al esquema operatorio formal de combinatoria, que se ha elegido como objeto de investigación por ser una de las primeras manifestaciones de los inicios del pensamiento formal.

Esquema operatorio formal de combinatoria

Mientras que la síntesis del sistema combinatorio y el grupo INRC pude ubicarse en el núcleo de las organizaciones del pensamiento formal generando operaciones posibles, la operación combinatoria propiamente dicha, se despliega para *enumerar* o *listar* todos los grupos posibles que pueden formarse dados ciertos elementos y condiciones en un problema (Vilenkin, 1972; Grimaldi, 1997). Esta *enumeración* (listado o conteo) tiene un carácter sistemático general que, en diferentes medidas, es propio aunque no exclusivo del pensador formal (Danner & Day, 1977; Martorano, 1977). Este carácter sistemático puede entenderse como un procedimiento regulador más avanzado (Piaget, 1981/1987) que se despliega para controlar posibles errores por repetición u omisión de grupos posibles y para que se facilite la verificación de los mismos (Lyn English, 1991, 1993).

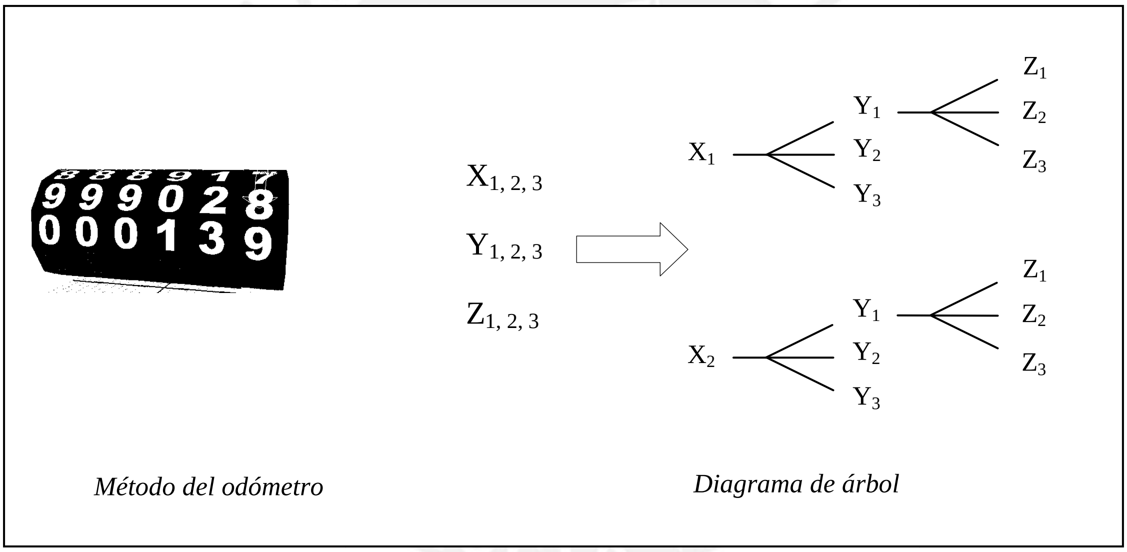


Figura 2. Ejemplos de la neutralización-variación formal de factores. El primer grafico alude a un mecanismo (como el que tienen las cadenas de seguridad para bicicletas) que permite generar combinaciones de diversos números, mediante la fijación y variación ordenada de sus valores. El segundo gráfico es una esquematización que alude a las ramas de un árbol y que describe las posibilidades para combinar tres variables y sus valores.

En general y de forma similar al sistema de conjunto del pensamiento formal, la operación combinatoria implica la construcción de un conjunto de partes mediante una disociación de factores por abstracciones y neutralizaciones-variaciones (Inhelder y Piaget, 1955; Barratt, 1975; Allaire-Dagenais, 1984). Dos buenos ejemplos de métodos para la solución de problemas de combinatoria que tienen a la base esta característica, son los diagramas de árbol o las estrategias tipo odómetro esquematizadas en la figura B (Lyn English, 1991, 1993).

Específicamente, el esquema de combinatoria puede tener dos aspectos: uno lógico y otro matemático. Si bien ambos tienen en común la estructura del sistema combinatorio y el grupo INRC, la *combinatoria lógica* está más vinculada a la acción debido a su naturaleza cualitativa más próxima a las propiedades de los objetos y de la propia acción e interacción. En cambio, la *combinatoria matemática* se despliega en mayores niveles de abstracción lógica y en la coordinación de las operaciones, para poder cuantificar los resultados y generalizar el uso de las nuevas operaciones a diferentes dominios. Es importante mencionar que este tipo de distinciones, entre un aspecto lógico y otro matemático en una operación, se establecen desde la génesis de la cuantificación con la construcción de la noción de número debido a la síntesis de las estructuras de clasificación y seriación (Inhelder y Piaget, 1955; Piaget, 1975). La capacidad combinatoria lógica puede observarse con relativa facilidad en diversas situaciones experimentales en las que se plantean situaciones que están en función de varios factores que interactúan como causas, mientras que la combinatoria matemática, axiomatizada por la matemática discreta, se extiende en los dominios más abstractos de la actividad matemática (Vilenkin, 1972; Grimaldi, 1997). En este estudio solo se hará referencia a algunos algoritmos de combinatoria enumerativa, contenido que se introduce en el sistema educativo desde el nivel secundario.

Una investigación inspirada en los trabajos de Dubois (1984, en Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997), consideró dos niveles para clasificar la combinatoria matemática: la operación propiamente dicha y el modelo implícito del problema. En relación a la operación, los aspectos más básicos que pueden considerarse en una combinatoria matemática simple, podrían ser: la formación de grupos ordenados o no ordenados, la selección de todos los elementos o de una muestra (*m*) de una población (*n*) y la posibilidad de que los elementos puedan o no repetirse al interior de los grupos. Si se tratara de formar grupos ordenados con todos los elementos dados, la operación correspondiente es la de *permutaciones*, que son cambios de posición o arreglos posibles de los elementos de un problema. Estos grupos posibles pueden calcularse mediante el factorial del número total de elementos [P_n = n! = (n) (n-1) (n-2)… 2.1]. Cuando se escogen menos elementos que los del total, los *arreglos* posibles de *n* elementos tomados de *m* en *m*, se calculan abstrayendo a las permutaciones posibles de todos los elementos, las permutaciones de los que no se han escogido [A_n^m = n! / (n-m)!]. Pero si los elementos de estos *arreglos* posibles pueden repetirse, a cada elemento dentro del grupo le va a corresponder el número total de elementos posibles, por lo que se multiplica el número de valores posibles que puede tener cada elemento del grupo [$AR_n^m = n^m = n \times n \times n...$ m veces]. Ahora, para calcular las posibilidades en la formación de grupos no ordenados, la operación a efectuar es la de *combinaciones*. En su versión simple, esta se calcula abstrayendo a los arreglos posibles de elementos que no se repiten, las permutaciones posibles de los que se han seleccionado (*m*) en conjunción con las permutaciones posibles de los no seleccionados (*n – m*) [$C_n^m = n! / m!(n-m)!$]. Esto porque una permutación es un cambio en el orden y en el caso de las combinaciones, el orden se abstrae. Estos ejemplos no agotan todas las variantes de la combinatoria matemática, ya que pueden incluirse otros elementos y parámetros en la formación o construcción de los grupos (Vilenkin, 1972; Grimaldi, 1997). Además, los problemas pueden complejizarse debido al modelo implícito que implican: por ejemplo, estos modelos pueden ser de *selección* (muestreo), *distribución* (mapeo, asignación) o *partición* (divisiones de un conjunto en subconjuntos) (Dubois, 1984, en Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997).

La distinción entre combinatoria lógica y matemática es de suma importancia en varios sentidos. Por un lado, implica que el despliegue y la toma de conciencia de la combinatoria lógica por parte del sujeto, podrían facilitarse si se considerara su mayor vinculación con la acción directamente constatable. En comparación, los niveles de abstracción en los que se efectúa la combinatoria matemática podrían dificultar el desempeño y la toma de conciencia del estudiante. Aunque Piaget menciona que aspectos generales de los algoritmos matemáticos para calcular las posibilidades de un problema ya pueden observarse y deducirse a partir de algunos procedimientos que usan los participantes adolescentes en este tipo de tareas[*] (Piaget, 1951), la distinción entre combinatoria lógica y matemática podría plantearse como un criterio importante para el diseño de tareas de investigación. Esta distinción brinda un punto de referencia para el investigador, pues evaluar una capacidad a través de problemas que remitan a la acción espontánea (como hacía Piaget), es diferente a evaluar esta capacidad con problemas más abstractos y es mucho más diferente a evaluar una destreza específica del razonamiento matemático.

Esto cobra sentido cuando se observa que distintas investigaciones sobre este tema, parecen no considerar aspectos teóricos y metodológicos importantes en el

[*] Generalmente provocados por la técnica y sin que estos recuerden la fórmula específica o sean conscientes de su uso.

modelo piagetano (Lorenzo & Machado, 1996). Algunas investigaciones han opuesto sus interpretaciones a los estudios de Piaget, mostrando que la noción o capacidad combinatoria no es exclusiva de los adolescentes porque puede apreciarse en niños (dadas la condiciones necesarias) y que no todos los adolescentes o adultos llegan a desarrollarla porque esto depende también del entrenamiento, instrucción o de factores educativos, de género y culturales (Youniss & Dean, 1974; Kuhn & Agelev, 1976; Scardamalia, 1977; Nagy & Griffiths, 1982; White, 1983, 1984; Lyn English, 1991, 1993); aunque también pueden encontrarse investigaciones que no encuentran diferencias en estos aspectos (Douglas & Wong, 1977; Mwamwenda, 1990, 1993). Sin embargo, si se consideran los aportes de la investigaciones de Piaget de forma integrada como totalidad, es decir, si se comprende la solidaridad y articulación implícita entre el nivel de los hallazgos (material empírico provisto por lo que él denominó *Psicología Genética*) y el nivel de las interpretaciones (teorizaciones para la creación de una teoría general del conocimiento que denominó *Epistemología Genética*), las contradicciones que aparentemente generan otras investigaciones pueden superarse con relativa facilidad (García, 2000).

En ningún punto clave, el modelo teórico asume como imposible que niños o niñas en una etapa previa a las operaciones formales puedan resolver problemas de combinatoria. Si el nivel de abstracción que requiere la tarea no es tan complejo y si el número de factores a combinar no es muy grande, se podrían resolver adecuadamente estos problemas usando solamente las herramientas lógicas multiplicativas que se desarrollan en la etapa del pensamiento operatorio concreto (Inhelder y Piaget, 1955). Además, no debe perderse de vista la importante distinción que subyace entre la maduración cronológica de la niñez a la pubertad, erróneamente asociada a los estadios del desarrollo cognitivo debido a una comprensión restringida y estática de las fronteras entre estos, y la dinámica propia del desarrollo cognitivo con sus mecanismos y procesos constructivos (Smith; notas y comentarios en Piaget, 2006). Tener en cuenta que la adolescencia se va dando por la inserción paulatina de las personas en los problemas complejos del mundo adulto, plantea la necesidad de considerar en qué medida un niño o un púber han tenido la oportunidad empezar a interactuar apropiadamente con situaciones que pueden interpretarse como pertenecientes al mundo del adulto. En esta línea, la poca experiencia en situaciones de investigación por parte del participante y las diversas aproximaciones o técnicas de investigación también pueden ser aspectos importantes que influyen en el desempeño y deben revisarse.

Varias de las investigaciones referidas incluyen fases de entrenamiento y práctica previa con tareas menos complicadas, además de modalidades en sus diseños, que de inicio marcan diferencias importantes con los estudios de Piaget, que buscan responder a preguntas epistemológicas por medio de la investigación psicológica (García, 2000). En contraste, existen estudios que muestran que un ejercicio o intervención focalizada en aspectos como la consideración de lo posible y lo sistemático, puede brindar experiencias más enriquecedoras a los participantes para que exhiban y avancen en el desarrollo del pensamiento formal (Rosenthal, 1979, Lyn English, 1991, 1993). Estos aspectos, más próximos al modelo piagetano, son poco o nada usuales en los contextos de educación formal y no formal, que más bien promueven la practica o enteramiento mecánico en el aprendizaje. Por ejemplo, otras investigaciones se han orientado a tratar los errores comunes que pueden observarse en los intentos de solución de problemas de combinatoria matemática, aunque también podrían extenderse a problemas de combinatoria lógica. En general estos errores están relacionados a consideraciones fallidas sobre la estructura, los elementos y parámetros de los problemas (Hadar & Haddas, 1981; Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997). Otro estudio muestra lo limitada que resulta la intuición inmediata para resolver problemas de combinatoria, pues éstas *reducen* los esquemas formales a sus versiones más primitivas o constreñidas (Fischbein & Grossman, 1997). Lo interesante de estas investigaciones es que sus conceptos, métodos y resultados, aunque distintos a los de la investigación piagetana, pueden extrapolarse y aportar a un trabajo orientado al reconocimiento del error y de procedimientos autorreguladores más avanzados que faciliten el desarrollo y uso consciente de las herramientas más complejas del pensamiento. Como ha mostrado Piaget (1981), esta toma de consciencia es un proceso progresivo que parte de la acción efectiva o la periferia del sistema cognitivo y busca la conceptualización de operaciones que se mantienen en los dominios no conscientes de la mente.

Esto último es de suma importancia no solo para el trabajo de investigación teórica, sino que genera un enlace necesario con la labor psicopedagógica. La mayoría de estudios (obviando las principales diferencias) parece considerar que el desarrollo de la capacidad combinatoria es vital para la evolución del pensamiento, ya que lejos de limitarse al campo del aprendizaje de la matemática, las posibilidades que abre al comportamiento lógico se prolongan a muchos campos de la acción e interacción cotidiana y académica (Kapur, 1970; Vilenkin, 1972). En sí, la capacidad combinatoria posibilita y promueve el pensamiento sistemático, la consideración explicita de las posibilidades, la generalización reflexiva de procedimientos (heurísticos, algoritmos), la optimización de métodos de registro o listado, la necesidad de verificaciones exhaustivas, el razonamiento proposicional e hipotético-deductivo, entre otras capacidades fundamentales que permiten un mejor entendimiento del mundo. Además, el desarrollo apropiado de esta herramienta condiciona positivamente un mejor entendimiento, planteamiento y resolución de los distintos problemas que se generan en la actividad de las diversas disciplinas científicas (Piaget y García, 1982/2008). De esta manera, la importancia de esta cuestión también se extiende a la formación superior y al análisis crítico de sus modalidades.

Por todo lo dicho, el presente estudio tiene como objetivo principal evaluar el esquema operatorio formal de combinatoria en estudiantes universitarios que se encuentran en sus primeros años de formación. La pregunta que guía esta investigación es si estos alumnos exhiben las principales características de la formación del sistema combinatorio y del grupo INRC, cuando resuelven problemas de combinatoria experimental, lógica y matemática.

En el contexto hispano hablante, algunos estudios del pensamiento formal y específicamente sobre combinatoria pueden encontrarse en países como España (Acevedo y Romero, 1992; Acevedo y Oliva, 1995; Roa, Batanero, Godino, 2001; Aguilar, Navarro, López, Alcalde, 2002), Argentina (Antoni y Quaglino, 2001; Vázquez y Difabio de Anglat, 2009;), Perú (Escurra, Delgado, Quesada, Rivas, Santos, Pequeña, 1991; Frisancho, 1996), Brasil (Ferrari de Zamorano, 1991; Scalon, Osti y Brenelli, 2012), Ecuador (Pinargote, 2010) y México (Hernández, 2008). Todos indagan en diversas capacidades de pensamiento formal, incluido el razonamiento combinatorio. Sin embargo, la mayoría presenta las mismas limitaciones metodológicas que sus contrapartes europeas y norteamericanas, al usar técnicas de naturaleza psicométricas y administraciones colectivas de papel y lápiz, asumiendo la necesidad de realizar un procesamiento y análisis del material empírico mediante la validación estadística. Esto no puede calificarse como incorrecto pero sí resulta limitante, ya que el panorama general de resultados variables (que dan menor o mayor soporte a los descubrimientos de Piaget) está condicionado por una desarticulación entre los conceptos, las técnicas de recolección de los datos y la interpretación de los mismos (García, 2000, 2006).

Ahora, situando la problemática en el contexto social inmediato de esta investigación, vemos que el diseño curricular nacional peruano para la educación básica regular (DCN, 2009), tiene como objetivo curricular que los estudiantes entre el segundo y tercer grado de secundaria desarrollen una capacidad combinatoria básica, ya que en este periodo se enseñan las operaciones combinatorias más elementales (permutaciones, arreglos y combinaciones), mientras que en cuarto y quinto de secundaria se enseñan inclusive nociones combinatorias más complejas (como la de recursividad lineal, ecuaciones recursivas simples y complejas, entre otras). Sin embargo, los resultados obtenidos en las evaluaciones internacionales sobre el pensamiento matemático y científico en adolescentes escolares son muy precarios (PISA, 2009) y a esto deben sumarse los problemas administrativos y pedagógicos, cada vez más evidentes, que tiene la institución universitaria para formar buenos científicos que interactúen efectivamente para la solución de los problemas que aquejan a la sociedad (García, 2006, 2009).

En este sentido, un objetivo secundario de esta investigación preliminar es criticar y complementar los estudios latinoamericanos referidos, así como iniciar una toma de conciencia acerca de esta importante herramienta de conocimiento que es la capacidad combinatoria. El alcance del mismo, definido por las discusiones que genere a partir de su difusión, puede aportar para el desarrollo de políticas psicopedagógicas en el contexto universitario. Es importante que los docentes puedan conocer, dominar y llevar a su práctica pedagógica el ejercicio consciente de esta capacidad en diversos dominios del conocimiento, ya que si bien esta puede desarrollarse natural y socialmente por la sola interacción en un medio académico que suscite problemas que implican el uso del pensamiento formal y científico (Hudak & Anderson, 1990), un mayor y mejor dominio de esta estructura de pensamiento, que permita su despliegue innovador y creativo para la solución de problemas, solo puede alcanzarse por medio de una formación adecuada (Vilenkin, 1972).

Finalmente, se ha plantea como hipótesis de trabajo que la mayoría de estos estudiantes exhibirá los aspectos principales de la capacidad combinatoria (por el hecho de estar expuestos a la interacción académica superior), aunque no necesariamente de forma consciente y con un dominio claro de esta herramienta. A continuación se presenta el método de trabajo inspirado en el método clínico-crítico desarrollado por Piaget. En general este método consiste en plantear tareas o problemas que tenga a la base la estructura lógica de pensamiento que se busca evaluar mediante la observación de la acción espontánea, los procedimientos, estrategias y cuestionamientos del participante. Lo característico es que no sólo se recopila lo observado antes de la respuesta al problema, sino que a partir de esta se busca generar nuevas situaciones o problemas expresados en hipótesis y nuevos cuestionamientos debido a variaciones en los elementos y condiciones de la tarea. Además, siempre se piden y recogen las explicaciones y justificaciones de los participantes, con el objetivo de reconstruir el proceso de razonamiento que los llevó a dar sus respuestas particulares (Smith, 1993, García, 2000; Ducret, 2004, Morgado y Parrat, 2006).

Método

Participantes

La muestra estuvo conformada por 12 estudiantes de una universidad privada de la ciudad de Lima. Sus edades oscilan entre 16 y 20 años. Todos cursan los dos primeros años de formación multidisciplinar en las facultades de estudios generales. Como se aprecia en la Tabla 1, la muestra se agrupa según la facultad y sexo de los participantes (50% hombres, 50% mujeres; 50% estudiantes de letras, 50% estudiantes de ciencias).

La selección de los participantes fue accidental, se llevó a cabo a través del contacto directo en el campus universitario o mediante el contacto a través de otras personas que conocían a los participantes. Los criterios de selección fueron la disponibilidad de los participantes por un mínimo de una hora y que se encuentren dentro de los dos primeros años de formación. A cada uno se le explicó los aspectos generales de la investigación y la modalidad de participación y se le entregó un consentimiento informado que debían firmar antes de participar. Principalmente, se les dijo que tenían que resolver algunas tareas y contestar algunas preguntas sobre lo que hicieran.

Tabla 1.

Número de participantes según facultad y sexo

Letras		Ciencias		
Masculino	Femenino	Masculino	Femenino	Total
3	3	3	3	12

Materiales y Procedimiento

En lo que respecta a los instrumentos de la investigación, se consideraron tres grupos de tareas. El primero consta de dos ejercicios matemáticos de combinatoria: uno de arreglos con repeticiones (AR_n^m) y otro de combinaciones simples (C_n^m). El segundo grupo consiste en dos ejercicios con tarjetas para manipular, ordenar y combinar, cuya estructura matemática es la de arreglos con repeticiones (AR_n^m). El tercer grupo está formado por dos tareas utilizadas por Piaget en sus investigaciones: la de combinación de compuestos químicos incoloros (cuya estructura es la del conjunto de la partes o la del retículo de la dieciséis operaciones binarias) y la tarea de las rotaciones de 180º (que tiene como estructura el grupo las transformaciones del INRC).

Tareas 1 y 2: problemas matemáticos sobre combinatoria.

Se tomaron dos ejercicios matemáticos de combinatoria de la investigación de Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997), para evaluar el estado del esquema operatorio formal de combinatoria en su aspecto matemático. Específicamente, el primer problema es sobre arreglos con repetición y el segundo sobre combinaciones simples. Según la investigación original ambos tienen un nivel de dificultad medio.

Los materiales usados fueron: dos fichas rectangulares plastificadas (cada una con uno de los problemas), hojas de papel para que los participantes hagan las anotaciones respectivas, lápiz y borrador.

Problema 1

En una caja hay cuatro bolas numeradas (con 2, 4, 7 y 9, respectivamente). Debes sacar una de ellas y anotar el número que tiene, para luego devolverla a la caja. Tienes que repetir este proceso hasta que tengas anotado un número de tres dígitos. ¿Cuántos números posibles de tres dígitos puedes formar con estas cuatro bolas? Por ejemplo, podrías obtener el número 222.

Figura 3. Ficha con un problema de combinatoria (Variaciones)

Problema 2

Cinco alumnos Elisa, Fernando, Jorge, Lucía y María se ofrecieron como voluntarios para ayudar al profesor borrando la pizarra. ¿De cuántas formas distintas puede el profesor escoger a tres de sus estudiantes para que borren la pizarra? Por ejemplo, podría escoger a Elisa, María y Jorge.

Figura 4. Ficha con un problema de combinatoria (Combinaciones)

El procedimiento para la administración de estas dos tareas fue el siguiente:

1. Se dio al participante la ficha con el problema, una hoja en blanco, lápiz y borrador.

2. Se indicó que la tarea es resolver el problema usando la hoja en blanco que se le entregó para que haga sus apuntes. Luego, se le pidió que lea el problema

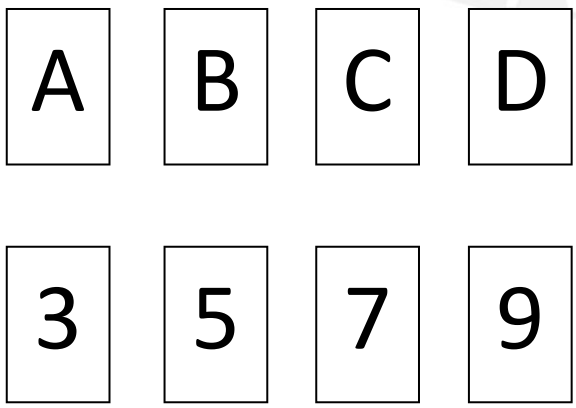
detenidamente. Se preguntó si entendió el problema. Si la respuesta era afirmativa se daba inicio a la tarea, en caso contrario, se leía el problema con el participante hasta que señalaba que había comprendido y se daba inicio a la tarea.

3. Se observó lo que hacía el participante hasta que terminaba y tenía una respuesta. De ahí en adelante las preguntas que orientaban la discusión eran: "¿A qué respuesta has llegado?" "¿Qué método has utilizado para resolver el problema? ¿Por qué?" y "¿Cómo podrías verificar que la solución y la forma de hacerlo fueron las correctas?". Algunas preguntas podían ser innecesarias si el participante daba respuestas que espontáneamente respondían a varias preguntas al mismo tiempo. Si estas respuestas no eran satisfactorias se repreguntaba o se contra sugestionaba, con el objetivo de que explique y justifique lo que había hecho.

Tarea 3: tarjetas con letras y números.

Se tomó esta tarea de la investigación realizada por Roberge y Flexer (1979) sobre el pensamiento formal, con el objetivo de evaluar el esquema operatorio de combinatoria a nivel de la acción (manipulación) y en su aspecto lógico. La estructura matemática de esta tarea es la de arreglos con repetición, al igual que el primer problema.

Los materiales usados fueron: cuatro tarjetas plastificadas con letras (A, B, C, D) por una de sus caras y números (3, 5, 7 ,9) por la otra cara, una hoja de respuestas en la que figuran veinte filas cada una con 4 casilleros (columnas) para que se registren los grupos posibles, lápiz y borrador.



Cara superior

Cara inferior

Figura 5. Tarjetas con letras y números

El procedimiento para administrar esta tarea fue el siguiente:

1. Se dijo al participante, "*Observa, aquí tenemos cuatro tarjetas*" y se fueron colocando una por una frente al participante. "*Cada tarjeta tiene una letra en una de sus caras y un número en la cara contraria*", se mostró esto volteando las tarjetas o dejando que el sujeto lo haga si eso deseaba. Luego, se entregó la hoja de respuestas.

2. Se continuó la consigna diciendo, "*Lo que voy a pedirte es que en esta hoja, en las filas (casilleros), escribas todos los distintos grupos de 4 elementos que puedes armar manipulando estas tarjetas*. *Para hacer esto, sólo puedes voltear las tarjetas, en su mismo lugar, sin alterar el orden en que están dispuestas*", se ejemplificaron los movimientos permitidos y prohibidos. "*Por ejemplo, ABCD es un grupo de 4 elementos, pero si volteas una carta así, ya tendrías otro. Considera que hay más casilleros de respuesta de los que necesitarás para terminar la tarea*". Se preguntó si la tarea había sido comprendida antes de dar inicio.

3. La discusión posterior a la tarea, procedió de la misma forma que en las tareas anteriores.

Tarea 4: tarjetas para combinar.

Se extrajo esta tarea de la investigación de Scardamalia (1977) sobre el pensamiento combinatorio, para evaluar el esquema operatorio de combinatoria en el nivel de la acción y su aspecto lógico. La estructura matemática de la tarea es la misma que la tarea anterior (arreglos con repetición). A diferencia de la investigación de Scardamalia, no se consideraron fases de entrenamiento, sino que se buscó la solución espontánea utilizando solo 3 grupos de tarjetas y 3 valores para cada grupo.

Los materiales utilizados fueron 20 tarjetas plastificadas (5 de colores, 5 con líneas bancas, 5 translucidas y con símbolos y 5 con formas geométricas caladas: 2 de cada grupo fueron tarjetas de ejemplo o apoyo), una hoja en blanco, lápiz y borrador.

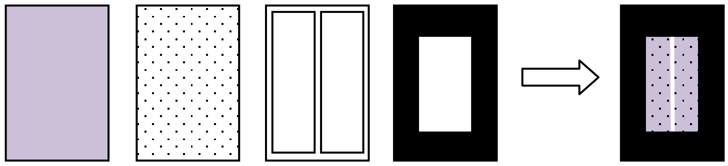


Figura 6. Tarjetas para combinar

El procedimiento para administrar la tarea fue el siguiente:

1. Se dijo al participante: “*Mira, aquí tengo este grupo de tarjetas de distintos tipos: de colores, translucidas con símbolos, con líneas blancas y negras con figuras geométricas. Observa con cuidado. Si tomo la tarjeta de color morado, esta con puntos, otra con una línea vertical y la negra que tiene un paralelogramo, las puedo sobreponer (juntar, mezclar, etc.) y formar una figura: un rectángulo vertical morado con puntos y una línea vertical que lo atraviesa*”. Se mostró cómo hacerlo (ver figura E).

2. Se dio la consigna diciendo: “*Lo que quiero que hagas en esta ocasión, es que me digas cuántas figuras distintas puedes armar manipulando estas tarjetas* [Se entregaron tres tarjetas de color, tres tarjetas con símbolos, tres tarjetas con líneas y tres tarjetas negras con figuras geométricas]. *Considera que para armar una figura siempre debes tener contigo 4 tarjetas, solo una de cada tipo, así como te mostré al inicio*”. Se preguntó si la tarea fue comprendida. Si la respuesta era negativa, se volvía al ejemplo inicial y se mostraba alguna variación de uno de los elementos. Se volvía a preguntar si la tarea había sido comprendida y se daba inicio a la actividad. Se esperaba que el participante espontáneamente requiera una hoja en blanco. Si se observaban dificultades en la marcha y este no había pedido una, se le ofrecía.

3. La discusión posterior a la tarea, procedió de la misma forma que en las tareas anteriores.

Tarea 5: combinación de compuesto químicos incoloros.

Esta tarea forma parte del grupo de experimentos usados por Inhelder y Piaget en su libro *De la lógica del Niño a la Lógica del Adolescente* (1955/1985). Principalmente la tarea evalúa la combinatoria experimental y la del reticulado de las dieciséis operaciones binarias en la forma de razonamiento proposicional.

Inicialmente se buscó replicar el experimento original, pero debido a factores ambientales y circunstanciales la naturaleza del experimento se vio afectada por reacciones químicas imprevistas, que no se mencionan en la investigación de referencia. Originalmente se usaron como materiales: cuatro frascos graduados tipo Schott, un matraz Erlenmeyer, tres vasos de precipitación, una piseta y pipetas de plástico. Los insumos fueron los originales del experimento (agua, agua oxigenada, tiosulfato de sodio y yoduro de potasio) con la excepción del reemplazo de ácido sulfúrico diluido por vinagre blanco, debido a que el primero es un insumo controlado y de peligrosa manipulación.

La consigna principal de la tarea indicaba obtener un líquido de color amarillo a partir de la combinación de líquidos incoloros. Para hacer esto era necesario combinar el frasco 1 con vinagre blanco (que funciona como medio ácido), el frasco 3 que contenía agua oxigenada (que es un agente oxidante) y el frasco "g" con yoduro de potasio (que es el agente oxidado por el agua oxigenada en el medio ácido). La dificultad que se enfrentó fue que en este medio sólo bastaba con el agua oxigenada (3) y el yoduro de potasio (g) para obtener el color líquido de color amarillo. Esto alteraba la lógica de la tarea que era descubrir la combinación necesaria de solo dos de los cuatro frascos. Por esta razón, se optó por elaborar un programa virtual que replicara la lógica de la tarea piagetiana. Se procuró que las imágenes y las acciones que realizará el participante con el programa fueran similares a los materiales y a las acciones que se hubiesen observado y realizado en la tarea original. Además, se programaron una serie de indicadores de cambio para darle mayor naturalidad a la tarea.

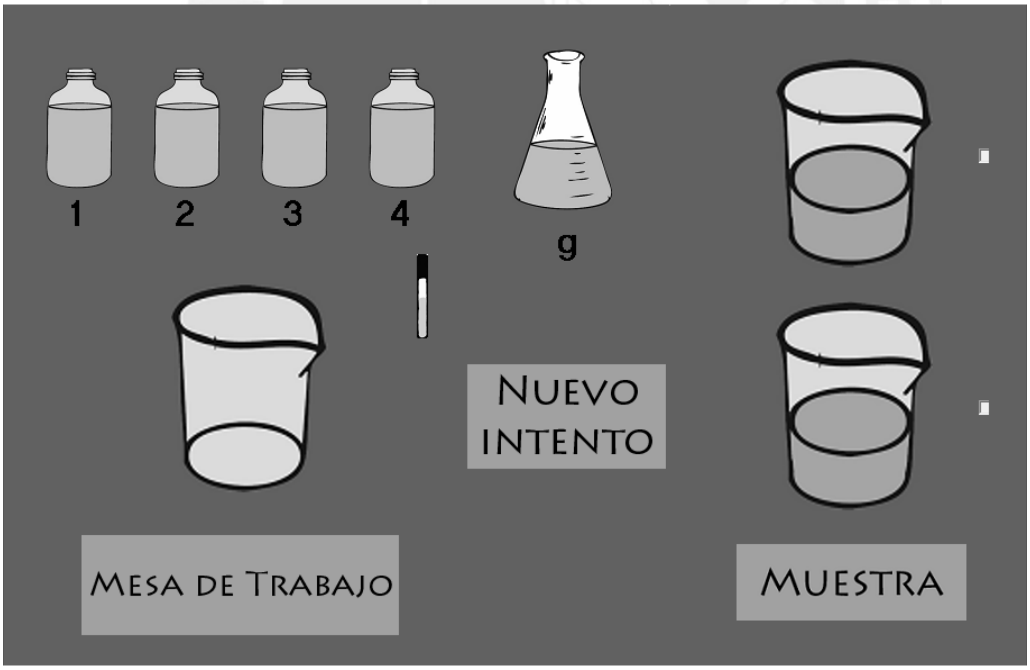


Figura 7. Interface del programa de combinación de químicos

El procedimiento para administrar esta tarea fue el siguiente.

1. Se mostró al participante la pantalla con el programa describiendo los objetos en ella, diciendo: "*Observa estos frascos en la parte superior* [se señalaba el punto con

cursor]. *Cada uno tiene líquidos transparentes y quiero que asumas que cada uno es distinto del otro (es decir, 1 ≠ 2 ≠ 3 ≠ 4 ≠ g)*".

2. Se continuó con la descripción y se presentó el ejemplo diciendo: "*Ahora, quiero que observes los vasos de la parte derecha. Están llenos con algunos de los líquidos que te mostré. Lo que voy a hacer es echar un poco del líquido g en estos y quiero que observes atentamente lo que pasa*". Se realizó la acción explicando que para pasar un líquido de un vaso a otro tenía que hacerse clic sobre la imagen inicial y no dejar de presionar para que aparezca el gotero lleno; luego tenía que llevarse el gotero lleno al interior de la imagen de destino para que el programa registre el paso de un líquido de un frasco a otro. El resultado era que el vaso de arriba cambiaba de color y el de abajo no.

3. Luego, se dio la consigna de la tarea diciendo: "*Ahora, quiero que obtengas el color del vaso de arriba en este vaso de trabajo, usando como quieras estos 4 frascos y g. Cada vez que quieras intentarlo nuevamente debes hacer clic en el cuadro que dice 'nuevo intento' y el vaso de trabajo quedará vacío*". Se preguntó si había entendido la consigna. Si no, se volvía a explicar desde el inicio hasta que el participante señalaba haber comprendido. Si el rol del frasco "g" no quedaba claro, se recordaba lo hecho al principio resaltando el uso frasco. Si aún con estas indicación no se comprendía, se hacía explicita su función como componente esencial para que ocurra la reacción (cambio de color). Además, cualquier dificultad en el uso del programa fue atendida (por ejemplo, en caso de que no haya entendido cómo pasar los líquidos de un frasco a otro).

4. La discusión se llevó a cabo posteriormente al descubrimiento de los frascos que daban el color. La pregunta principal fue: "*Lo que quiero que me digas es cuáles son los frascos necesarios para obtener el color*. La segunda pregunta que orientaba esta discusión fue: "*Qué efecto o qué función tenía cada frasco*" (especialmente los frascos 2 y 4). En caso de que no lograra descubrir el color o la función de los vasos, se orientó preguntando cómo podría hacerlo de manera más organizada o cómo podría recordar lo que estaba haciendo. También podía contra sugestionarse al participante diciendo que otro compañero había descubierto que, por ejemplo, el frasco 2 no tenía efecto alguno en la aparición del color. La tarea terminaba cuando el participante no daba más respuestas o cuando estas eran satisfactorias. Es decir, cuando decían que 1 y 3 son necesarios, que 2 no hacía nada y que 4 no permitía que se forme el color.

Tarea 6: rotaciones de 180 grados.

Se extrajo esta tarea del grupo de experimentos que Jean Piaget y sus colaboradores utilizaron en su libro *Estudios sobre la Abstracción Reflexionante* (1977/1979). El objetivo principal de la tarea fue evaluar las abstracciones reflejas del grupo INRC, a través de un ejercicio que requiere realizar rotaciones de un objeto considerando dos sistemas de referencia simultáneamente. Las rotaciones son inversiones y en este caso se trata de dobles inversiones coordinadas posibles debido a que la tarea tiene la estructura del grupo de las cuatro transformaciones INRC.

Se elaboró una maqueta de madera rectangular de 33 centímetros de ancho por 58 centímetros de largo con un cerco o pared de 9 cm de altura que tiene dos aperturas en los lados. Al interior se hicieron tres compartimentos iguales que simulan cocheras. Además se utilizaron cuatro camiones de juguete y se elaboraron dos paralelepípedos de cartulina plastificada para que simulen el cargamento de los camiones. En estos se dibujaron cuadrados blancos y rojos organizados de tal forma que permitan diferenciar las partes superior, inferior, delantera y posterior de los poliedros. En la figura G se muestra un esquema de la maqueta y los materiales utilizados.

El procedimiento para la administración de la tarea fue el siguiente:

1. Se presentó al participante la maqueta explicándole que esta simula un almacén que tiene tres cocheras al interior. Además, se mostró que en cada una de estas cocheras hay camiones esperando el cargamento que traerá otro camión. Luego, se presentaron los poliedros de cartulina y se entregó uno al participante para que lo revise.

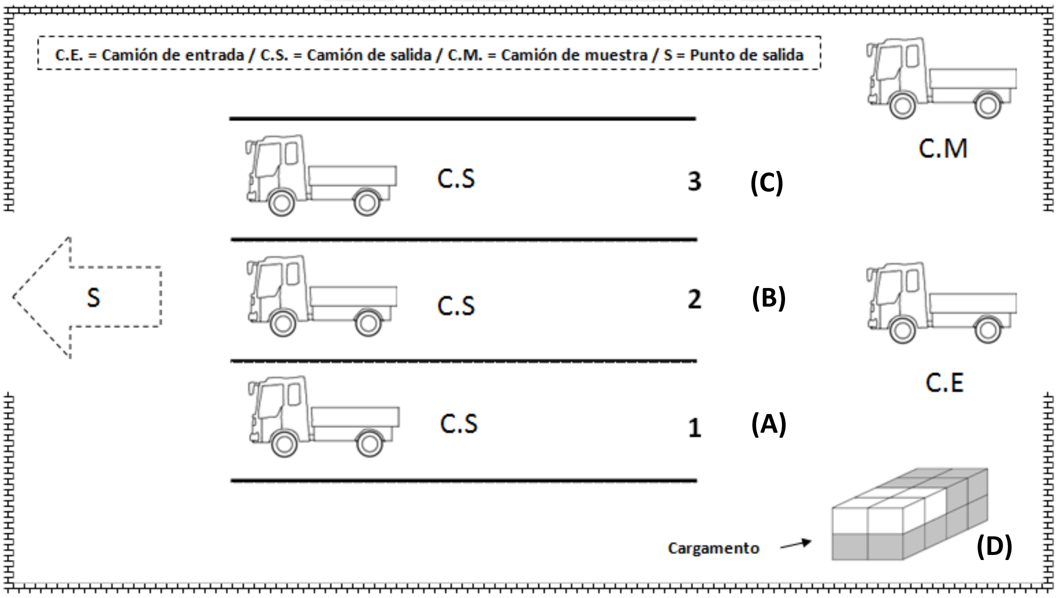


Figura 8. Esquema de los materiales utilizados

2. Luego, se explicó la tarea: "*Lo que necesito que hagas es que este camión que entra deje el cargamento en uno de estos camiones. Pero tienes que considerar lo siguiente: (i) el camión que entra siempre lo hace en reversa, (ii) cuando pasa por la cochera 1, el cargamento de desliza de esta forma* [se mostró cómo, asegurando que cuando el cargamento pase al otro camión, la parte delantera de este, que estaba en la misma dirección de la parte delantera del camión entrante, termine en dirección de la parte trasera del camión que saldrá: esto ejemplifica una rotación de 180º horizontal], *(iii) cuando pasa por esta cochera 2, el cargamento tiene que voltearse de esta forma* [en este caso se debía efectuar una rotación de 180º vertical de forma que la parte superior del poliedro, en relación el primer camión, pase a ser la parte inferior en relación al camión que sale] *y (iv) cuando pasa por la tercera cochera el cargamento debe trasladarse de esta forma para poder salir* [en este caso, se debía trasladar el poliedro haciendo una de las rotaciones y luego la otra, es decir, haciendo una doble rotación de 180º]. *Además, aquí tengo un camión y un cargamento extra que servirán de muestra para indicarte cómo quiero que termine el que usarás, al salir de las cocheras en cada descargue que necesite*".

3. Se preguntó al participante si había entendido la consigna y si la respuesta era afirmativa se iniciaba la tarea, de lo contrario se volvía a explicar todo o lo que no había quedado claro a criterio del participante. La primera tarea consistió en hacer que el participante use las cocheras una por una (es decir, se pedía que las transformaciones A, B o C), según las indicaciones y buscando dejar el cargamento como se indicaba en el camión de muestra; esto ayudaba a corroborar que había entendido la función y las rotaciones de cada cochera. La segunda tarea consistió en que el participante haga uso de dos cocheras, debido a que se cerraba una de ellas (que haga A, sin usar 1). Es decir, se mostraba cómo debía salir el cargamento, pero se le decía que la cochera que le permitía sacarlo en esa posición, estaba cerrada. Se esperaba a que el participante pregunte cómo podría hacerlo. No se daban respuestas inmediatas. El participante podía preguntar si estaba permitido usar las otras cocheras o pasar más de una vez por alguna de estas, a lo que el investigador debía responder afirmativamente. Si el participante no hacía estas preguntas, se orientaba con preguntas como "*¿Tienes que usar sólo esa cochera para sacar el cargamento en esa dirección?*", "*¿Podrías hacerlo de otra forma sin usar esa cochera?*", etc. La última tarea consistió en poner el cargamento en el carro de muestra igual a como estaba el cargamento a la hora de ingresar. Es decir, se le pedía

que el cargamento salga de la misma forma en la que entró (esto implicaba que haga las transformaciones A, B y C, usando todas las cocheras).

Para resolver estos problemas, el participante debía utilizar o combinar las cocheras que no estaban cerradas para dejar el poliedro en la misma posición que permitía la cochera cerrada. La lógica detrás de esto obedece al grupo INRC: la posición inicial del cargamento en el primer camión representa la transformación idéntica I (D) donde no hay ningún cambio, mientras que la cochera 1 efectúa la transformación inversa N (A) en relación a I, expresada en una rotación horizontal del cargamento. Por otro lado, la cochera 2 realiza una transformación recíproca R (B) que es una rotación de 180º pero vertical, mientras que la inversa de esta transformación reciproca y compensación de la transformación N, es la transformación correlativa C (C), expresada en una doble rotación. Un característica importante de este grupo es la relación lógica necesaria de sus transformaciones, donde N=RC, R=CN, C=NR y NRC=I. En la tarea esto puede expresarse de la misma forma: (i) cuando no puede usarse la primera cochera se puede pasar por las otras dos para obtener el mismo resultado, (ii) cuando no puede usarse la segunda se pueden utilizar la primera y la tercera, (iii) cuando no puede usarse la tercera pueden usarse la primera y la segunda, y (iv) si se utilizan las tres se devuelve el cargamento a la posición de entrada.

Registro y procesamiento de datos

La información recopilada de los participante durante la administración de la tareas es de tres tipos: las acciones u operaciones realizadas, las respuestas a los problemas y las explicaciones o justificaciones de lo que han hecho y de sus respuestas. Para esto se elaboró un esquema de registro de observación en el que pueden consignarse las respuestas, el procedimiento usado, el grado de sistematización y pueden hacerse anotaciones a modo de registro anecdótico. Además, se grabaron (en audio) todas las conversaciones con los participantes y se recogieron las hojas que usaron para hacer sus anotaciones. En el caso de la tarea de los químicos, se grabó lo que hicieron los participantes en la computadora para analizar mejor el proceso.

Resultados y Discusión

En esta sección se presentan los resultados y análisis de la investigación, divididos en tres partes. En primer lugar, se muestran datos individuales y globales acerca del desempeño de los participantes considerando como variables de agrupación, el sexo, la facultad y la tarea. En la segunda parte, se presenta una tabla con un conteo más detallado que cruza dos aspectos teóricos: el nivel de logro en la resolución de la tarea y el nivel de razonamiento en la explicación ofrecida sobre la resolución de la tarea. En la tercera parte, usando los conceptos de la teoría, se detallan varios casos o ejemplos por cada tarea. Finalmente, esta información se integra y se discuten las implicaciones teóricas referidas a este tema.

Un panorama general del desempeño de los participantes a través de las tareas propuestas, se presenta en las tablas 2 y 3. Estas muestran un conteo simple de los participantes que lograron resolver las tareas y los que no lograron hacerlo, según facultad y sexo (tabla 1), y según la tarea (tabla 2).

Tabla 2.

Cantidad de desaciertos y aciertos según facultad y sexo

Respuesta	Letras		Ciencias		Total (71)
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	
Resuelve la tarea	12	12	11	12	47
No resuelve la tarea	6	6	7	5	24

Como se observa en la tabla 1, más de la mitad (47) de un total de 71* respuestas dadas ante los problemas de combinatoria planteados, son aciertos. No se observa gran diferencia en la cantidad de aciertos entre hombres y mujeres en la facultad de letras, mientras que la cantidad de aciertos es ligeramente mayor en las mujeres de ciencias.

En la tabla 3, las tareas 2, 4, 5 y 6 muestran un mayor número de participantes que lograron resolver correctamente los problemas, mientras que en las tareas 1 y 2 el número de participantes que falla o acierta es el mismo.

* El total de respuestas sobre problemas de combinatoria debería ser 72 [Nº de tareas (6) x Nº de participantes (12)]. Luego de la eliminación del caso 12 en la tarea 5 (Combinación de químicos), debido a negligencias metodológicas, el total considerado para hacer los conteos pasó a ser 71.

Tabla 3.

Cantidad de aciertos a través de las tareas de investigación según participantes, sexo y facultad

		Tarea						
Participante	Sexo/Facultad	1	2	3	4	5	6	Total
(6) CAM	F/Letras	✓	✓	✓	✓	✓	✓	6/6
(9) DIE	M/Ciencias	✓	✓	✓	✓	✓	✓	6/6
(2) EMI	M/Letras	✓	×	✓	✓	✓	✓	5/6
(5) ALO	M/Letras	×	✓	✓	✓	✓	✓	5/6
(10) LIL	F/Ciencias	✓	✓	×	✓	✓	✓	5/6
(4) FRE	M/Ciencias	✓	×	✓	×	✓	✓	4/6
(11) ANG	F/Ciencias	×	✓	×	✓	✓	✓	4/6
(1) ADRI	F/Letras	×	×	×	✓	✓	✓	3/6
(7) XIO	F/Letras	×	✓	×	✓	✓	×	3/6
(12) MAR	F/Ciencias	✓	×	✓	✓	-	×	3/5
(3) CAR	M/Letras	×	✓	×	✓	×	×	2/6
(8) KEV	M/Ciencias	×	×	×	×	×	✓	1/6
Total		6/12	7/12	6/12	10/12	9/11	9/12	47/71

Tareas. 1: Bolas con números, 2: Borrar la pizarra, 3: Tarjetas con letras y números, 4: Tarjetas con diseños, 5: Combinación de químicos, 6: Rotaciones de 180º.

Además, según tareas y desempeños individuales, la tabla 3 muestra que cada participante resolvió al menos uno de los problemas propuestos y siete de los doce participantes resolvieron correctamente más de la mitad de estos problemas. Las diferencias según sexo y facultad se compensan, si se agrupan los casos en tres grupos: los participantes que resolvieron correctamente todas las tareas (6 y 9), los que resolvieron entre tres y cinco tareas (1, 2, 4, 5, 7, 10, 11 y 12) y los que resolvieron adecuadamente menos de la mitad (3 y 8)

Ahora, se consideraron categorías más específicas para la agrupación de los casos. En un eje (y) se consideró el *nivel de logro* dividido en tres categorías que hacen referencia a la acción de los participantes para resolver las tareas. En otro eje (x) se consideró el *nivel de razonamiento* compuesto por cuatro categorías que hacen referencia a la explicación que dieron los participantes luego de resolver la tarea correcta o incorrectamente. El significado de cada categoría se explica a continuación.

Nivel de logro (eje y)

Categoría 1: *Resuelve la tarea sin ayuda*. En este caso el participante usó un método adecuado que le permitió resolver la tarea de combinatoria sin la intervención del evaluador durante el proceso. Por ejemplo, fórmulas matemáticas correctas, registros o listados ordenados y combinaciones sistemáticas.

Categoría 2: *Resuelve la tarea con ayuda*. En este caso el participante usa un método adecuado para resolver la tarea, pero fue necesario que el evaluador brinde ayuda u orientación mediante preguntas, contra sugestiones o sugerencias sobre otras formas de resolver la tarea.

Categoría 3: *No resuelve la tarea*. En este caso el participante falla en resolver la tarea, por el uso de un método inapropiado y aun cuando el evaluador hubiera intervenido con alguna pregunta, apoyo o contra sugestión.

Nivel de razonamiento (eje x)

Categoría A: *Razonamiento apropiado*. En este caso la explicación vinculada a la resolución de la tarea, evidencia el uso de nociones necesarias para resolver cada una de las tareas. Por ejemplo en el caso de las tareas 1, 2, 3, 4 y 5, el participante verbaliza aspectos de una abstracción de factores del problema y de la neutralización o variación sistemática de estas variables. En el caso de la tarea 6, el participante verbaliza aspectos de una abstracción correcta de las funciones de cada cochera y sus coordinaciones posibles en relación al cargamento como sistemas de referencia.

Categoría B: *Razonamiento en desequilibrio*. En este caso la explicación que da el participante no es necesariamente correcta, porque es demasiado general o incompleta. La explicación es simple, poco reflexiva y no da cuenta de las acciones desplegadas y el proceso lógico que estas implican, especialmente si han sido correctas.

Categoría C: *Razonamiento mecánico*. En este caso el participante explica su acción describiendo el uso de una fórmula matemática. Sin embargo, no ahonda en la lógica subyacente de la fórmula o el porqué de su uso.

Categoría D: *Razonamiento inapropiado o ausente*. En este caso el participante no da una explicación o la que da es claramente errónea. La explicación no va de la mano con los requerimientos lógicos de la tarea, es decir, ofrece una verbalización de un procedimiento que no es lo que la tarea demanda.

Tabla 4.

Frecuencia de respuestas según nivel de logro y nivel de razonamiento

	Nivel de Razonamiento				
Nivel de Logro	(A) Razonamiento apropiado	(B) Razonamiento en desequilibrio	(C) Razonamiento mecánico	(D) Razonamiento inapropiado	Total
(1) Resuelve la tarea sin ayuda	25	9	2	-	*36*
(2) Resuelve la tarea con ayuda	5	4	-	-	*9*
(3) No resuelve la tarea	-	10	-	11	*21*
Total	*30*	*23*	*2*	*11*	66

Casos perdidos: 5*

Como se observa en la tabla 4, si se tiene en cuenta solo el *nivel de logro*, la mayoría de participantes logra resolver las tareas sin ayuda del evaluador, mientras que un grupo pequeño lo hace con ayuda. En relación al *nivel de razonamiento*, se observa que la mayoría de respuestas de los participantes exhiben un razonamiento apropiado o en desequilibrio. Una menor cantidad muestran razonamientos inapropiados, ausentes o mecánicos.

Cruzando las categorías de la tabla 4, se observa una mayor cantidad de soluciones correctas sin ayuda vinculadas con razonamientos apropiados o en desequilibrio. Le siguen el grupo de respuestas fallidas con razonamientos en desequilibrio, inapropiados o ausentes, las respuestas acertadas, con ayuda y razonamientos apropiados o en desequilibrio, y las respuestas correctas sin ayuda con razonamientos mecánicos.

En general, no se observaron diferencias sobresalientes entre las agrupaciones según sexo y facultad. En un sentido, esto homogeniza el grupo y permite poner el foco de atención sobre otros aspectos como el tipo de tarea o las clasificaciones funcionales y estructurales del desempeño de los participantes. Por un lado, parece que el grupo ha resuelto con menor dificultad las tareas que tienen un carácter más lógico que

*Algunos casos no se han considerado en esta categorización por negligencias metodológicas: no se pidieron explicaciones suficientes luego de que estos participantes resolvieron las tareas (correcta o incorrectamente).

matemático, porque plantean problemas más evidentes o significativos y porque se sustentan una acción directa, lo cual es coherente con lo señalado en la parte teórica de este estudio. Por otro lado, cuando se consideran aspectos teóricos para hacer clasificaciones más detalladas, pueden observarse variaciones en el desempeño de los participantes, que valdría la pena explicar con detalle. Pero para hacer este análisis, cualquier cuantificación resulta insuficiente. A continuación se presentan ejemplos detallados de los distintos desempeños de los participantes: los métodos que usaron, las respuestas y las explicaciones que dieron sobre la solución de los problemas propuestos.

Tarea 1. Problema de matemática – Bolas con números – Ejemplos

Esta tarea pide saber cuántos números de tres cifras distintos pueden formarse con cuatro valores posibles (2, 4, 7 y 9) que se obtienen al azar. La estructura de pensamiento que moviliza este problema es el esquema operatorio formal de combinatoria con énfasis en su aspecto numérico, matemático o de cálculo. Se presentan, en seguida, ejemplos de soluciones correctas.

DIE (17 años, ciencias, resuelve la tarea sin ayuda, razona apropiadamente). Da la respuesta [64] sin usar la hoja de anotaciones. Cuando se le pregunta cómo resolvió el problema, dice: *"Cada vez que saco un número, puedo hacerlo dentro de 4 números diferentes. Luego me dice que lo regrese, que la siguiente sacada voy a volver a sacar entre 4. Si en la primera me da cuatro posibilidades 2, 4, 7, 9, en la siguiente tengo cuatro posibilidades multiplicadas por las cuatro posibilidades que pueden ser y con el siguiente es igual, sería cuatro al cubo"*. Luego se le pregunta por qué multiplica las posibilidades, a lo que responde: *"Porque tienes… para la primera, el 2, el 4, el 7, y el 9* [Escribe los números en la hoja de anotaciones]*…En la siguiente te puede salir nuevamente 2-4-7-9, 2-4-7-9, 2-4-7-9 y 2-4-7-9 para cada número de la primera* [Escribe estos cuatro números debajo de cada número que escribió antes] *y así en cada una de las revisiones. En cada caso hay cuatro y por cada uno de esos casos va a ser cuatro. Cuatro por cuatro por cuatro"*.

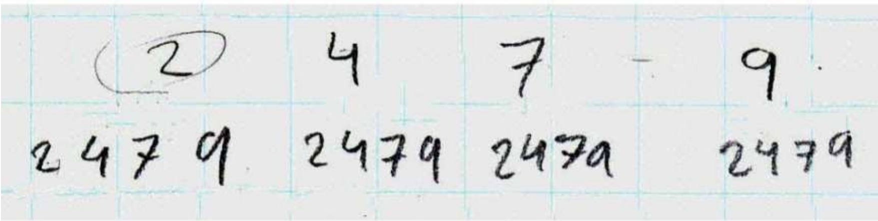


Figura 9. Explicación de multiplicación de posibilidades por DIE

FRE (17 años, ciencias, resuelve la tarea sin ayuda, razonamiento en desequilibrio). En la hoja de anotaciones se observa que hace tres columnas en las que consigna las cuatro posibilidades dadas en el problema, representando organizadamente el número de tres cifras y sus posibilidades. Luego hace un conteo: primero, parte del valor ‘2’ de la primera columna, lo conecta con el ‘2’ en la segunda columna y luego los conecta con los cuatro valores de la tercera columna por medio de flechas. Registra (cuatro veces) el número cuatro a la derecha indicando el conteo que está haciendo al conectar los valores ‘4’, ‘7’ y ‘9’ de la segunda columna con los de la tercera. Continúa el registro de números cuatro hasta llegar a dieciséis y multiplica dieciséis por cuatro. Según esta lógica, cada grupo de números “4” registrados, corresponde a cada uno de los valores de la primera columna. Da la respuesta correcta [64] y cuando se le pregunta cómo hizo responde: “*… de acá y acá son cuatro…y de acá son cuatro…de acá son cuatro…acá y acá son cuatro y así observé. Y haces esto de acá, vas dejando un valor fijo. Después así…*”.

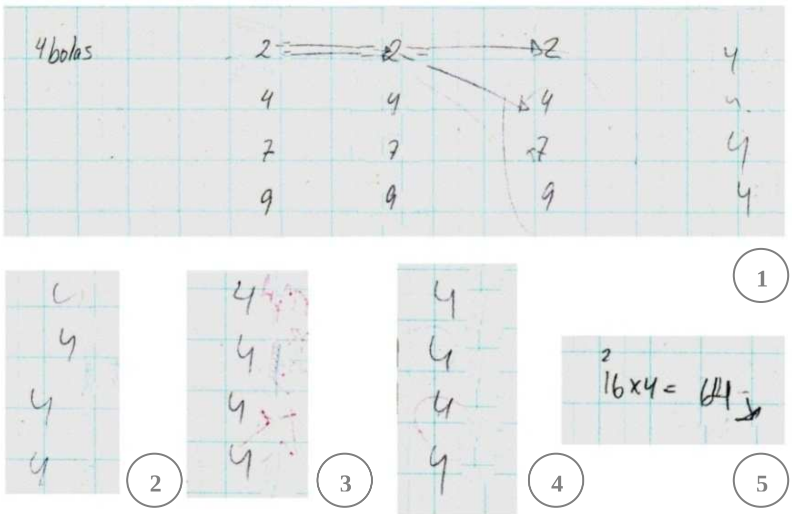


Figura 10. Hoja de anotaciones de FRE

Como se observa en los ejemplos, este problema puede resolverse usando un método de registro o conteo sistemático o bien haciendo un cálculo del universo de posibilidades que muestre aspectos similares al de fórmula de arreglos con repetición (multiplicación de posibilidades por dimensión). Todos los participantes que resolvieron este problema correctamente usaron uno u otro método, con mayor o menor grado de sistematización o dominio. A ambos métodos es común una disociación formal de factores, caracterizada por efectuar una abstracción de las formas, grados, dimensiones y parámetros del problema para luego hacer una neutralización progresiva de algunos de sus valores controlando la variación de los otros. DIE primero habla de la multiplicación de posibilidades, pero luego explica cómo se da esta multiplicación y hace una gráfica (Figura 1) en la que se observa que a cada posibilidad en un grado (del número de tres cifras que pide el problema) le corresponden las mismas posibilidades en un segundo nivel. Esto muestra cómo ocurre la combinación de posibilidades y la mayor variación conforme se sucedan estos niveles. En contraste, FRE muestra estos aspectos en su hoja de anotaciones, aunque su explicación sólo remite a una descripción simple de la multiplicación de posibilidades. Es importante distinguir que mientras el método sistemático de registro permite ver fácilmente esta disociación y las combinaciones sistemáticas, el cálculo no hace evidente estos aspectos de la actividad, a menos que se detallen las razones de su uso y se explique cómo se dio la multiplicación de posibilidades por cada factor, como hizo DIE. Pueden darse casos en los cuales el sujeto llega a la respuesta correcta haciendo un cálculo mecánico sin apoyarlo con una explicación suficiente, por ejemplo:

EMI (20 años, letras, resuelve la tarea sin ayuda, razona mecánicamente). En la hoja de anotaciones, luego de un primer intento erróneo para calcular las posibilidades, grafica tres "compartimentos" y debajo de cada uno de ellos escribe el dígito "4" que representa los cuatro números posibles del problema e indica la multiplicación de estas posibilidades. Da la respuesta correcta [64] y cuando se le pregunta cómo hizo, dice: *"Me dicen que saque una por una para identificar un número de tres dígitos. En el primero, si hay 4 bolas, hay cuatro números posibles para que salgan. En el segundo y en el tercero también es lo mismo. Como en sí, siempre hay 4 posibilidades multiplico las posibilidades de cada una de las columnas de los dígitos y sale 64"*.

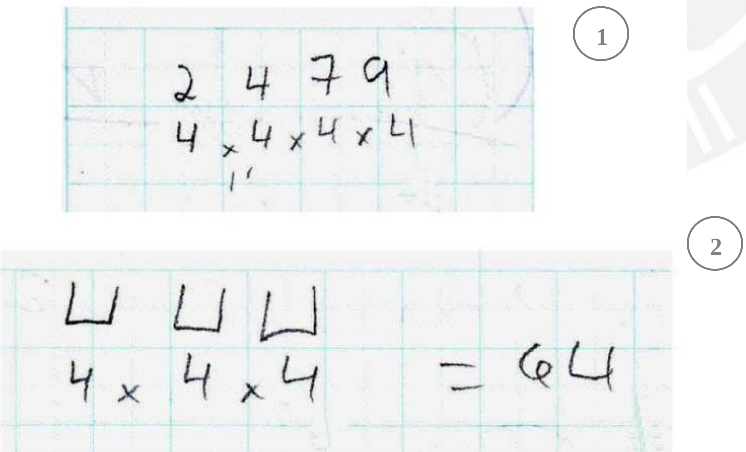


Figura 11.Multiplicación de posibilidades por EMI

Se observa que EMI hace un cálculo correcto a partir de la multiplicación de posibilidades, pero no logra explicar por qué las multiplica y reconoce el uso mecánico del método de cálculo. Sin embargo, se observa uno de los aspectos de la disociación de factores, que es la abstracción adecuada de los parámetros que organizan el problema: el número de tres dígitos a manera de “cajas vacías”, el número de posibilidades correspondientes de cada “caja” (Figura 3) y las consideraciones sobre la relevancia del orden y las repeticiones. Pero como se mencionó, en comparación con el método de registro sistemático de posibilidades, el cálculo por multiplicaciones no permite observar el segundo aspecto de la disociación de factores que es la articulación entre neutralización y variación de los valores de cada factor.

A continuación se presentan ejemplos de participantes que no pudieron resolver este problema.

CAR (17 años, letras, no resuelve la tarea, razonamiento en desequilibrio). Da una respuesta incorrecta y dice: *“No te podría decir, dar una respuesta precisa. Ahora prefiero no hacer el tanteo. Pero sí te puedo decir que te puedo sacar más de 80”*. Luego se le pide que al menos muestre o de un ejemplo de cómo haría para saber cuántos números son. En la hoja de anotaciones registra todos los posibles cambios del valor ‘2’ en el número de tres cifras. Primero registra 222, luego tres posibilidades con ‘2’ en la primera y segunda posición (22-), tres posibilidades con dos en la segunda y tercera posición (-22) y tres posibilidades con ‘2’ en la primera y tercera posición (2-2). Finalmente registra seis posibilidades con ‘2’ como valor inicial, cambiando sistemáticamente los otros valores. Se detiene al terminar esto. Explica lo que ha hecho diciendo: *“Basándome en 2, hice un grupo de dos, pero me he dado cuenta de que esto lo puedo poner arriba o de acá lo bajo, o en el medio. Lo mismo me va a pasar con el siete, con el cuatro, con el nueve y peor aún si lo hago con tres números. Yo puedo voltear todos estos números y ponerlos arriba y hacen otro número y restarle uno. De hecho que no pueden ser como los de acá. Estos son iguales y los de acá son diferentes y ya me da flojera hacer lo de los tres números"* [No se da cuenta que para obtener la respuesta correcta podría multiplicar estas dieciséis posibilidades, obtenidas variando solo ‘2’, por el número de valores posibles dados en el problema].

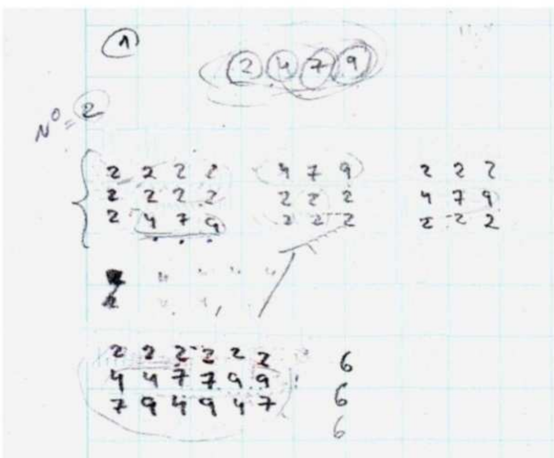


Figura 12. Registro sistemático de variaciones del valor ‘2’ por CAR

ADRI (17 años, letras, no resuelve la tarea, razona inapropiadamente). En la hoja de anotaciones hace un registro aleatorio de números posibles considerando los valores dados en el problema. Deja pasar varias posibilidades y muestra que no ha considerado que el orden y repetición de los números no importe. Hace un conteo de posibilidades por grupos que ha registrado y suma. Pero no da una respuesta precisa y dice: *"Me podrían salir otros números… No sé si la respuesta es exacta, es un cálculo… Pueden ser más… treinta o más"*. Cuando se le pregunta cómo hizo para resolver la tarea, dice: *"… creo que acá se van a repetir tres números que hay aquí y acá se van a repetir otra vez porque son los mismos números, y cuando lleguemos aquí solo se van a poder hacer tres números"*. También dice: *"Los alterno. Me salen tres números así. Creo que es porque son de tres dígitos"*.

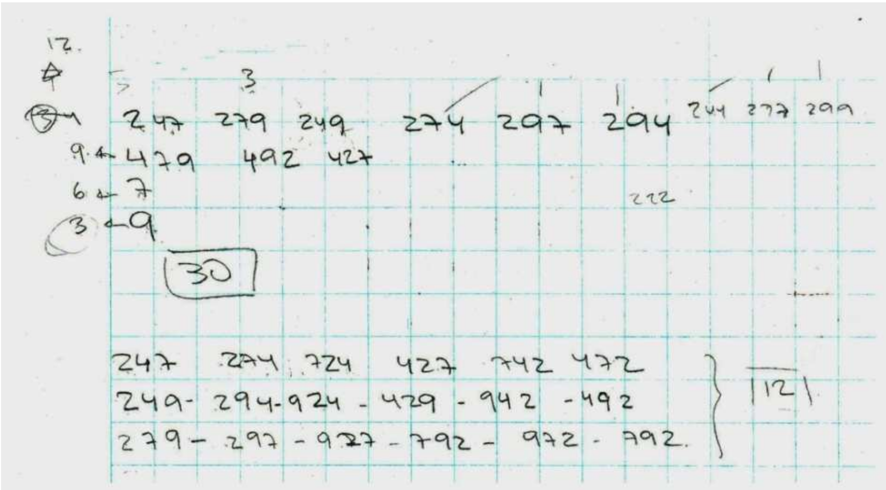


Figura 13. Registro aleatorio de posibilidades por ADRI

El caso de CAR muestra, luego de la petición del evaluador, el uso de un método que claramente evidencia una abstracción de factores apropiada y una neutralización y variación sistemática de valores (Figura 4). Además, su explicación sugiere que tiene algunas consideraciones correctas sobre lo que podría hacer para resolver el problema. Sin embargo, estos aspectos no se coordinan y no logra resolver y explicar el problema. Por su lado, el caso de ADRI muestra lo inefectivo que es el registro aleatorio para resolver problemas de combinatoria (Figura 5), debido a que es contrario a una disociación formal de factores. El caso evidencia una abstracción incompleta de los aspectos clave, correspondiente con una baja sistematización en la neutralización y variación de valores.

Tarea 2. Problema de matemática – Borrar la pizarra – Ejemplos

Esta tarea pide formar grupos posibles de tres elementos a partir de un grupo total de cinco elementos. A diferencia de la tarea anterior, en esta tarea el orden al interior de los grupos a formar no importa debido a que los elementos son personas. El éxito en la solución de esta tarea, dependerá pues de una abstracción oportuna sobre este aspecto, como se verá a continuación. Al igual que la tarea anterior, la estructura de pensamiento que moviliza esta tarea es el esquema operatorio formal de combinatoria, con énfasis en su aspecto numérico o de cálculo. A continuación se muestran ejemplos de tareas resueltas correctamente:

CAM (19 años, letras, resuelve la tarea sin ayuda, razona apropiadamente). En la hoja de anotaciones escribe, en una fila, las iniciales de los nombres de las personas en el problema: E, F, J, L, M. Debajo hace un registro de grupos posibles de tres personas. En los seis primeros grupos, el valor ‘E’ permanece fijo en la primera columna, mientras que la variación de valores ‘F’ y ‘J’ (grupo a grupo) es menor que la de los valores ‘J’, ‘L’ y ‘M’ en la tercera columna. Luego de agotar las posibilidades con ‘E’ hace lo mismo con ‘F’ y completa la que falta con ‘J’ en la primera columna, dice: *"Diez combinaciones"*. El registro y la explicación posterior muestran su grado de conciencia en relación al uso del método y la consideración sobre la importancia del orden. Explica: *“Primero empecé a hacer las combinaciones con Elisa, teniendo cuidado porque no son números. Si yo pongo los números en diferente orden es distinto, pero si cambio el orden de las personas sigue siendo el mismo grupo. Entonces, puse todas las posibilidades con F y luego con J, pero varias ya estaban incluidas en las combinaciones con E. Así que sólo completé las que faltaban y salen diez”*.

Figura 14. Registro sistemático por CAM

XIO (16 años, letras, resuelve la tarea sin ayuda, razona apropiadamente).En la hoja de anotaciones, hace un registro organizado de los grupos posibles: *"Ya. Podrían ser Elisa…* [Registra los tres grupos posibles con 'Elisa' y 'Fernando', los dos grupos posibles con 'Elisa' y 'Jorge' y el grupo último grupo posible con 'Elisa']…*Fernando...* [Registra los dos grupos posibles con 'Fernando' y 'Jorge', luego el último grupo posible con 'Fernando' y finalmente el último grupo posible con 'Jorge']… *Jorge, Lucía, María… ¿quién más?... Creo que ya son todos… Diez"* (Figura 6). El registro y la explicación posterior, ejemplifican su conciencia sobre el uso de un método sistemático y la consideración sobre el orden de los elementos en este problema: *"Como me piden tres alumnos. Voy de la primera con todos, o sea E-F-J, E-F-L, E-F-M, luego E-J-L, E-J-M, luego E-L-M. Luego lo hice con el segundo participante, o sea: F-J-L, F-J-M y F-L-M. Luego con Jorge como tercer participante, o sea J-L-M… De ahí ya no, porque los demás se repiten"*.

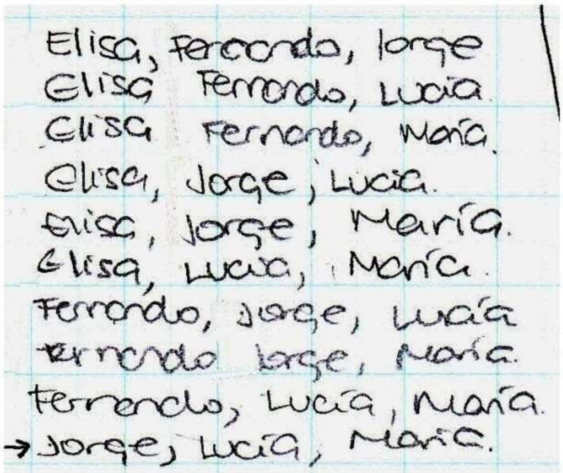


Figura 15. Registro sistemático por XIO

Como se observa, los casos presentados muestran el uso de un método de registro sistemático que permite solucionar la tarea correctamente. Ambos registros y las explicaciones evidencian los dos aspectos de la disociación de factores: una abstracción adecuada de los parámetros del problema, especialmente la consideración sobre la irrelevancia del orden (que si bien no se hace explícita en la hoja, está implicada en el registro de los grupos), articulada con una neutralización y variación ordenada de los valores del problema, que evidencia el grado de sistematización en la acción. Ahora, que el orden no importe en la formación de los grupos es un aspecto muy importante. Los registros de CAM y XIO muestran claramente que han tomado en cuenta esta cuestión y lo afirman en sus explicaciones. En general, la mayoría de participantes que resolvieron correctamente esta tarea usaron un método de registro sistemático y fueron conscientes que el orden no importaba. Pero hubo casos, como los que se presentan a continuación, en los que el participante necesitó la intervención del evaluador para entender que el orden no importaba.

ANG (16 años, ciencias, resuelve la tarea con ayuda, razonamiento en desequilibrio). En la hoja de anotaciones registra las iniciales de las personas o valores dados en el problema: E, F, J, L, M. Debajo escribe los distintos grupos posibles de tres elementos que pueden hacerse con cinco personas. Primero elige ‘E’ y alterna ordenadamente los otros dos valores, fijando ‘F’, ‘J’, ‘L’ y ‘M’ progresivamente. Continúa el registro eligiendo progresivamente los valores desde el otro extremo (primero ‘M’, luego ‘L’, ‘J’ y ‘F’): escribe algunos grupos posibles que pueden armarse con los valores dados, pero descartando ‘E’ porque ya hizo grupos posibles con ese valor. En general, registra varios tríos que tienen los mismos elementos, hasta que termina y dice: *“Ya. Sale veinte”*. Cuando se le pregunta cómo hizo, responde: *“He probado, con cada uno. He probado primero con este, formando grupos de tres. No sé si está bien porque siempre que hago así me confundo. Pero es que no me cuadra con el combinatorio porque acá me equivoqué y no era así. El otro combinatorio que es una fórmula ya me olvidé”*. Se le pregunta si en el caso de este problema específico, el grupo E-F-J sería el mismo que E-J-F, a lo que responde: *“No. Acá no me importa el orden… también, aquí y acá… entonces quedan uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez. Son diez”*. Verifica, descarta los grupos que tienen los mismos elementos y termina.

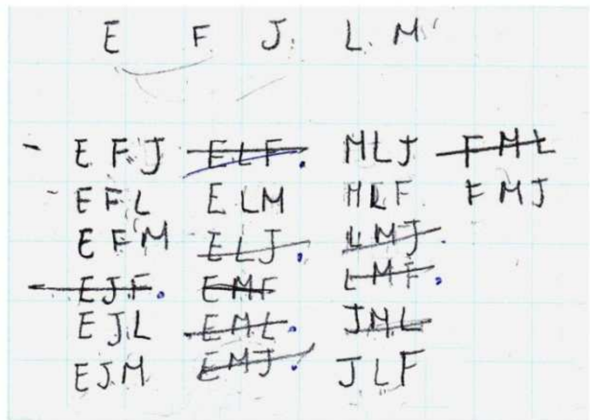


Figura 16. Registro sistemático y descarte de grupo por ANG

El caso de ANG muestra, como los anteriores, el empleo de un registro de grupos posibles que tiene a la base la abstracción de factores y la articulación entre la neutralización progresiva de valores y la variación ordenada de los otros. Sin embargo, el nivel de sistematización en el registro de ANG va decayendo y aunque se compensa con la verificación, a este bajo nivel de ordenamiento va a corresponderle una explicación incompleta que principalmente hace referencia al uso de la fórmula de combinatoria. En relación a lo último, se observó que los participantes que intentaron usar una fórmula para calcular el número de posibilidades, lo hicieron inadecuadamente y tuvieron que recurrir necesariamente al registro. Esto puede explicarse haciendo referencia a la complejidad que implica el uso de esta fórmula. Mientras que en la tarea 1 parece menos complicado inferir la fórmula de arreglos con repetición [AR_n^m = n.n… (m veces)= n^m] que es una operación de multiplicación de posibilidades, en esta tarea la fórmula de combinaciones implica una abstracción simultánea de dos aspectos: del orden expresado en las distintas permutaciones o cambios de posición que pueden hacer los valores al ser combinados en grupos de 3 y de los elementos no combinados expresados en la permutaciones posibles de los elementos que no se están considerando en las agrupaciones [$C_n^m = V_n^m/P_m = n!/m!(n-m)!$][*].

Ahora se presentan ejemplos de casos de participantes que no lograron resolver la tarea.

MAR (19 años, ciencias, no resuelve la tarea, razonamiento en desequilibrio). En la hoja de anotaciones escribe las iniciales de las personas del problema en una fila y debajo tres líneas que indican el criterio de selección de tres en tres. Debajo de estas líneas escribe los números cinco (para la primera línea), cuatro (para la segunda línea) y tres (para la tercera línea) indicando la multiplicación entre ellos y da su respuesta: *"60. Sí, 60"*. Cuando se le pide una explicación, dice: *"¿Por qué tantas combinaciones? No puede haber tantas combinaciones. Según lo que entiendo, son un grupo con tres personas. Como en un grupo no se puede seleccionar dos veces a la misma persona, se le restaría solamente una y de tu total quedarían 4. Y ahora de acá solo tienes para elegir 3 porque ya seleccionaste dos"*. Se le pregunta si podría resolver el problema de otra manera y dice: *"Pues ponerte a jugar con los tres… El orden no importa acá, se suma* [Suma los números que antes multiplicó].*Es 12. Claro el orden no importa… Es que es un conjunto, no va importar. Es igual Elisa, María y Jorge que Jorge, María, Elisa. Es lo mismo, se suma nada más"*. Cuando se le pregunta cómo podría estar segura que son doce grupos, recurre al mismo método diciendo: *"Es que una vez que elijo a Elisa por ejemplo, empiezo a tachar. Por acá hay 4 oportunidades de personas. Si acá elijo a Fer, hay solamente 3 oportunidades de personas y si elijo a Jorge ya no hay más"*. Luego se le pregunta si podría verificar escribiendo cada grupo. Dice: *"No se me ocurre cómo confirmar que es así, doce"*. Recurre a varias formas distintas de conteo y registro, siendo las primeras más simples y la última la más apropiada porque ordena fijando y cambiando valores progresivamente, y aunque este método le da la respuesta correcta, siempre busca confirmar que son doce posibilidades. Antes de hacer el último intento, dice: *"Es muy largo, me da flojera"*. Cuando termina, dice: *"Ahora solo me faltan dos… para doce"*.

[*] En los casos de ALO, EMI y FRE también se observó la dificultad para deducir este algoritmo.

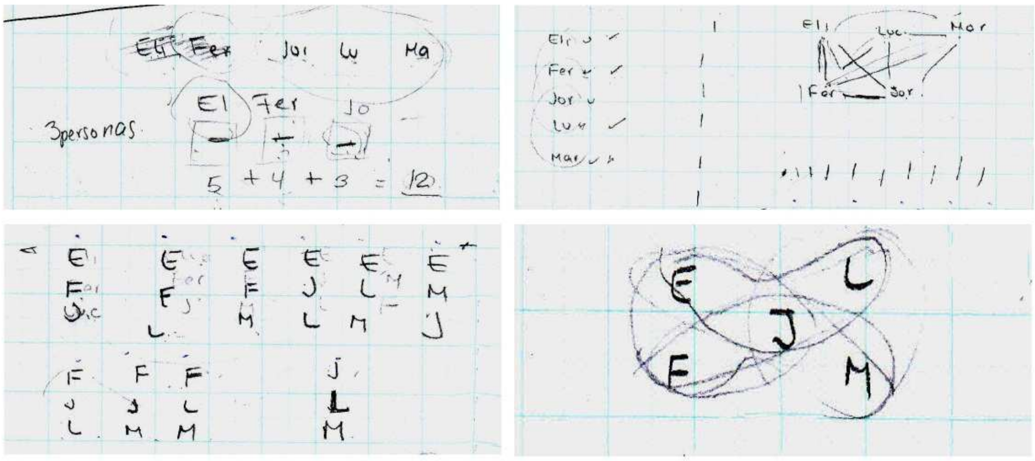


Figura 17. Distintos registros de grupos por MAR

KEV (18 años, ciencias, no resuelve la tarea, razonamiento en desequilibrio). Luego de leer el problema, dice: *"¡Ah!, ya. Estos sí no se pueden repetir… Porque son personas"*. En la hoja de anotaciones, escribe en una fila las iniciales de los nombres de las personas dadas en el problema. Debajo, inicia un registro de grupos de tres marcando con palitos los elementos que forman el grupo. Primero marca grupos de tres con elementos contiguos (E-F-J, F-J-L, F-J-M), luego grupos de tres marcando siempre E y F, después E y J y finalmente el grupo E-L-M que repite dos veces descartando el último. Dice: "*Ya. 9 posiblemente*". Se le pregunta cómo hizo y explica: *"Primero agarré tres, luego tres, algo similar. Luego agarré los dos primeros con la combinación del último, del penúltimo y el tras antepenúltimo. Me dieron tres combinaciones. Luego agarré el primero con el tercero, vi que el cuarto y el quinto me dieron dos combinaciones. Luego el primero y el cuarto. Cuando quería hacerlo con el segundo, vi que ya había uno. Entonces con el tercero ya había uno, también. Seguí con el quinto. El primero y el quinto, como quedaba con todo, lo borré. Entonces salían 9"*. Cuando se le pregunta cómo está seguro de que no falta alguna combinación o grupo, dice: *"Verificando. Ya verifiqué"*. Sin embargo, el registro muestra que este proceso de verificación no ha sido exhaustivo ya que faltan varios grupos y uno se repite.

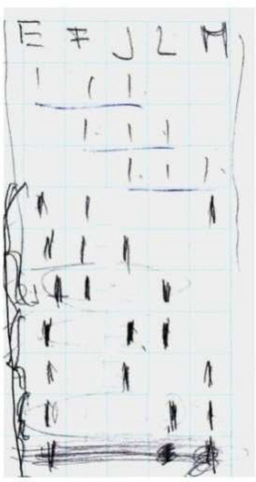


Figura 18. Registro con palitos por KEV

En estos ejemplos se observan dos aspectos importantes. En primer lugar, que la consideración sobre lo irrelevante del orden, si bien es una condición necesaria para resolver la tarea correctamente, no es una condición suficiente ya que debe estar coordinada con un registro sistemático que permita tener un panorama ordenado de los grupos, que facilite la verificación para evitar repetir u omitir grupos. En segundo lugar, que la neutralización y variación progresiva de valores, si bien está presente en ambos casos, tampoco garantiza la solución correcta porque el nivel de sistematización en el registro es bajo debido a la poca de toma de conciencia sobre el uso del método y a la falta de verificación exhaustiva.

Tarea 3. Problemas con tarjetas – Letras y Números – Ejemplos

Esta tarea consistió en darle al participante cuatro tarjetas con dos valores (una letra por una de las caras y un número por la otra) para que forme todos los grupos posibles de cuatro elementos, teniendo en cuenta que sólo pueden variarse los valores y no el orden de las tarjetas. Además se dio una hoja de respuestas con casilleros que induce el uso del registro y lo estructura, sin sugerir el número posible de combinaciones ya que hay más casilleros de los necesarios para completar la tarea. La estructura de pensamiento que moviliza esta tarea es la del esquema operatorio formal de combinatoria en su aspecto lógico; enfatiza en la combinación de cuatro asociaciones de base y sus valores, aspecto que emula la lógica de las dieciséis operaciones binarias del razonamiento proposicional. A continuación se presentan ejemplos de participantes que lograron resolver correctamente esta tarea.

EMI (20 años, letras, resuelve la tarea sin ayuda, razona apropiadamente). En la hoja de respuestas empieza a registrar los grupos posibles pero en un momento se detiene y pregunta si puede borrar para hacerlo más ordenado, a lo que se responde afirmativamente. En este nuevo registro se observa el mayor nivel de ordenamiento: en el primer elemento (primera columna) los valores ‘A’ y ‘3’ se alternan una vez porque están más fijos de grupo a grupo; en el segundo elemento (segunda columna) los valores ‘B’ y ‘5’ están menos fijos porque se alternan cuatro veces; en el tercer elemento (tercera columna) hay una mayor variación de los valores ‘C’ y ‘7’ grupo a grupo; y en el cuarto elemento (cuarta columna) se observa la mayor variación de valores de grupo a grupo. Termina y da su respuesta: *“Sí, es dieciséis”*. Cuando se le pide que explique lo que ha hecho, dice. *“Si acá hay dos posibilidades, conjugándolo con esto hay dos posibilidades más… Porque A puede ser A-B o A-5 y 3-B o 3-5… Dos por dos, son cuatro posibilidades en total. Con esta dos, son ocho posibilidades y más estas dos, son 16 posibilidades en total. Y así”*.

Serie 1	A	B	C	D
Serie 2	A	B	C	9
Serie 3	A	B	7	D
Serie 4	A	B	7	9
Serie 5	A	5	C	D
Serie 6	A	5	C	9
Serie 7	A	5	7	D
Serie 8	A	5	7	9
Serie 9	3	B	C	D
Serie 10	3	B	C	9
Serie 11	3	B	7	D
Serie 12	3	B	7	9
Serie 13	3	5	C	D
Serie 14	3	5	C	9
Serie 15	3	5	7	D
Serie 16	3	5	7	9

Figura 19. Registro sistemático por EMI

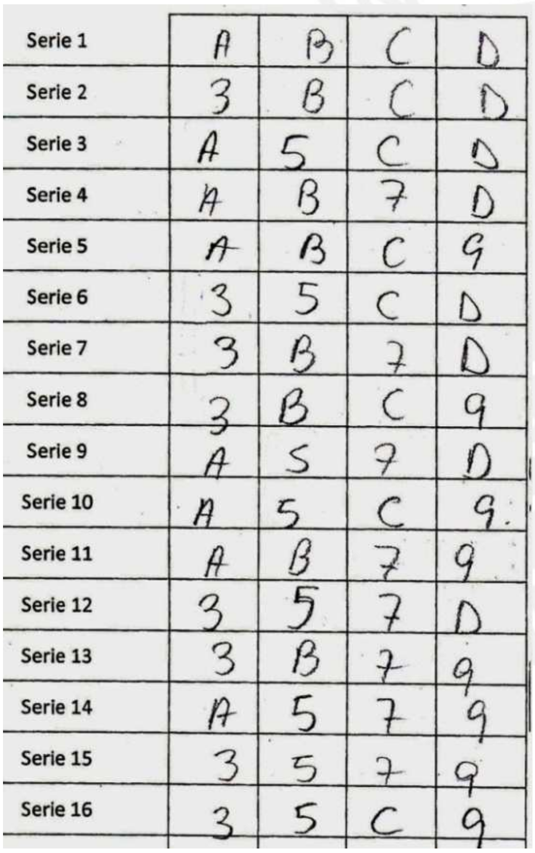
ALO (17 años, letras, resuelve la tarea sin ayuda, razona apropiadamente). Antes de empezar quiere confirmar algunas posibilidades: *"¿Estas son todas? ¿Al final puedo terminar volteando todas, no? ¿Estás seguro que no se puede llegar a veintidós?"*. Se repite que se han puesto más casilleros de los que serán necesarios, entonces empieza con el registro. Primero copia el grupo de ejemplo (todas letras). Luego empieza a variar elementos de uno en uno a través de los grupos que registra. Después varía de dos en dos fijando el valor de primer orden (3), luego el de segundo orden (5) y finalmente el tercero (7). Para terminar hace variaciones de tres en tres fijando los dos primeros valores o los dos últimos, para finalmente registrar la inversa del primer grupo (todos números). Se le pregunta cómo hizo y explica: *"Primero puse la normal que es ABCD, luego volteando una por una. Comencé por la última. 'D' se vuelve 9, entonces sería ABC9. Ahora solo volteo la 'C': AB7D. Luego la 'B' que se vuelve 5: A5CD. Y luego la 3BCD. Luego volteas una por una y salen parejas. Primero, 'A' con 'B': 35CD. Luego volteé 'A' con 'C' y luego 'A' con 'D', luego con 'B' con 'C'. No puedo voltear 'B' con 'A' porque es la misma. Luego 'C' con 'D' y ahí se acaban mis parejas. Después empecé a voltear de tríos ABC, dejando a 'D' de lado (357D), luego dejé a 'C'(35C9), luego dejé a 'A' de lado (A579) y luego a 'B' (3B79) y luego volteé las cuatro"*.

Serie 1	A	B	C	D
Serie 2	A	B	C	9
Serie 3	A	B	7	B
Serie 4	A	5	C	D
Serie 5	3	B	C	D
Serie 6	3	5	C	D
Serie 7	3	B	7	D
Serie 8	3	B	C	9
Serie 9	A	5	7	D
Serie 10	A	5	C	9
Serie 11	A	B	7	9
Serie 12	3	5	7	D
Serie 13	3	5	C	9
Serie 14	A	5	7	9
Serie 15	3	B	7	9
Serie 16	3	5	7	9

Figura 20. Registro sistemático por ALO

Como se observa en estos ejemplos, la solución correcta de esta tarea depende de la capacidad para hacer un registro lo suficientemente ordenado que facilite la verificación y el conteo de grupos posibles. A la base de esta sistematización en el registro, se encuentra la articulación entre la neutralización y variación de valores. En casi todos los casos de soluciones correctas se observa la articulación de ambos aspectos, expresada en los cambios de 1 a 1, de 2 a 2 y de 3 a 3 valores que hacen los participantes de grupo a grupo, teniendo como referencia inicial el grupo de ejemplo (todas letras). El caso de EMI (Figura 11) es especial porque el nivel de ordenamiento es tan alto que permite observar claramente una progresión en las combinaciones de valores (multiplicación de posibilidades), a partir de las correspondencias que establece entre dimensiones, es decir, de columna a columna en la estructura facilitada para el registro. Su explicación, aunque inicialmente remite a la mera multiplicación de posibilidades, ejemplifica cómo ocurriría esta multiplicación considerando sólo dos valores. El caso de ALO muestra lo mencionado antes: variaciones progresivas en las que se observa la neutralización de valores, especialmente en los cambios de 2 a 2.Además, su explicación hace clara referencia a todos estos aspectos, lo que indica el nivel de consciencia que tiene sobre el método usado. Esto último es importante porque pueden darse casos en los que un método apropiado no va de la mano con una explicación correcta acerca de lo hecho:

FRE (17 años, ciencias, resuelve la tarea sin ayuda, razonamiento en desequilibrio). Empieza el registro pero dice: *"A ver… sí, me faltan casilleros"*. Se vuelve a explicar que se han puesto más de los necesarios y continúa. Se observa que primero copia el grupo de ejemplo (todas letras) y luego empieza variar una letra (en número) de grupo a grupo. Después, varía dos letras de grupo a grupo: el primer elemento con el segundo, el primero con el tercero, el tercero con el cuarto, el segundo con el tercero, el segundo con el cuarto y el tercero con el cuarto. Finalmente varía 3 letras de grupo a grupo o, dicho de otra manera, varía un valor numérico (en letra) de grupo a grupo (al igual que con la letras al inicio) y registra la inversa del ejemplo (todos números). Termina, verifica, se le pregunta cómo hizo y dice: "*Empecé con las letras y luego con los números… ya he verificado… sale 16"*.



Serie 1	A	B	C	D
Serie 2	3	B	C	D
Serie 3	A	5	C	D
Serie 4	A	B	7	D
Serie 5	A	B	C	9
Serie 6	3	5	C	D
Serie 7	3	B	7	D
Serie 8	3	B	C	9
Serie 9	A	5	7	D
Serie 10	A	5	C	9
Serie 11	A	B	7	9
Serie 12	3	5	7	D
Serie 13	3	B	7	9
Serie 14	A	5	7	9
Serie 15	3	5	7	9
Serie 16	3	5	C	9

Figura 21. Registro sistemático por FRE

Como se observa en este ejemplo, el método que usa FRE es bastante similar al de ALO y al de la mayoría de casos que resolvieron la tarea correctamente. Pero su explicación es bastante general o incompleta y aunque esto no necesariamente implica que hay poco nivel de conciencia sobre el método usado, muestra desinterés por conceptualizar la acción.

A continuación se presentan casos de soluciones incorrectas para esta tarea.

XIO (16 años, letras, no resuelve la tarea, razonamiento en desequilibrio). Antes de empezar el registro corrobora los cambios que puede hacer con las tarjetas. Empieza copiando el grupo de ejemplo (todas letras), después varía uno, dos, tres y cuatro valores, de grupo a grupo. En este punto el registro no sigue un orden o patrón claro: primero cambia dos tarjetas de grupo a grupo (las de afuera y luego las de adentro), luego varía un valor de grupo a grupo y finalmente vuelve a variar dos valores de grupo a grupo (el primero con el tercero y luego el segundo con el cuarto). Termina y dice: *"Creo que ya están todas"* [Registra trece grupos]. Cuando se le pide que cuente cómo ha hecho, dice: *"Primero copié la primera, sería sin cambiar ninguno. Luego fui cambiando A, A-B, A-B-C y D no, luego todas. Luego puse A y B hacia los extremos y los de adentro no. Luego cambié los de adentro y los de afuera no. Luego cambié intercalado: A-B cambié, C no y D sí. Luego A-B-C y D no. Luego cambié también la D y los otros no. Luego intercalado de uno o dos: B, D, también la inversa. Luego está no, cambie las primeras y las dos últimas sí. Creo que esas son todas combinaciones que se pueden… Sí, no hay más combinaciones"* .

Serie 1	A	B	C	D
Serie 2	3	B	C	D
Serie 3	3	5	C	D
Serie 4	3	5	7	D
Serie 5	3	5	7	9
Serie 6	3	B	C	9
Serie 7	A	5	7	D
Serie 8	A	5	C	D
Serie 9	A	B	7	D
Serie 10	A	B	C	9
Serie 11	3	B	7	D
Serie 12	A	5	C	9
Serie 13	A	B	7	9

Figura 22. Registro de grupos por XIO

ANG (16 años, ciencias, no resuelve la tarea, razonamiento inapropiado). Empieza el registro copiando el grupo de ejemplo (todas letras) y luego empieza a variar un valor de grupo a grupo. Después, varía un valor de grupo a grupo pero fijando el primer elemento: el primero con el segundo, el primero con el tercero y el primero con el cuarto. En este punto el registro pierde sistematización (orden) y forma aleatoriamente los grupos sin considerar que varios se repiten y que hay más casilleros. Termina y dice: *"Ya. Ya está… veintiuno…"*. Cuando se le pregunta cómo hizo, explica: *"Primero quería seguir un orden. Comencé por todos los tres, pero de ahí me desconcentré y empecé a serializar y a fijarme si no había duplicado"*. No muestra seguridad sobre la revisión que hecho ni sobre la respuesta final: *"Puede* *ser que haya una que se me ha pasado, pero he estado verificando, más o menos… Tal vez sean veintidós, pero me mareo con tanto cambio".*

Serie 1	A	B	C	D
Serie 2	3	B	C	D
Serie 3	A	5	C	D
Serie 4	A	B	7	D
Serie 5	A	B	C	9
Serie 6	3	5	C	D
Serie 7	3	B	7	D
Serie 8	3	B	C	9
Serie 9	A	5	C	D
Serie 10	3	5	C	D
Serie 11	3	5	7	D
Serie 12	A	5	7	D
Serie 13	3	5	7	9
Serie 14	A	5	7	9
Serie 15	3	B	7	9
Serie 16	A	B	7	9
Serie 17	A	5	7	D
Serie 18	3	5	C	9
Serie 19	3	B	C	9
Serie 20	3	B	C	D
Serie 21	A	5	C	9
Serie 22	3	5	7	[illegible]

Figura 23. Registro con repeticiones por ANG

Estos ejemplos confirman lo mencionado anteriormente acerca de la necesidad de hacer un registro lo suficientemente sistemático que permita revisar la repetición u omisión de grupos posibles. Ambos casos muestran un inicio sistemático en el registro, que luego se reemplaza por un registro poco ordenado o aleatorio, en el cual no puede observarse la articulación entre la neutralización y la variación progresiva de valores, ya que ambos aspectos son solidarios del registro sistemático (en diversos grados). Por su lado, las explicaciones correspondientes son muy generales, incompletas o equivocadas porque no hacen referencia alguna a los aspectos que deben considerarse para resolver la tarea. Todos los casos de soluciones incorrectas para esta tarea, muestran estas características.

Tarea 4. Problemas con tarjetas – Tarjetas con diseños – Ejemplos

Este problema pide encontrar el número total de figuras que puede formarse con cuatro grupos de tarjetas (tres tarjetas de colores, tres tarjetas traslúcidas y con fondos, tres tarjetas con marcos blancos y tres tarjetas que tienen una figura geométrica calada), considerando que siempre deben combinarse una de cada grupo para formar una figura. La estructura de pensamiento que moviliza este problema es el esquema operatorio formal de combinatoria; la tarea induce la manipulación (lógica en la acción) y aunque no hace un énfasis especial en el aspecto matemático, puede resolverse mediante un cálculo o aplicando fórmula de arreglos con repeticiones, al igual que la tarea anterior.

A continuación se muestran ejemplos de participantes que solucionaron correctamente esta tarea.

LIL (20 años, ciencias, resuelve la tarea sin ayuda, razona apropiadamente). Luego de observar las tarjetas, usa la hoja de anotaciones para resolver el problema. Dibuja un esquema con cuatro casilleros que representan los grupos de tarjetas entregadas. En la parte superior de cada casillero escribe el valor '3' representado el número de posibilidades para cada uno. En la parte inferior escribe abreviaturas para cada valor del grupo de tarjetas de color (primer casillero) y luego dibuja tres flechas en cada casillero, partiendo del primer valor del casillero que representa las tarjetas de color. Luego hace un segundo esquema en el que linealmente se representan los cuatro grupos de tarjetas y tres líneas que van de punto a punto. Ambos esquemas, especialmente el primero, dan cuenta de la multiplicación de posibilidades de término a término. Finalmente, multiplica veintisiete por tres y da su respuesta: *"Ya está. 81"*. Cuando se le pregunta cómo hizo, explica: *"Comencé con el amarillo, tengo tres caminos. Armo otro con la mica, tres caminos más para armarlo con el marco y tres caminos más para armarlo con la figura. Cada camino de aquí a ahí. Por acá tengo… tres caminos, igual por acá, también por acá tengo tres caminos, entonces, tengo nueve, nueve, nueve, o sea tengo 27 solo para el amarillo, para el azul y para el rojo sería igual. Entonces es 81"*.

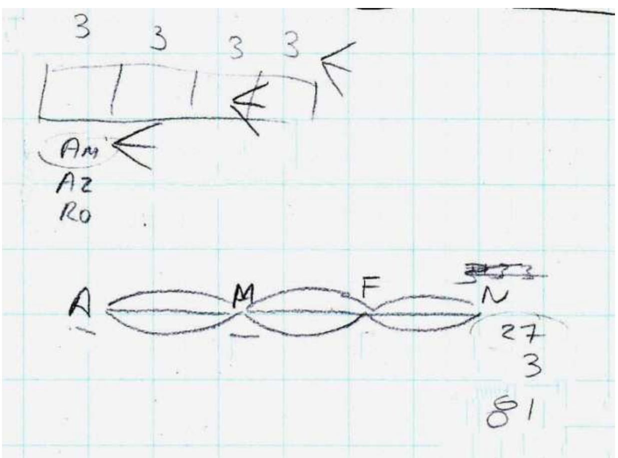


Figura 24. Esquemas para conteo por LIL

MAR (19 años, ciencias, resuelve la tareas sin ayuda, razona apropiadamente). Primero intenta hacer un cálculo mental, sin evidenciar algún conteo o manipulación, y da un par de respuestas equivocadas. Cuando se le pregunta cómo llegó a esas respuestas, nota el error y empieza a manipular la tarjetas disponiéndolas en cuatro grupos y haciendo un conteo combinándolas una a una y ordenadamente: *"Si necesito cuatro van a ser… sería agarrar así primero* [Coge una sola tarjeta del primer grupo]*…separarlas en tres grupos. Pero si cambio estos tres, sería tres cosas diferentes. Igual que estas de acá. Nueve, pienso* [Combina las tarjetas de los dos últimos grupos]. *Tengo 3, tengo 4, tengo 5, tengo 6, tengo 7, tengo 8, tengo 9…* [Combina lo anterior con las tarjetas del segundo grupo] *tengo 10… Ahora me sale 27"*. Como es evidente que sólo está contando tres grupos para hacer las combinaciones, se le pide que explique lo que hizo y dice: *"Si cojo uno, acá voy a poder tener 3. Ya van 3 del primero. Por el 3 de acá y este de acá, 27. Si necesito cuatro, primero hay 3 posibilidades, luego para el segundo va a haber otras 3 posibilidades. Luego para el de acá otras 3 y para el de acá otras 3. Seria 27 por 3. Son muchos números"*. En la hoja de anotaciones muestra la multiplicación de posibilidades de grupo a grupo, dibujando cuatro líneas, cada una con el valor '3' en la parte superior. En la parte inferior se aprecia el cálculo (27 × 3) y la respuesta correcta, dice: *"81, ¿no? Son muchas maneras, demasiadas"*.

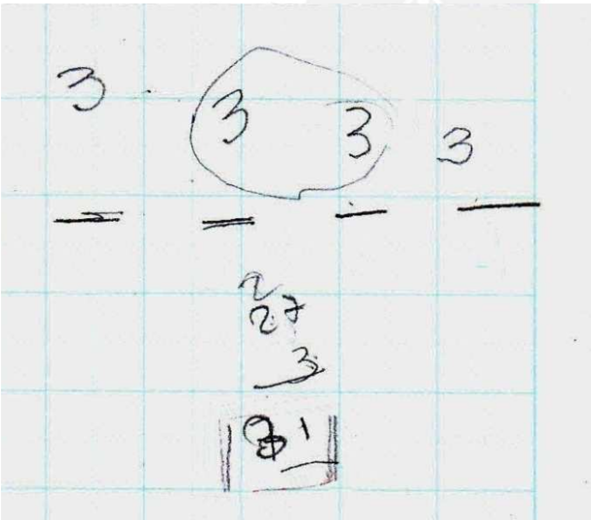


Figura 25. Multiplicación de posibilidades por MAR

En estos dos ejemplos, se evidencian los dos aspectos principales de la disociación formal de factores, aunque en diferentes modalidades. Por un lado, LIL abstrae y representa correctamente las dimensiones en juego (grupos diferenciados de tarjetas), dibujando cuatro casilleros con sus valores respectivos. Además, hace dos graficas distintas que ordenan los datos del problema y muestran de qué manera se realizan las combinaciones entre tarjetas, debido a la multiplicación progresiva de los valores grupo a grupo (aspecto relacionado a la neutralización y variación sistemática, como se ha visto anteriormente). Por otro lado, MAR abstrae los grupos de tarjetas disponiéndolos en cuatro columnas, para luego combinarlas ordenadamente, escogiendo una tarjeta del primer y segundo grupo (neutralización) para combinar las de los otros dos grupos (variación). En ese proceso, toma conciencia de la necesidad de multiplicar las posibilidades de cada grupo y finalmente recurre a la hoja de anotaciones para hacer este cálculo de forma correcta. Todos los casos con soluciones correctas usaron la multiplicación de posibilidades o el conteo sistemático. Se distinguen en que las abstracciones sobre el ordenamiento de los datos y las características del problema pudieron partir desde puntos distintos: en la acción material (manipulación) o en el nivel representativo (hoja de anotaciones). Finalmente, ambas soluciones y las explicaciones correspondientes, desembocaron en el cálculo de posibilidades a partir de un ordenamiento que tiene a la base la neutralización y variación sistemática de los valores del problema. Como ya se mencionó, este último aspecto se hace más evidente en los métodos de conteo o registro sistemático, como puede verse a continuación.

ADRI (17 años, letras, resuelve la tarea sin ayuda, razonamiento en desequilibrio). Empieza disponiendo las tarjetas en cuatro columnas según el tipo de tarjetas. A partir de esta organización empieza a combinar las tarjetas manualmente. Se observa claramente el grado de sistematización en lo que hace: elige la primera tarjeta de los tres primeros grupo y varía las tres del último grupo, luego cambia a la segunda tarjeta del tercer grupo y vuelve a variar las tres del último y después cambia a la última tarjeta del tercer grupo para nuevamente varias las tres del último; luego cambia a la segunda tarjeta del segundo grupo, vuelve a hacer todo lo anterior y finalmente cambia a la última tarjeta del segundo grupo para repetir el proceso otra vez [Hasta este punto irían 27 formas diferentes combinando los tres primeros grupos]. Se le sugiere usar una hoja durante la manipulación sistemática para que registre el conteo, pero hace algunas anotaciones y vuelve al conteo. Sólo regresa a la hoja al final y para multiplicar veintisiete por tres. Esto corrobora el número que obtuvo combinando manualmente tres grupos de tarjetas y la consciencia que tiene sobre multiplicar este número por las tres posibilidades del primer grupo (que aún no había combinado). Da la respuesta correcta [Ochenta y uno] y cuando se le pide que explique qué hizo, dice: *"Comencé alternando así, después se cambia esto y después este, y luego se regresa a este pero ya no se cuenta el otro, solo se cuenta este…* [Continúa diciendo esto y mostrando cómo lo hizo]".

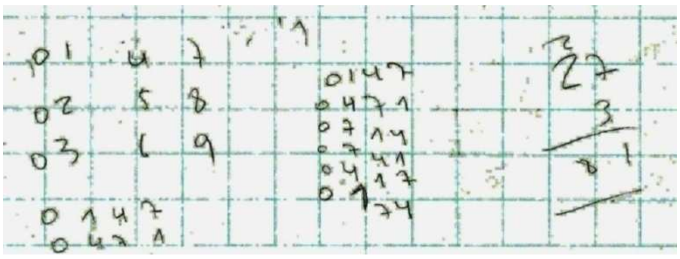


Figura 26. Anotaciones y multiplicación por ADRI

El caso de ADRI al igual que el de MAR, ejemplifican un ordenamiento de los datos del problema que parte de la acción y que solo deriva en el cálculo cuando ya se ha efectuado el conteo a partir de combinaciones sistemáticas en las que se han neutralizando algunos grupos de tarjetas para combinar los otros. La distinción principal de este caso con los anteriores yace en que la explicación de ADRI es bastante general y muy ligada a la descripción simple de la acción, ya que no se verbalizan los aspectos principales de la disociación de factores o la multiplicación de posibilidades.

A continuación se muestran los dos únicos casos de participantes que no lograron resolver la tarea.

FRE (17 años, ciencias, no resuelve la tarea, razonamiento en desequilibrio). En la hoja de anotaciones, hace un registro ordenado de grupos posibles, considerando cuatro columnas que representan los tipos de tarjetas del problema. En la primera columna [Tarjetas de color], escribe “rojo” y este valor lo mantiene fijo a lo largo del registro. En la segunda columna [Tarjetas con fondos], los valores cambian cada tres grupos: primero las representa las tarjetas que tienen un asterisco (*), luego las que tienen el símbolo de la resta (–) y al final las que tienen el símbolo de la suma (+). En la tercera columna [Tarjetas con marcos], los tres valores cambian de grupo a grupo sin un orden específico. En la cuarta columna [Tarjetas caladas], escribe un “O” que representa la tarjeta con un circulo como figura y este valor no cambia a lo largo del registro. Hace nueve grupos y al lado hace dos multiplicaciones: nueve por tres y el resultado (18) nuevamente por tres. Se equivoca en el último cálculo y da una respuesta incorrecta: *“Cincuenta y cuatro figuras”*. Luego se pide que explique cómo llegó a esa respuesta y dice: *“Primero cambie las cartas… tenía tres por cada cambiada, luego empecé cambiando esto, y al final tuve estos resultados. De ahí era repetitivo, no solamente era la parte de atrás y lo multipliqué por tres… como son tres figuras”*.

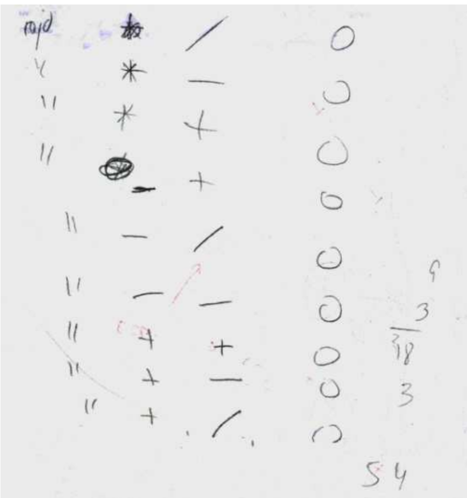


Figura 27. Registro sistemático por FRE

KEV (18 años, ciencias, no resuelve la tarea, razonamiento en desequilibrio). Primero, manipula y observa las tarjetas por un tiempo corto, separa algunas del grupo principal que tiene consigo y empieza una suerte de conteo por manipulación. Va combinando las tarjetas del primero grupo hasta que termina y luego combina estas con las del segundo grupo de tarjetas separadas. No puede apreciarse si sigue un orden o patrón. Se sugiere el uso de la hoja de anotaciones para que pueda recordar lo registrado y dice: *"No, así está bien"*. Al finalizar, da una respuesta incorrecta: *"Ciento sesenta y dos, creo"*. Cuando se pide que explique lo que ha hecho, se evidencia que ha entendido mal la consigna, dice: *"Primero agarre las figuras que al momento de voltearlas iban a tener la misma forma, por ejemplo está el rombo… las cruces y los puntos eran iguales, pero estas uves volteadas parecen la letra 'A'… Empecé por las más fáciles, por contar las similares, luego empecé a combinarlas, y luego con las más difíciles que se volteaban. Las conté todas"*. Ante esto, se explica que no hay diferencia entre posiciones de las tarjetas: una tarjeta como la que dio de ejemplo, es la misma así la voltee. Se pregunta, nuevamente, cuántas figuras diferentes podría armar si considerara la aclaración. No vuelve a hacer las combinaciones manuales, observa las tarjetas un momento y dice: *"Ciento once, por ahí"*.

Los casos de FRE y KEV muestran respuestas incorrectas, pero las razones que los condujeron al error difieren ampliamente. Por un lado, el procedimiento desplegado por FRE evidencia claramente los aspectos de la disociación de factores: una abstracción de los tipos de tarjetas y una posterior neutralización y variación sistemática de sus valores (los de la segunda y tercera columna en el registro). Además, es evidente que luego del registro toma conciencia sobre la posibilidad de multiplicar las posibilidades por cada grupo de tarjetas pero falla en el último cálculo. Por otro lado, KEV hace un conteo manual que no permite apreciar el grado de sistematización de las combinaciones de tarjetas. Además, abstrae inadecuadamente los aspectos claves de la tarea, no consulta con el evaluador y a pesar de aclaración dada, no se reorganiza para dar una respuesta sino que prefiere hacer una estimación sin sustento o intuitiva. Ambos casos tienen en común explicaciones muy generales que describen superficialmente la acción, sin hacer evidente los aspectos lógicos que el problema demanda.

Tarea 5. Tareas piagetanas – Combinación de químicos – Ejemplos

En primer lugar, esta tarea pide obtener un líquido de color amarillo usando cuatro frascos (denominados 1, 2, 3, y 4) con líquidos diferentes e incoloros y un quinto frasco (llamado 'g') con un líquido necesario para generar la reacción. El color sólo puede obtenerse mediante la combinación de dos frascos (1× 3), pero esto no se sugiere en la consigna. Además, se pide al participante descubrir la función o efecto que tienen los frascos 2 y 4 en relación a la obtención del color. La estructura de pensamiento que moviliza esta tarea es el esquema operatorio formal de combinatoria. El énfasis de la tarea está en la combinatoria experimental orientada hacia el logro de un resultado, debido a la consideración de combinaciones lógicas posibles. Por un lado, esta combinatoria es posible debido a la construcción de *conjunto de las partes*, que se observará en las combinaciones empíricas (de 1 en 1, 2 en 2 o 3 en 3 frascos) que los participantes hicieron. Por otro lado, esta combinatoria se manifiesta en el pensamiento y en el razonamiento, traduciéndose en una lógica proposicional que se analizará en los enunciados verbales o explicaciones que dieron los participantes.

A continuación se presentan ejemplos de participantes que lograron resolver la tarea adecuadamente.

EMI (20 años, letras, resuelve la tarea sin ayuda, razona apropiadamente). Antes de usar los frascos, planifica lo que hará en la hoja de anotaciones (Figura 20): *"Estoy haciendo mi cálculo para ver eso"*. Entiende la función de 'g' sin problemas y empieza con las combinaciones de frascos 1 a 1 (1 × g; 2 × g; 3 × g; 4 × g). Continua con las combinaciones de 2 a 2 frascos (1 × 2 × g; 1 × 3 × g) y antes de agotarlas obtiene el color amarillo. Cuando se pregunta qué frascos son necesarios para obtener el color, dice: *"Dos frascos, 1, 3, de hecho 'g' y aparece el color"*. Luego se le pregunta por el efecto que tiene 2: *"No lo he identificado"*. Prueba en relación a los frascos que dan el color (1 × 3 × g × 2), cambia el orden (1 × 3 × 2 × g) y concluye: *"Simplemente aumenta la cantidad de líquido. Nada más. Ahora, si desea que pruebe más. Qué sucede con el 4, ¿no?"*. Hace un par de pruebas (1 × 4 × g; 1 × 3 × 4 × g) y dice:*"Parece que tiene el mismo efecto que el 2, pero voy a comprobarlo…* [Combina nuevamente 1 × 3 × g y agrega 4]*… No"*. Concluye la tarea diciendo: *"Ya, el 2 es un simple aumento y el 4 es el que le quita la propiedad a 'g' de hacer el cambio… invierte el efecto. Incluso evita que lo produzca, porque si ponemos 1, 3 y 4, todavía no hay un efecto y si ponemos 'g' no sucede nada"*.

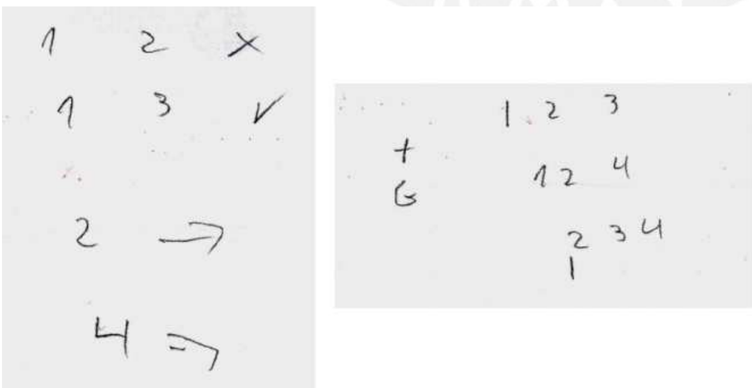


Figura 28. Registro de combinaciones posibles por EMI

DIE (17 años, ciencias, resuelve la tarea sin ayuda, razona apropiadamente). Inicia combinando frascos sin usar 'g'. Se le recuerda que para que aparezca el color amarillo en los frascos de ejemplo, se usó ese frasco. Entonces, empieza a hacer combinaciones con los frascos de 1 a 1 (1 × g; 2 × g; 3 × g; 4 × g) y luego de a 2 (1 × 2 × g; 1 × 3 × g) hasta que obtiene el color. Cuando se pregunta cuáles son los frascos necesarios para obtener el color, dice: *“1, 3 y g”*. Para saber el efecto de 2, lo agrega a la última combinación que hizo (1 × 3 × g… × 2) y considerando las combinaciones probatorias anteriores, dice: *“Nada. Aumenta la cantidad. No varía”*. Finalmente, cuando se pregunta por el efecto de 4, lo agrega a la última mezcla (1 × 3 × g × 2… × 4) y observa cómo desaparece el color: *“Lo regresa”*.

CAM (19 años, letras, resuelve la tarea sin ayuda, razona apropiadamente).Empieza haciendo combinaciones con todos los frascos (1 × 2 × 3 × 4 × g) hasta que obtiene el color (1 × 2 × 3 × g). Cuando se pregunta cuáles son los frascos necesarios y cómo podría saberlo, dice: *“No sé… poniendo 1, g, 2, g…* [Combina: 1× g; 2 × g; 3 × g]… *No, tienen que ser combinaciones* [1 × 2 × g; 1 × 3 × g; 1 × 2 × 3 × g; 2× 4× g; 1× 3× g, nuevamente]… *Es la mezcla del 1 y el 3”*. Sobre el frasco 2, dice: *“No, no hace nada. Porque si pongo 1 y 3 sin el 2, igual me sale amarillo”*. Cuando se le pregunta qué efecto tiene el frasco 4, dice: “*Nada. Ya hice que se combinen el 2 y el 4. El 4 solo, no lo pone amarillo, ni el 2 solo, ni la combinación de ellos tampoco. Lo único que hacen es aumentar la cantidad de líquido. No influyen en el color. La mezcla sigue siendo la misma con y sin ellos”*. Se pregunta si está segura y dice: *“Sí. Si pongo el 1 y el 3, el 4 y el g…* [Combina: 1 × 3 × 4 × g y contrasta con 1 × 2 × 3 × g]… *¡Ah!, no. El 4 inhibe la sustancia que hace que aparezca el color. O sea si pongo el 4, no se va a poner amarillo. Si pongo el 2 no pasa nada, solo aumenta la cantidad. El 4 hace que no se ponga amarillo”*.

Antes de comentar estos ejemplos es importante mencionar que a diferencia de las tareas anteriores en las que parte de la solución del problema implicaba abstraer los factores en juego, en esta tarea los factores ya se presentan disociados en la forma de los distintos frascos. Esto permite atender especialmente a las combinaciones experimentales que realizarán los participantes para obtener el color y saber el efecto de los frascos 2 y 4. La lógica subyacente a estas combinaciones se evidencia en la construcción o consideración del “conjunto de las partes”, que es el aspecto estructural de las neutralizaciones y variaciones sistemáticas funcionales, descritas en las tareas anteriores.

En estos tres ejemplos se observan claramente los dos aspectos que caracterizan la lógica de un método propio del estadio del pensamiento formal. Por un lado, se aprecia la configuración de una combinatoria sistemática de factores (de 1 a 1, de 2 a 2, de 3 a 3… de *n* a *n*) una vez entendido el problema. Esto puede verse, desde el inicio, en los casos de DIE y CAM que hacen combinaciones sistemáticas hasta que obtienen el color; mientras que EMI muestra un nivel de sistematización tal, que las combinaciones de *n* a *n* se planifican previamente a las pruebas experimentales. Por otro lado, estos ejemplos muestran que lo importante no es logro a partir de descubrir una combinación específica, sino notar que hay una vinculación necesaria entre las combinaciones posibles y el rol de la combinación que da el color, que obedece a las relaciones dadas por el conjunto de las partes. Ahora, si en estos casos no se realizaron todas las combinaciones posibles, se debe a que el nivel de organización alcanzado se encuentra en un punto de equilibrio que hace de la combinatoria, una deducción probatoria. Esto quiere decir que tanto los métodos de descubrimiento (de los papeles que desempeñan los frascos) como los métodos de prueba (combinaciones posibles) se han articulado en relación a los requerimientos de la tarea. Una vez obtenido el color, las pruebas para descubrir de forma más rápida y efectiva los efectos de los frascos 2 y 4, van a estar caracterizadas por sustituciones y añadiduras de estos frascos en la combinación correcta (1 ×3 ×g), tal y como se observa en estos casos.

Esta combinatoria lógica y experimental se traduce al pensamiento en la forma de una combinatoria proposicional que permite establecer relaciones lógicas (implicaciones, conjunciones, exclusiones, etc.) que son de gran utilidad para organizar las posibilidades consideradas, las propias acciones desplegadas y las explicaciones correspondientes, aunque no haya una conceptualización evidente de la lógica subyacente. Por ejemplo, si se entienden los elementos de la tarea como enunciados lógicos, pueden ordenarse las siguientes posibilidades y sus actualizaciones debido a la experimentación con los frascos:

(1) Al efectuar las combinaciones posibles de 1 a 1 (1 × g; 2 × g; 3 × g; 4 × g), se actualiza la imposibilidad de obtener el color amarillo usando solo un frasco y esto conduce a la necesidad de obtener el resultado mediante composiciones, es decir que obtener el color *implica* la presencia de más de un frasco.

(2) Al efectuar las seis combinaciones posibles de 2 a 2 (1 × 2 × g; 1 × 3 × g; 1 × 4 × g; 2 × 3 × g; 2 × 4 × g; 3 × 4 × g), se descubre la combinación que da el color (1 × 3) que es una *conjunción* necesaria en relación a las demás composiciones que no darían el color. Así, puede descubrirse el efecto neutral del frasco 2 en relación a los frascos que dan el color. Pero el problema es que el efecto del frasco 4 sería el mismo que el de 2 y esto no es verdadero. Por esto van a ser necesarias las composiciones de 3 a 3.

(3) Al efectuar estas combinaciones posibles de 3 a 3 (1 × 2 × 3 × g; 1 × 2 × 4 × g; 1 × 3 × 4 × g; 2 × 3 × 4 × g) ya sea de manera sistemática o por sustituciones-añadiduras, se descubre puede saber con certeza que el efecto neutral del frasco 2 (puede estar presente como no y esto no afectaría la presencia o ausencia del color). Además puede descubrirse la *incompatibilidad* o *exclusión recíproca* entre el frasco 4 y la presencia

del color amarillo, ya que cada vez que entra en la mezcla el color no se presenta o cuando el color está presente es porque no se ha usado el frasco 4.

Estas consideraciones podrían expresarse en un lenguaje simbólico o axiomatizado pero debido a la complejidad que implica tal uso, se ha prescindido del mismo. A continuación se presentan ejemplos de casos que a diferencia de los anteriores, necesitaron apoyo del evaluador para descubrir el efecto del frasco 4. Como se mencionó, esta parte de la tarea puede generar dificultades si no se efectúan diversas combinaciones sistemáticas.

ALO (17 años, letras, resuelve la tarea con ayuda, razona apropiadamente).Inicia haciendo combinaciones con los cuatro frascos hasta que obtiene el color (1 × 2 × 3 × g). Cuando se pregunta cuáles son los frascos necesarios, dice: *"Supongo que el 1, 2 y 3 se tienen que utilizar. No sé si es que utilizando el 1, 3 y 4, obtengamos el color"*. Cambia el frasco 2 por el 4 (1 × 3 × 4 × g) y afirma lo que dijo antes sobre los frascos necesarios. Se pregunta por el efecto de 2: *"Como dijiste que son sustancias diferentes, tal vez es que el 4 y el 2 aportan cosas diferentes"*. Se pregunta cómo podría estar seguro y dice: *"Cambiando el 2 por el 4 como hice antes… no es tanto entre frasco y el otro, sino entre la combinación de los frascos"*. Se pregunta por la función de 2 en la mezcla y si esa sería la única forma de conocer su efecto. *"Como te dije, pienso que es por la combinación… A menos que ponga 1 y 3"*. Se le pide que pruebe (1 × 3 × g) y obtiene el color. *"En esta oportunidad he quitado el 2 de la muestra y sigue estando amarillo. Entonces el 2 no es necesario"*. Se pregunta por el efecto de 4 y dice: *"No ocurre nada"*. Se pregunta en qué se diferencian 2 y 4, entonces empieza con pruebas de 1 en 1 (4 × g; 1 × g; 3 × g; 2 × g) hasta que vuelve a contrastar ambos frascos en relación a la combinación que da el color (1 × 3 × 4 × g; 1 × 3 × 2 × g). Concluye lo siguiente: *"El 4 tiene, supongo, una característica que evita que al momento de echar g se convierta en amarillo. Y este, el 2, no tiene esta característica. Por lo tanto, 2 no influye cuando se mezcla el 1 y el 3. El 4 tiene una característica aparte, un plus. Esto evita que se ponga amarillo"*.

LIL (20 años, ciencias, resuelve la tarea con ayuda, razona apropiadamente). Empieza combinando todos los frascos y pregunta para qué se uso 'g'. Luego de la aclaración obtiene el color por casualidad, mezclando 1 × 2 × g × 3 y cambiando el orden 3 × g × 2 × 1. Se pregunta cuáles serían los frascos necesarios y dice: *"1 y 2"*. Se pregunta cómo podría estar segura y dice *"Ya lo relacioné con 3"*. Se pide que pruebe nuevamente, combina 1 × 3 × g, y obtiene el color. Dice: *"1 y 3"*. Cuando se pregunta por el efecto de 2 hace algunas pruebas (2 × g; 2 × g × 1; 3 × g × 2) y dice: *"Ya lo mezclé con 1 y con 3… No pasa nada"*. Cuando se pregunta por el efecto de 4, hace varias pruebas (4 × 3 × g; 2 × g × 4; 1 × g × 4 × 3 y diferentes variaciones; 1 × 3 × 4 × g × 2), pero el orden que usa para combinar los frascos no le permite saber su función, hasta que agrega 4 a una mezcla de color amarillo (1 × 2 × 3 × g… × 4) y observa como el color desparece; dice: "*¡Ah! no. Lo convierte… lo revierte*".

En estos ejemplos pueden apreciarse las mismas características que en los anteriores, acerca de la combinatoria sistemática, la relación de las combinaciones posibles y la combinación que da el color, y las sustituciones-añadiduras. Sin embargo, parece haber una diferencia en el nivel de ordenamiento y conciencia sobre el método, que dificulta descubrir el efecto del frasco 4. En el caso de ALO se induce la comparación de los frascos 2 y 4 para que emerjan las combinaciones de 3 a 3 y descubra el efecto de 4 por sustituciones. En el caso de LIL el problema es más de orden: para obtener el color al igual que para descubrir el efecto de 4, las variaciones que hace en la forma en que agrega los frascos al vaso de trabajo, le dificultan concluir correctamente la tarea.

A continuación se presentan los dos únicos casos de participantes que no lograron resolver correctamente esta tarea.

CAR (17 años, letras, no resuelve la tarea, razona inapropiadamente). "Voy a probar con cada uno". Inicia con combinaciones sistemáticas de 1 en 1 (1 × g; 2 × g; 3 × g; 4 × g) y luego de 2 en 2 (1 × 2 × g; 1 × 3 × g). Obtiene el color durante el proceso y afirma que los frascos necesarios son 1 y 3, pero agota las combinaciones de 2 en 2 (1 × 4 × g; 2 × 3 × g; 2 × 4 × g; 3 × 4 × g) para conocer los efectos de 2 y 4. Sobre el frasco 2 dice: *"Lo aumenta… para esta situación, para este compuesto, no tiene ninguna función"*. Sobre el frasco 4 dice: *"Son componentes diferentes… No, 4 no tiene la función que tiene 3. Para llegar al compuesto, el color, 4 no tiene una aplicación… así como dos"*. Se pregunta cómo está seguro y dice: *"Ya he probado"*. No llega a descubrir el efecto de 4 porque no realiza combinaciones de 3 en 3 para contrastar las funciones de 2 y 4 teniendo como referencia la combinación 1 × 3 × g.

KEV (18 años ciencias, no resuelve la tarea, razona inapropiadamente). Inicia haciendo combinaciones de todos los frascos (1 a 4). Obtiene el color por casualidad (1 × g × 3) y cuando se pregunta cuáles son los frascos necesarios dice: *"1, 3 y g. Pero creo que es un por un orden…* [Se le pide que pruebe y combina 3 × g × 1]... *¡Ah! no importa el orden"*. Cuando se pregunta por el efecto de 2, combina por separado con 1 y 3 (2 × g × 3; 1 × 2 × g) y dice: *"Parece que es como un ingrediente que no hace nada, que solo lo hace aumentar"*. Para el caso de 4, hace las combinaciones con los otros frascos (4 × 3 × g; 1 × 4 × g; 2 × 4 × g) y dice: *"Parece que es un ingrediente que tampoco hace algo...* [Se pregunta si es igual a 2]... *Parece que sí. No podría decirte"*. Cuando se le pregunta de qué otra forma podría saber la función de 4, menciona que necesitaría otra sustancia que de otro color para hacer combinaciones de 2 a 2, como ha venido haciendo. No realiza las combinaciones de 3 en 3 necesarias.

Estos dos casos son ejemplos claros sobre las dificultades que implica descubrir el efecto del frasco 4 y la imposibilidad de hacerlo correctamente si no se efectúan las combinaciones de 3 a 3. En un nivel se aprecian las características observadas en todos los casos anteriores en relación a la sistematización de la combinatoria y la conciencia de obtener el color amarillo por composiciones de más de un frasco. Sin embargo, a diferencia de los primeros tres casos en los que el uso de la combinatoria lógica ha alcanzado un nivel de equilibrio o relativa estabilidad en la organización y consideración del conjunto de la partes, en estos casos al no considerar y/o efectuar conscientemente este conjunto de combinaciones posibles, se limitan los descubrimientos y la solución apropiada de la tarea.

Tarea 6. Tareas piagetanas – Rotaciones de 180º – Ejemplos

Esta tarea pide pasar un cargamento de un lado a otro al interior de un almacén que tiene tres cocheras con camiones vacíos esperando. El cargamento puede llegar en cuatro posiciones diferenciadas(A, B, C, D) al otro lado y esto es indicado o pedido por el evaluador. La condición es que para pasar de un lado a otro tiene que hacerlo por las cocheras y usando los camiones vacíos. Usar una o más de las tres cocheras implica cambios de posición del cargamento: la cochera 1 hace una rotación horizontal (A); la cochera 2 una rotación vertical (B); la cochera 3 dos rotaciones horizontal y vertical simultáneamente (C); las cocheras 1 y 2 hacen lo que la 3 (C); la 1 y la 3 lo que hace la 2 (B); la 2 y la 3 lo que la 1 (A); y si se usan las tres el cargamento regresa a la posición de partida (D). La estructura de pensamiento que moviliza esta tarea es la del grupo INRC y sus propiedades de sistema con dos reversibilidades. Está emparentada con la combinatoria debido a que los cambios de posición del cargamento pueden interpretarse como cuatro asociaciones de base (de una matriz multiplicativa de dos entradas) que pueden componerse para obtener resultados diversos para solucionar problemas planteados (por ejemplo, el uso de dos cocheras para obtener el resultado que se obtiene con una cochera que no puede usarse).A continuación se presentan ejemplos de soluciones correctas a esta tarea.

ALO (17 años, letras, resuelve la tarea sin ayuda, razona apropiadamente). Acierta sin problemas los pedidos que implican usar una cochera: *"Sería la primera"* (para A), *"La 2. Simplemente voltea"* (para B), *"La 3. Llega y gira"* (para C). Esto indica que ha abstraído correctamente las transformaciones que genera cada cochera. Para 1 cerrada usa espontáneamente 2 y 3: *"Utilizo la 2 y luego la 3. Entro por acá, se pone así de espaldas. Acá llega y gira"*. Hace lo mismo, usa dos cocheras para los casos con 2 y 3 cerradas. Cuando se pide D, usa las tres cocheras por su cuenta (3 × 2 × 1). Finalmente cuando se le pregunta si en el último caso el orden de entrada a las cocheras importa, remite a la verificación y concluye que no: *“Puedo probar. Gira, luego pasa por la 1, se desliza; luego la 3, es igual. No importa el orden”*.

ANG (16 años, ciencias, resuelve la tarea sin ayuda, razona apropiadamente). Rápidamente acierta los pedidos A, B y C, lo cual indica una abstracción adecuada de las funciones diferenciadas de cada cochera. Para el caso de 1 cerrada, utiliza espontáneamente dos cocheras (2 × 3) y cuando se le pregunta por qué, dice: *“Para que me pueda quedar así”* (posición A). Hace lo mismo para los casos de 2 y 3 cerradas. Para el caso D, utiliza sin ayuda las tres cocheras (1 × 3 × 2). Cuando se le pide precisar si el orden importa, primero dice que sí, pero remite a la verificación [Prueba con 3 × 2 × 1] y concluye: *“¡Ah!, no. Al final no va a ser diferente, va ser lo mismo, voy a llegar a lo mismo”*.

Para aproximarnos a esta tarea y ejemplos, habría que considerar tres elementos funcionales y necesarios que están relacionados con la solución correcta o fallida de la tarea y las dificultades que pueden encontrarse en el proceso. Estos son: (a) una abstracción apropiada de la funciones de cada cochera que facilite el recuerdo, (b) la consideración de posibilidades, específicamente la de combinar cocheras y (c) una verificación empírica que de soporte a los razonamientos o explicaciones. En estos dos ejemplos y en todos los casos que se ubican en la misma categoría, puede observarse una abstracción correcta sobre las funciones de las cocheras, que se mantiene hasta el final de la tarea. También se aprecia que la consideración de posibilidades, especialmente para el caso de las transformaciones compuestas (cuando 1, 2 o 3 están cerradas), es completamente espontánea. Finalmente, el rol que juega la verificación empírica, especialmente cuando se precisa si el orden importa o no, es determinante para dar una respuesta adecuada.

Todos estos aspectos muestran que las acciones de los participantes están sustentadas en la presencia del grupo INRC y sus propiedades de doble reversibilidad o coordinación simultánea de dos sistemas de referencia (porque las rotaciones horizontales y verticales del cargamento se entienden como inversiones simples). Si bien puede hacerse un análisis lógico de las asociaciones de base mencionadas, para indagar y explicar la presencia de las propiedades del grupo INRC en los razonamientos (operaciones de la lógica proposicional) que están a la base de las acciones de los participantes, se ha preferido focalizar en los aspectos descritos en el párrafo anterior, porque las dificultades para resolver la tarea parecen estar directamente emparentadas con estos, como se observa en los ejemplos que se presentan a continuación:

MAR (19 años, ciencias, resuelve la tareas con ayuda, razonamiento en desequilibrio). Se pide A y dice: *"La 2 o la 3"*. Se pregunta si está segura: *"Sí, mira, porque esta puede pasar por aquí…"*. No recuerda las pautas dadas y se explican nuevamente. Se vuelve a pedir A, usa 1 y acierta para B (usando 2) y C (usando 3). Para el caso de 1 cerrada concibe una forma que no considera las reglas del juego (no usando las cocheras). Se le sugiere que use dos cocheras y dice que no saldrá igual. Cuando empieza probar se hace evidente que ha olvidado las transformaciones de cada cochera. Se vuelven a explicar y acierta para 1, 2 y 3 cerradas. En el caso D, no tiene problemas: *"Ya. Tiene que pasar por todos igual. Sí... si este va así, que no hago nada* (1)*, luego este se da la vuelta así* (2) *y este dobla así* (3)*"*. Cuando se pide que precise si el orden importa dice que sí, pero verifica: *"¿Puedo intentarlo? Giro* (2)*… este llega* (3)*… este igual* (1)*. ¡Oh! No importa el orden. Me faltaría una para probar. Vale la pena intentar.* [Hace 1 × 3 × 2]. *No importa el orden"*.

ADRI (17 años, letras, resuelve la tarea con ayuda, razonamiento en desequilibrio). Se pide A y dice: *"¿Este es así, cierto?* [Se equivoca]... *Entonces no me acuerdo… Tengo una memoria malísima"*. Se vuelven a explicar las transformaciones de cada cochera y acierta A, B, y C. Para el caso de 1 cerrada tiene dificultades y dice: *"No entiendo. La forma para salir así es la 1, pero no se puede salir por la 1"*. Se le pregunta si tiene que usar necesariamente una sola cochera, a lo que responde: *"¡Ah!, puedo pasar varias veces por aquí… Entonces creo que pasaría por esta* (1)*, regresaría y pasaría por esta* (2)*"*. Hace lo mismo para 2 y 3 cerradas. Para el caso D no necesita ayuda y mientras prueba descubre que debe usar la tres cocheras: *"Creo que pasaría por esta* (2) *y luego por aquí* (1)*, así. ¿Por aquí se pasa así, no?* (3)*… ¡Ah!, por las tres"*. Cuando se pide que precise si importa el orden, observa detenidamente la maqueta y hace algunos ademanes y dice: *"Claro. No, no importa el orden"*.

En estos dos ejemplos podemos identificar problemas con dos aspectos importantes para resolver la tarea. En primer lugar, especialmente en el caso de ADRI, se dificultan las abstracciones adecuadas de las funciones de cada cochera y eso se manifiesta en el constante olvido de las transformaciones que generan. En segundo lugar, la consideración de posibilidades está limitada, no es espontánea y necesita de la intervención del evaluador quien es el que sugiere el uso de más de una cochera. Sin embargo, ambas dificultades no impiden que los participantes logren terminar la tarea correctamente. Es interesante como el aspecto de la verificación empírica, para el caso de precisar la importancia del orden, emerge naturalmente. Esto podría deberse a una toma de conciencia (fomentada por el evaluador) sobre la distintas posibilidades que pueden darse en la tarea y la necesidad de comprobar en la acción para afirmar que el orden no importa.

A continuación se presentan los dos únicos ejemplos de participantes que no lograron resolver completamente la tarea:

XIO (16 años, letras, no resuelve la tarea, razonamiento en desequilibrio). Se pide A y dice: *"La 1... Al momento de deslizarse llega así"*. Luego se pide B y dice: *"Si no me equivoco, la tercera. Se desliza, dobla así y... esta no es. Entonces sería la segunda"*. Acierta C y comenta: *"Cada cochera tiene propio funcionamiento y al trasladarlo de una manera, será de acuerdo a como funciona cada cochera"*. Para el caso de 1 cerrada, dice: *"Creo que no se podría...* [Luego de decirle que pruebe usando dos]... *¿Cómo? ¿Así? ¡Ah!, ya entendí. Que regrese. ¡Oh! Ahora si queda* [Pasa por 2 luego por 3]*"*. Hace lo mismo para la demás cocheras cerradas y comenta: *"Al punto que llegamos es que podrías usar dos cocheras para que quede así. O sea, se puede llegar a lo que queremos pero tenemos que combinar las cocheras"*. Cuando se pide D, sin problemas pasa por 1, después por 2 y al final por 3. Cuando se pide que precise si el orden es importante, dice: *"Sí, porque tengo que ver en qué cochera debo hacer un cambio...Si no cumples el orden no vas llegar al resultado...* [Luego de probar otro orden]... *Parece que no tanto. Bueno, he probado al azar... para mi sigue siendo importante el orden"*.

CAR (17 años, letras, no resuelve la tarea, razona inapropiadamente). Tiene dificultades desde el inicio para hacer A, B y C, hasta que se le recuerdan los distintos cambios de posición de 1, 2 y 3. Para el caso de 1 cerrada, dice: "No *puedo, porque en este caso…Si son solo estas dos, no se puede"*. Se pregunta si no habría alguna posibilidad de hacer1o en esas condiciones y dice: *"Pero no se puede. Con las reglas que tú me has dado, en esta posición definitivamente no sé puede… Me has dado reglas y la última ha sido cerrarme esta cochera. Solo hay dos cocheras y me estás preguntando que si pudiera entrar por una. La respuesta es no"*. Se pregunta qué pasaría si usara dos cocheras y dice: *"¿Se puede hacer eso? Se da la vuelta y ahora sí puede entrar.* [Hace 2 × 3] *Ya"*. Sin embargo, para el caso de 2 y 3 cerradas vuelve a tener dificultades: *"¿Que llegue acá? No, no se puede.* [Se recuerda los cambios por cochera y que puede regresar]. *Me olvidé que podía darse la vuelta"*. Para el caso D acierta sin problemas: *"¡Ah! claro, este es así* (1). *Este así, este carro por acá* (2), *tengo que llevar esto* (3)*"*. Finalmente cuando se pide que precise si el orden es importante, dice: *"Hay muchas maneras de llegar, pero no siempre. En esta situación, yo creo que solo había esta manera"*. Se pregunta si pasaría lo mismo haciéndolo en otro orden, dice: *"No necesariamente. Traté de hacerlo así"*. Termina y no verifica.

Estos ejemplos confirman lo que se viene diciendo sobre los tres aspectos esenciales para resolver la tarea correctamente y con menos dificultades. En relación a la abstracción apropiada de las funciones de las cocheras, se observan dificultades desde el inicio que permanecen a lo largo de la tarea, salvo en el caso de XIO que conceptualiza bien este aspecto luego de repetirse las funciones de cada cochera. Sobre la consideración de posibilidades para usar más de dos cocheras, se aprecia una limitación tal en ambos casos, que es necesario que el evaluador les pida directamente que usen dos cocheras. Del mismo modo que en el aspecto anterior, XIO tematiza apropiadamente esta posibilidad, mientras que CAR limita completamente su perspectiva sobre las reglas dadas (es decir, no considera que pueden haber posibilidades que no entren en conflicto con las reglas). Finalmente, el aspecto de verificación empírica va a determinar que estos participantes no logren resolver la tarea completamente, específicamente el problema referente al orden en el uso de las cocheras para obtener la posición D. Por su lado, XIO empieza a verificar y aunque obtiene un resultado que le indica que el orden no es relevante, apela a su creencia y deja pasar este dato limitándose a decir que *para ella* el orden sí importa. En el otro caso, CAR ni siquiera verifica.

Hasta este punto, se han revisado, detallado y comentado cada una de las tareas y el respectivo desempeño de algunos participantes en estas. Se han considerando aspectos teóricos para describir las diversas acciones y explicaciones desplegadas por los participantes ante los problemas planteados. Resta, entonces, articular toda la información analizada para discutir cuestiones teóricas generales sobre el pensamiento formal, el sistema combinatorio como su aspecto nuclear y el impacto del desarrollo de esta noción en desarrollo del pensamiento formal cotidiano y en la formación del pensamiento científico.

Discusión y conclusiones generales

Si retomamos la hipótesis planteada al inicio de esta investigación podemos decir que, efectivamente, la mayoría de problemas de combinatoria propuestos a los participantes han sido correctamente resueltos. Tanto los métodos que usaron como las explicaciones que dieron al resolver las tareas, manifiestan la disociación de factores y la construcción del conjunto de las partes, que constituyen las características principales de la operación combinatoria que se construye desde el inicio de la etapa del pensamiento formal. Ahora, resulta sumamente relevante dar cuenta de las diferencias intra e inter individuales observadas en estas soluciones y explicaciones, para explicar por qué algunas fueron correctas y otras fallidas.

Estudios sobre el pensamiento formal (Arlin, 1975; Keating, 1975; Schwebel, 1975; Kuhn, 1976; Kuhn & Agelev, 1976; Lawson, 1977; Demetriou & Efklides, 1979, 1985; Roberge & Flexer, 1979; Wollman, Eylon & Lawson, 1979; Commons, Richards & Kuhn, 1982; Meehan, 1984; Cherian, Kibria, Kariuki & Mwamwenda, 1988) y otros específicamente sobre combinatoria (Youniss & Dean, 1974; Kuhn & Agelev, 1976; Scardamalia, 1977; Nagy & Griffiths, 1982; White, 1983, 1984; Lyn English, 1991, 1993), han planteado que los aportes del modelo piagetiano no son suficientes para explicar la gama de diferencias y dificultades observadas en el desempeño de los sujetos ante problemas de naturaleza formal. Pero estas críticas son inconsistentes si se considera que muestran un entendimiento muy general sobre la teoría, restringiendo el pensamiento formal a un estadio estático al perder de vista el proceso general de evolución lógica del pensamiento y los procesos e instrumentos involucrados en este desarrollo. Estas limitaciones condicionan el uso y entendimiento de conceptos como *desempeño* y *capacidad*, porque plantean distinciones que no derivan en una comprensión de ambos como necesariamente complementarios y dependientes de aspectos más generales del desarrollo cognoscitivo, lo que genera que se perciban inconsistencias en el modelo de Piaget (Lorenzo & Machado, 1996´; García 2000).

En el caso de las tareas propuestas, la estructura de pensamiento necesaria para resolver adecuadamente estos problemas es la que integra el sistema combinatorio y el grupo INRC, cuyas manifestaciones funcionales generales son la disociación de factores y la construcción de un conjunto de partes. Esto quiere decir que la capacidad combinatoria permite al sujeto concebir y desplegar una serie de procedimientos o métodos posibles que van a tener en común las disociaciones y el armado de conjuntos o totalidades (Piaget, 1981/1987). Al entenderlo de esta forma, la teoría describe y explica el conocimiento en estado de *equilibrio*, es decir, cuando este ha logrado una relativa estabilidad que se manifiesta en acciones y operaciones organizadas, mejor autorreguladas y que articulan múltiples puntos de referencia en la solución de problemas. En otras palabras, hace referencia a capacidades constituidas y desempeños que ejemplifican de manera clara y precisa dicha estabilidad (García, 2000, en Castorina, 2002).

Si se pone el foco de atención en los desempeños posibles ante problemas de combinatoria, incluyendo los erróneos, pueden explicarse las variaciones haciendo referencia a los aspectos de la teoría que describen y explican el dinamismo en la construcción del sistema cognitivo y su constante *equilibración*. Es decir, los aportes de la teoría de Piaget que dan cuenta de modalidades, procesos, mecanismos e instrumentos cuya acción iterativa está involucrada en la construcción, evolución y uso de las herramientas de conocimientos. En este caso, la construcción y despliegue de esquematizaciones cognoscitivas propias de la combinatoria del pensamiento formal para la solución de los problemas planteados, va a estar mediada por *abstracciones* encargadas de asimilar, estructurar y reorganizar el pensamiento y los razonamientos (Piaget, 1977/1979), que se articulan con *generalizaciones* que expanden la capacidad asimiladora de las estructuras del conocimiento (Piaget y García, 1982/2008). Además por progresivas *toma de conciencia* que conceptualizan la actividad interna del sistema y la acción efectuada (Piaget, 1981) y por procesos de *significación* y *búsqueda de razones* que vinculan las esquematizaciones del conocimiento atribuidas a los problemas y que movilizan las abstracciones, tomas de conciencia y generalizaciones (Piaget, 1986, 2006; Piaget y García, 1997; García, 2000).

Es importante entender que los desempeños apropiados que condujeron a soluciones correctas, son producto de una estabilidad en el proceso de desarrollo de la capacidad combinatoria, dada por una mejor equilibración o coordinación efectiva de los mecanismos y procesos descritos anteriormente. Pero estas coordinaciones ocurren también en el marco de procesos más generales en los que se integran y equilibran dos modalidades del sistema cognitivo. Por un lado, está lo *necesario* que hace referencia a los esquemas y estructuras atemporales que se conservan en el curso del desarrollo y que caracterizan el funcionamiento aplicándose a distintas actividades y dominios generales de lo real (Piaget, 1986); por otro lado está lo *posible*, que hace referencia a los esquemas temporales o procedimientos dinámicos y continuamente variantes que se generan y conciben antes de efectuar una acción orientada a solucionar un problema

(Piaget, 1981/1987). En este caso, el esquema formal de combinatoria (y en realidad cualquier estructura operatoria) es producto de la síntesis de ambas modalidades y sus niveles de equilibración y coordinación se van a manifestar en la capacidad para desplegar una estructura necesaria que permita el llevar a cabo procedimientos o estrategias que aseguren la solución del problema. Complementariamente, la coordinación de estos procedimientos posibles va a asegurar el uso correcto y efectivo de la operación necesaria, autorregulando la actividad del sujeto.

A continuación se mostrará con ejemplos, cómo estos conceptos van a explicar la variedad de soluciones y explicaciones observadas en este estudio. Si nos fijamos en los participantes que resolvieron todas las tareas adecuadamente (ver tabla 3), podemos apreciar en ellos una capacidad combinatoria cuyo desarrollo lógico ha alcanzado cierto equilibrio. Por un lado, los significados que estos participantes han atribuido a los problemas y al contexto de participación en una investigación se han articulado como razones para desplegar pensamientos y razonamientos que les permitieron concebir métodos posibles para resolver los problemas. Por eso, en sus hojas de anotaciones se pudieron observar gráficas, esquemas y operaciones que son procedimientos que permitieron una solución correcta porque tenían implicados la disociación de factores y la construcción de un conjunto de partes para enumerar todos los casos posibles (tareas 1, 2, 3 y 4), para conocer el efecto de una combinación especifica dentro de un grupo de combinaciones posibles (tarea 5) y para combinar operaciones que compensan otras que no pueden realizarse por alguna circunstancia (tarea 6). Además, fueron capaces de explicar apropiadamente su actividad, lo que es muestra de una conceptualización o toma de conciencia sobre lo hecho. Algunos inclusive pudieron reconocer la similitud estructural de las tareas, lo cual es signo de una generalización constructiva de la capacidad combinatoria aplicada a diferentes contenidos. Algo bastante interesante es que el equilibrio alcanzado por estos participantes en relación al desarrollo de la capacidad combinatoria, se manifiesta en la articulación de procedimientos de sistematización y verificación exhaustiva que permiten el monitoreo y autorregulación de la actividad y las operaciones dirigidas a la solución correcta del problema, lo cual manifiesta una coordinación adecuada entre las modalidades de lo posible y lo necesario para la comprensión y solución de las tareas propuestas.

Ahora, de la explicación del desempeño de estos participantes puede inferirse que los demás desempeños, que van desde resolver cinco de las seis tareas a resolver solo una, van a mostrar distintos momentos y niveles de desarticulación o descoordinación entre procesos específicos y más generales, debido a un menor nivel de equilibración general mientras construían las herramientas necesarias para solucionar los problemas.

Pueden observarse participantes que inicialmente fallaron en una tarea porque aplicaron algoritmos “aprendidos” mecánicamente y no pudieron dar cuenta de las razones de su uso, lo que indica una generalización inicial no reflexiva y desarticulada con una toma de conciencia de la actividad; aunque luego, la reflexión sobre estas experiencias y/o la misma interacción con el evaluador generó que sus desempeños se corrijan y lleguen a ser correctos en el mismo o demás problemas. Otra fuente de error viene de la ausencia de procedimientos autorreguladores como las sistematizaciones y verificaciones, lo cual es signo de descoordinaciones a un nivel más general, entre lo necesario y lo posible. Los participantes que fallan menos, solo muestran estos desequilibrios momentáneamente y logran remontarlos. Sin embargo, los participantes que fallaron en más tareas, parecen mostrar un desequilibrio más nuclear, que concierne a los procesos significadores y de búsqueda de razones y que los llevan a desplegar abstracciones incompletas y generalizaciones simples que se manifiestan en procedimientos menos complejos que no facilitaron la solución correcta de los problemas de combinatoria. Este desequilibrio podrían mencionarse conjuntamente con manifestaciones de desinterés y desgano por resolver algunas de las tareas, especialmente las que tienen un componente de cálculo, tal vez por su naturaleza más abstracta o porque los problemas matemáticos podrían comportar significaciones sociales que pertenecen a experiencias previas en un sistema educativo que usualmente falla en motivar a los estudiantes en estos dominios, al mismo tiempo que mecaniza sus procedimientos en presencia de diversos problemas.

En conclusión, la variedad de los desempeños observados en la tareas (ver tabla 4) puede explicarse por la acción más o menos efectiva y articulada de los procesos que tienen que ver con el uso y construcción del esquema operatorio formal de combinatoria y con los procedimientos que regulan estas operaciones. En un sentido, estas variaciones no representan una evidencia que se contraponga con la teoría piagetana, sino que son un ejemplo claro de la alta complejidad de la actividad cognoscitiva tal y como la concibe esta perspectiva. Por esto, una aproximación desde el modelo piagetano haría menos relevante que la evaluación se enfoque en buscar si los participantes poseen o no la capacidad combinatoria. Lo que se busca, desde esta perspectiva epistemológica, es evidenciar la importancia del desarrollo de este esquema formal y su utilidad, la cual puede extenderse a la solución adecuada de diversos problemas cotidianos pero especialmente a los problemas que se plantean en el terreno de la formación y producción académica y científica. En otras palabras, no se trata de identificar la presencia o ausencia del esquema de combinatoria, sino de describir y explicar sus múltiples manifestaciones mediante procesos y niveles dinámicos de desarrollo.

En sí, la capacidad combinatoria es importante porque permite la consideración de todas las posibilidades ante un problema, pero esta tiene que ser consciente, sistemática y hacer necesario el despliegue de mecanismos verificadores cada vez más avanzados, para que los resultados que generen sean provechosos para el sujeto. En el mundo académico universitario, estas capacidades son necesarias para la compresión de textos (razonamiento proposicional e interproposicional) y para el planteamiento de problemas sobre situaciones complejas que suceden por la interacción de diversas causas (disociación de factores y conjunto de la partes). Además, el desarrollo de esta capacidad lógica hace posible la construcción de nociones más complejas (como la de probabilidad) que se conservarán como piezas clave para el desarrollo del pensamiento científico.

Siendo esto último una meta de los sistemas de educación superior (UNESCO, 2009), resulta aún más importante que los programas educativos de las instituciones universitarias fomenten interacciones y situaciones en las que los estudiantes tomen conciencia sobre los procesos involucrados en la construcción y uso de herramientas cognitivas que exhiben mayor nivel de complejidad lógica. Es especialmente importante fomentar interacciones en las que se reflexione y coordine lo que se plantea como necesario y lo que se concibe como posible, pues el equilibrio entre estos dos aspectos permite que los sujetos lleven a cabo procedimientos que aseguren un mejor desarrollo, control y autonomía en sus procesos de aprendizaje. En relación al desarrollo del pensamiento científico, es muy importante que se faciliten espacios en los cuales los estudiantes puedan reflexionar sobre la ciencia, concibiéndola como una actividad cognitiva que indefectiblemente debe estar regulada por tres aspectos: la necesidad de coherencia interna del sistema lógico que explica lo real, la necesidad de verificación experimental que confirme la coherencia del sistema y las interacciones sociales que son la fuente de demandas y requerimientos a los que la comunidad de científicos responde con la creación de nuevos conocimientos.

Finalmente, resta mencionar que esta investigación inicial debe complementarse con otros estudios que se han hecho en el Perú con poblaciones semejantes y que reportan dificultades generales para el uso efectivo de nociones formales más elaboradas (ver los estudios citados en la última parte de la introducción). Además, sería importante realizar otros estudios con otras poblaciones de menor y mayor edad, en otros contextos educativos y socioeconómicos y, para tener una visión más completa de la actividad cognitiva de los sujetos, considerar tareas que evalúen los procesos de pensamiento a través de actividades ligadas no solamente a lo lógico-matemático en su sentido más puro, sino con contenidos relativos a disciplinas como la economía, el arte, la filosofía, las ciencias naturales y las ciencias sociales.

Referencias

Acevedo, J. A. y Oliva, J. (1995). Validación y aplicaciones de un test de razonamiento lógico. *Revista de Psicología General y Aplicada*, *48* (3), 339-351.

Acevedo, J. A. y Romero, S. (1992). El desarrollo del razonamiento lógico en matemáticas: correlación y combinatoria. *Suma*, *11-12*, 42-52.

Aguilar, M., Navarro, J., López, J. y Alcalde, C. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema*, *14* (2), 382-386.

Allaire-Dagenais, L. (1984). Étude transversale des structures opératoires formelles de combinatoire et de double réversibilité. *Canadian Journal Of Behavioural Science/Revue Canadienne Des Sciences Du Comportement*, *16*(3), 238-248.

Antoni, E. y Quaglino, M. (2001). Desempeño académico y capacidad lógico-formal. Sextas de Jornadas de "Investigaciones en la Facultad" de Ciencias Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario.

Barratt, B. (1975). Training and Transfer in Combinatorial Problem Solving: The Development of Formal Reasoning During Early Adolescence. *Developmental Psychology*, *11*(6), 700-704.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies In Mathematics*, *32*(2), 181-199.

Beth, E. y Piaget, J. (1968). *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Madrid: Ciencia Nueva.

Castorina, A. (2002). Entrevista a Rolando García. Piaget, las ciencias y la dialéctica. *Revista Herramienta*, *19*.

Cherian, V., Kibria, G., Kariuki, P. & Mwamwenda, T. (1988). Formal Operational Reasoning in African University Students. *Journal Of Psychology*, *122*(5), 487.

Commons, M., Richards, F. & Kuhn, D. (1982). Systematic and Meta systematic Reasoning: A Case for Levels of Reasoning beyond Piaget's Stage of Formal Operations. *Child development*,*53*, 1058-1069.

Danner, F. & Day, M. (1977). Eliciting Formal Operations. *Child development*, *48*, 1600-1606.

Demetriou, A. & Efklides, A. (1979). Formal operational thinking in young adults as a function of education and sex. *International Journal of Psychology*, *14*, 241-253.

Douglas, J. & Wong, A. (1977). *Formal Operations: Age and Sex Differences in Chinese and American Children. Child development*, *48*, 689-692.

Ducret. J-J. (2004). Methode clinique-critique piagetienne. *Service de la recherché en education*, Gèneve.

English, L. (1993). Children's Strategies for Solving Two- and Three-Dimensional Combinatorial Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, No. 3, 255-273.

Escurra, L., Delgado, A., Quesada, R., Rivas, G., Santos, J., y Pequeña, J. (1991). Adaptación psicométrica del test de operaciones combinatorias (T.O.C.F) de Longeot de acuerdo al modelo de Mokken. *Revista de Investigación Psicológica – UNMSM*, *2* (2), 57-77.

Ferrari de Zamorano, M. A. (1991). Lenguaje, sistemas de significación y pensamiento formal en adolescentes sordos. *Psicología-USP*, *2* (1/2), 33-47.

Fischbein, E. & Grossman, A. (1997). Schemata and Intuitions in Combinatorial Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(1), 27-47.

Frisancho, S. (1996). *Razonamiento probabilístico en estudiantes universitarios*. Tesis de Maestría – Pontifica Universidad Católica del Perú. Escuela de Graduados. Mención: Psicología.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción. De las formulaciones de Jean Piaget a la teoría de sistemas complejos*. Barcelona: Gedisa.

García, R. (2006). *Sistemas complejos. Conceptos, método y fundamentación epistemológica de la investigación interdisciplinaria*. Barcelona: Gedisa.

Grimaldi, R. (1997). *Matemáticas discreta y combinatoria: una introducción con aplicaciones*. Wilmington, Del: Addison-Wesley.

Hernández, K. (2008). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la solución de problemas combinatorios. Tesis de Ingeniería Matemática – Instituto Politécnico nacional de México. Escuela Superior de Física y Matemáticas. http://www.unesco.org/education/WCHE2009/comunicado_es.pdf

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955/1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente: ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales*. Buenos Aires: Paidós.

Keating, D. (1975). Precocious Cognitive Development at the Level of Formal Operations. *Child development*, *46*, 276-280.

Kuhn, D. & Agelev, J. (1976). An Experimental Study of the Development of Formal Operational Thought. *Child Development*, *47*, 697-706.

Kuhn, D. (1976). Relation of Two Piagetian Stage Transitions to IQ. *Developmental Psychology, 12*(2), 157-161.

Lawson, A. (1977). Relationships among performances on three Formal operations tasks. *The Journal of Psychology, 96*, 235-241.

Lorenzo, O. & Machado, A. (1996).In Defense of Piaget's Theory: A Reply to 10 Common Criticisms. Psychological Review, *103*(1), 143-164.

Lunzer, E. (1965). Problems of Formal Reasoning in Test Situations. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *30*(2), 19-46.

Martorano, S. (1977). A Developmental Analysis of Performance on Piaget's Formal Operations Tasks. *Developmental Psychology*, *13*(6), 666-672.

Meehan, A. M. (1984). A Meta-Analysis of Sex Differences in Formal Operational Thought. Child Development, *55*(3), 1110-1124.

Ministerio de Educación del Perú – MINEDU (2009). Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular - DCN. Lima: Ministerio de Educación del Perú.

Moshman, D. (1977). Consolidation and Stage Formation in the Emergence of Formal Operations. *Developmental Psychology,13*(2), 95-100.

Morgado, L. y Parrat-Dayan, S. (2006). Conversas livres com a criaça: Problemas e métodos. *Associaçaõ Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional (ABRAPEE)*, *10* (2), 315-321.

Mwamwenda, T. S. (1993). Sex differences in Formal Operations. *Journal of Psychology*, *127*(4), 419-425.

Mwamwenda, T. S. (1999). Undergraduate and Graduate Students' Combinatorial Reasoning and Formal Operations. *Journal Of Genetic Psychology*, *160*(4), 503.

Nagy, P. & Griffiths, A. K. (1982). Limitations of Recent Research Relating Piaget's Theory to Adolescent Thought. *Review of Educational Research*, *52*(4), 513-556.

Piaget, J. (1951). *La genèse de l'idèe de hasard chez l'enfant*. Versión electrónica de los capítulos 7, 8 y 9 de la obra original. Extraído de http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/textes/index_extraits_chrono4.php

Piaget, J. (1965/1973). *Sabiduría e ilusiones de la filosofía*. Barcelona: Ediciones Península.

Piaget, J. (1967). *Génesis de las estructuras lógicas elementales: clasificaciones y seriaciones*. Buenos Aires: Guadalupe.

Piaget, J. (1969). *Biología y conocimiento: ensayo sobre las relaciones entre las regulaciones orgánicas y los procesos cognoscitivos*. Madrid: Siglo Veintiuno Editores.

Piaget, J. (1970). *La epistemología genética*. Barcelona: A. Redondo.

Piaget, J. (1972/2008). Intellectual Evolution from Adolescence to Adulthood. *Human Development, 51*, 40–47.

Piaget, J. (1975). *Génesis del número en el niño*. Bueno Aires: Guadalupe.

Piaget, J. (1976). *El lenguaje y el pensamiento en el niño. Estudio sobre la lógica del niño (I)*. Buenos Aires: Guadalupe.

Piaget, J. (1977/1979). *Estudios sobre la Abstracción Reflexionante* 1 y 2. Editorial: Huemul, Argentina.

Piaget, J. (1978). *Investigaciones sobre la contradicción*. México: Siglo XXI.

Piaget, J. (1978). *La equilibración de la estructuras cognitivas: problema central del desarrollo*. Madrid: Siglo Veintiuno Editores.

Piaget, J. (1981). *La toma de conciencia*. Madrid: Morata.

Piaget, J. (1981/1987). *Possibility and Necessity. Volume 1: The role of possibility in cognitive development*. Translated from the French by Helga Feider. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Piaget, J. (1986). Essay on necessity. *Human Development, 29*, 301-14. Traducción y comentarios por Smith, L.

Piaget, J. (2006). Reason. *New Ideas in Psychology, 24*, 1-29. Traducción y comentarios por Smith, L.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1968). *Psicología del niño*. Madrid: Morata

Piaget, J. y García, R. (1973). *Las explicaciones causales*. Barcelona: Barral Editores, S. A.

Piaget, J. y García, R. (1982/2008). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Piaget, J. y García, R. (1997). *Hacia una lógica de las significaciones.* Barcelona: Gedisa.

Pinargote, M. (2010). Evaluación de un programa para el desarrollo del pensamiento formal en los alumnos del decimo año de educación básica del colegio fisco misional “Cristo Rey” de la ciudad de Esmeraldas. Tesis de Maestría en desarrollo de la inteligencia y educación – Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Universidad técnica Particular de Loja.

Programme for International Student Assessment (PISA). *PISA 2009 Assessment Framework. Key competencies in reading, mathematics and science*. Extraído de http://www.oecd.org/document/44/0,3746,en_2649_35845621_44455276_1_1_1_1,00.html.

Roa, R., Batanero, C. y Godino, J. (2001). Dificultad de los problemas combinatorios en estudiantes con preparación matemática avanzada. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *47*, 33-47.

Roberge, J. & Flexer, B. (1979). Further Examination of Formal Operational Reasoning Abilities. *Child Development*, *50*(2), 478-484.

Rosenthal, D. (1979). Acquisition of formal operations. The effects of two training procedures. *The journal of Genetic Psychology*, *183*, 125-140

Scalon, A., Osti, A. y Brenelli, R. (2012). Combinação de Líquidos: Uma Análise do Pensamento Operatório Formal por meio do Método Cínico. *Scheme: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas*, *4*(1), 85-108.

Scardamalia, M. (1977). Information Processing Capacity and the Problem of Horizontal Décalage: A Demonstration Using Combinatorial Reasoning Tasks. *Child Development*, *48*(1), 28-37.

Schwebel, M. (1975). Formal operations in first year college students. *The Journal of Psychology*, *91*, 133-141.

Shin, J., & Steffe, L. (2009). Seventh Graders' Use of Additive and Multiplicative Reasoning for Enumerative Combinatorial Problems. *Conference Papers -- Psychology Of Mathematics & Education Of North America*, *1*.

Smith, L. (1993). Necessary knowledge: piagetian perspectives on constructivism. Hove: Lawrence Erlbaum Associates.

UNESCO (2009). Comunicado mundial sobre la educación superior – 2009: La nueva dinámica de la educación superior y la investigación para el cambio social y el desarrollo. Recuperado de:

Vázquez, S. M. y Difabio de Anglat, H. (2009). Logro académico y pensamiento formal en estudiantes de ingeniería. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7* (2), 653-672.

Vilenkin, N. (1972). *De cuántas formas? Combinatoria*. Moscú: Mir.

Ward Bynum, T., Thomas, J. & Weitz, L. (1972). Truth-Functional Logic in Formal Operational Thinking: Inhelder and Piaget's Evidence. *Developmental Psychology*, *7*(2), 129-132.

White, H. (1983). The Development of Combinatorial Reasoning: The Role of Cognitive Capacity. *Journal Of Genetic Psychology*, *145*(2), 185.

White, H. (1984). Breakdowns in Combinatorial Reasoning: The Role of Memory. *Journal Of Genetic Psychology*, *146*(3), 431.

White, K. & Ferstenberg, A. (1978). Professional specialization and formal operations: The balance task. *Journal Of Genetic Psychology*, *133*, 97-104.

Wollman, W., Eylon, B. & Lawson, A. (1979). Acceptance of Lack of Closure: Is It an Index of Advanced Reasoning. *Child development*, *50*, 656-665.

Youniss, J. & Deann, A. (1974). Judgment and Imaging Aspects of Operations: A Piagetian Study with Korean and Costa Rican Children. *Child Development*, *45*(4), 1020-1031.