

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



**Desarrollo de un controlador fuzzy adaptativo
por modelo de referencia de un vehículo
submarino autónomo de 6DOF**

Tesis para optar por el grado académico de
Maestro en Ingeniería de Control y
Automatización que presenta

Lugui Paolo Fenco Bravo

ASESOR

Dr. Carlos Gustavo Pérez Zuñiga

Lima, 2024

Informe de Similitud

Yo, Carlos Gustavo Pérez Zuñiga, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulada: “Desarrollo de un controlador fuzzy adaptativo por modelo de referencia de un vehículo submarino autónomo de 6DOF”, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 14%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 09/04/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lima, 9 de abril de 2024

Apellidos y nombres del asesor: Pérez Zuñiga, Carlos Gustavo	
DNI: 41864666	Firma: 
ORCID: 0000-0001-5946-1395	

Resumen

Durante los últimos años nos hemos visto afectados por las consecuencias producidas por el cambio climático, el efecto invernadero y la contaminación ambiental, esto afectando no solo a la vida que se encuentra en la superficie de la tierra, sino que también afecta directamente a la salud de los océanos, generando variación en la temperatura, incremento en la acidificación, variación en la salinidad, lo que causa la pérdida de los ecosistemas que en ellos habitan. Uno de los ejemplos más resaltantes y preocupantes debido a la variación de los parámetros normales del océano es la disminución de los arrecifes de coral vivo, los cuales albergan a innumerables ecosistemas costeros y que son uno de los más productivos del planeta, que ha tenido una reducción alrededor del 50 % en los últimos 150 años, producido por el aumento de temperatura y la acidificación del océano. Estos cambios han hecho que se registren parámetros preocupantes, respecto a la vida marina que ellos albergan.

El deseo de querer contribuir con un pequeño grano de arena por tratar de revertir el daño causado por los estragos del cambio climático y la contaminación durante tantos años es una de las motivaciones que ha llevado a generar este proyecto de investigación. Es por ello por lo que se propone desarrollar un controlador avanzado para que ejecute tareas de exploración, búsqueda, monitoreo, y operaciones de inteligencia al recorrer trayectorias específicas. Sin embargo, debido a la complejidad del vehículo submarino autónomo (AUV), considerando su dinámica no lineal y sus altas perturbaciones, es difícil diseñar un controlador no lineal con buen rendimiento. El controlador fuzzy adaptativo por modelo de referencia (MRAFC) es el controlador propuesto que deberá ser robusto para navegar en una trayectoria definida y robusto para posibles perturbaciones del medio en el cual estará expuesto como el oleaje y corrientes marinas.

Una primera aproximación de este trabajo se presenta en el artículo IEEE “Model Reference Adaptive Fuzzy Controller of a 6DOF Autonomous Underwater Vehicle”, donde se presentan resultados parciales de este trabajo de investigación. Además, se viene trabajando un nuevo artículo presentando los nuevos resultados obtenidos.

Los resultados exitosos de este trabajo de investigación han sido presentados a evaluación mediante un artículo científico en una revista científica IEEE bajo el nombre: “Non Lineal trajectory tracking of a 6DOF AUV using an MRACF controller”



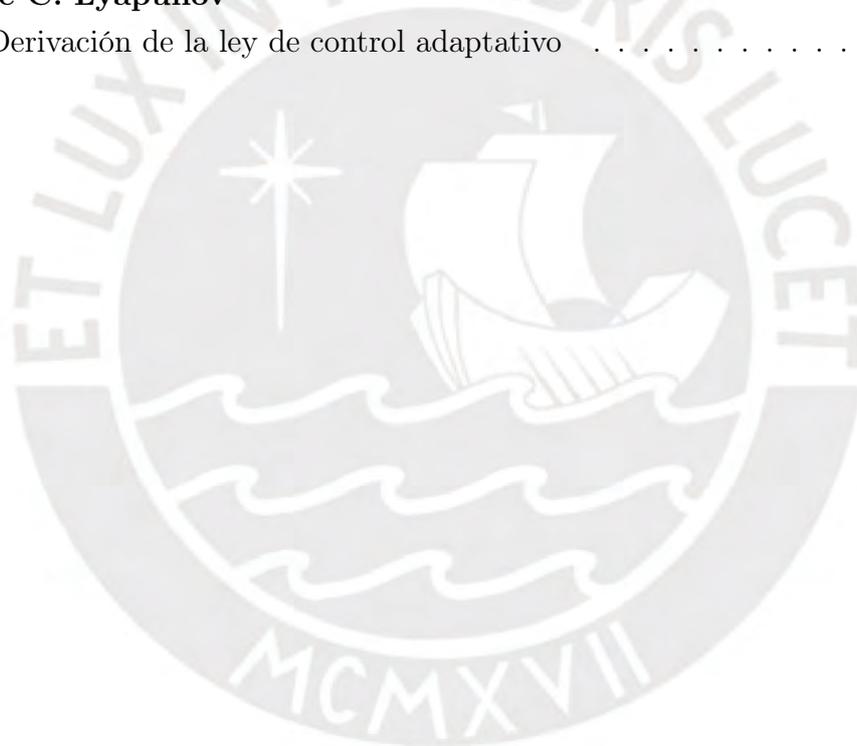
Índice general

Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XI
Nomenclatura	XII
Acrónimos	XIV
Introducción	XV
1. ESTADO DEL ARTE	1
1.1. Presentación de la problemática	1
1.2. Robots submarinos	3
1.2.1. Clasificación de los robots submarinos	3
1.3. Vehículos submarinos autónomos (AUVs)	5
1.3.1. Clasificación AUVs	6
1.3.2. Antecedentes de AUVs	6
1.3.3. Componentes de los AUVs	9
1.4. Objetivos	15
1.4.1. Objetivo General	15
1.4.2. Objetivo Específicos	15
2. MODELO NO-LINEAL AUV 6DOF	16
2.1. Introducción	16
2.2. Modelamiento	17
2.2.1. Cinemática	18
2.2.1.1. Variables de movimiento	18
2.2.1.2. Marcos de Referencia	18
2.2.1.3. Transformaciones entre BODY y NED	20

2.2.2.	Dinámica	24
2.2.2.1.	Ecuaciones de Movimiento Newton-Euler alrededor de CG	25
2.2.2.2.	Ecuaciones de movimiento Newton-Euler sobre CO	28
2.2.2.3.	Ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido	30
2.2.2.4.	Ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido de 6DOF simplificado	33
2.2.3.	Hidrostática	34
2.2.3.1.	Fuerzas de restauración para vehículos bajo el agua	35
2.2.4.	Hidrodinámica	37
2.2.4.1.	Marco de referencia de navegación	37
2.2.4.2.	Transformaciones entre BODY y NAVEGACIÓN	39
2.2.4.3.	Modelo en el dominio de la frecuencia clásico	43
2.2.4.4.	Coefficientes del potencial y el concepto de fuerzas oscilantes	44
2.2.4.5.	Definición: Masa añadida	45
2.2.5.	Modelo no lineal de 6DOF para AUV	46
2.2.5.1.	Matriz de masas (cuerpo rígido y masa añadida)	46
2.2.5.2.	Matriz Coriolis (cuerpo rígido y masa añadida)	47
2.2.5.3.	Matriz de Amortiguamiento	48
2.2.5.4.	Vector de fuerzas de restauración	48
2.2.5.5.	Vector de propulsión	49
2.3.	Linealización	49
2.3.1.	Representación vectorial de 6DOF en BODY y NED	49
2.3.1.1.	Ecuaciones de movimiento expresadas en BODY	50
2.3.1.2.	Ecuaciones de movimiento expresadas en NED	50
2.3.2.	Estados de convergencia	51
2.3.3.	Linealización por ejes de coordenadas paralelos	52
2.3.3.1.	Sistema de coordenadas paralelo al vehículo	52
2.3.3.2.	Definición: Sistema de coordenadas paralelo al vehículo	52
2.3.3.3.	Aplicaciones de baja velocidad	53
2.4.	Conclusiones Preliminares	55
3.	CONTROLADORES	56
3.1.	Introducción	56
3.2.	Controlador regulador cuadrático lineal (LQR)	57
3.2.1.	Diseño de un controlador LQR	57

3.2.2. Simulación	61
3.3. Controlador adaptativo por modelo de referencia (MRAC)	65
3.3.1. Feedforward solamente alrededor de planta	65
3.3.2. Resumen de MARC usando feedforward solamente en la planta	66
3.3.3. Simulación	68
3.3.4. Feedforward en ambos planta y modelo	71
3.3.5. Resumen de MARC usando feedforward en la planta y modelo .	73
3.3.6. Simulación	75
3.4. Controlador fuzzy adaptativo por modelo de referencia (MRAFC)	78
3.4.1. Control Fuzzy basado en el modelo T-S	78
3.4.2. Esquema	80
3.4.2.1. Ley de control	80
3.4.2.2. Ley adaptativa	81
3.4.3. Implementación	84
3.4.4. Simulación	88
3.5. Comparativo general	91
3.5.1. Simulación sin perturbación $f = 0.0m$	91
3.5.2. Simulación con perturbación $f = 0.4m$	94
3.5.3. Simulación con ruido	97
3.6. Conclusiones Preliminares	100
4. PROPUESTA DE IMPLEMENTACIÓN	101
4.1. Introducción	101
4.2. Hardware	101
4.2.1. Unidad de Procesamiento	102
4.2.2. Unidad de medición inercial (IMU)	105
4.2.3. Controlador electrónico de velocidad (ESC)	105
4.2.4. Sistema USBL	107
4.2.5. Propulsores	109
4.2.6. Baterías	110
4.3. Software	112
4.4. Arquitectura	118
4.5. Conclusiones Preliminares	120
Conclusiones Generales	121

Bibliografía	124
Apéndice A. Definiciones	128
A.1. Skew-Symmetry de una Matriz	128
A.2. Operador Producto-Cruz	128
A.3. Matriz Inercial	129
A.4. Simetría en matriz de inercia M	129
A.5. Teorema 1	131
Apéndice B. Estados de Convergencia	132
B.1. Derivación Extendida	132
Apéndice C. Lyapunov	139
C.1. Derivación de la ley de control adaptativo	139



Índice de figuras

1.1. Sistema de posicionamiento de un robot submarino	4
1.2. Clasificación de robots submarinos	5
1.3. Robot submarino ISE Explorer AUV	7
1.4. Robot submarino LAUV-Harald	8
1.5. Robot submarino AUV Hugin	10
1.6. Vehículo Submarino Autónomo	14
2.1. Variables de movimiento de un AUV	18
2.2. Marco centrado en la tierra	19
2.3. Marco centrado en el cuerpo	20
2.4. Ángulos de Euler	22
2.5. Newton-Euler alrededor de CG	25
2.6. Fuerza gravitacional y flotabilidad	35
2.7. Marco de referencia de navegación	38
3.1. Rango modelo AUV	58
3.5. LQR trayectoria Circular	61
3.6. LQR trayectoria Circular	62
3.7. Variable de estado	63
3.8. Trayectoria circular	63
3.9. Feedforward solamente en Planta	67
3.10. MRAC I - Vector de estado	68
3.11. MRAC I - Vector de entrada	69
3.12. Variables p, q	69
3.13. Feedforward en Planta y Modelo	73
3.14. MRAC II - Vector de estado	75
3.15. MRAC II - Vector de entrada	76
3.16. Esquema MRAFC	84

3.17. Funciones de membresia	85
3.18. Gráfica modelo de referencia	86
3.19. Variable de estado	88
3.20. Velocidad eje X, Y	89
3.21. Trayectoria circular	90
3.22. Variable de estado TODOS	91
3.23. Vector τ y trayectoria circular TODOS	92
3.24. Variable Error η vs Tiempo	92
3.25. Velocidad eje X, Y	94
3.26. Vector fuerza de Oscilación $f = 0,4m$	94
3.27. Variable de estado TODOS	95
3.28. Vector τ y trayectoria circular TODOS	95
3.29. Variable Error η vs Tiempo	96
3.30. Variable de estado ALL	98
3.31. Vector τ y trayectoria circular TODOS	98
3.32. Variable Error η vs Tiempo	99
4.1. Esquema de conexión	102
4.2. Jetson Xavier Nx	103
4.3. Periféricos I/O	103
4.4. Modulo GY-91	105
4.5. Controlador BLHeli EMAX	106
4.6. Tarjeta STM32	106
4.7. Sistema de posicionamiento acústico	107
4.8. Patrón de haz	107
4.9. Propulsor	109
4.10. Batería Lipo	110
4.11. Especificaciones propulsor Tipo I	111
4.12. Sistema de posicionamiento USBL	119
4.13. Esquema de conexión	119

Índice de tablas

3.1. Error RMS variable η LQR	64
3.2. Error RMS variable η MRAC I	70
3.3. Error RMS variable η MRAC II	76
3.4. Error RMS variable η MRAC I vs II	77
3.5. Error RMS variable η MRAFC	90
3.6. Error RMS variable η TODOS	93
3.7. Error RMS variable η TODOS con perturbación	97
3.8. Error RMS variable η TODOS con ruido	99
4.1. Tipo de interfaz M2	104
4.2. Características Técnicas Jetson Xavier Nx	104
4.3. Características técnicas GY-91	105
4.4. Características técnicas USBL	108
4.5. Características técnicas propulsores	109
4.6. Características técnicas baterías	111

Nomenclatura

Símbolos

\mathbb{R}^3 Espacio Euclidiano

\mathbb{S}^3 Espacio Esférico 3-D

$SO(3)$ Grupo ortogonal especial de orden 3

Notación vectorial

$\nu = [u, v, w, p, q, r]^T$ vector de velocidad expresado en $\{b\}$

$\tau_{RB} = [X, Y, Z, K, M, N]^T$ vector de fuerzas y momentos expresados en $\{b\}$

$v_{b/n}^e$ Velocidad lineal del punto O_b con respecto a $\{n\}$ expresado en $\{e\}$

$\omega_{n/e}^b$ Velocidad angular de $\{n\}$ con respecto a $\{e\}$ expresado en $\{b\}$

f_b^n Fuerza con línea de acción a través del punto O_b expresado en $\{n\}$

m_b^n Momento sobre el punto O_b expresado en $\{n\}$

SNAME 1950

$p_{b/e}^e = [x, y, z]^T$ Posición ECEF

$p_{b/n}^n = [N, E, D]^T$ Posición NED

$\Theta_{en} = [\nu, \mu]^T$ Longitud y latitud

$\Theta_{nb} = [\phi, \theta, \psi]^T$ Ángulos de Euler

$v_{b/n}^b = [u, v, w]^T$ Velocidad lineal de O_b relativa a O_n expresado en $\{b\}$

$\omega_{b/n}^b = [p, q, r]^T$ Velocidad angular de $\{b\}$ relativa a $\{n\}$ expresado en $\{b\}$

$f_b^b = [X, Y, Z]^T$ Fuerza a través de O_b expresado en $\{b\}$

$m_b^b = [K, M, N]^T$ Momento sobre O_b expresado en $\{b\}$



Acrónimos / Abreviaturas

AUV Autonomous underwater vehicle

DOF Degrees of Freedom

IMU Inertial Measurement Unit

LQR Linear Quadratic Regulator

MIMO Multiple-input Multiple-output

MARC Model Reference Adaptive Controller

MARFC Model Reference Adaptive Fuzzy Controller

SISO Single Input Single Output

SNAME The society of naval architects and marine engineers

T-S Takagi-Sugeno

INTRODUCCIÓN

Todos en el mundo, hablando de modo general a todo ser viviente, hemos sentido en algún momento de nuestras vidas los estragos y consecuencias producidas por el cambio climático y efecto invernadero los cuales están muy íntimamente relacionados con la contaminación, está producida de forma indirecta por ejemplo por factores demográficos y socioculturales o de forma directa producida de forma natural o por acción del hombre. Estos cambios son percibidos como incrementos en la temperatura de forma extrema en ciertas zonas del mundo como el récord registrado en Grecia el 2021 alcanzando 48.8°C [23]. La generación de nuevos fenómenos climatológicos de forma inusual son una forma de percibir estos cambios, tormentas y ciclones, como en el caso de nuestro país, Perú, que en el tercer mes del año del 2023 se registró un ciclón después 40 años y que fue denominado “Yaku” causando lluvias intensas y desborde de ríos, e incluso pérdidas humanas. Estos cambios son percibidos también como la pérdida de masa de hielo en el polo norte y sur en nuestro planeta causando la muerte de fauna como el caso de los osos polares y el aumento de nivel en los océanos, o como el derretimiento de los glaciares en los Alpes suizos y en la cordillera de los andes como en el caso del nevado Huascarán en nuestro país.

Los océanos no son ajenos a los cambios producidos por el cambio climático, el efecto invernadero y la contaminación, son una parte importante en la vida del ser humano, y sobre todo en la existencia de vida en el planeta. Los cambios producidos por los factores antes mencionados alteran los parámetros normales de los océanos produciendo aumento de temperatura, cambios en la salinidad del agua, variación de la acidez (PH) en ciertas regiones costeras, etc. e incluso se podría hablar de nuevos factores que afectan a los océanos como la depredación extrema por parte del hombre, o la de especies exóticas invasoras que afectaría específicamente a ecosistemas importantes en las costas. Uno de los ejemplos más resaltantes y preocupantes debido a la variación de los parámetros normales del océano es la disminución de los arrecifes de coral vivo, los cuales albergan a innumerables ecosistemas costeros y que son uno de los más productivos del planeta, que ha tenido una reducción alrededor del 50 % en los últimos 150 años, producido por el aumento de temperatura y la acidificación del

océano [12]. Los océanos proporcionan alimento y estabilidad para la vida en general, es por ello la importancia de cuidarlos.

Los robots submarinos autónomos (AUVs, por las siglas en inglés de Autonomous Underwater Vehicle) han tenido auge en las últimas décadas debido a que poseen una arquitectura de control que les permite realizar misiones sin la supervisión de un operador. Además, de contener su propia fuente de energía, por lo general basada en baterías recargables, estos robots representan una mejora considerable al resolver las limitaciones impuestas por los cables de los ROVs (Remotely operated vehicle) durante las tareas programadas. Por esta razón, los AUVs actualmente se utilizan para tareas de exploración científica, muestreo oceanográfico, arqueología submarina y exploración debajo del hielo. Con la finalidad de recopilar datos que posteriormente son almacenados en la memoria interna del vehículo o transmitidos a la superficie para que puedan ser analizados. Entonces para que estos vehículos puedan realizar de una manera adecuada las ordenes programadas, es necesario que dispongan de un sistema de control que sea capaz de recorrer con precisión las trayectorias definidas por el usuario, teniendo en cuenta que los controladores convencionales no convergen a la trayectoria deseada o generan alto consumo de energía.

Por lo tanto, bajo este contexto se propone diseñar un controlador no lineal avanzado que pueda controlar un vehículo autónomo submarino y que permita cumplir con el requerimiento de mantener en constante observación los parámetros naturales y que esto nos ayude a tomar acciones inmediatas con la única finalidad de mantener océanos sanos y que permita preservar los ecosistemas marinos. En el siguiente trabajo de investigación se propone el “Desarrollo un controlador fuzzy adaptativo por modelo de referencia de un vehículo submarino autónomo de 6DOF” que permitirá controlar a disposición un vehículo autónomo submarino (AUV) y que sea capaz de recorrer trayectorias específicas haciéndolo de una manera óptima y rápida. Este controlador deberá ser robusto para cumplir con los requisitos principales como navegar en una trayectoria definida por el usuario del vehículo, que pueda sumergir en zonas poco profundas, aproximadamente 100 metros, y sobre todo mantener la estabilidad para el peso agregado al vehículo como son los diversos accesorios que este deberá contener (sensor de posicionamiento usbl, sensor radar, sistema de visión, etc.), e incluso robusto para posibles perturbaciones del medio en el cual estará expuesto como son las olas y corrientes marinas.

A lo largo de la historia se han desarrollado diversos tipos de controladores, como lo son los controladores convencionales (PD o PID), que inicialmente estaban enfocados para controlar sistemas de simple entrada y salida (SISO). Ahora también se cuenta

con controladores más sofisticados como el caso del controlador Regulador Cuadrático Lineal (LQR) que es capaz de desarrollar toda la ecuación de estado que describe un sistema. A pesar de ser excelentes controladores, aun así no son suficientes, y se espera más de un controlador que estará dedicado al vehículo autónomo submarino que presenta una alta complejidad dinámica y el cual se encontrara en un medio más agresivo y hostil, es por ello que se propone diseñar un controlador fuzzy adaptativo por modelo de referencia (MRAFC) capaz de garantizar la estabilidad y robustez del sistema a la hora de seguir trayectorias y reducir el error de seguimiento cuya estrategia estará basada en las teorías de control no lineal de Lyapunov y en los sistemas fuzzy tipo Takagy-Sugeno.

El presente trabajo de investigación estará estructurado en cinco partes. La primera parte presenta de forma preliminar el contexto de la tesis abordando de modo principal el estado del arte referente a los vehículos submarinos autónomos. La segunda parte se obtendrá un modelo matemático para la dinámica del vehículo centrándonos en la cinemática y cinética del objeto de estudio. La tercera parte estará dirigida al modelo de simulación y al controlador propuesto que será comparado con los controladores tradicionales como PD y LQR. La cuarta parte será referente a un modelo de implementación real basado en microcontroladores de 32bit de alto rendimiento. Y la parte final estará dedicado a los resultados generales, conclusiones y recomendaciones.

En el primer capítulo se abordarán aspectos generales del proyecto como, el problema, el estado del arte, los objetivos generales y específicos del tema en desarrollo. Se hará una clasificación de los modelos de AUV existentes en la actualidad, así como se describirán las características de modelos más resaltantes como ISE Explorer AUV, LAUV Harald y AUV Hugin. Además, se hará una descripción los componentes básicos de un AUV como sensores, unidades de procesamiento, dispositivos de comunicación, fuentes de alimentación y propulsores.

En el segundo capítulo se presenta el análisis del modelo de cuerpo rígido y un modelo de simulación general del vehículo. Este capítulo estará dividido en seis subgrupos que son cinemática, cinética, hidrostática, hidrodinámica, linealización de las ecuaciones de movimiento y un modelo de 6DOF para el vehículo en estudio. En la primera parte, cinemática, se analiza el modelo sin la presencia de fuerzas de movimiento y que particularmente describirá el teorema de Euler en rotación y las transformaciones de velocidad lineal y angular. En la segunda parte se hablará sobre la cinética, donde se analiza la presencia de fuerzas que tienen interacción directa con el cuerpo rígido y donde son aplicables las leyes de movimiento de Newton. La tercera parte se verán conceptos de Hidrostática donde dos fuerzas fundamentales son descritas,

fuerza gravitacional y fuerza de flotabilidad. En la cuarta parte se verán conceptos de hidrodinámica donde estarán presentes fuerzas de amortiguamiento. La quinta parte presentará un modelo linealizado del sistema, llamado sistema de coordenadas paralelo al vehículo. Y la última parte donde se mostrará el modelo de simulación general del AUV donde se indicarán cada una de las matrices que forman parte de la ecuación general que estará representada en forma vectorial.

En el tercer capítulo se diseñarán controladores como el regulador cuadrático lineal (LQR) y controlador adaptativo por modelo de referencia (MRAC) que servirán como modelos de comparación para el diseño del controlador propuesto fuzzy adaptativo por modelo de referencia (MRAFC). Para el modelo MRAC se decidió dividir la simulación en dos modelos, el primero donde se hace una realimentación hacia adelante solamente a la planta, y el segundo donde se hace una realimentación hacia adelante a ambos, al modelo de referencia y a la planta. En el modelo MRAFC se describirá como se generan las leyes de control basado en los sistemas de Takagy-Sugeno y como se aplica la teoría no lineal de Lyapunov para el seguimiento asintótico del modelo de referencia. En cada uno se generarán índices de desempeño para hacer la comparativa entre los distintos controladores y se mostrarán imágenes de simulación para velocidades de prueba ordenadas de menor a mayor.

El cuarto capítulo presentará una propuesta de implementación, el cual se desarrolla en dos secciones. La primera sección será enfocada en presentar el hardware necesario para la implementación del AUV, así como explicar brevemente las características técnicas más importantes de los componentes. Mientras que en la siguiente sección se implementarán algoritmos en pseudocódigo para la implementar controlador MRAFC en estudio y que será almacenado en el CPU del vehículo. Esta implementación tendrá como sistema central una placa de desarrollo Jetson Xavier NX que dispone de un procesador de alta gama y de una GPU embebida. Además, dispondrá de un módulo de unidad inercial y de un sistema de navegación acústica USBL. También, se hará uso una tarjeta de desarrollo basada en un microcontrolador de 32 bits para generar señales PWM y de este modo controlar los propulsores.

Finalmente, se mostrarán las conclusiones finales en base a los resultados obtenidos al aplicar el controlador MRAFC propuesto al modelo no lineal del vehículo obtenido en los capítulos previos. Además se harán comparativas de índices de desempeño cuando el AUV es sometido a diferentes controladores de prueba, tales como los controladores LQR y MARC. También serán consideradas algunas recomendaciones para los trabajos futuros.

Capítulo 1

ESTADO DEL ARTE

1.1. Presentación de la problemática

La superficie del océano está siendo afectada por factores como el cambio climático, el efecto invernadero y la contaminación ambiental. Alguno de ellos debido a causas naturales como por ejemplo, la contaminación producida por la activación de un volcán que provoca no solo contaminación, sino que genera un efecto en cascada donde la emisión de gases como el dióxido de carbono incrementa las condiciones del efecto invernadero, aumentando la temperatura del planeta y por consiguiente la temperatura de los océanos. Y esto a la vez incrementa los cambios climáticos que han producido el deshielo en glaciares y en los polos del planeta causando incrementos en el nivel del mar. Por otra parte, estas las causas son provocadas por intervención directa de hombre cuando se incrementa la emisión de gases en las industrias, con proyecciones de 40.600 millones de toneladas de carbono emitido en el año 2022 [13], en la tala indiscriminada de árboles en la selva de Perú causando la pérdida de más de 200 mil hectáreas de bosques en el 2020 según el portal GeoBosques, o la generación de residuos sólidos que solo aquí en nuestro país se generan más de 21 millones de toneladas diarias según el Ministerios del Ambiente.

Tanto las causas naturales y las provocadas por acción directa del hombre son considerados impulsores directos en los cambios en los océanos. Esto ha producido que más del 40 % de la superficie del océano sea considerada afectada en el año 2008 y que solo el 3 % esta descrito como libre de presión humana en el año 2014 según la plataforma intergubernamental de diversidad biológica y servicios del ecosistema (IPBES). Tomando en cuenta que algunas de las contribuciones de los océanos son irremplazables, uno de los ejemplos más resaltantes a causa a la variación de los parámetros normales del océano es la disminución de los arrecifes de coral vivo, los cuales albergan

a innumerables ecosistemas costeros y que son uno de los más productivos del planeta, que ha tenido una reducción alrededor del 50 % en los últimos 150 años, producido por el aumento de temperatura y la acidificación del océano [29, 10]. El deterioro de estos ecosistemas reduce su capacidad de proteger las costas, a las personas y especies que viven en ellas.

La preocupación por mantener saludables los ecosistemas marinos es una de las motivaciones de este trabajo de investigación y que también ha sido motivación de investigadores en todo el mundo generando un incremento científico en navegación y exploración oceanográfica intentando desarrollar nuevas tecnologías que tengan la capacidad de ingresar en las profundidades marinas con tareas programadas de búsqueda y exploración. Una de estas tecnologías son los vehículos submarinos autónomos (AUV), cuyo desarrollo e investigación es objeto de constante estudio por parte de investigadores debido a su capacidad de amplia aplicación en ciencia marina y seguridad marítima. Así, estos vehículos se utilizan actualmente para monitorear parámetros físicos como temperatura, pH, salinidad, etc. Y para ello se requiere de un adecuado sistema de navegación autónoma formado esencialmente por un controlador digital que será capaz mantener la estabilidad y seguimiento en trayectorias específicas. Sin embargo, debido a su alta complejidad, considerando su dinámica y altas perturbaciones, es difícil diseñar un controlador no lineal para el vehículo con buen rendimiento.

Como ya se ha mencionado en líneas anteriores, el primer problema que se debe de abordar para el diseño de un controlador es la complejidad dinámica no lineal del vehículo. Actualmente controladores clásicos convencionales (PI o PID) [38, 43] presentan diversas dificultades debido al modelo no lineal del vehículo donde es necesario hacer el control a toda la variable de estado y en esencia el controlador clásico está diseñado para sistemas SISO, aunque existe una versión que mejorara esa dificultad siendo posible controlar sistemas MIMO, pero para nuestro caso de estudio esto hace más complejo todo el sistema. También se tiene controladores más actuales como el caso del regulador cuadrático lineal (LQR) [16] o el controlador adaptativo por modelo de referencia (MRAC) [28, 22, 21], los cuales son buenos controladores pero insuficientes al momento de seguir trayectorias establecidas por el usuario e incluso generando el efecto chattering en la salida de control para los propulsores. Entonces debido a esto se propone diseñar un controlador fuzzy adaptativo por modelo de referencia (MRAFC) [26, 8, 33] capaz de garantizar la estabilidad y robustez del sistema a la hora de seguir trayectorias y reducir asintóticamente el error de seguimiento. La estrategia propuesta para este controlador es basada en los sistemas fuzzy tipo

Takagy-Sugeno [35] y que es usado para el diseño del controlador y el mecanismo de adaptación.

Otro tipo de controladores también han podido sobresalir aplicados al campo de los robot móviles tales como los tipo predictivos [5] con la finalidad de mitigar perturbaciones y los errores de medición en sensores. Mientras que por otro lado, los controladores por modo deslizante (CMD) [20], son usados para resolver problemas de regulation y seguimiento debido a su alto rendimiento y robustez. A pesar de ser buenos controladores, estos últimos, presentan chattering en la señal de control, por lo que se suele usar variaciones como backstepping con CMD o lógica difusa con CMD. Por lo que, a medida que las modernas estrategias de control crecen en complejidad, los controladores difusos son muy competitivos en aplicaciones de alto rendimiento.

1.2. Robots submarinos

Al hablar de los efectos negativos que se presentan en los océanos a causa del cambio climático y la contaminación ambiental, también es hablar a la par de los efectos positivos que estos han producido al avance científico oceanográfico, en especial al área de navegación y exploración submarina, impulsando rápidamente publicaciones de artículos y trabajos de investigación por desarrollar dispositivos que puedan recolectar y monitorear los parámetros intrínsecos del océano, explorar las profundidades marinas, e impulsar operaciones de navegación al recorrer trayectorias específicas. Estos dispositivos son conocidos como robots submarinos cuyo propósito es la de ejecutar tareas específicas en las profundidades del océano teniendo en cuenta que estos poseen una compleja dinámica y están expuesto a un medio considerado hostil que posee una considerable cantidad de perturbaciones.

Estos robots tienen la tarea de recopilar información que serán transmitidas a su estación base que por lo general será un barco se encuentra en superficie del océano. Es ahí donde se coloca un transmisor-receptor de su sistema de posicionamiento dentro del fondo marino y servirá como el origen de su sistema de coordenadas como se muestra en la Figura 1.1.

1.2.1. Clasificación de los robots submarinos

Los robots submarinos pueden ser identificados en primera instancia por el tipo de autonomía que poseen, esto es, si son totalmente autónomos conocidos como vehículos submarinos autónomos (AUV) que serán programados con una secuencia de tareas

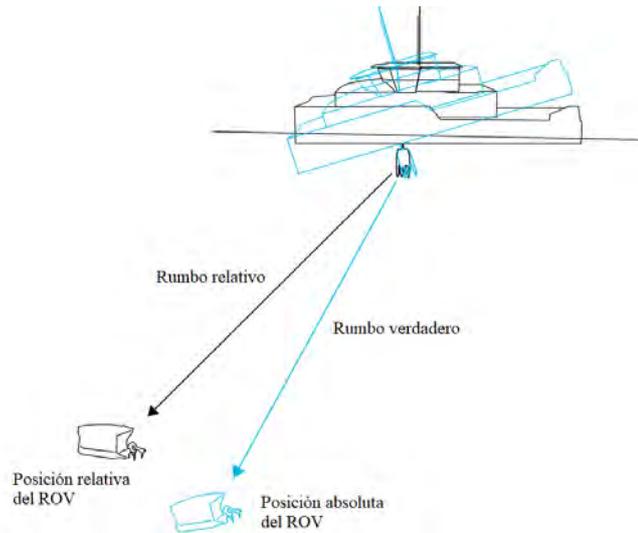


Figura 1.1 Sistema de posicionamiento de un robot submarino [18]

específicas y al terminar regresarán al punto de inicio con los objetivos ejecutados sin requerir la intervención humana, o serán controlados por algún operador, conocidos como vehículos operados remotamente (ROV) [17] que contarán con la característica de estar conectados hasta la superficie mediante cables quienes suministran de energía y transmisión de señales de control. Incluso también se puede hablar de un tercer tipo de robot submarino que son una versión intermedia conocidos como vehículos submarinos autónomos para intervenciones (IAUV) en donde un operador tomara las decisiones lógicas. Por otra parte, los robots submarinos pueden ser identificados por el tipo de tarea que van a realizar, por lo general serán tareas tipo inspección o tareas tipo manipulación. Los robots de inspección irán tomando datos durante todo el recorrido de su trayecto, generalmente por los sensores con los que ha sido implementados como la temperatura, presión, su sistema de visión y su radar acústico que le permita generar una cartografía del fondo marino. Los robots de tareas de manipulación tendrán implementado algún tipo de brazo manipulador que le permita recolectar muestras una vez este haya llegado a su punto objetivo. Por último, también es posible identificar los robots según su tipo de propulsión como se muestra en la Figura 1.2, los cuales son definidos como tipo impulso de hélice, planeadores, de inyección, bio-inspirados y magneto-hidrodinámicos.

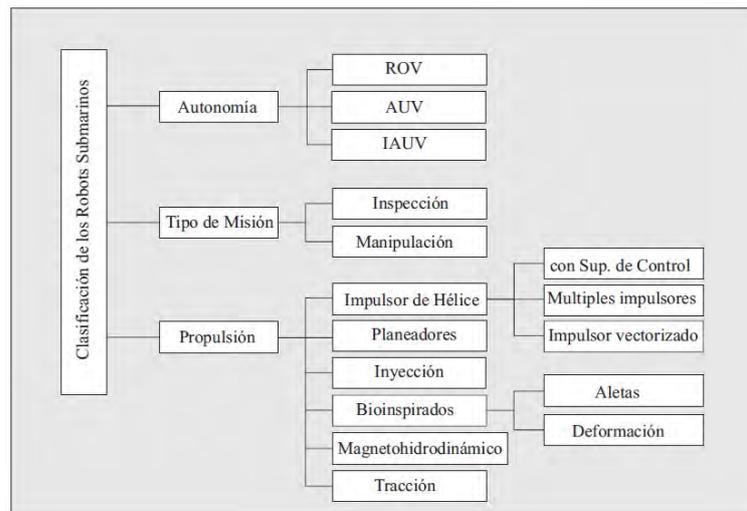


Figura 1.2 Clasificación de robots submarinos [3]

1.3. Vehículos submarinos autónomos (AUVs)

Dentro de los robots submarinos que se mencionaron en la sección anterior, fijaremos nuestra atención en los que son tipo vehículos submarinos autónomos (AUV) donde la característica principal es que no requieren la intervención de un operador humano, dándonos a entender que este tipo de vehículos tiene una serie de tareas preconfiguradas antes de dejar el punto de partida.

Otra característica resaltante es que no necesitan una conexión mediante cables hacia la estación base, esto quiere decir que en su esquema de funcionamiento deben de estar equipados con baterías en su interior. De igual forma deben de transmitir los datos de la misión hacia su estación base o deberán de estar equipados con dispositivos de almacenamiento en su interior. Tomando en cuenta que toda la masa agregada al vehículo tanto de las baterías, sistema de almacenamiento, y su variedad de sensores tendrán que ser considerado a la hora de obtener el centro de gravedad de todo el vehículo.

Estos vehículos por lo general están diseñados con forma simétrica con la finalidad de ayudar a reducir la carga computacional en las ecuaciones que describen los parámetros hidrodinámicos. Diseñados en forma de bala con simetría en dos planos (YZ) y que ayuda a reducir la fricción con el medio que estará expuesto. Comúnmente están equipados con propulsores en la parte posterior y con estabilizadores en el interior de su cuerpo.

1.3.1. Clasificación AUVs

La manera mas común de clasificar los AUV es según la carga que pueden transportar [25].

1. **AUV Oceánicos:** Estos AUV pueden llegar a medir entre 3 y 20 m. Alcanzan hasta 72 horas de autonomía, lo que significa que requieren una cantidad elevada de baterías. Pueden llegar a sumergirse hasta 6.000 m y normalmente la tarea mas común que realizan es entregar una carga útil que puede estar comprendida desde los 35 Kg a mas.
2. **AUV Ligeros:** Estos AUV pueden llegar a pesar entre 50 y 300 Kg, alcanzando profundidades de 2.000 m y pueden transportar una carga muy proxima a los 35 Kg. La forma de ingreso al mar puede ser desde aviones al lanzarlos desde el aire o sumergidos desde naves en superficie del mar. Las tareas que realizan comúnmente son de recolección de muestras o monitoreo, por lo que son de corta duración.
3. **AUV Portátil:** Son los AUV mas pequeños que pueden llegar a pesar 50 Kg. Además poseen una autonomías considerable, llegando a estar debajo del agua alrededor de 20 horas. Alcanzan a sumergirse hasta los 200 m y pueden transportar una carga maxima de 5 Kg. La forma de ingreso al mar comúnmente es al ser lanzados desde la superficie desde pequeñas embarcaciones.

1.3.2. Antecedentes de AUVs

1. **ISE Explorer AUV:** recopila datos que cumplen con la OHI a una velocidad de 750 a 1100 km por semana de tiempo de envío con todos los sensores en funcionamiento y es el AUV más modular y maniobrable en el mundo de hoy. El diseño modular del EXPLORER le permite transportar múltiples cargas útiles en su sección de carga útil espaciosa, intercambiable y personalizable.

a) **Especificaciones técnicas:**

- Longitud del vehículo: 4.5-7.5m
- Peso en el aire: 620-1700 kg
- Profundidad máxima de funcionamiento 3000m
- Velocidad, 0,5 a 2.5 m/s
- Resistencia típica 24-85h

- Capacidad Energía, 18-48KWh - Lithium Ion

b) Comunicaciones:

- INS: iXblue PHINS
- DVL: Navegador Teledyne RDI Workhorse
- OAS y seguimiento del terreno: Multihaz Imagenex Delta-T
- GPS: Diferencial
- Comunicación Acustica: Sercel MATS 3G
- Comunicación superficial: Radio UHF (WiFi) e Iridium
- Equipo de emergencia: Caída de peso y luz estroboscópica

c) Sensores:

- 2G cámara y laser - SBE49 CTD
- ET 2200-M SSS/SBP - Kraken InSAS - OFG magnetómetro - Cathx cámara y laser
- EM2040 - R2Sonic 2022 y 2024 - EM2000 - Reson 7125-C - ET 2205 SSS/SBP
- Sensor de profundidad: Paroscientific Digiquartz
- Posicionamiento Acústico: sistema iXblue USBL o SLBL



Figura 1.3 Robot submarino ISE Explorer AUV

2. **LAUV - Harald:** El LAUV es un vehículo liviano, fácilmente desplegable, operado y recuperado con una configuración operativa mínima. Es compatible con WiFi, Iridium, GSM y comunicaciones acústicas. LAUV está clasificado para una profundidad de 100m y tiene un diámetro de 15 cm, con una resistencia que varía según el tamaño y la configuración de la carga útil.

a) Especificaciones técnicas:

- Longitud del vehículo: 240cm
- Peso en el aire: 32,1 kg
- Profundidad máxima de funcionamiento 100m
- Velocidad, 0,5 a 2 m/s
- Resistencia típica 24h @1kn
- Capacidad Energia 8x 173.6Wh Li-ion

b) Comunicaciones:

- WLAN hasta 1 km con el módem Manta
- Evologics S2CR 18/34 USBL módem acústico submarino para un enlace de hasta 1km
- Módulo Iridium SBD
- Pinger acústico de emergencia e hidrófono direccional con un alcance de hasta 2 km
- Sistema de referencia de actitud y partida (AHRS) con la ayuda de DVL.

c) Sensores:

- CPU principal: AMD Geode LX 800 CPU
- IMU: Microstrain 3DM-GX4-25
- CTD: SeaBird SBE 49 FastCAT
- Oxígeno disuelto: Aanderaa Optode 4831F
- Fluorómetro: WetLabs EcoPuck Triplet



Figura 1.4 Robot submarino LAUV-Harald

3. **AUV HUGIN:** Está optimizado para inspección submarina, mapeo e inspección de tuberías. Está equipado con una solución de navegación y sensores de

carga útil que incluyen Sonda de Apertura Sintética (SAS), ecosonda multihaz, perfilador inferior, cámara a color y perfilador láser. HUGIN puede operar de forma autónoma o bajo supervisión con comunicaciones a través del sistema de posicionamiento HiPAP. Esto proporciona a los operadores comentarios en tiempo real de las actividades de HUGIN, muestras de datos y posicionamiento.

a) Especificaciones técnicas:

- Longitud del vehículo: 6m
- Peso en el aire: 1100 kg
- Profundidad máxima de funcionamiento 4500m
- Velocidad, 1 a 6 Knots
- Resistencia típica 26h @3Knots / 20h @4Knots
- Capacidad Energia 824KWh Pressure compensated Lithium Polymer

b) Comunicaciones:

- IMU: Honeywell HG9900
- DVL: Teledyne RDI 300 kHz Navigator
- Processing: Kongsberg Maritime NavP
- External Position and Communications Link: Kongsberg Maritime HiPAP 350 series with IMU (Seatex MGC)
- Navigation Processing: Kongsberg Maritime NavLab

c) Sensores:

- Synthetic Aperture Sonar: Kongsberg Maritime HISAS 1032 with in-mission
- Multibeam Echosounder: Kongsberg Maritime EM2040 0.7°x0.7° beam angle, single receiver
- Sub-bottom Profiler: EdgeTech DW 1-6 kHz
- Camera and Laser Profiler: CathX Ocean HD color still image camera with laser profiler with separate receiver
- Data Storage: Kongsberg Maritime Removable Data Storage Device

1.3.3. Componentes de los AUVs

Los vehículos submarinos están incorporados con una serie de dispositivos que le permiten funcionar correctamente tales como su sistema de posicionamiento que le



Figura 1.5 Robot submarino AUV Hugin

permite ubicarse exactamente en las profundidades marinas, baterías que le permiten dar energía a su sistema de control y mantener determinada autonomía, o los propulsores que le darán la potencia para el movimiento que deberá tener en el océano. Sin embargo, también son incorporados con equipos para tareas específicas para los cuales son programados y que deberá realizar, tales como su sistema de visión que le permitirá capturar imágenes y video de una determinada área u objeto, o en el caso de incorporar un mecanismo tal como un brazo articulado que le permita tomar muestras en las profundidades. A continuación, se presentan los principales componentes a tener en consideración en el diseño de un AUV [3]:

1. **Sensores:** Diferentes dispositivos de adquisición de datos son necesarios para que el vehículo submarino pueda ejecutar tareas correctamente empezando por la forma en como obtiene su posición o su orientación hasta la forma de cómo puede adquirir imágenes y video. Estos dispositivos son llamados sensores que estarán enfocados en obtener información de un parámetro en específico y el cual contribuirá en el desarrollo total del AUV. Los principales sensores en la construcción de robots submarinos son considerados a continuación:
 - a) **Unidades de medición inercial:** Poder determinar las velocidades angulares en los tres ejes coordenados o conocer los ángulos de giro del propio vehículo son tarea de los dispositivos denominados IMU (Inertial Measurement Unit). Dispositivos compuestos de electrónica embebida como el caso de acelerómetros y giroscopios que serán alimentadores de información para el sistema de navegación.
 - b) **Sensores de profundidad:** Saber a qué profundidad se encuentra el vehículo es de consideración, pues es de conocimiento que a mayor profundidad mayor presión es ejercida por el mar, llegando a producir una situación donde la presión exterior es superior a la presión interior causando una implo-

sión en el vehículo. Los dispositivos son denominados barómetros capaces de estimar la profundidad midiendo la presión ejercida por el mar incluyendo la presión atmosférica. Estos sensores son usados tanto en vehículos submarino como en drones y están basados en sistemas MEMs (Micro-Electromechanical).

- c)* **Sensor de velocidad de efecto Doppler:** Es necesario en las misiones estimar la distancia y velocidad relativa con el fondo marino es por ello que los dispositivos DVL (Doppler Velocity Log) que permiten estimar estos parámetros por medio de tecnología acústica aplicando conceptos del efecto Doppler (en honor al físico matemático Christian Doppler). Esta técnica consiste en emitir un pulso largo desde un número determinado de transductores y luego medir el cambio de frecuencia del eco recibido.
- d)* **Sistema de posicionamiento global:** Una vez que el vehículo pueda sumergir y establecerse en la superficie es necesario ubicarlo con respecto al marco global. Es aquí donde los dispositivos GPSs (Global Positioning System) toman relevancia, utilizados para determinar su localización. El sistema GPS consta de tres elementos: Satélites moviéndose alrededor del planeta en una determinada órbita (habitualmente establecidos en la órbita MEO), estaciones terrestres y elementos receptores. Todo el sistema puede llegar a tener estimaciones de la posición en centímetros, aunque es común tener estimaciones en metros.
- e)* **Sistema de navegación por sonido:** Un dispositivo muy utilizado en el tema de navegación marina es el llamado SONAR (Sound Navigation And Ranging), el cual a comparación de los radares que emiten ondas electromagnéticas este emite ondas acústicas para detectar objetos, navegar y comunicarse. Su técnica está basada en emitir un pulso de sonido en un rango de frecuencia determinado y así calcular la diferencia de tiempos desde la propagación de la señal y la recepción del eco. El rango de frecuencia más usado se encuentra entre 20 Hz y 20 000 Hz sin embargo es posible usar un rango en alta frecuencia comprendido entre 80 kHz o 350 kHz, pero considerando que se gana exactitud, pero se pierde alcance.
- f)* **Sistema de posicionamiento acústico:** Conocer la posición en la que se encuentra el vehículo submarino es una condición necesaria para que el sistema de navegación pueda funcionar. Es por ello que se instala un sistema de posicionamiento en la nave que se encuentra en la superficie que será el origen del sistema de coordenadas como se muestra en la Figura 1.1

conocido como USBL (ultra-short baseline). Este dispositivo emitirá ondas acústicas y calculará la distancia midiendo los tiempos de ida y vuelta de la señal obteniendo así la posición exacta del vehículo. Dependiendo de la longitud onda emitida estos serán clasificados como:

- **LBL:** Línea base de onda larga
- **SBL:** Línea base de onda corta
- **USBL:** Línea base de onda ultra-corta

En los sistemas LBL podemos encontrar a los hidrófonos los cuales serán instalados en una determinada zona de interés en el fondo marino donde se realizarán las tareas de exploración o manipulación, siendo de utilidad no solo para obtener la posición sino también la orientación del vehículo. Los sistemas SBL y USBL se utilizan para comunicar vehículos submarinos con naves en la superficie.

- g) **Sistema de Visión:** Una de las tareas específicas de los vehículos submarinos es poder hacer exploraciones en las profundidades, es por ello que deben de tener incorporado un sistema de visión que le permita identificar y procesar zonas u objetos en su misión mediante la captura de fotografías y videos. Actualmente también se le ha dado otras funcionalidades como el de calcular la velocidad del vehículo mediante el flujo de información entre cada fotograma procesando variaciones relevantes en la imagen con respecto al tiempo. Pero esta funcionalidad se ve limitada a ciertas áreas o zonas con buena iluminación como el caso de zonas costeras poco profundas y donde la turbulencia del medio no obstaculice la visión. Es por ello que para zonas profundas donde la iluminación es prácticamente nula es necesario usar otras tecnologías, como el caso de un sistema de visión basado en ondas acústicas llamado comúnmente un eco-radar que permite obtener la posición de obstáculos en su área circundante al emitir ondas sonoras en una determinada frecuencia generando así una visión cartográfica, idea obtenida de investigaciones en el comportamiento de los murciélagos y delfines.

2. **Unidades de Procesamiento:** Una de las partes fundamentales de un vehículo submarino son las unidades de procesamiento donde está alojado el sistema de control, pues aquí es donde se programan las tareas que deberá ejecutar, así como también del sistema de navegación que deberá tener incorporado, el cual estará basado en un controlador avanzado como el MRAFC propuesto en este

trabajo de investigación o de autopilotos que son firmware de código abierto de los cuales se pueden mencionar a Pixhawk [4] o Ardupilot [6]. Y comúnmente estos firmware son instalados en procesadores de 32 bit como ARM Cortex-M4 o ATMEGA32U. Por otro lado, aquí es donde será procesada la información proveniente de los sensores como el caso de los IMUs (Unidad de medida inercial) que consta de acelerómetros para medir la velocidad lineal y angular y giroscopios para la orientación. Posteriormente esta información será guardada en alguna unidad de almacenamiento o serán transmitidos mediante algún dispositivo de comunicación. Por lo general están basadas en tarjetas electrónicas con microcontroladores o microprocesadores de alto rendimiento y bajo consumo de energía como el caso de la tarjeta Raspberry Pi o Beaglebone.

3. **Dispositivos de Comunicación:** En la construcción del vehículo submarino existe la imperiosa necesidad de transmitir y comunicarse con la nave en la superficie o un sistema de control remoto. Esto, tanto para transmitir la información tomada desde los sensores específicos como temperatura, presión, etc. o sistemas periféricos como el sistema de radar o la visión cartográfica, así como para transmitir información propia del estado del vehículo como su posición y orientación. Una de las primeras opciones fue usar cables entre el vehículo y la nave en superficie como en el caso de ROV, pero para AUV es más recomendable usar transmisión por el agua mediante modem acuáticos debido a que las ondas electromagnéticas tienen un alcance limitado cuando se encuentran en un medio acuático. Otra forma de comunicar es usando sonoboyas los cuales están conectados al vehículo mediante cables y este a su vez establecerá comunicación con la nave en la superficie [7].
4. **Fuentes de Alimentación:** Hablar de la autonomía de un vehículo submarino es hablar de la fuente de alimentación que lo componen. La fuente de energía para AUV por lo general son baterías que estarán agrupadas en forma serie o paralela para dotar de más voltaje o amperaje a los dispositivos internos. La elección del tipo de batería va a depender de la carga requerida y de la forma del vehículo. Las baterías más usadas son las de tipo LiPo (Polímero de Litio) las cuales son recargables y tienen un parámetro característico C el cual indica la capacidad de descarga o la rapidez con la que una batería puede ser descargada de forma segura, importante cuando se tiene que alimentar con energía a motores eléctricos.

5. **Propulsores:** Los movimientos en la estructura del vehículo son generados mediante fuerzas externas, con la finalidad de obtener velocidades lineales y angulares capaces de establecerse en una posición específica y en ángulos de orientación determinados por el sistema de navegación. Estas fuerzas son generadas mediante un sistema de propulsión que está compuesto por un determinado número de dispositivos como los propulsores capaces de proporcionar torque para el movimiento del vehículo. Los propulsores conocidos también como impulsores de propela compuestos generalmente de un motor eléctrico acoplado a una propela, están ubicados dependiendo de la cantidad de grados de libertad que se requiera y del tipo de modelo de robot submarino a construir. Es así, que en un modelo tipo AUV comúnmente están instalados en la parte posterior o popa como impulsores principales, en cavidades horizontales y verticales de la estructura para proporcionar estabilidad como se muestra en la Figura 1.6. Una forma de calcular el empuje producido por los propulsores está representado por la siguiente ecuación: $E = K\omega^2$, donde E es el empuje producido, ω es la velocidad angular de la propela, y K es una constante de proporcionalidad [7].

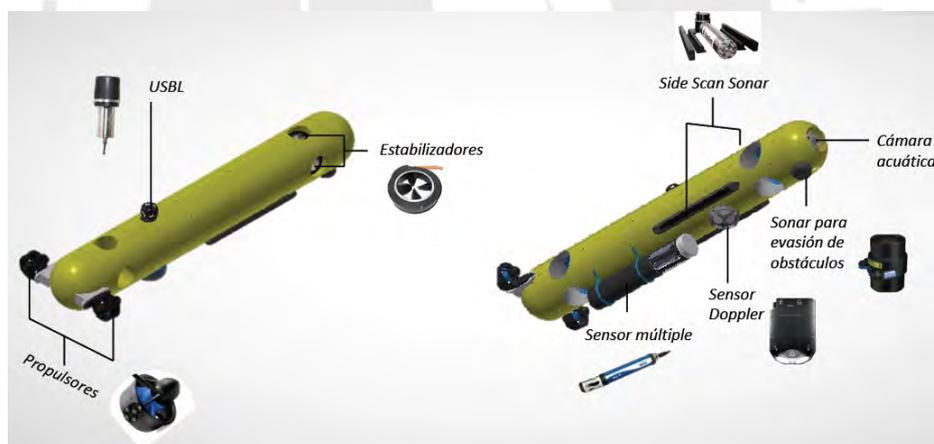


Figura 1.6 Vehículo Submarino Autónomo [12]

Después de todo lo expuesto previamente, en este trabajo de investigación se propone el diseño de un controlador fuzzy adaptativo por modelo de referencia (MRAFC), que tenga la capacidad de seguir una trayectoria definida con el mínimo error en estado estacionario y con un reducido consumo de energía. Todo esto, con la finalidad de cumplir con las tareas de exploración o manipulación programadas. Por lo tanto, este desarrollo se realizará mediante los siguientes objetivos.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

- Desarrollar un controlador fuzzy adaptativo por modelo de referencia (MRAFC) de un vehículo submarino autónomo de 6DOF que sea capaz de seguir una trayectoria definida por el usuario final del vehículo a zonas costeras poco profundas (cien metros aproximadamente).
- Este diseño implica que el controlador sea robusto ante perturbaciones del medio, que permita obtener información de los parámetros del océano y que tenga mayor eficiencia y rendimiento que los controladores convencionales como el regulador cuadrático lineal (LQR) y el controlador adaptativo por modelo de referencia (MRAC).

1.4.2. Objetivo Específicos

- Desarrollar un estudio del arte del vehículo submarino autónomo de 6DOF y sistemas de control en la actualidad.
- Desarrollar un modelo dinámico del vehículo submarino autónomo de 6DOF.
- Obtener un modelo lineal basado en la dinámica no lineal del vehículo submarino autónomo de 6DOF.
- Desarrollar un sistema de control fuzzy adaptativo por modelo de referencia.
- Validar y verificar el rendimiento del controlador (MRAFC) versus controladores convencionales como el regulador cuadrático lineal (LQR) y el controlador adaptativo por modelo de referencia (MRAC) por medio de un índice de desempeño.
- Desarrollar una propuesta de implementación del sistema de control avanzado desarrollado

Capítulo 2

MODELO NO-LINEAL AUV 6DOF

2.1. Introducción

Este capítulo se enfoca en estudiar el comportamiento del AUV objeto de estudio, y describir mediante ecuaciones matemáticas la dinámica no lineal del vehículo. Este estará dividido en dos grandes secciones que se denominarán *Modelamiento* y *Linealización*. La primera sección estará compuesta de los apartados como cinemática, cinética, hidrostática e hidrodinámica. Mientras que en la segunda sección nos enfocaremos en los apartados de linealización considerando ejes de coordenadas paralelo y modelo de simulación final para un vehículo de seis grados de libertad (6DOF) considerando conceptos de simetría en los ejes coordenados para ayudar a reducir la carga computacional de las matrices que describirán el comportamiento dinámico del AUV. Es por ello, que para iniciar cambiaremos temporalmente la forma en como nos referimos al AUV y en su lugar se adoptara la nominación de cuerpo rígido.

Este cuerpo rígido será evaluado como un sistema de 6DOF donde se estará evaluando seis variables que describen la posición total con respecto a un sistema de coordenadas, donde tres de ellos describirán su posición mediante los ejes coordenados XYZ conocidos como *surge*, *Sway*, *heave* y tres variables que describirán su inclinación mediante ángulos conocidos como *roll*, *pitch*, *yaw*. Se considerará el cuerpo rígido cuando este no está sujeto a ninguna fuerza donde se verán conceptos de estática que se tocarán en el apartado de cinemática, obteniendo las primeras ecuaciones concernientes a rotación mediante los ángulos de Euler y ecuaciones de momento lineal y angular. A continuación, el cuerpo rígido será evaluado cuando este sujeto a fuerzas externas como el caso de los propulsores y estabilizadores, los cuales estarán sujetos mediante el concepto de la segunda ley de Newton dándonos ecuaciones que describen su dinámica y asimismo será evaluado a detalle en el apartado de cinética.

Lo siguiente será evaluar el cuerpo rígido cuando está sumergido en un medio líquido de forma estática y que está gobernado por los conceptos básicos de Arquímedes. Aquí se verán las fuerzas de restauración que influyen, como la fuerza de la gravedad efectuado desde el centro de gravedad del vehículo y la fuerza de flotabilidad efectuado desde su centro de flotabilidad. Por otra parte, será necesario describir algunos temas complejos como el caso de los parámetros hidrodinámicos como lo son la masa añadida y la matriz Coriolis los cuales están presente cuando el vehículo está en movimiento en el apartado de hidrodinámica.

Luego de obtener las ecuaciones no lineales del comportamiento de un cuerpo rígido de forma general será necesario establecer ciertas condiciones para hacer el cálculo de una forma simplificada apoyándonos de la geometría del vehículo y estableciendo simetría en planos específicos. Luego de esto se establecerá una forma lineal a partir del modelo no lineal que nos será de ayuda para obtener una solución al sistema de estados obteniendo la matriz de autovalores en estado estable que será de suma importancia para el desarrollo de controladores en el siguiente capítulo.

2.2. Modelamiento

El modelo de estudio del cuerpo rígido de 6DOF está basado en la forma vectorial de acuerdo con Fossen [14]:

$$\dot{\eta} = J_{\Theta}(\eta)v \quad (2.1)$$

$$M\dot{v} + C(v)v + D(v)v + g(\eta) + g_0 = \tau + \tau_{wind} + \tau_{wave} \quad (2.2)$$

Donde: η es un vector conformado por variables de posición NED y ángulos de Euler, mientras que v es un vector conformado por velocidades lineales y angulares evaluadas en el marco de referencia fijo al cuerpo. Además en la ecuación (2.1) esta presente la matriz de transformación J_{Θ} que permite realizar transformaciones de velocidad lineal y angular entre los marcos de referencia fijo al cuerpo y NED. Por otro lado, en la ecuación (2.2) se puede encontrar la matriz de masas M , la matriz coriolis C , la matriz de parámetros hidrodinámicos D [9], $g(\eta)$ es un vector de fuerzas de gravedad y flotabilidad, mientras que el vector de fuerzas y momentos estáticos para sistemas tipo lastre son indicados en g_0 y los vectores de fuerzas externas $\tau, \tau_{wind}, \tau_{wave}$.

Este sistema no lineal mostrado en forma vectorial describe la dinámica de vehículos submarinos, donde la primera ecuación (2.1) describe transformaciones lineales y angulares obtenidos mediante los conceptos de Euler, mientras que la segunda ecua-

ción (2.2) describe una dinámica compuesta del vehículo basados en la segunda ley de Newton.

2.2.1. Cinemática

2.2.1.1. Variables de movimiento

Definir las variables de movimiento es parte fundamental en el desarrollo de un vehículo submarino. Estas variables están relacionadas con la cantidad de grados de movimiento que se desea tener. Para este proyecto de investigación está establecido en tener seis grados de libertad (DOFs), es por ello que se requiere de seis variables independientes que describan cada uno de esos grados de libertad. Las variables serán definidas como *surge*, *sway*, *heave*, *roll*, *pitch* y *yaw*, ver Figura 2.1, donde las tres primeras describen la posición y las tres últimas la orientación.

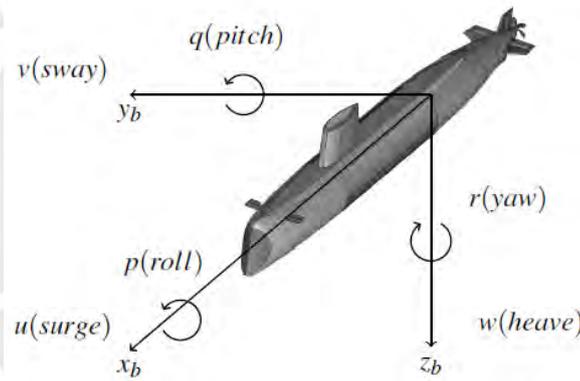


Figura 2.1 Variables de movimiento de un AUV

2.2.1.2. Marcos de Referencia

Cuando analizamos el movimiento de vehículos submarinos en 6DOF, es conveniente definir dos marcos de coordenadas centrados en la tierra como se indica en la Figura 2.1. Además, varios marcos de referencia geográficos son necesarios.

1. Marcos de Referencia centrados en la tierra:

ECI: Marco de referencia inercial centrado en la tierra. Este marco es representado de la forma $\{i\} = (x_i, y_i, z_i)$ donde su origen $\{i\}$ coincide con el origen o_i que representa el centro de la tierra. La principal característica es que este marco de referencia no presenta aceleración y es considerado fijo en el espacio.

ECEF: Marco de referencia fijo centrado en la tierra. Este marco es representado de la forma $\{e\} = (x_e, y_e, z_e)$ donde su origen $\{e\}$ coincide con el o_e que representa el centro de la tierra considerando que sus ejes rotan con relación al marco inercial $\{i\}$ como se muestra en la Figura 2.2. Una característica similar al marco $\{i\}$ es que este tampoco presenta aceleración, pero si velocidad angular, y debido a que esta velocidad es constante es considerado un marco inercial bajo la condición de que cualquier vehículo deberá moverse a velocidades mucho más lentas. Se considerará la velocidad angular de la tierra $\omega_{e/i} = 7,2921 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ y con una velocidad lineal en el ecuador de 1670 km/h .

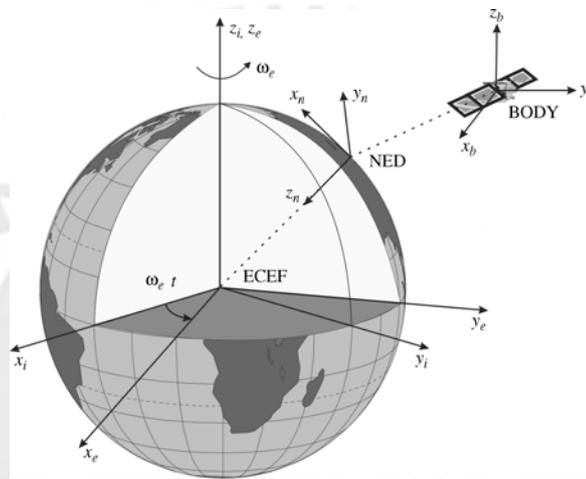


Figura 2.2 Marco centrado en la tierra

2. Marcos de Referencia geográficos:

NED: Sistema coordenado Norte-Este-Abajo. Este marco es representado de la forma $\{n\} = (x_n, y_n, z_n)$ donde su origen o_n es relativo al sistema geodésico del planeta. Este marco es usualmente conocido como plano tangente en la superficie de la tierra donde el eje x apunta hacia el *Norte*, el eje y apunta hacia el *Este* y el eje z apunta hacia *Abajo*, normal a la superficie de la tierra. Para localizar un punto del sistema $\{n\}$ dentro del sistema $\{e\}$ es necesario usar dos ángulos l y u describiendo la longitud y latitud.

Para vehículos submarinos donde su longitud y latitud sean constantes, un plano tangente fijo en la superficie es usado para navegación y se puede asumir que $\{n\}$ es inercial de modo tal que las leyes de Newton pueden ser aplicadas.

BODY: Marco de referencia fijo al cuerpo. Este marco es representado de la forma $\{b\} = (x_b, y_b, z_b)$ donde su origen o_b es un sistema de coordenadas en

movimiento que es fijo al cuerpo. La posición y orientación se describen con relación al marco de referencia inercial ($\{e\}$ o $\{n\}$) mientras que las velocidades lineales y angulares son expresadas en el sistema fijo al cuerpo. El origen o_b por lo general es elegido en el punto medio del vehículo en la línea de flotación y ese punto será definido como CO . Los ejes del cuerpo x_b , y_b y z_b son elegidas para coincidir con los ejes principales de inercia, los cuales son definidos como:

- x_b - Eje longitudinal (Dirigido de popa a proa)
- y_b - Eje transversal (Dirigido a estribor)
- z_b - Eje normal (Dirigido de arriba hacia abajo)

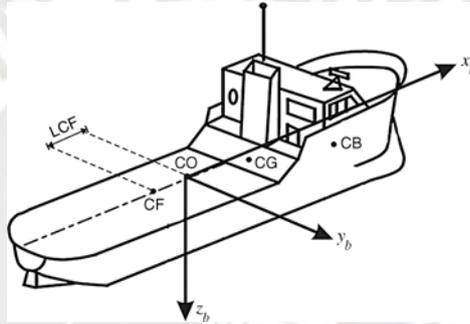


Figura 2.3 Marco centrado en el cuerpo

3. Puntos de Referencia fijos al cuerpo:

Los siguientes puntos de referencia son definidos con respecto a CO :

CG - Centro de gravedad.

CB - Centro de flotabilidad.

CF - Centro de flotación (Ubicado a una distancia LCF desde CO en la dirección x). Considerado el centroide del área del plano de agua en aguas tranquilas.

2.2.1.3. Transformaciones entre BODY y NED

La matriz $R \in SO(3)$ responsable de las transformaciones entre los marcos de referencia $\{b\}$ y $\{n\}$ deberá satisfacer la propiedad:

$$RR^T = R^T R = I, \quad \det R = 1 \quad (2.3)$$

el cual implica que R es ortogonal e I es una matriz identidad. Consecuentemente, la matriz inversa de rotación esta obtenida por $R^{-1} = R^T$.

1. **Transformación Ángulos de Euler:** Los ángulos de Euler $roll(\phi)$, $pitch(\theta)$ y $yaw(\psi)$, pueden ser usados para transformar el vector de velocidad $v_{b/n}^b$ en el marco de referencia $\{b\}$ en un nuevo vector de velocidad $v_{b/n}^n$ expresado en el marco de referencia $\{n\}$ mediante el teorema de rotación de Euler [14]. Donde $R_b^n(\Theta_{nb}) : S^3 \rightarrow SO(3)$ es la matriz de rotación con argumentos $\Theta_{nb} = [\phi, \theta, \psi]$. Entonces:

$$v_{b/n}^n = R_b^n(\Theta_{nb})v_{b/n}^b \quad (2.4)$$

- a) **Transformación de velocidad lineal:** La matriz $R_b^n(\Theta_{nb})$ por lo general está definida por tres rotaciones principales, donde cada una de estas rotaciones son generadas sobre cada uno de sus ejes x , y , z .

$$R_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix}, \quad R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}, \quad R_{z,\psi} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde: $s. = \sin(.)$ y $c. = \cos(.)$. Considerando que el orden de las rotaciones no es arbitraria y es común usar la convención zyx para transformaciones desde $\{n\}$ hacia $\{b\}$. Esta secuencia de rotación es equivalente a:

$$R_b^n(\Theta_{nb}) := R_{z,\psi}R_{y,\theta}R_{x,\phi} \quad (2.6)$$

y usando del resultado de la propiedad (2.3), la transformación inversa es descrita como:

$$R_b^n(\Theta_{nb})^{-1} = R_n^b(\Theta_{nb}) = R_{z,\psi}^T R_{y,\theta}^T R_{x,\phi}^T \quad (2.7)$$

Esto también se puede ver en la siguiente Figura 2.4. Por lo tanto, luego de desarrollar la ecuación (2.6) se puede obtener la forma extendida de la matriz de transformación.

$$R_b^n(\Theta_{nb}) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\phi s\theta s\psi & -c\psi s\phi + s\theta s\psi c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

El vector de velocidad fijo al cuerpo $v_{b/n}^b$ puede ser expresado en $\{n\}$ como:

$$\dot{p}_{b/n}^n = R_b^n(\Theta_{nb})\dot{p}_{b/n}^b \quad (2.9)$$

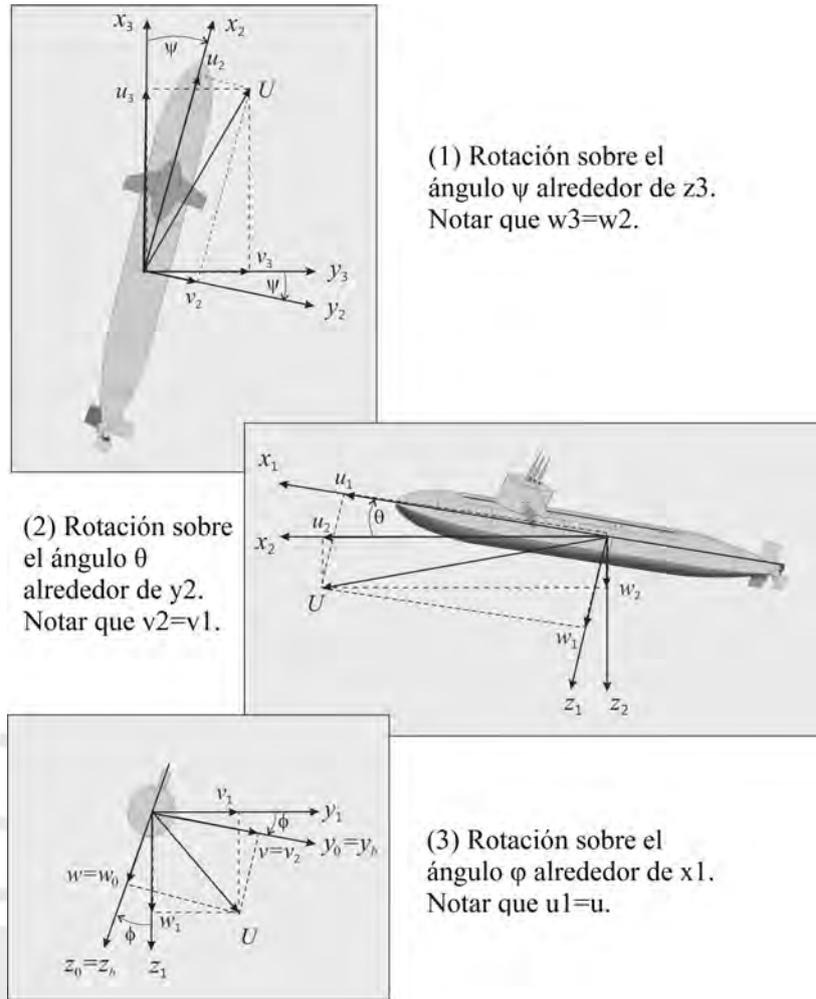


Figura 2.4 Ángulos de Euler

donde $p_{b/n}^i$ es el vector de velocidad expresado en $\{n\}$. Expandiendo la ecuación (2.9)

$$\begin{aligned} \dot{N} = & u \cos(\psi) \cos(\theta) + v[\cos(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) - \sin(\psi) \cos(\phi)] \\ & + w[\sin(\psi) \sin(\phi) + \cos(\psi) \cos(\phi) \sin(\theta)] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{E} = & u \sin(\psi) \cos(\theta) + v[\cos(\psi) \cos(\phi) + \sin(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi)] \\ & + w[\cos(\psi) \cos(\phi) \sin(\theta) - \cos(\psi) \sin(\phi)] \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\dot{D} = u \sin(\theta) + v \cos(\theta) \sin(\phi) + w \cos(\theta) \cos(\phi) \quad (2.12)$$

La transformación de velocidad inversa es obtenida por la definición establecida en Apéndice (A.1) como:

$$v_{b/n}^b = R_b^n(\Theta_{nb}^{-1})\dot{p}_{b/n}^n = R_b^n(\Theta_{nb}^T)\dot{p}_{b/n}^n \quad (2.13)$$

- b) **Transformación de velocidad angular:** El vector de velocidad angular fijo al cuerpo $\omega_{b/n}^b = [p, q, r]^T$ y el vector de velocidad de Euler $\dot{\Theta}_{nb} = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ son relacionados a través de una matriz de transformación $T_{\Theta}(\Theta_{nb})$ de acuerdo con:

$$\dot{\Theta}_{nb} = T_{\Theta}(\Theta_{nb})\omega_{b/n}^b \quad (2.14)$$

Notar que el vector de velocidad angular $\omega_{b/n}^b = [p, q, r]^T$ no puede ser integrado directamente para obtener las coordenadas angulares actuales. Esto es debido al hecho de que $\int_0^t \omega_{b/n}^b(\tau) d\tau$ no tiene una inmediata interpretación física; sin embargo, el vector $\Theta_{nb} = [\phi, \theta, \psi]^T$ representa adecuadamente las coordenadas generalizadas. La matriz de transformación $T_{\Theta}(\Theta_{nb})$ puede ser derivada en varios tipos, por ejemplo:

$$\omega_{b/n}^b = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{x,\phi}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_{x,\phi}^T R_{y,\theta}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} := T_{\Theta}^{-1}(\Theta_{nb})\dot{\Theta}_{nb} \quad (2.15)$$

Esta relación es verificada por inspección de la Figura 2.4. Expandiendo la ecuación (2.15):

$$T_{\Theta}^{-1}(\Theta_{nb}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}, \implies T_{\Theta}(\Theta_{nb}) = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\theta c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

donde $s\cdot = \sin(\cdot)$, $c\cdot = \cos(\cdot)$ y $t\cdot = \tan(\cdot)$. Expandiendo la ecuación (2.14) se puede obtener los componentes de los ángulos de Euler de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + q \sin(\phi) \tan(\theta) + r \cos(\phi) \tan(\theta) \\ \dot{\theta} &= q \cos(\phi) - r \sin(\phi) \\ \dot{\psi} &= q \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} + r \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)}, \theta \neq \pm 90 \end{aligned}$$

Notar que $T_{\Theta}(\Theta_{nb})$ es indefinido para un ángulo de $\theta \neq \pm 90$ y que $T_{\Theta}(\Theta_{nb})$ no satisface la ecuación (2.3). Consecuentemente $T_{\Theta}^{-1}(\Theta_{nb}) \neq T_{\Theta}^T(\Theta_{nb})$. Pa-

ra embarcaciones de superficie esto no es un problema mientras ambos, vehículos y naves bajo el agua operan a esta singularidad. En este caso, las ecuaciones cinemáticas pueden ser descritas por dos representaciones de ángulos de Euler con diferentes singularidades y el punto singular puede ser evitado por cambiando entre ellas. Otra posibilidad es usar representación de cuaterniones.

2. **Ecuaciones cinemática 6DOF (Resumen):** Este resumen es el resultado de las ecuaciones previas enfocadas en la cinemática y que forman parte de las ecuaciones de 6DOF para el AUV. Estas pueden ser expresadas en forma de vector como:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= J_{\Theta}(\nu) \\ &\Updownarrow \\ \begin{bmatrix} \dot{p}_{b/n}^n \\ \dot{\Theta}_{nb} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_b^n(\Theta_{nb}) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & T_{\Theta}(\Theta_{nb}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{b/n}^b \\ \omega_{b/n}^b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.2.2. Dinámica

Para derivar las ecuaciones de movimiento de un vehículo submarino, es necesario estudiar el movimiento de cuerpos rígidos, hidrodinámica e hidrostática. El objetivo de este capítulo es mostrar que la cinética del cuerpo rígido puede ser expresado en forma vectorial de acuerdo con (Fossen,1991) [14].

$$M_{RB}\dot{\nu} + C_{RB}\nu = \tau_{RB} \quad (2.18)$$

Donde M_{RB} es la matriz de masa del cuerpo rígido, C_{RB} es la matriz Coriolis y centrípeta del cuerpo rígido debido a la rotación de $\{b\}$ sobre el marco inercial $\{n\}$, ν es un vector generalizado de velocidad expresado en $\{b\}$, y τ_{RB} es un vector generalizado de fuerzas externas y momentos expresados en $\{b\}$.

Las ecuaciones de cuerpo rígido serán derivadas usando la *Formulación Newton-Euler* y *mecánica vectorial*. En este contexto es conveniente definir los vectores sin referencia a un marco coordenado (*vector libre coordenado*). El vector de el origen O_b con respecto a $\{n\}$ es un vector $\vec{v}_{b/n}$ que es definido por su magnitud y dirección. El vector $\vec{v}_{b/n}$ descompuesto en el marco de referencia inercial es denotado como $v_{b/n}^i$ el cual es también referido como un *vector coordenado*.

Las ecuaciones de movimiento serán representadas en dos puntos de referencia de cuerpo fijo:

CO - origen O_b de $\{b\}$.

CG - centro de gravedad.

Esos puntos coinciden si el vector $\vec{r}_g = \vec{0}$ (ver Figura 2.5). El punto CO es usualmente especificado por el control de ingeniería y este es el punto de referencia usado para diseñar la guía, navegación y control de sistemas. Para naves marinas, es común localizar este punto en la línea central a mitad de la nave. Es ventajoso usar un punto de referencia fijo CO para diseñar controlador-observador donde CG dependerá de la condición de carga.

2.2.2.1. Ecuaciones de Movimiento Newton-Euler alrededor de CG

La formulación Newton-Euler está basada en la segunda ley de Newton, la cual relaciona la masa m , aceleración $\dot{\vec{v}}_{g/i}$ y la fuerza \vec{f}_g mediante la ecuación:

$$m\dot{\vec{v}}_{g/i} = \vec{f}_g \quad (2.19)$$

Donde $\vec{v}_{g/i}$ es la velocidad en el punto CG con respecto al marco inercial $\{i\}$.

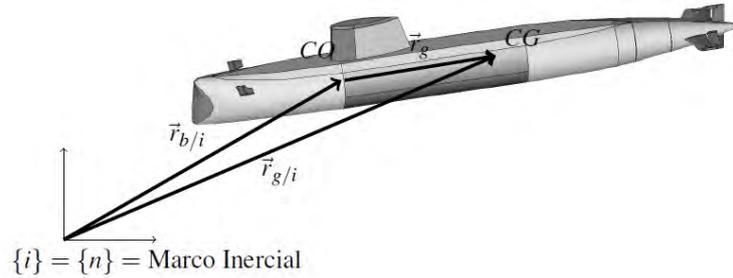


Figura 2.5 Newton-Euler alrededor de CG

Si no hay fuerzas actuando ($\vec{f}_g = \vec{0}$) entonces el cuerpo rígido se está moviendo con velocidad constante ($\vec{v}_{g/i} = \text{constante}$) o el cuerpo está en reposo ($\vec{v}_{g/i} = 0$) - un resultado conocido de la primera ley de Newton.

- Primer y Segundo Axioma de Euler:** Leonhard Euler (1707 – 1783) mostró que la segunda ley de Newton puede ser expresada en términos de la conservación de momento lineal y momento angular. Esos resultados son conocidos como *Primer y segundo axioma de Euler*. Donde:

$$\frac{{}^i d}{dt} \vec{p}_g = \vec{f}_g \quad \vec{p}_g = m\vec{v}_{g/i} \quad (2.20)$$

$$\frac{{}^i d}{dt} \vec{h}_g = \vec{m}_g \quad \vec{h}_g = I_g \vec{\omega}_{b/i} \quad (2.21)$$

Donde \vec{f}_g y \vec{m}_g son las fuerzas y momentos actuando en el cuerpo CG, $\vec{\omega}_{b/i}$ es la velocidad angular de $\{b\}$ con respecto a $\{i\}$, e \vec{I}_g es la inercia diatica sobre el cuerpo CG. La derivada con respecto al tiempo en el marco inercial $\{i\}$ es denotada por $\frac{{}^i d}{dt}$. Cuando se deriva las ecuaciones de movimiento se asumirá que: (1) que la nave es rígida y (2) que el marco NED $\{n\}$ es inercial. Primero se asumirá eliminar las consideraciones de fuerzas actuando entre elementos individuales de masa mientras que el segundo elimina las fueras debido al movimiento relativo de la tierra hacia un sistema inercial de referencia fijo, consecuentemente:

$$\vec{v}_{g/i} \approx \vec{v}_{g/n}, \quad \vec{\omega}_{b/i} \approx \vec{\omega}_{b/n} \quad (2.22)$$

La derivada en el tiempo de un vector \vec{a} en un marco de referencia $\{b\}$ satisface:

$$\frac{{}^i d}{dt} \vec{a} = \frac{{}^b d}{dt} \vec{a} + \vec{\omega}_{b/i} \times \vec{a} \quad (2.23)$$

Donde la derivada con respecto al tiempo en $\{b\}$ es denotado por:

$$\dot{\vec{a}} = \frac{{}^b d}{dt} \vec{a} \quad (2.24)$$

Para navegación en el espacio es usual usar un marco de referencia fijo rotando con la tierra. Usualmente relacionamos los vehículos con $\{n\}$ que es una buena aproximación ya que las fuerzas en los vehículos debido a la rotación de la tierra ($\omega_{e/i} = 7,2921 \times 10^{-5} rad/s$) son bastante pequeñas comparadas con las fuerzas hidrodinámicas. Teniendo en cuenta la rotación de la tierra, para el caso de una navegación global.

2. **Movimiento Traslacional sobre CG:** Desde la Figura 2.5 y bajo la suposición de que $\{n\}$ es inercial podemos ver:

$$\vec{r}_{g/n} = \vec{r}_{b/n} + \vec{r}_g \quad (2.25)$$

La derivada con respecto al tiempo de $\vec{r}_{g/n}$ en un marco de referente en movimiento $\{b\}$ y usando la ecuación (2.23) se obtiene:

$$\vec{v}_{g/n} = \vec{v}_{b/n} + \left(\frac{{}^b d}{dt} \vec{r}_g + \vec{\omega}_{b/n} \times \vec{r}_g \right) \quad (2.26)$$

Para cuerpo rígido, CG satisface $\frac{d}{dt}\vec{r}_g = \vec{0}$ Tal que:

$$\vec{v}_{g/n} = \vec{v}_{b/n} + \vec{\omega}_{b/n} \times \vec{r}_g \quad (2.27)$$

Para el primer axioma de Euler se deduce que:

$$\begin{aligned} \vec{f}_g &= \frac{^i d}{dt}(m\vec{v}_{g/i}) \\ &= m(\dot{\vec{v}}_{g/n} + \vec{\omega}_{b/n} \times \vec{v}_{g/n}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Finalmente, los vectores pueden ser expresados en $\{b\}$ tal que el movimiento traslacional en CG se convierte en:

$$m(\dot{v}_{g/n}^b + S(\omega_{b/n}^b)v_{g/n}^b) = f_g^b \quad (2.29)$$

Donde el producto cruz es escrito en forma de matriz usando la matriz skew-symmetric, tal que $S(\omega_{b/n}^b)\vec{v}_{g/n}^b = \vec{\omega}_{b/n} \times \vec{v}_{g/n}$.

3. **Movimiento Rotacional sobre CG:** La dinámica rotacional (actitud dinámica) sigue una aproximación similar. Desde el segundo axioma de Euler, se puede ver que:

$$\begin{aligned} \vec{m}_g &= \frac{^i d}{dt}(I_g\vec{\omega}_{b/i}) \\ &= I_g\dot{\vec{\omega}}_{b/n} - (I_g\vec{\omega}_{b/n}) \times \vec{\omega}_{b/n} \end{aligned} \quad (2.30)$$

De eso se deduce que:

$$I_g\dot{\omega}_{b/n}^b - S(I_g\omega_{b/n}^b)\omega_{b/n}^b = m_g^b \quad (2.31)$$

Donde $S(I_g\omega_{b/n}^b)\omega_{b/n}^b = (I_g\omega_{b/n}^b) \times \omega_{b/n}^b$. Esta expresión es también referida como una *Ecuación de Euler*. Se puede encontrar la definición de matriz inercial I_g en el Apéndice (A.3).

4. **Ecuaciones de movimiento sobre CG:** Las Ecuaciones (2.29) y (2.31) de Newton-Euler pueden ser representadas en forma de matriz de acuerdo con:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} mI_{3x3} & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & I_g \end{bmatrix}}_{M_{RB}^{CG}} \begin{bmatrix} \dot{v}_{g/n}^b \\ \dot{\omega}_{g/n}^b \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} mS(\omega_{b/n}^b) & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & -S(I_g\omega_{b/n}^b) \end{bmatrix}}_{C_{RB}^{CG}} \begin{bmatrix} v_{g/n}^b \\ \omega_{b/n}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_g^b \\ m_g^b \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

2.2.2.2. Ecuaciones de movimiento Newton-Euler sobre CO

Para vehículos submarinos es deseable derivar las ecuaciones de movimiento para un origen arbitrario CO para tomar ventaja de sus propiedades geométricas. Aquí las fuerzas hidrodinámicas y momentos a menudo son calculados en CO, las leyes de Newton también serán formuladas para CO. En orden con esto, iniciamos las ecuaciones de movimiento sobre CG y transformamos estas expresiones hacia CO usando transformación de coordenadas. La necesidad de transformación de coordenadas es derivada desde la ecuación (2.27). Además,

$$\begin{aligned} v_{g/n}^b &= v_{b/n}^b + \omega_{b/n}^b \times r_g^b \\ &= v_{b/n}^b - r_g^b \times \omega_{b/n}^b \\ &= v_{b/n}^b + S^T(r_g^b)\omega_{b/n}^b \end{aligned} \quad (2.33)$$

De esto se deduce que:

$$\begin{bmatrix} v_{g/n}^b \\ \omega_{b/n}^b \end{bmatrix} = H(r_g^b) \begin{bmatrix} v_{b/n}^b \\ \omega_{b/n}^b \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Donde $r_g^b = [x_g, y_g, z_g]^T$ y $H(r_g^b) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una matriz de transformación:

$$H(r_g^b) := \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & S^T(r_g^b) \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad H^T(r_g^b) := \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ S(r_g^b) & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Notar que la velocidad angular esta sin cambios durante la transformación. El siguiente paso es transformar la ecuación (2.32) desde CG a CO usando la ecuación (2.34).

$$\underbrace{H^T(r_g^b)M_{RB}^{CG}H(r_g^b)}_{M_{RB}^{CO}} \begin{bmatrix} \dot{v}_{g/n}^b \\ \dot{\omega}_{g/n}^b \end{bmatrix} + \underbrace{H^T(r_g^b)C_{RB}^{CG}H(r_g^b)}_{C_{RB}^{CO}} \begin{bmatrix} v_{g/n}^b \\ \omega_{b/n}^b \end{bmatrix} = H^T(r_g^b) \begin{bmatrix} f_g^b \\ m_g^b \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Expandiendo estas expresiones se tiene:

$$M_{RB}^{CO} = \begin{bmatrix} mI_{3 \times 3} & -mS(r_g^b) \\ mS(r_g^b) & I_g - mS^2(r_g^b) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$C_{RB}^{CO} = \begin{bmatrix} mS(\omega_{b/n}^b) & -mS(\omega_{b/n}^b)S(r_g^b) \\ mS(r_g^b)S(\omega_{b/n}^b) & -S((I_g - mS^2(r_g^b))\omega_{b/n}^b) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

usando el hecho de que:

$$mS(r_g^b)S(\omega_{b/n}^b)S^T(r_g^b)(\dot{\omega}_{b/n}^b) - S(I_g\omega_{b/n}^b)\omega_{b/n}^b \equiv S((I_g - mS^2(r_g^b))\omega_{b/n}^b)\omega_{b/n}^b \quad (2.39)$$

1. **Movimiento Traslacional sobre CO:** Desde la primera fila en la ecuación (2.36) y además haciendo uso de las ecuaciones (2.37) y (2.38) se observa que el movimiento traslacional sobre CO satisface:

$$m[\dot{v}_{b/n}^b + S^T(r_g^b)\dot{\omega}_{b/n}^b + S(\omega_{b/n}^b)v_{b/n}^b + S(\omega_{b/n}^b)S^T(r_g^b)\omega_{b/n}^b] = f_g^b \quad (2.40)$$

Aquí el movimiento traslacional es independiente del punto de ataque de la fuerza externa $f_g^b = f_b^b$ esto siguiendo que:

$$m[\dot{v}_{b/n}^b + S(\dot{\omega}_{b/n}^b)r_g^b + S(\omega_{b/n}^b)v_{b/n}^b + S^2(\omega_{b/n}^b)r_g^b] = f_b^b \quad (2.41)$$

Donde nosotros exploramos el hecho de que $S^T(a)b = -S(a)b = S(b)a$. Una representación alternativa de la ecuación (2.41) usando vectores de producto cruz es:

$$m[\dot{v}_{b/n}^b + \dot{\omega}_{b/n}^b \times r_g^b + \omega_{b/n}^b \times v_{b/n}^b + \omega_{b/n}^b \times (\omega_{b/n}^b \times r_g^b)] = f_b^b \quad (2.42)$$

2. **Movimiento Rotacional sobre CO:** En orden para expresar el movimiento rotacional (actitud dinámica) sobre CO nosotros haremos uso del teorema de ejes paralelos que transforma la matriz inercial hacia un punto arbitrario.

Teorema de ejes paralelos

La matriz inercial $I_b = I_b^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sobre un arbitrario origen o_b es dado por:

$$I_b = I_g - mS^2(r_g^b) = I_g - m(r_g^b(r_g^b)^T - (r_g^b)^T r_g^b I_{3 \times 3}) \quad (2.43)$$

Donde: $I_g = I_g^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz inercial sobre el centro de gravedad del cuerpo.

Los elementos inferior-derecho en las ecuaciones (2.37) y (2.38) pueden ser formulados usando ejes paralelos, por ejemplo:

$$I_g - mS(r_g^b)S^T(r_g^b) = I_g - mS^2(r_g^b) = I_b \quad (2.44)$$

mientras el termino cuadrático en la ecuación (2.38) satisface (siguiendo desde la identidad de Jacobi)

$$S(r_g^b)S(\omega_{b/n}^b)S^T(r_g^b)\omega_{b/n}^b = -S(\omega_{b/n}^b)S^2(r_g^b)\omega_{b/n}^b \quad (2.45)$$

tal que:

$$mS(r_g^b)S(\omega_{b/n}^b)S^T(r_g^b)\omega_{b/n}^b + S(\omega_{b/n}^b)I_g\omega_{b/n}^b = S(\omega_{b/n}^b)I_b\omega_{b/n}^b \quad (2.46)$$

consecuentemente, el movimiento rotacional sobre CO es obtenido por la última fila en la ecuación (2.36)

$$I_b\dot{\omega}_{b/n}^b + S(\omega_{b/n}^b)I_b\omega_{b/n}^b + mS(r_g^b)\dot{v}_{b/n}^b + mS(r_g^b)S(\omega_{b/n}^b)v_{b/n}^b = m_b^b \quad (2.47)$$

donde el momento sobre CO es:

$$\begin{aligned} m_b^b &= m_g^b + r_g^b \times f_g^b \\ I &= m_g^b + S(r_g^b)f_g^b \end{aligned} \quad (2.48)$$

La ecuación (2.47) puede ser escrita en forma de producto cruz como:

$$I_b\dot{\omega}_{b/n}^b + \omega_{b/n}^b \times I_b\omega_{b/n}^b + mr_g^b \times (\dot{v}_{b/n}^b + \omega_{b/n}^b \times v_{b/n}^b) = m_b^b \quad (2.49)$$

2.2.2.3. Ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido

En las secciones previas se mostró que la cinética de un cuerpo rígido puede ser derivada por aplicación de la mecánica Newtoniana. En esta sección, propiedades útiles de las ecuaciones de movimiento serán discutidas y también se demostrará como esas propiedades simplifican considerablemente la representación de las ecuaciones no-lineales de movimiento. Las ecuaciones (2.42) y (2.49) son usualmente escritas en componentes de la forma acorde al SNAME (1950) [14] los cuales están compuestos de vectores como $\nu = [u, v, w, p, q, r]^T$ que representa un vector generalizado de velocidad lineal y angular, $\tau_{RB} = [X, Y, Z, K, M, N]^T$ un vector generalizado de fuerzas y momentos, $r_g^b = [x_g, y_g, z_g]^T$ un vector desde O_b hacia CG expresado en {b} y además de hacer uso de la matriz inercial definida en el Apéndice (A.3). Por lo tanto, al aplicar esta notación, las ecuaciones (2.42) y (2.49) se convierten en:

$$\begin{aligned}
m[\dot{u} - vr + wq - x_g(q^2 + r^2) + y_g(pq - \dot{r}) + z_g(pr + \dot{q})] &= X \\
m[\dot{v} - wp + ur - y_g(r^2 + p^2) + z_g(qr - \dot{p}) + x_g(qp + \dot{r})] &= Y \\
m[\dot{w} - uq + vp - z_g(p^2 + q^2) + x_g(rp - \dot{q}) + y_g(rq + \dot{p})] &= Z \\
I_x \dot{p} + (I_z - I_y)qr - (\dot{r} + pq)I_{xz} + (r^2 - q^2)I_{yz} + (pr - \dot{q})I_{xy} \\
+ m[y_g(\dot{w} - uq + vp) - z_g(\dot{v} - wp + ur)] &= K \\
I_y \dot{q} + (I_x - I_z)rp - (\dot{p} + qr)I_{xy} + (p^2 - r^2)I_{zx} + (qp - \dot{r})I_{yz} \\
+ m[z_g(\dot{u} - vr + wq) - x_g(\dot{w} - uq + vp)] &= M \\
I_z \dot{r} + (I_y - I_x)pq - (\dot{q} + rp)I_{yz} + (q^2 - p^2)I_{xy} + (rq - \dot{p})I_{zx} \\
+ m[x_g(\dot{v} - wp + ur) - y_g(\dot{u} - vr + wq)] &= N
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Las tres primeras ecuaciones representan el movimiento traslacional, mientras que las últimas tres ecuaciones representan el movimiento rotacional. Estas ecuaciones pueden ser expresadas en forma vectorial como la ecuación (2.18).

1. **Propiedad (Matriz Inercial M_{RB} de cuerpo rígido):** La representación de una matriz inercial de cuerpo rígido es única y satisface:

$$M_{RB} = M_{RB}^t > 0, \quad \dot{M}_{RB} = 0_{6 \times 6} \tag{2.51}$$

donde:

$$\begin{aligned}
M_{RB} &= \begin{bmatrix} mI_{3 \times 3} & -mS(r_g^b) \\ mS(r_g^b) & I_b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_g & -my_g \\ 0 & m & 0 & -mz_g & 0 & mx_g \\ 0 & 0 & m & my_g & -mx_g & 0 \\ 0 & -mz_g & my_g & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_g & 0 & -mx_g & -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -my_g & mx_g & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Ahí $I_{3 \times 3}$ es la matriz identidad, $I_b = I_b^T > 0$ es la matriz inercial acorde a la definición en el Apéndice (A.3) y $S(R_g^b)$ es una matriz skew-symmetric acorde a la definición en el Apéndice (A.1).

2. **Teorema (Matriz Coriolis-Centrípeta desde una matriz inercial):** Dejaremos que M sea una matriz inercial de 6×6 definida como:

$$M = M^T = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.53)$$

donde $M_{21} = M_{12}$. Entonces la matriz Coriolis-Centrípeta puede siempre ser parametrizada tal que $C(v) = -C^T(v)$ eligiendo:

$$C(v) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & -S(M_{11}v_1 + M_{12}v_2) \\ -S(M_{11}v_1 + M_{12}v_2) & -S(M_{21}v_1 + M_{22}v_2) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

donde $v_1 := v_{b/n}^b = [u, v, w]^T$, $v_2 := \omega_{b/n}^b = [p, q, r]^T$ y S es el operador producto cruz acorde a la definición en el Apéndice (A.1).

3. **Propiedad (Matriz Coriolis-Centrípeta C_{RB} de cuerpo rígido):** Acorde al teorema en el ítem (2) la matriz Coriolis y Centrípeta de cuerpo rígido puede siempre ser representada tal que $C_{RB}(v)$ es Skew-symmetric. Además:

$$C_{RB}(v) = -C_{RB}^T(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (2.55)$$

La propiedad Skew-symmetric es muy útil cuando se diseñan sistemas de control no-lineal ya que la forma cuadrática $v^T C_{RB}(v)v \equiv 0$. Esto es explotado en diseños basados en energía donde las funciones de Lyapunov juegan un papel importante. La misma propiedad es también usada en diseño de observadores no-lineales.

- a) **Parametrización Lagrangiana:** Aplicando el teorema de $M = M_{RB}$ se genera la siguiente expresión:

$$C_{RB}(v) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & -mS(v_1) - mS(S(v_2)r_g^b) \\ -mS(v_1) - mS(S(v_2)r_g^b) & mS(S(v_1)r_g^b) - S(I_b v_2) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

el cual representa términos de la matriz Coriolis y Centrípeta. Y Expandiendo esta expresión se tiene:

$$C_{RB}(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -m(y_g q + z_g r) & m(y_g p + w) & m(z_g p - v) \\ m(x_g q - w) & -m(z_g r + x_g p) & m(z_g q + u) \\ m(x_g r + v) & m(y_g r - u) & -m(x_g p + y_g q) \\ m(y_g q + z_g r) & -m(x_g q - w) & -m(x_g r + v) \\ -m(y_g p + w) & m(z_g r + x_g p) & -m(y_g r - u) \\ -m(z_g p - v) & -m(z_g q + u) & m(x_g p + y_g q) \\ 0 & -I_{yz}q - I_{xz}p + I_z r & I_{yz}r + I_{xy}p - I_y q \\ I_{yz}q + I_{xz}p - I_z r & 0 & -I_{xz}r - I_{xy}q + I_x p \\ -I_{yz}r - I_{xy}p + I_y q & I_{xz}r + I_{xy}q - I_x p & 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

2.2.2.4. Ecuaciones de movimiento de cuerpo rígido de 6DOF simplificado

Las ecuaciones de movimiento pueden ser simplificadas por elección del origen en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo de acuerdo al siguiente criterio:

1. **El origen CO coincide con CG:** Esto implica que $r_g^b = [0, 0, 0]^T$, $I_b = I_g$ (ver teorema de ejes paralelos).

$$M_{RB} = \begin{bmatrix} mI_{3x3} & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & I_g \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Una adicional simplificación es obtenida cuando los ejes del cuerpo (x_b, y_b, z_b) coincide con el principal eje de inercia. Esto implica que $I_g = \text{diag}(I_x^{cg}, I_y^{cg}, I_z^{cg})$.

2. **Traslación del origen CO tal que I_b se vuelva diagonal:** Es conveniente dejar que los ejes del cuerpo coincidan con los ejes principales de inercia o los ejes simétricos longitudinal, lateral y normal de la nave. El origen del sistema de coordenadas puede ser elegido tal que la matriz de inercia del sistema de coordenadas del cuerpo fijo sea diagonal, esto es $I_b = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$, por aplicación del teorema de ejes paralelos. Expandiendo la ecuación (2.43) con $I_b = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$

y I_g como una matriz completa produce los siguientes conjuntos de ecuaciones:

$$\begin{aligned} I_x &= I_x^c g + m(y_g^2 + z_g^2) \\ I_y &= I_y^c g + m(x_g^2 + z_g^2) \\ I_z &= I_z^c g + m(x_g^2 + y_g^2) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Donde x_g , y_g y z_g deben de ser elegidos tal que:

$$\begin{aligned} mI_{yz}^{cg} x_g^2 &= I_{xy}^{cg} I_{xz}^{cg} \\ mI_{xz}^{cg} y_g^2 &= I_{xy}^{cg} I_{yz}^{cg} \\ mI_{xy}^{cg} z_g^2 &= I_{xz}^{cg} I_{yz}^{cg} \end{aligned} \quad (2.60)$$

las ecuaciones son satisfechas. Entonces la forma reducida de la ecuación (2.50) es establecida como:

$$\begin{aligned} m[\dot{u} - vr + wq - x_g(q^2 + r^2) + y_g(pq - \dot{r}) + z_g(pr + \dot{q})] &= X \\ m[\dot{v} - wp + ur - y_g(r^2 + p^2) + z_g(qr - \dot{p}) + x_g(qp + \dot{r})] &= Y \\ m[\dot{w} - uq + vp - z_g(p^2 + q^2) + x_g(rp - \dot{q}) + y_g(rq + \dot{p})] &= Z \\ I_x \dot{p} + (I_z - I_y)qr + m[y_g(\dot{w} - uq + vp) - z_g(\dot{v} - wp + ur)] &= K \\ I_y \dot{q} + (I_x - I_z)rp + m[z_g(\dot{u} - vr + wq) - x_g(\dot{w} - uq + vp)] &= M \\ I_z \dot{r} + (I_y - I_x)pq + m[x_g(\dot{v} - wp + ur) - y_g(\dot{u} - vr + wq)] &= N \end{aligned} \quad (2.61)$$

2.2.3. Hidrostática

Arquímedes (287-212 AC) deriva las leyes básicas de fluidos estáticos que son el fundamento de la hidrostática hoy en día. En hidrostática la terminología, fuerzas gravitacionales y flotación son llamadas también *fuerzas de restauración* y son equivalentes a las fuerzas de amortiguamiento en un sistema masa-resorte-amortiguador. En la derivación de las fuerzas y momentos de restauración esto será distinguido entre vehículos sumergibles y superficiales. Dentro de esta sección solo se tocará el tema de fuerzas de restauración para vehículos sumergibles.

Cabe resaltar que, para vehículos flotantes o sumergibles, las fuerzas de restauración son determinadas por el volumen del fluido desplazado, la localización del centro de flotación (CB), el área del plano de agua y sus momentos asociados.

2.2.3.1. Fuerzas de restauración para vehículos bajo el agua

Considerando el submarino en la Figura 2.6 donde la fuerza gravitacional f_g^b actúa a través de CG definido por el vector $r_g^b = [x_g, y_g, z_g]$ con respecto a CO. Similarmente, la fuerza f_b^b actúa a través de CB definido por el vector $r_b^b = [x_b, y_b, z_b]$. Ambos vectores son referidos hacia el cuerpo fijo referente al punto CO.

Hidrostática de vehículos sumergibles:

Dejaremos que m sea la masa del vehículo incluyendo agua en los espacios libres, ∇ el volumen de un fluido desplazado por el vehículo, g la aceleración de la gravedad (positivo hacia abajo) y ρ la densidad. El peso sumergido del cuerpo (W) y la fuerza de flotación (B) son escritas como:

$$W = mg, \quad B = \rho g \nabla \quad (2.62)$$

Estas fuerzas actúan en el plano vertical de $\{n\}$. Por lo tanto,

$$f_g^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix} \quad y \quad f_b^n = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

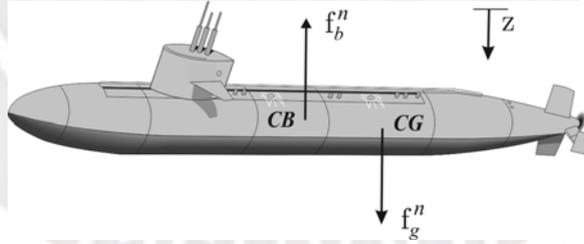


Figura 2.6 Fuerza gravitacional y flotabilidad actuando sobre el centro de gravedad (CG) y centro de flotabilidad (CB) de un submarino.

Note que el eje z es tomado a ser positivo hacia abajo tal que la gravedad es positiva y la flotabilidad es negativa. Aplicando resultados de la sección 2.2.1.3, el peso y la fuerza de flotación pueden ser expresados en $\{b\}$ por:

$$f_g^b = R_b^n (\Theta_n b)^{-1} f_g^n \quad (2.64)$$

$$f_b^b = R_b^n (\Theta_n b)^{-1} f_b^n \quad (2.65)$$

Donde $R_b^n(\Theta_n b)^{-1}$ es la matriz de transformación de coordenadas de ángulos de Euler. De acuerdo a (2.2), el signo de las fuerzas de restauración f_i^b y $m_i^b = r_i^b \times f_i^b$, $i \in \{g, b\}$, deberá ser cambiado cuando se muevan los términos al lado izquierdo de la ecuación y que serán el vector $g(\eta)$. Consecuentemente, las fuerzas y momentos de restauración serán expresados en $\{b\}$:

$$\begin{aligned} g(\eta) &= - \begin{bmatrix} f_g^b + f_b^b \\ r_g^b \times f_g^b + r_b^b \times f_b^b \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} R_b^n(\Theta_n b)^{-1}(f_g^b + f_b^b) \\ r_g^b \times R_b^n(\Theta_n b)^{-1}f_g^b + r_b^b \times R_b^n(\Theta_n b)^{-1}f_b^b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Expandiendo esta expresión se genera:

$$g(\eta) = - \begin{bmatrix} (W - B) \sin(\theta) \\ - (W - B) \cos(\theta) \sin(\phi) \\ - (W - B) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ - (y_g W - y_b B) \cos(\theta) \cos(\phi) + (z_g W - z_b B) \cos(\theta) \sin(\phi) \\ (z_g W - z_b B) \sin(\phi) + (x_g W - x_b B) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ - (x_g W - x_b B) \cos(\theta) \sin(\phi) + (y_g W - y_b B) \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

La ecuación (2.67) es la representación en ángulos de Euler de las fuerzas y momentos de hidrostática. Una representación alternativa puede ser encontrada aplicando *unidad de cuaterniones*.

Una flotabilidad neutral de un vehículo bajo el agua satisface:

$$W = B \quad (2.68)$$

Esto es conveniente para diseñar vehículos bajo el agua con $B > W$ (flotabilidad positiva) tal que el vehículo saldrá a la superficie automáticamente en caso de emergencia, por ejemplo, falla de potencia. En este caso, la magnitud de B debería solamente ser un poco más grande que W . Si el vehículo es diseñado tal que $B \gg W$, va a requerir mucha más energía para mantener el vehículo sumergido. Por lo tanto, una compensación entre flotabilidad y controlabilidad positiva deberá ser hecha.

2.2.4. Hidrodinámica

La radiación dinámica de las olas y corrientes marinas, característica intrínseca del océano, induce fuerzas y momentos que son presentes como funciones de respuesta al impulso y modelo de espacio de estados. Esto se hace dentro de un marco lineal, por lo que se debe agregar amortiguación viscosa en el dominio del tiempo bajo el supuesto de superposición lineal. El resultado de las ecuaciones de navegación en el marco $\{b\}$ de movimiento tiene la siguiente forma:

$$\dot{\eta} = J_{\Theta}(\eta)v \quad (2.69)$$

$$M_{RB}\dot{v} + C_{RB}^*v + M_A\dot{v}_r + C_A^*v_r + Dv_r + \mu + G\eta + g_0 = \tau + \tau_{wind} + \tau_{wave} \quad (2.70)$$

Donde μ es un término adicional que representa efectos de memoria en el fluido. Cuando se diseñan sistemas de control es importante tener una buena estimación de la inercia, amortiguamiento y coeficientes de restauración.

En las secciones de cinética se calculó M_{RB} y C_{RB}^* mientras que $G\eta + g_0$ fue dado en la sección de hidrostática. En este apartado se derivan las matrices M_A y C_A^* debido a la rotación de los marcos de referencia $\{s\}$ sobre $\{n\}$ y una matriz lineal de amortiguamiento D_p . El amortiguamiento viscoso D_v será agregado manualmente para obtener un modelo más aproximado.

Los términos de la ecuación 2.70 pueden ser agrupados de acuerdo a:

$$\begin{aligned} \text{Fuerzas de Inercia:} & \quad M_{RB}\dot{v} + C_{RB}^*v + M_A\dot{v}_r + C_A^*v_r \\ \text{Fuerzas de amortiguamiento:} & \quad +(D_p + D_v)v_r + \mu \\ \text{Fuerzas de restauración:} & \quad +G\eta + g_0 \\ \text{Fuerzas de viento y oleaje:} & \quad = \tau_{wind} + \tau_{wave} \\ \text{Fuerzas de propulsión:} & \quad +\tau \end{aligned} \quad (2.71)$$

2.2.4.1. Marco de referencia de navegación

En el estudio de la teoría de navegación en naves en movimiento es realizada bajo la suposición que eso puede ser descrito como una superposición de un estado de equilibrio de movimiento más perturbaciones. El equilibrio es determinado por un ángulo de rumbo constante ψ y una velocidad U , y las perturbaciones son como componentes de media cero inducidas por excitaciones de onda de primer orden. Note que el caso de velocidad de adelante de cero $U = 0$ es también considerado como un

equilibrio en movimiento. Debido a esto, el movimiento es a menudo descrito usando un equilibrio o un marco de referencia de navegación.

Marco de navegación

El marco de referencia de navegación $S = (x_s, y_s, z_s)$ no es fijo hacia la nave marina; es fijo a un estado de equilibrio. Aquí, en la ausencia de ondas de excitación, el origen o_s del marco s coincide con la localización del origen o_b del marco b (también denotado como CO) el cual es un punto fijo en la nave. Bajo la acción de ondas, el casco es perturbado desde su equilibrio en el punto o_s oscila, con respecto a su posición de equilibrio. Esto se ilustra en la Figura 2.7

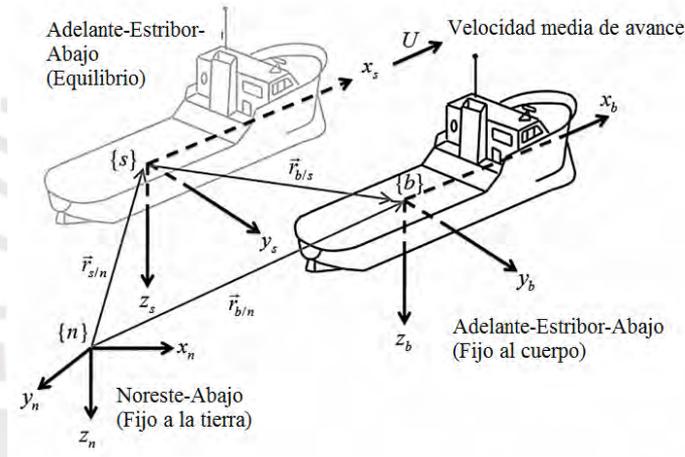


Figura 2.7 Marco de referencia de navegación

El marco es considerado inercial y por lo tanto es no acelerado y fijo en orientación con respecto a el marco n (o deberá ser muy lento). Esta suposición implica que las ecuaciones de movimiento del marco s son lineales. El estado de equilibrio se define por un rumbo y velocidad constante:

$$v_{s/n}^n = [U \cos(\bar{\psi}), U \sin(\bar{\psi}), 0]^T \quad (2.72)$$

$$\omega_{s/n}^n = [0, 0, 0]^T \quad (2.73)$$

$$\Theta_{ns} = [0, 0, \bar{\psi}]^T \quad (2.74)$$

Donde $U = \|v_{s/n}^n\|$ es la velocidad de avance promedio y $\bar{\psi}$ es el rumbo de equilibrio. Aquí, la velocidad de s con respecto a n es expresado en s es:

$$v_{s/n}^s = R_n^s(\Theta_n s) v_{s/n}^n = [U, 0, 0]^T \quad (2.75)$$

El rumbo de equilibrio $\bar{\psi}$ puede ser calculado promediando las medidas de una brújula giroscópica ψ sobre un periodo fijo (horizonte móvil) de tiempo

Coordenadas de navegación

Las coordenadas de navegación son definidas como Fossen 2007 [27]:

$$\delta\eta = \begin{bmatrix} r_{b/s}^s \\ \Theta_{sb} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$\delta\nu = \begin{bmatrix} v_{b/s}^b \\ \omega_{b/s}^b \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

En hidrodinámica es común denotar la coordenada de perturbación por:

$$\xi = \delta\eta \quad (2.78)$$

donde:

$$\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6]^T \quad (2.79)$$

Las tres primeras coordenadas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) son las perturbaciones *surge*, *sway* y *heave* y:

$$\Theta_{sb} = [\xi_4, \xi_5, \xi_6]^T = [\delta\phi, \delta\theta, \delta\psi]^T \quad (2.80)$$

son las perturbaciones en *roll*, *pitch* y *yaw* (Ángulos de Euler).

2.2.4.2. Transformaciones entre BODY y NAVEGACIÓN

Desde la definición de s y las coordenadas $\delta\eta$ y $\delta\nu$ se sigue que

$$\delta\dot{\eta} = J_{\Theta}(\delta\nu)\delta\nu \quad (2.81)$$

donde $J_{\Theta}(\delta\eta)$ es la matriz de transformación entre b y s :

$$J_{\Theta}(\delta\eta) = \begin{bmatrix} R_b^s(\Theta_{sb}) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & T_{\Theta}(\Theta_{sb}) \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Esta expresión es similar a la transformación entre b y n . Este es un resultado esperado ya que tanto n y s son asumidos a ser inerciales mientras b rota sobre el marco inercial. En adición a la posición y la actitud es necesario derivar la relación entre las velocidades y aceleraciones perturbadas $(\delta v, \delta \dot{v})$ y (v, \dot{v}) . Para obtener esa expresión considerar el vector distancia; ver Figura 2.7:

$$\vec{r}_{b/n} = \vec{r}_{s/n} + \vec{r}_{b/s} \quad (2.83)$$

Los cuales pueden ser expresados en n como:

$$r_{b/n}^n = r_{s/n}^n + R_s^n(\Theta_{ns})r_{b/s}^s \quad (2.84)$$

la diferenciación con respecto al tiempo nos da:

$$\dot{r}_{b/n}^n = \dot{r}_{s/n}^n + R_s^n(\Theta_{ns})\dot{r}_{b/s}^s \quad (2.85)$$

donde:

$$R_s^n(\Theta_{ns}) = R_{z,\bar{\psi}} = \begin{bmatrix} \cos \bar{\psi} & -\sin \bar{\psi} & 0 \\ \sin \bar{\psi} & \cos \bar{\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{R}_s^n(\Theta_{ns}) = 0 \quad (2.86)$$

Notar que la derivada con respecto al tiempo de $R_s^n(\Theta_{ns})$ es cero por que s no hace rotación con respecto a n . La expresión para $\dot{r}_{b/n}^n$ puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{b/n}^n &= \dot{r}_{s/n}^n + R_b^n(\Theta_{nb})R_s^b(\Theta_{bs})\dot{r}_{b/s}^s \\ &= \dot{r}_{s/n}^n + R_b^n(\Theta_{nb})v_{b/s}^b \end{aligned} \quad (2.87)$$

Ambos lados de la ecuación (2.87) pueden ser multiplicado por $R_b^n(\Theta_{bn})$ para obtener:

$$v_{b/n}^b = R_b^n(\Theta_{bn})v_{s/n}^n + v_{b/s}^b \quad (2.88)$$

Por notación simplificada, los vectores de velocidad lineal y angular son agrupados de acuerdo a:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [u, v, w]^T \\ [p, q, r]^T \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

$$\delta v = \begin{bmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\delta u, \delta v, \delta w]^T \\ [\delta p, \delta q, \delta r]^T \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Entonces siguiendo desde la ecuación (2.88) tal que

$$v_1 = \bar{v}_1 + \delta v_1 \quad (2.91)$$

donde:

$$v_1 = R_n^b(\Theta_{bn}) \begin{bmatrix} U \cos \bar{\psi} \\ U \sin \bar{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} = R_s^b(\Theta_{bs}) \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

para obtener la transformación de velocidad angular nosotros hacemos uso de:

$$\vec{\omega}_{b/n} = \vec{\omega}_{s/n} + \vec{\omega}_{b/s} = \vec{\omega}_{b/s} \quad (2.93)$$

aquí $\vec{\omega}_{s/n} = 0$. Además, s no rota con respecto a n . Esto nos lleva a:

$$\omega_{b/n}^b = \omega_{b/s}^b \quad (2.94)$$

o

$$v_2 = \delta v_2 \quad (2.95)$$

Las matrices de transformación de los ángulos de Euler $R_b^s(\Theta_{sb})$ y $T_\Theta(\Theta_{sb})$ para $\Theta_{sb} = [\delta\phi, \delta\theta, \delta\psi]$ son similares a los usados en la sección 2.2. Además:

$$R_b^s(\Theta_{sb}) = \begin{bmatrix} c_{\delta\psi}c_{\delta\theta} & -s_{\delta\psi}c_{\delta\phi} + c_{\delta\psi}s_{\delta\theta}s_{\delta\phi} & s_{\delta\psi}s_{\delta\phi} + c_{\delta\psi}c_{\delta\phi}s_{\delta\theta} \\ s_{\delta\psi}c_{\delta\theta} & c_{\delta\psi}c_{\delta\phi} + s_{\delta\psi}s_{\delta\theta}s_{\delta\phi} & -c_{\delta\psi}s_{\delta\phi} + s_{\delta\theta}s_{\delta\psi}c_{\delta\phi} \\ -s_{\delta\theta} & c_{\delta\theta}s_{\delta\phi} & c_{\delta\theta}c_{\delta\phi} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

$$T_\Theta(\Theta_{sb}) = \begin{bmatrix} 1 & s_{\delta\phi}t_{\delta\theta} & c_{\delta\phi}t_{\delta\theta} \\ 0 & c_{\delta\phi} & -s_{\delta\phi} \\ 0 & s_{\delta\theta}c_{\delta\theta} & c_{\delta\phi}c_{\delta\theta} \end{bmatrix}, \quad c_{\delta\theta} \neq 0 \quad (2.97)$$

calculando \bar{v}_1 bajo la suposición de ángulos pequeños nos da:

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= R_b^s(\Theta_s b)^T \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= U \begin{bmatrix} c_{\delta\psi} c_{\delta\theta} \\ -s_{\delta\psi} c_{\delta\phi} \\ c_{\delta\psi} s_{\delta\theta} s_{\delta\phi} \end{bmatrix} \approx U \begin{bmatrix} 1 \\ -\delta\psi \\ \delta\theta \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.98)$$

finalmente,

$$v = \bar{v} + \delta v \quad (2.99)$$

donde

$$\bar{v} = U[1, -\delta\psi, \delta\theta, 0, 0, 0]^T \quad (2.100)$$

esta puede ser escrita como

$$v = U(e_1 - L\delta\eta) + \delta v \quad (2.101)$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.102)$$

La expresión para la aceleración sigue desde:

$$\dot{v} = \dot{\bar{v}} + \delta\dot{v} \quad (2.103)$$

la clave aquí está en \dot{v} dado por la ecuación (2.98). Además,

$$\dot{v} = U \begin{bmatrix} 1 \\ -\delta r \\ \delta q \end{bmatrix} = UL\delta v \quad (2.104)$$

Finalmente, la expresión se convierte

$$v = -UL\delta v + \delta\dot{v} \quad (2.105)$$

Las transformaciones lineales necesitan transformar un sistema desde las coordenadas de navegación $(\delta\eta, \delta\nu)$ hacia las coordenadas fijas en el cuerpo (η, ν) son

$$\delta v \approx v + U(L\delta\eta - e_1) \quad (2.106)$$

$$\delta\dot{v} \approx \dot{v} + ULv \quad (2.107)$$

Los ángulos de Euler son relacionados a través de la siguiente ecuación:

$$\Theta_{nb} = \Theta_{ns} + \Theta_{sb} \quad (2.108)$$

Los cuales nos da:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

2.2.4.3. Modelo en el dominio de la frecuencia clásico

Las fuerzas hidrodinámicas dependientes de la frecuencia pueden ser determinadas experimentalmente o por calculo usando programas de teoría potencial o códigos de navegación. En este apartado se describe la transformación necesaria para obtener lo que es llamado el *modelo de dominio en frecuencia* y un método conocido como *fuerzas de oscilación*, los cuales pueden ser usados para obtener masa añadida y amortiguamiento dependientes de la frecuencia experimentalmente.

Las ecuaciones de movimiento del mar son consideradas a ser inercial. Aquí, la cinética del cuerpo rígido en términos de coordenadas perturbadas $\delta\eta$ y $\delta\nu$ se convierten en (ver la sección 2.2.2.3).

$$\delta\dot{\eta} = J_{\Theta}(\delta\eta)\delta v \quad (2.110)$$

$$M_{RB}\delta\ddot{\eta} + C_{RB}(\delta\nu)\delta\dot{\eta} = \delta\tau_{RB} \quad (2.111)$$

La teoría lineal sugiere que el termino de segundo orden puede ser ignorado. Consecuentemente, la cinética de cuerpo rígido en coordenadas de navegación $\xi = \delta\eta$ y

$\dot{\xi} = \delta\eta$ reducen a:

$$\begin{aligned} M_{RB}\ddot{\xi} &= \delta\tau_{RB} \\ &= \tau_{hyd} + \tau_{hs} + \tau_{exc} \end{aligned} \quad (2.112)$$

La cinética del cuerpo rígido es forzada por el termino $\delta\tau_{RB}$ el cual puede ser usado para el modelo de fuerzas hidrodinámicas τ_{hyd} , fuerzas hidrostáticas τ_{hs} y otras fuerzas externas τ_{exc} . Cummins (1962) muestra que la radiación de las olas y corrientes marinas induce fuerzas hidrodinámicas en un fluido ideal, y esto puede ser relacionado a la masa añadida dependiente de la frecuencia $A(\omega)$ y el potencial amortiguamiento $B(\omega)$ de acuerdo a:

$$\tau_{hyd} = -\bar{A}\dot{\xi} - \int_0^t \bar{K}(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau \quad (2.113)$$

Donde $\bar{A} = A(\infty)$ es la constante infinita de la matriz de masa añadida y $\bar{K}(t)$ es la matriz de funciones de retardo dada por:

$$\bar{K}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (2.114)$$

Si las fuerzas de restauración $\tau_{hs} = -C\xi$ son incluidas en el modelo, esto resulta en el modelo del dominio del tiempo:

$$(M_{RB} + A(\infty))\ddot{\xi} + \int_0^t \bar{K}(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau + C\xi = \tau_{exc} \quad (2.115)$$

Esto es una ecuación vectorial integro-diferencial formulada en el dominio del tiempo, aunque los coeficientes del potencial son dependientes de la frecuencia. Para entender esto, se considera un cuerpo flotante forzado a oscilar en una frecuencia dada.

2.2.4.4. Coeficientes del potencial y el concepto de fuerzas oscilantes

Considerando el movimiento de un cuerpo sumergido dado por:

$$M_{RB}\ddot{\xi} = \tau_{hyd} + \tau_{hs} + f \cos(\omega t) \quad (2.116)$$

Donde τ_{hyd} y τ_{hs} denotan las fuerzas hidrodinámicas e hidrostática debido al agua circundante. El vector:

$$f = [f_1, \dots, f_6]^T \quad (2.117)$$

Contiene las amplitudes de las fuerzas de excitación. En una configuración experimental con modelo a escala restringido, esto es entonces posible para variar la onda de la frecuencia de excitación ω y las amplitudes f_i de la fuerza de excitación. Por lo tanto,

para medir el vector de posición y altitud ξ , la respuesta del sistema de segundo orden mostrado en la ecuación (2.116) puede ser ajustado a un modelo lineal:

$$(M_{RB} + A(\omega)\ddot{\xi} + B(\omega)\dot{\xi} + C(\xi) = f \cos(\omega t) \quad (2.118)$$

Para cada frecuencia ω donde las fuerzas hidrodinámicas e hidrostáticas son reconocidas como un sistema masa-amortiguador-resorte dependiente de la frecuencia.

$$\tau_{hyd} + \tau_{hs} = \underbrace{-A(\omega)\ddot{\xi} - B(\omega)\dot{\xi}} - \underbrace{C(\xi)} \quad (2.119)$$

Las fuerzas de radiación son debido a la energía transportada por las ondas generadas en la superficie y esto es formado por dos componentes, fuerzas de inercia $A(\omega)\ddot{\xi}$ y las fuerzas de amortiguamiento $B(\omega)\dot{\xi}$, donde las matrices:

$A(\omega)$ Masa añadida

$B(\omega)$ potencial de amortiguamiento

Son reconocidos como las matrices de coeficientes de potencial. La matriz de masa añadida $A(\omega)$ no debe entenderse como una masa adicional debido a una cantidad finita de agua que es arrastrada con el vehículo, la definición más precisa es:

2.2.4.5. Definición: Masa añadida

Es entendida como las fuerzas y momentos inducidos por la presión debido a movimientos forzados en el vehículo y que es proporcional a la aceleración del cuerpo. Las ecuaciones pueden ser expresadas en la forma:

$$F_j = -\dot{U}_i m_{ji} - \varepsilon_{jkl} U_i \Omega_k m_{li} \quad (2.120)$$

$$M_j = -\dot{U}_i m_{j+3,i} - \varepsilon_{jkl} U_i \Omega_k m_{l+3,i} - \varepsilon_{jkl} U_i U_k m_{li} \quad (2.121)$$

donde j, k, l toman valores de 1,2,3, y el índice i es usado para denotar los seis componentes de velocidad. U_i son los tres componentes de traslación y Ω_k son los tres componentes de rotación. ε_{jkl} es un tensor alternante igual a +1 si el orden cíclico de los índices es (123, 231, 312) e igual a -1 si el orden es (132, 213, 321). Expandiendo y

usando notación vectorial podemos obtener las matrices para M_A , $C_A(v)$.

$$M_A = \begin{bmatrix} -X_{\dot{u}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_{\dot{v}} & 0 & 0 & 0 & -Y_{\dot{r}} \\ 0 & 0 & -Z_{\dot{w}} & 0 & -Z_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_{\dot{p}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_{\dot{w}} & 0 & -M_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & -N_{\dot{v}} & 0 & 0 & 0 & -N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

$$C_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & a_{12} & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{13} & a_{23} & 0 \\ 0 & -a_{12} & a_{13} & 0 & -b_{12} & b_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & b_{12} & 0 & -b_{23} \\ -a_{13} & a_{23} & 0 & -b_{13} & b_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

donde $a_{12} = (Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{q}}q)$, $a_{13} = (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{r}}r)$, $a_{23} = X_{\dot{u}}u$, $b_{12} = (N_{\dot{v}}v + N_{\dot{r}}r)$, $b_{13} = (M_{\dot{w}}w + M_{\dot{q}}q)$ y $b_{23} = K_{\dot{p}}p$.

2.2.5. Modelo no lineal de 6DOF para AUV

Como se mostró en el capítulo 2, la dinámica no lineal de un vehículo submarino de 6DOF esta descrito por la ecuación (2.1) y por ello que en este apartado solo se mencionaran brevemente las matrices finales del sistema obtenidas con anterioridad.

2.2.5.1. Matriz de masas (cuerpo rígido y masa añadida)

Para vehículos que operan por debajo de la zona afectada por las olas. La matriz inercial $M = M_{RB} + M_A$ donde la matriz M_{RB} se obtuvo en la ecuación (2.52) y la matriz M_A en la ecuación (2.122). Esta matriz está definida como:

$$M = \begin{bmatrix} m - X_{\dot{u}} & 0 & 0 & 0 & mz_g & -my_g \\ 0 & m - Y_{\dot{v}} & 0 & -mz_g & 0 & mx_g - Y_{\dot{r}} \\ 0 & 0 & m - Z_{\dot{w}} & my_g & -mx_g - Z_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & -mz_g & my_g & I_x - K_{\dot{p}} & 0 & 0 \\ mz_g & 0 & -mx_g - M_{\dot{w}} & 0 & I_y - M_{\dot{q}} & 0 \\ -my_g & mx_g - N_{\dot{v}} & 0 & 0 & 0 & I_z - N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

Ahora teniendo en consideración la simetría en la estructura del vehículo para poder reducir la carga computacional tal como se muestra en el Apéndice A.4. Se considera el caso en particular donde la simetría es establecida en los planos xz y xy .

2.2.5.2. Matriz Coriolis (cuerpo rígido y masa añadida)

Teniendo la matriz M_{RB} se puede obtener la matriz Coriolis C_{RB} de acuerdo con la ecuación (2.56). La forma expandida de acuerdo a lo siguiente:

$$C_{RB}(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -m(z_g r) & 0 & m(z_g p) \\ m(x_g q) & -m(z_g r + x_g p) & m(z_g q) \\ m(x_g r) & 0 & -m(x_g p) \\ m(z_g r) & -m(x_g q - w) & -m(x_g r + v) \\ -m(w) & m(z_g r + x_g p) & m(u) \\ -m(z_g p - v) & -m(z_g q + u) & m(x_g p) \\ 0 & I_z r & -I_y q \\ -I_z r & 0 & I_x p \\ I_y q & -I_x p & 0 \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

de la misma forma teniendo la matriz M_A se puede obtener la matriz Coriolis C_A

$$C_A(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{q}}q) & (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{r}}r) \\ (Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{q}}q) & 0 & -X_{\dot{u}}u \\ -(Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{r}}r) & X_{\dot{u}}u & 0 \\ 0 & -(Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{q}}q) & (Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{r}}r) \\ (Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{q}}q) & 0 & -X_{\dot{u}}u \\ -(Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{r}}r) & X_{\dot{u}}u & 0 \\ 0 & -(N_{\dot{v}}v + N_{\dot{r}}r) & (M_{\dot{w}}w + M_{\dot{q}}q) \\ (N_{\dot{v}}v + N_{\dot{r}}r) & 0 & -K_{\dot{p}}p \\ -(M_{\dot{w}}w + M_{\dot{q}}q) & K_{\dot{p}}p & 0 \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

2.2.5.3. Matriz de Amortiguamiento

En general, la matriz de amortiguamiento de un vehículo bajo el agua moviéndose en 6DOF en alta velocidad es altamente no-lineal y acoplado. Una aproximación para simplificar se asume que el vehículo está realizando movimiento no-acoplado. Los términos de amortiguamiento cuadrático son dominantes, en el caso de un vehículo bajo el agua que es operado en un fluido ilimitado. Dos efectos que son más prominentes:

- fricción superficial cuadrática o no-lineal debido a la teoría de capa limite turbulenta.
- el amortiguamiento viscoso debido al desprendimiento de vórtices

Las fuerzas de amortiguamiento hidrodinámico pueden ser modelado como:

$$D_n = \begin{bmatrix} X_{u|u}|u| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{v|v}|v| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{w|w}|w| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{p|p}|p| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{w|w}|w| & 0 & M_{q|q}|q| & 0 \\ 0 & N_{v|v}|v| & 0 & 0 & 0 & N_{r|r}|r| \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

2.2.5.4. Vector de fuerzas de restauración

La fuerza de gravedad y flotación en el vehículo causan las fuerzas de restauración. la fuerza gravitacional actúa a través del centro de gravedad (x_g, y_g, z_g) del vehículo mientras que la fuerza de flotación actúa a través del centro de flotación (x_b, y_b, z_b) . La fuerza de flotación también crea un momento ya que se desplaza del centro de gravedad por la distancia x_b, y_b, z_b .

$$g(\eta) = - \begin{bmatrix} (W - B) \sin(\theta) \\ - (W - B) \cos(\theta) \sin(\phi) \\ - (W - B) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ - (y_g W - y_b B) \cos(\theta) \cos(\phi) + (z_g W - z_b B) \cos(\theta) \sin(\phi) \\ (z_g W - z_b B) \sin(\phi) + (x_g W - x_b B) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ - (x_g W - x_b B) \cos(\theta) \sin(\phi) + (y_g W - y_b B) \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

En el diseño de un vehículo bajo submarino, es deseable localizar el centro de gravedad en línea con el centro de flotación. De esta manera el ángulo roll y el ángulo

pitch están niveladas. Para establecer el ángulo roll en cero, $y_g = y_b$ debe satisfacerse, y para establecer el ángulo pitch a cero, $x_g = x_b$ debe satisfacerse.

2.2.5.5. Vector de propulsión

$T_{port}, T_{stbd}, T_{fore}, T_{aft}$ son las fuerzas de los propulsores. La fuerza del propulsor puede ser fácilmente obtenida desde el fabricante o mediante experimentos. El momento es simple de calcular, la fuerza de empuje multiplicada por la distancia desde la línea del propulsor hasta el origen del vehículo.

$$\tau = \begin{bmatrix} T_{port} + T_{stbd} \\ T_{fore_h} + T_{aft_h} \\ T_{fore_v} + T_{aft_v} \\ T_{fore_h} x_{pfore_h} - T_{aft_h} x_{paft_h} \\ (T_{port} + T_{stbd}) z_p - T_{fore_v} x_{pfore_v} + T_{aft_v} x_{paft_v} \\ (T_{port} - T_{stbd}) y_p + T_{fore_h} x_{pfore_h} - T_{aft_h} x_{paft_h} \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

2.3. Linealización

Después de obtener la ecuación general del sistema no lineal de 6DOF para el vehículo submarino es necesario obtener un modelo aproximado a un sistema lineal que permita desarrollar controladores próximos a sus estados de convergencia. Con la finalidad de obtener un sistema lineal en cada estado de convergencia que expresa la dinámica local y con los cuales formaran sub-sistemas del sistema no-lineal principal, se aplicara el primer método de linealización de Lyapunov el cual está ligado a los conceptos de estabilidad local del sistema. Bajo este concepto Takagi-Sugeno obtienen un modelo lineal que representa el modelo no lineal. Como un método de verificación se podrá obtener también un modelo linealizado bajo el concepto de ejes paralelos al vehículo.

2.3.1. Representación vectorial de 6DOF en BODY y NED

Cuando se diseña sistemas de control con realimentación puede ser ventajoso formular ecuaciones de movimiento en ambos marcos $\{b\}$ y $\{n\}$ para explorar las propiedades físicas del modelo. Se incluirán transformaciones que pueden ser usadas para representar las ecuaciones de movimiento en diferentes marcos de referencia.

2.3.1.1. Ecuaciones de movimiento expresadas en BODY

considerar las ecuaciones de movimiento no lineal expresadas en $\{b\}$ con $v_c = 0$:

$$\dot{\eta} = J_{\Theta}(\eta)v \quad (2.130)$$

$$M\dot{\nu} + C(\nu)\nu + D(\nu)\nu + g(\eta) + g_0 = \tau + \tau_{wind} + \tau_{wave} \quad (2.131)$$

donde:

$$M = M_{RB} + M_A \quad (2.132)$$

$$C(\nu) = C_{RB} + C_A \quad (2.133)$$

$$D(\nu) = D + D_n(\nu) \quad (2.134)$$

Las expresiones de η y $J_{\Theta}(\eta)$ dependen de la representación cinemática, en cuyo caso la representación elegida a sido los ángulos de Euler.

2.3.1.2. Ecuaciones de movimiento expresadas en NED

La ecuación dada a continuación:

$$M^*(\eta)\ddot{\eta} + C^*(\nu, \eta)\dot{\eta} + D^*(\nu, \eta)\dot{\nu} + g^*(\eta) + g_0^*(\eta) = \tau^* + \tau_{wind}^* + \tau_{wave}^* \quad (2.135)$$

Donde las expresiones: M^* , $C^*(\nu, \eta)$, $D^*(\nu, \eta)$, g^* , g_0^* , τ^* , τ_{wind}^* , τ_{wave}^* y las transformaciones cinemática estarán asociadas a transformaciones para ángulos de Euler. La representación está basada en tres parámetros ϕ , θ y ψ . Esto es:

$$J_{\Theta}(\eta) := \begin{bmatrix} R_b^n(\Theta_{nb}) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & T_{\Theta}(\Theta_{nb}) \end{bmatrix}, \quad J_{\Theta}^{-1}(\eta) := \begin{bmatrix} R_b^n(\Theta_{nb})^T & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & T_{\Theta}^{-1}(\Theta_{nb}) \end{bmatrix} \quad (2.136)$$

Donde $\eta := [N, E, D, \phi, \theta, \psi]^T$. La representación de la singularidad en $\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$ en la expresión para T_{Θ} implica la inversa de la matriz $J_{\Theta}^{-1}(\eta)$ el cual no existe para ese valor. La transformación es como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} = J_{\Theta}(\eta)v & \iff \nu = J_{\Theta}^{-1}(\eta)\dot{\eta} \\ \ddot{\eta} = J_{\Theta}(\eta)\dot{\nu} + \dot{J}_{\Theta}(\eta)\dot{\nu} & \iff \dot{\nu} = J_{\Theta}^{-1}(\eta)[\ddot{\eta} - \dot{J}_{\Theta}(\eta)J_{\Theta}^{-1}(\eta)\dot{\eta}] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
M^*(\eta) &= J_{\Theta}^{-T}(\eta) M J_{\Theta}^{-T}(\eta) \\
C^*(\nu, \eta) &= J_{\Theta}^{-T} [C(\nu) - M J_{\Theta}^{-1}(\eta) \dot{J}_{\Theta}(\eta)] J_{\Theta}^{-1}(\eta) \\
D^*(\nu, \eta) &= J_{\Theta}^{-T}(\eta) D(\nu) J_{\Theta}^{-1}(\eta) \\
g^*(\eta) + g_0^*(\eta) &= J_{\Theta}^{-T} [g(\eta) + g_0] \\
\tau^* + \tau_{wind}^* + \tau_{wave}^* &= J_{\Theta}^{-T} [\tau + \tau_{wind} + \tau_{wave}]
\end{aligned} \tag{2.137}$$

2.3.2. Estados de convergencia

A partir de la ecuación (2.1) se puede obtener los estados de convergencia los cuales deben de cumplir la siguiente condición:

$$\dot{\eta}^* = J_{\Theta}(\eta^*) v^* \tag{2.138}$$

$$\dot{v}^* = M^{-1} (-C(v^*) v^* - D(v^*) v^* - g(\eta^*) + \tau^*) \tag{2.139}$$

Donde $\dot{\eta}^* = 0$ y $\dot{v}^* = 0$. Asumiendo para aplicaciones de baja velocidad $\nu^* \approx 0$ y que la variable η^* está definida como $[x^*, y^*, z^*, \phi^*, \theta^*, \psi^*]$. Se asumirá además que el sistema es neutro en flotabilidad $W = B$. Esto reduce la matriz $g(\eta^*)$ a:

$$g(\eta) = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (z_g W - z_b B) \cos(\theta) \sin(\phi) \\ (z_g W - z_b B) \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.140}$$

considerando que el AUV tendrá un desplazamiento paralelo al sistema de coordenadas, donde $\phi^*, \theta^* \approx 0$, generando una aproximación de $g(\eta^*) \approx G\eta^*$, donde la matriz G está definida como:

$$G = \text{diag}[0, 0, 0, (z_g W - z_b B), (z_g W - z_b B), 0] \tag{2.141}$$

se debe considerar también que $\tau^* = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones del sistema tachando los elementos que deben despreciarse son mostradas a continuación:

$$0 = J_{\Theta}(\eta^*) v^* \tag{2.142}$$

$$0 = M^{-1} (-\cancel{C(\theta)} v^* - \cancel{D(\theta)} v^* - G\eta^* + \cancel{\tau^*}) \tag{2.143}$$

Un análisis del componente J_Θ es mostrado en la sección 2.2.1.3 donde se puede ver que está compuesto de matrices de rotación lineal y angular, estas a su vez compuestas de funciones trigonométricas de seno y coseno que genera puntos de convergencia para valores definidos en la variable ψ^* . Para una explicación más detallada se puede ver el Apéndice B.1. Los puntos de convergencia están definidos como:

$$\begin{aligned} [\eta^*, \nu^*] &= [x^*, y^*, z^*, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ [\eta^*, \nu^*] &= [x^*, y^*, z^*, 0, 0, \pi/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ [\eta^*, \nu^*] &= [x^*, y^*, z^*, 0, 0, -\pi/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ [\eta^*, \nu^*] &= [x^*, y^*, z^*, 0, 0, \pi, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \end{aligned} \quad (2.144)$$

2.3.3. Linealización por ejes de coordenadas paralelos

se asumirá que los ángulos ϕ, θ son pequeños donde los movimientos en *roll* y *pitch* son limitados, es decir altamente estable

$$\phi, \theta \approx 0 \quad (2.145)$$

2.3.3.1. Sistema de coordenadas paralelo al vehículo

Cuando se derivan las ecuaciones de movimiento es conveniente introducir el sistema de coordenadas paralelo al vehículo obtenido por rotación de los ejes del cuerpo en un ángulo ψ sobre el eje z en cada paso de tiempo. Esto es

$$\dot{\eta} = J_\Theta(\eta)\nu \stackrel{\phi=\theta=0}{\approx} P(\psi)\nu \quad (2.146)$$

donde

$$P_\psi := \begin{bmatrix} R(\psi) & I_{3x3} \\ I_{3x3} & I_{3x3} \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

y $R(\psi) = R_{z,\psi}$ es la matriz de rotación in yaw

2.3.3.2. Definición: Sistema de coordenadas paralelo al vehículo

El sistema de coordenadas paralelo al vehículo (VP) es definido como

$$\eta_p = P^T(\psi)\eta \quad (2.148)$$

donde η_p es el vector de posición y localización NED expresado en $\{b\}$ y $P(\psi)$ es dado por la ecuación 2.147. Notar que $P^T(\psi)P(\psi) = I_{6 \times 6}$

2.3.3.3. Aplicaciones de baja velocidad

Es conveniente expresar las ecuaciones de cinemática en coordenadas VP cuando usamos teoría lineal. De la definición anterior se puede ver

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_p &= \dot{P}^T(\psi)\eta + P^T(\psi)\dot{\eta} \\ &= \dot{P}^T(\psi)P(\psi)\eta_p + P^T(\psi)P(\psi)\nu \\ &= rS\eta_p + \nu\end{aligned}\tag{2.149}$$

donde $r = \dot{\psi}$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{2.150}$$

para aplicaciones de baja velocidad $r \approx 0$. Entonces se puede reducir a seis integradores puros.

$$\dot{\eta}_p \approx \nu\tag{2.151}$$

Este modelo es útil ya que es lineal en v . De hecho, esa es la principal idea para usar coordenadas VP en diseños de control en embarcaciones y plataformas. Las fuerzas de flotación y gravedad pueden ser expresadas en términos de coordenadas VP. Para pequeños ángulos ϕ y θ se puede ver que

$$g(\eta) \stackrel{\phi=\theta=0}{\approx} P_T(\psi)GP(\psi)\eta_p = \underbrace{P^T(\psi)GP(\psi)}_G\eta_p = G\eta_p\tag{2.152}$$

Notar que esta fórmula confirma que las fuerzas de restauración de un vehículo de flotación nivelado son independientes del ángulo *yaw* ψ . Asumiendo la aproximación en 2.145 para aplicaciones de baja velocidad $v \approx 0$ implica que las fuerzas y momentos de Coriolis, Centrípeta, amortiguamiento, restauración y flotabilidad pueden ser linealizados bajo $v = 0$ y $\phi = \theta = 0$

Aquí, $C(0) = 0$ y $D_n(0) = 0$, por lo tanto tiene sentido aproximar

$$M\dot{\nu} + \underbrace{C(\nu)\nu}_0 + \underbrace{[D + Dv_r]\nu}_{D\nu} + \underbrace{g\eta}_{G\eta_p} + g_o = \tau + \underbrace{\tau_{wind} + \tau_{wave}}_w \quad (2.153)$$

el cual para $g_o = 0$ se obtiene

$$\dot{\eta}_p = \nu \quad (2.154)$$

$$M\dot{\nu} + D\nu + G\eta_p = \tau + w \quad (2.155)$$

Este es el modelo en espacio de estados lineal e invariante en el tiempo

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew \quad (2.156)$$

donde $x = [\eta_p^T, \nu^T]^T$, $u = \tau$ y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}G & -M^{-1}D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

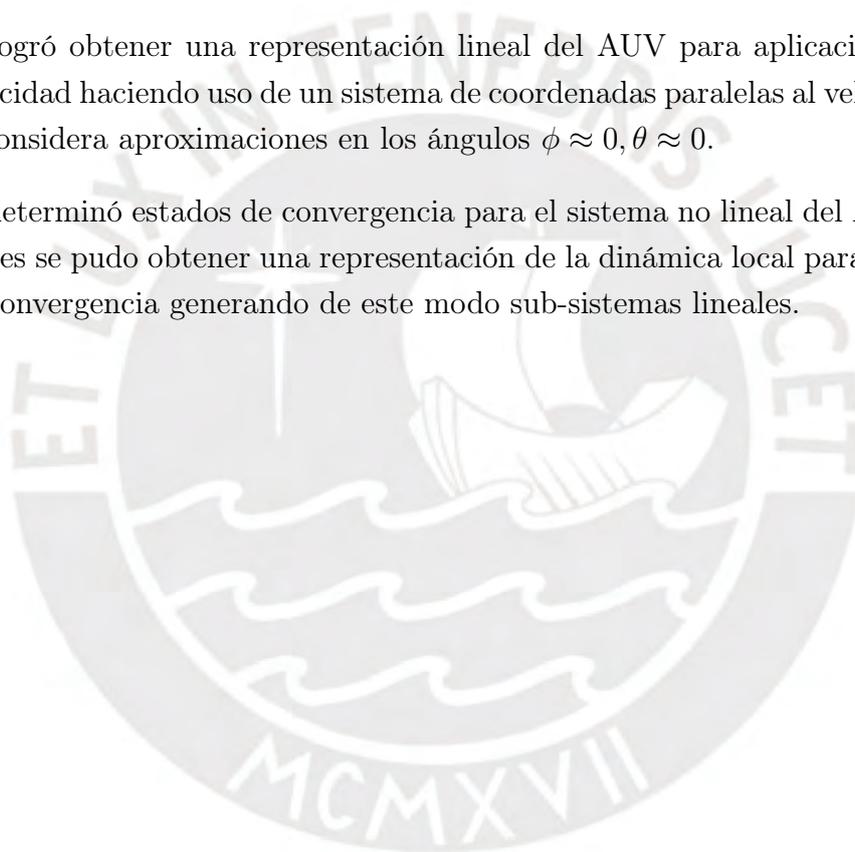
Notar que las posiciones NED son calculadas desde η_p usando:

$$\eta = P(\psi)\eta_p \quad (2.158)$$

Por lo tanto, el sistema de control puede ser basado en realimentación desde los estados (η_p, ν) mientras que η es presentado a ser el operador humano en uso.

2.4. Conclusiones Preliminares

- Se logró plantear ecuaciones matemáticas que describen la dinámica del AUV mediante transformaciones lineales y angulares para un cuerpo rígido donde se pudo obtener la ecuación (2.1). Mientras que al aplicar la segunda ley de Newton para un cuerpo en movimiento se obtuvo la ecuación (2.2).
- Debido a la complejidad dinámica del sistema no lineal, se pudo determinar que hacer uso de la simetría en la estructura del AUV ayuda a reducir la carga computacional optimizando de este modo los algoritmos de programación.
- Se logró obtener una representación lineal del AUV para aplicaciones de baja velocidad haciendo uso de un sistema de coordenadas paralelas al vehículo, donde se considera aproximaciones en los ángulos $\phi \approx 0, \theta \approx 0$.
- Se determinó estados de convergencia para el sistema no lineal del AUV, con los cuales se pudo obtener una representación de la dinámica local para cada estado de convergencia generando de este modo sub-sistemas lineales.



Capítulo 3

CONTROLADORES

3.1. Introducción

Habiendo obtenido el modelo dinámico del AUV, el cual está representado mediante las ecuaciones (2.1) y (2.2), este será de utilidad para el diseño y simulación de diversos controladores donde el vehículo submarino será sometido a trayectorias de prueba. Un modelo AUV de 6DOF es usualmente implementado en un computador para describir todos los efectos de dinámica con la mayor precisión posible. Este modelo será llamado *modelo de simulación* y será capaz de reconstruir la respuesta en el tiempo del sistema físico. Se pueden diseñar controladores y observadores basados en el modelo 6DOF, sin embargo, también se puede usar el modelo simplificado o de orden reducido.

Se empezará diseñando un *Controlador Regulador Cuadrático Lineal (LQR)* que implica minimizar el índice de desempeño J donde las matrices Q y R se convierten en parámetros de diseño. El siguiente será un *Controlador Adaptativo por modelo de referencia (MRAC)*, que estará dividido en dos modelos, MRAC con feedforward solamente a la planta y MRAC con feedforward en la planta y modelo, donde la idea básica de un control adaptativo es estimar en línea los parámetros cambiantes o inciertos de la planta, en base a la medición de las señales de entrada y salida del sistema y usar los parámetros estimados para ajustar los parámetros del controlador de manera que se mantenga un desempeño óptimo. Por último, se tendrá el *Controlador Fuzzy Adaptativo por modelo de Referencia (MRAFC)* que tendrá la misma idea básica de estimar parámetros en línea y usando una condición suficiente para estabilidad asintótica del sistema de control fuzzy basado en Takagi-Sugeno (TS) en el sentido de Lyapunov, a través de la existencia de una función común de Lyapunov para todos los sub-sistemas.

Es importante mencionar que los sistemas MRAFC han sido aplicado con éxito para sistemas de control complejos o matemáticamente poco comprensibles [24, 19].

3.2. Controlador regulador cuadrático lineal (LQR)

Un controlador LQR es un método de diseño de un controlador óptimo, el cual produce una ley que minimiza una función de costo. Esta función de costo está formada por la suma de los cuadrados de cada una de las variables o estados del sistema, sean entradas como salidas. [30]

La función de costo está definida como:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) \quad (3.1)$$

Donde Q y R , son matrices de pesos asociados a cada una de las variables de entrada y salida presentes en la ecuación 3.1.

3.2.1. Diseño de un controlador LQR

Para el diseño [39] se emplea el sistema linealizado dado por las ecuaciones presentes en las secciones anteriores, el cual debe tener la siguiente estructura:

$$\hat{\dot{x}} = A\hat{x} + B\hat{u} \quad (3.2)$$

$$\hat{u} = -K\hat{x} \quad (3.3)$$

Donde K es la matriz de ganancia del controlador, \hat{x} es definido como $(x - x^*)$ cuyo vector x^* es el vector de convergencia del vector de estado del sistema x y \hat{u} es definido como $(u - u^*)$ donde u^* es el vector de convergencia del vector de entrada u .

Es necesario también tener certeza del comportamiento del sistema, es por ello que el parámetro de la controlabilidad juega un papel importante, que permite analizar si es alcanzable o controlable simplemente analizando la matriz de controlabilidad definida a partir del par (A, B) . Para los casos convencionales donde solo se tiene un vector de entrada, la matriz de controlabilidad está definida como:

$$c_0 = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^n B] \quad (3.4)$$

Para el caso de sistemas con múltiples vectores de entrada [32] como en el caso del modelo de AUV propuesto, es necesario definir la matriz de controlabilidad como:

$$c_0 = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{1m} \ Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_m \ A^{n-1}b_1 \ \dots \ A^{n-1}b_m] \quad (3.5)$$

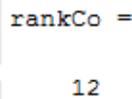
Algorithm 1 Algoritmo para calcular la controlabilidad

```

1: /* Se obtienen los vectores de ingreso desde la matriz B */
2: b1 ← B(:, 1);
3: b2 ← B(:, 2);
4: b3 ← B(:, 3);
5: b4 ← B(:, 4);
6: b5 ← B(:, 5);
7: b6 ← B(:, 6);
8: /* Se calcula por grupos los términos de la matriz general de controlabilidad */
9: Co1 ← [b1 b2 b3 b4 b5 b6];
10: Co2 ← [A * b1 A * b2 A * b3 A * b4 A * b5 A * b6];
11: Co3 ← [A2 * b1 A2 * b2 A2 * b3 A2 * b4 A2 * b5 A2 * b6];
12: ⋮
13: Co12 ← [A11 * b1 A11 * b2 A11 * b3 A11 * b4 A11 * b5 A11 * b6];
14: /* Se obtiene la matriz de controlabilidad */
15: Co ← [Co1 + Co2 + Co3 + ... + Co12];
16: /* Para que el sistema sea controlable debe cumplir la condición: */
17: rank[Co] = n

```

Luego de efectuar el cálculo del algoritmo anterior el resultado es mostrado en la Figura 3.1, cuyo valor cumple $n = 12$, indicativo de que el sistema es controlable.



```

rankCo =
12

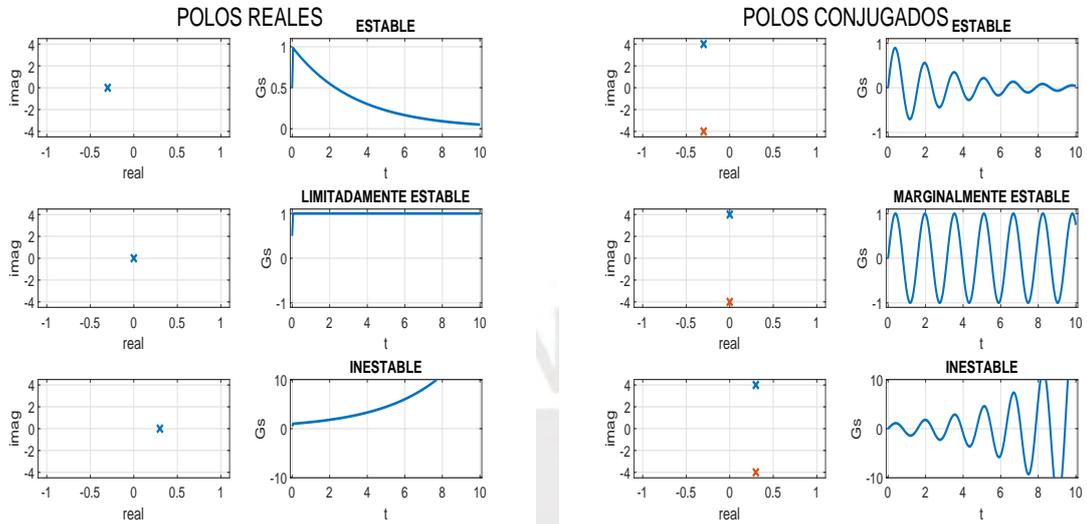
```

Figura 3.1 Rango modelo AUV

Ahora se deberá evaluar la ubicación de los polos del sistema antes de aplicar el controlador LQR para poder evaluar a priori el comportamiento de la estabilidad y luego hacer una comparativa de cuanto mejora el sistema al aplicar la matriz de autovalores K que se obtiene al aplicar la solución de Riccati. En la Figura 3.3a se puede ver que algunas de las raíces obtenidas del sistema se encuentran en el eje imaginario y otras en el origen.

Para poder entender el resultado de los polos obtenidos nos ayudaremos de los gráficos en las Figuras 3.2a y 3.2b, los cuales nos indican como es el comportamiento de los sistemas de una forma general conociendo la ubicación de los polos. Dicho

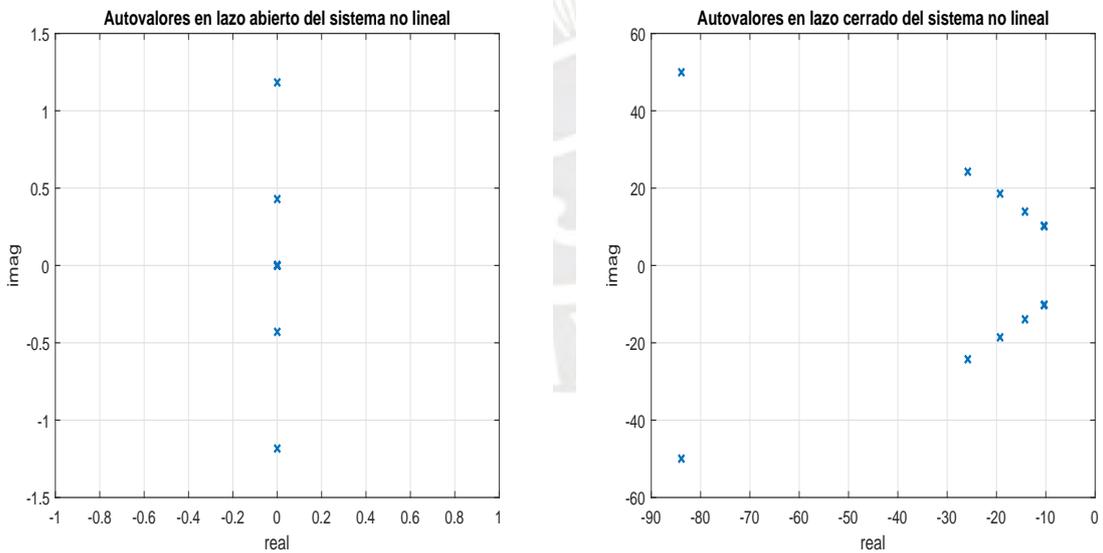
esto se puede concluir que el sistema no lineal en estudio se puede entender como una combinación de un sistema limitadamente estable y un sistema marginalmente estable.



(a) ubicación de polos reales

(b) ubicación de polos conjugados

Figura 3.2

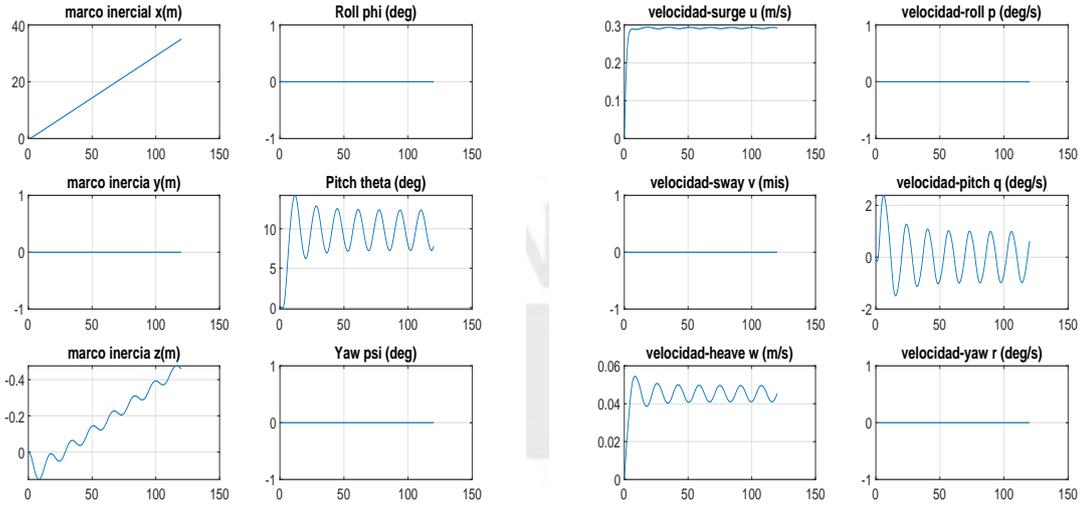


(a) Autovalores del sistema AUV en bucle abierto

(b) Autovalores del sistema AUV en bucle cerrado

Figura 3.3

Para poder verificar lo dicho anteriormente, la Figura 3.2b muestra el comportamiento de las variables de estado del modelo dado en las ecuaciones (2.1) y (2.2) en bucle abierto. A este modelo le fue aplicado funciones escalón en los propulsores traseros con amplitud de $1,75N$ obteniéndose resultados como se muestra a continuación.



(a) Variable Eta AUV bucle abierto

(b) Variable Nu AUV bucle abierto

Figura 3.4

En una inspección rápida se puede notar que las variables *Pitch*, *Pitch-velocity*, *inercial frame z*, y *heave-velocity* mantienen una oscilación que puede aparentar que se mantiene sin converger o divergir si el tiempo de simulación se extendiera y de este modo se verifica el comportamiento del sistema de forma marginalmente estable.

Entonces ahora para obtener una matriz de ganancias que le permita al sistema converger de manera estable se debe encontrar el valor de K que minimice la función de costo (3.1). Esto se puede calcular mediante la solución a la ecuación de Riccati.

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.6)$$

Del cual se obtiene la matriz P , necesaria para calcular el valor de la matriz K .

$$K = R^{-1}B^T P \quad (3.7)$$

Aplicando este resultado en la ecuación (3.3) se puede obtener una nueva gráfica con los nuevos polos ubicados en la parte izquierda del eje real como se muestra en la Figura 3.3b.

3.2.2. Simulación

A continuación, se presenta la simulación del modelo no lineal en el cual es aplicado el controlador LQR obtenido previamente. La trayectoria que debe seguir el sistema es una trayectoria circular la cual es evaluada a una velocidad de $v = 0,08 \text{ m/s}$ en el eje X y eje Y .

Antes de analizar la simulación es conveniente primero hacer algunas observaciones acerca del comportamiento del sistema cuando se encuentra próximo a cada uno de sus estados de convergencia vistos en la sección 2.3.2. Para esto se debe de encontrar ganancias de realimentación K_i para cada estado de convergencia las cuales son obtenidas al desarrollar la ecuación de Riccati (3.6).

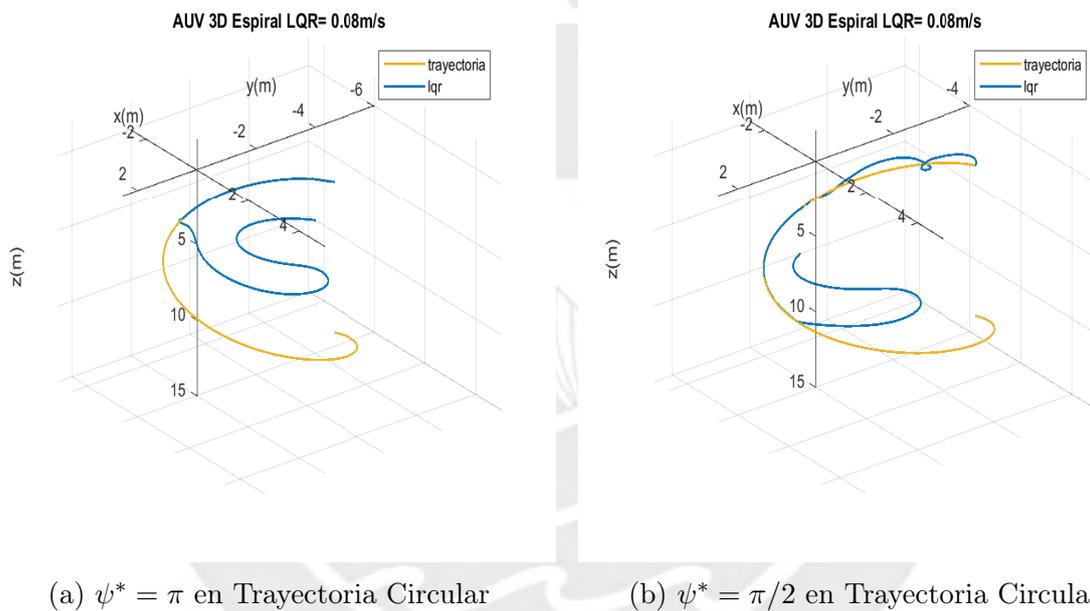


Figura 3.5 Trayectoria Circular

En la Figura 3.5 se observa el comportamiento del AUV en los estados de convergencia cuando $\psi^* = \pi$ y $\psi^* = \pi/2$. Entonces, en la Figura 3.5a al lado izquierdo nos muestra que el AUV inicia desde el punto de origen $(2,5, -2,5)$ y con un ángulo de inicio de $\psi^* = \pi$. El vehículo converge a la trayectoria deseada hasta llegar aproximadamente al ángulo $\psi^* = \pi/2$ donde inicia la etapa de inestabilidad que termina por divergir lejos de la trayectoria. Casi de una forma opuesta es el comportamiento en la Figura 3.5b mostrado al lado derecho, donde el vehículo inicia desde el punto de origen de una forma inestable pero conforme avanza en la trayectoria se acerca al punto de convergencia en $\psi^* = \pi/2$. Cuando el AUV logra converger nuevamente la trayectoria,

este lo hace hasta estar próximo al ángulo $\psi^* = 0$, donde nuevamente empieza una etapa de inestabilidad y empieza a divergir otra vez.

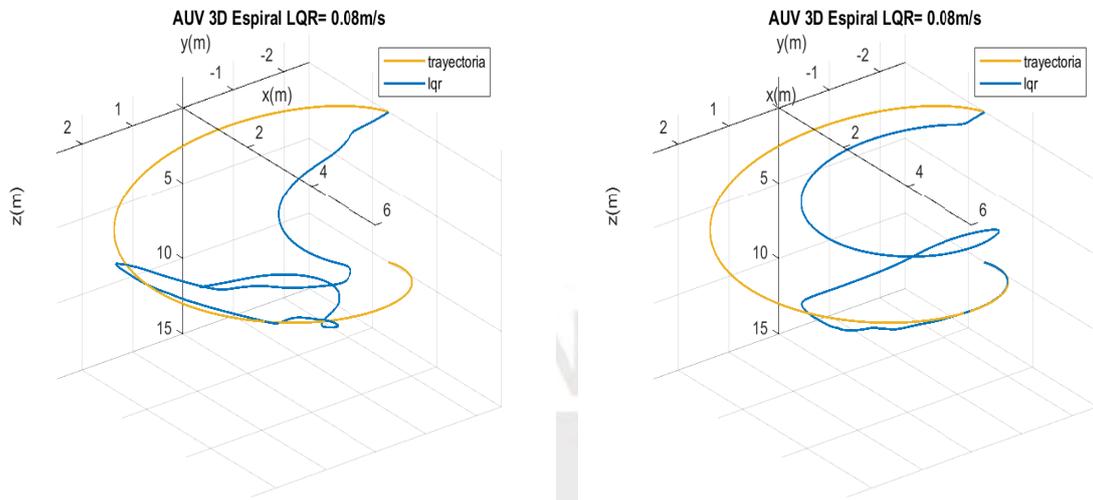
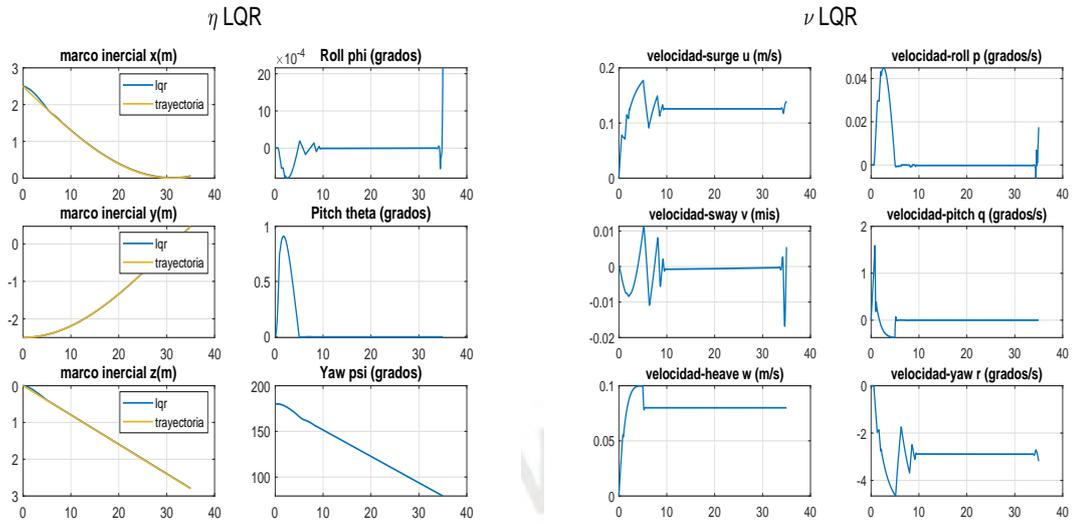
(a) $\psi^* = 0$ en Trayectoria Circular(b) $\psi^* = -\pi/2$ en Trayectoria Circular

Figura 3.6 Trayectoria Circular

A continuación, la Figura 3.6 muestra el comportamiento del sistema en los estados de convergencia cuando $\psi^* = 0$ y $\psi^* = -\pi/2$. Donde la Figura 3.6a del lado izquierda nos muestra el comportamiento del sistema partiendo nuevamente desde el origen, pero debido a que es opuesto al punto de convergencia este simplemente inicia el trayecto de una forma inestable y divergente. Y la Figura 3.6b que aparece al lado derecho el AUV inicia el trayecto en el origen y trata de avanzar, pero de una forma inestable, como un trayecto reducido y distante, como si fuera un trayecto paralelo al original, hasta que encuentra un estado de inestabilidad muy cerca del final. Luego empieza avanzar y divergir, hasta que logra encontrar nuevamente el trayecto en la parte final, pero de forma oscilante.

Habiendo mostrado previamente el comportamiento del AUV en cada estado de convergencia, como primer análisis será evaluar un tramo de la trayectoria, el correspondiente al primer estado de convergencia $\psi^* = \pi$, cuya variable de estado η la cual está compuesta de las variables de posición x, y, z y los ángulos de Euler ϕ, θ, ψ , todos evaluados en el marco de referencia n . en la Figura 3.7a se puede apreciar que el seguimiento a la trayectoria deseada lo hace de una manera convergente, siendo el punto de inicio la parte con mayor variación debido a que el AUV intenta alcanzar la estabilidad, el cual es logrado al llegar aproximadamente al tiempo $t = 10s$. El mayor

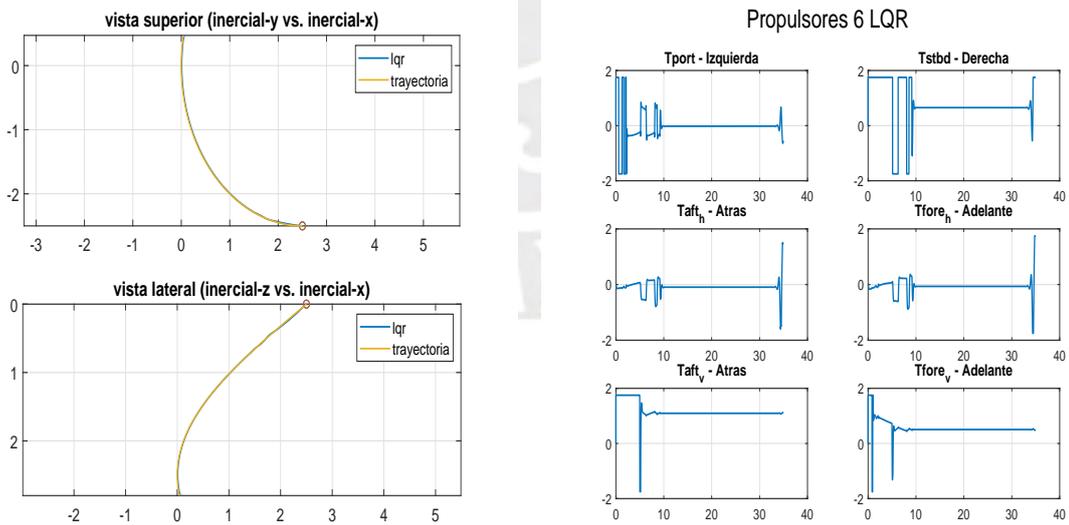


(a) Variable η LQR

(b) Variable ν LQR

Figura 3.7 Variable de estado

ángulo de elevación es de 1° grado y con ángulos de balanceo de próximos a cero. De igual manera la Figura 3.7b nos muestra las velocidades lineales y angulares evaluados en el marco de referencia fijo al cuerpo b los cuales también tienen un tiempo de estabilización próximo al tiempo $t = 10s$.



(a) Vista Superior-Lateral

(b) Variable τ LQR

Figura 3.8 Trayectoria circular

De la misma manera, el análisis de la Figura 3.8a nos muestra puntos de vista superior y lateral que permite evaluar mejor el recorrido del AUV. Así mismo la Figura 3.8b nos muestra la forma señal de los propulsores traseros y los estabilizadores, con lo cual se puede indicar que son señales con cambio de polaridad, de manera oscilante debido a que el controlador LQR genera torques elevados para estabilizar, pero debido a que el sistema está siendo saturado para entregar como máximo un torque de $1,75N$ las señales constantemente cambian entre el máximo y el mínimo valor hasta llegar a ser estable.

Por otra parte, es necesario evaluar el rendimiento del controlador con algún indicador, es por ello que se implementó un indicador conocido como *error cuadrático medio (RMSE)*. Este indicador es un promedio de los errores al cuadrado como muestra la ecuación siguiente:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}{n}} \quad (3.8)$$

Donde $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ son los valores del vector correspondiente a la trayectoria deseada, mientras que y_1, y_2, \dots, y_n son los valores correspondiente al vector de estado del sistema, y donde dicha diferencia genera un error de seguimiento del sistema. También se encuentra la variable n que representa el número total de elementos del vector \hat{y}_i o en su defecto del vector y_i .

Los valores del indicador RMSE aplicados a la variable de estado para el controlador LQR son mostrados en la Tabla 3.1

I			
	Eje X	Eje Y	Eje Z
Sistema NED	$x = 0,0312$	$y = 0,0003$	$z = 0,0177$
Ángulos de Euler	$\phi = 0,0000$	$\theta = 0,0042$	$\psi = 0,0069$

Tabla 3.1 Error RMS variable η LQR

3.3. Controlador adaptativo por modelo de referencia (MRAC)

En esta sección se implementará un controlador adaptativo por modelo de referencia donde los parámetros de la planta son desconocidos y el objetivo del diseño es formular una ley de control y una ley de adaptación, de modo que la salida de la planta siga a la referencia asintóticamente, es decir $e = y_p - y_m$ tienda a cero y en esta condición este siempre garantizada usando herramientas de Lyapunov. Para el controlador se debe de tener en cuenta primero la ley de control, que es el primer paso de diseño, la cual debe tener parámetros variables. Esta ley de control se elige de modo que la función de transferencia de la planta en lazo cerrado sea igual al modelo de referencia, garantizando que la salida de la planta y_p siga a la salida del modelo y_m y que el error tienda a cero [41]. Lo siguiente será elegir una ley de adaptación que tendrá ecuaciones definidas para cada uno de los casos que se verán en este apartado y que serán dos:

3.3.1. Feedforward solamente alrededor de planta

Este modelo hará una realimentación hacia adelante solo a la planta, usando una compensación definida por la matriz de la función de transferencia R_p

$$\dot{s}_p(t) = A_s s_p(t) + B_s u_p(t) \quad (3.9)$$

$$r_p(t) = D_s s_p(t) \quad (3.10)$$

La salida aumentada para controlar entonces es

$$z_p(t) = y_p(t) + r_p(t) \quad (3.11)$$

el sistema aumentado es:

$$G_a(s) = G_p(s) + R_p(s) \quad (3.12)$$

donde $G_a(s)$ es ASPR siempre que:

- $R_p(s)$ es tal que el grado relativo de $G_a(s)$ es m .
- $R_p^{-1}(s)$ estabiliza el sistema realimentar de salida de lazo cerrado con la función de transferencia $[I + G_p(s)R_p^{-1}(s)]^{-1}G_p(s)$.

Argumentar la planta con un compensador feedforward $R_p(s)$, el cual satisface las condiciones anteriores, resultando en la configuración mostrada en la Figura 3.9. Teniendo un mínimo conocimiento a priori, una configuración de estabilización puede ser diseñada. Esto es, si una planta es estabilizada por un controlador PD $R_p^{-1}(s) = K(1 + \frac{s}{s_o})$, todo lo que necesita es la estimación de la más alta ganancia $K = K_{max}$ que mantenga la estabilidad. El controlador PD es mencionado como un caso particular debido a su amplio rango de aplicabilidad y fácil de aplicación. La configuración del feedforward paralelo en ese caso es:

$$R_p(s) = \frac{K_{max}^{-1}}{\frac{s}{s_o}} \quad (3.13)$$

Es importante notar que solamente estabilidad, y no rendimiento en lazo cerrado, es el objetivo de este procedimiento intermedio. Para cualquier configuración general de estabilización, es importante encontrar la más alta ganancia que mantiene la estabilidad. De esa manera, $R_p^{-1}(s)$ tiene una ganancia pequeña, y la salida $r_p(t)$ seguirá siendo pequeño relativo a la salida de la planta $y_p(t)$. A través de la adición de $R_p(s)$ puede mejorar dramáticamente las propiedades de estabilización del sistema adaptativo, por lo que, es deseado que la salida aumentada $z_p(t)$ permanezca aproximadamente igual a la salida de la planta $y_p(t)$.

3.3.2. Resumen de MARC usando feedforward solamente en la planta

PLANTA:

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \quad (3.14)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t) \quad (3.15)$$

FEEDFORWARD:

$$\dot{s}_p(t) = A_s s_p(t) + B_s u_p(t) \quad (3.16)$$

$$r_p(t) = D_p s_p(t) \quad (3.17)$$

SALIDA AUMENTADA:

$$z_p(t) = y_p(t) + r_p(t) \quad (3.18)$$

MODELO

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \quad (3.19)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) \quad (3.20)$$

ERROR AUMENTADO:

$$e_y(t) = y_m(t) - z_p(t) = y_m(t) - y_p(t) - D_p s_p(t) \quad (3.21)$$

ALGORITMO ADAPTATIVO:

$$r^T(t) = [e_y^T(t) x_m^T(t) u_m^T(t)] \quad (3.22)$$

$$K(t) = [K_e(t) K_x(t) K_u(t)] \quad (3.23)$$

$$\dot{K}_I(t) = e_y(t) r^T(t) T \quad T > 0 \quad (3.24)$$

$$K_p(t) = e_y(t) r^T(t) \bar{T} \quad \bar{T} \geq 0 \quad (3.25)$$

$$K(t) = \dot{K}_p(t) + K_I(t) \quad (3.26)$$

$$u_p(t) = K(t)r(t) \quad (3.27)$$

ESQUEMA CONTROLADOR MRAC (Planta argumentada)

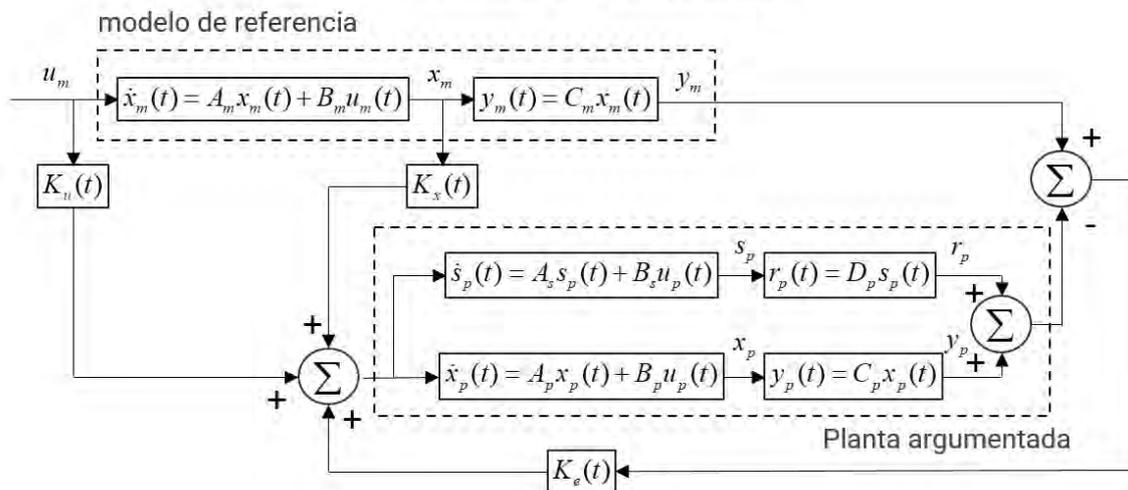


Figura 3.9 Feedforward solamente en Planta

3.3.3. Simulación

Diseñada la ley de control adaptativa en la sección 3.3.2 y estableciendo la misma trayectoria circular presentada previamente en el controlador LQR. Ahora se procede analizar el comportamiento del AUV durante todo el recorrido, el cual tendrá un tiempo de simulación de 125s y con velocidad de desplazamiento en el eje X y Y de $0,08m/s$.

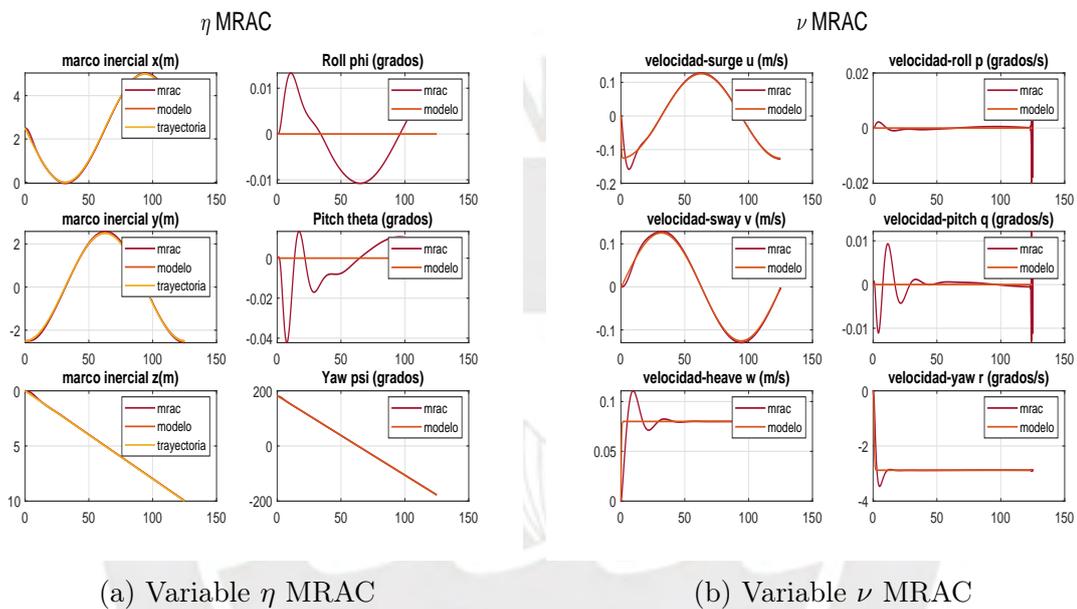
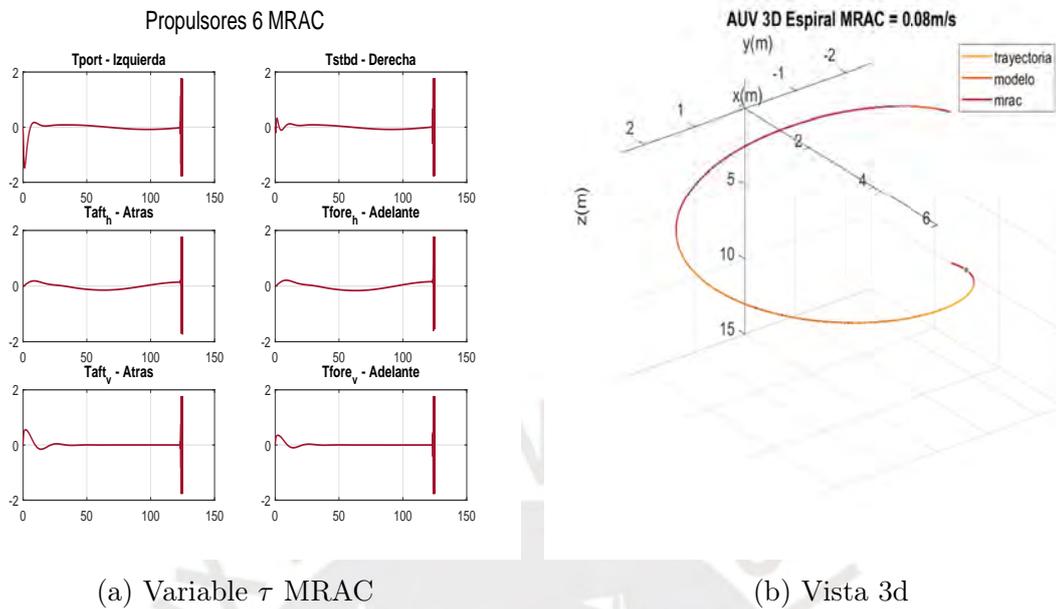


Figura 3.10 MRAC I - Vector de estado

La Figura 3.10a en el lado izquierdo nos muestra el comportamiento de la variable η . Aquí se puede observar la suavidad de las señales que puede generar este controlador adaptativo. Las señales ubicación x, z convergen cada una a sus señales deseadas, teniendo un tiempo de estabilización de unos 10s aproximadamente, mientras que la señal y tiene un tiempo de estabilización de 20s. Las señales de posición ϕ, θ tienen un rango de trabajo que se encuentra en centésimas por lo que se puede suponer que son próximos a cero y esto concuerda con los parámetros de diseño ($\phi, \theta \approx 0$). Por otro lado, el rango de trabajo de la variable ψ se encuentra entre $-\pi, \pi$ y converge a ψ_d establecido en el vector de la trayectoria deseada.

A continuación, la variable ν es mostrado en la Figura 3.10b en el lado derecho. Las velocidades lineales *surge*, *sway* tienen tiempo de establecimiento de 20s y un sobre impulso de 26,6% y 3,2% mientras que la variable *heave* un tiempo de establecimiento de 40s y un sobre impulso de 27,5%.



(a) Variable τ MRAC

(b) Vista 3d

Figura 3.11 MRAC I - Vector de entrada

La forma de las velocidades lineales tienen un comportamiento suave y continuo, a diferencia de las velocidades angulares p, q cuyo comportamiento al final de la simulación es oscilante como se muestra en la Figura 3.12, mientras que la variable r tiene un tiempo de establecimiento de $12s$ y un sobre impulso de $28,13\%$.

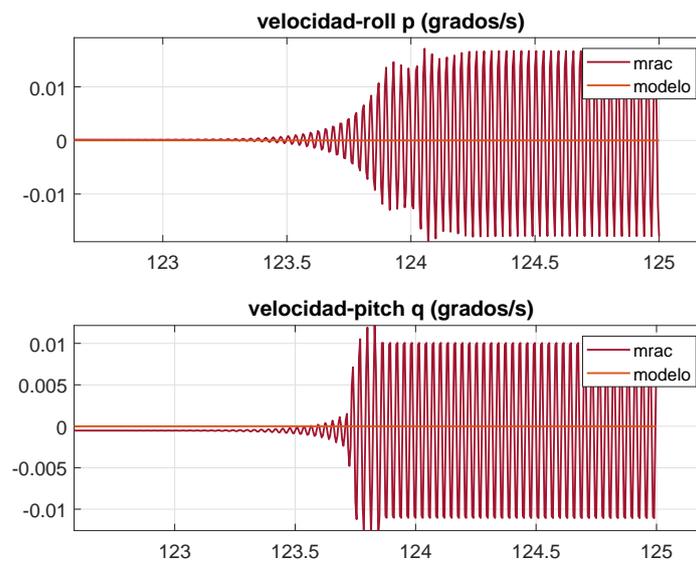


Figura 3.12 Variables p, q

Un comportamiento similar es mostrado en la Figura 3.11a que corresponde a la variable τ donde se puede ver nuevamente el fenómeno chattering al final de todas las señales de control.

Una característica relevante de este controlador es la forma de trayectoria que se genera, mostrada en la Figura 3.11b, donde se puede notar que el AUV converge a la trayectoria deseada, con un error en estado estable muy pequeño.

II			
	Eje X	Eje Y	Eje Z
	$x =$	$y =$	$z =$
Sistema NED	$0,2090 e^{-3}$	$0,1199 e^{-3}$	$0,2294 e^{-3}$
	$\phi =$	$\theta =$	$\psi =$
Ángulos de Euler	$0,0021 e^{-3}$	$0,01312 e^{-3}$	$0,0673 e^{-3}$

Tabla 3.2 Error RMS variable η MRAC I

Para tener un indicador de rendimiento del controlador adaptativo, se usará el indicador *RMSE* visto anteriormente cuya ecuación de cálculo es establecido en la ecuación (3.8), donde los resultados son mostrados en la Tabla 3.2.

3.3.4. Feedforward en ambos planta y modelo

A pesar de que es fácil seleccionar un valor para $R_p(s)$ para satisfacer la condición ASPR, el controlador adaptativo resultante en general resulta en un modelo de seguimiento de error que es acotado, pero no cero en estado estable. Para aliviar esta situación, unas modificaciones son hechas tal que se incorpora el feedforward en la salida del modelo de referencia, así como también en la salida de la planta. Para generalizar este enfoque, el feedforward dado en la ecuación (3.12) será usado para modificar la salida de la planta nuevamente:

$$z_p(t) = y_p(t) + r_p(t) \quad (3.28)$$

donde $r_p(t)$ es el resultado del operador definido por $R_p(s)$ actuando en u_p así,

$$z_p(t) = y_p(t) + R_p u_p(t) \quad (3.29)$$

donde R_p es un operador lineal en u_p , elegido tal que la matriz de transferencia $G_a(s)$ definido por

$$z_p(t) = G_a(s)u_p(s) \quad (3.30)$$

es casi estrictamente real positivo (ASPR)

De una manera similar, se define una salida aumentada o modelo de referencia modificado tal que

$$z_m(t) = y_m(t) + r_m(t) \quad (3.31)$$

donde el nuevo componente feedforward r_m es definido por

$$\dot{s}_m(t) = A_s s_m(t) + B_s [u_p(t) - K_e(t)(z_m(t) - z_p(t))] \quad (3.32)$$

$$r_m(t) = D_p s_m(t) \quad (3.33)$$

y donde $K_e(t)$ es una ganancia adaptativa que será subsecuentemente definida. Esta configuración es mostrada en la Figura 3.13. Es útil notar que en la ecuación (3.32) el error de realimentación

$$e_z(t) = z_m(t) - z_p(t) = y_m(t) - y_p(t) - D_p(s_m(t) - s_p(t)) \quad (3.34)$$

se resta de u_p , el modelo aumentado r_m corresponde a la salida del sistema forzado por el componente feedforward del controlador adaptativo $u_p(t)$. Así:

$$\begin{aligned}\dot{z}_m(t) - \dot{z}_p(t) &= \dot{y}_m(t) - \dot{y}_p(t) + \dot{r}_m(t) - \dot{r}_p(t) \\ &= \dot{y}_m(t) - \dot{y}_p(t) + D_p(A_s(s_m(t) - s_p(t)) - B_s K_e(t)e_z)\end{aligned}\quad (3.35)$$

o

$$\dot{e}_z(t) = \dot{e}_y(t) + D_p A_s e_s(t) - D_p B_s K_e(t) e_z(t) \quad (3.36)$$

donde

$$e_s(t) = s_m(t) - s_p(t) \quad (3.37)$$

pero desde las ecuaciones (3.9) y (3.32)

$$\dot{e}_s(t) = A_s e_s(t) - B_s K_e(t) e_z(t) \quad (3.38)$$

Es útil notar que las ecuaciones 3.36 y 3.38 implica que la incorporación del modelo de referencia feedforward es equivalente a la definición de $e_z(t)$ como la salida de un filtro variante en el tiempo. Por lo tanto, si el MRAC es diseñado tal que $e_z(t)$ y $\dot{e}_z(t)$ ambos se aproximan a cero. Entonces la ecuación (3.38) se convierte en

$$\dot{e}_s(t) = A_s \dot{e}_s(t) \quad (3.39)$$

Entonces, si los eigen-valores de A_s están en el plano del lado izquierdo, $e_z(t)$ y $\dot{e}_z(t)$ ambos se aproximarán a cero. Si e_s va a cero, entonces la ecuación (3.34) implica que $e_y(t)$ se aproximarán a cero. Similarmente, con $\dot{e}_z(t)$, $e_s(t)$ y $e_z(t)$ todos se aproximan a cero, la ecuación (3.36) muestra que $\dot{e}_y(t)$ se aproxima a cero. Entonces si A_s es una matriz estable, el $e_y(t)$ y $\dot{e}_y(t)$ se aproximan a cero.

El controlador adaptativo propuesto debería entonces ser:

$$u_p(t) = K_e(t)e_z(t) + K_x(t)x_m(t) + K_s(t)s_m(t) + K_u(t)u_m(t) \quad (3.40)$$

o

$$u_p(t) = K(t)r(t) \quad (3.41)$$

donde

$$K(t) = [K_e(t), K_x(t), K_s(t), K_u(t)] \quad (3.42)$$

y

$$r^T(t) = [e_z^T(t), x_m^T(t), s_m^T(t), u_m^T(t)] \quad (3.43)$$

de manera similar al modelo anterior, el controlador adaptativo correspondiente se convierte en:

$$K(t) = K_p(t) + \dot{K}_I(t) \quad (3.44)$$

$$\dot{K}_I(t) = e_y(t)r^T(t)T \quad T > 0 \quad (3.45)$$

$$K_p(t) = e_y(t)r^T(t)\bar{T} \quad \bar{T} \geq 0 \quad (3.46)$$

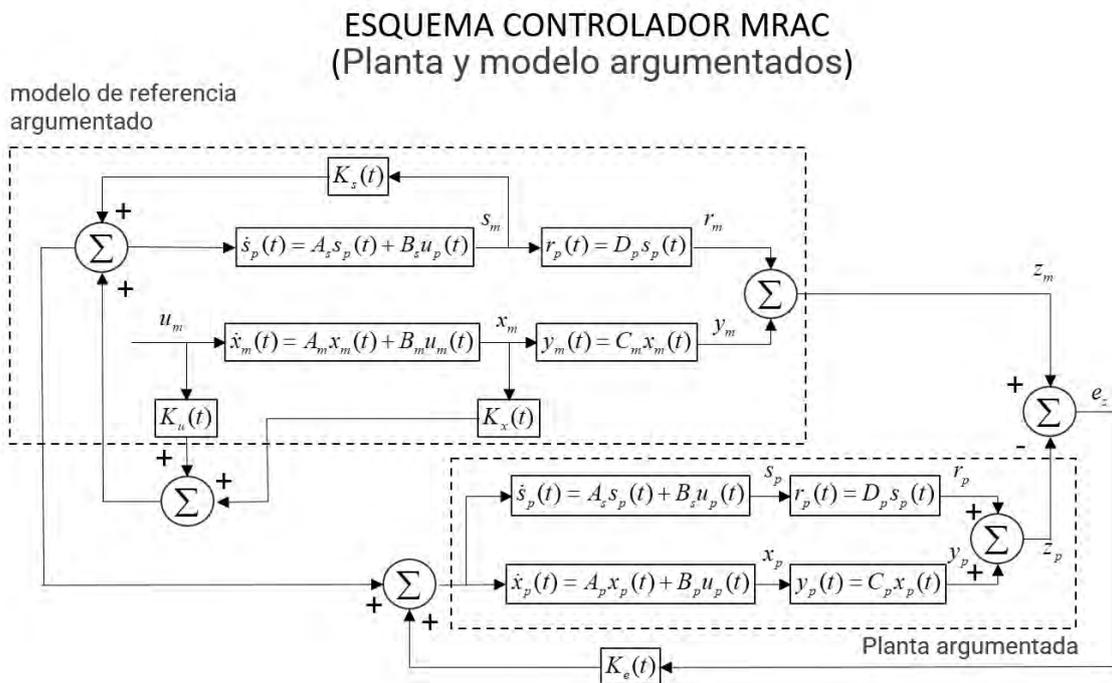


Figura 3.13 Feedforward en Planta y Modelo

3.3.5. Resumen de MARC usando feedforward en la planta y modelo

PLANTA:

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \quad (3.47)$$

$$y_p(t) = C_p x_p(t) \quad (3.48)$$

MODELO:

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \quad (3.49)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) \quad (3.50)$$

FEEDFORWARD:

$$\dot{s}_p(t) = A_s s_p(t) + B_s u_p(t) \quad (3.51)$$

$$r_p(t) = D_p s_p(t) \quad (3.52)$$

$$\dot{s}_m(t) = A_s s_m(t) + B_s [u_p(t) - K_e(t)(z_m(t) - z_p(t))] \quad (3.53)$$

$$z_p(t) = y_p(t) + r_p(t) \quad (3.54)$$

$$r_m(t) = D_p s_m(t) \quad (3.55)$$

$$z_m(t) = y_m(t) + r_m(t) \quad (3.56)$$

LEY DE CONTROL ADAPTATIVO:

$$e_y(t) = y_m(t) - z_p(t) = y_m(t) - y_p(t) - D_p s_p(t) \quad (3.57)$$

ALGORITMO ADAPTATIVO:

$$u_p(t) = K(t)r(t) \quad (3.58)$$

Donde:

$$K(t) = K_p(t) + \dot{K}_I(t) \quad (3.59)$$

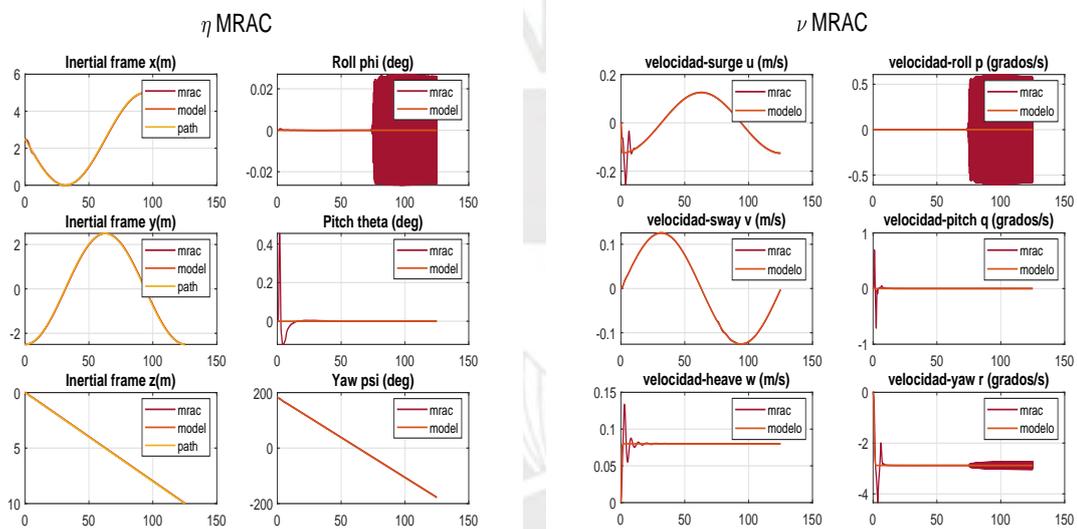
$$r^T(t) = [z_m^T(t) - z_p^T(t), x_m^T(t), u_m^T(t)] \quad (3.60)$$

$$\dot{K}_I(t) = e_y(t)r^T(t)T \quad T > 0 \quad (3.61)$$

$$K_p(t) = e_y(t)r^T(t)\bar{T} \quad \bar{T} \geq 0 \quad (3.62)$$

3.3.6. Simulación

A continuación, se muestran los resultados de simulación cuando es aplicado la ley de control adaptativo visto en la sección 3.3.5. Una característica notable es la aparición de chattering que tienen algunas señales, tal es el caso en la Figura 3.14a en el lado izquierdo donde la variable ϕ que tiene un inicio de oscilación en el tiempo 73s y lo mantiene hasta el final de la simulación convirtiendo eso en un ancho de chattering de alrededor del 41,6% del tiempo total de recorrido.



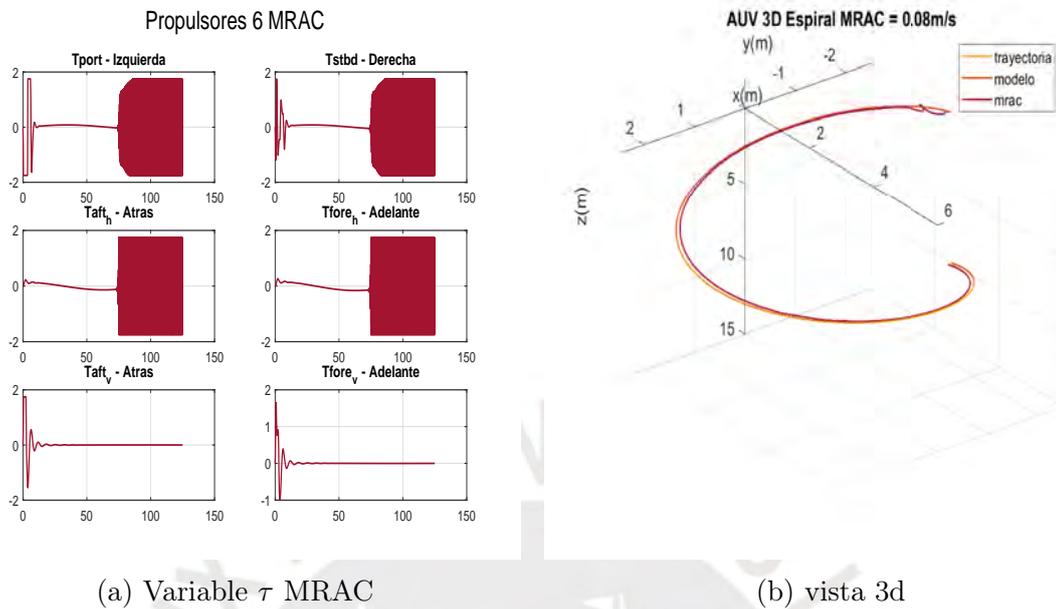
(a) Variable η MRAC

(b) Variable ν MRAC

Figura 3.14 MRAC II - Vector de estado

La Figura 3.14b del lado derecho muestra dos señales con esta oscilación característica, presente en las velocidades angulares p, r donde la variable p inicia de oscilación en 73s en el rango de $(-0,5, 0,5)$ y con un ancho de chattering de 41,6% del tiempo total. Por otro lado la variable r tiene picos de $-4,1^\circ$ en los primeros 10s aproximadamente, pero termina estabilizando en el rango de oscilación de $(-2,7, -3,0)$. A diferencia del controlador MRAC con feedforward solo a la planta, la variable q se estabiliza rápido, durante los primeros 8s y se mantiene así hasta el final del trayecto.

La Figura 3.15a muestra el efecto chattering en las cuatro primeras variables del vector τ y todas estas variables con un ancho de pulso de alrededor del 40% del tiempo total, sin embargo, a pesar de esta oscilación permanente al final de la simulación, la condición estable del sistema se mantiene y es mostrado en la Figura 3.15b.



(a) Variable τ MRAC

(b) vista 3d

Figura 3.15 MRAC II - Vector de entrada

Una característica de este controlador, es la forma de trayectoria que se genera, mostrada en la Figura 3.15b, donde se puede notar que el AUV no converge totalmente a la trayectoria deseada, sino que lo recorre con un error de estado estable, esto debido a la complejidad no lineal que tiene el sistema, y a la linealización forzada que tiene el AUV. Además, presenta una desventaja adicional como el aumento de oscilaciones en las variables del vector de estado η, ν y del vector de salida τ .

A continuación, se presenta el indicador de rendimiento para el controlador basado en la ecuación (3.8), cuyos resultados son mostrados en la Tabla 3.3.

III

	Eje X	Eje Y	Eje Z
Sistema NED	$x = 0,0032$	$y = 0,0001$	$z = 0,0013$
Ángulos de Euler	$\phi = 0,0002$	$\theta = 0,0002$	$\psi = 0,0006$

Tabla 3.3 Error RMS variable η MRAC II

Ahora haciendo una comparativa con la Tabla 3.2 se puede observar que este controlador presenta un mayor error en comparación con el controlador previo, esto

es, en la variable x es alrededor de 16 veces más, en la variable y se reduce en un 10 % y en la variable z alrededor de 6 veces más.

Tabla IV

	MRAC I	MRAF II
x	$0,2090 e^{-3}$	0,0032
y	$0,1199 e^{-3}$	0,00016
z	$0,2294 e^{-3}$	0,0013
ϕ	$0,0021 e^{-3}$	0,0002
θ	$0,0131 e^{-3}$	0,0002
ψ	$0,0673 e^{-3}$	0,0006

Tabla 3.4 Error RMS variable η MRAC I vs II



3.4. Controlador fuzzy adaptativo por modelo de referencia (MRAFC)

En muchas aplicaciones, la estructura del modelo de la planta puede ser conocida, pero los parámetros pueden ser desconocidos y/o cambiar con el tiempo. A menos que dicha incertidumbre de los parámetros se reduzca gradualmente en línea por una apropiada adaptación o mecanismo de estimación, esto puede causar inexactitud o inestabilidad de los sistemas. En este apartado, un control fuzzy adaptativo por modelo de referencia es propuesto para proporcionar seguimiento asintótico a una señal de referencia para un sistema que tiene incertidumbres o varían sus parámetros lentamente en el tiempo. Se presenta el diseño y análisis de adaptación de parámetros on-line para el modelo de la planta cuya estructura es representada por el modelo Takagi-Sugeno. Las leyes de adaptación ajustan los parámetros del controlador en línea así que la salida de la planta sigue la salida del modelo de referencia. El desarrollo de las leyes de control y leyes adaptativas garantizan las delimitaciones de todas las señales en el sistema de lazo cerrado. Además, el estado de la planta sigue el estado del modelo de referencia asintóticamente con el tiempo para cualquier señal de entrada delimitada. [42, 44].

3.4.1. Control Fuzzy basado en el modelo T-S

Considerar el sistema no lineal descrito por el modelo Takagi-Sugeno. La i_{th} regla del modelo T-S de tiempo continuo es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R^i : & \text{ If } x_1(t) \text{ is } M_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t) \text{ is } M_n^i \\ & \text{ then } \quad x(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Donde:

$$\begin{aligned} x^T(t) &= [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)], \\ u^T(t) &= [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)] \end{aligned}$$

Y considerando un par de entradas $(x(t), u(t))$, la salida final del sistema fuzzy es inferido como sigue:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^l w_i(t) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^l w_i(t)} \quad (3.64)$$

Donde $w_i(t) = \prod_{j=1}^n M_j^i(x_j(t))$, y $M_j^i(x_j(t))$ es el grado de membresía de $x_j(t)$ en M_j^i .

Para diseñar un controlador fuzzy para estabilizar el sistema dado en la ecuación (3.64), se utiliza el concepto de compensación distribuida paralela (PDC). El controlador PDC comparte el mismo conjunto de reglas fuzzy con el modelo en la ecuación (3.64) para construir su parte premisa. Este controlador es de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} R^i : & \text{ If } x_1(t) \text{ is } M_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t) \text{ is } M_n^i \\ & \text{ then } u(t) = -K_i x(t) \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde $x^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ y $i = 1, \dots, l$. Dado un estado realimentado $x(t)$, la salida final del controlador PDC dado en la ecuación (3.65) es inferido como sigue:

$$u(t) = -\frac{\sum_{i=1}^l w_i(t) K_i x(t)}{\sum_{i=1}^l w_i(t)} \quad (3.66)$$

Donde $w_i(t) = \prod_{j=1}^n M_j^i(x_j(t))$.

Por sustitución del controlador establecido en la ecuación (3.66) dentro del modelo con ecuación (3.64), se puede construir el sistema de control en lazo cerrado fuzzy como sigue:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(t) w_j(t) \{A_i - B_i K_j\} x(t)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(t) w_j(t)} \quad (3.67)$$

Una condición suficiente para un sistema fuzzy en lazo abierto es derivado por Tanaka y Sugeno [36] [37] para asegurar la estabilidad dado en el Apéndice (A.5).

3.4.2. Esquema

En esta sección, un esquema de control fuzzy con modelo de referencia adaptativo (MRAFC) para sistemas T-S es desarrollado. Considerando nuevamente de la planta no lineal representada por las ecuaciones (3.63) o (3.64), donde el estado $x \in R^n$ es disponible para medida, $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times q}$ ($i = 1, 2, \dots, l$) son matrices conocidas y (A_i, B_i) son controlables. El objetivo del control es elegir un vector de entrada $u \in R^q$ tal que todas las señales en lazo cerrado de la planta son delimitadas y el vector de estado x sigue al estado $x \in R^n$ de un modelo de referencia especificado por el sistema:

$$\dot{x}_m = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) \{(A_m)_{ij} x_m + (B_m)_{ij} r\}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \quad (3.68)$$

Donde $(A_m)_{ij} \in R^{n \times n}$ ($i = 1, 2, \dots, l$) satisface la condición de estabilidad de sistemas fuzzy dado por el teorema 1 $(B_m)_{ij} \in R^{n \times q}$, y $r \in R^q$ es un vector de entrada de referencia delimitada. El modelo de referencia y la entrada r son elegidas tal que $x_m(t)$ representa una trayectoria deseada que x tiene que seguir.

3.4.2.1. Ley de control

Si las matrices A_i, B_i son conocidas, se podría aplicar la ley de control:

$$u = \sum_{j=1}^l \mu_j(x) (-K_j^* x + L_j^* r) / \sum_{i=1}^l \mu_j(x) \quad (3.69)$$

Donde $\mu_j(x) = w_j(x)$, y obteniendo la planta en lazo cerrado:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) \{(A_i - B_i K_j^*) x + B_i L_j^* r\}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \quad (3.70)$$

Por lo tanto, si $K_j^* \in R^{q \times n}$ y $L_j^* \in R^{q \times q}$ son elegidos para satisfacer las ecuaciones algebraicas:

$$A_i - B_i K_j^* = (A_m)_{ij}, \quad B_i L_j^* = (B_m)_{ij} \quad (3.71)$$

Entonces la matriz de transferencia de la planta en lazo cerrado es la misma que del modelo de referencia y $x(t) \rightarrow x_m(t)$ tiende exponencialmente rápido para cualquier señal de entrada de referencia delimitada $r(t)$. Deberíamos notar que dadas las matrices $A_i, B_i, (A_m)_{ij}, (B_m)_{ij}$, no pueden existir K_j^*, L_j^* para satisfacer la condición (3.71) indicando que la ley de control establecido en la ecuación (3.69) no puede tener suficiente flexibilidad estructural para cumplir con el objetivo de control. En algunos casos, si la estructura A_i, B_i son conocidas, $(A_m)_{ij}, (B_m)_{ij}$ pueden ser diseñadas para que la condición (3.71) tenga una solución para K_j^* y L_j^* . Dejaremos asumir que K_j^* y L_j^* en la condición (3.71) existe, esto significa que hay suficiente flexibilidad estructural para satisfacer el objetivo de control y la ley de control propuesta:

$$u = \sum_{j=1}^l \mu_j(x)(-K_j(t)x + L_j(t)r) / \sum_{i=1}^l \mu_j(x) \quad (3.72)$$

Donde $K_j(t)$ y $L_j(t)$ son los estimados de K_j^* y L_j^* respectivamente, para generar una apropiada ley adaptativa.

3.4.2.2. Ley adaptativa

Por adición y sustracción del término de la entrada deseada, es decir:

$$u = \sum_{j=1}^l \mu_j(x)\{-B_i(K_j^*x - L_j^*r)\} / \sum_{i=1}^l \mu_j(x)$$

en la ecuación de la planta y usando (3.71), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x)\mu_j(x)(A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x)\mu_j(x)} x + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x)\mu_j(x)(B_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x)\mu_j(x)} r \\ & + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x)\mu_j(x)B_i(K_j^*x - L_j^*r + u)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x)\mu_j(x)} \end{aligned} \quad (3.73)$$

además, por adición y sustracción del término de entrada multiplicado por $\sum_{i=1}^l w_i B_i / \sum_{i=1}^l w_i$ que es:

$$\frac{\sum_{i=1}^l w_i B_i}{\sum_{i=1}^l w_i} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^l \mu_j(x) \{ (K_j(t)x - L_j(t)r) \}}{\sum_{i=1}^l \mu_j(x)} + u \right\}$$

en referencia al modelo dado en la ecuación (3.68), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_m = & \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \hat{x}_m + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} r \\ & + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) B_i (K_j(t)x - L_j(t)r + u)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \end{aligned} \quad (3.74)$$

en referencia al modelo en la ecuación (3.74), se puede expresar la ecuación (3.73) en términos del error de seguimiento definido como $e \cong x - x_m$, esto es:

$$\dot{e} = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) B_i (-\tilde{K}_j x + \tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \quad (3.75)$$

donde $\tilde{K}_j = K_j(t) - K_j^*$ y $\tilde{L}_j = L_j(t) - L_j^*$. En la ecuación dinámica (3.75) de seguimiento de error, B_i es desconocida. Se asume que L_j^* son ambas positivas o negativas definidas y define $\Gamma_j^{-1} = L_j^* \text{sgn}(l_j)$, donde $l_j = -1$ si L_j^* es negativo definido. Entonces $B_i = (B_m)_{ij} L_j^{*-1}$ y la ecuación (3.75) se convierte en:

$$\dot{e} = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} L_j^{*-1} (-\tilde{K}_j x + \tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \quad (3.76)$$

Ahora usando la dinámica del error en la ecuación (3.76), se derivara la ley adaptativa para actualizar los parámetros de control K_j^* , L_j^* tal que el modelo de la planta en lazo cerrado dado en ecuación (3.73) sigue al modelo de referencia establecido en ecuación (3.68). Se asume que la ley adaptativa tiene una estructura general:

$$\dot{K}_j(t) = F_j(x, x_m, e, r), \quad \dot{L}_j(t) = G_j(x, x_m, e, r) \quad (3.77)$$

Donde F_j y G_j ($i = 1, \dots, l$) son funciones de señales conocidas que son elegidas tal que el equilibrio:

$$K_{je} = K_j^*, \quad L_{je} = L_j^*, \quad e_e = 0 \quad (3.78)$$

de las ecuaciones (3.76) y (3.77) tiene algunas propiedades de estabilidad deseada. Con la siguiente función candidata de Lyapunov [31] [34] propuesta:

$$V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = e^T P e + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \tilde{K}_j + \tilde{L}_j^T \Gamma_j \tilde{L}_j) \quad (3.79)$$

Donde $P = P^T > 0$ es una matriz común definida positiva de la ecuación de Lyapunov $(A_m)_{ij}^T P + P(A_m)_{ij} < -Q_{ij}$ para todo $Q_{ij} = Q_{ij}^T > 0$ ($i = 1, \dots, l$) cuya existencia es garantía para asumir la estabilidad de A_m . Luego de algunos cálculos matemáticos como se muestra en el Apéndice (C.1), se obtiene la derivada en el tiempo \dot{V} que pueda cumplir con la condición de que \dot{V} sea negativo, resultando como:

$$\dot{V} = -e^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) Q_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e \leq 0 \quad (3.80)$$

Por lo tanto, la obvia elección de una ley adaptativa que haga \dot{V} negativo es:

$$\dot{\tilde{K}}_j = \dot{K}_j(t) = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij}^T \text{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e x^T \quad (3.81)$$

$$\dot{\tilde{L}}_j = \dot{L}_j(t) = -\frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij}^T \text{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e r^T \quad (3.82)$$

3.4.3. Implementación

Analizando las ecuaciones (3.81) y (3.82) se puede notar que todos los parámetros pueden ser medidos, y por lo tanto la ley adaptativa para el sistema fuzzy T-S puede ser implementado según la configuración del esquema de la Figura 3.16. Para que el esquema MRAFC pueda ser implementado correctamente es necesario hablar de temas complementarios como el caso del desarrollo de funciones de membresía para cada una de las dinámicas locales, así como también establecer un correcto modelo de referencia que permita ser interpretado como una respuesta ideal del sistema y por ultimo definir una matriz positiva definida P común para todos los subsistemas encontrados capaz de establecer una convergencia asintótica a la trayectoria deseada. Esta matriz será calculada bajo el concepto de LMIs (*Linear Matrix Inequality*).

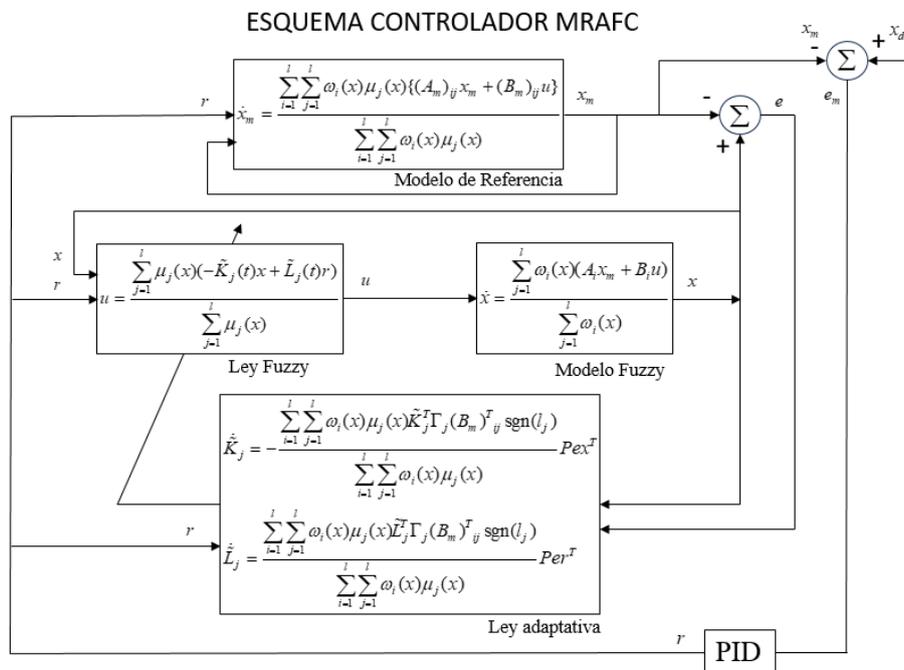
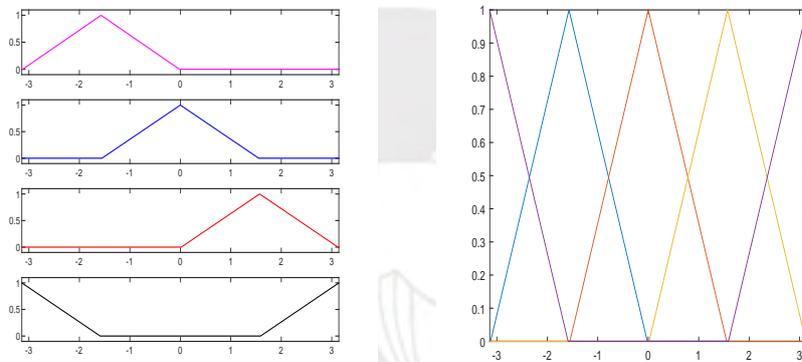


Figura 3.16 Esquema MRAFC [44]

1. **Funciones de membresía:** El modelo propuesto tanto para el sistema no lineal y para el modelo de referencia son basados bajo el concepto de Takagi-Sugeno el cual es descrito por reglas Fuzzy IF-THEN que representan relaciones entre sistemas lineales locales de un sistema no lineal. La principal función del modelo T-S es expresar la dinámica local de cada implicación fuzzy por un modelo de sistema lineal. Como se ha visto en la sección 2.3.2 para la variable ψ^* se tienen cuatro estados de convergencia que a su vez generan cuatro sistemas lineales locales. Por lo tanto, es necesario definir cuatro funciones de membresía con centro en cada uno de los puntos de convergencia tal como se muestra a continuación.



(a) Funciones de manera separadas para la variable ψ^*

(b) Funciones de manera compacta para la variable ψ^*

Figura 3.17 Funciones de membresía

2. **Modelo de referencia:**

El modelo de referencia propuesto es el establecido en la ecuación (3.68), por lo que ahora el trabajo estará enfocado en hallar las matrices A_m y B_m . Este sistema como ya se indicó previamente es basado en el modelo T-S, el cual estará compuesto de subsistemas para cada estado de convergencia. Para hallar estas matrices se hará uso de las condiciones dadas en (3.71) los cuales serán directamente dependientes de las matrices A_i y B_i del sistema no lineal.

3. **Linear Matrix Inequality:** Actualmente problemas de optimización numérica son llamados problemas LMIs. Estos problemas pueden ser resueltos en un tiempo polinomial como el caso del desarrollo del método del punto interior el cual es muy eficiente en sistemas y control. Los problemas relacionados con los problemas LMIs son tales como el problema de factibilidad (FEAS), minimización

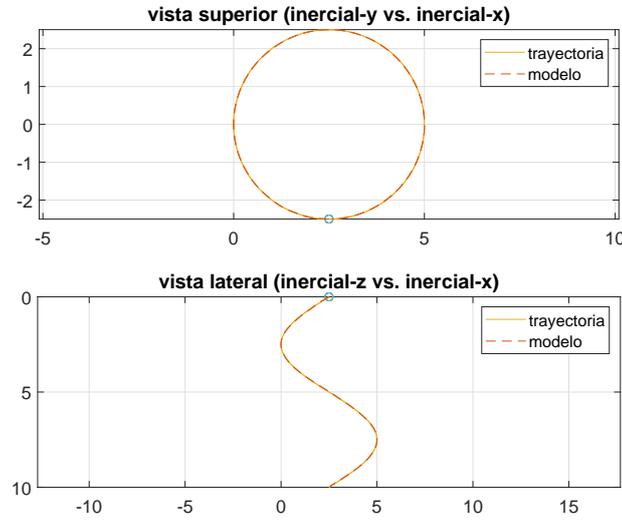


Figura 3.18 Gráfica modelo de referencia

de un objetivo bajo restricciones LMI (MINCX) y el problema generalizado de minimización de valores propios (GEVP) [15, 45, 1].

Una desigualdad matricial lineal (LMIs) es de la forma:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (3.83)$$

donde $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ es la variable a ser determinada y las matrices simétricas $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 \leq i \leq m$. El símbolo de desigualdad dado en la ecuación (3.83) significa que $F(x)$ es positiva definida, esto es, $v^T F(x)v < 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ diferente de cero. La ecuación (3.83) es una restricción convexa en x , esto significa que el conjunto $\{x \mid F(x) > 0\}$ es convexo.

Dado un sistema lineal en lazo abierto:

$$\dot{x} = Ax \quad (3.84)$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Cuando se elige la función candidata de Lyapunov de la forma $V(x) = x^T P x$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces la condición de estabilidad para la ecuación (3.84) es dada como:

$$A^T P + P A < 0 \quad (3.85)$$

La desigualdad anterior no puede ser escrita de forma explícita $F(x) > 0$ pero puede ser establecida de la forma $F_0 = 0, F_i = -A^T P - PA$. Considerando esta condición una LMI, el problema es encontrar un x^{feas} tal que $F(x^{feas}) > 0$ o se determine que el LMI es factible, por lo tanto, esto es llamado el problema de factibilidad.

Ahora considerando el siguiente sistema lineal en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ u &= -Fx \end{aligned} \quad (3.86)$$

Donde $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $u \in \mathbb{R}^m$ y la ganancia de realimentación $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$. De una manera similar al sistema dado en la ecuación (3.84), la condición de estabilidad para sistemas en tiempo continuo como el de la ecuación (3.86) está dado por:

$$A^T P - F^T B^T P + PA - PBF < 0, \quad P > 0 \quad (3.87)$$

Tal y como está la desigualdad anterior no es considerada una condición LMI para las matrices P y F. Para que pueda ser convertido a una condición LMI se debe multiplicar en ambos lados por $X = P^{-1}$ y establecer que $M = FX$, con lo cual esta desigualdad se convierte en:

$$XA^T - M^T B^T + AX - BM < 0, \quad X > 0 \quad (3.88)$$

Por lo tanto, la desigualdad (3.88) se convierte en una condición LMI para las matrices X y M. Las matrices P y F se pueden calcular a partir de $P = X^{-1}$ y $F = MX^{-1}$, donde X^{-1} representa la inversa de X.

De igual manera se procede para sistemas fuzzy para determinar las condiciones LMIs. Aquí se debe aplicar las condiciones de estabilidad establecidas en el Teorema 1 y de una manera análoga a lo desarrollado para sistemas continuos en lazo cerrado se puede obtener las siguientes LMIs:

$$\begin{aligned} -XA_i^T - A_i X + M_i^T B_i^T + B_i M_i &< 0 \\ -XA_i^T - A_i X - XA_j^T - A_j X + M_j^T B_i^T + B_i M_j + M_i^T B_j^T + B_j M_i &< 0 \end{aligned} \quad (3.89)$$

De igual manera que en el caso continuo la matriz de realimentación y la matriz positiva definida P son obtenidas como $P = X^{-1}$ y $F_i = M_i X^{-1}$.

3.4.4. Simulación

A continuación, se presenta los resultados de simulación obtenido para la trayectoria circular que el sistema debe seguir. El recorrido del AUV será establecido a lo largo de toda la trayectoria deseada debido a que el controlador MRAFC manipula todos los estados de convergencia del sistema no lineal. Las siguientes Figuras 3.19b y 3.19a muestran la variable de estado del sistema con un tiempo de simulación total de $t = 125s$ para una velocidad media de desplazamiento de igual magnitud para el eje X como para el eje Y de $v = 0,08m/s$. Se puede observar en las tres variables de posición x, y, z que el seguimiento es muy próximo a la trayectoria deseada, obteniéndose un bias muy pequeño debido a la linealización del sistema.

Los ángulos de Euler en las variables ϕ, θ, ψ corresponden a las condiciones de diseño, esto es, se estableció que las variables $\phi, \theta \approx 0$ y analizando la imagen del lado izquierdo se puede observar que ϕ tiene un máximo ángulo de desvío de $0,2^\circ$ para luego establecerse en aproximadamente $0,08^\circ$, y θ un ángulo máximo de desvío de $1,1^\circ$ para luego establecerse en $0,6^\circ$. La última variable de Euler ψ sigue de forma muy próxima al ángulo deseado de la trayectoria.

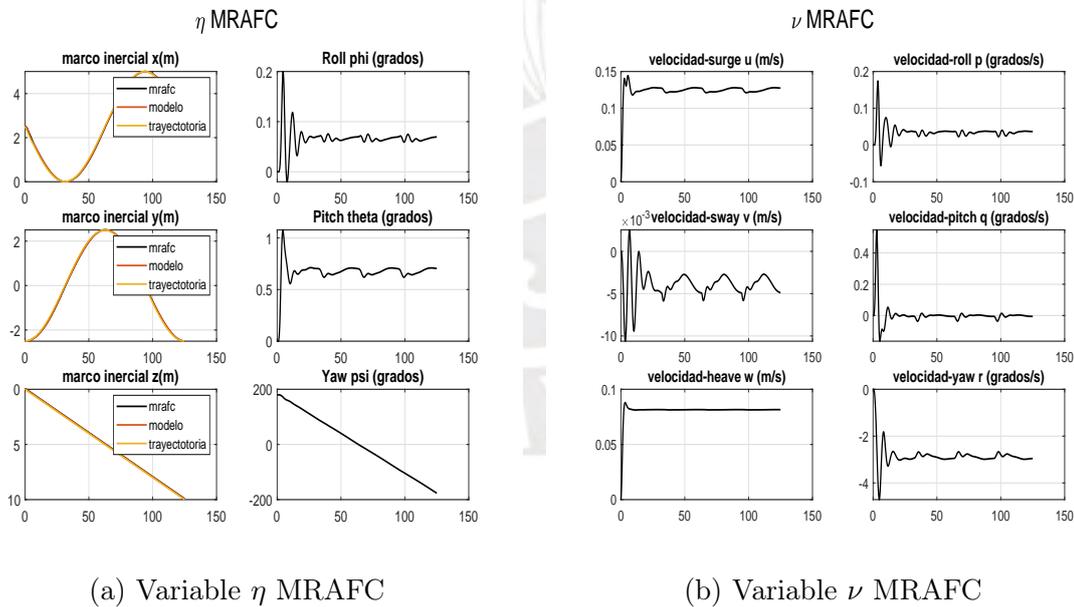


Figura 3.19 Variable de estado

En la Figura 3.19a del lado izquierdo muestra las velocidades lineales del AUV en el marco de referencia fijas al cuerpo mientras que el lado derecho las velocidades angulares. Se puede notar que la velocidad lineal *surge* tiene un pico máximo de $0,15m/s$ el cual termina aproximándose a 0.12 en el tiempo con pequeñas oscilaciones.

La velocidad *sway* tiene la apariencia de ser muy variante, pero se debe tener en cuenta que está en un rango de escalamiento de 10^{-3} por tal motivo se convierte en una de las velocidades con menor variación en amplitud. La última velocidad lineal *heave* tiene el menor tiempo de estabilizaron y de asentamiento. De una forma similar se puede notar las variaciones en las velocidades angulares.

En este punto, una de las preguntas frecuentes sería: ¿Si el sistema es establecido en tener una velocidad de $0,08m/s$ cómo es posible que la velocidad *surge* tenga una velocidad de $0,15m/s$?. La respuesta a esta pregunta proviene de las ecuaciones de rotación dadas en el apartado 2.2.1.3, de donde se puede tomar la siguiente forma reducida:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos(\psi) - v \sin(\psi) \\ \dot{y} &= u \sin(\psi) + v \cos(\psi) \end{aligned} \tag{3.90}$$

una gráfica para las velocidades \dot{x} y \dot{y} es mostrada en Figura 3.20

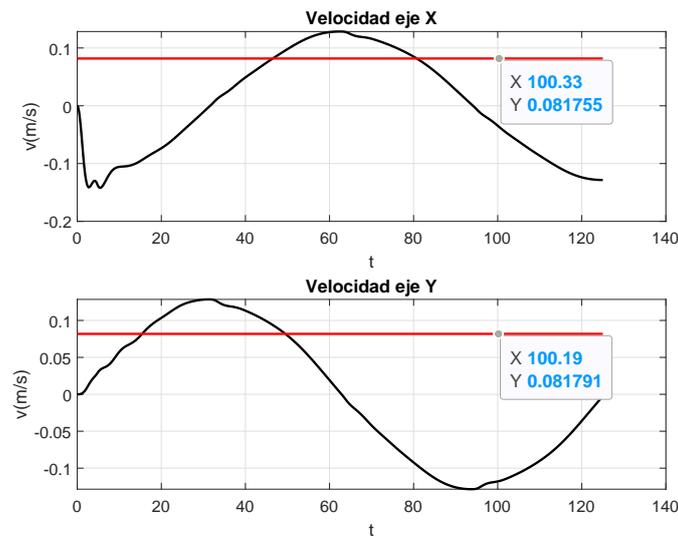


Figura 3.20 Velocidad eje X, Y

Se puede notar que las velocidades prácticamente tienen la forma de funciones seno y coseno, es decir, no tienen velocidades constantes, e incluso tienen picos de aproximadamente $1,1m/s$. Es por ello que para que esto tenga sentido con lo indicado al inicio de este apartado es necesario obtener el valor promedio de la velocidad. Se puede ver en la gráfica que tanto para el eje X como para el eje Y la velocidad promedio es de $0,0817m/s$ muy próximo a los $0,08m/s$ establecidos.

Ahora otra pregunta puede ser formulada: se conoce que las velocidades de desplazamiento en los ejes es de $0,08m/s$, ¿cuál es la velocidad total de desplazamiento del AUV en el eje X vs Y ?. Para esto es necesario calcular la siguiente ecuación:

$$v_{total} = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} \quad (3.91)$$

Luego de hacer el cálculo se puede obtener un valor de $v_{total} = 0,1156m/s$.

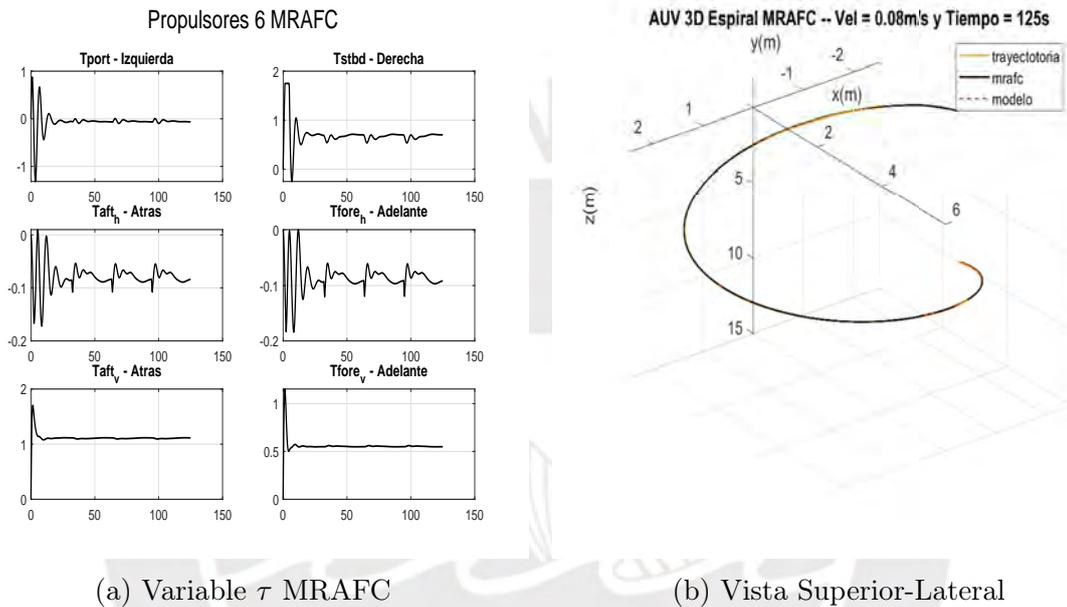


Figura 3.21 Trayectoria circular

La Figura 3.21a se muestra el vector τ y un análisis a simple vista nos muestra que la mayoría de las variables se encuentran dentro del rango máximo de torque establecido ($1,75N$) así como también que las señales son suaves que pueden ser establecidas en los propulsores, y que se puedan controlar sin afectarlos físicamente. Mientras que en la Figura 3.21b en el lado derecho nos da la vista isométrica 3d, donde se puede observar que el seguimiento del AUV converge a la trayectoria deseada.

V

	Eje X	Eje Y	Eje Z
Sistema NED	$x = 0,0654$	$y = 0,0626$	$z = 0,0797$
Ángulos de Euler	$\phi = 0,0012$	$\theta = 0,0118$	$\psi = 0,0397$

Tabla 3.5 Error RMS variable η MRAFC

3.5. Comparativo general

En esta sección se muestran los resultados generales de los tres controladores, pero en una sola gráfica para poder comparar el comportamiento de cada variable y hacer un *versus* de *Todos vs Mrafrc*. Por lo tanto, se establece las mismas condiciones previas, tales como, establecer el tiempo de simulación en $t = 125s$ y definir una velocidad de desplazamiento en los ejes $x, y = 0,08m/s$.

Hasta ahora en las secciones anteriores se han mostrado gráficas de los diferentes controladores con resultados bajo condiciones ideales, es decir, durante la adquisición de las señales para el vector de estado no se tienen presencia de ruido o cuando el sistema no está bajo perturbaciones externas. Por ello, a continuación, se evalúa el AUV cuando está expuesto a una perturbación externa de una ola con amplitud de $f = 0,4m$ en la sección 3.5.2. También será evaluado bajo la condición de ruido blanco o gaussiano en la sección 3.5.3.

Se hará uso de los indicadores de rendimiento para cada controlador y así evaluar e identificar cual es mejor en cada situación propuesta.

3.5.1. Simulación sin perturbación $f = 0.0m$

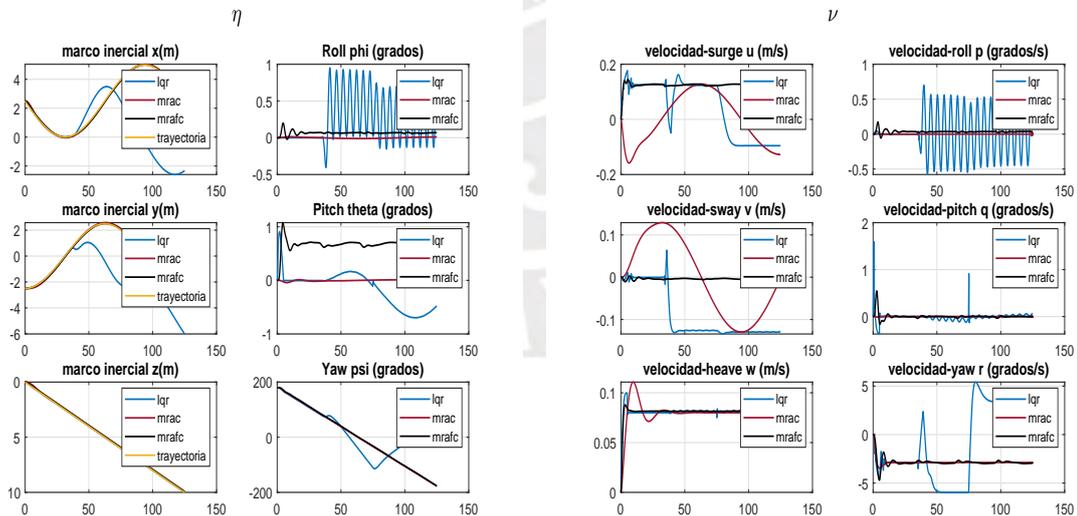
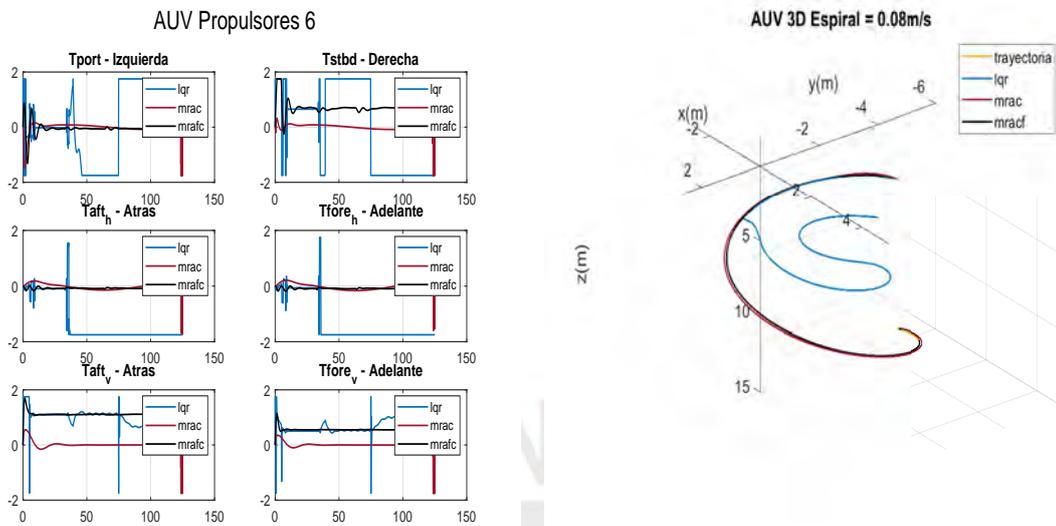
(a) Variable ν TODOS(b) Variable η TODOS

Figura 3.22 Variable de estado TODOS

Las Figuras 3.22 y 3.23 muestran los resultados de los tres controladores propuestos y con esto también se obtienen los índices de desempeño $RMSE$ en el la Tabla 3.5



(a) Variable τ TODOS

(b) Vista 3d TODOS

Figura 3.23 Vector τ y trayectoria circular TODOS

Las siguiente Figura 3.24 nos muestra el error de seguimiento de trayectoria en función del tiempo, correspondiente al vector η . Se puede observar que el controlador que mas error lo posee el LQR, el cual empieza a perder la estabilidad al culminar el primer cuadrante del recorrido en la trayectoria establecida, siendo las variables z la menos afectadas. Luego se encuentra el controlador MRAFC con mayor error, esto debido a que posee un error en estado estacionario debido a la linealización del AUV, mientras que el controlador MRAC tiene el mínimo error de seguimiento.

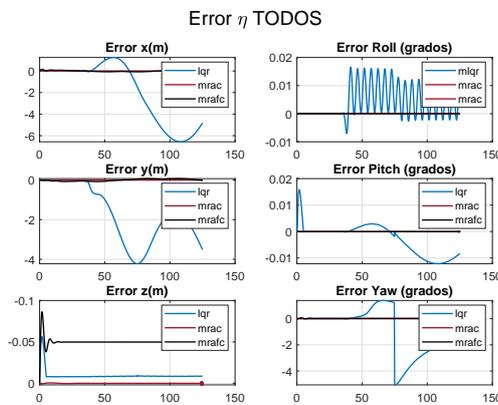


Figura 3.24 Variable Error η vs Tiempo

VI

	LQR	MRAC	MRAFC
x	3,3887	0,2090 e^{-3}	0,0654
y	2,1884	0,1199 e^{-3}	0,0626
z	0,0116	0,2294 e^{-3}	0,0797
ϕ	0,0070	0,0021 e^{-3}	0,0012
θ	0,0064	0,0131 e^{-3}	0,0118
ψ	1,9717	0,0673 e^{-3}	0,0397

Tabla 3.6 Error RMS variable η TODOS

Evaluando la Tabla 3.5 se puede verificar que el menor índice de desempeño lo obtiene el controlador MRAC, seguido por el controlador MRAFC y por último el controlador LQR. Con esto se puede obtener la siguiente secuencia de desempeño aplicado para todos los controladores bajo condiciones ideales.

$$MRAC > MRAFC > LQR \quad (3.92)$$

Para evaluar la certeza de esta secuencia será mediante la Figura 3.22a. Las variables de posición ϕ, θ, ψ son fáciles de identificar a primera vista y por lo que se concluye la veracidad de la desigualdad (3.92), pero la para variables de ubicación x, y, z será necesario hacer un acercamiento y evaluar la posición que tiene cada controlador con respecto a la trayectoria. Para evaluar correctamente hay que tener en cuenta la Figura 3.23b donde el controlador entra en un estado de inestabilidad luego de recorrer el 25% de la trayectoria, por lo que se considera en el último lugar de la condición (3.92) y no debe de ser tomado en cuenta en la Figura 3.25.

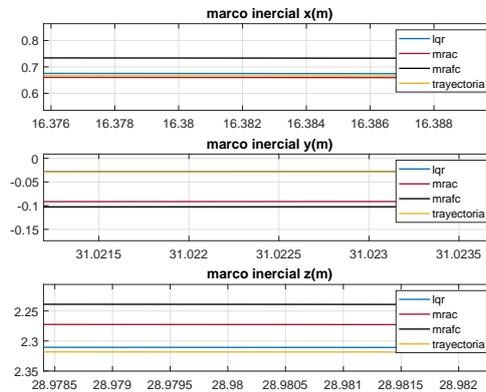


Figura 3.25 Velocidad eje X, Y

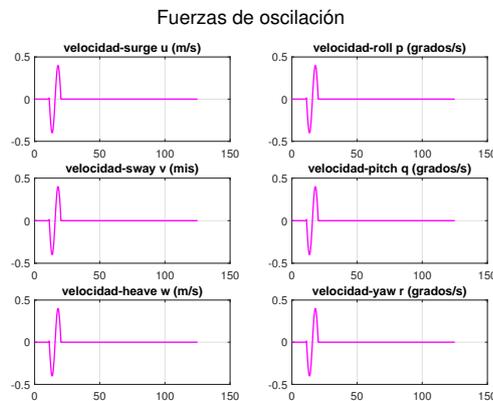
3.5.2. Simulación con perturbación $f = 0.4m$

¿Qué ocurre cuando el sistema es puesto ante una perturbación externa de una ola de $40cm$ de altura? El resultado para esta interrogante es mostrado a continuación.

Primeramente, se define el vector de fuerza de oscilación mostrado en la Figura 3.26. Para simular un impulso como perturbación se ha establecido solo un fragmento de todas las ondas generadas por la ecuación:

$$\tau_{ext} = f \cos(\omega t)$$

Donde f es la amplitud de la onda y ω la frecuencia de oscilación. Entonces, este impulso es establecido el rango de tiempo $t = 10s$ hasta $t = 20s$, para que pueda afectar a todos los controladores en su mejor rango de trabajo (esto es, para afectar al controlador LQR en el estado de convergencia que fue definido).

Figura 3.26 Vector fuerza de Oscilación $f = 0,4m$

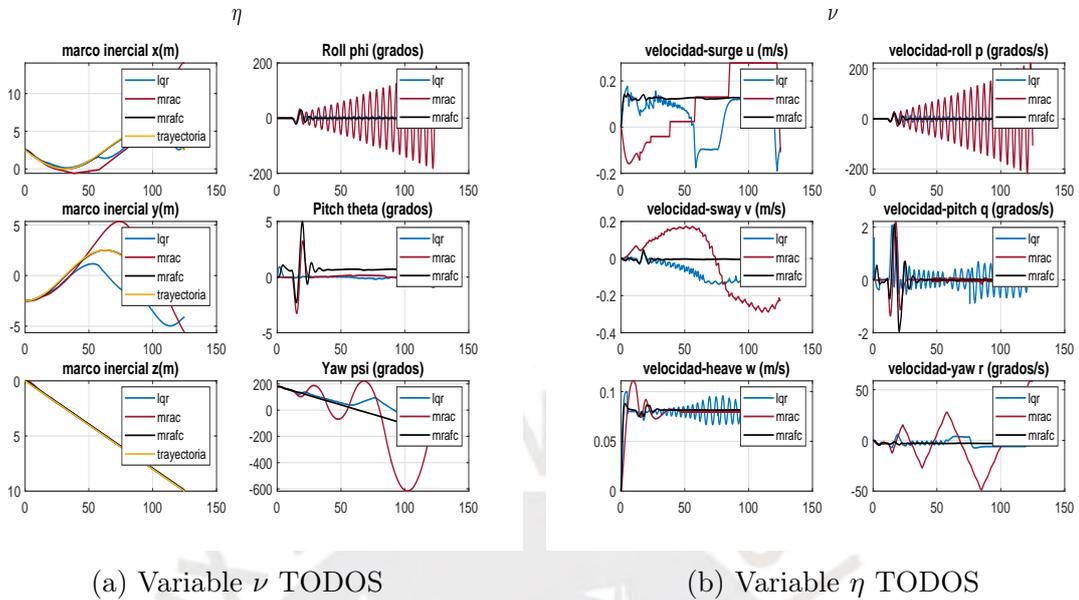


Figura 3.27 Variable de estado TODOS

Las Figuras 3.27 y 3.28 muestran los resultados de los tres controladores propuestos bajo perturbación externa. Se debe observar en el preciso momento en el que es establecido el impulso de perturbación. Como ejemplo se hace mención a la variable ϕ del controlador *MRAC* que luego de recibir este impulso empieza un estado de inestabilidad creciente.

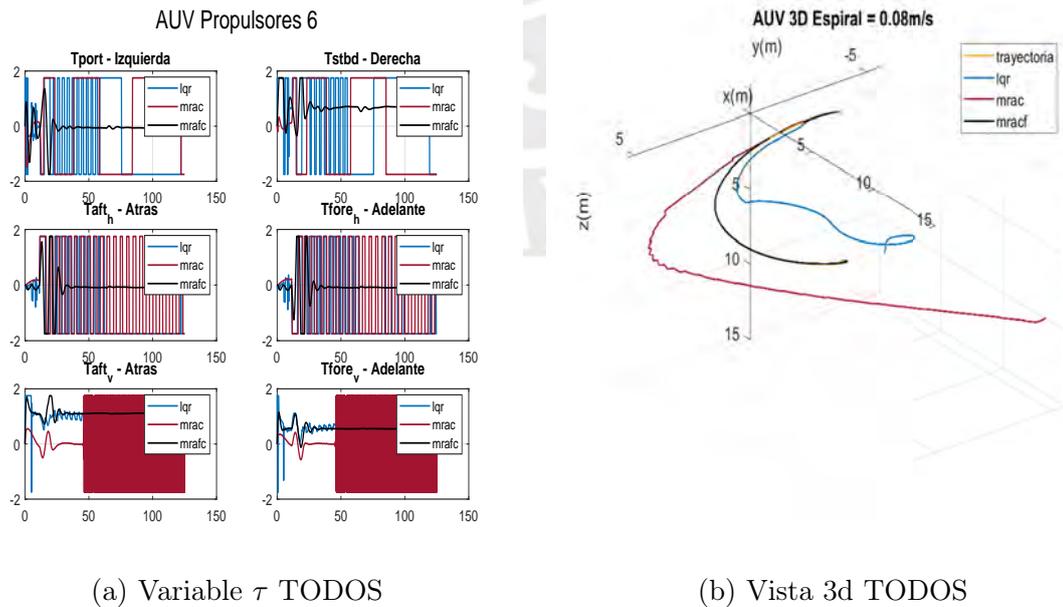


Figura 3.28 Vector τ y trayectoria circular TODOS

De una manera similar, el caso de la variable ψ también inicia un estado oscilante creciente. De un análisis visual y sencillo es fácil establecer que este controlador es el más afectado por la perturbación y en contraste se encuentra el controlador *MRAFC* que logra recorrer la trayectoria sin mayores problemas.

Luego, en la Figura 3.28a nos centraremos en observar el vector τ del controlador *MRAFC*, donde se puede verificar variaciones en el tiempo $t = 10s$ hasta $t = 20s$ debido al impulso al que fue sometido, pero el algoritmo para este controlador logra estabilizar al sistema después de ese instante de perturbación. De forma contraria se encuentran los vectores de τ de los controladores *LQR* Y *MRAC* que tienen señales totalmente oscilantes entre los márgenes mínimos y máximos.

Es necesario también evaluar el comportamiento del error de seguimiento, tal como se muestra en la Figura 3.29, dando esta vez algunos resultados interesantes. Primero, se puede observar en toda la variable η que ahora el controlador *MRAC* es inestable, siendo este mas inestable incluso que el controlador *LQR*. Y segundo, hacer notar el comportamiento del controlador *MRAFC* ante perturbaciones, capaz de mantener estable al AUV bajo condiciones adversas.

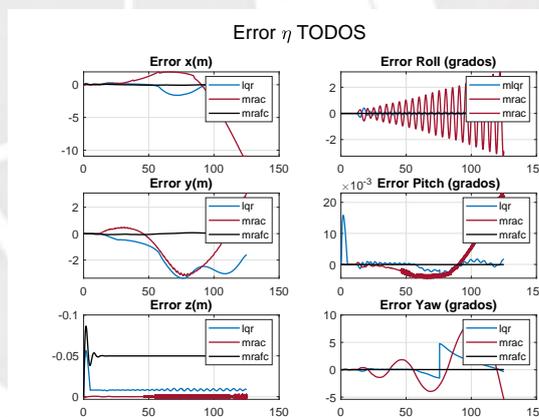


Figura 3.29 Variable Error η vs Tiempo

Después del análisis visual previo, es necesario establecer un análisis cuantitativo, esto será en base a los resultados mostrados en la Tabla 3.6. Y donde estos resultados nos dan un nuevo orden en función al rendimiento de los controladores mostrado en la desigualdad (3.93).

$$MRAFC > LQR > MRAC \quad (3.93)$$

VII			
	LQR	MRAC	MRAFC
x	0,6645	3,5509	0,0654
y	2,0474	1,6367	0,0637
z	0,0116	0,0011	0,0797
ϕ	0,0923	1,2334	0,0866
θ	0,0024	0,0071	0,0177
ψ	1,4642	3,8089	0,0404

Tabla 3.7 Error RMS variable η TODOS con perturbación

Por lo tanto, se establece como un mejor controlador al algoritmo *MRAFC* pues obtiene menor error en toda su variable de estado η . En caso contrario se tiene al controlador *MRAC* quien obtiene un incremento en el error de la variable y con respecto a los controladores *LQR* y *MRAFC*. Con esto se verifica la superioridad y robustez de este controlador antes este tipo de problemas que se encuentran en condiciones normales.

3.5.3. Simulación con ruido

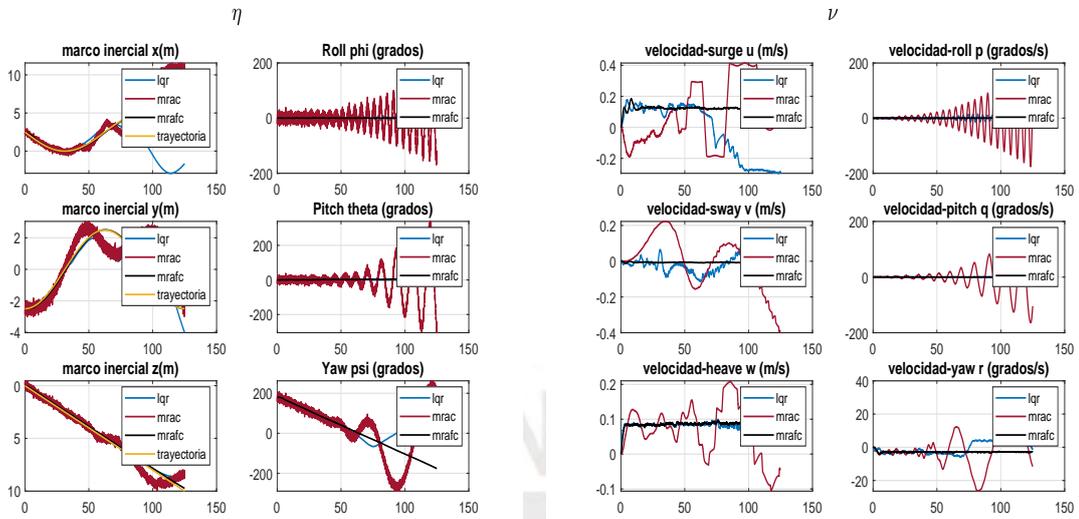
Otra condición que se puede encontrar de forma natural es la medición de las señales o variables de control con un componente adicional comúnmente llamado ruido. Para esto se ha desarrollado la siguiente simulación donde se muestra el comportamiento de cada controlador ante esta perturbación natural.

Para poder generar el ruido se ha hecho uso de una función de números aleatorios en una distribución normal bajo la siguiente ecuación:

$$ruido = k * randn(n, 1)$$

Donde k nos ayuda a establecer una amplitud para el ruido generado.

Las Figuras 3.30 y 3.31 muestran los resultados de los tres controladores propuestos. Se puede observar nuevamente la inestabilidad del controlador *MRAC*, con mayor desviación en la variable ψ que puede ser verificado en la Tabla 3.7 al alcanzar un valor de 2,3999 y se puede interpretar como un 40% mayor que el controlador *LQR* y 45 veces mayor que el controlador *MRAFC*, convirtiéndolo nuevamente en el controlador más débil ante las perturbaciones y ruido. Por otro lado, el controlador *MRAFC* se

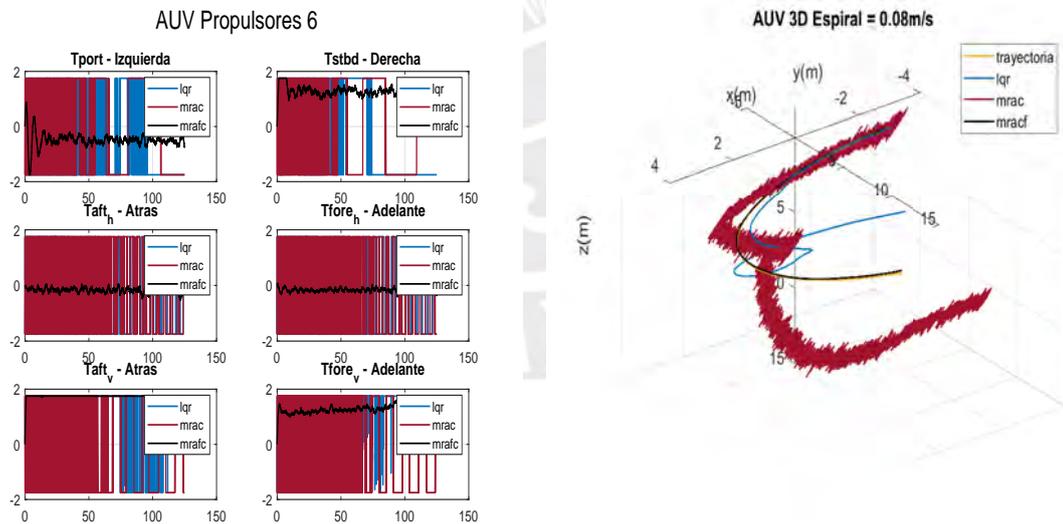


(a) Variable ν ALL

(b) Variable η ALL

Figura 3.30 Variable de estado ALL

mantiene en recorrer el trayecto y trata de compensar las perturbaciones producidas por el ruido variando la señal de los propulsores tal como se muestra en la Figura 3.31a.



(a) Variable τ TODOS

(b) Vista 3d TODOS

Figura 3.31 Vector τ y trayectoria circular TODOS

De la misma forma que en las secciones previas, es posible analizar el comportamiento del error de seguimiento, como se muestra en la Figura 3.32, donde se observa

un comportamiento inestable en los controladores LQR y MRAC, siendo el controlador MRAC el mas afectado producto del ruido. Contrariamente, el controlador MRAFC se mantiene estable, y de este modo el mínimo error de seguimiento.

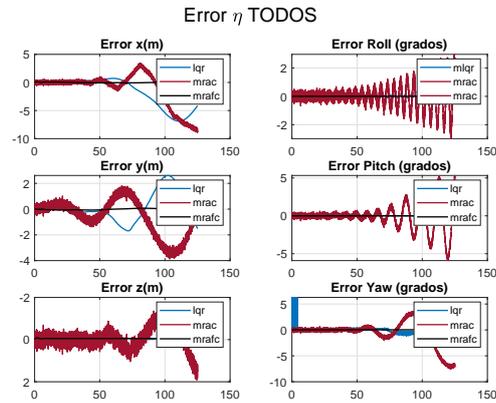


Figura 3.32 Variable Error η vs Tiempo

VIII

	LQR	MRAC	MRAFC
x	0,7802	1,1053	0,0760
y	1,6472	1,5829	0,0697
z	0,0355	0,7342	0,1042
ϕ	0,0615	0,6923	0,0058
θ	0,0103	1,3513	0,0129
ψ	1,7044	2,3999	0,0522

Tabla 3.8 Error RMS variable η TODOS con ruido

$$MRAFC > LQR > MRAC \quad (3.94)$$

3.6. Conclusiones Preliminares

- Basado en el análisis a los estados de convergencia aplicado al controlador LQR se puede concluir que este controlador solo es estable si se encuentra próximo a estado para el cual fue diseñado, en cualquier otro caso el sistema es inestable.
- Se puede verificar que el error en estado estacionario que se obtiene del controlador LQR al seguir la trayectoria deseada evaluado en un estado de convergencia es próximo a cero.
- Una consecuencia directa de un estado estacionario próximo a cero en el controlador LQR es el elevado valor en la variable de control τ el cual produce un efecto de chattering al inicio del recorrido del trayecto.
- El controlador MRAC con argumento solo en la planta genera un seguimiento a la trayectoria de forma estable, pero con error en estado estacionario permanente y proximo a cero.
- El controlador MRAC con argumento en el modelo y en la planta genera un seguimiento a la trayectoria de forma estable y pero con error en estado estacionario permanente y considerable.
- A partir de un análisis cuantitativo de la Tabla 3.4, nos muestra un mayor rendimiento en el controlador MARC tipo I, producto de un menor error en estado estacionario, esto es debido a que en el controlador MRAC tipo II presenta mayores oscilaciones en la variable de estado y la variable de control.
- El controlador MRAFC recorrer la trayectoria completa pasando entre los diferentes estados de convergencia debido a la aplicación de las funciones de membresía.
- El controlador MRAFC es capaz de recorrer la trayectoria deseada, pero generando un error estacionario debido a la linealización de T-S.
- La aplicación de las condiciones LMI, permiten al controlador MRAFC generar fuerzas de propulsión bajas a comparación del controlador LQR.
- A partir de un análisis cuantitativo a las Tablas 3.7 y 3.8, las cuales nos muestran el desempeño de los controladores antes perturbaciones y ruido, se puede concluir que el más robusto y óptimo es el controlador MRAFC.

Capítulo 4

PROPUESTA DE IMPLEMENTACIÓN

4.1. Introducción

En este capítulo se hará una propuesta de implementación para el controlador MRAFC que incluye descripciones de hardware y software con requerimientos mínimos para obtener un AUV totalmente funcional que pueda cumplir con los requisitos de diseño. Por lo tanto, en las siguientes secciones se describe las principales especificaciones técnicas de los diferentes componentes tales como el consumo de potencia, las dimensiones, el peso, o el tipo de comunicación que dispone y que permita dimensionar correctamente todo dentro de la estructura física del AUV. También se describirá brevemente los algoritmos que han sido implementados dentro del CPU y que permiten recolectar y optimizar la información obtenida desde el hardware y que permite establecer el sistema de control y navegación. Además, un esquema general de interconexión de los componentes será mostrado en la última sección 4.4 y que permita identificar el flujo de datos y de energía.

4.2. Hardware

En esta sección se verá todo lo concerniente a los componentes físicos que requiere el AUV y que función cumple cada uno de ellos dentro de la estructura de diseño. Dentro de los más importantes se tiene a la unidad de procesamiento donde se almacena el algoritmo de navegación basado en el controlador MRAFC, el sistema de posicionamiento usando un sensor de onda ultracorta, los propulsores capaces de darle el

empujé necesario a la estructura para recorrer la trayectoria, o su unidad de medición inercial (IMU), etc. Todos estos componentes deben de trabajar de manera coordinada capaz de hacer que todo el sistema sea funcional y sobre todo capaz de satisfacer las condiciones de diseño.

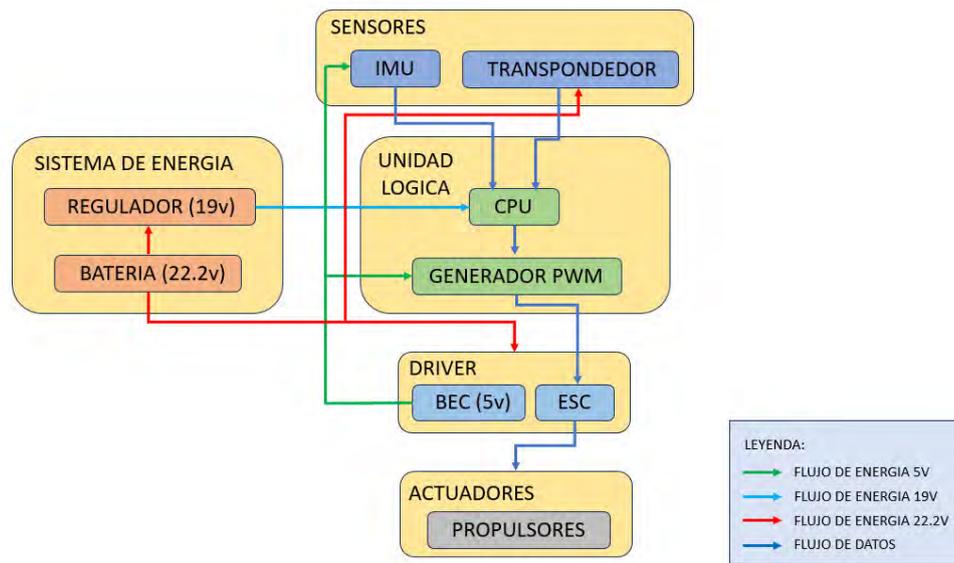


Figura 4.1 Esquema de conexión

4.2.1. Unidad de Procesamiento

El esquema del controlador MRAFC presentado en la Figura 3.16 nos da una idea el grado de complejidad de la ley de control, es decir, el cálculo a nivel matricial que debe de ejecutar el sistema de procesamiento. Además, un parámetro importante a considerar es el tiempo de muestreo requerido para el controlador, el cual tendrá un valor de $5ms$. Por otro lado, debe permitir interconectar otros dispositivos a través de protocolos de comunicación como Ethernet, HDMI, USB, etc, de una manera fácil y rápida. Es por esta razón que se propone el uso de un kit de desarrollo Jetson Xavier Nx como se muestra en la Figura 4.2a que dispone dentro de su modulo principal un procesador de alto rendimiento fabricado por marca NVIDIA, con disposición en procesamiento de CPU y GPU el cual es mostrado en la Figura 4.2b.

La Figura 4.3 nos muestra los principales periféricos de entrada y salida de la placa base. En la parte posterior posee un puerto *M.2-KEY E* para conectar una tarjeta de red inalámbrica y un puerto *M.2-KEY M* para conectar un disco SSD (ver Tabla 4.1). Para la interacción con el usuario dispone de un puerto HDMI que permite conectar

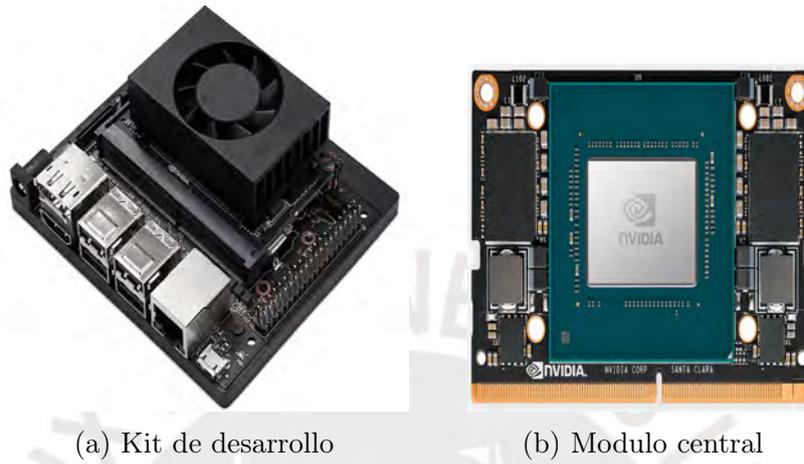


Figura 4.2 Jetson Xavier Nx

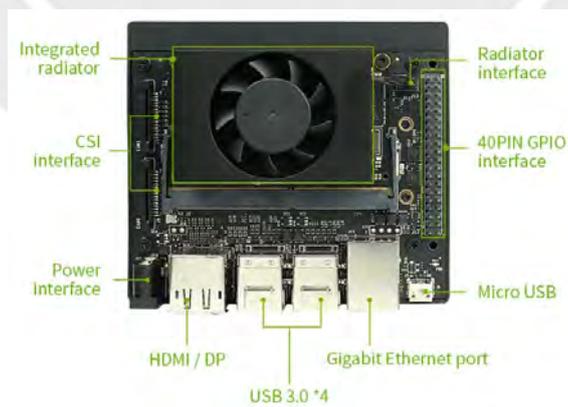


Figura 4.3 Periféricos I/O

un monitor para poder visualizar el entorno gráfico del sistema operativo y además posee una interfaz de I/O de propósito general de 40PIN.

	Interfaces	Uso común
E	PCIe x2/USB 2.0/I2C/SDIO/UART/PCM	WiFi/Bluetooth/WWAN
M	PCIe x4/SATA	PCIe x4/SSD

Tabla 4.1 Tipo de interfaz M2

Un resumen de las principales características técnicas de este kit de desarrollo es mostrado en la siguiente tabla.

MODULO JETSON XAVIER NX	
	Especificaciones Técnicas
Rendimiento AI	21 TOPS
GPU	384-núcleos NVIDIA Volta GPU con 48 núcleos Tensor
CPU	6-núcleos NVIDIA Carmel ARM v8.2 64-bit CPU L2+4MB L3
Memoria	8GB 128-bit LPDDR4x 59.7GB/s
Almacenamiento	16GB eMMC 5.1
Potencia	10W/15W/20W
PCIe	1x1 (PCIe Gen3) + 1x4(PCIe Gen4), total 144GT/s
Cámara CSI	hasta 6 cámaras (24 a través de canales virtuales) 14 lanes (3x4 or 6x2 or 3x4 + 1x2 or 5x2 or 1x4) MIPI CSI-2 D-PHY 1.2(hasta 30Gbps)
Codificación de video	2x 4K60 2x 4K30 10x 1080p60 22x 1080p30 (H.265) 2x 4K60 2x 4K30 10x 1080p60 20x 1080p30 (H.264)
Codificación de video	2x 8K30 6x 4K60 4K30 22x 1080p60 44x 1080p30 (H.265) 2x 4K60 6x 4K30 10x 1080p60 22x 1080p30 (H.264)
Display	2 multimodo DP 1.4/eDP 1.4/HDMI 2.0
Acelerador DL	2x NVDLA
Acelerador Vision	2x PVA
Redes	10/100/1000 BASE-T Ethernet
Mecánica	69.6mm x 45mm 260-pin SO-DIMM conector

Tabla 4.2 Características Técnicas Jetson Xavier Nx

4.2.2. Unidad de medición inercial (IMU)

En el mercado actual existen diferentes dispositivos capaces de medir el estado en el que se encuentra un AUV. Para este caso se optó por hacer uso del módulo *GY-91* que permite unir al circuito integrado IMU MPU9250, de 9DOF, con el barómetro BMP280 dentro de una sola placa y con esto obtener un total de 10DOF. Por lo tanto, este módulo nos ofrece la información de diez variables debido a que combina un giroscopio, un acelerómetro, un magnetómetro y un altímetro y puede ser obtenida mediante el protocolo I2C o SPI.



Figura 4.4 Modulo GY-91

Como información adicional se muestra a continuación la siguiente tabla con las principales especificaciones técnicas de los integrados MPU9250 y BMP280.

MPU9250	BMP280
Acelerómetro: $\pm 2g$, $\pm 4g$, $\pm 8g$, $\pm 16g$	Presión: 300 a 1100 hPa
Giroscopio: $\pm 250/\pm 500/\pm 1000/\pm 2000$ Grad/Seg	Resolución: 0.16 Pa
Magnetómetro: $\pm 4800\mu T$	Precisión absoluta: 1 hPa
Conversor AD: 16 Bits	Medición de temperatura
Voltaje de operación: 3.3V-5V DC	Voltaje de operación: 3.3V-5V DC

Tabla 4.3 Características técnicas GY-91

4.2.3. Controlador electrónico de velocidad (ESC)

Uno de los dispositivos importantes en el diseño es el llamado controlador electrónico de velocidad (ESC) el cual se encuentra ubicando entre el motor y la batería y permite gestionar la cantidad de energía que es suministrada al motor y a su vez controlar la velocidad. Existe una amplia variedad de modelos y de diferente amperaje, pero el ESC propuesto para este proyecto es el *BLHeli EMAX* de 30A. Este dispositivo

posee un *circuito eliminador de batería (BEC)* que básicamente es un regulador de voltaje capaz de convertir el voltaje estándar de las baterías LiPo, es decir 2S (7.4V) o 3S (11.1V), hacia 5V, y con esto eliminar la necesidad de usar una batería externa para alimentar a los dispositivos de 5V. La siguiente Figura 4.5 muestra el controlador *BLHeli EMAX*.



Figura 4.5 Controlador BLHeli EMAX

En el mismo conector del BEC se encuentra una entrada de color naranja, la cual será la señal de control y la encargada gestionar la energía que se suministra. Este tipo de controladores ESC usa el mismo tipo de señal de control que los servos donde la señal estándar es de 50Hz PWM.

El requerimiento de diseño propone el uso de seis ESC, por lo tanto, es necesario hacer uso de una tarjeta que se encargue de generar todas las señales PWM. Entonces se realizó el diseño de la siguiente tarjeta basada en un microcontrolador STM32 con una frecuencia de reloj de 72Mhz, el cual dispone de dos expansiones de I/O de 26PIN y requiere un voltaje de entrada de 5V.



Figura 4.6 Tarjeta STM32

4.2.4. Sistema USBL

Tener un conocimiento exacto de la ubicación en la que se encuentra el AUV bajo el agua, es una tarea del sistema de posicionamiento. Este sistema consta de un sensor que hace uso de ondas acústicas en una línea base de onda ultracorta (USBL) como elemento transmisor y un transpondedor que replica la señal del transmisor con sus propios pulsos, que luego mediante medición del tiempo de recepción logra obtener la posición del AUV. Se optó por hacer uso *S2C-R 18/34* como transmisor USBL, el cual se muestra en la Figura 4.7a y como transpondedor al *S2C-T 18/34* mostrado en la Figura 4.7b.



Figura 4.7 Sistema de posicionamiento acústico [11]

La siguiente Figura 4.8 nos muestra una representación gráfica de radiación de ambos sensores, los cuales tienen un patrón omnidireccional horizontal y que nos asegura que los pulsos de información serán enviados de forma que sean emitidos en todas las direcciones. Por otro lado, en la Tabla 4.4 se muestran las especificaciones técnicas más importantes de este sistema de posicionamiento y que deben de ser capaz de satisfacer el requerimiento de un rango de profundidad de 100m aproximadamente.

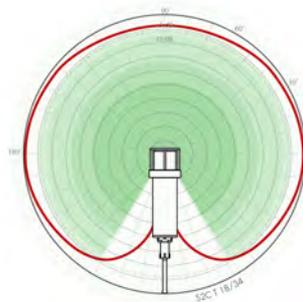


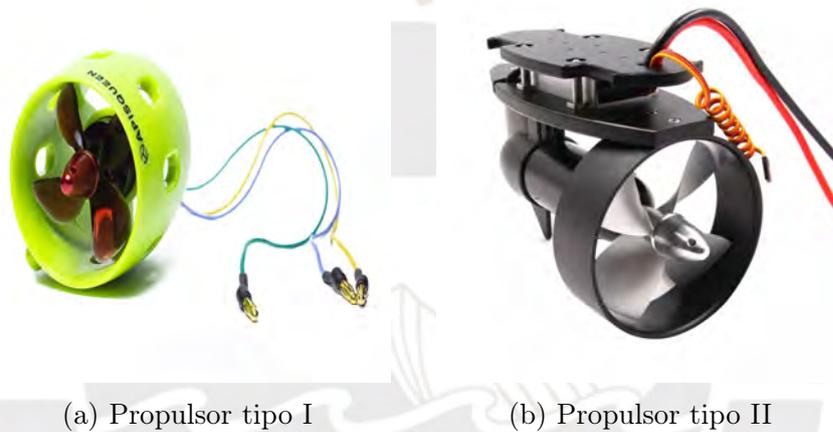
Figura 4.8 Patrón de haz [11]

	S2C-R 18/34 (Transceptor USBL)	S2C-T 18/34 (Transpondedor)
General:		
Rango de Operación:	1000 m	1000 m
Banda de frecuencia:	18 - 34 kHz	18 - 34 kHz
Patrón de haz:	horizontal-omnidireccional	horizontal-omnidireccional
USBL:		
Rango de aproximación :	0.01 m	
Resolución de rumbo:	0.1 grados	
Nominal SNR:	10 dB	
Conexión:		
Conexión acústica:	hasta 13.9 kbit/s	hasta 13.9 kbit/s
Tasa de error de Bit:	menor que 10^{-10}	menor que 10^{-10}
Búfer de datos interno:	1 MB, configurable	1 MB, configurable
Interfaz de host:	Ethernet o RS-232	Ethernet o RS-232
Conector de interfaz:	hasta 4 Conectores, Combinación Ethernet y serial	1 Conector, SubConn® Metal Shell
Potencia:		
Modo Stand-by:	2.5 mW	2.5 mW
Modo escucha:	5 - 285 mW	5 - 285 mW
Modo Recibir:	1.4 W	0.8 W
Modo Transmitir:	5.5 W, rango 250 m 8 W, rango 500 m 18 W, rango 1000 m 60 W, max. available	25 W (adjustable)
Externo :	24 VDC (12 VDC)	24 VDC (12 VDC)
Interno :	Batería Li-Ion Recargable	Batería Li-Ion Recargable
Físico:		
Carcasa:	Ø 110x218 mm	Ø 63x170 mm
USBL antena:	Ø 130x137mm	
Longitud total:	355 mm	250 mm
Delrin (200m):	4500/500 g	1050 / 300 g TBC
Aluminio (2000m):	5500/6200 g	
Acero inox. (2000m):	11300/7100 g	
Titanio (2000m):	6500/4500 g	

Tabla 4.4 Características técnicas USBL

4.2.5. Propulsores

Con la finalidad de proporcionar el empuje necesario para romper la inercia del AUV se optó por usar un propulsor que este compuesto de un motor sin escobillas y una hélice de nailon de 4 hojas capaz de proporcionar una fuerza de empuje de $2kg.m/s^2$ para pruebas en agua dulce mostrado en la Figura 4.9a y con empuje de $10kg.m/s^2$ para pruebas en agua de mar mostrado en la Figura 4.9b. Considerando el consumo de corriente de cada propulsor mostrado en la Tabla 4.5 se debe de hacer una elección para el ESC necesario, para esto considerar un 25% más de la corriente nominal del propulsor.



(a) Propulsor tipo I

(b) Propulsor tipo II

Figura 4.9 Propulsor

A continuación, se muestran las especificaciones técnicas más importantes.

	Tipo I	Tipo II
General:		
Voltaje:	12-24V	12-24V
Corriente:	20A	40A
ESC:	30A	50A
KV:	300KV	200KV
Empuje:	2kg	10kg
Longitud Total:	75mm	220mm
Material:	plástico	Metal

Tabla 4.5 Características técnicas propulsores

4.2.6. Baterías

Como un componente final y considerado uno de los más importantes es la elección del tipo de batería que se usara. Para esto, se optó por hacer uso de baterías tipo LiPo las cuales son basados en polímeros de litio [40]. Estas baterías pueden venir conectadas en forma serial internamente y son indicadas de la forma 2S-6S. Para este proyecto se hace uso de baterías en la forma 6S el cual nos proporciona un voltaje total de 22.2V.

Una de las características principales de este tipo de baterías es que permite entregar una cantidad considerable de corriente sin que este puede sufrir daños internos, tal es el caso de los propulsores que necesitan una corriente mayor a la corriente nominal en el arranque. El parámetro que me indica esto es conocido como *Capacidad de la batería* y es representado por la letra C como se muestra en la Figura 4.10.



Figura 4.10 Batería Lipo

Para poder hacer el cálculo necesario de la capacidad de la batería se debe tener en cuenta los siguientes puntos:

- cantidad de motores
- tiempo de descenso $t_1 = 2min\ 5seg$
- tiempo de recolección de datos $t_2 = 10min$
- tiempo de ascenso $t_3 = 2min\ 5seg$
- corriente al 90% de empuje $i_1 = 15a$
- corriente del CPU 20W $i_2 = 1,05a$
- corriente del transpondedor 25W $i_2 = 1,04a$
- corriente otros $i_3 = 5,0a$

Forward					Reversal				
Voltage (V)	Throttle	Current (A)	RPM	Thrust (Kg)	Voltage (V)	Throttle	Current (A)	RPM	Thrust (Kg)
24	20%	0.6	1371	0.30	24	20%	0.5	1405	0.20
24	30%	1.3	1885	0.60	24	30%	1.1	1954	0.40
24	40%	2.2	2262	0.80	24	40%	2	2434	0.50
24	50%	3.6	2708	1.30	24	50%	4	2845	0.80
24	60%	5	3051	1.50	24	60%	5	3222	0.90
24	70%	8	3325	1.80	24	70%	7	3497	1.20
24	80%	12	3565	2.20	24	80%	11	3805	1.40
24	90%	15	3805	2.30	24	90%	15	4114	1.80
24	100%	17	3977	2.70	24	100%	17	4354	2.00

Figura 4.11 Especificaciones propulsor Tipo I [2]

Entonces se puede hacer uso de la siguiente ecuación:

$$C = \# \text{ de motores} * \text{corriente } 90 \% * t_{total} + (i_1 + i_2 + i_3) * t_{total} \quad (4.1)$$

Donde $t_{total} = t_1 + t_2 + t_3$ y deberá ser expresado en horas y el valor de la corriente al 90 % es obtenido desde la Figura 4.11.

$$\begin{aligned} C &= 6 * (15A) * \left(\frac{15}{60}h\right) + (1,05A + 1,04A + 5,0A) * \left(\frac{15}{60}h\right) \\ &= 22,5Ah + 1,77Ah \\ &= 24,27Ah \end{aligned} \quad (4.2)$$

Además, a este valor obtenido se le va agregar un margen de seguridad del 20 % obteniendo un valor de la capacidad total:

$$\begin{aligned} C &= 24,27Ah + 20 \% * 24,27Ah \\ &= 29,12Ah \end{aligned} \quad (4.3)$$

Entonces para poder alcanzar el valor hallado previamente, es necesario hacer uso de dos baterías del mismo valor, el cual es mostrado en la Figura 4.10. A continuación, la Tabla 4.6 muestra las principales especificaciones técnicas.

	Batería LiPo 6S
Voltaje:	22.2V
Capacidad:	16000mAh
Peso Neto:	1988g
Tasa de descarga:	30C
Dimensión (L*W*H):	192mm*76mm*65mm

Tabla 4.6 Características técnicas baterías

4.3. Software

Después de haber definido el hardware necesario para la implementación del AUV en la sección previa, entonces lo siguiente será hacer una descripción de los algoritmos desarrollados para el sistema de navegación, los cuales serán implementados en la tarjeta de desarrollo Jetson Xavier Nx.

A continuación, se inicia describiendo algunas funciones que son ejecutadas por única vez al inicio del proceso principal, cuyo objetivo será establecer vectores y matrices definidos como variables y que posteriormente son usados continuamente en los subprocesos creados por el proceso principal.

Entonces, la primera función a ejecutar es el cálculo de la trayectoria deseada, cuya tarea será establecer el comportamiento que debe seguir el AUV, y el cual es definido por el usuario final. Esta trayectoria ha sido elegida para recorrer una espiral descendiente, por lo que fue necesario definir el radio del círculo y además de definir la velocidad promedio con la que debe recorrer el AUV. Con los datos mencionados es fácil calcular los tiempos de recorrido mostrado en las líneas 6 y 7 del algoritmo 2 y de igual manera definir el vector tiempo de todo el recorrido indicado en las líneas 11 y 12 tal como se muestra a continuación:

Algorithm 2 Algoritmo trayectoria deseada

```

1: funcion TrayectDes(){
2:  $A \leftarrow 2,5$ ; /* radio de la trayectoria */
3:  $vel \leftarrow input()$ ; /* Se establece el valor de la velocidad */
4:
5: /* Calcula el tiempo total*/
6:  $t_1 \leftarrow 5/vel$ ;
7:  $t_2 \leftarrow 10/vel$ ;
8:  $t_f \leftarrow t_2$ ;
9:
10: /* Calcula el vector tiempo*/
11:  $t_{d1} \leftarrow VectorTiempoIda(0, t_1)$ ;
12:  $t_{d2} \leftarrow VectoTiempoRetorno(t_1, t_2)$ ;
13:  $t_d \leftarrow [t_{d1} : t_{d2}]$ ;
14:
15: /* Calcula el vector NED deseado */
16:  $x_d \leftarrow A * \cos(2\pi t_d/t_f + \pi/2) + A$ ;
17:  $y_d \leftarrow A * \sin(2\pi t_d/t_f - \pi/2)$ ;
18:  $z_d \leftarrow tdd$ ;
19: }
```

Lo siguiente es describir la función subsistemas, que es considerada una de las partes fundamentales del proyecto, pues es el encargado de definir los subsistemas generados por los cuartos estados de convergencia indicados en la línea 3 del algoritmo 3. Cada uno de esos estados son asignados a las funciones seno y coseno, y esos a su vez asignados dentro de la matriz de conversión para poder calcular el valor de J_θ en cada estado de convergencia. Para poder definir las matrices $A(i)$ y $B(i)$ será necesario calcular previamente las matrices de masas y de fuerzas de restauración tal como se indica en las líneas 17 y 18.

Algorithm 3 Algoritmo subsistemas

```

1: funcion SubSist(){
2:  $n \leftarrow 4$ ; /* total puntos convergencia */
3:  $EstadoConv \leftarrow [\pi, \pi/2, 0, -\pi/2]$ ;
4:
5: /* Calcula matriz de conversión */
6: for  $i = 1:n$  do
7:    $cpsi(i) \leftarrow EstadoConv(i)$ ;
8:    $sphi(i) \leftarrow EstadoConv(i)$ ;
9:    $J_\theta(i) \leftarrow CalculaJtheta(i)$ 
10: end for
11:
12: /* Calcula subsistemas */
13:  $Mb \leftarrow MatrizMasas()$ ;
14:  $Gn \leftarrow VectFuerzasRest()$ ;
15: for  $i = 1:n$  do
16:
17:    $A(i) \leftarrow \begin{bmatrix} 0_{[6 \times 6]} & J(i) \\ -Mb/Gn & 0_{[6 \times 6]} \end{bmatrix}$ ;
18:    $B(i) \leftarrow \begin{bmatrix} 0_{[6 \times 6]} \\ I_{[6 \times 6]} \end{bmatrix}$ ;
19:
20: end for
21: }
```

Definidos los subsistemas $A(i)$ y $B(i)$ será necesario obtener una matriz positiva definida P que sea común para todos los subsistemas y que pueda cumplir con el *Teorema I* definido en el apéndice A.5. Es por lo que se desarrolló el algoritmo 4 capaz de establecer condiciones de desigualdad necesarias para sistemas lineales en lazo cerrado y que pueda calcular la matriz P como se muestra en la línea 29. Primero definen las variables de trabajo y sus dimensiones indicados en las líneas 4,5 y 6 para luego desarrollar las desigualdades definidas en 3.89. Por último, se calculan las

soluciones a cada una de estas variables de trabajo como se muestra en las líneas 27 y 28.

Algorithm 4 Algoritmo condiciones LMIs

```

1: funcion LMIs(){
2: /* Inicialización y Definición las variables */
3: setlmis([]);
4:  $Q \leftarrow \text{lmivar}(1, [\text{size}(A1, 1)1]);$ 
5:  $M1 \leftarrow \text{lmivar}(2, [6\ 12]);$   $M2 \leftarrow \text{lmivar}(2, [6\ 12]);$ 
6:  $M3 \leftarrow \text{lmivar}(2, [6\ 12]);$   $M4 \leftarrow \text{lmivar}(2, [6\ 12]);$ 
7: /* La LMI N1 se puede dividir como dos términos independientes para cada variable Q y M. También es generado para cada subsistema lineal */
8: /* ===== 1-LMI 1er subsistema ===== */
9:  $A_1X + XA_1^T \leftarrow \text{lmiterm}([\text{cond1}\ 1\ 1\ Q], A1, 1, 's');$  /* 1er subsist. */
10:  $B_1M_1 + M_1^TB_1^T \leftarrow \text{lmiterm}([\text{cond1}\ 1\ 1\ M1], B1, -1, 's');$  /* 1er subsist. */
11: :
12: /* ===== 1-LMI 4to subsistema ===== */
13:  $A_4X + XA_4^T \leftarrow \text{lmiterm}([\text{cond4}\ 1\ 1\ Q], A4, 1, 's');$  /* 4to subsist. */
14:  $B_4M_4 + M_4^TB_4^T \leftarrow \text{lmiterm}([\text{cond4}\ 1\ 1\ M4], B4, -1, 's');$  /* 4to subsist. */
15: /* La LMI N2 se puede dividir como cuatro términos independientes para cada variable Q y M. Es generado para los dos primeros subsistemas lineales */
16: /* ===== 2-LMI subsistema 1 y 2 ===== */
17:  $A_1X + XA_1^T \leftarrow \text{lmiterm}([\text{cond5}\ 1\ 1\ Q], A1, 1, 's');$ 
18:  $A_2X + XA_2^T \leftarrow \text{lmiterm}([\text{cond5}\ 1\ 1\ Q], A2, 1, 's');$ 
19:  $B_1M_2 + M_2^TB_1^T \leftarrow \text{lmiterm}([\text{cond5}\ 1\ 1\ M2], B1, -1, 's');$ 
20:  $B_2M_1 + M_1^TB_2^T \leftarrow \text{lmiterm}([\text{cond5}\ 1\ 1\ M2], B1, -1, 's');$ 
21: /* ===== 2-LMI subsistema 3 y 4 ===== */
22:  $A_3X + XA_3^T \leftarrow \text{lmiterm}([\text{cond6}\ 1\ 1\ Q], A1, 1, 's');$ 
23:  $A_4X + XA_4^T \leftarrow \text{lmiterm}([\text{cond6}\ 1\ 1\ Q], A2, 1, 's');$ 
24:  $B_3M_4 + M_4^TB_3^T \leftarrow \text{lmiterm}([\text{cond6}\ 1\ 1\ M4], B3, -1, 's');$ 
25:  $B_4M_3 + M_3^TB_4^T \leftarrow \text{lmiterm}([\text{cond6}\ 1\ 1\ M3], B4, -1, 's');$ 
26:  $[tmin, xfeas] \leftarrow \text{feasp}(\text{lmisys})$  /* calcula una solución para  $x^{feas}$  */
27:  $Qopt \leftarrow \text{dec2mat}(\text{lmisys}, xfeas, Q);$  /* obtiene valor de Q */
28:  $Mopt_i \leftarrow \text{dec2mat}(\text{lmisys}, xfeas, M_i);$  /* obtiene valor de  $M_i$  */
29:  $P \leftarrow \text{inv}(Qopt);$   $F_i \leftarrow Mopt_i * P;$  /* calcula matriz P y  $F_i$  */
30: }

```

Como última función será establecida aquella que permita calcular un valor indicativo para cada una de las funciones de pertenencia dependiendo del rango en el cual se encuentra la variable a evaluar. Estos rangos son establecidos en función de la cantidad de subsistemas generados por la variable involucrada, es decir, la cantidad de estados de convergencia que existen por cada una de las variables que conforman

el vector de estado. Una representación gráfica fue mostrada en el capítulo previo en la Figura 3.17.

Algorithm 5 Algoritmo funciones de membresía

```

1: funcion FuncPert(){
2:   if  $\psi < -180$  &  $\psi > 180$  then
3:      $fp_{\psi}(1, 1) = 1$ ;
4:   else
5:      $fp_{\psi}(1, 1) = CalculaRango1()$ ;
6:   end if
7:   if  $\psi < 1$  &  $\psi > 179$  then
8:      $fp_{\psi}(1, 1) = 1$ ;
9:   else
10:     $fp_{\psi}(1, 1) = CalculaRango2()$ ;
11:   end if
12:   if  $\psi < -89$  &  $\psi > 89$  then
13:      $fp_{\psi}(1, 1) = 1$ ;
14:   else
15:      $fp_{\psi}(1, 1) = CalculaRango3()$ ;
16:   end if
17:   if  $\psi < -179$  &  $\psi > 1$  then
18:      $fp_{\psi}(1, 1) = 1$ ;
19:   else
20:      $fp_{\psi}(1, 1) = CalculaRango4()$ ;
21:   end if
22:
23:    $sum_{\mu} = sum(fp_{\psi})$ ; /* calcula la suma de las funciones de pertenencia */
24: }
```

Las tres primeras funciones descritas anteriormente son ejecutadas al inicio, en el código principal y solo son ejecutadas una vez, pero el algoritmo de las funciones de membresía requiere que sea evaluado constantemente en el diseño del AUV, es decir que requiere líneas de código que estén continuamente ejecutándose, es por esta razón que se necesita generar procesos llamados *hilos* o *thread* con la finalidad de adquirir información de los sensores o enviar datos a la placa de control de los propulsores, y cuyos procesos serán administrados por el programador de tareas del sistema operativo del CPU, capaz de generar un sistema funcional.

Una de las formas de comunicación mencionadas en las especificaciones de hardware es mediante el protocolo SPI, el cual es configurado en el módulo IMU y la tarjeta que genera las señales PWM, capaz de transmitir datos entre dispositivos superiores a $50Mbps$ a diferencia del protocolo I2C cuya transmisión promedio es de $100kbps$. Una

desventaja de este protocolo es el mayor consumo de pines (3 pines) a diferencia del protocolo I2C (2 pines). Por otro lado, la forma de comunicación hacia el sensor USBL será mediante protocolo estándar RS232.

Entonces los algoritmos 6, 7 son implementados para establecer una comunicación SPI entre el dispositivo de unidad inercial, la placa que genera señales PWM y la tarjeta Jetson Xavier. El funcionamiento de este protocolo es sencillo a diferencia de otros protocolos, donde solo es necesario enviar un byte de la variable que se requiere, y esperar a que el dispositivo responda con la información solicitada. Por otro lado, en el algoritmo 8 se implementa la comunicación RS232 estándar.

Algorithm 6 Algoritmo thread pwm_stm

```

1: void * pwm_stm(void * arg){
2:  enable_stm(); /* habilita dispositivo imu */
3:  for i = 1:bufferize do
4:    spi_stm_send(); /* envía dato a leer */
5:    delay(); /* retardo */
6:    v0(i) ← spi_stm_read(void); /* lee estado pwm */
7:  end for
8:
9:  [pwm1, ..., pwm6] ← v0; /* asigna datos a variables */
10: disable_stm(); /* deshabilita dispositivo imu */
11: }
```

Algorithm 7 Algoritmo thread imu

```

1: void * imu_stm(void * arg){
2:  enable_imu(); /* habilita dispositivo imu */
3:  for i = 1:bufferize do
4:    spi_imu_send(); /* envía dato a leer */
5:    delay(); /* retardo */
6:    v1(i) ← spi_imu_read(void); /* lee información */
7:  end for
8:
9:  [ $\phi, \theta, \psi, u, v, w, p, q, r$ ] ← v1; /* asigna datos a variables */
10: disable_imu(); /* deshabilita dispositivo imu */
11: }
```

El siguiente algoritmo por implementar es el encargado de calcular las ecuaciones del controlador MRAFC, y para que sea ejecutado correctamente deberá valerse de los cálculos previo como el vector de la trayectoria deseada, necesario para obtener el

Algorithm 8 Algoritmo thread usbl

```

1: void * usbl(void * arg){
2:  usart_send_data(); /* envía dato a leer */
3:  delay(); /* retardo */
4:  usart_receive_data(); /* recibe dato */
5:  }

```

error indicado en la línea 3 del algoritmo 9, cálculo de las funciones de pertenencia la línea 5 o del cálculo de la matriz P utilizado en *ActualizaDatos()* en la línea 20.

Algorithm 9 Algoritmo thread controlador

```

1: void * controlador(void * arg){
2:  /* calcula ley de control y actualiza datos */
3:  error = x - x_d; /* obtiene el error de control*/
4:   $\psi \leftarrow x(6, 1)$ ; /* obtiene  $\psi$  desde vector de estado */
5:   $[\mu, sum_m u] \leftarrow FuncPert(\psi)$ ; /* calcula las funciones de pertenencia */
6:
7:  /* calcula ley de control */
8:   $u = \mu(-K_j x + L_j r) / sum_\mu$ ;
9:   $u = Saturacion(u)$ ;
10:
11: /* Calcula sistema no lineal */
12:  $J(\psi) \leftarrow CalculaJtheta(\psi)$ 
13:  $C_{RB+A} \leftarrow MatrizCoriolis()$ ;
14:  $Dn \leftarrow MatrizHidrodinamica()$ ;
15:  $Gn \leftarrow VectFuerzasRest()$ ;
16:
17:  $\eta = J(\psi)\nu$ ;
18:  $\nu = Mb^{-1}[(C_{RB+A} + Dn)\nu - Gn + u + \tau_{ext}]$ ;
19:  $x = [\eta, \nu]$ ;
20:  $[K_j, L_j] \leftarrow ActualizaDatos()$ ;
21: }

```

Por último, se encuentra el proceso principal en el algoritmo 10, donde se inician los periféricos SPI y RS232. Además, en este proceso se hace llamado a la función de generar la trayectoria deseada, calcular los subsistemas y establecer las condiciones LMIs. Aquí, se tiene por responsabilidad lanzar o generar los subprocesos responsables de la comunicación con los periféricos del sistema. Las variables deberán de ser especificadas de manera global y que puedan ser utilizadas en los nuevos procesos creados, esto debido a que la última línea de código finaliza el proceso.

Como parte final, es necesario indicar que cada proceso debe de tener un numero de prioridad que le indique al programador de tareas a cuál de todos los procesos debe de darle mayor importancia, por lo que se le asigna un valor de prioridad 1 al proceso USBL, una prioridad 2 al proceso imu, prioridad 3 al proceso controlador y por último una prioridad 4 al proceso pwm.

Algorithm 10 Algoritmo thread principal

```

1: int main(){
2: /* inicializa periféricos */
3: Serial_init(); /* inicializa periférico rs232 */
4: spi_init(); /* inicializa periférico spi */
5: /* inicia funciones */
6: TrayectDes(); /* calcula la trayectoria deseada */
7: SubSist(); /* calcula subsistemas en estados de convergencia */
8: LMIs(); /* calcula las condiciones LMI */
9:
10: /* inicializa atributos */
11: pthread_attr_init(&attr);
12: pthread_attr_setdetachstate(&attr, PTHREAD_CREATE_JOINABLE);
13: pthread_attr_setscope(&attr, PTHREAD_SCOPE_PROCESS);
14: /* inicializa thread's */
15: pthread_create(&sens1, &attr, imu, NULL);
16: pthread_create(&sens2, &attr, usbl, NULL);
17: pthread_create(&pwm, &attr, pwm_stm, NULL);
18: pthread_create(&ctrl, &attr, controlador, NULL);
19: pthread_attr_destroy(&attr);
20: pthread_exit(NULL);
21: }
```

4.4. Arquitectura

Una forma de cómo están interconectados todos los dispositivos en el AUV será visto a continuación. Primeramente, en la Figura 4.12 se muestra un esquema de cómo se realiza la comunicación entre el dispositivo USBL y transpondedor para poder proporcionar la localización del AUV. Mientras que en la Figura 4.13 se muestran los componentes internos como el CPU, modulo IMU, transpondedor, controlador ESC, propulsores y baterías, así como la forma que tienen el flujo de datos y de energía, mientras que el Transmisor USBL será ubicado en una embarcación en la superficie

del océano y contara con una comunicación directa con un servidor para almacenar los datos adquiridos .

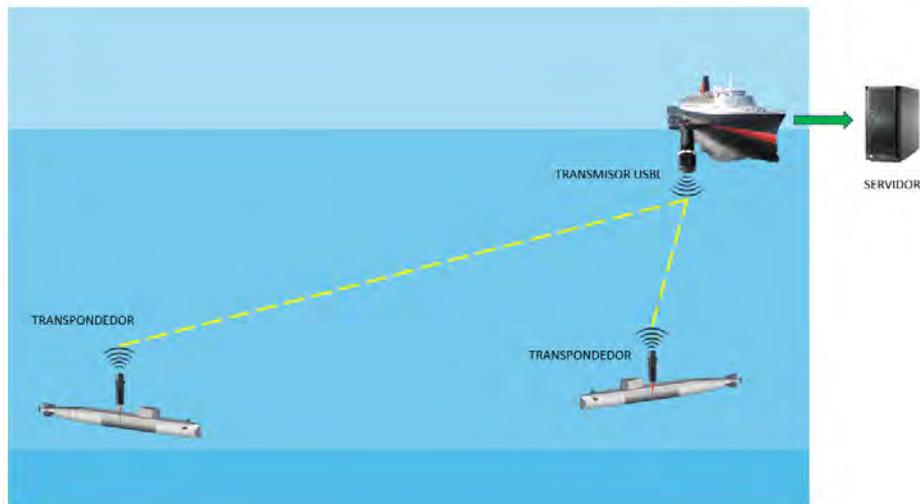


Figura 4.12 Sistema de posicionamiento USBL

ESQUEMA DE CONEXION ENTRE DISPOSITIVOS DEL AUV

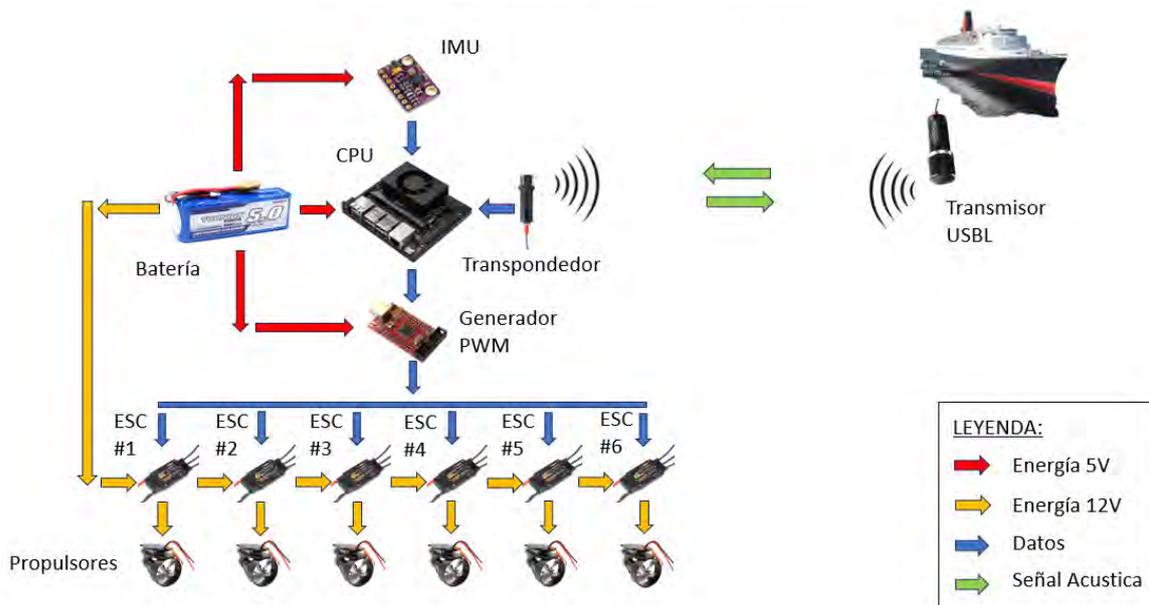


Figura 4.13 Esquema de conexión

4.5. Conclusiones Preliminares

- Se logró plantear una propuesta de implementación para un AUV, basado en los requerimientos de diseño, es decir, satisfaciendo la complejidad matemática que debe ejecutar el CPU, el tiempo de muestreo y los protocolos de comunicación, etc.
- Se determinó el tipo de sensor ultrasónico a usar debajo del agua, compuesto de un transmisor y un transductor, con línea base ultracorta (USBL) para determinar la posición del AUV y con una forma omnidireccional para la emisión de la información.
- Se realizó el cálculo necesario para determinar la cantidad de energía consumida en un ciclo completo del AUV (descenso, recolección de datos y ascenso) y así determinar la cantidad de baterías que son requeridas en el interior del AUV según la capacidad y las dimensiones existentes en el mercado actual.
- Se estableció pseudocódigo de programación basados en funciones y en procesos que serán implementados en el CPU con la finalidad de garantizar el funcionamiento colectivo de todos los módulos, desarrollar cálculos avanzados y generar trayectorias de navegación.

CONCLUSIONES GENERALES

- Se desarrollo un estudio del arte para vehículos submarinos autónomos (AUV) de 6DOF recopilando información sobre la estructura interna y detallando los módulos e interfaces que la componen. Estableciendo de este modo una clasificación para robots submarinos basado en características como autonomía, tipo de misión y propulsión. Mientras que una forma específica de clasificación para vehículos submarinos autónomos (AUV) fue basada según la carga que pueden transportar. Por otro lado, se hace mención a los tipos de autopilotos más comunes como Pixhawk y Ardupilot, los cuales son algoritmos de código abierto alojados en la CPU. Estos algoritmos por defecto están basados en estrategias de control simples como el caso de controladores PID en cascada para determinar la orientación y la posición del vehículo. Debido a que estos controladores son sencillos de implementar, el autopiloto Pixhawk es programado en procesador ARM Cortex-M4, mientras que el Ardupilot es programado en un procesador ATMEGA32U, siendo ambos de 32 bits. Por el contrario, en el diseño del controlador MRAFC se observó una carga computacional elevada debido al número de reglas fuzzy presentes en el modelo de Takagi-Sugeno y a la complejidad del sistema no lineal, cuyo cálculo se eleva según la cantidad de subsistemas lineales que se obtenga para cada variable del vector de estado, generando de este modo una mayor cantidad de iteraciones. Por lo tanto, las características técnicas para implementar este controlador MRAFC son superiores, por lo que requiere de un procesamiento más potente. Entonces, se propone el uso de una tarjeta de desarrollo Jetson Xavier NX basado en un sistema de 64 bits, capaz de soportar la carga computacional del controlador, y también con miras hacia trabajos futuros que permita una fácil integración de nuevos dispositivos.
- Se desarrollo un modelo matemático para el vehículo submarino autónomo de 6DOF el cual describe la dinámica no lineal mediante transformaciones lineales y angulares a un cuerpo rígido, mientras que al aplicar la segunda ley de Newton se obtienen coeficientes hidrodinámicos asociados a un cuerpo en movimiento.

Por otro lado, es necesario simplificar el modelo no lineal para facilitar el cálculo computacional por el que se aplica el uso de planos de simetría en la estructura del vehículo. Y así, determinar de una manera sencilla los estados de convergencia y además, obtener la dinámica local calculando de este modo los subsistemas lineales.

- A partir de modelos fuzzy Takagi-Sugeno y aplicando conceptos de teoría no lineal de Lyapunov se logró desarrollar un sistema de control fuzzy adaptativo por modelo de referencia (MRAFC). Además, fue necesario diseñar funciones de membresía y establecer condiciones de desigualdad LMI y de este modo obtener un esquema del controlador. Por otra parte, fue necesario el uso de un indicador de desempeño para realizar un análisis cuantitativo de los controladores, cuyos resultados son mostrados en la Tabla 3.7, donde se estableció que el controlador MRAFC es superior a otros controladores cuando el AUV está expuesto a perturbaciones externas, obteniendo un error RMS en la variable $\psi = 0,0404$, una de las variables más afectadas del vector de estado. El error RMS en otros controladores como LQR obtuvo un error 36 veces mayor al error del controlador MRAFC, mientras que el controlador MRAC obtuvo un error 94 veces mayor. De este modo, se logró validar y verificar el rendimiento del controlador (MRAFC) versus otros controladores convencionales como el regulador cuadrático lineal (LQR) y el controlador adaptativo por modelo de referencia (MRAC).
- De una manera similar se realizó un análisis a los indicadores de rendimiento, los cuales son mostrados en la Tabla 3.8, donde se estableció que el controlador MRAFC es superior a otros controladores cuando el AUV presenta ruido al momento de adquirir información, obteniendo un error RMS en la variable $\psi = 0,0522$. El error RMS en otros controladores como controlador LQR obtuvo un error 33 veces mayor al error del controlador MRAFC, mientras que el MRAC obtuvo un error 45 veces mayor. Por lo que, luego de evaluar los resultados obtenidos en las Tablas 3.7 y 3.8, se concluye que controlador MRAFC es superior en comparación a los otros controladores, esto en gran medida, debido a la matriz simétrica P obtenida por optimización numérica de LMIs, el cual es capaz de estabilizar todos los subsistemas lineales en el modelo de Takagi-Sugeno.
- Se desarrolló una propuesta de implementación para un sistema de control avanzado, el cual está basado en el controlador MRAFC, teniendo en cuenta los requerimientos de diseño, la complejidad numérica y la forma de comunicación que debe de existir en el sistema de posicionamiento USBL, por lo que se consi-

deró hacer uso de una tarjeta de procesamiento Jetson Xavier Nx como CPU, un modulo GY-91 para la medición inercial del AUV, controladores ESC BLHelix EMAX 30A para los propulsores, mientras que para el sistema de posicionamiento bajo el agua se consideró usar un transmisor S2C-R 18/34 y un transpondedor S2C-R 18/34. Además, se determinó la cantidad de energía requerida y a su vez la cantidad de baterías necesarias durante todo el trayecto deseado, es decir, para un tiempo total sumergido de 15min aproximadamente. Ahora, de requerir mas tiempo bajo el agua, implicara aumentar la cantidad de baterías y esto a su vez, aumentar el peso total del AUV. Considerando las ecuaciones obtenidas en el capitulo 2 y 3, para el modelo del vehículo y el controlador, la masa es una variable directamente proporcional, por lo que aumentar su valor significa llevar el vehículo a un estado de divergencia. Por otro lado, el controlador MRAFC es un control adaptativo, capaz de modificar sus parámetros para adaptarse a esta variación, por lo que se estima que el sistema es capaz de duplicar su masa sin perder control en el seguimiento de la trayectoria, con lo que se concluye que aumentando la cantidad de baterías en el vehículo podría tener una mayor cantidad de autonomía, considerando el volumen y el numero de baterías que puedan ingresar en el interior de la estructura, se estima una autonomía aproximada de una hora para las dimensiones del AUV tomadas para este trabajo de investigación. Ahora, el desarrollo a nivel de software fue en base a pseudocódigo, por el cual se pudo realizar una simulación del sistema ejecutando procesos y funciones. Eventualmente, para garantizar el funcionamiento se debe implementar físicamente el sistema e integrar adecuadamente los componentes y diseños de acuerdo a los estándares y normas de ingeniería. Por lo que, sera necesario contar con un laboratorio de pruebas y con todos los elementos que van a ir en el interior de la estructura del AUV. Luego dividir la prueba de funcionamiento general en pequeñas pruebas de subsistemas, tales como pruebas en los propulsores, en la adquisición de datos del sistema de navegación, de posicionamiento inercial, etc. Luego realizar el funcionamiento colectivo de todo el hardware en un ambiente que no tenga perturbaciones y que sea capaz de navegar sin dificultad, para posteriormente realizar pruebas en el océano.

Bibliografía

- [1] and Arkadii Nemirovskii, Y. N. (2001). *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [2] ApisQueen (2023). [online] <https://es.aliexpress.com/i/1005004039105654.html>.
- [3] Avalos, H. A. M. (2013). *Modelado, control y Diseño de robots submarinos de estructura paralela con impulsores vectorizados*. Escuela técnica superior de ingenieros industriales.
- [4] Bañó, J. I. (2017). Diseño e implementación de un algoritmo de control avanzado para la estabilización de un quadrotor basado en el autopiloto pixhawk y un sistema de posicionamiento rtk-gps. Master's thesis, Universidad Politecnica de Valencia.
- [5] Balcazar, M., Pérez-Zuñiga, G., and Cuellar, F. (2024). Design and simulation of a model predictive control system navigation of a drone in confined spaces. *International Conference on Artificial Intelligence, Computer, Data Sciences and Applications (ACDSA)*, pages 1–5.
- [6] Castro, L. M. A. and Astudillo, C. P. O. (2017). Análisis de la tecnología ardupilot orientada a la implementación de sistemas de control automático. Master's thesis, Universidad Politecnica Salesiana.
- [7] Cervantes, J. (2019). Vehículos submarinos autónomos. *Publicacion Semestral Padi*, 7:60–70.
- [8] Cho, Y.-W. (2007). A model reference adaptive fuzzy control for mimo takagi-sugeno fuzzy model. *Revista de la sociedad de sistemas inteligentes y difusos*, 17:130–135.
- [9] Cummins, W. (1962). The impulse response function and ship motion. *Hydromechanics laboratory research and development report*.
- [10] Díaz, S., Settele, J., E.S., E. S. B., and Ngo, H. T. (2019). *The global assessment report on biodiversity and ecosystem services*. Intergovernmental Science-Policy Platform on Biodiversity and Ecosystem Services (IPBES).
- [11] Evologics (2023). [online] <https://evologics.de/acoustic-modems>.
- [12] Fenco, L., Perez-Zuñiga, G., Quiroz, D., and Cuellar, F. (2021). Model reference adaptive fuzzy controller of a 6dof autonomous underwater vehicle. *IEEE-OCEANS 2021: San Diego – Porto*.

- [13] Friedlingstein, P. (2022). Global carbon budget 2022. *Earth System Science Data*, 14.
- [14] Fossen, T. I. (2011). *Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control*. John Wiley and Sons Ltd. Published.
- [15] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J., and Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox For Use with MATLAB*. The MathWorks, Inc.
- [16] Ghaffar, A. A. and Richardson, T. (2015). Model reference adaptive control and lqr control for quadrotor with parametric uncertainties. *International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*, 9.
- [17] Hidalgo, F., Mendoza, J., and Cuéllar, F. (2015). Rov-based acquisition system for water quality measuring. *OCEANS 2015 - MTS/IEEE Washington*, pages 1–5.
- [18] ixblue and Group, E. (2023). [online] <https://www.ixblue.com/knowledge/what-is-a-usbl-system/>.
- [19] Koo, T. J. (2001). Stable model reference adaptive fuzzy control of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 9.
- [20] Loayza, A. H. and Pérez-Zuñiga, G. (2019). Design of a fuzzy sliding mode controller for the autonomous path-following of a quadrotor. *IEEE Latin America Transactions*, 17:962 – 971.
- [21] Ma, C., Lam, J., and Lewis, F. L. (2019). Trajectory regulating model reference adaptive controller for robotic systems. *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, 27.
- [22] Menhaj, M. B. and Rouhani, M. (2002). A novel neuro-based model reference adaptive control for a two link robot arm. *Proceedings of the 2002 International Joint Conference on Neural Networks*.
- [23] Mundo, B. N. (2023). [online] <https://www.bbc.com/mundo/articles/c16epene12jo>.
- [24] N.J.Patil, D. and Dr.L.M.Waghmare (2009). Design of mrafrc for cstr process. *International Journal Of Computer Science And Applications*, 2.
- [25] Pagán, G. C. (2016). *Evaluación y análisis de un AUV mediante CFD y estudio de alternativas operativas*. UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA - Escuela Técnica Superior de Ingeniería Naval y Oceánica.
- [26] Patil, N., Chile, R., and Waghmare, L. (2007). Implementation of model reference adaptive fuzzy controller. *IET-UK International Conference on Information and Communication Technology in Electrical Sciences*, pages 100–104.
- [27] Perez, T. and Fossen, T. I. (2007). Kinematic models for seakeeping and manoeuvring of marine vessels. modeling, identification and control. *MIC-28*, 1:19–30.

- [28] Pourseif, T., Andani, M. T., Ramezani, Z., and Pourgholi, M. (2017). Model reference adaptive control for robot tracking problem: Design and performance analysis. *International Journal of Control Science and Engineering*, 7:18–23.
- [29] Rice, J., Seixas, C. S., Zaccagnini, M. E., Bedoya-Gaitán, M., and N., V. (2018). *The regional assessment report on biodiversity and ecosystem services for the Americas*. Intergovernmental Science-Policy Platform on Biodiversity and Ecosystem Services (IPBES).
- [30] Rojas–Moreno, A. and Jara–Sandoval, V. (2013). Fractional order pd and pid position control of an angular manipulator of 3dof. *Latin American Robotics Symposium and Competition*.
- [31] Slotine, J. J. and Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Pearson Prentice Hall.
- [32] Stanislaw, H. Z. (2003). *Systems and Control*. Oxford University Press, Inc.
- [33] Stanković, M. R., Naumović, M. B., Manojlović, S. M., and Mitrović, S. T. (2014). Fuzzy model reference adaptive control of velocity servo system. *Electronics and Energetics*, 27:601–611.
- [34] Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books Publishing, L.L.C.
- [35] Takagi, T. and M. Sugeno (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, SMC-15.
- [36] Tanaka, K. and Sugeno, M. (1990). Stability analysis of fuzzy systems using lyapunov’s direct method. *Proc. NAFIPS’90*, pages pp. 133–136.
- [37] Tanaka, K. and Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets Syst*, 45:pp. 135–156. 2.
- [38] Vahid, S. and Javanmard, K. (2016). Modeling and control of autonomous underwater vehicle (auv) in heading and depth attitude via ppd controller with state feedback. *INTERNATIONAL JOURNAL OF COASTAL AND OFFSHORE ENGINEERING*, pages 11–18.
- [39] Velasquez, D. E. Q. (2019). *Desarrollo de un sistema de control avanzado para un vehículo submarino autónomo tipo planeador con actuadores internos*. Pontificia Universidad Católica del Perú - Escuela de Posgrado.
- [40] Ventura, D. M. (2014). Sistema de gestión de baterías y eléctrico para vehículo submarino autónomo (bms and electric for auv). Master’s thesis, Universidad de las Palmas de Gran Canaria.
- [41] Ventura–Hinojosa, H. and Rojas–Moreno, A. (2019). Real–time model reference adaptive control of a 3dof robot arm. *IEEE XXVI International Conference on Electronics, Electrical Engineering and Computing (INTERCON)*.

- [42] Ventura–Hinostrroza, H. and Rojas–Moreno, A. (2020). Real–time model reference adaptive fuzzy control of a 3dof robot arm. *IEEE XXVI International Conference on Electronics, Electrical Engineering and Computing (INTERCON)*.
- [43] Vervoort, J. (2008). Modeling and control of an unmanned underwater vehicle. Master’s thesis, University of Canterbury and University of technology Eindhoven.
- [44] Young-Wan Cho, K.-S. S. and Lee, H.-J. (2007). A direct adaptive fuzzy control of nonlinear systems with application to robot manipulator tracking control. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 5:630–642.
- [45] Zhang, J., Swain, A. K., and Nguang, S. K. (2016). *Robust ObserverBased Fault Diagnosis for Nonlinear Systems Using MATLAB*. The MathWorks, Inc.



Apéndice A

Definiciones

A.1. Skew-Symmetry de una Matriz

Una matriz $S \in SS(n)$, que es el conjunto de matrices skew-symmetric de orden n , se dice que es skew-symmetric si:

$$S = -S^T$$

Esto implica que si los elementos fuera de la diagonal de S satisfacen $s_{ij} = -s_{ji}$ para $i \neq j$ mientras la diagonal de elementos son cero.

A.2. Operador Producto-Cruz

El vector producto-cruz x es definido por:

$$\lambda x a := S(\lambda)a \tag{A.1}$$

Donde $S \in SS(3)$ es definido como:

$$S(\lambda) = -S^T(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

A.3. Matriz Inercial

La matriz $I_g \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sobre CG es definida como:

$$I_g := \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}, \quad I_g = I_g^T > 0 \quad (\text{A.3})$$

Donde I_x , I_y e I_z son los momentos de inercia sobre los ejes x_b , y_b y z_b , e $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$ e $I_{yz} = I_{zy}$ son el producto de inercia definido como:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_v (y^2 + z^2) \rho_m dV; & I_{xy} &= \int_v xy \rho_m dV = \int_v yx \rho_m dV = I_{yx} \\ I_y &= \int_v (x^2 + z^2) \rho_m dV; & I_{xz} &= \int_v xz \rho_m dV = \int_v zx \rho_m dV = I_{zx} \\ I_z &= \int_v (x^2 + y^2) \rho_m dV; & I_{yz} &= \int_v yz \rho_m dV = \int_v zy \rho_m dV = I_{zy} \end{aligned}$$

A.4. Simetría en matriz de inercia M

Se tiene que ver las ecuaciones de movimiento del sistema no lineal de 6DOF, en su representación más general, requiere de un gran número de derivadas hidrodinámicas sean conocidas. Sin embargo, el número de parámetros desconocidos puede ser reducido usando las condiciones de simetría del cuerpo.

En general M_A y M_{RB} es muy sencillo verificar los siguientes casos (Notar que $m_{ij} = m_{ji}$):

(i) plano de simetría xy :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 & 0 & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 & 0 & m_{26} \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} & m_{35} & 0 \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} & m_{45} & 0 \\ 0 & 0 & m_{53} & m_{54} & m_{55} & 0 \\ m_{61} & m_{62} & 0 & 0 & 0 & m_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

(ii) plano de simetría xz :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 & m_{15} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & m_{24} & 0 & m_{26} \\ m_{31} & 0 & m_{33} & 0 & m_{35} & 0 \\ 0 & m_{42} & 0 & m_{44} & 0 & m_{46} \\ m_{51} & 0 & m_{53} & 0 & m_{55} & 0 \\ 0 & m_{62} & 0 & m_{64} & 0 & m_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

(iii) plano de simetría yz :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & m_{15} & m_{16} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} & 0 & 0 \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} & 0 & 0 \\ m_{51} & 0 & 0 & 0 & m_{55} & m_{56} \\ m_{61} & 0 & 0 & 0 & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

(iv) plano de simetría xz y yz :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & m_{15} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & m_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{42} & 0 & m_{44} & 0 & 0 \\ m_{51} & 0 & 0 & 0 & m_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

en forma general, el resultado de la matriz de inercia para un cuerpo con planos ij y jk de simetría es formado por la intercepción de $M_{ij \cap jk} = M_{ij} \cap M_{jk}$

(v) plano de simetría xz , yz y xy :

$$M = \text{diag}m_{11}, m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{44}, m_{55}, m_{66} \quad (\text{A.8})$$

A.5. Teorema 1

El equilibrio de un sistema fuzzy es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz positiva definida P tal que:

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{A.9})$$

Es decir, debe existir una matriz P común para todos los subsistemas.

Entonces considerando este teorema se puede analizar la estabilidad del sistema fuzzy de lazo cerrado presentado en la ecuación (3.67).

Si se establece que

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j$$

entonces esta ecuación puede ser expresado como:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{i=1}^l w_i(t) w_i(t) G_{ii} x(t)}{\sum_{i=1}^l \sum_{i=1}^l w_i(t) w_i(t)} + 2 \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{i < j}^l w_i(t) w_j(t) \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} x(t)}{\sum_{i=1}^l \sum_{i < j}^l w_i(t) w_j(t)} \quad (\text{A.10})$$

Luego aplicando la condición de estabilidad en lazo abierto visto anteriormente, se pueden derivar las siguientes condiciones en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P + P G_{ii} &< 0 \\ \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\}^T P + \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} P &\leq 0 \\ i < j \text{ s.t. } w_i(t) \cap w_j(t) &\neq \emptyset \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

El problema de diseño de un modelo de control basado en fuzzy es seleccionar K_j ($j = 1, 2, \dots, l$) el cual satisface las condiciones de estabilidad (A.11). En [9], el problema común de P fue resolver eficientemente vía técnicas de optimización convexa para LMI's (Linear Matrix Inequality). Sin embargo, el control fuzzy no garantiza la estabilidad del sistema en la presencia de parámetros inciertos. Además, el diseño del control de parámetros no es posible para sistemas cuyos parámetros son desconocidos. Para superar esos inconvenientes, un esquema de control adaptativo es desarrollado para la planta cuya estructura es conocida, pero con parámetros desconocidos

Apéndice B

Estados de Convergencia

B.1. Derivación Extendida

Modelo no lineal

$$\dot{\eta}^* = J_{\Theta}(\eta^*)v^* \quad (\text{B.1})$$

$$\dot{v}^* = M^{-1}(-C(v^*)v^* - D(v^*)v^* - g(\eta^*) + \tau^*) \quad (\text{B.2})$$

expandiendo la ecuación (B.1):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos(\psi) \cos(\theta) + v[\cos(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) - \sin(\psi) \cos(\phi)] \\ &\quad + w[\sin(\psi) \sin(\phi) + \cos(\psi) \cos(\phi) \sin(\theta)] \\ \dot{y} &= u \sin(\psi) \cos(\theta) + v[\cos(\psi) \cos(\phi) + \sin(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi)] \\ &\quad + w[\cos(\psi) \cos(\phi) \sin(\theta) - \cos(\psi) \sin(\phi)] \\ \dot{z} &= u \sin(\theta) + v \cos(\theta) \sin(\phi) + w \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \dot{\phi} &= p + q \sin(\phi) \tan(\theta) + r \cos(\phi) \tan(\theta) \\ \dot{\theta} &= q \cos(\phi) - r \sin(\phi) \\ \dot{\psi} &= q \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} + r \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)}, \theta \neq \pm 90 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Ahora expandiendo la ecuación (B.2):

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \left(\frac{1}{m - X_{\dot{u}}} \right) [Z_{\dot{w}}wq + Z_{\dot{q}}q^2 - Y_{\dot{v}}vr - Y_{\dot{v}}r^2 + x_{u|u}|u| + T_{port} + T_{stbd} \\
&\quad - (W - B) \sin \theta + mvr - mwq + mX_G(q^2 + r^2) - mz_G(pr + \dot{q})] \\
\dot{v} &= \left(\frac{1}{m - Y_{\dot{v}}} \right) [Y_{\dot{r}}\dot{r} + X_{\dot{u}}ur - Z_{\dot{q}}pq + y_{v|v}|v| + T_{foreh} + T_{aft_h} \\
&\quad + (W - B) \cos \theta \sin \phi + mpw - mur - mz_G(qr - \dot{p}) - mx_G(qp + \dot{r})] \\
\dot{w} &= \left(\frac{1}{m - Z_{\dot{w}}} \right) [Z_{\dot{q}}\dot{q} - X_{\dot{u}}uq + Y_{\dot{v}}vp + Y_{\dot{r}}rp + z_{w|w}|w| + T_{aft_v} + T_{fore_v} \\
&\quad + (W - B) \cos \theta \cos \phi + mauq - mvp + z_G(p^2 + q^2) - mx_G(rp - \dot{q})] \\
\dot{p} &= \left(\frac{1}{I_{xx} - K_{\dot{p}}} \right) [-(Y_{\dot{v}} - Z_{\dot{w}})vw - (Y_{\dot{r}} + Z_{\dot{q}})wr + (Y_{\dot{r}} + Z_{\dot{q}})vq - (M_{\dot{q}} - N_{\dot{r}})qr \\
&\quad + K_{p|p}|p| + T_{foreh}x_{pforeh} - T_{aft_h}x_{pafth} - (z_GW - z_bB) \cos \theta \sin \phi - (I_{zz} - I_{yy})qr \\
&\quad + mz_G(\dot{v} - wp + ur)] \\
\dot{q} &= \left(\frac{1}{I_{yy} - K_{\dot{q}}} \right) [Z_{\dot{q}}(\dot{w} - uq) - (Z_{\dot{w}} - X_{\dot{u}})wu - Y_{\dot{r}}vp + (K_{\dot{p}} - N_{\dot{r}})rp + M_{q|q}|q| \\
&\quad + M_{w|w}|w| + (T_{port} + T_{stbd})z_p - T_{fore_v}x_{pfore_v} + T_{aft_v}x_{pafth} - (z_GW - z_bB) \sin \theta \\
&\quad - x_G \cos \theta \cos \phi - (I_{xx} - I_{zz})rp - m(z_G(\dot{u} - vr + wq) - x_G(\dot{w} - uq + vp))] \\
\dot{r} &= \left(\frac{1}{I_{zz} - K_{\dot{r}}} \right) [Y_{\dot{r}}\dot{v} - (X_{\dot{u}} - Y_{\dot{v}})uv + Y_{\dot{r}}ur + Z_{\dot{q}}wp - (K_{\dot{p}} - M_{\dot{q}})pq + N_{r|r}|r| \\
&\quad + N_{v|v}|v| - T_{stbd}y_p + T_{port}y_p + T_{foreh}x_{pforeh} - T_{aft_h}x_{pafth} \\
&\quad + x_G(W - B) \cos \theta \sin \phi - (I_{yy} - I_{xx})pq - mx_G(\dot{v} - wp + ur)]
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Para establecer los puntos de convergencia, se tiene que cumplir

$$\dot{\eta}^* = 0$$

$$\dot{v}^* = 0$$

entonces las ecuaciones (B.1) y (B.2) :

$$0 = J_{\Theta}(\eta^*)v^* \tag{B.5}$$

$$0 = M^{-1}(-C(v^*)v^* - D(v^*)v^* - g(\eta^*) + \tau^*) \tag{B.6}$$

Considerando $\nu^* \approx 0$ y:

$$\eta^* = \begin{bmatrix} x^* = \text{CualquierValor} \\ y^* = \text{CualquierValor} \\ z^* = \text{CualquierValor} \\ \phi^* \approx 0 \\ \theta^* \approx 0 \\ \psi^* \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

para las variables $\phi, \theta \approx 0$ las funciones de seno y coseno se pueden aproximar a: $\sin(\phi) = \phi$, $\cos(\phi) = 1$, $\sin(\theta) = \theta$, $\cos(\theta) = 1$. Esto reduce las ecuaciones como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= u \cos(\psi) + v[\cos(\psi)\theta\phi - \sin(\psi)] + w[\sin(\psi)\phi + \cos(\psi)\theta] \\ 0 &= u \sin(\psi) + v[\cos(\psi) + \sin(\psi)\theta\phi] + w[\cos(\psi)\theta - \cos(\psi)\phi] \\ 0 &= u\theta + v\phi + w \\ 0 &= p + q\phi\theta + r\theta \\ 0 &= q - r\phi \\ 0 &= q\phi + r \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Ahora, el producto de dos términos que son próximos a cero, entonces el resultado será aún más próximo a cero, por lo cual este término ya no se considera.

$$\begin{aligned} 0 &= u \cos(\psi) + v[\cancel{\cos(\psi)\theta\phi} - \sin(\psi)] + [\cancel{\sin(\psi)\phi} + \cos(\psi)\theta] \\ 0 &= u \sin(\psi) + v[\cos(\psi) + \cancel{\sin(\psi)\theta\phi}] + [\cos(\psi)\theta - \cancel{\cos(\psi)\phi}] \\ 0 &= \cancel{u\theta} + v\phi + w \\ 0 &= p + q\cancel{\phi\theta} + r\theta \\ 0 &= q - r\cancel{\phi} \\ 0 &= q\cancel{\phi} + r \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Entonces reduciendo

$$\begin{aligned} 0 &= u^* \cos(\psi^*) - v^* \sin(\psi^*) \\ 0 &= u^* \sin(\psi^*) + v^* \cos(\psi^*) \\ 0 &= w^* \\ 0 &= p^* \\ 0 &= q^* \\ 0 &= r^* \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Aplicando el mismo principio en la ecuación (B.6):

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{m - X_{\dot{u}}} \right) [Z_{\dot{w}} w q + Z_{\dot{q}} q^2 - Y_{\dot{v}} v r - Y_{\dot{v}} v^2 + x_{u|u} |u| |u| + T_{port} + T_{stbd} \\
&\quad - (W - B) \sin \theta + m v r - m w q + m X_G (q^2 + r^2) - m z_G (p r + q)] \\
0 &= \left(\frac{1}{m - Y_{\dot{v}}} \right) [Y_{\dot{r}} r + X_{\dot{u}} u r - Z_{\dot{q}} p q + y_{v|v} |v| |v| + T_{foreh} + T_{aft_h} \\
&\quad + (W - B) \cos \theta \sin \phi + m p w - m u r - m z_G (q r - p) - m x_G (q p + r)] \\
0 &= \left(\frac{1}{m - Z_{\dot{w}}} \right) [Z_{\dot{q}} q - X_{\dot{u}} u q + Y_{\dot{v}} v p + Y_{\dot{r}} r p + z_{w|w} |w| |w| + T_{aft} + T_{fore} \\
&\quad + (W - B) \cos \theta \cos \phi + m u q - m v p + z_G (p^2 + q^2) - m x_G (r p - q)] \\
0 &= \left(\frac{1}{I_{xx} - K_{\dot{p}}} \right) [-(Y_{\dot{v}} - Z_{\dot{w}}) v w - (Y_{\dot{r}} + Z_{\dot{q}}) w r + (Y_{\dot{r}} + Z_{\dot{q}}) v q - (M_{\dot{q}} - N_{\dot{r}}) q r \\
&\quad + K_{p|p} |p| |p| + T_{foreh} x_{pforeh} - T_{aft_h} x_{pafth} - (z_G W - z_b B) \cos \theta \sin \phi - (I_{zz} - I_{yy}) q r \\
&\quad + m z_G (\dot{v} - w p + u r)] \\
0 &= \left(\frac{1}{I_{yy} - K_{\dot{q}}} \right) [Z_{\dot{q}} (v - u q) - (Z_{\dot{w}} - X_{\dot{u}}) w r - Y_{\dot{r}} v p + (K_{\dot{p}} - N_{\dot{r}}) r p + M_{q|q} |q| |q| \\
&\quad + M_{w|w} |w| |w| + (T_{port} + T_{stbd}) z_p - T_{forev} x_{pforev} + T_{aft_v} x_{pafth} - (z_G W - z_b B) \sin \theta \\
&\quad - x_G \cos \theta \cos \phi - (I_{xx} - I_{zz}) r p - m (z_G (\dot{u} - v r + w q) - x_G (\dot{w} - u q + v p))] \\
0 &= \left(\frac{1}{I_{zz} - K_{\dot{r}}} \right) [Y_{\dot{r}} v - (X_{\dot{u}} - Y_{\dot{v}}) u w + Y_{\dot{r}} u r + Z_{\dot{q}} w p - (K_{\dot{p}} - M_{\dot{q}}) p q + N_{r|r} |r| |r| \\
&\quad + N_{v|v} |v| |v| - T_{stbd} y_p + T_{port} y_p + T_{foreh} x_{pforeh} - T_{aft_h} x_{pafth} \\
&\quad + x_G (W - B) \cos \theta \sin \phi - (I_{yy} - I_{xx}) p q - m x_G (\dot{v} - w p + u r)]
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Luego de simplificar:

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = \left(\frac{1}{I_{xx} - K_{\dot{p}}} \right) [-(z_G W - z_b B) \cos \theta \sin \phi] \tag{B.12}$$

$$0 = \left(\frac{1}{I_{yy} - K_{\dot{q}}} \right) [-(z_G W - z_b B) \sin \theta]$$

$$0 = 0$$

aproximando las funciones de seno y coseno

$$\begin{aligned}
 0 &= 0 \\
 0 &= 0 \\
 0 &= 0 \\
 0 &= \left(\frac{1}{I_{xx} - K_{\dot{p}}} \right) [-(z_G W - z_b B) \phi^*] \\
 0 &= \left(\frac{1}{I_{yy} - K_{\dot{q}}} \right) [-(z_G W - z_b B) \theta^*] \\
 0 &= 0
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

uniendo las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 0 &= u^* \cos(\psi^*) - v^* \sin(\psi^*) \\
 0 &= u^* \sin(\psi^*) + v^* \cos(\psi^*) \\
 0 &= w^* \\
 0 &= p^* \\
 0 &= q^* \\
 0 &= r^* \\
 0 &= 0 \\
 0 &= 0 \\
 0 &= 0 \\
 0 &= \left(\frac{1}{I_{xx} - K_{\dot{p}}} \right) [-(z_G W - z_b B) \phi^*] \\
 0 &= \left(\frac{1}{I_{yy} - K_{\dot{q}}} \right) [-(z_G W - z_b B) \theta^*] \\
 0 &= 0
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

De las dos primeras ecuaciones con respecto a u se tiene:

$$u^* = v^* \frac{\sin(\psi^*)}{\cos(\psi^*)} \quad u^* = -v^* \frac{\cos(\psi^*)}{\sin(\psi^*)} \tag{B.15}$$

de igual manera:

$$v^* = u^* \frac{\cos(\psi^*)}{\sin(\psi^*)} \quad v^* = -u^* \frac{\sin(\psi^*)}{\cos(\psi^*)} \tag{B.16}$$

Y las posibles combinaciones teniendo en cuenta las ecuaciones (B.15) y (B.16) para los estados de convergencia son:

$$[\eta^*, \nu^*] = [x^*, y^*, z^*, 0, 0, \psi^*, u^* = v^* \frac{\sin(\psi^*)}{\cos(\psi^*)}, v^* = u^* \frac{\cos(\psi^*)}{\sin(\psi^*)}, 0, 0, 0, 0]^T \quad (\text{B.17})$$

$$[\eta^*, \nu^*] = [x^*, y^*, z^*, 0, 0, \psi^*, u^* = -v^* \frac{\cos(\psi^*)}{\sin(\psi^*)}, v^* = -u^* \frac{\sin(\psi^*)}{\cos(\psi^*)}, 0, 0, 0, 0]^T \quad (\text{B.18})$$

$$[\eta^*, \nu^*] = [x^*, y^*, z^*, 0, 0, \psi^*, u^* = v^* \frac{\sin(\psi^*)}{\cos(\psi^*)}, v^* = -u^* \frac{\sin(\psi^*)}{\cos(\psi^*)}, 0, 0, 0, 0]^T \quad (\text{B.19})$$

$$[\eta^*, \nu^*] = [x^*, y^*, z^*, 0, 0, \psi^*, u^* = -v^* \frac{\cos(\psi^*)}{\sin(\psi^*)}, v^* = u^* \frac{\cos(\psi^*)}{\sin(\psi^*)}, 0, 0, 0, 0]^T \quad (\text{B.20})$$

Ahora, las funciones trigonométricas de seno y coseno están restringidas a $\sin(\psi^*) \neq 0$ y $\cos(\psi^*) \neq 0$, por lo tanto, para valores:

$$\psi^* = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \pm3\pi/2, ..$$

las dos primeras ecuaciones (B.17) y (B.18) siempre tendrán valores indeterminados para cualquier valor de ψ^* , por lo cual solo se considera las dos últimas ecuaciones (B.19) y (B.20). Entonces las funciones seno y coseno están restringidas a:

$$\sin(\psi^*) = \sin(2k + 1)(\pi/2), \quad k = 0, 1, 2, ..$$

$$\cos(\psi^*) = \cos(k\pi), \quad k = 0, 1, 2, ..$$

entonces, la variable de convergencia ψ^* puede tomar los siguientes valores en seno:

$$\psi^* = 0, \pm\pi/2, \pm3\pi/2, .. \quad (\text{B.21})$$

y tomar los siguientes valores en coseno:

$$\psi^* = 0, \pm\pi, \pm2\pi, .. \quad (\text{B.22})$$

Ahora tomando los valores de ψ^* en (B.21) y la ecuación (B.20) se tiene:

$$[\eta^*, \nu^*] = [x^*, y^*, z^*, 0, 0, \pi/2, u^* = -v^* \cos(\pi/2), v^* = u^* \cos(\pi/2), 0, 0, 0, 0]^T \quad (\text{B.23})$$

$$[\eta^*, \nu^*] = [x^*, y^*, z^*, 0, 0, -\pi/2, u^* = -v^* \cos(-\pi/2), v^* = u^* \cos(-\pi/2), 0, 0, 0, 0]^T \quad (\text{B.24})$$

Ahora tomando los valores de ψ^* en (B.22) y la ecuación (B.19) se tiene:

$$[\eta^*, \nu^*] = [x^*, y^*, z^*, 0, 0, 0, u^* = -v^* \cos(0), v^* = u^* \cos(0), 0, 0, 0, 0]^T \quad (\text{B.25})$$

$$[\eta^*, \nu^*] = [x^*, y^*, z^*, 0, 0, \pi, u^* = -v^* \cos(\pi), v^* = u^* \cos(\pi), 0, 0, 0, 0]^T \quad (\text{B.26})$$

ordenando:

$$\begin{aligned} [\eta^*, \nu^*] &= [x^*, y^*, z^*, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ [\eta^*, \nu^*] &= [x^*, y^*, z^*, 0, 0, \pi/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ [\eta^*, \nu^*] &= [x^*, y^*, z^*, 0, 0, -\pi/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ [\eta^*, \nu^*] &= [x^*, y^*, z^*, 0, 0, \pi, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Apéndice C

Lyapunov

C.1. Derivación de la ley de control adaptativo

Modelo no lineal basado en T-S

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} x + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} r \\ & + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) B_i (K_j^* x - L_j^* r + u)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \end{aligned} \quad (C.1)$$

Modelo de referencia basado en T-S

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_m = & \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \hat{x}_m + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} r \\ & + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) B_i (K_j(t) x - L_j(t) r + u)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \end{aligned} \quad (C.2)$$

Error de seguimiento es establecido como $e \cong x - x_m$, entonces derivando:

$$\dot{e} = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) B_i (-\tilde{K}_j x + \tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \quad (C.3)$$

Considerando que $B_i = (B_m)_{ij} L_j^{*-1}$, entonces la ecuación de la Dinámica del error de seguimiento queda como:

$$\dot{e} = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} L_j^{*-1} (-\tilde{K}_j x + \tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \quad (C.4)$$

Función de Lyapunov propuesta:

$$V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = e^T P e + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \tilde{K}_j + \tilde{L}_j^T \Gamma_j \tilde{L}_j) \quad (C.5)$$

Derivando:

$$V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + d \left[\sum_{i=1}^l \text{tr}(\dot{\tilde{K}}_j^T \Gamma_j \tilde{K}_j + \tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j) \right] \quad (C.6)$$

La traza es un operador lineal por lo que conmuta con la derivada:

$$V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \sum_{i=1}^l \text{tr}[d(\dot{\tilde{K}}_j^T \Gamma_j \tilde{K}_j + \tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j)] \quad (C.7)$$

Evaluando la derivada dentro de los corchetes:

$$V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\dot{\tilde{K}}_j^T \Gamma_j \tilde{K}_j + \tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j + \dot{\tilde{L}}_j^T \Gamma_j \tilde{L}_j + \tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j) \quad (C.8)$$

Debido a que la traza es un mapeo lineal se aplica:

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$\begin{aligned} V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\dot{\tilde{K}}_j^T \Gamma_j \tilde{K}_j) + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j) \\ &+ \sum_{i=1}^l \text{tr}(\dot{\tilde{L}}_j^T \Gamma_j \tilde{L}_j) + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

considerando $\Gamma_j = \Gamma_j^T$, entonces:

$$\begin{aligned} V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\dot{\tilde{K}}_j^T \Gamma_j^T \tilde{K}_j) + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j) \\ &+ \sum_{i=1}^l \text{tr}(\dot{\tilde{L}}_j^T \Gamma_j^T \tilde{L}_j) + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Ahora aplicando la propiedad $(AB)^T = B^T A^T$

$$\begin{aligned} V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \sum_{i=1}^l \text{tr}((\Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j)^T \tilde{K}_j) + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j) \\ &+ \sum_{i=1}^l \text{tr}((\Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j)^T \tilde{L}_j) + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

si A y B son matrices $\mathbb{R}^{m \times n}$ entonces se cumple:

$$\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(B^T A) \quad (\text{C.12})$$

entonces:

$$\begin{aligned} V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T (\Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j)) + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j) \\ &+ \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T (\Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j)) + \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j) + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j) \quad (\text{C.14})$$

Reemplazando términos de \dot{e} por la ecuación C.4:

$$\begin{aligned}
 V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = & \left[\begin{array}{c} \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e \\ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} L_j^{*-1} (-\tilde{K}_j x + \tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \end{array} \right]^T P e \\
 & + e^T P \left[\begin{array}{c} \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e \\ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} L_j^{*-1} (-\tilde{K}_j x + \tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \end{array} \right] \\
 & + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j) + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j)
 \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Ahora se aplica la propiedad de producto de matriz transpuesta:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

y se evalúa la condición de igualdad entre la matriz B del sistema no lineal y la matriz B_m del modelo de referencia:

$$B_i = (B_m)_{ij} L_j^{*-1} = (B_m)_{ij} \Gamma_j \text{sn}g(l_j)$$

Ahora tomando la transpuesta en ambos lados:

$$B_i^T = ((B_m)_{ij} L_j^{*-1})^T = \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T \text{sn}g(l_j)$$

reemplazando los valores hallados anteriormente:

$$\begin{aligned}
 V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = & \\
 & \left[\begin{aligned} & e^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (A_m)_{ij}^T}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \\ & + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (-x^T \tilde{K}_j^T + r^T \tilde{L}_j^T) ((B_m)_{ij} L_j^{*-1})^T}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \end{aligned} \right] Pe \\
 & + e^T P \left[\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e \\ & + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} L_j^{*-1} (-\tilde{K}_j x + \tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \end{aligned} \right] \\
 & + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j) + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j)
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

Se identifica los primeros términos de los corchetes los cuales contienen las matrices A_m y se agrupan como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = & \\
& e^T \left[\frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (A_m)_{ij}^T P}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) P (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \right] e \\
& + \left[\frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (-x^T \tilde{K}_j^T + r^T \tilde{L}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T \text{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} - P e \right. \\
& \left. + e^T P \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} \Gamma_j \text{sgn}(l_j) (-\tilde{K}_j x + \tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \right] \\
& + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j) + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j)
\end{aligned} \tag{C.17}$$

entonces se puede hacer uso de la ecuación de Lyapunov:

$$A^T P + P A = -Q$$

Para establecer la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (A_m)_{ij}^T P}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) P (A_m)_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} = \\
& \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (-Q_{ij})}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)}
\end{aligned} \tag{C.18}$$

por lo tanto, reemplazando la identidad anterior, la ecuación se puede arreglar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = & -e^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) Q_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e \\
& + \left[\frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (-x^T \tilde{K}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T \text{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e \right. \\
& + \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (r^T \tilde{L}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T \text{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e \\
& + e^T P \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} \Gamma_j \text{sgn}(l_j) (-\tilde{K}_j x)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \\
& \left. + e^T P \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} \Gamma_j \text{sgn}(l_j) (\tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \right] \\
& + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \tilde{K}_j) + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \tilde{L}_j)
\end{aligned} \tag{C.19}$$

$$\begin{aligned}
V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = & -e^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) Q_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e \\
& - \left[\frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (x^T \tilde{K}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T \text{sng}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e \right. \\
& \left. + e^T P \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} \Gamma_j \text{sng}(l_j) (\tilde{K}_j x)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \right] \\
& + \left[\frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (r^T \tilde{L}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T \text{sng}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e \right. \\
& \left. + e^T P \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} \Gamma_j \text{sng}(l_j) (\tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \right] \\
& + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j) + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j)
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Considerando $P = P^T$. Además, si $A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ entonces se puede aplicar la propiedad:

$$AB = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = \text{tr}(A^T B^T) = \text{tr}(B^T A^T)$$

Analizando las dimensiones para verificar el correcto uso de la propiedad anterior teniendo en cuenta que el término $\text{sng}(l_j)$ es una constante. Se toma el primer término que se encuentra entre las llaves de la ecuación de la siguiente manera:

$$\left[\underbrace{\left(\underbrace{x^T}_{[1 \times n]} \underbrace{\tilde{K}_j^T}_{[n \times q]} \right) \underbrace{\Gamma_j^T}_{[q \times q]} \underbrace{(B_m)_{ij}^T}_{[q \times n]} \underbrace{P}_{[n \times n]} \underbrace{e}_{[n \times 1]} \right]_{[n \times 1]} \quad (C.21)$$

De una manera similar se aplica para el resto de los términos, con lo cual la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = & -e^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) Q_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e \\ & - \left[\text{tr} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (x^T \tilde{K}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T \text{sng}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e \right\} \right] \\ & + \left[\text{tr} \left\{ e^T P^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} \Gamma_j \text{sng}(l_j) (\tilde{K}_j x)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \right\} \right] \\ & + \left[\text{tr} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (r^T \tilde{L}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T \text{sng}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e \right\} \right] \\ & + \left[\text{tr} \left\{ e^T P^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} \Gamma_j \text{sng}(l_j) (\tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \right\} \right] \\ & + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j) + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j) \end{aligned} \quad (C.22)$$

De la misma forma que en casos anteriores se puede aplicar la propiedad

$$(AB)^T = B^T A^T$$

y obtener el siguiente arreglo:

$$\begin{aligned}
 V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = & -e^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) Q_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e \\
 & - \left[\text{tr} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (x^T \tilde{K}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T \text{sng}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e \right\} \right. \\
 & + \text{tr} \left\{ (P e)^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} \Gamma_j \text{sng}(l_j) (\tilde{K}_j x)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \right\} \\
 & + \left[\text{tr} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (r^T \tilde{L}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T \text{sng}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e \right\} \right. \\
 & + \left. \text{tr} \left\{ (P e)^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij} \Gamma_j \text{sng}(l_j) (\tilde{L}_j r)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} \right\} \right] \\
 & + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j) + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j)
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

Nuevamente se hace uso de la propiedad de la traza:

$$\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(B^T A)$$

y de esta forma obtener:

$$\begin{aligned}
V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = & -e^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) Q_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e \\
& - \left[\text{tr} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (x^T \tilde{K}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T \text{sng}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e \right\} \right. \\
& + \left. \text{tr} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) [(B_m)_{ij} \Gamma_j \text{sng}(l_j) (\tilde{K}_j x)]^T}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} ((P e)^T)^T \right\} \right] \\
& + \left[\text{tr} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (r^T \tilde{L}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T \text{sng}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e \right\} \right. \\
& + \left. \text{tr} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) [(B_m)_{ij} \Gamma_j \text{sng}(l_j) (\tilde{L}_j r)]^T}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} ((P e)^T)^T \right\} \right] \\
& + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \tilde{K}_j) + 2 \sum_{i=1}^l \text{tr}(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \tilde{L}_j)
\end{aligned} \tag{C.24}$$

Desarrollando las transpuestas en el segundo y cuarto termino que se encuentran dentro del corchete y agrupando términos similares:

$$\begin{aligned}
V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = & -e^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) Q_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e \\
& - 2tr \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (x^T \tilde{K}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T sng(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} Pe \right\} \\
& + 2tr \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (r^T \tilde{L}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T sng(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} Pe \right\} \\
& + 2 \sum_{i=1}^l tr(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j) + 2 \sum_{i=1}^l tr(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j)
\end{aligned} \tag{C.25}$$

aplicando la propiedad cíclica: $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$

$$\begin{aligned}
V(e, \tilde{K}_j, \tilde{L}_j) = & -e^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) Q_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e + 2 \sum_{i=1}^l tr(\tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j) + 2 \sum_{i=1}^l tr(\tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j) \\
& - 2tr \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (\tilde{K}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T sng(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} Pe x^T \right\} \\
& + 2tr \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (\tilde{L}_j^T) \Gamma_j^T (B_m)_{ij}^T sng(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} Pe r^T \right\}
\end{aligned} \tag{C.26}$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -e^T \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) Q_{ij}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} e \\
& + 2tr \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) \tilde{K}_j^T \Gamma_j (B_m)_{ij}^T \text{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e x^T + \sum_{j=1}^l \tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j \right\} \\
& + 2tr \left\{ \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) \tilde{L}_j^T \Gamma_j (B_m)_{ij}^T \text{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e r^T + \sum_{j=1}^l \tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j \right\}
\end{aligned} \tag{C.27}$$

para asegurar que \dot{V} sea negativo, se considera que los dos últimos términos desaparecen, con esto se obtienen las siguientes igualdades:

$$\sum_{j=1}^l \tilde{K}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{K}}_j = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) \tilde{K}_j^T \Gamma_j (B_m)_{ij}^T \text{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e x^T \tag{C.28}$$

$$\sum_{j=1}^l \tilde{L}_j^T \Gamma_j \dot{\tilde{L}}_j = - \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) \tilde{L}_j^T \Gamma_j (B_m)_{ij}^T \text{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e r^T \tag{C.29}$$

Luego de realizar las simplificaciones realizadas en la ecuación anterior se obtiene la ley adaptativa:

$$\dot{\tilde{K}}_j = \dot{K}_j(t) = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij}^T \text{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e x^T \quad (\text{C.30})$$

$$\dot{\tilde{L}}_j = \dot{L}_j(t) = - \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x) (B_m)_{ij}^T \text{sgn}(l_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(x) \mu_j(x)} P e r^T \quad (\text{C.31})$$

