

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



Foliaciones algebraicas unidimensionales determinadas
únicamente por sus singularidades

Tesis para optar el grado académico de Maestra en Matemáticas que
presenta:

Graciela Del Pilar Burgos Namuche

Asesor:

Dr. Percy Braulio Fernández Sánchez

Lima, 2024

Informe de Similitud


Yo, Percy Braulio Fernández Sánchez, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor del trabajo de tesis titulado

Foliaciones algebraicas unidimensionales determinadas únicamente por sus singularidades

de la autora Graciela del Pilar Burgos Namuche, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 5%, con ninguna referencia individual que supere el 1%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 31/01/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la tesis no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: Lima, 19 de febrero del 2024.

Apellidos y nombres del asesor: Fernández Sánchez, Percy Braulio	
DNI: 21859700	Firma 
ORCID: 0000-0002-9404-9184	



A Dios, por darme la sabiduría para culminar mi tesis. A mis padres por inculcar en mi ejemplo de esfuerzo y valentía. A mis hermanas por su cariño y apoyo incondicional.

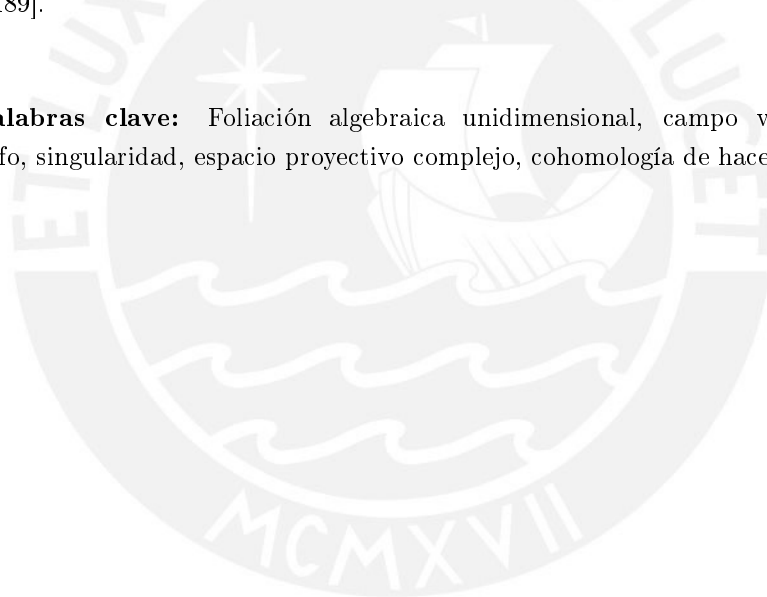
Agradecimientos

- A Dios, por darme la inteligencia, el valor y la fortaleza para poder culminar satisfactoriamente mi tesis.
- A mi asesor, el Dr. Percy Fernández, por su dedicación y apoyo invaluable durante la ejecución de mi tesis. Su experiencia y orientación fueron fundamentales para concluir con éxito este trabajo de investigación.
- A mis padres Ismael y Silvia, por enseñarme a perseguir mis metas y nunca rendirme frente a las adversidades.
- A mis hermanas Maribel, Roxana y Marcela, por su cariño y apoyo incondicional que siempre me brindaron.
- A mis sobrinos. Gabriel, Sebastián, María Ximena e Ismael y a mis cuñados: Manuel, Juan Carlos y José por su cariño incondicional a mi persona y animarme a seguir adelante.
- A los doctores Liliana Puchuri y Hernán Neciosup, por su disponibilidad en revisar mi tesis a detalle, por sus observaciones y valiosos aportes que sirvieron para mejorar y culminar esta tesis.
- A mis profesores de la maestría en matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por impartir sus enseñanzas y conocimientos en mi crecimiento académico y profesional.
- A la Pontificia Universidad Católica del Perú, por otorgarme beca de estudios en la maestría de matemáticas, mediante el convenio de otorgamiento de beca de la Red Peruana de Universidades.
- A la Universidad Nacional de Piura, por darme licencia laboral para realizar mis estudios de maestría en matemática en la Pontificia Universidad Católica del Perú.
- A mis colegas y amigos Felipe Malaver Lavado, Martín Reyes Reyes y Andrés Castillo Moscol, docentes del departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Piura, quienes me incentivaron a que siga mis estudios de maestría en matemática y cubrieron mi carga académica durante mi licencia laboral.
- A mis amigos Marlenny Rojas, Diana Fernández, Yosmar Lizano, Claudia Ruiz y Mario Ramos por brindarme su apoyo, confianza y ánimo a no rendirme durante la elaboración de mi tesis.

Resumen

Una foliación algebraica unidimensional \mathcal{F}_α es aquella que es generada por un campo vectorial meromorfo $\alpha \in H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}(1-d))$, donde $d > 1$ sobre el espacio proyectivo complejo \mathbb{P}^n . En este trabajo estudiaremos cómo determinar las foliaciones holomorfas unidimensionales mediante sus singularidades usando la cohomología de haces asociadas a las foliaciones holomorfas. El trabajo está basado en la investigación desarrollada por Xavier Gómez-Mont y George Kempf en [GMK89].

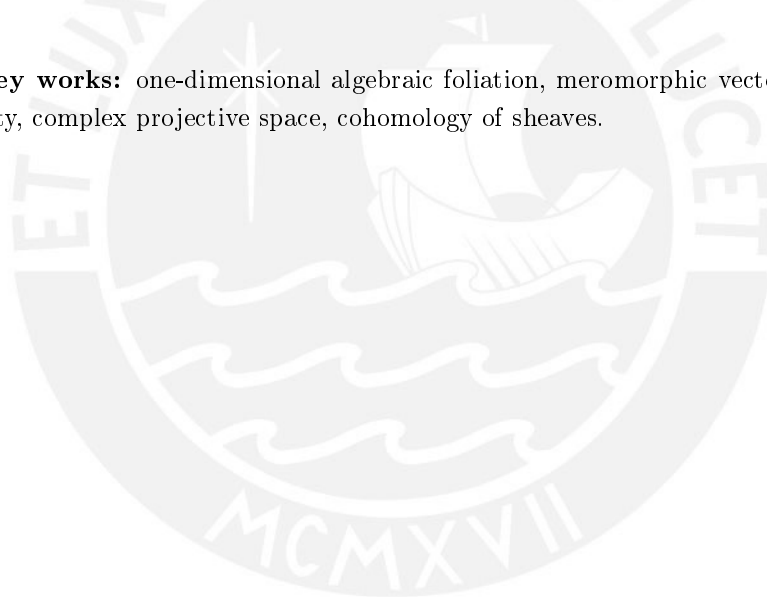
Palabras clave: Foliación algebraica unidimensional, campo vectorial meromorfo, singularidad, espacio proyectivo complejo, cohomología de haces.



Abstract

A one-dimensional algebraic foliation \mathcal{F}_α is generated by a meromorphic vector field $\alpha \in H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}(1-d))$, where $d > 1$ on the complex projective space \mathbb{P}^n . In this work we will study how to determine one-dimensional holomorphic foliations through their singularities using the cohomology of sheaves associated with holomorphic foliations. This work is based on the research developed by Xavier Gómez-Mont and George Kempf in [GMK89].

Key words: one-dimensional algebraic foliation, meromorphic vector field, singularity, complex projective space, cohomology of sheaves.



Índice general

Introducción	1
1 Preliminares	3
1.1 Funciones analíticas en varias variables	3
1.2 Gérmenes de funciones holomorfas	7
1.3 Extensión analítica	10
1.4 Foliaciones	13
1.5 Foliación singular	17
1.5.1 Singularidades de campos vectoriales holomorfos	17
1.6 Foliaciones en el espacio proyectivo	20
1.6.1 Dos formas de determinar foliaciones en el espacio \mathbb{P}^n	22
1.6.2 Interpretación geométrica del grado de una foliación	24
2 Fibrados vectoriales	32
2.1 Fibrados vectoriales	32
2.2 Las secciones de un fibrado	40
2.2.1 Relaciones fundamentales de las secciones de un fibrado	40
2.3 Fibrados asociados a divisores	43
2.4 Relaciones de divisores con fibrados lineales	55
2.5 Operaciones con fibrados vectoriales	58
2.5.1 $\mathbf{E} \oplus \mathbf{F}$, suma de fibrados	58
2.5.2 \mathbf{E}^* , el dual de un fibrado vectorial \mathbf{E}	58
2.5.3 $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$, producto tensorial de fibrados	59
2.5.4 $\Lambda^k E$, producto exterior del fibrado E	60
2.6 Subfibrados y fibrados cocientes	61
2.6.1 Secuencia de Euler	62
2.7 Fibrados asociados a una foliación	66
3 Haces y Cohomología	71
3.1 Haces	71
3.1.1 El tallo de un prehaz	75
3.2 Cohomología de haces	78
3.2.1 Cocadenas, cociclos, cobordes	78
3.2.2 Grupo de cohomología $H^q(X, \mathcal{S})$	80
3.3 La secuencia de cohomología exacta	81

3.3.1	El núcleo de un homomorfismo de haz	82
3.3.2	Secuencias exactas	82
3.3.3	Homomorfismos inducidos por homomorfismos de haces	84
3.3.4	El homomorfismo de conexión	84
3.4	Cohomología del espacio proyectivo	85
3.4.1	Fibrados de líneas sobre el espacio proyectivo	93
4	El teorema de Gómez-Mont y Kempf	95
4.1	Secuencia regular	95
4.2	Complejo de Koszul	97
4.3	Campos vectoriales meromorfos en \mathbb{P}^n	104
	Bibliografía	112



Índice de figuras

1.1	El cono tangente a \mathcal{C} en O	9
1.2	Flujo tubular	14
1.3	Cambio de coordenadas $f_j^{-1} \circ f_i$	14
1.4	Cadena de placas uniendo p con q	15
1.5	Hoja H subvariedad inmersa en M	16
1.6	Hoja de la Foliación $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega^{m-1}$	16
1.7	$[(x_0, x_1, x_2)]$ y $[(y_0, y_1, y_2)]$ representan la misma recta	20
1.8	Cambios de coordenadas del plano proyectivo	22
1.9	Puntos tangentes de la foliación \mathcal{F} con la recta L	25
1.10	Foliación \mathcal{F} con grado cero.	26
2.1	Órbitas del campo vectorial X	33
2.2	Órbitas del campo vectorial X_1 en el plano st	33
2.3	Órbitas del campo vectorial X_2 en el plano uv	34
2.4	Bosquejo del Plano proyectivo \mathbb{P}^2	34
2.5	η_0, η_1 y η_2 formas diferenciales en el plano proyectivo \mathbb{P}^2	36
2.6	Bosquejo del fibrado vectorial trivial	36
2.7	Isomorfismo lineal $F_k^{-1} F_j$	37
2.8	Coordenadas de un fibrado lineal	38
2.9	Fibras en el plano proyectivo	38
2.10	Fibrado hiperplano proyectivo	42
2.11	Los ceros de una función constante $f_q = 1$ es vacío.	43
2.12	El conjunto analítico $V : e^z - 1 = 0$	44
2.13	Bosquejo del conjunto analítico V en \mathbb{P}^2	45
2.14	El conjunto analítico $V : y^2 - x^3 = 0$	45
2.15	El conjunto $U_p = (\mathbb{C} - \{0\}) \times \mathbb{C}$ en \mathbb{C}^2	45
2.16	El conjunto $U_q = \mathbb{C} \times (\mathbb{C} - \{0\})$ en \mathbb{C}^2	46
2.17	El Conjunto analítico V y la bola abierta $U_o = B(0, r)$ en \mathbb{C}^2	46
2.18	Cubrimiento $\{U_j\}$ del conjunto analítico V	47
2.19	Conjunto analítico $V : xy = 0$ reducible en \mathbb{C}^2	48
2.20	Conjunto analítico $V : x^2 - y^2 - x^3 = 0$ irreducible en \mathbb{C}^2	48
2.21	V_p vecindad de p contenida en la variedad M	50
2.22	Las funciones definidoras v_p, v_q y v_o de f , en p, q y o	51
2.23	El punto $p \in (V_2 \cap V_5)$	52
2.24	Localmente, $z = 1, V_1 : y^2 = x^3$ y $V_2 : y = x^2$	54

2.25	Conjuntos analíticos: $V_1 : x + y = 0$, $V_2 : x_2 = 0$, $V_3 : x = y$ y $V_4 : x = 0$	55
2.26	Órbitas del campo E en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ y la proyección de E en el plano tangente $T_p\mathbb{P}^n$	66
3.1	Homomorfismos de restricción	72
3.2	El Tallo \mathcal{S}_a del prehaz \mathcal{S} en el punto $a \in X$	76
4.1	$f_1 = x$, $f_2 = y$ es una secuencia regular	96
4.2	La secuencia $f_1 = y - x^2$, $f_2 = x - y^2$ regular.	97



Introducción

Las primeras investigaciones de las foliaciones holomorfas o algebraicas sobre espacios proyectivos se remontan a fines del siglo XIX, primero con las investigaciones realizadas por Darboux [Dar78] sobre el número de singularidades de una foliación sobre el plano proyectivo y luego con el estudio de Poincaré [Poi91], [Poi97] de las condiciones de integrabilidad de las foliaciones.

Estas investigaciones han venido desarrollándose y ha tenido picos en su evolución con las investigaciones de [Ily68] desde el punto de vista dinámico, Jouanolou [Jou77] mediante el uso de la Geometría Algebraica, Mendes, Brunella y McQuillan [Men00], [Bru00], [McQ01] desde el punto de vista de Kodaira. A partir de estos resultados se han generado muchos avances importantes en el estudio de las foliaciones holomorfas y la Geometría Algebraica.

Dentro de estos importantes avances debemos mencionar lo desarrollado por Kempf y Gómez-Mont [GMK89]. Ellos mediante técnicas de Geometría Algebraica muestran que es posible determinar las foliaciones a partir de sus singularidades.

El objetivo de este trabajo es estudiar como determinar las foliaciones holomorfas unidimensionales en el espacio proyectivo mediante singularidades. Para ello usaremos la cohomología de haces asociadas a las foliaciones holomorfas.

Este trabajo de tesis está dividido con cuatro capítulos.

En el capítulo 1, presentamos definiciones y resultados importantes sobre funciones analíticas en varias variables, gérmenes de funciones holomorfas, extensión analítica, foliaciones singulares y foliaciones en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n que son utilizados en el desarrollo de la tesis.

En el capítulo 2, estudiamos los fibrados vectoriales, operaciones entre ellos y las relaciones entre los fibrados lineales con los divisores. También estudiamos los fibrados lineales asociados a las foliaciones de dimensión uno en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n . Finalmente estudiamos la secuencia exacta corta de Euler.

En el capítulo 3, desarrollamos un estudio de los haces y su cohomología. En la última sección estudiamos la cohomología, sobre el espacio proyectivo, del haz determinado por las secciones de los fibrados lineales, estos fibrados lineales están determinados por el fibrado tautológico.

En el capítulo 4, estudiamos el complejo de Koszul y demostramos que si dos campos vectoriales $\alpha, \alpha' \in H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}(1-d))$, donde $d > 1$, generan dos foliaciones $\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_{\alpha'}$ con singularidades no degeneradas tal que si las singularidades de las foliaciones $\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_{\alpha'}$ son iguales, entonces los campos vectoriales holomorfos determinan la misma foliación (Teorema de Gómez-Mont, Kempf). Finalizamos este

capítulo dando ejemplos y contraejemplos para este teorema.

Graciela del Pilar Burgos Namuche
Lima, Perú.
2024



Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos las principales definiciones, teoremas sobre funciones analíticas en varias variables, gérmenes de funciones holomorfas, extensión analítica, foliaciones, foliaciones singulares y foliaciones en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n necesarios para los capítulos posteriores de la tesis. Para el desarrollo de este capítulo se sigue las siguientes referencias [CN13], [Lim08], [CCD13], [NS20], [FFF82], [Sha92], [IY08], [Sot79], [Jur15].

1.1 Funciones analíticas en varias variables

Definición 1.1.1. Una función $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definida sobre el conjunto abierto U es \mathbb{C} -diferenciable (respectivamente \mathbb{R} -diferenciable) en un punto $p \in U$, si existe una aplicación \mathbb{C} -lineal (respectivamente \mathbb{R} -lineal) $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(p+h) = f(p) + T(h) + r(h), \quad \forall h \in B(0, \epsilon) \subset U, \quad (1.1)$$

donde $r(h)$ es una función tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

T es llamada *diferencial de f* en p y se denota por $df(p)$.

Se dice que f es \mathbb{C} -diferenciable en U si lo es en cada punto de U .

De la definición 1.1.1 tenemos:

- La aplicación \mathbb{C} -lineal T es única.
- La función f es continua en p .
- Si la función f es \mathbb{C} -diferenciable entonces f es \mathbb{R} -diferenciable ($f : U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$).

A continuación veamos las condiciones que garantizan que una función \mathbb{R} -diferenciable sea \mathbb{C} -diferenciable.

Dado que una función \mathbb{C} -diferenciable $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{R} -diferenciable $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tenemos la representación

$$\begin{aligned} f &: U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) = u(z) + iv(z) \end{aligned}$$

luego u y v , parte real e imaginaria de f respectivamente, son \mathbb{R} -diferenciables en las variables $x_j, y_j, j = 1, \dots, n$, entonces

$$df(z) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u(z)}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial u(z)}{\partial y_j} dy_j \right) + i \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial v(z)}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial v(z)}{\partial y_j} dy_j \right),$$

donde $z = (z_1, \dots, z_n)$ y $z_j = x_j + iy_j$.

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + i \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} + i \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) dx_n + \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} + i \frac{\partial v}{\partial y_1} \right) dy_1 + \\ &\quad + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial y_n} + i \frac{\partial v}{\partial y_n} \right) dy_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n} dy_n \\ df &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j \right). \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned} dz_j &= dx_j + i dy_j, \\ d\bar{z}_j &= dx_j - i dy_j. \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} df &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{dz_j + d\bar{z}_j}{2} \right) + \frac{\partial f}{\partial y_j} \left(\frac{dz_j - d\bar{z}_j}{2i} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right) dz_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right) d\bar{z}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right), \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right)$$

luego

$$df = \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j}_{\partial f} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j}_{\bar{\partial} f}.$$

Por lo tanto

$$\underbrace{df}_{\mathbb{R}\text{-dif.}} = \underbrace{\partial f}_{\mathbb{C}\text{-dif.}} + \bar{\partial} f \quad (1.2)$$

En consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.1.2. (*Cauchy-Riemann*). Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto. Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -diferenciable en $p \in U$ si y solamente si f es \mathbb{R} -diferenciable en p y $\bar{\partial}f(p) = 0$.

La condición $\bar{\partial}f(p) = 0$ es llamada *ecuación de Cauchy- Riemann*.

Ejemplo 1.1.3. . Sea la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \|z\|^2 = x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2 \\ &= z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n \end{aligned}$$

f es \mathbb{R} -diferenciable. Si $p = (a_1, \dots, a_n)$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z_k}(p) = \bar{a}_k \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}(p) = a_k$$

Así f es \mathbb{C} -diferenciable cuando $a_k = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}(p) = 0$, $\forall k$, luego $p = 0$.

Por lo tanto, en el único punto donde f es \mathbb{C} -diferenciable en $p = 0$.

Definición 1.1.4. Una función $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definida en el abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ es *holomorfa* en un punto $p \in U$ si existe $r > 0$ tal que f es \mathbb{C} -diferenciable en la bola abierta $B(p, r) \subset U$.

Una función $f = (f_1, \dots, f_m) : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ es *holomorfa* en el punto p del abierto U si las funciones f_1, \dots, f_m son holomorfas en p .

Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto. Denotamos por $\mathcal{O}(U)$ el espacio de todas las funciones holomorfas en U . Asimismo denotamos por $\mathcal{O}^*(U)$ el espacio de todas las funciones holomorfas que no se anulan en ningún punto de U .

La función f del ejemplo 1.1.3 *no es una función holomorfa* en ningún punto de \mathbb{C}^n .

Una serie de potencias en varias variables centrada en el punto p con coordenadas a_1, \dots, a_n , es decir

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-p)^k = \sum_{k_1+\dots+k_n=0}^{\infty} c_{k_1, \dots, k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n}, \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

es convergente en el polidisco

$$\Delta(p, r) = B(a_1, r) \times \cdots \times B(a_n, r) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_k - a_k| < r, 1 \leq k \leq n\}$$

si $\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k s^{|k|}$ converge para todo $0 < s < r$.

Definición 1.1.5. Una función $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definida en el abierto U es *analítica* en el punto $p = (a_1, \dots, a_n) \in U$, si existe una serie de potencias en $p \in \mathbb{C}^n$ de la forma

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-p)^k,$$

con $c_k \in \mathbb{C}$ convergente en un polidisco $\Delta(p, r)$ donde $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ con $r_i > 0, i = 1, \dots, n$, cuya suma es f . Diremos que f es analítica en U si lo es en cada punto del abierto U .

Una aplicación $F = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{C}^m$, se llama *analítica* si cada $f_i : U \rightarrow \mathbb{C}, i = 1, \dots, m$ es analítica en todo punto de U .

Los dos teoremas que siguen nos mostrarán que las dos últimas definiciones son equivalentes.

Teorema 1.1.6. *Sean $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, entonces f es holomorfa.*

La demostración del teorema se puede ver en [Sha92].

Definición 1.1.7. Sea una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, definida en el abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ y $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$, diremos que:

- f es holomorfa respecto a la variable z_j en el punto a si

$$f(a_1, \dots, a_{j-1}, z_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

es holomorfa en $z_j = a_j$.

- f es holomorfa separadamente en cada variable z_j si f es holomorfa respecto a la variable z_j en todo punto de U .

Teorema 1.1.8 (Osgood). *Sean U un abierto de \mathbb{C}^n y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Si f es holomorfa separadamente en cada variable z_j , $\forall j = 1, \dots, n$, entonces f es analítica.*

La demostración del teorema se puede ver en [Sha92].

Corolario 1.1.9. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto. Toda función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa es analítica.*

Teorema 1.1.10. *Sean el espacio complejo \mathbb{C}^n y $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto. Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, entonces $\frac{\partial f}{\partial z_j} : U \rightarrow \mathbb{C}$ son holomorfas para todo $j = 1, \dots, n$. En particular, la derivada f' es también holomorfa.*

La demostración del teorema se puede ver en [Sha92].

Teorema 1.1.11 (Identidad). *Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $a \in D$ y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, si*

$$\frac{\partial^{|k|} f(a)}{\partial z^k} = 0, \quad \forall |k| \geq 0$$

entonces $f = 0$ en D .

La demostración del teorema se puede ver en [Sha92].

Una consecuencia del teorema de la identidad es que si D es un dominio de \mathbb{C}^n entonces $\mathcal{O}(D)$ es un dominio de integridad.

En efecto. Considere $f, g \in \mathcal{O}(D)$ tal que $f \cdot g = 0$ en D . Supongamos que $f \neq 0$, existe $p \in D$ tal que $f(p) \neq 0$, entonces por definición de continuidad, existe una bola abierta $B(p, r)$ tal que $f \neq 0$ en $B(p, r)$. Luego $g = 0$ en $B(p, r)$. Por lo tanto, por el teorema de identidad $g = 0$ en D .

1.2 Gérmenes de funciones holomorfas

Sea $p \in \mathbb{C}^n$ y considere el conjunto

$$\mathcal{F}_p = \{f : f \text{ función holomorfa definida en una vecindad de } p\},$$

Dadas las funciones $f, g \in \mathcal{F}_p$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $g : V \rightarrow \mathbb{C}$, donde U, V son vecindades de p . Definimos la relación de equivalencia

$$f \sim g \text{ si y solo si existe } W \subset U \cap V \text{ tal que } f|_W = g|_W, \quad (1.3)$$

la clase de $f \in \mathcal{F}_p$, denotada por f_p , es llamada *germen de función holomorfa*. El *conjunto de todos los gérmenes* $\mathcal{O}_{n,p} = \mathcal{O}_p$, se define como

$$\mathcal{O}_p = \frac{\mathcal{F}_p}{\sim} = \{f_p : f \in \mathcal{F}_p\}. \quad (1.4)$$

\mathcal{O}_p es un anillo local, dominio y noetheriano con las operaciones de adición y multiplicación inducidas por las operaciones a nivel de función:

$$f_p + g_p = (f + g)_p \quad (1.5)$$

$$f_p \cdot g_p = (f \cdot g)_p \quad (1.6)$$

Teorema 1.2.1. *El anillo $\mathcal{O}_{n,p}$ es isomorfo a $\mathbb{C}\{z_1 - p_1, \dots, z_n - p_n\}$, anillo de las series de potencias convergentes en alguna vecindad de $p = (p_1, \dots, p_n)$.*

Prueba. Considere la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}_{n,p} &\rightarrow \mathbb{C}\{z_1 - p_1, \dots, z_n - p_n\} \\ f_p &\mapsto \varphi(f_p) = \sum_{|k|=0} c_{k_1 \dots k_n} (z_1 - p_1)^{k_1} \dots (z_n - p_n)^{k_n}, \end{aligned}$$

donde

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f(p)}{\partial z^k} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T(p,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{k+1}} d\zeta, \quad r > 0$$

se verifica que:

- φ es biyectiva.
- $\varphi(f_p + g_p) = \varphi(f_p) + \varphi(g_p)$.
- $\varphi(f_p \cdot g_p) = \varphi(f_p) \cdot \varphi(g_p)$.
- $\varphi(1) = 1$.

□

Si $p = 0 \in \mathbb{C}^n$, denotamos $\mathcal{O}_{n,p} = \mathcal{O}_0$, en este caso el anillo local $\mathcal{O}_{n,0}$ es isomorfo a $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$. Por otro lado, denotamos por \mathcal{O}_0^* al grupo multiplicativo de las unidades del anillo \mathcal{O}_0 .

Observación 1.2.2. (1) Para todo $p \in \mathbb{C}^n$ el anillo $\mathcal{O}_{n,p}$ es isomorfo a $\mathcal{O}_{n,0} = \mathcal{O}_o$, que por el teorema 1.2.1 se puede identificar con el anillo $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ de la serie de potencias,

$$\sum_{k_1 + \dots + k_n = 0}^{\infty} c_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}, \quad (1.7)$$

convergentes en alguna vecindad de 0.

(2) El anillo \mathcal{O}_0 es un dominio de integridad.

De hecho, si $fg = 0$ entonces $f(z)g(z) = 0$ en algun poldisco $\Delta(0, r)$ centrado en 0. Si $f(p) \neq 0$, donde $p \in \Delta(0, r)$, por continuidad, $f(z) \neq 0$ en una vecindad de p , entonces $g(z) = 0$ en esta vecindad. Asimismo $g = 0$ en $\Delta(0, r)$ por el teorema de la identidad.

(3) Denotemos por $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ el conjunto de series de potencias formales,

$$\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} P_i : P_i \text{ es polinomio homogéneo de grado } i \right\} \quad (1.8)$$

está claro que $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \subset \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$.

El conjunto $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ tiene estructura de anillo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} P_i + \sum_{i=0}^{\infty} Q_i &= \sum_{i=0}^{\infty} (P_i + Q_i) \\ \left(\sum_{i=0}^{\infty} P_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} Q_j \right) &= \sum_{l=0}^{\infty} R_l \quad \text{donde } R_l = \sum_{i+j=l} P_i Q_j \end{aligned}$$

(4) $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ es un dominio noetheriano, local y un espacio métrico completo.

(5) $f \in \mathcal{O}_0$ tal que $f(0) \neq 0$, si y solo si existe $g \in \mathcal{O}_0$ tal que $fg = 1$. Esta observación nos dice que el anillo \mathcal{O}_o tiene un único ideal maximal

$$\mathfrak{m} = \{f \in \mathcal{O}_0 : f(0) = 0\}.$$

Los anillos con un único ideal maximal son llamados *anillos locales*, así \mathcal{O}_0 es un anillo local.

(6) Si $f \in \mathcal{O}_0$ podemos escribir

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = P_m(z_1, \dots, z_n) + \dots + P_j(z_1, \dots, z_n) + \dots$$

donde cada P_j es un polinomio homogéneo de grado j y $P_m \neq 0$. Esta expresión se llama *desarrollo de Taylor de f* , el polinomio homogéneo $P_m(z)$ se llama la forma inicial de f , y el entero m la multiplicidad de f en p , denotado por $\text{mult}_p(f)$.

- Si $m = 1$ entonces existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\frac{\partial f(p)}{\partial z_j} \neq 0$, en este caso el punto p es un *punto simple o regular* de f .
- Si $m > 1$, entonces $\frac{\partial f(p)}{\partial z_j} = 0$, para todo i , en este caso se dice que p es un *punto singular* de f .

Equivalentemente, la multiplicidad de f puede ser expresada como:

$$\text{mult}(f) = \min \left\{ |k| : \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(p) \neq 0 \right\}. \quad (1.9)$$

- Un *germen de hipersuperficie analítica* \mathcal{H} en el origen de \mathbb{C}^n es un conjunto de puntos dados por la ecuación $f(z) = 0$, donde $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ y $f(0) = 0$.
- Los términos anteriores asociados con f tales como multiplicidad, puntos simples, etc, son también asociados a \mathcal{H} .
- Cuando $n = 2$ al germen de hipersuperficie \mathcal{H} se le llama germen de curva plana analítica.

Como todo polinomio homogéneo de dos variables con coeficientes complejos se puede factorizar linealmente, la forma inicial f_m de \mathcal{H} , puede ser escrita como

$$f_m(z, w) = \prod_{i=1}^s (a_i z + b_i w)^{r_i}, \quad (1.10)$$

con $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, si $i \neq j$.

Las rectas $a_i z + b_i w = 0$, $i = 1, \dots, s$, se llaman *tangentes* a la curva \mathcal{H} en 0 y la unión de estas rectas es llamada *cono tangente* a \mathcal{H} en el origen.

Si $m = 1$, el germen de curva analítica posee una única tangente y esta tiene multiplicidad 1 (uno).

Ejemplo 1.2.3. Sea la curva analítica $\mathcal{C} : y^2 - x^3 = 0$. entonces

$$f(x, y) = f_2 + f_3$$

donde $f_2 = y^2$ y $f_3 = -x^3$ son polinomios homogéneos de grados 2 y 3 respectivamente. Observe que la multiplicidad de f en cualquier punto p es uno (1), salvo el origen. Sin embargo, $\text{mult}_0 f = 2 > 1$, entonces 0 es un *punto singular* de \mathcal{C} .

Además, el eje X es el *cono tangente* a \mathcal{C} en 0 (Ver figura 1.1).

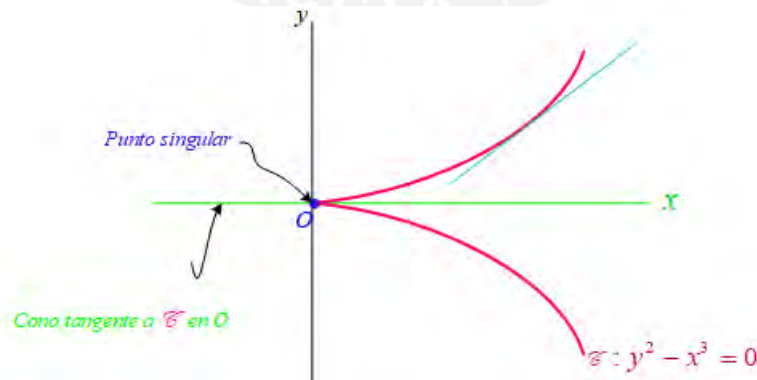


Figura 1.1: El cono tangente a \mathcal{C} en O

Teorema 1.2.4 (Preparación de Weierstrass). *Sea $f \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ convergente en el polidisco $\Delta(0, r)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$. Si $\text{mult}_0(f) = m > 0$, entonces existe un cambio lineal de coordenadas T , en el origen de \mathbb{C}^n , y existen $s_j < r_j$, $j = 1, \dots, n$, $u, h \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ tales que:*

(i) $f \circ T = uh$, en $\Delta(0, s)$,

(ii) u no tiene ceros en $\Delta(0, s)$.

(iii) h es de la forma,

$$h(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) = z_n^m + b_1(z_1, \dots, z_{n-1})z_n^{m-1} + \dots + b_m(z_1, \dots, z_{n-1}) \quad (1.11)$$

donde $b_j(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$, $b_j(0) = 0$ y

$$\text{mult}_0(b_j(z_1, \dots, z_{n-1})) \geq j$$

para todo $j = 1, \dots, m$.

La función holomorfa h es la única que satisface las condiciones (i) y (iii).

Corolario 1.2.5 (Teorema de la función implícita). *Sea f un elemento de $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ tal que $f(0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial z_n}(0) \neq 0$. Entonces existe $\varphi(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ tal que $\varphi(0) = 0$ y $f(z_1, \dots, z_{n-1}, \varphi(z_1, \dots, z_{n-1})) = 0$ como elemento de $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$.*

1.3 Extensión analítica

El teorema más conocido de extensión analítica de una función holomorfa es el teorema de Hartog que enunciamos a continuación.

Teorema 1.3.1. (Hartogs). *Sea un polidisco $\Delta = \Delta(a, r)$ y $\Delta' = \Delta(a, s)$ de \mathbb{C}^n ($n \geq 2$), $0 < s_j < r_j$, $j = 1, \dots, n$. Si $f : \Delta - \overline{\Delta'} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces existe una única función $F : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F|_{\Delta - \overline{\Delta'}} = f$.*

Sin embargo, en este trabajo necesitaremos los teorema que generalizan el bien conocido teorema de la singularidad removible de Riemann en una variable compleja.

Sea D un dominio de \mathbb{C}^n . Un subconjunto $A \subset D$ es *analítico* si para todo $p \in A$ existe un polidisco $\Delta(p, r) \subset D$ y funciones holomorfas $f_1, \dots, f_k : \Delta(p, r) \rightarrow \mathbb{C}$, donde k depende del punto p , tal que

$$A \cap \Delta(p, r) = \{z \in \Delta(p, r) : f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}$$

Así tenemos que un conjunto analítico está definido localmente por un número finito de funciones analíticas. Cuando este número de funciones es siempre $k = 1$ para todo punto diremos que el conjunto analítico tiene codimensión 1. Por otro lado, si este número de funciones k es uno o dos para todos los puntos diremos que el conjunto analítico tiene codimensión 2.

Teorema 1.3.2 (Primer teorema de la singularidad removible de Riemann). Consideremos el dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ y un conjunto analítico $A \subset D$ de codimensión uno. Si $f : D \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa y para cada $z \in A$ existe una vecindad U_z tal que f es acotada en $(D \setminus A) \cap U_z$ (localmente acotada), entonces f se extiende únicamente a una función holomorfa en D .

Prueba. Unicidad. Si F y G son funciones holomorfas que extienden a f en D tal que

$$F|_{D \setminus A} = G|_{D \setminus A} = f$$

Como $D \setminus A$ es un conjunto abierto no vacío y D es conexo, por el teorema de la identidad $F = G$ en D .

Existencia. Basta probar que f puede extenderse holomorfamente en un punto arbitrario $a \in A$, y podemos suponer que $a = 0$. Sea g la función holomorfa que define el conjunto A en una vecindad de 0 satisface la condición $g(0', z_n) \neq 0$ para $z_n \neq 0$. Entonces existe un círculo $r > 0$ tal que $g(0', z_n) \neq 0$ en el círculo $\{|z_n| = r\}$. Por lo tanto, $g(z', z_n) \neq 0$ tanto para z' perteneciente a un entorno $U' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ suficientemente pequeño como para $|z_n| = r$.

Definamos la función

$$F(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|\zeta_n|=r\}} \frac{f(z', \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n. \quad (1.12)$$

Para $z' \in U'$, la función $f(z', \zeta_n)$ en el integrando es holomorfa en z' , puesto que los puntos (z', ζ_n) están en $D \setminus A$, pues $g(z', \zeta_n) \neq 0$. Por tanto F también es holomorfa respecto de z' en U' , y respecto de z_n es holomorfa en el disco $U_n = \{|z_n| < r\}$; luego, F es holomorfa en el dominio $U = U' \times U_n$.

Por otro lado, para $z' \in U'$ fijo la función $g(z', z_n)$ tiene un número finito de ceros en el disco U_n , que corresponden a los puntos de A . Como por hipótesis f está acotada en una vecindad de estos puntos, las singularidades con respecto a z_n son removibles. Después de eliminarlos, la función $f(z', z_n)$ en el disco U_n se representa por una integral de Cauchy con respecto a valores en el círculo $\{|z_n| = r\}$, es decir, coincide con la función F y esta última es holomorfa en el dominio $U \ni 0$ \square

Si el conjunto analítico fuese pequeño, una función holomorfa se extiende a este conjunto sin la condición que la función sea localmente acotada. Este resultado será probado en el siguiente teorema.

Para la demostración del teorema será necesario introducir la noción de la dimensión de un conjunto analítico.

Considere un conjunto analítico $A \subset \mathbb{C}^n$, $p \in A$ y supongamos que

$$A \cap \Delta(p, r) = \{z \in \Delta(p, r) : f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}$$

Si el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \end{pmatrix}_{i=1, \dots, k; j=1, \dots, n}$$

en una vecindad de p es k diremos que p es un punto regular de A y el número $m = n - k$ es llamado dimensión del punto p y será denotado por $\dim_p A$. El

conjunto de todos los puntos regulares de A será denotado por A^0 y los puntos de $A - A^0$ son llamados puntos críticos de A .

Ejemplo 1.3.3. El conjunto de puntos

$$A : z^2 + x^3y^5 = 0$$

en \mathbb{C}^3 es un conjunto analítico y los puntos regulares de A forman el conjunto

$$A^0 = A - (\text{eje } X \cup \text{eje } Y)$$

y evidentemente en todo punto $p \in A^0$ tenemos $\dim_p A = 2$.

Teorema 1.3.4 (Segundo teorema de la singularidad removible de Riemann). *Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ ($n > 1$) un dominio y A es un conjunto analítico de codimensión al menos dos. Si $f : D \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f se extiende de forma única a una función holomorfa en D .*

Prueba. La unicidad de la extensión se prueba como en el Teorema 1.3.2. Probaremos la existencia de la extensión por inducción sobre la dimensión del conjunto A , la cual asumimos igual a $m \leq n - 2$. Si A es de dimensión cero ($m = 0$), entonces consiste en puntos aislados y la extensión de f es consecuencia del teorema de Hartog.

Supongamos que la afirmación ha sido probada para dimensiones menores que $m \leq n - 2$, y que A es un conjunto de dimensión m . Probaremos que f puede extenderse a cualquier punto regular $p \in A^0$, que podemos suponer que es $p = 0$, siendo A^0 el conjunto de puntos regulares del conjunto analítico A .

Como en una vecindad de 0 el conjunto A es una variedad compleja de codimensión al menos 2, por el teorema de la función implícita podemos encontrar dos funciones g_1 y g_2 , holomorfas en una vecindad U'' del punto $0 \in \mathbb{C}^{n-2}$, tal que A esta dado por los ceros de las funciones

$$z_{n-1} - g_1(z'') \text{ y } z_n - g_2(z'')$$

donde $z'' = (z_1, \dots, z_{n-2})$.

Supongamos que $g_1(0'') = g_2(0'') = 0$ y $w = (z_{n-1}, z_n)$, entonces el toro $T = \{(0'', w) : |z_{n-1}| = |z_n| = r\}$, $r > 0$ es lo suficientemente pequeño, se encuentra en $D \setminus A$, luego $\forall z'' \in U''$ y $\forall w$ en el bidisco $U^2 = \{|z_{n-1}| < r, |z_n| < r\}$, la función

$$F(z'', w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{f(z'', \zeta)}{\zeta - w} d\zeta \quad (1.13)$$

es holomorfa. Pero para z'' fijo, el punto $(z'', w) \in A$ solo para $z_{n-1} = g_1(z'')$ y $z_n = g_2(z'')$; por lo tanto, en función de w , F solo puede tener una singularidad puntual, que es removible por el teorema de Hartog. En consecuencia, $F = f$, es decir, f se extiende holomorficamente hasta el punto 0. Esto prueba existencia de la extensión de f al conjunto A^0 de puntos regulares de A .

Finalmente, dado que los puntos críticos forman un conjunto analítico de codimensión menor que m , entonces f se extiende a los puntos críticos de A por la hipótesis de inducción. \square

1.4 Folios

Antes de dar la definición de una foliación observemos la estructura geométrica local del flujo de un campo vectorial de clase C^1 alrededor de un punto regular.

Un campo vectorial es una aplicación de una variedad diferenciable M^m en su fibrado tangente TM tal que $X(q) \in T_qM$ para todo $q \in M$. Considere un punto $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$. Por el teorema del flujo tubular [Sot 79] existe una vecindad U de p en M y un difeomorfismo

$$f : B^1 \times B^{m-1} \rightarrow U$$

donde $B^m = B(0, 1)$ es la bola abierta de centro en el origen y radio 1 en \mathbb{R}^m tal que el cambio de coordenadas está definido como

$$f^*X = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Si tenemos otro difeomorfismo aplicando el teorema del flujo tubular en otro punto $q \in M$

$$g : B^1 \times B^{m-1} \rightarrow V$$

tal que

$$g^*X = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Como f y g linealizan las curvas integrales de X alrededor de los puntos p y q respectivamente tenemos

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ f & : f^{-1}(U) \rightarrow g^{-1}(V) \\ (x, y) & \mapsto g^{-1} \circ f(t, x) = (h(t, x), l(x)) \end{aligned}$$

Veamos que esta forma de los cambios de variables que linealizan los campos vectoriales alrededor de los puntos regulares son los que están determinando la descomposición de M mediante las órbitas de X . Esto puede ser generalizado.

Definición 1.4.1. Sea M^m una variedad, una *foliación* (regular) \mathcal{F} en M de dimensión k y de clase C^r (u holomorfo (M variedad compleja)) es una estructura diferenciable determinada por un atlas del tipo

$$\mathcal{A} = \{(U_i, f_i) : f_i : B^k \times B^{m-k} \rightarrow U_i, i \in I\}$$

de clase C^r (u holomorfa) tal que el cambio de coordenadas satisface:

$$\begin{aligned} f_j^{-1} \circ f_i & : f_i^{-1}(U_{ij}) \rightarrow f_j^{-1}(U_{ij}) \\ (x, y) & \mapsto f_j^{-1} \circ f_i(x, y) = (h_{ij}(x, y), g_{ij}(y)). \end{aligned}$$

Donde $B^k = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^k$ es una bola abierta con centro en el origen, radio 1, dimensión k y B^{m-k} bola abierta de dimensión $m - k$.

Observación 1.4.2. En la figura (1.3) se observa que $B^k \times \{y\}$ son copias de B^k . La imagen de una bola abierta $B^k \times \{y\}$ que es llevada en una línea (azul) curvada en la variedad M es superficie de dimensión k , el asunto es que se pegue con una superficie del mismo tipo inducida por f_i , eso no lo hace cualquier atlas.

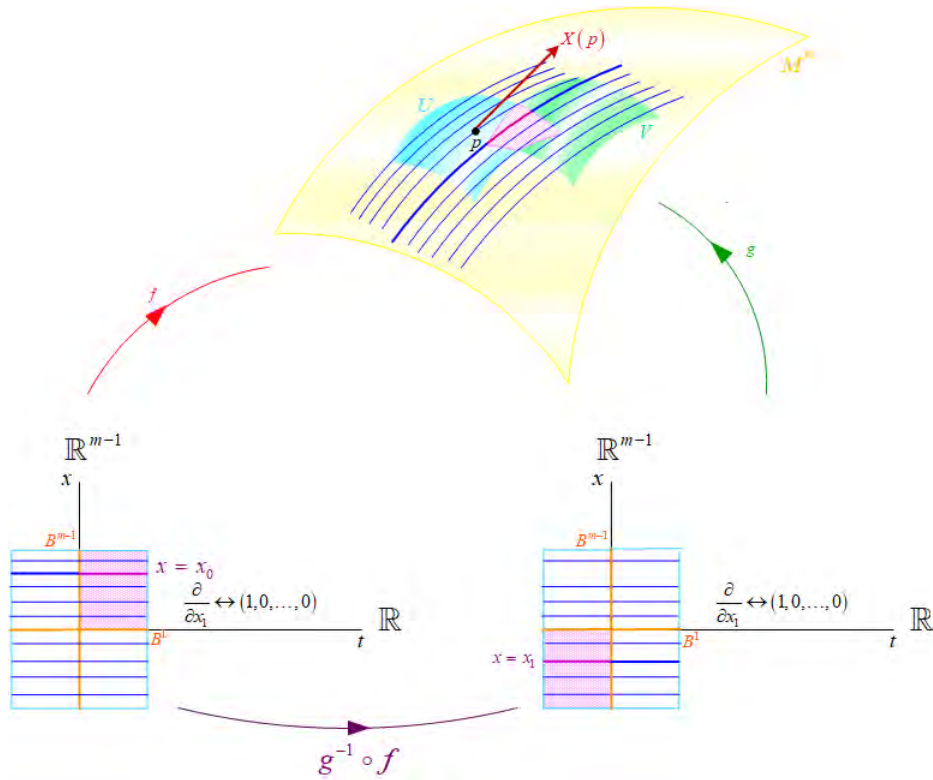


Figura 1.2: Flujo tubular

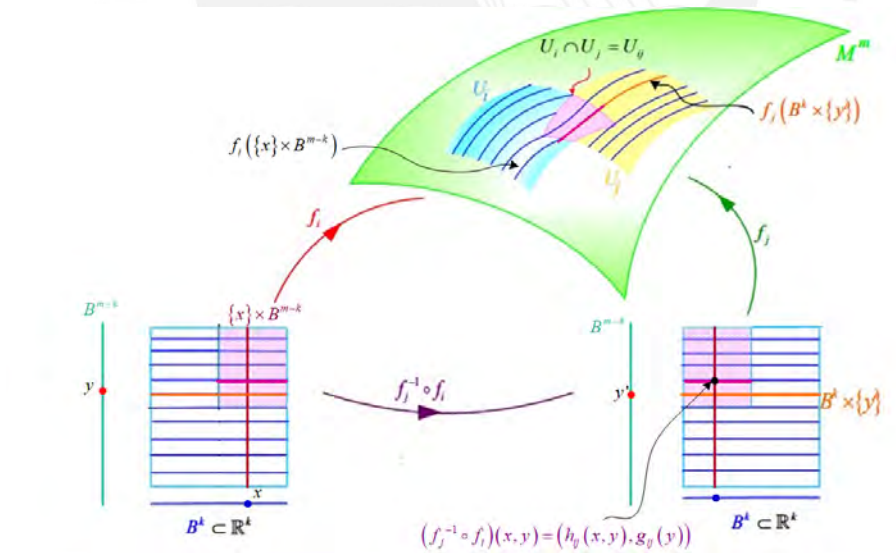
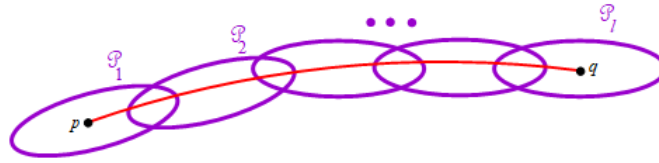


Figura 1.3: Cambio de coordenadas $f_j^{-1} \circ f_i$

- Las subvariedades de dimensión k de la forma $f_j(B^k \times \{y'\})$ son llamadas *placas de foliación*.
- Las subvariedades de dimensión $m - k$ de la forma $\Sigma = f_i(\{x\} \times B^{m-k})$ son llamadas *secciones de foliación*.

Figura 1.4: Cadena de placas uniendo p con q .

Definición 1.4.3. Sea M la variedad cubierta por placas de la foliación \mathcal{F} , se define sobre M la *relación de equivalencia*:

$p, q \in M$, $p \sim q$ si existen un número finito de placas $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_l$ tal que $p \in \mathcal{P}_1$, $q \in \mathcal{P}_l$ y además $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, \dots, l-1$. Las clases de equivalencia de esta relación \sim se llaman *hojas* de la foliación \mathcal{F} .

De la definición se tiene directamente las siguientes observaciones

- Por cada punto $p \in M$ pasa una y sola una hoja de \mathcal{F} denotada por H_p .
- $\bigcup_{p \in M} H_p = M$
- Toda hoja es un conjunto conexo por caminos.

Proposición 1.4.4. Toda hoja de la foliación \mathcal{F}^k es una subvariedad inmersa en M^m de dimensión k y tiene la misma clase de diferenciabilidad que \mathcal{F}^k .

Prueba. Sea $p \in H$, por definición de hoja existe una placa \mathcal{P}_i , y un punto fijo tal que $p \in \mathcal{P}_i = f_i(B^k \times \{y\})$

$$\begin{array}{ccccc} \phi_i : B^k \subset \mathbb{R}^k & \xrightarrow{i_y} & B^k \times \{y\} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{P}_i \\ x & \longrightarrow & (x, y) & \longrightarrow & f_i(x, y) \end{array}$$

Luego

$$\begin{array}{ccc} \phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j) \subset \mathbb{R}^k & \rightarrow & \phi_j^{-1}(\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j) \subset \mathbb{R}^k \\ x & \mapsto & \phi_j^{-1} \circ \phi_i(x) = \phi_j^{-1}(f_i(x, y)) = h_{ij}(x, y) \end{array}$$

con y fijo. □

Ejemplo 1.4.5. Sea M^m una variedad de clase C^1 y $f : M \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ una submersión. Por el teorema de la forma local de las submersiones [Lim08], f determina una foliación $\mathcal{F} = \mathcal{F}_f^{m-1}$ en M . Además, las hojas son componentes conexas de los conjuntos de nivel de $f : f^{-1}(r), r \in \mathbb{R}$ tal que

$$T_p f^{-1}(r) = \text{Ker} df(p).$$

Finalmente, note que todas las hojas de la foliación \mathcal{F} son encajadas.

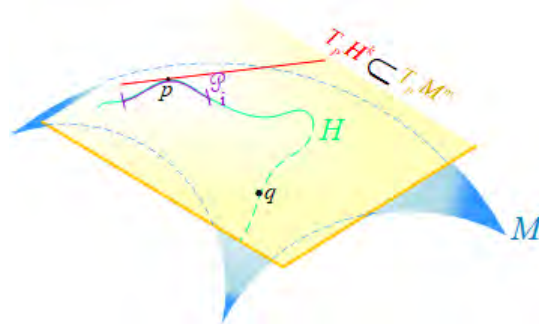


Figura 1.5: Hoja H subvariedad inmersa en M.

Ejemplo 1.4.6. Consideremos una 1-forma diferencial ω de clase (C^∞) no nula en una variedad M^m . Por el teorema de Frobenius [CN13] si la 1-forma satisface la condición de integrabilidad $\omega \wedge d\omega = 0$ ella define una foliación

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega^{m-1} : \omega = 0. \tag{1.14}$$

Las hojas de la foliación (1.14) son las subvariedades inmersas H de M que satisfacen la ecuación

$$T_p H^{m-1} = \text{Ker } \omega(p), \quad \forall p \in H. \tag{1.15}$$

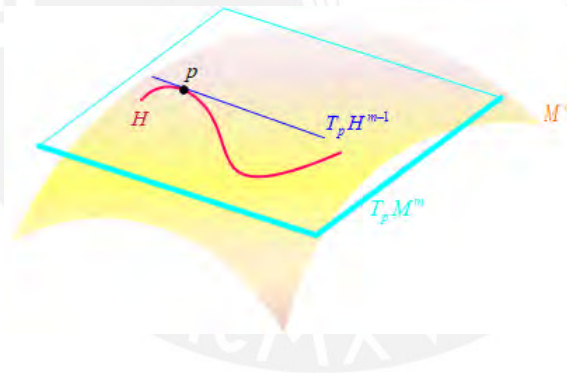


Figura 1.6: Hoja de la Foliación $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega^{m-1}$

Veamos en detalle el caso particular cuando $M = \mathbb{R}^2$ donde las foliaciones se pueden definir por campos vectoriales o 1-formas diferenciales. En este caso la 1-forma diferencial ω es de la forma

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy \text{ en } \mathbb{R}^2$$

Evidentemente en \mathbb{R}^2 se tiene $\omega \wedge d\omega = 0$. Por otro lado, el campo vectorial

$$X = b(x, y) \frac{\partial}{\partial x} - a(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

no nulo en todo punto, es *dual* a la 1-forma ω esto es:

$$\begin{aligned}\omega(p)X(p) &= (a(p)dx + b(p)dy) \left(b(x, y) \frac{\partial}{\partial x} - a(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= (a(p)dx + b(p)dy) \left(b(p) \frac{\partial}{\partial x} - a(p) \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= a(p)dx \left(b(p) \frac{\partial}{\partial x} - a(p) \frac{\partial}{\partial y} \right) + b(p)dy \left(b(p) \frac{\partial}{\partial x} - a(p) \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= a(p)b(p) - b(p)a(p) \\ \omega(p)X(p) &= 0\end{aligned}$$

Finalmente, observe que toda 1-forma cerrada (no nula) ω en una variedad M cumple la condición de integrabilidad:

$$\omega \wedge d\omega = \omega \wedge 0 = 0$$

luego define una foliación en M .

1.5 Foliación singular

1.5.1 Singularidades de campos vectoriales holomorfos

Sean el conjunto abierto $U = (\mathbb{C}^n, 0)$ (vecindad de 0 en \mathbb{C}^n), $n \geq 2$ y $z = (z_1, \dots, z_n) \in U$. Un campo vectorial holomorfo en el abierto, es un campo vectorial

$$\begin{aligned}X &: U \rightarrow T\mathbb{C}^n \\ z &\mapsto X(z) = f_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + f_n(z) \frac{\partial}{\partial z_n}\end{aligned}$$

tal que sus funciones coordenadas f_1, \dots, f_n son funciones holomorfas en \mathbb{C}^n y $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\}$ es base de $T\mathbb{C}^n$. Entonces las funciones coordenadas tienen expansión en series de potencias, es decir

$$f_i(z) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = 0}^{\infty} c_{k_1, \dots, k_n}^i z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}, \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad c_{k_1, \dots, k_n}^i \in \mathbb{C}. \quad (1.16)$$

Si ordenamos, en función de los grados, los términos $c_{k_1, \dots, k_n}^i z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ de la serie de potencias de f_i , podemos expresar las series f_i en función de sumas de polinomios homogéneos:

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^i(z), \quad (1.17)$$

donde $P_n^i(z)$ son polinomios homogéneos de grado n . Por lo tanto, podemos expresar el campo holomorfo en función de sumas de polinomios homogéneos como:

$$X(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n^1(z) \right) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n^n(z) \right) \frac{\partial}{\partial z_n} \quad (1.18)$$

Llamamos *parte homogénea de grado j* del campo 1.18 a la expresión

$$X_j(z) = P_j^1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + P_j^n(z) \frac{\partial}{\partial z_n} \quad (1.19)$$

donde P_j^1, \dots, P_j^n son polinomios homogéneos de grado j . Por lo tanto,

$$X = X_1 + \dots + X_j + \dots,$$

si X_m es el menor campo homogéneo de grado m no nulo, se dirá que m es la multiplicidad de X en 0. En particular, si $n = 0$, a X_0 llamaremos *parte constante*, si $n = 1$, X_1 se le llama *parte lineal*, si $n = 2$, llamaremos a X_2 *parte cuadrática*.

Definición 1.5.1. Sea X un campo vectorial holomorfo

$$X(z) = f_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + f_n(z) \frac{\partial}{\partial z_n},$$

Un punto $p \in U \subset \mathbb{C}^n$ se llama *punto singular* si $X(p) = 0$.

El conjunto de puntos singulares de X se denota como:

$$\text{Sing}(X) = \{p \in U : f_1(p) = \dots = f_n(p) = 0\}.$$

Si $X(p) \neq 0$, el punto p se llama *punto regular*.

Se dice que p es una *singularidad aislada* si existe V_p una vecindad abierta de p , tal que para todo $q \in V_p \setminus \{p\}$, $X(q) \neq 0$, es decir, V_p no tiene otro punto singular de X aparte de p .

Ejemplo 1.5.2. Dado el campo vectorial

$$X(z_1, z_2) = z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + (z_1 z_2^2 + z_1^4) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

en el espacio complejo \mathbb{C}^2 , el conjunto de sus puntos singulares es

$$\text{Sing}(X) = \{z_1 = 0\}$$

Ejemplo 1.5.3. Para el campo vectorial

$$X(z_1, z_2) = (z_1^2 - z_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + (z_1 z_2 - z_1^3) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

en el espacio complejo \mathbb{C}^2 , el conjunto de sus puntos singulares es

$$\text{Sing}(X) = \{z_1 = 0\} \cup \{(1, 1)\}$$

Por lo tanto, el punto $(1, 1)$ es la *única singularidad aislada*.

Definición 1.5.4. Sea el campo vectorial holomorfo

$$X(z) = f_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + f_n(z) \frac{\partial}{\partial z_n},$$

en un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$. Un punto $p \in \text{Sing}(X)$ es *no degenerado* si X tiene parte lineal X_1 no nula centrada en p y su matriz $DX(p) = \left(\frac{\partial f_i(p)}{\partial z_j} \right)_{i,j=1}^n$ tiene determinante no nulo.

Ejemplo 1.5.5. Dado el campo vectorial holomorfo

$$X(z_1, z_2) = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (z_1^2 + z_2) \frac{\partial}{\partial z_2},$$

tenemos $p = (0, 0) \in \text{Sing}(X)$, con parte lineal $X_1 = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ y la matriz jacobiana en $p = (0, 0)$

$$DX(p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es tal que su determinante $|DX(p)| = -1 \neq 0$. Por lo tanto, $p = (0, 0)$ es una *singularidad no degenerada* de X .

Definición 1.5.6. Sea M una variedad compleja de dimensión $m \geq 2$. Una foliación \mathcal{F} holomorfa *singular* de dimensión $k < m$ sobre M es una foliación holomorfa regular en $M \setminus S$, donde S es un conjunto analítico propio de M , llamado conjunto *singular* de \mathcal{F} y denotado por $\text{Sing}(\mathcal{F})$.

La foliación \mathcal{F} es *saturada* cuando no puede ser extendida a cualquier punto del conjunto singular.

Observación 1.5.7. Si el conjunto singular $\text{Sing}(\mathcal{F})$ tiene codimensión 2, como la foliación \mathcal{F} localmente es generada por k campos vectoriales holomorfos [CN13] que se extienden por el teorema 1.3.4. Por lo tanto, esta foliación \mathcal{F} se puede extender a una parte de S en donde estas extensiones de los campos definen una foliación regular.

Ejemplo 1.5.8. Sea el campo vectorial holomorfo

$$X(z_1, z_2) = z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} + (z_2 + z_1^2 z_2^2) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

en el espacio complejo \mathbb{C}^2 , entonces su conjunto singular está dado por:

$$\text{Sing}(X) = \{(0, 0)\}$$

Las órbitas de este campo vectorial holomorfo X , son las hojas de la foliación regular \mathcal{F} definidas por este campo vectorial fuera del conjunto singular $\text{Sing}(X)$. Entonces esta foliación determina una foliación singular en \mathbb{C}^2 .

Proposición 1.5.9. Consideremos una variedad compleja M de dimensión $n \geq 2$ los siguientes elementos

1. Un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de M ,
2. Una familia de campos holomorfos $\{X_i\}_{i \in I}$, donde X_i es el campo vectorial en el abierto U_i .
3. Una familia de funciones holomorfas $\{g_{ij}\}_{i, j \in I}$, donde $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$.

Que satisfacen la relación

$$X_i = g_{ij} X_j \text{ en } U_{ij}.$$

Entonces existe una foliación holomorfa \mathcal{F} en $M - \cup_{i \in I} \text{Sing}(X_i)$ tal que sus hojas L satisfacen la condición.

$$T_p L = \mathbb{C} \cdot X_i(p) \text{ si } p \in U_i \text{ y } p \notin \text{Sing}(X_i).$$

El conjunto analítico $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \cup_{i \in I} \text{Sing}(X_i)$, es el conjunto singular de la foliación \mathcal{F} .

Definición 1.5.10. Sea M una variedad compleja de dimensión $n \geq 2$. Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular de dimensión uno generada localmente por campos vectoriales holomorfos $\{X_i\}_{i \in I}$ en M , como en la proposición 1.5.9. Se dice que \mathcal{F} tiene *singularidad no degenerada*, si toda singularidad $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap U_i$ es no degenerada, esto es, si $p \in U_i$ es un punto singular no degenerado de X_i .

1.6 Foliaciones en el espacio proyectivo

Sea la relación de equivalencia en \mathbb{C}^{n+1}

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \iff \text{existe } \lambda \in \mathbb{C}^* : (x_0, \dots, x_n) = \lambda(y_0, \dots, y_n)$$

Las clases de equivalencia por esta relación son rectas sin el origen, es decir son direcciones. Así, el conjunto de todas estas direcciones forman el *espacio proyectivo* de dimensión n

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}{\sim}$$

Denotamos las clases de equivalencias como

$$[x_0 : \dots : x_n] := [(x_0, \dots, x_n)] \tag{1.20}$$

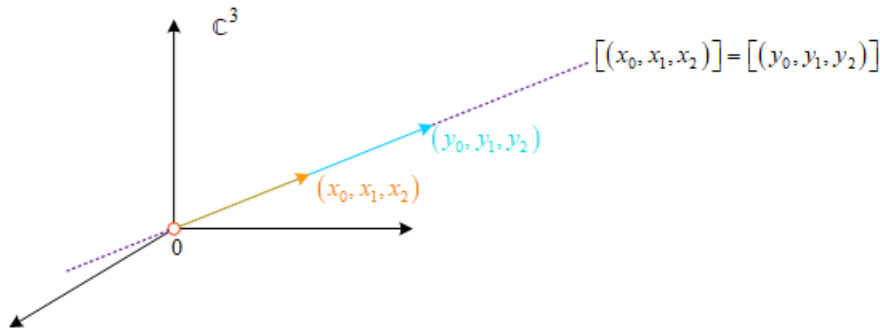


Figura 1.7: $[(x_0, x_1, x_2)]$ y $[(y_0, y_1, y_2)]$ representan la misma recta

Los espacios \mathbb{P}^1 y \mathbb{P}^2 son llamados rectas y planos proyectivos respectivamente. Veamos en detalle la estructura diferenciable del plano proyectivo

Ejemplo 1.6.1. De la definición del espacio proyectivo y la notación de la clase de equivalencia o dirección tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] : (x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)\} \\ &= \{[x_0 : x_1 : x_2] : x_0 \neq 0\} \cup \{[x_0 : x_1 : x_2] : x_1 \neq 0\} \cup \{[x_0 : x_1 : x_2] : x_2 \neq 0\} \\ &= U_0 \cup U_1 \cup U_2 \end{aligned}$$

donde U_0, U_1, U_2 son abiertos de \mathbb{P}^2 , cada uno de ellos son copias de \mathbb{C}^2 mediante las biyecciones:

$$\begin{aligned}\phi_0 &: \mathbb{C}^2 &\rightarrow U_0 \\ &(x, y) &\mapsto [1 : x : y] \\ \phi_1 &: \mathbb{C}^2 &\rightarrow U_1 \\ &(s, t) &\mapsto [s : 1 : t] \\ \phi_2 &: \mathbb{C}^2 &\rightarrow U_2 \\ &(u, v) &\mapsto [u : v : 1]\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\text{Si } x_0 \neq 0 &\implies [x_0 : x_1 : x_2] = \left[1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0}\right] \\ &\implies (x_0, x_1, x_2) = x_0 \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)\end{aligned}$$

donde x_1 o x_2 varían en \mathbb{C} .

Teniendo en cuenta la topología cociente del plano proyectivo \mathbb{P}^2 tenemos que es compacto y conexo. De la descomposición

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^2 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] : x_0 \neq 0\} \cup \{[x_0 : x_1 : x_2] : x_0 = 0\} \\ &= \mathbb{C}^2 \cup \{[0 : x_1 : x_2] : x_1 \neq 0 \text{ o } x_2 \neq 0\} \\ &= \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1\end{aligned}$$

notamos que \mathbb{P}^2 es la compactificación de \mathbb{C}^2 agregando una copia de la línea proyectiva $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Finalmente, veamos como se relacionan las coordenadas.

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} &\xrightarrow{\phi_0} U_0 \xrightarrow{\phi_1^{-1}} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \\ (x, y) &\longrightarrow [1 : x : y] \\ &\quad \quad \quad \updownarrow \\ &\quad \quad \quad \overbrace{\left[\frac{1}{x} : 1 : \frac{y}{x}\right]} \longrightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right) = (s, t)\end{aligned}$$

Es decir, las coordenadas (x, y) de ϕ_0 se relacionan con las coordenadas (s, t) de ϕ_1 de la siguiente manera

$$\left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right) = \phi_1^{-1} \circ \phi_0(x, y) = (s, t).$$

Los otros cambios de coordenadas tienen similares expresiones, dadas en la figura 1.8, como ellos son funciones holomorfas, entonces el plano proyectivo es una variedad holomorfa y los ϕ_j , $j = 0, 1, 2$ son sus parametrizaciones.

Esta situación particular del plano proyectivo se tiene en general para todo espacio proyectivo \mathbb{P}^n , es decir este espacio puede cubrirse por $n + 1$ abiertos

$$U_j = \{[x_0 : \dots : x_n] : x_j \neq 0\}, \quad j = 0, \dots, n,$$

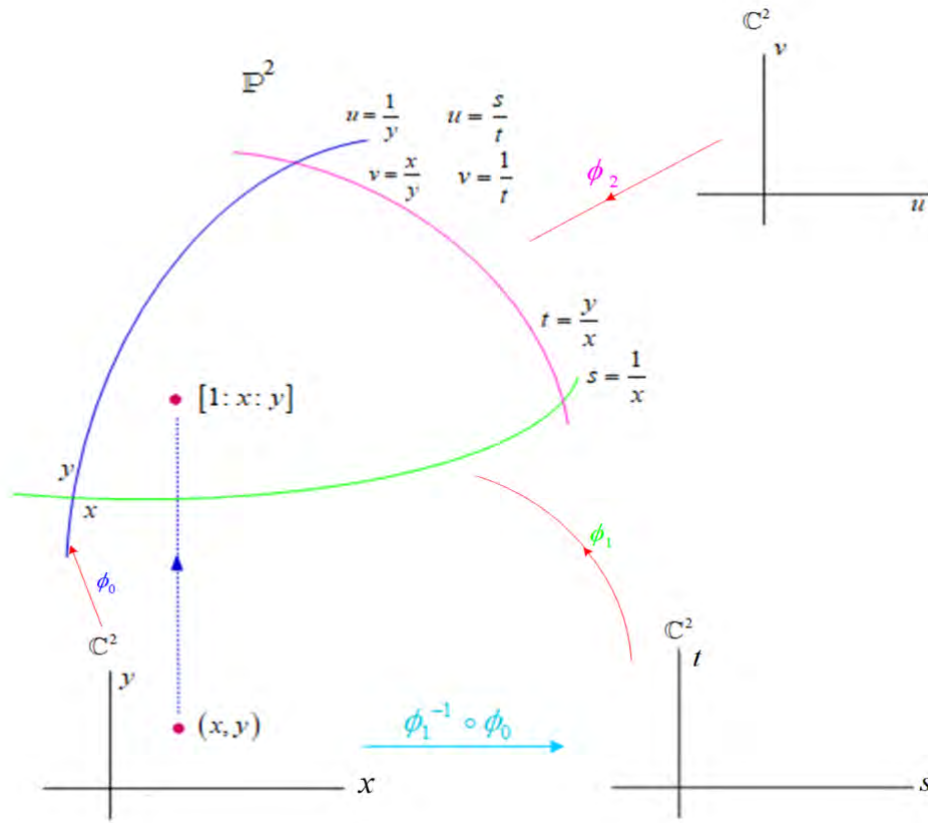


Figura 1.8: Cambios de coordenadas del plano proyectivo

cada uno de ellos se identifica con el espacio \mathbb{C}^n mediante las parametrizaciones

$$\begin{aligned} \phi_j : \quad \mathbb{C}^n &\rightarrow U_j \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto [t_1 : \dots : t_{j-1} : 1 : t_{j+1} : \dots : t_n] \end{aligned}$$

y los cambios de coordenadas las aplicaciones

$$(\phi_j^{-1} \circ \phi_0)(t_1, \dots, t_n) = \left(\frac{1}{t_j}, \frac{t_1}{t_j}, \dots, \frac{t_{j-1}}{t_j}, \frac{t_{j+1}}{t_j}, \dots, \frac{t_n}{t_j} \right). \quad (1.21)$$

Con la topología cociente, el espacio proyectivo \mathbb{P}^n es un espacio compacto y conexo. De la representación

$$\mathbb{P}^n \equiv \mathbb{C}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$$

se tiene que \mathbb{P}^n es la compactificación de \mathbb{C}^n agregándole el espacio \mathbb{P}^{n-1} .

1.6.1 Dos formas de determinar foliaciones en el espacio \mathbb{P}^n

1) Primera forma. Dado un campo vectorial polinomial en espacio complejo \mathbb{C}^n , donde $n \geq 2$

$$X = P_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + P_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

con conjunto singular

$$\text{Sing}(X) = \{p \in \mathbb{C}^n : P_1(p) = \cdots = P_n(p) = 0\}.$$

Si los polinomios P_i no tienen un factor comun, el conjunto $\text{Sing}(X)$ tiene codimensión mayor igual a dos. Veremos a continuación que X induce una foliación \mathcal{F} con singularidades en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n

Proposición 1.6.2. *Dado un campo polinomial X en \mathbb{C}^n , existe una foliación \mathcal{F} en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n que coincide con la foliación determinada por el campo X en el espacio afín \mathbb{C}^n .*

Prueba. Considere el campo vectorial X de grado $d = \max\{\text{grado}(P_j)/j = 1, \dots, n\}$. Mediante un cálculo directo tenemos

$$(\phi_j^{-1} \circ \phi_0)^* X = \frac{1}{t_j^{d-1}} X_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.22)$$

donde X_j es un campo vectorial polinomial de grado d y los ϕ_i son las coordenadas del espacio proyectivo \mathbb{P}^n y el cambio de coordenadas está dado en (1.21). Dado $U_j \cap U_0 = \{(t_1, \dots, t_n) : t_j \neq 0\}$, la proposición 1.5.9 nos dice que la relación (1.22) define una foliación \mathcal{F} en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n - \text{Sing}(\mathcal{F})$, donde

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = \cup_{i=0}^n \text{Sing}(X_i)$$

que será de codimensión 2 porque el conjunto singular de X tiene codimensión dos. \square

2) Segunda forma. Veamos otra forma de generar las foliaciones en el espacio proyectivo. Consideremos un campo vectorial

$$X = f_0(p) \frac{\partial}{\partial Z_0} + \cdots + f_n(p) \frac{\partial}{\partial Z_n},$$

donde f_j es un polinomio homogéneo de grado d . Considere el campo radial

$$R = Z_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + \cdots + Z_n \frac{\partial}{\partial Z_n}.$$

Como

$$\begin{aligned} [R, X] &= R(f_0) \frac{\partial}{\partial Z_0} + \cdots + R(f_n) \frac{\partial}{\partial Z_n} - X(Z_0) \frac{\partial}{\partial Z_0} - \cdots - X(Z_n) \frac{\partial}{\partial Z_n} \\ &= d \cdot f_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + \cdots + d \cdot f_n \frac{\partial}{\partial Z_n} - f_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} - \cdots - f_n \frac{\partial}{\partial Z_n} \\ &= dX - X \\ &= (d-1)X \end{aligned}$$

por el teorema de Frobenius [CN13] tenemos una foliación \mathcal{F} generada por los campos vectoriales X y R , esto es, dada una hoja L de esta foliación tenemos

$$T_p L = \langle X(p), R(p) \rangle, \quad \text{para todo } p \in L.$$

En este caso diremos que la foliación \mathcal{F} tiene *grado* d , el cual denotamos por $\text{grado}(\mathcal{F})$. La aplicación cociente $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ es una submersión y sus fibras coinciden con los radios de \mathbb{C}^{n+1} partiendo del origen que son tangentes del campo radial R . Por lo tanto, el único campo vectorial, de los dos campos considerados, que se proyecta por π , es el campo vectorial X . Veamos la representación local de esta proyección en el abierto $U_0 = \{Z_0 \neq 0\}$, donde

$$[Z_0 : \dots : Z_n] = \left[1 : \frac{Z_1}{Z_0}, \dots, \frac{Z_n}{Z_0} \right]$$

$$\begin{array}{ccc} (Z_0, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{\pi} & \left[1 : \frac{Z_1}{Z_0}, \dots, \frac{Z_n}{Z_0} \right] \in \mathbb{P}^n \\ \downarrow \phi_0^{-1} \circ \pi & \nearrow \phi_0 & \\ \left(\frac{Z_1}{Z_0}, \dots, \frac{Z_n}{Z_0} \right) & & \end{array}$$

se tiene

$$(\phi_0^{-1} \circ \pi)(Z_0, \dots, Z_n) = \left(\frac{Z_1}{Z_0}, \dots, \frac{Z_n}{Z_0} \right)$$

y

$$\begin{aligned} (\phi_0^{-1} \circ \pi)_* X &= [D(\phi_0^{-1} \circ \pi)] X \\ &= \begin{pmatrix} -Z_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ Z_0^2 & Z_0 & 0 & \dots & 0 \\ -Z_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ Z_0^2 & 0 & Z_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -Z_n & 0 & 0 & \dots & 1 \\ Z_0^2 & 0 & 0 & \dots & Z_0 \end{pmatrix}_{n \times (n+1)} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}_{(n+1) \times 1} \\ &= \left(\frac{-Z_1}{Z_0^2} f_0 + \frac{1}{Z_0} f_1 \right) \frac{\partial}{\partial Z_1} + \dots + \left(\frac{-Z_n}{Z_0^2} f_0 + \frac{1}{Z_0} f_n \right) \frac{\partial}{\partial Z_n} \end{aligned}$$

En las coordenadas afines $Z_0 = 1$

$$z_1 = \frac{Z_1}{Z_0}, \dots, z_n = \frac{Z_n}{Z_0}$$

tenemos

$$(\phi_0^{-1} \circ \pi)_* X = (-z_1 f_0 + f_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + (-z_n f_0 + f_n) \frac{\partial}{\partial z_n} \quad (1.23)$$

es un campo polinomial en coordenadas afines en \mathbb{C}^n .

Veremos en el Capítulo 2 que toda foliación \mathbb{P}^n esta determinada por un campo vectorial polinomial en el espacio complejo \mathbb{C}^n ,

1.6.2 Interpretación geométrica del grado de una foliación

A continuación daremos una interpretación geométrica del grado de una foliación \mathcal{F} de dimensión 1 en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n generada por un campo. Para ello

consideremos un *hiperplano* en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n como un subconjunto de la forma:

$$\mathcal{H} = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n : a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0\}$$

donde algún $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ es no nulo. El conjunto de tangencias de esta foliación y el hiperplano está dada por el conjunto de puntos

$$\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{H}) = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathcal{H} : a_0f_0 + \dots + a_nf_n = 0\}$$

este conjunto es algebraico en el hiperplano \mathcal{H} . Evidentemente, si \mathcal{H} es \mathcal{F} *invariante* entonces el conjunto de tangencia coincide con el hiperplano, caso contrario es un conjunto algebraico propiamente contenido en el hiperplano.

Proposición 1.6.3. *Sea \mathcal{F} una foliación de grado d en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n . Genericamente los hiperplanos \mathcal{H} en este espacio proyectivo no son invariantes por la foliación y el grado de $\text{Tang}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ en \mathcal{H} tienen grado d .*

La demostración se puede ver en [NS20]. Se observa de la Figura 1.9 que los puntos de tangencia de la foliación \mathcal{F} con la recta L , son los puntos regulares donde hay tangencia y también los puntos singulares de la foliación \mathcal{F} .

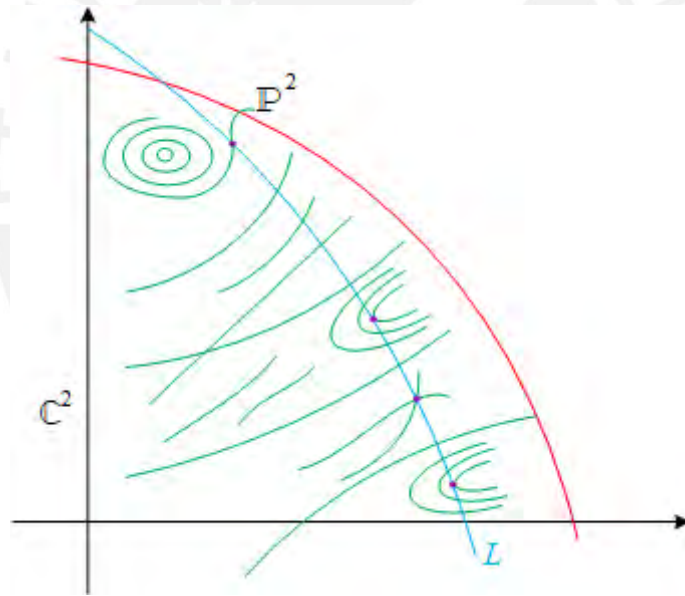


Figura 1.9: Puntos tangentes de la foliación \mathcal{F} con la recta L .

Ejemplo 1.6.4. El campo vectorial homogéneo de grado cero en $\mathbb{C}^3 - \{0\}$

$$X = -1 \frac{\partial}{\partial Z_0} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial Z_1} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial Z_2}.$$

y el campo radial R generan una foliación de codimensión 1 en $\mathbb{C}^3 - \{0\}$. Mediante la submersión $\pi : \mathbb{C}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2$, esta foliación se proyecta en una foliación \mathcal{F} en el plano proyectivo \mathbb{P}^2 de grado 0, localmente (1.23) esta foliación es determinada por el campo vectorial radial en \mathbb{C}^2

$$\mathcal{F} : z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Las hojas de esta foliación \mathcal{F} son rectas que pasan por el origen (Figura 1.10). Ninguna recta de \mathbb{P}^2 es invariante por la foliación, en particular

$$\text{Tang}(\mathcal{F}, L_\infty) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_0 = 1\} = \emptyset,$$

todas las rectas cortan a L_∞ transversalmente, tampoco hay puntos regulares, el único punto singular de la foliación \mathcal{F} es el origen O .

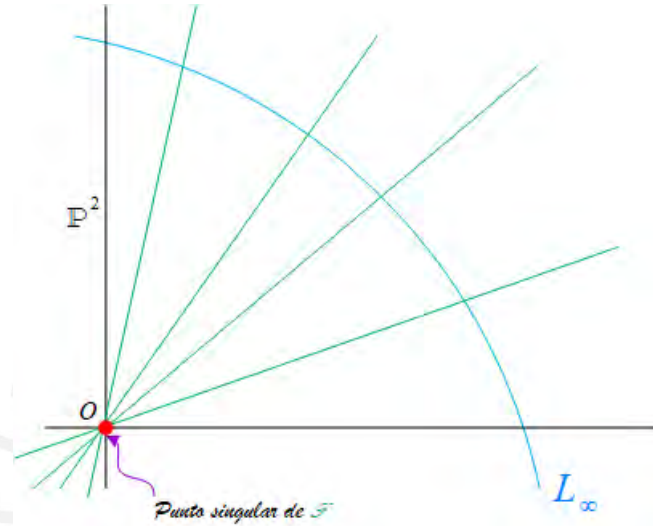


Figura 1.10: Foliación \mathcal{F} con grado cero.

Un *automorfismo* de \mathbb{P}^n es un biholomorfismo $\sigma : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$. Los automorfismos forman un grupo con la operación de composición, y denotaremos este grupo por $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$.

Si se aplica el teorema de Chow. [Sha92], según el cual todo subconjunto analítico del espacio proyectivo \mathbb{P}^n son conjuntos algebraicos, los automorfismos del espacio proyectivo \mathbb{P}^n vienen a ser inducidos por isomorfismos lineales $T : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Como T es un isomorfismo lineal, entonces lleva siempre rectas que pasan por el origen en rectas que pasan por el origen. Esas rectas vienen al espacio proyectivo \mathbb{P}^n en un punto, por lo tanto σ inducido por T lleva puntos en puntos, donde σ es el automorfismo, como se observa en el diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{T} & \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Proposición 1.6.5 (Foliosiones de grado 0). *Toda foliación por curvas de grado 0 en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n es equivalente a la foliación \mathcal{F} que en coordenadas afines $Z_0 = 1$ está generada por el campo radial en \mathbb{C}^n*

$$z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + z_n \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

Prueba. Sabemos que toda foliación de grado cero está generada por un campo vectorial de grado cero en \mathbb{C}^{n+1}

$$Y = c_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + c_1 \frac{\partial}{\partial Z_1} + \cdots + c_n \frac{\partial}{\partial Z_n}$$

donde $c_j \in \mathbb{C}$, siendo algunos de ellos no nulo. Como las órbitas de X son rectas con una misma dirección, entonces tenemos un isomorfismo lineal T en \mathbb{C}^n que establece una equivalencia entre Y y campo

$$X = -1 \cdot \frac{\partial}{\partial Z_0} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial Z_1} + \cdots + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial Z_n}.$$

Por lo tanto, la foliación determinada por Y es equivalente a la foliación \mathcal{F} generada por el campo X . Por (1.23) la foliación en coordenadas afines $Z_0 = 1$ está dada por el campo radial en \mathbb{C}^n

$$z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + z_n \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

□

De este teorema podemos concluir que las foliaciones de grado cero están determinadas por su punto singular, esto es, si hay dos foliaciones de grado cero que tienen el mismo punto singular se trata de las mismas foliaciones.

Ejemplo 1.6.6 (Jouanolou). Sea $J(n, k)$ el campo vectorial polinomial dado en $E_0 = \mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ por

$$J(n, k) = \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1}^k - x_j x_1^k) \frac{\partial}{\partial x_j} + (1 - x_n x_1^k) \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad k \geq 2$$

La foliación en \mathbb{P}^n generada por $J(n, k)$ se denota por $\mathcal{J}(n, k)$ y se llama *Foliación de Jouanolou de grado k* en \mathbb{P}^n .

Probaremos que las singularidades de $\mathcal{J}(n, k)$ son no degeneradas, mediante la siguiente proposición:

Proposición 1.6.7 (Jouanolou). Sean $\mathcal{F}(n, k)$ el espacio de las foliaciones de grado k en \mathbb{P}^n y $\mathcal{S}(n, k)$ el espacio de las foliaciones en $\mathcal{F}(n, k)$ que tienen todas sus singularidades no degeneradas. Entonces se tienen las siguientes propiedades:

- (a) $\mathcal{J}(n, k) \in \mathcal{S}(n, k)$. Si $k \geq 2$, entonces todas las singularidades de $J(n, k)$ son tales que los cocientes de dos valores propios distintos no son reales positivos.
- (b) $\mathcal{J}(n, k)$ tiene todas sus singularidades en E_0 . Estas están dadas en coordenadas afines por

$$p_j = \left(\delta^j, (\delta^j)^{f(n-1)}, \dots, (\delta^j)^{f(1)} \right), \quad j = 1, \dots, N$$

donde δ es la N -ésima raíz primitiva de la unidad, $N = 1 + k + \cdots + k^n$ y $f(m) = -(k + k^2 + \cdots + k^m)$.

- (c) Existe un subgrupo cíclico finito $G \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ con N elementos, tal que cada elemento $T \in G$ permuta las singularidades de $\mathcal{J}(n, k)$ y deja invariante esta foliación, es decir

$$T^* \mathcal{J}(n, k) \equiv \mathcal{J}(n, k)$$

Prueba. (b) Las singularidades del campo vectorial $J(n, k)$ están dadas por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1 - x_n x_1^k = 0 \\ x_n^k - x_{n-1} x_1^k = 0 \\ \vdots \\ x_{j+1}^k - x_j x_1^k = 0 \\ \vdots \\ x_2^k - x_1^{k+1} = 0 \end{cases}$$

que se puede resolver inductivamente:

$$\begin{cases} x_n = x_1^{-k} \\ x_{n-1} = x_n^k x_1^{-k} = x_1^{-k-k^2} \\ x_{n-j} = x_1^{f(j+1)} \\ \vdots \\ x_2 = x_1^{f(n-1)} \\ (x_1^{f(n-1)})^k = x_2^k = x_1^{k+1} \end{cases} \quad (1.24)$$

donde

$$f(j) = -(k + k^2 + \dots + k^j)$$

De la última ecuación, se obtiene

$$x_1^{1+k+\dots+k^n} = 1$$

Si $N = 1 + k + \dots + k^n$, entonces $x_1^N = 1$, luego $x_1 = \delta^j$ es una de las raíces N -enésimas de la unidad. Sustituyendo este valor de x_1 en las ecuaciones 1.24, se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta^j \\ x_2 &= (\delta^j)^{f(n-1)} \\ &\vdots \\ x_n &= (\delta^j)^{-k} = (\delta^j)^{f(1)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, los puntos singulares p_j de $\mathcal{J}(n, k)$ están dados por

$$p_j = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\delta^j, (\delta^j)^{f(n-1)}, \dots, (\delta^j)^{f(1)}), \quad j = 1, \dots, N$$

En particular, $\mathcal{J}(n, k)$ tiene N singularidades en E_0 .

(c) Consideremos ahora una transformación $A \in GL(n, \mathbb{C})$ definida en $E \subset \mathbb{P}^n$ por:

$$A(x_1, \dots, x_n) = (\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = (\delta x_1, \delta^{f(n-1)} x_2, \dots, \delta^{f(1)} x_n)$$

Entonces la matriz A asociada a la transformación lineal, está dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta^{f(n-1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta^{f(1)} \end{pmatrix}$$

Además:

$$A^k = \begin{pmatrix} \delta^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta^{kf(n-1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta^{kf(1)} \end{pmatrix}, \dots, A^{k^n} = \begin{pmatrix} \delta^{k^n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta^{k^n f(n-1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta^{k^n f(1)} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, se tiene:

$$\begin{aligned} A \cdot A^k \cdots A^{k^n} &= \begin{pmatrix} \delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta^{f(n-1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta^{f(1)} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \delta^{k^n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta^{k^n f(n-1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta^{k^n f(1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta^{1+k+\cdots+k^n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta^{(1+k+\cdots+k^n)f(n-1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta^{(1+k+\cdots+k^n)f(1)} \end{pmatrix} \\ A^N &= \begin{pmatrix} \delta^N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta^{Nf(n-1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta^{Nf(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

donde $N = 1 + k + \cdots + k^n$ y δ es la N -ésima raíz primitiva de la unidad. Además, $A^j \neq I$ si $0 < j < N$.

En particular, el grupo $G = \{Id, A, \dots, A^{N-1}\}$ tiene N elementos.

Además, $A^j(1, \dots, 1) = (\delta^j, (\delta^j)^{f(n-1)}, \dots, (\delta^j)^{f(1)}) = p_j$, lo que prueba, que los elementos de G permutan las singularidades de $\mathcal{J}(n, k)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} A^*(J(n, k)) &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^{-1} (\alpha_{j+1}^k \cdot x_{j+1}^k - \alpha_j \cdot \alpha_1^k \cdot x_j \cdot x_1^k) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &\quad + \alpha_n^{-1} (1 - \alpha_n \cdot \alpha_1^k \cdot x_n \cdot x_1^k) \frac{\partial}{\partial x_n} \delta^k J(n, k) \end{aligned}$$

es decir, $A^*(\mathcal{J}(n, k)) = \mathcal{J}(n, k)$, lo que prueba (c).

(a) Para probar el apartado (a), teniendo en cuenta (c), basta demostrar que una singularidad $p = (1, \dots, 1)$ de $J(n, k)$ es no degenerada.

Calculamos la matriz Jacobiana $J = DJ(n, k)(p)$

$$J = \begin{pmatrix} -(k+1)x_1^k & kx_2^{k-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -kx_2x_1^{k-1} & -x_1^k & kx_3^{k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -kx_3x_1^{k-1} & 0 & -x_1^k & kx_4^{k-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -kx_4x_1^{k-1} & 0 & 0 & -x_1^k & kx_5^{k-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ -kx_{n-1}x_1^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_1^k & kx_n^{k-1} \\ -kx_nx_1^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_1^k \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Si evaluamos la matriz jacobiana en $p = (1, \dots, 1)$ se tiene la matriz J

$$J = DJ(n, k)(1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} -(k+1) & k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k & -1 & k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k & 0 & -1 & k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & -1 & k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & k \\ -k & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Se calcula ahora el $\det(J)$ aplicando las propiedades de los determinantes

$$\begin{aligned} \det(J) &= \begin{vmatrix} -(k+1) & k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k & -1 & k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k & 0 & -1 & k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & -1 & k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & k \\ -k & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{n \times n} \\ &= -(k+1) \begin{vmatrix} -1 & k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} + \\ &+ (-1)^3(k) \begin{vmatrix} -k & k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k & -1 & k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k & 0 & -1 & k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & k \\ -k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \\ &= (k+1)(-1)^n - k \begin{vmatrix} -k & k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1-k & k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k & -1-k & k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 & \dots & -1 & k \\ 0 & -k & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \end{aligned}$$

y se deduce que $\det(J) \neq 0$, entonces la singularidad $p = (1, \dots, 1)$ es no degenerada.

Los valores propios de la matriz J están dados por la solución de la ecuación

$\det(J - \lambda I) = 0$, es decir:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} -(k+1) - \lambda & k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k & -1 - \lambda & k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k & 0 & -1 - \lambda & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & -1 - \lambda & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 - \lambda & k \\ -k & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix}_{n \times n} = 0 \\
 & - (k+1 + \lambda) \begin{vmatrix} -1 - \lambda & k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 - \lambda & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} + \\
 & + (-1)^3 (k) \begin{vmatrix} -k & k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k & -1 - \lambda & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k & 0 & -1 - \lambda & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 - \lambda & k \\ -k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} = 0 \\
 & (1 + \lambda + k)(-1)^n (1 + \lambda)^{n-1} + \\
 & + (-1)^3 (k) \begin{vmatrix} -k & k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 - k - \lambda & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k & -1 - \lambda & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 & \cdots & -1 - \lambda & k \\ 0 & -k & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} = 0
 \end{aligned}$$

Luego, se obtiene el polinomio característico

$$(1 + \lambda)^n + k(1 + \lambda)^{n-1} + \cdots + k^{n-2}(1 + \lambda)^2 + k^{n-1}(1 + \lambda) + k^n = 0$$

Por lo tanto, los valores propios son de la forma $\lambda_j = -1 + k\omega^j$, $j = 1, \dots, n$, donde ω es la $n + 1$ -ésima raíz primitiva de la unidad.

En particular, $\lambda_j \neq 0$, $\forall k \geq 1$ y $\forall n \geq 2$, es decir, $\mathcal{J}(n, k) \in \mathcal{S}(n, k)$.

Por otro lado, si $k \geq 2$, entonces λ_j está en el círculo de centro -1 y radio k , donde, si $i \neq j$ los argumentos de $\lambda_i + 1$ y de $\lambda_j + 1$ son diferentes. Esto implica que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}_+$. \square

Capítulo 2

Fibrados vectoriales

En este capítulo estudiaremos los fibrados vectoriales asociados a las foliaciones de dimensión uno en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n . Para el desarrollo de este capítulo se sigue las referencias [MS01], [CN13], [GH94], [FH98], [Bru00], [GMOB89].

2.1 Fibrados vectoriales

Nuestro objetivo de estudiar los fibrados vectoriales está motivado por los fibrados asociados por las foliaciones.

Para comenzar, veamos como determinamos los fibrados en el plano proyectivo para las foliaciones de grado cero, las foliaciones más simple sobre este espacio.

Ejemplo 2.1.1. Sea el campo vectorial $X(x, y) = (x, y)$ cuyas órbitas son rectas que pasan por el origen (figura 2.1) y sea la 1- forma diferencial

$$\omega_0 = -ydx + xdy$$

que anula el campo vectorial X , es decir

$$\omega_0(X(x, y)) = -yx + xy = 0.$$

Entonces el campo vectorial $X(x, y)$ y la 1- forma diferencial ω_0 determinan la misma foliación \mathcal{F} en el plano proyectivo \mathbb{P}^2 .

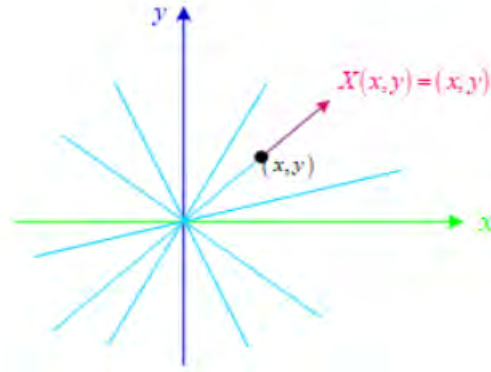
Consideraremos los cambios de coordenadas del ejemplo (1.6.1)

$$(s, t) = (\phi_1^{-1} \circ \phi_0)(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$$

$$(u, v) = (\phi_2^{-1} \circ \phi_1)(s, t) = \left(\frac{s}{t}, \frac{1}{t}\right)$$

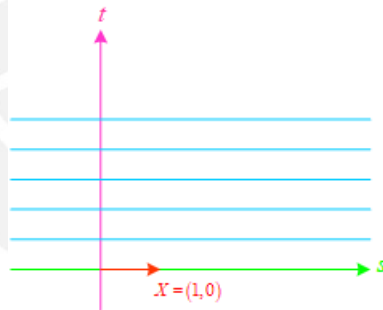
En la carta (s, t) la foliación está descrita por la 1-forma diferencial

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \tilde{\omega}_1 &= (\phi_1^{-1} \circ \phi_0)^* \omega_0 = -\left(\frac{t}{s}\right) \left(\frac{-ds}{s^2}\right) + \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{s dt - t ds}{s^2}\right) \\ &= \frac{1}{s^3} (s dt) \\ \mathcal{F} : \tilde{\omega}_1 &= \frac{1}{s^2} dt = g_{01} \omega_1 \end{aligned}$$

Figura 2.1: Órbitas del campo vectorial X

donde $\frac{1}{s^2} = g_{01}$ y $dt = \omega_1$. La función g_{01} no está definida en $s = 0$ (polos) ni en $v = 0$ (infinito para g_{01}). Si $s \neq 0$ entonces las formas diferenciales $\frac{1}{s^2}dt$ y dt determinan la misma foliación (órbitas).

Para hallar la órbita de la forma diferencial $\tilde{\omega}_1 = 0ds + 1dt$, es encontrar primero el campo vectorial dual a $\tilde{\omega}_1$, es decir $X_1 = (1, 0)$. En el plano st las órbitas del campo vectorial X_1 son rectas paralelas al eje s (figura 2.2).

Figura 2.2: Órbitas del campo vectorial X_1 en el plano st

En la carta (u, v) la foliación está descrita por la 1-forma diferencial

$$\mathcal{F} : \tilde{\omega}_2 = (\phi_2^{-1} \circ \phi_1)^* \tilde{\omega}_1 = \left(\frac{-dv}{v^2} \right)$$

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{-1}{v^2} dv = g_{12} \omega_2$$

donde $\frac{-1}{v^2} = g_{12}$ y $dv = \omega_2$. Si $v \neq 0$ entonces las formas diferenciales $\frac{-1}{v^2}dv$ y dv determinan la misma foliación (órbitas).

Para hallar las órbitas de la forma diferencial $\tilde{\omega}_2 = 0du + 1dv$, es encontrar

primero el campo vectorial dual a $\tilde{\omega}_2$, es decir $X_2 = (1, 0)$. En el plano uv las órbitas del campo vectorial X_2 son rectas paralelas al eje u (figura 2.3).

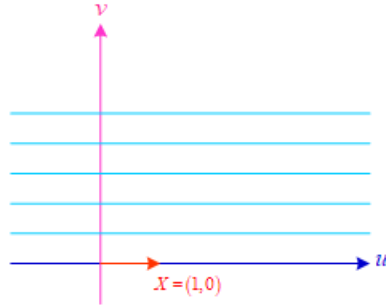


Figura 2.3: Órbitas del campo vectorial X_2 en el plano uv

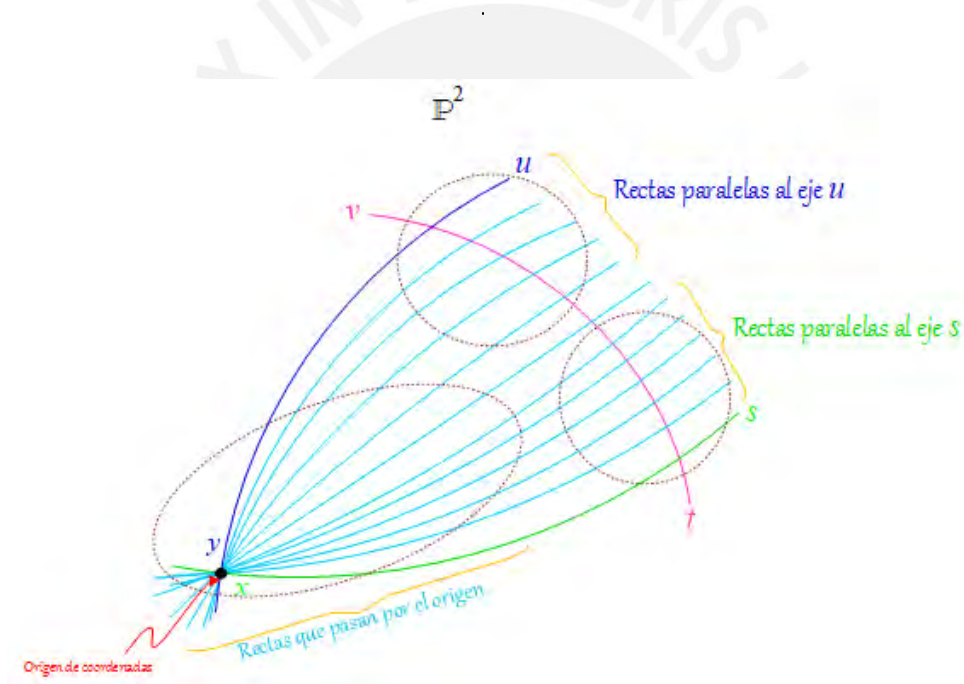


Figura 2.4: Bosquejo del Plano proyectivo \mathbb{P}^2

Las 1-formas $\omega_0, \tilde{\omega}_1$ y $\tilde{\omega}_2$ que describen la foliación \mathcal{F} en la cartas (x, y) , (s, t) y (u, v) , determinan 1-formas diferenciales η_0, η_1 y η_2 definidas en los abiertos U_0, U_1 y U_2

$$\begin{aligned}
 (\phi_1)^* \tilde{\omega}_1 &= (\phi_0)^* \omega_0 \\
 \underbrace{(\phi_1)^* g_{01}}_{f_{01}} \underbrace{(\phi_1)^* \omega_1}_{\eta_1} &= \eta_0 \\
 f_{01} \eta_1 &= \eta_0 \quad \text{en } U_{01}
 \end{aligned}$$

De manera análoga se tiene:

$$f_{02} \eta_2 = \eta_0 \quad \text{en } U_{02}$$

Por lo tanto, tenemos las siguientes relaciones:

$$\eta_i = f_{ij} \eta_j, \quad \text{en } U_{ij},$$

donde $f_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$. Por otro lado, como

$$\begin{aligned} \eta_1 &= f_{12} \eta_2 && \text{en } U_{12} \\ \eta_2 &= f_{21} \eta_1 && \text{en } U_{12} \\ \eta_2 &= f_{21} f_{10} \eta_0 && \text{en } U_{012} \\ \eta_2 &= f_{21} f_{10} f_{02} \eta_0 && \text{en } U_{012} \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{cases} f_{12} f_{21} = 1 & \text{en } U_{12} \\ f_{21} f_{10} f_{02} = 1 & \text{en } U_{012} \end{cases} \quad (2.1)$$

La función f_{12} es la inversa de la función f_{21} . En general, tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{cases} f_{ij} f_{ji} = 1 & \text{en } U_{ij} \\ f_{ij} f_{jk} f_{ki} = 1 & \text{en } U_{ijk} \end{cases} \quad (2.2)$$

Sean M una variedad, $U \subset M$ conjunto abierto y F un \mathbb{C} -espacio vectorial.

Entonces

$$\begin{aligned} U \times F &= \{(p, v) : p \in U, v \in F\} \\ &= \bigcup_{p \in U} \{p\} \times F \end{aligned}$$

se le llama *fibrado vectorial trivial*. Sea la aplicación proyección

$$\begin{aligned} \pi &: U \times F \rightarrow U \\ (p, v) &\mapsto p \end{aligned}$$

entonces $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times F$ se le llama *fibra*.

Definición 2.1.2. Un \mathbb{C} -fibrado vectorial de rango n sobre una variedad M es un conjunto E con una aplicación $\pi : E \rightarrow M$ tal que

- (1) Para todo $p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ es un \mathbb{C} espacio vectorial de $\dim_{\mathbb{C}} \pi^{-1}(p) = n$.
- (2) Existen $V_j \subset M$ abiertos y $F_j : V_j \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(V_j)$ biyecciones llamadas *trivializaciones* si satisfacen las propiedades:
 - (i) $M = \cup V_j$
 - (ii) $\pi \circ F_j = \pi_1$, donde π_1 es la proyección $\pi_1(x, v) = x$
 - (iii) $\forall p \in V_j, F_j : \{p\} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}\{p\}$ \mathbb{C} -isomorfismo de espacios vectoriales.
 - (iv) $F_k^{-1} F_j : V_{jk} \times \mathbb{C}^n \rightarrow V_{jk} \times \mathbb{C}^n$ es diferenciable (C^∞ u holomorfo).

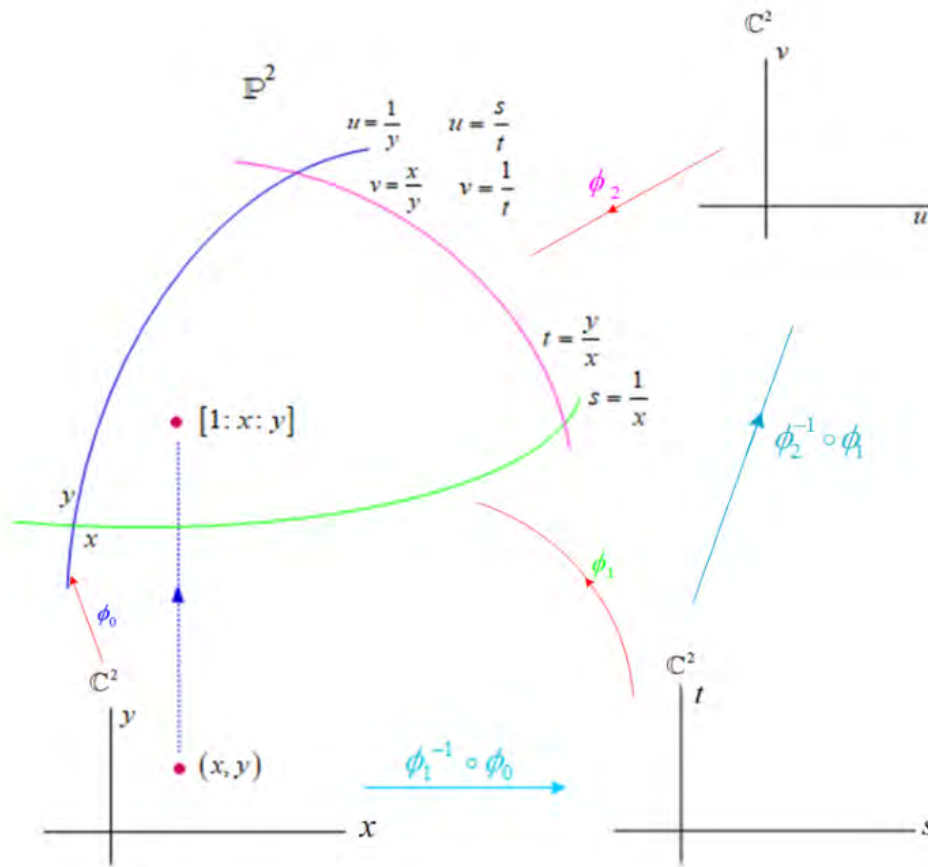


Figura 2.5: η_0, η_1 y η_2 formas diferenciales en el plano proyectivo \mathbb{P}^2

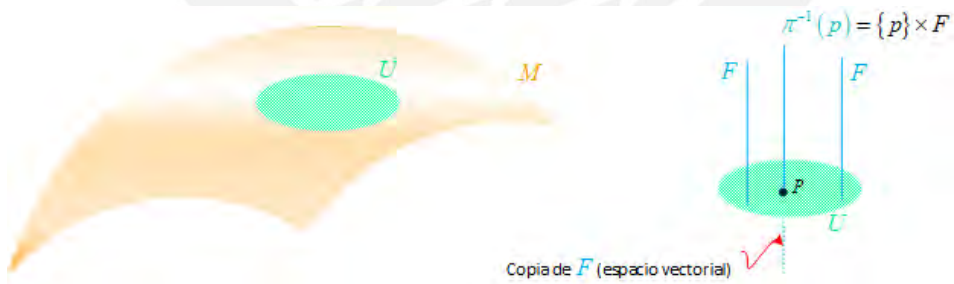


Figura 2.6: Bosquejo del fibrado vectorial trivial

En V_{jk} , los homeomorfismos $F_k^{-1}F_j$ son de la forma:

$$F_k^{-1}F_j(p, v) = (p, f_{kj}(p).v) \tag{2.3}$$

Del apartado (ii) en V_{jk} está definida una función f_{kj} con valores en $GL(n, \mathbb{C})$

$$f_{kj} : V_{jk} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

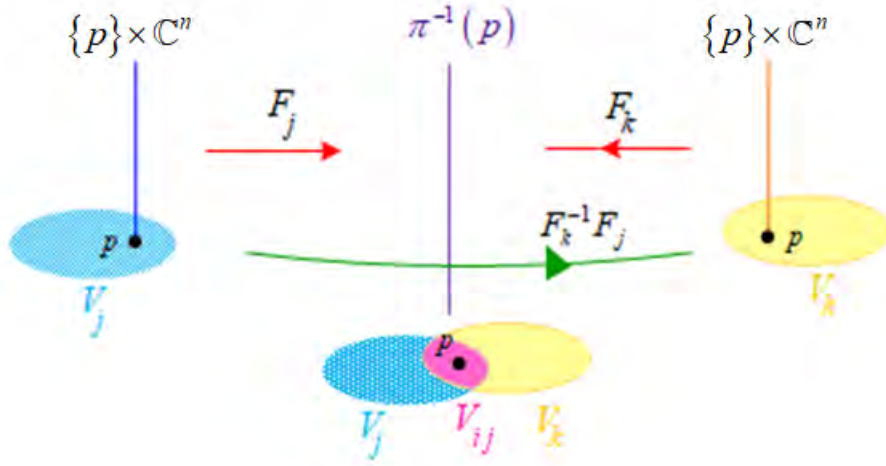


Figura 2.7: Isomorfismo lineal $F_k^{-1}F_j$

estas funciones son llamadas *funciones de transición* que satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} f_{jj} = I & \text{en } V_j & \text{reflexiva} \\ f_{jk} \cdot f_{kj} = I & \text{en } V_{kj} & \text{simétrica} \\ f_{jk} \cdot f_{kh} \cdot f_{hj} = I & \text{en } V_{jkh} & \text{transitiva} \end{cases} \quad (2.4)$$

donde $I \in GL(n, \mathbb{C})$ es la identidad.

Estas relaciones son llamadas *condiciones de cociclos*.

Verifiquemos la segunda propiedad (simétrica)

$$\begin{aligned} (F_j^{-1}F_k)(F_k^{-1}F_j)(p, v) &= F_j^{-1}F_k(p, f_{kj}(p) \cdot v) \\ (p, v) &= (p, f_{jk}f_{kj}(p)v) \\ \implies v &= f_{jk}f_{kj}(p)v \implies f_{jk}f_{kj} = I \end{aligned}$$

El fibrado es topológico, diferenciable, C^k u holomorfo según los f_{jk} ó $F_j^{-1}F_k$ posean estas propiedades para todo jk .

Las condiciones de cociclos determinan el fibrado, ellas permiten reconstruirlo y los objetos definidos sobre los fibrados localmente se expresan en base a ellas.

Si se tienen una variedad M y funciones $f_{kj} : V_{jk} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ que cumplen las condiciones (2.4), ellas determinan el fibrado, es decir que se puede construir en base de ellas un fibrado.

Por otro lado, tenemos que $F_k^{-1}F_j$ es un isomorfismo lineal del espacio vectorial $V_{jk} \times \mathbb{C}^n$ sobre el espacio vectorial $V_{jk} \times \mathbb{C}^n$.

Observaciones

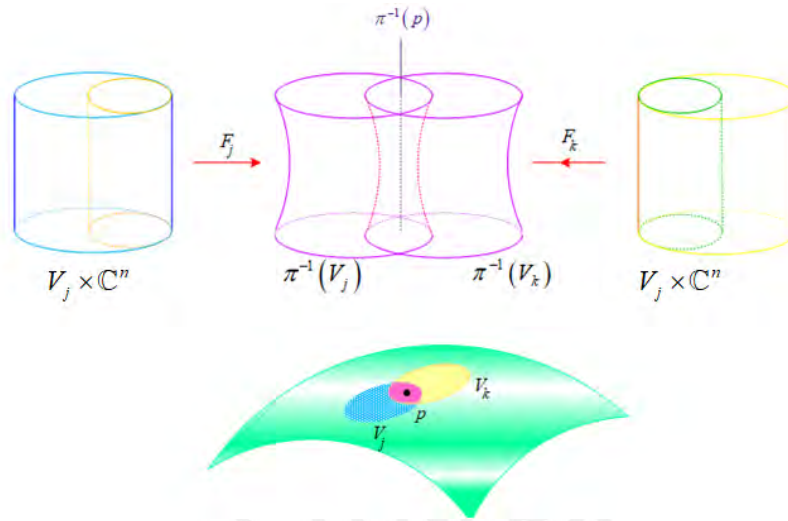


Figura 2.8: Coordenadas de un fibrado lineal

1. Del ejemplo (2.1.1), se observa que las funciones f_{ij} pegan las foliaciones en el abierto U_i y en el abierto U_j , y además cumplen con las condiciones (2.4), por lo tanto determinan un fibrado.
2. Se observa de la Figura 2.9, que en cada punto del plano proyectivo pasa una órbita y la tangente a la órbita es un espacio vectorial sobre ese punto, que viene ser la fibra. La unión de esas fibras determinan el fibrado tangente.
3. Además se cumple que $Ker \eta_0 = Ker \eta_2$.

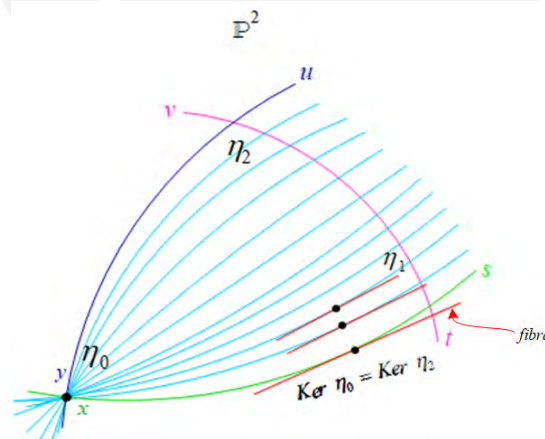


Figura 2.9: Fibras en el plano proyectivo

Definición 2.1.3. Sean $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ y $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ fibrados vectoriales, $p \in M$. Una aplicación $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ es un *morfismo de fibrados vectoriales* si:

- (1) $\varphi|_{\pi_1^{-1}(p)} : \pi_1^{-1}(p) \rightarrow \pi_2^{-1}(p)$ es una transformación lineal.

(2) El diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & \swarrow \pi_2 & \\ M & & \end{array}$$

conmuta.

Del diagrama conmutativo se tiene:

$$\pi_2 \circ \varphi = \pi_1 \quad (2.5)$$

$$\varphi(\pi_1^{-1}(p)) \subset \pi_2^{-1}(p) \quad (2.6)$$

En efecto. Sean $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$, $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ fibrados vectoriales y $v \in \pi_1^{-1}(p)$. Si $w \in \varphi(\pi_1^{-1}(p)) = \varphi(v)$, entonces $\pi_2(w) = \pi_2(\varphi(v))$. Como $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$, $\pi_2(\varphi(v)) = \pi_1(v) = p$. Por lo tanto, $w \in \pi_2^{-1}(p)$.

Si existe otro morfismo de fibrados ψ tal que $\psi \circ \varphi = Id_{E_1}$ y $\varphi \circ \psi = Id_{E_2}$, entonces φ es llamado *isomorfismos de los fibrados* π_1 y π_2 .

Relaciones fundamentales de morfismos de fibrados

Si φ es un morfismo de los fibrados $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ y $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ cuyas trivializaciones son

$$F_j : V_j \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi_1^{-1}(V_j) \subset E_1$$

$$G_j : V_j \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi_2^{-1}(V_j) \subset E_2$$

respectivamente. Entonces $\varphi_j = G_j^{-1} \varphi F_j$ es de la forma

$$\varphi_j(x, v) = (x, a_j(x)v) \quad (2.7)$$

donde $a_j : V_j \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ ($a_j : V_j \rightarrow GL(n)$, si φ es un isomorfismo). Entonces, para otro índice i , $\varphi_i = G_i^{-1} \varphi F_i$. Luego, en $V_{ij} = V_i \cap V_j$ tenemos la siguiente relación

$$G_i \varphi_i F_i^{-1} = G_j \varphi_j F_j^{-1}$$

que equivale a la *relación fundamental* que determina un morfismo de fibrado.

$$a_i f_{ij} = g_{ij} a_j \quad \text{en } V_{ij} \quad (2.8)$$

Proposición 2.1.4. Sean M una variedad, con $M = \cup V_j$ un cubrimiento por abiertos de M y $f_{jk} : V_{jk} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ aplicaciones que satisfacen las condiciones de cociclo. Entonces existe un fibrado $\pi : E \rightarrow M$ cuyas trivializaciones son

$$F_j : V_j \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(V_j)$$

tal que

$$F_k^{-1} \circ F_j(p, v) = (p, f_{kj}(p) \cdot v) \quad (2.9)$$

Además, este fibrado es único salvo isomorfismos.

Prueba. Es consecuencia directa de las relaciones fundamentales (2.8).

2.2 Las secciones de un fibrado

Definición 2.2.1. Sea M una variedad, una *sección de un fibrado* $\pi : E \rightarrow M$ sobre un abierto $U \subset M$ es una función $s : U \rightarrow E$ tal que

$$\pi \circ s = Id_U \tag{2.10}$$

esto es

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{s} & E \\ Id_U \downarrow & & \swarrow \pi \\ U & & \end{array} \quad \text{conmuta}$$

Denotamos por $\Gamma(M, E)$ al espacio de las secciones sobre U .

2.2.1 Relaciones fundamentales de las secciones de un fibrado

Se refiere a cómo están relacionadas las secciones mediante las funciones de transición, para ello se utilizan las trivializaciones.

Sean $s : M \rightarrow E$ una sección de un fibrado y $F_j : V_j \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(V_j)$ una trivialización del fibrado $\pi : E \rightarrow M$, definimos la sección s en V_j como:

$$(F_j^{-1} \circ s)(p) = (p, s_j(p)), \tag{2.11}$$

donde $s_j : V_j \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Si $\pi \circ F_j = \pi_1$, donde π_1 es la proyección tal que $\pi_1(q, v) = q$, entonces del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} s(p) \in \pi^{-1}(V_j) & \xrightarrow{F_j^{-1}} & V_j \times \mathbb{C}^n \ni (q, v) = (F_j^{-1} \circ s)(p) \\ \uparrow s & \nearrow F_j^{-1} \circ s & \\ p \in V_j & & \end{array}$$

se prueba que $(q, v) = (p, v)$

En efecto

$$\begin{aligned} (F_j^{-1} \circ s)(p) &= (q, v) \\ ((\pi_1 \circ F_j^{-1}) \circ s)(p) &= \pi_1(q, v) = q \\ (\pi \circ s)(p) &= q \\ Id_U(p) &= q \\ p &= q \end{aligned}$$

Entonces $(F_j^{-1} \circ s)(p) = (p, v)$. Luego $v \in \mathbb{C}^n$ y por lo tanto $v = s_j(p)$.

Luego en V_{jk}

$$\begin{aligned} (p, s_k(p)) &\stackrel{2.11}{=} (F_k^{-1} \circ s)(p) \\ &\stackrel{2.11}{=} F_k^{-1} \circ (F_j(p, s_j(p))) \\ &\stackrel{2.9}{=} (p, f_{kj}(p)s_j(p)) \end{aligned}$$

Así, se tiene la *relación fundamental* que determina una sección

$$s_k = f_{kj}s_j \quad \text{en } V_{jk} \tag{2.12}$$

Ejemplo 2.2.2 (Fibrado tautológico $\mathcal{O}(-1)$). Sobre el espacio proyectivo complejo \mathbb{P}^n de dimensión n tenemos la fibrición trivial

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} &: \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n \\ ([p], v) &\mapsto [p] \end{aligned}$$

denotado por $\underline{\mathbb{C}^{n+1}}$. El *fibrado tautológico*, es un subfibrado de rango 1 de $\underline{\mathbb{C}^{n+1}}$, definido como

$$\mathcal{O}(-1) = \{([w], z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : \exists t \in \mathbb{C}^*, z = tw\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \tag{2.13}$$

y

$$\pi = \tilde{\pi}|_{\mathcal{O}(-1)}: \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^n$$

es un fibrado cuya fibra sobre el punto $[p] \in \mathbb{P}^n$ es una recta que pasa por p y por el origen $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$.

En efecto

Dado el abierto $U_j = \{[w] = [w_0 : \dots : w_n]/w_j \neq 0\}$, definimos las trivializaciones de $\pi = \tilde{\pi}|_{\mathcal{O}(-1)}$

$$\begin{aligned} F_j &: U_j \times \mathbb{C} \rightarrow \pi^{-1}(U_j) \\ ([w], t) &\mapsto \left([w], \frac{t}{w_j} w \right) \end{aligned}$$

Entonces el cambio de coordenadas del fibrado tautológico está dado por:

$$\begin{aligned} F_k^{-1} \circ F_j : U_{jk} \times \mathbb{C} &\xrightarrow{F_j} \pi^{-1}(U_{jk}) \xrightarrow{F_k^{-1}} U_{jk} \times \mathbb{C} \\ ([w], t) &\longrightarrow \left([w], \frac{t}{w_j} w \right) \longrightarrow \left([w], \underbrace{\frac{t}{w_j} w_k}_{f_{kj}([w]) \cdot t} \right) \end{aligned}$$

Luego, las funciones de transición

$$\begin{aligned} f_{kj} &: U_{jk} \rightarrow GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \\ [w] = [w_0 : \dots : w_n] &\mapsto \frac{w_k}{w_j} \end{aligned}$$

satisfacen las condiciones de cociclos

$$\begin{cases} f_{kk} = 1 \\ f_{kj} \cdot f_{jk} = \frac{w_k}{w_j} \frac{w_j}{w_k} = 1 \\ f_{kj} \cdot f_{jl} \cdot f_{lk} = \frac{w_k}{w_j} \frac{w_j}{w_l} \frac{w_l}{w_k} = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.3 (El dual del fibrado tautológico: $\mathcal{O}(1)$). Sea el espacio proyectivo complejo de dimensión n

$$\mathbb{P}^n = \{[x_0 : \dots : x_n] / (x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)\}$$

Consideremos el hiperplano del infinito $\mathcal{H}_\infty \subset \mathbb{P}^n$,

$$\mathcal{H}_\infty = \{[x_0 : \dots : x_n] / x_0 = 0\} \tag{2.14}$$

que es un divisor en \mathbb{P}^n .

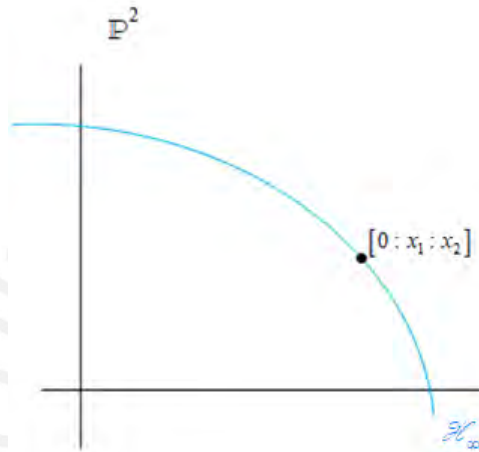


Figura 2.10: Fibrado hiperplano proyectivo

En cada abierto afín $U_j = \{[x_0 : \dots : x_n] / x_j \neq 0\}$, el hiperplano está definido localmente como sigue:

$$\mathcal{H}_\infty |_{U_j} : \frac{x_0}{x_j} = 0 \quad j = 0, \dots, n \tag{2.15}$$

es decir, las funciones que definen el hiperplano son las funciones

$$g_j : \begin{array}{l} U_j \rightarrow \mathbb{C} \\ [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \frac{x_0}{x_j} \end{array}$$

Estas funciones están relacionadas en la intersección $U_{ij} = U_i \cap U_j$ de la siguiente forma:

$$g_i = \frac{x_0}{x_i} = \frac{x_j}{x_i} \frac{x_0}{x_j} = g_{ij} \cdot g_j$$

donde $g_{ij} = \frac{x_j}{x_i} \neq 0$ son las funciones de transición en U_{ij} que satisfacen las condiciones de cociclos:

$$\begin{cases} g_{ii} = 1 \\ g_{ij} \cdot g_{ji} = \frac{x_j}{x_i} \frac{x_i}{x_j} = 1 \\ g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ki} = \frac{x_j}{x_i} \frac{x_k}{x_j} \frac{x_i}{x_k} = 1 \end{cases}$$

Por la proposición (2.1.4), las funciones de transición $\{g_{ij}\}_{i,j}$ determinan un fibrado lineal (rango 1) denotado por $\mathcal{O}(1)$. Por otro lado, los fibrados $\mathcal{O}(-1)$ y $\mathcal{O}(1)$ son uno dual de otro, porque sus cociclos están relacionados de la siguiente manera:

$$f_{ij}^{-1} = g_{ij}, \quad \text{en } U_{ij} \tag{2.16}$$

donde f_{ij} son los cociclos del fibrado tautológico.

Finalmente para cada $k \in \mathbb{Z}$, tenemos el *fibrado torcido* $\mathcal{O}(k)$ del fibrado tautológico y de su dual, definido por:

$$\mathcal{O}(k) = \begin{cases} \mathcal{O}(1)^{\otimes k} & = \underbrace{\mathcal{O}(1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(1)}_{k \text{ veces}}, & k \geq 0 \\ \mathcal{O}(-1)^{\otimes k} & = \underbrace{\mathcal{O}(-1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(-1)}_{-k \text{ veces}}, & k \leq 0 \end{cases}$$

2.3 Fibrados asociados a divisores

Considere una variedad compleja M .

Definición 2.3.1. Un *conjunto analítico* $V \subseteq M$ de codimensión 1, es un conjunto si para todo $p \in M$, existe U_p vecindad de p en M y $f_p \in \mathcal{O}(U_p)$ tal que

$$V \cap U_p : f_p = 0 \tag{2.17}$$

V son los ceros de una función holomorfa dada por una ecuación de una función holomorfa f .

De la figura 2.11, se observa que el punto $q \notin V$, entonces $U_q \cap V = \emptyset : f_q = 1$, es decir los ceros de una función constante igual a 1 es vacío.

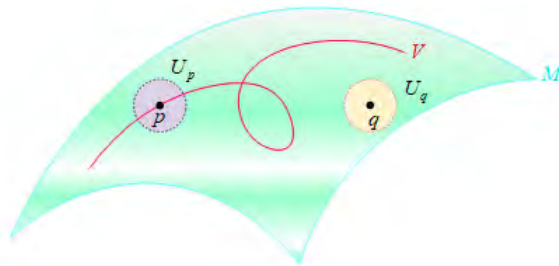


Figura 2.11: Los ceros de una función constante $f_q = 1$ es vacío.

Ejemplo 2.3.2. En la variedad $M = \mathbb{C}$, el conjunto

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{C} : e^z - 1 = 0\}$$

es analítico, pues, para cualquier $p \in \mathbb{C}$ podemos tomar $U_p = \mathbb{C}$ y $f_p(z) = e^z - 1$. Los ceros de esta función analítica son: $z = 2i\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ y son puntos aislados. Por lo tanto, el conjunto analítico es $V = \{\dots 2\pi i, 4\pi i, \dots\}$, ver figura 2.12

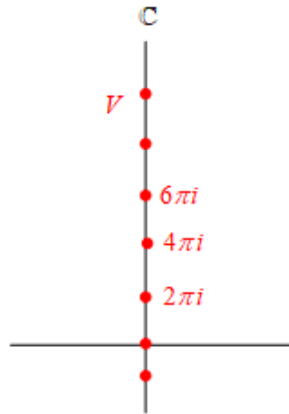


Figura 2.12: El conjunto analítico $V : e^z - 1 = 0$

Ejemplo 2.3.3. Sea \mathbb{P}^2 el espacio proyectivo, en la variedad $M = \mathbb{P}^2$, el conjunto

$$V = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_1^2 x_2 = x_0^3\}$$

es analítico, pues las ecuaciones:

$$V \cap \{x_2 = 1\} : y^2 = x^3$$

$$V \cap \{x_0 = 1\} : u^2 v = 1$$

$$V \cap \{x_1 = 1\} : t = s^2$$

son representaciones locales de $x_1^2 x_2 = x_0^3$, esto hace que V sea un conjunto analítico, donde $\{x_2 = 1\}$, $\{x_0 = 1\}$ y $\{x_1 = 1\}$ son los conjuntos abiertos afines. En la figura 2.13 se presenta un bosquejo del conjunto analítico V en el espacio proyectivo \mathbb{P}^2 .

Ejemplo 2.3.4. En la variedad $M = \mathbb{C}^2$, el conjunto

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 - x^3 = 0\}$$

es analítico, pues, para cualquier $p \in \mathbb{C}^2$ se puede tomar $U_p = \mathbb{C}^2$ y $f_p(x, y) = y^2 - x^3$, ver figura 2.14

Ejemplo 2.3.5. En la variedad $M = \mathbb{C}^2$, el conjunto

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}$$

es analítico, pues, $\forall p \in \mathbb{C}^2$ podemos tomar $U_p = \mathbb{C}^2$ y $F_p(x, y) = xy$. El conjunto V corresponde a los ejes coordenados en \mathbb{C}^2 .

Pero además, observe que:

- Si se considera un punto $p = (x, 0)$ con $x \neq 0$ que está sobre el eje x , escogemos el abierto $U_p = (\mathbb{C} - \{0\}) \times \mathbb{C}$ y $f_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$, $f_p(x, y) = y$, de manera que $V \cap U_p : f_p = 0$, ver figura 2.15

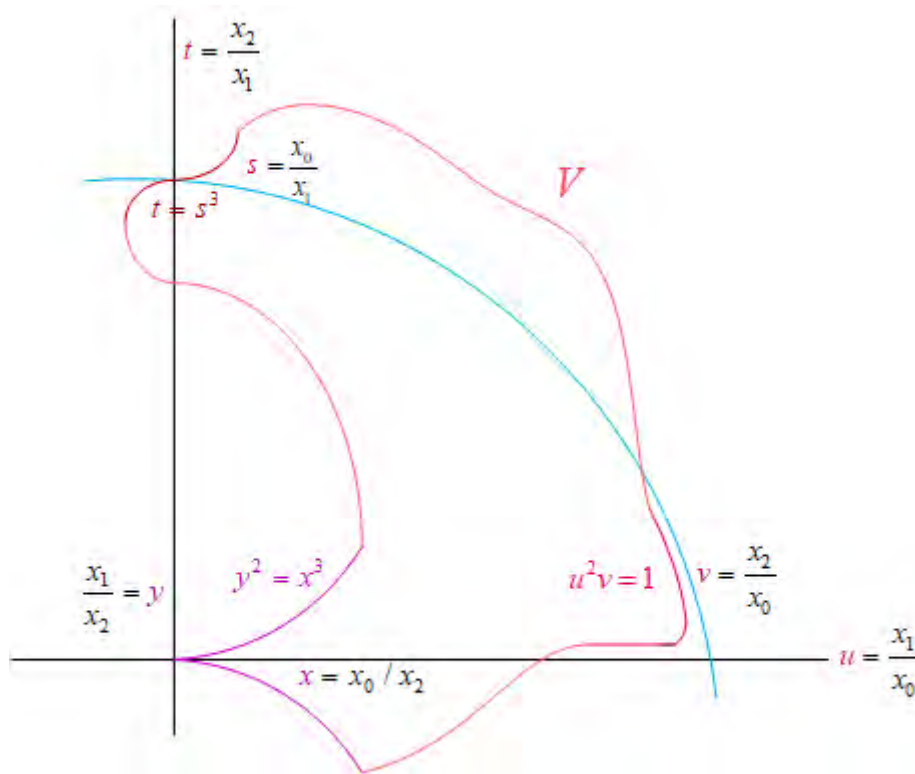


Figura 2.13: Bosquejo del conjunto analítico V en \mathbb{P}^2

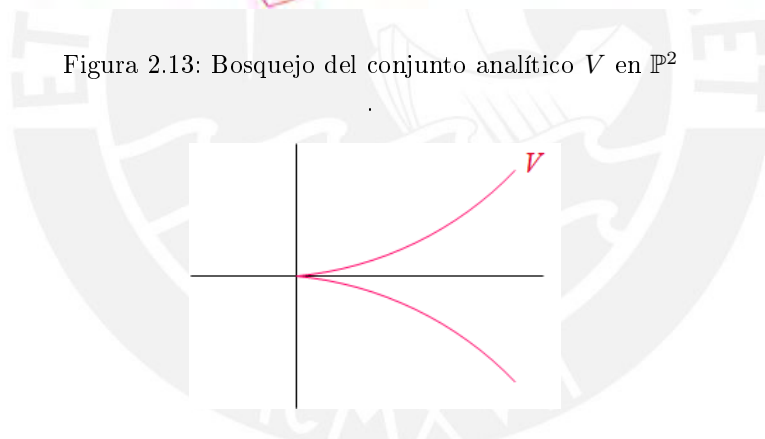


Figura 2.14: El conjunto analítico $V : y^2 - x^3 = 0$

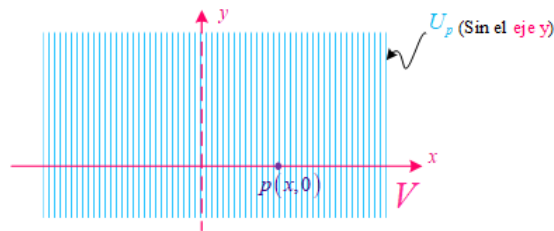


Figura 2.15: El conjunto $U_p = (\mathbb{C} - \{0\}) \times \mathbb{C}$ en \mathbb{C}^2

- Si se considera un punto $q = (0, y)$ con $y \neq 0$ que está sobre el eje y , escogemos el abierto $U_q = \mathbb{C} \times (\mathbb{C} - \{0\})$ y $f_q : U_q \rightarrow \mathbb{C}$, $f_q(x, y) = x$, de manera que

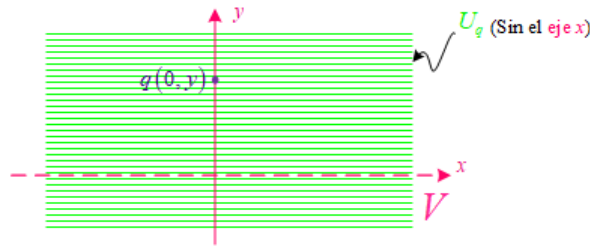


Figura 2.16: El conjunto $U_q = \mathbb{C} \times (\mathbb{C} - \{0\})$ en \mathbb{C}^2

$V \cap U_q : f_q = 0$, ver figura 2.16.

- Si se considera el punto que está en el origen: $o = (0, 0)$, escogemos el abierto $U_o = B(0, r)$ una bola abierta de centro en el origen y radio r y $f_o : U_o \rightarrow \mathbb{C}$, $f_o(x, y) = xy$ de manera que: $V \cap U_o : f_o = 0$, ver figura 2.17

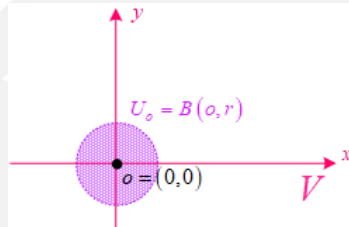


Figura 2.17: El Conjunto analítico V y la bola abierta $U_o = B(0, r)$ en \mathbb{C}^2

Por lo tanto, para cada $g \in \mathcal{O}(U_p)$ tal que $g|_{U_p \cap V} \equiv 0$ se tiene que existe $h \in \mathcal{O}(U_p)$ tal que $g = hf_p$ en U_p . Esta propiedad no la tiene la función f_p , sin embargo estamos interesados en el tipo de funciones f_p que a continuación definiremos.

Definición 2.3.6. Una *función definidora* de V en el punto p , es una función $f_p \in \mathcal{O}(U_p)$ que define V en U_p , vecindad de p , tal que para toda $g_p \in \mathcal{O}(U_p)$, $g_p|_{U_p \cap V} = 0$ existe una función holomorfa $h_p \in \mathcal{O}(U_p)$, tal que

$$g_p = h_p f_p \tag{2.18}$$

La propiedad de Dominio de Factorización Única (DFU) del anillo de gérmenes de funciones holomorfas \mathcal{O}_p en un punto $p \in M$ garantiza la existencia de estas funciones definidoras en una pequeña vecindad de p , ver Teorema 6 Cap. 1 en [FH98].

Luego, tenemos un cubrimiento $V \subset \bigcup_j U_j$ y una familia de funciones definidoras $f_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ de este conjunto analítico, tales que:

- (i) Existe $\{U_j\}_{j \in J}$ cubrimiento de V tales que $V \cap U_j : f_j = 0$, $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$.

- (ii) Existen $f_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ (funciones holomorfas no nulas en algún punto de U_{ij}) tal que $f_i = f_{ij} \cdot f_j$ en $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

Tenemos entonces que las funciones holomorfas $f_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{C}^* = GL(\mathbb{C}, 1)$ cumplen las condiciones de cociclo:

$$\begin{cases} f_{ii} = id \\ f_{ij} \cdot f_{ji} = id \\ f_{ij} \cdot f_{jk} \cdot f_{ki} = id \end{cases} \quad (2.19)$$

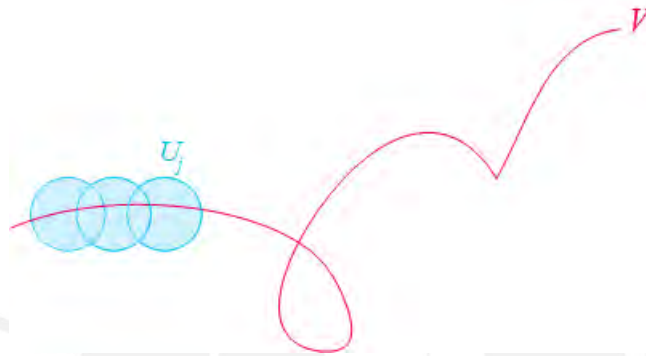


Figura 2.18: Cubrimiento $\{U_j\}$ del conjunto analítico V .

Consideramos $U_* = M - V$, $f_* = 1$ y $J^* = J \cup \{*\}$. Así tenemos $\{U_j\}_{j \in J^*}$ un cubrimiento abierto de M y las funciones $f_{ij}^* = f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$, $i, j \in J^*$ que cumplen las condiciones de cociclo en M . Denotamos por $[V]$ al fibrado definido por el cociclo $\{f_{jk}^*\}$ en M .

Definición 2.3.7. Un conjunto analítico V de una variedad compleja M es *irreducible* si para cualquier de los dos conjuntos analítico V_1 y V_2 de M tal que $V = V_1 \cup V_2$ se tiene que $V_1 = \emptyset$ o $V_2 = \emptyset$. Cuando un conjunto analítico no es irreducible se llama *reducible*.

Ejemplo 2.3.8. En el espacio complejo \mathbb{C}^2 , el conjunto analítico

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}$$

es reducible, pues se puede descomponer en dos conjuntos $V_1 \neq \emptyset$ y $V_2 \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = 0\} \\ V &= V_1 \cup V_2 \end{aligned}$$

siendo $V_1 : \text{eje } y$ y $V_2 : \text{eje } x$ que se intersectan en el origen, ver figura 2.19.

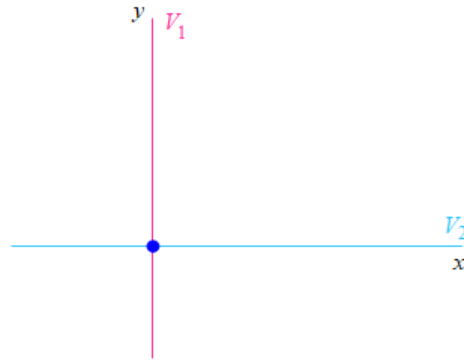


Figura 2.19: Conjunto analítico $V : xy = 0$ reducible en \mathbb{C}^2 .

Ejemplo 2.3.9. En el espacio complejo \mathbb{C}^2 , el conjunto analítico

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 - y^2 - x^3 = 0\}$$

globalmente es *irreducible* en \mathbb{C}^2 . Sin embargo localmente, se puede descomponer en dos conjuntos analíticos en una vecindad pequeña del origen, por lo tanto el conjunto V en el origen se torna *reducible*, ver figura 2.20.

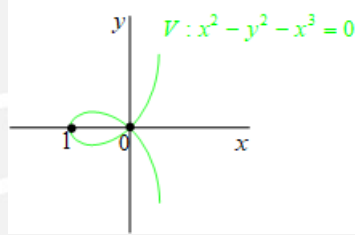


Figura 2.20: Conjunto analítico $V : x^2 - y^2 - x^3 = 0$ irreducible en \mathbb{C}^2 .

A continuación recordemos como son las funciones *meromorfas* en \mathbb{C} . Para ello consideremos una función holomorfa f en $B(0, r) - \{0\}$, donde $B(0, r)$ es la bola abierta en \mathbb{C} . La función f se puede escribir de la forma:

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots$$

es la *serie de Laurent*. Se tiene, entonces:

- (1) Si $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{Z}_{<0}$ entonces f se extiende de forma holomorfa al origen.
- (2) Si $\{n \in \mathbb{Z}_{<0} : a_n \neq 0\}$ infinito se dice que $z = 0$ es una *singularidad esencial* de f .

(3) Si $\{n \in \mathbb{Z}_{<0} : a_n \neq 0\}$ finito digamos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-n}}{z^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots, \quad a_{-n} \neq 0 \\ &= \frac{a_{-n} + a_{-(n-1)}z + \cdots + a_{-1}z^{n-1} + a_0z^n + a_1z^{n+1} + a_2z^{n+2} + \cdots}{z^n} \\ f(z) &= \frac{g(z)}{h(z)}, \quad h \not\equiv 0 \quad \text{en el disco } D(O, r) \end{aligned}$$

es el cociente de dos funciones holomorfas $g(z)$ y $h(z)$, en este caso decimos que f es *meromorfa* con un polo en el origen de orden n . Los ceros de f son los ceros de g , los polos de f son los polos de h .

Se puede extender la función f a la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ (variedad compleja de $\dim \overline{\mathbb{C}} = 1$) con estructura compleja

$$\begin{aligned} f : B(0, r) &\xrightarrow{\text{holomorfa}} \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\longrightarrow \begin{cases} f(z), & z \neq 0 \\ \infty, & z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Se observa, que toda función meromorfa induce una función holomorfa, asignándole a los polos, ∞ (infinito). Es decir, una función meromorfa y holomorfa en variedades se pueden estudiar como uno solo. A diferencia de la singularidad esencial no hay forma como hacerlo holomorfa, por mucho que se le asigne infinito.

En general, una función $f \in \mathcal{O}(D - A)$, donde $D \subset \mathbb{C}$ es un dominio y $A \subset D$ conjunto discreto cerrado, es llamada *meromorfa* en D si todo $a \in A$ es un polo para f . Si f es meromorfa, entonces $f \in \mathcal{M}(D)$, donde $\mathcal{M}(D)$ es el cuerpo cociente del dominio $\mathcal{O}(D)$.

Definición 2.3.10. Sean M una variedad compleja y \mathcal{M}_p el cuerpo cociente del anillo \mathcal{O}_p . Una aplicación

$$\begin{aligned} f : M &\dashrightarrow \mathcal{M} = \bigcup_{p \in M} \mathcal{M}_p^1 \\ p &\mapsto f_p \in \mathcal{M}_p \end{aligned}$$

es *meromorfa* si $\forall p \in M$ existen $g_p, h_p \in \mathcal{O}_p, h_p \neq 0$ y sin factores comunes tal que

$$f_p = \frac{g_p}{h_p} \quad (2.20)$$

esto es, existe $V_p \subset M$ vecindad de p tal que $f, g, h \in \mathcal{O}(V_p)$ y $f = \frac{g}{h}$ en V_p .

Es decir, una función meromorfa f es una familia $\{f_i\}$ tal que existe un cubrimiento $M = \bigcup_i V_i$ y dos colecciones de funciones holomorfas $g_i, h_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ relativamente primos tal que $f_i = \frac{g_i}{h_i}$.

Definición 2.3.11. Sean M una variedad, $V \subset M$ un conjunto analítico irreducible y $p \in V$, definimos *el orden* $\text{ord}_{V,p} f$ de f en p como el mayor entero $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f_p = u_p v_p^n \quad \text{en } \mathcal{O}_p \quad (2.21)$$

¹indicamos por la flecha punteada para indicar que está función no está definida en todo M

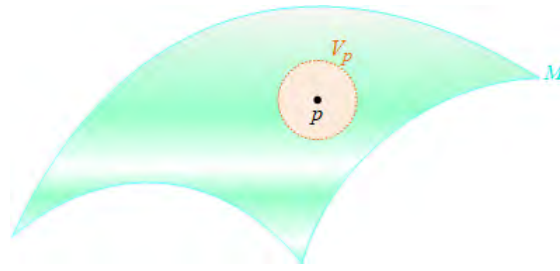


Figura 2.21: V_p vecindad de p contenida en la variedad M .

donde v_p es la función definidora de V en p , f_p germen de f en p y $u_p \in \mathcal{O}_p^*$.

Ejemplo 2.3.12. Consideremos la función $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa definida por:

$$f(x, y) = x^2 y^3 (1 + x + y + xy)$$

y el conjunto analítico $V : xy = 0$. Analicemos el orden de f en cada punto de V .

- Si $p \in \text{eje } X - \{O\}$ entonces:

$$f_p = \underbrace{x^2(1 + x + y + xy)}_{u_p} \underbrace{y^3}_{v_p^3}$$

$ord_{V,p} f = 3$ orden de f en p
 $v_p = y$ función definidora

- Si $q \in \text{eje } Y - \{O\}$ entonces:

$$f_q = \underbrace{y^3(1 + x + y + xy)}_{u_q} \underbrace{x^2}_{v_q^2}$$

$ord_{V,q} f = 2$ orden de f en q
 $v_q = x$ función definidora

- Si $O = (0, 0)$ (origen de coordenadas), entonces

$$f_o = \underbrace{y(1 + x + y + xy)}_{u_o} \underbrace{(xy)^2}_{v_o^2}$$

$ord_{V,o} f = 2$ orden de f en o
 $v_o = xy$ función definidora

Definición 2.3.13. Sea M una variedad compleja, un *divisor* en M es una suma formal finita

$$D = \sum_j n_j V_j \tag{2.22}$$

donde $n_j \in \mathbb{Z}$ y $V_j \subset M$ son conjuntos analíticos de codimensión uno irreducibles. Denotamos por $Div(M)$ al conjunto de todos los divisores sobre M , grupo libre

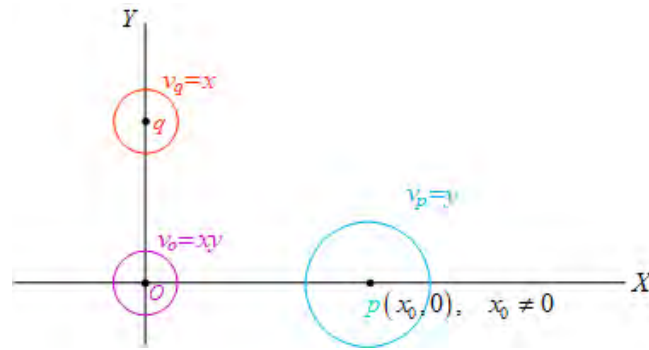


Figura 2.22: Las funciones definidoras v_p, v_q y v_o de f , en p, q y o .

generado por los conjuntos analíticos de codimensión 1 irreducibles:

Si $D_1, D_2 \in Div(M)$

$$D_1 = \sum n_j V_j$$

$$D_2 = \sum m_j V_j$$

definimos

$$D_1 + D_2 := \sum (n_j + m_j) V_j \tag{2.23}$$

Un divisor D es llamado *efectivo* si $n_j > 0, \forall j$.

Veremos que esencialmente este grupo libre generado por los conjuntos analíticos está identificado con los fibrados lineales.

Para asociarle un fibrado lineal a un divisor $D = \sum_j n_j V_j$, consideremos su *sopORTE*, se define como la unión de conjuntos analíticos

$$|D| = \bigcup_{n_j \neq 0} V_j \tag{2.24}$$

es decir dado un divisor le podemos asociar un fibrado lineal y recíprocamente.

Ahora, podemos considerar las funciones que definen el cociclo de D :

- (i) Si $p \in |D|$, existe $k = k(p) \in \mathbb{N}$ tal que $p \in \bigcap_{i=1}^k V_{j_i}$, y $U_{j_i} \subset M$ son abiertos donde $V_{j_i} |_{U_{j_i}} : f_{j_i} = 0$ (f_{j_i} es la función definidora de V_{j_i}), tomemos

$$f_p = \prod_{i=1}^k (f_{j_i})^{n_{j_i}} \quad \text{definido en} \quad U_p = \bigcap_{i=1}^k U_{j_i}$$

- (ii) Si $p \notin |D|$, tomemos

$$f_p = 1 \quad \text{en} \quad U_p = M - |D|.$$

Consideremos $J = M$, para $i, j \in J$ definimos

$$f_{ij} = \frac{f_i}{f_j} \quad \text{en } \mathcal{O}^*(U_{ij}) \tag{2.25}$$

las cuales cumplen las condiciones de cociclo

$$\begin{cases} f_{ii} = 1 & \text{en } U_i \\ f_{ij} \cdot f_{ji} = 1 & \text{en } U_{ij} \\ f_{ij} \cdot f_{jk} \cdot f_{ki} = 1 & \text{en } U_{ijk} \end{cases} \tag{2.26}$$

y por tanto definen un fibrado lineal $[D]$.

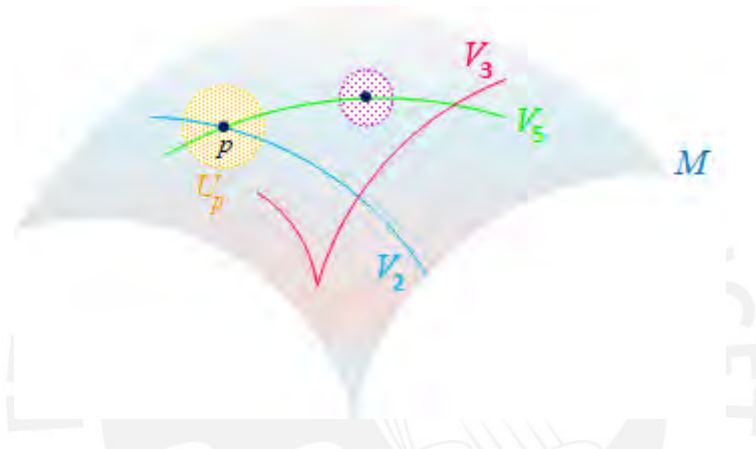


Figura 2.23: El punto $p \in (V_2 \cap V_5)$

Ejemplo 2.3.14. Sea el divisor $D = 2.i - 5.\sqrt{2} + 9.e^{2\pi i} \in Div(\mathbb{C})$, entonces los conjuntos analíticos están definidos como:

$$\begin{aligned} V_1 : f_1(z) = 0 & \quad \text{donde } f_1(z) = (z - i) & \quad \text{función definidora} \\ V_2 : f_2(z) = 0 & \quad \text{donde } f_2(z) = (z - \sqrt{2}) & \quad \text{función definidora} \\ V_3 : f_3(z) = 0 & \quad \text{donde } f_3(z) = (z - e^{2\pi i}) & \quad \text{función definidora} \end{aligned}$$

Localmente las funciones f_1, f_2, f_3 definen la función meromorfa

$$f(z) = \frac{f_1^2 f_3^9}{f_2^5},$$

los ceros de f son los puntos i y $e^{2\pi i}$ y el polo de f es el punto $\sqrt{2}$. La familia de funciones f_{ij} :

$$\begin{cases} f_{12} = \frac{f_1}{f_2} \\ f_{23} = \frac{f_2}{f_3} \\ f_{13} = \frac{f_1}{f_3} \end{cases}$$

cumplen las condiciones de cociclo y por tanto definen un fibrado lineal $[D]$.

Definición 2.3.15. En el espacio proyectivo \mathbb{P}^n , un *divisor* es una suma formal finita

$$D = \sum_j n_j V_j$$

donde $V_j : f_j = 0$, donde los $f_j \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ son polinomios homogéneos irreducibles y los coeficientes n_j son números enteros.

Ejemplo 2.3.16. En el espacio proyectivo \mathbb{P}^2 tenemos el divisor:

$$D = 2.V_1 - 3.V_2$$

y los conjuntos analíticos:

$$\begin{aligned} V_1 : ZY^2 - X^3 &= 0 \\ V_2 : ZY - X^2 &= 0 \end{aligned}$$

En los abiertos afines U_0, U_1 y U_2 de \mathbb{P}^2 , se definen localmente funciones meromorfas:

$$U_0: Z = 1$$

$$\left. \begin{aligned} V_1|_{U_0}: y^2 - x^3 &= 0 \\ V_2|_{U_0}: y - x^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \implies f_0 = \frac{(y^2 - x^3)^2}{(y - x^2)^3}$$

$$U_1: Y = 1$$

$$\left. \begin{aligned} V_1|_{U_1}: z - x^3 &= 0 \\ V_2|_{U_1}: z - x^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \implies f_1 = \frac{(z - x^3)^2}{(z - x^2)^3}$$

$$U_2: X = 1$$

$$\left. \begin{aligned} V_1|_{U_2}: zy^2 - 1 &= 0 \\ V_2|_{U_2}: zy - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \implies f_2 = \frac{(zy^2 - 1)^2}{(zy - 1)^3}$$

Las funciones f_0, f_1 y f_2 son determinadas por el divisor, además, son representaciones locales de la función meromorfa $f(X, Y, Z)$, entonces

$$f(X, Y, Z) = \frac{(ZY^2 - X^3)^2}{(ZY - X^2)^3}$$

La familia de funciones

$$f_{ij} = \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_{ij}), \quad i, j = 0, 1, 2$$

satisfacen las condiciones de cociclo. Por lo tanto determinan un fibrado lineal $[D]$.

Ejemplo 2.3.17. El hiperplano del infinito $\mathcal{H}_\infty \subset \mathbb{P}^n$, donde

$$\mathcal{H}_\infty = \{[x_0 : \dots : x_n] / x_0 = 0\}$$

es un divisor en \mathbb{P}^n , son los ceros de una función que es un polinomio homogéneo de grado 1, este divisor tiene asociado un fibrado $\mathcal{O}(1)$ cuyas funciones de transición son g_{ij} .

Definición 2.3.18 (Divisor de una función meromorfa). Sea $f : M \dashrightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa sobre M , definimos el divisor de f como

$$(f) = \sum \text{ord}_{V,p} f \cdot V \tag{2.27}$$

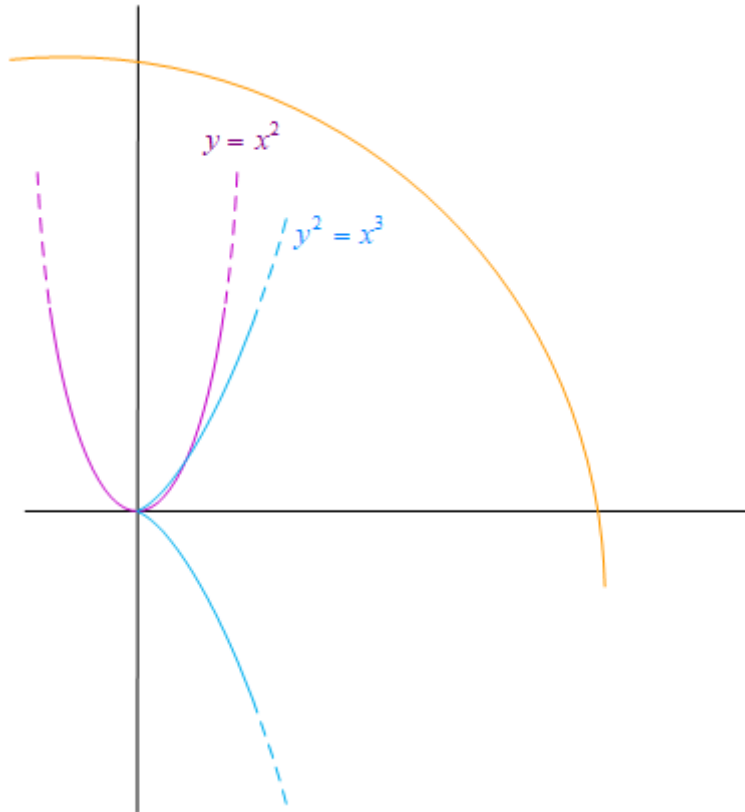


Figura 2.24: Localmente, $z = 1$, $V_1 : y^2 = x^3$ y $V_2 : y = x^2$

Podemos descomponer este divisor como suma de dos divisores:

$$(f)_0 = \sum_{\substack{p \in M \\ \text{ord}_{V,p} f \geq 0}} \text{ord}_{V,p} f \cdot V \quad \text{el divisor de ceros}$$

$$(f)_\infty = \sum_{\substack{p \in M \\ \text{ord}_{V,p} f < 0}} \text{ord}_{V,p} f \cdot V \quad \text{el divisor de polos}$$

del divisor de f

$$(f) = (f)_0 - (f)_\infty \quad (2.28)$$

Ejemplo 2.3.19. (1) Sean el plano complejo \mathbb{C} y la función meromorfa

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{(z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_l)^{n_l}}{(z - w_1)^{m_1} \dots (z - w_s)^{m_s}}$$

donde $w_j \notin \{z_1, \dots, z_l\}$, $\forall j$.

El divisor de f está dado por

$$(f) = \underbrace{n_1 \cdot z_1 + \dots + n_l \cdot z_l}_{(f)_0} - \underbrace{(m_1 \cdot w_1 + \dots + m_s \cdot w_s)}_{(f)_\infty}$$

(2) Sobre el plano proyectivo \mathbb{P}^2 definimos la función meromorfa

$$\begin{aligned}
 f : \quad \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow \mathbb{C} \\
 [x_0 : x_1, x_2] & \mapsto \frac{(x_0 + x_1)^9 x_2^3}{(x_0 - x_1)^5 x_0^7} \\
 [tx_0 : tx_1 : tx_2] & \mapsto \frac{(tx_0 + tx_1)^9 (tx_2)^3}{(tx_0 - tx_1)^5 (tx_0)^7} = \frac{(x_0 + x_1)^9 x_2^3}{(x_0 - x_1)^5 x_0^7}
 \end{aligned}$$

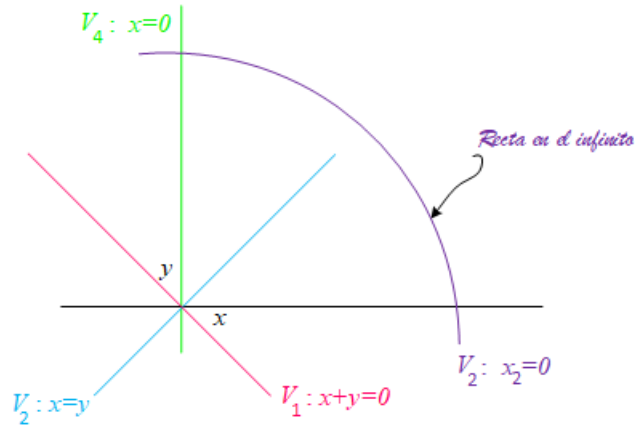


Figura 2.25: Conjuntos analíticos: $V_1 : x + y = 0$, $V_2 : x_2 = 0$, $V_3 : x = y$ y $V_4 : x = 0$

Si consideramos $x_2 \neq 0$

$$\begin{aligned}
 [x_0 : x_1 : x_2] &= \left[\frac{x_0}{x_2} : \frac{x_1}{x_2} : 1 \right] \\
 &= [x : y : 1]
 \end{aligned}$$

entonces, se tiene la representación local de f en las coordenadas (x, y) :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\
 [x : y : 1] & \mapsto & \frac{(x + y)^9}{(x - y)^5 x^7} \\
 \uparrow & \nearrow & \\
 (x, y) \in \mathbb{C}^2 & &
 \end{array}$$

Por lo tanto el divisor de la función meromorfa f está dado por:

$$(f) = \underbrace{(9V_1 + 3V_2)}_{(f)_0} - \underbrace{(5V_3 + 7V_4)}_{(f)_\infty}$$

2.4 Relaciones de divisores con fibrados lineales

Proposición 2.4.1. *Sea D un divisor sobre una variedad compleja M entonces $[D]$ es trivial si y sólo si existe una función meromorfa f tal que $D = (f)$.*

Prueba. Suficiencia: Por hipótesis, existe una función $f : M \dashrightarrow \mathbb{C}$ meromorfa tal que $D = (f) = (f)_0 - (f)_\infty$ y es localmente el cociente de dos funciones holomorfas, esto es, existe un cubrimiento de $M = \bigcup_{i \in I} V_i$ y $g_i, h_i : V_i \rightarrow \mathbb{C}$ funciones holomorfas tal que:

$$f|_{V_i} = \frac{g_i}{h_i}$$

Así, el divisor $(f)_0$ es definido localmente por g_i y $(f)_\infty$ es definido localmente por h_i :

$$(f)_0 \cap V_i = \{g_i = 0\}$$

$$(f)_\infty \cap V_i = \{h_i = 0\}$$

Luego, como $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$, las funciones de transición de $[D] = [(f)]$:

$$l_{ij} = \frac{\frac{g_i}{h_i}}{\frac{g_j}{h_j}} = \frac{f}{f} = 1$$

esto es, el fibrado $[(f)]$ es trivial.

Necesaria: Por hipótesis, $[D]$ es un fibrado trivial. Sean $l_{ij} : V_{ij} \rightarrow \mathbb{C}^*$ las funciones de transición de $[D]$.

Como $[D]$ es trivial, entonces existe un isomorfismo de $[D]$ con el fibrado trivial $M \times \mathbb{C} \rightarrow M$, luego existen $a_i : V_i \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ funciones holomorfas tal que:

$$a_j \cdot 1 = l_{ij} a_i \quad \text{en } V_{ij}, \quad (2.29)$$

donde 1 es la función de transición del fibrado trivial

Por otro lado, si $D|_{V_i} : g_i = 0$, entonces las funciones de transición de D están definidas como

$$l_{ij} = \frac{g_j}{g_i} \quad \text{en } V_{ij} \quad (2.30)$$

donde los g_i son funciones meromorfas que definen localmente D .

De (2.29) y (2.30) tenemos

$$\frac{a_j}{a_i} = l_{ij} = \frac{g_j}{g_i} \quad \text{en } V_{ij}$$

esto es

$$\frac{g_i}{a_i} = \frac{g_j}{a_j} \quad \text{en } V_{ij} \quad (2.31)$$

Así tenemos una función meromorfa $f : M \dashrightarrow \mathbb{C}$ definida localmente

$$f|_{V_i} = \frac{g_i}{a_i}$$

que estará bien definida (2.31). Además, como los ceros y polos de f coinciden con los ceros y polos de g_i (a_i no se anulan en ningún punto) tenemos que $D = (f)$. \square

Definición 2.4.2. Dos divisores $D_1, D_2 \in \text{Div}(M)$ son *linealmente equivalentes* si existe una función meromorfa $f : M \dashrightarrow \mathbb{C}$ tal que $D_1 - D_2 = (f)$.

Así tenemos una relación de equivalencia, $D_1, D_2 \in \text{Div}(M)$.

$$D_1 \sim D_2 \iff D_1 \text{ y } D_2 \text{ son linealmente equivalentes}$$

Sea M y $FL(M)$ el conjunto de todos los fibrados lineales sobre M . En $FL(M)$ se tiene la relación de equivalencia $F, E \in FL(M)$

$$F \sim E \iff \exists \varphi : E \rightarrow F$$

un isomorfismo de fibrados. Denotamos $\text{Pic}(M) = \frac{FL(M)}{\sim}$ el espacio de las clases de isomorfismos de fibrados lineales de M llamado *grupo de Picard*.

Por la proposición anterior, dos divisores linealmente equivalentes definen el mismo fibrado. Por lo tanto, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.4.3. *Sean M una variedad y $\text{Pic}(M)$ el grupo de Picard. La aplicación*

$$\phi : \begin{array}{ccc} \text{Div}(M) & \rightarrow & \text{Pic}(M) \\ \text{linealmente equivalentes} & & \\ \overline{D} & \mapsto & \overline{[D]} \end{array}$$

es inyectiva.

Prueba. Sean $D_1, D_2 \in \text{Div}(M)$ tales que $\phi(\overline{D_1}) = \phi(\overline{D_2})$, entonces $\overline{[D_1]} = \overline{[D_2]}$ y así $[D_1]$ es isomorfo a $[D_2]$. Entonces $D_1 - D_2 = (f)$ para alguna función holomorfa $f : M \rightarrow \mathbb{C}$.

Por lo tanto, $\overline{D_1} = \overline{D_2}$ □

Definición 2.4.4. Sean M una variedad, L un fibrado. Una *sección meromorfa* de L es una aplicación $s : M \rightarrow L$ tal que para toda carta trivializadora $F_j : V_j \times \mathbb{C} \rightarrow L$ de L entonces $s|_{V_j(p)} = F_j(p, s_j(p))$ con $s_j : V_j \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa.

Observación 2.4.5. Sea V un conjunto analítico irreducible, si $s_i = g_{ij}s_j$ en V_{ij} , entonces, $\text{ord}_V s_j = \text{ord}_V s_i$. Luego, no existe ambigüedad en definir el orden $\text{ord}_V s$ de s en $V_i \cap V$ como $\text{ord}_V s_i$ cualquiera que sea i . Así, definimos el divisor de la sección meromorfa como:

$$(s) = \sum_V \text{ord}_V s \cdot V, \quad (2.32)$$

la suma está variando sobre todos los conjuntos irreducibles de M (compacta). Además, por construcción $[(s)]$ y L son isomorfos y es efectivo si s es una sección holomorfa (ya que, $\text{ord}_V s_i \geq 0$).

Proposición 2.4.6. *Si todo fibrado lineal tiene una sección meromorfa no trivial entonces la aplicación definida en la Proposición 2.4.3 es un isomorfismo. Si un fibrado lineal tiene una sección holomorfa no trivial entonces este fibrado es asociado con un divisor efectivo.*

Prueba. Para demostrar que la aplicación dada en la proposición es un isomorfismo basta que esta aplicación sea sobreyectiva, esto es, existe un divisor D tal que $[D]$ equivale a L . Como vimos en la observación 2.4.5 este divisor es dado por el divisor de la sección meromorfa (el cual existe por hipótesis).

Recíprocamente, si existe un divisor D tal que $L \equiv [D]$ entonces por la construcción hecha a partir de la definición 2.3.13 existen abiertos V_i y funciones meromorfas $s_j : V_j \dashrightarrow \mathbb{C}$ tal que $D|_{V_j} : s_j = 0$ y satisfacen la relación $s_i = g_{ij}s_j$ en V_{ij} . Por lo tanto, esta relación determina una sección meromorfa de L en M , Ver sección 2.2.

2.5 Operaciones con fibrados vectoriales

Sean M una variedad, E y F fibrados vectoriales. Considere $\pi_1 : E \rightarrow M$ y $\pi_2 : F \rightarrow M$, proyección de E sobre la variedad M y proyección de F sobre M . Sean

$$f_{ij} : U_{ij} \rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \quad \text{transición de } \pi_1$$

$$g_{ij} : U_{ij} \rightarrow GL(m, \mathbb{C}) \quad \text{transición de } \pi_2$$

2.5.1 $E \oplus F$, suma de fibrados

Sea la aplicación $\pi : E \oplus F \rightarrow M$. Se busca construir un fibrado π cuyas fibras sean $\pi_1^{-1}(p) \oplus \pi_2^{-1}(p)$, esto es, $\pi^{-1}(p) = \pi_1^{-1}(p) \oplus \pi_2^{-1}(p)$.

Para ello considere la familia de aplicaciones

$$h_{ij} = f_{ij} \oplus g_{ij} : \begin{array}{l} U_{ij} \rightarrow GL(n+m, \mathbb{C}) \\ p \mapsto f_{ij}(p) \oplus g_{ij}(p) \end{array}$$

donde $f_{ij}(p) \oplus g_{ij}(p)$ tiene matriz asociada

$$\begin{pmatrix} f_{ij}(p) & 0 \\ 0 & g_{ij}(p) \end{pmatrix}$$

De la definición de h_{ij} se tiene que ellos cumplen las condiciones de cociclo, puesto que f_{ij} y g_{ij} cumplen estas condiciones. Por lo tanto h_{ij} determinan un fibrado $\pi : E \oplus F \rightarrow M$.

2.5.2 E^* , el dual de un fibrado vectorial E

Sean la variedad M , las aplicaciones $\pi : E \rightarrow M$ y $\tilde{\pi} : (E)^* \rightarrow M$ tal que $\pi^{-1}(p) = (\tilde{\pi}^{-1}(p))^*$

Sean V y W espacios vectoriales y $f : V \rightarrow W$ Sean V y W espacio vectoriales y $f : V \rightarrow W$ \mathbb{C} -lineal, f induce una aplicación \mathbb{C} -lineal entre los duales $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{C})$ y $W^* = \mathcal{L}(W, \mathbb{C})$ definida como

$$f^* : \begin{array}{l} W^* \rightarrow V^* \\ L \mapsto L \circ f \end{array}$$

Consideremos $\{v_1, \dots, v_n\}, \{w_1, \dots, w_m\}$ bases de V y W , $f(v_i) = \sum_j f_{ij}w_j$, donde (f_{ij}) es la matriz correspondiente a f . Sean $\{T_1, \dots, T_n\}$ y $\{L_1, \dots, L_m\}$ bases

duales, de las bases dadas, de V^* y W^* , esto es, $T_i(V_j) = \delta_{ij}$, $L_i(w_j) = \delta_{ij}$. Luego

$$f^*(L_i)(v_j) = L_i(f(v_j)) = L_i\left(\sum_l f_{jl}w_l\right) = f_{ji}$$

Por lo tanto, la matriz f^* es:

$$(f^*) = (f)^T \quad (2.33)$$

Se quiere construir un fibrado cuya fibra sea $\pi_1^{-1}(p)^*$, para tal fin consideremos la unión disjunta $E^* = \bigcup_{p \in M} (\tilde{\pi}^{-1}(p))^*$ y la proyección $\pi : E^* \rightarrow M$ definida como $\pi(v) = p$ si $v \in (\tilde{\pi}^{-1}(p))^*$.

Sea $F_i : U_i \times \mathbb{C}^n \rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U_i)$ una trivialización de E y a partir de ella construyamos las parametrizaciones de E^* ,

$$\begin{aligned} F_i^* : U_i \times (\mathbb{C}^n)^* &\rightarrow \pi^{-1}(U_i) \\ (p, T) &\mapsto T \circ (F_i|_{\tilde{\pi}^{-1}(p)})^{-1} \end{aligned}$$

entonces en U_{ij} , el cambio de coordenadas es determinada por las composiciones

$$\begin{aligned} U_{ij} \times (\mathbb{C}^n)^* &\xrightarrow{F_i^*} \tilde{\pi}^{-1}(U_{ij}) \xrightarrow{(F_j^*)^{-1}} U_{ij} \times (\mathbb{C}^n)^* \\ (p, T) &\mapsto T \circ (F_i|_{\tilde{\pi}^{-1}(p)})^{-1} \mapsto (p, (f_{ji}^{-1})^*(T)) \end{aligned}$$

Luego de 2.33, tenemos que los cociclos correspondientes a E^* son

$$\begin{aligned} (f_{ji}^{-1})^* : U_{ij} &\rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \\ p &\mapsto [(f_{ji}(p))^{-1}]^T \end{aligned}$$

esto es, $(F_j^*)^{-1} \circ (F_i^*)(p, v) = (p, [(f_{ji}(p))^{-1}]^T \cdot v)$.

2.5.3 $E \otimes F$, producto tensorial de fibrados

Se busca construir un fibrado cuyas fibras son $\pi_1^{-1}(p) \otimes \pi_2^{-1}(p)$, $p \in M$, para ello se considera la unión disjunta $E \otimes F = \bigcup_{p \in M} \pi_1^{-1}(p) \otimes \pi_2^{-1}(p)$, y la aplicación

$$\begin{aligned} \pi : E \otimes F &\rightarrow M \\ v \otimes w &\mapsto \pi(v \otimes w) = p \end{aligned}$$

donde $v \in \pi_1^{-1}(p)$, $w \in \pi_2^{-1}(p)$.

Si $F_i : U_i \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi_1^{-1}(U_i)$ y $G_i : U_i \times \mathbb{C}^m \rightarrow \pi_2^{-1}(U_i)$ son trivializaciones de E y F respectivamente, definimos

$$\begin{aligned} H_i : U_i \times \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m &\rightarrow \pi^{-1}(U_i) \\ (p, \sum_{a,b} \alpha_{ab} e_a \otimes e'_b) &\mapsto \sum_{a,b} \alpha_{ab} F_i(p, e_a) \otimes G_i(p, e'_b) \in \pi_1^{-1}(p) \otimes \pi_2^{-1}(p) \end{aligned}$$

donde e_1, \dots, e_n es una base de \mathbb{C}^n , $e_a \in \pi_1^{-1}(p)$ y e'_1, \dots, e'_m es una base de \mathbb{C}^m , $e'_b \in \pi_2^{-1}(p)$.

Luego, el cambio de coordenadas

$$H_j^{-1} \circ H_i \left(p, \sum_{a,b} \alpha_{ab} e_a \otimes e'_b \right) = \left(p, (f_{ij} \otimes g_{ij})(p) \left(\sum_{a,b} \alpha_{ab} e_a \otimes e'_b \right) \right).$$

Así, $h_{ij}(p) = f_{ij}(p) \otimes g_{ij}(p)$, $p \in U_{ij}$. Además,

$$\begin{aligned} h_{ij}(p)(e_a \otimes e'_b) &= f_{ij}(p)(e_a) \otimes g_{ij}(p)(e'_b) \\ &= \left(\sum_{r=1}^n f_{ra}^{ij} e_r \right) \otimes \left(\sum_{s=1}^m g_{sb}^{ij} e'_s \right) \\ &= \sum_{r,s} f_{ra}^{ij} g_{sb}^{ij} e_r \otimes e'_s \end{aligned}$$

donde (f_{ra}^{ij}) y (g_{sb}^{ij}) son las representaciones matriciales de f_{ij} y g_{ij} respectivamente, luego

$$\begin{aligned} h_{ij} = f_{ij} \otimes g_{ij} &: U_{ij} \rightarrow GL(nm, \mathbb{C}) \\ p &\mapsto (f_{ra}^{ij}(p) g_{sb}^{ij}(p))_{\substack{a,r=1,\dots,n \\ s,b=1,\dots,m}} \end{aligned}$$

2.5.4 $\Lambda^k E$, producto exterior del fibrado E .

En este caso, se busca construir un fibrado cuyas fibras sean $\Lambda^k \pi_1^{-1}(p)$. Para ello consideremos la unión disjunta

$$\Lambda^k E = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k \pi_1^{-1}(p)$$

y la aplicación definida como

$$\begin{aligned} \pi &: \Lambda^k E \rightarrow M \\ u_1 \wedge \dots \wedge u_k &\mapsto \pi(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = p, \quad u_i \in \pi_1^{-1}(p) \end{aligned}$$

Si $F_i : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi_1^{-1}(p)$ es trivialización de E , definamos

$$\begin{aligned} H_i : U_i \times \Lambda^k \mathbb{R}^n &\rightarrow \pi^{-1}(U_i) \\ \left(p, \sum_{a_1, \dots, a_k} \alpha_{a_1 \dots a_k} e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_k} \right) &\mapsto \sum_{a_1, \dots, a_k} \alpha_{a_1 \dots a_k} F_i(p, e_{a_1}) \wedge \dots \wedge F_i(p, e_{a_k}) \end{aligned}$$

donde e_1, \dots, e_n es una base de \mathbb{C}^n . Por lo tanto en la intersección U_{ij} tenemos:

$$H_j^{-1} \circ H_i(p, v) = (p, h_{ji}(p)(v))$$

con

$$\begin{aligned} h_{ij} = f_{ij} \wedge \dots \wedge f_{ij} &: U_{ij} \rightarrow GL\left(\binom{n}{k} \times \left(\binom{n}{k}, \mathbb{C}\right)\right) \\ p &\mapsto (\det(f_{a_r b_s}^{ij}(p)))_{\substack{r,s=1,\dots,k \\ b_1 < \dots < b_k}} \end{aligned}$$

donde $(f_{a_r b_s}^{ij}(p))_{r,s=1,\dots,k}$ es la submatriz $k \times k$ de $f_{ji}(p) = (f_{ab}^{ij}(p))$.

2.6 Subfibrados y fibrados cocientes

Sean M una variedad y $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de rango m .

Definición 2.6.1. Un *subfibrado* F de E es una subvariedad de E tal que $\pi_1 = \pi|_F : F \rightarrow M$ es un fibrado de rango $n < m$ y las fibras $\pi_1^{-1}(p)$ son subespacios vectoriales de $\pi^{-1}(p)$.

Sean U'_i un abierto y $p \in M$, $p \in U'_i \subset M$ tal que F y E se trivializan sobre U'_i . Consideremos (s_1, \dots, s_n) un referencial de F en U'_i :

$$(s_1(q), \dots, s_n(q)) \text{ base de } \pi_1^{-1}(q), \forall q \in U'_i$$

y $F_i : U'_i \times \mathbb{C}^m \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ una trivialización de E .

Como F es un subfibrado de E , se tiene que s_1, \dots, s_n son secciones de E , tal que $s_1(q), \dots, s_n(q) \in E_q = \pi^{-1}(q)$ son linealmente independientes $\forall q \in U'_i$.

Completamos la base

$$s_1(p), \dots, s_n(p), s'_{n+1}, \dots, s'_m \text{ de } E_p$$

Como los $s'_a \in E_p$ entonces existen vectores $w_a \in \mathbb{C}^m$ tales que

$$F_i(p, w_a) = s'_a, \quad a = n+1, \dots, m.$$

Extendemos s'_{n+1}, \dots, s'_m como:

$$\begin{aligned} s_{n+1}, \dots, s_m & : U'_i \rightarrow E \\ q & \mapsto F_i(q, w_a). \end{aligned}$$

Existe una vecindad $U_i \subset U'_i$ tal que s_{n+1}, \dots, s_m siguen siendo linealmente independientes y por lo tanto $s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_m$ forman un referencial de E en U_i .

Luego podemos considerar una base (w_1, \dots, w_m) de \mathbb{C}^m tal que (w_1, \dots, w_n) es una base de \mathbb{C}^n y

$$s_1^i(q) = F_i(q, w_1), \dots, s_n^i(q) = F_i(q, w_n)$$

es un referencial de F . Entonces

$$\begin{aligned} G_i : U_i \times \mathbb{C}^n & \rightarrow \pi_1^{-1}(U_i) \\ (q, v) & \mapsto v_1 s_1^i(q) + \dots + v_n s_n^i(q), \end{aligned}$$

es una trivialización de F , donde $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Análogamente, escribimos F_i en término de su referencial, esto es:

$$\begin{aligned} F_i : U_i \times \mathbb{C}^m & \rightarrow \pi^{-1}(U_i) \\ (q, v) & \mapsto v_1 s_1^i(q) + \dots + v_m s_m^i(q), \end{aligned}$$

donde $v = (v_1, \dots, v_m)$.

Como

$$s_a^j(q) = g_{11}^{ji} s_1^i(q) + \dots + g_{1n}^{ji} s_n^i(q) + 0s_{n+1}^i(q) + \dots + 0s_m^i(q), \quad (2.34)$$

donde $q \in U_i \cap U_j$, $a = 1, \dots, n$. Por lo tanto

$$F_j(q, w_a) = F_i(q, g_{11}^{j_i} w_1 + \dots + g_{1n}^{j_i} w_n + 0w_{n+1} + \dots + 0w_m)$$

Luego

$$(q, f_{ij}(q)w_a) = F_i^{-1}F_j(q, w_a) = (q, g_{11}^{j_i} w_1 + \dots + g_{1n}^{j_i} w_n + 0w_{n+1} + \dots + 0w_m)$$

Para $a = n+1, \dots, m$ no necesariamente tenemos ceros como coeficiente de $s_{n+1}^j(q), \dots, s_m^j(q)$

Así

$$\begin{aligned} F_i^{-1} \circ F_j & : U_{ij} \times \mathbb{C}^m \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{C}^m \\ & (p, v) \mapsto (p, f_{ij}(p).v) \\ G_i^{-1} \circ G_j & : U_{ij} \times \mathbb{C}^m \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{C}^m \\ & (p, v) \mapsto (p, g_{ij}(p).v) \end{aligned}$$

son los cambios de coordenadas de las trivializaciones de E y F respectivamente. Matricialmente se relacionan como:

$$f_{ij} = \begin{pmatrix} (g_{ab}^{j_i}) & 0 \\ (l_{ab}^{j_i}) & (h_{ab}^{j_i}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ l_{ij} & h_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

donde $(g_{ab}^{j_i})$ matriz de orden $n \times n$, $(l_{ab}^{j_i})$ matriz de orden $(m-n) \times n$, $(h_{ab}^{j_i})$ matriz de orden $(m-n) \times (m-n)$ y la matriz cero de orden $n \times (m-n)$.

2.6.1 Secuencia de Euler

La secuencia de Euler, es una secuencia exacta natural

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0) \xrightarrow{-i} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \xrightarrow{-\xi} T'\mathbb{P}^n \longrightarrow 0 \quad (2.36)$$

donde $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0) = \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$ es el fibrado trivial de rango 1, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ es el fibrado de hiperplanos, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ (suma de $n+1$ veces) y $T'\mathbb{P}^n$ es el fibrado tangente holomorfo al espacio proyectivo.

Explicaremos ahora, la secuencia de Euler:

(a) ξ es sobreyectiva.

En efecto

Sea la aplicación cociente $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$, sean Z_0, \dots, Z_n coordenadas homogéneas en \mathbb{C}^{n+1} y

$$\frac{Z_0}{Z_i}, \dots, \hat{1}, \dots, \frac{Z_n}{Z_i}$$

coordenadas afines correspondientes en \mathbb{P}^n .

Si $f_i(p)$, $i = 0, \dots, n$ es un polinomio homogéneo de grado 1 en \mathbb{C}^{n+1} tenemos

$$\pi_* \left(f_0(p) \frac{\partial}{\partial Z_0} + \dots + f_n(p) \frac{\partial}{\partial Z_n} \right) = \pi_* \left(f_0(\lambda p) \frac{\partial}{\partial Z_0} + \dots + f_n(\lambda p) \frac{\partial}{\partial Z_n} \right)$$

para cualquier $p \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego el campo vectorial

$$f_0(p) \frac{\partial}{\partial Z_0} + \dots + f_n(p) \frac{\partial}{\partial Z_n}$$

desciende a \mathbb{P}^n mediante el campo

$$\pi_* \left(f_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial Z_n} \right).$$

Así tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} & & f_0(p) \frac{\partial}{\partial Z_0} + \cdots + f_n(p) \frac{\partial}{\partial Z_n} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ \mathbb{P}^n & & \pi_* \left(f_0(p) \frac{\partial}{\partial Z_0} + \cdots + f_n(p) \frac{\partial}{\partial Z_n} \right) \end{array}$$

Por otro lado, el espacio tangente $T'\mathbb{P}^n$ a \mathbb{P}^n en un punto $\pi(p)$ está generado por los vectores

$$\left\{ \pi_* \frac{\partial}{\partial Z_i} \right\}_{i=0, \dots, n}$$

con la única relación

$$cZ_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + \cdots + cZ_n \frac{\partial}{\partial Z_n} = 0,$$

donde $c \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0) = \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$.

Ahora, la fibra de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ sobre un punto $\pi(p) \in \mathbb{P}^n$ corresponde a polinomios $f(Z_0, \dots, Z_n)$ homogéneos de grado 1. Consideramos

$$\underbrace{Z_i f \left(\frac{Z_0}{Z_i}, \dots, 1, \dots, \frac{Z_n}{Z_i} \right)}_{f_i} = f(Z_0, \dots, Z_n) = \underbrace{Z_j f \left(\frac{Z_0}{Z_j}, \dots, 1, \dots, \frac{Z_n}{Z_j} \right)}_{f_j} \quad (2.37)$$

$$f_i = \frac{Z_j}{Z_i} f_j$$

Como $\frac{Z_j}{Z_i}$ es la función de transición del fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, entonces f es una sección de este fibrado. Por lo tanto, la ecuación 2.37 es la relación entre la sección f_i y la función de transición $\frac{Z_j}{Z_i}$ localmente.

Además, la fibra del haz de rectas del hiperplano $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ sobre un punto $\pi(p)$ corresponde a funcionales lineales en la recta $\mathbb{C}\{p\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, entonces se define la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} & \xrightarrow{\xi} & T'\mathbb{P}^n \\ (f_0, \dots, f_n) & \mapsto & \xi(f_0, \dots, f_n) = \pi_* \left(f_0(p) \frac{\partial}{\partial Z_0} + \cdots + f_n(p) \frac{\partial}{\partial Z_n} \right) \end{array}$$

estableciendo, para (f_0, \dots, f_n) una sección de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)}$.

Por lo tanto, el morfismo ξ es sobreyectivo.

(b) i es inyectiva.

En efecto

Sea $c \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0)$, definimos la aplicación i como:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0) &\xrightarrow{i} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \\ c &\longmapsto i(c) = (cZ_0, \dots, cZ_n) \end{aligned}$$

Suponga que $c \in \text{Ker}(i)$, luego $i(c) = (cZ_0, \dots, cZ_n) = (0, \dots, 0)$. Entonces $cZ_0 = 0, \dots, cZ_n = 0$. Como $Z_0, \dots, Z_n \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, existe algún $Z_i \neq 0$, $i = 0, \dots, n$, esto implica que $c = 0$. Por lo tanto la aplicación i es inyectiva.

(c) La secuencia de Euler es exacta.

Para probar que la secuencia de Euler es exacta, se debe demostrar que $\text{Im}(i) = \text{Ker}(\xi)$, para ello, verificaremos dos casos:

(I) $\text{Im}(i) \subset \text{Ker}(\xi)$.

Es suficiente demostrar que $\xi \circ i = 0$.

En efecto Sea la secuencia de fibrados

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0) & \xrightarrow{i} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} & \xrightarrow{\xi} & T'\mathbb{P}^n \\ c & \longmapsto & i(c) = (cZ_0, \dots, cZ_n) & \longmapsto & \pi_* \left(cZ_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + \dots + cZ_n \frac{\partial}{\partial Z_n} \right) \end{array}$$

Sean la aplicación cociente $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$, el abierto coordenado $U_0 = \{Z_0 \neq 0\}$, con $[Z_0 : \dots : Z_n] = \left[1 : \frac{Z_1}{Z_0} : \dots : \frac{Z_n}{Z_0} \right]$, las coordenadas de \mathbb{P}^n en esa carta local y el campo vectorial $E = (cZ_0, \dots, cZ_n)$. Entonces del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E = (cZ_0, \dots, cZ_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{\pi} & \left[1 : \frac{Z_1}{Z_0}, \dots, \frac{Z_n}{Z_0} \right] \in \mathbb{P}^n \\ \downarrow \varphi^{-1} \circ \pi & \nearrow \varphi & \\ \left(\frac{Z_1}{Z_0}, \dots, \frac{Z_n}{Z_0} \right) & & \end{array}$$

se tiene:

$$(\varphi^{-1} \circ \pi)(cZ_0, \dots, cZ_n) = \left(\frac{cZ_1}{Z_0}, \dots, \frac{cZ_n}{Z_0} \right)$$

y

$$(\varphi^{-1} \circ \pi)_* E = [D(\varphi^{-1} \circ \pi)] E$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-cZ_1}{Z_0^2} & \frac{c}{Z_0} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-cZ_2}{Z_0^2} & 0 & \frac{c}{Z_0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{-cZ_n}{Z_0^2} & 0 & 0 & \dots & \frac{c}{Z_0} \end{pmatrix}_{n \times (n+1)} \begin{pmatrix} cZ_0 \\ cZ_1 \\ \vdots \\ cZ_i \\ \vdots \\ cZ_n \end{pmatrix}_{(n+1) \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $\xi \circ i = 0$. Por lo tanto $\text{Im}(i) \subset \text{Ker}(\xi)$.

(II) $\text{Ker}(\xi) \subset \text{Im}(i)$

En efecto

Si $(f_0, \dots, f_n) \in \text{Ker}(\xi)$ entonces

$$0 = \xi(f_0, \dots, f_n) = \pi_* \left(f_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial Z_n} \right) = 0$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} \pi_* \left(f_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial Z_n} \right) &= 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{-Z_1}{Z_0^2} & \frac{1}{Z_0} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-Z_2}{Z_0^2} & 0 & \frac{1}{Z_0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{Z_n}{Z_0^2} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{Z_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Resolviendo 2.38 se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{-Z_1}{Z_0^2} f_0 + \frac{1}{Z_0} f_1 &= 0 \implies Z_1 f_0 = Z_0 f_1 \\ \frac{-Z_2}{Z_0^2} f_0 + \frac{1}{Z_0} f_2 &= 0 \implies Z_2 f_0 = Z_0 f_2 \\ &\vdots \implies \vdots \\ \frac{-Z_n}{Z_0^2} f_0 + \frac{1}{Z_0} f_n &= 0 \implies Z_n f_0 = Z_0 f_n \end{aligned}$$

Luego, como $Z_0 \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} [f_0 : f_1 : \dots : f_n] &= [Z_0 : Z_1 : \dots : Z_n] \\ &= [cZ_0 : cZ_1 : \dots : cZ_n], \quad \forall c \neq 0 \end{aligned}$$

es decir

$$f_0 \frac{\partial}{\partial Z_1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial Z_n} = cZ_0 \frac{\partial}{\partial Z_1} + \dots + cZ_n \frac{\partial}{\partial Z_n}$$

Entonces $(f_0, \dots, f_n) = (cZ_0, \dots, cZ_n) \in \text{Im}(i)$. Por lo tanto $(f_0, \dots, f_n) \in \text{Im}(i)$.

En consecuencia, se tiene que la secuencia de Euler es exacta.

Se observa en la figura 2.26 que, las órbitas del campo E en \mathbb{C}^{n+1} son rectas que pasan por el origen 0. En el fibrado $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ las órbitas del campo E son rectas separadas que no tienen ningún punto en común. Cuando el campo E se proyecta en $T_p \mathbb{P}^n$ plano tangente del proyectivo \mathbb{P}^n se va proyectar en el vector nulo. Es decir, el campo $E = cZ_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + \dots + cZ_n \frac{\partial}{\partial Z_n}$ en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ no es nulo, sin embargo cuando se proyecta en el plano tangente de \mathbb{P}^n el campo $\pi_* E = \pi_* \left(cZ_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + \dots + cZ_n \frac{\partial}{\partial Z_n} \right) = 0$

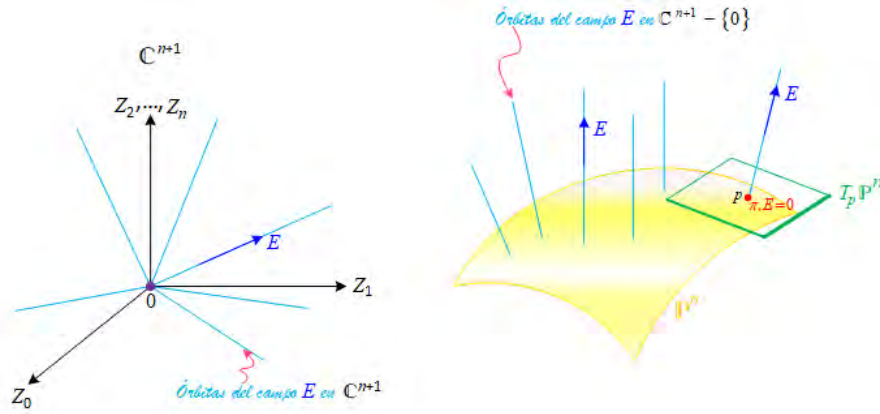


Figura 2.26: Órbitas del campo E en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ y la proyección de E en el plano tangente $T_p \mathbb{P}^n$.

2.7 Fibrados asociados a una foliación

Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular de dimensión 1 en una variedad compleja M , generada localmente por campos vectoriales holomorfos X_i , $i \in I$, ver [MS01] proposición 6.1.4.

Así tenemos un cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ abierto de M tal que, para cada $i \in I$, $\mathcal{F}|_{U_i}$ es inducida por un campo vectorial holomorfo X_i , es decir

$$\mathcal{F}|_{U_i}: X_i: U_i \longrightarrow TM$$

en este caso el conjunto singular $\text{Sing}(\mathcal{F})$ localmente está definido como

$$\text{Sing}(\mathcal{F})|_{U_i}: X_i = 0$$

Si $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces existe $f_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ tal que

$$X_i = f_{ij} X_j, \text{ en } U_{ij}. \tag{2.39}$$

El cociclo (f_{ij}) induce un fibrado lineal holomorfo $T\mathcal{F}^*$ en M , llamado *fibrado cotangente* de \mathcal{F} . Su dual $T\mathcal{F} = (T\mathcal{F}^*)^*$ se llama *fibrado tangente* a \mathcal{F} .

Consideremos que TM y $T\mathcal{F}^*$ se trivialicen en $U_i, i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{X_i} & TM_{U_i} \\ F_i^{-1} \circ X_i \downarrow & & \nearrow F_i \\ U_i \times \mathbb{C}^n & & \end{array}$$

Del diagrama conmutativo se tiene

$$(F_i^{-1} \circ X_i)(p) = (p, s_i(p)),$$

entonces $X_i(p) = F_i(p, s_i(p))$.

De la ecuación 2.39 se tiene:

$$\begin{aligned} F_i(p, s_i(p)) &= f_{ij}F_j(p, s_j(p)) \\ (p, s_i(p)) &= F_i^{-1}(F_j(p, f_{ij}(p)s_j(p))) \\ &= (F_i^{-1} \circ F_j)(p, f_{ij}(p)s_j(p)) \\ (p, s_i(p)) &= (p, g_{ij}(p)f_{ij}(p)s_j(p)) \end{aligned}$$

donde (g_{ij}) es el cociclo de TM . Luego $s_i = g_{ij}f_{ij}s_j$. Entonces s_i determina una sección α del fibrado $TM \otimes T\mathcal{F}^*$. Por lo tanto, $\alpha \in H^0(M, TM \otimes T\mathcal{F}^*)$.

Proposición 2.7.1. Sean M una variedad compleja, TM fibrado tangente de la variedad M . Existe una aplicación de fibrados $f : T\mathcal{F} \rightarrow TM$ tal que:

(a) Para todo $p \in M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$, $f|_{(T\mathcal{F})_p}$ es inyectiva y $f((T\mathcal{F})_p)$ es una recta tangente a la foliación \mathcal{F} en p .

(b) $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ si y solamente si $f|_{(T\mathcal{F})_p} \equiv 0$

Además, si $\tilde{f} : T\mathcal{F} \rightarrow TM$ es otra aplicación de fibrados que satisface (a), entonces existe $h \in \mathcal{O}^*(M)$ tal que $\tilde{f} = hf$. En particular, \tilde{f} también satisface (b).

Prueba. Consideremos las notaciones dadas previamente. Sea $I_0 \subset I$ el conjunto de todos los índices $i_0 \in I$ tales que $U_{i_0} \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Definimos $V_{i_0} = U_{i_0} \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$, $i_0 \in I_0$ y $V_i = U_i$, $i \in I \setminus I_0$. $\{V_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$. Para cada $i \in I$, se toma una trivialización local

$$V_i \times \mathbb{C} \cong T\mathcal{F}|_{V_i}$$

definida

$$f_i(p, t) = tX_i(p). \quad (2.40)$$

Las trivializaciones locales (2.40) son compatibles por el cociclo (f_{ij}^{-1}) , donde $X_i = f_{ij}X_j$ si $V_{ij} \neq \emptyset$, en una aplicación de fibrados $f : T\mathcal{F}|_{M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})} \rightarrow TM$. por el segundo teorema de la singularidad removible de Riemann (1.3.4) f admite una extensión $f : T\mathcal{F} \rightarrow TM$. Puesto que $p \in M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$, se tiene $X_i(p) \neq 0$ y se satisface la condición (a).

En las vecindades $U_{i_0} \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$, $i_0 \in I_0$, se construye f tomando cada fibra sobre $p \in U_{i_0} \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ en la dirección de TM definida por $X_{i_0}(p)$. Dado que X_{i_0} se anula sobre $U_{i_0} \cap \text{Sing}(\mathcal{F})$, la extensión de f a este conjunto es necesariamente cero. Por lo tanto, la condición (b) se cumple.

Sea $\tilde{f} : T\mathcal{F} \rightarrow TM$ otra aplicación de fibrados que satisface (a). Como f y \tilde{f} son lineales en las fibras, existe una función holomorfa h definida en M , que nunca se anula, tal que

$$\tilde{f}|_{(T\mathcal{F})_p} \equiv h(p)f|_{(T\mathcal{F})_p}, \quad \forall p \in M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}) \quad (2.41)$$

Nuevamente, por el segundo teorema de la singularidad removible de Riemann (1.3.4) h se extiende a una función holomorfa que nunca se anula en M (ya que el conjunto de ceros de una función holomorfa tiene codimensión 1 y llegaríamos a una contradicción de 2.41 porque $\text{Sing}(\mathcal{F})$ tiene codimensión 2), por lo que la relación anterior se cumple en todos los puntos de M . \square

Corolario 2.7.2. Sean M una variedad compleja, TM fibrado tangente de la variedad M . \mathcal{F} es foliación no singular ($\text{Sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$) si y solo si $T_{\mathcal{F}}$ es un subfibrado de TM .

Si M es una variedad compacta, de la Proposición 2.7.1 se deduce que dos aplicaciones de fibrados $f, \tilde{f} : T_{\mathcal{F}} \rightarrow TM$ que satisfacen las condiciones (a) y (b), difieren por una constante distinta de cero.

Sea $f : T_{\mathcal{F}} \rightarrow TM$ una aplicación de fibrados como en la proposición 2.7.1. Si $U \subset M$ es un conjunto abierto y s una sección holomorfa del fibrado $T_{\mathcal{F}}$ en U , entonces $f \circ s$ es un campo holomorfo que induce \mathcal{F} en U . Asimismo, la imagen por f de una sección meromorfa da como resultado un campo meromorfo tangente a \mathcal{F} .

Teorema 2.7.3. Sea \mathcal{F} una foliación en \mathbb{P}^n con $T_{\mathcal{F}} \cong \mathcal{O}(k)$. Entonces $k \leq 1$ y \mathcal{F} es inducida en un abierto afín por un campo de vectores holomorfo con coeficientes polinomiales que puede ser escrito en la forma:

$$G \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) + Q_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + Q_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

donde

- (a) G es homogéneo de grado $1 - k$ o $G = 0$;
- (b) Q_1, \dots, Q_n son polinomios de grado máximo como $1 - k$ (o nulos). Si $G = 0$, entonces al menos uno de estos polinomios tiene grado $1 - k$;
- (c) El hiperplano en el infinito con respecto a este abierto afín es \mathcal{F} -invariante si y solo si $G = 0$.

Prueba. Sea \mathcal{F} una foliación en el espacio proyectivo complejo \mathbb{P}^n de dimensión 1. Sean el fibrado $\mathcal{O}(k)$ y $T_{\mathcal{F}}$ el fibrado tangente a \mathcal{F} con $T_{\mathcal{F}} \cong \mathcal{O}(k)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Después de escoger coordenadas homogéneas $[z_0 : z_1 : \dots : z_n]$ en \mathbb{P}^n , se toma una sección meromorfa $s : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathcal{O}(k)$ inducida por z_0^k . La imagen de s por la aplicación $f : T_{\mathcal{F}} \rightarrow T\mathbb{P}^n$ es un campo de vectores meromorfo

$$v = f \circ s : \mathbb{P}^n \rightarrow T\mathbb{P}^n$$

holomorfo en el abierto afín $U_0 : \{z_0 \neq 0\}$, donde induce la foliación \mathcal{F} y $\{z_0 = 0\}$ es divisor de ceros con multiplicidad k , si $k > 0$, o de polos con multiplicidad $-k$, si $k < 0$. Escribimos, entonces

$$v|_{U_0} = P_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + P_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

donde $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{O}(U_0)$.

Haciendo un cambio de coordenadas a $U_j : \{z_j \neq 0\}$, $j \neq 0$, encontramos, en U_{0_j} ,

$$\begin{aligned}
v|_{U_j} &= \left(-\frac{1}{x_j^2}P_j\right)\frac{\partial}{\partial y_1} + \left(\frac{1}{x_j}P_1 - \frac{x_1}{x_j^2}P_j\right)\frac{\partial}{\partial y_2} + \cdots \\
&+ \left(\frac{1}{x_j}P_{j-1} - \frac{x_{j-1}}{x_j^2}P_j\right)\frac{\partial}{\partial y_j} + \left(\frac{1}{x_j}P_{j+1} - \frac{x_{j+1}}{x_j^2}P_j\right)\frac{\partial}{\partial y_{j+1}} \\
&+ \cdots + \left(\frac{1}{x_j}P_n - \frac{x_n}{x_j^2}P_j\right)\frac{\partial}{\partial y_n} \\
&= -y_j^2P_j\frac{\partial}{\partial y_1} + (y_1P_1 - y_1y_2P_j)\frac{\partial}{\partial y_2} + \cdots + (y_1P_{j-1} - y_1y_jP_j)\frac{\partial}{\partial y_j} \\
&+ (y_1P_{j+1} - y_1y_{j+1}P_j)\frac{\partial}{\partial y_{j+1}} + \cdots + (y_1P_n - y_1y_nP_j)\frac{\partial}{\partial y_n}
\end{aligned}$$

Si consideramos la primera componente de $v|_{U_j}$, se tiene que $\frac{1}{x_j^2}P_j$ se extiende a una función meromorfa sobre U_j . Teniendo en cuenta las demás componentes, obtenemos que cada P_i , $i = 1, \dots, n$, también se extiende.

Si se repite el argumento para cada una de las coordenadas abiertas, se concluye que, para $i = 1, \dots, n$, P_i se extiende a una función meromorfa en \mathbb{P}^n , es decir, a una función racional. Como P_i es holomorfo en U_0 , entonces P_i es un polinomio.

Supongamos que se elige j de modo que P_j sea el polinomio de mayor grado entre P_1, \dots, P_n . El divisor $\{z_0 = 0\}$ corresponde, en U_j , a $\{y_1 = 0\}$. Para analizar su multiplicidad, basta considerar los términos homogéneos de mayor grado. Para ello, tomamos $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ las partes homogéneas de P_1, \dots, P_n , respectivamente, del mismo grado que P_j (eventualmente, algunos de estos términos son nulos). Se presentan dos situaciones:

(i) Las ecuaciones:

$$\begin{cases} \tilde{P}_1 - y_2\tilde{P}_j = 0 \\ \vdots \\ \tilde{P}_{j-1} - y_j\tilde{P}_j = 0 \\ \tilde{P}_{j+1} - y_{j+1}\tilde{P}_j = 0 \\ \vdots \\ \tilde{P}_n - y_n\tilde{P}_j = 0 \end{cases}$$

se cumplen. En este caso, la multiplicidad de $\{z_0 = 0\}$ se puede leer en el coeficiente de $\frac{\partial}{\partial y_1}$,

$$y_1^2P_j\left(\frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1}\right),$$

de donde se tiene que $\text{grado}(P_j) = 2 - k$. Agrupando los términos homogéneos de mayor grado de $X|_{U_0}$, se obtiene:

$$\frac{\tilde{P}_j}{x_j}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right) = G\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

donde $G = \frac{\tilde{P}_j}{x_j}$ es polinomio de grado $1 - k$, por tanto, $k \leq 1$. Notar que, en este caso, el hiperplano $\{z_0 = 0\}$ es invariante por la foliación.

- (ii) Al menos una de las igualdades del punto (i) no se cumple. En este caso, la multiplicidad de $\{z_0 = 0\}$ se puede leer del coeficiente correspondiente, de donde vemos que $\text{grado}(P_j) = 1 - k$ y por lo tanto $k \leq 1$. En este caso, el hiperplano $\{z_0 = 0\}$ no es hoja invariante.

□



Capítulo 3

Haces y Cohomología

En este capítulo realizaremos un breve estudio de los haces y su cohomología, daremos las definiciones básicas y enunciaremos los principales teoremas, no daremos las demostraciones de los teoremas por ser ellos tratados en detalles en la tesis [Sar08]. En la última sección estudiaremos cohomología de haces sobre el espacio proyectivo, nuestras principales referencias para esta sección serán los libros [Fos81] [GH94], [FFF82], [OSS80],[MS01].

3.1 Hace

Definición 3.1.1. Considere un espacio topológico (X, τ) , donde τ es la topología sobre X . Un *prehaz* de grupos abelianos sobre X es el par (\mathcal{S}, ρ) que consiste en:

- (a) Una familia $\mathcal{S} = (\mathcal{S}(U))_{U \in \tau}$ de grupos abelianos.
- (b) Una familia $\rho = (\rho_V^U)_{\substack{U, V \in \tau \\ V \subset U}}$ de grupos de homomorfismos.

$$\rho_V^U : \mathcal{S}(U) \rightarrow \mathcal{S}(V),$$

donde V es abierto en U , satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. $\rho_U^U = id_{\mathcal{S}(U)}$ para cada $U \in \tau$.
2. $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ para $W \subset V \subset U$.

Los homomorfismos ρ_V^U se denominan *homomorfismos de restricción*.

Denotaremos \mathcal{S} en lugar (\mathcal{S}, ρ) . También denotaremos $\rho_V^U(f)$, para $f \in \mathcal{S}(U)$, como $f|_V$. De manera análoga a los prehaces de grupos abelianos, también se pueden definir prehaces de espacios vectoriales, anillos, conjuntos, etc.

Ejemplo 3.1.2. Supongamos X un espacio topológico arbitrario y $U \subset X$ un subconjunto abierto. Sea $\mathcal{C}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es una función continua}\}$, espacio

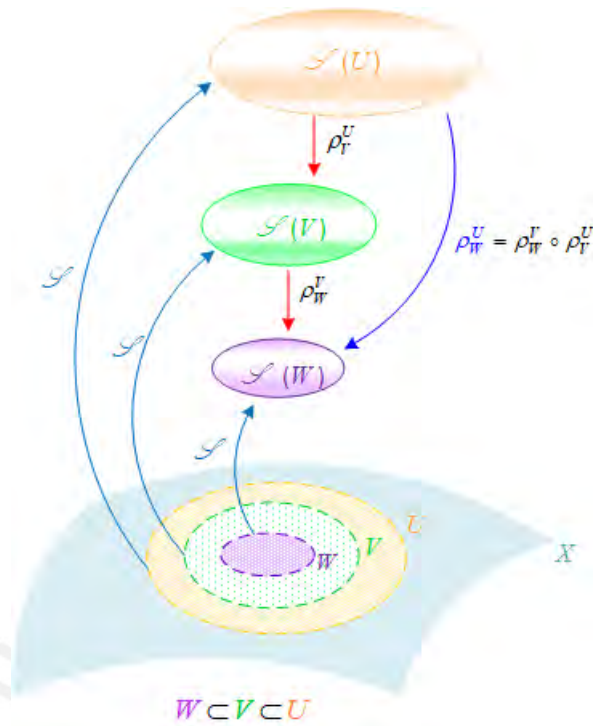


Figura 3.1: Homomorfismos de restricción

vectorial de funciones continuas. Para cada inclusión $V \subset U$, la aplicación restricción es la restricción usual

$$\begin{aligned} \rho_V^U : \mathcal{E}(U) &\rightarrow \mathcal{E}(V) \\ f &\mapsto \rho_V^U(f) = f|_V \end{aligned}$$

Entonces (\mathcal{E}, ρ) es un prehaz de funciones continuas en X .

Definición 3.1.3. Un prehaz \mathcal{S} sobre un espacio topológico X se llama un *haz* si para todo conjunto abierto $U \subset X$ y toda familia de subconjuntos abiertos $U_i \subset U$, $i \in I$, tales que $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ se cumplen las siguientes condiciones, que llamaremos *axiomas de haz*:

- (I) Si $f, g \in \mathcal{S}(U)$ son elementos tal que $f|_{U_i} = g|_{U_i}$, para cada $i \in I$, entonces $f = g$.
- (II) Dados los elementos $f_i \in \mathcal{S}(U_i)$, $i \in I$, tal que

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}, \forall i, j \in I$$

entonces existe $f \in \mathcal{S}(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para cada $i \in I$.

El axioma (I) quiere decir que si dos secciones definidas en un abierto U coinciden cuando se restringen (mediante $\rho_{U_i}^U$, $i \in I$) a todos los abiertos mas

pequeños $(U_i)_{i \in I}$ de su dominio original, entonces es que eran iguales desde el principio en el abierto U . Es decir: *Para comparar dos secciones, basta conocer como son localmente.*

El axioma (II) quiere decir que si tenemos una colección de secciones f_i , cada una en algun grupo $\mathcal{S}(U_i)$ correspondiente al abierto U_i , y son todas compatibles entre si (en el sentido de que cuando dos de estas secciones f_1, f_2 se comparan en alguna intersección $V = U_1 \cap U_2$, coinciden: $\rho_V^U(f_1) = \rho_V^U(f_2)$), entonces, cada f_i descende de una sección mayor definida en U . Es decir: *secciones compatibles entre si se pueden pegar para construir secciones definidas en abiertos mas grandes.*

Ejemplo 3.1.4. Para cada espacio topológico X el prehaz \mathcal{C} definido en el (3.1.2) es un haz, puesto que los axiomas (I) y (II) se cumplen trivialmente.

Ejemplo 3.1.5. Sea X una variedad compleja. Para cada $U \subset X$ abierto consideremos $\mathcal{O}(U)$ el anillo de las funciones holomorfas $f : U \subset X \rightarrow \mathbb{C}$. Para cada abierto $V \subset U$, sea

$$\begin{aligned} \rho_V^U : \mathcal{O}(U) &\rightarrow \mathcal{O}(V) \\ f &\mapsto \rho_V^U(f) \end{aligned}$$

la aplicación de restricción en el sentido usual. Entonces, \mathcal{O} es un prehaz de anillos sobre X . Evidentemente este prehaz \mathcal{O} cumplen los axiomas (I) y (II) de haz.

El haz \mathcal{M} de funciones meromorfas en X se definen de manera análoga.

Ejemplo 3.1.6. Sobre una variedad compleja X tenemos el prehaz \mathcal{O}^* formado por los grupos multiplicativos de aplicaciones holomorfas

$$\mathcal{O}^*(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}^* : f \text{ es holomorfa en } U\},$$

donde U es abierto de X . Con las aplicaciones de restricción habituales, \mathcal{O}^* es un haz de grupos abelianos (conmutativos).

El haz \mathcal{M}^* es definido de manera análoga.

Ejemplo 3.1.7. Dado un espacio topológico X y un grupo abeliano G . Definimos el prehaz \mathcal{G} sobre X formado por los grupos

$$\mathcal{G}(U) = G, \text{ donde } U \text{ es abierto no vacío de } X \text{ y } \mathcal{G}(\emptyset) = \{0\}.$$

Evidentemente para definir los homomorfismos restricción hay que tomar en cuenta si el abierto es vacío o no lo es.

Si $\emptyset \neq V \subset U$, definimos como la aplicación de restricción ρ_V^U a la aplicación identidad de G , se le denota id_G

$$\rho_V^U = id_G : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(V).$$

Si $V = \emptyset$, $\forall g \in G$, la aplicación de restricción ρ_\emptyset^U es el homomorfismo cero

$$\begin{aligned} \rho_\emptyset^U : \mathcal{G}(U) &\rightarrow \mathcal{G}(\emptyset) \\ g &\mapsto \rho_\emptyset^U(g) = 0. \end{aligned}$$

Si existen en G dos elementos distintos g_1, g_2 y X tiene dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos U_1, U_2 , entonces \mathcal{G} no es un haz. Esto se debe a que el axioma (II) del haz no se cumple, pues, dado $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, se tiene $g_1|_{U_1 \cap U_2} = 0 = g_2|_{U_1 \cap U_2}$ pero no existe $f \in \mathcal{G}(U_1 \cup U_2) = G$ tal que $f|_{U_1} = g_1$ y $f|_{U_2} = g_2$

Ejemplo 3.1.8. Dado X un espacio topológico y G un grupo. Con la finalidad de que G determine un haz, consideremos las funciones localmente constantes en G en vez de la funciones constantes como se hizo en el ejemplo anterior. Dado un abierto U de X , una aplicación $g : U \rightarrow G$ es localmente constante en $U \subset X$ si para todo $p \in U$ existe un entorno $V \subset U$ de p tal que g es constante en V , denotemos

$$\tilde{\mathcal{G}}(U) = \{g : U \rightarrow G : g \text{ es localmente constantes en } U\}$$

el cual tiene estructura de grupo. Para los abiertos $V \subset U$ consideremos la aplicación restricción usual $\tilde{\mathcal{G}}(U) \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}(V)$, Estos elementos forman un haz $\tilde{\mathcal{G}}$ sobre X . Este haz se denota simplemente por G .

Ejemplo 3.1.9. Sea X un espacio topológico, G un grupo abeliano, y $p \in X$. A cada abierto U de X asociamos el grupo

$$\mathcal{G}(U) = \begin{cases} \{0\}, & \text{si } p \notin U \\ G, & \text{si } p \in U \end{cases}$$

Para definir los homomorfismos restricción entre estos grupos hay que tomar en cuenta si el abierto contienen al punto p o no.

Si $p \in V \subset U$, definimos la aplicación de restricción ρ_V^U como la aplicación identidad id_G de G

$$\rho_V^U = id_G : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(V).$$

Si $p \notin V \subset U$, definimos la aplicación de restricción ρ_V^U como el homomorfismo cero

$$\begin{aligned} \rho_V^U : \mathcal{G}(U) &\rightarrow \mathcal{G}(V) \\ g &\mapsto \rho_V^U(g) = 0. \end{aligned}$$

Los grupos y homomorfismos que acabamos de definir forman un haz \mathcal{G} llamado el *haz rascacielos* sobre el espacio X asociado al punto $p \in X$ y al grupo G y se denota por G_p .

Observación 3.1.10. Las secciones de cualquier fibrado forman un haz. En particular, presentamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.1.11. Sean \mathbb{P}^n es el espacio proyectivo complejo, $U \subset \mathbb{P}^n$ un conjunto abierto y $T_p\mathbb{P}^n$ el espacio tangente a \mathbb{P}^n en $p \in \mathbb{P}^n$. Las secciones del fibrado holomorfo

$$T\mathbb{P}^n = \dot{\bigcup}_{p \in \mathbb{P}^n} \{p\} \times T_p\mathbb{P}^n$$

forman el *haz tangente* $\Theta_{\mathbb{P}^n}$ por el grupo abeliano

$$\Theta_{\mathbb{P}^n}(U) = \{X : U \subset \mathbb{P}^n \rightarrow T\mathbb{P}^n/X \text{ es un campo vectorial holomorfo en } U\}.$$

y los homomorfismos de restricción

$$\begin{aligned} \rho_V^U &: \Theta_{\mathbb{P}^n}(U) \rightarrow \Theta_{\mathbb{P}^n}(V) \\ X &\mapsto \rho_V^U(X) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.12. Sean \mathbb{P}^n es el espacio proyectivo complejo, $U \subset \mathbb{P}^n$ un conjunto abierto y $\Lambda^k T_p \mathbb{P}^n$ el conjunto de las k -formas alternadas sobre $T_p \mathbb{P}^n$,

$$\Lambda^k T \mathbb{P}^n = \bigcup_{p \in \mathbb{P}^n} \{p\} \times \Lambda^k T_p \mathbb{P}^n.$$

El haz de las k -formas holomorfas $\Omega_{\mathbb{P}^n}^k$ es determinado sobre U por las secciones holomorfas de este fibrado definidas en U , esto es

$$\Omega_{\mathbb{P}^n}^k(U) = \{\omega : U \subset \mathbb{P}^n \rightarrow \Lambda^k T \mathbb{P}^n : \omega \text{ es una } k\text{-forma en } U\}.$$

y los homomorfismos de restricción

$$\begin{aligned} \rho_V^U &: \Omega_{\mathbb{P}^n}^k(U) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^k(V) \\ \omega &\mapsto \rho_V^U(\omega) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.13. Si \mathbb{P}^n es el espacio proyectivo complejo, $U \subset \mathbb{P}^n$ un conjunto abierto, entonces las secciones (polinomios) del fibrado de hiperplanos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ forman el haz hiperplano \mathcal{L} por el grupo abeliano

$$\mathcal{L}(U) = \{f : U \subset \mathbb{P}^n \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) : f \text{ es una sección holomorfa sobre } U\}.$$

y los homomorfismos de restricción

$$\begin{aligned} \rho_V^U &: \mathcal{L}(U) \rightarrow \mathcal{L}(V) \\ f &\mapsto \rho_V^U(f) \end{aligned}$$

3.1.1 El tallo de un prehaz

Consideremos un prehaz \mathcal{S} sobre un espacio topológico X y un punto $p \in X$. En la unión disjunta

$$\mathcal{S}_p^* = \bigcup_{p \in U} \mathcal{S}(U)$$

sobre todas las vecindades abiertas U de p . Definimos la siguiente relación de equivalencia: $f \in \mathcal{S}(U)$ y $g \in \mathcal{S}(V)$

$$f \underset{p}{\sim} g \Leftrightarrow \exists W \text{ vecindad de } p \text{ tal que } W \subset U \cap V \text{ y } f|_W = g|_W.$$

Ahora consideremos el espacio cociente

$$\mathcal{S}_p = \frac{\mathcal{S}_p^*}{\underset{p}{\sim}} \quad (3.1)$$

y denotemos la clase cociente de $f \in \mathcal{S}(U)$ por $[f]_p = f_p \in \mathcal{S}_p$. Para cualquier vecindad abierta U de p , existe la aplicación natural

$$\begin{aligned} \rho_p^U &: \mathcal{S}(U) \rightarrow \mathcal{S}_p \\ f &\mapsto \rho_p^U(f) = [f]_p = f_p \end{aligned}$$

llamamos a $\rho_p^U(f)$ *germen* de f en p . Las aplicaciones consideradas determinan en \mathcal{S}_p una estructura de grupo abeliano, heredada de $\mathcal{S}(U)$ mediante ρ_p^U de modo que ellas se tornan homomorfismos.

La construcción que hemos realizado para obtener \mathcal{S}_p a partir de los grupos $\{\mathcal{S}(U)\}$ es conocido proceso de *límite inductivo* de la familia de grupos $\{\mathcal{S}(U)\}$, esto es

$$\mathcal{S}_p := \varinjlim_{p \in U} \mathcal{S}(U) := \frac{\dot{\bigcup}_{p \in U} \mathcal{S}(U)}{\sim_p}. \tag{3.2}$$

la cual también tiene estructura de grupo y se llama *tallo* de \mathcal{S} en el punto $p \in X$.

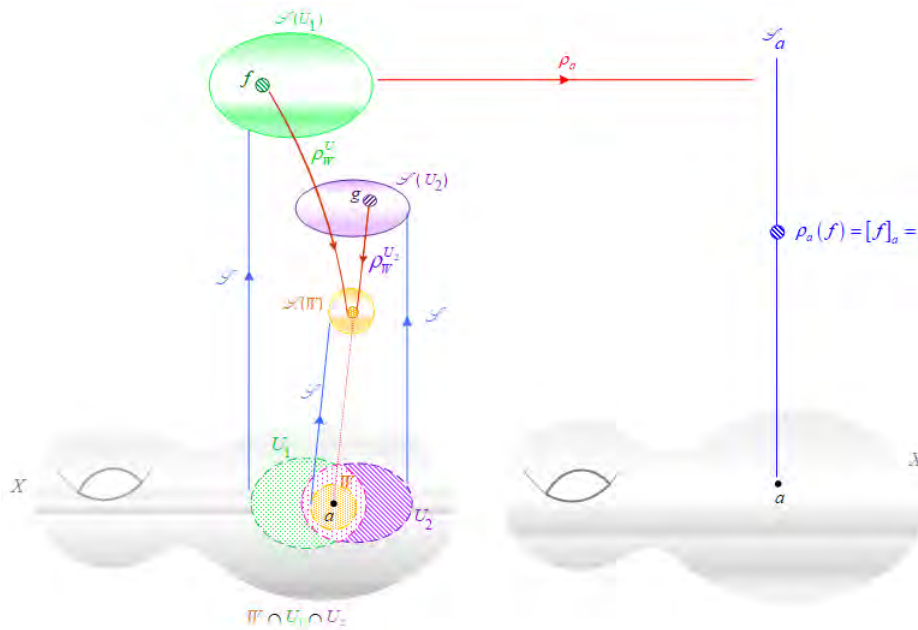


Figura 3.2: El Tallo \mathcal{S}_a del prehaz \mathcal{S} en el punto $a \in X$.

Ejemplo 3.1.14. Sean un dominio $X \subset \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$. Consideremos el haz \mathcal{O} de funciones holomorfas en $X \subset \mathbb{C}$ y el anillo de funciones holomorfas

$$\mathcal{S}_a = \{f : \text{función holomorfa definida en una vecindad de } a\}$$

Sean $f, g \in \mathcal{S}_a$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $g : V \rightarrow \mathbb{C}$, U, V vecindades de a . Definimos la siguiente relación de equivalencia: $f \sim_a g$ si existe un conjunto abierto $W \subset U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$. El conjunto de todas las clases de equivalencias está definido como:

$$\mathcal{O}_a = \frac{\mathcal{S}_a}{\sim_a} = \{f_a : f \in \mathcal{S}_a\}, \tag{3.3}$$

donde f_a es la clase de equivalencia de $f \in \mathcal{O}(U) \subset \mathcal{F}_a$. Entonces para cualquier vecindad abierta U de a , existe una aplicación

$$\begin{aligned} \rho_a^U : \mathcal{O}(U) &\rightarrow \mathcal{O}_a \\ f &\mapsto \rho_a(f) = f_a, \end{aligned}$$

donde $f_a \in \mathcal{O}_a$ es el *germen* de la función holomorfa f en a . Por lo tanto, \mathcal{O}_a es el *tallo* de \mathcal{O} en el punto $a \in \mathbb{C}$ y f_a tiene una expansión de la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $c_n \in \mathbb{C}$ con radio de convergencia positivo.

Dos funciones holomorfas f y g en vecindades de a determinan el mismo germen en a , precisamente si tienen el mismo desarrollo en serie de Taylor alrededor de a .

Por tanto, existe un isomorfismo φ entre el tallo \mathcal{O}_a y el anillo $\mathbb{C}\{z-a\}$ de todas las series de potencias convergentes en $z-a$ con coeficientes complejos, definido como:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}_a &\rightarrow \mathbb{C}\{z-a\} \\ f_a &\mapsto \varphi(f_a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \end{aligned}$$

y satisface las siguientes propiedades:

- (i) φ es inyectiva.
- (ii) $\varphi(f_p + g_p) = \varphi(f_p) + \varphi(g_p)$.
- (iii) $\varphi(f_p \cdot g_p) = \varphi(f_p) \cdot \varphi(g_p)$.
- (iv) $\varphi(1) = 1$.

Ejemplo 3.1.15. El cuerpo \mathcal{M}_a de los gérmenes de funciones meromorfas en a es isomorfo al anillo de las series convergentes de Laurent $\sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $k \in \mathbb{Z}$, $c_n \in \mathbb{C}$ que tienen partes principales finitas.

Lema 3.1.16. *Dado un haz de grupos \mathcal{S} sobre un espacio topológico X y un subconjunto abierto $U \subset X$. Entonces $f \in \mathcal{S}(U)$ es cero, si todos los gérmenes $\rho_x(f) = 0 \in \mathcal{S}_x$ para todo $x \in U$.*

Este lema es una consecuencia directamente del axioma I de haces. Ver [Fos81].

Supongamos que X es un espacio topológico y \mathcal{S} es un prehaz en X . Sea

$$|\mathcal{S}| := \bigcup_{x \in X} \mathcal{S}_x, \quad (3.4)$$

la unión disjunta de todos los tallos. Denotemos por

$$\begin{aligned} p : |\mathcal{S}| &\rightarrow X \\ \varphi &\mapsto p(\varphi) = x, \end{aligned}$$

la aplicación que asigna a cada elemento $\varphi \in \mathcal{S}_x$ el punto x .

Ahora se introduce una topología en $|\mathcal{S}|$: Para cualquier subconjunto abierto $U \subset X$ y un elemento $f \in \mathcal{S}(U)$, sea

$$[U, f] := \{\rho_x(f) : x \in U\} \subset |\mathcal{S}|. \quad (3.5)$$

Teorema 3.1.17. *El sistema \mathcal{B} de todos los conjuntos $[U, f]$, donde U es un conjunto abierto en X y $f \in \mathcal{S}(U)$, es una base para una topología en $|\mathcal{S}|$. La proyección $p : |\mathcal{S}| \rightarrow X$ es un homeomorfismo local.*

La demostración se puede ver en [Fos81].

3.2 Cohomología de haces

3.2.1 Cocadenas, cociclos, cobordes

Sean X un espacio topológico, \mathcal{S} un haz de grupos abelianos sobre X y $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X . Para $q = 0, 1, 2, \dots$ definimos el q -ésimo grupo de cocadenas de \mathcal{S} , respecto de \mathcal{U} , como:

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) := \prod_{(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}} \mathcal{S}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}). \quad (3.6)$$

Los elementos de $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ se denominan q -cocadenas. Así, una q -cocadena es una familia

$$(f_{i_0, \dots, i_q}) \text{ tal que } f_{i_0, \dots, i_q} \in \mathcal{S}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q})$$

para todos $(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}$. La adición de dos cocadenas se define por componentes.

Definimos un homomorfismo sobre estos grupos de cocadenas llamado *operador coborde*, como sigue

$$\begin{aligned} \delta = \delta_q & : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}), \\ (f_{i_0, \dots, i_q}) & \mapsto \delta((f_{i_0, \dots, i_q})) = (g_{i_0, \dots, i_{q+1}}), \end{aligned}$$

donde

$$(g_{i_0, \dots, i_{q+1}}) = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \rho_{U_{i_0} \cap \dots \cap \hat{U}_{i_k} \cap U_{i_{q+1}}}^{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}} (f_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{q+1}}).$$

y \hat{i}_k indica la ausencia de este índice.

Veamos algunos casos particulares:

- (i) Si $q = 0$ entonces para $(f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, tenemos $\delta((f_i)_{i \in I}) = (g_{ij})_{i, j \in I}$, donde

$$g_{ij} = f_j - f_i \in \mathcal{S}(U_i \cap U_j),$$

aquí se entiende que uno restringe f_i y f_j a la intersección $U_i \cap U_j$ y luego se toma su diferencia.

- (ii) Si $q = 1$ entonces para $(f_{ij})_{i, j \in I} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, tenemos $\delta((f_{ij})) = (g_{ijk})_{i, j, k \in I}$, donde

$$g_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} \in \mathcal{S}(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

Nuevamente, los términos de la derecha están restringidos a su dominio común de definición $U_i \cap U_j \cap U_k$.

El operador de coborde satisface la propiedad:

$$\delta^2 = \delta_{q+1} \circ \delta_q = 0. \quad (3.7)$$

El núcleo del homomorfismo coborde δ se define como:

$$\begin{aligned} Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) &= \text{Ker}(C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \\ &= \{(f_{i_0, \dots, i_q}) \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) : \delta((f_{i_0, \dots, i_q})) = 0\} \end{aligned}$$

Los elementos de $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ se llaman q -cociclos.

La imagen del homomorfismo coborde δ se define como:

$$\begin{aligned} B^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) &= \text{Im}(C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \xrightarrow{\delta} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \\ &= \{\delta((f_{i_0, \dots, i_{q-1}})) \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) : (f_{i_0, \dots, i_{q-1}}) \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})\} \end{aligned}$$

Los elementos de $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ se denominan q -cobordes.

Por ejemplo, una 1-cocadena $(f_{ij}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ es un cociclo si

$$f_{ik} = f_{ij} + f_{jk} \quad \text{en } U_i \cap U_j \cap U_k \quad (3.8)$$

para todo $i, j, k \in I$. A la ecuación (3.8) se le llama *relación cociclo* e implica

$$f_{ii} = 0, \quad f_{ij} = -f_{ji} \quad (3.9)$$

Se obtiene (3.9) de la ecuación (3.8) haciendo $i = j = k$ para el primero y $i = k$ para el segundo. Como $\delta^2 = 0$, todo coborde es un cociclo.

En particular, un 1-cociclo $(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es una 1-coborde si y solo si hay una 0-cocadena $(g_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tal que

$$f_{ij} = g_i - g_j \quad \text{en } U_i \cap U_j \quad \text{para cada } i, j \in I.$$

Definición 3.2.1. El grupo cociente

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) := \frac{Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})}{B^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})}, \quad (3.10)$$

es llamado q -ésimo grupo de cohomología con coeficientes en \mathcal{S} con respecto al recubrimiento \mathcal{U} . Sus elementos se llaman *clases de cohomología* y dos cociclos que pertenecen a la misma clase de cohomología se denominan *cohomólogos*.

Los grupos $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ dependen del recubrimiento \mathcal{U} . Para tener grupos de cohomología que dependan solo de X y \mathcal{S} , tenemos que usar recubrimientos cada vez más finos y luego tomar un límite. Ahora precisaremos esta idea.

Un recubrimiento abierto $\mathcal{V} = (V_k)_{k \in K}$ se dice más *fino* que el recubrimiento $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, denotado por $\mathcal{V} < \mathcal{U}$, si cada V_k está contenido en al menos un U_i . Por lo tanto, existe una aplicación $\tau : K \rightarrow I$ tal que

$$V_k \subset U_{\tau(k)}, \quad \text{para cada } k \in K.$$

Mediante la aplicación τ se define una aplicación

$$\begin{aligned} t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} : Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) &\rightarrow Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \\ (f_{i_0, \dots, i_q}) &\mapsto t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}((f_{i_0 \dots i_q})) = (g_{k_0, \dots, k_q}), \end{aligned}$$

donde

$$g_{k_0, \dots, k_q} = f_{\tau(k_0), \dots, \tau(k_q)} \Big|_{V_{k_0} \cap \dots \cap V_{k_q}} \quad \text{para cada } k_0, \dots, k_q \in K.$$

Como esta aplicación lleva cobordes en cobordes, induce un homomorfismo de grupos

$$t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$$

Esta aplicación es independiente de la elección de la aplicación de refinación $\tau : K \rightarrow I$.

3.2.2 Grupo de cohomología $H^q(X, \mathcal{S})$

Si se tiene tres cubrimientos abiertos tales que $\mathcal{W} < \mathcal{V} < \mathcal{U}$ entonces

$$t_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} \circ t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = t_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}.$$

Por lo tanto, se puede definir la siguiente relación de equivalencia \sim en la unión disjunta de $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, donde \mathcal{U} es un cubrimiento abierto de X . Dos clases de cohomología $\xi \in H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ y $\eta \in H^q(\mathcal{U}', \mathcal{S})$ son *equivalentes*, $\xi \sim \eta$, si existe un cubrimiento abierto \mathcal{V} con $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ y $\mathcal{V} < \mathcal{U}'$ tal que $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(\xi) = t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}'}(\eta)$.

Definición 3.2.2. El conjunto de las clases de equivalencia se llama *límite inductivo* de los grupos de cohomología $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ y se denomina *q grupo de cohomología de X* con coeficientes en el haz \mathcal{S} . Esto es,

$$H^q(X, \mathcal{S}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) = \frac{\dot{\bigcup}_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})}{\sim}. \quad (3.11)$$

Este conjunto de clases de equivalencias tiene estructura de grupos. Sean $x, y \in H^q(X, \mathcal{S})$ representados por $\xi \in H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, $\eta \in H^q(\mathcal{U}', \mathcal{S})$, \mathcal{V} un refinamiento común de \mathcal{U} y \mathcal{U}' . Entonces $x + y \in H^q(X, \mathcal{S})$ se define como la clase de equivalencia de $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(\xi) + t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}'}(\eta) \in H^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$. Esta definición es independiente de las elecciones realizadas y $H^q(X, \mathcal{S})$ en un grupo abeliano.

Por otro lado, si \mathcal{S} es un haz de espacios vectoriales, entonces $H^q(X, \mathcal{S})$ y $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ son espacios vectoriales, en este caso denotamos

$$h^q(X, \mathcal{S}) = \dim H^q(X, \mathcal{S})$$

Teorema 3.2.3. Sean X una variedad diferenciable y \mathcal{E} el haz de funciones diferenciables en X . Entonces $H^q(X, \mathcal{E}) = 0$.

La demostración de este teorema es consecuencia de la existencia de una partición de la unidad sobre una variedad diferenciable. Ver [Fos81].

Ejemplo 3.2.4. Sea X una variedad compleja simplemente conexa. Entonces $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$, donde \mathbb{C} denota el haz de funciones localmente constantes con valores en los números complejos. En efecto, Sean \mathcal{U} un cubrimiento abierto en X y $(c_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$. Como $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ y $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}) = 0$, existe una cocadena $(f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ tal que

$$c_{ij} = f_i - f_j \quad \text{en } U_i \cap U_j.$$

Pero $dc_{ij} = 0$ implica $df_i = df_j$ en $U_i \cap U_j$, y por lo tanto existe 1- forma diferencial global $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ tal que $\omega|_{U_i} = df_i$. Puesto que $ddf_i = 0$, entonces ω es cerrado. Como X es simplemente conexo, existe $f \in \mathcal{E}(X)$ tal que $df = \omega$. Sea

$$c_i := f_i - f|_{U_i}$$

Dado que $dc_i = df_i - df = \omega - \omega = 0$ en U_i , por tanto c_i es localmente constante, es decir, $(c_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathbb{C})$. En $U_i \cap U_j$ se tiene

$$c_{ij} = f_i - f_j = (f_i - f) - (f_j - f) = c_i - c_j,$$

y así el cociclo (c_{ij}) se divide.

El siguiente teorema demuestra que, en ciertos casos, se puede calcular $H^q(X, \mathcal{S})$ usando solo un cubrimiento único de X .

Teorema 3.2.5 (Leray). *Si \mathcal{S} es un haz de grupos abelianos en el espacio topológico X y $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X tal que $H^q(U_i, \mathcal{S}) = 0, \forall i \in I$, entonces*

$$H^q(X, \mathcal{S}) \cong H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}).$$

Al recubrimiento abierto \mathcal{U} se llama recubrimiento de Leray para el haz \mathcal{S} .

La demostración de este teorema, se puede ver [GH94]

3.3 La secuencia de cohomología exacta

Definición 3.3.1. Sean \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 haces de grupos abelianos en el espacio topológico X . Un *homomorfismo de haz* $\alpha : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ es una familia de homomorfismos de grupo

$$\alpha_U : \mathcal{S}_1(U) \rightarrow \mathcal{S}_2(U), \quad U \text{ abierto en } X,$$

tal que para todo par de conjuntos abiertos $U, V \subset X$ con $V \subset U$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_1(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{S}_2(U) \\ \text{restr} \downarrow & & \downarrow \text{restr} \\ \mathcal{S}_1(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{S}_2(V) \end{array}$$

es conmutativo.

Si todos los α_U son isomorfismos, entonces α se le llama isomorfismo. De manera similar, se pueden definir homomorfismos de haces de espacios vectoriales.

Ejemplo 3.3.2. Sea \mathcal{E} el haz de funciones diferenciables en una variedad diferenciable X . La derivada exterior d en funciones induce homomorfismos de haz.

$$d : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

Ejemplo 3.3.3. En una variedad compleja X , las inclusiones naturales $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E}$, $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{E}$, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}$ son homomorfismos de haces, donde \mathcal{E} haz de funciones diferenciables, \mathcal{O} haz de funciones holomorfas.

Ejemplo 3.3.4. En una variedad compleja X se puede definir un homomorfismo de haz $\exp : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ del haz de funciones holomorfas al haz multiplicativo de funciones con valores en \mathbb{C}^* . Para $U \subset X$ y $f \in \mathcal{O}(U)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \exp_U : \mathcal{O}(U) &\rightarrow \mathcal{O}^*(U) \\ f &\mapsto \exp_U(f) := \exp(2\pi i f) \end{aligned}$$

3.3.1 El núcleo de un homomorfismo de haz

Sean \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 haces en el espacio topológico X y $\alpha : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ un homomorfismo de haces. Para U abierto en X , sea

$$\mathcal{K}(U) := \text{Ker}(\mathcal{S}_1(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S}_2(U)). \quad (3.12)$$

Se puede verificar fácilmente que la familia de grupos $\mathcal{K}(U)$, junto con los homomorfismos de restricción inducidos a partir del haz \mathcal{S}_1 , es también un haz, llamado *núcleo* de α y se denota $\mathcal{K} = \text{Ker } \alpha$.

Ejemplo 3.3.5. Sea X una variedad compleja, consideramos el homomorfismo de haces inducido por la exponencial $\exp : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$. Entonces el núcleo de \exp es $\mathcal{Z} = \text{Ker}(\mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*)$ que es un haz.

Dado un homomorfismo $\alpha : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ de haz en el espacio topológico X , se puede definir

$$\mathcal{B}(U) := \text{Im}(\mathcal{S}_1(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S}_2(U)) \quad \text{para cada } U \text{ en } X.$$

Esto define un prehaz \mathcal{B} que en general no satisface el axioma II de haz.

Ejemplo 3.3.6. Considere el homomorfismo de haz

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{O} &\longrightarrow \mathcal{O}^* \\ f &\longmapsto \exp(f) := \exp(2\pi i f), \end{aligned}$$

en el espacio \mathbb{C}^* .

Sean los conjuntos abiertos $U_1 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ y $U_2 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$. Se define $f_k \in \mathcal{O}^*(U_k)$ por $f_k(z) = z$ para cada $z \in U_k$, $k = 1, 2$. Como U_k es simplemente conexo,

$$f_k \in \text{Im}(\mathcal{O}(U_k) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*(U_k)).$$

Además, $f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}$. Pero no existe ningún elemento

$$f \in \text{Im}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)),$$

con $f|_{U_k} = f_k$, puesto que la función $z \mapsto z$ no tiene un logaritmo de valor único en todo $\mathbb{C}^* = U_1 \cup U_2$.

3.3.2 Secuencias exactas

Supongamos que $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ es un homomorfismo de haz en el espacio topológico X . Entonces, para cada $x \in X$ hay un homomorfismo inducido de los tallos

$$\alpha_x : \mathcal{S}_x \rightarrow \mathcal{T}_x.$$

Una sucesión de homomorfismos de haces $\mathcal{R} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{T}$ se llama *exacta*, si para cada $x \in X$ la sucesión

$$\mathcal{R}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{S}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{T}_x$$

es exacta, es decir $\text{Ker } \beta_x = \text{Im } \alpha_x$.

Una secuencia

$$\mathcal{S}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{S}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} \mathcal{S}_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \mathcal{S}_n \quad (n > 3)$$

de homomorfismos de haces se llama *exacta* si la secuencia

$$\mathcal{S}_k \xrightarrow{\alpha_k} \mathcal{S}_{k+1} \xrightarrow{\alpha_{k+1}} \mathcal{S}_{k+2}$$

es exacta para cada $1 \leq k \leq n - 2$.

Un homomorfismo de haz $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ se llama *monomorfismo* si $0 \rightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{T}$ es exacta y *epimorfismo* si $\mathcal{S} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{T} \rightarrow 0$ es exacta.

Una sucesión exacta de la forma $0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0$ se llama *sucesión exacta corta*.

Lema 3.3.7. Sea $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ un monomorfismo de haz en el espacio topológico X . Entonces, la función $\alpha_U : \mathcal{S}(U) \rightarrow \mathcal{T}(U)$ es inyectiva, para cada subconjunto abierto $U \subset X$.

Prueba. Supongamos $f \in \mathcal{S}(U)$ y $\alpha_U(f) = 0$. Como $\alpha_x : \mathcal{S}_x \rightarrow \mathcal{T}_x$ es inyectiva para todo $x \in X$, todo $x \in U$ tiene un entorno abierto $V_x \subset U$ tal que $f|_{V_x} = 0$. Del axioma I de la definición 3.1.3 se tiene que $f = 0$. \square

Si $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ es un epimorfismo de haces, no es necesariamente cierto que para todo conjunto abierto U la función $\alpha_U : \mathcal{S}_U \rightarrow \mathcal{T}_U$ es sobreyectiva. Esto se ilustra con el ejemplo 3.3.6, donde el homomorfismo $\exp : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ para cada x , la aplicación $\exp : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_x^*$ es sobreyectiva, una función que no se anula localmente tiene un logaritmo. Sin embargo, $\exp : \mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \rightarrow \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)$ no es sobreyectiva.

Lema 3.3.8. Sea $0 \rightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{T}$ una secuencia exacta de haces en el espacio topológico X . Entonces para cada conjunto abierto $U \subset X$ la secuencia

$$0 \rightarrow \mathcal{R}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S}(U) \xrightarrow{\beta} \mathcal{T}(U)$$

es exacta.

La demostración se puede ver en [Fos81].

Ejemplo 3.3.9. Daremos algunos ejemplos de secuencias exactas cortas de haces

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0$$

en una variedad compleja X .

1. Sea $\mathcal{L} := \text{Ker} \left(\mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \right)$ el haz de formas diferenciales cerradas, donde $\mathcal{E}^{(1)}$ es el haz del espacio vectorial de 1-formas diferenciables y $\mathcal{E}^{(2)}$ el haz del espacio vectorial de 2-formas diferenciables. La secuencia

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{L} \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

es exacta. Puesto que localmente toda forma diferencial cerrada es exacta, entonces $d : \mathcal{E}^{(1)} \rightarrow \mathcal{L}$ es un epimorfismo.

2. La secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega \longrightarrow 0 \quad (3.14)$$

es la versión holomorfa de (3.13), donde Ω es el haz del espacio vectorial de las 1-formas holomorfas.

3. La exactitud de la secuencia

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0 \quad (3.15)$$

se sigue del ejemplo (3.3.5), donde i es la inclusión. A esta secuencia se le llama *secuencia exponencial de haces*.

3.3.3 Homomorfismos inducidos por homomorfismos de haces

Cualquier homomorfismo $\alpha : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$ de haces en el espacio topológico X induce homomorfismos:

$$\begin{aligned} \alpha^0 & : H^0(X, \mathcal{R}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{S}), \\ \alpha^q & : H^q(X, \mathcal{R}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{S}). \end{aligned}$$

El homomorfismo α^0 no es más que la aplicación $\alpha_X : \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$.

El homomorfismo α^q , $q \geq 1$, se construye de la siguiente manera: Sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X . Se considera la aplicación

$$\alpha_{\mathcal{U}} : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{R}) \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$$

que asigna a cada cocadena $\xi = (f_{i_0, \dots, i_{q+1}}) \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{R})$ la cocadena

$$\alpha_{\mathcal{U}}(\xi) := (\alpha(f_{i_0, \dots, i_{q+1}})) \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}).$$

Esta aplicación lleva cociclos en cociclos y cofronteras en cofronteras y por lo tanto induce un homomorfismo

$$\bar{\alpha}_{\mathcal{U}} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{R}) \longrightarrow H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}).$$

La colección de $\bar{\alpha}_{\mathcal{U}}$, donde \mathcal{U} corre sobre todos los cubrimientos abiertos de X , induce el homomorfismo α^q .

3.3.4 El homomorfismo de conexión

Sea

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{T}$$

una secuencia exacta de haces en el espacio topológico X . Un *homomorfismo de conexión* es una aplicación de la forma

$$\delta^* : H^q(X, \mathcal{T}) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{R}).$$

Veamos como se define δ^* cuando $q = 0$, el caso general es similar aunque con mas notaciones. Sea

$$h \in H^0(X, \mathcal{F}).$$

Como todos los homomorfismos $\beta_x : \mathcal{S}_x \rightarrow \mathcal{T}_x$ son sobreyectivos, entonces existe un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X y una cocadena $(g_{ij}) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ tal que

$$\beta(g_i) = h|_{U_i} \quad \text{para cada } i \in I. \quad (3.16)$$

Por lo tanto $\beta(g_j - g_i) = 0$ en $U_i \cap U_j$. Por el Lema 3.3.8 existe $f_{ij} \in \mathcal{R}(U_i \cap U_j)$ tal que

$$\alpha(f_{ij}) = g_j - g_i. \quad (3.17)$$

En $U_i \cap U_j \cap U_k$ se tiene $\alpha(f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}) = 0$ y por el Lema 3.3.7 se tiene $f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$, es decir,

$$(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{R})$$

Luego $\delta^*h \in H^1(X, \mathcal{R})$ es la clase de cohomología representada por (f_{ij}) . Esta definición es independiente de las diversas elecciones realizadas.

Teorema 3.3.10. *Si X es un espacio topológico y*

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{T} \longrightarrow 0$$

una secuencia exacta corta de haces en X . Entonces, la secuencia inducida de grupos de cohomología

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{R}) &\xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathcal{S}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathcal{T}) \xrightarrow{\delta^*} \\ &\xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{R}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X, \mathcal{S}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathcal{T}) \xrightarrow{\delta^*} \dots \\ &\xrightarrow{\delta^*} H^q(X, \mathcal{R}) \xrightarrow{\alpha^q} H^q(X, \mathcal{S}) \xrightarrow{\beta^q} H^q(X, \mathcal{T}) \dots \end{aligned}$$

es exacta.

En las referencias [Fos81] y [GH94] podemos encontrar una demostración de este teorema.

3.4 Cohomología del espacio proyectivo

Considere una variedad compleja M y una k -forma diferenciable ω de clase C^∞ en M . Sea

$$(z_1, \dots, z_n), \text{ donde } z_j = x_j + iy_j,$$

un sistema de coordenadas locales, de M tenemos una representación de la forma ω en estas coordenadas reales como

$$\omega = \sum a_{I,J} dx_I \wedge dy_J.$$

considerando la relación de las coordenadas reales con las coordenadas complejas y sus conjugadas

$$dx_i = \frac{1}{2}(dz_i + d\bar{z}_i), \quad dy_i = \frac{1}{2}(dz_i - d\bar{z}_i)$$

tenemos la representación de ω en término de los diferenciales complejos y sus conjugadas

$$\omega = \sum b_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

donde $dz_I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_s}$ y $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_r}$. En esta situación, diremos que el término $b_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$, de la forma ω , es del tipo (r, s) donde $r + s = k$. Así podemos expresar ω de forma única como

$$\omega = \omega^{(k,0)} + \omega^{(k-1,1)} + \cdots + \omega^{(0,k)}$$

donde todos sus términos de la forma $\omega^{(r,s)}$ son del tipo (r, s) .

Denotemos por $\mathcal{a}^k(M)$ el espacio de las k -formas de clase C^∞ sobre la variedad M y por $\mathcal{a}^{(r,s)}(M)$ el espacio de las formas del tipo (r, s) de clase C^∞ . Así tenemos

$$\mathcal{a}^k(M) = \mathcal{a}^{(k,0)}(M) \oplus \mathcal{a}^{(k-1,1)}(M) \oplus \cdots \oplus \mathcal{a}^{(0,k)}(M).$$

Por otro lado, tenemos la diferencial exterior

$$d : \mathcal{a}^k(M) \rightarrow \mathcal{a}^{k+1}(M),$$

la derivada ∂ y la derivada conjugada

$$\partial : \mathcal{a}^{(r,s)}(M) \rightarrow \mathcal{a}^{(r+1,s)}(M), \quad \bar{\partial} : \mathcal{a}^{(r,s)}(M) \rightarrow \mathcal{a}^{(r,s+1)}(M),$$

definidos localmente para $\omega^{(r,s)} = \sum a_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J \in \mathcal{a}^{(r,s)}(M)$ como

$$\partial\omega^{(r,s)} = \sum_{I,J} \partial a_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J, \quad \bar{\partial}\omega^{(r,s)} = \sum_{i=1}^n \bar{\partial} a_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

así tenemos $d = \partial + \bar{\partial}$. Además, de $dd = 0$ se desprende

$$\partial\bar{\partial}\omega^{(r,s)} + \bar{\partial}\partial\omega^{(r,s)} + \bar{\partial}\bar{\partial}\omega^{(r,s)} + \partial\partial\omega^{(r,s)} = dd\omega^{(r,s)} = 0.$$

Comparando el bigrado de las formas,

$$\partial\partial = 0, \quad \partial\bar{\partial} = 0, \quad \bar{\partial}\partial = 0, \quad \bar{\partial}\bar{\partial} = 0.$$

En particular, una $(r, 0)$ -forma $\omega^{(r,0)} = \sum a_I dz_I \in \mathcal{a}^{(r,0)}(M)$ es holomorfa si

$$\bar{\partial}\omega^{(r,s)} = \sum_I \bar{\partial} a_I \wedge dz_I = 0.$$

Definimos la cohomología de Dolbeault de bigrado (r, s) como:

$$H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M) = \frac{\text{Ker}(\bar{\partial} : \mathcal{a}^{(r,s)}(M) \rightarrow \mathcal{a}^{(r+1,s)}(M))}{\text{Im}(\mathcal{a}^{(r,s)}(M) \rightarrow \mathcal{a}^{(r+1,s)}(M))}$$

Lema 3.4.1 ($\bar{\partial}$ -Lema de Poincaré en una variable). Sean $\bar{\Delta}$ disco cerrado en \mathbb{C} y $g(z) \in C^\infty(\bar{\Delta})$, la función

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{g(w)}{w - z} dw \wedge d\bar{w}$$

está definida y es de clase C^∞ en el disco Δ , además satisface

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$$

Prueba. Para $z_0 \in \Delta$, se elige ε tal que el disco $\Delta(z_0, 2\varepsilon) \subset \Delta$. Considerando una partición de la unidad adecuada obtenemos funciones $g_1, g_2 \in C^\infty$ con soporte de (g_1) contenida en $\Delta(z_0, 2\varepsilon)$ y soporte de g_2 contenida en $\Delta(z_0, \varepsilon)$ tal que

$$g(z) = g_1(z) + g_2(z),$$

La integral

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} g_2(w) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w - z},$$

está bien definida y es de clase C^∞ en el disco $\Delta(z_0, \varepsilon)$. Además

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{g_2(w)}{w - z} \right) dw \wedge d\bar{w} = 0.$$

Como $g_1(z)$ tiene soporte compacto, se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} g_1(w) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w - z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} g_1(w) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} g_1(u + z) \frac{du \wedge d\bar{u}}{u}, \end{aligned}$$

donde $u = w - z$. Cambiando a coordenadas polares $u = re^{i\theta}$ esta integral se convierte en

$$f_1(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} g_1(z + re^{i\theta}) e^{-i\theta} dr \wedge d\theta,$$

que está bien definida y es de clase C^∞ en $z \in \Delta$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(z)}{\partial \bar{z}} &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}}(z + re^{i\theta}) e^{-i\theta} dr \wedge d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\partial g_1}{\partial \bar{w}}(w) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w - z}, \end{aligned}$$

pero g_1 se anula en $\partial\Delta$. Finalmente por la fórmula de Cauchy obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_1(z) = g_1(z) = g(z).$$

□

Lema 3.4.2 ($\bar{\partial}$ -Lema de Poincaré). *Sobre el polidisco $\Delta = \Delta(r)$ en el espacio \mathbb{C}^n la cohomología de Dolbeault de bigrado (p, q) , con $q \geq 1$ es trivial, esto es,*

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\Delta) = 0, \quad q \geq 1.$$

Prueba. Toda (p, q) -forma se puede escribir como

$$\varphi = \sum_{\substack{\#I=p \\ \#J=q}} \varphi_{IJ} \cdot dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

si esta es una $\bar{\partial}$ forma cerrada, entonces las formas

$$\varphi_I = \sum_{\#J=q} \varphi_{IJ} \cdot d\bar{z}_J \in a^{0,q}(\Delta),$$

son también $\bar{\partial}$ formas cerradas, y si

$$\varphi_I = \bar{\partial}\eta_I,$$

entonces

$$\varphi = \pm \bar{\partial} \left(\sum_I dz_I \wedge \eta_I \right);$$

por tanto, es suficiente probar que los grupos $H_{\bar{\partial}}^{0,q}(\Delta)$ se anulan, para probar esto dividiremos la prueba en dos partes

i) Primero mostramos que si φ es una $(0, q)$ -forma $\bar{\partial}$ -cerrada en $\Delta = \Delta(r)$, entonces para cualquier $s < r$, podemos encontrar $\psi \in \mathcal{A}^{0,q-1}(\Delta(s))$ con $\bar{\partial}\psi = \varphi$ en $\Delta(s)$.

Para mostrar esto, escribimos

$$\varphi = \sum \varphi_I d\bar{z}_I.$$

y consideremos $k \geq 0$ el natural más pequeño tal que φ es generado por los $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_k$ como \mathcal{C}^∞ -módulo. La demostración de i) será por inducción en $k = 0$.

Si $k = 0$ entonces $\varphi = 0$ dado que $q > 0$.

Si $k \geq 1$ entonces suponga por la hipótesis inductiva que podemos encontrar $\eta \in \mathcal{A}^{0,q-1}(\Delta(s))$ tal que

$$\varphi = \bar{\partial}\eta \text{ en } \Delta,$$

Por la hipótesis inductiva podemos encontrar

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{I:k \in I} \varphi_I \cdot d\bar{z}_{I-\{k\}} \\ \varphi_2 &= \sum_{I:k \notin I} \varphi_I \cdot d\bar{z}_I \end{aligned}$$

de modo que

$$\varphi = \varphi_1 \wedge d\bar{z}_k + \varphi_2,$$

donde φ_1, φ_2 son generadas por los $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_{k-1}$. Como φ es $\bar{\partial}$ -cerrada φ_1 y φ_2 son holomorfas en las variables z_{k+1}, \dots, z_n . Luego, aplicamos el lema anterior a las funciones $\varphi_I(z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)$ en la variable z_k en el disco $D(0, r_k)$ para encontrar funciones $\eta_I(z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)$ de clase \mathcal{C}^∞ tal que

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial \bar{z}_l} = (\varphi_1)_I,$$

y holomorfa en las variables z_{k+1}, \dots, z_n . Consideremos

$$\eta = \sum_{I:k \in I} \eta_I d\bar{z}_{I-\{k\}},$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \varphi + \bar{\partial}\eta &= \varphi_1 \wedge d\bar{z}_k + \varphi_2 + \sum_{I:k \in I} \frac{\partial \eta_I}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_{I-\{k\}} + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{I:k \in I} \frac{\partial \eta_I}{\partial \bar{z}_l} d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_{I-\{k\}} \\ &= \varphi_1 \wedge d\bar{z}_k + \varphi_2 + d\bar{z}_k \wedge \varphi_1 + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{I:k \in I} \frac{\partial \eta_I}{\partial \bar{z}_l} d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_{I-\{k\}} \\ &= \varphi_2 + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{I:k \in I} \frac{\partial \eta_I}{\partial \bar{z}_l} d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_{I-\{k\}} \end{aligned}$$

que es una forma generado por $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_{k-1}$. Luego por hipótesis inductiva existe $\psi \in \mathcal{A}^{0,q-1}(\Delta(s))$ tal que

$$\varphi + \bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\psi$$

en $\Delta(s)$ como se deseaba probar.

ii) Prueba del lema $\bar{\partial}$ -Poincaré en general.

Sea $\{r_i\}$ una sucesión monótona creciente que tiende a r . De la primera parte i), podemos encontrar $\psi_k \in \mathcal{A}^{0,q-1}(\Delta)$ tales que $\bar{\partial}\psi_k = \varphi$ en $\Delta(r_k)$. Para ello tomemos $\psi'_k \in \mathcal{A}^{0,q-1}(\Delta(r_{k+1}))$ con $\bar{\partial}\psi'_k = \varphi$ y una función ρ_k de clase C^∞ igual a 1 en $\Delta(r_k)$, con soporte compacto en $\Delta(r_{k+1})$. Tome $\psi_k = \rho_k \cdot \psi'_k$.

Veremos a continuación que podemos elegir $\{\psi_k\}$ tal que está sucesión converja uniformemente en compactos. La demostración será por inducción sobre q .

Por i) podemos considerar $\alpha \in \mathcal{A}^{0,q-1}(\Delta)$ con $\bar{\partial}\alpha = \varphi$ en $\Delta(r_{k+1})$; entonces

$$\bar{\partial}(\psi_k - \alpha) = 0 \quad \text{en } \Delta(r_k).$$

Si $q \geq 2$, entonces por la hipótesis de inductiva podemos hallar $\beta \in \mathcal{A}^{0,q-2}(\Delta)$ con

$$\bar{\partial}\beta = \psi_k - \alpha \quad \text{en } \Delta(r_{k-1}).$$

Sea

$$\psi_{k+1} = \alpha + \bar{\partial}\beta,$$

entonces

$$\bar{\partial}\psi_{k+1} = \bar{\partial}\alpha = \varphi \quad \text{en } \Delta(r_{k+1}),$$

y

$$\psi_{k+1} = \psi_k \quad \text{en } \Delta(r_{k-1}).$$

Por lo tanto, la sucesión $\{\psi_k\}$ escogida de esta forma converge uniformemente en conjuntos compactos de Δ .

Falta el caso $q = 1$. Para ello consideremos nuevamente, $\psi_k \in C^\infty(\Delta)$ con $\bar{\partial}\psi_k = \varphi$ en $\Delta(r_k)$ y sea $\alpha \in C^\infty(\Delta)$ con $\bar{\partial}\alpha = \varphi$ en $\Delta(r_{k+1})$, entonces $\psi_k - \alpha$ es una función holomorfa en $\Delta(r_k)$ y por lo tanto, tiene una expansión en serie de potencias centrada en el origen convergente en $\Delta(r_k)$. Truncamos esta serie para obtener un polinomio β con

$$\sup_{\Delta(r_{k-1})} |(\psi_k - \alpha) - \beta| < \frac{1}{2^k},$$

y se establece

$$\psi_{k+1} = \alpha + \beta.$$

Entonces

$$\bar{\partial}\psi_{k+1} = \bar{\partial}\alpha = \varphi, \quad \Delta(r_{k+1})$$

así $\psi_{k+1} - \psi_k$ es holomorfa en $\Delta(r_k)$ y

$$\sup_{\Delta(r_{k-1})} |\psi_{k+1} - \psi_k| < \frac{1}{2^k},$$

entonces existe $\psi = \lim \psi_k$ y $\bar{\partial}\psi = \varphi$. \square

Teorema 3.4.3 (Teorema de Dolbeault). *Si M es variedad compleja entonces para todo $p, q \geq 0$*

$$H^p(M, \Omega^p) \simeq H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$$

Prueba. Por el lema 3.4.2 toda (p, q) - forma $\bar{\partial}$ -cerrada es localmente $\bar{\partial}$ - exacta, así tenemos la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Omega^p \xrightarrow{\bar{\partial}} a^{(p,1)} \xrightarrow{\bar{\partial}} a^{(p,2)} \longrightarrow \dots$$

cortando esta secuencia tenemos las secuencias exactas cortas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^p & \longrightarrow & a^{(p,0)} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & Z^{(p,1)} & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & Z^{(p,1)} & \longrightarrow & a^{(p,1)} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & Z^{(p,2)} & \longrightarrow & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \longrightarrow & Z^{(p,k)} & \longrightarrow & a^{(p,k)} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & Z^{(p,k+1)} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Como $a^{(r,s)}$ es fino $H^k(M, a^{(r,s)}) = 0, \forall k > 0, r, s \geq 0$ tenemos,

$$\begin{array}{l} H^{q-1}(M, Z^{(p,1)}) \simeq H^q(M, \Omega^p), \\ H^{q-2}(M, Z^{(p,2)}) \simeq H^{q-1}(M, Z^{(p,1)}), \\ \vdots \\ H^1(M, Z^{(p,q-1)}) \simeq H^2(M, \Omega^{p,q-2}). \end{array} \quad (3.18)$$

De la secuencia

$$0 \longrightarrow Z^{(p,q-1)} \longrightarrow a^{(p,q-1)} \longrightarrow Z^{(p,q)} \longrightarrow 0,$$

tenemos

$$0 \longrightarrow Z^{(p,q-1)}(M) \longrightarrow a^{(p,q-1)}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} Z^{(p,q)}(M) \longrightarrow H^1(M, Z^{(p,q-1)}) \longrightarrow 0.$$

Finalmente

$$H^1(M, Z^{(p,q-1)}) \simeq \frac{Z^{(p,q)}(M)}{\bar{\partial}(a^{(p,q-1)}(M))} = H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M).$$

De 3.18 tenemos

$$H^q(M, \Omega^p) \simeq H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M).$$

□

Observación 3.4.4. Del teorema 3.4.3 se tienen las siguientes consecuencias:

(i) Para $p = 0$ tenemos $\Omega^0 = \mathcal{O}$

$$H^q(M, \mathcal{O}) \simeq H_{\bar{\partial}}^{0,q}(M) = 0 \quad \text{si } q > \dim M.$$

(ii) Por el lema 3.4.2, se tiene

$$H^q(\Delta, \Omega^p) \simeq H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\Delta) = 0, \quad q \geq 1, \Delta \subseteq \mathbb{C}^n \text{ polidisco}$$

En particular

$$H^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = 0 \text{ si } q \geq 1$$

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un cubrimiento abierto afines $U_i = \{(z_0, \dots, z_n) : z_i \neq 0\}$, $0 \leq i \leq n$ de \mathbb{P}^n . Dado que cada U_i es biholomorfo a \mathbb{C}^n y, por lo tanto, \mathcal{U} es un cubrimiento de Leray del espacio proyectivo complejo \mathbb{P}^n para el haz \mathcal{O} . Se sigue inmediatamente del teorema de Leray 3.2.5 que

$$H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}) = 0, \quad p > n.$$

Usaremos la misma notación $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ para denotar el haz de secciones del fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$. Con relación al cubrimiento \mathcal{U} , el fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ tiene funciones de transición $\phi_{ij} = \frac{z_j}{z_i}$. Para $m \in \mathbb{Z}$ denotamos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ el fibrado con funciones de transición en $\left(\frac{z_j}{z_i}\right)^m$ en U_{ij} , así este haz está asociado al divisor $z_0^m = 0$. Es decir, si hacemos que $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ denota el hiperplano $z_0 = 0$, entonces tenemos

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) = [m \cdot \mathbb{P}^{n-1}].$$

Con esta convención, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ tiene la sección *canónica* s^m dada localmente por

$$s_i^m = \left(\frac{z_0}{z_i}\right)^m,$$

y además

$$\text{div}(s^m) = m \cdot \mathbb{P}^{n-1}.$$

Lema 3.4.5. *Dado un hiperplano \mathcal{H} de \mathbb{P}^n . Para cada $m \in \mathbb{Z}$, tenemos un \mathcal{O} -morfismo no nulo*

$$\phi_{\mathcal{H}} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+1),$$

satisfaciendo $\phi_{\mathcal{H},z} = 0$ si y solo si $z \in \mathcal{H}$. En particular, $\phi_{\mathcal{H}}$ se restringe a un isomorfismo de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+1)$ sobre $\mathbb{P}^n \setminus \mathcal{H}$.

Prueba. Sea $h(z_0, \dots, z_n) = 0$ la ecuación que define el hiperplano \mathcal{H} . El morfismo

$$\phi_{\mathcal{H}}(f) = h_z f, \text{ donde } f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)_z.$$

satisface las propiedades requeridas. \square

Denotemos por $P^{(m)}(\mathbb{C}^{n+1})$ el espacio de polinomios homogéneos de grado m sobre \mathbb{C}^{n+1} . Luego aplicando la proposición 5.9.2 de [FFF82], se tiene:

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \approx \begin{cases} P^{(m)}(\mathbb{C}^{n+1}) & m \geq 0 \\ 0 & m < 0 \end{cases}$$

Teorema 3.4.6. (1) *Para $m \geq 0$, se tiene:*

$$H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \approx \begin{cases} 0 & p \neq 0 \\ P^{(m)}(\mathbb{C}^{n+1}) & p = 0 \end{cases}$$

(2) *Para $m < 0$, se tiene*

$$H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \approx \begin{cases} 0 & p \neq n \\ P^{(-m-n-1)}(\mathbb{C}^{n+1}) & p = n \end{cases}$$

Prueba. Previamente hemos analizado los casos $p = 0$ y $p > n$. De ahora en adelante supondremos $1 \leq p \leq n$.

Consideramos el caso $m = 0$. Para ello considere un p -cociclo c del haz \mathcal{O} respecto al cubrimiento \mathcal{U} por abiertos afines, $c \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, digamos

$$c = \{c(s) = c(s_0, \dots, s_p)\},$$

donde $c(s) \in \mathcal{O}(U_s)$ y $s = (s_0, \dots, s_p)$ es una $(p+1)$ -upla de enteros (distintos) que se encuentran entre 0 y n . Cada $c(s)$ es una función holomorfa sobre $U_s \subset \mathbb{C}^{n+1}$, como $m = 0$ esta función sería homogéneo de grado cero, luego su desarrollo en serie de Laurent sobre U_s es de la forma

$$\begin{aligned} c(s)(z_0, \dots, z_n) &= \sum_{r_0 + \dots + r_n = 0} c(s)_{r_0 \dots r_n} z_0^{r_0} \dots z_n^{r_n} \\ &= \sum_{|r|=0} c(s)_r z^r, \end{aligned}$$

Observe que el coeficiente $c(s)_{r_0 \dots r_n}$ será cero si $r_j < 0$ con $j \notin \{s_0, \dots, s_p\}$.

Definimos

$$a(s_0, \dots, s_{p-1}) = \frac{1}{n-p+1} \sum_{j \notin \{s_0, \dots, s_{p-1}\}} c(j, s_0, \dots, s_{p-1})^+,$$

donde $c(j, s_0, \dots, s_{p-1})^+$ es una función holomorfa en $U_{s_0 \dots s_{p-1}}$ con series de Laurent

$$c(j, s_0, \dots, s_{p-1})^+ = \sum_{\substack{|r|=0 \\ r_j \geq 0}} c(j, s_0, \dots, s_{p-1})_r z^r.$$

Así tenemos el operador borde de $a \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$.

$$\begin{aligned} (\delta a)_{s_0 \dots s_p} &= \frac{1}{n-p+1} \left(\sum_{j \notin \{s_0, \dots, s_{p-1}\}} (c(j, s_1, s_2, \dots, s_p) - \dots \pm c(j, s_0, \dots, s_{p-1}))^+ \right) \\ &= \frac{1}{n-p+1} \sum_{j \notin \{s_0, \dots, s_{p-1}\}} c(s_0, \dots, s_p), \quad c \text{ es un cociclo: } \delta c = 0 \\ &= c(s_0, \dots, s_p). \end{aligned}$$

así $Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = \delta(C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{O}))$. Por lo tanto $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$, $p > 0$.

Los mismos argumentos demuestran que si $m > 0$ entonces $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}(m)) = 0$, $p > 0$. En efecto, en este caso una cocadena es una colección de funciones holomorfas que son homogéneas de grado m . También la demostración vale para $m < 0$ siempre que $p < n$.

Solo falta demostrar el caso $p = n$ y $m < 0$. Para ello consideremos el cociclo $c \in Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}(m))$, esto es, $c \in \mathcal{O}(U_{01 \dots n})$ es homogénea de grado m . Por lo tanto

$$c(z_0, \dots, z_n) = \sum_{|r|=m} c_r z^r.$$

El cociclo c lo podemos descomponer como la suma de dos cocadena $c = C_0 + C_1$, donde la cocadena C_0 es la serie donde todos sus términos $c_{r_0 \dots r_n} z_0^{r_0} \dots z_n^{r_n}$ tienen

al menos un índice $r_j > 0$ y C_1 es la suma de los términos tal que todo índice $r_j < 0$. Observe que $C_1 = 0$, si $-m \leq n$.

Como en la primera parte de esta demostración existe una $(n-1)$ -cocadena a tal que $C_0 = \delta a$. Por otro lado teniendo en cuenta el desarrollo de la serie de Laurent de C_1 tenemos que $C_1 \neq 0$ no puede ser un coborde. Así, podemos suponer $m \leq -n - 1$. Por lo tanto

$$E = \left\{ \sum_{|r|=m} c_r z^r : c_r \in \mathbb{C}, \text{ cada índice } r_j < 0 \right\} \approx H^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}(m))$$

Así el cociclo c se puede escribir

$$c = (z_0 \dots z_n)^{-1} \sum_{\substack{r_0, \dots, r_n \leq 0 \\ r_0 + \dots + r_n = m + n + 1}} c_r z_0^{r_0+1} \dots z_n^{r_n+1}.$$

Por lo tanto $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}(m)) \approx P^{(-m-n-1)}(\mathbb{C}^{n+1})$, donde el isomorfismo se da asignando al cociclo c en polinomio $P \in P^{(-m-n-1)}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que

$$c(z_0, \dots, z_n) = (z_0 \dots z_n)^{-1} P(z_0^{-1}, \dots, z_n^{-1}).$$

□

Corolario 3.4.7.

$$h^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = \begin{cases} \binom{k+n}{k} & , q = 0, k \geq 0 \\ \binom{-k-1}{-k-1-n} & , q = n, k \leq -n-1 \\ 0 & , \text{ otros casos} \end{cases}$$

3.4.1 Fibrados de líneas sobre el espacio proyectivo

Dado una variedad compleja M , tenemos el grupo de Picard

$$\text{Pic}(M) = \{[L] : L \text{ es un fibrado lineal homomorfo sobre } M\}$$

donde

$$[L] = [L'] \text{ si y solo si } L \text{ y } L' \text{ son isomorfos .}$$

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de M tal que L y L' se trivializan sobre cada uno de los abiertos U_i . Sean $(g_{i_0 i_1})$ y $(g'_{i_0 i_1})$ las funciones de transición de los fibrados L y L' respectivamente. Como ellos satisfacen las condiciones de cociclos tenemos $(g_{i_0 i_1})$ y $(g'_{i_0 i_1})$ están en $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ así ellos determinan elementos del grupo de cohomología $H^1(M, \mathcal{O}^*)$. Si L y L' son isomorfos existen $f_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ tal que

$$g_{i_0 i_1} f_{i_0} = g'_{i_0 i_1} f_{i_1}, \text{ en } U_{i_0 i_1}.$$

esto es,

$$f_{i_0} f_{i_1}^{-1} = g'_{i_0 i_1} g_{i_0 i_1}^{-1}$$

Luego

$$\delta^0((f_i)) = (g'_{i_0 i_1} g_{i_0 i_1}^{-1})$$

Por lo tanto $(g_{i_0 i_1})$ y $(g'_{i_0 i_1})$ son cobordes y por lo tanto determinan el mismo elemento del grupo $H^1(M, \mathcal{O}^*)$, de esta manera tenemos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \text{Pic}(M) &\rightarrow H^1(M, \mathcal{O}^*) \\ [L] &\rightarrow [(g_{i_0 i_1})] \end{aligned}$$

esta bien definida y es un isomorfismo de grupos. Así tenemos

Proposición 3.4.8. *Si M es una variedad compleja, Entonces los grupos son isomorfos*

$$\text{Pic}(M) \xrightarrow{\phi} H^1(M, \mathcal{O}^*).$$

Proposición 3.4.9. *El grupo de Picard $\text{Pic}(\mathbb{P}^n)$ es isomorfo al grupo ciclico infinito generado por el fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.*

Prueba. Primero vemos que el grupo $\text{Pic}(\mathbb{P}^n)$ es infinito, para ello basta probar que el grupo generado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ en $\text{Pic}(\mathbb{P}^n)$ es ciclico infinito. En efecto, como $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(p) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\otimes p}$ es isomorfo al fibrado trivial $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$ si y solo si $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(p)) \cong \mathbb{C}$ y por el teorema 3.4.6 esto sucede si y solo si $p = 0$.

Ahora veamos que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ genera el grupo de $\text{Pic}(\mathbb{P}^n)$. En efecto, de la secuencia de cohomología

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 0,$$

como $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}) = 0$ y $H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}) = 0$, por el teorema 3.4.6, tenemos

$$H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^*) = H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$$

donde el isomorfismo viene dado por δ^* , el homomorfismo de conexión (ver teorema 3.3.10). Por topología, $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Sea $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^n$. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta^*} & H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \\ \downarrow r & & \downarrow \\ H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta^*} & H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \end{array}$$

donde los mapas verticales son inducidos por inclusión. Ahora sabemos que el haz $r(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ genera $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^*)$, ver [FFF82]. Pero r mapea el haz de la sección del hiperplano de \mathbb{P}^n al haz de la sección del hiperplano de \mathbb{P}^1 y así $\delta^* r(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ genera $H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z})$. Por la conmutatividad del diagrama se deduce que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ genera $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^*)$. \square

Capítulo 4

El teorema de Gómez-Mont Kempf

En este capítulo estudiaremos el complejo de Koszul, daremos su definición, ejemplos y un teorema en el cual se demuestra que el complejo de Koszul es una secuencia exacta. Finalmente, demostraremos el teorema de Gómez Mont, Kempf, teorema principal de la tesis, nuestras principales referencias son [Eis13],[OSS80], [Jur15], [GH94] y [GMK89].

4.1 Secuencia regular

Sea R un anillo (conmutativo y con 1), $x \in R$, $x \neq 0$ se llama un *divisor de cero* si existe $y \in R$, $y \neq 0$ tal que $xy = 0$. Si x no es divisor de cero se le llama *elemento regular*.

Definición 4.1.1. Sean $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_n$ una secuencia de gérmenes de funciones holomorfas. Diremos que (f_1, \dots, f_n) es una *secuencia regular*, si la clase de f_k no es un divisor de cero en $\frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, \dots, f_{k-1} \rangle}$ para todo $k = 1, \dots, n$.

Ejemplo 4.1.2. Sea la foliación \mathcal{F}_α generada por el campo vectorial

$$\alpha = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$$

en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Probaremos que la secuencia de los gérmenes $f_1 = x$, $f_2 = y \in \mathcal{O}_2$ es una secuencia regular y la singularidad de \mathcal{F}_α es no degenerada.

Prueba. (i) Probaremos que la secuencia de los gérmenes $f_1 = x$, $f_2 = y \in \mathcal{O}_2$ es una secuencia regular.

En efecto:

(a) $f_1 = x$ no es divisor de \mathcal{O}_2 , pues no existe ningún

$$g = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots \neq 0 \in \mathcal{O}_2$$

tal que $f_1g = 0$.

(b) $\bar{f}_2 = \bar{y}$ no es un divisor de cero en $\frac{\mathcal{O}_2}{\langle f_1 \rangle}$.

En efecto.

Sea $g \in \mathcal{O}_2$, entonces g se define como:

$$g = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots$$

Como $\bar{x} = \bar{0}$ en $\frac{\mathcal{O}_2}{\langle f_1 \rangle}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \overline{a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots} \\ &= \bar{a}_{00} + \bar{a}_{10}\bar{x} + \bar{a}_{01}\bar{y} + \bar{a}_{20}\bar{x}^2 + \bar{a}_{11}\bar{x}\bar{y} + \bar{a}_{02}\bar{y}^2 + \dots \\ \bar{g} &= \bar{a}_{00} + \bar{a}_{01}\bar{y} + \bar{a}_{02}\bar{y}^2 + \dots \end{aligned}$$

Como $\bar{f}_2 = \bar{y} \neq \bar{0}$, entonces $f_2 = \bar{y}$ no es un divisor de cero de $\frac{\mathcal{O}_2}{\langle f_1 \rangle}$, pues no existe ningún $\bar{g} = \bar{a}_{00} + \bar{a}_{01}\bar{y} + \bar{a}_{02}\bar{y}^2 + \dots \neq \bar{0} \in \frac{\mathcal{O}_2}{\langle f_1 \rangle}$ tal que $\bar{f}_2\bar{g} = \bar{0}$. Por lo tanto, la secuencia de gérmenes $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_2$ es una secuencia regular.

(ii) Dada la foliación \mathcal{F}_α generada por el campo vectorial

$$\alpha = \alpha(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$$

tenemos $Sing(\mathcal{F}_\alpha) = Sing(X) = \{p \in (\mathbb{C}^2, 0) : x = 0, y = 0\} = \{(0, 0)\}$. Como

$$\det(D\alpha(p)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces $p = (0, 0)$ es una singularidad no degenerada. Por lo tanto, la foliación \mathcal{F}_α tiene singularidad no degenerada.

En la Figura 4.1, se observa que El eje $x : y = 0$ y el eje $y : x = 0$ son curvas regulares, siendo la intersección de ellos el punto $O = (0, 0)$.

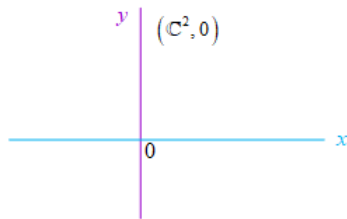


Figura 4.1: $f_1 = x, f_2 = y$ es una secuencia regular

□

Proposición 4.1.3. Sea $U = (\mathbb{C}^n, 0)$ una vecindad del origen y $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ una aplicación holomorfa, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) $f^{-1}(0) = \{0\}$.
- (2) $\text{codim} \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) : f_1(p) = \cdots = f_k(p) = 0\} = k$.
- (3) $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_n$ es una secuencia regular.

La demostración se puede ver en [GH94] pág 660.

Corolario 4.1.4. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ vecindad del origen y $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$. Si $f(0) = 0$ y $|Df(0)| \neq 0$, entonces $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_n$ es una secuencia regular.

Ejemplo 4.1.5. Sea $U \subset \mathbb{C}^2$ vecindad del origen y $f = (f_1, f_2) : U \rightarrow \mathbb{C}^2$, donde $f_1 = y - x^2$, $f_2 = x - y^2$. Como

$$\det(Df(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Por el corolario 4.1.4, la secuencia $(y - x^2, x - y^2)$ es regular en el anillo local \mathcal{O}_2 , ver Figura 4.2

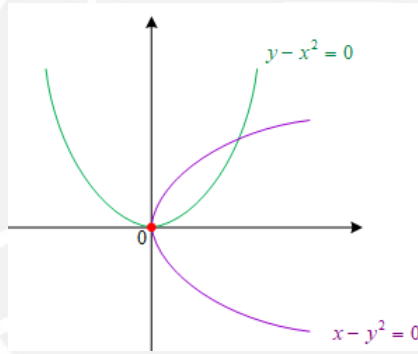


Figura 4.2: La secuencia $f_1 = y - x^2$, $f_2 = x - y^2$ regular.

Lema 4.1.6. Si $(f_1, \dots, f_i, \dots, f_r)$ es una secuencia regular en el anillo \mathcal{O}_n . Entonces cualquier permutación de $(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(i)}, \dots, f_{\sigma(r)})$, donde σ es una permutación de los elementos $\{1, \dots, i, \dots, n\}$, también es una secuencia regular.

La demostración se puede ver en [Eis13].

4.2 Complejo de Koszul

Dado $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_n$ y definamos los \mathcal{O}_n -módulos

$$E_k = \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^k \mathbb{C}^r$$

con \mathcal{O}_n -base $\{e_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} : 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq r\}$, donde $\{e_1, \dots, e_r\}$ es la base canónica del espacio \mathbb{C}^r .

Entre estos espacios tenemos los morfismos de módulos \mathcal{O}_n -lineal

$$d_k^E : E_k \longrightarrow E_{k-1}$$

$$e_J \longmapsto d_k^E(e_J) = \sum_{t=1}^k (-1)^{t-1} f_{j_t} e_{j_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{j_t} \wedge \dots \wedge e_{j_k} \quad (4.1)$$

mediante \hat{e}_{j_t} indicamos que e_{j_t} debe omitirse del producto. Estos morfismos satisfacen la propiedad

$$d_j^E \circ d_{j+1}^E = 0, \quad \forall j \geq 0 \quad (4.2)$$

y así tenemos determinado un complejo de cadenas de \mathcal{O}_n -módulo de longitud r

$$\mathcal{K}(f_1, \dots, f_r) : 0 \xrightarrow{o} E_r \xrightarrow{d_r^E} E_{r-1} \xrightarrow{d_{r-1}^E} \dots \xrightarrow{d_2^E} E_1 \xrightarrow{d_1^E} E_0 \xrightarrow{o} 0 \quad (4.3)$$

llamado *complejo de Koszul*.

Dado el complejo de cadenas $\mathcal{K}(f_1, \dots, f_r)$, definimos el k -ésimo espacio vectorial de cohomología como:

$$H^k(\mathcal{K}(f_1, \dots, f_r)) = \frac{\text{Ker}(d_k^E)}{\text{Im}(d_{k+1}^E)}, \quad k = 0, \dots, r-1. \quad (4.4)$$

$$H^r(\mathcal{K}(f_1, \dots, f_r)) = \text{Ker}(d_r^E)$$

$$H^k(\mathcal{K}(f_1, \dots, f_r)) = 0, \quad k > r.$$

Observación 4.2.1. Veamos como es la aplicación de \mathcal{O}_n -módulo d_1^E . Para ello primero observemos los módulos entre los cuales está definido

$$E_0 = \mathcal{O}_n,$$

$$E_1 = \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^1 \mathbb{C} = \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = \underbrace{\mathcal{O}_n \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_n}_{r\text{-veces}} = \mathcal{O}_n^r.$$

Así la tenemos la aplicación \mathcal{O}_n -lineal:

$$d_1^E : \mathcal{O}_n^r \longrightarrow \mathcal{O}_n$$

dado $(g_1, \dots, g_r) \in \mathcal{O}_n^r$ tenemos

$$\begin{aligned} d_1^E(g_1, \dots, g_r) &= d_1^E(g_1 e_1 + \dots + g_r e_r) \\ &= g_1 d_1^E(e_1) + \dots + g_r d_1^E(e_r) \\ &= g_1 f_1 + \dots + g_r f_r \end{aligned} \quad (4.5)$$

puesto que de (4.1) tenemos $d_1^E(e_j) = f_j$.

Se presenta a continuación dos ejemplos para entender la noción de complejo de Koszul de longitud 1 y de longitud 2.

Ejemplo 4.2.2. Sea $f \in \mathcal{O}_n$. Construimos el complejo de Koszul $\mathcal{K}(f)$ de longitud 1, asociado a f , de la siguiente forma:

$$\mathcal{K}(f) : 0 \xrightarrow{d_2} E_1 \xrightarrow{d_1} E_0 \xrightarrow{d_0} 0,$$

donde los \mathcal{O}_n -módulos E_1 y E_0 están definidos como:

$$E_1 = \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^1 \mathbb{C} = \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = \mathcal{O}_n,$$

$$E_0 = \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^0 \mathbb{C} = \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = \mathcal{O}_n.$$

y por 4.1 los morfismos d_2 , d_1 y d_0 están dados por:

- $d_2(0) = 0$,
- $d_1(e_1) = (-1)^0 f \cdot 1 = f$ (multiplicación por f),
- $d_0(h) = 0$, $h \in \mathcal{O}_n$.

Entonces el complejo de Koszul $\mathcal{K}(f)$ de longitud 1, se expresa como:

$$\mathcal{K}(f) : 0 \xrightarrow{d_2} \mathcal{O}_n \xrightarrow[d_1]{f} \mathcal{O}_n \xrightarrow{d_0} 0$$

$$g \longmapsto fg,$$

donde $g \in \mathcal{O}_n$. El complejo de Koszul de longitud 1, es un complejo de cadena, puesto que se cumplen las condiciones:

- $(d_0 \circ d_1)(g) = d_0(d_1(g)) = d_0(fg) = 0$,
- $(d_1 \circ d_2)(g) = d_1(d_2(g)) = d_1(0) = 0$

Además esta condición implica:

- $Im(d_2) = Im(o) \subset \{g \in \mathcal{O}_n : fg = 0\} = Ker(f)$.
- $Im(d_1) = Im(f) = \{fg : g \in \mathcal{O}_n\} = f\mathcal{O}_n = \langle f \rangle$.

De 4.4 calculamos la cohomología de $\mathcal{K}(f)$:

$$(i) H^1(\mathcal{K}(f)) = \frac{Ker(d_1)}{Im(d_2)} = \frac{Ker(f)}{Im(o)} = \frac{Ker(d_1)}{\{0\}} = Ker(d_1)$$

$$(ii) H^0(\mathcal{K}(y)) = \frac{Ker(d_0)}{Im(d_1)} = \frac{Ker(o)}{Im(f)} = \frac{\mathcal{O}_n}{f\mathcal{O}_n} = \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f \rangle}.$$

Si consideramos que f es regular en \mathcal{O}_n , como este anillo es un dominio todos los elementos no nulos no son divisores de cero, así $f \neq 0$. Entonces $Ker(f) = \{g \in \mathcal{O}_n : fg = 0\} = \{0\}$ Por lo tanto, en este caso (cuando $f \neq 0$) tenemos

$$H^1(\mathcal{K}(f)) = Ker(d_1) = \{0\}.$$

Ejemplo 4.2.3. Sean $f, g \in \mathcal{O}_n$. Construimos el *complejo de Koszul* $\mathcal{K}(f, g)$ de longitud 2 asociado a la secuencia f, g , de la siguiente forma:

$$\mathcal{K}(x, y) : 0 \xrightarrow{d_3} E_2 \xrightarrow{d_2} E_1 \xrightarrow{d_1} E_0 \xrightarrow{d_0} 0,$$

donde los \mathcal{O}_n -módulos E_2, E_1, E_0 están definidos como:

$$E_2 = \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^2 \mathbb{C}^2 = \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}^2 \wedge \mathbb{C}^2) \cong \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = \mathcal{O}_n,$$

$$E_1 = \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^1 \mathbb{C}^2 = \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = \mathcal{O}_n^2$$

$$E_0 = \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^0 \mathbb{C}^2 = \mathcal{O}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = \mathcal{O}_n.$$

y por 4.1 los morfismos d_2, d_1, d_0 están dados por:

- Dada la base $\mathcal{B}_2 = \{e_1 \wedge e_2\}$ de E_2 , se define el morfismo d_2 como:

$$d_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n & \longrightarrow & \mathcal{O}_n^2 \\ (e_1 \wedge e_2) & \longmapsto & d_2(e_1 \wedge e_2) = (-1)^0 f \cdot e_2 + (-1)^1 g \cdot e_1 = -ge_1 + fe_2, \end{array}$$

que se corresponde con la matriz vertical $\begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix}$.

- Dada la base $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ de E_1 , se define el morfismo d_1 como:

$$d_1(e_1) = (-1)^0 f \cdot 1 = f,$$

$$d_1(e_2) = (-1)^0 g \cdot 1 = g.$$

que se corresponde con la matriz horizontal (f, g) .

- Dada la base $\mathcal{B}_0 = \{1\}$ de E_0 , se define el morfismo

$$\begin{aligned} d_0 : \mathcal{O}_n &\longrightarrow 0 \\ h &\longmapsto d_0(h) = 0, \quad \forall h \in \mathcal{O}_n \end{aligned}$$

Entonces complejo de Koszul de longitud 2, se expresa como:

$$\mathcal{K}(f, g) : 0 \xrightarrow{o} \mathcal{O}_n \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix} / d_2} \mathcal{O}_n^2 \xrightarrow{(f, g) / d_1} \mathcal{O}_n \xrightarrow{o} 0,$$

Puesto que se cumplen las condiciones:

$$\text{I. } (d_0 \circ d_1) \begin{pmatrix} h \\ j \end{pmatrix} = d_0((f, g) \begin{pmatrix} h \\ j \end{pmatrix}) = d_0(fh + gj) = 0, \quad \forall h, g \in \mathcal{O}_n$$

$$\text{II. } (d_1 \circ d_2)(h) = d_1 \left(\begin{pmatrix} -hg \\ hf \end{pmatrix} \right) = (fg) \begin{pmatrix} -hg \\ hf \end{pmatrix} = -hfg + hfg = 0, \quad \forall h \in \mathcal{O}_n$$

entonces se dice que $\mathcal{K}(x, y)$ es un complejo de cadena. Estas condiciones implican:

$$(a) \text{ Im}(d_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -sg \\ sf \end{pmatrix} : s \in \mathcal{O}_n \right\} \subset \left\{ \begin{pmatrix} h \\ j \end{pmatrix} : fh + gj = 0 \right\} = \text{Ker}(d_1),$$

$$(b) \text{ Im}(d_1) = f\mathcal{O}_n + g\mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}_n = \text{Ker}(o),$$

$$(c) \text{ Im}(d_3) = \{0\}.$$

De 4.4 calculamos la cohomología de $\mathcal{K}(f, g)$:

$$(i) H^0(\mathcal{K}(f, g)) = \frac{\text{Ker}(d_0)}{\text{Im}(d_1)} = \frac{\mathcal{O}_n}{f\mathcal{O}_n + g\mathcal{O}_n} = \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f, g \rangle},$$

$$(ii) H^1(\mathcal{K}(f, g)) = \frac{\text{Ker}(d_1)}{\text{Im}(d_2)} = \frac{\left\{ \begin{pmatrix} h \\ j \end{pmatrix} : fh + gj = 0, h, j \in \mathcal{O}_n \right\}}{\left\{ \begin{pmatrix} -sg \\ sf \end{pmatrix} : s \in \mathcal{O}_n \right\}}.$$

Supongamos (f, g) una secuencia regular en el anillo local \mathcal{O}_n . Entonces, si la matriz vertical $\begin{pmatrix} h \\ j \end{pmatrix} \in \text{Ker}(d_1)$ tenemos

$$fh + gj = 0, \tag{1}$$

luego

$$\bar{g}\bar{j} = \bar{f}\bar{h} + \bar{g}\bar{j} = \bar{0} \text{ en el cociente } \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f \rangle}.$$

Como \bar{g} no es un divisor de cero en el anillo cociente $\frac{\mathcal{O}_n}{\langle f \rangle}$, tenemos $\bar{j} = 0$, esto es, $j = sf$ para algun $s \in \mathcal{O}_n$. Por otro lado, como el anillo \mathcal{O}_n es local, la secuencia (g, f) es también regular por lema 4.1.6, así de lo realizado previamente tenemos $h = lg$, para algun $l \in \mathcal{O}_n$. Luego de (1) tenemos $f(lg) + g(sf) = 0$, como f y g son no nulos en \mathcal{O}_n (no son divisores de cero), tenemos $l = -s$, luego

$$\begin{pmatrix} h \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sg \\ sf \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, si el par (f, g) es regular en \mathcal{O}_n entonces $\text{Ker}(d_1) = \text{Im}(d_2)$ y así

$$H^1(\mathcal{K}(f, g)) = \{0\}.$$

$$(iii) \quad H^2(\mathcal{K}(f, g)) = \frac{\text{Ker}(d_2)}{\text{Im}(d_3)} = \frac{\text{Ker}(d_2)}{\{0\}} = \text{Ker}(d_2)$$

Si (f, g) es una secuencia regular en el anillo local \mathcal{O}_n , como \mathcal{O}_n es un dominio necesariamente $f \neq 0$ y $g \neq 0$. Entonces

$$\text{Ker}(d_2) = \{h \in \mathcal{O}_n : -gh = 0 \text{ y } fh = 0\} = \{0\}.$$

Por lo tanto, en este caso tenemos

$$H^2(\mathcal{K}(f, g)) = \text{Ker}(d_2) = \{0\}.$$

Teorema 4.2.4. Sean $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_n$ gérmenes de funciones holomorfas. Si (f_1, \dots, f_r) es una secuencia regular en el anillo local \mathcal{O}_n , entonces el complejo de cadena de Koszul

$$\mathcal{K}(f_1, \dots, f_r) : 0 \xrightarrow{o} E_r \xrightarrow{d_r^E} E_{r-1} \xrightarrow{d_{r-1}^E} \dots \xrightarrow{d_2^E} E_1 \xrightarrow{d_1^E} E_0 \xrightarrow{o} 0 \quad (4.6)$$

es una secuencia exacta en E_j , para todo $j \geq 1$. En particular

$$H^0(\mathcal{K}(f_1, \dots, f_r)) = \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle},$$

$$H^k(\mathcal{K}(f_1, \dots, f_r)) = 0, \quad \forall k = 1, \dots, r.$$

Prueba. Por inducción sobre r .

(i) Si $r = 1$, entonces $E_1 = \mathcal{O}_n$. Sea $E_0 = \mathcal{O}_n$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{o} & E_1 & \xrightarrow{d_1^E} & E_0 & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \xrightarrow{o} & \mathcal{O}_n & \xrightarrow{d_1^E} & \mathcal{O}_n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Si se toma $k = 1$ en (4.1) se tiene $d_1^E(e_1) = f_1$. Además se tiene

$$H^1(\mathcal{K}(f_1)) = \frac{\text{Ker } d_1^E}{\text{Im}(o)} = \frac{\text{Ker } d_1^E}{\{0\}} = \text{Ker } d_1^E.$$

Si $g \in \text{Ker } d_1^E$ entonces $gf_1 = 0$. Como f_1 es regular, f_1 no es un divisor de cero. Luego $g = 0$. Por lo tanto

$$H^1(\mathcal{K}(f_1)) = \{0\}.$$

También se tiene

$$H^0(\mathcal{K}(f_1)) = \frac{\text{Ker}(o)}{\text{Im } d_1^E} = \frac{\mathcal{O}_n}{f_1 \mathcal{O}_n} = \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1 \rangle}.$$

que es justamente lo que queremos, $d_1 \circ d_2 = 0$. De manera análoga, se cumple que $d_{r-1} \circ d_r = 0$, $\forall r > 0$. Por lo tanto, la secuencia cociente

$$Q : 0 \longrightarrow Q_r \xrightarrow{d_r} Q_{r-1} \xrightarrow{d_{r-1}} Q_{r-2} \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{d_1} \frac{I_r}{I_{r-1}} \xrightarrow{o} 0$$

es nuevamente un complejo de Koszul y aplicando la hipótesis inductiva es también exacta.

Considerando las siguientes identificaciones:

$$\begin{aligned} Q_2 &\cong \mathcal{O}_n(e_r \otimes \mathbb{C}^{r-1}), & d_2(e_r \otimes e_j) &= e_r f_j, \\ Q_1 &\cong \mathcal{O}_n \cdot e_r, & d_1(g e_r) &= g f_r, \end{aligned}$$

y definiendo la proyección canónica

$$\begin{aligned} \pi_{F_1} : E_1 &\longrightarrow \frac{E_1}{F_1} = Q_1 \\ g_1 e_1 + g_2 e_2 &\longmapsto \pi_{F_1}(g_1 e_1 + g_2 e_2) = g_1 e_1, \end{aligned}$$

el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} E_2 & \xrightarrow{d_2^E} & E_1 & \xrightarrow{d_1^E} & I_r & \xrightarrow{o} & 0 \\ \pi_{F_2} \downarrow & & \downarrow \pi_{F_1} & & \downarrow \pi_{I_{r-1}} & & \\ Q_2 & \xrightarrow{d_2} & Q_1 & \xrightarrow{d_1} & \frac{I_r}{I_{r-1}} & \xrightarrow{o} & 0 \\ o \downarrow & & o \downarrow & & o \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

es conmutativo, puesto que se cumple: $d_1 \circ \pi_{F_1} = \pi_{I_{r-1}} \circ d_1^E$. En efecto

$$\begin{aligned} (d_1 \circ \pi_{F_1})(g_1 e_1 + g_2 e_2) &= (\pi_{I_{r-1}} \circ d_1^E)(g_1 e_1 + g_2 e_2) \\ d_1(\pi_{F_1}(g_1 e_1 + g_2 e_2)) &= \pi_{I_{r-1}}(d_1^E)(g_1 e_1 + g_2 e_2) \\ d_1(g_1 e_1) &= \pi_{I_{r-1}}(g_1 f_1 + g_2 f_2) \\ g_1 f_1 &= g_1 f_1 \end{aligned}$$

y de manera análoga, también se cumple $d_2 \circ \pi_{F_2} = \pi_{F_1} \circ d_2^E$.

Si $d_1(g e_r) = 0$, entonces $g f_r$ está en el ideal $I_{r-1} = \langle f_1, \dots, f_{r-1} \rangle$ y como la secuencia (f_1, \dots, f_r) es regular, se tiene $g = 0$. Entonces g está en el ideal $I_{r-1} = \langle f_1, \dots, f_{r-1} \rangle$. Así $g e_r \in d_2(Q_2)$.

Como la inclusión i es un monomorfismo y la proyección canónica π un epimorfismo, entonces la secuencia corta de complejos

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \xrightarrow{o} 0$$

es exacta.

Ahora, aplicando el teorema 4.9 de [MT97] de secuencia exacta larga de cohomología, se tiene que la secuencia

$$0 \longrightarrow H^k(F) \xrightarrow{i^*} H^k(E) \xrightarrow{\pi^*} H^k(Q) \xrightarrow{\partial^*} H^{k+1}(F) \xrightarrow{i^*} H^{k+1}(E) \xrightarrow{\pi^*} H^{k+1}(Q) \longrightarrow \dots$$

es exacta. Por lo tanto, el diagrama (4.7) es conmutativo y exacto. Como $H^k(F.) = 0 = H^k(Q.)$ se deduce que:

$$H^k(\mathcal{K}(f_1, \dots, f_r)) = H^k(E.) = 0, \quad \forall k = 1, \dots, r$$

y el complejo de cadena de Koszul (4.6) es una secuencia exacta. \square

4.3 Campos vectoriales meromorfos en \mathbb{P}^n

Sean \mathbb{P}^n el espacio proyectivo complejo \mathbb{C} , $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ haz de funciones holomorfas, $\Theta_{\mathbb{P}^n}$ haz tangente, $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1 = \Theta_{\mathbb{P}^n}^*$ haz cotangente, \mathcal{L} haz hiperplano en \mathbb{P}^n y $\Omega_{\mathbb{P}^n}^p = \wedge^p \Omega_{\mathbb{P}^n}^1$. Si ξ es un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ -haz, entonces denotamos:

$$\xi(r) = \begin{cases} \xi \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\otimes r}, & r \geq 0 \\ \xi \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\otimes |r|}, & r \leq 0 \end{cases}$$

Si $d > 1$, se tiene:

$$\Theta_{\mathbb{P}^n}(1-d) = \Theta_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\otimes |1-d|} = \Theta_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1-d)$$

Teorema 4.3.1 (Las fórmulas de Bott).

$$h^q(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(k)) = \begin{cases} \binom{k+n-p}{k} \binom{k-1}{p}, & q=0, 0 \leq p \leq n, k > p \\ 1, & k=0, 0 \leq p=q \leq n \\ \binom{-k+p}{-k} \binom{-k-1}{n-p}, & q=n, 0 \leq p \leq n, k < p-n \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases}$$

Prueba. La demostración del teorema de la secuencia de Euler y del teorema 3.4.6. Veamos el caso $k=0, 0 \leq p=q \leq n$. En efecto, de la secuencia de Euler

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T\mathbb{P}^n(-1) \longrightarrow 0, \quad (4.8)$$

dualizando esta secuencia y tomando el producto exterior p-veces, tenemos:

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus \binom{n+1}{p}} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p) \longrightarrow 0, \quad (4.9)$$

Por otro lado, del teorema 3.4.6

$$H^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0 \quad \text{para } q > 1 \quad (4.10)$$

Esta secuencia exacta corta de (4.9) da origen a una secuencia exacta larga de cohomología (teorema 3.3.10) luego de (4.10) tenemos

$$H^q(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^q) = \dots = H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^0) = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 1.$$

Los otros casos se demuestran de manera similar. Ver en [OSS80]. \square

Proposición 4.3.2. 1. Si $q < n$ y $r > 0$, entonces

$$H^q(\mathbb{P}^n, \wedge^p \Omega_{\mathbb{P}^n}(-r)) = 0.$$

2. Si $k > 0$, $0 \leq q \leq n$ y $n \geq 2$, entonces

$$(a) H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}^* \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}) = \mathbb{C}.$$

$$(b) H^q(\mathbb{P}^n, \wedge^p \Theta_{\mathbb{P}^n}^* \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}((1-p)k)) = 0, q < p.$$

Prueba. 1) Como $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1 = \Theta_{\mathbb{P}^n}^*$ y $\Omega_{\mathbb{P}^n}^p = \wedge^p \Omega_{\mathbb{P}^n}^1$ tenemos que 1) es consecuencia de la Fórmula de Bott.

2) a) Tensorizando la secuencia de Euler

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T\mathbb{P}^n \longrightarrow 0,$$

con el fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ tenemos

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus(n+1)} \longrightarrow \Theta_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow 0,$$

tensorizando esta secuencia con $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(1)$ obtenemos:

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^1 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^1 \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0.$$

Por el teorema (3.3.10), esta secuencia induce la secuencia de cohomología:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1) &\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(1)^{\oplus(n+1)}) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1 \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}) \\ &\longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(1)^{\oplus(n+1)}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

De la fórmula de Bott las cohomologías de color rojo son nulos, luego

$$H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}^* \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}) = H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1 \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}) = H^1(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1) = \mathbb{C}.$$

la última igualdad también es consecuencias de la fórmula de Bott.

b) Para simplificar la demostración consideremos el caso $p = 2$, luego $q < 2$ el caso general se demuestra de manera análoga. Veamos

Tensorizando la secuencia de Euler

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T\mathbb{P}^n \longrightarrow 0,$$

con el fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-r)$, donde $r > 0$, tenemos

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-r) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1-r)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow \Theta_{\mathbb{P}^n}(-r) \longrightarrow 0,$$

tensorizando esta secuencia con $\Omega_{\mathbb{P}^n}^2(1)$ obtenemos:

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^2(-r) \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^2(1-r)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^2 \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(-r) \longrightarrow 0.$$

Por el teorema (3.3.10), esta secuencia induce una secuencia larga de cohomología

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^2(-r)) &\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^2(1-r)^{\oplus(n+1)}) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^2 \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(-r)) \\ &\longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^2(-r)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^2(1-r)^{\oplus(n+1)}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^2 \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(-r)) \\ &\longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^2(-r)) \end{aligned}$$

De la fórmula de Bott las cohomologías de color rojo son nulos, luego

$$H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^2 \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(-r)) = H^1(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^2 \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(-r)) = 0$$

□

Teorema 4.3.3 (Gómez-Mont, Kempf). Sean $\alpha, \alpha' \in H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}(1-d))$, $d > 1$, donde $\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_{\alpha'}$ son foliaciones con singularidades no degeneradas, de grado d . Si $\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \text{Sing}(\mathcal{F}_{\alpha'})$, entonces

$$\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_{\alpha'}. \quad (\alpha = c\alpha', c \in \mathbb{C}^*)$$

Prueba. La foliación \mathcal{F}_α es generada por el campo meromorfo α en \mathbb{P}^n . El conjunto singular de la foliación \mathcal{F}_α es denotado por:

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \{p \in \mathbb{P}^n : \alpha(p) = 0\}$$

Como el campo vectorial meromorfo $\alpha \in H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}(k))$, $k = 1-d$

$$\alpha : \mathbb{P}^n \rightarrow \Theta_{\mathbb{P}^n}(k),$$

induce un homomorfismo de haces, denotado por:

$$\alpha : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \Theta_{\mathbb{P}^n}(k)$$

entonces el campo vectorial dual meromorfo se define como:

$$\alpha^* : \Theta_{\mathbb{P}^n}^*(k) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}.$$

Consideremos el cubrimiento $\bigcup_l U_l = \mathbb{P}^n$, por abiertos afines. Localmente, los

campos vectoriales meromorfos s y s' se definen como: $s = \alpha|_{U_l} = \alpha_1^l \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \alpha_n^l \frac{\partial}{\partial z_n}$ y $s' = \alpha'|_{U_l}$, entonces el campo vectorial dual s^* se define como:

$$s^* = \alpha^*|_{U_l} : \Theta_{\mathbb{P}^n}^*(k)|_{U_l} \rightarrow \mathcal{O}(U_l), \quad s = (\alpha_1^l, \dots, \alpha_n^l)$$

Como el conjunto $\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \{\alpha_1^l = \dots = \alpha_n^l = 0\}$ es de puntos singulares no degenerados, entonces aplicando el corolario 4.1.4, se tiene que la secuencia $(\alpha_1^l, \dots, \alpha_n^l)$ es regular.

Considere el haz singular $\mathcal{O}_{\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)}$ de α , cociente del haz de las funciones holomorfas $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ por el haz ideal I_α , localmente generado por las componentes de α , esto es:

$$\mathcal{O}_{\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)}|_{U_l} = \frac{\mathcal{O}(U_l)}{I_\alpha|_{U_l}}$$

y el morfismo proyección π_{U_l} como:

$$\pi_{U_l} : \mathcal{O}(U_l) \rightarrow \frac{\mathcal{O}(U_l)}{I_\alpha|_{U_l}}$$

Por lo tanto, la secuencia determinada por el complejo de Koszul:

$$\mathcal{K}(s) : 0 \rightarrow \wedge^n \Theta_{\mathbb{P}^n}^*(-nk)|_{U_l} \rightarrow \dots \xrightarrow{d_2} \wedge^1 \Theta_{\mathbb{P}^n}^*(-k)|_{U_l} \xrightarrow{d_1} \mathcal{O}(U_l) \xrightarrow{\pi_{U_l}} \mathcal{O}_{\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)}|_{U_l} \rightarrow 0$$

es exacta por el teorema 4.2.4. Tensorizamos por $\Theta_{\mathbb{P}^n}(k)|_{U_l}$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \wedge^n \Theta_{\mathbb{P}^n}^*(-nk)|_{U_l} \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(k)|_{U_l} \rightarrow \dots \xrightarrow{\phi_2} \wedge^1 \Theta_{\mathbb{P}^n}^*(-k)|_{U_l} \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(k)|_{U_l} \xrightarrow{\phi_1} \\ \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{O}(U_l) \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(k)|_{U_l} \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{O}_{\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)}|_{U_l} \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(k)|_{U_l} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

donde $\phi_1 = d_1 \otimes 1$, $\phi_0 = \pi_{U_i} \otimes 1$.

Luego, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)}|_{U_i} \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(k)|_{U_i} &= \Theta_{\mathbb{P}^n}(k)|_{\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)}, \\ \mathcal{O}(U_i) \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(k)|_{U_i} &= \Theta_{\mathbb{P}^n}(k), \\ \wedge^1 \Theta_{\mathbb{P}^n}^*(-k)|_{U_i} \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(k)|_{U_i} &= \Theta_{\mathbb{P}^n}^* \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}, \end{aligned}$$

Renombremos

$$0 \rightarrow F_k^n \rightarrow F_k^{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_k^2 \xrightarrow{\phi_2} \Theta_{\mathbb{P}^n}^* \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\phi_1} \Theta_{\mathbb{P}^n}(k) \xrightarrow{\phi_0} \Theta_{\mathbb{P}^n}(k)|_{\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)} \rightarrow 0.$$

donde

$$F_k^j = \wedge^j \Theta_{\mathbb{P}^n}^*(-jk) \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(k), \quad j = 2, \dots, n.$$

A esta secuencia exacta le asociamos

$$0 \rightarrow K_k^0 \xrightarrow{i} \Theta_{\mathbb{P}^n}(k) \xrightarrow{\phi_0} \Theta_{\mathbb{P}^n}(k)|_{\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)} \rightarrow 0,$$

siendo $K_k^0 = \text{Ker} \phi_0$

$$0 \rightarrow K_k^1 \xrightarrow{i} \Theta_{\mathbb{P}^n}^* \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}(k) \xrightarrow{\phi_1} K_k^0 \rightarrow 0,$$

siendo $K_k^1 = \text{Ker} \phi_1$.

Continuamos el proceso

$$0 \rightarrow K_k^j \xrightarrow{i} F_k^j \xrightarrow{\phi_j} K_k^{j-1} \rightarrow 0, \quad j = 2, \dots, n-2.$$

$$0 \rightarrow F_k^n \rightarrow F_k^{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} K_k^{n-2} \rightarrow 0$$

donde $K_k^j = \text{Ker} \phi_j$, que inducen secuencias exactas largas de cohomologías de haces:

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, K_k^0) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}(k)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}(k)|_{\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)}) \rightarrow \dots \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, K_k^1) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}^* \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^n, K_k^0) \xrightarrow{\delta_1^0} \\ \xrightarrow{\delta_1^0} H^1(\mathbb{P}^n, K_k^1) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}^* \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^n, K_k^0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{j-2}(\mathbb{P}^n, K_k^j) \rightarrow H^{j-2}(\mathbb{P}^n, F_k^j) \rightarrow H^{j-2}(\mathbb{P}^n, K_k^{j-1}) \xrightarrow{\delta_j^{j-2}} \\ \xrightarrow{\delta_j^{j-2}} H^{j-1}(\mathbb{P}^n, K_k^j) \rightarrow H^{j-1}(\mathbb{P}^n, F_k^j) \rightarrow H^{j-1}(\mathbb{P}^n, K_k^{j-1}) \xrightarrow{\delta_j^{j-1}} \\ \xrightarrow{\delta_j^{j-1}} H^j(\mathbb{P}^n, K_k^j) \rightarrow H^j(\mathbb{P}^n, F_k^j) \rightarrow H^j(\mathbb{P}^n, K_k^{j-1}) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde $j = 2, \dots, n-2$.

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{n-3}(\mathbb{P}^n, F_k^n) \rightarrow H^{n-3}(\mathbb{P}^n, F_k^{n-1}) \rightarrow H^{n-3}(\mathbb{P}^n, K_k^{n-2}) \xrightarrow{\delta_{n-1}^{n-3}} \\ \xrightarrow{\delta_{n-1}^{n-3}} H^{n-2}(\mathbb{P}^n, F_k^n) \rightarrow H^{n-2}(\mathbb{P}^n, F_k^{n-1}) \rightarrow H^{n-2}(\mathbb{P}^n, K_k^{n-2}) \xrightarrow{\delta_{n-1}^{n-2}} \\ \xrightarrow{\delta_{n-1}^{n-2}} H^{n-1}(\mathbb{P}^n, F_k^n) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{P}^n, F_k^{n-1}) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{P}^n, K_k^{n-2}) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

De la proposición 4.3.2 todos los espacios de cohomología de color rojo son nulos. Luego de (4.14) tenemos:

$$H^{n-3}(\mathbb{P}^n, K_k^{n-2}) = 0,$$

teniendo esto en cuenta de (4.13) concluimos

$$H^0(\mathbb{P}^n, K_k^1) \equiv H^1(\mathbb{P}^n, K_k^2) \equiv \dots \equiv H^{n-4}(\mathbb{P}^n, K_k^{n-3}) \equiv H^{n-3}(\mathbb{P}^n, K_k^{n-2}) = 0.$$

De (4.14) también tenemos

$$H^{n-2}(\mathbb{P}^n, K_k^{n-2}) = 0,$$

de esto y de (4.13) tenemos:

$$H^1(\mathbb{P}^n, K_k^1) = \dots = H^{n-3}(\mathbb{P}^n, K_k^{n-3}) = H^{n-2}(\mathbb{P}^n, K_k^{n-2}) = 0$$

En resumen tenemos

$$H^0(\mathbb{P}^n, K_k^1) = H^1(\mathbb{P}^n, K_k^1) = 0,$$

luego de (4.12) y la proposición 4.3.2 se tiene

$$H^0(\mathbb{P}^n, K_k^0) = H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}^* \otimes \Theta_{\mathbb{P}^n}) \equiv \mathbb{C} \quad (4.15)$$

Como $\alpha, \alpha' \in H^0(\mathbb{P}^n, \Theta_{\mathbb{P}^n}(k))$ por hipótesis sus singularidades coinciden, esto es, $\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha) = \text{Sing}(\mathcal{F}_{\alpha'})$, tenemos

$$\phi_0(\alpha) = \alpha|_{\text{Sing}(\mathcal{F}_\alpha)} = 0 \quad \text{y} \quad \phi_0(\alpha') = \alpha'|_{\text{Sing}(\mathcal{F}_{\alpha'})} = 0$$

de ahí que $\alpha, \alpha' \in H^0(\mathbb{P}^n, K_k^0)$, ver (4.11), finalmente de (4.15) existe $c \in \mathbb{C}^*$ tal que $\alpha = c\alpha'$. □

En el teorema 4.3.3 se considera que las foliaciones tienen grado mayor igual a 2. ¿Que sucede con las foliaciones de grado 0 y 1?. En los siguientes dos ejemplos confirmaremos que las foliaciones que tienen grado 0 cumplen con las conclusiones del teorema 4.3.3, pero las foliaciones de grado 1 no cumplen tales conclusiones.

Ejemplo 4.3.4 (Foliaciones de grado 0). Por la proposición 1.6.5 sabemos que una foliación \mathcal{F} de grado 0 tiene una única singularidad $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{p\}$ existen coordenadas afines (x_1, \dots, x_n) tal que $p = (0, \dots, 0)$ y la foliación está generada por el campo radial

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}. \quad (4.16)$$

Por lo tanto las foliaciones de grado 0 están determinados unicamente por su singularidad.

Ejemplo 4.3.5 (Foliaciones de grado 1). Sabemos que una foliación \mathcal{F} de grado 1 está generado por un campo vectorial

$$X = P_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + \dots + P_n \frac{\partial}{\partial Z_n} \quad (4.17)$$

en \mathbb{C}^{n+1} , donde los polinomios P_i son de grado 1

$$P_i(Z_0, \dots, Z_n) = a_{i1}Z_0 + \dots + a_{in}Z_n$$

Si aplicamos la forma canónica de Jordan a la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$ existe una matriz P invertible tal que

$$P^{-1}AP = J_A, \quad (4.18)$$

donde J_A es la matriz de Jordan de A . Así de 4.18 la foliación \mathcal{F} es equivalente a la foliación generada por el campo vectorial determinado por la matriz J_A .

Consideremos el caso en los autovalores $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ de A son distintos dos a dos, $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$. En este caso la matriz J_A es diagonal.

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En este caso la foliación $\mathcal{F}_{\lambda_0, \dots, \lambda_n}$ generada por la matriz J_A , en las coordenadas homogéneas (Z_0, \dots, Z_n) , determinada por la matriz P , esta foliación está dada por el campo vectorial

$$\lambda_0 Z_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + \dots + \lambda_n Z_n \frac{\partial}{\partial Z_n} \quad (4.19)$$

está foliación tiene $n + 1$ singularidades, que en coordenadas homogéneas son los puntos $p_i = [0 : \dots : 1 : \dots : 0]$, $i = 0, \dots, n$, donde 1 está ubicado en i -ésima coordenada homogénea, esto es,

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_{\lambda_0, \dots, \lambda_n}) = \{p_0, \dots, p_n\}.$$

Siguiendo lo establecido en la subsección 1.6.1 esta foliación esta dado localmente en coordenadas afines $Z_j = 1: (x_1, \dots, x_n)$ tenemos

$$(\lambda_1 - \lambda_j)x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (\lambda_n - \lambda_j)x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (4.20)$$

en estas coordenada $p_j(0, \dots, 0)$. Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$ estas singularidades son no degeneradas. Por lo tanto existen infinitas foliaciones $\mathcal{F}_{\lambda_0, \dots, \lambda_n}$, dependiendo de $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, que tienen el mismo conjunto singular $\{p_0, \dots, p_n\}$. Por lo tanto, el teorema 4.3.3 no es verdad para foliaciones de grado 1.

Ejemplo 4.3.6 (Jouanolou). Sea $J(n, k)$ el campo vectorial polinomial dado en el abierto afín $U_0 = \mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ por

$$J(n, k) = \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1}^k - x_j x_1^k) \frac{\partial}{\partial x_j} + (1 - x_n x_1^k) \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

La foliación en \mathbb{P}^n generada por $J(n, k)$ se denota por $\mathcal{J}(n, k)$ se llama *foliación de Jouanolou*. Del ejemplo 1.6.6 la foliación $\mathcal{J}(n, k)$ tiene grado k en \mathbb{P}^n y todas sus singularidades son no degeneradas. Luego, por el teorema 4.3.3 estas foliaciones están determinadas por sus singularidades y grado $k \geq 2$ fijado.

El siguiente ejemplo muestra que la condición que las singularidades sean no-degeneradas en el teorema 4.3.3 es necesaria.

Ejemplo 4.3.7 (Cerveau, Deserti, Belko, Meziani). Las siguientes foliaciones \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 , \mathcal{F}_3 y \mathcal{F}_4 de grado 2 en el plano proyectivo \mathbb{P}^2

$$\mathcal{F}_1 : X_1 = -xy^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - y^3) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\mathcal{F}_2 : X_2 = -(x^2 + xy^2) \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - xy + y^3) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\mathcal{F}_3 : X_3 = -(x^3 + xy^2) \frac{\partial}{\partial x} + (xy - x^2y - y^3) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\mathcal{F}_4 : X_4 = (xy - x - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + x(x + y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

tienen una sola singularidad en \mathbb{P}^2 , en esas coordenadas, la singularidad es el origen $O(0, 0)$, esto es,

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_j) = \{O\}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Como esta singularidad de estas foliaciones no tienen parte lineal entonces esta singularidad es degenerada, luego estas foliaciones no cumplen con las condiciones del teorema 4.3.3. Por lo tanto, el teorema 4.3.3 no nos garantiza que las foliaciones coincidan en \mathbb{P}^2 . En [CDGBM10] demuestran que estas foliaciones no son equivalente en \mathbb{P}^2 .

Conclusiones

Después de estudiar como determinar las foliaciones holomorfas unidimensionales en el espacio proyectivo mediante singularidades, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- 1 Las foliaciones geoméricamente son fibrados, en nuestro caso estudiamos las foliaciones de grado 1 asociadas a los fibrados lineales.
- 2 Para obtener información de las foliaciones de grado 1 interpretadas como fibrados lineales usamos el haz de las secciones holomorfas de este fibrado.
- 3 Las cohomologías de haces nos permitieron hacer cálculos de las propiedades geométricas de las foliaciones unidimensionales algebraicas. En este caso estudiamos las singularidades no degeneradas, para poder usar el complejo de Koszul.

Bibliografía

- [Bru00] Marco Brunella, *Birational geometry of foliations*, vol. 1, First Latin American Congress of Mathematicians, Rio de Janeiro:IMPA, 2000.
- [CCD13] Felipe Cano, Dominique Cerveau, and Julie Déserti, *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*, Belin, 2013.
- [CDGBM10] Dominique Cerveau, Julie Déserti, Djibrilla Garba Belko, and Rabea Meziani, *Géométrie classique de certains feuilletages de degré deux*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática **41** (2010), no. 2, 161–198.
- [CN13] César Camacho and Alcides Lins Neto, *Geometric theory of foliations*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [Dar78] Gaston Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du second ordre et du premier degré*, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques **2** (1878), no. 1, 60–96.
- [Eis13] David Eisenbud, *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*, vol. 150, Springer Science & Business Media, 2013.
- [FFF82] Mike Field, *Several complex variables and complex manifolds ii*, vol. 66, Cambridge University Press, 1982.
- [FH98] Percy Fernández and Abramo Hefez, *Clasificación topológica das singularidades de curvas analítica planas irredutíveis*, UFF, 1998.
- [Fos81] Otto Foster, *Lectures on riemann surfaces*, Springer-Verlag New York Heideberg, 1981.
- [GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library, 1994.
- [GMK89] Xavier Gómez-Mont and George Kempf, *Stability of meromorphic vector fields in projective spaces*, Comment. Math. Helv **64** (1989), no. 3, 462–473.
- [GMOB89] Xavier Gómez-Mont and Laura Oríz-Bobadilla, *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*, vol. 1, Sociedad Matemática Mexicana, 1989.

- [Ily68] Yulij Ilyashenko, *Density of an individual solution and ergodicity of a family of solutions to the equation ...*, Math Zametki **4** (1968), 741–750.
- [IY08] Y Ilyashenko and S Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations (graduate studies in mathematics vol 86)(providence, ri: American mathematical society)*, 2008.
- [Jou77] Jean-Pierre Jouanolou, *Hypersurfaces solutions d'une équation de pfaff analytique*, Institut de Recherche Mathématique Avancée, 1977.
- [Jur15] Liliana Jurado, *Foliaciones de dimensión uno en espacios proyectivos complejos*, Ph.D. thesis, Tesis para optar el Grado de Magister en Matemática. Universidad Nacional de Ingeniería, 2015.
- [Lim08] Elon Lages Lima, *Curso de análise, vol. 2, projeto euclides*, 2008.
- [McQ01] Michael McQuillan, *Non-commutative mori theory*, Preprint IHES/M/01/42, 2001.
- [Men00] Luís Gustavo Mendes, *Kodaira dimension of singular holomorphic foliations*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática **31** (2000), no. 2, 127–143.
- [MS01] Rogerio Mol and Marcio Soares, *índices de campos holomorfos y aplicaciones*, 23 Coloquio de la SBM, 2001.
- [MT97] Ib Madsen and Jorgen Tornehave, *From calculus to cohomology de rham cohomology and characteristic classes*, Cambridge University Press, 1997.
- [NS20] Alcides Lins Neto and Bruno Scárdua, *Complex algebraic foliations*, Complex Algebraic Foliations, de Gruyter, 2020.
- [OSS80] Christian Okonek, Michael Schneider, and Heinz Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, vol. 3, Springer, 1980.
- [Poi91] H. Poincaré, *Sur l'integration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, Rendicoti del Circolo Matematico di Palermo **5** (1891), no. 1, 161–191.
- [Poi97] H. Poincaré, *Sur l'integration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, Rendicoti del Circolo Matematico di Palermo **5** (1897), no. 2, 193–239.
- [Sar08] Nancy Saravia, *Cohomología de haces y algunas aplicaciones a varias variables complejas*, Ph.D. thesis, Tesis para optar el Grado de Magister en Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú, 2008.

- [Sha92] Boris Vladimirovich Shabat, *Introduction to complex analysis: functions of several variables*, vol. 110, American Mathematical Soc., 1992.
- [Sot79] Jorge Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, vol. 11, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.

