

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA



**“CÁLCULO Y DISEÑO DE UN ABSORSOR DE VIBRACIONES
TORSIONALES TIPO PÉNDULO PARA UN MOTOR DE
COMBUSTIÓN INTERNA DE 2 CILINDROS Y 4 TIEMPOS”**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAGÍSTER EN
INGENIERÍA MECÁNICA**

PRESENTADA POR:

KENNY ALBERTO MELENDRES QUISPE

ASESORADA POR:

DIPL.-ING. LUIS ALFREDO CONTRERAS CARRANZA

LIMA – PERÚ

2012

RESUMEN

En la industria nacional, donde es predominante el uso de máquinas rotativas como turbinas, motores eléctricos, compresores, motores de combustión interna, etc, el fenómeno de las vibraciones es descubierto cuando ya estos están en operación. Las fuerzas y torques de excitación por más pequeñas que sean pueden producir vibraciones de amplitudes inadmisibles en zona de resonancia. El análisis de las vibraciones es muy importante más aun en maquinas reciprocantes donde es muy importante el análisis de vibración torsional, ya que nos hace ver la necesidad de usar algunas técnicas para controlar estas vibraciones. Técnicas como medios disipadores de energía o masas auxiliares acopladas al sistema, que sintonizados con la frecuencia de resonancia y aplicados en las zonas que presentan mayor amplitud de vibración correspondiente al modo de vibración, nos ayudarán a neutralizar las vibraciones que se presenten.

El análisis del comportamiento de estos sistemas se hacen por lo general considerando los parámetros de inercia y rigidez constantes, los cuales son estudios válidos, sin embargo existen máquinas con mecanismos más complejos que exigen considerar el comportamiento periódico de sus parámetros, como es el caso del mecanismo biela manivela muy utilizado en la fabricación de máquinas; en esta tesis se tomó a consideración tal comportamiento y se diseñó un absorber pendular basados en la metodología del diseño, normalizado según la norma alemana VDI, para obtener el diseño óptimo, además de analizar la efectividad en la reducción de la amplitud de vibración torsional de un motor de combustión interna de 2 cilindros en línea y 4 tiempos.

Finalmente el desarrollo de esta tesis es una base para posteriores investigaciones donde habría que tomar en cuenta aspectos como la variación constante de la velocidad y la comparación de los resultados obtenidos por simulación numérica y datos experimentales medidos, que no se consideraron en esta tesis.

Dedico este logro a Dios, a mi hijo Joaquín, a mi esposa Hilda, a mis Padres Luis y Zonia, a mi hermano Edwin, a mi Abuelita Justina y a mis Abuelitos Hipólito y Alejandrina que en paz descansen, quienes son el motor y motivo que siempre me impulsan a lograr mis metas personales.

AGRADECIMIENTOS

Porque este trabajo de tesis fue logro no solo de una persona si no de un grupo de personas comprometidas con lograr un estupendo trabajo, es digno dar mi más sincero agradecimiento:

- A mis Padres por el apoyo incondicional en el tiempo que me tomó terminar mis estudios de maestría y la presente tesis. Gracias mamá por tus consejos, gracias Papá por estar ahí cuando lo necesité.
- A mi asesor de tesis, Dipl.-Ing. Luis Alfredo Contreras Carranza, por sus valiosos consejos y asesorías. Gracias por ser un asesor ejemplar y gran orientador.
- Al Dipl.-Ing. Jorge Alencastre Miranda, por sus valiosos consejos. Gracias por ser el amigo y segundo Padre que siempre estuvo ahí para orientarme.
- Al Msc. Ing. Federico Coz Pancorbo, por sus valiosos comentarios y observaciones semanales, en el curso de Seminario de Tesis 1 que contribuyeron en ésta tesis. Es un gran orgullo para mí haberlo tenido como Profesor y saber que en cada reunión que sostuvimos, siempre aprendía algo más. Sinceramente Muchas Gracias y descanse en paz Maestro.
- Al Dr. Ing. Luis Ricardo Chirinos García por los valiosos comentarios y observaciones semanales en el curso de Seminario Tesis 2 que contribuyeron a que ésta tesis tenga la forma y el fondo más adecuado. Gracias por ser ese amigo y maestro orientador.

- Al Dipl.-Ing. Jorge Rodríguez Hernández, al Dipl.-Ing. Benjamin Barriga Gamarra, al Msc. Roy Sánchez Gutiérrez, al Dr. Ing. Paul Lean Sifuentes, al Msc. Ing. Miguel Álvarez Rojas, al Dr. Ing. Dante Elías Giordano, al Msc. Ing. Walter Tupia Anticona, a todos ustedes mi más sincero agradecimiento por los valiosos conocimientos y consejos que me brindaron en el tiempo que me tomó terminar la maestría.
- A mis amigos y compañeros Carlos Olarte, Eduardo Pino, Omar Gonzales, Darío Ccahuana, William Joseli, Gustavo Holguín, Carlos Bueno, José Luis Vargas, José Manuel Tunqui a todos ustedes gracias por su amistad sincera y consejos valiosos.
- Finalmente, mi más sincero agradecimiento a todas las personas que de alguna manera colaboraron en la culminación de esta tesis.

ÍNDICE	Página
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1: VIBRACIONES TORSIONALES	4
1.1. CONCEPTO DE VIBRACIONES TORSIONALES	4
1.2. VIBRACIONES TORSIONALES EN MÁQUINAS RECIPROCANTES	4
1.2.1. MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO DEL EJE CIGÜEÑAL DE UNA MÁQUINA RECIPROCANTE	5
1.2.2. VIBRACIÓN FORZADA Y RESONANCIA	11
1.3. BIBLIOGRAFÍA CAPÍTULO 1	14
CAPÍTULO 2: MODELAMIENTO MECÁNICO - MATEMÁTICO DEL SISTEMA A ANALIZAR	15
2.1. MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO DEL EJE CIGÜEÑAL DE UN MOTOR DE COMBUSTIÓN INTERNA DE 2 CILINDROS CON DISPOSICIÓN DE CILINDROS EN LÍNEA	15
2.2. MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO DEL TORQUE DE EXCITACIÓN	18
2.3. BIBLIOGRAFÍA CAPÍTULO 2	27
CAPÍTULO 3: ANÁLISIS Y DISEÑO DEL ABSORSOR DE VIBRACIONES TORSIONALES TIPO PÉNDULO CENTRÍFUGO	28
3.1. MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO GENERAL DE UN ABSORSOR PENDULAR CENTRÍFUGO COMO UN SISTEMA DE 2 GDL	28

3.2. MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO GENERAL DE UN ABSORSOR	
PENDULAR CENTRÍFUGO CONSIDERANDO LA RIGIDEZ DEL EJE	33
3.3. ABSORSOR PENDULAR CENTRÍFUGO TIPO BIFILAR	37
3.4. ABSORSOR PENDULAR CENTRÍFUGO TIPO MECEDOR	38
3.5. DISEÑO DEL ABSORSOR DE VIBRACIONES TORSIONALES TIPO PÉNDULO	
CENTRÍFUGO - METODOLOGÍA DE DISEÑO VDI 2221	40
3.5.1. COMPRENSIÓN DE LA SOLICITUD	40
3.5.1.1. LISTA DE EXIGENCIAS	40
3.5.2. CONCEPCIÓN DE LA SOLICITUD	42
3.5.2.1. ABSTRACCIÓN DEL MÓDULO ABSORSOR DE VIBRACIONES	
TORSIONALES	42
3.5.2.2. SECUENCIA DE OPERACIONES	42
3.5.2.3. ESTRUCTURA DE FUNCIONES	43
3.5.2.4. MATRIZ MORFOLÓGICA	44
3.5.2.5. CONCEPTOS DE SOLUCIÓN	45
3.5.3. ELABORACIÓN DEL PROYECTO	46
3.5.3.1. PROYECTO PRELIMINAR – PROYECTO PRELIMINAR ÓPTIMO	46
3.5.3.1.1. EVALUACIÓN DE PROYECTOS	46
3.5.3.1.2. MEMORIA DE CÁLCULOS DEFINITIVOS	50
3.5.3.1.2.1. CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DEL SISTEMA	50
3.5.3.1.2.2. CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DEL ABSORSOR PENDULAR	60
3.5.3.1.2.3 CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DEL ABSORSOR AMORTIGUADO	61
3.5.4. ELABORACIÓN DE DETALLES	63
3.5.4.1. PLANOS DE ENSAMBLE	63
3.5.4.2. PLANOS DE DESPIECE	63
3.6. BIBLIOGRAFÍA CAPÍTULO 3	64

CAPÍTULO 4: SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA TORSIONAL BAJO DISTINTAS CONDICIONES DE TRABAJO	65
4.1. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA PARA 2200 RPM	65
4.1.1. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DEL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO	65
4.1.2. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DEL TORQUE DE EXCITACIÓN	67
4.1.3. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DE LOS ELEMENTOS K_{11} Y K_{22} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DEL SISTEMA TORSIONAL	70
4.1.4. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA SIN APLICACIÓN DEL ABSORSOR PENDULAR DE VIBRACIONES TORSIONALES	72
4.1.5. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR PENDULAR DE VIBRACIONES TORSIONALES ACOPLADO	73
4.1.6. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR AMORTIGUADO ACOPLADO	76
4.1.7. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR PENDULAR Y EL ABSORSOR AMORTIGUADO ACOPLADOS	78
4.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA PARA 1000 RPM	82
4.2.1. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DEL TORQUE DE EXCITACIÓN	82
4.2.2. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DE LOS ELEMENTOS K_{11} Y K_{22} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DEL SISTEMA TORSIONAL	83
4.2.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA SIN APLICACIÓN DEL ABSORSOR PENDULAR DE VIBRACIONES TORSIONALES	85
4.2.4. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR PENDULAR DE VIBRACIONES TORSIONALES ACOPLADO	86
4.2.5. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR AMORTIGUADO ACOPLADO	87
4.2.6. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR PENDULAR Y EL ABSORSOR AMORTIGUADO ACOPLADOS	88

	VIII
4.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA PARA 3000 RPM	91
4.3.1. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DEL TORQUE DE EXCITACIÓN	91
4.3.2. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DE LOS ELEMENTOS K_{11} Y K_{22} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DEL SISTEMA TORSIONAL	92
4.3.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA SIN APLICACIÓN DEL ABSORSOR PENDULAR DE VIBRACIONES TORSIONALES	94
4.3.4. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR PENDULAR DE VIBRACIONES TORSIONALES ACOPLADO	95
4.3.5. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR AMORTIGUADO ACOPLADO	96
4.3.6. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR PENDULAR Y EL ABSORSOR AMORTIGUADO ACOPLADOS	98
4.4. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL ABSORSOR PENDULAR COMO UN SISTEMA DE 2GDL – INFLUENCIA DE LA MASA DEL PÉNDULO EN LA RESPUESTA DEL SISTEMA TORSIONAL DE 2 GDL	100
4.5. BIBLIOGRAFÍA CAPÍTULO 4	104
 CONCLUSIONES	 105
 RECOMENDACIONES	 108
 ANEXOS.	 109
 ANEXO A: ANÁLISIS DE VIBRACIÓN TORSIONAL EN MÁQUINAS PURAMENTE ROTATIVAS	109
 ANEXO B: DESARROLLO DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL MATRICIAL DEL MOTOR DE COMBUSTIÓN INTERNA DE 2 CILINDROS EN LINEA Y 4 TIEMPOS	116

ANEXO C:	DESARROLLO DEL MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO DEL TORQUE DE EXCITACIÓN	124
ANEXO D:	MÉTODO MODAL PARA EL CÁLCULO DE LAS FRECUENCIAS NATURALES Y MODOS DE VIBRACIÓN TORSIONAL	137
ANEXO E:	DESARROLLO DEL MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO DE UN ABSORSOR DE VIBRACIONES TORSIONALES VISCOSO	140
ANEXO F:	COEFICIENTES ARMÓNICOS DE FOURIER (CAF)	145
ANEXO G:	CATÁLOGO DE ESPECIFICACIONES DEL MOTOR WESTERBEKE	157
ANEXO H:	PLANOS DE ENSAMBLE Y DESPIECE	159

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 Esquema de un Sistema Torsional
- Figura 1.2 Sistema Torsional de accionamiento de una Hélice
- Figura 1.3 Reducción del momento inercia del mecanismo biela - manivela al eje
- Figura 1.4 Modelo mecánico - matemático del Sistema Torsional.
- Figura 2.1 Modelo mecánico - matemático del eje cigüeñal de un motor de 2 cilindros y 4 tiempos (a) Parámetros Continuos y (b) Parámetros Concentrados.
- Figura 2.2 Reducción del momento de inercia del mecanismo biela - manivela
- Figura 2.3 Esquema de un Sistema biela – manivela.
- Figura 2.4 Curva de presión de los gases de combustión característico de un motor de combustión interna de 4 tiempos.
- Figura 2.5 Diagrama de cuerpo libre del mecanismo biela – manivela.
Fuerzas originadas por la presión de los gases de la combustión.
- Figura 2.6 Diagrama de cuerpo libre del mecanismo biela – manivela.
Fuerzas originadas por las inercias del mecanismo en movimiento.
- Figura 2.7 Torque de excitación como función periódica para una velocidad del motor de 2200 rpm.
- Figura 3.1 Modelo mecánico - matemático del absorsor pendular como un sistema de 2GDL.
- Figura 3.2 Modelo mecánico - matemático del absorsor pendular considerando la inercia del eje cigüeñal .
- Figura 3.3 Frecuencia Dominante del Torque de Excitación Periódico.
- Figura 3.4 Absorsor Pendular Centrífugo “Bifilar”
- Figura 3.5 Absorsor Pendular Centrífugo “Mecedor”
- Figura 3.6 Esquema Black Box del sistema técnico.

- Figura 3.7 Estructura de Funciones.
- Figura 3.8 Absorsor Pendular Centrífugo Tipo Bifilar Acoplado al Eje Cigüeñal.
- Figura 3.9 Absorsor Pendular Centrífugo Tipo Mecedor Acoplado a los Codos del Eje Cigüeñal.
- Figura 3.10 Absorsor Pendular Centrífugo Oscilante Acoplado a la Volante del Eje Cigüeñal.
- Figura 3.11 Diagrama de evaluación según VDI 2225.
- Figura 3.12 Modos de Vibración Torsional del Sistema.
- Figura 3.13 Esquema del Absorsor Amortiguado.
- Figura 4.1 Reducción del momento inercia del mecanismo biela - manivela al eje.
- Figura 4.2 Comportamiento periódico del momento de inercia reducido a 2200 rpm.
- Figura 4.3 Comportamiento periódico del Torque de Excitación en el 1º cilindro para 2200 rpm.
- Figura 4.4 Comportamiento periódico del Torque de Excitación en el 2º cilindro para 2200 rpm.
- Figura 4.5 Comportamiento periódico del elemento K_{11} de la matriz de rigidez para 2200 rpm.
- Figura 4.6 Comportamiento periódico del elemento K_{22} de la matriz de rigidez para 2200 rpm.
- Figura 4.7 Sistema Torsional sin aplicación del absorsor pendular.
- Figura 4.8 Respuesta del sistema sin aplicación del absorsor pendular para 2200 rpm.
- Figura 4.9 Sistema Torsional con aplicación de los absorsores pendulares.
- Figura 4.10 Respuesta del sistema con el absorsor pendular acoplado para 2200 rpm.
- Figura 4.11 Respuesta temporal de los absorsores pendulares para 2200 rpm.
- Figura 4.12 Sistema torsional con el absorsor amortiguado acoplado
- Figura 4.13 Respuesta del sistema con el absorsor amortiguado acoplado a 2200 rpm.

- Figura 4.14 Respuesta de la amplitud de oscilación del volante amortiguador para 2200 rpm.
- Figura 4.15 Sistema torsional con los absorsores pendulares y el absorsores amortiguado acoplados
- Figura 4.16 Respuesta del sistema con el absorsores pendular y el absorsores amortiguado acoplados al sistema torsional para 2200 rpm.
- Figura 4.17 Respuesta de la amplitud de oscilación de los absorsores pendulares y del volante amortiguador para 2200 rpm.
- Figura 4.18 Comportamiento periódico del Torque de Excitación en el 1º cilindro para 1000 rpm.
- Figura 4.19 Comportamiento periódico del Torque de Excitación en el 2º cilindro para 1000 rpm.
- Figura 4.20 Comportamiento periódico del elemento K_{11} de la matriz de rigidez para 1000 rpm.
- Figura 4.21 Comportamiento periódico del elemento K_{22} de la matriz de rigidez para 1000 rpm.
- Figura 4.22 Respuesta del sistema sin aplicación del absorsores pendular a 1000 rpm.
- Figura 4.23 Respuesta del sistema con el absorsores pendular acoplado para 1000 rpm.
- Figura 4.24 Respuesta temporal de los absorsores pendulares para 1000 rpm.
- Figura 4.25 Respuesta del sistema con el absorsores amortiguado a 1000 rpm.
- Figura 4.26 Respuesta de la amplitud de oscilación del volante amortiguador para 1000 rpm.
- Figura 4.27 Respuesta del sistema con el absorsores pendular y el absorsores amortiguado acoplados al sistema torsional para 1000 rpm.
- Figura 4.28 Respuesta de la amplitud de oscilación de los absorsores pendulares y del volante amortiguador para 1000 rpm.

- Figura 4.29 Comportamiento periódico del Torque de Excitación en el 1º cilindro para 3000 rpm.
- Figura 4.30 Comportamiento periódico del Torque de Excitación en el 2º cilindro para 3000 rpm.
- Figura 4.31 Comportamiento periódico del elemento K_{11} de la matriz de rigidez para 3000 rpm.
- Figura 4.32 Comportamiento periódico del elemento K_{22} de la matriz de rigidez para 3000 rpm.
- Figura 4.33 Respuesta del sistema sin aplicación del absorsor pendular a 3000 rpm.
- Figura 4.34 Respuesta del sistema con el absorsor pendular acoplado para 3000 rpm.
- Figura 4.35 Respuesta temporal de los absorsores pendulares para 3000 rpm.
- Figura 4.36 Respuesta del sistema con el absorsor amortiguado acoplado para 3000 rpm.
- Figura 4.37 Respuesta de la amplitud de oscilación del volante amortiguador para 3000 rpm.
- Figura 4.38 Respuesta del sistema con el absorsor pendular y el absorsor amortiguado acoplados al sistema torsional para 3000 rpm.
- Figura 4.39 Respuesta de la amplitud de oscilación de los absorsores pendulares y del volante amortiguador para 3000 rpm.
- Figura 4.40 Modelo mecánico - matemático del absorsor pendular como un sistema de 2GDL.
- Figura 4.41 Oscilación de la inercia equivalente y el absorsor pendular ($m = 0.15$ kg).
- Figura 4.42 Oscilación de la inercia equivalente y el absorsor pendular ($m = 0.335$ kg).
- Figura 4.43 Oscilación de la inercia equivalente y el absorsor pendular ($m = 0.6$ kg).
- Figura 4.44 Oscilación de la inercia equivalente y el absorsor pendular ($m = 0.9$ kg).

LISTA DE TABLAS

- Tabla 3.1 Evaluación Técnica del Proyecto
- Tabla 3.2 Evaluación Económica del Proyecto
- Tabla 3.3 Valores obtenidos del criterio técnico y económico.

LISTA DE SÍMBOLOS

- A_p : Área de la cabeza del pistón (m^2).
- A_{1-n} : Coeficiente coseno del n-ésimo armónico de la Inercia reducida J_1 ($kg - m^2$).
- A_{2-n} : Coeficiente coseno del n-ésimo armónico de la Inercia reducida J_2 ($kg - m^2$).
- $a_n^{(1)}$: Coeficientes de la componente coseno armónico (Nm).
- B_{1-n} : Coeficiente seno del n-ésimo armónico de la Inercia reducida J_1 ($kg - m^2$).
- B_{2-n} : Coeficiente seno del n-ésimo armónico de la Inercia reducida J_2 ($kg - m^2$).
- $b_n^{(1)}$: Coeficientes de la componente seno armónico (Nm).
- c : Coeficiente de amortiguamiento del absorsor amortiguado (Nm - s).
- C_{1-n} : Coeficiente coseno del n-ésimo armónico del Torque de Excitación T_1 (N - m).
- C_{2-n} : Coeficiente coseno del n-ésimo armónico del Torque de Excitación T_2 (N - m).
- d_c : Diámetro del eje cigüeñal (mm).
- d_i : Constante de amortiguamiento del i - ésimo elemento (Nm - s).
- \bar{d}_k : Amortiguamiento generalizado del k-ésimo modo de vibración (Nm - s).
- d_1 : Diámetro de los agujeros del contrapeso del cigüeñal (mm).
- d_2 : Diámetro de las espigas (pines) (mm).
- D : Matriz de amortiguamiento del sistema rotativo (Nm - s).
- D_p : Diámetro del pistón (mm).
- D_{1-n} : Coeficiente seno del n-ésimo armónico del Torque de Excitación T_1 (N - m).

D_{2-n} : Coeficiente seno del n-ésimo armónico del Torque de Excitación T_2 (N – m).

E : Energía cinética del sistema torsional (J).

E_p : Energía cinética del péndulo (J).

E_{1-n} : Coeficiente coseno del n-ésimo armónico del elemento K_{11}
de la matriz de rigidez (N - m/rad).

E_{2-n} : Coeficiente coseno del n-ésimo armónico del elemento K_{22}
de la matriz de rigidez (N - m/rad).

E_v : Energía requerida para la volante (J).

F_g : Fuerza debido a la presión de los gases de la combustión (N).

F_i : Fuerza debido a las inercias en movimiento (N).

F_{1-n} : Coeficiente seno del n-ésimo armónico del elemento K_{11} de
la matriz de rigidez (N - m/rad).

F_{2-n} : Coeficiente seno del n-ésimo armónico del elemento K_{22} de
la matriz de rigidez (N - m/rad).

g : Peso ponderado en función a los criterios de evaluación.

G : Módulo de cizallamiento (N/mm²).

i : Numero de cilindro del motor.

I_p : Momento de inercia polar (mm⁴).

J : Matriz de inercia del sistema rotativo (kg – m²).

- J_b : Momento de inercia de la biela ($\text{kg} - \text{m}^2$).
- J_D : Momento de inercia del contrapeso del cigüeñal ($\text{kg} - \text{m}^2$).
- J_{cte} : Momento de inercia constante ($\text{kg} - \text{m}^2$).
- J_d : Momento de inercia del volante amortiguador ($\text{kg} - \text{m}^2$).
- J_i : Momento de Inercia del i - ésimo elemento en un sistema reciprocante ($\text{kg} - \text{m}^2$).
- $\bar{J}_{i,i}$: Primera derivada del momento de inercia.
- $\bar{J}_{i,ii}$: Segunda derivada del momento de inercia.
- J_n : Momento de inercia del n - ésimo elemento en un sistema rotativo ($\text{kg} - \text{m}^2$).
- J_{pi} : Momento de Inercia del i - ésimo elemento en un sistema rotativo ($\text{kg} - \text{m}^2$).
- J_{rot} : Momento de inercia rotativo ($\text{kg} - \text{m}^2$).
- J_v : Momento de inercia de la volante ($\text{kg} - \text{m}^2$).
- $J(\theta)$: Momento de inercia reducido como función armónica.
- J_0 : Componente constante del momento de inercia reducido.
- \bar{J}_k : Inercia generalizada del k - ésimo modo de vibración ($\text{kg} - \text{m}^2$).
- K : Matriz de rigidez del sistema rotativo (Nm/rad).
- k_i : Rigidez de i - ésimo elemento (Nm/rad).
- k_t : Coeficiente de rigidez torsional (Nm/rad).
- \bar{k}_k : Rigidez generalizada del k -ésimo modo de vibración (Nm/rad).
- l : Longitud del péndulo (m).
- L : Longitud de la biela (m).
- L_e : Longitud equivalente del eje cigüeñal (mm).

m_b : Masa de la biela (kg).

m_B : Masa del pistón (kg).

n : Orden del armónico dominante del torque de excitación.

p : Puntaje (Escala de Valores según VDI 2225).

$P_g(\theta)$: Presión de los gases de la combustión en función del ángulo de cigüeñal (Pa).

q_k : Respuesta del sistema vibratorio torsional (rad).

$\{q\}$: Vector de coordenadas generalizadas.

r : Radio del eje cigüeñal y radio del disco giratorio (m).

r_1 : Radio del orificio cilíndrico (mm).

r_2 : Radio del cilindro mecedor (mm).

T_{en} : Torque Nominal por Inercia en máquinas rotativas (Nm).

T_n : Torque Nominal en máquinas rotativas (Nm).

T_{g12} : Torque debido a la presión de los gases de la combustión (Nm).

T_{i21} : Torque debido a las inercias en movimiento (Nm).

T_{21} : Torque de excitación total (Nm).

T_{21-i} : Primera derivada del torque de excitación total.

\bar{T}_k : Torque de excitación generalizado del k-ésimo modo de vibración (Nm).

V_p : Velocidad absoluta del péndulo (m/s).

V_m : Velocidad de la masa pendular (m/s).

x_{ik} : Coordenada generalizada del k-ésimo modo de vibración.

$[X]$: Matriz Modal de giro.

X_i : Valor Técnico.

x_G, y_G : Posición del centro de masa de la biela en coordenadas fijas

Y_B : Posición del pistón.

Y_i : Valor Económico.

α : Relación entre la longitud del péndulo y el radio del disco giratorio.

ϕ : Ángulo de la biela (rad).

φ_i : Ángulos de fase del cigüeñal (rad).

φ_o : Amplitud angular del disco amortiguado (rad).

φ_i : Desplazamiento angular del i – ésimo elemento (rad).

$\dot{\varphi}_i$: Velocidad angular del i – ésimo elemento (rad/s).

$\ddot{\varphi}_i$: Aceleración angular del i – ésimo elemento (rad/s²).

λ : Relación entre radio del cigüeñal y longitud de la biela.

μ : Coeficiente de correlación de inercias.

ω : Frecuencia de excitación (rad/s).

ω_n : Frecuencia natural del sistema torsional (rad/s).

ω_p : Frecuencia natural del péndulo (rad/s).

$\bar{\omega}_D$: Frecuencia amortiguada de vibración (rad/s).

$\bar{\omega}_k$: Frecuencia natural del K – ésimo modo de vibración (rad/s).

Π : Energía potencial del sistema reciprocante (J).

Φ : Energía de disipación del sistema reciprocante (J).

- ψ_i : Ángulos de carrera de potencia (rad).
- θ : Ángulo del cigüeñal (rad).
- θ_o : Amplitud angular del eje rotativo (rad).
- θ_n : Vector de desplazamiento angular (rad).
- $\dot{\theta}_n$: Vector de velocidad angular (rad/s).
- $\ddot{\theta}_n$: Vector de Aceleración angular de la n - ésima inercia (rad/s²).
- ξ_i : Factor de amortiguamiento del i – ésimo elemento.
- τ : Ángulo de fase de la respuesta del sistema vibratorio torsional (rad).

INTRODUCCIÓN

PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL TEMA

El fenómeno de las vibraciones torsionales en sistemas rotativos es un tema bastante amplio e importante que debe ser tomado en cuenta en la industria del diseño y construcción de máquinas con elementos rotativos, ya que en muchas ocasiones este tipo de vibraciones son causantes de falla por fatiga en la máquina.

Un ejemplo típico de máquinas en las que se presentan vibraciones torsionales son las máquinas reciprocantes, como los motores de combustión interna, compresores de émbolo y bombas de expulsión, las cuales presentan vibraciones durante su funcionamiento ya sea del tipo transversal o torsional causadas por la combinación de la aceleraciones periódicas causadas por la presión de los gases de la combustión y las partes móviles como son pistones, bielas y cigüeñales.

En los motores de combustión interna las vibraciones torsionales son los causantes de falla por fatiga del eje cigüeñal.

El presente trabajo está orientado a desarrollar un análisis de las vibraciones torsionales en un motor de combustión interna de 2 cilindros en línea y 4 tiempos para el posterior diseño de un absorber de vibraciones torsionales tipo péndulo, además de la simulación del comportamiento del sistema luego de ser aplicado el absorber a un motor de combustión interna con la finalidad de reducir las vibraciones torsionales.

HIPÓTESIS

Un absorber pendular reduce los niveles de vibración torsional en un motor de combustión interna de 2 cilindros en línea y 4 tiempos.

OBJETIVOS DE LA TESIS

OBJETIVO GENERAL

Diseñar un absorber pendular capaz de reducir las vibraciones torsionales que se presentan en el eje cigüeñal de un motor de combustión interna de 2 cilindros en línea y 4 tiempos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar las vibraciones torsionales en una máquina reciprocante, específicamente en un motor de combustión interna de 2 cilindros en línea y 4 tiempos.
- Desarrollar un modelo mecánico matemático del eje cigüeñal del motor para el análisis de las vibraciones torsionales y determinar las frecuencias naturales y modos de vibración torsional de este sistema.
- Analizar y Diseñar el absorber pendular usando para este último la metodología alemana de diseño VDI.
- Determinar la respuesta del sistema antes y después de aplicarse el absorber de vibraciones torsionales.
- Comparar la efectividad que tiene el absorber pendular centrífugo frente a otros métodos de reducción de vibraciones torsionales.

MÉTODO DE TRABAJO

Para empezar el presente trabajo de investigación primeramente se realiza una recopilación de fuentes bibliográficas y páginas de internet, de tal manera que se tenga una base de datos importante y así adquirir el conocimiento necesario para realizar el presente tema de tesis.

Se iniciará con el estudio de las vibraciones torsionales en máquinas rotativas y se pondrá especial énfasis en las máquinas reciprocantes, seguidamente se desarrollará el modelo mecánico – matemático de un motor de combustión interna de 2 cilindros en línea y 4 tiempos, para su posterior análisis con y sin aplicación del absorber de vibraciones.

Se determinará los parámetros de inercia y rigidez del eje cigüeñal, luego se hallarán las frecuencias naturales y modos de vibración torsional del sistema planteado considerando para esto el comportamiento constante de los parámetros del sistema.

Utilizando la Metodología de diseño según la norma VDI 2221 se procederá con el diseño del absorber pendular centrífugo, donde además se determinarán los parámetros de masa y longitud del absorber pendular.

Se hará una comparación de la efectividad que tiene el absorber frente a otros métodos de reducción de las vibraciones torsionales, para finalmente proceder con las conclusiones y recomendaciones de acuerdo a los resultados que se obtuvieron en el análisis y diseño del absorber.

CAPÍTULO 1

VIBRACIONES TORSIONALES

1.1. CONCEPTO DE VIBRACIONES TORSIONALES

La vibración torsional es una oscilación de una posición angular respecto a una línea central, y es causada por momentos no constantes que se ejercen sobre el árbol por ejemplo el de un motor de combustión interna, que debido a las inercias en movimiento se tendrá una torque periódico lo que produce una vibración torsional en el eje. Es importante cuidar que estas fuerzas no ocurran cerca de las frecuencias de resonancia torsional del sistema, o los niveles de vibración pueden ser inadmisibles.

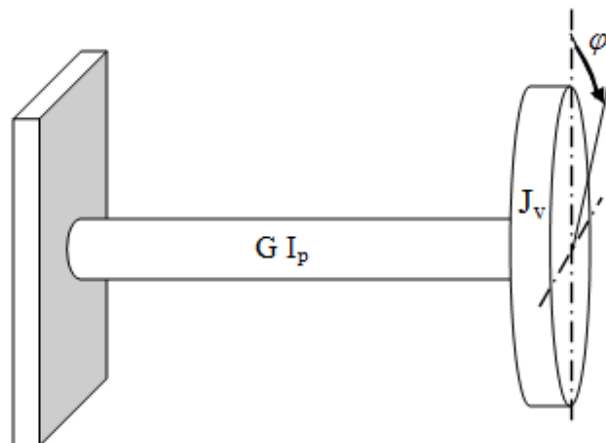


Figura 1.1: Esquema de un Sistema Torsional.

1.2. VIBRACIONES TORSIONALES EN MÁQUINAS RECIPROCANES

Las oscilaciones de torsión en el eje cigüeñal y en la línea de ejes de una máquina conducida es un fenómeno de vibración de importancia práctica en el diseño de las máquinas reciprocantes. El torque promedio emitido por un cilindro en una máquina

de movimiento alternativo, es una fracción del torque máximo que se produce durante el periodo de encendido. Las máquinas reciprocantes cuentan con mecanismos de biela - manivela que al girar transforman el movimiento alternativo de los pistones en el movimiento de rotación del eje cigüeñal.

El eje cigüeñal es una de las piezas fundamentales de una máquina reciprocante, la cual está sometida a fuertes cargas dinámicas, que dan lugar a la vibración torsional; estas cargas dinámicas son los torques de excitación que varían violentamente dentro de un periodo; este hecho constituye una de las desventajas, ya que comparados con una turbina el torque de excitación en esta última es prácticamente uniforme.

Debido a la geometría y la complejidad mecánica que presenta un sistema reciprocante, es difícil estudiar la dinámica de este sistema con la misma precisión que es común en el estudio de máquinas rotativas. Es esencial que las características de vibración torsional dentro de una instalación se analicen antes de que la unidad se ponga en funcionamiento.

1.2.1. MODELO MECÁNICO-MATEMÁTICO DEL CIGÜEÑAL DE UNA MÁQUINA RECIPROCANTE

El desarrollar un modelo mecánico matemático de un sistema reciprocante tiene algunos puntos de análisis que lo hacen algo más complicado que el modelo de sistemas puramente rotativos. Para este caso se tomará como ejemplo un sistema reciprocante, como el que se muestra en la figura 1.1.

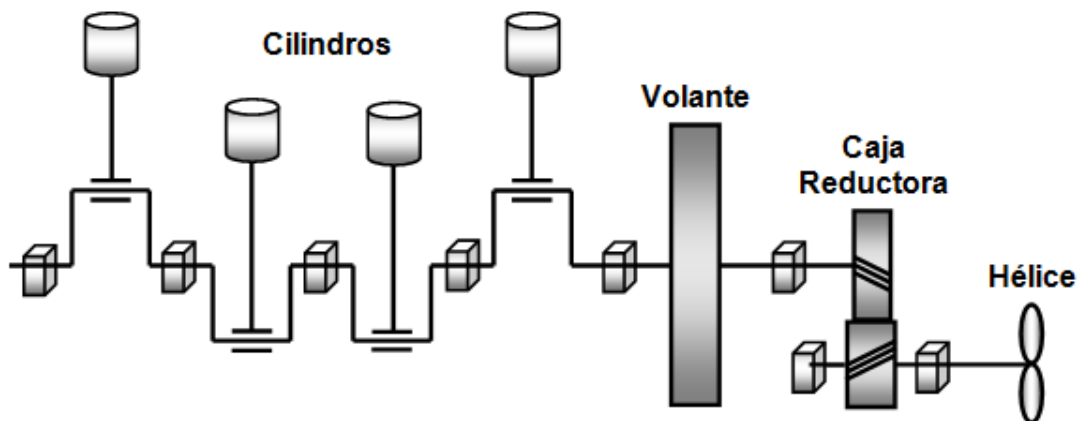


Figura 1.2: Sistema Torsional de accionamiento de una Hélice.

Se debe poner especial énfasis al análisis de los cilindros del motor de combustión interna donde se presenta la variación del momento de inercia reducido al eje en función del ángulo del cigüeñal, como el que se muestra en la figura 1.3.

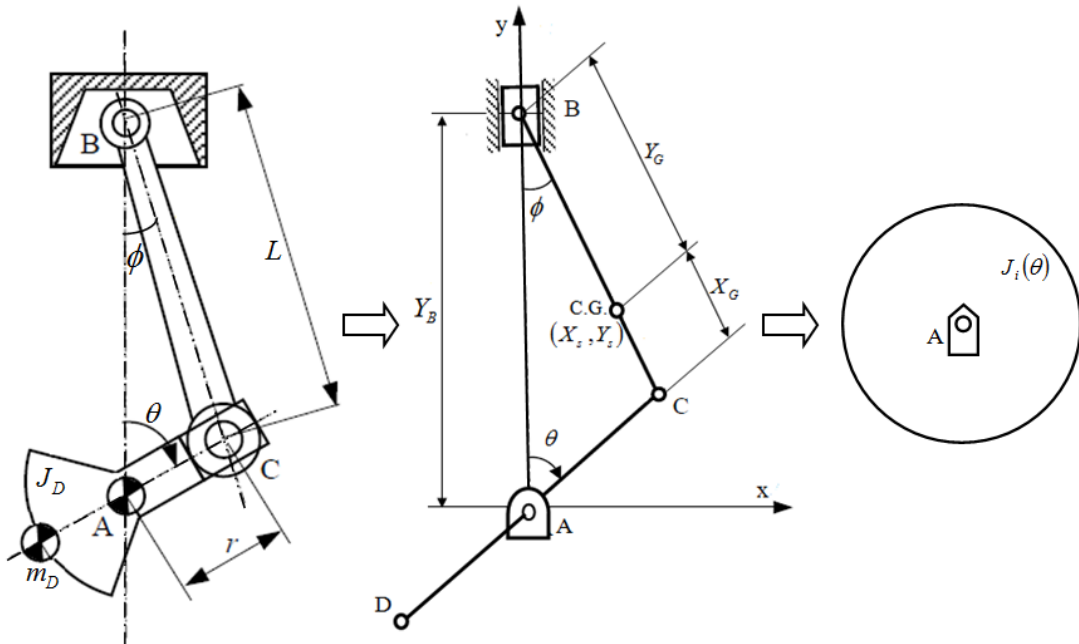


Figura 1.3: Reducción del momento inercia del mecanismo biela - manivela al eje.

El proceso matemático de reducción del momento de inercia del mecanismo biela - manivela donde se detalla cómo es que el momento de inercia es función del ángulo de cigüeñal se muestra en el anexo B de la presente tesis.

Los torques de excitación periódicos en cada cilindro del motor debido a la presión de los gases de la combustión y las inercias en movimiento acopladas al eje cigüeñal, que en consecuencia da lugar a la vibración torsional paramétrica y cuyo modelo mecánico - matemático viene dado por la figura 1.4.

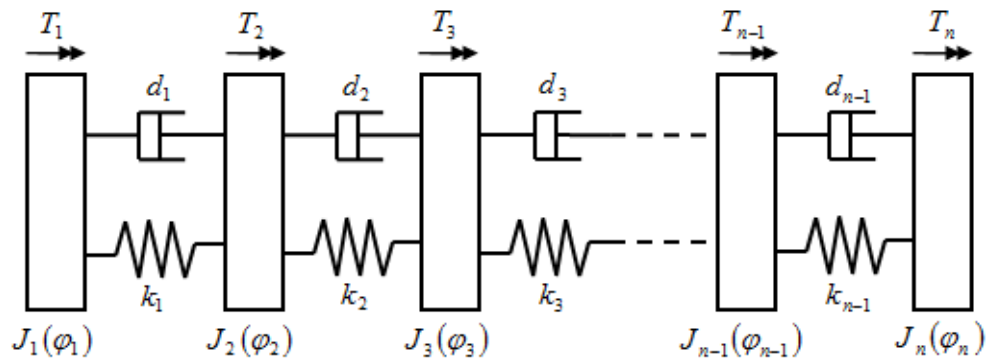


Figura 1.4: Modelo mecánico - matemático del Sistema Torsional.

Utilizando las ecuaciones de Lagrange de 2º tipo se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del sistema, donde además definimos lo siguiente: La energía cinética del sistema está definida como:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_i(\varphi_i) \dot{\varphi}_i^2 \quad (1.1)$$

La energía potencial del sistema está dada por:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_i (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \quad (1.2)$$

La energía de disipación del sistema está expresada como:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} d_i (\dot{\phi}_{i+1} - \dot{\phi}_i)^2 \quad (1.3)$$

Las ecuaciones de Lagrange de 2º tipo para el sistema está definida como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial \phi_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\phi}_i} + T_i \quad (1.4)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema torsional puede ser escrito de la forma:

$$J_1(\phi_1) \ddot{\phi}_1 + \frac{1}{2} J_{1,1}(\phi_1) \dot{\phi}_1^2 + d_1(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) + k_1(\phi_1 - \phi_2) = T_1 \quad (1.5)$$

$$J_i(\phi_i) \ddot{\phi}_i + \frac{1}{2} J_{i,i}(\phi_i) \dot{\phi}_i^2 - d_{i-1}(\dot{\phi}_{i-1} - \dot{\phi}_i) + d_i(\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_{i+1}) - k_{i-1}(\phi_{i-1} - \phi_i) + k_i(\phi_i - \phi_{i+1}) = T_i \quad (1.6)$$

Para $i = 2, 3, \dots, n-1$

$$J_n(\phi_n) \ddot{\phi}_n + \frac{1}{2} J_{n,n}(\phi_n) \dot{\phi}_n^2 + d_{n-1}(\dot{\phi}_{n-1} - \dot{\phi}_n) + k_{n-1}(\phi_{n-1} - \phi_n) = T_n \quad (1.7)$$

Asumiendo que $\phi = \omega t$ y que el sistema experimenta únicamente una vibración torsional de pequeña amplitud q_i , a velocidad de rotación ω constante se tendrá por desarrollo en series de Taylor que:

$$J_i(\omega t + q_i) = \bar{J}_i(\omega t) + \bar{J}_{i,i}(\omega t) q_i + \frac{1}{2} \bar{J}_{i,ii}(\omega t) q_i^2 + \dots \quad (1.8)$$

$$T_i(\omega t, \omega t + q_i, \omega t + \dot{q}_i) = \bar{T}_i(\omega t) + \bar{T}_{i,i}(\omega t) q_i + \bar{T}_{i,i\dot{p}}(\omega t) \dot{q}_i + \dots \quad (1.9)$$

Donde: $\bar{J}_{i,i}(\omega t)$, $\bar{J}_{i,ii}(\omega t)$, $\bar{T}_{i,i}(\omega t)$ y $\bar{T}_{i,ip}(\omega t)$ están definidos como:

$$\bar{J}_{i,i}(\varphi_i) = \frac{d}{d\varphi_i}(J_i(\varphi_i)) ; \bar{J}_{i,ii}(\varphi_i) = \frac{d^2}{d\varphi_i^2}(J_i(\varphi_i)) ; T_{i,i} = \frac{\partial T_i}{\partial \varphi_i} ; T_{i,ip} = \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\varphi}_i} \quad (1.10)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.8) y (1.9) en las ecuaciones (1.5) y (1.6) y despreciando los términos no lineales, las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema vienen dados por:

$$J_1(\omega t)\ddot{q}_1 + [d_1 + \omega J_{1,1}(\omega t) - T_{1,1p}(\omega t)]\dot{q}_1 - d_1 \dot{q}_2 + \left[k_1 + \frac{1}{2} \omega^2 J_{1,11}(\omega t) - T_{1,1}(\omega t) \right] q_1 - k_1 q_2 = T_1(\omega t) - \frac{1}{2} \omega^2 J_{1,1}(\omega t) \quad (1.11)$$

$$J_2(\omega t)\ddot{q}_2 + [d_1 + d_2 + \omega J_{2,2}(\omega t) - T_{2,2p}(\omega t)]\dot{q}_2 - d_2 \dot{q}_3 + \left[k_1 + k_2 + \frac{1}{2} \omega^2 J_{2,22}(\omega t) - T_{2,2}(\omega t) \right] q_2 - k_2 q_3 = T_2(\omega t) - \frac{1}{2} \omega^2 J_{2,2}(\omega t) \quad (1.12)$$

$$J_i(\omega t)\ddot{q}_i - d_{i-1} \dot{q}_{i-1} + [d_{i-1} + d_i + \omega J_{i,i}(\omega t) - T_{i,ip}(\omega t)]\dot{q}_i - d_i \dot{q}_{i+1} - k_{i-1} q_{i-1} + \left[k_{i-1} + k_i + \frac{1}{2} \omega^2 J_{i,ii}(\omega t) - T_{i,i}(\omega t) \right] q_i - k_i q_{i+1} = T_i(\omega t) - \frac{1}{2} \omega^2 J_{i,i}(\omega t) \quad (1.13)$$

Para $i = 2, \dots, n-1$

$$\begin{aligned}
 & J_n(\omega t) \ddot{q}_n - d_{n-1} \dot{q}_{n-1} + [d_{n-1} + \omega J_{n,n}(\omega t) - T_{n,np}(\omega t)] \dot{q}_n - \\
 & k_{n-1} q_{n-1} + \left[k_{n-1} + \frac{1}{2} \omega^2 J_{n,nn}(\omega t) - T_{n,n}(\omega t) \right] q_n = \\
 & T_n(\omega t) - \frac{1}{2} \omega^2 J_{n,n}(\omega t)
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Agrupando las ecuaciones (1.11) hasta la (1.14) se tendrá la ecuación diferencial de movimiento del sistema en su forma matricial:

$$[J(\omega t)]\ddot{q} + [D(\omega t)]\dot{q} + [K(\omega t)]q = [T(\omega t)] \tag{1.15}$$

Donde $J(\omega t)$ es la matriz de inercia del sistema:

$$J(\omega t) = \begin{bmatrix} J_2(\omega t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_3(\omega t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_n(\omega t) \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

$D(\omega t)$ es la matriz de amortiguamiento del sistema, donde todos los valores fuera de la matriz diagonal son todos cero:

$$D(\omega t) = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 + \omega J_{2,2} - T_{2,2p} & -d_2 & & & \dots \\ -d_2 & d_2 + d_3 + \omega J_{3,3} - T_{3,3p} & & & \dots \\ 0 & -d_3 & & d_3 + d_4 + \omega J_{4,4} - T_{4,4p} & \dots \\ 0 & 0 & & -d_4 & \dots \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

$K(\omega t)$ es la matriz de rigidez del sistema que al igual que la matriz de amortiguamiento tiene una forma bandeada:

$$K(\omega) = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + \frac{1}{2}\omega^2 J_{2,22} - T_{2,2} & -k_2 & & & \dots \\ -k_2 & k_2 + k_3 + \frac{1}{2}\omega^2 J_{3,33} - T_{3,3} & & & \dots \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 + \frac{1}{2}\omega^2 J_{4,44} - T_{4,4} & & \dots \\ 0 & 0 & -k_4 & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

q es el vector de desplazamiento angular:

$$q = \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ \dots \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (1.19)$$

Y $T(\omega)$ es el vector de torques:

$$T(\omega) = \begin{Bmatrix} T_1(\omega) - \frac{1}{2}\omega^2 J_{1,1}(\omega) \\ T_2(\omega) - \frac{1}{2}\omega^2 J_{2,2}(\omega) \\ T_3(\omega) - \frac{1}{2}\omega^2 J_{3,3}(\omega) \\ \dots \\ T_n(\omega) - \frac{1}{2}\omega^2 J_{n,n}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$

1.2.2. VIBRACIÓN FORZADA Y RESONANCIA

Las ecuaciones de movimiento para el sistema discreto con vibración forzada mostrado en la figura 1.4 se determinan partiendo de la ecuación (1.5) y considerando que el amortiguamiento es despreciable, con lo que se tiene:

$$[J(\omega)]\{\ddot{\varphi}\} + [K(\omega)]\{\varphi\} = \{T(\omega)\} \quad (1.21)$$

Donde $\{T(\omega t)\}$ es el vector de torques de excitación que es una función que depende del tiempo. Usando el modo normal de expansión de la respuesta, tenemos:

$$\{\varphi\} = [X] \cdot \{q\} \quad (1.22)$$

Donde $[X]$ es la matriz modal de giro y $\{q\}$ es el vector de coordenadas generalizadas.

Reemplazando la ecuación (1.22) en la ecuación (1.21), además multiplicando por la izquierda esta ecuación por la transpuesta de la matriz modal $[X]$ y usando las propiedades de ortogonalidad de los modos de vibración torsional se obtiene:

$$\bar{J}_k \ddot{q}_k + \bar{k}_k \cdot q_k = \bar{T}_k \quad (1.23)$$

Para $k = 1, 2, \dots, N$, donde \bar{J}_k es la inercia generalizada del k-ésimo modo de vibración. Si dividimos la última ecuación entre \bar{J}_k obtenemos:

$$\ddot{q}_k + \bar{\omega}_k^2 \cdot q_k = \frac{\bar{T}_k}{\bar{J}_k} \quad (1.24)$$

De las ecuaciones (1.23) y (1.24) deducimos:

$$\bar{J}_k = \sum_{i=1}^N J_i \cdot x_{ik}^2 \quad (1.25)$$

La rigidez generalizada del k-ésimo modo de vibración:

$$\bar{k}_k = \sum_{i=1}^N k_i \cdot x_{ik}^2 = \bar{\omega}_k^2 \cdot \bar{J}_k \quad (1.26)$$

El Torque de excitación generalizado del k-ésimo modo de vibración:

$$\bar{T}_k = \sum_{i=1}^N T_i \cdot x_{ik} \quad (1.27)$$

x_{ik} es la coordenada generalizada del k-ésimo modo de vibración.

Se asume un torque de excitación periódico desarrollado en Series de Fourier, por lo que la última ecuación queda expresada como:

$$\bar{T}_k = \sum_{j=1}^{\infty} x_{ik} a_n^{(1)} \cos(j\omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} x_{ik} b_n^{(1)} \text{sen}(j\omega t) \quad (1.28)$$

La solución a la ecuación (1.23) para la k-ésima coordenada generalizada será:

$$q_k(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\bar{J}_k [\omega_k^2 - (j\omega)^2]} \left\{ \sum x_{ik} a_n^{(1)} \cos(j\omega t) + \sum x_{ik} b_n^{(1)} \text{sen}(j\omega t) \right\} \right] \quad (1.29)$$

1.3. BIBLIOGRAFÍA CAPÍTULO 1

1. RAO, J.S., "ROTOR DYNAMICS", 3º Edición, Editorial New Age International, Nueva Delhi, 1996.
2. WILSON, W Ker, "VIBRATION ENGINEERING", 1º Edición, Editorial Charles Griffin, Londres, 1959.
3. VANCE, John. "ROTOR DYNAMICS OF TURBOMACHINERY", 1º Edición, Editorial John Willey & Sons, Texas, 1987.
4. DRESIG, H. "DYNAMICS OF MACHINERY", Edición en Ingles, Editorial Springer, Auerswalde, 2010.
5. VAN KHANG, N., PHONG DIEN, N. and MANH COUNG, H., "Parametric Torsional Vibration Of Mechanical Drive Systems With Non Uniform Transmission Mechanism", Technische Mechanik, Band 28, Heft 3-4, pp. 310 – 323, 2008
6. PASRICHA M. S. and CARNEGIE W. D., "*Formulation of the equations of dynamic motion including the effects of variable inertia on the torsional vibrations in reciprocating engines, part I,*" *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 66, No. 2, pp. 181–186, 1979.
7. GUZZOMI, A. L. "*Torsional Vibration of Powertrains: An Investigation of some Commons Assumptions*" Tesis de Ph. D., Universidad del Oeste de Australia, Perth, 2003.
8. BRUSA E., DELPRETE C. and GENTA G., "*Torsional Vibration of Crankshafts: Effects of non-constant moments of Inertia*", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 205, No. 2, pp. 135–150, 1997.

CAPÍTULO 2

MODELAMIENTO MECÁNICO - MATEMÁTICO DEL SISTEMA A ANALIZAR

2.1 MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO DEL EJE CIGÜEÑAL DE UN MOTOR DE COMBUSTIÓN INTERNA DE 2 CILINDROS Y 4 TIEMPOS CON DISPOSICIÓN DE CILINDROS EN LÍNEA

Para entender mejor el sistema a analizar se opta por hacer dos modelos mecánicos - matemáticos, el primero de la derecha (a) un modelo mecánico - matemático continuo y un modelo mecánico - matemático de parámetros concentrados como el que se muestra al lado izquierdo (b) de la figura 2.1:

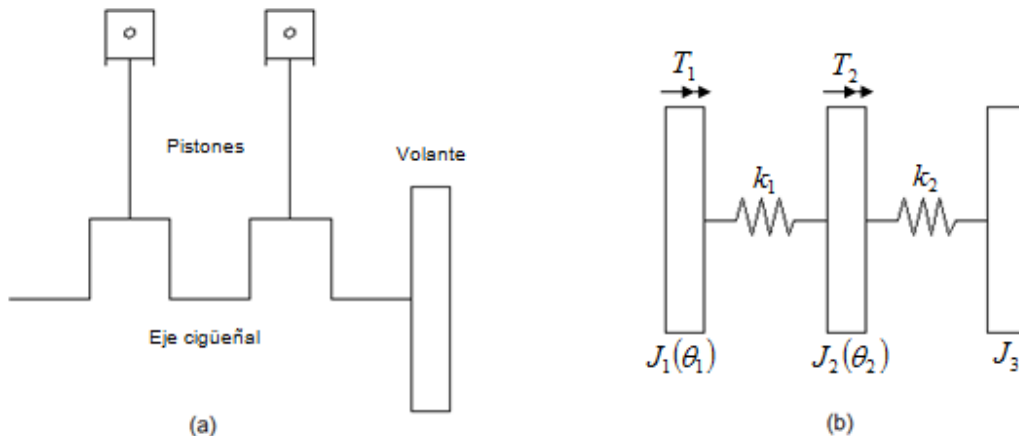


Figura 2.1: Modelo mecánico - matemático del eje cigüeñal de un motor de 2 cilindros y 4 tiempos (a) Parámetros Continuos y (b) Parámetros Concentrados.

El Modelo mecánico - matemático del eje cigüeñal de dos cilindros se basará en el modelo de parámetros concentrados mostrado en la figura 2.1.

Para iniciar con el modelado del sistema mostrado en la figura 2.1 es necesario prestar atención a la disposición del eje cigüeñal en el modelo con parámetros continuos ya que a partir de éste se tiene que reducir los momentos de inercia al eje cigüeñal.

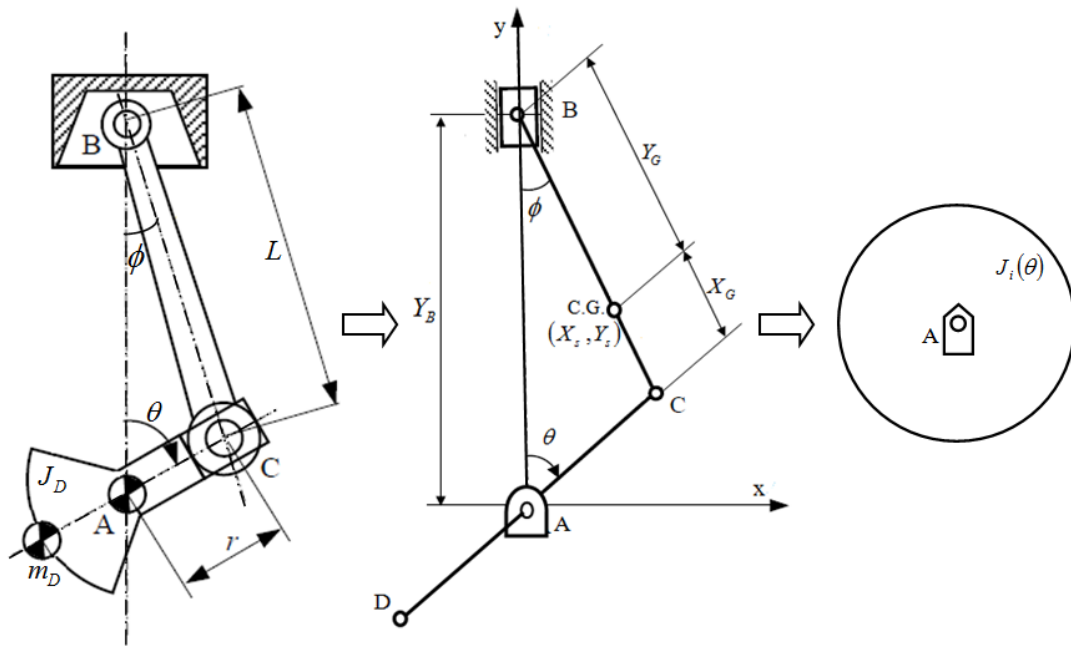


Figura 2.2: Reducción del momento de inercia del mecanismo biela - manivela.

El proceso de reducción de los momentos de inercia al eje cigüeñal y las simplificaciones en general para llegar al planteamiento de la ecuación diferencial matricial de movimiento del sistema mostrado en la figura 2.1 se desarrollan con mayor detalle en el anexo B (ver anexo B).

Como se dedujo en el capítulo anterior, la ecuación diferencial matricial que describe el comportamiento del sistema mostrado en la figura 2.1 viene dado por la expresión:

$$J(\omega t) \cdot \ddot{q} + K(\omega t) \cdot \dot{q} = T(\omega t) \quad (2.1)$$

Donde la matriz de inercia $J(\omega t)$ está dada por:

$$J(\omega t) = \begin{bmatrix} J_1(\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

De acuerdo con la configuración que se muestra en la figura 2.1 se pueden definir las siguientes inercias, considerando además que $\theta = \omega t$.

$$J_1(\omega t) = J_o + \sum_{n=1}^6 [a_n^{(1)} \cos(n\omega t) + b_n^{(1)} \text{sen}(n\omega t)] \quad (2.3)$$

$$J_2(\omega t) = J_o + \sum_{n=1}^6 [a_n^{(1)} \cos n(\omega t - 2\pi) + b_n^{(1)} \text{sen} n(\omega t - 2\pi)]$$

Donde el momento de inercia constante J_o y los coeficientes armónicos se detallan en el anexo B de la presente tesis.

La matriz de rigidez $K(\omega t)$ está dada por:

$$K(\omega t) = \begin{bmatrix} k_1 + \frac{\omega^2}{2} \bar{J}_{1,11} - \bar{T}_{1,1} & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + \frac{\omega^2}{2} \bar{J}_{2,22} - \bar{T}_{2,2} & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

En la matriz de rigidez se tiene la influencia de la segunda derivada de las inercias reducidas mostradas en la expresión de (2.3), además de la influencia de la derivada

de los pares de torsión $\bar{T}_{1,1}$ y $\bar{T}_{2,2}$ de cada cilindro del motor que será desarrollado en el siguiente capítulo de esta tesis.

El vector de torques de excitación actuantes sobre el sistema viene dado por:

$$T(\omega t) = \begin{Bmatrix} T_1(\omega t) \\ T_2(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Donde los torques para cada cilindro vienen dados por:

$$\begin{aligned} T_1(\omega t) &= T_{21-1,1}(\omega t) - \frac{1}{2} \omega^2 \bar{J}_{1,1}(\omega t) \\ T_2(\omega t) &= T_{21-2,2}(\omega t) - \frac{1}{2} \omega^2 \bar{J}_{2,2}(\omega t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como se indicó, en las últimas ecuaciones se puede ver la influencia del momento de inercia del sistema en el vector de pares de torsión.

2.2 MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO DEL TORQUE DE EXCITACIÓN

El torque de excitación en una máquina reciprocante como es el caso de un motor de combustión interna está influenciado principalmente por la presión del gas en el proceso de la combustión y las inercias que giran alrededor del eje cigüeñal.

Para poder entender la influencia de cada uno de estos factores en el torque de excitación total se desarrolla brevemente los torques de excitación debido a la presión del gas y debido al giro de las inercias del sistema. Para obtener el torque de

excitación debido a la presión de los gases de la combustión se realizará un análisis cinemático al mecanismo biela – manivela.

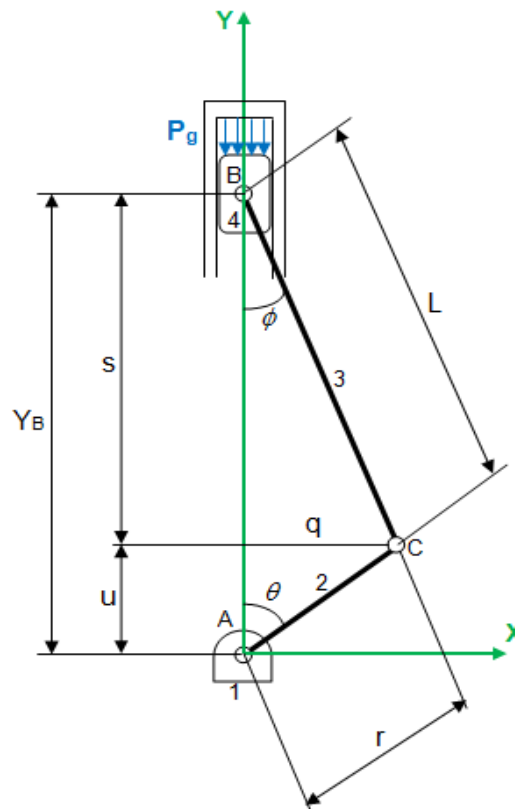


Figura 2.3: Esquema de un Sistema biela – manivela.

De la figura se puede deducir luego de un procedimiento detallado que se muestra en el anexo C las expresiones de desplazamiento, velocidad y aceleración respectivamente del punto B.

$$Y_B = L - r \frac{\lambda}{4} + r \left[\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right] \quad (2.7)$$

$$V_B = -r \omega \left[\text{sen } \omega t + \frac{\lambda}{2} \text{sen } 2\omega t \right] \quad (2.8)$$

$$a_B = -r \omega^2 \left[\cos \omega t - \lambda \cos 2\omega t \right] \quad (2.9)$$

Como se aprecia en la figura 2.3 no se considera aun la masa del contrapeso del cigüeñal debido a que como se mencionó líneas arriba se hará un primer análisis del sistema considerando únicamente la influencia de la presión de los gases de la combustión en el mecanismo. La fuerza originada por la presión de los gases de la combustión está dada por:

$$F_g = -P_g(\theta)A_p \quad (2.10)$$

La presión de los gases de la combustión es función del ángulo de cigüeñal $\theta = \omega t$ y está definida por la termodinámica del motor, por lo que se trabaja con la curva de presión de gases de combustión característica. Esta fuerza se considera negativa únicamente por la orientación elegida para el sistema, además la línea de acción de dicha fuerza está en el eje Y.

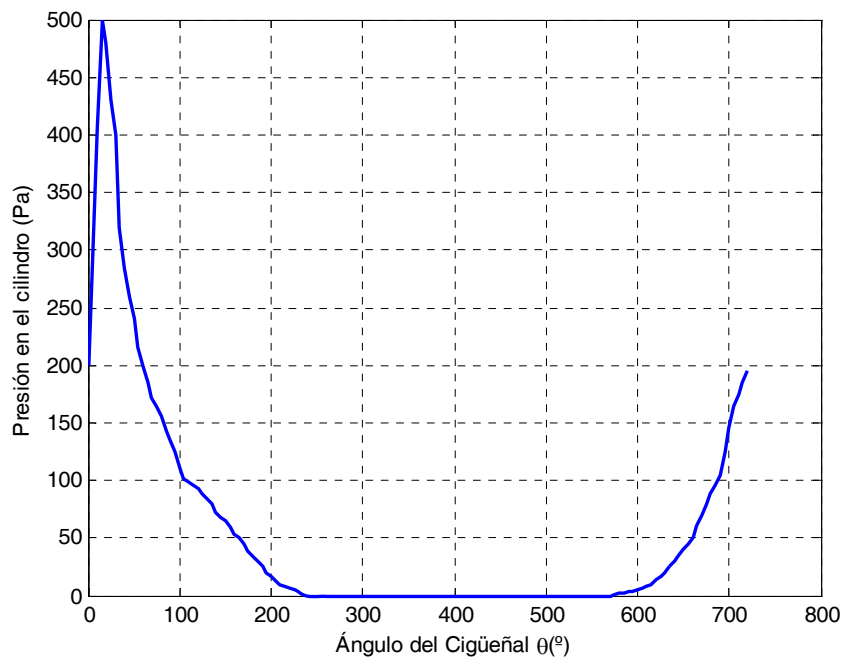


Figura 2.4: Curva de presión de los gases de combustión característico de un motor de combustión interna de 4 tiempos.

A continuación se descompone el mecanismo biela – manivela para realizar un análisis dinámico.

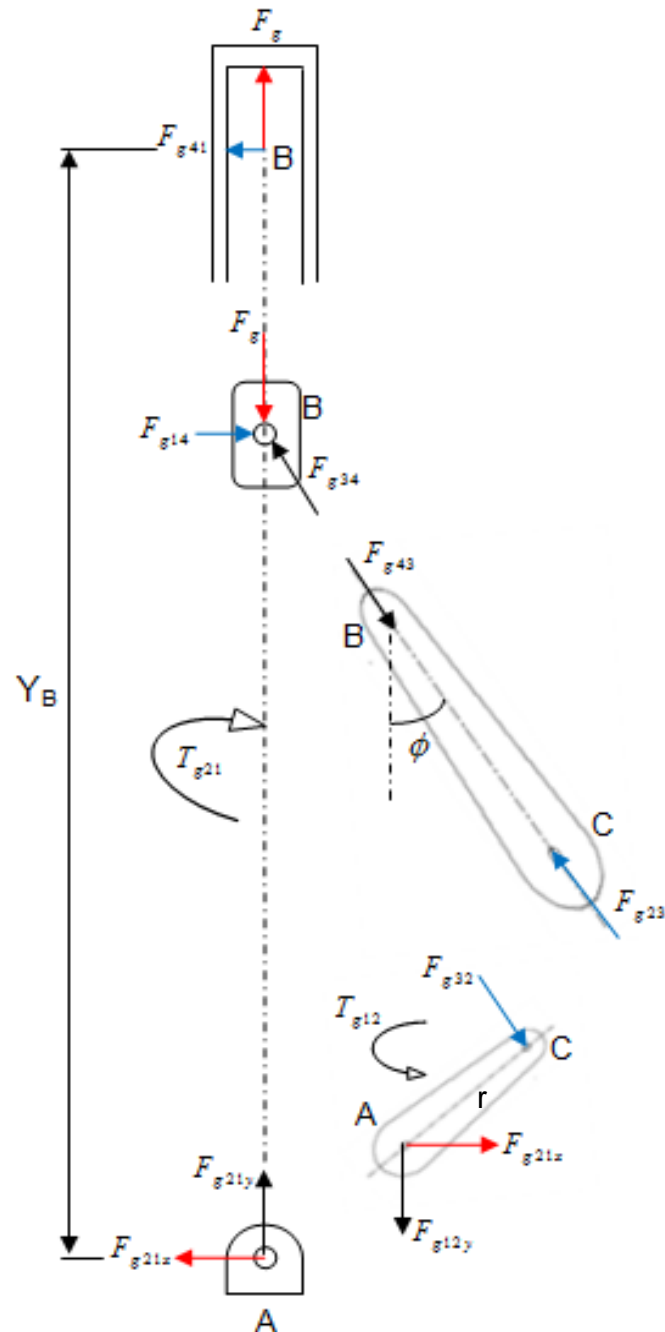


Figura 2.5: Diagrama de cuerpo libre del mecanismo biela – manivela. Fuerzas originadas por la presión de los gases de la combustión.

El torque de excitación debido a los gases de la figura 2.5 se origina a consecuencia de la fuerza de los gases que actúan en un brazo de momento con respecto al centro del cigüeñal en el punto A. Este brazo de momento varía desde cero hasta un valor máximo según gire el cigüeñal.

El desarrollo matemático para la obtención del torque debido a la presión de los gases de la combustión para un cilindro y posteriormente la expresión para el torque combinado por cada cilindro se detalla en el anexo C. El torque debido a la presión de los gases de la combustión combinado está dada por:

$$T_{g21} = F_g r \sum_{i=1}^n [\text{sen}(\omega t - \psi_i) [1 + \lambda \cos(\omega t - \psi_i)]] \hat{k} \quad (2.11)$$

$$T_{g21} = -P_g(\theta) A_p r \sum_{i=1}^n [\text{sen}(\omega t - \psi_i) [1 + \lambda \cos(\omega t - \psi_i)]] \hat{k}$$

Donde $P_g(\theta)$ es la función que define la curva característica de presión de los gases de la combustión,

A_p es el área de la cabeza del pistón donde actúan las fuerzas.

F_g es la fuerza debido a los gases de la combustión.

n es el número de cilindros del motor.

Los valores del ángulo de carrera de potencia serán ψ_i 720° y 360° respectivamente esto debido al orden de encendido que tiene el motor.

El torque de excitación total está influenciado también por las inercias que están en el sistema para el cual se desarrollará el siguiente análisis.

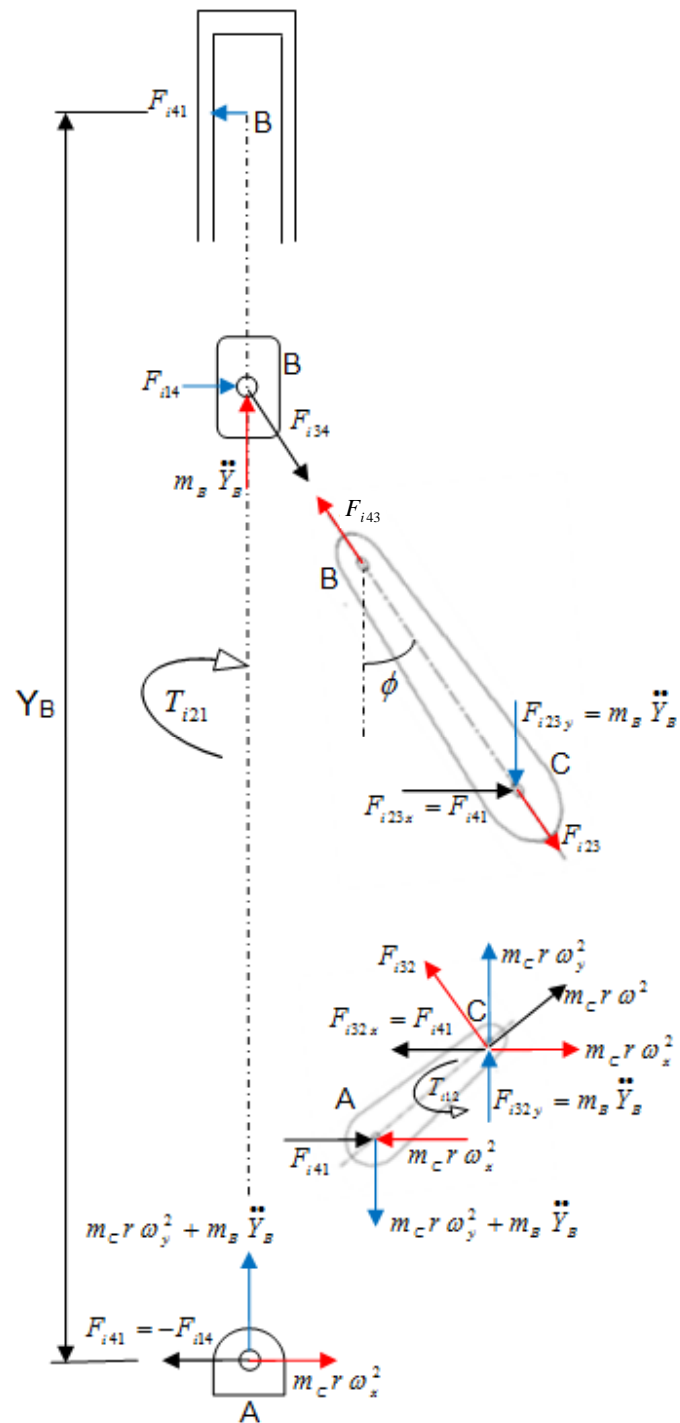


Figura 2.6: Diagrama de cuerpo libre del mecanismo biela – manivela. Fuerzas originadas por las inercias del mecanismo en movimiento.

El desarrollo matemático para la obtención del torque debido a las inercias en movimiento y reducidas al eje cigüeñal para un cilindro y posteriormente la expresión para el torque combinado por cada cilindro se detalla en el anexo C.

El torque de excitación debido a las inercias combinado para ambos cilindros se obtendrá de la contribución de cada uno de los cilindros influenciada además por el ángulo de fase del cigüeñal φ .

$$T_{i21} = \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{2} \text{sen}(\omega t - \varphi_i) - \text{sen}2(\omega t - \varphi_i) - \frac{3}{2} \lambda \text{sen}3(\omega t - \varphi_i) \right) \hat{k} \quad (2.12)$$

Los ángulos de fase del cigüeñal φ_i son los ángulos a los cuales están dispuestos los codos de biela en un eje cigüeñal y que para este caso muy particular coincide con el ángulo de carrera de potencia ψ_i definido en la obtención del torque de excitación debido a la presión de los gases de la combustión.

El torque de excitación total debido a la presión de los gases y las inercias en movimiento combinado por cada cilindro viene dado por la siguiente expresión.

$$T_{21} = \left[-P_g(\theta) A_p r + m_B \left[-r \omega^2 (\cos \omega t - \lambda \cos 2\omega t) \right] \right] * \dots \sum_{i=1}^n \left[\text{sen}(\omega t - \varphi_i) [1 + \lambda \cos(\omega t - \varphi_i)] \right] \hat{k} \quad (2.13)$$

Es importante mencionar que para poder relacionar las contribuciones de los pares de torsión combinados de la presión de los gases de la combustión y las inercias en movimiento se tuvo que ver una relación entre el ángulo de carrera de potencia ψ y el ángulo de fase φ , que para este caso en particular toman el mismo valor debido a

que el orden de encendido del motor que define el ángulo de carrera de potencia coincide con el ángulo de fase del cigüeñal

Al graficar la expresión (2.13) en función del ángulo de cigüeñal se tiene una función periódica como la que se muestra en la figura 2.7 la cual puede ser desarrollada con mucha aproximación mediante las series de Fourier.

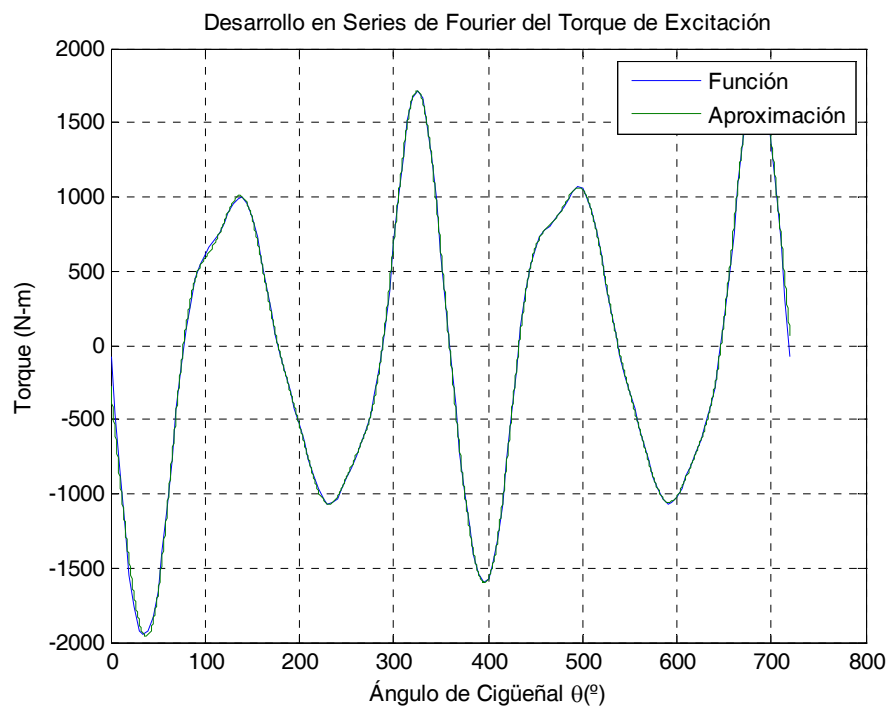


Figura 2.7: Torque de excitación como función periódica para una velocidad del motor de 2200 rpm.

La expresión matemática en Series de Fourier que describe la función periódica mostrada es entonces:

$$T_{21-i}(\omega t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] \hat{k} \Rightarrow \text{para } (i=1,2) \quad (2.14)$$

Al derivar la expresión con respecto de $\theta = \omega t$ (2.14) se tendrá la siguiente expresión:

$$T_{21-i,i}(\omega t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n [A_n \text{sen}(n\omega t) - B_n \text{cos}(n\omega t)] \hat{k} \Rightarrow \text{para } (i = 1, 2) \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) expresa como el torque de excitación influye en la rigidez del sistema, tal y como se expresó en el acápite anterior donde se desarrolló la matriz de rigidez del eje cigüeñal de dos cilindros.

El procedimiento completo desarrollado para obtener el torque debido a la presión de los gases de la combustión y el torque debido a las inercias en movimiento alrededor del eje cigüeñal, donde se incluye las relaciones cinemáticas, los procedimientos matemáticos y distintas simplificaciones se puede verificar en el anexo C.

2.3. BIBLIOGRAFÍA CAPÍTULO 2

1. NORTON, Robert L., "DESIGN OF MACHINERY", 3º Edición, Editorial Mc Graw Hill, Massachusetts, 1999.
2. GENTA, Giancarlo, "VIBRATION DYNAMICS AND CONTROL", 1º Edición, Editorial Springer, Torino, 2008.
3. THOMSON, William T., "THEORY OF VIBRATION WITH APPLICATIONS", 5º Edición, Pearson Education, Beijing, 2005.
4. DEN HARTOG, J.P., "MECANICA DE LAS VIBRACIONES", 4º Edición, Editorial McGraw Hill, México, 1974.
5. GIACOSA, Dante., "MOTORES ENDOTÉRMICOS", 3º Edición, Editorial Científico - Medica, Barcelona, 1970.
6. VAN KHANG, N., PHONG DIEN, N. and MANH COUNG, H., "*Parametric Torsional Vibration Of Mechanical Drive Systems With Non Uniform Transmission Mechanism*", Technische Mechanik, Band 28, Heft 3-4, pp. 310 – 323, 2008.
7. DRESIG, H. and THÜMMEL, T., "*Parametric Excited Vibrations Of Mechaninims*", *8th IFTOMM World Congress on TMM, Prag 1991 Proceedings, Vol. 1, pp 177 - 180, 1991.*
8. BRUSA, E., DELPRETE, C. and GENTA, G., "*Torsional Vibration of Cranshafts: Effects of non Constant Moments of Inertia*," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 205, No. 2, pp. 135–150, 1997.
9. MOHAMMED A. R., E. A., "Torsional Vibration Analysis of Automotive Drivelines", Tesis de Ph. D., Universidad de Leeds, Leeds, 1997.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS Y DISEÑO DEL ABSORSOR DE VIBRACIONES TORSIONALES TIPO PÉNDULO CENTRÍFUGO

3.1. MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO GENERAL DE UN ABSORSOR PENDULAR CENTRÍFUGO COMO UN SISTEMA DE 2 GDL

Uno de los métodos más utilizados para corregir sistemas que presentan vibraciones torsionales es el absorsor pendular centrífugo que a continuación se desarrolla en el presente acápite.

Para un sistema recíprocante como un motor de combustión interna, utilizado en automóviles, los torques de excitación son periódicos y dependen de la velocidad del motor ω , la cual varía en un amplio rango. Así para que el absorsor pendular sea efectivo debe sintonizarse con el armónico dominante de la función periódica que describe el torque de excitación, además la frecuencia del péndulo debe ser proporcional a la velocidad del motor. La masa del péndulo absorsor actúa como una masa infinita para el armónico y la frecuencia a la cual se sintonizó el absorsor, dando lugar a un torque de reacción.

Puesto que no existe pérdida de energía en el péndulo no puede el absorsor ser considerado como un dispositivo amortiguador.

En la siguiente figura se muestra un esquema conceptual de un absorber pendular centrífugo.

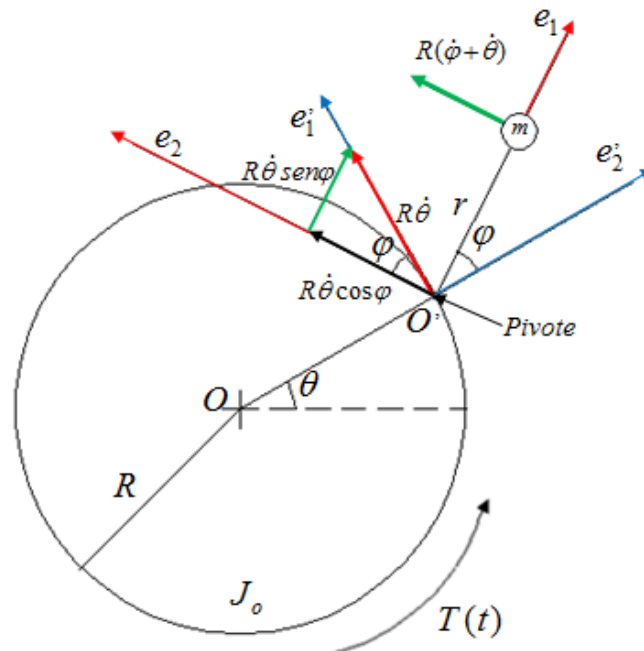


Figura 3.1. Modelo mecánico - matemático del absorber pendular como un sistema de 2GDL.

En la figura 3.1 se observa que el absorber pendular se desplaza en el plano que contiene a los vectores unitarios e_1 y e_2 que están fijos al péndulo de masa m y longitud r . Los vectores e_1' y e_2' están fijos al sistema giratorio; por lo que se tiene que analizar un sistema de dos grados de libertad.

Para obtener las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento del sistema se hará uso de las ecuaciones de Lagrange de 2º tipo.

De la figura 3.1 se deduce que la velocidad absoluta del péndulo.

$$V_m = V_{o'} + V_{m/o'} \rightarrow V_m = R\dot{\theta}e_1' + r(\dot{\varphi} + \dot{\theta})e_2$$

$$V_m = (R\dot{\theta}\cos\varphi)e_1 + (R\dot{\theta}\sin\varphi + r(\dot{\varphi} + \dot{\theta}))e_2 \quad (3.1)$$

La energía cinética del sistema está dada por:

$$E_p = \frac{1}{2}J_o\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(V_m \cdot V_m)$$

$$E_p = \frac{1}{2}J_o\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left[(R\dot{\theta}\cos\varphi)^2 + (R\dot{\theta}\sin\varphi + r(\dot{\varphi} + \dot{\theta}))^2\right] \quad (3.2)$$

$$E_p = \frac{1}{2}J_o\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left[R^2\dot{\theta}^2 + r^2(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + 2rR(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}\dot{\theta})\cos\varphi\right]$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[J_o + m(R^2 + r^2 + 2rR\cos\varphi)\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mr(r + R\cos\varphi)\dot{\varphi}\dot{\theta}$$

Si se ignoran los efectos de la gravedad y la rigidez del elemento giratorio, entonces no se tendrá energía potencial en el sistema. Además como no se han considerado ninguna forma de amortiguamiento, no hay pérdida de energía por disipación.

Las coordenadas generalizadas para el sistema de dos grados de libertad serán: $q_1 = \theta$ y $q_2 = \varphi$; además al tomar en cuenta el torque de excitación perturbante $Q_1 = T(t)$ y $Q_2 = 0$, las ecuaciones de Lagrange de 2º tipo quedan expresadas como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_p}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = T(t) \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_p}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0$$

Relacionando las expresiones (3.2) y (3.3) se obtienen las siguientes ecuaciones acopladas no lineales.

$$\begin{aligned} & \left[J_o + m(R^2 + r^2 + 2rR \cos \varphi) \right] \ddot{\theta} + mr(r + R \cos \varphi) \ddot{\varphi} - \dots \\ & mrR \dot{\theta} \dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi - mrR \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen} \varphi = T(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$mr(r + R \cos \varphi) \ddot{\theta} + mr^2 \ddot{\varphi} + mrR \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \varphi = 0$$

Al dividir el sistema de ecuaciones (3.4) por mR^2 e introducir la relación adimensional

de longitud del péndulo $\alpha = \frac{r}{R}$ se llega a:

$$J_1(\varphi) \ddot{\theta} + J_2(\varphi) \ddot{\varphi} - \alpha (2\dot{\theta} \dot{\varphi} + \dot{\varphi}^2) \operatorname{sen} \varphi = \frac{T(t)}{mR^2} \quad (3.5)$$

$$J_2(\varphi) \ddot{\theta} + \alpha^2 \ddot{\varphi} + \alpha \operatorname{sen} \varphi \dot{\theta}^2$$

Donde:

$$J_1(\varphi) = \frac{J_o}{mR^2} + 1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos \varphi \quad (3.6)$$

$$J_2(\varphi) = \alpha^2 + \alpha \operatorname{sen} \varphi$$

La rotación del sistema giratorio está definido como:

$$\theta(t) = \omega t + \beta(t) \quad (3.7)$$

Donde: ωt es la rotación en régimen permanente.

$\beta(t)$ es la perturbación al sistema debido a la rotación.

Al sustituir la ecuación (3.7) en el sistema de ecuaciones (3.6) se tiene:

$$J_1(\varphi)\ddot{\beta} + J_2(\varphi)\ddot{\varphi} - \alpha(2\dot{\beta}\dot{\varphi} + \dot{\varphi}^2)\text{sen}\varphi - 2\omega\alpha\dot{\varphi}\text{sen}\varphi = \frac{T(t)}{mR^2} \quad (3.8)$$

$$J_2(\varphi)\ddot{\beta} + \alpha^2\ddot{\varphi} + \alpha\text{sen}\varphi(\omega + \dot{\beta})^2 = 0$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (3.8) es no lineal, en consecuencia para linealizar este sistema de ecuaciones es necesario considerar pequeñas oscilaciones del péndulo $\varphi \approx 0$ y por lo tanto $\text{sen}\varphi \approx \varphi \rightarrow \cos\varphi \approx 1$; ignorando el fenómeno de Coriolis por tener oscilaciones pequeñas además de las no linealidades cuadráticas se tendrá el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales.

$$\left[\frac{J_o}{mR^2} + (1 + \alpha^2) \right] \ddot{\beta} + \alpha(1 + \alpha)\ddot{\varphi} = \frac{T(t)}{mR^2} \quad (3.9)$$

$$(1 + \alpha)\ddot{\beta} + \alpha\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

La segunda ecuación que se muestra en la expresión (3.9) proporciona la frecuencia natural del péndulo absorber.

$$\omega_p = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha}} = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \omega_p = \omega \sqrt{\frac{R}{r}} \quad (3.10)$$

Por tanto la frecuencia natural del péndulo es linealmente proporcional a la velocidad de rotación ω .

3.2. MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO GENERAL DE UN ABSORSOR PENDULAR CENTRÍFUGO CONSIDERANDO LA RIGIDEZ DEL EJE

El modelo desarrollado en el acápite anterior es el más sencillo para analizar el comportamiento del sistema, sin embargo se necesita saber la influencia de ambos absorbentes pendulares sobre el sistema y el intercambio de energía entre estos, por lo que es necesario desarrollar un modelo para el absorbente pendular considerando la inercia del eje cigüeñal.

En el esquema que se muestra en la figura 3.2, el péndulo de masa (m) y de longitud (l) está articulado a un disco de momento de inercia (J). El nodo "1" está en el disco del modelo matemático mostrado y el nodo "0" está donde el disco se conecta con el eje de rigidez (k).

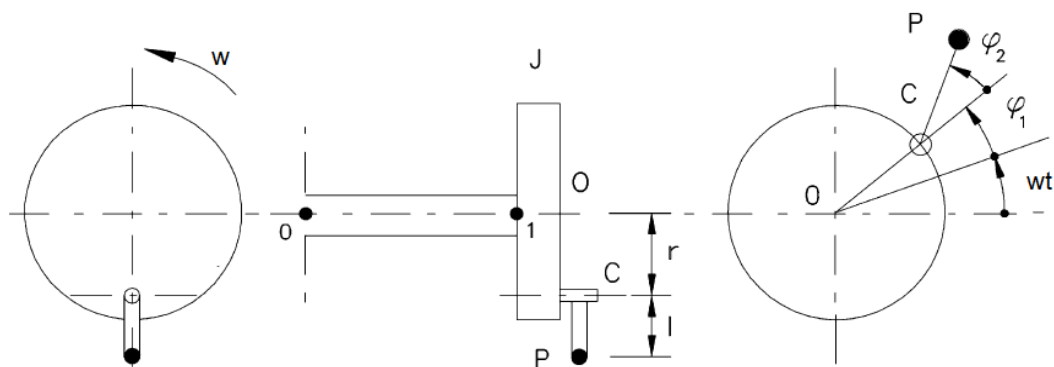


Figura 3.2. Modelo mecánico - matemático del absorbente pendular considerando la inercia del eje cigüeñal.

La masa pendular actúa como una masa infinita para el armónico y la frecuencia a la cual se sintonizó el absorbente, dando lugar a un torque de reacción que reduce el

efecto del torque de excitación y por ende las amplitudes de vibración torsional que se ejerce en el eje cigüeñal.

El objetivo de este análisis es construir un elemento finito “absorber pendular”, el cual pueda ser ensamblado con facilidad al modelo matemático discretizado que se muestra en la figura 3.2.

La energía cinética del sistema mostrado viene dado por la siguiente expresión:

$$2E_p = J(\omega + \dot{\phi}_1)^2 + m(V_p)^2 \quad (3.11)$$

$$2E_p = (J + mr^2)(\omega + \dot{\phi}_1)^2 + ml^2(\omega + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 + mrl(\omega + \dot{\phi}_1)(\omega + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)\cos(\phi_2)$$

La energía potencial del sistema viene dado por la expresión:

$$2U = k\phi_1^2 \quad (3.12)$$

La ecuación de movimiento del sistema torsional en oscilación libre se obtiene haciendo la derivadas necesarias, linealizando las expresiones trigonométricas y reordenando.

$$\begin{bmatrix} J + m(r+l)^2 & ml(r+l) \\ ml(r+l) & ml^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mrl\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

La amplitud en el nodo 1 se reducirá mientras el péndulo absorber esté sintonizado y se cumpla la relación:

$$\frac{r}{l} = \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \quad (3.14)$$

Donde ω_p es la frecuencia natural del péndulo y viene dado por: $\omega_p = \omega \sqrt{\frac{r}{l}}$

La variación entre la amplitud de oscilación del disco y el péndulo viene dado por la siguiente expresión:

$$\frac{\phi_{1_0}}{\phi_{2_0}} = \frac{\frac{l}{r} - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}{1 + \frac{l}{r}} \quad (3.15)$$

La presencia del absorber de vibraciones pendular en el n-ésimo nodo del sistema mostrado en la figura 3.2 puede ser representado adicionando las siguientes expresiones en la matriz de masa y rigidez respectivamente.

$$M = m \begin{bmatrix} (r+l)^2 & l(r+l) \\ l(r+l) & l^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$K = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mrl \end{bmatrix}$$

La longitud del péndulo es por lo general muy pequeña sobre todo si el absorber se ha sintonizado a un armónico dominante alto.

La frecuencia natural del péndulo absorber, para los dos desarrollos matemáticos del absorber, al igual que los demás tipos de absorberes de vibración debe de estar sintonizada con la frecuencia de excitación, pero en el caso de un sistema recíprocante el torque de excitación está representado por una onda periódica y por lo

tanto la frecuencia de excitación viene multiplicada por un coeficiente n denominada también orden de la vibración.

Un torque de excitación periódico puede ser expresado haciendo uso de las series de Fourier de la siguiente manera.

$$T_{21-i}(\omega t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \text{sen}(n\omega t)] \hat{k} \Rightarrow \text{para } (i=1,2) \quad (3.17)$$

El orden de la vibración n viene definido por el coeficiente armónico dominante que a continuación se muestra en la siguiente figura.

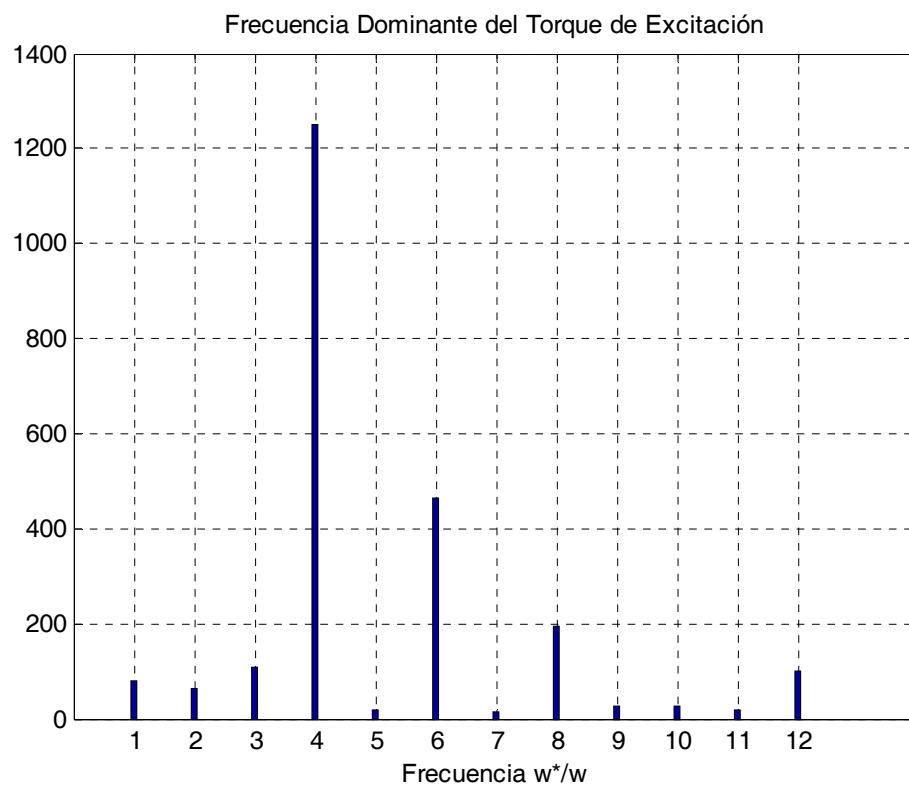


Figura 3.3. Frecuencia Dominante del Torque de Excitación Periódico.

Un absorsor pendular sintonizado tendrá la siguiente característica:

$$n = \sqrt{\frac{r}{l}} \quad (3.18)$$

Donde: n es el orden de la vibración.

r es el radio del elemento giratorio.

l es la longitud del péndulo.

3.3. ABSORSOR PENDULAR CENTRÍFUGO TIPO BIFILAR

El Absorsor centrífugo bifilar fue desarrollado en Francia por Zarazin y en Estados Unidos por Chilton en 1935. El péndulo tiene la geometría en forma de una U alargada que encaja con bastante tolerancia en el contrapeso del cigüeñal como se muestra en la siguiente figura.

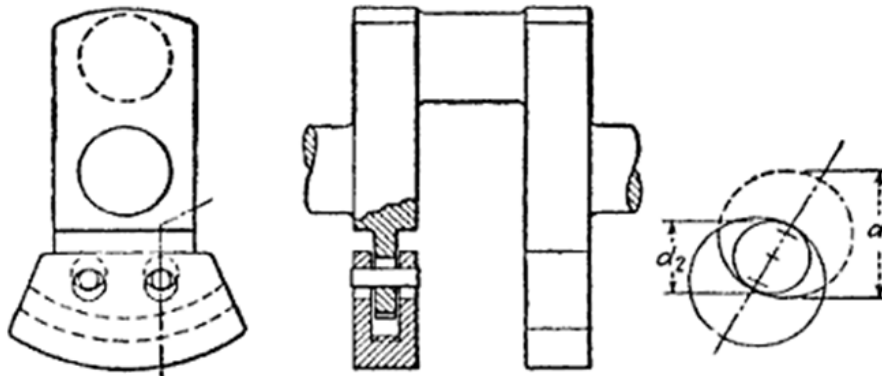


Figura 3.4. Absorsor Pendular Centrifugo “Bifilar” [4].

El contrapeso del cigüeñal debe tener dos agujeros de diámetro d_1 . El Absorsor deberá también tener dos agujeros del mismo diámetro; El péndulo se une al contrapeso del cigüeñal mediante dos pines (espigas) de diámetro d_2 .

En estas condiciones el péndulo puede oscilar sin deslizarse sobre las espigas; El movimiento del centro del agujero del péndulo describe un pequeño círculo alrededor del centro del agujero del contrapeso del cigüeñal. El radio de esta trayectoria circular viene dado por: $(d_1 - d_2)$.

En la ecuación (3.18), el radio del elemento giratorio r es reemplazado por la distancia desde el eje longitudinal del cigüeñal al centro de gravedad del péndulo $(r+l)$; donde $l = (d_1 - d_2)$. Se puede inferir que incluso con un r bastante pequeño se puede lograr una masa muy grande. Entonces la ecuación (3.18) queda expresada como:

$$n = \sqrt{\frac{r+l}{l}} \quad (3.19)$$

3.4. ABSORSOR PENDULAR CENTRÍFUGO TIPO MECEDOR.

Otra de las soluciones que se tiene para afrontar las vibraciones torsionales es el absorsor pendular centrífugo del tipo mecedor; consiste en un cilindro de radio r_2 que se mece o gira en un orificio cilíndrico de radio r_1 como se aprecia en la figura 3.5.

En el caso en que el cilindro se deslice sin girar, todos sus puntos tendrán trayectorias similares de radio $(r_1 - r_2)$; esta magnitud será entonces equivalente a la longitud l del péndulo.

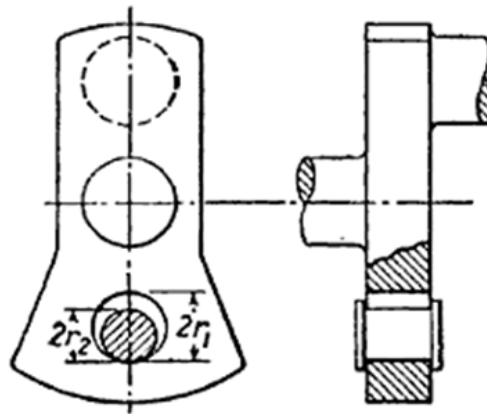


Figura 3.5. Absorsor Pendular Centrifugo “Mecedor” [4].

Para un cilindro que gira la oscilación es menor, de manera que la longitud l del péndulo es mayor que $(r_1 - r_2)$, como la masa para este tipo de absorsor es más pequeña que la usada en un absorsor bifilar la amplitud a la cual deberá oscilar para que tenga un correcto funcionamiento es mucho mayor, lo que origina dificultades en el diseño. Considerando únicamente que el péndulo mecedor se desliza en el orificio la ecuación (3.18) queda expresada como:

$$n = \sqrt{\frac{r+l}{r_1-r_2}} \quad (3.20)$$

3.5. DISEÑO DEL ABSORSOR DE VIBRACIONES TORSIONALES TIPO PÉNDULO CENTRÍFUGO - METODOLOGÍA DE DISEÑO VDI 2221

3.5.1. COMPRENSIÓN DE LA SOLICITUD

3.5.1.1. LISTA DE EXIGENCIAS

LISTA DE EXIGENCIAS		
PROYECTO:	Diseño de un módulo Absorber de Vibraciones Torsionales tipo Péndulo Centrífugo	FECHA: 29/04/2010
CLIENTE:	Pontificia Universidad Católica del Perú	ELABORADO: KAMQ
DESEO O EXIGENCIA	DESCRIPCIÓN	RESPONSABLE
E	<p>Función principal:</p> <ul style="list-style-type: none"> Reducir las vibraciones torsionales que se presentan en el eje cigüeñal de un motor de combustión interna Diesel de 2 cilindros en línea y 4 tiempos 	KAMQ
E	<p>Materia prima:</p> <ul style="list-style-type: none"> Un motor de combustión interna de 2 cilindros y 4 tiempos. 2 discos de acero de espesor suficiente que garantice la inercia que se necesita para absorber las vibraciones torsionales y con propiedades mecánicas adecuadas para su adecuado mecanizado. Las vibraciones torsionales en los ejes cigüeñales causadas por el torque variable que se presenta. 	KAMQ

LISTA DE EXIGENCIAS		
PROYECTO:	Diseño de un módulo Absorber de Vibraciones Torsionales tipo Péndulo Centrífugo	FECHA: 29/04/2010
DESEO O EXIGENCIA	DESCRIPCIÓN	RESPONSABLE
E	Fuerza: La inercia y la rigidez del absorber torsional deben estar sintonizadas con la frecuencia de vibración torsional de tal manera que las amplitudes de vibración se reduzcan cuando sean aplicadas en el eje cigüeñal.	KAMQ
E	Energía: El absorber de vibraciones torsionales no requiere energía adicional más que la rotación del eje cigüeñal del motor de combustión interna.	KAMQ
E	Seguridad: El absorber torsional debe diseñarse de tal manera que no existan peligros para la persona que esté trabajando con el módulo.	KAMQ
E	Fabricación: El absorber torsional debe poder ser fabricado en su totalidad con material y talleres nacionales utilizando para este fin tecnología local.	Técnico Capacitado
E	Montaje: El absorber torsional deberá ser de fácil montaje e instalación con herramientas estándar, al igual que el motor de combustión interna utilizado para el estudio.	KAMQ
E	Costos: No se precisan.	KAMQ
E	Plazo de entrega: 20/07/2011	KAMQ
E	Mantenimiento: El motor de combustión interna utilizado para este módulo debe estar en perfectas condiciones de funcionamiento y debe prestar facilidad al momento de desmontar sus elementos como los pistones para el montaje del absorber torsional en el eje cigüeñal.	KAMQ
E	Ergonomía: Las dimensiones principales del módulo deben ser tales que pueda trabajarse con comodidad, el absorber pendular debe adecuarse a las dimensiones del motor de combustión interna.	KAMQ

3.5.2. CONCEPCIÓN DE LA SOLICITUD

3.5.2.1. ABSTRACCIÓN DEL MÓDULO ABSORSOR DE VIBRACIONES TORSIONALES

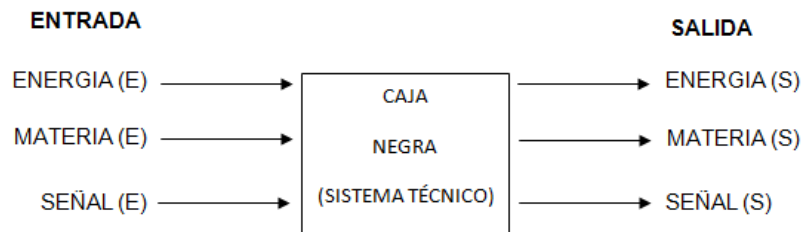


Figura 3.6: Esquema Black Box del sistema técnico.

- **ENTRADAS**

Energía: Energía mecánica para accionar el motor de combustión interna y generar vibración torsional en el sistema.

Materia: Sistema que asigna la inercia y la rigidez al sistema primario (eje cigüeñal).

Señal: Las grandes amplitudes de vibración torsional del sistema primario observables en el equipo de medición.

- **SALIDAS**

Energía: Energía mecánica expresada en la rotación del eje cigüeñal.

Materia: Sistema que asigna la inercia al sistema secundario (absorber)

Señal: Pequeñas amplitudes de vibración del sistema observables en el equipo de medición.

3.5.2.2. SECUENCIA DE OPERACIONES

- Encender el motor de combustión interna que va a producir las vibraciones torsionales.

- Operar el motor de combustión interna a una determinada frecuencia de excitación.
- Establecer los datos de inercias y rigidez del eje cigüeñal del motor de combustión interna.
- El absorber de vibraciones torsionales, cuya inercia ha sido dimensionada de acuerdo a los parámetros principales del eje cigüeñal (masas rotativas y oscilantes y rigidez del eje), se sintoniza a la frecuencia de excitación para absorber las vibraciones torsionales que produce el motor de combustión interna o sistema primario.

3.5.2.3. ESTRUCTURA DE FUNCIONES

A continuación se muestra la estructura de funciones empleada en el diseño del módulo, el cual es modelado como un sistema torsional compuesto.

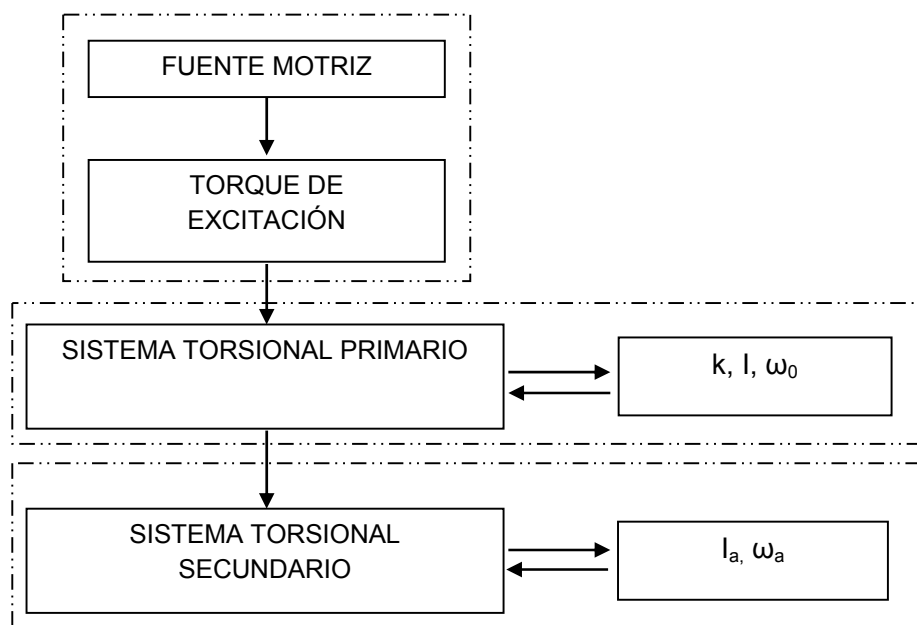
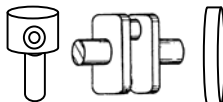
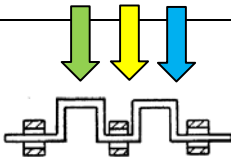

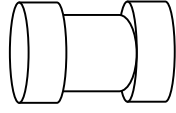

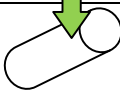
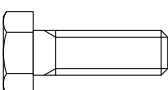


Figura 3.7: Estructura de Funciones.

3.5.2.4. MATRIZ MORFOLÓGICA

ÍTEM	FUNCIONES PARCIALES	ALTERNATIVA 1	ALTERNATIVA 2	ALTERNATIVA 2
1	Sistema principal Inercia	 <p>Pistones</p> <p>Muñones de Biela</p> <p>Volante de Inercia</p>		
2	Rigidez	 <p>Eje Cigüeñal</p>		
3	Sistema secundario Inercia	 <p>Bifilar</p>	 <p>Mecedor</p>	 <p>Péndulo Oscilante</p>
4	Fijación	 <p>Pasador</p>	 <p>Tornillo</p>	

Solución 1

Solución 2

Solución 2

3.5.2.5. CONCEPTOS DE SOLUCIÓN

A.

ONCEPTO DE SOLUCIÓN 1

C

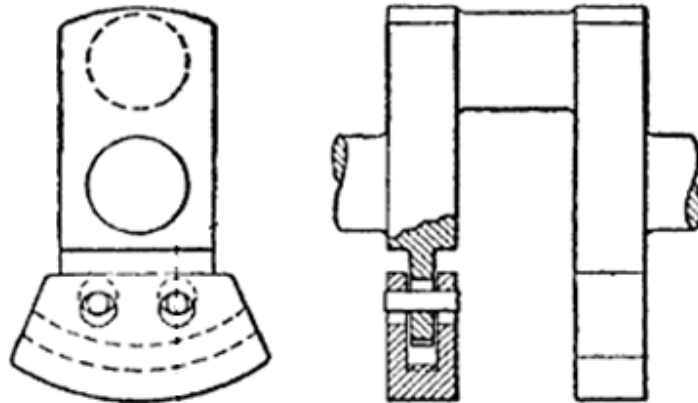


Figura 3.8: Absorsor Pendular Centrífugo Tipo Bifilar Acoplado al Eje Cigüeñal. [1]

B.

ONCEPTO DE SOLUCIÓN 2

C

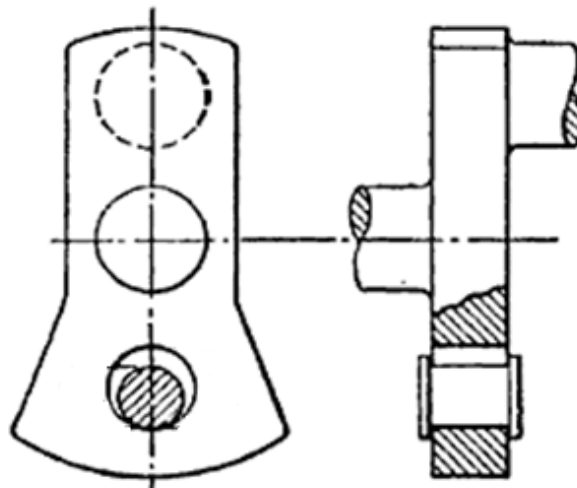


Figura 3.9: Absorsor Pendular Centrífugo Tipo Mecedor Acoplado a los Codos del Eje Cigüeñal [1]

C.

ONCEPTO DE SOLUCIÓN 3

C

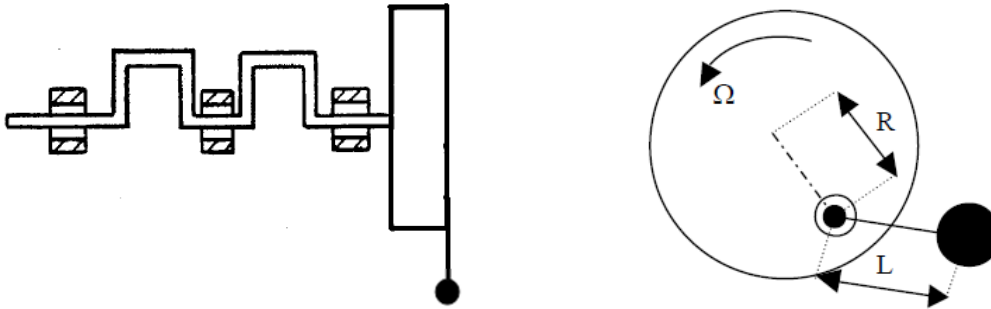


Figura 3.10: Absorsor Pendular Centrífugo Oscilante Acoplado a la Volante del Eje Cigüeñal.

3.5.3. ELABORACIÓN DEL PROYECTO

3.5.3.1. PROYECTO PRELIMINAR – PROYECTO PRELIMINAR ÓPTIMO

Sobre la base de las alternativas que se trabajaron en la matriz morfológica, se procede a desarrollar tres conceptos de solución para el absorber de vibraciones torsionales, los cuales posteriormente pasaron a ser sometidos a una evaluación técnica y económica a partir de lo cual se obtendrá el proyecto preliminar óptimo, con el cual se desarrollará el proyecto final para el absorber.

3.5.3.1.1. EVALUACIÓN DE PROYECTOS

Para este acápite se ha seleccionado una serie de criterios de evaluación técnicos X_i y económicos Y_i los que nos ayudarán a evaluar cada uno de los conceptos de solución, los que finalmente luego de compararlos nos ayudarán a determinar cuál es nuestro proyecto óptimo a desarrollar en el presente diseño.

Tabla 3.1. Evaluación Técnica del Proyecto.

EVALUACIÓN DE PROYECTOS - VALOR TECNICO											
PROYECTO: Diseño de un absorber de Vibraciones Torsionales tipo Péndulo Centrífugo para el eje cigüeñal de un Motor de dos Cilindros y 4 tiempos.											
<p>p: Puntaje de 0 a 4 (Escala de Valores según VDI 2225). 0: No Satisface 1: Aceptación a las justas 2: Suficiente 3: Bien 4: Muy bien</p>											
<p>g: Peso ponderado en función a los criterios de evaluación.</p>											
Variantes de Concepto / Proyectos			Solución 1 S1		Solución 2 S2		Solución 3 S3		Solución Ideal Sideal		
Nº	Criterios de Evaluación		g	p	gp	p	gp	p	gp	p	gp
1	Diseño		4	3	12	3	12	3	12	4	16
2	Función		4	3	12	2	8	2	8	4	16
3	Uso de la energía		3	3	9	3	9	3	9	4	12
4	Espacio requerido		4	3	12	3	12	1	4	4	16
5	Manufactura		3	2	6	3	9	3	9	4	12
6	Montaje		2	3	6	3	6	3	6	4	8
7	Seguridad		3	3	9	2	6	1	3	4	12
8	Mantenimiento		2	3	6	3	6	3	6	4	8
Puntaje Máximo $\sum p$ ó $\sum gp$			25	23	72	22	68	19	57	32	100
Valor Técnico X_i			0,7	0,72	0,688	0,68	0,594	0,57	1	1	
Orden			1	1	2	2	3	3			

Donde los valores de X_i se obtienen mediante las fórmulas que a continuación se mencionan:

$$X_i = \frac{\sum p}{n \cdot p_{\max}} \quad (3.21)$$

$$X_i = \frac{\sum (g \cdot p)}{p_{\max} \cdot \sum g} \quad (3.22)$$

Tabla 3.2. Evaluación Económica del Proyecto

EVALUACIÓN DE PROYECTOS - VALOR ECONÓMICO										
PROYECTO: Diseño de un absorbador de Vibraciones Torsionales tipo Péndulo Centrifugo para el Eje Cigüeñal de un Motor de dos Cilindros.										
<p>p: Puntaje de 0 a 4 (Escala de Valores según VDI 2225). 0: No Satisface 1: Aceptación a las justas 2: Suficiente 3: Bien 4: Muy bien</p>										
<p>g: Peso ponderado en función a los criterios de evaluación.</p>										
Variantes de Concepto / Proyectos			Solución 1 S1		Solución 2 S2		Solución 3 S3		Solución Ideal Sideal	
Nº	Criterios de Evaluación	g	p	gp	p	gp	p	gp	p	gp
1	Diseño	4	3	12	3	12	3	12	4	16
2	Material	4	3	12	3	12	2	8	4	16
3	Manufactura	3	2	6	3	9	3	9	4	12
4	Componentes (compra)	3	3	9	3	9	3	9	4	12
5	Instalación	3	3	9	2	6	2	6	4	12
6	Repuestos	2	3	6	2	4	2	4	4	8
7	Mantenimiento	3	3	9	3	9	3	9	4	12
Puntaje Máximo $\sum p$ ó $\sum gp$		22	20	63	19	61	18	57	28	88
Valor Económico Y_i			0,71	0,72	0,68	0,69	0,64	0,65	1,00	1,00
Orden			1	1	2	2	3	3		

Donde los valores de Y_i se obtienen mediante las fórmulas que a continuación se mencionan:

$$Y_i = \frac{\sum p}{n \cdot p_{\max}} \quad (3.23)$$

$$Y_i = \frac{\sum (g \cdot p)}{p_{\max} \cdot \sum g} \quad (3.24)$$

Ahora, con los valores resaltados en cada una de las evaluaciones que se muestra a continuación, se procede de elaborar el diagrama de evaluación según VDI 2225.

Tabla 3.3. Valores obtenidos del criterio técnico y económico.

X_i	Y_i
0,72	0,72
0,68	0,69
0,57	0,65

El diagrama de evaluación será:

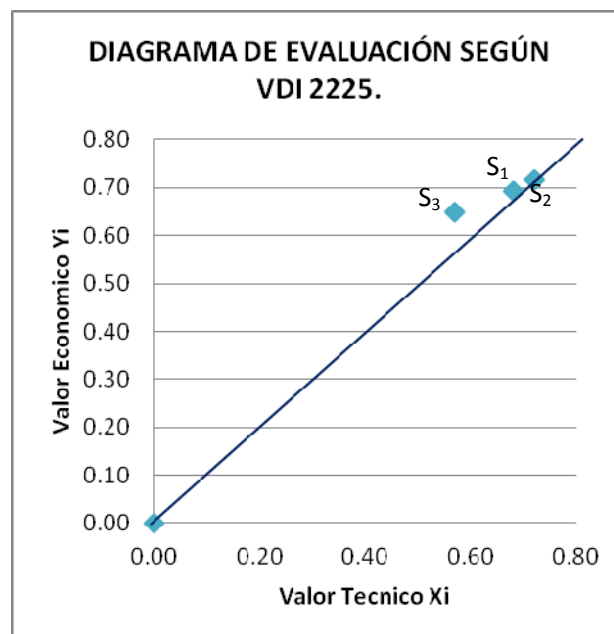


Figura 3.11. Diagrama de evaluación según VDI 2225.

De las tablas 3.1 y 3.2 además de la figura 3.11 se observa, que el proyecto que cumple con los requisitos técnicos y económicos es el concepto de solución 1 que corresponde al “Absorsor de Vibraciones Torsionales tipo Péndulo Centrífugo Bifilar”, por ser la que más se aproxima a la línea de solución óptima en la figura 3.5, aunque cabe la posibilidad de tomar el concepto de solución 2 por ser una solución muy aproximada a la línea ideal.

3.5.3.1.2. MEMORIA DE CÁLCULOS DEFINITIVOS

3.5.3.1.2.1. CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DEL SISTEMA

Los parámetros del sistema están definidos en su gran mayoría por las especificaciones del motor marino WESTERBEKE de 12 Hp y 3000 rpm detallado en el anexo G.

- Número de cilindros: $i = 2$
- Velocidad de rotación promedio: $n = 3000 \text{ rpm}$
- Carrera del pistón: $C_p = 4 \text{ plg} = 102 \text{ mm}$
- Diámetro del pistón: $D_p = 3 \text{ plg} = 76 \text{ mm}$
- Área del pistón: $A_p = 7.05 \text{ plg}^2 = 4536 \text{ mm}^2$
- Peso del pistón: $W_p = 2 \text{ lb} = 9 \text{ N}$
- Longitud de la biela: $L = 8 \text{ plg} = 203 \text{ mm}$
- Peso de la biela: $W_b = 3 \text{ lb} = 13 \text{ N}$
- Momento de inercia de la biela: $J_b = 0.0075 \text{ slug} - \text{pie}^2 = 10186 \text{ kg} - \text{mm}^2$

- Radio del Cigüeñal: $r = 2 \text{ plg} = 51 \text{ mm}$
- Presión máxima de los gases de la combustión

$$P_g = 500 \text{ lb / plg}^2 = 3.5 \text{ N / mm}^2$$

Debido a que el momento de inercia del contrapeso del cigüeñal no es un dato común, se determinará en forma aproximada.

La distancia desde el punto B al centro de gravedad de la biela se obtiene por recomendaciones de diseño [6].

$Y_G = (0.7 \text{ a } 0.8)L$, se tomará:

$$Y_G = (0.75)L \Rightarrow Y_G = 152.25 \text{ mm} \quad (3.25)$$

$$X_G = (0.25)L \Rightarrow X_G = 50.75 \text{ mm}$$

La masa del pistón está dada por:

$$m_p = \frac{W_p}{g} = \frac{9 \text{ N}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow m_p \approx 0.9 \text{ kg} \quad (3.26)$$

La masa de la biela está dada por:

$$m_b = \frac{W_b}{g} = \frac{13 \text{ N}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow m_b \approx 1.3 \text{ kg} \quad (3.27)$$

Aplicando la teoría de reducción de masas usando para este fin masas equivalentes se tendrá lo siguiente:

Parte de la masa de la biela concentrada en el cigüeñal, que tiene movimiento únicamente rotativo:

$$m_{C.b} = m_b \left(\frac{Y_G}{L} \right) = 1.3 \left(\frac{152.25}{203} \right) \Rightarrow m_{C.b} \approx 0.975 \text{ kg} \quad (3.28)$$

Parte de la masa de la biela concentrada en el bulón del pistón (punto B), que tiene movimiento alternante:

$$m_{B.b} = m_b \left(\frac{X_G}{L} \right) = 1.3 \left(\frac{50.75}{203} \right) \Rightarrow m_{C.b} \approx 0.325 \text{ kg} \quad (3.29)$$

Debido a que la geometría del cigüeñal es compleja y necesitamos saber cuánto de la masa del cigüeñal se debe considerar como masa puramente rotativa, recurriendo a un software de diseño de donde se obtiene lo siguiente.

$$m_{C.rot} = 2.238 \text{ kg} \quad (3.30)$$

La masa equivalente del cigüeñal en el punto C, para $r_{G.c} = \frac{r}{2}$

$$m_{C.c} = m_{C.rot} \frac{r_{G.c}}{r} \Rightarrow m_{C.c} = 1.119 \text{ kg} \quad (3.31)$$

La masa equivalente total en el punto C viene dada por la siguiente expresión:

$$m_C = m_{C.b} + m_{C.c} \Rightarrow m_C = 2.113 \text{ kg} \quad (3.32)$$

La masa del contrapeso del cigüeñal concentrada en el punto D será entonces:

$$m_D = m_C \Rightarrow m_D = 2.113 \text{ kg} \quad (3.33)$$

Como se puede ver en la figura 2.2 el movimiento de la masa m_D es puramente rotativo alrededor del punto A, entonces se deduce que:

$$J_D = m_D r^2 = 0.975 \text{ kg} (51 \text{ mm})^2 \Rightarrow J_D = 5496 \text{ kg} - \text{mm}^2 \quad (3.34)$$

Antes de desarrollar la ecuación matricial que describe el comportamiento del sistema, se hace necesario hallar el valor de la rigidez torsional del eje cigüeñal.

$$k_t = \frac{G I_p}{L_e} \quad (3.35)$$

Donde: k_t : Coeficiente de rigidez torsional.

$$G: \text{Módulo de cizallamiento} = 6.75 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

I_p : Momento de inercia polar.

L_e : Longitud equivalente del eje cigüeñal.

El momento de inercia polar está dado por: $I_p = \frac{\pi d_c^4}{32}$

Donde d_c es el diámetro del cigüeñal y es igual a: $d_c = 0.75 D_p$

Donde D_p es el diámetro del cilindro que es especificación del motor.

Entonces: $d_c = 0.75(75 \text{ mm}) = 56 \text{ mm} \Rightarrow I_p = \frac{\pi (57 \text{ mm})^4}{32} = 9.655 \times 10^5 \text{ mm}^4$

La longitud equivalente del eje cigüeñal se considera como la distancia entre los ejes longitudinales de los cilindros, que por recomendación de diseño está dada por [6]:

$$L_e = 1.25 D_p = 1.2(76\text{mm}) \Rightarrow L_e = 95\text{ mm}$$

La rigidez torsional del sistema viene dada por:

$$k_t = \frac{G I_p}{L_e} = \frac{(7.15 \times 10^4)(10.36 \times 10^4)}{91.2} \Rightarrow k_t = 6.86 \times 10^5 \frac{N - m}{rad} \quad (3.36)$$

Es necesario también dimensionar aproximadamente al volante de inercia del sistema para lo cual definiremos lo siguiente: Se tiene como aproximación una inercia constante para cada cilindro definida por la relación:

$$J_{cte} = J_{rot} + \frac{1}{2} m_{rec} r^2 \quad (3.37)$$

Donde: J_{rot} es el momento de inercia puramente rotativo representado por el momento de inercia del contrapeso y parte del cigüeñal, entonces:

$$J_{rot} \approx 1.5 J_D \approx 1.5(0.002536 \text{ kg} - m^2) \Rightarrow J_{rot} \approx 0.008245 \text{ kg} - m^2 \quad (3.38)$$

La masa reciprocante m_{rec} es la masa de la biela, entonces: $m_{rec} = 1.3 \text{ kg}$

Además el radio del cigüeñal tiene como valor numérico: $r = 51 \text{ mm}$

La inercia constante toma el valor de: $J_{cte} = 0.008245 + \frac{1}{2}(1.3)(0.051)^2 = 0.01 \text{ kg} - m^2$

Ahora es necesario definir a la energía que necesita la volante para vencer a las inercias del sistema, entonces:

$$E_v = \frac{1}{2} (\sum J_{cte}) \omega^2 = (0.01 \text{ kg} - m^2) \left(230.4 \frac{rad}{s} \right)^2 \Rightarrow E_v = 529 \text{ N} - m \quad (3.39)$$

El momento de inercia para la volante queda definido como:

$$J_v = \frac{1}{2} \frac{E_v}{c \omega^2} \quad (3.40)$$

Donde c es un coeficiente de fluctuación de la velocidad del motor y por recomendación es igual a 0.05 [5].

$$\text{Reemplazando tenemos: } J_v = \frac{1}{2} \frac{(529 N - m)}{(0.05) \left(230.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2} \Rightarrow J_v = 0.1 \text{ kg} - m^2$$

Con los parámetros de rigidez, momento de inercia reducido constante de cada uno de los cilindros y el momento de inercia de la volante, se procede a hallar las frecuencias propias del sistema y sus respectivos modos de vibración torsional; para tal fin se usa la función "eig" implementada en el programa MATLAB.

Primero es necesario definir la matriz de inercia del sistema torsional como se muestra en la siguiente expresión.

$$J = \begin{bmatrix} j_1 & 0 & 0 \\ 0 & j_2 & 0 \\ 0 & 0 & j_3 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\text{Donde: } j_1 = 0.01 \text{ kg} - m^2 \quad j_2 = 0.01 \text{ kg} - m^2 \quad j_3 = 0.1 \text{ kg} - m^2$$

De la misma manera la matriz de rigidez del sistema sin considerar la influencia de la segunda derivada del momento de inercia reducido y la derivada del torque de excitación para cada cilindro, se tiene la siguiente expresión.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\text{Donde: } k_1 = k_2 = 6.86 \times 10^5 \frac{\text{N} - m}{\text{rad}}$$

Una vez definido la matriz de inercia y rigidez se procede a elaborar un Script en el MATLAB donde a través de la función ""eig"" podamos calcular las frecuencias propias

y graficar los modos de vibración del sistema torsional. Las frecuencias propias halladas son:

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 5.5771 \times 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \quad \omega_3 = 1.3474 \times 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \quad (3.43)$$

Los modos de vibración torsional son los que se muestran a continuación:

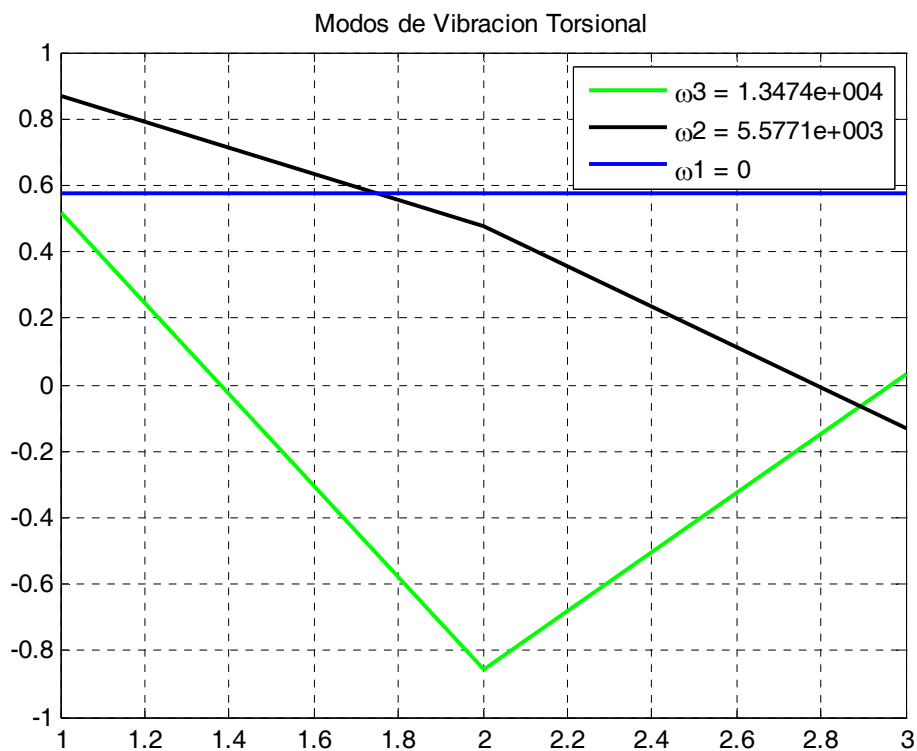


Figura 3.12. Modos de Vibración Torsional del Sistema.

El sistema analizado tiene dos cilindros entonces el momento de inercia para cada uno de estos viene dado por las expresiones (2.3):

$$\bar{J}_1(\omega t) = J_o + \sum_{n=1}^6 [a_n^{(1)} \cos(n\omega t) + b_n^{(1)} \text{sen}(n\omega t)] \quad (3.44)$$

$$\bar{J}_2(\omega t) = J_o + \sum_{n=1}^6 [a_n^{(1)} \cos n(\omega t - 2\pi) + b_n^{(1)} \text{sen} n(\omega t - 2\pi)]$$

El término constante del momento de inercia periódico dado en la expresión (3.44) viene definido por la expresión (B.16) desarrollada en el anexo B:

$$J_o = J_D + J_b \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} \right) + m_b \left[r^2 + X_G^2 \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} \right) \right] - \dots$$

$$m_b \left[2r X_G \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda^4}{64} \right) \lambda \right] + m_p \left(\frac{r^2}{2} + \frac{\lambda^4 L^2}{8} + \frac{\lambda^6 L^2}{16} \right) \quad (3.45)$$

$$J_o = 9732 \text{ kg mm}^2$$

Donde los coeficientes $a_n^{(1)}$ y $b_n^{(1)}$ armónicos vienen dados por las ecuaciones (B.18) y (B.19) desarrolladas en el anexo B.

Los coeficientes $a_n^{(1)}$ coseno armónicos están definidos por las expresiones:

$$a_1^{(1)} = m_b r X_G \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} \right) + m_p r L \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} \right) \Rightarrow a_1^{(1)} = 414.571 \text{ kg mm}^2$$

$$a_2^{(1)} = J_b \frac{\lambda^2}{2} + \frac{m_b \lambda^2 X_G^2}{2} - m_b r X_G \lambda - \frac{1}{64} m_b r X_G \lambda^5 - m_p \left(\frac{r^2}{2} + \frac{\lambda^6 L^2}{32} \right) \Rightarrow a_2^{(1)} = -1627 \text{ kg mm}^2$$

$$a_3^{(1)} = m_b r X_G \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{3\lambda^4}{16} \right) + m_p r L \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{3\lambda^4}{16} \right) \Rightarrow a_3^{(1)} = 417.791 \text{ kg mm}^2$$

$$a_4^{(1)} = J_b \frac{\lambda^4}{8} + \frac{m_b \lambda^4 X_G^2}{8} + \frac{1}{32} m_b r X_G \lambda^5 + m_p L^2 \left(\frac{\lambda^4}{8} + \frac{\lambda^6}{16} \right) \Rightarrow a_4^{(1)} = 26.307 \text{ kg mm}^2$$

$$a_5^{(1)} = \frac{1}{16} m_b r X_G \lambda^4 + \frac{m_p r L \lambda^4}{16} \Rightarrow a_5^{(1)} = 3.22 \text{ kg mm}^2$$

$$a_6^{(1)} = \frac{1}{64} m_b r X_G \lambda^5 + \frac{m_p L^2 \lambda^6}{32} \Rightarrow a_6^{(1)} = 0.531 \text{ kg mm}^2$$

(3)

.46)

Los coeficientes $b_n^{(1)}$ seno armónicos están definidos por las expresiones:

$$b_1^{(1)} = m_b r e \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} \right) \Rightarrow b_3^{(1)} = 0$$

$$b_2^{(1)} = m_b r e \left(\lambda + \frac{5\lambda^5}{64} \right) \Rightarrow b_3^{(1)} = 0$$

$$b_3^{(1)} = m_b r X_G \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{3\lambda^4}{16} \right) + m_p r L \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{3\lambda^4}{16} \right) \Rightarrow b_3^{(1)} = 417.791 \text{ kg mm}^2$$

$$b_4^{(1)} = m_b r e \frac{\lambda^5}{16} \Rightarrow b_3^{(1)} = 0$$

$$b_5^{(1)} = m_b r e \frac{\lambda^4}{16} \Rightarrow b_3^{(1)} = 0$$

$$b_6^{(1)} = m_b r e \frac{\lambda^5}{64} \Rightarrow b_3^{(1)} = 0$$

(3.47)

Al observar los coeficientes $b_n^{(1)}$ seno armónicos se ve que la mayoría de estos toman el valor de cero debido a que no se considera la distancia “e” perpendicular al eje longitudinal de la biela descrito en el modelo presentado en el capítulo 1, para este modelo se ubicó el centro de gravedad en el eje longitudinal.

Como se puede verificar en la expresión 2.4 para la matriz de rigidez se tiene influencia de la segunda derivada de las inercias de ambos cilindros y la primera derivada del par de torsión en los elementos de la diagonal. La primer y segunda derivada de las inercias del sistema se estableció en el capítulo 2 mediante las siguientes expresiones de la forma.

$$\begin{aligned}\bar{J}_{1,1} &= \sum_{n=1}^6 \left[-n a_n^{(1)} \text{sen}(n\omega t) + n b_n^{(1)} \cos(n\omega t) \right] \\ \bar{J}_{2,2} &= \sum_{n=1}^6 \left[-n a_n^{(1)} \text{sen} n(\omega t - 2\pi) + n b_n^{(1)} \cos n(\omega t - 2\pi) \right] \\ \bar{J}_{1,11} &= -\sum_{n=1}^6 \left[n^2 a_n^{(1)} \cos(n\omega t) + n^2 b_n^{(1)} \text{sen}(n\omega t) \right] \\ \bar{J}_{2,22} &= -\sum_{n=1}^6 \left[n^2 a_n^{(1)} \cos n(\omega t - 2\pi) + n^2 b_n^{(1)} \text{sen} n(\omega t - 2\pi) \right]\end{aligned}\tag{3.48}$$

Los coeficientes coseno y seno armónicos de esta última expresión serán calculados mediante aproximación de la curva periódica del momento de inercia por series de Fourier en el capítulo 4 de simulación del sistema.

No podemos tener la primera derivada del par de torsión sin antes definir al par de torsión que se definió en el capítulo 2 mediante la expresión 2.13, de la forma.

$$T_{21} = \left[-P_g(\theta) A_p r + m_B \left[-r \omega^2 (\cos \omega t - \lambda \cos 2\omega t) \right] \right] * \dots \quad (3.49)$$

$$\sum_{i=1}^n [\text{sen}(\omega t - \phi_i) [1 + \lambda \cos(\omega t - \phi_i)]] \hat{k}$$

Debido a que el par de torsión es una función periódica se procedió con su respectivo desarrollo en series de Fourier, de la forma.

$$T_{21-i}(\omega t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \text{sen}(n\omega t)] \hat{k} \Rightarrow \text{para } (i=1,2) \quad (3.50)$$

De la misma forma los coeficientes coseno y seno armónicos de esta última expresión serán calculados mediante aproximación de la curva del torque por series de Fourier en el capítulo 4. La primera derivada del torque de excitación respecto de $\theta = \omega t$ viene dado por:

$$T_{21-i,i}(\omega t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n [A_n \text{sen}(n\omega t) - B_n \cos(n\omega t)] \hat{k} \Rightarrow \text{para } (i=1,2) \quad (3.51)$$

Los Torques de excitación están influenciados por la inercia de cada una de los cilindros mediante sus primeras derivadas dando como resultado la expresión:

$$T_1(\omega t) = T_{21-1,1}(\omega t) - \frac{1}{2} \omega^2 \bar{J}_{1,1}(\omega t) \quad (3.52)$$

$$T_2(\omega t) = T_{21-2,2}(\omega t) - \frac{1}{2} \omega^2 \bar{J}_{2,2}(\omega t)$$

A partir de estos parámetros se puede obtener las frecuencias propias variables y en un caso muy particular cuando se considere las inercias constantes se podrán tener los modos de vibración del sistema que se desarrollan con mayor detalle en el capítulo 4.

3.5.3.1.2.2. CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DEL ABSORSOR PENDULAR

Las formulas necesarias para calcular los parámetros del absorbor pendular tipo bifilar se desarrollaron en este capítulo, por lo que en esta sección definimos:

$$n = \sqrt{\frac{R_r + r_p}{r_p}} \quad (3.53)$$

Se sabe por definición de los parámetros del sistema que:

R_r es el radio del cigüeñal y es igual a 51 mm.

n es el orden de la armónica dominante del torque de excitación para cada cilindro, que para este caso particular toma el valor de 4.

Resolviendo la expresión (3.53) con los valores dados, se podrá obtener el valor de la longitud del péndulo $r_p = 3.4 \text{ mm}$. La frecuencia natural del péndulo viene dado por la expresión:

$$\omega_p = \omega \sqrt{\frac{R_r}{r_p}} \quad (3.54)$$

Adicionalmente se debe tener la masa del péndulo que no debe influenciar en el balanceo estático y dinámico del sistema, por lo que nos regimos a usar el absorbor con masa igual a la masa removida del contrapeso, entonces $m_p = 0.335 \text{ kg}$

Reemplazando con los valores asignados tenemos que $\omega_p = 1216.34 \frac{rad}{s}$.

Si se coloca el absorber en la volante de inercia del motor, entonces el valor de R_r sería el radio de esta volante y como es de suponer la frecuencia del péndulo sufrirá una ligera variación.

3.5.3.1.2.3. CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DEL ABSORSOR AMORTIGUADO

Recurriendo a la teoría del absorber de vibraciones torsionales viscoso desarrollado en el anexo D, se procede a calcular los parámetros que intervienen en este sistema sobre todo el coeficiente de amortiguamiento de la silicona.

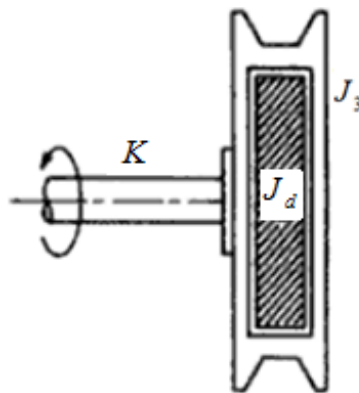


Figura 3.13. Esquema del Absorber Amortiguado [2].

Se define el coeficiente de correlación de inercias como: $\mu = \frac{J_d}{J_3}$

Donde: J_d es la inercia del volante amortiguador

J_3 es la inercia efectiva de la volante

Asumiendo que $J_3 = J_v = 0.1 \text{ kg} - \text{m}^2$, un coeficiente de correlación $\mu = 0.8$

El factor de amortiguamiento óptimo viene dado por:

$$\xi_o = \frac{\mu}{\sqrt{2(1+\mu)(2+\mu)}} = 0.252 \quad (3.55)$$

El coeficiente de amortiguamiento de la silicona para una rigidez del el eje cigüeñal

$K_t = 6.86 \times 10^5 \frac{\text{N} - \text{m}}{\text{rad}}$, viene definido por:

$$c = 2 \xi J \omega_n \Rightarrow c = 2 \xi J \sqrt{\frac{K_t}{J_3}} \Rightarrow c = 131.8 \frac{\text{kg} - \text{m}^2}{\text{s}} \quad (3.56)$$

3.5.4. ELABORACIÓN DE DETALLES

Los planos que se detallan a continuación se encuentran anexados.

3.5.4.1. PLANO DE ENSAMBLE

Plano 1. Ensamble del sistema

3.5.4.2. PLANOS DE DESPIECE

Plano 2

Plano 3

Plano 4

3.6. BIBLIOGRAFÍA CAPÍTULO 3

1. DEN HARTOG, J.P., "*Mecánica de las Vibraciones*", 4º Edición, Editorial McGraw Hill, México, 1974.
2. THOMSON, William T., "*Theory of Vibration With Applications*", 5º Edición, Pearson Education, Beijing, 2005.
3. KER WILSON, W., "Practical solution of torsional vibration problems VOL. 2", Cap. 11, 2º Edición, Editorial Wiley, New York, 1941.
4. BALACHANDRAN, B., "*VIBRACIONES*", 1º Edición, International Thomson Editores, México, 2006.
5. NORTON, Robert L., "*DESIGN OF MACHINERY*", 3º Edición, Editorial Mc Graw Hill, Massachusetts, 1999.
6. JOVAJ, M. S., "Motores de Automovil", 1º Edición, Editorial MIR, Moscu 1977.
7. TROY FEESE, P.E., "Guidelines For Preventing Torsional Vibration Problems In Reciprocating Machinery", Gas machinery Conference, Nashville Tennessee, 2002
8. WESTERBEKE DIESEL ENGINE.
<http://www.marinedieseldirect.com/repower/specs/westerbeke/12ctwo.pdf>
9. CRANKSHAFT DYNAMICS AND STRENGTH
https://www.avl.com/c/document_library/get_file?uuid=132624ce-8791-4675-a670-12820463014f&groupId=10138
10. GEISLINGER VDAMP
http://www.geislinger.com/fileadmin/pdf/Geislinger_Vdamp/Vdamp_1.2.pdf

CAPÍTULO 4

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA TORSIONAL BAJO DISTINTAS CONDICIONES DE TRABAJO

4.1. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA PARA 2200 RPM

4.1.1. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DEL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO

Para la simulación numérica del sistema torsional se tomó como velocidad del motor 2200 rpm, velocidad a la que se desarrolla el máximo torque en el sistema.

Además es necesario entender el comportamiento periódico del momento de inercia de los elementos acoplados al eje cigüeñal; como se mencionó las inercias de estos elementos deben ser reducidos al eje longitudinal del cigüeñal.

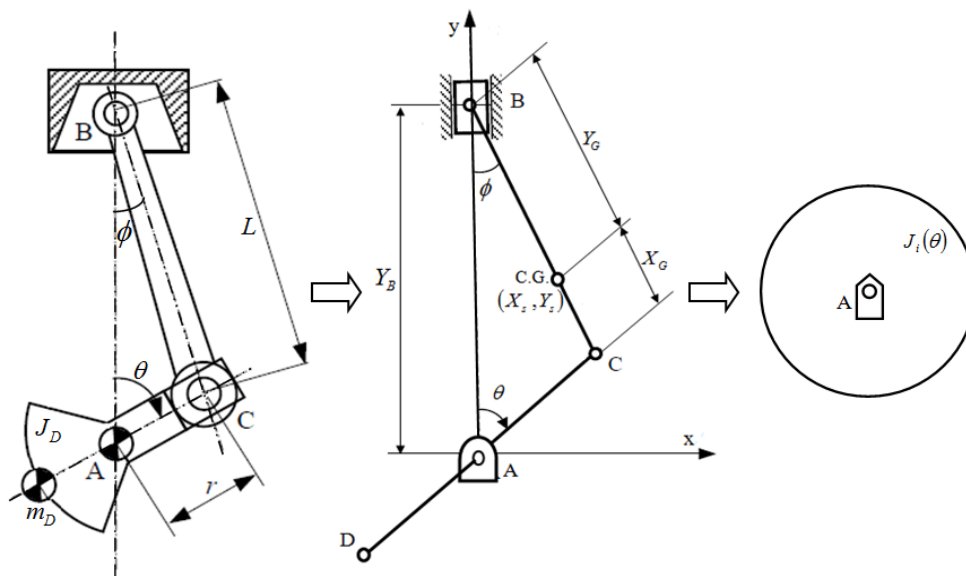


Figura 4.1: Reducción del momento inercia del mecanismo biela - manivela al eje.

En el proceso de reducción es donde la inercia de la biela y la masa del pistón debido a su movimiento de rotación y traslación ocasionan el comportamiento periódico.

El comportamiento periódico del momento de inercia reducido al eje cigüeñal mostrado en la figura 4.2 es el mismo tanto para el 1º como para el 2º mecanismo biela manivela acoplado al cigüeñal y tiene que ser aproximado por series de Fourier con la finalidad de obtener una expresión matemática para el momento de inercia reducido que interviene en el sistema de ecuaciones de estado usadas para la solución numérica del sistema torsional.

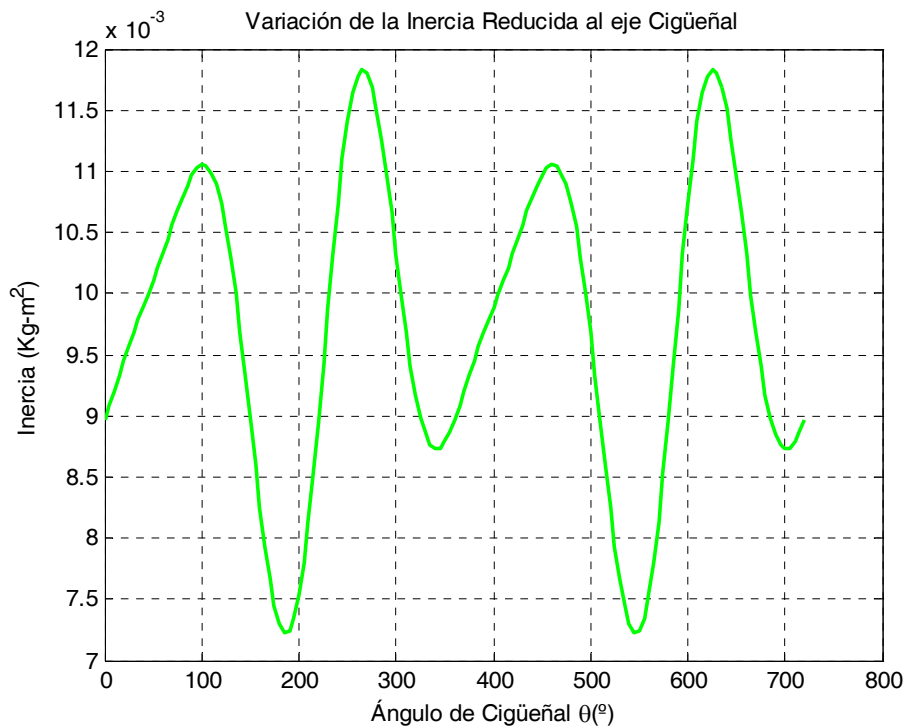


Figura 4.2. Comportamiento periódico del momento de inercia reducido a 2200 rpm

Las expresiones matemáticas que describen el comportamiento periódico del momento de inercia reducido del mecanismo biela manivela para una aproximación de 6 armónicos es la siguiente:

$$J_1(\omega t) = \left(\frac{A_{1-o}}{2} \right) + \sum_{n=1}^6 [A_{1-n} \cos(n\omega t) + B_{1-n} \text{sen}(n\omega t)]$$

$$J_2(\omega t) = \left(\frac{A_{2-o}}{2} \right) + \sum_{n=1}^6 [A_{2-n} \cos(n\omega t) + B_{2-n} \text{sen}(n\omega t)]$$
(4.1)

Estas últimas expresiones incluyen los coeficientes coseno y seno armónicos de Fourier los cuales se detallan en los anexos..

4.1.2. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DEL TORQUE DE EXCITACIÓN

La mayoría de sistemas forzados tienen como ente de excitación una fuerza senoidal; en el caso de los sistemas dinámicos reciprocantes, este ente de excitación es de comportamiento periódico debido a diversos factores.

Los factores que influyen son: la influencia de la presión de los gases de combustión, el movimiento de rotación y traslación de las inercias del sistema, la disposición del cigüeñal y el orden de encendido que para este caso particular es de 2 cilindros en línea y 4 tiempos respectivamente; además que la variación periódica de las inercias reducidas del sistema también influyen en el torque de excitación.

El ente de excitación para el sistema torsional analizado será un torque de excitación periódico que como en el caso del momento de inercia reducido es aproximado por series de Fourier para ser usado en la solución numérica del sistema.

El torque de excitación en el primer cilindro para una aproximación de 12 armónicos viene representado por la siguiente expresión matemática:

$$T_1(\omega t) = \left(\frac{C_{1-o}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{12} [C_{1-n} \cos(n\omega t) + D_{1-n} \text{sen}(n\omega t)] \quad (4.2)$$

El comportamiento periódico del torque de excitación descrito por la expresión (4.2) está representado en la figura 4.3.

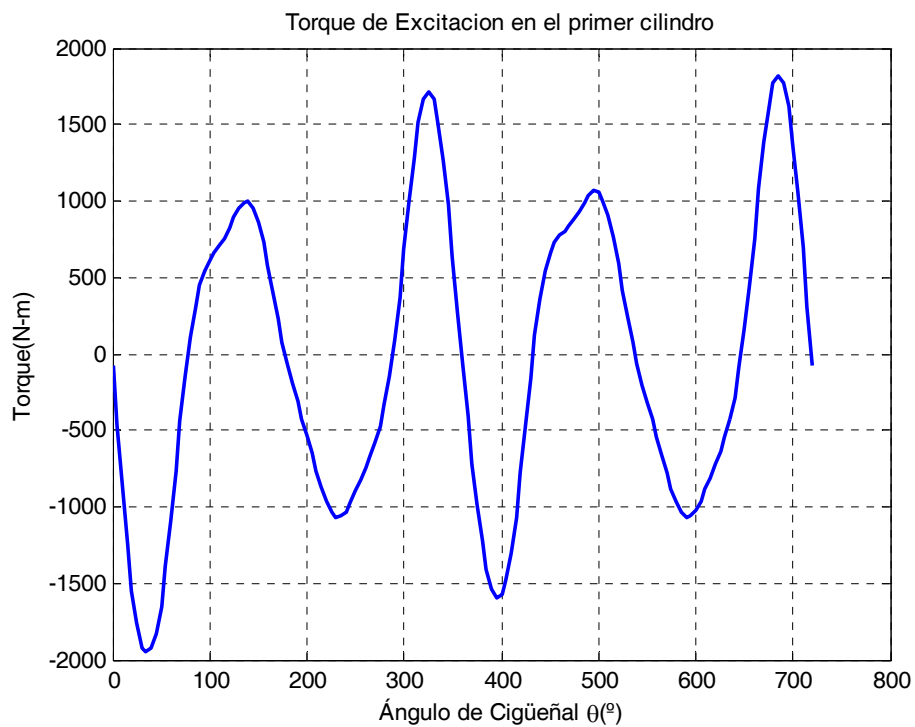


Figura 4.3. Comportamiento periódico del Torque de Excitación en el 1º cilindro para 2200 rpm.

El torque de excitación para el segundo cilindro con una aproximación de 12 armónicos viene representado por la siguiente expresión:

$$T_2(\omega t) = \left(\frac{C_{2-o}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{12} [C_{2-n} \cos(n\omega t) + D_{2-n} \text{sen}(n\omega t)] \quad (4.3)$$

Los coeficientes coseno y seno armónicos de fourier para la expresión (4.2) y (4.3) se detallan en el anexo F.

El comportamiento periódico del torque de excitación en el 2º cilindro está representado en la figura 4.4.

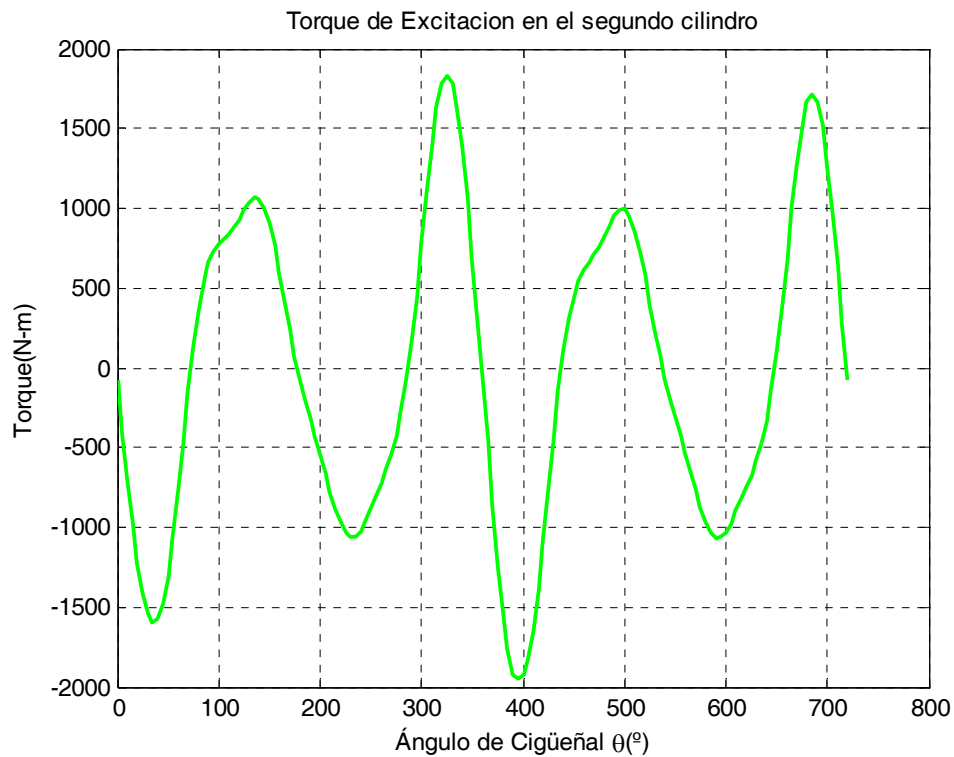


Figura 4.4. Comportamiento periódico del Torque de Excitación en el 2º cilindro para 2200 rpm.

El torque de excitación en cada uno de los cilindros tiene la influencia de la primera derivada del momento de inercia reducido al eje cigüeñal de cada uno de los mecanismos biela manivela presentes en el motor de combustión interna de 2 cilindros analizado

4.1.3. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DE LOS ELEMENTOS K_{11} Y K_{22} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DEL SISTEMA TORSIONAL

La matriz de rigidez torsional del sistema tiene en sus elementos K_{11} y K_{22} expresiones que varían en función al ángulo del cigüeñal y por consiguiente también función del tiempo, estas expresiones ya fueron desarrolladas en el capítulo 1 y 2.

La expresión matemática del elemento K_{11} de la matriz de rigidez torsional para una aproximación con 24 armónicos viene expresada de la siguiente manera:

$$K_{11}(\omega t) = \left(\frac{E_{1-o}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{24} [E_{1-n} \cos(n\omega t) + F_{1-n} \text{sen}(n\omega t)] \quad (4.4)$$

El comportamiento periódico del elemento K_{11} de la matriz de rigidez está representado en la figura 4.5.

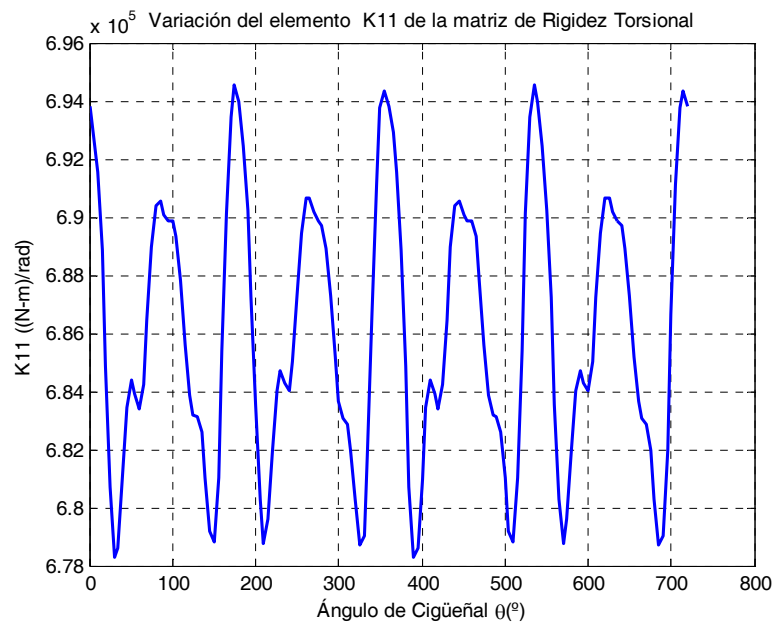


Figura 4.5. Comportamiento periódico del elemento K_{11} de la matriz de rigidez para 2200 rpm.

La expresión del elemento K_{22} de la matriz de rigidez torsional para una aproximación con 24 armónicos viene expresada como:

$$K_{22}(\omega t) = \left(\frac{E_{2-o}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{24} [E_{2-n} \cos(n\omega t) + F_{2-n} \text{sen}(n\omega t)] \quad (4.5)$$

El comportamiento del elemento K_{22} de la matriz de rigidez torsional está representado en la figura 4.6.

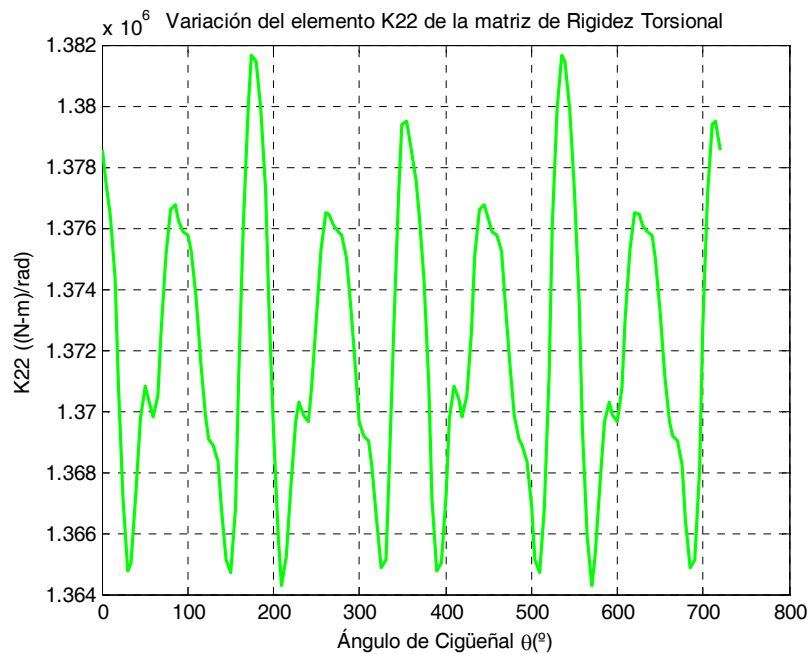


Figura 4.6. Comportamiento periódico del elemento K_{22} de la matriz de rigidez para 2200 rpm.

Los coeficientes coseno y seno armónicos de Fourier presentes en las expresiones matemáticas de los elementos K_{11} y K_{22} respectivamente se detallan en el anexo C. Los elementos K_{11} y K_{22} de la matriz de rigidez vienen influenciados también por la segunda derivada del momento de inercia reducido y la primera derivada del torque de excitación correspondiente a cada cilindro.

4.1.4. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA SIN APLICACIÓN DEL ABSORSOR PENDULAR DE VIBRACIONES TORSIONALES

Un modelo mecánico - matemático del sistema torsional sin aplicación de los absorsores pendulares se muestra en la figura 4.7

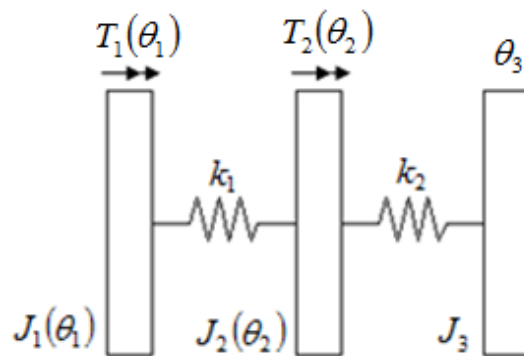


Figura 4.7. Sistema Torsional sin aplicación del absorsores pendular.

Una vez analizado el comportamiento periódico del momento de inercia reducido al eje cigüeñal para ambos cilindros, el torque de excitación para el 1º y 2º cilindro, además del comportamiento de los elementos K_{11} y K_{22} de la matriz de rigidez torsional, se procede con la simulación numérica del sistema torsional sin aplicación del absorsores pendular.

Para la simulación numérica se usará la función ODE45 de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales implementada en el MATLAB. Adicionalmente se debe generar un Script en el MATLAB donde esté el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que se tienen que resolver y otro Script donde se ejecute la función ODE45 con las condiciones iniciales, el tiempo de evaluación, paso de integración y las opciones de tolerancia necesarias.

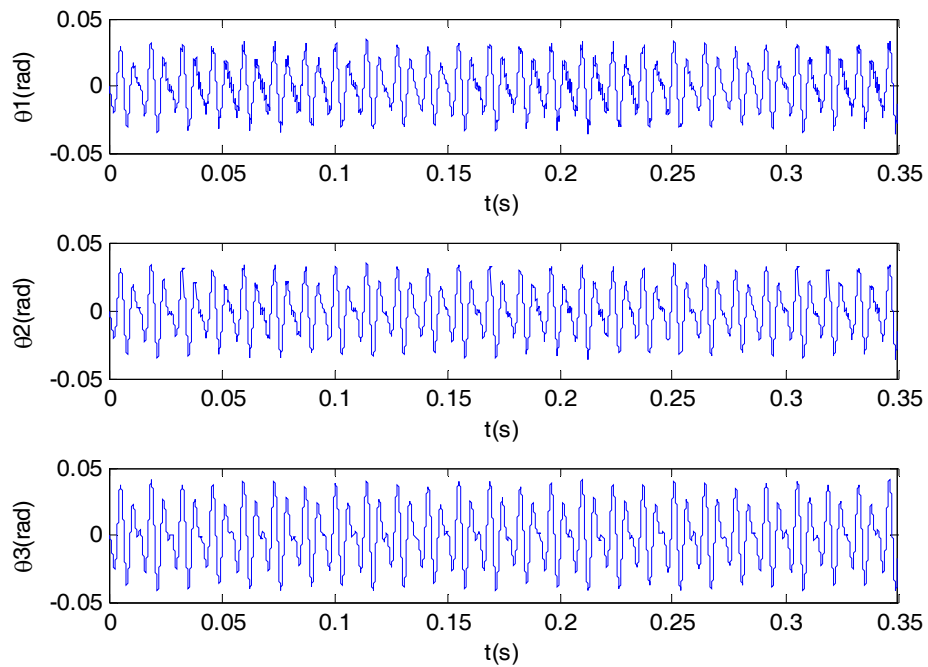


Figura 4.8. Respuesta del sistema sin aplicación del absorber pendular para 2200 rpm.

La figura 4.8 muestra claramente que la amplitud de oscilación máxima en el primer y segundo cilindro es de 0.035 radianes, mientras que en la volante de inercia la amplitud de oscilación máxima es de 0.04 radianes lo que en ambos casos equivale a más de 2° sexagesimales.

4.1.5. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR PENDULAR DE VIBRACIONES TORSIONALES ACOPLADO

Un modelo mecánico - matemático del sistema torsional con los absorberes pendulares acoplados en el primer y segundo codo del cigüeñal se muestra en la figura 4.9.

La amplitud de oscilación para las tres inercias que se muestra en la figura 4.8 son considerables debido a que con el tiempo podrían fallar por fatiga.

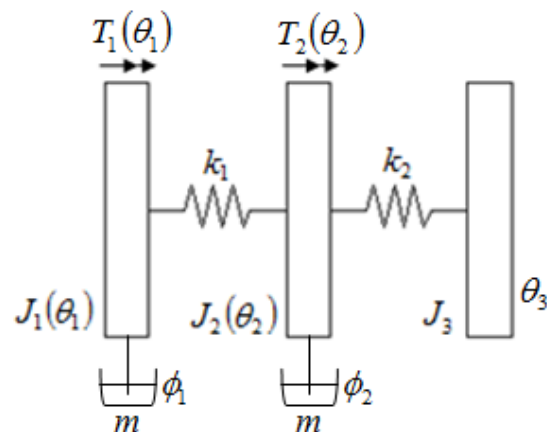


Figura 4.9. Sistema Torsional con aplicación de los absorbentes pendulares.

Haciendo uso una vez más de la función ODE45 implementada en el MATLAB y generando un primer Script donde se detallan el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y otro Script donde se ejecute la función ODE45 con las condiciones iniciales, el tiempo de evaluación, paso de integración y las opciones de tolerancia necesarias.

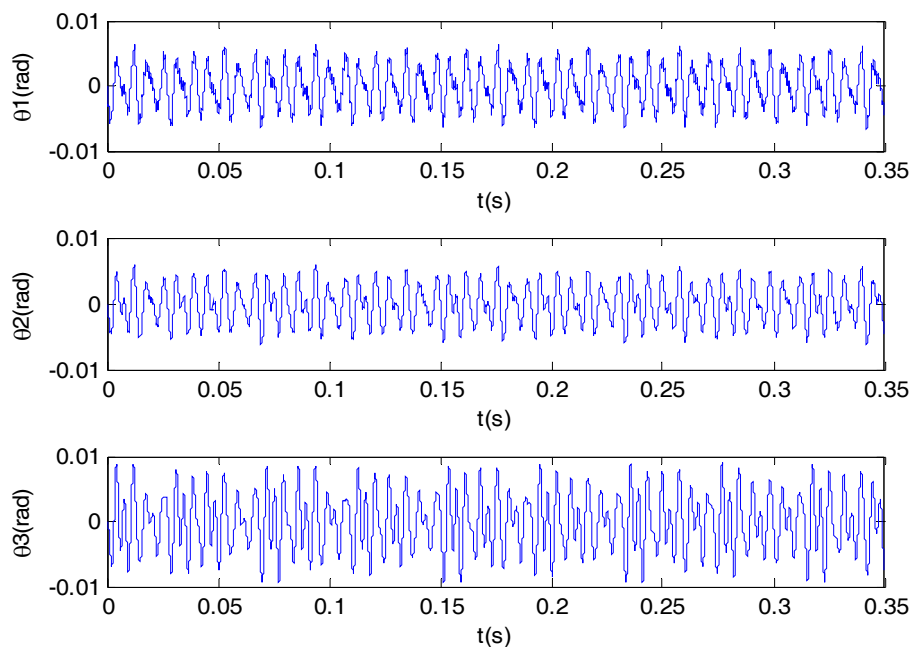


Figura 4.10. Respuesta del sistema con el absorbente pendular acoplado para 2200 rpm.

La figura 4.10 muestra claramente que la amplitud de oscilación máxima en el primer y segundo cilindro se han reducido a 0.006 radianes; lo que significa una reducción del 83%, mientras que en la volante de inercia la amplitud de oscilación máxima se redujo a 0.009 radianes, alcanzando una reducción del 77%.

Además es necesario saber cuál es el comportamiento en el tiempo de los absortores pendulares acoplados en los contrapesos de los mecanismos biela manivela con la finalidad de saber si afectarán al normal funcionamiento del motor.

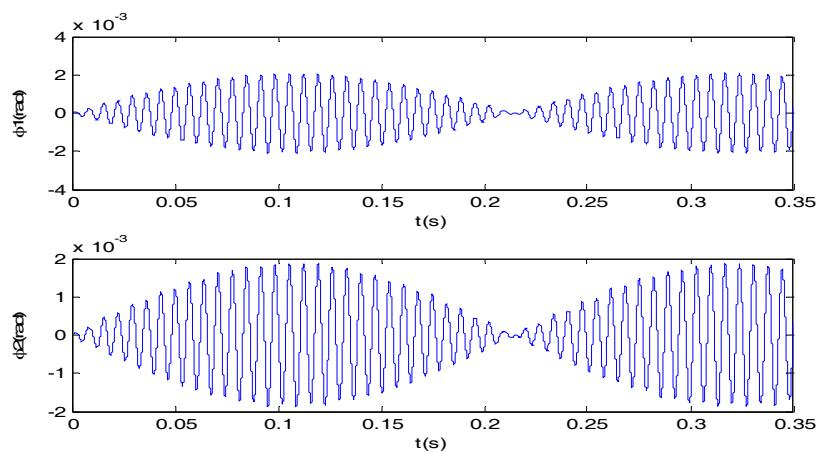


Figura 4.11. Respuesta temporal de los absortores pendulares para 2200 rpm.

La figura 4.11 muestra el comportamiento en el tiempo de los absortores, donde claramente se muestra que la amplitud de oscilación máxima para el primer y segundo absortor es de 0.002 radianes. El comportamiento de los absortores muestra el fenómeno de transferencia de energía entre péndulos.

4.1.6. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR AMORTIGUADO ACOPLADO

Un método bastante usado también para mitigar vibraciones torsionales es el absorber amortiguado tipo Houde; en este acápite evaluaremos cuanto es la reducción de este absorber al ser aplicado a nuestro sistema torsional. Un modelo mecánico - matemático del sistema torsional con el absorber amortiguado acoplado se muestra en la figura 4.12

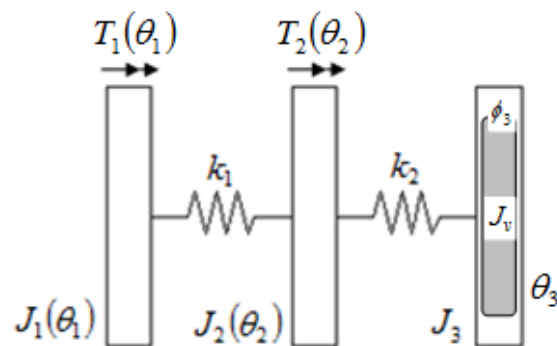


Figura 4.12. Sistema torsional con el absorber amortiguado acoplado

Para obtener la respuesta temporal del sistema torsional se usará una vez más la función ODE45 implementada en el MATLAB, se debe generar un primer Script donde se detallan el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y otro Script donde se ejecute la función ODE45 con las condiciones iniciales, el tiempo de evaluación, paso de integración y las opciones de tolerancia necesarias.

En la figura 4.13 se puede ver que la amplitud de oscilación máxima en el primer y segundo cilindro se han reducido a 0.02 radianes; lo que significa una reducción del 43%, mientras que en la volante de inercia la amplitud de oscilación máxima se redujo a 0.027 radianes, alcanzando una reducción del 35%.

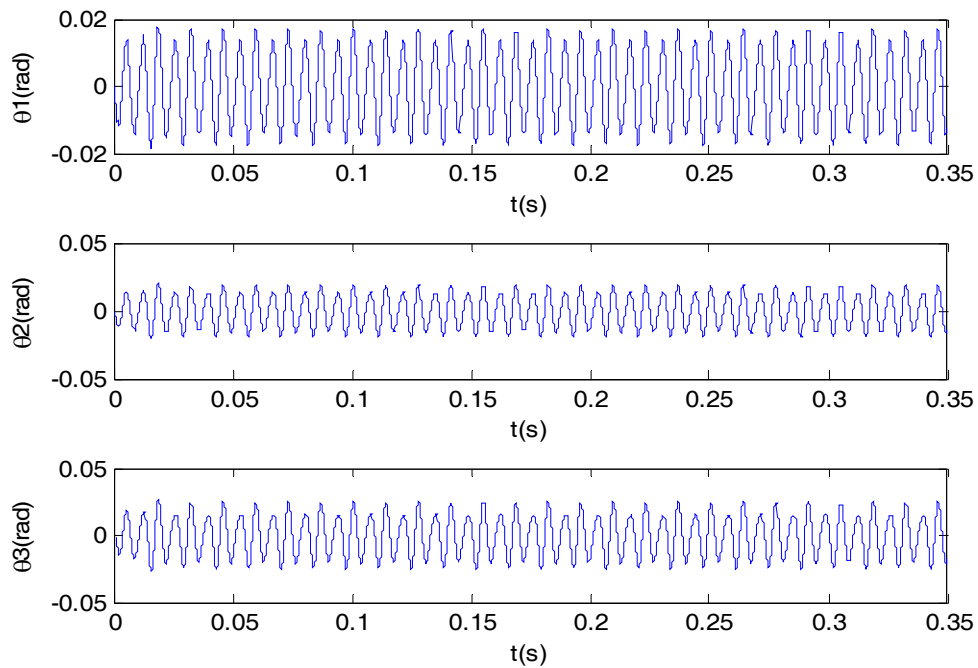


Figura 4.13. Respuesta del sistema torsional con el absorber amortiguado acoplado para 2200 rpm.

Además es necesario saber cuál es el comportamiento en el tiempo del volante amortiguador acoplado.

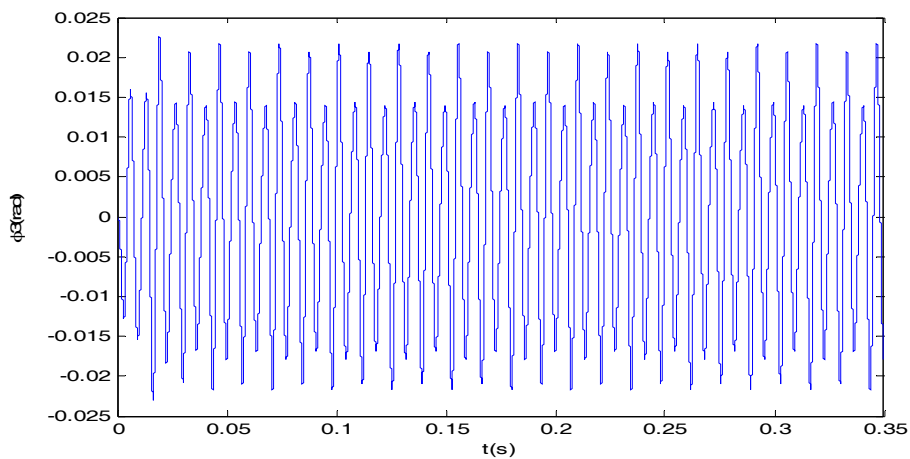


Figura 4.14. Respuesta de la amplitud de oscilación del volante amortiguador para 2200 rpm.

La figura 4.14 muestra el comportamiento en el tiempo del volante amortiguador, donde se muestra que la amplitud de oscilación máxima es de 0.025 radianes.

4.1.7. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR PENDULAR Y EL ABSORSOR AMORTIGUADO ACOPLADOS

Adicionalmente a las simulaciones ya realizadas, se hará la simulación del sistema donde se incluye al absorber pendular y absorber amortiguado acoplados al sistema inicial, para lo cual se hará uso una vez más de la función ODE45 implementada en el MATLAB.

Un modelo mecánico - matemático del sistema torsional con los absorberes pendulares y el absorber amortiguado acoplados se muestra en la figura 4.15

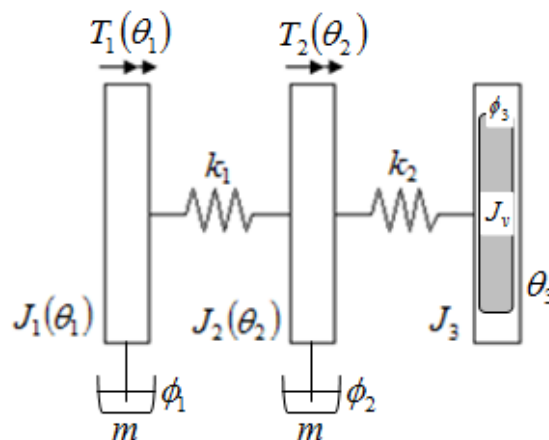


Figura 4.15. Sistema torsional con los absorberes pendulares y el absorber amortiguado acoplados

Para usar esta herramienta es necesario generar un primer Script donde se detallen el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden a solucionar y otro Script donde se ejecute la función ODE45 con las condiciones iniciales, el tiempo de evaluación, paso de integración y las opciones de tolerancia necesarias.

La figura 4.16 muestra el comportamiento en el tiempo del sistema torsional con ambos absorbentes acoplados.

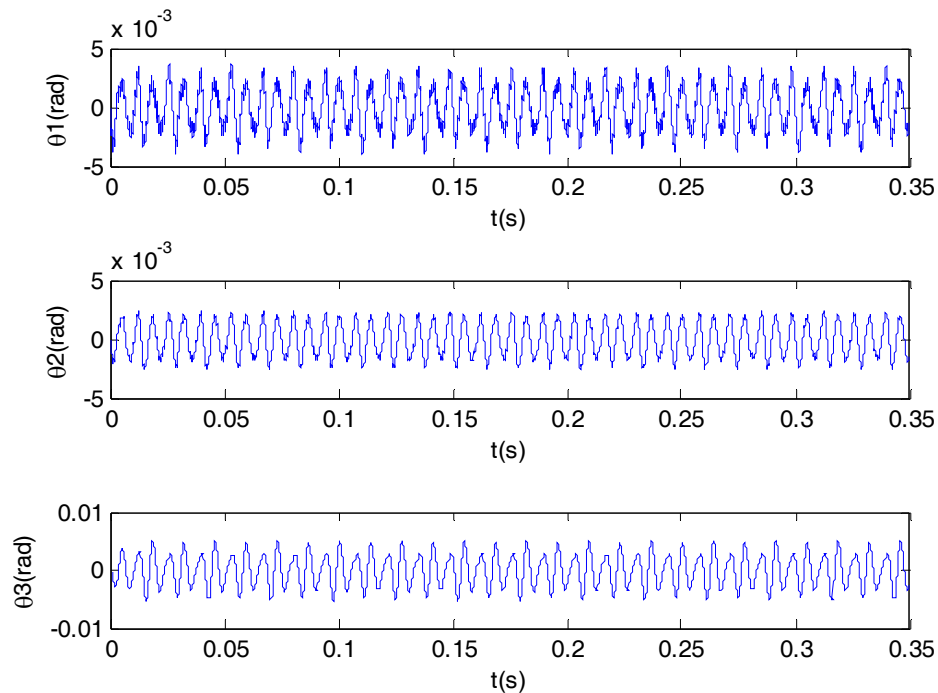


Figura 4.16. Respuesta del sistema con el absorbente pendular y el absorbente amortiguado acoplados al sistema torsional para 2200 rpm.

La figura 4.16 muestra que la amplitud de oscilación máxima en el primer cilindro se ha reducido a 0.0035 radianes y en el segundo cilindro se ha reducido a 0.0025 radianes; lo que significa una reducción del 90% y 93% respectivamente, mientras que en la volante de inercia la amplitud de oscilación máxima se redujo a 0.005 radianes, alcanzando una reducción del 87% aproximadamente.

Se hace necesario también saber cuál es el comportamiento en el tiempo de los absorbentes pendulares acoplados en los contrapesos de los mecanismos biela

manivela y el absorber amortiguado, con la finalidad de saber si afectarán al normal funcionamiento del motor. La figura 4.17 muestra el comportamiento en el tiempo de los absorsores, donde se muestra que la amplitud de oscilación máxima para el primer y segundo absorber es de 0.0012 radianes aproximadamente mientras que para el volante amortiguador su amplitud máxima de oscilación es de 0.0042 radianes, evidenciando así que la acción combinada de los dos tipos de absorsores es más eficiente en la reducción de la vibración torsional.

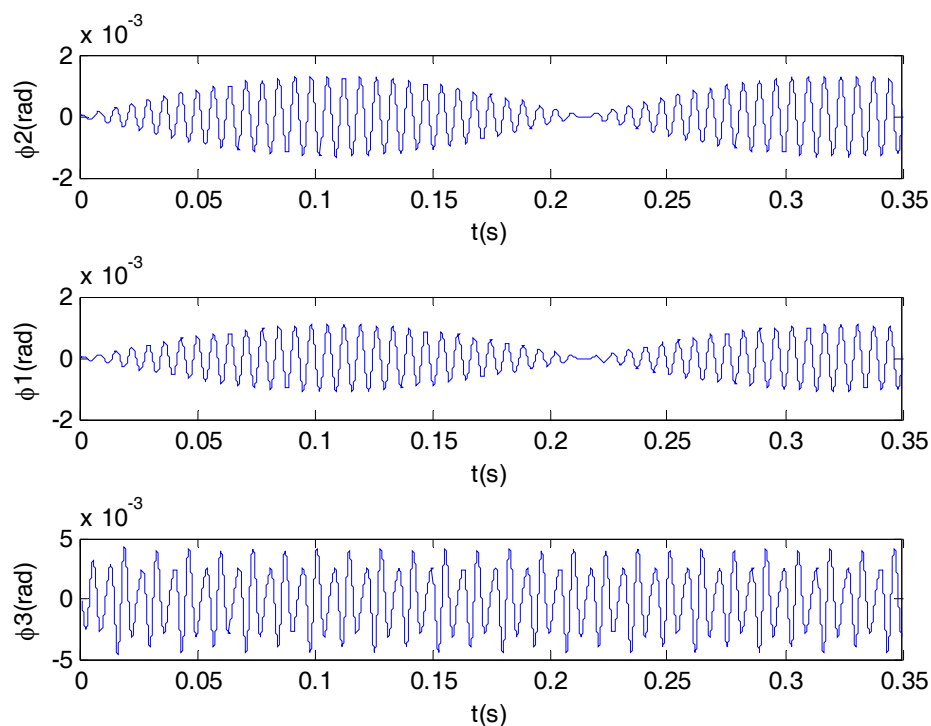


Figura 4.17. Respuesta de la amplitud de oscilación de los absorsores pendulares y del volante amortiguador para 2200 rpm.

Como ya se mencionó para lograr la simulación numérica del sistema bajo distintas condiciones de trabajo se usó la función ODE45 implementada en el MATLAB.

Adicionalmente se sabe que el motor de combustión interna trabaja a más de una velocidad y por lo tanto las condiciones de trabajo y los parámetros vibratorios también cambiarán con la velocidad, lo que hace necesario saber cuál será el comportamiento de nuestro sistema vibratorio y del absorsor pendular bajo estas nuevas condiciones de velocidad.

Con la finalidad de demostrar que el absorsor pendular diseñado reducirá la vibración torsional en el eje cigüeñal no sólo a la velocidad en la que el motor trabaja a su máximo torque (2200 rpm), si no a bajas velocidades (1000 rpm) y máxima velocidad (3000 rpm) se procederá a la simulación del sistema torsional a dos diferentes velocidades de funcionamiento.

4.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA PARA 1000 RPM

4.2.1. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DEL TORQUE DE EXCITACIÓN

El torque de excitación para el caso en que la velocidad del motor es de 1000 rpm tiene diferente comportamiento al desarrollado anteriormente debido a que en la teoría del capítulo 2 donde se obtuvo la expresión para los torques la velocidad del motor estaba dentro de la expresión.

El comportamiento periódico del torque de excitación para el 1º cilindro está representado en la figura 4.18.

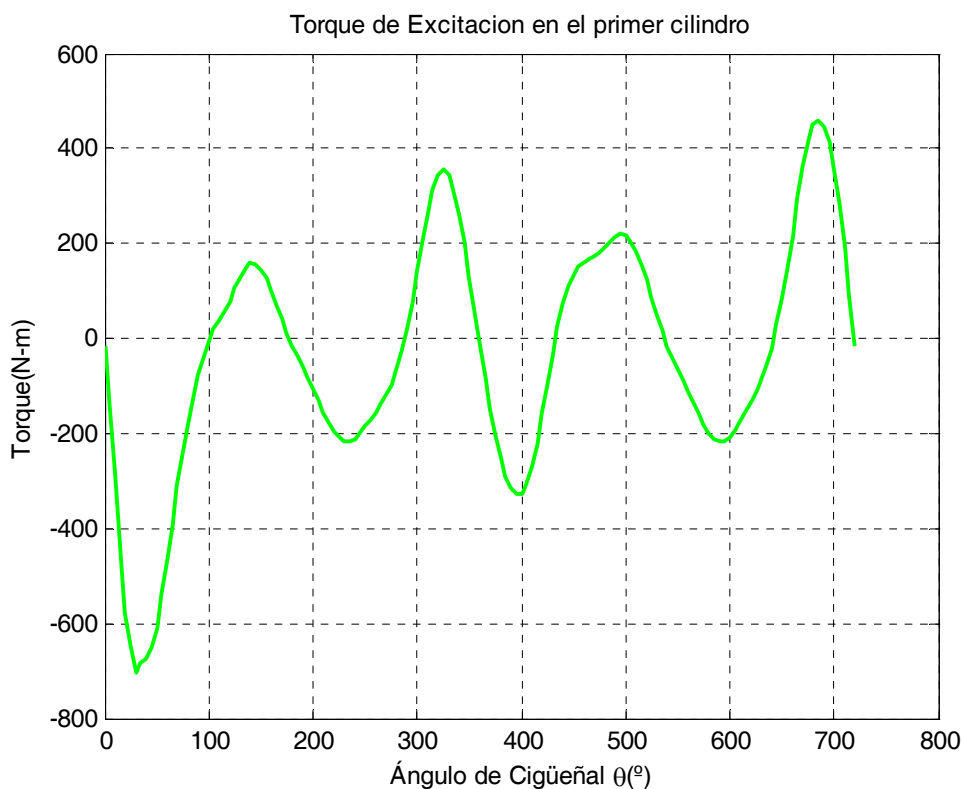


Figura 4.18. Comportamiento periódico del Torque de Excitación en el 1º cilindro para 1000 rpm.

El comportamiento periódico del torque de excitación para el 2º cilindro está representado en la figura 4.19.

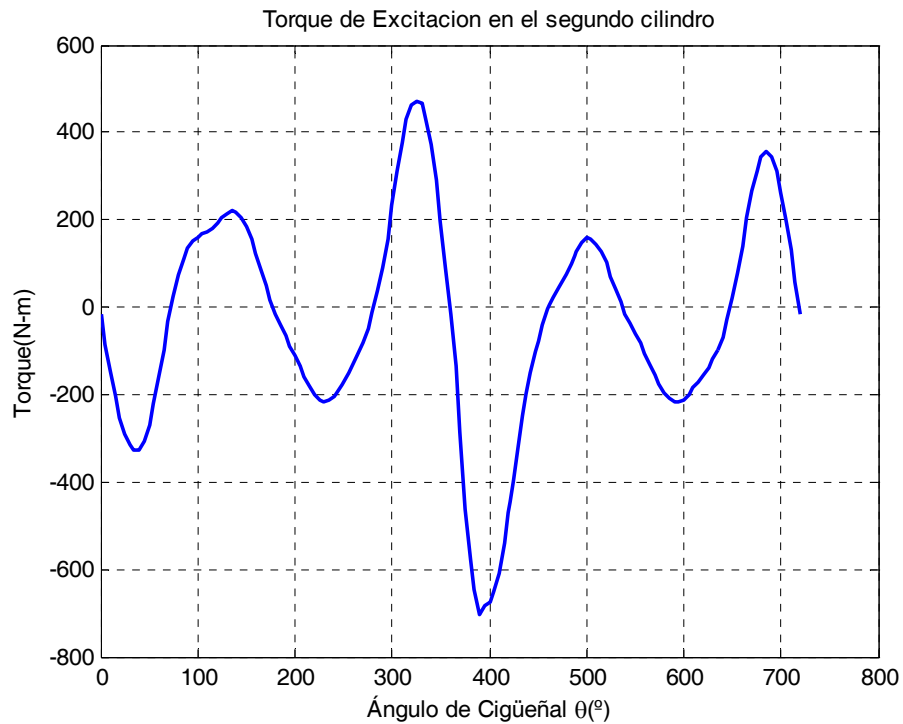


Figura 4.19. Comportamiento periódico del Torque de Excitación en el 2º cilindro para 1000 rpm.

4.2.2. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DE LOS ELEMENTOS K_{11} Y K_{22} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DEL SISTEMA TORSIONAL

Los elementos K_{11} y K_{22} de la matriz de rigidez torsional se ven influenciadas también por la velocidad del motor.

El comportamiento periódico el elemento K_{11} de la matriz de rigidez está representado en la figura 4.20.

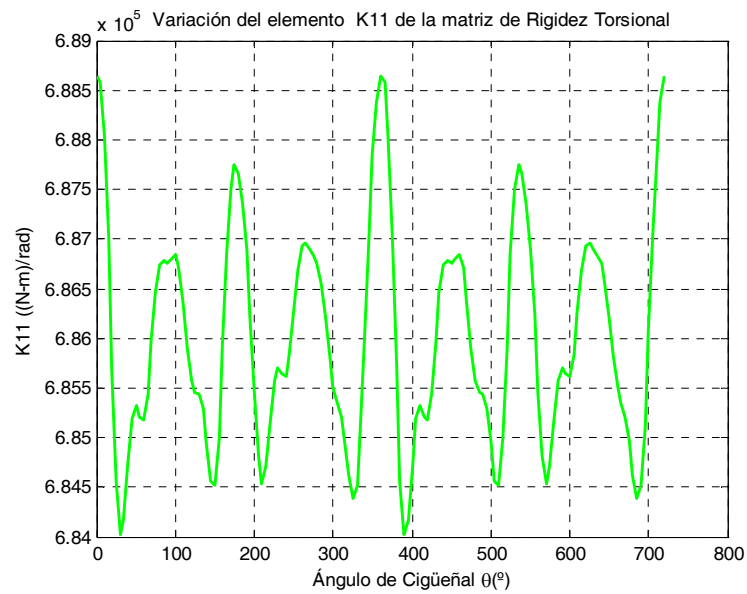


Figura 4.20. Comportamiento periódico del elemento K_{11} de la matriz de rigidez para 1000 rpm.

El comportamiento del elemento K_{22} de la matriz de rigidez torsional está representado en la figura 4.21.

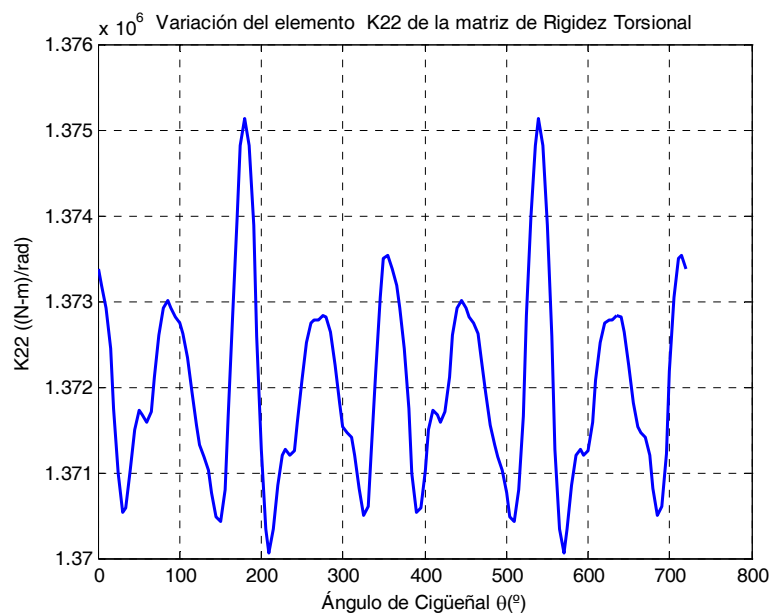


Figura 4.21. Comportamiento periódico del elemento K_{22} de la matriz de rigidez para 1000 rpm.

4.2.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA SIN APLICACIÓN DEL ABSORSOR PENDULAR DE VIBRACIONES TORSIONALES

La simulación numérica del sistema torsional sin aplicación del absorber pendular está influenciada por la variación de la velocidad del motor y por lo tanto la respuesta temporal del sistema será diferente a la estudiada en el capítulo 4.

Se debe generar un Script en el MATLAB donde esté el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que se tienen que resolver y otro Script donde se ejecute la función ODE45 con las condiciones iniciales, el tiempo de evaluación, paso de integración y las opciones de tolerancia necesarias.

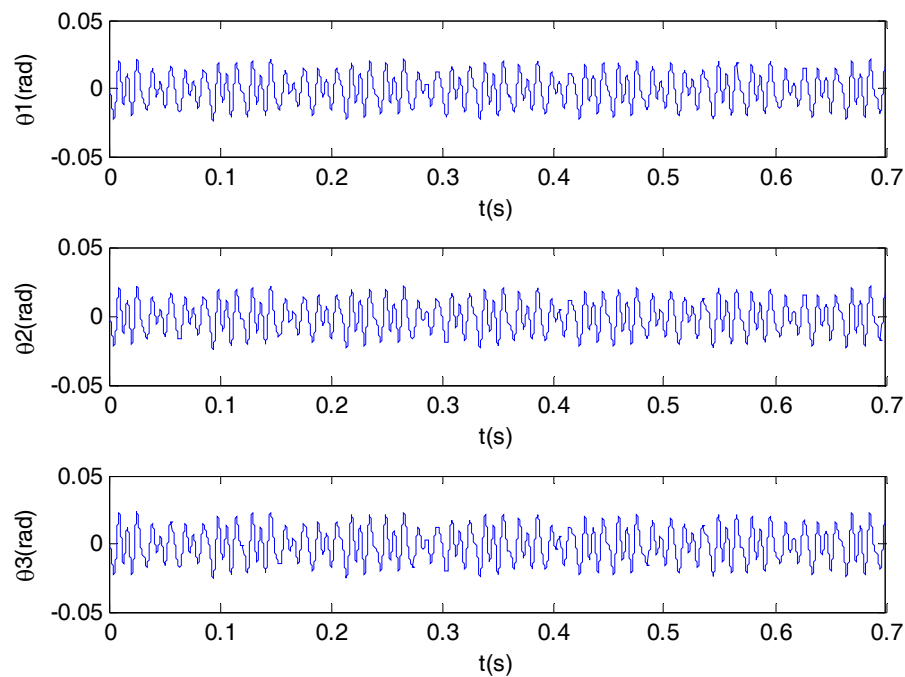


Figura 4.22. Respuesta del sistema sin aplicación del absorber pendular a 1000 rpm.

La figura 4.22 muestra claramente que la amplitud de oscilación máxima en el primer y segundo cilindro es de 0.022 radianes, mientras que en la volante de inercia la amplitud de oscilación máxima es de 0.024 radianes.

4.2.4. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR PENDULAR DE VIBRACIONES TORSIONALES ACOPLADO

La simulación numérica del sistema torsional con el absorber pendular acoplado también es influenciada por la variación de la velocidad del motor y por lo tanto la respuesta temporal del sistema diferirá de la respuesta estudiada en el capítulo 4.

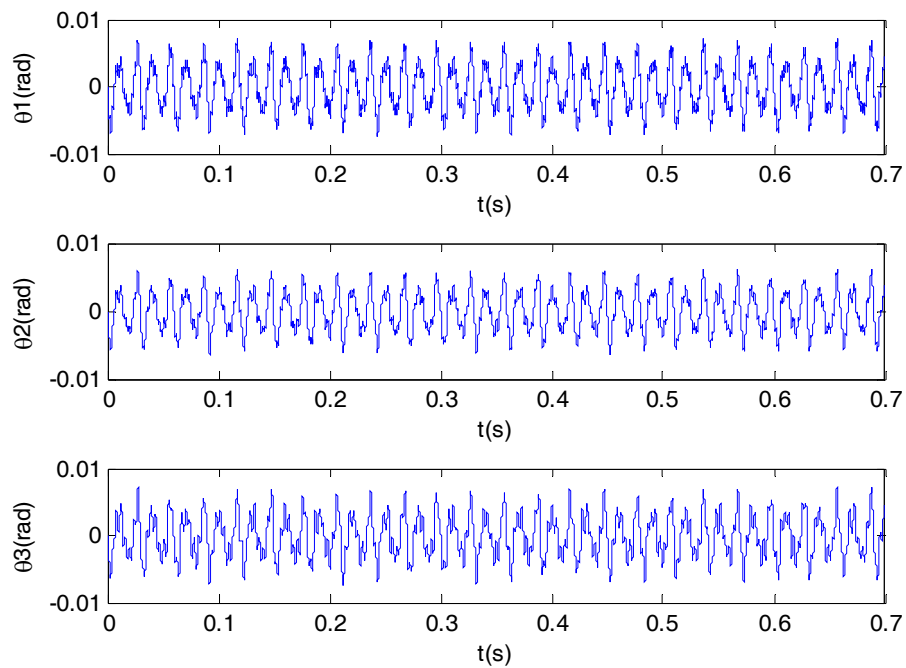


Figura 4.23. Respuesta del sistema con el absorber pendular acoplado para 1000 rpm.

La figura 4.23 muestra claramente que la amplitud de oscilación máxima en el primer y segundo cilindro se han reducido a 0.007 radianes; lo que significa una reducción del 68%, mientras que en la volante de inercia la amplitud de oscilación máxima se redujo a 0.007 radianes, alcanzando una reducción del 71%.

El comportamiento en el tiempo de los absorbentes se muestra en la figura 4.24 donde claramente se muestra que la amplitud de oscilación máxima para el primer y segundo absorber es de 0.005 y 0.004 radianes respectivamente.

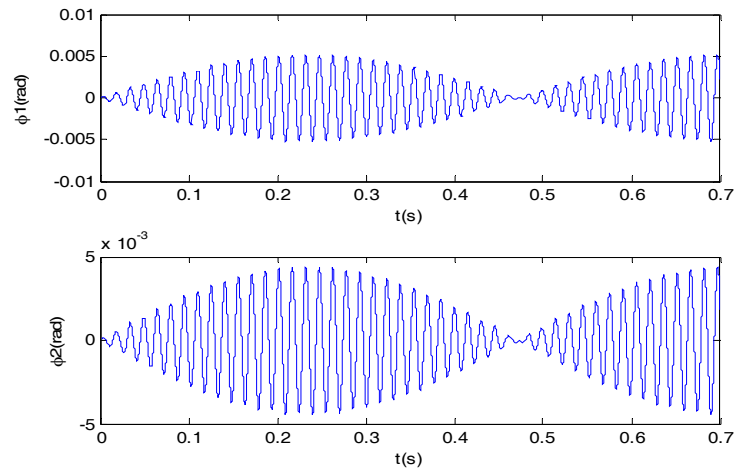


Figura 4.24. Respuesta temporal de los absorbentes pendulares para 1000 rpm.

4.2.5. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR AMORTIGUADO ACOPLADO

Ahora se evaluará como afecta el cambio de la velocidad en el motor y cuanto es la reducción de este absorbente al ser aplicado al sistema torsional.

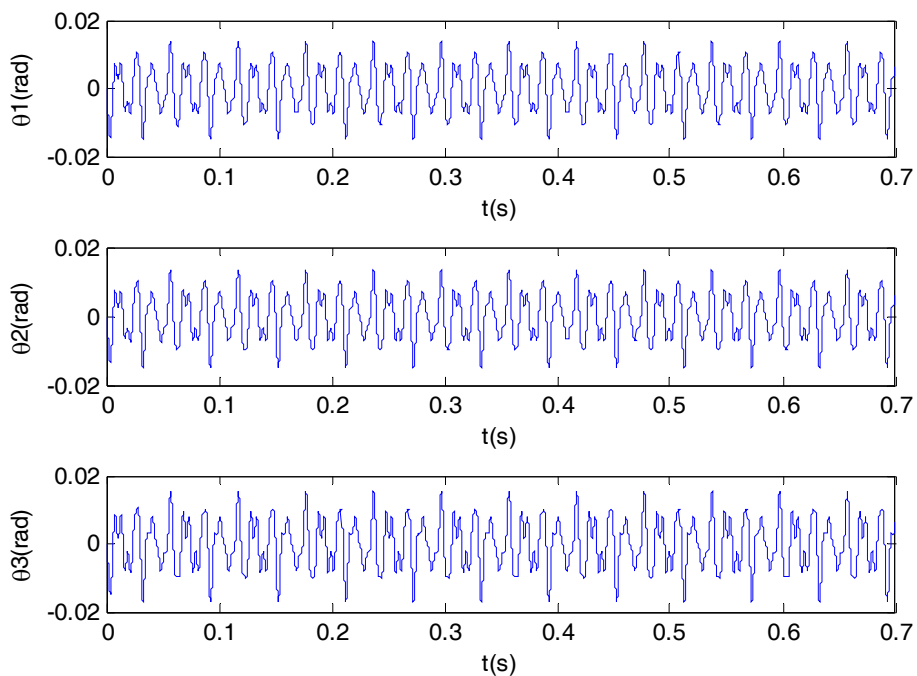


Figura 4.25. Respuesta del sistema con el absorbente amortiguado a 1000 rpm.

En la figura 4.25 se puede ver que la amplitud de oscilación máxima en el primer y segundo cilindro se han reducido a 0.015 radianes; lo que significa una reducción del 32 %, mientras que en la volante de inercia la amplitud de oscilación máxima se redujo a 0.017 radianes, alcanzando una reducción del 29 %.

Además es necesario saber cuál es el comportamiento en el tiempo del volante amortiguador acoplado. La figura 4.26 muestra el comportamiento en el tiempo del volante amortiguador, donde se muestra que la amplitud de oscilación máxima es de 0.016 radianes.

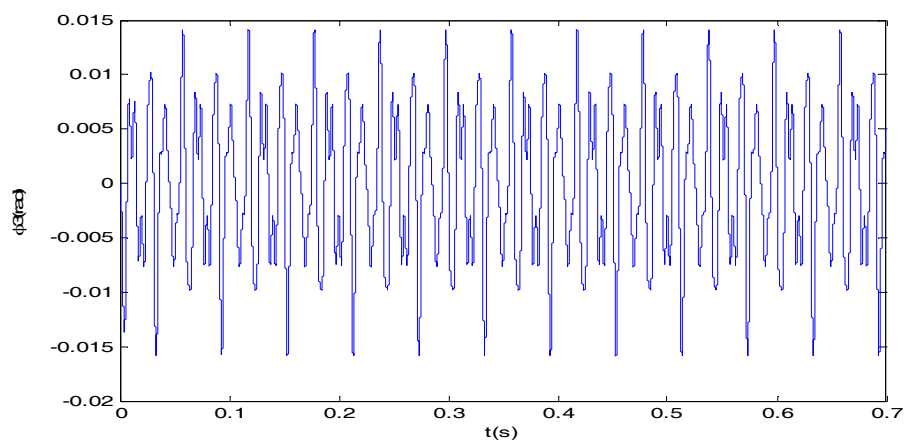


Figura 4.26. Respuesta de la amplitud de oscilación del volante amortiguador para 1000 rpm.

4.2.6. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR PENDULAR Y EL ABSORSOR AMORTIGUADO ACOPLADOS

Adicionalmente a las simulaciones ya realizadas, se hará la simulación del sistema donde se incluye al absorsor pendular y absorsor amortiguado acoplados al sistema inicial.

La figura 4.27 muestra el comportamiento en el tiempo del sistema torsional con ambos absorbentes acoplados.

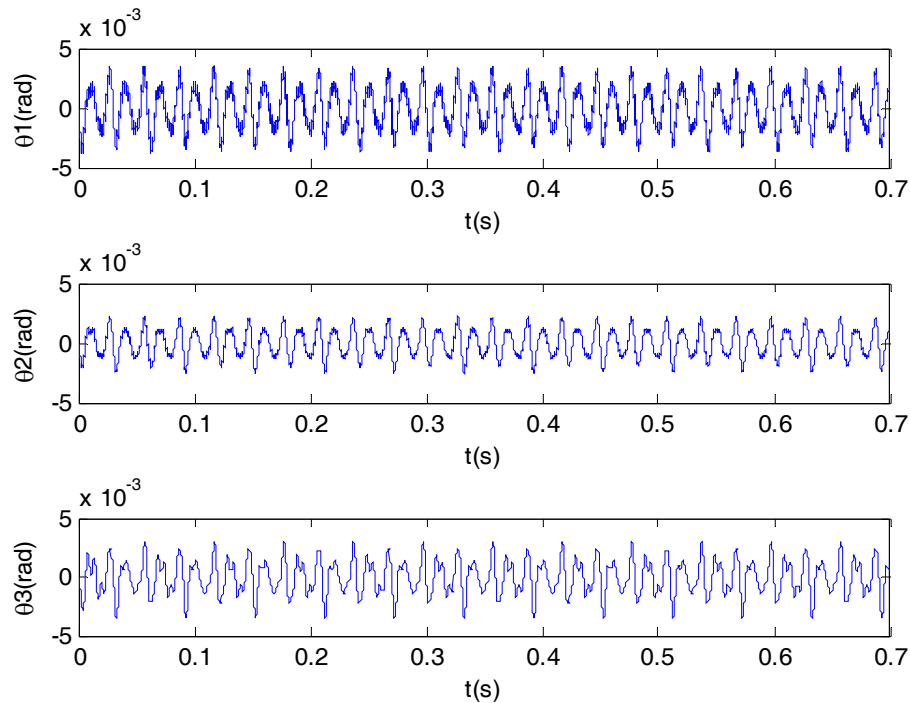


Figura 4.27. Respuesta del sistema con el absorbente pendular y el absorbente amortiguado acoplados al sistema torsional para 1000 rpm.

La figura 4.27 muestra que la amplitud de oscilación máxima en el primer cilindro se ha reducido a 0.0035 radianes y en el segundo cilindro se ha reducido a 0.0023 radianes; lo que significa una reducción del 84 % y 90 % respectivamente, mientras que en la volante de inercia la amplitud de oscilación máxima se redujo a 0.0035 radianes, alcanzando una reducción del 85% aproximadamente.

La figura 4.28 muestra el comportamiento en el tiempo de los dos absorbentes pendulares y del absorbente amortiguado.

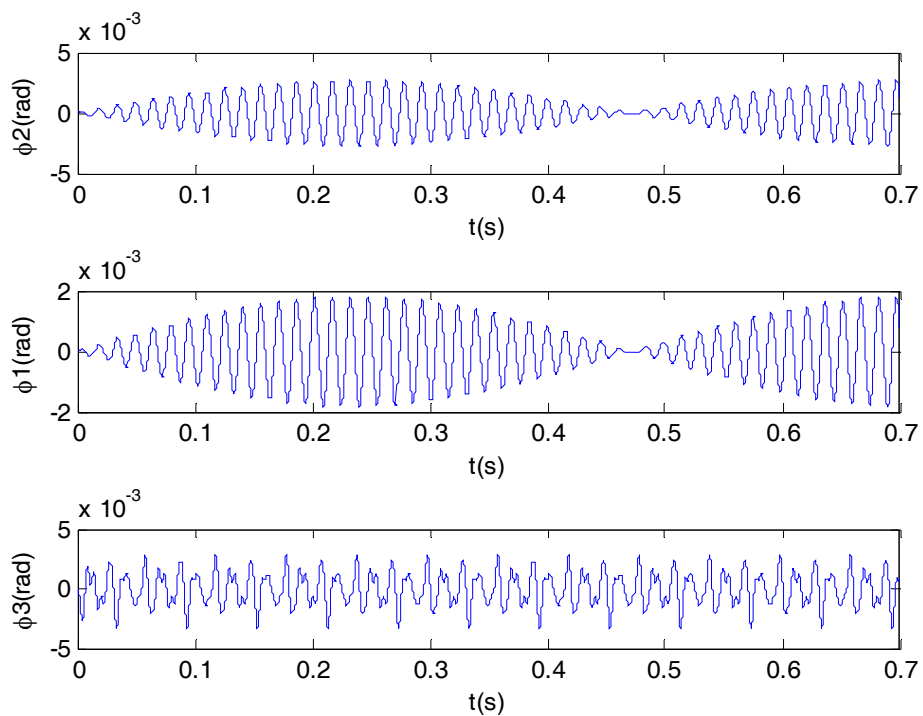


Figura 4.28. Respuesta de la amplitud de oscilación de los absorbentes pendulares y del volante amortiguador para 1000 rpm.

La figura 4.28 muestra el comportamiento en el tiempo de los absorbentes, donde se muestra que la amplitud de oscilación máxima para el primer y segundo absorbente es de 0.0027 y 0.0018 radianes respectivamente mientras que para el volante amortiguador su amplitud máxima de oscilación es de 0.0033 radianes, evidenciando así que la acción combinada de los dos tipos de absorbentes es más eficiente en la reducción de la vibración torsional.

4.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA PARA 3000 RPM

4.3.1. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DEL TORQUE DE EXCITACIÓN

El torque de excitación para el caso en que la velocidad del motor es de 3000 rpm tiene diferente comportamiento al desarrollado en el capítulo 4 debido a que en la teoría del capítulo 2 donde se obtuvo la expresión para los torques la velocidad del motor estaba dentro de la expresión.

El comportamiento periódico del torque de excitación para el 1º cilindro está representado en la figura 4.29.

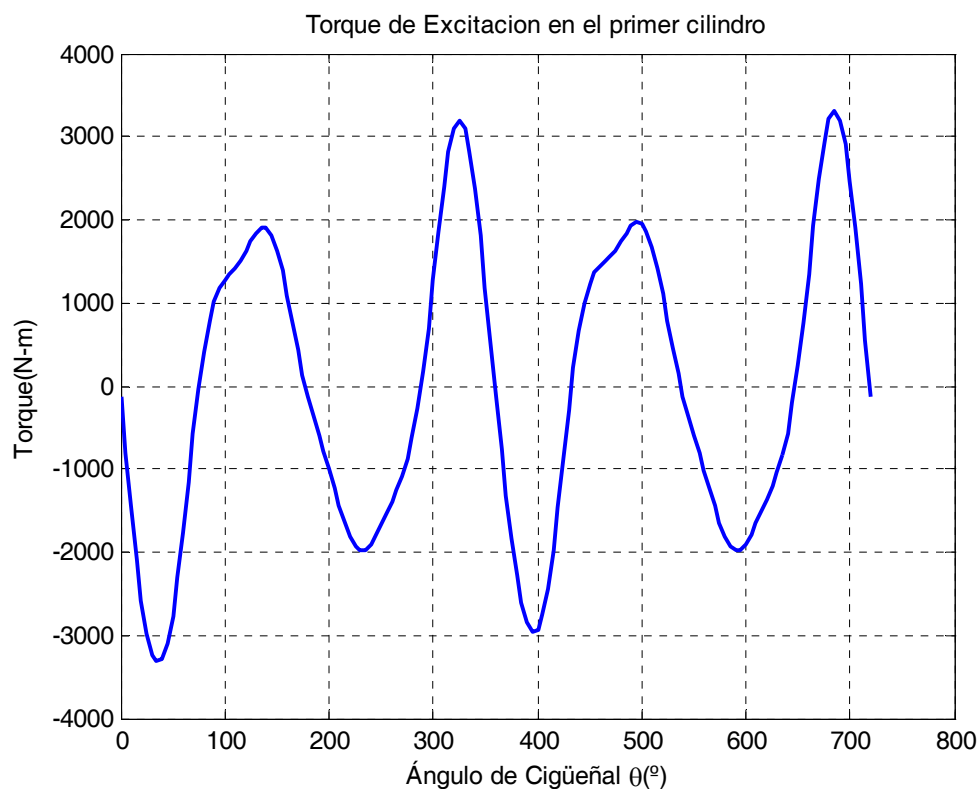


Figura 4.29. Comportamiento periódico del Torque de Excitación en el 1º cilindro para 3000 rpm.

El comportamiento periódico del torque de excitación para el 2º cilindro está representado en la figura 4.30.

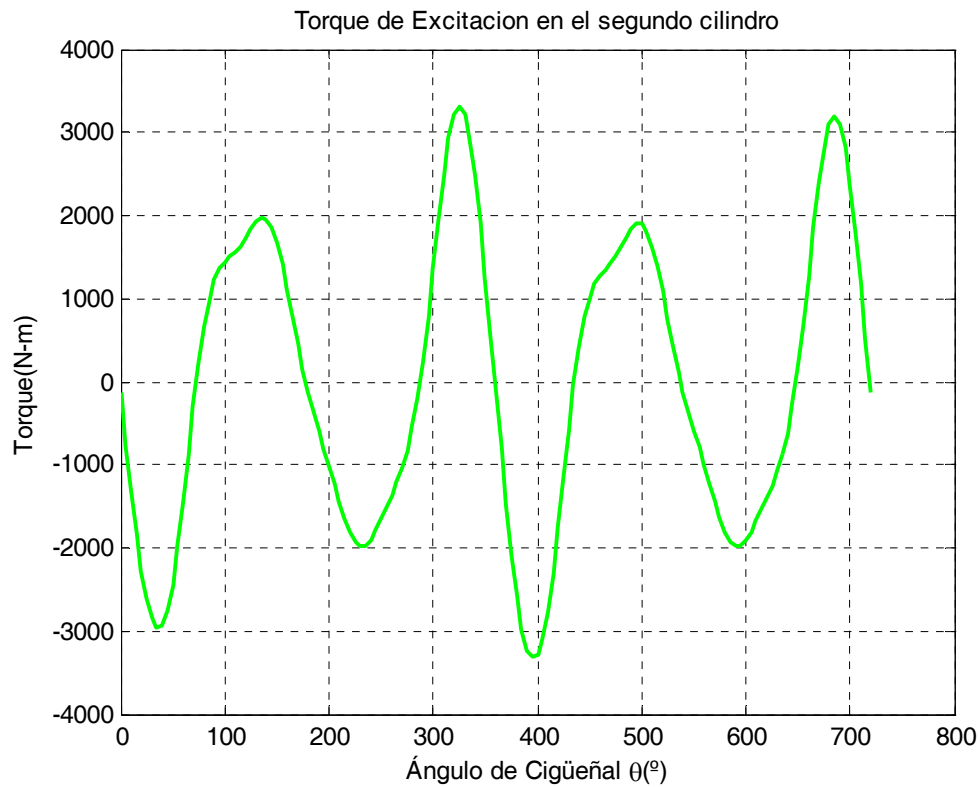


Figura 4.30. Comportamiento periódico del Torque de Excitación en el 2º cilindro para 3000 rpm.

4.3.2. COMPORTAMIENTO PERIÓDICO DE LOS ELEMENTOS K_{11} Y K_{22} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DEL SISTEMA TORSIONAL

Los elementos K_{11} y K_{22} de la matriz de rigidez torsional se ven influenciadas también por la velocidad del motor.

El comportamiento periódico el elemento K_{11} de la matriz de rigidez está representado en la figura 4.31.

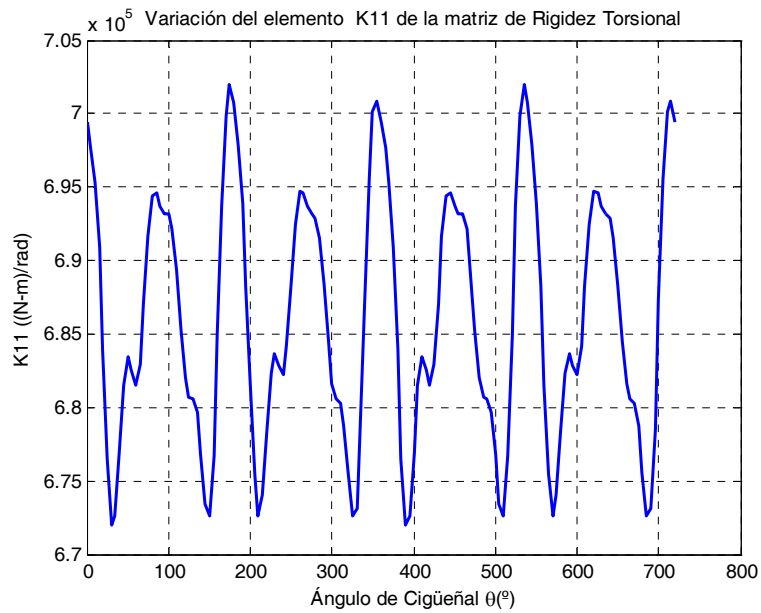


Figura 4.31. Comportamiento periódico del elemento K_{11} de la matriz de rigidez para 3000 rpm.

El comportamiento del elemento K_{22} de la matriz de rigidez torsional está representado en la figura 4.32.

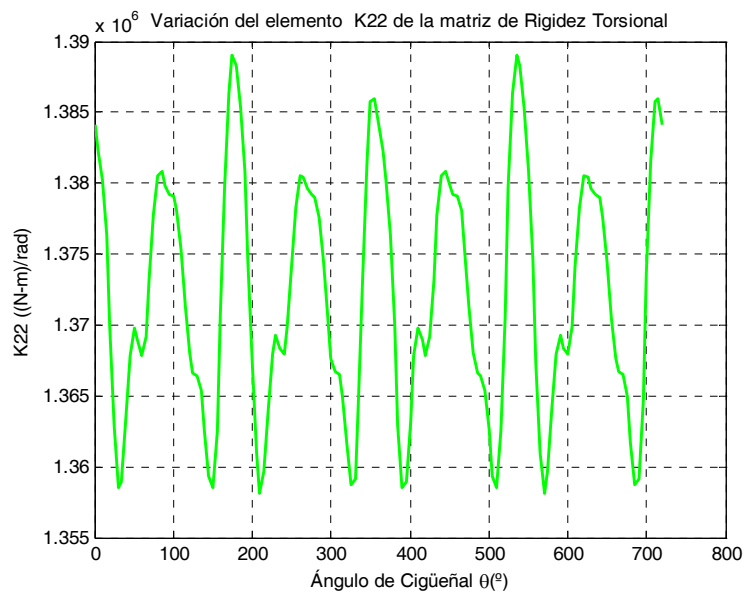


Figura 4.32. Comportamiento periódico del elemento K_{22} de la matriz de rigidez para 3000 rpm.

4.3.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA SIN APLICACIÓN DEL ABSORSOR PENDULAR DE VIBRACIONES TORSIONALES

La simulación numérica del sistema torsional sin aplicación del absorber pendular está influenciada por la variación de la velocidad del motor y por lo tanto la respuesta temporal del sistema será diferente a la estudiada en el capítulo 4.

Adicionalmente se debe generar un Script en el MATLAB donde esté el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que se tienen que resolver y otro Script donde se ejecute la función ODE45 con las condiciones iniciales, el tiempo de evaluación, paso de integración y las opciones de tolerancia necesarias.

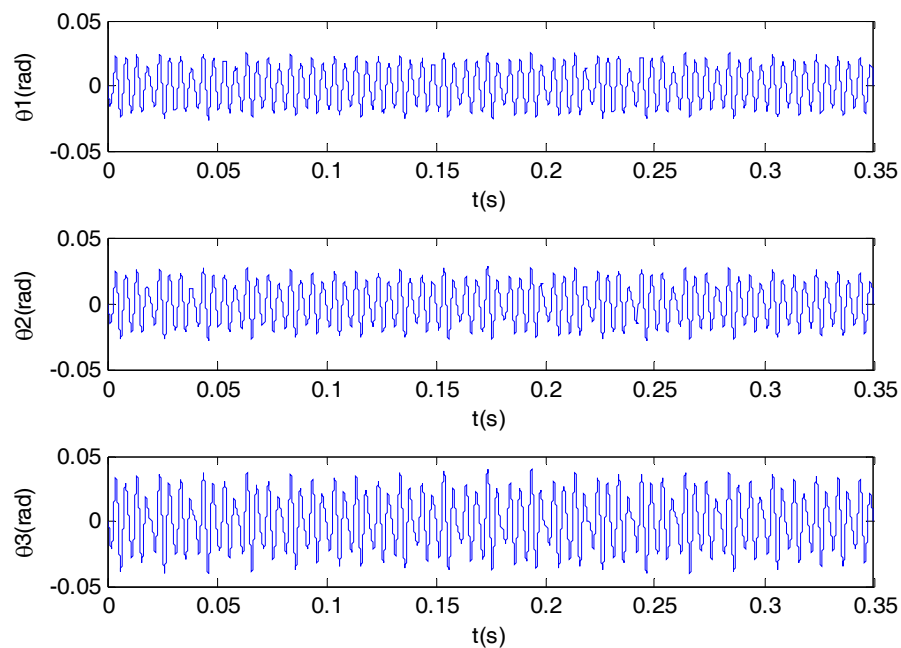


Figura 4.33. Respuesta del sistema sin aplicación del absorber pendular a 3000 rpm.

La figura 4.33 muestra claramente que la amplitud de oscilación máxima en el primer y segundo cilindro es de 0.025 radianes, mientras que en la volante de inercia la amplitud de oscilación máxima es de 0.039 radianes.

4.3.4. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR PENDULAR DE VIBRACIONES TORSIONALES ACOPLADO

La simulación numérica del sistema torsional con el absorber pendular acoplado también es influenciada por la variación de la velocidad del motor y por lo tanto la respuesta temporal del sistema diferirá de la respuesta estudiada en el capítulo 4.

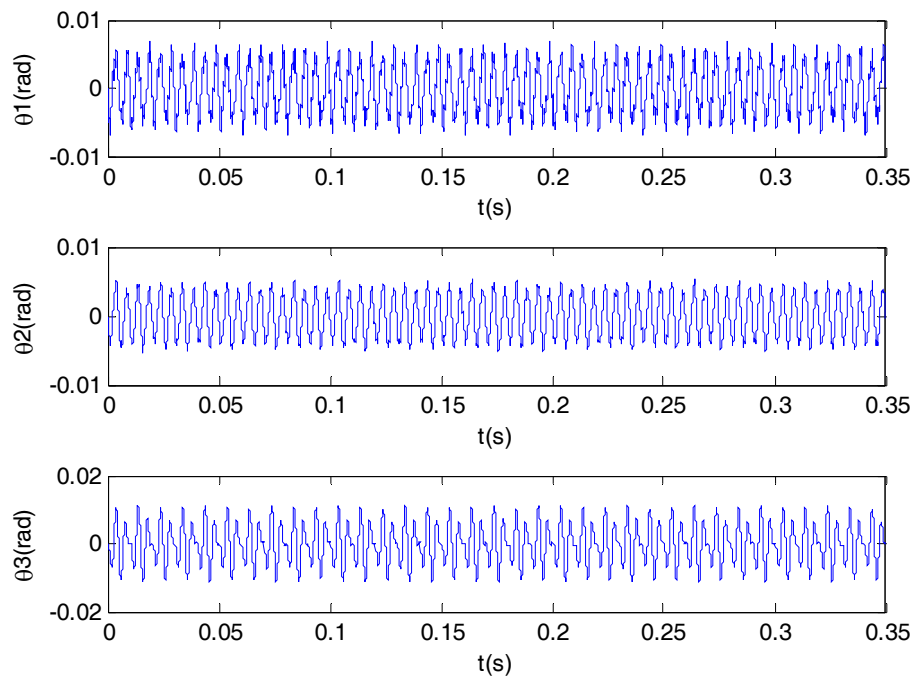


Figura 4.34. Respuesta del sistema con el absorber pendular acoplado para 3000 rpm.

La figura 4.34 muestra claramente que la amplitud de oscilación máxima en el primer y segundo cilindro se han reducido a 0.007 radianes y 0.005 radianes, lo que significa una reducción del 72 % y 80 % respectivamente; en la volante la amplitud de oscilación máxima se redujo a 0.01 radianes, alcanzando una reducción del 74 %.

El comportamiento en el tiempo de los absorbentes se muestra en la figura 4.35 donde claramente se muestra que la amplitud de oscilación máxima para el primer y segundo absorber es de 0.002 y 0.0016 radianes respectivamente.

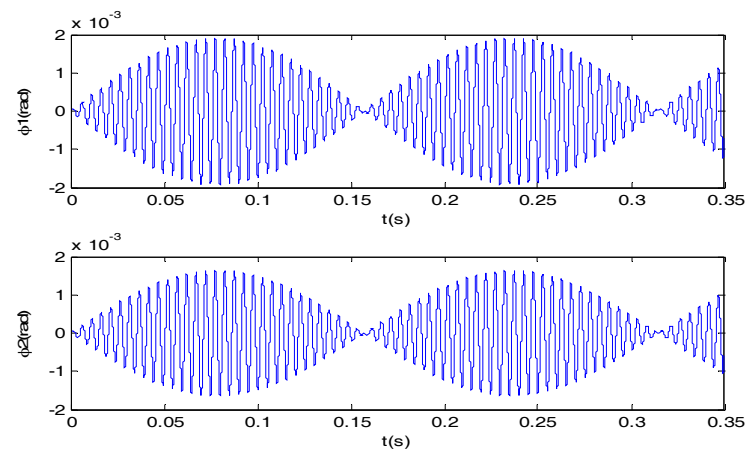


Figura 4.35. Respuesta temporal de los absorbentes pendulares para 3000 rpm.

4.3.5. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR AMORTIGUADO ACOPLADO

Ahora se evaluará como afecta el cambio de la velocidad en el motor y cuanto es la reducción del absorbor amortiguado al ser aplicado al sistema torsional.

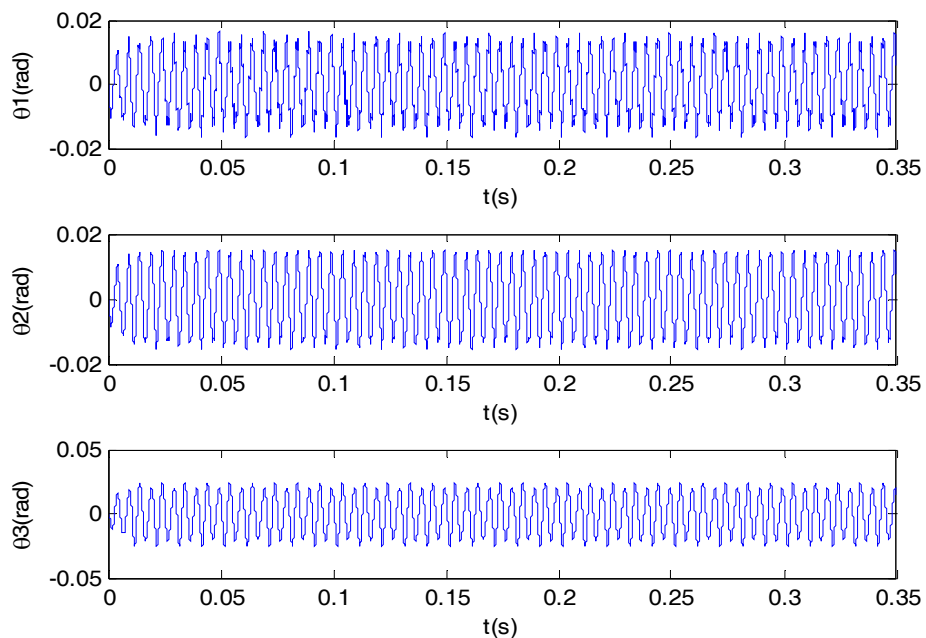


Figura 4.36. Respuesta del sistema con el absorbor amortiguado acoplado para 3000 rpm.

En la figura 4.36 se puede ver que la amplitud de oscilación máxima en el primer y segundo cilindro se han reducido a 0.016 radianes; lo que significa una reducción del 36 %, mientras que en la volante de inercia la amplitud de oscilación máxima se redujo a 0.024 radianes, alcanzando una reducción del 38 %.

Además es necesario saber cuál es el comportamiento en el tiempo del volante amortiguador acoplado. La figura 4.37 muestra el comportamiento en el tiempo del volante amortiguador, donde se muestra que la amplitud de oscilación máxima es de 0.019 radianes.

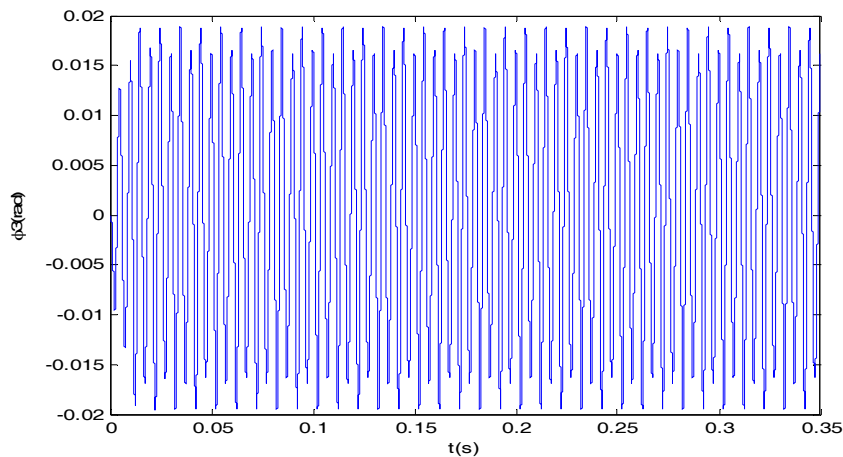


Figura 4.37. Respuesta de la amplitud de oscilación del volante amortiguador para 3000 rpm.

4.3.6. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA CON EL ABSORSOR PENDULAR Y EL ABSORSOR AMORTIGUADO ACOPLADOS

Adicionalmente a las simulaciones ya realizadas, se hará la simulación del sistema donde se incluye al absorsor pendular y absorsor amortiguado acoplados al sistema inicial.

La figura 4.38 muestra el comportamiento en el tiempo del sistema torsional con ambos absorbentes acoplados.

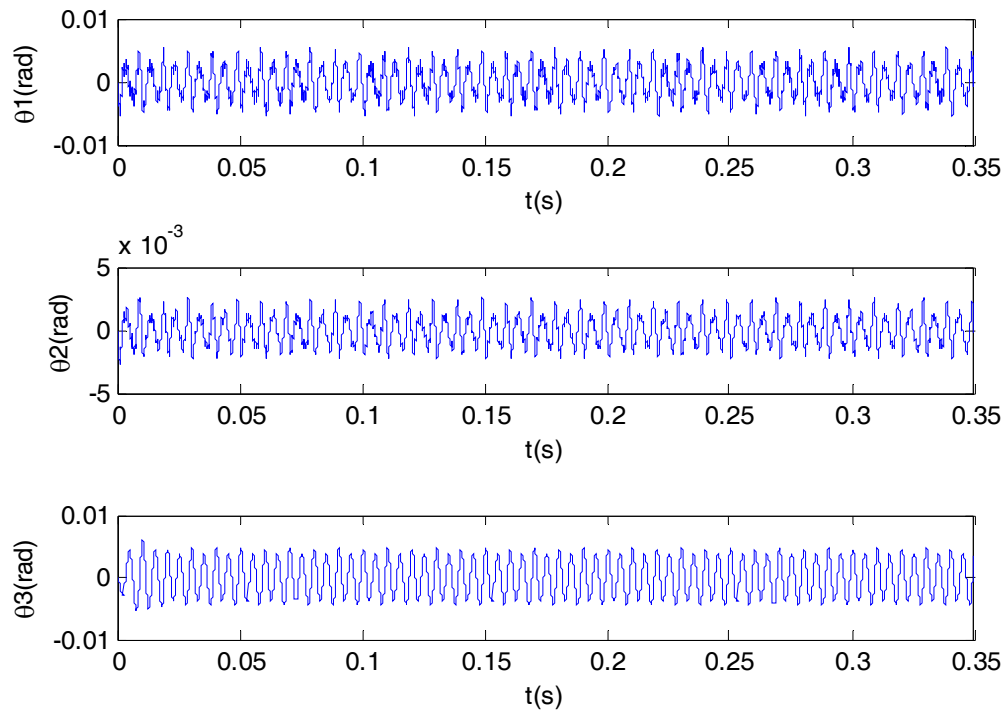


Figura 4.38. Respuesta del sistema con el absorbente pendular y el absorbente amortiguado acoplados al sistema torsional para 3000 rpm.

La figura 4.38 muestra que la amplitud de oscilación máxima en el primer cilindro se ha reducido a 0.005 radianes y en el segundo cilindro se ha reducido a 0.0027 radianes; lo que significa una reducción del 80 % y 96 % respectivamente, mientras que en la volante de inercia la amplitud de oscilación máxima se redujo a 0.0035 radianes, alcanzando una reducción del 88% aproximadamente.

La figura 4.39 muestra el comportamiento en el tiempo de los dos absorbentes pendulares y del absorbente amortiguado.

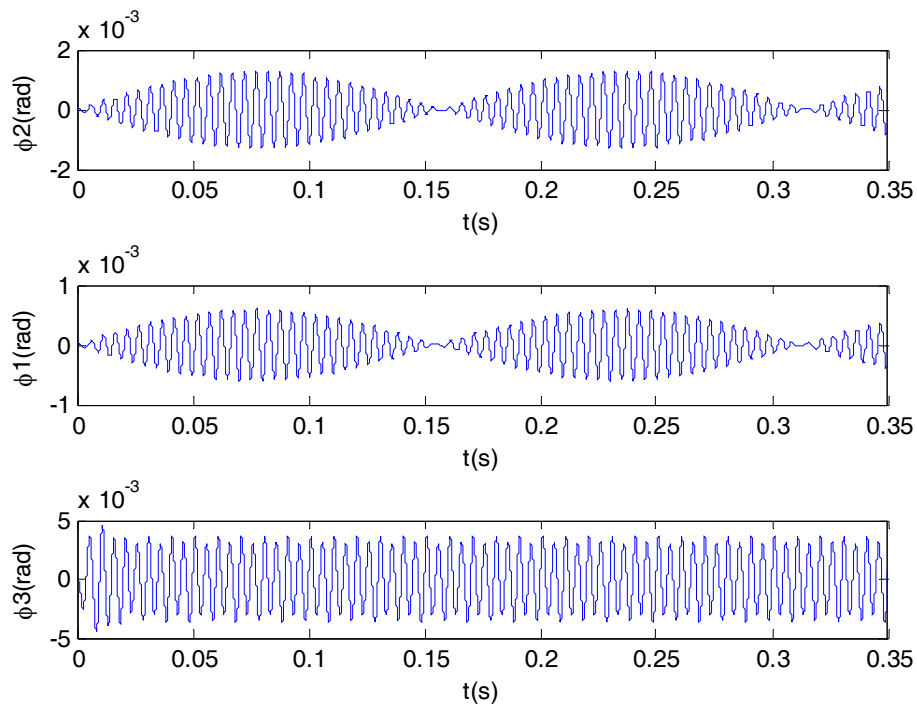


Figura 4.39. Respuesta de la amplitud de oscilación de los absorbentes pendulares y del volante amortiguador para 3000 rpm.

La figura 4.39 muestra el comportamiento en el tiempo de los absorbentes, donde se muestra que la amplitud de oscilación máxima para el primer y segundo absorbente es de 0.0013 y 0.0006 radianes respectivamente mientras que para el volante amortiguador su amplitud máxima de oscilación es de 0.0036 radianes, evidenciando así que la acción combinada de los dos tipos de absorbentes es más eficiente en la reducción de la vibración torsional.

4.4. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL ABSORSOR PÉNDULAR COMO UN SISTEMA DE 2GDL – INFLUENCIA DE LA MASA DEL PÉNDULO EN LA RESPUESTA DEL SISTEMA TORSIONAL DE 2 GDL

Los motores de combustión interna dependiendo de la configuración de cigüeñal vienen balanceados tanto estática como dinámicamente; aquí es donde el parámetro de masa del péndulo interviene, ya que para lograr el montaje del absorber se removió material de los contrapesos a fin de cumplir con el requerimiento de espacio a la hora de poner en funcionamiento el motor. La masa del material removido es el que se debe tomar en cuenta a la hora de elegir el parámetro de masa del péndulo. Para entender mejor la influencia de la masa de péndulo absorber, se resuelve el sistema de ecuaciones desarrollado en el capítulo 3 a partir del esquema que se muestra una vez más en la figura 4.40.

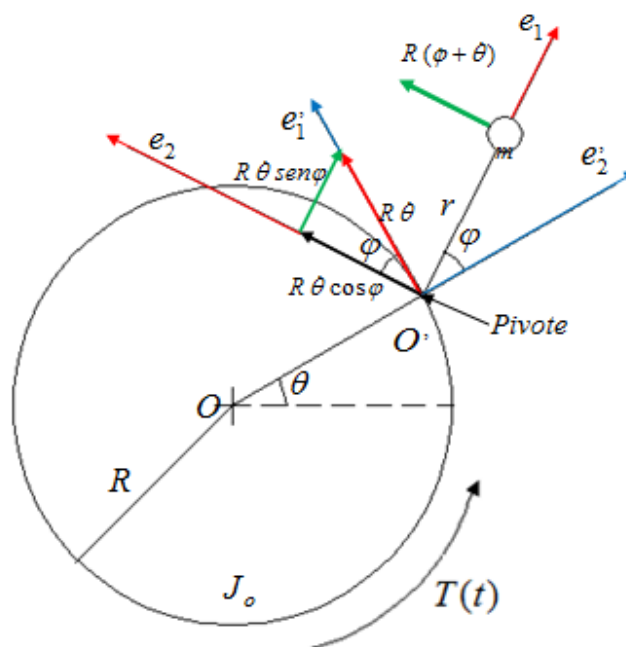


Figura 4.40. Modelo mecánico – matemático del absorber péndular como un sistema de 2GDL.

Se evaluará un sistema de 2 grados de libertad, mediante la función ODE 45, para una torque de excitación armónico y distintos valores de la masa de péndulo.

Para una masa del péndulo $m = 0.15$ kg

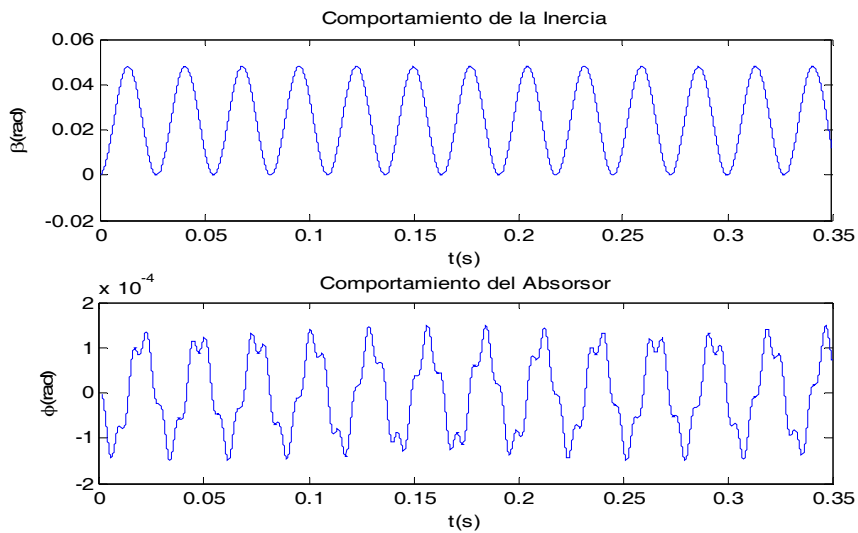


Figura 4.41. Oscilación de la inercia equivalente y el absorbor pendular ($m = 0.15$ kg).

Para una masa del péndulo $m = 0.335$ kg

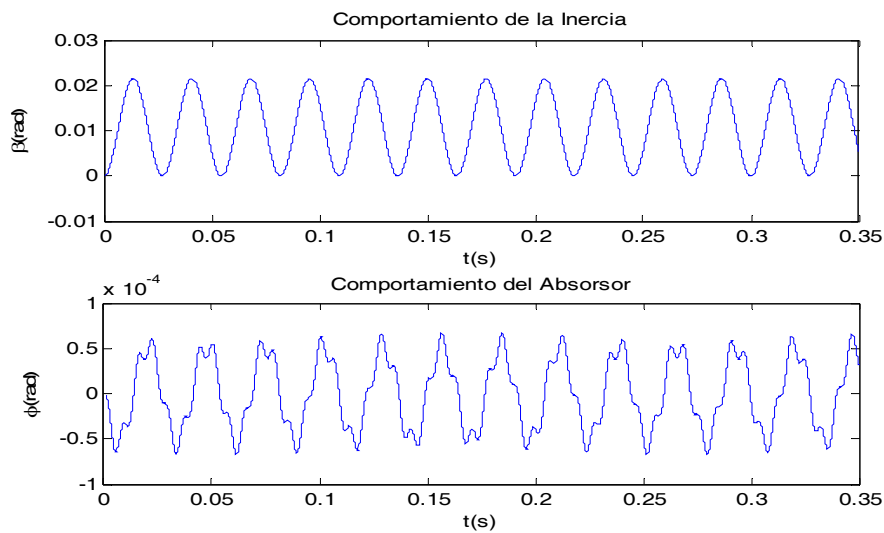


Figura 4.42. Oscilación de la inercia equivalente y el absorbor pendular ($m = 0.335$ kg).

Para una masa del péndulo $m = 0.6$ kg

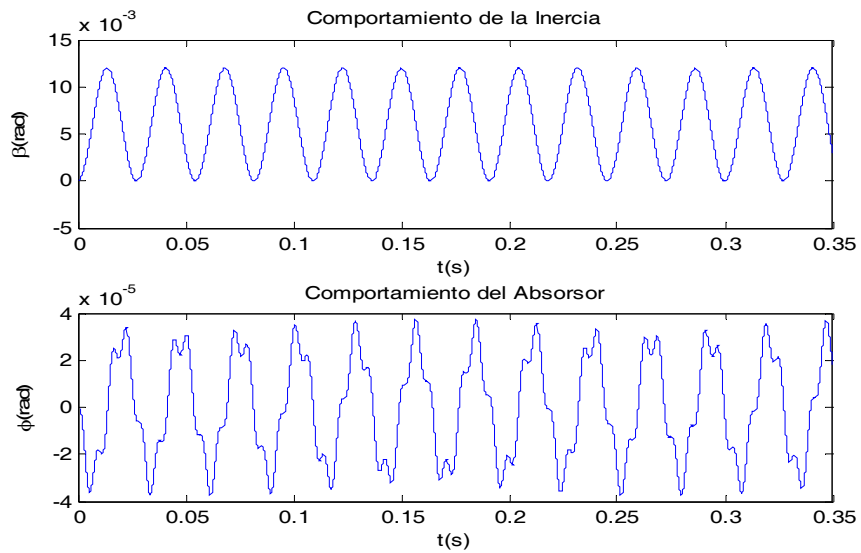


Figura 4.43. Oscilación de la inercia equivalente y el absorbor pendular ($m = 0.6$ kg).

Para una masa del péndulo $m = 0.9$ kg

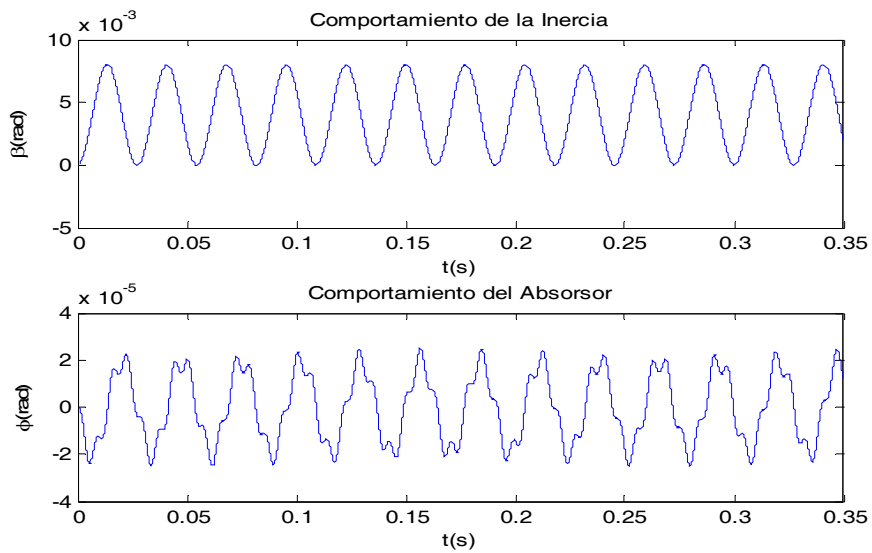


Figura 4.44. Oscilación de la inercia equivalente y el absorbor pendular ($m = 0.9$ kg).

De las 4 últimas figuras podemos deducir que a mayor masa del péndulo, la amplitud de oscilación de la inercia equivalente será menor, lo mismo pasa con la oscilación del péndulo si la masa es mayor entonces el péndulo oscilara menos.

Con bastante claridad se aprecia la influencia de la masa de péndulo sobre la amplitud de oscilación de la inercia equivalente; si solo se realiza este análisis entonces se elegiría una gran masa ya que tendría mayor efectividad a la hora de reducir las vibraciones torsionales, pero como ya se mencionó las consideraciones de balance estático y dinámico para el normal funcionamiento del motor son los que limitan el parámetro de masa del péndulo.

4.5. BIBLIOGRAFÍA CAPÍTULO 4

1. RAO V. D., "SOLVING VIBRATION ANALYSIS PROBLEMS USING MATLAB", 1º Edición, New Age International (P) Limited, Publishers, New Delhi, 2007
2. MAGRAB, Edward B., "AN ENGINEER'S GUIDE TO MATLAB", 2º Edición, Editorial Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2005.
3. MARCHAND, Patrick, "*GRAPHICS AND GUI'S WITH MATLAB*", 3º Edición, Editorial Chapman & Hall / RC, Londres, 2003.
4. HAHN, Brian D., "ESSENTIAL MATLAB FOR ENGINEERS AND SCIENTISTS", 3º Edición, Editorial Elsevier, Amsterdam, 2007.

CONCLUSIONES

- Las vibraciones torsionales es un fenómeno muy común en máquinas rotativas y reciprocantes, siendo esta última la que más particularidades trae, tal es el caso del par de torsión en este tipo de máquinas que se definen como funciones periódicas las cuales deben ser desarrolladas utilizando la series de Fourier. Para mitigar estas vibraciones torsionales existen diferentes técnicas, una de las técnicas que se utiliza es el uso de absorbentes de vibraciones.
- Para el modelo del sistema torsional desarrollado en la presente tesis se consideró como funciones del ángulo del cigüeñal θ a la inercia equivalente de cada uno de los cilindros y a los componentes de la diagonal de la matriz de rigidez, lo que facilitó poder representar de mejor manera el comportamiento dinámico del motor.
- El modelo mecánico - matemático desarrollado para el torque de excitación trajo consigo el desarrollar un análisis algo extenso del mecanismo biela - manivela, así como también entender la influencia de la presión de los gases de la combustión y de las inercias en movimiento en la determinación de las fuerzas y pares de torsión actuantes sobre el mecanismo.
- Un absorbente pendular centrífugo usado para mitigar los problemas de vibración torsional es un caso especial de absorbentes de vibración usados; a diferencia de los demás tipos de absorbentes tiene como parámetro más importante su longitud (diferencia de diámetros según sea el diseño), la ventaja de poder sintonizarse a distintas velocidades del motor y como recomendación para la elección de la masa del péndulo, el que cumpla condiciones de balanceo estático y dinámico del sistema.

- El diseño óptimo del absorber de vibraciones se desarrolla haciendo uso de la metodología del diseño generalizado según la norma VDI 2221, el cual condujo que la mejor solución es la de un absorber pendular tipo bifilar, por ser este el absorber que cumple mejor con requerimientos de espacio y óptima operación.
- La influencia de analizar la matriz de momentos de inercia con dos de sus componentes variables en función del ángulo de giro del cigüeñal θ , hace que sea imposible hacer un análisis de modos de vibración torsional adecuado debido a que los elementos de la diagonal de la matriz de inercia se ven influenciados por la variación de las inercias y de los torques de excitación.
- El modelo mecánico – matemático desarrollado tiene la particularidad de tener como ecuación que describe su movimiento a un sistema de ecuaciones diferenciales paramétricas, lo que conlleva a desarrollar programas de integración numérica más elaborados que los que se acostumbra usar cuando se necesita resolver sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.
- La aplicación del absorber pendular al sistema torsional redujo considerablemente la amplitud de vibración en las inercias reducidas del 1º y 2º cilindro, donde se redujo el 83 % de la vibración, y en la volante de inercia, donde se redujo el 77 % de la vibración torsional.
- La reducción en la amplitud de vibración alcanzada con la aplicación del absorber amortiguado es del 43 % en las inercias reducidas al eje y del 35 % en la volante de inercia, lo que se considera una reducción aceptable, además que el comportamiento en el tiempo de la volante amortiguador muestra amplitudes de

vibración torsional muy parecidas a las amplitudes que tiene la inercia efectiva de la volante.

- La aplicación del absorsor pendular y del absorsor amortiguado en su conjunto alcanzaron reducir considerablemente la amplitud de vibración, llegando a una reducción del 90 y 93 % para las inercias reducidas del primer y segundo cilindro respectivamente; y una reducción del 87 % en la amplitud de vibración de la volante de inercia.
- La efectividad en la reducción de la amplitud de vibración torsional por parte del absorsor pendular radica en que se adapta a cualquier condición de velocidad de trabajo del motor; esto se aprecia en la simulación numérica desarrolla para 1000 y 3000 rpm que se muestran en el capítulo 4.
- El comportamiento en el tiempo del absorsor pendular luego de ser aplicado al sistema torsional tiene una particularidad ya que muestra el fenómeno “beat” debido a la transferencia de energía entre los péndulos; este comportamiento de los absorsores no tienen influencia sobre el correcto funcionamiento del motor por ser amplitudes pequeñas las desarrolladas por los absorsores acoplados.

RECOMENDACIONES

- El modelo desarrollado para el par de torsión es exclusivamente para el caso de un motor de 2 cilindros en línea y de 4 tiempos por lo que se recomienda recurrir a la bibliografía citada para analizar otro tipo de motor.
- Se recomienda contrastar el análisis teórico y simulación abordado en la presente tesis con curvas y datos experimentales a partir de mediciones con instrumentos electrónicos adecuadamente calibrados a un motor de 2 cilindros en línea y 4 tiempos con las especificaciones detalladas.
- Se recomienda el estudio de un sistema torsional como el que se analizó en la presente tesis pero bajo regímenes transitorios de velocidad, ya que nos proporcionaría información valiosa acerca del comportamiento del sistema en condiciones de velocidades no constantes.
- Se recomienda seguir investigando los diversos métodos de mitigación de vibraciones torsionales sobre todo el absorbente pendular por presentar ciertas ventajas frente a los demás métodos.

ANEXOS

ANEXO A: ANÁLISIS DE VIBRACIÓN TORSIONAL EN MÁQUINAS PURAMENTE ROTATIVAS

A.1. VIBRACIONES TORSIONALES EN MÁQUINAS ROTATIVAS

Las máquinas rotativas tales como turbinas de vapor, compresores, generadores pueden desarrollar esfuerzos dinámicos excesivos, si funcionan con velocidades cerca de sus frecuencias naturales de vibración torsional. Cuando el accionamiento y las unidades accionadas de tales máquinas de rotación se unen a través de acoplamientos flexibles, se produce una frecuencia natural relativamente baja del sistema, que puede estar dentro del rango de velocidad de operación de la instalación.

En máquinas rotativas, como es el caso de las turbinas, el accionamiento del torque es más uniforme, todo lo contrario a las máquinas reciprocantes, como un motor de combustión interna del tipo diesel, donde el torque que produce el motor es variable en función a la frecuencia de rotación del sistema. Sin embargo en máquinas rotativas no reciprocantes se pueden producir esfuerzos excesivos a velocidades críticas debido al desalineamiento y/o desbalanceo, el diseño debe evitar todas estas posibilidades.

Un factor importante en el diseño de máquinas rotativas, es la existencia de las cargas transitorias que actúan en un rotor por ejemplo, el desbalance eléctrico en un

generador. Estas cargas transitorias pueden inducir a tensiones excesivas aunque por un corto periodo, el cual a su vez puede llevar a un ciclo corto de fatiga y a la falla prematura de algunas partes tales como acoplamientos. En tales casos la determinación de las tensiones transitorias es una consideración importante en el diseño de ejes y acoplamientos de las máquinas rotativas.

A.1.1. MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO DEL EJE DE UNA MÁQUINA ROTATIVA

El eje de una máquina rotativa es el componente donde se originan las vibraciones torsionales debido a la presencia de masas rotativas fijas al eje y consideradas como rígidas, y debido además a la elasticidad torsional del eje.

Todas las masas rígidas tales como volantes de inercia, partes internas y externas de un acoplamiento flexible, engranajes, entre otros, se pueden considerar como discos rígidos cuyos momentos de inercia totales se puedan determinar con relativa facilidad.

A continuación en la figura A.1 se muestra el modelado de un sistema torsional con amortiguamiento.

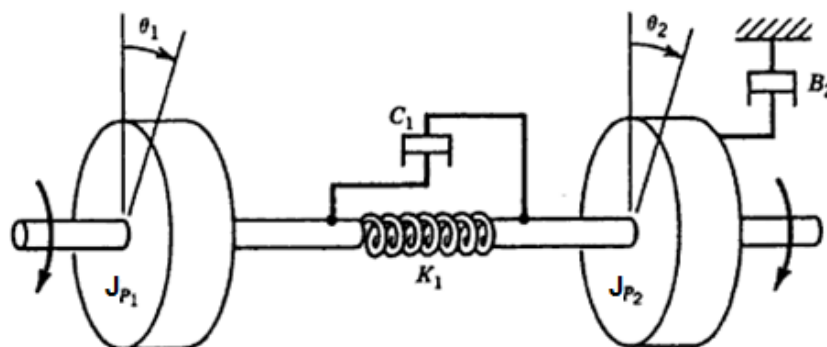


Figura A.1: Modelo de Sistema Torsional con Amortiguamiento [3].

Considerando al torque de frecuencia de excitación constante como:

$$T_n(t) = T_{en} \cos(\omega \cdot t) \quad (\text{A.1})$$

Para obtener el sistema de ecuaciones no homogéneas que describen el movimiento del sistema, se plantea las ecuaciones de Lagrange de segundo tipo, considerando que en el sistema existen elementos que originan energía cinética, en el caso de la inercias, energía potencial, en el caso de los resortes de torsión, y energía de disipación, como es el caso del amortiguamiento, además se tiene un torque externo al sistema que también influirá en el planteamiento. Planteadas las ecuaciones de Lagrange de segundo tipo y agrupando términos se puede expresar en forma matricial la ecuación que rige el comportamiento de una máquina rotativa:

$$J \cdot \{\ddot{\theta}_n\} + D \cdot \{\dot{\theta}_n\} + K \cdot \{\theta_n\} = \{T_{en} \cos(\omega \cdot t)\} \quad (\text{A.2})$$

Donde J es la matriz de inercia del sistema:

$$J = \begin{bmatrix} J_{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{p_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{p_N} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

D es la matriz de amortiguamiento del sistema, donde todos los valores fuera de la matriz diagonal son todos cero:

$$D = \begin{bmatrix} (B_1 + C_1) & -C_1 & 0 & \dots & 0 \\ -C_1 & (B_2 + C_2 + C_1) & -C_2 & & \vdots \\ 0 & -C_2 & (B_3 + C_3 + C_2) & -C_3 & \\ \vdots & & -C_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & & -C_{N-1} \\ & & & 0 & -C_{N-1} & (B_3 + C_3 + C_2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

K es la matriz de rigidez del sistema que al igual que la matriz de amortiguamiento tiene una forma bandeada:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & \dots & 0 \\ -K_1 & (K_1 + K_2) & -K_2 & & \vdots \\ 0 & -K_2 & (K_2 + K_3) & -K_3 & \\ \vdots & & -K_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -K_{N-1} & K_{N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$\{\theta_n\}$ es el vector de desplazamiento angular:

$$\{\theta_n\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Y $\{T_{en} \cdot \cos(\omega \cdot t)\}$ es el vector de torques de excitación:

$$\{T_{en} \cos(\omega \cdot t)\} = \begin{Bmatrix} T_{e1} \cos(\omega t) \\ T_{e2} \cos(\omega t) \\ \vdots \\ T_{eN} \cos(\omega t) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A.1.2. RESPUESTA TRANSITORIA EN VIBRACIÓN TORSIONAL

Las ecuaciones de movimiento para un sistema discreto con vibración forzada son:

$$[J] \cdot \{\ddot{\theta}_n\} + [D] \cdot \{\dot{\theta}_n\} + [K] \cdot \{\theta_n\} = \{T\} \quad (\text{A.8})$$

Donde $\{T\}$ es el vector de excitación que es una función que depende del tiempo.

Usando el modo normal de expansión de la respuesta, tenemos:

$$\{\theta\} = [X] \cdot \{q\} \quad (\text{A.9})$$

Donde $[X]$ es la matriz modal de giro y $\{q\}$ es el vector de coordenadas generalizadas. Reemplazando la ecuación (A.9) en la ecuación (A.8), multiplicando esta ecuación que se obtiene por la transpuesta de la matriz modal $[X]$ y usando las propiedades de ortogonalidad de los modos de vibración torsional se obtiene:

$$\bar{J}_k \ddot{q}_k + \bar{d}_k \dot{q}_k + \bar{k}_k \cdot q_k = \bar{T}_k \quad (\text{A.10})$$

Para $k = 1, 2, \dots, N$, donde x_{ik} son las componentes de la matriz modal de giro y \bar{J}_k es la inercia generalizada del k-ésimo modo de vibración, si dividimos la última ecuación entre \bar{J}_k se obtiene:

$$\ddot{q}_k + 2 \cdot \xi_i \cdot \bar{\omega}_k \cdot \dot{q}_k + \bar{\omega}_k^2 \cdot q_k = \frac{\bar{T}_k}{\bar{J}_k} \quad (\text{A.11})$$

De las ecuaciones (A.11) y (A.12) se deduce:

$$\bar{J}_k = \sum_{i=1}^N J_i \cdot x_{ik}^2 \quad (\text{A.12})$$

\bar{k}_k es la rigidez generalizada del k-ésimo modo de vibración, donde:

$$\bar{k}_k = \sum_{i=1}^N k_i \cdot x_{ik}^2 = \bar{\omega}_k^2 \cdot \bar{J}_k \quad (\text{A.13})$$

\bar{d}_k es el amortiguamiento generalizado del k-ésimo modo de vibración, donde:

$$\bar{d}_k = \sum_{i=1}^N d_i \cdot x_{ik}^2 = 2 \cdot \xi_i \cdot \bar{\omega}_k \cdot \bar{J}_k \quad (\text{A.14})$$

\bar{T}_k es la fuerza generalizada del k-ésimo modo de vibración, la cual se obtiene de:

$$\bar{T}_k = \sum_{i=1}^N T_i \cdot x_{ik} \quad (\text{A.15})$$

Para obtener la respuesta transitoria en vibración torsional de una máquina rotativa es necesario hacer uso de fuerzas con características impulsivas, normalmente son tres tipos de fuerzas las que son utilizadas y que se muestran a continuación.

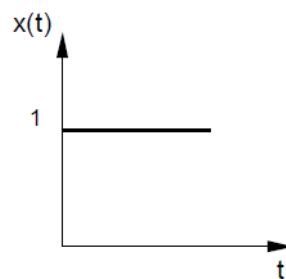


Figura A.2: Entrada escalón o Fuerza constante.

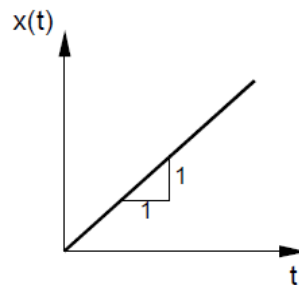


Figura A.3: Entrada rampa o Fuerza proporcional.

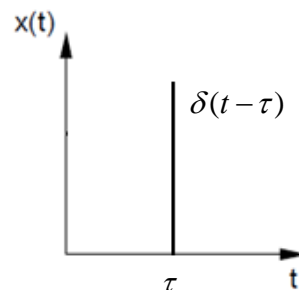


Figura A.4: Entrada impulso o Fuerza impulsiva.

La solución de la ecuación (A.11) para una fuerza constante de la forma que se muestra en la figura A.2 viene dada por:

$$q_k(t) = -\frac{\bar{T}_k}{J_k \cdot \bar{\omega}_k^2} \cdot \left[e^{-\xi_i \cdot \bar{\omega}_k \cdot t} \cdot \cos(\bar{\omega}_D \cdot t) + \frac{\xi_i \cdot \bar{\omega}_k}{\bar{\omega}_D} \cdot e^{-\xi_i \cdot \bar{\omega}_k \cdot t} \cdot \text{sen}(\bar{\omega}_D \cdot t) - 1 \right] \quad (\text{A.16})$$

De la misma manera la solución de la ecuación (A.11) para una fuerza proporcional de la forma que se muestra en la figura A.3 viene dada por:

$$q_k(t) = -\frac{t}{J_k \cdot \bar{\omega}_k^2} \cdot \left[e^{-\xi_i \cdot \bar{\omega}_k \cdot t} \cdot \cos(\bar{\omega}_D \cdot t) + \frac{(t \cdot \xi_i \cdot \bar{\omega}_k + 1)}{\bar{\omega}_D} \cdot e^{-\xi_i \cdot \bar{\omega}_k \cdot t} \cdot \text{sen}(\bar{\omega}_D \cdot t) - 1 \right] \quad (\text{A.17})$$

Por último la solución de la ecuación (A.11) para una fuerza impulso de la forma que se muestra en la figura A.4 viene dada por:

$$q_k(t) = -\frac{t}{J_k \cdot \bar{\omega}_k^2} \cdot \left[e^{-\xi_i \cdot \bar{\omega}_k \cdot t} \cdot \cos(\bar{\omega}_D \cdot t) + \frac{(t \cdot \xi_i \cdot \bar{\omega}_k + 1)}{\bar{\omega}_D} \cdot e^{-\xi_i \cdot \bar{\omega}_k \cdot t} \cdot \text{sen}(\bar{\omega}_D \cdot t) \right] \quad (\text{A.18})$$

$$\square \quad + \frac{1}{J_k \cdot \bar{\omega}_k} \int_0^1 \bar{T}_k(\tau) \cdot \text{sen}(\bar{\omega}_k(t - \tau)) \cdot d\tau$$

**ANEXO B: DESARROLLO DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL MATRICIAL
DEL MOTOR DE COMBUSTIÓN INTERNA DE 2 CILINDROS
EN LINEA Y 4 TIEMPOS**

Para el modelado del sistema mostrado en la figura B.1 es necesario prestar atención a la disposición del eje cigüeñal en el modelo con parámetros continuos ya que a partir de este se tiene que reducir los momentos de inercia al eje cigüeñal.

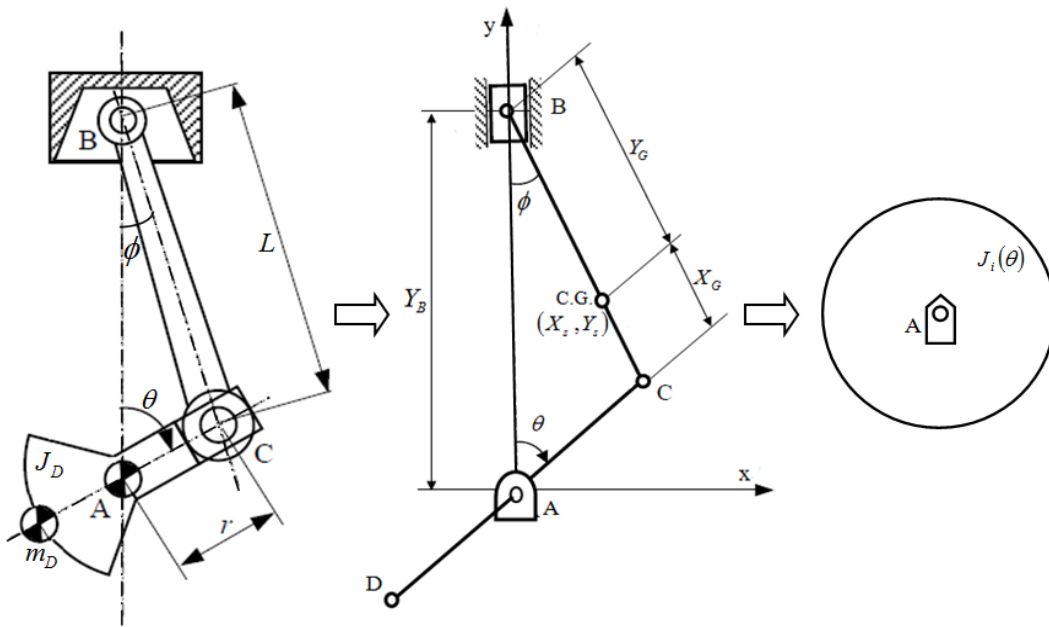


Figura B.1: Reducción del momento inercia del mecanismo biela - manivela al eje.

Las relaciones cinemáticas del mecanismo se obtienen a partir de la figura B.1 (a):

$$Y_B = r \cos \theta + L \cos \phi \quad (\text{B.1})$$

Además: $r \sin \theta = L \sin \phi \Rightarrow \sin \phi = \frac{r}{L} \sin \theta$, $\lambda = \frac{r}{L}$, entonces:

$$\sin \phi = \lambda \sin \theta \quad (\text{B.2})$$

La posición del centro de masa de la biela queda definido como:

$$Y_S = r \cos \theta + X_G \cos \phi \quad (\text{B.3})$$

$$X_S = r \sin \theta - X_G \sin \phi$$

Al derivar las ecuaciones obtenidas obtendremos las siguientes expresiones:

$$Y_B = -r \dot{\theta} \sin \theta - L \dot{\phi} \sin \phi \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{\phi} = \frac{\lambda \dot{\theta} \cos \theta}{\cos \phi} \quad (\text{B.5})$$

$$Y_S = -r \dot{\theta} \sin \theta - X_G \dot{\phi} \sin \phi \quad (\text{B.6})$$

$$X_S = r \dot{\theta} \cos \theta - X_G \dot{\phi} \cos \phi$$

Se puede deducir la siguiente relación trigonométrica:

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{B.7})$$

Para eliminar el radical de la última expresión es necesario hacer uso del teorema binominal de la forma:

$$(a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \dots \quad (\text{B.8})$$

Para el caso en estudio se tiene que: $a = 1$; $b = -\lambda^2 \sin^2 \theta$; $n = \frac{1}{2}$

La expresión B.7 tendrá la forma siguiente:

$$\left(1 - \lambda^2 \sin^2 \theta\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{8} \lambda^4 \sin^4 \theta - \frac{1}{16} \lambda^6 \sin^6 \theta + \dots \quad (\text{B.9})$$

La relación entre el radio del cigüeñal r y la longitud de la biela L es siempre menor a la unidad, por lo que la última expresión binominal puede expresarse como:

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2 \theta} \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \text{sen}^2 \theta \quad (\text{B.10})$$

La expresión (B.5) se puede expresar ahora como:

$$\dot{\phi} = \lambda \dot{\theta} \cos \theta \left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \text{sen}^2 \theta \right) \quad (\text{B.11})$$

La energía cinética del sistema mostrado en la figura B.1 puede ser expresado como:

$$T = \frac{1}{2} J_D \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_b \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_b (\dot{X}_S^2 + \dot{Y}_S^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{Y}_B^2 \quad (\text{B.12})$$

Donde: J_D : es el momento de inercia del contrapeso de cigüeñal.

J_b : es el momento de inercia de la biela.

m_b : es la masa de la biela.

m_p : es la masa del pistón.

Reemplazando las ecuaciones (B.2), (B.4), (B.5), (B.6) y (B.11) en la expresión (B.12) y haciendo uso de las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos \theta \text{sen}^2 \theta &= \frac{1}{4} (\cos \theta - \cos 3\theta) \\ \cos \theta \text{sen}^3 \theta &= \frac{1}{4} \text{sen} 2\theta - \frac{1}{8} \text{sen} 4\theta \\ \cos \theta \text{sen}^4 \theta &= \frac{1}{8} \cos \theta - \frac{3}{16} \cos 3\theta + \frac{1}{16} \cos 5\theta \\ \cos \theta \text{sen}^5 \theta &= \frac{5}{32} \text{sen} 2\theta - \frac{1}{8} \text{sen} 4\theta + \frac{1}{32} \text{sen} 6\theta \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Obtenemos la nueva expresión para la energía cinética del sistema.

$$T = \frac{1}{2} J(\theta) \dot{\theta}^2 \quad (\text{B.14})$$

En las relaciones trigonométricas (B.13) se tienen términos armónicos hasta de orden 6, a consecuencia de estos componentes armónicos aparecen los coeficientes $a_n^{(1)}$ y $b_n^{(1)}$ que son los coeficientes coseno y seno armónico respectivamente.

De la expresión (B.14) se define al término $J(\theta)$ como el momento de inercia reducido al eje cigüeñal que tiene la siguiente forma:

$$J_i(\theta) = J_o + \sum_{n=1}^6 [a_n^{(1)} \cos(n\theta) + b_n^{(1)} \text{sen}(n\theta)] \quad (\text{B.15})$$

Donde el término constante J_o de esta última expresión viene dado por:

$$J_o = J_D + J_b \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} \right) + m_b \left[r^2 + X_G^2 \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} \right) \right] - \\ m_b \left[2r X_G \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda^4}{64} \right) \lambda \right] + m_p \left(\frac{r^2}{2} + \frac{\lambda^4 L^2}{8} + \frac{\lambda^6 L^2}{16} \right) \quad (\text{B.16})$$

De acuerdo con la configuración que se muestra en la figura 2.1 se pueden definir las siguientes inercias, considerando además que $\theta = \omega t$.

$$\bar{J}_1(\omega t) = J_o + \sum_{n=1}^6 [a_n^{(1)} \cos(n\omega t) + b_n^{(1)} \text{sen}(n\omega t)] \quad (\text{B.17})$$

$$\bar{J}_2(\omega t) = J_o + \sum_{n=1}^6 [a_n^{(1)} \cos n(\omega t - 2\pi) + b_n^{(1)} \text{sen} n(\omega t - 2\pi)]$$

Los coeficientes $a_n^{(1)}$ coseno armónicos están definidos mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 a_1^{(1)} &= m_b r X_G \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} \right) + m_p r L \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} \right) \\
 a_2^{(1)} &= J_b \frac{\lambda^2}{2} + \frac{m_b \lambda^2 X_G^2}{2} - m_b r X_G \lambda - \frac{1}{64} m_b r X_G \lambda^5 - m_p \left(\frac{r^2}{2} + \frac{\lambda^6 L^2}{32} \right) \\
 a_3^{(1)} &= m_b r X_G \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{3\lambda^4}{16} \right) + m_p r L \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{3\lambda^4}{16} \right) \\
 a_4^{(1)} &= J_b \frac{\lambda^4}{8} + \frac{m_b \lambda^4 X_G^2}{8} + \frac{1}{32} m_b r X_G \lambda^5 + m_p L^2 \left(\frac{\lambda^4}{8} + \frac{\lambda^6}{16} \right) \\
 a_5^{(1)} &= \frac{1}{16} m_b r X_G \lambda^4 + \frac{m_p r L \lambda^4}{16} \quad ; \quad a_6^{(1)} = \frac{1}{64} m_b r X_G \lambda^5 + \frac{m_p L^2 \lambda^6}{32} \quad (B.18)
 \end{aligned}$$

Los coeficientes $b_n^{(1)}$ seno armónicos están definidos mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 b_1^{(1)} &= m_b r e \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{8} \right) \quad ; \quad b_2^{(1)} = m_b r e \left(\lambda + \frac{5\lambda^5}{64} \right) \\
 b_3^{(1)} &= m_b r X_G \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{3\lambda^4}{16} \right) + m_p r L \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{3\lambda^4}{16} \right) \quad (B.19) \\
 b_4^{(1)} &= m_b r e \frac{\lambda^5}{16} \quad ; \quad b_5^{(1)} = m_b r e \frac{\lambda^4}{16} \quad ; \quad b_6^{(1)} = m_b r e \frac{\lambda^5}{64}
 \end{aligned}$$

Al observar los coeficientes $b_n^{(1)}$ seno armónicos se ve que la mayoría de estos toman el valor de cero debido a que no se considera la distancia “e” perpendicular al eje longitudinal de la biela descrito en el modelo presentado en el capítulo 1, para este modelo se ubicó el centro de gravedad en el eje longitudinal.

Las ecuaciones (B.17) presentan un término constante y una sumatoria que depende del ángulo del cigüeñal y por ende del tiempo, lo que hace necesario expresar ecuaciones que deriven de éstas, las cuales influirán en la matriz de rigidez y en el vector de torques actuantes sobre el sistema. La influencia de las inercias sobre el vector de torques considerando la velocidad del motor ω constante viene dado por:

$$\bar{J}_{1,1} = \sum_{n=1}^6 [-n a_n^{(1)} \text{sen}(n\omega t) + n b_n^{(1)} \text{cos}(n\omega t)] \quad (\text{B.20})$$

$$\bar{J}_{2,2} = \sum_{n=1}^6 [-n a_n^{(1)} \text{sen } n(\omega t - 2\pi) + n b_n^{(1)} \text{cos } n(\omega t - 2\pi)]$$

De la misma manera, la influencia de las inercias del sistema sobre la matriz de rigidez viene dado por:

$$\bar{J}_{1,11} = -\sum_{n=1}^6 [n^2 a_n^{(1)} \text{cos}(n\omega t) + n^2 b_n^{(1)} \text{sen}(n\omega t)] \quad (\text{B.21})$$

$$\bar{J}_{2,22} = -\sum_{n=1}^6 [n^2 a_n^{(1)} \text{cos } n(\omega t - 2\pi) + n^2 b_n^{(1)} \text{sen } n(\omega t - 2\pi)]$$

La ecuación diferencial matricial que describe el comportamiento del sistema viene dada por la expresión:

$$J(\omega t) \cdot \ddot{q} + K(\omega t) \cdot q = T(\omega t) \quad (\text{B.22})$$

Donde la matriz de inercia $J(\omega t)$ está dada por:

$$J(\omega t) = \begin{bmatrix} \bar{J}_1(\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{J}_2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

La matriz de rigidez $K(\omega t)$ está dada por:

$$K(\omega t) = \begin{bmatrix} k_1 + \frac{\omega^2}{2} \bar{J}_{1,11} - \bar{T}_{1,1} & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + \frac{\omega^2}{2} \bar{J}_{2,22} - \bar{T}_{2,2} & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

En esta última matriz de rigidez se tiene la influencia de los pares de torsión $\bar{T}_{1,1}$ y $\bar{T}_{2,2}$ de cada cilindro del motor que será desarrollado en el siguiente capítulo de esta tesis.

El vector de pares de torsión actuantes sobre el sistema viene dado por:

$$T(\omega t) = \begin{Bmatrix} T_1(\omega t) \\ T_2(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

Donde los pares de torsión en cada cilindro viene dado por:

$$\begin{aligned} T_1(\omega t) &= T_{21-1,1}(\omega t) - \frac{1}{2} \omega^2 \bar{J}_{1,1}(\omega t) \\ T_2(\omega t) &= T_{21-2,2}(\omega t) - \frac{1}{2} \omega^2 \bar{J}_{2,2}(\omega t) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Como se indicó, en las últimas ecuaciones se puede ver la influencia del momento de inercia del sistema en el vector de pares de torsión.

ANEXO C: DESARROLLO DEL MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO DEL TORQUE DE EXCITACIÓN

El torque de excitación en una máquina recíprocante como es el caso de un motor de combustión interna está influenciado principalmente por la presión del gas en el proceso de la combustión y las inercias que giran alrededor del eje cigüeñal. Para obtener el torque de excitación debido a la presión de los gases de la combustión se realizara una análisis cinemático al mecanismo biela – manivela.

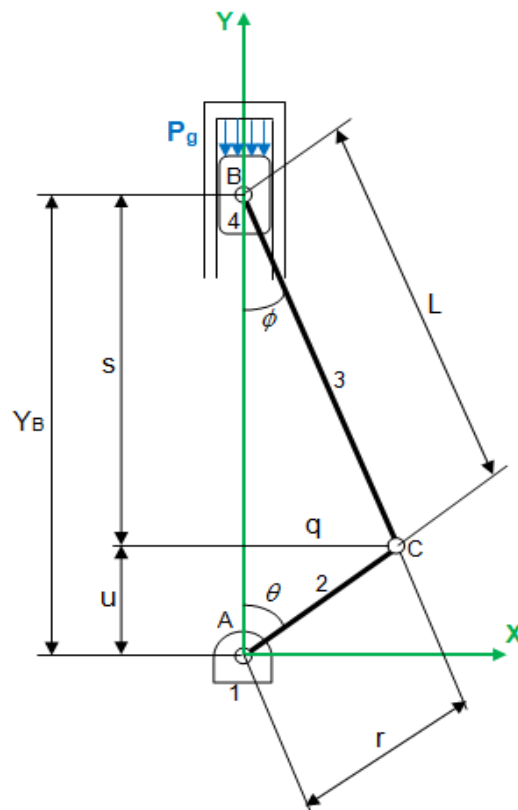


Figura C.1: Esquema de un Sistema biela – manivela.

De la figura C.1 se puede deducir que:

$$q = r \operatorname{sen} \theta = L \operatorname{sen} \phi, \text{ recordando además que } \theta = \omega t$$

Relacionando $\text{sen } \phi = \frac{r}{L} \text{sen } \omega t \Rightarrow \text{sen } \phi = \lambda \text{sen } \omega t$

Además: $s = r \cos \omega t$; $u = L \cos \phi$

La distancia desde A hasta B está dada por:

$$Y_B = s + u \Rightarrow Y_B = r \cos \omega t + L \cos \phi \quad (\text{C.1})$$

Es importante tener una relación entre el ángulo de cigüeñal θ y el ángulo de biela ϕ

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \phi} = \sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2 \omega t} \quad (\text{C.2})$$

La ecuación (C.1) quedará de la siguiente manera:

$$Y_B = r \cos \omega t + L \sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2 \omega t} \quad (\text{C.3})$$

Para obtener la velocidad y aceleración del punto B es necesario diferenciar la expresión (C.1) hasta dos veces.

$$V_B = \dot{Y}_B = -r \omega \left[\text{sen } \omega t + \frac{\lambda}{2} \frac{\text{sen } 2\omega t}{\sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2 \omega t}} \right] \quad (\text{C.4})$$

$$a_B = \ddot{Y}_B = -r \omega^2 \left[\cos \omega t - \frac{r \left(L^2 (1 - 2 \cos^2 \omega t) - r^2 \text{sen}^4 \omega t \right)}{L \sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2 \omega t}} \right] \quad (\text{C.5})$$

Con la finalidad de eliminar las expresiones radicales de las ecuaciones (C.4) y (C.5) que son muy amplias y difíciles de analizar utilizaremos el Teorema Binominal donde:

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2 \omega t} \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \text{sen}^2 \omega t \quad (\text{C.6})$$

Se considera además la siguiente relación trigonométrica:

$$\text{sen}^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$$

Redefiniendo las expresiones para el desplazamiento, velocidad y aceleración respectivamente se tiene:

$$Y_B = L - r \frac{\lambda}{4} + r \left[\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right] \quad (\text{C.7})$$

$$V_B = -r \omega \left[\text{sen } \omega t + \frac{\lambda}{2} \text{sen } 2\omega t \right] \quad (\text{C.8})$$

$$a_B = -r \omega^2 \left[\cos \omega t - \lambda \cos 2\omega t \right] \quad (\text{C.9})$$

Como se aprecia en la figura C.1 no se considera aun la masa del contrapeso del cigüeñal debido a que como se mencionó líneas arriba se hará un primer análisis del sistema considerando únicamente la influencia de la presión de los gases de la combustión en el mecanismo. La fuerza originada por la presión de los gases de la combustión es función del ángulo de cigüeñal $\theta = \omega t$ y está definida por la termodinámica del motor, por lo que se trabaja con la curva de presión de los gases de combustión característica; se considera negativa por la orientación elegida para el sistema y está definida por:

$$F_g = -P_g(\theta) A_p \quad (\text{C.10})$$

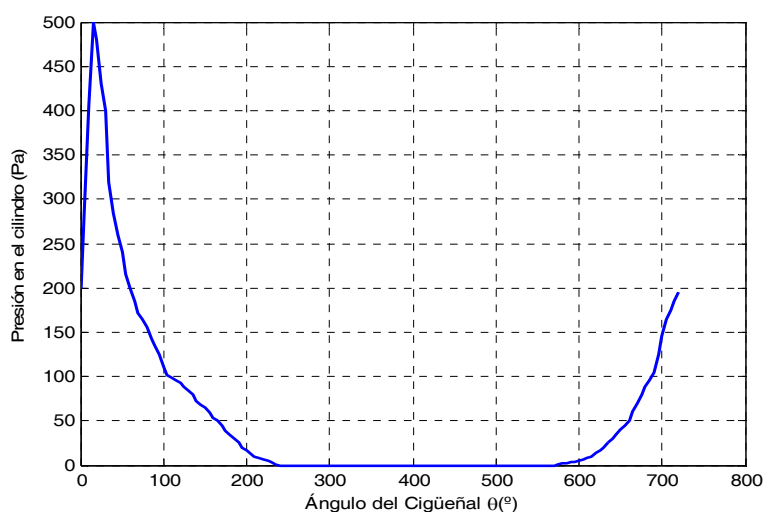


Figura C.2: Curva de presión de los gases de combustión característico de un motor de combustión interna de 4 tiempos.

A continuación se descompone el mecanismo biela – manivela para realizar un análisis dinámico.

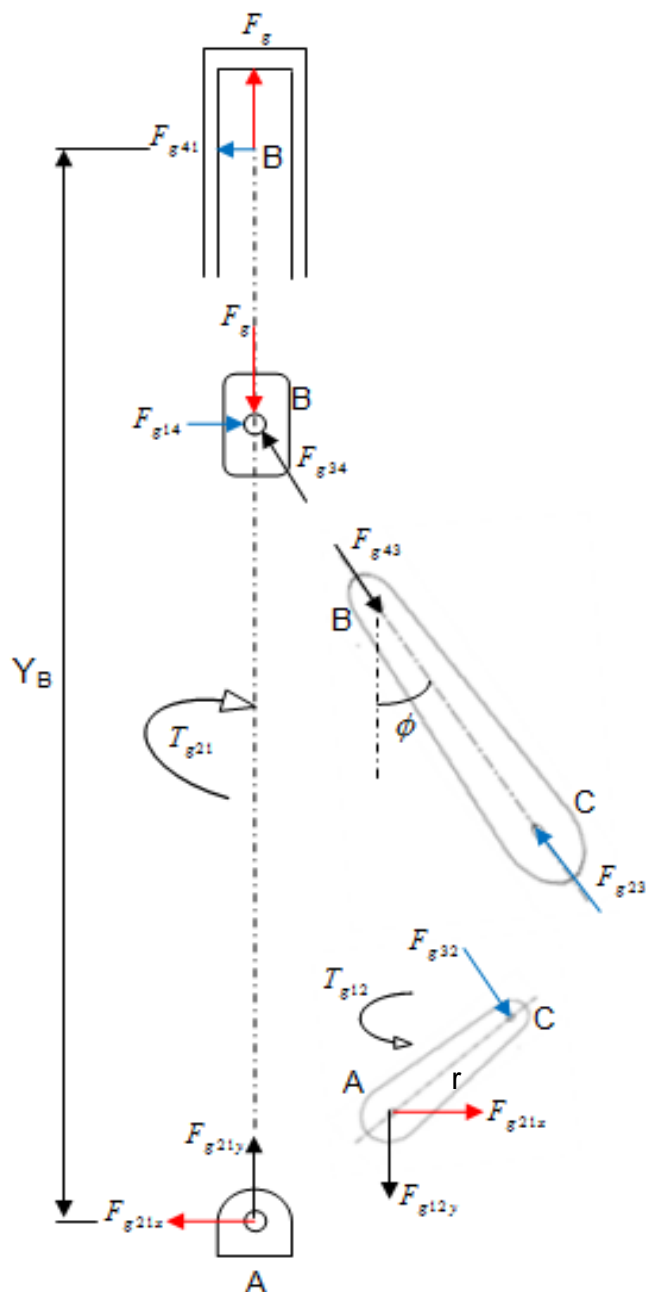


Figura C.2: Diagramas de cuerpo libre de el mecanismo biela – manivela. Fuerzas originadas por la presión de los gases de la combustión.

El torque debido al gas de la figura C.2 se origina a consecuencia de la fuerza del gas que actúa en un brazo de momento con respecto al centro del cigüeñal en el punto A. Este brazo de momento varía desde cero hasta un valor máximo según gire el cigüeñal. Como se observa en la figura C.2 el sistema de fuerzas concurrentes en el punto B está dada por:

$$F_{g14} = F_g \tan \phi \hat{j} \quad (C.11)$$

$$F_{g34} = -F_g \hat{i} - F_g \tan \phi \hat{j}$$

Adicionalmente a las fuerzas concurrentes en el punto B el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura C.2 nos da las siguientes relaciones:

$$F_{g41} = -F_{g14} \quad ; \quad F_{g43} = -F_{g34}$$

$$F_{g23} = -F_{g43} \quad ; \quad F_{g32} = -F_{g23} \quad (C.12)$$

$$F_{g32} = -F_{g34} = F_g \hat{i} + F_g \tan \phi \hat{j}$$

El torque motriz T_{g12} en el cigüeñal generado por la fuerza del gas puede determinarse mediante el producto vectorial:

$$T_{g12} = r \times F_{g32} \quad (C.13)$$

El torque de reacción T_{g21} que corresponde a la fuerza del gas que intenta oscilar en el plano de la bancada se denota por:

$$T_{g21} = F_{g41} Y_B \hat{k} \quad (C.14)$$

Si relacionamos las expresiones (C.13) y (C.14), observando además la figura C.2 nos daremos cuenta que el torque motriz T_{g12} es el negativo del torque de reacción

$$T_{g21} \cdot$$

$$T_{g21} = -T_{g12} \Rightarrow T_{g21} = -F_{g41} Y_B \hat{k} \quad (C.15)$$

Además: $F_{g14} = -F_{g41}$, de modo que:

$$T_{g21} = F_{g14} Y_B \hat{k} \quad (C.16)$$

La expresión (C.16) contiene al desplazamiento del punto B para el cual ya se determinó su expresión correspondiente (C.7), el torque motriz queda denotado de la siguiente manera:

$$T_{g21} = F_g \tan \phi \left[L - r \frac{\lambda}{4} + r \left[\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right] \right] \hat{k} \quad (C.17)$$

En la ecuación (C.17) se tiene al ángulo de biela ϕ , si observamos la figura C.1 deduciremos que:

$$\tan \phi = \frac{q}{u} = \frac{r \operatorname{sen} \omega t}{L \cos \phi} \Rightarrow \tan \phi = \frac{r \operatorname{sen} \omega t}{L \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \omega t}} \quad (C.18)$$

Mediante la expresión binominal (B.9) podemos deducir que:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \omega t}} \approx 1 + \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sen}^2 \omega t \quad (C.19)$$

La expresión (C.18) queda expresada como:

$$\tan \phi = \lambda \operatorname{sen} \omega t \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sen}^2 \omega t \right) \quad (C.20)$$

Reemplazando (C.20) en la ecuación (C.17) se obtiene:

$$T_{g21} = F_g \left[\lambda \operatorname{sen} \omega t \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sen}^2 \omega t \right) \right] \left[L - r \frac{\lambda}{4} + r \left[\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right] \right] \hat{k} \quad (C.21)$$

Aplicando una vez más el teorema binominal (B.9) reducimos la ecuación (C.21) a la siguiente expresión:

$$T_{g21} = F_g [r \operatorname{sen} \omega t (1 + \lambda \cos \omega t)] \hat{k} \quad (\text{C.22})$$

$$T_{g21} = -P_g(\theta) A_p [r \operatorname{sen} \omega t (1 + \lambda \cos \omega t)] \hat{k}$$

Las dos últimas ecuaciones expresan la influencia de la presión de los gases de la combustión sobre el mecanismo biela – manivela de un solo cilindro, pero nuestro motor es bicilíndrico por lo que se tendrá un par de torsión de gas combinado.

El torque debido a los gases combinado de los dos cilindros es la suma de las contribuciones de cada uno de los cilindros con cada fase desplazada en su ángulo de carrera de potencia ψ . Los ángulos de carrera de potencia ψ_i son los ángulos en los cuales se tiene la combustión en el cilindro y están definidos por el ángulo de fase del cigüeñal y el orden de encendido del motor. El ángulo de carrera de potencia para un motor de 4 tiempos está dado por.

$$\Delta\psi = \frac{720^\circ}{i} \quad (\text{C.23})$$

Donde i es el número de cilindros del motor.

El torque debido a los gases combinado está dado por:

$$T_{g21} = F_g r \sum_{i=1}^n [\operatorname{sen}(\omega t - \psi_i) [1 + \lambda \cos(\omega t - \psi_i)]] \hat{k} \quad (\text{C.24})$$

$$T_{g21} = -P_g(\theta) A_p r \sum_{i=1}^n [\operatorname{sen}(\omega t - \psi_i) [1 + \lambda \cos(\omega t - \psi_i)]] \hat{k}$$

Los valores de ψ_i serán 720° y 360° respectivamente para el primer y segundo cilindro del motor. El torque de excitación total está influenciado también por las inercias que están en el sistema para el cual se desarrollará el siguiente análisis.

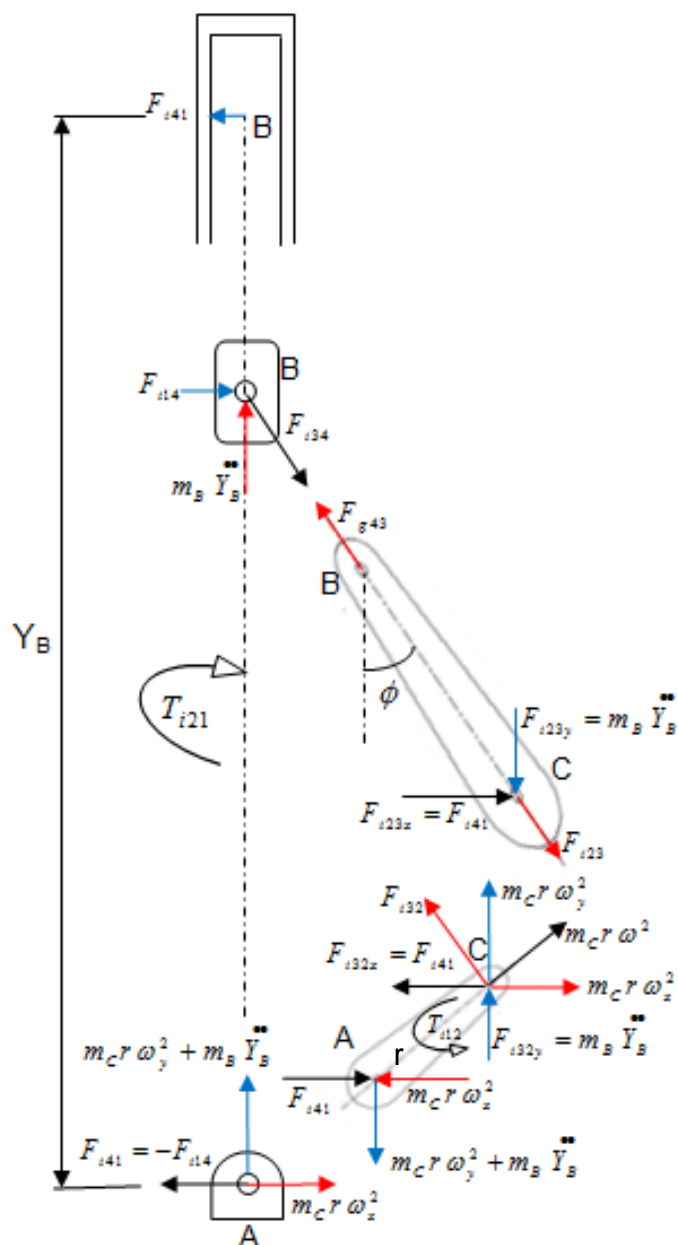


Figura C.3: Diagramas de cuerpo libre de el mecanismo biela – manivela. Fuerzas originadas por las inercias del mecanismo en movimiento.

El vector posición del punto C está dado por:

$$R_c = r \operatorname{sen} \omega t \hat{i} + r \cos \omega t \hat{j} \quad (\text{C.25})$$

La aceleración de este punto C es la siguiente expresión:

$$a_c = -r \omega^2 \operatorname{sen} \omega t \hat{i} - r \omega^2 \cos \omega t \hat{j} \quad (\text{C.26})$$

La fuerza de inercia total en el mecanismo es la suma de la fuerza centrífuga en el punto C y la fuerza de inercia en el punto B.

$$F_i = -m_c a_c - m_B a_B \quad (\text{C.27})$$

Las componentes de esta fuerza de inercia quedan expresadas como:

$$F_{iy} = -m_c (-r \omega^2 \cos \omega t) - m_B \ddot{Y}_B \quad (\text{C.28})$$

$$F_{ix} = -m_c (-r \omega^2 \operatorname{sen} \omega t)$$

Si reemplazamos la expresión (C.9) para \ddot{Y}_B las dos últimas ecuaciones quedan expresadas como:

$$F_{iy} = -m_c (-r \omega^2 \cos \omega t) - m_B [-r \omega^2 [\cos \omega t - \lambda \cos 2\omega t]] \quad (\text{C.29})$$

$$F_{ix} = -m_c (-r \omega^2 \operatorname{sen} \omega t)$$

El interés de realizar un análisis dinámico del mecanismo biela – manivela recae específicamente en saber cuál es el torque debido a las inercias, por lo que si observamos la figura C.3 podremos deducir que:

$$T_{i21} = F_{i41} Y_B \hat{k} = -F_{i14} Y_B \hat{k} \quad (\text{C.30})$$

Reemplazando con los valores que se observan en la figura C.3 y la expresión (C.7) de Y_B podemos reescribir la expresión (C.29) como:

$$T_{i21} = - \left(-m_B \ddot{Y}_B \tan \phi \right) \left[L - r \frac{\lambda}{4} + r \left[\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right] \right] \hat{k} \quad (\text{C.31})$$

Al reemplazar con las expresiones para \ddot{Y}_B y $\tan \phi$ anteriormente determinadas se tendrá una nueva expresión bastante larga:

$$T_{i21} = (m_B) \left[-r \omega^2 \left[\cos \omega t - \lambda \cos 2\omega t \right] \right] \left[\lambda \operatorname{sen} \omega t \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sen}^2 \omega t \right) \right] * \dots \quad (\text{C.32})$$

$$\left[L - r \frac{\lambda}{4} + r \left[\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right] \right] \hat{k}$$

Optaremos una vez más por usar el teorema binominal para reducir términos cuadráticos que contengan a la relación λ para simplificar la ecuación:

$$T_{i21} = -m_B r \omega^2 \operatorname{sen} \omega t \left(\frac{\lambda}{2} \operatorname{sen} \omega t - \operatorname{sen} 2\omega t - \frac{3}{2} \lambda \operatorname{sen} 3\omega t \right) \hat{k} \quad (\text{C.33})$$

Usando algunas relaciones trigonométricas como:

$$2 \operatorname{sen} \omega t \cos 2\omega t = \operatorname{sen} 3\omega t - \operatorname{sen} \omega t$$

$$2 \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t = \operatorname{sen} 2\omega t$$

Se obtiene una nueva expresión para el torque debido a las inercias:

$$T_{i21} = \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \left(\frac{\lambda}{2} \operatorname{sen} \omega t - \operatorname{sen} 2\omega t - \frac{3}{2} \lambda \operatorname{sen} 3\omega t \right) \hat{k} \quad (\text{C.34})$$

Es importante mencionar que esta última expresión para el torque debido a las inercias presenta términos armónicos, siendo el término con el segundo armónico el más dominante en la expresión por no estar afectada por la relación λ que es siempre menor a la unidad.

El torque debido a las inercias determinado es del análisis de un solo cilindro, de la misma manera que para el torque debido a los gases, el torque debido a las inercias combinado para ambos cilindros se obtendrá de la contribución de cada uno de los cilindros afectada además por el ángulo de fase del cigüeñal ϕ .

$$T_{i21} = \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{2} \text{sen}(\omega t - \phi_i) - \text{sen} 2(\omega t - \phi_i) - \frac{3}{2} \lambda \text{sen} 3(\omega t - \phi_i) \right) \hat{k} \quad (\text{C.35})$$

Los ángulos de fase del cigüeñal ϕ_i son los ángulos a los cuales están dispuestos los codos de biela en un eje cigüeñal, que para un motor de 4 tiempos está dado por la siguiente expresión, donde i es el número de cilindros del motor.

$$\Delta\phi = \frac{720^\circ}{i} \quad (\text{C.36})$$

Para obtener el torque de excitación total debido a la presión de los gases y las inercias en movimiento será necesario sumar las ecuaciones (C.21) y (C.32), que luego de agrupar términos tendremos como expresión:

$$T_{21} = (F_g + m_B \ddot{Y}_B) \left[\lambda \text{sen} \omega t \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \text{sen}^2 \omega t \right) \right] * \dots \quad (\text{C.37})$$

$$\left[L - r \frac{\lambda}{4} + r \left[\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right] \right] \hat{k}$$

Para reducir esta ecuación recurriremos al teorema binominal:

$$T_{21} = (F_g r + m_B \ddot{Y}_B) [\text{sen} \omega t (1 + \lambda \cos \omega t)] \hat{k} \quad (\text{C.38})$$

La ultima ecuación obtenida expresa el torque de excitación total que actúa en el mecanismo biela – manivela de un solo cilindro. Para un motor bicilíndrico el torque de excitación total combinado para ambos cilindros viene dado por:

$$T_{21} = \left[-P_g(\theta) A_p r + m_B \left[-r \omega^2 (\cos \omega t - \lambda \cos 2\omega t) \right] \right] * \dots \quad (C.39)$$

$$\sum_{i=1}^n [\text{sen}(\omega t - \phi_i) [1 + \lambda \cos(\omega t - \phi_i)]] \hat{k}$$

Es importante mencionar que para poder relacionar las contribuciones de los pares de torsión combinados de la presión de los gases de la combustión y las inercias en movimiento se tuvo que ver una relación entre el ángulo de carrera de potencia ψ y el ángulo de fase ϕ , que para este caso toman el mismo valor debido a que el orden de encendido del motor que define el ángulo de carrera de potencia coincide con el ángulo de fase del cigüeñal.

Al graficar la expresión (C.39) en función del ángulo de cigüeñal se tiene una función periódica como la que se muestra en la figura C.4 la cual puede ser desarrollada con mucha aproximación mediante las series de Fourier.

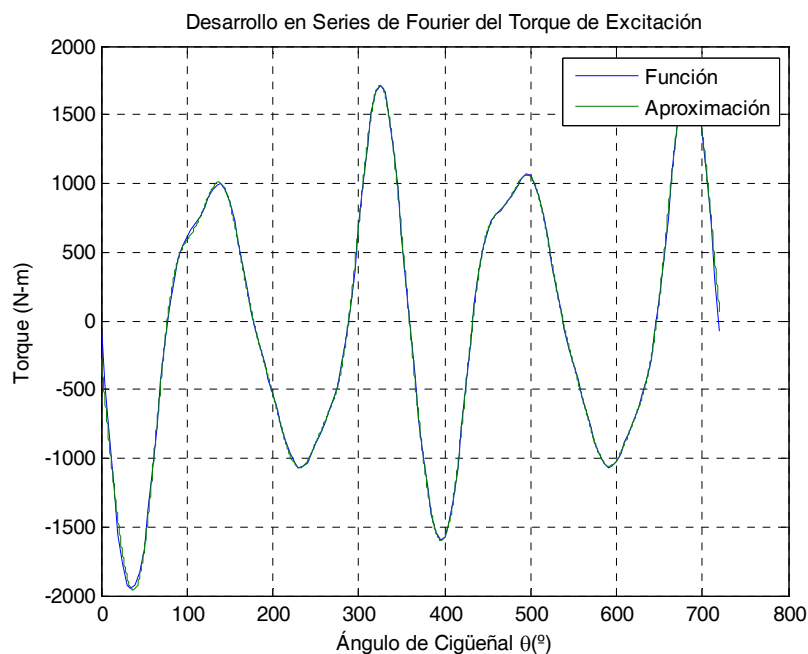


Figura C.4: Torque de excitación como función periódica para una velocidad del motor de 2200 rpm.

La expresión matemática en Series de Fourier que describe la función periódica mostrada es entonces:

$$T_{21-i}(\omega t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \text{sen}(n\omega t)] \hat{k} \Rightarrow \text{para } (i=1,2) \quad (\text{C.40})$$

Al derivar la expresión (C.40) respecto al ángulo $\theta = \omega t$ se tendrá las siguientes expresiones:

$$T_{21-i,i}(\omega t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n [A_n \text{sen}(n\omega t) - B_n \cos(n\omega t)] \hat{k} \Rightarrow \text{para } (i=1,2) \quad (\text{C.41})$$

La ecuación (C.41) expresa como el par de torsión influye en la rigidez del sistema, tal y como se expresó en el acápite anterior donde se desarrolló la matriz de rigidez del eje cigüeñal de dos cilindros.

**ANEXO D: MÉTODO MODAL PARA EL CÁLCULO DE LAS FRECUENCIAS
NATURALES Y MODOS DE VIBRACIÓN TORSIONAL**

A continuación se muestra el sistema de ecuaciones que describen el movimiento de nuestro sistema torsional:

$$[I] \cdot \{\ddot{\phi}\} + [D] \cdot \{\dot{\phi}\} + [K] \cdot \{\phi\} = \{T(t)\} \quad (D.1)$$

Donde:

$[I]$ = Matriz Diagonal de inercias polares.

$[D]$ = Matriz Diagonal de amortiguamiento.

$[K]$ = Matriz Diagonal de rigidez.

$\{T(t)\}$ = Vector de torques externos.

El vector de desplazamiento angular $\{\phi\}$ puede también ser expresado en función de la matriz modal de vectores propios $[P]$ y el vector de coordenadas generalizadas $\{q\}$, de la siguiente manera:

$$\{\phi\} = [P] \cdot \{q\} \quad (D.2)$$

La matriz modal de vectores propios $[P]$ tiene la forma:

$$[P] = [\{\phi_1(x)\}, \{\phi_2(x)\}, \dots, \{\phi_r(x)\}] \quad (D.3)$$

Sustituyendo la ecuación 1.63 en la ecuación (D.2), se obtiene:

$$[DI] \cdot \{\ddot{q}\} + [DD] \cdot \{\dot{q}\} + [DK] \cdot \{q\} = \{\bar{T}\} \quad (D.4)$$

Donde:

$$[DI] = [P]^T [I] [P] = \text{Matriz Modal Diagonal de inercia.}$$

$$[DD] = [P]^T [D] [P] = \text{Matriz Modal de amortiguamiento transversal acoplada.}$$

$$[DK] = [P]^T [K] [P] = \text{Matriz Modal Diagonal de rigidez.}$$

$$\{\bar{T}\} = \text{Vector Modal de torques externos.}$$

Las frecuencias y modos amortiguados se hallan considerando el vector de torques externos igual a cero.

$$[DI] \cdot \{\ddot{q}\} + [DD] \cdot \{\dot{q}\} + [DK] \cdot \{q\} = 0 \quad (\text{D.5})$$

Para linealizar la ecuación (D.5) específicamente para desaparecer el término $\{\ddot{q}\}$, hacemos el siguiente cambio de variable.

$$\{\dot{q}\} = \{v\} \quad (\text{D.6})$$

Combinando las ecuaciones (D.6) y (D.5), obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} \dot{q} \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & [i] \\ -[DI]^{-1}[DK] & -[DI]^{-1}[DD] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ v \end{Bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

Donde $[i]$ es la matriz identidad, y asumiendo la solución al sistema de ecuaciones de la forma:

$$\{q\} = \{\psi\} \cdot e^{st} \quad (\text{D.8})$$

Donde los autovectores o modos de vibración torsional $\{\psi\}$ y los autovalores o frecuencias naturales s son complejos.

$$\{\dot{q}\} = s \cdot \{\psi\} \cdot e^{st} \quad (\text{D.9})$$

$$\{\dot{v}\} = s \cdot \{\varphi\} \cdot e^{st} \quad (\text{D.10})$$

Donde $\{\varphi\} = s \cdot \{\psi\}$

Por lo tanto la ecuación (D.7) queda transformada de la forma:

$$s \cdot \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & [i] \\ -[DI]^{-1}[DK] & -[DI]^{-1}[DD] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

La ecuación (D.11) puede resolverse utilizando la librería de un programa de cálculo numérico computacional como el MATLAB.

ANEXO E: DESARROLLO DEL MODELO MECÁNICO - MATEMÁTICO DE UN ABSORSOR DE VIBRACIONES TORSIONALES VISCOSO

En un sistema rotativo con masas reciprocantes tal como el de un motor de combustión interna, las frecuencias perturbadoras para oscilaciones torsionales, son proporcionales a la velocidad de rotación del motor. Sin embargo es muy común que en estos sistemas se tenga más de una frecuencia perturbadora dominante; es aquí donde el absorsor pendular centrífugo tiene la desventaja de que deben utilizarse varios péndulos sintonizados a las frecuencias perturbadoras dominantes.

En contraste con el péndulo centrífugo, el absorsor torsional viscoso no se tiene que sintonizar a ninguna frecuencia perturbadora ya que es efectiva sobre un amplio rango de operación. Consta de una inercia en rotacional libre, dentro de una cavidad cilíndrica ya sea ubicada en la volante del eje cigüeñal en la polea terminal al otro lado del eje cigüeñal que conduce la correa del ventilado, tal como se muestra en la siguiente figura E.1.

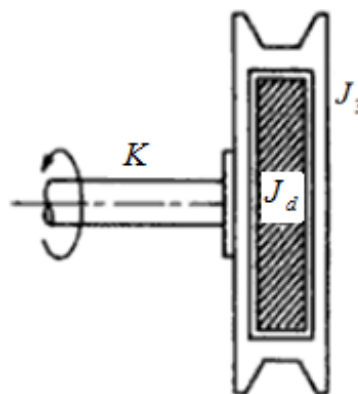


Figura E.1. Absorsor Torsional Viscoso de Houde [2].

Para describir el comportamiento del absorbente torsional viscoso se puede utilizar un sistema de dos grados de libertad, considerando al cigüeñal como fijo en un extremo y conectado al absorbente en el otro extremo. La excitación que se le da al absorbente viscoso puede considerarse en primera instancia como un torque armónico aunque en motores de combustión interna es más apropiado considerar que el torque de excitación es periódico.

El Torque originado dentro del absorbente viscoso resulta de la viscosidad del fluido dentro de la cavidad cilíndrica, la cual se considera como proporcional a la velocidad de rotación relativa entre la polea o la volante y la inercia con rotación libre dentro de la cavidad cilíndrica. Aplicando cualquiera de los métodos para la determinación de las ecuaciones de movimiento de un sistema de más de un grado de libertad, con excitación armónica, llegaremos a:

$$J\ddot{\theta} + K\theta + C(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) = T_o e^{i\omega t} \quad (\text{E.1})$$

$$J_d \ddot{\varphi} + C(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) = 0$$

Se pueden dar soluciones de la forma:

$$\theta = \theta_o e^{i\omega t} \quad (\text{E.2})$$

$$\varphi = \varphi_o e^{i\omega t}$$

Donde θ_o y φ_o son amplitudes complejas de cada grado de libertad definido.

Sustituyendo las ecuaciones (E.2) en (E.1), tenemos:

$$\left[\left(\frac{K}{J} - \omega^2 \right) + \frac{iC\omega}{J} \right] \theta_o - \frac{iC\omega}{J} \varphi_o = \frac{M_o}{J}$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{iC\omega}{J_d} \right) \varphi_o = \frac{iC\omega}{J_d} \theta_o$$
(E.3)

Eliminando φ_o entre las dos ecuaciones, la expresión para la amplitud θ_o de la polea resulta:

$$\frac{\theta_o}{M_o} = \frac{(\omega^2 J_d - iC\omega)}{\left[\omega^2 J_d (K - J\omega^2) \right] + iC\omega \left[\omega^2 J_d - (K - J\omega^2) \right]}$$
(E.4)

Haciendo: $\omega_n^2 = \frac{K}{J}$ y $\mu = \frac{J_d}{J}$, el amortiguamiento crítico viene dado por:

$$C_c = 2J\omega_n \Rightarrow C = \frac{C}{C_c} 2J\omega_n = 2\xi J\omega_n$$
(E.5)

La ecuación de la amplitud es entonces:

$$\left| \frac{K\theta_o}{M_o} \right| = \sqrt{\frac{\mu^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + 4\xi^2}{\mu^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + 4\xi^2 \left[\mu \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) \right]^2}}$$
(E.6)

Esta última expresión nos indica que es función de parámetros ξ, μ y $\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$.

Al mantener la relación μ constante y graficar $\left| \frac{K\theta_o}{M_o} \right|$ en función de $\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$, la curva para cualquier factor de amortiguamiento ξ será similar a la curva que se obtiene al analizar un sistema con un solo grado de libertad con un solo pico.

Cuando $\xi = 0$ tenemos un sistema no amortiguado con frecuencia de resonancia

$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$ y la amplitud será infinita a esta frecuencia. Si $\xi = \infty$, la masa del disipador

y la rueda se moverán juntas como una sola masa y una vez se tiene un sistema con

un solo grado de libertad pero con frecuencia natural $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J + J_d}}$.

Existe un factor de amortiguamiento óptimo ξ_o para el cual la amplitud pico es un mínimo así como se muestra en la figura E.2.

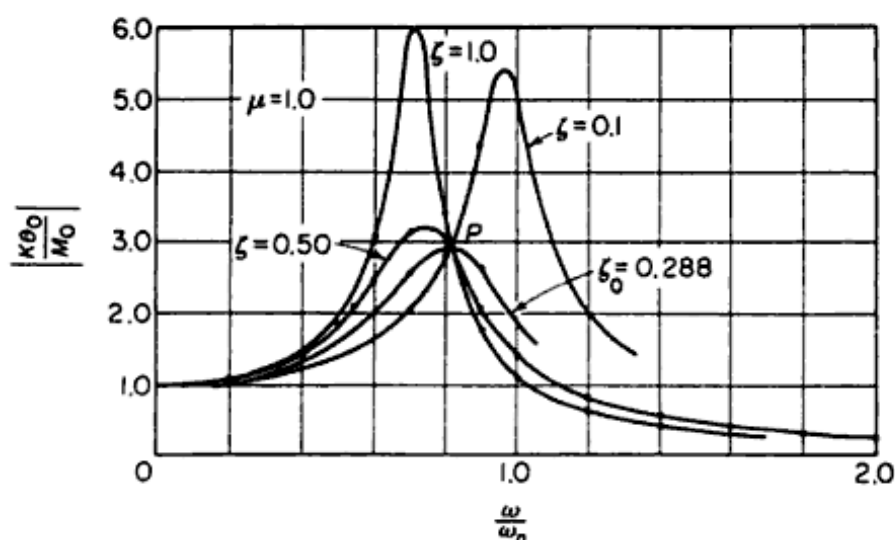


Figura E.2. Respuesta del Absorber Torsional Viscoso de Houde [3].

Igualando las ecuaciones de $\left| \frac{K\theta_o}{M_o} \right|$, para $\xi = 0$ y $\xi = \infty$, la amplitud pico para el

amortiguamiento óptimo se produce a una frecuencia igual a:

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{\frac{2}{2 + \mu}} \quad (E.7)$$

Se puede observar que en la figura E.2 todas las curvas pasan por un único punto P, sin importar los valores numéricos de ξ . La curva de amortiguamiento óptima debe pasar por P con pendiente cero, sustituyendo la ecuación (E.7) en la derivada de la ecuación (E.6) igualada a cero se obtendrá el resultado de $\left| \frac{K\theta_o}{M_o} \right|$ que puede presentarse como un gráfico de los valores pico en función de ξ para cualquier valor de la relación μ , como se muestra en la figura E.3.

$$\xi_o = \frac{\mu}{\sqrt{2(1+\mu)(2+\mu)}} \quad (\text{E.8})$$

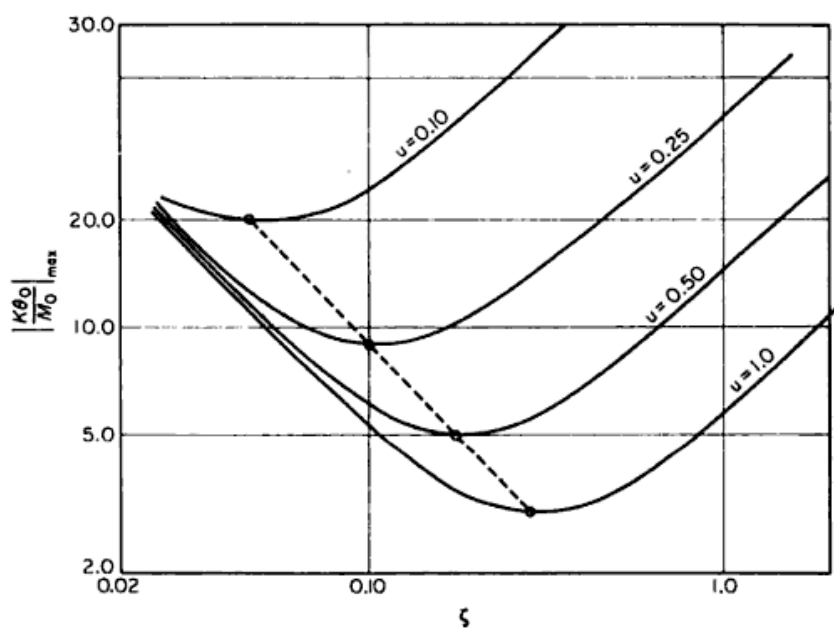


Figura E.3. Respuesta del Absorber Torsional Viscoso de Houde en función del factor de amortiguamiento ξ con μ constante [3].

ANEXO F: COEFICIENTES ARMÓNICOS DE FOURIER (CAF)

F.1. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA 1000 RPM DE VELOCIDAD

Los coeficientes armónicos para los parámetros con comportamiento periódico se hallaron mediante el programa "vib3_3" implementada en un script del MATLAB

F.1.1. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO DEL 1º CILINDRO J_1

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO J_1	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
A1_0 = 0.019453452148966	
A1_1 = -0.000009957869477	B1_1 = 0.001191183709353*1.0e-003
A1_2 = 0.000392759498019	B1_2 = -0.014896965156318*1.0e-003
A1_3 = -0.000046593281339	B1_3 = 0.006819664286302*1.0e-003
A1_4 = -0.001615067968188	B1_4 = 0.147108814910913*1.0e-003
A1_5 = 0.000060483146394	B1_5 = 0.008589501808992*1.0e-003
A1_6 = 0.000486718954600	B1_6 = 0.355051803382899*1.0e-003

F.1.2. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO DEL 2º CILINDRO J_2

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO J_2	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
A2_0 = 0.019453452148966	
A2_1 = -0.000009957869477	B2_1 = 0.001191183709353*1.0e-003
A2_2 = 0.000392759498019	B2_2 = -0.014896965156318*1.0e-003
A2_3 = -0.000046593281339	B2_3 = 0.006819664286302*1.0e-003
A2_4 = -0.001615067968188	B2_4 = 0.147108814910913*1.0e-003
A2_5 = 0.000060483146394	B2_5 = 0.008589501808992*1.0e-003
A2_6 = 0.000486718954600	B2_6 = 0.355051803382899*1.0e-003

F.1.3. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL TORQUE EN EL 1º CILINDRO

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL TORQUE EN EL 1º CILINDRO	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
C1_0 = -67.940239850180930	
C1_1 = -54.992365513370807	D1_1 = -0.528409157565157*1.0e+002
C1_2 = -23.531415066238235	D1_2 = -0.504396663165589*1.0e+002
C1_3 = 1.877507901131777	D1_3 = -0.804032233316043*1.0e+002
C1_4 = -9.386251377162413	D1_4 = -2.977806315171503*1.0e+002
C1_5 = 9.362452821950935	D1_5 = -0.278983081725540*1.0e+002
C1_6 = -5.707492304011927	D1_6 = -1.121876892487518*1.0e+002
C1_7 = 7.490709814000952	D1_7 = -0.096684796720277*1.0e+002
C1_8 = -2.938932475071722	D1_8 = -0.465899370164055*1.0e+002
C1_9 = 7.244200248511526	D1_9 = -0.003699057041023*1.0e+002
C1_10 = 6.532241061102892	D1_10 = 0.008865409554748*1.0e+002
C1_11 = 5.989091527135505	D1_11 = 0.001882209150574*1.0e+002
C1_12 = -0.507143121535248	D1_12 = 0.178474553733947*1.0e+002

F.1.4. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL TORQUE EN EL 2º CILINDRO

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL TORQUE EN EL 2º CILINDRO	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
C2_0 = -65.054501123581218	
C2_1 = 52.818403937682170	D2_1 = 0.504447630908569*1.0e+002
C2_2 = -24.293584283206091	D2_2 = -0.504531858604739*1.0e+002
C2_3 = -0.766461194841660	D2_3 = 0.675931255316422*1.0e+002
C2_4 = -12.081489028044320	D2_4 = -3.006759597157723*1.0e+002
C2_5 = -6.772120295673223	D2_5 = 0.383038650769663*1.0e+002
C2_6 = -7.973844548545396	D2_6 = -1.149407007005560*1.0e+002
C2_7 = -4.580426421075859	D2_7 = 0.231521578241763*1.0e+002
C2_8 = -4.740780842441982	D2_8 = -0.493201438455097*1.0e+002
C2_9 = -3.470454967355785	D2_9 = 0.158223832599757*1.0e+002
C2_10 = 4.946430054762360	D2_10 = -0.015049547250518*1.0e+002
C2_11 = -4.096370262496523	D2_11 = 0.111009327927875*1.0e+002
C2_12 = -1.864569525430802	D2_12 = 0.154312438939432*1.0e+002

F.1.5. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL ELEMENTO K_{11} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TORSIONAL

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL ELEMENTO K_{11} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TORSIONAL	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
E1_0 = 1.372036528897335*1.0e+006	
E1_1 = 0.000037300206069*1.0e+006	F1_1 = -0.014532651939920*1.0e+002
E1_2 = 0.000088788202548*1.0e+006	F1_2 = -0.590708948438277*1.0e+002
E1_3 = 0.000041602552802*1.0e+006	F1_3 = -0.028010693097027*1.0e+002
E1_4 = 0.000132492358934*1.0e+006	F1_4 = -0.576361545904440*1.0e+002
E1_5 = 0.000053420863638*1.0e+006	F1_5 = -0.039154798479495*1.0e+002
E1_6 = 0.000299095766944*1.0e+006	F1_6 = -0.331744012862138*1.0e+002
E1_7 = 0.000082838427085*1.0e+006	F1_7 = -0.136816428194156*1.0e+002
E1_8 = 0.001320950201848*1.0e+006	F1_8 = -2.802644883273948*1.0e+002
E1_9 = -0.000042527471629*1.0e+006	F1_9 = 0.144121637914511*1.0e+002
E1_10 = 0.000133172929331*1.0e+006	F1_10 = 0.175427439364811*1.0e+002
E1_11 = 0.000019942073402*1.0e+006	F1_11 = -0.116408156818317*1.0e+002
E1_12 = 0.000518419907173*1.0e+006	F1_12 = -2.406292101456436*1.0e+002
E1_13 = -0.000042099826624*1.0e+006	F1_13 = 0.289400475299014*1.0e+002
E1_14 = 0.000063696696984*1.0e+006	F1_14 = 0.416019697229553*1.0e+002
E1_15 = 0.000002019746620*1.0e+006	F1_15 = -0.006258321362445*1.0e+002
E1_16 = 0.000313914507092*1.0e+006	F1_16 = -1.311004431729376*1.0e+002
E1_17 = -0.000057270490724*1.0e+006	F1_17 = 0.371626189252071*1.0e+002
E1_18 = -0.000007869154379*1.0e+006	F1_18 = 0.798994609175539*1.0e+002
E1_19 = -0.000029663658305*1.0e+006	F1_19 = 0.153638671519876*1.0e+002
E1_20 = -0.000006806208695*1.0e+006	F1_20 = 0.734308622831930*1.0e+002
E1_21 = -0.000025574617987*1.0e+006	F1_21 = 0.074893197299493*1.0e+002
E1_22 = -0.000001865869014*1.0e+006	F1_22 = 0.644785449873499*1.0e+002
E1_23 = -0.000043797405710*1.0e+006	F1_23 = 0.047598282618457*1.0e+002
E1_24 = -0.000193710278873*1.0e+006	F1_24 = 0.941699182150361*1.0e+002

F.1.6. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL ELEMENTO K_{22} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TORSIONAL

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL ELEMENTO K_{22} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TORSIONAL	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
E2_0 = 2.744018998926084*1.0e+006	
E2_1 = 0.000019085221189*1.0e+006	F2_1 = -0.004912954041681*1.0e+002
E2_2 = -0.000027210157570*1.0e+006	F2_2 = 0.526166206053136*1.0e+002
E2_3 = 0.000023889374717*1.0e+006	F2_3 = -0.048044611965927*1.0e+002
E2_4 = 0.000110680868811*1.0e+006	F2_4 = -0.601221887971173*1.0e+002
E2_5 = 0.000022183859460*1.0e+006	F2_5 = -0.037916428404739*1.0e+002
E2_6 = -0.000155783844585*1.0e+006	F2_6 = 0.147176562307335*1.0e+002
E2_7 = 0.000085089051875*1.0e+006	F2_7 = -0.183872424588687*1.0e+002
E2_8 = 0.001318225483491*1.0e+006	F2_8 = -2.960361643811046*1.0e+002
E2_9 = -0.000069806866808*1.0e+006	F2_9 = 0.117896480372294*1.0e+002
E2_10 = -0.000212484538381*1.0e+006	F2_10 = 0.076510113464608*1.0e+002
E2_11 = 0.000034947896502*1.0e+006	F2_11 = -0.149312968436792*1.0e+002
E2_12 = 0.000527147975110*1.0e+006	F2_12 = -2.605722431493203*1.0e+002
E2_13 = -0.000062085265916*1.0e+006	F2_13 = 0.267510916777312*1.0e+002
E2_14 = -0.000178283532488*1.0e+006	F2_14 = 0.274998685437675*1.0e+002
E2_15 = 0.000024364715195*1.0e+006	F2_15 = -0.040153100633673*1.0e+002
E2_16 = 0.000332062668934*1.0e+006	F2_16 = -1.547754756020362*1.0e+002
E2_17 = -0.000070378782750*1.0e+006	F2_17 = 0.341371789721155*1.0e+002
E2_18 = -0.000171759828251*1.0e+006	F2_18 = 0.455988945048817*1.0e+002
E2_19 = -0.000004594185709*1.0e+006	F2_19 = 0.156741857295830*1.0e+002
E2_20 = 0.000014067970520*1.0e+006	F2_20 = 0.490269449114748*1.0e+002
E2_21 = -0.000035231566745*1.0e+006	F2_21 = 0.067967703772770*1.0e+002
E2_22 = -0.000143883408589*1.0e+006	F2_22 = 0.247097849895624*1.0e+002
E2_23 = -0.000006814303272*1.0e+006	F2_23 = 0.110613273318204*1.0e+002
E2_24 = -0.000158535187037*1.0e+006	F2_24 = 0.725054197671055*1.0e+002

F.1. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA 2200 RPM DE VELOCIDAD

Los coeficientes armónicos para los parámetros con comportamiento periódico se hallaron mediante el programa "vib3_3" implementada en un script del MATLAB

F.2.1. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO DEL 1º CILINDRO J_1

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO J_1	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
A1_0 = 0.019453452148966	
A1_1 = -0.000009957869477	B1_1 = 0.001191183709353*1.0e-003
A1_2 = 0.000392759498019	B1_2 = -0.014896965156318*1.0e-003
A1_3 = -0.000046593281339	B1_3 = 0.006819664286302*1.0e-003
A1_4 = -0.001615067968188	B1_4 = 0.147108814910913*1.0e-003
A1_5 = 0.000060483146394	B1_5 = 0.008589501808992*1.0e-003
A1_6 = 0.000486718954600	B1_6 = 0.355051803382899*1.0e-003

F.2.2. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO DEL 2º CILINDRO J_2

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO J_2	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
A2_0 = 0.019453452148966	
A2_1 = -0.000009957869477	B2_1 = 0.001191183709353*1.0e-003
A2_2 = 0.000392759498019	B2_2 = -0.014896965156318*1.0e-003
A2_3 = -0.000046593281339	B2_3 = 0.006819664286302*1.0e-003
A2_4 = -0.001615067968188	B2_4 = 0.147108814910913*1.0e-003
A2_5 = 0.000060483146394	B2_5 = 0.008589501808992*1.0e-003
A2_6 = 0.000486718954600	B2_6 = 0.355051803382899*1.0e-003

F.2.3. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL TORQUE EN EL 1º CILINDRO

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL TORQUE EN EL 1º CILINDRO	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
C1_0 = -68.740137911619215	
C1_1 = -55.872983522276975	D1_1 = -0.056247200668168*1.0e+003
C1_2 = -19.649660054397909	D1_2 = 0.058742819355964*1.0e+003
C1_3 = -0.795814379745308	D1_3 = -0.108245741356316*1.0e+003
C1_4 = -92.262835578125632	D1_4 = -1.248012193702182*1.0e+003
C1_5 = 9.834123150285889	D1_5 = -0.013627380257687*1.0e+003
C1_6 = -52.844514847401349	D1_6 = -0.459942516764587*1.0e+003
C1_7 = 8.979326990714890	D1_7 = 0.010888521778369*1.0e+003
C1_8 = -41.485373183815888	D1_8 = -0.188475647213467*1.0e+003
C1_9 = 11.384810070542056	D1_9 = 0.024495999735319*1.0e+003
C1_10 = 9.330593705727235	D1_10 = 0.025387848520399*1.0e+003
C1_11 = 6.734800427799188	D1_11 = 0.017313846582772*1.0e+003
C1_12 = -25.042116392970446	D1_12 = 0.098124522454706*1.0e+003

F.2.4. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL TORQUE EN EL 2º CILINDRO

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL TORQUE EN EL 2º CILINDRO	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
C2_0 = -65.854399185019517	
C2_1 = 51.937785928776037	D2_1 = 0.047038478179205*1.0e+003
C2_2 = -20.411829271365793	D2_2 = 0.058729299812049*1.0e+003
C2_3 = -3.439783475718723	D2_3 = 0.039750607506931*1.0e+003
C2_4 = -94.958073229007482	D2_4 = -1.250907521900804*1.0e+003
C2_5 = -6.300449967338205	D2_5 = 0.052574792991833*1.0e+003
C2_6 = -55.110867091934821	D2_6 = -0.462695528216391*1.0e+003
C2_7 = -3.091809244361905	D2_7 = 0.043709159274574*1.0e+003
C2_8 = -43.287221551186150	D2_8 = -0.191205854042572*1.0e+003
C2_9 = 0.670154854674734	D2_9 = 0.040688288699397*1.0e+003
C2_10 = 7.744782699386711	D2_10 = 0.022996352839873*1.0e+003
C2_11 = -3.350661361832840	D2_11 = 0.028226558460502*1.0e+003
C2_12 = -26.399542796866019	D2_12 = 0.095708310975255*1.0e+003

F.2.5. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL ELEMENTO K_{11} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TORSIONAL

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL ELEMENTO K_{11} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TORSIONAL	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
E1_0 = 1.372107903546874*1.0e+006	
E1_1 = 0.000109533294770*1.0e+006	F1_1 = -0.004642238799361*1.0e+003
E1_2 = 0.000167047612801*1.0e+006	F1_2 = -0.066686768696797*1.0e+003
E1_3 = 0.000119541842912*1.0e+006	F1_3 = -0.013045517286567*1.0e+003
E1_4 = -0.000020830898309*1.0e+006	F1_4 = -0.043151572904378*1.0e+003
E1_5 = 0.000177317234917*1.0e+006	F1_5 = -0.028956406055727*1.0e+003
E1_6 = 0.000543960566611*1.0e+006	F1_6 = -0.090819857334870*1.0e+003
E1_7 = 0.000342004711806*1.0e+006	F1_7 = -0.081235116731591*1.0e+003
E1_8 = 0.005556382342105*1.0e+006	F1_8 = -1.417783169731670*1.0e+003
E1_9 = -0.000239051348845*1.0e+006	F1_9 = 0.060148032902451*1.0e+003
E1_10 = -0.000011459839926*1.0e+006	F1_10 = 0.034167036073783*1.0e+003
E1_11 = 0.000079078588153*1.0e+006	F1_11 = -0.064818555064653*1.0e+003
E1_12 = 0.001977454901678*1.0e+006	F1_12 = -1.192844407948114*1.0e+003
E1_13 = -0.000208156697683*1.0e+006	F1_13 = 0.125525464783777*1.0e+003
E1_14 = -0.000132403469540*1.0e+006	F1_14 = 0.128120485372084*1.0e+003
E1_15 = 0.000019049336136*1.0e+006	F1_15 = -0.017432507271698*1.0e+003
E1_16 = 0.001177976752301*1.0e+006	F1_16 = -0.747412819487290*1.0e+003
E1_17 = -0.000261295221544*1.0e+006	F1_17 = 0.172349923633193*1.0e+003
E1_18 = -0.000319959497406*1.0e+006	F1_18 = 0.275947244472357*1.0e+003
E1_19 = -0.000122509925631*1.0e+006	F1_19 = 0.070992325781194*1.0e+003
E1_20 = -0.000291039456817*1.0e+006	F1_20 = 0.242785293880140*1.0e+003
E1_21 = -0.000091141951077*1.0e+006	F1_21 = 0.037390861226326*1.0e+003
E1_22 = -0.000240507631178*1.0e+006	F1_22 = 0.186531914979510*1.0e+003
E1_23 = -0.000161016692762*1.0e+006	F1_23 = 0.035119607608330*1.0e+003
E1_24 = -0.001129589306591*1.0e+006	F1_24 = 0.318663826617942*1.0e+003

F.2.6. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL ELEMENTO K_{22} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TORSIONAL

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL ELEMENTO K_{22} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TORSIONAL	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
E2_0 = 2.744090373575624*1.0e+006	
E2_1 = 0.000091318309890*1.0e+006	F2_1 = -0.003680269009557*1.0e+003
E2_2 = 0.000051049252684*1.0e+006	F2_2 = 0.045000746752361*1.0e+003
E2_3 = 0.000101828664828*1.0e+006	F2_3 = -0.015048909173463*1.0e+003
E2_4 = -0.000042642388432*1.0e+006	F2_4 = -0.045637607111070*1.0e+003
E2_5 = 0.000146080230739*1.0e+006	F2_5 = -0.028832569048254*1.0e+003
E2_6 = 0.000089080955083*1.0e+006	F2_6 = -0.042927799817929*1.0e+003
E2_7 = 0.000344255336595*1.0e+006	F2_7 = -0.085940716371042*1.0e+003
E2_8 = 0.005553657623748*1.0e+006	F2_8 = -1.433554845785352*1.0e+003
E2_9 = -0.000266330744024*1.0e+006	F2_9 = 0.057525517148219*1.0e+003
E2_10 = -0.000357117307639*1.0e+006	F2_10 = 0.024275303483766*1.0e+003
E2_11 = 0.000094084411253*1.0e+006	F2_11 = -0.068109036226507*1.0e+003
E2_12 = 0.001986182969615*1.0e+006	F2_12 = -1.212787440951814*1.0e+003
E2_13 = -0.000228142136975*1.0e+006	F2_13 = 0.123336508931603*1.0e+003
E2_14 = -0.000374383699013*1.0e+006	F2_14 = 0.114018384192857*1.0e+003
E2_15 = 0.000041394304711*1.0e+006	F2_15 = -0.020821985198825*1.0e+003
E2_16 = 0.001196124914144*1.0e+006	F2_16 = -0.771087851916424*1.0e+003
E2_17 = -0.000274403513570*1.0e+006	F2_17 = 0.169324483680103*1.0e+003
E2_18 = -0.000483850171278*1.0e+006	F2_18 = 0.241646678059649*1.0e+003
E2_19 = -0.000097440453036*1.0e+006	F2_19 = 0.071302644358800*1.0e+003
E2_20 = -0.000270165277602*1.0e+006	F2_20 = 0.218381376508430*1.0e+003
E2_21 = -0.000100798899834*1.0e+006	F2_21 = 0.036698311873645*1.0e+003
E2_22 = -0.000382525170753*1.0e+006	F2_22 = 0.146763154981650*1.0e+003
E2_23 = -0.000124033590325*1.0e+006	F2_23 = 0.041421106678279*1.0e+003
E2_24 = -0.001094414214755*1.0e+006	F2_24 = 0.296999328170008*1.0e+003

F.3. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA 3000 RPM DE VELOCIDAD

Los coeficientes armónicos para los parámetros con comportamiento periódico se hallaron mediante el programa "vib3_3" implementada en un script del MATLAB

F.3.1. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO DEL 1º CILINDRO J_1

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO J_1	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
A1_0 = 0.019453452148966	
A1_1 = -0.000009957869477	B1_1 = 0.001191183709353*1.0e-003
A1_2 = 0.000392759498019	B1_2 = -0.014896965156318*1.0e-003
A1_3 = -0.000046593281339	B1_3 = 0.006819664286302*1.0e-003
A1_4 = -0.001615067968188	B1_4 = 0.147108814910913*1.0e-003
A1_5 = 0.000060483146394	B1_5 = 0.008589501808992*1.0e-003
A1_6 = 0.000486718954600	B1_6 = 0.355051803382899*1.0e-003

F.3.2. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO DEL 2º CILINDRO J_2

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO J_2	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
A2_0 = 0.019453452148966	
A2_1 = -0.000009957869477	B2_1 = 0.001191183709353*1.0e-003
A2_2 = 0.000392759498019	B2_2 = -0.014896965156318*1.0e-003
A2_3 = -0.000046593281339	B2_3 = 0.006819664286302*1.0e-003
A2_4 = -0.001615067968188	B2_4 = 0.147108814910913*1.0e-003
A2_5 = 0.000060483146394	B2_5 = 0.008589501808992*1.0e-003
A2_6 = 0.000486718954600	B2_6 = 0.355051803382899*1.0e-003

F.3.3. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL TORQUE EN EL 1º CILINDRO

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL TORQUE EN EL 1º CILINDRO	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
C1_0 = -0.696067936049631*1.0e+002	
C1_1 = -0.568270958621760*1.0e+002	D1_1 = -0.059937766196639*1.0e+003
C1_2 = -0.154439427969658*1.0e+002	D1_2 = 0.177037421359856*1.0e+003
C1_3 = -0.036922459209084*1.0e+002	D1_3 = -0.138411931182751*1.0e+003
C1_4 = -1.820561067525899*1.0e+002	D1_4 = -2.277547872138407*1.0e+003
C1_5 = 0.103451579872725*1.0e+002	D1_5 = 0.001834566111429*1.0e+003
C1_6 = -1.039154836669177*1.0e+002	D1_6 = -0.836720153420559*1.0e+003
C1_7 = 0.105921806949592*1.0e+002	D1_7 = 0.033161162760934*1.0e+003
C1_8 = -0.832488101876597*1.0e+002	D1_8 = -0.342202808803679*1.0e+003
C1_9 = 0.158709855586109*1.0e+002	D1_9 = 0.051437155812726*1.0e+003
C1_10 = 0.123624903540162*1.0e+002	D1_10 = 0.051933978232640*1.0e+003
C1_11 = 0.075427444590365*1.0e+002	D1_11 = 0.035868737140092*1.0e+003
C1_12 = -0.516247214732920*1.0e+002	D1_12 = 0.185101326856342*1.0e+003

F.3.4. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL TORQUE EN EL 2º CILINDRO

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL TORQUE EN EL 2º CILINDRO	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
C2_0 = -0.667210548783634*1.0e+002	
C2_1 = 0.509836735888770*1.0e+002	D2_1 = 0.043347912650734*1.0e+003
C2_2 = -0.162061120139337*1.0e+002	D2_2 = 0.177023901815941*1.0e+003
C2_3 = -0.063362150168819*1.0e+002	D2_3 = 0.009584417680496*1.0e+003
C2_4 = -1.847513444034717*1.0e+002	D2_4 = -2.280443200337028*1.0e+003
C2_5 = -0.057894151303518*1.0e+002	D2_5 = 0.068036739360950*1.0e+003
C2_6 = -1.061818359114511*1.0e+002	D2_6 = -0.839473164872363*1.0e+003
C2_7 = -0.014789555401176*1.0e+002	D2_7 = 0.065981800257139*1.0e+003
C2_8 = -0.850506585550299*1.0e+002	D2_8 = -0.344933015632783*1.0e+003
C2_9 = 0.051563303427436*1.0e+002	D2_9 = 0.067629444776804*1.0e+003
C2_10 = 0.107766793476757*1.0e+002	D2_10 = 0.049542482552113*1.0e+003
C2_11 = -0.025427173305955*1.0e+002	D2_11 = 0.046781449017823*1.0e+003
C2_12 = -0.529821478771875*1.0e+002	D2_12 = 0.182685115376891*1.0e+003

F.3.5. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL ELEMENTO K_{11} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TORSIONAL

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL ELEMENTO K11 DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TORSIONAL	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
E1_0 = 1.372185234958670*1.0e+006	
E1_1 = 0.000187794789063*1.0e+006	F1_1 = -0.008097356725339*1.0e+003
E1_2 = 0.000251838371429*1.0e+006	F1_2 = -0.074938245669510*1.0e+003
E1_3 = 0.000203985764914*1.0e+006	F1_3 = -0.024144943066334*1.0e+003
E1_4 = -0.000186950158022*1.0e+006	F1_4 = -0.027458141717206*1.0e+003
E1_5 = 0.000311553709200*1.0e+006	F1_5 = -0.056087189727783*1.0e+003
E1_6 = 0.000809261212984*1.0e+006	F1_6 = -0.153276269080812*1.0e+003
E1_7 = 0.000622800411913*1.0e+006	F1_7 = -0.154426446469136*1.0e+003
E1_8 = 0.010145293798554*1.0e+006	F1_8 = -2.650236514788398*1.0e+003
E1_9 = -0.000451976651803*1.0e+006	F1_9 = 0.109700911282743*1.0e+003
E1_10 = -0.000168163323738*1.0e+006	F1_10 = 0.052178752970155*1.0e+003
E1_11 = 0.000143150498892*1.0e+006	F1_11 = -0.122434384902255*1.0e+003
E1_12 = 0.003558257563584*1.0e+006	F1_12 = -2.224529271617150*1.0e+003
E1_13 = -0.000388072289006*1.0e+006	F1_13 = 0.230171676335453*1.0e+003
E1_14 = -0.000344869699898*1.0e+006	F1_14 = 0.221859635123405*1.0e+003
E1_15 = 0.000037500175587*1.0e+006	F1_15 = -0.035641828427105*1.0e+003
E1_16 = 0.002114151622969*1.0e+006	F1_16 = -1.415161193387241*1.0e+003
E1_17 = -0.000482347381903*1.0e+006	F1_17 = 0.318819646390507*1.0e+003
E1_18 = -0.000658096174641*1.0e+006	F1_18 = 0.488356720099418*1.0e+003
E1_19 = -0.000223104926498*1.0e+006	F1_19 = 0.131263406193950*1.0e+003
E1_20 = -0.000598994150793*1.0e+006	F1_20 = 0.426273652474979*1.0e+003
E1_21 = -0.000162181381297*1.0e+006	F1_21 = 0.069787915834755*1.0e+003
E1_22 = -0.000499065879810*1.0e+006	F1_22 = 0.318771575374788*1.0e+003
E1_23 = -0.000288018828898*1.0e+006	F1_23 = 0.068013143532111*1.0e+003
E1_24 = -0.002143574621413*1.0e+006	F1_24 = 0.561893474516524*1.0e+003

F.3.6. COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL ELEMENTO K_{22} DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TORSIONAL

COEFICIENTES ARMÓNICOS PARA EL ELEMENTO K11 DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TORSIONAL	
COSENO ARMÓNICOS	SENO ARMÓNICOS
E2_0 = 2.744167704987419*1.0e+006	
E2_1 = 0.000169579804184*1.0e+006	F2_1 = -0.007135386935518*1.0e+003
E2_2 = 0.000135840011311*1.0e+006	F2_2 = 0.036749269779665*1.0e+003
E2_3 = 0.000186272586829*1.0e+006	F2_3 = -0.026148334953222*1.0e+003
E2_4 = -0.000208761648145*1.0e+006	F2_4 = -0.029944175923878*1.0e+003
E2_5 = 0.000280316705022*1.0e+006	F2_5 = -0.055963352720295*1.0e+003
E2_6 = 0.000354381601455*1.0e+006	F2_6 = -0.105384211563901*1.0e+003
E2_7 = 0.000625051036703*1.0e+006	F2_7 = -0.159132046108571*1.0e+003
E2_8 = 0.010142569080197*1.0e+006	F2_8 = -2.666008190842093*1.0e+003
E2_9 = -0.000479256046981*1.0e+006	F2_9 = 0.107078395528495*1.0e+003
E2_10 = -0.000513820791450*1.0e+006	F2_10 = 0.042287020380152*1.0e+003
E2_11 = 0.000158156321992*1.0e+006	F2_11 = -0.125724866064104*1.0e+003
E2_12 = 0.003566985631522*1.0e+006	F2_12 = -2.244472304620846*1.0e+003
E2_13 = -0.000408057728298*1.0e+006	F2_13 = 0.227982720483301*1.0e+003
E2_14 = -0.000586849929370*1.0e+006	F2_14 = 0.207757533944202*1.0e+003
E2_15 = 0.000059845144162*1.0e+006	F2_15 = -0.039031306354219*1.0e+003
E2_16 = 0.002132299784811*1.0e+006	F2_16 = -1.438836225816314*1.0e+003
E2_17 = -0.000495455673929*1.0e+006	F2_17 = 0.315794206437403*1.0e+003
E2_18 = -0.000821986848514*1.0e+006	F2_18 = 0.454056153686741*1.0e+003
E2_19 = -0.000198035453903*1.0e+006	F2_19 = 0.131573724771557*1.0e+003
E2_20 = -0.000578119971578*1.0e+006	F2_20 = 0.401869735103263*1.0e+003
E2_21 = -0.000171838330055*1.0e+006	F2_21 = 0.069095366482079*1.0e+003
E2_22 = -0.000641083419385*1.0e+006	F2_22 = 0.279002815377002*1.0e+003
E2_23 = -0.000251035726461*1.0e+006	F2_23 = 0.074314642602078*1.0e+003
E2_24 = -0.002108399529577*1.0e+006	F2_24 = 0.540228976068543*1.0e+003



Two-cylinder smoothness rated at a comfortable 3000-rpm...



12C Two Marine Diesel Engine

Lightweight and Compact

The 12C Two has one of the smallest available envelopes in the Westerbeke line. This lightweight, low profile engine is designed to fit into the smallest of engine compartments.

Powerful and Reliable

The 12C Two is a powerful, two-cylinder engine rated at a comfortable 3000-rpm. Specially engineered by Westerbeke, pioneers in marine diesel engines, the 12C Two provides consistent performance, durability and, above all, reliability year after year.

Easy Operation and Maintenance

To minimize engine maintenance, the 12C Two is fresh water-cooled and equipped with a simple control system. Easy access to all servicing points and a self-bleeding fuel system allow easy routine maintenance. The 12C Two is easy to install, economical to operate and has a full range of options available allowing you to custom tailor your engine.

Full Engine Instrumentation Option

Westerbeke offers an optional admiral panel. The admiral panel includes, tachometer, hour meter, voltmeter, water temperature and oil pressure gauge. Westerbeke also offers an optional captain panel with tachometer, hour meter, and warning lights.

The Name You Can Trust

The presence of Westerbeke in over 65 countries around the world provides customers with easy access to parts, service and technical support worldwide. Established in 1937, Westerbeke is committed to providing its customers with quality products and unequaled after sales support.



12C Two Marine Diesel Engine

Standard Features

- Fresh water cooling
- Engine pre-wired to plug-in connector
- Self-bleeding fuel system
- 12 volt, 50 amp alternator
- Flow control domestic hot water connection
- Coolant recovery tank
- Throttle, stop, and shift control brackets
- Low oil pressure and high water temperature alarms
- Gear driven raw water pump
- Mechanical gear with 2.05:1 reduction
- Glow plug cold starting aid
- Four point adjustable flex mounts
- Lube oil drain hose
- Tuned air intake silencer
- Operators' manual and parts list
- EPA certified
- "CE" mark



Optional Admiral Panel

Admiral Panel Dimensions

Length	9.75" (247.7 mm)
Depth	4.0" (101.6 mm)
Height	6.0" (152.4 mm)

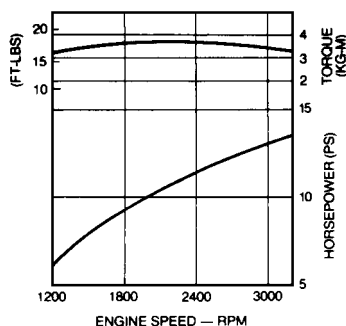
Performance Data

Horsepower and rpm
12 hp @ 3000 rpm

Maximum torque and rpm
30 lbs/ft @ 2200 rpm

Typical fuel consumption
0.056 US gal/hp/hr
(0.212 liters/hp/hr)

Typical fuel consumption
@ 2500 rpm
0.7 US gal/hr
(2.65 liters/hr)



Specification

Number of cylinders	2 Cylinder vertical in-line
Cycles	4 Cycle
Displacement	38.75 cu. in. (.63 liter)
Bore and stroke	2.99" x 2.76" (76 mm x 70 mm)
Compression ratio	23:1
Maximum angle of installation	Not to exceed 14°
Maximum angle of operation	Not to exceed 25°
Crankshaft, direction of rotation	Counterclockwise as viewed from flywheel end
Propeller shaft, direction of rotation	Right hand – std. trans.
Dry weight	225 lbs (102.1 kilos)
Combustion system	Swirl type
Aspiration	Naturally aspirated
Lubrication system	Forced lubrication by gear pump
Cooling system	2.9 quarts (2.7 liters)
Starting aid	12 volt sheathed type glow plug
Engine stop	Manual Type
Fuel injection pump	Bosch type
Governor	Centrifugal type
Injectors	Throttle type
Fuel filter	Secondary, replaceable type
Lube oil filter	Full flow, spin-on element
Lubricant capacity	0.634 US gal (2.4 liters)
Fuel transfer pump	Mechanical diaphragm type
Fuel supply and return piping	1/4" ID (6.35 mm) minimum 3/8" ID (9.65 mm) maximum
Starting motor	12 volt, solenoid, actuated shift
Battery charging alternator	50 ampere (12 volts)
Cold cranking amps	125 amps
Alternator/regulator	Automatic, solid state built-in
Electrical system	12 volts DC, negative ground

Construction – Engine Components

Cylinder head	Cast Iron
Cylinder block	Cast Iron
Crankshaft	Forged crankshaft, three main bearings
Valves	Overhead valves, rotating type
Fuel System	Self bleeding
Intake system	Tuned intake silencer for maximum noise reduction
Cooling system	Fresh water-cooled with tube and shell type heat exchanger
Exhaust manifold	Cast aluminum, fresh water-cooled with built-in expansion tank

Standard Equipment

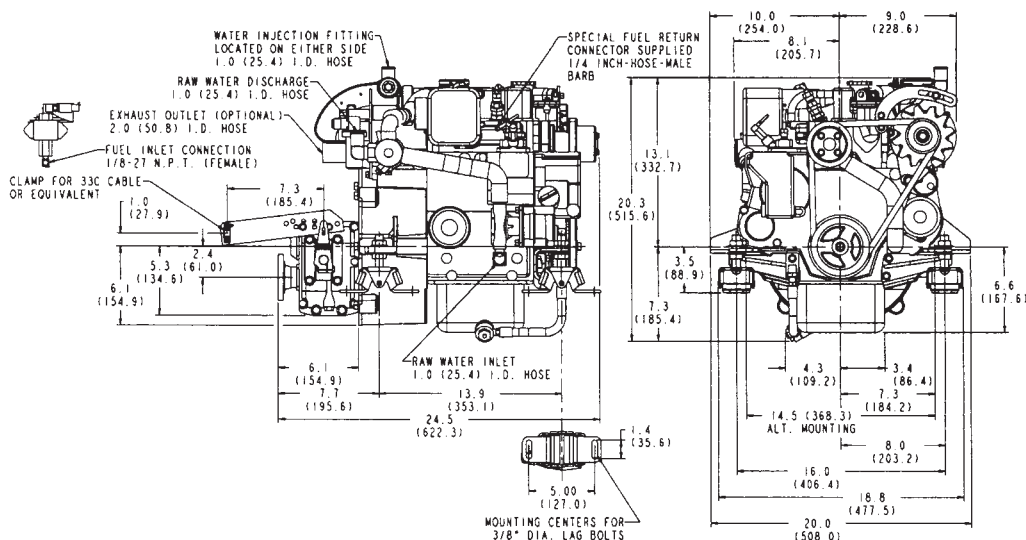
Standard gear ratio	2.05:1
Mounting centers	14.56"
Flexible mounts	Adjustable fail-safe rubber type
Flow control domestic hot water connection	
Coolant recovery tank	
Battery charging alternator	
Starting aid	
Control brackets	For all control attachments
Prewired Engine	
Gear-driven sea water pump	
Lube oil drain hose	
Tuned air intake silencer	
Oil fill	Top and service side
Circuit breaker protected electrical system	
Operator's Manual	
Parts List	

Optional Equipment

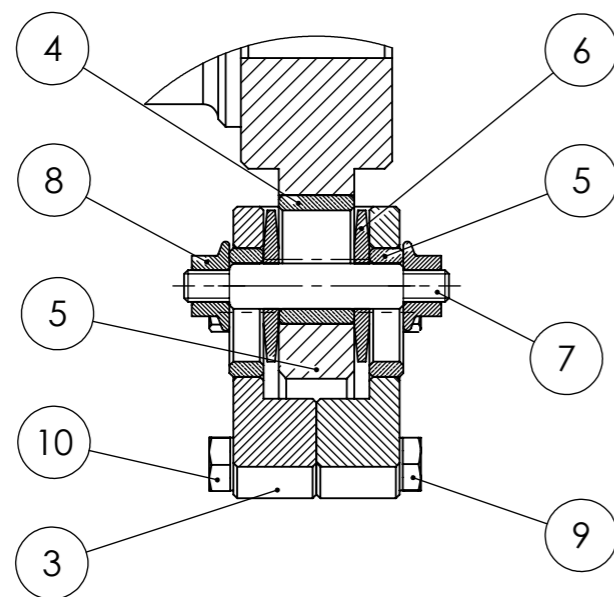
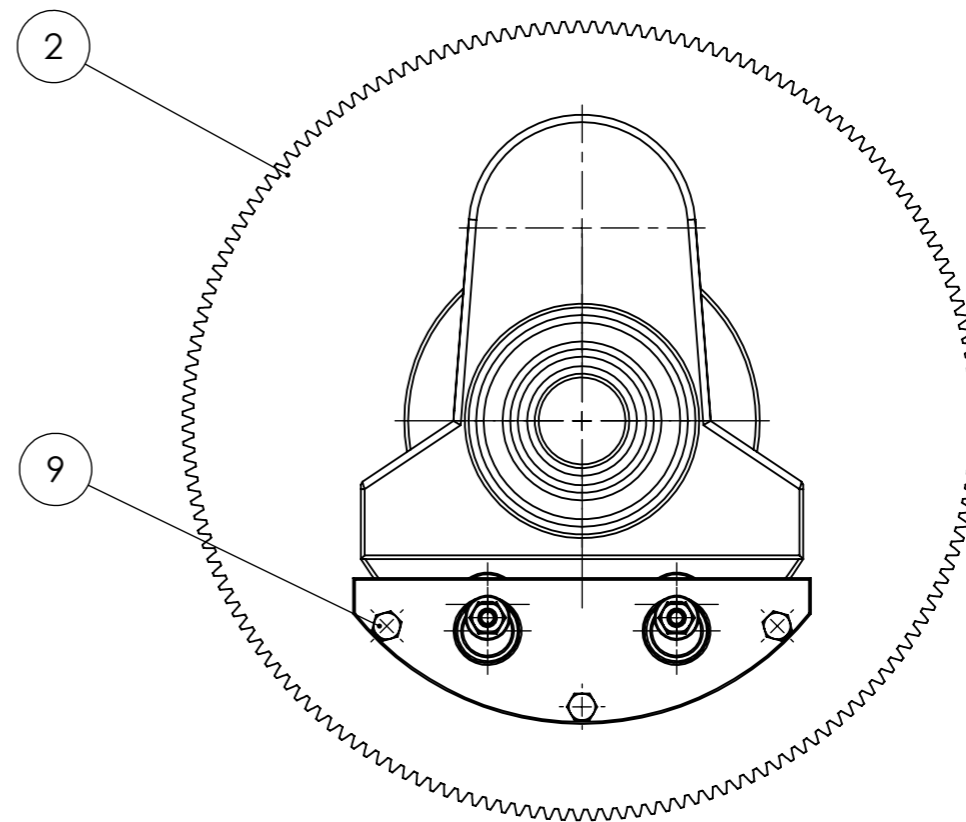
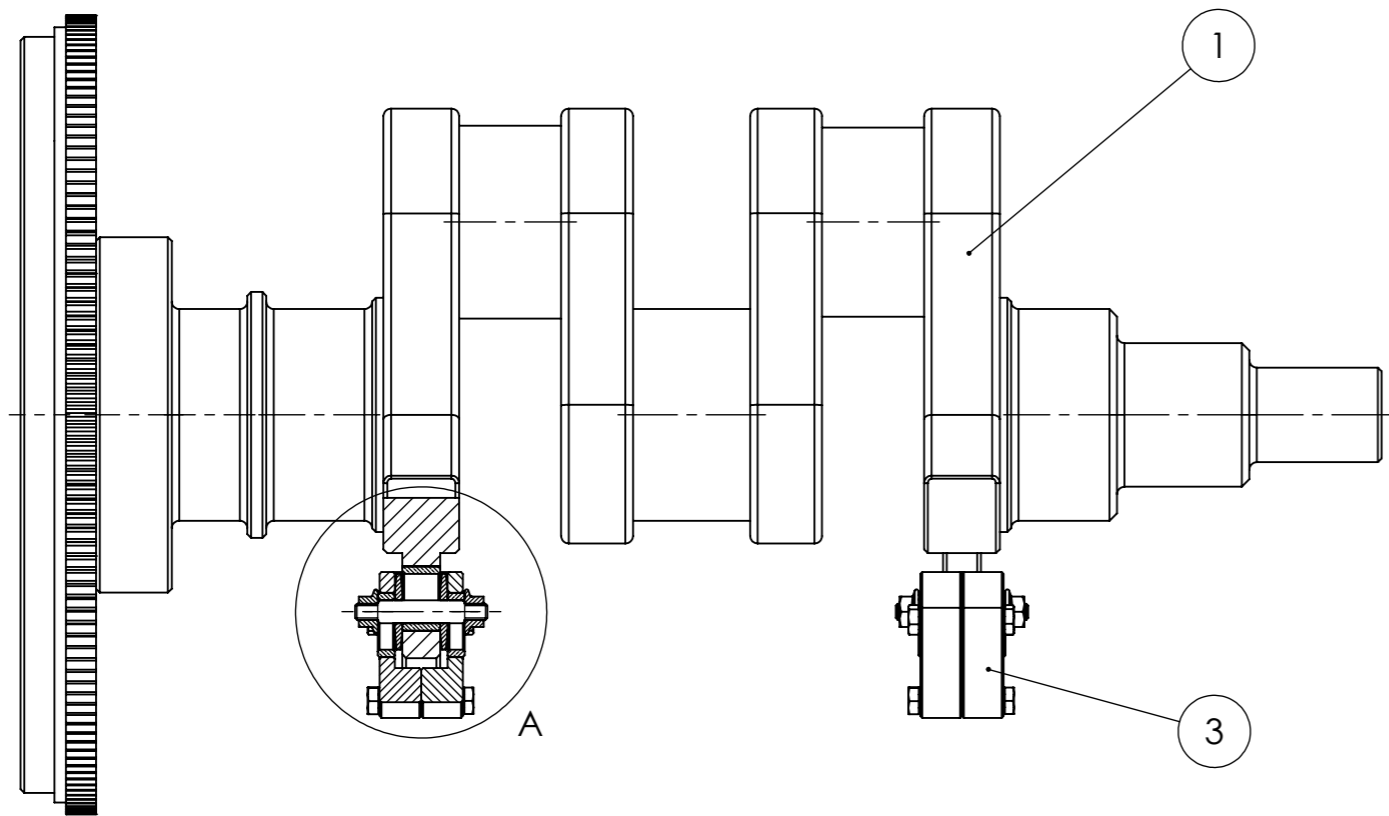
Captain panel with alarm (tachometer with lights)	
Admiral panel with alarm (tachometer with gauges)	
Dual station senders	
Other gear ratios	Consult local Distributor
Remote expansion tank	
Fuel/water separator	
Muffler and fittings	
"A" on board spare parts kits	
"B" extended cruising spare parts kits	
Anti-siphon valve for overboard cooling discharge water	
Technical Manual	
Exhaust connection (water injected 90°, 45° elbows & riser)	
Propeller shaft couplings (rigid/flexible) – available standard sizes	

Dimensions

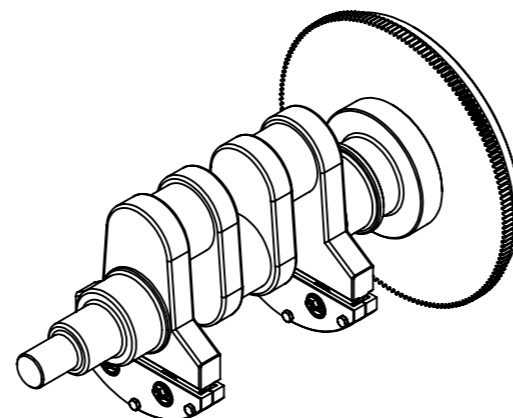
Inches (millimeters)



Authorized Dealer



DETALLE A
ESCALA 1 : 1



10	6	TUERCA HEXAGONAL M4	DIN 934	8	
9	6	PERNO HEXAGONAL M4 x 25	DIN 931	8.8	
8	8	TUERCA HEXAGONAL M5	DIN 6923	8	CON REBORDE
7	4	PIN ROSCADO		SAE 1045	PLANO A4 - 3
6	8	ANILLO TOPE		SAE A570 Gr 36	PLANO A4 - 4
5	8	ANILLO LATERAL		Br - SAE 64	PLANO A4 - 4
4	4	ANILLO CENTRAL		Br - SAE 64	PLANO A4 - 4
3	4	MASA PENDULAR		SAE A570 Gr 50	PLANO A4 - 3
2	1	VOLANTE DE INERCIA		GGG - 50	
1	1	CIGÜEÑAL MODIFICADO		GGG - 50	PLANO A4 - 2
ITEM	CANT.	DESCRIPCIÓN	NORMA	MATERIAL	OBSERVACIONES

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO - MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE
MAGISTER EN INGENIERÍA MECÁNICA
 CÁLCULO Y DISEÑO DE UN ABSORSOR DE VIBRACIONES
 TORSIONALES TIPO PÉNDULO PARA UN MOTOR DE
 COMBUSTIÓN INTERNA DE 2 CILINDROS Y 4 TIEMPOS

ENSAMBLE GENERAL

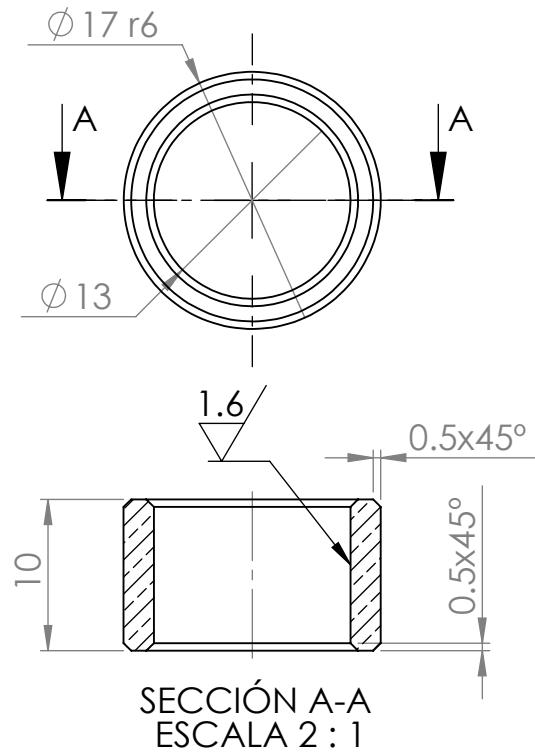
PRESENTADO POR: MELENDRES QUISPE KENNY ALBERTO

FECHA: 18 - 05 - 2011

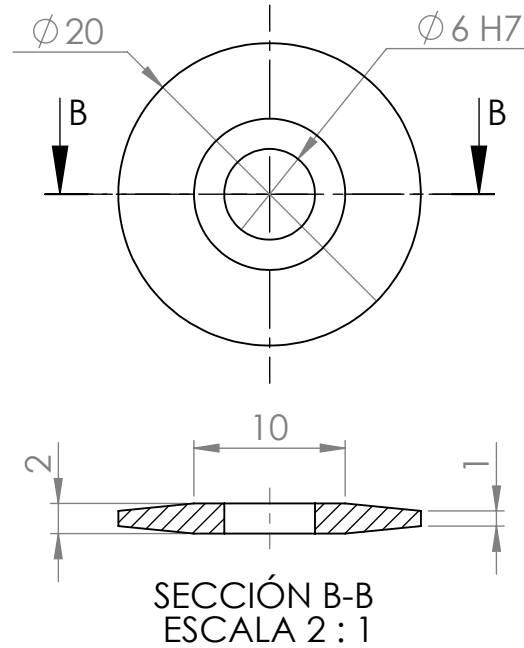
ESCALA: 1 : 2

PLANO: A3 - 1

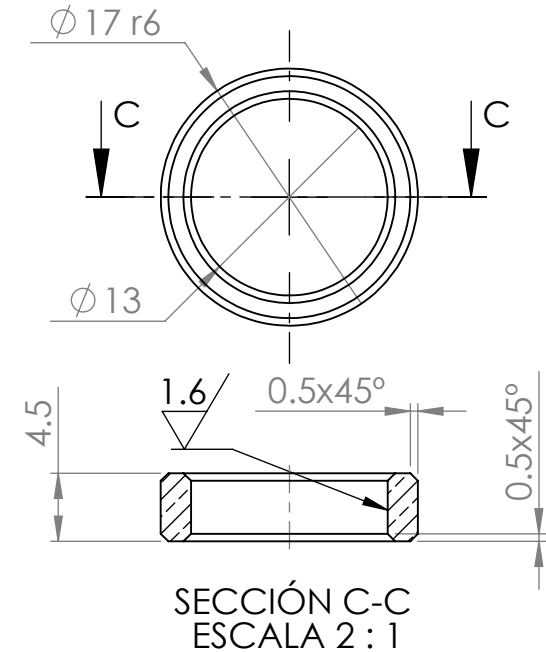
ITEM : 4
 NOMBRE : ANILLO CENTRAL
 MATERIAL : BRONCE SAE 64
 CANTIDAD : 4



ITEM : 6
 NOMBRE : ANILLO TOPE
 MATERIAL : ACERO A36
 CANTIDAD : 8



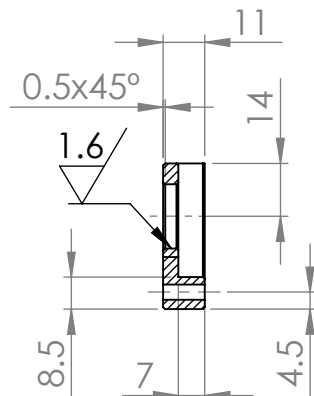
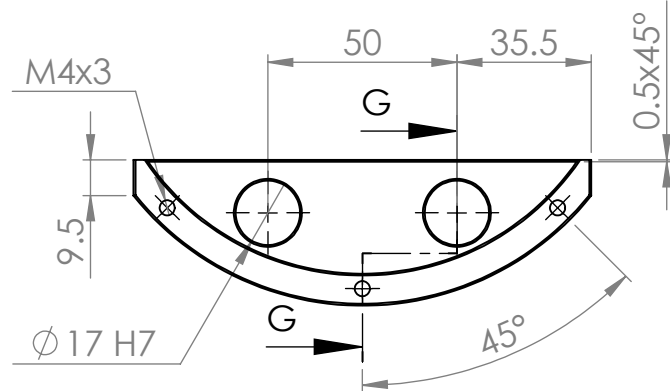
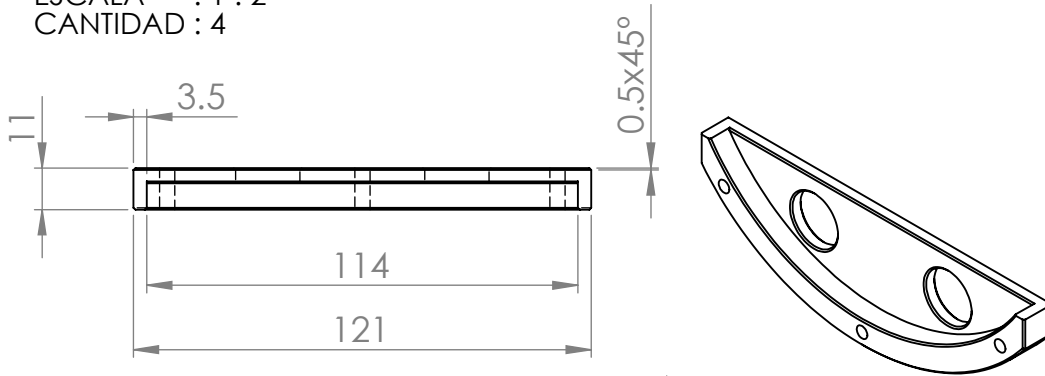
ITEM : 5
 NOMBRE : ANILLO LATERAL
 MATERIAL : BRONCE SAE 64
 CANTIDAD : 8



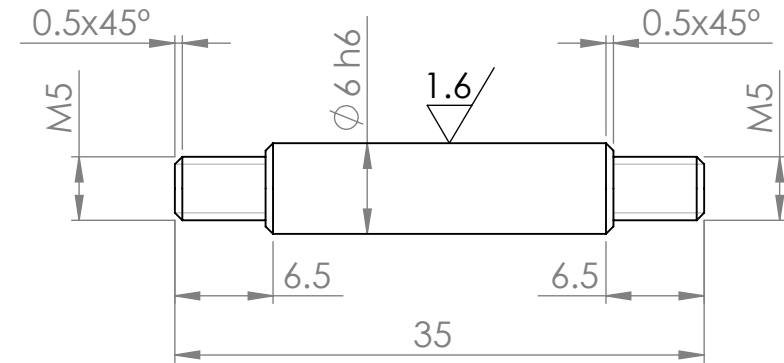
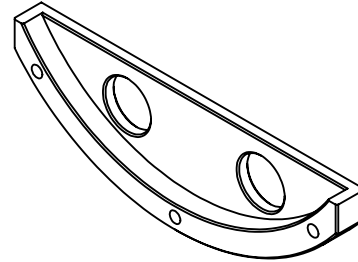
ACABADO SUPERFICIAL INDICADO	TOLERANCIA GENERAL DIN7168 (MEDIO)	MATERIAL INDICADO
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ ESCUELA DE POSGRADO - MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA		
TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAGISTER EN INGENIERÍA MECÁNICA	DESPIECE ITEMS: 4,5 y 6	
CÁLCULO Y DISEÑO DE UN ABSORSOR DE VIBRACIONES TORSIONALES TIPO PÉNDULO PARA UN MOTOR DE COMBUSTIÓN INTERNA DE 2 CILINDROS Y 4 TIEMPOS		
PRESENTADO POR: MELENDRES QUISPE KENNY ALBERTO		
FECHA: 18 - 05 - 2011	ESCALA: 2:1	PLANO: A4 - 1

ITEM : 3
 NOMBRE : MASA PENDULAR
 MATERIAL : ACERO A36
 ESCALA : 1 : 2
 CANTIDAD : 4

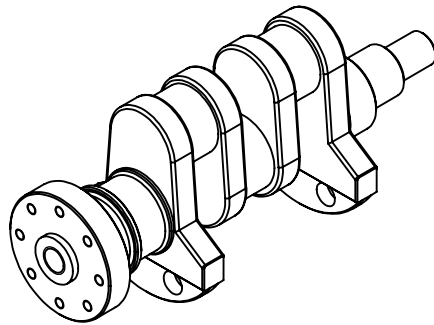
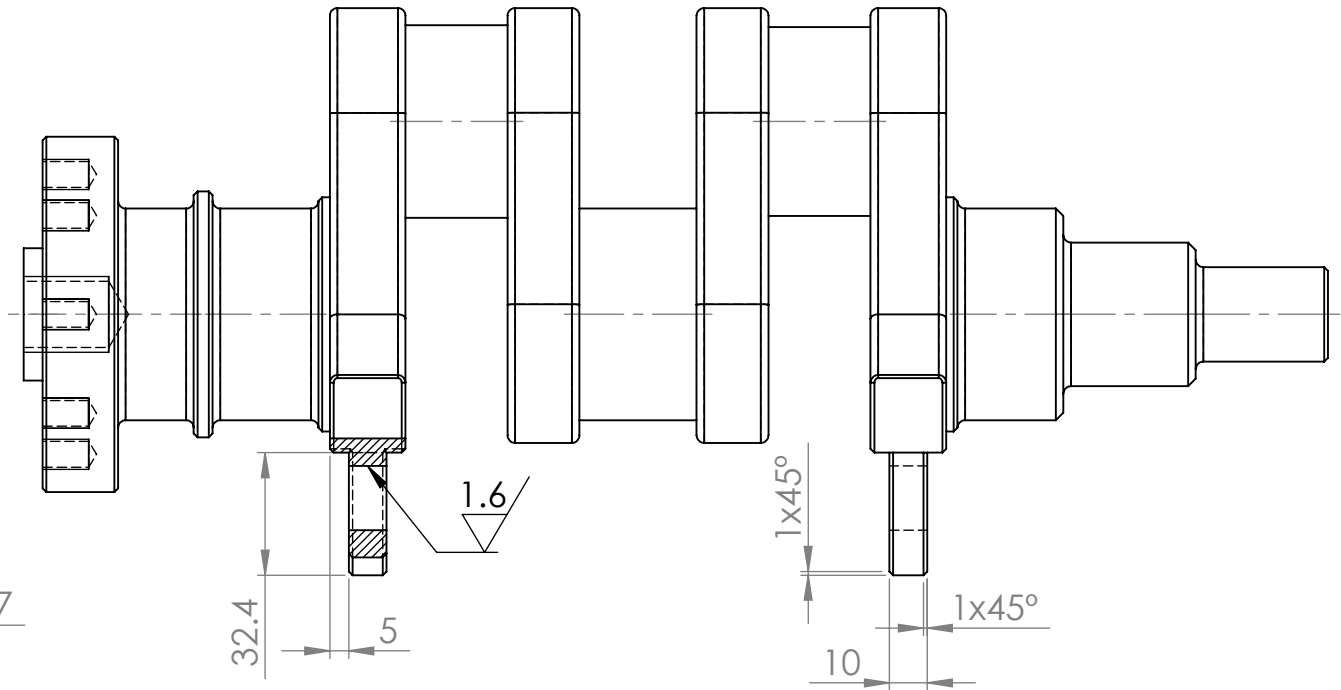
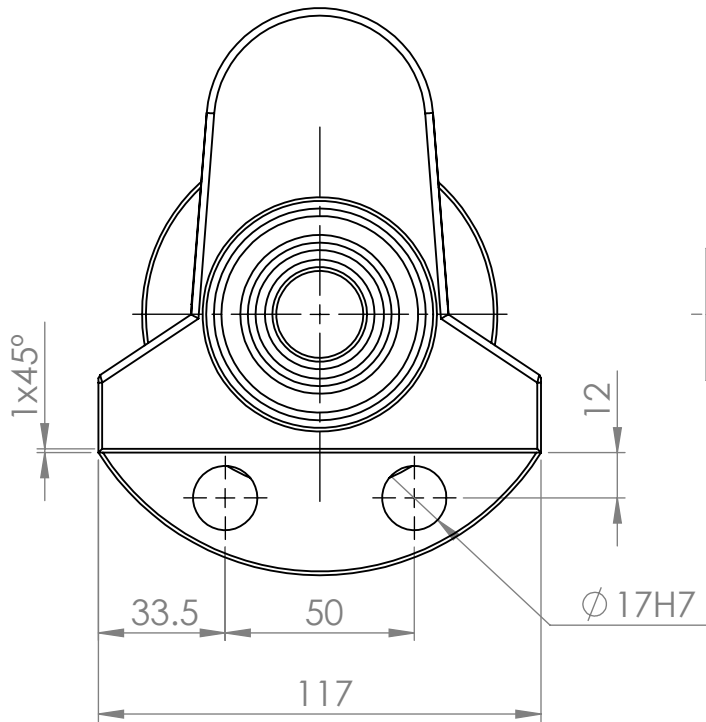
ITEM : 7
 NOMBRE : PIN ROSCADO
 MATERIAL : ACERO SAE 1045
 ESCALA : 2 : 1
 CANTIDAD : 4



SECCIÓN G-G
 ESCALA 1 : 2



ACABADO SUPERFICIAL INDICADO	TOLERANCIA GENERAL DIN7168 (MEDIO)	MATERIAL INDICADO
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ ESCUOLA DE POSGRADO - MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA		
TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAGISTER EN INGENIERÍA MECÁNICA CÁLCULO Y DISEÑO DE UN ABSORSOR DE VIBRACIONES TORSIONALES TIPO PÉNDULO PARA UN MOTOR DE COMBUSTIÓN INTERNA DE 2 CILINDROS Y 4 TIEMPOS		DESPIECE ITEMS: 3 y 7
PRESENTADO POR: MELENDRES QUISPE KENNY ALBERTO		
FECHA: 18 - 05 - 2011	ESCALA: INDICADA	PLANO: A4 - 2



ACABADO SUPERFICIAL INDICADO	TOLERANCIA GENERAL DIN7168 (MEDIO)	MATERIAL GGG - 50
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ ESCUELA DE POSGRADO - MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA		
TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAGISTER EN INGENIERÍA MECÁNICA CÁLCULO Y DISEÑO DE UN ABSORSOR DE VIBRACIONES TORSIONALES TIPO PÉNDULO PARA UN MOTOR DE COMBUSTIÓN INTERNA DE 2 CILINDROS Y 4 TIEMPOS		CIGÜEÑAL MODIFICADO
PRESENTADO POR: MELENDRES QUISPE KENNY ALBERTO		
FECHA: 18 - 05 - 2011	ESCALA: 1:2	PLANO: A4 - 3