

PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado



**Introducción a la desingularización  
y equisingularidad**

Tesis para obtener el grado académico de  
Maestra en Matemática que presenta:

**Rosa Marivel Díaz Díaz**

Asesor:

**Hernán Neciosup Puican**

Lima, 2023

## Informe de Similitud

Yo, Hernán Neciosup Puican, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulado “Introducción a la desingularización y la equisingularidad”, de la autora Rosa Marivel Díaz Díaz, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de 4%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 5/12/2023.
- He revisado con detalle dicho reporte y confirmo que cada una de las coincidencias detectadas no constituyen plagio alguno.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lima, 05 de 12 de 2023.

Apellidos y nombres del asesor: Neciosup Puican Hernán	
DNI : 40692799	Firma
ORCID : 0000-0002-7591-0346	

# Resumen

INTRODUCCIÓN A LA DESINGULARIZACIÓN Y LA EQUISINGULARIDAD

Rosa Marivel Díaz Díaz

2023

Asesor: Hernán Neciosup Puican

Título obtenido: Maestra en Matemática

---

Con el propósito de explicar la desingularización y la equisingularidad, este trabajo examina en detalle las nociones de explosiones básicas y cruzamientos normales iniciando con ejemplos en el plano real para luego formalizarlas. Al trabajar con funciones analíticas, se puede tener una uniformización local de la misma, y así construir transformaciones birracionales que son necesarias para el estudio de variedades algebraicas singulares. Para el problema de la equisingularidad se estudia la desingularización global y se define el homeomorfismo analítico por explosión. Se describen algunos invariantes analíticos, esto es propiedades que se mantienen invariantes con la equisingularidad. Se hace un breve estudio de la relación del polígono de Newton con la desingularización y la relación del homeomorfismo analítico por explosión con las funciones bi-Lipschitz.

Este trabajo de tesis tiene el enfoque de los trabajos de Tze-Char Kuo y Laurentiu Paunescu.

**Palabras claves:** Desingularización, equisingularidad, explosiones, transformada estricta, cruzamiento normales, uniformización.

---

## Abstract

---

With the purpose of explaining desingularization and equisingularity, this work examines in detail the notion of basic blow-ups and normal crossings, starting with examples in the real plane and then formalizing them. When working with analytic functions, you can have a local uniformization of it, and thus construct birational transformations that are necessary for the study of singular algebraic varieties. For the problem of equisingularity, we study global desingularization and the analytic homeomorphism by explosion is defined. Some analytic invariants are described, that is, properties that are maintained invariant with equisingularity. A brief study is made of the relationship of the Newton's polygon with desingularization, and the relationship the analytic homeomorphism by explosion with bi-Lipschitz functions. This work has the focus of the works of Tze-Char Kuo and Laurentiu Paunescu.

**Key words:** Desingularization, equisingularity, blow-up, strict transform, normal crossings, uniformization.

---

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1. Series de potencias y gérmenes de funciones analíticas . . . . .	5
1.2. Teorema de la función inversa . . . . .	8
<b>2. El problema de desingularización</b>	<b>13</b>
2.1. Transformada total y estricta por explosiones básicas . . . . .	14
2.2. Cruzamientos Normales . . . . .	29
2.3. La propiedad de levantamiento arco analítico . . . . .	35
2.4. Explosión local y Uniformización local . . . . .	37
2.5. Polígono de Newton. . . . .	44
2.6. Analiticidad por explosión y arco analiticidad . . . . .	47
<b>3. El problema de la equisingularidad</b>	<b>56</b>
3.1. Explosión en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	57
3.2. Desingularización Global . . . . .	59
3.3. Equisingularidad analítica por explosión . . . . .	61
<b>Conclusiones</b>	<b>66</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

# Introducción

Las singularidades en una curva se manifiestan en puntos donde esta presenta esquinas o carece de suavidad diferenciable. Estos puntos conllevan dificultades en el análisis y manipulación de la curva, motivando así la aplicación de la desingularización con el propósito de transformarla, haciéndola más suave y eliminando las singularidades. La desingularización de curvas planas es un proceso matemático que busca suavizar una curva transformando puntos, donde la curva puede volverse problemática desde una perspectiva geométrica. Este proceso se utiliza en diversas áreas de las matemáticas como la geometría algebraica, teoría de singularidades y halla utilidad en la clasificación de foliaciones singulares.

La investigación sobre la desingularización y la equisingularidad aborda temas complejos de Geometría Algebraica y/o Analítica, que requieren el uso de matemáticas avanzadas y un lenguaje especializado. En este trabajo, nuestro objetivo inicial es proporcionar una comprensión clara de estos fenómenos mediante ejemplos elementales en plano real  $\mathbb{R}^2$  antes de “abordar su formalización”. Para lograrlo, nos apoyaremos en los trabajos de Tzee-Char Kuo y Laurentiu Paunescu [18], [19], [20], [21], [23], [24], entre otros. Expondremos el significado esencial del problema de desingularización, mediante ejemplos explícitos de curvas, ver Figuras 2.3 y 2.6, y de superficies muy particulares, ver Ejemplos 2.5 y 2.6, definidas por funciones de variable real de tal manera que, a partir de ello sea fácil formular el teorema de resolución de singularidades en el caso de dos variables (real o complejo). Es importante señalar que la resolución de singularidades, fue un proceso que abarcó varias generaciones de matemáticos. Fue Heisuke Hironaka [10] quien logró demostrar el caso general en característica cero (el caso de característica positiva aún es un problema abierto). “La demostración de H. Hironaka es notablemente compleja y existencial, ya que no especifica o precisa un método constructivo para encontrar su resolución. Desde entonces se han obtenido resultados que establecen qué tipos de transformaciones de una variedad singular dan como resultado una variedad

lisa. Posteriormente esta prueba se ha simplificado en trabajos de H. Hauser, O. Villamallor, Brierstone-Milman, S. Encinas, entre otros”.

El entender la resolución de singularidades y la uniformización local será otro de los objetivos fundamentales de este trabajo de tesis para introducir los conceptos de analiticidad por explosiones y la arco analiticidad. Estos conceptos serán empleados para demostrar el Teorema 2.39, la cual, bajo la premisa de un sistema completo de explosiones asegura que cualquier aplicación arco analítica puede tener la propiedad de levantamiento arco analítico. Este resultado contribuye a demostrar que los conceptos de arco analiticidad y analiticidad por explosiones son equivalentes, en el contexto de funciones meromorfas. Como consecuencia obtenemos el Teorema 2.41.

En cuanto al problema de equisingularidad, sigue siendo un tema de interés por muchos matemáticos. La teoría de equisingularidad para curvas reducidas planas singulares fue introducida por Zariski en 1970 [26]. Básicamente la teoría de equisingularidad responde a la interrogante ¿Cuándo podrían  $f$  y  $g$  ser llamados equivalentes?, donde  $f$  y  $g$  son dos funciones definidas en una vecindad suficientemente pequeña del origen de  $\mathbb{R}^2$  o de  $\mathbb{C}^2$  con  $f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) = 0$ , en otras palabras se trata de encontrar una buena relación de equivalencia. Aquí se define el homeomorfismo analítico por explosión y con ello presentamos algunos invariantes analíticos (ver sección 3.3).

Por otro lado, queda abierta la pregunta sobre cuáles condiciones modificadas en la definición de Lipschitz deben ser seleccionadas para complementar la analiticidad por explosión.

La estructura de este trabajo se organiza de la siguiente manera. En el primer capítulo, se presentan las definiciones y propiedades básicas que resultarán fundamentales para el desarrollo posterior de la investigación. En el segundo capítulo, nos centramos en el problema de la resolución de singularidades, comenzando con la comprensión del concepto de transformada total y estricta de curvas por medio de una aplicación de parametrización muy particular. Se detalla el proceso para obtener cruzamientos normales en la desingularización de curvas planas, abordando así la propiedad de levantamiento arco analítico, también la explosión y la uniformización local. Posteriormente se introduce la analiticidad por explosión y el concepto de arco analiticidad. En el último capítulo, abordaremos el problema de equisingularidad y su relación con los homeomorfismos Bi-lipschitz.

# Capítulo 1

## Preliminares

A lo largo de la historia de la matemática, se han producido avances significativos, como los que mencionamos a continuación. Desde el siglo XVII con Leibniz y Newton quienes demostraron el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), estableciendo una conexión fundamental entre la derivada y la integral. Vale la pena rescatar que, en este contexto, solo importan los valores de la función antiderivada en los extremos. Avanzando con el tiempo encontramos el Teorema de Cauchy-Goursat, en 1825, al que se le suma el teorema de la independencia de caminos como una consecuencia del TFC en el análisis de variable compleja. Bajo ciertas condiciones, este teorema establece que la integral no depende de la curva, sino únicamente de los extremos. A la par, se estudia la Teoría de Homotopía, en 1800 con Poincaré que define el Grupo Fundamental. En ellas se definen las variedades reales (topológicas, diferenciables, analíticas u holomorfas) según sea el caso de los cambios de coordenadas (continuas, diferenciables, analíticas). A finales del siglo XIX e inicios del siglo XX, Riemann, Klein y Weyl se dedicaron al estudio de las superficies de Riemann, caracterizadas por cambios de coordenadas analíticas. Entre estas destacan las variedades de dimensión 2, como los abiertos en  $\mathbb{R}^2$ , las superficies en  $\mathbb{R}^3$  representadas como gráficas de funciones diferenciables de dos variables y las superficies de nivel en dimensiones superiores a 2, definidas por ceros de polinomios, es decir ecuaciones algebraicas  $F(x, y, z) = 0$ , donde es posible despejar una variable en función de las otras. En este contexto, el *Teorema de la Función Implícita* (TFIm) surge como una herramienta para garantizar, bajo ciertas condiciones, la posibilidad de despejar una variable en función de las otras. Sin embargo, aunque no proporciona el método para calcularlo, nos ofrece la fórmula para la derivada. A medida que transcurre el tiempo, la Geometría Algebraica se consolida como una disciplina que estudia conjuntos

definidos como ceros de polinomios. Estos conjuntos respaldados por TFIm pueden ser tratados como variedades diferenciables. Sin embargo, en los conjuntos donde TFIm no se cumple, surgen los *puntos singulares*, que se convierten en el foco de atención de esta tesis.

En este capítulo de preliminares, estudiamos las series de potencias con ellas las funciones analíticas, el *Teorema de la Función Implícita* (TFIm), y enunciamos el *Teorema de la Función Inversa* (TFI).

## 1.1. Series de potencias y gérmenes de funciones analíticas

Es ampliamente conocido que podemos realizar aproximaciones locales alrededor de un punto de una función diferenciable mediante el uso de sus polinomios de Taylor calculados en dicho punto. Incluso podemos buscar representaciones que sean válidas en toda una vecindad del punto en cuestión. Estos procedimientos permiten transformar problemas relacionados con funciones complicadas en problemas más simples que involucran funciones más sencillas. Veamos en particular, las representaciones en series de potencias.

Definimos las series de potencias de manera análoga a como lo hacemos con los polinomios, ya que una serie de potencias puede concebirse como un polinomio pero con un número infinito de términos.

Sean el cuerpo  $K = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  y  $x, y$  indeterminadas sobre  $K$ . Se denota con  $K[[x, y]]$  al conjunto de las sumas formales

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots$$

donde cada  $f_i$  es un polinomio homogéneo de grado  $i$  en las indeterminadas  $x, y$  y con coeficientes en  $K$ . Explícitamente,

$$\sum_{i,j}^{\infty} a_{i,j} x^i y^j$$

llamadas *series formales de potencias*. Se puede observar que  $K[[x, y]]$  tiene la estructura de anillo conmutativo con las operaciones definidas por

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k + \sum_{k=0}^{\infty} g_k = \sum_{k=0}^{\infty} (f_k + g_k)$$

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} g_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=k} f_i g_j \right)$$

Podemos identificar el anillo de polinomios  $K[x, y]$  como el subanillo de  $K[[x, y]]$  formado por las series de potencias con términos finales nulos.

El polinomio no nulo de menor grado de una serie de potencias se llama *término inicial* de la serie. El **orden** de una serie de potencias  $F = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$  no nula es el grado de su término inicial y lo denotamos por  $ord(F)$ . Si  $F$  es una serie de potencias nula o constante, el  $ord(F) = \infty$ . Las siguientes propiedades se desprenden de la definición de orden de la serie de potencias,

$$ord(F + G) \geq \min\{ord(F), ord(G)\}$$

$$ord(F \cdot G) = ord(F) + ord(G)$$

**Definición 1.1.** Se define  $K\{x, y\} \subset K[[x, y]]$  como el conjunto formado por las series que convergen en una vecindad del origen.

El conjunto  $K\{x, y\}$  es un subanillo, pues se cumple la cerradura bajo la adición y multiplicación de series convergentes.

En efecto, sean las series convergentes  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k = F$  y  $\sum_{k=0}^{\infty} g_k = G$  entonces se tiene

$$\text{que } \sum_{k=0}^{\infty} (f_k + g_k) = F + G \text{ y } \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} g_k \right) = F \cdot G$$

Ahora, una función es analítica cuando localmente puede representarse por una serie de potencias, como se detalla en la siguiente definición.

**Definición 1.2.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto no vacío y una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $f$  es *analítica real* en  $U$  si para cada  $p = (a, b) \in U$  existen  $R > 0$  y una serie de potencias centrada en  $p$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} (x - a)^n (y - b)^m$ , tal que en  $V(p, R) \subset \mathbb{R}^2$ , una vecindad del punto  $p$  con radio  $R$ , se cumple que

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} (x - a)^n (y - b)^m, \forall (x, y) \in V(p, R)$$

**Definición 1.3.** Sean  $U$  y  $V$  subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^2$ ,  $p \in U \cap V$  y las funciones analíticas  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $f \sim g$  si y solo existe un entorno  $W$  de  $p$  con  $W \subset U \cap V$  tal que  $f|_W = g|_W$ . La relación definida anteriormente es

de equivalencia, cada clase de equivalencia se denomina *germen* de función analítica en un entorno de  $p$ .

Los ceros de un polinomio definen una curva afín en el plano: Un punto  $(x, y)$  es un cero del polinomio si  $f(x, y) = 0$ . Para un polinomio  $f \in K[x, y]$  que no sea constante, el conjunto de ceros se define como la curva afín:

$$\mathcal{C}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

para abreviar llamemos  $\mathcal{C}$ . Consideramos la curva  $\mathcal{C}$  y el punto  $p = (a, b) \in \mathcal{C}$ , se define la recta tangente a  $\mathcal{C}$  en el punto  $p$  como la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) = 0$$

denotado por  $T_p(\mathcal{C})$ . Decimos que  $p$  es un punto no singular de la curva si cada derivada parcial en  $p$  es diferente de cero, pero si ambas derivadas parciales en  $p$  se anulan se dice que  $p$  es un punto singular de la curva  $\mathcal{C}$ , en este caso el  $T_p(\mathcal{C})$  tendrá dimensión 2.

**Ejemplo 1.4.** Sea  $\mathcal{C} : f(x, y) = 2x - y + x^4 = 0$  la recta tangente a  $\mathcal{C}$  en  $\mathbf{0} = (0, 0)$  está dada por  $T_p(\mathcal{C}) : 2x - y = 0$ . Observe que  $\mathcal{C}$  es una curva no singular, pues ninguna de las derivadas parciales se anula en el origen.

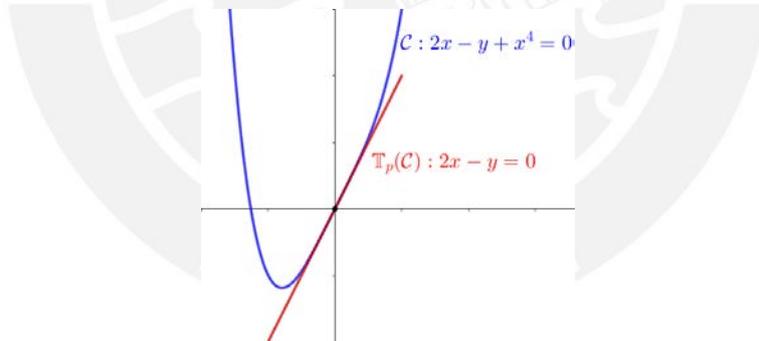


Figura 1.1:  $\mathcal{C} : 2x - y + x^4 = 0$

**Definición 1.5.** Sean  $f$  una función analítica en un entorno del origen, esto es  $f(x, y) = \sum_{k \geq n} f_k$  y  $\mathcal{C}$  una curva plana que contenga el origen  $\mathbf{0}$ . Se define el *cono tangente* a  $\mathcal{C}$  en  $\mathbf{0}$  como los ceros del término inicial de la serie, es decir  $f_n(x, y) = 0$ .

**Ejemplo 1.6.** Sea la curva  $\mathcal{C} : f(x, y) = x^2 - y^2 + x^3 = 0$ , donde se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Se define el *cono tangente* en el  $(0, 0)$  por  $x^2 - y^2 = 0$

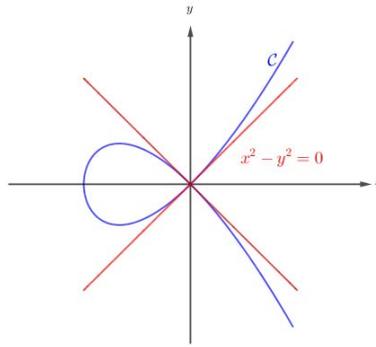


Figura 1.2: Cono tangente en el origen

## 1.2. Teorema de la función inversa

Un isomorfismo analítico es una correspondencia biunívoca entre dos estructuras matemáticas que preserva la analiticidad, estas estructuras son llamadas *isomorfas*. La analiticidad es la propiedad que tiene una aplicación de ser representada localmente por una serie de potencia.

Este concepto es importante en diversos campos de las matemáticas como el análisis, el álgebra, la teoría de funciones complejas, etc. La noción de isomorfismo analítico permite establecer conexiones y analogías entre diferentes espacios analíticos lo que facilita su estudio y comprensión.

**Definición 1.7.** Se dice que la ecuación  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$  con  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  define a la variable  $y$  como función de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en un entorno  $B$ , cuando existe una función escalar  $f : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$$

para todo  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B$ .

Ahora veamos bajo qué condiciones se garantiza la existencia de la función  $f$ .

**Teorema 1.8.** Sean  $D$  un conjunto abierto,  $a = (x_0, y_0) \in D$  y  $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

- $F(x_0, y_0) = 0$
- $F \in C^1(B(a))$ , esto es, que  $F$  sea continua y con primeras derivadas parciales continuas en un entorno del punto  $a$ .

- $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Entonces la ecuación  $F(x, y) = 0$  define implícitamente  $y = f(x)$ , para todo  $x \in B(x_0)$  tal que  $f(x_0) = y_0$ ,  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , una única función. Además, se cumple

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

**Teorema 1.9.** Sean  $D$  un conjunto abierto,  $a = (x_0, y_0, z_0) \in D$  y  $F : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , verificando:

- $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
- $F \in C^1(B(a))$ , esto es, que  $F$  sea continua y con primeras derivadas parciales continuas en un entorno del punto  $a$ .
- $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Entonces la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  define implícitamente  $z = f(x, y)$  para todo  $(x, y) \in B(a)$  tal que  $f(x_0, y_0) = z_0$ ,  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$ , una única función. Además:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Este teorema nos garantiza la existencia de la función  $f$ , aunque no la defina explícitamente.

**Definición 1.10.** Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z))$  una función de clase  $C^1$  en un entorno  $B$  del punto  $a = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ . Denotamos con  $\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0)$  al determinante de la matriz jacobiana de  $F$  en  $(x_0, y_0, z_0)$  considerando que  $F$  depende solo de  $y$  y  $z$

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}$$

**Teorema 1.11.** Sean  $D$  un conjunto abierto,  $a = (x_0, y_0, z_0) \in D$  y  $F : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z))$ . Si:

- $f(a) = 0, g(a) = 0$

- $f, g \in C^1(B(a))$
- $\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}(a) = \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$

Entonces las ecuaciones  $f(x, y, z) = 0$  y  $g(x, y, z) = 0$  definen implícitamente a  $y = \alpha(x)$ ,  $z = \beta(x)$ ,  $\forall x \in B(x_0)$  tal que  $\alpha$  y  $\beta$  son únicas, diferenciables y:

$$\alpha'(x_0) = - \frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}} \quad \beta'(x_0) = - \frac{\begin{vmatrix} f_y & f_x \\ g_y & g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}} \quad (1.1)$$

Las demostraciones de los teoremas anteriores lo encontramos en [11].

Para el caso de funciones  $x = f(u, v)$  y  $y = g(u, v)$  que definen a  $x$  e  $y$  como funciones de  $u$  y  $v$ , deseamos saber bajo qué condiciones podemos definir a  $u$  y  $v$  como funciones de  $x$  e  $y$ . Como los casos anteriores, es un tema de existencia, para lo cual nos apoyamos en el teorema de la función implícita, para tal efecto definimos:

$$G(x, y, u, v) = x - f(u, v) = 0$$

$$H(x, y, u, v) = y - g(u, v) = 0$$

y sea  $P = (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$  tal que  $G(P) = H(P) = 0$ . Supongamos que en una vecindad de  $P$  las derivadas parciales de  $G$  y  $H$  son continuas y  $\frac{\partial(G, H)}{\partial(u, v)} \neq 0$  en  $P$ , entonces existen funciones  $u = \varphi(x, y)$ ,  $v = \psi(x, y)$  definidas en una vecindad  $V$  de  $(x, y)$ , las cuales tienen derivadas parciales continuas en  $V$ , todo esto en el siguiente teorema:

**Teorema 1.12.** Sea  $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(u, v) = (x, y)$  una función definida en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , donde  $x = f(u, v)$ ,  $y = g(u, v)$  admiten derivadas parciales de  $f$  y  $g$  continuas en un entorno del punto  $p = (\bar{u}, \bar{v})$  y el jacobiano  $\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}$  es no nulo en  $(\bar{u}, \bar{v})$ , entonces existe un entorno  $V$  de  $(x, y)$  y funciones  $u = \varphi(x, y)$  y  $v = \psi(x, y)$  las cuales tienen derivadas parciales continuas en  $V$  que se calculan mediante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} & \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} & \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Es decir, existe una función inversa  $F^{-1}$  tal que  $F^{-1}(x, y) = (u, v) = (\varphi(x, y), \psi(x, y))$ , en un entorno de  $(x, y)$  cuya matriz jacobiana es:

$$JF^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

al sustituir (1.2) en la matriz jacobiana de la función inversa de  $F$ , se obtiene la inversa de la matriz jacobiana de  $F$ , esto es:  $JF^{-1} = (JF)^{-1}$ , localmente.

En general se tiene el siguiente teorema

**Teorema 1.13.** *Sea  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función definida en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $F(p) = q$  donde  $p = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$  y  $q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Supongamos que la función  $F$  es de clase  $C^1(U)$  y  $\det(JF(p)) \neq 0$ . Entonces existen un entorno  $B(p) \subset U$ , un entorno  $B'(q) \subset \mathbb{R}^n$  y una función inversa de  $F$ ,  $F^{-1}$  la cual es de clase  $C^1$  y se cumple que  $JF^{-1}(y) = [JF(x)]^{-1}$  para todo  $y \in B'$ .*

**Ejemplo 1.14.** Sean el conjunto abierto  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \neq 0\}$ , la función  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(u, v) = (x, y)$ , definida por  $x = u^2 + v^2$ ,  $y = \frac{v}{u}$ . Sea  $p = (1, 1) \in U$ ,  $F(p) = q \in \mathbb{R}^2$ . Además  $F \in C^1(U)$ . Se verifica que la matriz jacobiana es invertible, es decir

$$JF(P) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo  $\det(JF(P)) = 4$ .

Entonces por el teorema de la función inversa, existen entornos  $B(p)$ ,  $B'(q)$  tal que la función  $F$  admite inversa,  $F^{-1} : B' \rightarrow B$  y es de clase  $C^1(B')$ . Además

$$JF^{-1}(q) = [JF(p)]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

**Observación 1.15.** Este teorema es de existencia, nos garantiza que bajo ciertas condiciones existe la inversa local y que es de clase  $C^1$ , mas no nos dice cómo calcularla.

Lo que podemos identificar en (1.4) son las derivadas parciales de la función inversa,  $F^{-1}$  en el punto  $q$ , comparando con (1.3) se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}$$

**Observación 1.16.** El Teorema 1.13, conocido como el Teorema de la Función Inversa (TFI) se utiliza en el contexto de cruzamientos normales.

**Ejemplo 1.17.** Consideremos la función  $f(x, y) = (x + 2y)(3x - 4y)^2$ , que tiene como lugar geométrico a dos rectas transversales en el origen. Definamos el cambio de variable  $F$  de clase  $C^1$ , por

$$F(x, y) = (x + 2y, 3x - 4y) = (u(x, y), v(x, y))$$

tal que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -10.$$

Entonces por el TFI, existen  $U, V$  entornos del origen en  $\mathbb{R}^2$  y la inversa definida por

$$F^{-1} : \quad V \quad \longrightarrow \quad U \\ (u, v) \quad \longmapsto \quad F^{-1}(u, v) = \left( \frac{2u + v}{5}, \frac{3u - v}{10} \right)$$

que transforma  $f$  en  $g(u, v) = f \circ F^{-1}(u, v) = uv^2$ . Ahora el lugar geométrico coincide con los nuevos ejes coordenados  $(u, v)$  en un entorno del origen (ver Figura 1.3).

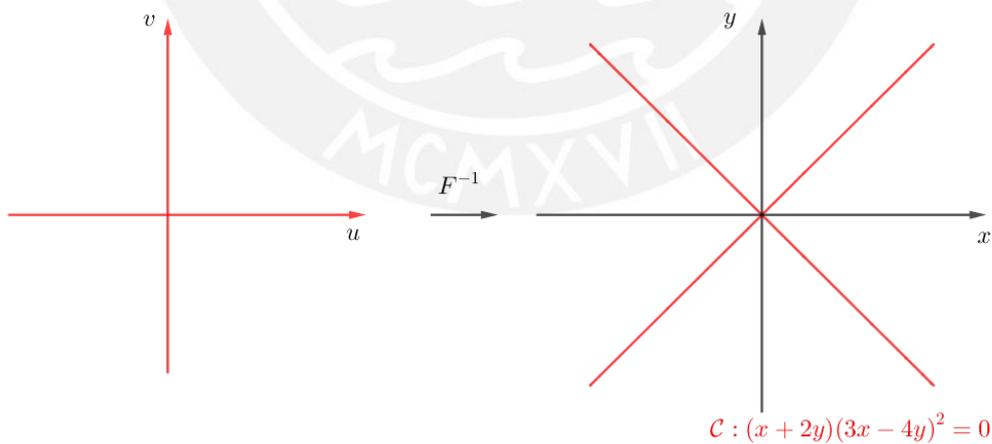


Figura 1.3: Cambio de variables

## Capítulo 2

# El problema de desingularización

En el área de Geometría Algebraica se estudia el lugar geométrico definido por un conjunto de ecuaciones polinómicas en dos o más variables que se reconoce como Variedad Algebraica. Por otro lado la Geometría Analítica se enfoca en el estudio de gráficos definidos por series de potencias convergentes reconocido como Variedad Analítica. Basta con observar nuestro entorno y prestar atención a los contornos de algunos objetos, para encontrarnos con ejemplos de, ya sean curvas o superficies que mostraremos como ejemplos de variedades de dimensión uno o dos respectivamente. En la Geometría Algebraica se dedica especial atención a la resolución de singularidades de curvas planas.

La teoría de la desingularización se basa en el hecho de que, en las proximidades de cada punto singular de una variedad, la función que define dicha variedad puede considerarse como una función analítica. De este modo es posible realizar una uniformización local. Esta uniformización local permite construir una transformación birracional que “alisará” o “aplanará” la singularidad en la variedad. Como resultado la variedad desingularizada adquiere una estructura más regular, la que la hace más accesible para su estudio.

En el presente capítulo, nos adentramos en el estudio del problema de la Desingularización. Como se ha mencionado, este tema involucra conceptos matemáticos sofisticados y un lenguaje altamente técnico. Sin embargo, muchos de los conceptos fundamentales pueden ser explicados mediante ejemplos simples en  $\mathbb{R}^2$ , los cuales describimos a continuación.

## 2.1. Transformada total y estricta por explosiones básicas

Estamos interesados en comprender los gráficos definidos por conjuntos de ecuaciones polinómicas o funciones analíticas en dos o más variables. Iniciamos este tema con una ilustración mediante ejemplos en dos variables reales, para luego proporcionar una definición formal.

Imaginemos que se nos solicita esbozar, en el plano  $\mathbb{R}^2$ , la curva  $\mathcal{C}$  definida por la ecuación  $f(x, y) = 0$ , es decir,

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\},$$

donde  $f(x, y) = y^2 - x^2(x + 1)$ . Podría elegir valores de  $x$  al azar, uno a la vez, y calcular los valores correspondientes de  $y$ . Sin embargo, este enfoque no sería muy efectivo ya que después de encontrar los valores correspondientes de  $y$  para una cantidad significativa de valores de  $x$ , resultaría difícil determinar el gráfico de  $\mathcal{C}$ . Una idea más eficiente es realizar una sustitución o cambio de variable, por ejemplo  $y = tx$ , donde esto produce

$$f(x, tx) = 0 \Rightarrow t^2x^2 - x^2(x + 1) = 0 \Rightarrow x = t^2 - 1.$$

Luego, una parametrización de la curva  $\mathcal{C}$  será

$$(x(t), y(t)) = (t^2 - 1, t^3 - t); t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Las ecuaciones paramétricas proporcionan representaciones cinemáticas de la curva, es decir, nos indican la posición del punto con respecto al tiempo, mientras que la ecuación algebraica brinda una representación geométrica.

Con esta representación, es fácil esbozar el gráfico de  $\mathcal{C}$ , que adopta la forma de  $\alpha$  ( $\alpha$ -curva), ver Figura 2.1.

Intuitivamente, la recta  $y = tx$  se asemeja a un haz de radar, emitido en el tiempo  $t$  para detectar a curva  $\mathcal{C}$  en los puntos  $(t^2 - 1, t^3 - t)$  y el origen. En Geometría Algebraica, esta parametrización se interpreta de la siguiente manera. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) &\longmapsto (x, y) := (X, XY), \end{aligned}$$

y examinemos qué sucede al aplicar  $\pi_1$  en un entorno del origen:

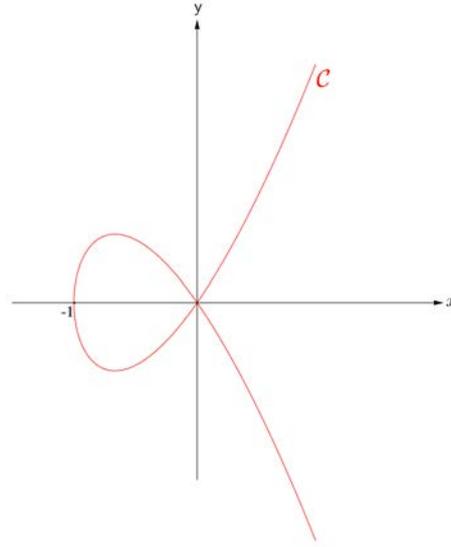


Figura 2.1:  $\alpha$ -curva:  $y^2 - x^2(x + 1) = 0$

i) Las rectas horizontales  $Y = c$  son enviadas a las rectas  $y = cx$ ,

$$\pi_1(X, Y) = \pi_1(X, c) = (X, cX) = (x, y).$$

ii) El eje  $Y$  colapsa en el origen,

$$\pi_1(X, Y) = \pi_1(0, Y) = (0, 0).$$

iii) Las rectas verticales  $X = c', c' \neq 0$  son enviadas a las rectas  $x = c'$

$$\pi_1(X, Y) = \pi_1(c', Y) = (c', c'Y).$$

En general, un rectángulo, centrado en  $(0, 0)$ , con vértices  $(c', c)$ ,  $(-c', c)$ ,  $(-c', -c)$ ,  $(c', -c)$  es enviado, por  $\pi_1$ , en un sector entorno del eje  $x$  (ver Figura 2.2).

Por otro lado, el pull-back de  $\mathcal{C}$  vía  $\pi_1$  está dado por la ecuación

$$(\pi_1^* f)(x, y) = f(X, XY) = 0 \Rightarrow X^2 Y^2 - X^2(X + 1) = 0 \Rightarrow X^2(Y^2 - X - 1) = 0,$$

el cual consiste de una parábola  $Y^2 = X + 1$ , junto con la curva  $X^2 = 0$  (eje  $Y$  contado dos veces).

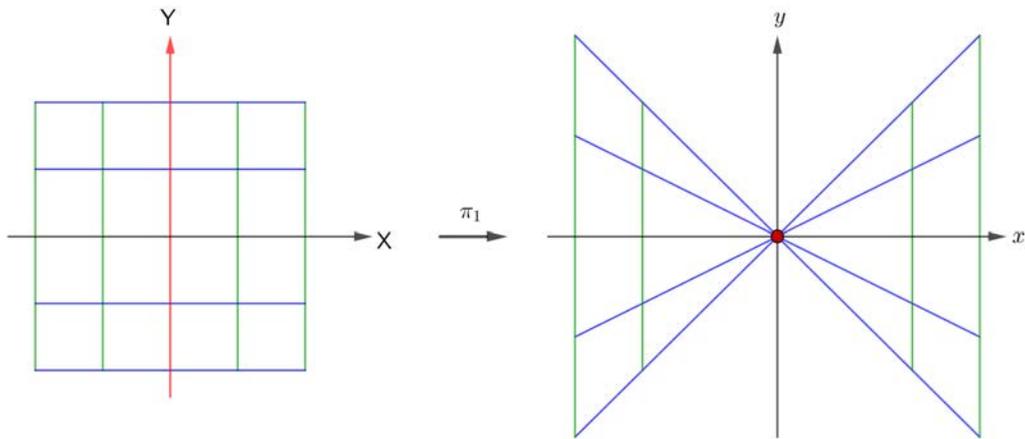


Figura 2.2: Aplicación  $\pi_1$

El eje  $Y$  se denomina *divisor excepcional* o lugar excepcional de  $\pi_1$  y será denotado por  $E_1$ .

Es importante destacar que  $\pi_1$  es una biyección, excepto a lo largo del eje  $Y$ . La aplicación  $\pi_1$  es *explosión básica con centro en el origen*. Geométricamente, la parábola  $Y^2 = X + 1$  es llamada la *transformada estricta* de  $\mathcal{C}$ , la cual junto con la curva  $X^2 = 0$  constituyen la *transformada total* de  $\mathcal{C}$  (ver Figura 2.3).

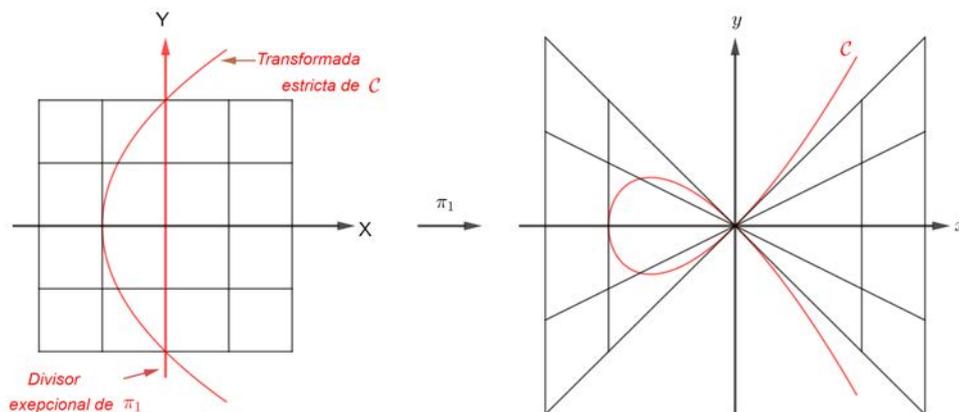


Figura 2.3: Explosión básica  $\pi_1$  de  $\alpha$ -curva

Otros ejemplos comunes incluyen las cúspides tangentes a uno de los ejes coordenados, como la curva definida por  $f(x, y) = y^3 - x^2$ , que es tangente al eje  $y$ . En este contexto, al aplicar  $\pi_1$  similar al caso de la  $\alpha$ -curva, cualquier vecindad del

origen de  $(X, Y)$  se transforma en un sector alrededor del eje  $x$  en las coordenadas  $(x, y)$ . Es importante señalar que este sector no contiene a la cúspide, excepto en la singularidad  $(0, 0)$  como se muestra en la Figura 2.4

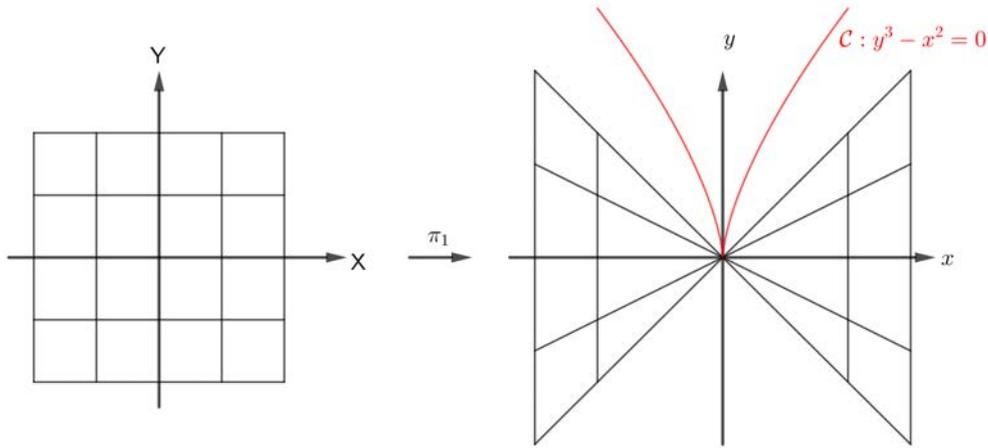


Figura 2.4: Sector entorno al eje  $x$

En este escenario resulta conveniente elegir la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \pi_2 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\bar{X}, \bar{Y}) &\longmapsto (x, y) := (\bar{X}\bar{Y}, \bar{Y}) \end{aligned}$$

Ahora examinemos qué ocurre al aplicar  $\pi_2$  en un entorno del origen:

i) Las rectas horizontales  $\bar{Y} = c$  son enviadas a las rectas  $y = c$ ,

$$\pi_2(\bar{X}, \bar{Y}) = \pi_2(\bar{X}, c) = (c\bar{X}, c) = (x, y).$$

ii) El eje  $\bar{X}$  colapsa en el origen,

$$\pi_2(\bar{X}, \bar{Y}) = \pi_2(\bar{X}, 0) = (0, 0).$$

iii) Las rectas verticales  $\bar{X} = c', c' \neq 0$  son enviados a las rectas  $x = c'y$ ,

$$\pi_2(\bar{X}, \bar{Y}) = \pi_2(c', \bar{Y}) = (c'\bar{Y}, \bar{Y})$$

En general, un rectángulo centrado en  $(0, 0)$  con vértices  $(c', c), (-c', c), (-c', -c), (c', -c)$  del plano  $(\bar{X}, \bar{Y})$ , es enviado a un sector alrededor del eje  $y$ , el cual contiene a la cúspide, como se aprecia en la Figura 2.5.

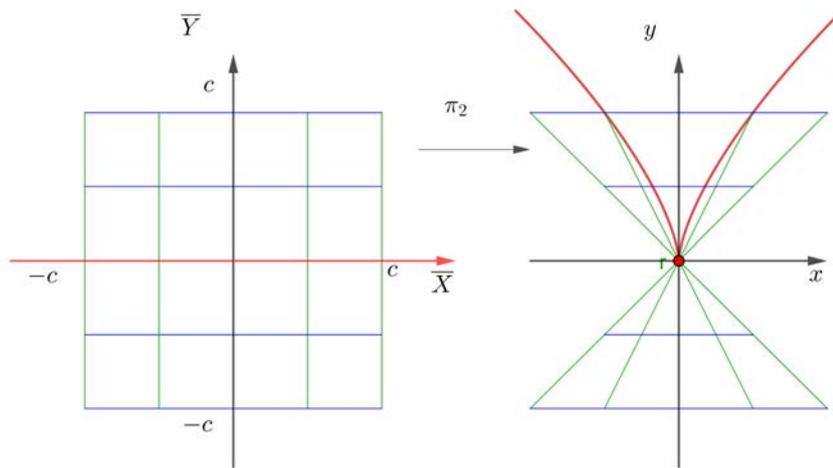


Figura 2.5: Explosión básica  $\pi_2$

La aplicación  $\pi_2$  también es llamada explosión básica con centro en  $(0, 0)$  El pull-back de la cúspide vía  $\pi_2$  viene dada por la ecuación

$$\bar{X}^2 \bar{Y}^2 - \bar{Y}^3 = \bar{Y}^2 (\bar{X}^2 - \bar{Y}) = 0,$$

el cual consiste de la parábola  $\bar{Y} = \bar{X}^2$ , junto con la curva  $\bar{Y}^2 = 0$  (eje  $\bar{X}$  contado dos veces). Note que la parábola  $\bar{Y} = \bar{X}^2$  se puede representar por  $\bar{Y} = t^2$ ,  $\bar{X} = t$ ,

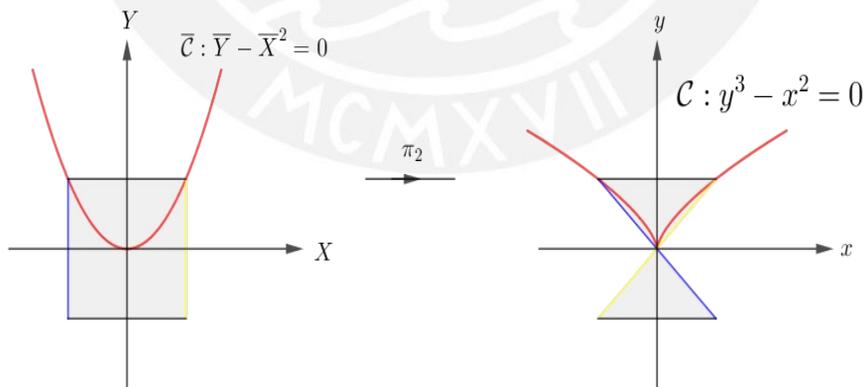


Figura 2.6: Explosión básica  $\pi_2$  de  $\mathcal{C} : y^3 - x^2 = 0$

es decir con la aplicación  $\pi_2$ , la cúspide admite la siguiente parametrización

$$(x(t), y(t)) = (t^3, t^2), t \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Mas adelante observaremos que las aplicaciones básicas  $\pi_1$  y  $\pi_2$  pueden combinarse en una sola aplicación, la cual será llamada **Explosión con centro el origen** y será denotada por  $\pi := \pi_1 \sqcup \pi_2$ .

En matemáticas básicas, se puede apreciar el poder de la parametrización en el cálculo de áreas, longitud de arco, curvatura, etc. La razón por la cual una parametrización suele ser tan poderosa es que permite descomponer un objeto complicado, como  $\mathcal{C}$  ( $\alpha$ -curva), en dos objetos más simples: el espacio  $t$ -parámetro, que es una recta en este caso, y una aplicación sencilla, como  $t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$ . En muchos casos, esta descomposición es la deseada.

Como se puede observar en los ejemplos anteriores, la transformada estricta de la  $\alpha$ -curva y la cúspide  $y^3 - x^2 = 0$  mediante las explosiones básicas  $\pi_1$  y  $\pi_2$  respectivamente, son regulares, y solo se aplicó **una** explosión en cada caso. Una pregunta natural es la siguiente: dada una curva  $\mathcal{C} : f(x) = 0$  ya sea algebraica o función analítica, ¿la transformada estricta  $\pi_i^*(\mathcal{C})$  es siempre regular? A continuación analizaremos el comportamiento de ciertas curvas después de aplicar un número finito de veces las explosiones básicas  $\pi_i$  con  $i = 1, 2$  como se observa en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 2.1.** Considere la curva  $\mathcal{C} : y^5 - x^2 = 0$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Observe que  $\mathcal{C}$  es tangente al eje  $y$ , por tanto elegimos la explosión básica  $\pi_2$ ,

$$\begin{aligned} \pi_2 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X_1, Y_1) &\longmapsto (x, y) := (X_1 Y_1, Y_1) \end{aligned}$$

$\pi_2^*(\mathcal{C}) : Y_1^2(Y_1^3 - X_1^2) = 0$ , cuya gráfica es una cúspide de ecuación  $Y_1^3 - X_1^2 = 0$  junto con  $Y_1 = 0$ . El eje  $X_1$  es el divisor excepcional; y la curva  $\mathcal{C}_1 : Y_1^3 - X_1^2 = 0$  es la transformada estricta de  $\mathcal{C}$ , que no es regular. Y como  $\mathcal{C}_1$  es tangente a  $Y_1$ , consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_2 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X_2, Y_2) &\longmapsto (X_1, Y_1) := (X_2 Y_2, Y_2). \end{aligned}$$

Con esta aplicación obtenemos  $\pi_2^*(\mathcal{C}_1) : Y_2^2(Y_2 - X_2^2) = 0$ , la cual representa la parábola  $Y_2 - X_2^2 = 0$  junto con el eje  $X_2$ . En este caso, el eje  $X_2$  es el divisor excepcional de  $\pi_2$ .

De lo anterior podemos observar que para lograr que la transformada estricta de la cúspide  $\mathcal{C} : y^5 - x^2 = 0$  sea regular, es necesario realizar dos explosiones básicas.

En este caso, concluimos que la transformada estricta de la curva  $\mathcal{C}$  es regular si se aplica dos explosiones básicas centradas en el origen y que  $E = E_1 \cup E_2$  es el divisor excepcional de  $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$ .

El pull back de la curva  $\mathcal{C}$  vía  $\pi$  está definida por la ecuación

$$Y_2^4(Y_2 - X_2^2) = 0$$

cuyo lugar geométrico consiste de la parábola  $Y_2 - X_2^2 = 0$ , junto con  $Y_2^4 = 0$ . Luego la parametrización de esta cúspide viene dada por

$$(x(t), y(t)) = (t^5, t^2), t \in \mathbb{R}$$

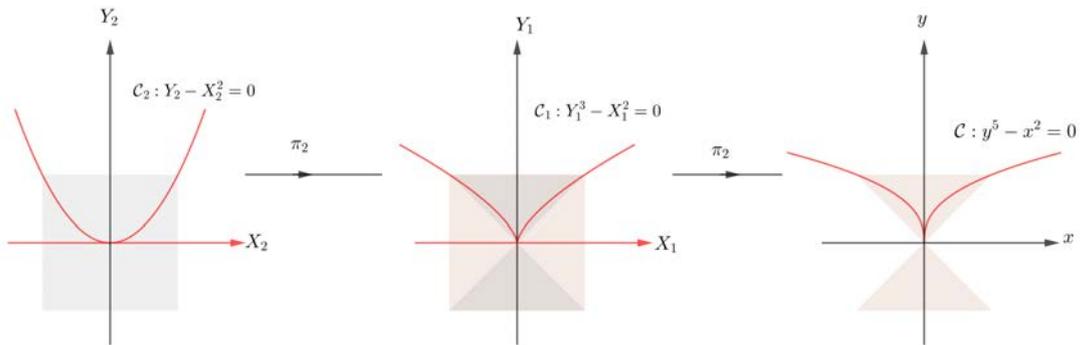


Figura 2.7: Transformada estricta regular de la curva  $\mathcal{C} : y^5 - x^2 = 0$

En los ejemplos anteriores podemos observar que el *cono tangente*, definido por el polinomio homogéneo de menor grado en la ecuación de  $\mathcal{C}$ , ver Definición 1.5, contiene al lugar singular de  $\mathcal{C}$ . El hecho de elegir  $\pi_1$  ó  $\pi_2$  depende del sector que contenga a la curva, lo que equivale a seleccionar el sector que contiene al cono tangente. En geometría algebraica elegir  $\pi_1$  ó  $\pi_2$  se traduce en seguir la dirección del cono tangente.

**Ejemplo 2.2.** Considere la curva  $\mathcal{C} : y^{17} - x^{22} = 0$ .

Observe que la curva  $\mathcal{C}$  es singular, tiene una singularidad en el origen de  $\mathbb{R}^2$  y tiene como tangente al eje  $x$ , puesto que el polinomio homogéneo de menor grado es  $y^{17} = 0$ , lo cual sugiere elegir  $\pi_1$  para iniciar el proceso de reducción de singularidades. Esta aplicación está definida por  $\pi_1(x_1, y_1) = (x_1, x_1 y_1)$ , obteniendo

como transformada total de  $\mathcal{C}$  a:  $x_1^{17}(y_1^{17} - x_1^5) = 0$ , que es unión de la curva singular  $\mathcal{C}_1 : y_1^{17} - x_1^5 = 0$  con el eje  $y_1$ . En este paso,  $\mathcal{C}_1$  es la transformada estricta y  $E_1 : x_1 = 0$  representa al divisor excepcional generado por  $\pi_1$ . Observe que el cono tangente de  $\mathcal{C}_1 : y_1^{17} - x_1^5 = 0$ , es  $x_1 = 0$ , en este caso elegimos la aplicación  $\pi_2$ , definida por  $\pi_2(x_2, y_2) = (x_2 y_2, y_2)$ . Obteniendo como transformada estricta  $\mathcal{C}_2 : y_2^{12} - x_2^5 = 0$  y el divisor excepcional de  $\pi_2$  es  $E_2 := y_2 = 0$ .

La transformada estricta  $\mathcal{C}_2 : y_2^{12} - x_2^5 = 0$  es una curva singular, cuyo cono tangente es el eje  $y_2$ , elegimos entonces  $\pi_3$ , obteniendo como transformada total a  $y_3^5(y_3^7 - x_3^5) = 0$ . En este caso, el divisor excepcional de  $\pi_3$  es  $E_3 : y_3 = 0$ , y la transformada estricta es la curva singular  $\mathcal{C}_3 : y_3^7 - x_3^5 = 0$ . Aplicando  $\pi_4$ , obtenemos  $y_4^5(y_4^2 - x_4^5) = 0$ , la cual resulta la transformada estricta  $y_4^2 - x_4^5 = 0$  y el divisor excepcional  $E_4 : y_4 = 0$ . Para la curva  $\mathcal{C}_4 : y_4^2 - x_4^5 = 0$ , que es tangente al eje  $x_4$ , se aplica  $\pi_5(x_5, y_5) = (x_5, x_5 y_5)$ , de lo que resulta  $x_5^2(y_5^2 - x_5^3) = 0$ . Se entiende que la transformada estricta es  $\mathcal{C}_5 : y_5^2 - x_5^3 = 0$  y el divisor excepcional es  $E_5 : x_5 = 0$ . Prosiguiendo, aplicamos  $\pi_6$ , obteniendo  $x_6^2(y_6^2 - x_6) = 0$ . Ahora note que la transformada estricta  $\mathcal{C}_6 : y_6^2 - x_6 = 0$  es una curva regular en el plano  $x_6 y_6$ , con divisor excepcional  $E_6 : x_6 = 0$ .

En conclusión, en este ejemplo se ha aplicado  $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \circ \pi_4 \circ \pi_5 \circ \pi_6$  hasta conseguir como transformada estricta una curva regular. En este caso,  $E = \bigcup_{i=1}^6 E_i$ , es llamado divisor excepcional de  $\pi$ .

Para obtener una parametrización de la curva  $\mathcal{C} : y^{17} - x^{22} = 0$ , vía la aplicación

$$\begin{aligned} \pi(x, y) &= \pi_1(\pi_2(\pi_3(\pi_4(\pi_5(\pi_6(x, y)))))) = \pi_1(\pi_2(\pi_3(\pi_4(\pi_5(x, xy)))))) \\ &= \pi_1(\pi_2(\pi_3(x^3 y, x^2 y))) \\ &= \pi_1(x^7 y^3, x^2 y) \\ &= (x^7 y^3, x^9 y^4) \end{aligned} \quad (**)$$

basta con calcular el pull back de  $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \pi^*(\mathcal{C}) : (x^9 y^4)^{17} - (x^7 y^3)^{22} &= 0 \equiv x^{153} y^{68} - x^{154} y^{66} = 0 \\ x^{153} y^{66} (y^2 - x) &= 0 \end{aligned}$$

donde  $y^2 - x = 0$  es la transformada estricta de  $\mathcal{C}$  vía  $\pi$ . Haciendo  $y = t$  y reemplazando en (\*\*), se obtiene

$$(x(t), y(t)) = (t^{17}, t^{22})$$

luego una parametrización para  $\mathcal{C}$  está dada por:

$$(x(t), y(t)) = (t^{17}, t^{22}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Observación 2.3.** En el Ejemplo 2.2 se tiene la curva  $\mathcal{C} : y^n - x^m = 0$  con  $n = 17$  y  $m = 22$ , usando el algoritmo de Euclides tenemos

$$\begin{aligned} 22 &= 1(17) + 5 & m &= c_0n + r_1 \\ 17 &= 3(5) + 2 & n &= c_1r_1 + r_2 \\ 5 &= 2(2) + 1 & r_1 &= c_2r_2 + r_3 \\ 2 &= 2(1) + 0 & r_2 &= c_3r_3 \end{aligned}$$

observe que los coeficientes  $c_i$  representan el número de veces que hemos aplicado  $\pi_1$  ó  $\pi_2$  según corresponda. En nuestro ejemplo, como  $n < m$ , la dirección del cono tangente,  $y = 0$ , nos indica que debemos aplicar  $c_0 = 1$  vez  $\pi_1$ ,  $c_1 = 3$  veces  $\pi_2$  y por último  $c_2 = 2$  veces  $\pi_1$ , para obtener la transformada estricta regular  $\mathcal{C}_6$ . La utilidad del coeficiente  $c_3 = 2$  la veremos en el siguiente capítulo, cuando hablemos de cruzamientos normales.

En general, el algoritmo de Euclides nos muestra la secuencia de aplicaciones básicas que debe realizarse para obtener una transformada estricta regular de una curva  $\mathcal{C}$  de la forma  $y^n - x^m = 0$ . Esto es, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $(m, n) = 1$ , es decir  $m$  y  $n$  son primos relativos y  $m > n$ , aplicamos el **algoritmo de Euclides** para los enteros  $m, n$ :

$$\begin{aligned} m &= c_0(n) + r_1, & 0 &\leq r_1 < n \\ n &= c_1(r_1) + r_2, & 0 &\leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= c_2(r_2) + r_3, & 0 &\leq r_3 < r_2 \\ r_2 &= c_3(r_3) + r_4, & 0 &\leq r_4 < r_3 \\ &\vdots & &\vdots \\ r_{i-1} &= c_i(r_i) + r_{i+1}, & 0 &\leq r_{i+1} < r_i \\ &\vdots & &\vdots \\ r_{N-2} &= c_{N-1}(r_{N-1}) + r_N, & 0 &\leq r_N < r_{N-1} \\ r_{N-1} &= c_N(r_N) + 0 \end{aligned}$$

donde  $r_N = 1$  es el MCD de  $m$  y  $n$ ,  $N$  es llamado longitud del algoritmo de Euclides; los coeficientes  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{N-1}$  indican el número de veces que deben usarse las aplicaciones  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , en forma alternada para obtener una transformada

estricta regular de  $\mathcal{C}$ . Caso contrario, si  $(m, n) = \delta$  consideramos  $m' = \frac{m}{\delta}, n' = \frac{n}{\delta}$  y aplicamos el algoritmo de Euclides para  $m', n'$ .

Supongamos por un instante que  $N = 2$  ( $r_2 = 1$ , pues  $(m, n) = 1$ ), entonces

$$m = c_0 n + r_1$$

$$n = c_1 r_1 + r_2$$

$$r_1 = c_2 r_2 + 0$$

. Como  $m > n$ , entonces aplicamos  $c_0$ -veces la aplicación  $\pi_1$ . Así, tras  $c_0$  transformaciones cuadráticas, siguiendo la dirección del cono tangente  $y = 0$ , pues  $m > n$ , se crea la cadena,  $\mathfrak{C}_0$  de componentes del divisor excepcional,  $E_1, E_2, \dots, E_{c_0}$  tales que la transformada estricta de  $\mathcal{C}$  está dada por  $\mathcal{C}_0 : y^n - x^{r_1} = 0$

$$\begin{aligned} \underbrace{(\pi_1 \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_1)^*}_{c_0\text{-veces}}(\mathcal{C}) &= (x^{c_0} y)^n - x^m \\ &= x^{c_0 n} y^n - x^m \\ &= x^{c_0 n} (y^n - x^{m-c_0 n}) \\ &= x^{c_0 n} (y^n - x^{r_1}) \end{aligned}$$

Ahora, como  $n > r_1$ , aplicamos  $c_1$ -veces la aplicación  $\pi_2$ . Así, tras  $c_1$  transformaciones cuadráticas, siguiendo la dirección del cono tangente  $x = 0$ , se obtiene la cadena  $\mathfrak{C}_1$ , de componentes del divisor excepcional  $E_{c_0+1}, E_{c_0+2}, \dots, E_{c_0+c_1}$  tales que la transformada estricta de  $\mathcal{C}_0$  está dada por  $\mathcal{C}_1 : y - x^{r_1} = 0$  la cual, como podemos observar, es regular (tangente o transversal al divisor excepcional)

$$\begin{aligned} \underbrace{(\pi_2 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_2)^*}_{c_1\text{-veces}}(\mathcal{C}) &= y^n - (xy^{c_1})^{r_1} \\ &= y^{c_1 r_1} (y^{n-c_1 r_1} - x^{r_1}) \\ &= y^{c_1 r_1} (y^{r_2} - x^{r_1}) \\ &= y^{c_1 r_1} (y - x^{r_1}) \end{aligned}$$

ya que  $r_2 = 1$ .

Supongamos ahora que  $N > 2$ , el algoritmo de Euclides sugiere que apliquemos  $c_0$ -veces la explosión básica  $\pi_1$  :

$$\underbrace{(\pi_1 \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_1)}_{c_0\text{-veces}}(x, y) = (x, x^{c_0} y),$$

del cual se tiene como transformado total de  $\mathcal{C}$ ,

$$x^{c_0 n}(y^n - x^{r_1}) = 0$$

El transformado estricto de  $\pi_1$ , está dado por  $\mathcal{C}_0 : y^n - x^{r_1} = 0$ . Como  $n > r_1$ , el cono tangente de  $\mathcal{C}_0$  está dado por  $x = 0$ , luego es conveniente aplicar  $c_1$ -veces la explosión básica  $\pi_2$ ,

$$\underbrace{(\pi_2 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_2)}_{c_1\text{-veces}}(x, y) = (xy^{c_1}, y)$$

La transformada total de  $\mathcal{C}_0$ , está dada por

$$(\pi_2 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_2)^*(\mathcal{C}_0) : y^{c_1 r_1}(y^{r_2} - x^{r_1}) = 0$$

La transformada estricta de  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_1 : y^{r_2} - x^{r_1} = 0$ , tiene por cono tangente a  $y = 0$ . El algoritmo de Euclides sugiere aplicar  $c_2$ -veces la explosión básica  $\pi_1$ ,

$$\underbrace{(\pi_1 \circ \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_1)}_{c_2\text{-veces}}(x, y) = (x, x^{c_2}y)$$

luego, la transformada total de  $\mathcal{C}_1$  está dada por

$$(\pi_1 \circ \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_1)^*(\mathcal{C}_1) : x^{c_2 r_2}(y^{r_2} - x^{r_3}) = 0$$

con transformada estricta  $\mathcal{C}_2 : y^{r_2} - x^{r_3} = 0$ . Continuando análogamente y suponiendo que  $N$  es impar, en la última etapa, tras  $c_{N-1}$ -veces la aplicación  $\pi_1$ , obtenemos como transformada estricta la curva regular  $y^{r_{N-1}} - x = 0$  (respectivamente  $y - x^{r_{N-1}} = 0$ , si  $N$  es par).

En consecuencia, tenemos el siguiente resultado

**Lema 2.4.** *Tras la secuencia de  $\sum_{i=0}^{N-1} c_i$  explosiones básicas, la transformada estricta de la curva  $y^n - x^m = 0$  no presenta singularidades. Además, su transformada estricta es tangente a una componente del divisor excepcional  $\mathcal{D}$  o transversal en una esquina (intersección de dos componentes del divisor excepcional),*

$$\mathcal{D} = \cup_{i=1}^{c_0 + \cdots + c_{N-1}} E_i$$

Hasta el momento hemos conseguido que tras un número finito de explosiones básicas, la transformada estricta de la curva  $\mathcal{C} : y^n - x^m = 0$  sea regular. En

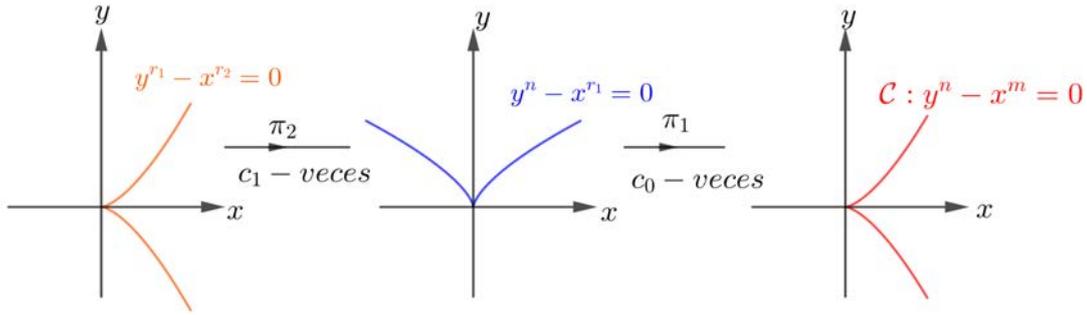


Figura 2.8: Transformadas estrictas

muchos estudios, es más factible tener una resolución estándar de singularidades, en el sentido de que la transformada estricta sea de cruzamientos normales con el divisor excepcional  $\mathcal{D}$ , en otras palabras que el transformado estricto sea transversal al lugar excepcional. En la siguiente sección nos ocuparemos de este tema.

La resolución de singularidades o desingularización puede ser considerada como una parametrización de variedades en general. A continuación presentamos dos ejemplos sencillos de resolución de singularidades de superficies.

**Ejemplo 2.5.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie dada por  $f(x, y, z) = y^2 - x^2(x + z^2) = 0$ . Estamos interesados en identificar su lugar singular y analizar su desingularización.

Consideremos la sección  $z = a$ ,  $a \neq 0$ . En este caso  $S|_{z=a} : y^2 = x^2(x + a^2)$ , cuyo lugar geométrico representa una  $\alpha$ -curva que cruza el eje  $x$  en  $(-a^2, 0)$  y  $(0, 0)$ . Si tomamos la sección  $a = 0$ , obtenemos la cúspide  $y^2 = x^3$ . La sección  $y = 0$  es la parábola  $x = -z^2$  junto con el eje  $z$ . Observe que el lugar singular de  $S$  es el eje  $z$  y la multiplicidad a lo largo de esta es constante igual a 2. Esto último, en el lenguaje de la resolución de variedades, es conocido como centro permitido de explosión.

Consideremos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \pi_1 \times Id : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X, Y, Z) &\longmapsto (x, y, z) := (X, XY, Z), \end{aligned}$$

entonces el pull back de  $S$  vía  $\pi_1 \times Id$  es  $X^2(Y^2 - (X + Z^2)) = 0$  es una superficie suave definida por  $\bar{S} := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : Y^2 = X + Z^2\}$ , junto con  $X^2 = 0$ , este último es el plano coordenado  $YZ$  (contado 2 veces). Intuitivamente se puede ver a  $\mathbb{R}^3$  como un libro, donde cada página se obtiene haciendo  $z = \text{constante}$ , y aplicando

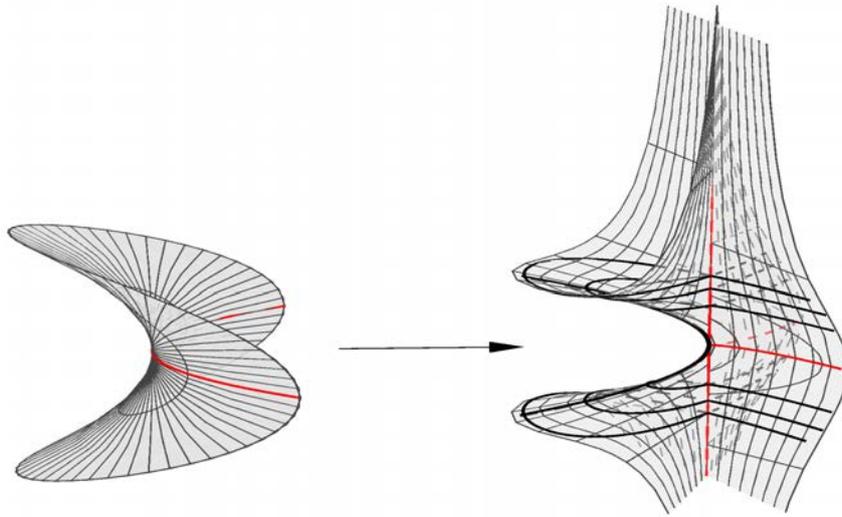


Figura 2.9: Explosión de  $S : y^2 - x^2(x + z^2) = 0$  con centro el eje  $z$ .

$\pi_1$  en cada una de ellas, para ver las explosiones resultantes. En el nuevo libro que se obtiene, la transformada estricta  $\bar{S}$  regular (sin singularidades), ver Figura 2.9.

**Ejemplo 2.6.** Considere la superficie  $S$  descrita por  $f(x, y, z) = z^2 - xy$ .

Se trata de un cono con lugar singular el origen de coordenadas. En este caso el centro permitido de explosión es  $(0, 0, 0)$ . Para proceder a la resolución de singularidades consideramos las siguientes aplicaciones (explosiones básicas con centro permitido el origen de coordenadas)

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X, Y, Z) &\longmapsto (x, y, z) := (X, XY, XZ). \end{aligned}$$

El pull back de  $S$  por  $\pi_1$  es  $X^2(Z^2 - Y) = 0$ , cuyo lugar geométrico es  $\bar{S}_1 : Z^2 - Y = 0$  (transformado estricto), junto con  $X^2 = 0$  (plano  $YZ$  contado 2 veces). Ahora

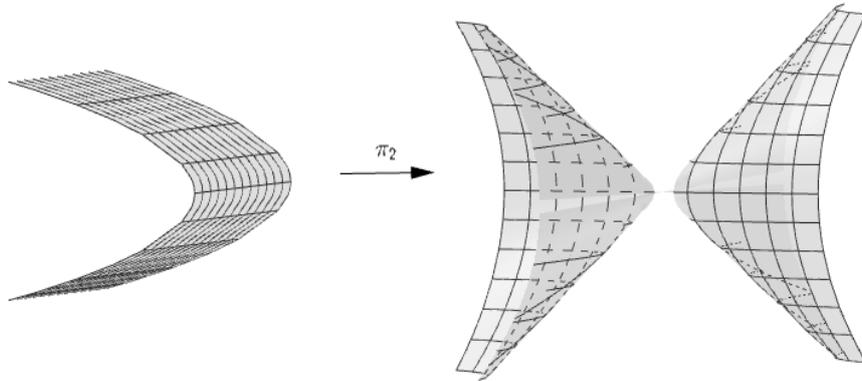


Figura 2.10: Explosión básica de  $S : z^2 - xy = 0$ .

consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_2 : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X, Y, Z) &\longmapsto (x, y, z) := (XY, Y, YZ), \end{aligned}$$

la transformada total de  $S$  está formada por  $Y^2(Z^2 - X) = 0$ , es decir, la superficie  $\bar{S}_2 : Z^2 - X = 0$  (transformada estricta) junto con  $Y^2 = 0$  (plano  $XZ$  contado 2 veces).

Considerando ahora la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_3 : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X, Y, Z) &\longmapsto (x, y, z) := (XZ, YZ, Z) \end{aligned}$$

la transformada total de  $S$  está dada por la superficie  $\bar{S}_3 : 1 - XY = 0$  (transformada estricta) junto con  $Z^2 = 0$  (plano  $XY$  (contado 2 veces).

En este caso  $\pi : \pi_1 \sqcup \pi_2 \sqcup \pi_3$ . Como podemos observar, la transformada estricta de  $S$  por cada  $\pi_i$ , en cada carta coordenada, resulta ser una superficie regular.

Es natural preguntarse si después de un número finito de explosiones básicas siempre es posible obtener, como transformada estricta una variedad regular. Esta respuesta fue dada por H. Hironaka [10], quien demostró la resolución de singularidades de variedades en general en característica cero. Nuestro objetivo en esta tesis no es exponer la prueba de la existencia de dicha resolución, sino más bien, preentar ejemplos y resultados básicos el método de resolución de singularidades que permita entender este proceso, poniendo énfasis más en la resolución de curvas.



## 2.2. Cruzamientos Normales

La noción de cruzamientos normales está basado en un cambio de variables, o en el Teorema de la Función Inversa (TFI) en varias variables, pues se debe garantizar el comportamiento local de una función analítica. Presentamos los siguientes ejemplos, sea la curva  $\mathcal{C}$  definida por  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $\mathcal{C}$  está formada por dos rectas que pasan por el origen. Consideremos el cambio de variables

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow T(x, y) = (x + y, x - y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Observe que  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(0, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ . El Teorema de la función inversa garantiza la existencia de entornos  $U, V$  del origen tales que

$$T^{-1} : V \longrightarrow U$$

$$(u, v) \longrightarrow T^{-1}(u, v) = \left( \frac{1}{2}(u + v), \frac{1}{2}(u - v) \right)$$

transforma  $f$  en  $g(u, v) = f \circ T^{-1}(u, v) = f(T^{-1}(u, v)) = uv$ , cuyo lugar geométrico coincide con los nuevos ejes coordenados.

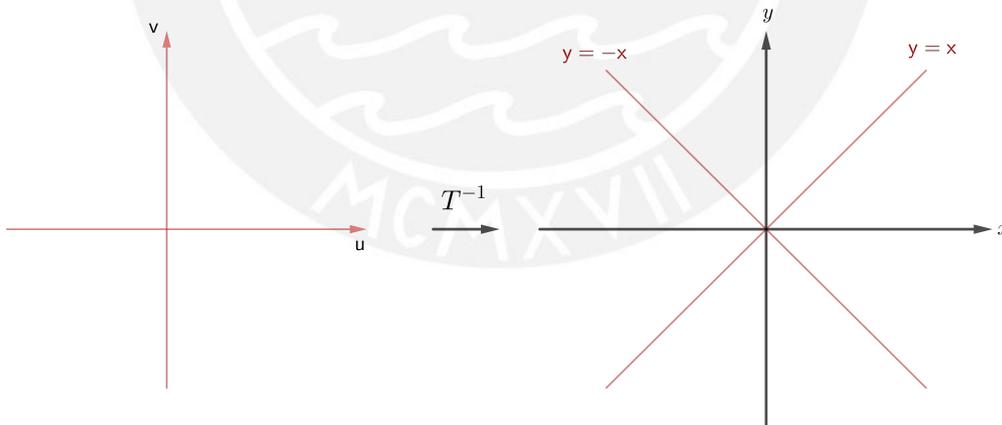


Figura 2.11: Cambio de variables

Otro ejemplo, sea la función  $h(x, y) = (2x - y^3)^2(x + y - x^3)$  cuyo lugar geométrico son dos curvas transversales en el origen. En este caso, consideramos el siguiente cambio de variables.

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow G(x, y) = (2x - y^3, x + y - x^3) = (u(x, y), v(x, y))$$

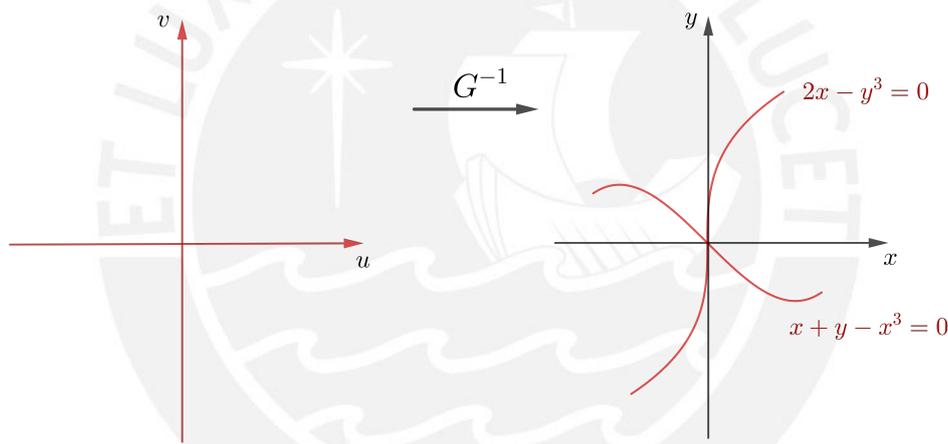
se verifica que el jacobiano es  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2 & -3y^2 \\ 1 - 3x^2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3y^2 - 9x^2y^2$ , y

$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(0, 0) = 2 \neq 0$ . El Teorema de la función inversa, garantiza la existencia de vecindades  $U, V$  del origen, tales que

$$G^{-1}: V \longrightarrow U$$

$$(u, v) \longrightarrow G^{-1}(u, v)$$

transforma  $h$  en  $g(u, v) = h \circ G^{-1}(u, v) = h(G^{-1}(u, v)) = u^2v$ , cuyo lugar geométrico coincide con los nuevos ejes coordenados en una vecindad del origen.



Geoméricamente, el lugar geométrico de  $h(x, y) = 0$  consta de dos curvas suaves que se cruzan en el origen, pero no son tangentes entre sí. En el plano  $uv$ , las curvas iniciales se han “enderezado” a los ejes de coordenadas.

En general, consideremos las funciones analíticas  $u(x, y), v(x, y)$  funciones analíticas en las variables  $(x, y)$  definidas en una vecindad de  $(0, 0)$ , con  $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$  y tal que  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(0, 0) \neq 0$ . Entonces, según el teorema de la función inversa [4], es posible obtener las funciones analíticas  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  con  $x(0, 0) = y(0, 0) = 0$ , definidas en una vecindad de  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ , digamos  $U$  y  $V$  respectivamente de manera que la aplicación sea

$$\tau: V \longrightarrow U$$

$$(u, v) \longrightarrow \tau(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

un isomorfismo analítico. Llamaremos a  $\tau$  **transformación analítica local de coordenadas**. Los ejemplos anteriores sugieren la siguiente definición de cruzamiento normal.

**Definición 2.7.** Sea  $f$  una función analítica definida en una vecindad del origen,  $U$ , con  $f(0,0) = 0$ . Decimos que  $f$  es de **cruzamiento normal en el origen** si existe una transformación analítica de coordenadas  $\tau$  tal que

$$(f \circ \tau)(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) = \epsilon(u, v)u^m v^n, \quad m, n \in \mathbb{Z}_0^+, \epsilon(0, 0) \neq 0, \quad (2.3)$$

donde  $\epsilon$  está definida y es analítica en un entorno de  $(0, 0)$ .

Sea  $p := (a, b) \neq (0, 0)$  tal que  $f(a, b) = 0$ . Decimos que  $f$  es de **cruzamiento normal en  $p$**  si, la función traslación  $f(\bar{x} + a, \bar{y} + b)$  es de cruzamiento normal en el nuevo origen  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ .

Decimos que la función  $f$  es de **cruzamiento normal** si lo es en cada punto  $(a, b)$  tal que  $f(a, b) = 0$ .

**Observación 2.8.** En la Definición 2.7 se tiene:

1. los exponentes  $m, n$  no pueden ser ambos iguales a cero. Sin embargo está permitido que uno de ellos sea cero, en este caso, el lugar geométrico de  $f(x, y) = 0$  consiste de una sola curva regular, el cual es una recta que coincide con uno de los ejes coordenados (contado  $n$  veces, si  $m = 0$ ). A este fenómeno aún se le llama cruzamiento normal.
2. si  $\epsilon(0, 0) > 0$  y  $m \geq 1$ , entonces con el siguiente cambio de coordenadas

$$\eta(u, v) = (u \sqrt[m]{\epsilon}, v) = (\bar{u}, \bar{v})$$

cuya inversa es

$$\eta^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) = \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt[m]{\epsilon}}, \bar{v} \right) = (u, v)$$

obtenemos,  $(f \circ \tau \circ \eta^{-1})(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u}^m \bar{v}^n$ .

3. si  $\epsilon(0, 0) < 0$  y además o bien  $m$  o bien  $n$  es impar,  $f$  aún puede ser transformada en  $(f \circ \tau)(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u}^m \bar{v}^n$ . Pero si ambos,  $m, n$ , son pares,  $f$  únicamente se puede transformar en  $(f \circ \tau)(\bar{u}, \bar{v}) = -\bar{u}^m \bar{v}^n$ .

De lo anterior, podemos decir que una curva  $\mathcal{C}$ , definida por  $f(x, y) = 0$  está en cruzamiento normal en el punto  $p$  si localmente en  $p$  existen coordenadas  $(u, v)$  tal que  $\mathcal{C}$  está dada por  $uv = 0$

**Definición 2.9.** Sean  $f$  una función analítica y  $p := (a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Decimos que  $p$  es un punto *no singular* de  $f$  si

$$(f_x(a, b), f_y(a, b)) \neq (0, 0)$$

**Lema 2.10.** Toda función analítica  $f$  es de cruzamiento normal en cualquier punto no singular de  $f$ .

*Demostración.* Sea  $p = (a, b)$  un punto no singular de  $f$  entonces, por definición, o bien  $f_x(p) \neq 0$  o bien  $f_y(p) \neq 0$ . Supongamos que  $f_y(p) \neq 0$  entonces, por el Teorema de la función implícita, existen vecindades  $U_p$  y  $I$  de  $p$  y  $a$  respectivamente, y una función analítica  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que en  $U_p$  se tiene

$$\{(x, y) : \text{soluciones de } f(x, y) = 0\} = \{(x, y) : y = g(x), x \in I\},$$

siendo  $y(a) = g(a) = b$ . Es decir, existen coordenadas analíticas  $(x, y)$  entorno del punto  $p$  en las cuales el gráfico de  $f$  coincide con el gráfico de la función  $y = g(x)$ . Y por lo tanto existe una transformación analítica  $\tau$

$$\tau : V_{\mathbf{0}} \rightarrow U_p,$$

tal que  $(f \circ \tau)(u, v) = v = y - g(x)$ . □

Por el contrario, alrededor de los puntos singulares es posible que no ocurran cruzamientos normales. El siguiente ejemplo ilustra una función  $f$  que no presenta cruzamiento normal en su singularidad.

**Ejemplo 2.11.** Si consideramos el lugar geométrico descrito por  $f(x, y) = y(x^2 - y^2)$ , este consiste de 3 rectas,  $y = 0, y = x, y = -x$ . El origen  $(0, 0)$  es la única singularidad. Una transformación de coordenadas, al ser un homeomorfismo, nunca puede convertirla en dos líneas coordenadas. Por lo tanto  $f$  no es de cruzamiento normal.

A continuación presentamos algunos ejemplos en las que  $f$  es de cruzamientos normales en sus puntos singulares.

**Ejemplo 2.12.** La curva  $\mathcal{C} : f(x, y) = xy$ , tiene como punto singular al origen. Observe que, por definición,  $f$  está en cruzamiento normal.

**Ejemplo 2.13.** Consideremos la función  $g(x, y) = x^2$ . Cualquier punto de la forma  $(0, b)$  es un punto singular sin embargo, se tiene que  $g$  es de cruzamiento normal entorno de cualquier punto  $(0, b)$ .

**Ejemplo 2.14.** Consideremos la función  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , observe que  $f$  tiene a  $(0, 0)$  como único punto singular. Como ya se ha visto anteriormente (ver Figura 2.2)  $f$  es de cruzamiento normal en el origen, además, por el Lema 2.10 también lo es en cualquier otro punto.

**Ejemplo 2.15.** El lugar geométrico de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , en  $\mathbb{R}^2$  consiste únicamente del origen  $(0, 0)$ , por lo tanto no es de cruzamiento normal. Pero como función compleja se puede escribir como  $f(x, y) = (y + ix)(y - ix)$ , la cual es de cruzamiento normal en el origen de  $\mathbb{C}^2$ .

*En el contexto de las funciones, ser de cruzamiento normal representa el tipo más simple posible de singularidades.* Esto se debe a que la propiedad de cruzamiento normal no puede mejorarse mediante explosiones. Es decir, después de la explosión básica  $\pi_i$ , la transformada estricta de  $f$  sigue siendo de cruzamiento normal. Ilustramos esto con el Ejemplo 2.14, si aplicamos la explosión básica  $\pi_1$ , la transformación total está dada por  $(f \circ \pi_1)(X, Y) = X^2(1 - Y^2)$ , lo que significa que  $f$  es de cruzamiento normal en los puntos  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$ . Esto nos indica que cualquier explosión simplemente incrementa el número de puntos en los que la función es de cruzamiento normal. Observe que no se ha logrado ninguna mejora con  $\pi_1$ ; cualquier otra explosión simplemente aumentaría el número de puntos en las que se tiene cruzamiento normal. Este fenómeno persiste en general.

Por otro lado, si consideramos el Ejemplo 2.11, el cual no es de cruzamiento normal en  $(0, 0)$ , la transformada total por la explosión básica  $\pi_1$  es  $(f \circ \pi_1)(X, Y) = X^3Y(1 - Y^2)$ , presentando cruzamientos normales en los puntos  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(0, -1)$ . Observe que se ha mejorado el punto singular, ampliándolo a tres puntos de cruzamiento normal.

**Ejemplo 2.16.** En el Ejemplo 2.2, la transformada estricta de la curva,  $\mathcal{C}_6$ , es regular tras la composición de explosiones básicas  $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_2 \circ \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi_1$ . Observe que tal transformada estricta no es de cruzamiento normal. Del Algoritmo de Euclides, calculamos los coeficientes correspondientes,  $c_i$ , que representan el número de veces que hemos aplicado  $\pi_1$  ó  $\pi_2$  según corresponda, es decir aplicar  $c_0 = 1$  vez  $\pi_1$ ,  $c_1 = 3$  veces  $\pi_2$  y por último  $c_2 = 2$  veces  $\pi_1$ , para obtener la transformada estricta regular  $\mathcal{C}_6$ . Ahora nos ocuparemos del último coeficiente  $c_3 = 2$ , el cual nos dice que debemos aplicar 2 veces  $\pi_2$ , con el propósito de obtener cruzamiento normal.

La transformada estricta  $\mathcal{C}_6 : y_6^2 - x_6 = 0$  es una curva regular en el  $x_6y_6$ -plano. Aplicando  $\pi_2$ , tenemos  $y_7^2 - x_7y_7 = 0$ , cuyo lugar geométrico es la curva  $\mathcal{C}_7 : y_7 - x_7 =$

0, junto con el divisor excepcional  $E_7 : y_7 = 0$ . Finalmente, con el fin de obtener cruzamiento normal, aplicamos  $\pi_2$ , resultando  $y_8(1 - x_8) = 0$  esto es  $x_8 = 1$ , y el divisor excepcional  $E_8 : y_8 = 0$ .

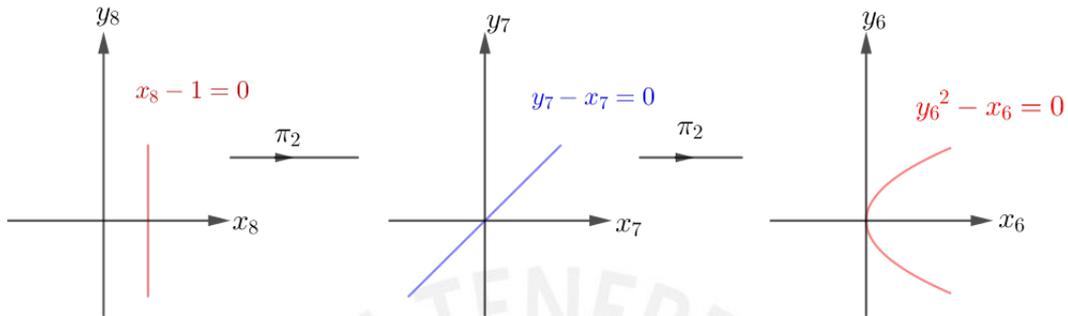


Figura 2.12: Cruzamiento normal de  $\mathcal{C} : y^{17} - x^{22} = 0$

Con la definición de cruzamiento normal, se tiene la noción estándar de desingularización de una curva:

Para la curva  $\mathcal{C}$  localmente dada por  $f(x, y) = 0$ , se define la resolución de  $\mathcal{C}$  como el morfismo propio  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que:

1. el divisor excepcional es

$$E = \pi^{-1}(\mathbf{0}) = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_r$$

2. la transformada estricta de  $\mathcal{C}$

$$\tilde{\mathcal{C}} = \overline{\pi^{-1}(\mathcal{C} \setminus \text{sing}(\mathcal{C}))},$$

es una curva regular,

3. la restricción  $\pi : M \setminus \pi^{-1}(\text{sing}(\mathcal{C})) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \text{sing}(\mathcal{C})$  es un isomorfismo y,

4.  $\tilde{\mathcal{C}}$  está en cruzamiento normal con el divisor excepcional  $E$

La condición 4 es lo mismo que la familia  $\{\tilde{\mathcal{C}}, E_1, E_2, \dots, E_r\}$  está en cruzamiento normal. Esto significa que para cualquier punto  $p \in E = \pi^{-1}(\text{sing}(\mathcal{C}))$ , existe un sistema local de coordenadas tal que las variedades de la familia  $\{\tilde{\mathcal{C}}, E_1, E_2, \dots, E_r\}$  que contengan a  $p$  son subespacios lineales en posición general, es decir, las funciones que aparecen dentro de las ecuaciones locales de las variedades de la familia que

contienen a  $p$  forman un sistema local de coordenadas o pueden ser completadas para formar tal sistema de coordenadas.

La comprensión de esta definición se facilita mediante ejemplos sencillos que hemos abarcado hasta ahora. En este trabajo, uno de nuestros objetivos es definir y comprender la resolución de singularidades de una curva  $\mathcal{C}$ , localmente representada por una función analítica  $f(x, y) = \sum_{i+j \geq 0} a_{ij}x^i y^j = 0$ . Nos ocuparemos de este tema en las próximas secciones.

Es relevante destacar que el problema de la desingularización para superficies algebraicas, es considerablemente más complejo en comparación al caso de curvas planas. Además, es más, aunque existe una resolución de singularidades para superficies, esta no es única. En 1964 Heisuke Hironaka proporciona una demostración de la existencia de la resolución de singularidades de superficies aunque no establece un algoritmo de resolución. En 1989, Orlando Villamayor desarrolla un método que establece que las explosiones de una superficie singular generan una superficie regular. Así, para una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  localmente dada en coordenadas  $(x, y, z)$  por  $f(x, y, z) = 0$ , se definen **una** resolución inmersa de  $S$  como el morfismo propio  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$  tal que  $\tilde{S}$  es una superficie lisa y está en cruzamientos normales con **divisor excepcional**  $E = \pi^{-1}(0) = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_r$ .

### 2.3. La propiedad de levantamiento arco analítico

Considere  $\epsilon > 0$ , suficientemente pequeño y tome las series de potencias

$$x(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i, \quad y(t) = b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i t^i, \quad |t| < \epsilon.$$

Definimos la **aplicación arco analítica en  $\mathbb{R}^2$  con punto inicial  $(a_0, b_0)$** , como

$$\begin{aligned} \lambda : ] - \epsilon, \epsilon[ &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

**Definición 2.17.** Sean  $X, Y$  dos variedades analíticas reales e  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo. Diremos que una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  tiene la **propiedad de levantamiento arco analítico** si para cualquier aplicación arco analítica  $\lambda : I \rightarrow Y$  existe una aplicación  $\mu : I \rightarrow X$  tal que  $f \circ \mu = \lambda$

**Observación 2.18.** Sea  $\lambda$  una aplicación arco analítica con punto inicial  $(a_0, b_0)$  definida por

$$\lambda(t) = (x(t), y(t)) = (a_0 + a_n t^n + \dots, b_0 + b_m t^m + \dots); \quad a_n \neq 0, b_m \neq 0.$$

Observe que la ecuación de la recta tangente a la trayectoria de  $\lambda$  en el punto  $(a_0, b_0)$ , está dada por

$$L : y = b_0 + m(x - a_0),$$

donde

$$m = \frac{y'(0)}{x'(0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{y(t)-y(0)}{t}}{\frac{x(t)-x(0)}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{b_m t^m + b_{m+1} t^{m+1} + \dots}{a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \dots} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{m-n} \left( \frac{b_m + b_{m+1} t + \dots}{a_n + a_{n+1} t + \dots} \right).$$

Así,  $L$  está dada por:

- $y = b_0$ , si  $n < m$  y
- $y = \frac{b_m}{a_n}(x - a_0) + b_0$ , si  $n = m$

El siguiente resultado nos dice que las explosiones básicas tienen la propiedad de levantamiento arco analítico.

**Lema 2.19.** *Sea  $\lambda$  una aplicación arco analítica en  $(0, 0)$  que no es tangente al eje  $y$ . Entonces existe  $\epsilon'$ ,  $0 < \epsilon' \leq \epsilon$ , y una única aplicación arco analítica  $\mu$ , en el  $XY$ -plano tal que  $(\pi_1 \circ \mu)(t) = \lambda(t)$ ,  $|t| < \epsilon'$ . El punto inicial de  $\mu$  está sobre el eje  $Y$ , y es determinado por la recta tangente de  $\lambda$  en  $(0, 0)$ .*

*Demostración.* Por hipótesis  $\lambda(t) = (a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \dots, b_m t^m + b_{m+1} t^{m+1} + \dots)$  con  $a_n, b_m \neq 0$  y  $n \leq m$ .

Consideremos la explosión básica  $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , y la aplicación  $\mu : ]-\epsilon', \epsilon'[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\mu(t) = (X(t), Y(t)) = \left( t^{m-n} \cdot x(t), t^{n-m} \cdot \frac{y(t)}{x(t)} \right),$$

$t^{n-m} \frac{y(t)}{x(t)} = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i t^i$ , con  $c_0 = \frac{b_m}{a_n}$  y  $\epsilon' = \min\{\epsilon, r_0\}$ ;  $r_0$  es cero de  $x(t)$  más cercano a 0. Claramente  $\mu$  es una aplicación arco analítica en el  $XY$ -plano con punto inicial  $\left(0, \frac{b_m}{a_n}\right)$ . Además

$$\pi_1 \circ \mu(t) = \pi_1 \left( t^{m-n} \cdot x(t), t^{n-m} \cdot \frac{y(t)}{x(t)} \right) = \lambda(t).$$

Supongamos ahora que existe otra aplicación arco analítica, en el plano  $XY$ ,

$$\tilde{\mu} : ] - \epsilon', \epsilon'[ \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

tal que

$$(\pi_1 \circ \tilde{\mu})(t) = \lambda(t), \quad |t| \leq \epsilon' \leq \epsilon,$$

y con las mismas propiedades que  $\mu$ . Se tiene

$$\pi_1 \circ \tilde{\mu}(t) = \pi_1 \circ \mu(t), \quad \forall |t| \leq \epsilon'.$$

Luego necesariamente  $\mu = \tilde{\mu}$ . □

**Observación 2.20.** Si  $\lambda$  no es tangente a ningún eje coordenada, este puede ser levantado por ambas aplicaciones  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

Si el punto inicial de  $\lambda$  no es  $(0, 0)$ , y  $\pi_1((A, B)) = \lambda(0)$ , entonces un levantamiento analítico de  $\lambda$ , con punto inicial  $(A; B)$ , trivialmente existe, puesto que  $\pi_1$  es una biyección analítica del lugar excepcional.

**Observación 2.21.** Del Lema 2.19, se sigue que la composición de explosiones básicas tienen la propiedad de levantamiento analítico.

## 2.4. Explosión local y Uniformización local

La mejor manera de definir la explosión y la explosión local es utilizando la noción de fibrado lineal canónico y la de variedad analítica, esto será formalmente descrito en el siguiente capítulo. Dada la naturaleza de este trabajo de tesis, primero vamos a exponer el significado de las definiciones en términos de sistemas de coordenadas, puesto que para hacer cálculos en ejemplos concretos es necesario usar sistemas de coordenadas.

La uniformización local de funciones analíticas es una herramienta fundamental en la teoría de la desingularización, y permite construir transformaciones birracionales y modelos locales que son esenciales para el estudio de variedades algebraicas singulares y otros objetos matemáticos más complejos. En concreto, se ocupa de estudiar cómo “alisar” variedades algebraicas singulares mediante transformaciones birracionales y otra técnicas.

Consideremos  $\pi_1, \pi_2$  (ver Sección 2.1) las explosiones básicas, y sea  $P = (a, b)$  un punto de  $\mathbb{R}^2$ . Sin abusar de la notación podemos denotar como  $\pi_1$  para describir la aplicación:

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) &\longmapsto (x, y) := (a + X, b + XY) \end{aligned}$$

que envía cualquier rectángulo centrado en  $P(a, b)$ , con vértices  $(a \pm c', b \pm c)$  a un sector con vértice  $P$ , alrededor de la recta  $y = b$ . De la misma manera, usemos la notación  $\pi_2$  para describir la aplicación:

$$\begin{aligned} \pi_2 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\bar{X}, \bar{Y}) &\longmapsto (x, y) := (a + \bar{X} \bar{Y}, b + \bar{Y}) \end{aligned}$$

que envía cualquier rectángulo centrado en  $P(a, b)$ , con vértices  $(a \pm c', b \pm c)$  a un sector con vértice  $P(a, b)$  alrededor de la recta  $x = a$ . A partir de aquí, cuando hablemos de **explosión básica con centro en el punto**  $P = (a, b)$ , nos estamos refiriendo a  $\pi_1$  ó  $\pi_2$  definidas anteriormente. Tener en cuenta que, la definición está ligada al sistema de coordenadas elegido, en el espacio de partida y de llegada. Geométricamente,  $\pi_1$  y  $\pi_2$  en  $P = (a, b)$  se ve como las Figuras 2.2 y 2.5 pero trasladadas al punto  $P = (a, b)$ .

**Definición 2.22.** Sea una sucesión de  $N$  puntos  $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_N, B_N)$  y una composición de  $N$  aplicaciones

$$\Pi : \beta_1 \circ \dots \circ \beta_N : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\beta_N} \dots \xrightarrow{\beta_1} \mathbb{R}^2$$

donde cada  $\beta_i$  es una explosión básica (o bien  $\pi_1$  o bien  $\pi_2$ ) con centro  $(A_i, B_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Llamamos a  $\Pi$  **explosión local de  $\mathbb{R}^2$  con centro**  $(A_1, B_1)$ .

**Ejemplo 2.23.** En el Ejemplo 2.1,  $\Pi = \pi_2 \circ \pi_2$ , representa una explosión local de  $\mathbb{R}^2$  con centro  $(0, 0)$  donde cada composición es una explosión básica con centro en  $(A_i, B_i) = (0, 0)$ .

Del mismo modo, en el Ejemplo 2.2, cualquier composición de explosiones básicas es una explosión local de  $\mathbb{R}^2$  centrado en  $(0, 0)$ .

**Definición 2.24.** Sea  $\{\Pi_1, \dots, \Pi_s\}$  un conjunto finito de explosiones locales, todas centradas en  $(0, 0)$ . Suponga que para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , existe un rectángulo compacto  $R_i$  en el espacio de partida de  $\Pi_i$  tal que  $(0, 0) \in \Pi_i(R_i)$  y la unión de las imágenes  $\bigcup_{i=1}^s \Pi_i(R_i)$  es una vecindad de  $(0, 0)$ . Diremos que la familia  $\{\Pi_1, \dots, \Pi_s\}$  es un **sistema completo** de explosiones locales.

**Definición 2.25.** Sea  $\{\Pi_1, \dots, \Pi_s\}$  un sistema completo de explosiones locales centrado en  $(0, 0)$  y sea  $f(x, y)$  una función analítica definida en un entorno de  $(0, 0)$ . Si para cada  $1 \leq i \leq s$ , la transformación total  $(f \circ \Pi_i)$  es de cruzamiento normal en una vecindad abierta  $U_i$  de  $R_i$  entonces, diremos que  $\{(\Pi_1, R_1), \dots, (\Pi_s, R_s)\}$  y también  $\{(\Pi_1, U_1), \dots, (\Pi_s, U_s)\}$  es una **uniformización local** de  $f(x, y)$ .

Intuitivamente, cada  $\Pi_i$  es un microscopio, de tal forma que cuando ponemos a todos ellos juntos, una vecindad de  $(0, 0)$  es iluminada, (sistema completo). Además  $f$  aparece con cruzamiento normal en cada microscopio.

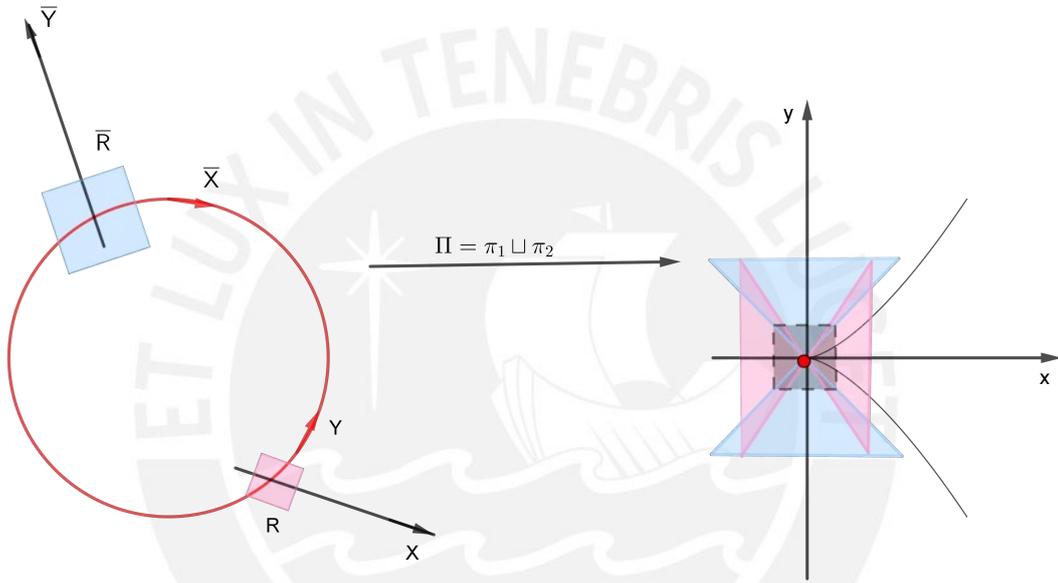


Figura 2.13: Uniformización local

**Ejemplo 2.26.** Veamos en detalle el proceso para encontrar una uniformización local de la cúspide  $g(x, y) = y^2 - x^3$ . Tomemos un rectángulo  $\bar{R}$  centrado en  $\mathbf{0}$  en el  $\bar{X}\bar{Y}$ -plano, entonces la transformada total

$$g(\pi_2(\bar{X}, \bar{Y})) = g(\bar{X}\bar{Y}, \bar{Y}) = \bar{Y}^2 - \bar{X}^3\bar{Y}^3 = \bar{Y}^2(1 - \bar{X}^3\bar{Y})$$

es de cruzamientos normales. Esto es debido a que  $\pi_2$  lleva el rectángulo seleccionado  $\bar{R}$  a un sector alrededor del eje  $y$  con lo cual no se tiene nada más por hacer pues la curva es tangente al eje  $x$ . Luego se define la explosión local  $\Pi_1 : g \circ \pi_2$  y podemos tomar  $(\pi_2, \bar{R})$  como uno de los microscopios.

Ahora, sea  $R$  un pequeño rectángulo centrado en  $\mathbf{0}$  en el plano  $XY$  y tomando un  $\bar{R}$

suficientemente grande talque  $\pi_1(R) \cup \pi_2(\overline{R})$  **contiene** una vecindad de  $\mathbf{0}$ , es decir una vecindad de  $\mathbf{0}$  es iluminada por los rectángulos  $R$  y  $\overline{R}$ .

En  $R$ , se tiene la función

$$g(\pi_1(X, Y)) = g(X, XY) = X^2Y^2 - X^3 = X^2(Y^2 - X)$$

la cual no es de cruzamientos normales, pues la transformada estricta es una parábola tangente al divisor excepcional. Para encontrar una uniformización local de  $g$ , es suficiente encontrar una de uniformización local de  $(g \circ \pi_1)$  en  $\mathbf{0}$ . Para ello elegimos  $R_1$ , un rectángulo centrado en  $\mathbf{0}$  y calculamos la transformada total

$$g(\pi_1(\pi_1(X_1, Y_1))) = g(\pi_1(X_1, X_1Y_1)) = g(X_1, X_1^2Y_1) = X_1^4Y_1^2 - X_1^3 = X_1^3(X_1Y_1^2 - 1)$$

la cual tiene cruzamientos normales. Se define la explosión local  $\Pi_2 : g \circ \pi_1 \circ \pi_1$ . Del mismo modo, elegimos  $R_2$ , rectángulo centrado en  $\mathbf{0}$  y calculamos  $g(\pi_1(\pi_2(\pi_1(X_2, Y_2)))) = g(\pi_1(\pi_2(X_2, X_2Y_2))) = g(\pi_1(X_2^2Y_2, X_2Y_2)) = g(X_2^2Y_2, X_2^3Y_2^2) = X_2^6Y_2^4 - X_2^6Y_2^3 = X_2^6Y_2^3(Y_2 - 1)$  que es de cruzamiento normal. Definimos la explosión local  $\Pi_3 : g \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ . Por último, tomemos  $R_3$ , rectángulo centrado en  $\mathbf{0}$  y observe que  $g(\pi_1(\pi_2(\pi_2(X_3, Y_3)))) = g(\pi_1(\pi_2(X_3Y_3, Y_3))) = g(\pi_1(X_3Y_3^2, Y_3)) = g(X_3Y_3^2, X_3Y_3^3) = X_3^2Y_3^6 - X_3^3Y_3^6 = X_3^2Y_3^6(1 - X_3)$  tiene cruzamientos normales. Definimos la explosión local  $\Pi_4 : g \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_2$ .

Eligiendo adecuadamente los rectángulos  $R_1, R_2$  y  $R_3$ , obtenemos una uniformización local de  $g$ :  $\{(g \circ \pi_2, \overline{R}), (g \circ \pi_1 \circ \pi_1, R_1), (g \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1, R_2), (g \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_2, R_3)\}$  o simplemente,  $\{(\Pi_1, \overline{R}), (\Pi_2, R_1), (\Pi_3, R_2), (\Pi_4, R_3)\}$

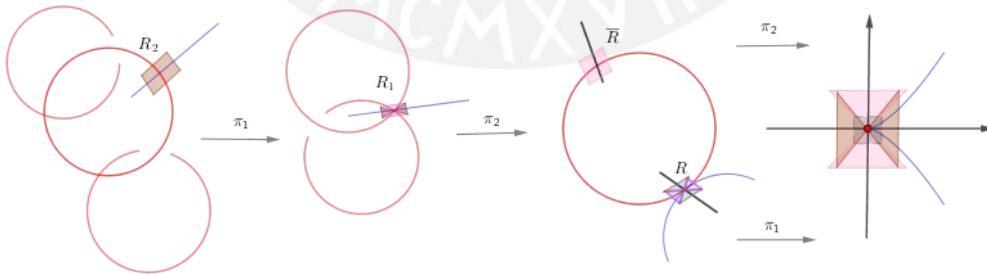


Figura 2.14:  $(g \circ \pi_2, \overline{R}), (g \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1, R_2)$

Veamos como construir una uniformización local para una función  $f$  arbitraria. Para esto, consideremos la expansión de Taylor de  $f$  en  $\mathbf{0}$ ,

$$f(x, y) = H_m(x, y) + H_{m+1}(x, y) + \cdots \quad H_m(x, y) \not\equiv 0$$

donde  $H_i(x, y)$  son formas homogéneas de grado  $i$  ( polinomios homogéneos de grado  $i$ ). El polinomio homogéneo  $H_m(x, y)$ , es llamado la **forma inicial de  $f$** . El número  $m$ , es llamado **multiplicidad** de  $f$  en  $\mathbf{0}$ , este es el primer número usado para medir la complejidad de la singularidad.

Observe que si  $m = 1$ , o bien  $f_x(0, 0) \neq 0$  o bien  $f_y(0, 0) \neq 0$ . Por el teorema de la función implícita, se sigue que  $\mathbf{0}$  es un punto no singular de  $f$ . En el caso  $m > 1$ ,  $\mathbf{0}$  es un punto singular de multiplicidad  $m$ .

Supongamos que el polinomio homogéneo  $H_m(x, y)$  se descompone en  $m$  factores lineales distintos, es decir

$$H_m(x, y) = y(y - a_1x)(y - a_2x) \cdots (y - a_{m-2}x)x, \quad a_i \neq 0, a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j$$

observe que si  $m \geq 3$ ,  $H_m(x, y)$  no es de cruzamiento normal en  $(0, 0)$ . Las líneas  $y = a_i x$  son imágenes, por  $\pi_1$ , de las rectas  $Y = a_i$  (ver Figura 2.3); y también son imagen, por  $\pi_2$ , de las líneas  $\bar{X} = \frac{1}{a_i}$  (ver Figura 2.5). Por tanto,  $(0, a_i)$  en el plano  $XY$  y  $\left(\frac{1}{a_i}, 0\right)$  en el plano  $\bar{X}\bar{Y}$  deben ser identificados. Esta identificación se realizará en la desingularización global, que veremos en el siguiente capítulo. Sin embargo, este tipo de redundancias, dos microscopios con observaciones superpuestas, está permitido en una uniformización local. Observe que  $x = 0$  es imagen, por  $\pi_2$ , de  $\bar{X} = 0$ ; y  $y = 0$  imagen por  $\pi_1$  de  $Y = 0$ .

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} f \circ \pi_1(X, Y) &= H_m(X, XY) + H_{m+1}(X, XY) + \cdots \\ &= XY(XY - a_1X)(XY - a_2X) \cdots (XY - a_{m-2}X)X + \\ &\quad XY(XY - a_1X)(XY - a_2X) \cdots (XY - a_{m-1}X)X + \cdots \\ &= X^m Y(Y - a_1)(Y - a_2) \cdots (Y - a_{m-2}) + \\ &\quad X^{m+1} Y(Y - a_1)(Y - a_2) \cdots (Y - a_{m-1}) + \cdots \\ &= X^m [Y(Y - a_1)(Y - a_2) \cdots (Y - a_{m-2}) + \\ &\quad XY(Y - a_1)(Y - a_2) \cdots (Y - a_{m-1}) + \cdots] \end{aligned}$$

$$f \circ \pi_1(X, Y) = X^m \left( Y(Y - a_1)(Y - a_2) \cdots (Y - a_{m-2}) + \sum_{i \geq m+1} X^{i-m} H_i(1, Y) \right)$$

y

$$\begin{aligned}
f \circ \pi_2(\bar{X}, \bar{Y}) &= H_m(\bar{X}\bar{Y}, \bar{Y}) + H_{m+1}(\bar{X}\bar{Y}, \bar{Y}) + \dots \\
&= \bar{Y}(\bar{Y} - a_1\bar{X}\bar{Y})(\bar{Y} - a_2\bar{X}\bar{Y}) \dots (\bar{Y} - a_{m-2}\bar{X}\bar{Y})\bar{X}\bar{Y} + \\
&\quad \bar{Y}(\bar{Y} - a_1\bar{X}\bar{Y})(\bar{Y} - a_2\bar{X}\bar{Y}) \dots (\bar{Y} - a_{m-1}\bar{X}\bar{Y})\bar{X}\bar{Y} + \dots \\
&= \bar{Y}^m \bar{X}(1 - a_1\bar{X})(1 - a_2\bar{X}) \dots (1 - a_{m-2}\bar{X}) + \\
&\quad \bar{Y}^{m+1} \bar{X}(1 - a_1\bar{X})(1 - a_2\bar{X}) \dots (1 - a_{m-1}\bar{X}) + \dots \\
&= \bar{Y}^m [\bar{X}(1 - a_1\bar{X})(1 - a_2\bar{X}) \dots (1 - a_{m-2}\bar{X}) + \\
&\quad \bar{Y}\bar{X}(1 - a_1\bar{X})(1 - a_2\bar{X}) \dots (1 - a_{m-1}\bar{X}) + \dots]
\end{aligned}$$

$$f \circ \pi_2(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{Y}^m \left( \bar{X}(1 - a_1\bar{X})(1 - a_2\bar{X}) \dots (1 - a_{m-2}\bar{X}) + \sum_{i \geq m+1} \bar{Y}^{i-m} H_i(\bar{X}, 1) \right)$$

Así, entorno del punto  $\mathbf{0}$ , en el plano  $XY$  (respectivamente en el plano  $\bar{X}\bar{Y}$ ) tenemos las expresiones locales

$$f \circ \pi_1(X, Y) = X^m Y \epsilon(X, Y), \quad \epsilon(0, 0) \neq 0.$$

$$\text{(respectivamente } f \circ \pi_2(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{Y}^m \bar{X} \delta(\bar{X}, \bar{Y}), \quad \delta(0, 0) \neq 0.$$

Análogamente, entorno de los puntos  $(0, a_i)$ , en el plano  $XY$  (respectivamente en el plano  $\bar{X}\bar{Y}$ )

$$f \circ \pi_1(u, v) = u^m v \epsilon_i(u, v), \quad \epsilon_i(0, 0) \neq 0.$$

$$\text{(respectivamente } f \circ \pi_2(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{v}^m \bar{u} \delta(\bar{u}, \bar{v}), \quad \delta_i(0, 0) \neq 0.$$

Entonces, en el plano  $XY$ , todos los puntos  $(0, 0)$ ,  $(0, a_i)$ ,  $1 \leq i \leq m-2$ , son de cruzamiento normal ( respectivamente, en el plano  $\bar{X}\bar{Y}$ ,  $(0, 0)$  y los puntos  $(\frac{1}{a_i}, 0)$ , son de cruzamiento normal). Por lo tanto  $\{(\pi_1, \mathbb{R}^2), (\pi_2, \mathbb{R}^2)\}$  es una uniformización local de  $f(x, y)$ .

De todo lo anterior, tenemos el siguiente resultado

**Proposición 2.27.** *Sea  $f(x, y)$  una función analítica de multiplicidad  $m$  en el origen, entonces la transformada total  $f \circ \pi_1$  es divisible, por lo menos, por  $X^m$ , es decir,*

$$f \circ \pi_1(X, Y) = f(X, XY) = X^m F(X, Y),$$

donde  $F$  es una serie de potencias convergente en  $X$  e  $Y$ . La serie  $F(X, Y)$  es llamada **transformada estricta** de  $f$  en el plano  $XY$ . De manera similar se tiene en el sistema de coordenadas  $(\bar{X}, \bar{Y})$ .

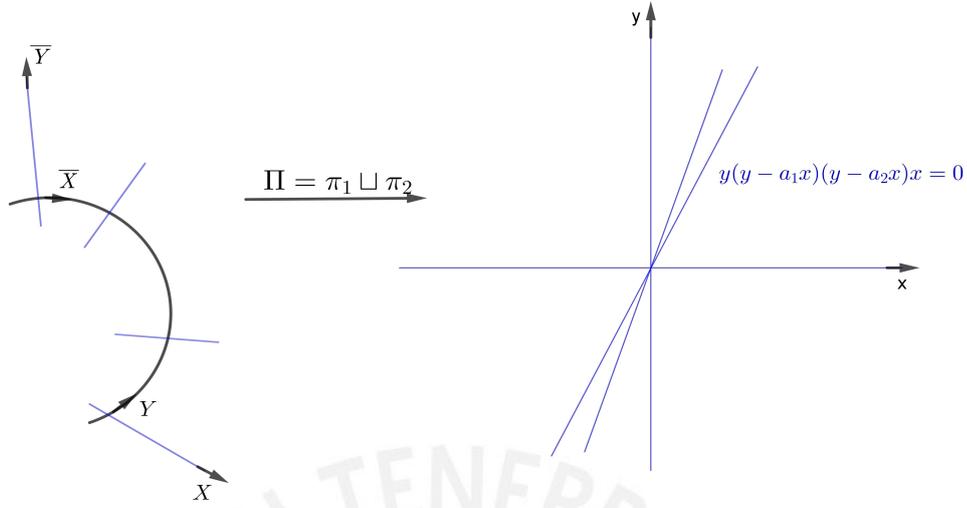


Figura 2.15: Transformada estricta de  $H_4(x, y) = y(y - a_1x)(y - a_2x)x$

Supongamos ahora que la forma inicial de  $f(x, y)$  admite la siguiente descomposición

$$H_m(x, y) = (y - a_1x)^{m_1}(y - a_2x)^{m_2} \cdots (y - a_kx)^{m_k}, \quad (2.4)$$

con  $k \geq 2$  y  $a_i \neq a_j$  si  $i \neq j$ .

Es fácil ver que la transformada estricta  $F(X, Y)$  tiene multiplicidad  $\leq m_i$  en  $(0, a_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ . En efecto, se verifica fácilmente que

$$f \circ \pi_1(X, Y) = X^{m_1+m_2+\cdots+m_k}(y - a_1)^{m_1}(y - a_2)^{m_2} \cdots (y - a_k)^{m_k}$$

$$f \circ \pi_2(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{Y}^{m_1+m_2+\cdots+m_k}(1 - a_1\bar{X})^{m_1}(1 - a_2\bar{X})^{m_2} \cdots (1 - a_k\bar{X})^{m_k}$$

Observe que cada  $m_i < m$ . Respecto a este comportamiento, diremos que cuando la forma inicial tiene al menos dos factores distintos, la multiplicidad **baja** después de una explosión. O lo mismo que el punto singular  $\mathbf{0}$  de  $f$  se divide en  $k$  puntos, cada uno con **multiplicidad menor**.

**Proposición 2.28.** *Cualquier función analítica  $f$  admite una uniformización local.*

La demostración de la Proposición 2.28, es técnicamente difícil. La prueba claramente es por inducción, ¿pero inducción sobre qué?. Ver [10].

Sabemos que después de una explosión, o bien la multiplicidad cae (ver 2.4) o bien algo más tiene que caer (ver Ejemplo 2.1). En este ejemplo, observamos que después de una explosión, la transformada estricta, a pesar de mantener la misma multiplicidad que la cúspide inicial es más simple, es decir que después de una explosión cae la complejidad de la curva.

Será entonces suficiente definir qué se entiende con *algo más* debe caer. La noción de Polígono de Newton, puede ser de mucha ayuda para esto y a continuación pasamos a describir.

## 2.5. Polígono de Newton.

Estamos interesados en los términos distintos de cero de la expansión de Taylor de  $f$ . Escribiendo  $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$ ,  $a_{ij} \neq 0$ , y dibujamos el punto en  $(i, j)$  para representar el término  $a_{ij}x^i y^j$ . Este punto es llamado punto de Newton. Para cada punto  $(i, j)$ , consideremos el siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$F(i, j) := \{(i + u, j + v) : 0 \leq u < \infty, 0 \leq v < \infty\}.$$

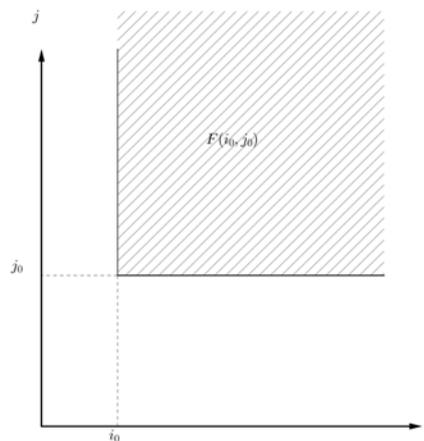


Figura 2.16: Conjunto  $F(i_0, j_0)$

**Definición 2.29.** El *polígono de Newton* de  $f(x, y) = \sum_{i+j \geq 0} a_{ij}x^i y^j$  en  $\mathbf{0}$  es la *frontera del subconjunto convexo más pequeño* de  $\mathbb{R}^2$  que contiene al conjunto  $F(i, j) \subset \mathbb{R}^2$  para todo  $(i, j), a_{ij} \neq 0$ .

Dado  $(a, b)$ , el polígono de Newton de  $f$  en  $(a, b)$  se define como el polígono de Newton de  $f \circ T$  en el origen  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ , donde  $T(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x} + a, \bar{y} + b)$ .

**Ejemplo 2.30.** Considere la función  $f(x, y) = x^2y + xy^2 - y^3 + x^3y^2 - y^5$ .

Los puntos de Newton son

$$\{(2, 1), (1, 2), (0, 3), (3, 2), (0, 5)\},$$

Para cada punto de Newton, consideramos el subconjunto  $F(i, j) \subset \mathbb{R}^2$

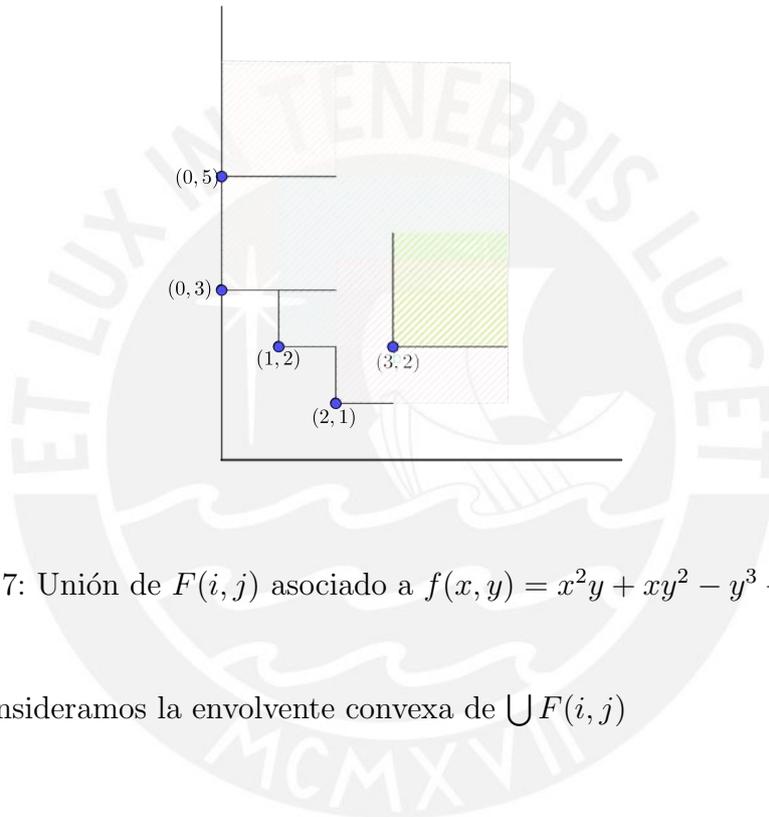


Figura 2.17: Unión de  $F(i, j)$  asociado a  $f(x, y) = x^2y + xy^2 - y^3 + x^3y^2 - y^5$

Ahora consideramos la envolvente convexa de  $\bigcup F(i, j)$

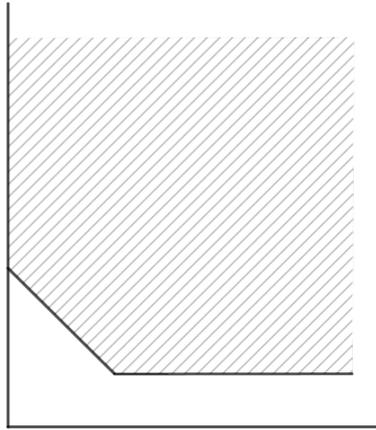


Figura 2.18: Envoltente convexa de  $\cup F(i, j)$

Luego, la frontera de este conjunto es el polígono de Newton de  $f$

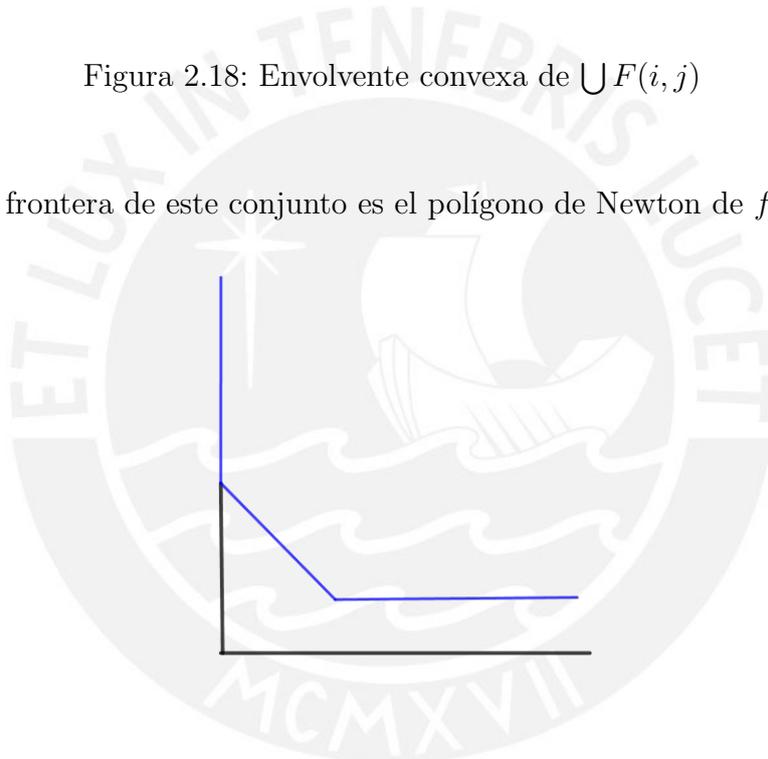


Figura 2.19: Polígono de Newton de  $f(x, y)$

**Ejemplo 2.31.** Dada la función  $f(x, y) = xy + xy^2 + x^2y^3 + x^3y + x^3y^2$  de cruzamientos normales en el origen, su polígono de Newton se muestra a continuación

**Ejemplo 2.32.** Consideremos  $g(x, y) = x^2 - y^5$ , cuyo polígono de Newton se muestra en la Figura 2.21

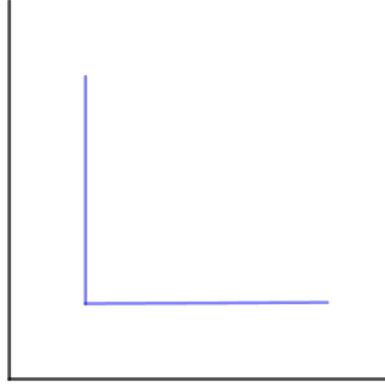


Figura 2.20: Polígono de Newton de  $f(x, y) = xy + xy^2 + x^2y^3 + x^3y + x^3y^2$

Si realizamos la reducción de singularidades de  $\mathcal{C}$  hasta obtener cruzamientos normales tenemos la siguiente secuencia de explosiones  $g \circ \pi_2 = y^2(x^2 - y^3)$ ,  $g \circ \pi_2 \circ \pi_2 = y^4(y - x^2)$ ,  $g \circ \pi_2 \circ \pi_2 \circ \pi_1 = x^5y^4(y - x)$ ,  $g \circ \pi_2 \circ \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi_1 = x^{10}y^4(y - 1)$  cuyos polígonos de Newton se presentan a continuación

Como hemos podido notar, geoméricamente, una uniformización local equivale a descomponer una vecindad de  $\mathbf{0}$  en una unión de dominios en forma de cuernos, en cada uno de los cuales  $f$  es parametrizada. (cada  $\Pi_i(R_i)$  es un conjunto en forma de cuerno con vértice  $\mathbf{0}$ ). Además, en muchos casos, este tipo de parametrización cuerno por cuerno (pieza por pieza) puede proporcionar información valiosa de  $f$ , como la equisingularidad de gérmenes de  $f$ , que se desarrolla brevemente en el Capítulo 3. A continuación usaremos la *uniformización local* para definir la analiticidad por explosión.

## 2.6. Analiticidad por explosión y arco analiticidad

La noción de analiticidad por explosión (blow-analyticity) es introducido por T.C. Kuo [15] con el fin de estudiar la teoría de equisingularidad o la clasificación de gérmenes de funciones analíticas reales.

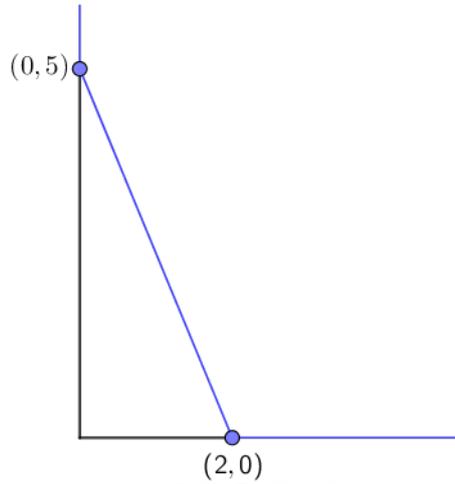


Figura 2.21: Polígono de Newton de  $g(x, y) = y^5 - x^2$

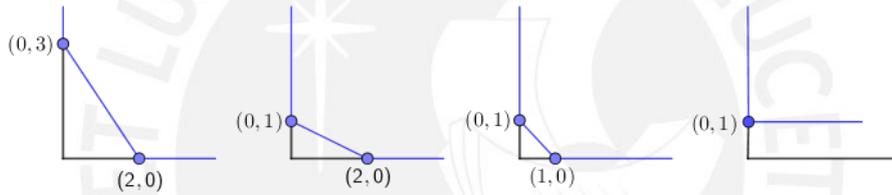


Figura 2.22: Polígono de Newton de explosiones de  $g(x, y) = y^5 - x^2$

Las siguientes funciones son típicas y serán usadas en esta sección

$$\boldsymbol{\mu}(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}, \quad \boldsymbol{\tau}(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad \boldsymbol{\rho}(x, y) = \frac{xy^5}{x^4 + y^6} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Observe que  $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\tau}$  y  $\boldsymbol{\rho}$  no están definidas en  $\mathbf{0}$ ; en cualquier otro punto son analíticas. No podemos definir  $\boldsymbol{\mu}(0, 0)$  para hacer  $\boldsymbol{\mu}$  continua. Por otro lado, podemos definir  $\boldsymbol{\tau}(0, 0) = 0$  para hacer  $\boldsymbol{\tau}$  continua, sin embargo no es de clase  $C^1$  en  $\mathbf{0}$ , puesto que las derivadas parciales  $\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial y}(0, 0)$  no son continuas. Análogamente podemos hacer un análisis para  $\boldsymbol{\rho}$ .

**Definición 2.33.** Sea  $\varphi$  una función definida y analítica en  $U_{\mathbf{0}}^* := U - \{\mathbf{0}\}$ . Diremos que  $\varphi$  es *analítica por explosión* si existe un sistema completo de explosiones locales  $\{(\Pi_1, R_1), (\Pi_2, R_2), \dots, (\Pi_s, R_s)\}$  tal que cada  $\varphi \circ \Pi_i$  tiene una extensión analítica alrededor de  $R_i$ .

Ya que  $\varphi(0,0)$  no está definida, entonces  $\varphi \circ \Pi_i$  no está definida sobre el lugar excepcional. En la definición anterior, se requiere que  $\varphi \circ \Pi_i$  pueda ser extendida analíticamente a través del lugar excepcional.

**Ejemplo 2.34.** Sean  $\mu, \tau, \rho : U_0^* \rightarrow \mathbb{R}$ , funciones definidas por

$$\mu(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}, \quad \tau(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad \rho(x, y) = \frac{xy^5}{x^4 + y^6},$$

son analíticas por explosión. En efecto:

$$\begin{aligned} \mu \circ \pi_1(X, Y) &= \frac{X^2 + 2(XY)^2}{X^2 + (XY)^2} = \frac{1 + 2Y^2}{1 + Y^2} \\ \mu \circ \pi_2(\bar{X}, \bar{Y}) &= \frac{\bar{X}^2 \bar{Y}^2 + 2\bar{Y}^2}{\bar{X}^2 \bar{Y}^2 + \bar{Y}^2} = \frac{\bar{X}^2 + 2}{\bar{X}^2 + 1} \end{aligned}$$

Observe que  $\mu \circ \pi_i$  es diferente de cero en el lugar excepcional. Por esta razón,  $\mu$  es llamada *analítica unitaria por explosión*. Por otro lado

$$\begin{aligned} \tau \circ \pi_1(X, Y) &= \frac{X^2(XY)}{X^2 + (XY)^2} = \frac{XY}{1 + Y^2} \\ \tau \circ \pi_2(\bar{X}, \bar{Y}) &= \frac{(\bar{X}\bar{Y})^2 \bar{Y}}{(\bar{X}\bar{Y})^2 + \bar{Y}^2} = \frac{\bar{X}^2 \bar{Y}}{\bar{X}^2 + 1} \end{aligned}$$

Observe que  $\tau \circ \pi_i$  se anula en el lugar excepcional, por tanto es *analítica por explosión* pero no es unitaria. Respecto a la aplicación  $\rho$ , tenemos

$$\begin{aligned} \rho \circ \pi_1(X, Y) &= \frac{X(XY)^5}{X^4 + (XY)^6} = \frac{X^2 Y^5}{1 + X^2 Y^6} \\ \rho \circ \pi_2(\bar{X}, \bar{Y}) &= \frac{\bar{X}\bar{Y}\bar{Y}^5}{\bar{X}^4 \bar{Y}^4 + \bar{Y}^6} = \frac{\bar{X}\bar{Y}^2}{\bar{X}^4 + \bar{Y}^2} \end{aligned}$$

$$\rho \circ \pi_2 \circ \pi_2(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\bar{X}\bar{Y}\bar{Y}^2}{\bar{X}^4 \bar{Y}^4 + \bar{Y}^2} = \frac{\bar{X}\bar{Y}}{\bar{X}^4 \bar{Y}^2 + 1}$$

Observe que  $\rho \circ \pi_1$  y  $\rho \circ \pi_2 \circ \pi_2$  se anulan en el divisor excepcional, luego  $\rho$  es *analítica por explosión*.

**Ejemplo 2.35.** Para más ejemplos disponemos de las siguientes aplicaciones, las cuales son usadas como contraejemplos en cursos de Cálculo de Varias Variables,

1. Si bien la aplicación  $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  no es continuamente extensible en el origen, es importante destacar que al definir  $f(0, 0) = 0$  todas las derivadas direccionales existen en ese punto. Se puede verificar que esta función es analítica por explosión vía  $\pi_1 \circ \pi_1$ , es decir

$$f(\pi_1(X, Y)) = \frac{XY}{X^2 + Y^2},$$

$$f(\pi_1(\pi_1(X_1, Y_1))) = \frac{Y_1}{1 + Y_1^4}$$

tiene una extensión analítica alrededor de  $R_i \supset (0, 0)$ .

2. La aplicación  $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  no es continuamente extensible en el origen, pero por ítem anterior se ve claramente que es analítica por explosión vía  $\pi_1$ .

3. La aplicación  $h(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  es continuamente extensible en el origen pero no es de clase  $\mathcal{C}^2$ , pues se calcula fácilmente que  $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$  y  $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ . Pero esta aplicación también es analítica por explosión, es decir,

$$h \circ \pi_2 \circ \pi_1(x, y) = \frac{x^3y^2(x^2 - 1)}{x^2 + 1}$$

tiene una extensión analítica alrededor de  $R_i \supset (0, 0)$ .

**Definición 2.36.** Sea  $\varphi$  una función analítica definida sobre  $U_0^*$ . Diremos que  $\varphi$  es *arco analítica* si para cualquier aplicación arco analítica  $\lambda$  con punto inicial en el origen, se cumple

1.  $\varphi(\lambda(0))$  puede ser definida
2.  $\varphi(\lambda(t))$  es analítica para  $|t| < \epsilon$ , con  $\epsilon$  suficientemente pequeño.

**Observación 2.37.** Si  $\lambda$  y  $\eta$  son aplicaciones arco analíticas diferentes, entonces  $\mu(\lambda(0))$  y  $\mu(\eta(0))$  pueden tomar valores diferentes.

**Ejemplo 2.38.** Las funciones  $\mu, \tau$  y  $\rho$  definidas en el ejemplo 2.34 son arco analíticas. Si  $\lambda$  y  $\eta$  son arco analíticas diferentes entonces  $\mu(\lambda(0)), \mu(\eta(0))$  pueden tener diferentes valores.

En efecto, considere la aplicación arco analítica  $\lambda$  con punto inicial  $(0, 0)$

$$\lambda(t) = \left( \sum_{i \geq 1} a_i t^i, \sum_{j \geq 1} b_j t^j \right).$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\mu(\lambda(t)) &= \frac{(\sum_{i \geq 1} a_i t^i)^2 + 2(\sum_{j \geq 1} b_j t^j)^2}{(\sum_{i \geq 1} a_i t^i)^2 + (\sum_{j \geq 1} b_j t^j)^2} = \frac{t^2(\sum_{i \geq 0} a_{i+1} t^i)^2 + 2t^2(\sum_{j \geq 0} b_{j+1} t^j)^2}{t^2(\sum_{i \geq 0} a_{i+1} t^i)^2 + t^2(\sum_{j \geq 0} b_{j+1} t^j)^2} \\ \mu(\lambda(t)) &= \frac{(\sum_{i \geq 0} a_{i+1} t^i)^2 + 2(\sum_{j \geq 0} b_{j+1} t^j)^2}{(\sum_{i \geq 0} a_{i+1} t^i)^2 + (\sum_{j \geq 0} b_{j+1} t^j)^2}\end{aligned}$$

Observe que  $\mu(\lambda(0))$  está definida,

$$\mu(\lambda(0)) = \frac{a_1^2 + 2b_1^2}{a_1^2 + b_1^2}$$

Ahora consideremos la aplicación arco analítica  $\eta$  con punto inicial  $(0, 0)$

$$\eta(t) = \left( \sum_{i \geq 1} c_i t^i, \sum_{j \geq 1} d_j t^j \right)$$

con lo que se obtiene el valor,

$$\mu(\eta(0)) = \frac{c_1^2 + 2d_1^2}{c_1^2 + d_1^2}.$$

Por otro lado tenemos,

$$\begin{aligned}\tau(\lambda(t)) &= \frac{(\sum_{i \geq 1} a_i t^i)^2 (\sum_{j \geq 1} b_j t^j)}{(\sum_{i \geq 1} a_i t^i)^2 + (\sum_{j \geq 1} b_j t^j)^2} = \frac{t^2(\sum_{i \geq 0} a_{i+1} t^i)^2 (\sum_{j \geq 1} b_j t^j)}{t^2(\sum_{i \geq 0} a_{i+1} t^i)^2 + t^2(\sum_{j \geq 0} b_{j+1} t^j)^2} \\ \tau(\lambda(t)) &= \frac{(\sum_{i \geq 0} a_{i+1} t^i)^2 (\sum_{j \geq 1} b_j t^j)}{(\sum_{i \geq 0} a_{i+1} t^i)^2 + (\sum_{j \geq 0} b_{j+1} t^j)^2}\end{aligned}$$

Vemos que  $\tau(\lambda(0))$  está definida,

$$\tau(\lambda(0)) = \frac{a_1^2(0)}{a_1^2 + b_1^2} = 0$$

Respecto a la aplicación  $\rho$ , tenemos

$$\begin{aligned}\rho(\lambda(t)) &= \frac{(\sum_{i \geq 1} a_i t^i)(\sum_{j \geq 1} b_j t^j)^5}{(\sum_{i \geq 1} a_i t^i)^4 + (\sum_{j \geq 1} b_j t^j)^6} = \frac{t(\sum_{i \geq 0} a_{i+1} t^i)t^5(\sum_{j \geq 0} b_{j+1} t^j)^5}{t^4(\sum_{i \geq 0} a_{i+1} t^i)^4 + t^6(\sum_{j \geq 0} b_{j+1} t^j)^6} \\ \rho(\lambda(t)) &= \frac{t^2(\sum_{i \geq 0} a_{i+1} t^i)(\sum_{j \geq 0} b_{j+1} t^j)^5}{(\sum_{i \geq 0} a_{i+1} t^i)^4 + t^2(\sum_{j \geq 0} b_{j+1} t^j)^6}\end{aligned}$$

Con lo que  $\rho(\lambda(0))$  también está definida,

$$\rho(\lambda(0)) = \frac{(0)^2 a_1 b_1^5}{a_1^4 + (0)^2 b_1^6} = 0$$

Además, es fácil ver que  $\mu(\lambda(t))$ ,  $\tau(\lambda(t))$  y  $\rho(\lambda(t))$  son analíticas para todo  $|t| \leq \epsilon$ , con  $\epsilon \leq |t_0|$  donde  $t_0$  es el cero del denominador mas cercano a  $t = 0$ .

**Teorema 2.39.** Sea  $\{(\Pi_1, R_1), \dots, (\Pi_s, R_s)\}$  un sistema completo de explosiones locales y  $\lambda$  una aplicación arco analítica con punto inicial el origen. Entonces  $\lambda$  puede ser levantado a, por lo menos, uno de los rectángulos  $R_i$  en el sentido de que  $\lambda = \Pi_i \circ \lambda^*$ , para algún  $i$ , donde  $\lambda^*$  es una aplicación arco analítica en  $R_i$ . El punto inicial de  $\lambda^*$  está en el lugar excepcional  $\Pi_i^{-1}((0, 0))$ .

*Demostración.* Sea  $\lambda(t)$ ,  $|t| < \epsilon$ , una aplicación arco analítica con punto inicial en el origen. Entonces,  $Im(\lambda) \subset \Pi_i(R_i)$ , para algún  $i$ . Luego, por el Lema 2.19,  $\lambda$  puede ser levantada sucesivamente, en efecto: basta tomar una secuencia  $t_n \rightarrow 0$  e  $i$  tal que  $\Pi_i(R_i)$  contiene un número infinito de  $\lambda(t_n)$ . Supongamos que  $\lambda(t_n) \in \Pi_i(R_i)$  para todo  $n$ , tomemos  $P_n \in R_i$ ,  $\Pi_i(P_n) = \lambda(t_n)$ . Se sabe que  $R_i$  es compacto para todo  $i$ , ahora tome un punto de acumulación  $P$  de  $P_n$ , y sea  $P := (a_N, b_N) \mapsto \dots \mapsto (a_1, b_1) \mapsto (0, 0)$  la secuencia de implosiones siguientes siguiendo  $\Pi_i$ . Luego levante  $\lambda$  a  $\lambda^*$  con punto inicial  $P$ .

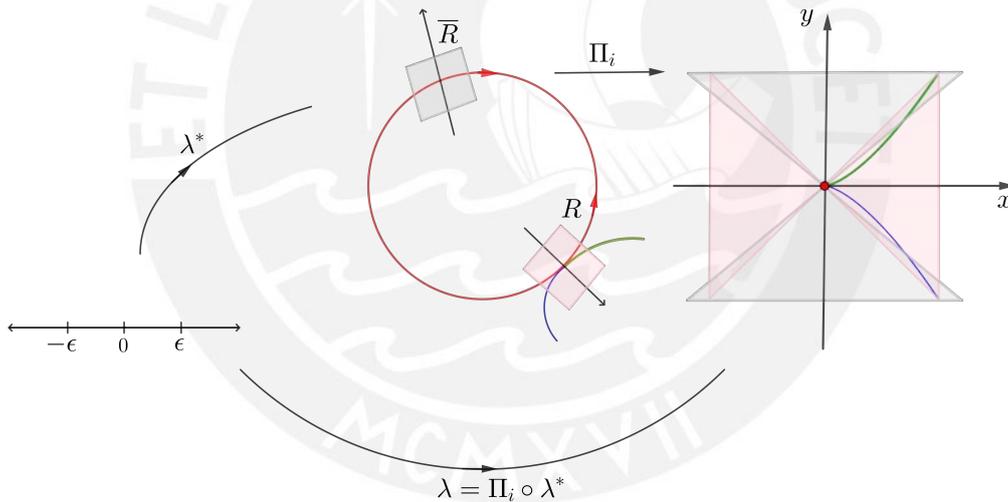


Figura 2.23: Levantamiento arco analítico

□

A continuación veremos que analiticidad por explosiones y arco analiticidad son, en cierta medida, nociones equivalentes.

**Observación 2.40.** Sean  $h, k$  funciones analíticas definidas en una vecindad del origen, con  $h(0, 0) = k(0, 0) = 0$  y supongamos que el producto

$$h(x, y)k(x, y) = \epsilon(x, y)x^m y^n, \quad \epsilon_1 \text{ una unidad.}$$

Entonces, dado que el anillo de series de potencias  $\mathbb{R}\{x, y\}$  es un dominio de factorización única, se sigue que cada factor irreducible de  $h$  o de  $k$  debe ser o bien  $x$  o bien  $y$ . Por lo tanto

$$h(x, y) = \epsilon_1(x, y)x^{m_1}y^{n_1},$$

$$k(x, y) = \epsilon_2(x, y)x^{m_2}y^{n_2},$$

donde  $m_1 + m_2 = m, n_1 + n_2 = n$  y  $\epsilon_1, \epsilon_2$  son unidades con  $\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = \epsilon$ .

**Teorema 2.41.** *Sean  $N, D$  funciones analíticas definidas en una pequeña vecindad  $U$  de  $(0, 0)$ . Suponga que  $N$  y  $D$  no tienen factores comunes en  $\mathbb{R}\{x, y\}$ ,  $\varphi = \frac{N}{D}$  es una función meromorfa en un entorno de  $(0, 0)$ . Suponga que  $D(x, y) = 0$  únicamente cuando  $x = y = 0$  en  $U$ . Entonces la función meromorfa  $\varphi$  es arco analítica si y sólo si, es analítica por explosión.*

*Demostración.* La idea de la demostración es explotar para ver, luego implotar para decir. Consideremos  $\{\Pi_1(R_1), \dots, \Pi_s(R_s)\}$  una uniformización local del producto  $(N(x, y) \cdot D(x, y))$ , donde  $N$  y  $D$  no tienen factores comunes en  $\mathbb{R}\{x, y\}$ .

En cada rectángulo  $R_i$ , consideremos las funciones

$$h := N \circ \Pi_i, \quad k := D \circ \Pi_i, \quad \text{y} \quad g = h \cdot k.$$

En un punto dado de  $R_i$ , considerado como el origen, podemos escribir

$$g(X, Y) = \epsilon(X, Y) \cdot X^m Y^n, \quad h(X, Y) = \epsilon_1(X, Y) \cdot X^{m_1} Y^{n_1}, \quad k(X, Y) = \epsilon_2 \cdot X^{m_2} Y^{n_2},$$

donde  $m_1 + m_2 = m$  y  $n_1 + n_2 = n$ .

Por hipótesis se tiene que  $\varphi = \frac{N}{D}$ , función meromorfa, entonces

$$\varphi \circ \Pi_i = \frac{h(X, Y)}{k(X, Y)} = \tilde{\epsilon} X^{m_1 - m_2} Y^{n_1 - n_2}$$

donde debemos tener  $m_1 - m_2 \geq 0$  y  $n_1 - n_2 \geq 0$ , para que  $\varphi \circ \Pi_i$  sea analítica. Por lo tanto  $\varphi$  es analítica por explosión.

Para demostrar la recíproca, tenemos por hipótesis que  $\varphi = \frac{N}{D}$  definida en  $U_0^*$ , es una aplicación analítica por explosión, entonces existe un *sistema completo de explosiones locales*,  $\{(\Pi_1, R_1), (\Pi_2, R_2), \dots, (\Pi_s, R_s)\}$ , tal que cada  $\varphi \circ \Pi_i$  tiene una extensión analítica alrededor de  $R_i$ . Consideremos ahora  $\lambda$  una aplicación arco analítica tal que  $\lambda(0) = (0, 0)$ . Entonces por la Proposición 2.39,  $\lambda$  puede ser

levantada a algún rectángulo  $R_i$ , es decir  $\lambda = \Pi_i \circ \lambda^*$  donde  $\lambda^*$  es arco analítica en  $R_i$  con  $\lambda^*(0) = \Pi_i^{-1}(0, 0)$ . Luego,

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \lambda)(0) &= [\varphi \circ (\Pi_i \circ \lambda^*)](0) \\ &= [(\varphi \circ \Pi_i) \circ \lambda^*](0) \\ &= (\varphi \circ \Pi_i)(\Pi_i^{-1}(0, 0))\end{aligned}$$

$\varphi \circ \Pi_i$  tiene una extensión analítica a través del lugar excepcional en algún  $R_i$ , por ende  $\varphi(\lambda(0))$  puede ser definida y  $\varphi(t)$  es analítica para  $|t| < \epsilon$ .  $\square$

**Observación 2.42.** En este contexto, ¿qué significa que  $D$  se anula en puntos arbitrariamente cercanos a  $(0, 0)$ ? pues en este caso se demuestra que  $\varphi$  no es analítica por explosión ni arco analítica. Por lo tanto, una **función meromorfa** es arco analítica si y solo si es analítica por explosión.

**Ejemplo 2.43.** En el Ejemplo 2.35 se constató la analiticidad por explosión de las aplicaciones

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad h(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

mediante el uso de la definición. Ahora mediante la Proposición 2.41, se puede demostrar que las aplicaciones también son arco analíticas.

**Observación 2.44.** Observe que, la diferencia entre comprobar que una función sea arco analítica y encontrar una uniformización local de  $f$  es que, la primera es relativamente fácil, mientras que el segundo resulta muy extenso de realizar.

**Lema 2.45.** Sea  $h \in \mathbb{R}\{x, y\}$  y suponga que  $h$  se anula a lo largo de una secuencia de puntos que tienden a  $(0, 0)$ . Entonces,  $h$  se anula a lo largo de una aplicación arco analítica en  $(0, 0)$ . Es decir,  $h(\lambda(t)) \equiv 0$  en  $t$ , donde  $\lambda(0) = 0, \lambda(t) \neq 0, 0 < |t| < \epsilon$ .

*Demostración.* Supongamos que  $h$  se anula a lo largo de una secuencia de puntos  $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ , es decir

$$h(x_n, y_n) = 0, \quad \forall n$$

pero no se anula a lo largo de ninguna aplicación arco analítica  $\lambda(t)$ . Es decir, para cualquier aplicación arco analítica  $\lambda(t)$  que consideremos, existe un  $t$  tal que  $h(\lambda(t)) \neq 0$ , con  $0 < |t| < \epsilon$ . Como la secuencia  $(x_n, y_n)$  es convergente se puede expresar en términos de una aplicación arco analítica  $\lambda(t)$  de la siguiente manera

$$(x_n, y_n) = \lambda(t_n)$$

donde  $t_n$  es una secuencia que tiende a cero, es decir  $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) = 0$ , de esto se tiene que

$$h(x_n, y_n) = h(\lambda(t_n))$$

lo cual es una contradicción. □



## Capítulo 3

# El problema de la equisingularidad

Sean  $f, g$  funciones analíticas (real o compleja) definidas sobre un entorno, suficientemente pequeño del origen de  $\mathbb{R}^n$  o bien de  $\mathbb{C}^n$  con  $f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0})$ . El problema de la equisingularidad responde a la siguiente pregunta ¿Cuándo  $f$  y  $g$  son llamados “equivalentes”? Para formular este hecho de manera más precisa, un lenguaje útil es la noción de *germen*. Sea  $\varphi : X \rightarrow Y$  una aplicación entre espacios topológicos tal que,  $\varphi(a) = b$ . El *germen* de  $\varphi$  en  $a$ , escrito como  $\varphi : (X, a) \rightarrow (Y, b)$ , es la restricción de  $\varphi$  a un entorno, suficientemente pequeño de  $a$ . Si  $\varphi(x) = \psi(x)$  para todo  $x$  cercano al punto  $a$ , entonces  $\varphi$  y  $\psi$  tienen el mismo germen en  $a$ .

Por razones de simplicidad, algunas veces diremos “función”, “aplicación”, etc. en lugar de “germen de función”, “germen de aplicación”, etc.

Sea  $f : (\mathbb{K}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{K}, \mathbf{0})$ , donde  $\mathbb{K}$  es  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ , un germen de función. Si  $f$  es analítica, el germen puede ser identificado con su serie de Taylor, la cual no tiene términos constantes. Por tanto, el problema de equisingularidad, se traduce en la búsqueda de una buena y natural relación de equivalencia entre las series de Taylor sin términos constantes. Una buena definición debe ir acompañada de criterios, teoremas de clasificación, etc. Por ejemplo, las secciones cónicas pueden ser clasificadas bajo transformaciones y también bajo movimientos rígidos, ambos son buenas definiciones.

Para una variable, no tenemos mucha elección para una definición de una relación de equivalencia. Dado  $f$  una función analítica real de multiplicidad  $m$ , definida por

$$f(x) = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} \dots, \quad a_m \neq 0,$$

existe un cambio analítico de variable  $\tau$  tal que  $f(\tau(X)) = \pm X^m$ . (En el caso complejo se tiene  $f(\tau(Z)) = Z^m$ ). Por lo tanto, la única clasificación sensata es por

la multiplicidad.

El siguiente caso consiste en clasificar series de potencias con coeficientes en  $\mathbb{K}$ . Este caso es fundamental y expone una serie de características esenciales del problema las cuales abordaremos en lo que sigue.

**Definición 3.1.** Sean  $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbf{0})$  dos gérmenes de aplicaciones analíticas. Supongamos que existe un germen de homeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ , tal que  $f = g \circ h$ . Entonces diremos que  $f$  y  $g$  son **topológicamente equivalentes**.

Si  $h$  es de clase  $C^r$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ , diremos que  $f$  y  $g$  son  $C^r$ -**equivalentes**.

Existen buenos teoremas sobre la relación  $C^\infty$ -equivalencia, buenas referencias al respecto son [1], [22]. En cuanto a sobre la relación  $C^r$ -equivalencia, se puede consultar [2]. Sin embargo, es importante destacar que esta clasificación puede resultar demasiado detallada para ciertos propósitos.

**Ejemplo 3.2.** Considere la siguiente familia de funciones

$$\begin{aligned} W_t : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) &\rightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ (x, y) &\mapsto W_t(x, y) = xy(y - x)(y - tx); \quad t \in (0, 1) \end{aligned}$$

Esta familia es conocida como la familia Whitney. T.-C. Kuo. En [16] se demuestra que  $W_t$  contiene infinitamente diversas clases de  $C^1$ -equivalencia. Es decir,  $W_t$  es  $C^1$ -equivalente a  $W_{t'}$  si y solo si  $t = t'$

**Observación 3.3.** Del ejemplo anterior, se sigue que en la  $C^r$ -clasificación,  $1 \leq r \leq \infty$ , hay demasiadas clases de equivalencia (en lenguaje matemático significa que la clasificación  $C^r$  contiene módulos).

En este trabajo de tesis, no exploraremos la teoría de la  $C^r$ -clasificación. En su lugar, nos concentraremos en la teoría de la analiticidad por explosión, en la cual existe un teorema de clasificación finito ([14], [15]). La situación es análoga a la clasificación de secciones cónicas: no hay clasificación finita bajo movimientos rígidos, pero sí la hay bajo transformaciones afines.

### 3.1. Explosión en $\mathbb{R}^2$

Veremos que  $\pi_1$  y  $\pi_2$  se pueden combinar en una sola aplicación, la cual será llamada **Explosión con centro en el origen**, y usualmente es representada por  $\pi := \pi_1 \sqcup \pi_2$ .

Recordemos como se define la línea proyectiva  $\mathbb{RP}^1$ . En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$  se define la relación entre sus vectores de la siguiente manera: para todo  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  se dice que  $\bar{x} \sim \bar{y} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} - \{0\}$  tal que  $\bar{y} = k\bar{x}$ . Se puede verificar fácilmente que esta es una relación de equivalencia, con la cual se define el espacio cociente  $\frac{\mathbb{R}^2}{\sim} = \mathbb{RP}^1$  llamado Línea Proyectiva Real, sus clases de equivalencia se denotan por  $(x : y)$ . Un punto  $p \in \mathbb{RP}^1$  es un sub-espacio 1-dimensional del espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ , es decir un punto es identificado con una línea en  $\mathbb{R}^2$  en torno de  $(0, 0)$ , o un par de puntos antipodales sobre el círculo unitario  $S^1$ . Consideremos un cubrimiento abierto,  $\mathbb{RP}^1 = U_1 \cup U_2$  donde  $U_1 = \{(x : y) \in \mathbb{RP}^1 : x \neq 0\}$ ,  $U_2 = \{(x : y) \in \mathbb{RP}^1 : y \neq 0\}$ . Ahora  $U_1$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}$  mediante la aplicación  $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f_1(x : y) = \frac{y}{x}$  y similarmente  $U_2$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}$  mediante la aplicación  $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f_2(x : y) = \frac{x}{y}$ . Observe que  $f_1 \circ f_2^{-1} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  es la aplicación que lleva  $z$  a  $\frac{1}{z}$ . También se tiene que la topología sobre  $S^1$  induce una topología sobre  $\mathbb{RP}^1$ . La estructura analítica sobre  $S^1$  que es heredada de  $\mathbb{R}^2$  induce una estructura analítica sobre  $\mathbb{RP}^1$ . Además, como  $S^1$  es compacto entonces  $\mathbb{RP}^1$  es compacta.

El producto cartesiano  $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{R}^2$  es una variedad analítica 3-dimensional. Veamos cuándo una función definida localmente en  $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{R}^2$  es analítica: sea  $(\ell_0, x_0, y_0) \in \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{R}^2$ , consideremos vecindades coordenadas  $I$  de  $\ell_0$  en  $\mathbb{RP}^1$  y  $U$  de  $(x_0, y_0)$  en  $\mathbb{R}^2$ . Si  $I$  y  $U$  son suficientemente pequeños, se pueden definir por:

$$I = \{\ell \in \mathbb{RP}^1 : \angle(\ell, \ell_0) < \varepsilon\},$$

donde  $\angle(\ell, \ell_0)$  es el ángulo entre  $\ell$  y  $\ell_0$  y

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta\}.$$

Identificando  $I$  con un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$ , la estructura analítica de  $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{R}^2$  se caracteriza de la siguiente manera: una función  $f$  definida en  $I \times U$  es analítica si y solo si, es analítica en  $(\ell, x, y) \in \mathbb{R}^3$ .

**Lema 3.4.** *La banda de Möbius es una subvariedad de dimensión real 2 en  $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{R}^2$ .*

*Demostración.* En efecto, se define

$$\mathcal{M} := \{(\ell, (x, y)) \in \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{R}^2 : (x, y) \in \ell\}.$$

Dado el punto  $(\ell_0, (0, 0)) \in \mathcal{M}$ , analicemos  $\mathcal{M}$  en un entorno de este punto. Sea  $ax - by = 0, (a, b) \neq \mathbf{0}$ , la ecuación de  $\ell_0$ . Sin pérdida de generalidad podemos

asumir que  $a = 1$ . Todas las rectas  $\ell$  cerca de  $\ell_0$  se pueden definir como  $x - sy = 0$ , donde  $s$  es una variable real cerca de  $b$ . Por tanto, cerca de  $(\ell_0, (0,0))$ ,  $\mathcal{M}$  es el gráfico de la función  $x = sy$ , con  $s$  suficientemente cerca de  $b$ . Esto muestra que  $\mathcal{M}$  es una sub-variedad analítica de dimensión real 2 contenida en  $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{R}^2$ .

Una parametrización para  $\mathcal{M}$  está dado por  $\varphi_1 = \pi_1^{-1}$  y  $\varphi_2 = \pi_2^{-1}$  definidas en los abiertos de  $\mathbb{R}^2$ ,  $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$  y  $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$  respectivamente.  $\square$

En la banda de Möbius se puede introducir coordenadas locales de la siguiente manera

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \times [\xi, \eta] \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1 : x\eta = y\xi\}$$

Existen dos proyecciones importantes:

$$\begin{aligned} \text{Proy}_1 : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{RP}^1 \\ (\ell, x, y) &\longmapsto \ell \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\ell, x, y) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

La primera es llamada **Fibrado Lineal Canónico** sobre  $\mathbb{RP}^1$  y la segunda es llamada **explosión** de  $\mathbb{R}^2$  con centro  $\mathbf{0}$ . Además, se verifica que:

- i.  $\pi|_{\mathcal{M} \setminus \mathbb{RP}^1} : \mathcal{M} \setminus \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$  es un homeomorfismo.
- ii.  $E := \pi^{-1}\{\mathbf{0}\} = \mathbb{RP}^1$  es el divisor excepcional.

Habiendo combinado  $\pi_1$  y  $\pi_2$  en una sola aplicación  $\pi(\pi_1 = \pi|_{U_1}, \pi_2 = \pi|_{U_2})$ , la Proposición 2.27 nos indica que  $\pi$  explota  $(0,0)$  en  $m$  puntos distintos en  $\mathcal{M}$ .

## 3.2. Desingularización Global

El paso de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathcal{M}$  puede ser interpretada como el reemplazo de  $\mathbf{0}$  por una copia de  $\mathbb{RP}^1$ , modificando así  $\mathbb{R}^2$  en una banda de Möbius.

Una observación relevante es que  $\pi$  es un *isomorfismo analítico* en un entorno suficientemente pequeño de cada punto dado que no es de la forma  $(\ell, 0, 0)$ , es decir, no en el círculo central (el divisor excepcional).

Sea  $\mathbb{S}$  una variedad analítica 2-dimensional. Tome cualquier  $P \in \mathbb{S}$ . Podemos definir  $\pi_P : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$  de la misma manera que el paso de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathcal{M}$ .

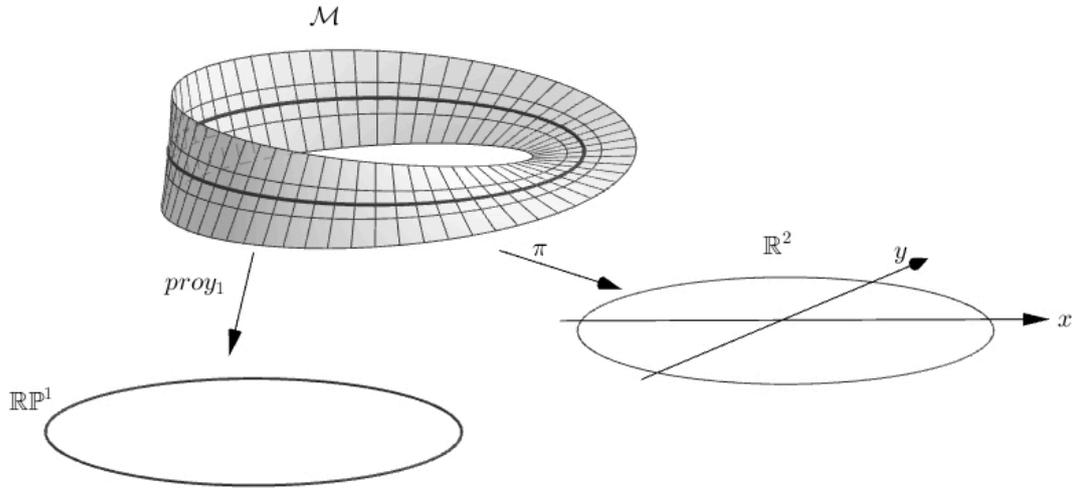


Figura 3.1: Fibrado lineal canónico  $proy_1$  y explosión  $\pi$

La variedad  $\mathbb{M}$  se construye de la siguiente manera. Tomemos un entorno  $U$  de  $P$ , que es una copia de  $\mathbb{R}^2$ , con origen en  $P$ . Eliminemos  $U$  de  $\mathbb{S}$  y luego pegamos una copia de la banda de Möbius  $\mathcal{M}$ . Esto equivale a reemplazar  $P$  en  $\mathbb{S}$  por una copia de  $\mathbb{R}P^1$ . La nueva variedad es  $\mathbb{M}$ .

La aplicación  $\pi_P$  se llama explosión de  $\mathbb{S}$  con centro en  $P$ . Observemos que  $\pi_P$  es un isomorfismo analítico entre  $\mathbb{M} - \mathbb{R}P^1$  y  $\mathbb{S} - \{P\}$ .

Con los elementos que acabamos de introducir, la Proposición 2.28 proporciona una uniformización local, por tanto un sistema completo de explosiones locales con centro en el  $(0, 0)$  que permite la prueba del siguiente teorema

**Teorema 3.5** (Desingularización Global). *Sea  $\mathbb{M}_0$  una variedad analítica compacta 2-dimensional y  $f : \mathbb{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  una función analítica. Entonces existe la aplicación*

$$\Pi := \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_N : \mathbb{M}_N \xrightarrow{\pi_N} \cdots \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{M}_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{M}_0,$$

donde  $\pi_i$  es la explosión de  $\mathbb{M}_{i-1}$  en algún punto,  $1 \leq i \leq N$ , tal que  $\Pi \circ f$  es de cruzamiento normal en  $\mathbb{M}_N$ .

Además, existe una composición de explosiones (posiblemente diferentes) tales que la transformada estricta de  $f^{-1}(0)$  es una curva regular.

El Teorema 3.5, y sus variaciones, se conocieron a finales del siglo *XIX*. En 1935, R.J. Walker demostró la Desingularización Global para superficies. En 1940 Zariski prueba el Teorema de Uniformización local en dimensión arbitraria, y el teorema de Desingularización Global para variedades de dimensión  $n \leq 4$ . Luego, en su celebre

trabajo Hironaka, [10] en 1964, demuestra el teorema de Desingularización Global en dimensión arbitraria y en característica cero. La demostración de Hironaka es extremadamente difícil. Una prueba elemental, con centros canónicos, fue dada por Bierstone and Milman [3]. Mas detalles e información sobre este tema puede ser visto en [9] y [25].

### 3.3. Equisingularidad analítica por explosión

**Definición 3.6.** Sea  $h : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  un germen de homeomorfismo. Diremos que  $h$  es un *homeomorfismo analítico por explosión* si existen dos composiciones de explosiones

$$\Pi = \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_N : \mathbb{M}_N \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{M}_0 := U;$$

$$\Pi' = \pi'_1 \circ \cdots \circ \pi'_{N'} : \mathbb{M}'_{N'} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{M}'_0 := U'$$

donde  $U$  y  $U'$  son entornos suficientemente pequeños de  $\mathbf{0}$ ,  $h(U) = U'$  y un isomorfismo analítico  $\Phi : \mathbb{M}_N \cong \mathbb{M}'_{N'}$  tal que  $\Pi' \circ \Phi = h \circ \Pi$ . (esto implica que  $N = N'$ .)

Es decir, aunque  $h$  es simplemente un homeomorfismo, en realidad proviene de un isomorfismo analítico.

Específicamente, decimos que  $h$  es un homeomorfismo analítico por explosión si cumple dos condiciones: ser un homeomorfismo y además, tanto  $h$  como su inversa  $h^{-1}$  son explosiones analíticas.

**Lema 3.7.** Sea  $h : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  un homeomorfismo analítico por explosión, entonces  $h$  es una aplicación arco analítica. Es decir, si  $\lambda$  es una aplicación arco analítica en  $U$ , entonces  $h \circ \lambda$  es una aplicación arco analítico en  $U'$ .

*Demostración.* Sea  $\lambda : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow U$  una aplicación arco analítica en  $U$  con punto inicial  $\mathbf{0}$ .

Por el Lema 2.19,  $\Pi$  admite la propiedad de levantamiento arco analítico. Es decir, existe una aplicación arco analítica  $\mu$ , tal que

$$(\Pi \circ \mu)(t) = \lambda(t), \quad |t| \leq \epsilon'$$

con punto inicial en el divisor excepcional  $E = \Pi^{-1}(\mathbf{0})$ . Dado que  $\Phi$  es un isomorfismo analítico, usando nuevamente el Lema 2.19, se sigue que

$$\Pi' \circ \Phi \circ \mu : [-\epsilon', \epsilon'] \rightarrow U'$$

es una aplicación arco analítica en  $U'$ . Observe que

$$\Pi' \circ \Phi \circ \mu(t) = h \circ \Pi \circ \mu(t) = h \circ \lambda(t), \quad |t| \leq \epsilon,$$

esto último implica que  $h$  es una aplicación arco analítica.  $\square$

**Definición 3.8.** Sean  $f, g : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbf{0})$  analíticas. Diremos que  $f, g$  son **analíticamente equivalentes por explosión** si existe un homeomorfismo analítico por explosión  $h$  tal que  $f = g \circ h$ .

La relación mencionada anteriormente, la cual está definida en el conjunto de gérmenes de funciones analíticas, será llamada *Equivalencia analítica por explosión*. Note que  $h$  preserva el conjunto de ceros tanto de  $f$  como de  $g$ .

Un hecho interesante es que la familia Whitney  $W_t$  (ver Ejemplo 3.2) consta de una sola clase de equivalencia analítica por explosión, en contraste con su  $C^1$ -clasificación, en la que admite infinitas [16]. Como ya habíamos mencionado, no daremos detalles de esto, para los interesados existe un material con detalles muy simples y con un nivel mas alto escrito por T.-C Kuo en [18].

¿Sean  $f, g$  analíticamente equivalentes por explosión, entonces  $f$  y  $g$  tienen la misma multiplicidad? M. Suzuki fue el primero en dar una respuesta afirmativa a esta pregunta. Su demostración involucra extensos cálculos. Fukui, en [5], da una simple y elegante prueba al respecto.

Sea  $f$  una función analítica y  $\lambda$  cualquier aplicación arco analítica en el origen. Si  $f \circ \lambda$  no es idénticamente nula, entonces existe un entero positivo  $k$  tal que

$$(f \circ \lambda)(t) = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \dots, \quad a_k \neq 0,$$

$k$  es el orden de  $f$  a lo largo de  $\lambda$  y lo denotamos por  $ord_\lambda(f)$ . Se define  $ord_\lambda(f) = \infty$  cuando  $f \circ \lambda$  es idénticamente nula.

Se define el conjunto

$$A(f) := \{ord_\lambda(f)/\lambda : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \text{ es arco-analítica}\}$$

Sea  $m_0(f)$  la multiplicidad de la serie de potencias de  $f(\lambda(t))$ , es decir el grado del polinomio inicial de  $f$ . Es fácil demostrar que  $m_0(f) = \min[A(f)]$ , por lo tanto  $A(f) = A(g)$  implica  $m_0(f) = m_0(g)$ .

Como una consecuencia, la multiplicidad es un invariante analítico por explosión

de gérmenes de funciones analíticas. Así, este resultado debería ser comparado con la conjetura de la multiplicidad de Zariski: “si dos funciones holomorfas  $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$  son topológicamente equivalentes, entonces  $mult_0(f) = mult_0(g)$ ”. Esto aún es un problema abierto. Es claro que la definición de  $A(f)$  tiene sentido para una función holomorfa  $f$  y es interesante preguntarse: ¿es  $A(f)$  un invariante topológico para funciones holomorfas  $f$ ?

**Lema 3.9.** *Si  $f$  y  $g$  son analíticamente equivalentes por explosión entonces  $A(f) = A(g)$ .*

*Demostración.* Sean  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$  analíticamente equivalentes por explosión entonces existe un homeomorfismo analítico por explosión  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $f = g \circ h$ .

Considere  $\lambda : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  arco-analítica, y suponga que  $f \circ \lambda, (g \circ h) \circ \lambda$  son no nulas, entonces existe  $k \in \mathbb{Z}^+$  tal que

$$f \circ \lambda(t) = a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \dots$$

$$(g \circ h) \circ \lambda(t) = g \circ (h \circ \lambda)(t) = a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \dots$$

Se observa que  $ord_\lambda(f) = k = ord_{h \circ \lambda}(g)$ , por lo tanto se demuestra que  $A(f) = A(g)$ . □

**Lema 3.10.** *Suponga que  $f, g$  son analíticamente equivalentes por explosión bajo  $h$ . Si  $(a, b) \in U$  es un punto singular de  $f$ , entonces  $h((a, b))$  es un punto singular de  $g$  en  $U'$ :*

*Demostración.* Tome cualquier  $\lambda$ , aplicación arco analítica en el punto  $(a, b)$  tal que  $\lambda(0) = (a, b)$ . Compare las derivadas de  $f(\lambda)$  y  $g(h \circ \lambda)$  □

**Observación 3.11.** Es posible demostrar que un homeomorfismo  $h$  es analítica por explosión si las componentes de  $h$  y  $h^{-1}$  son analíticas por explosión en el sentido definido en la Definición 2.33.

Para más información sobre la teoría de equisingularidad analítica por explosión ver [6] y [7].

Desde que se definió la noción de *analítica por explosión* algunos expertos creyeron e intentaron demostrar que un homeomorfismo analítico por explosión era siempre Lipschitz. Sin embargo, en [7], se hace énfasis que los homeomorfismos analíticos por explosión no son Lipschitz, a continuación daremos ejemplos donde se puede apreciar esto.

**Definición 3.12.** Sea  $h : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación, se dice que es *Lipschitz* en  $U$ , si existe una constante  $K \geq 0$  talque

$$\|h(x_1, y_1) - h(x_2, y_2)\| \leq K\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|, \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in U.$$

Dado que las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes, si cambiamos la norma en la definición anterior la aplicación seguirá siendo Lipschitz, pero la constante posiblemente puede variar.

En la aplicación  $h : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , una aplicación Lipschitz en  $U$ , las funciones coordenadas  $h_i : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  también son Lipschitz. En efecto,

$$|(f_1(x_1, y_1) - f_1(x_2, y_2))| \leq \|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\| \leq K\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$$

**Definición 3.13.** Diremos que  $h$ , una aplicación, es Bi-lipschitz si es biyectiva y tanto  $h$  como su inversa son Lipschitz.

**Lema 3.14.** Si  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  es Lipschitz entonces todas sus derivadas parciales son acotadas.

*Demostración.* Por definición, se tiene que las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_1, x_2) + t\mathbf{e}_i) - f(x_1, x_2)}{t}.$$

Luego calculemos,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| &= \left| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_1, x_2) + t\mathbf{e}_i) - f(x_1, x_2)}{t} \right| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f((x_1, x_2) + t\mathbf{e}_i) - f(x_1, x_2)|}{|t|} \\ &\leq K \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|(x_1, x_2) + t\mathbf{e}_i - (x_1, x_2)\|}{|t|} \\ &= K \end{aligned}$$

con lo que se demuestra que las derivadas parciales son acotadas □

**Ejemplo 3.15.** Considere las aplicaciones  $\mathbf{q}(x, y) = \frac{x^2 + y^4}{x^2 + 2y^4}$  y sea  $h : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ , definida por  $h(x, y) = (x\mathbf{q}^2, y\mathbf{q})$ . Calculando la aplicación inversa  $h^{-1}$ ,

$$h^{-1}(x, y) = \left( \frac{x}{\mathbf{q}^2}, \frac{y}{\mathbf{q}} \right).$$

De la observación 3.11,  $h$  es un homeomorfismo analítico por explosión. Por otro lado, supongamos que  $h$  es Lipschitz y calculamos

$$\frac{\partial}{\partial x}(y\mathbf{q}) = \frac{2xy^5}{(x^2 + 2y^4)^2}$$

la cual no es acotada, pues  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^5}{(x^2 + 2y^4)^2} = \infty$ . Esto permite concluir que  $h$  no es Lipschitz, por el Lema 3.14.

El siguiente ejemplo muestra que un homeomorfismo analítico por explosión no necesariamente preserva la multiplicidad de aplicaciones arco analíticas y por tanto no es Lipschitz. Si pasamos al espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ , es más claro explicar la situación que en  $\mathbb{R}^2$ . Las definiciones de explosión y analíticas por explosión se generalizan fácilmente a  $\mathbb{R}^3$ , con centro de explosión o bien un punto o bien una subvariedad analítica unidimensional, como una curva regular. Las otras nociones también se generalizan.

**Lema 3.16.** Sean  $f$  una función de Lipschitz y  $\lambda$  una aplicación arco analítica con multiplicidad  $k$  entonces  $f \circ \lambda$  también tiene multiplicidad  $k$ .

Ver [27], Proposición 1.4

**Ejemplo 3.17.** Tome  $\mathbf{p}(x, y) = \frac{xy^5}{x^4 + y^6}$  y defina la aplicación

$$h : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}), (x, y, z) \rightarrow (x, y, z - 2\mathbf{p}),$$

observe que  $h$  es un homeomorfismo analítico de explosión, pues

$$h^{-1}(x, y) = (x, y, z + 2\mathbf{p}).$$

Considere  $\lambda(t) = (t^3, t^2, t)$ , la cual es una curva regular, que tiene multiplicidad 1 en el origen. Se tiene que la multiplicidad de  $h \circ \lambda = (t^3, t^2, 0)$  es 2 con lo que se muestra que  $h$  no es Lipschitz.

En 1993, Koike,[13] hizo el asombroso descubrimiento que un homeomorfismo analítico por explosión no cumple con la condición de Lipschitz. Hoy en día, hay muchos ejemplos sencillos de este tipo

Este tipo de ejemplos también existen en  $\mathbb{R}^2$  (ver [12] ), pero está más allá del nivel de este trabajo de tesis.

# Conclusiones

Después de explorar el área de la resolución de singularidades y la equisingularidad, se pueden extraer varias conclusiones importantes.

En primer lugar, destaca la complejidad intrínseca de estos temas, que involucran herramientas matemáticas altamente sofisticadas y un lenguaje especializado. La resolución de singularidades y la equisingularidad se presentan como herramientas útiles en diversas áreas de la matemática, y su comprensión y tratamiento requieren un profundo conocimiento de diversos conceptos y técnicas.

En el contexto de la resolución de singularidades, se resalta la importancia histórica de este problema, que ha ocupado a varias generaciones de matemáticos. La contribución crucial de Heisuke Hironaka en el caso de característica cero es un hito significativo, aunque cabe señalar que el caso de característica positiva aún permanece como un problema abierto.

Finalmente, siguiendo el descubrimiento de Koike [13], se concluye la incompatibilidad real de la analiticidad por explosión con la condición de Lipschitz. En esta fase, no resulta evidente qué condición o condiciones modificadas en la condición de Lipschitz, deben seleccionarse para complementar la analiticidad por explosión. Investigaciones recientes indican que es más prometedor explorar homeomorfismos analíticos por explosión, los cuales preservan el orden de contacto de las aplicaciones arco analíticas. Sin embargo, todavía es demasiado pronto para informar sobre el progreso en esta dirección.

Es importante señalar que entre las diversas nociones de equisingularidad o equivalencia de singularidades, la equisingularidad topológica es una de las más antiguas y fáciles de definir, pero está lejos de ser bien entendida, y quedan abiertas varias preguntas desafiantes. Ejemplos importantes son la conjetura de multiplicidad de Zariski y la caracterización de la trivialidad topológica de familias de singularidades aisladas y no aisladas.

# Bibliografía

- [1] V.I. Arnol, *Normal forms of functions in the neighborhood of degenerate critical point*, Uspekhi Mat. Nauk 29 (1974), 11-49, English transl. Russian Math. Survey, 29 (1974), 19-48. 57
- [2] Abderrahmane J, Ould M., *Newton polygon and trivialisation of families*, J. Math. Soc. JAPAN, 54 (2002), 513-550. 57
- [3] , E. Bierstone and P.D. Milman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing-up the maximum strata of a local invariant*, Inventiones Math. 128 (1997), 207-302. 61
- [4] H. Cartan. *Analytic theory of analytic functions of one or several variables*, Dover, 1995. 30
- [5] T. Fukui, *Seeking invariants for blow-analytic equivalence*, Compositio Math. 105 (1997), 95-107. 62
- [6] T. Fukui, S. Koike, and T.-C. Kuo, *Blow-analytic equisingularities, properties, problems and progress*, in Real analytic and algebraic singularities, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 381 (1997), Longman, 8-29. 63
- [7] T. Fukui and L. Paunescu, *On blow-analytic equivalence*, to appear. 63
- [8] S. Izumi, S. Koike, and T.-C. Kuo, *Computations and stability of the Fukui invariant*, Compositio Mathematica, 130 (2002), 49-73.
- [9] H. Hauser, J. Lipman, F. Ort and A. Quirós, eds, *Resolution of singularities*, A research textbook in tribute to O. Zariski, Progr. Math., 181, Birhauser-Verlag, Basel, 2000. 61
- [10] H. Hironaka. *Resolutions of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I-II*, Ann. of Math., 79, No. 1, (1964), 109-326. 2, 28, 43, 61

- [11] Lages L, Elon. *Curso de análise, Volume 2*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, (1981)159-170. 10
- [12] M. Kobayashi, and T.-C Kuo, *On blow-analytic equivalence of embedded curve singularities*, in Real analytic and algebraic singularities, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 381 (1997), Longman, 30-37. 65
- [13] S. Koike, *On strong  $C^0$ -equivalence of real analytic function*, J. Math. Soc. Japan 45 (1993), 313-320. 65, 66
- [14] T.-C. Kuo. *The modified analytic trivialization of singularities*, J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 605-614. 57
- [15] T.-C. Kuo. *On classification of real singularities*, Invent. math., 82 (1985), 257-262. 47, 57
- [16] T.-C. Kuo. *Stratification Theory*, *ibid*, 284-290. 57, 62
- [17] T.-C. Kuo. *Truncation of taylor series*, *ibid*, 291-297.
- [18] T.-C. Kuo. *Inspiring exercises for undergraduates*, Int. J. Math. Sci. Technol., 30, No6 (1999) 811-821. 2, 62
- [19] T.C. Kuo and L. Paunescu. *An elementary exposé on equisingularity*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 20 (2001), 345-350. 2
- [20] T.C. Kuo and L. Paunescu. *Equisingularity in  $\mathbb{R}^2$  as Morse stability in infinitesimal calculus*, Proc. Japan Acad., 81, No. 6, Ser. A 20 (2005), 115-120. 2
- [21] T.C. Kuo and L. Paunescu. *Desingularization and equisingularity at undergraduate level*, Real And Complex Singularities (2007) 207-231. 2
- [22] J.N. Mather, *Stability of  $C^\infty$ -mappings III, Finitely determinar map-germs*, Publications Mathématiques del l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 35 (1969), 127-156. 57
- [23] L. Paunescu. *Invariants associated with the blow-analytic homeomorphisms*, Proc. Japan Acad., 78, Ser. A, (2002), 194-198. 2
- [24] L. Paunescu. *An example of blow-analytic homeomorphism*, in Real analytic and algebraic singularities, Pitman Research Notes in Mathematics Series 381 (1997), Longman, 62-63. 2

- [25] O. Villamayor. *An introduction to constructive desingularization*, arXiv:math.AG/0507537, 2005. 61
- [26] O. Zariski. *Contributions to de problem of equisingularity*. In questions on algebraic varieties. Ed. E.Marchionna, cremonese, Roma 1970, 261-343. 3
- [27] S. Koike and A. Parusinski. *Equivalence relations for two variable real analytic function germs*, arXiv:math.AG/0801.2650, 2008.

