PONTIFICIA UNIVERSIDAD

CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

FUNCIÓN EXPONENCIAL: UN ESTUDIO BASADO EN LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA PARA ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Enseñanza de las Matemáticas

que presenta:

Tomás Arturo Carhuallanqui Poma

Asesor:

Tito Nelson Peñaloza Vara

Lima, 2023

Informe de Similitud

Yo, TITO NELSON PEÑALOZA VARA, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulada FUNCIÓN EXPONENCIAL: UN ESTUDIO BASADO EN LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA PARA ESTUDIANTES DE BACHILLERATO, del autor Tomás Arturo Carhuallanqui Poma, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 7 %. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el ..09/11/23...
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 10 de noviembre de 2023

Apellidos y nombres del asesor: Peñaloza Vara, Tito Nelson	
DNI: 08154677	Firma: Peñaloza VT
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1915-9682	

A Dios, a mis seres queridos en el Cielo y

a mi esposa Lisana Vilcapuma Ramos,

quienes me acompañaron y apoyaron en este gran objetivo

recibiendo incondicionalmente todo su apoyo.

A la vida, que me ofrece oportunidades

para seguir cristalizando metas.

Agradecimientos

A Dios y a la Virgen María por estar presentes en mi vida; por guiar mis pasos a cada día, a cada noche, a cada momento, permitiéndome lograr uno de los grandes objetivos en mi vida.

A mi asesor, Mtro. Tito Peñaloza Vara por su incansable apoyo, exigencia, revisión constante, sugerencias pertinentes y críticas constructivas al presente trabajo que ayudaron a mejorar cada versión preliminar y terminar en esta versión final de la presente investigación.

A los miembros del jurado, Dra. Jesús Flores Salazar y Dra. Verónica Neira Fernández por sus aportes valiosos en las revisiones para con la versión final que me han permitido seguir construyendo aprendizajes en mi formación profesional.

A la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por sus enseñanzas en los cursos de Métodos de Investigación, donde nació en mí el gusto por esta actividad científica y lograr plantearme objetivos futuros.

A la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre, por sus consejos y oportunidades para seguir creciendo en mi profesión educativa.

A la Mtra. Carolina Rita Reaño, quien con su apoyo humano en tiempos de Covid, supo animarme a seguir adelante sin desmayar para lograr los objetivos que uno se propone en la vida.

A la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática TecVEM perteneciente a la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas que con gentileza ofrecieron apoyo a esta investigación.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por todas las experiencias beneficiosas y valiosas que tuvieron en cada clase, que me permitieron afirmar en mi la vocación en el camino profesional docente.

Resumen

La presente investigación tiene por objetivo analizar cómo estudiantes de quinto de secundaria comprenden la noción de función exponencial con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica al realizar una secuencia de actividades. Los estudiantes tienen edades de 16 a 17 años, forman parte del Programa del Bachillerato Internacional de una institución privada de Lima-Perú. Para conseguir este propósito se ha empleado algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS); tomando en cuenta los registros en lengua natural, algebraico y gráfico. Además, la configuración del Registro Gráfico Dinámico (RGD) nos permite reconocer el desarrollo de aprehensiones. La metodología aplicada es de tipo cualitativa y como método se utiliza la Ingeniería Didáctica. En relación a la parte experimental, hemos seleccionado a cuatro estudiantes agrupados en dos duplas, quienes desarrollan dos actividades; la primera en relación al reconocimiento de la función exponencial $f(x) = A \cdot b^x$ junto a características del dominio y rango, la segunda respecto a la monotonía de dicha función. Estas actividades inician con el uso de GeoGebra en Línea para mejorar la comprensión de ciertas características del objeto matemático y terminan en el uso de lápiz y papel para resolver problemas extramatemáticos que permitan evidenciar la comprensión de lo visto en la primera actividad. Por último, los resultados mostraron que los estudiantes logran realizar transformaciones de las representaciones en diferentes registros semióticos junto al desarrollo de aprehensiones, lo que significó la comprensión de la noción de función exponencial.

Palabras clave: Función Exponencial, Registros de Representación Semiótica, Registro Gráfico-Dinámico, GeoGebra.

Abstract

The objective of this research is to analyze how fifth year high school students understand the notion of exponential function based on the Theory of Semiotic Representation Records when performing a sequence of activities. The students are 16 to 17 years old and are part of the International Baccalaureate Program of a private institution in Lima-Peru. To achieve this purpose, some aspects of the Theory of Semiotic Representation Registers (TRRS) have been used; taking into account the natural language, algebraic and graphic registers. In addition, the configuration of the Dynamic Graphic Register (DGR) allows us to recognize the development of apprehensions. The methodology applied is qualitative and the method used is Didactic Engineering. In relation to the experimental part, we have selected four students grouped in two pairs, who develop two activities; the first one in relation to the recognition of the exponential function $f(x) = A \cdot b^x$ together with characteristics of the domain and range, the second one in relation to the monotonicity of this function. These activities begin with the use of GeoGebra Online to improve the understanding of certain characteristics of the mathematical object and end in the use of pencil and paper to solve extra-mathematical problems that allow to evidence the understanding of what was seen in the first activity. Finally, the results showed that the students manage to perform transformations of the representations in different semiotic registers together with the development of apprehensions, which meant the understanding of the notion of exponential function.

Keywords: Exponential Function, Semiotic Representation Registers, Graphic-Dynamic Register, GeoGebra.

ÍNDICE

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

En el Currículo Nacional de la Educación Básica Regular, la función exponencial constituye un tema necesario de abordar en los estudiantes de quinto de secundaria, además de ser también utilizado en diversas aplicaciones como el interés compuesto, el crecimiento de bacterias, el crecimiento poblacional, entre otros y porque es base para tomar otros conocimientos a nivel de la educación superior. Está presente que para su enseñanza predomina el uso de las representaciones algebraicas, el uso de problemas de contexto intramatemático y el poco o limitado uso de la tecnología, por ejemplo, algún software que permita comprender mejor algunos conceptos que no pueden ser tan claros en lápiz y papel. Así, encontramos esta problemática en investigaciones de referencia como Díaz (2021), quien señala que un enfoque repetitivo de mecanismos y de enseñanza tradicional trajeron como consecuencia dificultades en la comprensión de la función o como indica García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2018), que las dificultades de aprendizaje del concepto de funciones están dadas por la ausencia en el uso de un software de representación dinámica que favorezca la comprensión del objeto matemático.

Así, tomando en cuenta la literatura en las investigaciones preliminares, ofrecemos este estudio que tiene por objetivo general analizar cómo estudiantes de quinto de secundaria comprenden la noción de función exponencial con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Para conseguir ello, utilizamos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1999) y la configuración del Registro Gráfico Dinámico de Peñaloza y Salazar (2018), que nos ha sido de utilidad para analizar las actividades desarrolladas produciéndose transformaciones de tratamiento y conversión entre diferentes registros semióticos como, el registro de lengua natural, el registro algebraico, el registro gráfico y el registro gráfico-dinámico (RGD) con el uso de GeoGebra en línea. Ello junto al desarrollo de las aprehensiones: perceptiva, operatoria y discursiva, ayudaron a los estudiantes a la comprensión de la noción sobre el objeto matemático función exponencial.

Consideramos como método de investigación algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) que, mediante la elaboración de una secuencia de actividades, permiten contrastar nuestro análisis a priori y a posteriori para validar los supuestos. En tal sentido, se elaboraron dos actividades aplicadas por el docente del curso de matemáticas que a la vez es también el investigador y el análisis de los resultados que se recogió de los estudiantes se realizó con el uso de Fichas de Actividades y la grabación de audio de las interacciones de cada dupla y de las imágenes en video sobre lo realizado en GeoGebra en línea ello con el apoyo de la plataforma de videoconferencia Zoom. Así, consideramos dividir la investigación de la manera siguiente:

Para el primer capítulo, presentamos la problemática de la investigación, donde revisamos investigaciones de referencia relacionadas al aprendizaje de la función exponencial, realizamos la justificación del estudio considerando aspectos académicos, profesionales y personales. Asimismo, los aspectos de la Teoría de registros de Representación Semiótica de Duval (1995) y el método correspondiente a la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). De igual manera, hemos definido la pregunta de investigación y el objetivo general vinculado a tres objetivos específicos.

En el segundo capítulo, hacemos un estudio del objeto matemático función exponencial. Presentamos el aspecto epistemológico del objeto, los aspectos matemáticos en libros de texto de matemática y finalmente, el aspecto didáctico donde se analiza un texto de matemática de quinto de secundaria utilizado en la educación básica regular y el texto utilizado por el estudiante en el Programa del Bachillerato Internacional para, conocer las concepciones que tiene sobre el objeto función exponencial en la enseñanza.

En el tercer capítulo, realizamos una descripción de los sujetos de investigación, se realiza la organización y descripción de lo son la secuencia de actividades que desarrollarán los estudiantes y finalmente, realizamos el análisis a priori y a posteriori para contrastarlos y validar nuestros supuestos.

Por último, las consideraciones finales de la investigación en relación a las investigaciones de referencia y la justificación, en relación al marco teórico y metodológico, en relación al objetivo general y la pregunta de investigación. Seguidamente, damos recomendaciones para futuras investigaciones por medio de perspectivas que pueden surgir a partir de nuestro estudio.

Capítulo I: PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo contiene la problemática que favorece el despliegue de esta investigación. Así, realizamos una búsqueda de aquellas investigaciones que guardan relación con el objeto matemático función exponencial. Seguidamente, la justificación, la formulación de la pregunta de investigación, los objetivos tanto el general como los específicos, el marco teórico y finalmente, la metodología y procedimientos experimentales que desarrollarán este trabajo.

1.1 Investigaciones de Referencia

En esta sección, realizamos una revisión de la literatura en educación matemática referida a funciones y en particular a la función exponencial. Todo ello teniendo como fuentes de consulta investigaciones en educación matemática (textos en físico, en línea y revistas indexadas) además de repositorios universitarios (tesis de maestría y doctorado). Las investigaciones se enmarcan generalmente en estudiantes que se encuentran en la educación básica regular y el primer semestre de estudios universitarios, hemos advertido que no hay mucha producción relacionada al estudio de la función exponencial en estudiantes de quinto de secundaria. Así, hemos considerado estudios que hacen uso de un ambiente de representaciones dinámicas (ARD) como el *GeoGebra*. También hemos considerado autores que utilizan diferentes marcos teóricos, entre ellos, la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), el Pensamiento Variacional (PV), la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) hacia objetos matemáticos como función y función exponencial.

En relación a la problemática de aprendizaje del objeto matemático función, Díaz (2021) manifiesta que el enfoque tradicional y repetitivo para la enseñanza de las matemáticas, en especial el de este concepto, trajo como consecuencia que los estudiantes de quinto de secundaria de una institución educativa peruana, presenten dificultades para su aprendizaje. En tal sentido, propone como objetivo analizar si una propuesta didáctica en un entorno virtual sobre el concepto de función favorece transformaciones en las distintas representaciones de la función. La investigación se apoya en el marco teórico de la TRRS.

El desarrollo del estudio es de corte cualitativo. Los procedimientos metodológicos se desenvuelven en 5 fases: planteamiento del problema, elaboración de la propuesta didáctica, análisis de la propuesta didáctica y conclusiones y posibles investigaciones futuras. La propuesta didáctica se basó en dos actividades: la primera está referida a la exploración de nociones fundamentales del concepto de función donde se propone sesiones que empiezan con un diagnóstico de saberes previos al concepto de función para luego, establecer actividades que permitan conversiones del registro algebraico al gráfico y del registro en lengua natural al algebraico, todo ello haciendo uso virtual de la plataforma *Classroom,* la pizarra *Jamboard* y el GeoGebra. La segunda actividad, está enfocada al manejo del dominio y rango de una función, así se realizarán tratamientos en la representación algebraica utilizando también al GeoGebra para permitir que los estudiantes puedan llegar a las soluciones. Asimismo, se presentan ítems donde se realizan tratamientos en el registro gráfico.

Es preciso señalar entre las conclusiones de Díaz (2021) que en la propuesta didáctica se promueve tratamientos y conversiones en relación al objeto matemático función. Así también, el análisis esperado de las actividades bajo la TRRS permitió proveer de espacios de reflexión sobre los tratamientos y conversiones que se realizarían al resolver los problemas sobre funciones. Finalmente, sugiere realizar un futuro estudio relacionado a otros conceptos sobre funciones, en las que además es probable estudiar las coordinaciones entre sus representaciones con apoyo de la tecnología digital, por ejemplo, el GeoGebra.

Si bien es cierto el autor hace referencia al objeto matemático función, es pertinente tomarla en cuenta dado que la propuesta didáctica que refiere consigue establecer coordinaciones entre registros de representación semiótica utilizando elementos virtuales para las actividades propuestas. Ello, nos permite tomar en nuestro estudio el uso de tecnologías digitales como el GeoGebra y tomar en cuenta que las actividades que realizaremos puedan ser analizadas desde la TRRS.

Por otro lado, Tarira, Parra-Sandoval y Delgado (2020) mencionan que la praxis pedagógica en Ecuador apunta a ser tradicional, por ello es necesario conocer de cerca estos aspectos para realizar futuras mejoras. Así, la investigación tiene como objetivo describir el proceso de enseñanza de la función exponencial en un docente de matemática de secundaria. Mediante un acercamiento cualitativo, rescatan primero la importancia de la función exponencial como objeto matemático que apoya la comprensión de diversos campos como la economía, biología, física, medicina entre otros. En estos campos, el crecimiento y decrecimiento es un aspecto relevante para comprender fenómenos de la vida real. La investigación entonces se desarrolla bajo una metodología cualitativa, además hace uso del método de estudio de caso. Asimismo, se aplicó el modelo del Cuarteto de Conocimiento (The Knowledge Quartet – KQ) propuesto por Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (citado por Tarira et al., 2005), que son un conjunto de categorías propuestas con la finalizad de analizar los conocimientos y didáctica del profesor en su acción pedagógica: fundamento, transformación conexión y contingencia.

En la investigación, la experimentación se realiza en un docente de matemática de una institución educativa del Ecuador. La misma se realiza en dos fases: la primera se realizó un conversatorio con el docente para informarle del propósito de la investigación y solicitarle observar su praxis pedagógica al enseñar la función exponencial, la misma que se registró a través de una grabación de la clase. En una segunda fase, se procedió a la descripción del proceso de enseñanza de la función exponencial, se usó la observación no participativa, para después analizar las grabaciones. Se tomó en cuenta el análisis e interpretación usando las categorías (fundamento, transformación, conexión, contingencia) y propiedades tomadas en la descripción. Para la categoría fundamento, se observó aspectos pedagógicos y disciplinares para abordar la función exponencial como, el objetivo de la sesión y los procedimientos empleados en su enseñanza. En la categoría transformación se hizo hincapié en los ejemplos y el material de enseñanza. Para la conexión, se observó el uso de situaciones que relacione la función exponencial con la vida real. Por último, para la categoría contingencia, se tomó en cuenta la preparación del docente para lo que no está planificado, ello tiene relación con las ideas de los estudiantes y el posible desvío que tenga que hacer a su plan de trabajo por alguna circunstancia no prevista.

En cuanto a los resultados, Tarira et al. (2020), evidencian que el docente emplea un enfoque de enseñanza-aprendizaje tradicional y conductista, lo que se traduce en que las ideas matemáticas se dan de forma mecánica. Además, la conexión de la función exponencial con otros cursos tales como la física, la biología, no se dio del todo, con lo que el acercamiento de la función exponencial a los estudiantes no se produjo. Esta investigación propone también hacer cambios en la práctica docente a través de actividades de formación efectivos.

En tal sentido, el estudio puede ayudar al nuestro a reconocer que para poder abordar el estudio del aprendizaje de la función exponencial en estudiantes de quinto de secundaria es necesario conocer también cómo están recibiendo esta enseñanza. Es así, que el docente juega un papel necesario para reconocer sus prácticas pedagógicas en especial cuando aborda este objeto matemático, lo que ayudará en establecer vinculaciones con contextos extramatemáticos al elaborar las actividades de nuestro estudio.

Los investigadores García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2018) advierten las dificultades de aprendizaje que se presentan en el estudio de las funciones. Es así que para su investigación toman como objeto matemático de estudio a la función exponencial, que se enseña en el currículo peruano tanto en educación básica como en el nivel universitario. Según el Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB), primero se estudia las ecuaciones exponenciales en cuarto de secundaria y en quinto de secundaria se enseña la función exponencial a través de gráficas y modelos. A nivel universitario, la función exponencial se enseña generalmente en el primer ciclo de la mayoría de especialidades y con aplicaciones en contextos como el crecimiento, curvas de aprendizaje, tasa de interés, entre otros. Así, podemos reconocer que el objetivo de la investigación de García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2018) fue realizar un análisis de la génesis instrumental de la función exponencial mediado por el GeoGebra en estudiantes de una universidad de Lima-Perú, utilizando para ello el marco teórico del Enfoque Instrumental (EI).

Los autores, hacen uso de una metodología cualitativa aplicando como método aspectos de la Ingeniería Didáctica (ID). La parte experimental se llevó a cabo con 11 estudiantes del curso de Matemática Básica en la carrera de administración de una universidad de Lima utilizando una de sus salas de cómputo para realizar dos encuentros.

El primer encuentro desarrolla una primera actividad la cual permite a los investigadores centrarse en la instrumentalización del objeto matemático función exponencial a través de las propiedades y características que presenta. El segundo encuentro permitió a los estudiantes realizar la segunda actividad donde se buscaba la instrumentación del artefacto función exponencial. Cada participante tuvo una computadora donde se encontraba instalado el software GeoGebra y una ficha de trabajo.

Para el análisis los autores tomaron un estudiante dado que era el único que no tenía conocimientos sobre la función exponencial. En la actividad 1, el objetivo pasa por identificar los parámetros $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ en la función $f(x) = a^x + b$ utilizando un applet de GeoGebra que tenía deslizadores. El estudiante logró movilizar conceptos previos relacionados a función, crecimiento y decrecimiento, así como reconocimiento de características propias del uso del applet de GeoGebra como el hecho de reconocer que la función exponencial no puede tomar el valor de uno o que el parámetro $\boldsymbol{b}$ es una asíntota horizontal. La segunda actividad tuvo como objetivo que a partir de una situación dada se instrumentalice la función exponencial a través de la modelación de una situación en un contexto extramatemático. Así, respecto a la situación referida a la población de canguros en Australia, el estudiante logró responder al primer ítem, modelar las poblaciones de la región A como $A(t) = 10.2^t$ y la región B como $B(t) = 10240.(1/2)^t$ por medio de tablas. En el segundo ítem, el estudiante logró mediante el GeoGebra responder respecto al crecimiento y decrecimiento utilizando los conocimientos que le brindó la primera actividad. Por último, para responder le último ítem, reconoció en la pregunta el uso de la asíntota de la función exponencial.

En cuanto a las conclusiones, los autores señalan que el estudiante logró transformar el artefacto función exponencial en instrumento lo que es evidenciado en las actividades que resuelve. Se reconoce que el GeoGebra favoreció la instrumentalización entonces, es posible afirmar que permitió también convertir el artefacto función exponencial en instrumento cuando el estudiante desarrolla las actividades.

Pensamos que la investigación de García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2018) nos puede ayudar a considerar que el uso del GeoGebra para nuestro estudio sobre la función exponencial puede ser un medio importante al permitir el desarrollo de actividades en un entorno dinámico que permita reconocer características y propiedades que estarán presentes también en nuestras actividades.

El siguiente estudio corresponde a Díaz-Berrios y Martínez-Planell (2022), tienen el objetivo de formar el concepto de función exponencial en estudiantes de quinto de secundaria en Puerto Rico, a través de actividades utilizando fichas de dominó donde se dividen a cada una por una línea horizontal colocándose en la parte superior la potencia y en la inferior el exponente. Esto se da debido a las dificultades que se presentan, por el sustento de estudios anteriores, para el aprendizaje de este objeto matemático.

El marco teórico utilizado en esta investigación es el de la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOS) en la intención de poder realizar el análisis de las actividades realizadas con miras a la comprensión de las funciones exponenciales y su inversa, la función logarítmica. La investigación es de tipo cualitativo, fue aplicada a 16 estudiantes de quinto de secundaria de edades entre 15 y 16 años de una escuela pública de Puerto Rico después de las clases regulares, quienes llevaron el curso de Álgebra II en el año anterior y no poseen conocimientos sobre función exponencial ni logarítmica, así como cada sesión grabada para la recolección de datos relacionados a la discusión entre estudiantes al resolver las actividades propuestas.

Los estudiantes divididos en dos grupos, desarrollaron 13 actividades repartidas en 15 sesiones cada una de 1,5 horas presentándoles unas tarjetas a modo de fichas de dominó dividida en dos partes, la superior que representa a $\boldsymbol{y}$, en la parte inferior el valor de $\boldsymbol{n}$. En esta parte, el estudiante va reconociendo cada para ordenado que implícitamente aparece en la ficha de dominó. En un primer momento se pretende que cada estudiante reconozca la exponenciación a través de la identificación de $y = b^x$, donde $x > 0$ y se toma una parte donde $0 < b < 1$, y otra parte donde $b > 1$. Cada grupo realizó la actividad de ordenar las fichas de dominó según un patrón a ser reconocido en base a exponentes enteros para extenderlos a los números racionales. Luego, el estudiante a medida que va desarrollando las acciones con las fichas de dominó, debe escribir las relaciones que se presentan en la representación algebraica para reconocer la noción de función exponencial. Finalmente, relacionan esa concepción para construir la noción de logaritmo como exponente.

Los autores refieren que el estudio permitió utilizar los materiales que propuso Ferrari-Escolá (2016, citado por Díaz-Berrios y Martínez-Planell) en estudiantes que no tenían conocimientos sobre función exponencial con la finalidad que tengan la noción de este objeto matemático extendiéndola a funciones logarítmicas. Los estudiantes evidenciaron la necesidad de notación exponencial para exponentes enteros y racionales. Es necesario cambiar las cartas o dominós para que no se vean como fracciones. Se puede extender la idea de uso de este material a procesos de experiencias reales continuas, así como también utilizar el material para representaciones gráficas y el modelado.

El estudio de Díaz-Berrios y Martínez-Planell (2022) nos permite reconocer que la noción de función exponencial está conectada a la comprensión de la exponenciación por parte de los estudiantes, así como el reconocer el uso de las propiedades que conlleva, lo que permitirá para nuestra investigación tomar en cuenta estas consideraciones. Podemos pensar, que la teoría APOS permitió realizar el análisis en las representaciones tabulares y algebraica, sin embargo, consideraremos en nuestro estudio, más de dos representaciones en la intención de buscar que los estudiantes coordinen o articulen las mismas.

Chacón (2017) realiza una investigación, en ella analiza si una secuencia de actividades favorecerá que estudiantes de segundo grado de secundaria se aproximen al concepto de función lineal bajo la TRRS. La investigación es de corte cualitativo y aplica como método la ID. En la fase de experimentación se elige a la institución educativa pública Nuestra Señora de Lourdes de Lima-Perú, la población de estudio está conformada por 27 estudiantes quienes participaron de tres actividades, acompañados del profesor que hace también de investigador, un observador y un colaborador. La primera actividad es la conversión desde el registro en lengua natural hacia el registro gráfico de la función lineal. La segunda actividad está diseñada para que los estudiantes puedan realizar conversiones desde el registro de lengua natural hacia el registro algebraico, gráfico y tabular. Por último, la tercera actividad parte de una situación del contexto de la vida real, aquí se espera que los estudiantes puedan realizar conversiones desde el registro en lengua natural hacia el registro gráfico.

Para el desarrollo de la experimentación, se eligieron a dos estudiantes aleatoriamente, se realizó el análisis a priori y se contrasta con lo realizado por el estudiante para un análisis a posteriori. Uno de los estudiantes logró realizar transformaciones en los registros de lengua natural, algebraico y gráfico, así también algunos tratamientos en los registros gráfico y algebraico. El otro estudiante tuvo dificultades para lograr estos transformaciones semióticas en los registros.

Finalmente, en la investigación se evidencia que las transformaciones realizadas desde la representación de lengua natural hacia la representación gráfica, algebraica realizadas por los estudiantes, uno más que otro, permitió establecer que están aproximándose al concepto de función lineal, más allá de los tratamientos realizados en las representaciones de cada registro, la importancia de la conversión entre registros favorece la comprensión del objeto matemático función lineal.

También mencionamos a Flores (2019), realiza una investigación relacionada a las dificultades y vacíos en estudiantes de quinto de secundaria al estudiar la función exponencial. La misma se centró en analizar cómo una secuencia didáctica puede construir el concepto de función exponencial en estudiantes de quinto de secundaria apoyado en la TSD. Su estudio es necesario dado que, a la fecha, son pocas las investigaciones en el nivel secundario. Además, este objeto matemático está presente en el CNEB.

El autor toma aspectos de la ID como método de investigación. El estudio se realizó en la institución educativa privada “San Vicente de Paul” en Lima-Perú siendo los sujetos de investigación estudiantes de quinto de secundaria con edades entre los 16 y 17 años, con saberes previos sobre funciones lineales y cuadráticas.

Para la experimentación se formaron dos grupos, el primero conformado por dos estudiantes y el segundo por tres. Se les presentaron tres situaciones problemas los que desarrollaron a lápiz y papel. Se analizan las grabaciones de audio que tomaron para recoger información de los estudiantes. Está secuencia didáctica estuvo conformada por tres situaciones problemáticas la primera de ellas está orientada a conocer la construcción de la función exponencial la segunda a conocer las características de la función exponencial y la tercera a usar lo aprendido en la primera y segunda y también buscar diferencias entre la función exponencial y la función afín.

En cuanto a las conclusiones, Flores (2019) pudo evidenciar que los estudiantes comprenden la función exponencial de la forma $f(x) = a\,b^x$, además de lograr reconocer propiedades de crecimiento y decrecimiento, así como también la diferencia de un modelo exponencial de un modelo lineal. Así también, las situaciones problema ayudaron a mejorar la comprensión de dicho objeto matemático siguiendo el objetivo de su investigación.

Este estudio aporta al nuestro en el sentido de que existe aún problemas en el aprendizaje de la función exponencial, además, una secuencia de actividades es el camino para poder estudiar qué tanto logran comprender dicho objeto matemático.

En Brasil, Toledo (2018) realiza un estudio en el que se presentaron dificultades para el aprendizaje de la función exponencial en estudiantes de secundaria quienes la veían como un concepto que sin conexión con contextos reales. Así, la autora buscó analizar los resultados que provocaban la Resolución de Problemas propuesta por Onuchic (1999, citado por Toledo) como metodología para el aprendizaje de la función exponencial en estudiantes de secundaria.

Onuchic (1999, citado por Toledo) afirma que un problema es aquel que nos interesa pero que no tenemos de primera mano una salida para resolverlo. Las relaciones que se generan en la solución traen nuevas concepciones y conceptos, también la actividad de resolución de problemas en clase se basa en la comprensión y el significado aplicando la Resolución de Problemas que propuso Onuchic, comprendiendo 7 etapas: formación de grupos, papel del profesor, resultado en el tablero, plenario, análisis de resultados, consenso y formalización.

De acuerdo a ello, Toledo (2018) realiza una investigación de tipo cualitativo y descriptivo, para el efecto se tuvieron cuatro actividades donde las tres primeras se basaron en la Resolución de Problemas propuesta por Onuchic y la última actividad fue una prueba de verificación la cual se aplicó a estudiantes de secundaria primer, segundo y tercer año de bachillerato. Las actividades se realizaron en cuatro partes: la primera corresponde resolver un problema relacionado al crecimiento de bacterias con la función exponencial en crecimiento, la segunda etapa un problema relacionado a la vida media de una droga en el cuerpo, aquí interviene una función exponencial decreciente además de un problema relacionado al precio de un inmueble, en la tercera se analizaron gráficos de funciones exponenciales para temas de crecimiento y decrecimiento y la última etapa está referida a la práctica de situaciones diversas. En cada etapa, de acuerdo a la metodología de Resolución de Problemas de Onuchic, los estudiantes resolvían la situación problemática de forma individual para luego ingresar a grupos y socializar su solución, finalmente, el docente formalizaba los conceptos matemáticos eliminando errores que presentaban los estudiantes. Las respuestas eran valoradas como No Satisfactorio; cuando el estudiante no resolvió el problema propuesto. Como Satisfactorio; cuando se ha acercado a la respuesta que se ha esperado. Totalmente satisfactorio; cuando el estudiante ha realizado el problema propuesto con una solución adecuada.

Uno de los resultados encontrados por la autora es que el aprendizaje de la función exponencial por medio de la metodología de Resolución de Problemas propuesta por Onuchic aumentó en los estudiantes a comparación de una enseñanza tradicional, el uso de contextos extramatemáticos para introducir los conceptos de función exponencial, permitieron mejorar la comprensión de este objeto matemático. Además, se concluyó que los estudiantes de primer año lograron comprender mejor los conceptos de función exponencial que los de tercer y cuarto de secundaria, dado que estos últimos grupos tenían deficiencias en las nociones de función.

Es relevante para nuestro estudio conocer que las situaciones problema deban estar ligadas a contextos de la vida real. Por ello, el estudio que realiza la autora, nos permite considerar que en la secuencia de actividades deberá contener situaciones extramatemáticas.

Tenemos la investigación de Alvarez (2017) realizado en Colombia, quien expresa que los estudiantes de primer semestre de las carreras de Ingeniería Mecánica y Eléctrica en la Universidad Tecnológica de Pereira presentan, en el curso de Matemáticas I, dificultades para el aprendizaje de la función exponencial y logarítmica junto a una enseñanza con enfoque tradicional. Según el autor, los estudiantes no comprenden el comportamiento exponencial de una variable respecto de otra, así como la noción de crecimiento de una función exponencial. Por ello, se realiza un estudio cuyo objetivo es mejorar la comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas utilizando la TRRS y la TSD, mediado por entornos virtuales como la creación de una plataforma virtual y los Applets de GeoGebra.

La investigación es de tipo cualitativo, en ella se hace uso de la ID como método. El investigador inicia con una prueba diagnóstica con la finalidad de averiguar con qué saberes previos cuentan los estudiantes respecto a la función exponencial y logarítmica. Esta prueba arrojó cómo resultado que los estudiantes presentan dificultades para el manejo de las potencias y el de poder interpretar el significado después de las operaciones, además de no lograr reconocer si la función es creciente o decreciente, dificultades en identificar propiedades, dificultades para comprender problemas.

El autor hace una revisión del modelo de enseñanza aplicado. Finalmente, se realiza un diseño de una estrategia dinámica usando entornos virtuales que ayudan a potenciar el aprendizaje; el primer entorno virtual es una plataforma de interacción entre profesor y estudiante en la intención de llevar un seguimiento del aprendizaje del estudiante y la segunda es una herramienta dinámica como los Applets de GeoGebra en la que el profesor y estudiante pueden modelar un ejercicio y observar el comportamiento de su gráfica y realizar análisis. Se busca un aprendizaje significativo para lograr la comprensión de la función exponencial y logarítmica desde la TRRS.

Entre las conclusiones de la investigación están el apoyo del análisis epistemológico, didáctico y cognitivo junto a los objetivos permitió elaborar la situación didáctica considerando las dificultades en el concepto de función exponencial y logarítmica. También está la importancia de la TRRS en el análisis de una estrategia de aprendizaje didáctica para reconocer las dificultades de los estudiantes en relación a los tratamientos y conversiones en las representaciones semióticas. El uso de ambientes de representación dinámicos como el GeoGebra facilitó el tratamiento y las conversiones al momento de desarrollar las actividades diversas que tienen los módulos didácticos. Los entornos virtuales como por ejemplo, el *Classroom* mejoró la motivación en el aprendizaje de la función exponencial y logarítmica.

Alvarez (2017) reconoce la importancia del GeoGebra como medio tecnológico en el aprendizaje de la función exponencial. Asimismo, el uso de la TRRS ayuda a explicar cada transformación semiótica que ocurre en el desarrollo de actividades diseñadas. Si bien es cierto, esto fue aplicado a estudiantes de ingeniería del primer semestre, es pertinente tomarla para nuestro estudio dado que nos ayudará de igual forma sobre estudiantes de quinto de secundaria pues consideramos que sus edades caracterizan un aprendizaje similar.

Finalmente, presentamos la investigación de Sawalha (2018), que corresponde a una tesis doctoral. La investigadora observó en estudiantes de secundaria de los Estados Unidos, que el aprendizaje de la matemática estaba orientado más a los procedimientos que a la comprensión de los conceptos. Además, apoyándose en la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) recomienda que el aprendizaje de las matemáticas debe estar ligado a situaciones que conecten los conceptos con situaciones del ámbito real para favorecer la mejora en el rendimiento de los estudiantes. Así, la autora tiene el propósito de examinar la forma cómo el uso de la resolución auténtica de problemas impacta en el rendimiento y en la actitud de los estudiantes al estudiar funciones exponenciales.

En este estudio se aplicó un diseño mixto; participaron dos grupos de estudiantes de 8vo grado del curso de Álgebra I de dos escuelas suburbanas ubicadas en el medio oeste de los Estados Unidos. Por un lado, se le enseña a un grupo de estudiantes la función exponencial de forma tradicional, mientras que al otro grupo se le enseña a través de la resolución auténtica de problemas. Los instrumentos de recojo de información fueron pruebas de inicio y de fin, cuestionarios, reflexiones, encuestas antes y después de la experiencia para obtener datos cuantitativos y el uso de entrevistas, observaciones y reflexiones para datos cualitativos.

Los resultados del estudio con datos cuantitativos mostraron que antes del aprendizaje sobre la función exponencial, los estudiantes de los dos grupos mostraban similitudes, sin embargo, luego del estudio revelaron diferencias a favor del grupo cuasiexperimental sobre el grupo de control. La información cualitativa evidenciaba que los del grupo experimental se afectaron más por el uso de la resolución auténtica de problemas. La actitud fue mejor en los del grupo experimental después del estudio.

Dentro de las conclusiones que ofrece el estudio de la autora, se encuentra la mejora del rendimiento por parte de los estudiantes del grupo experimental sobre los del grupo de control en el aprendizaje de la función exponencial. Además, el uso de situaciones que estén vinculadas a contextos de la realidad ha favorecido este aprendizaje. Así también, queda evidenciado que el uso de un enfoque tradicional donde se muestra a la función exponencial como una expresión algebraica que replica valores de una variable dependiente en base al valor de su variable independiente solo produjo en los estudiantes del grupo de control un aprendizaje pasajero, mientras que en el grupo experimental lograron reconocer el concepto de función exponencial con amplitud de características en un contexto extramatemático.

La investigación de Sawalha (2018) favorece una vez más el hecho de poder vincular en la elaboración de nuestras actividades el uso de relaciones que tiene la función exponencial con situaciones de la vida cotidiana.

Por lo visto anteriormente, podemos entender la pertinencia de nuestra investigación dado que el desarrollo de actividades por medio del GeoGebra permitirá reconocer a través de la TRRS las transformaciones que suceden con los diferentes registros de representación que realizarían los estudiantes del Programa del Bachillerato, para favorecer su comprensión sobre el objeto matemático función exponencial.

Estamos en condiciones de poder presentar la justificación de nuestro estudio.

1.2 Justificación

Los estudios realizados por Díaz (2021), García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2018), Flores (2019) dan cuenta que los estudiantes de secundaria tienen problemas para reconocer la naturaleza propia de la función, en particular la de la función exponencial, comprender los procesos de su formación a partir de los cambios que pueda tener según los valores de sus variables, transformaciones según parámetros que se le asocian, aspectos de crecimiento y decrecimiento.

Campo y García (2020) sostienen que estudiar a las funciones exponenciales es importante ya que estos conceptos presentan trascendencia en sí mismos, de igual modo permite comprender ideas que corresponden a las matemáticas en los estudios superiores.

El estudio de la función exponencial, además de presentar conexiones con otros aspectos matemáticos como el Cálculo, también es importante dado que se conecta con situaciones del mundo real, lo que muchos países contemplan también en sus currículos de estudio. Así lo enfatiza Toledo (2018), que menciona el uso de la Resolución de Problemas de Onuchic como metodología para el aprendizaje de nuestro objeto de estudio en contextos extramatemáticos. Además, está conectada con otras áreas del saber cómo la economía, la biología, la demografía, entre otras disciplinas profesionales. Es por ello que se requiere de la comprensión de este objeto matemático para poder interpretar la realidad, una habilidad de pensamiento necesaria en estos tiempos (Cano, 2012). Villa-Ochoa (2015) expresa:

> Los planteamientos expuestos anteriormente ponen de relieve la necesidad de proponer mayores alternativas para establecer vínculos entre las matemáticas escolares y la vida cotidiana de los estudiantes; asimismo la indagación sobre los factores que pueden

intervenir en las maneras en que los profesores establecen estos vínculos y los integran en los currículos escolares también debe seguir siendo objeto de estudio. (p. 135)

Esta conexión puede establecer también mucha cercanía al entorno propio de la persona, en este escenario Elstak (2007) menciona que la función exponencial está muy vinculada a la matemática financiera en el crecimiento del dinero cuando está colocado bajo el interés compuesto, la inflación en un determinado país, el creciente aumento en la deuda producido por una tarjeta de crédito, una epidemia que azota a una población vista desde el punto de vista del crecimiento, el crecimiento de la radiación solar como resultado del daño de la capa de ozono, etc. Esto puede ser aprovechado para darle el significado que presenta en los entornos de aprendizaje de las escuelas.

En nuestra propuesta, enfocada en la función exponencial en estudiantes de quinto de secundaria, consideramos al GeoGebra online como medio tecnológico importante para reconocer los cambios en las representaciones que realizarán los estudiantes al desarrollar las actividades en dicho ARD. El estudio de Brandt, Moretti y Lopes (2018) menciona la pertinencia de realizar actividades con el GeoGebra, dado que fomentan las operaciones cognitivas en las aprehensiones perceptiva y operativa, a diferencia de un ambiente estacionario donde en una representación gráfica no se puede apreciar cambios en su posición.

Podemos incluir también la investigación de Gay, Tito y San Miguel (2014, citado en Jiménez y Jiménez, 2017, p. 12) quienes expresan que GeoGebra facilita las transformaciones semióticas en un objeto matemático, ayudando a desarrollar el análisis en cada representación lo que genera un desarrollo sobre la comprensión de dicho objeto.

Consideramos relevante nuestro estudio, dado que la función exponencial está presente en el CNEB (MINEDU, 2016) dentro de la competencia Resuelve Problemas de Regularidad, Equivalencia y Cambio, encontrándose en el nivel 7 donde está el grupo de estudiantes de cuarto y quinto de educación secundaria. En el estándar del nivel, los estudiantes deben ser capaces de establecer las diferencias entre la función lineal, la función cuadrática, la función exponencial y los parámetros que las involucran tal como lo muestra la Tabla 1.

Tabla 1

Estándar de Aprendizaje del Nivel VII en el Currículo Nacional Peruano

Competencia	Descripción del nivel de desarrollo de la competencia
Resuelve Problemas de Regularidad, Equivalencia y Cambio	Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores o expresiones, traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y **funciones** cuadráticas y **exponenciales**. Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de la regla de formación de sucesiones y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre una **función** lineal y una función cuadrática y **exponencial** y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos en progresiones geométricas, solucionar ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas; evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones algebraicas; así como predecir el comportamiento de variables; comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos y propiedades matemáticas.

Nota. Adaptado del Currículo Nacional de Educación Básica Regular (p. 77).

Se muestra que el estudio del cambio continuo o periódico está inmerso en la progresión geométrica, que puede entenderse como un ejemplo de la función exponencial. El CNEB requiere que los estudiantes sepan reconocer si las condiciones de la situación problema se ven reflejadas en el modelo determinado. El cambio en los parámetros para hacer la diferencia entre la función exponencial, la lineal o afín y la función cuadrática también son tópicos necesarios para la formación matemática del estudiante de secundaria.

Consideramos importante también hacer referencia que en algunas instituciones educativas existe el Programa del Bachillerato Internacional. Dicho programa cuenta con una currícula propia, con estándares internacionales en aproximadamente 75 países en el mundo. En tal sentido, el curso que se dicta en el grupo de estudiantes que forman parte de este estudio, es el de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación Nivel Medio. Consideramos importante tener una comprensión clara del concepto función exponencial lo que debe asegurar que se puedan construir e interpretar los modelos que exige el Programa del Bachillerato Internacional. La currícula del curso, incorpora el estudio de las funciones exponenciales en el dominio de las funciones que nos ayudan a obtener modelos matemáticos en conexiones con el mundo real, con aplicaciones al interés compuesto, a las progresiones geométricas, series geométricas y la amortización, como lo muestra la Figura 1.

Figura 1

Sobre la Función Exponencial en la Currícula del Bachillerato Internacional

Modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial. $f(x) = ka^x + c$ $f(x) = ka^{-x} + c$ (para $a > 0$) $f(x) = ke^{rx} + c$ Ecuación de las asíntotas horizontales.	**Enlace** al interés compuesto (NM 1.4), las progresiones y series geométricas (NM 1.3) y la amortización (NM 1.7).

Nota. Tomado de *Guía de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación*, IBO, 2019, https://colegioloscampitosweb.com/wp-content/uploads/2021/10/GUIA-DE-MATEMATICAS-APLICACIONES-E-INTERPRETACION.pdf

En lo personal, la relevancia de este estudio pasa por el hecho de cómo las transformaciones con diferentes registros de representación intervienen en la comprensión de la noción función exponencial.

De esta forma hemos justificado la relevancia y pertinencia del presente trabajo valiéndonos de aspectos académicos, profesionales y personales. A continuación, presentamos aspectos teóricos sobre la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS).

1.3 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

La TRRS fue desarrollada a inicios de los años 70 por Raymond Duval, filósofo y psicólogo, director de la Academia de Lila y profesor de la Universidad del Litoral en Francia. Hizo estudios en psicología cognitiva en el Instituto de Investigación Matemática (IREM) de Estrasburgo, Francia desde el año 1970 a 1995, es allí donde realiza estudios a través de la observación a docentes y estudiantes en las actividades que realizan en cursos de matemáticas.

La presente investigación toma en cuenta algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

Representaciones Mentales

Para Duval (1999), no es posible el conocimiento sin una actividad de representación, es por ello, que la representación ha sido objeto de reflexión para lograr un conocimiento cierto.

> Las representaciones mentales son las que permiten mirar el objeto en ausencia total de significante perceptible. Por lo general, se igualan con las "imágenes mentales" en tanto que entidades psicológicas que han tenido una relación con la percepción. Pero las representaciones mentales cubren un dominio más amplio que el de las imágenes. Es

> necesario incorporar en ellas no solo los conceptos, las nociones, las "ideas", sino también las creencias y las fantasías, es decir, todas las proyecciones más difusas y más globales que reflejan los conocimientos, y los valores que un individuo comparte con su medio, con un grupo particular o con sus propios deseos. (Duval, 2006, p. 36)

Las representaciones mentales son representaciones conscientes que un sujeto tiene en relación a un objeto o situación, las que posee como imágenes y concepciones. Tienen la cualidad de ser estrictamente internas, es decir, no pueden ser observadas por otro sujeto. Las representaciones mentales pueden desarrollarse en la medida que se adquiere e interioriza diferentes sistemas de representación semióticas y en especial la representación de lengua natural.

Representaciones Semióticas

Para poder exteriorizar las representaciones mentales y poder hacerlas accesibles a otros sujetos se utilizan las representaciones semióticas. Así, Duval (1999) menciona que "las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma" (p. 5).

Las representaciones semióticas están constituidas por todo signo, perteneciente a un sistema de representación, que permite exteriorizar una representación mental. Por ejemplo, para la actividad matemática, cuando el sujeto escribe la representación algebraica de una función exponencial utiliza la expresión $f(x) = 3^x + 2$, lo que está conformado por números, letras y símbolos para exteriorizar su representación mental y poder comunicar las características de la función exponencial tales como la base, el exponente, la asíntota, etc., así como la dependencia funcional entre la variable independiente $\boldsymbol{x}$ y la variable dependiente $f(x)$.

Duval (2012), señala que los objetos matemáticos requieren de representaciones semióticas para poder tener una percepción o experiencia de ellos, con estas representaciones será posible realizar los tratamientos y manipulaciones que se requieran del objeto. En tal sentido, la semiosis está vinculada a la producción de representaciones por medio de signos y la noesis está vinculada a todo proceso cognitivo como la aprehensión conceptual por las distintas representaciones semióticas del objeto matemático.

En nuestra investigación será importante tomar en cuenta las representaciones que realizan los estudiantes en relación a la función exponencial. Estas representaciones tanto mentales y semióticas se presentarán en los estudiantes al desarrollar las actividades que serán propuestas. El uso de signos en diversos sistemas de representación de la función exponencial permitirá comprender las acciones cognitivas que realizarán sobre el objeto matemático de estudio.

Registros de Representación Semiótica

Para Duval (2004), la actividad matemática caracterizada por su universalidad e intelectualidad tiene una manera de pensar que no es, para la mayoría de personas, algo espontáneo sino más bien los aspectos cognitivos requieren del uso de sistemas de representación particulares. Son a estos sistemas de representación a los que el autor llama registros de representación semiótica y son necesarios dentro de la actividad cognitiva para la comprensión en matemáticas.

Los registros de representación semiótica se clasifican según Duval (2014), en registros discursivos y registros no discursivos. Así, en los primeros encontramos al registro de lengua natural, al registro algebraico, mientras que en el segundo grupo se encuentran el registro gráfico y el registro figural. Podemos encontrar en la Figura 2, un esquema que nos permite comprender mejor esta clasificación.

Figura 2

Clasificación de los Registros de Representación Semiótica

Nota. Adaptado de *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y de las formas superiores del desarrollo cognitivo (p. 52)*, por R. Duval, 2004, Universidad del Valle.

Pasamos a explicar en qué consiste cada registro de representación.

Registro en Lengua Natural. Es el registro que utiliza los signos lingüísticos de forma escrita o verbal para comunicar descripciones, características o explicaciones de un objeto matemático lo que produce una interpretación desde el punto de vista matemático.

Registro Algebraico. Este registro está dado por el uso de letras y símbolos numéricos que conforman una expresión algebraica que ayuda a generalizar, de modo tal que permite la representación del objeto matemático en estudio.

Registro Gráfico. Es el registro que hace uso del plano cartesiano para representar al objeto matemático por medio de una figura, es decir, se tiene tanto la figura como los ejes y coordenadas, lo que permite observar relaciones matemáticas.

Registro Figural. Este registro representa al objeto matemático a través de líneas, dibujos o marcas de manera que constituyan una estructura o forma de la que se pueden establecer relaciones matemáticas a través de la percepción visual.

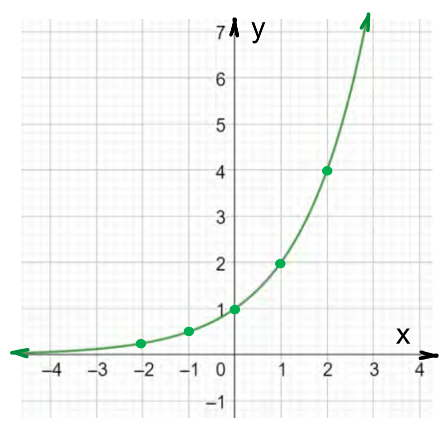
Es importante resaltar que Janvier (citado en Font, 2001), emplea representaciones tabulares y pares ordenados cuando realiza diversas investigaciones relacionadas a funciones. Por lo tanto, como también usaremos estas representaciones para nuestra investigación, pasaremos a explicar lo afirmado por el autor.

El autor expresa que, la *representación tabular* refleja los datos referentes a una función y se presentan en forma de tabla mediante filas y columnas, en la misma se destaca el pensamiento numérico, donde se puede apreciar las relaciones numéricas para su lectura y dicha representación pertenece al registro tabular. En relación a la *representación de pares ordenados* permite identificar a los valores que caracterizan de forma general a una función.

En la Tabla 2, podemos observar algunas de las representaciones semióticas de la función exponencial.

Tabla 2

Diferentes Representaciones Semióticas de la Función Exponencial

<table>
<tr><th>Registro en Lengua Natural</th><th>Registro Algebraico</th><th>Registro Tabular</th><th>Registro Gráfico</th></tr>
<tr><td>Función exponencial cuya base es 2.</td><td>$f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$</td><td><table><tr><th>$x$</th><th>$f(x)$</th></tr><tr><td>-2</td><td>0,25</td></tr><tr><td>-1</td><td>0,5</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>.
.
.</td><td>.
.
.</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

Nota. Adaptado de *Estudio de la función exponencial mediado por el GeoGebra para Tablet* (p. 114), por García-Cuéllar y Martínez-Miraval, 2020, Lectorum y de *Expresiones simbólicas a partir de las gráficas. El caso de la parábola* (p. 185), por Janvier (citado en Font), 2001. Revista EMA.

En la Tabla 2, para el caso de la función exponencial, tenemos la representación en el registro de lengua natural que hace uso necesariamente de un valor de la base mayor que la unidad, función creciente, dado que existen infinitas posibilidades para definir a cada función. Luego, observamos que la función exponencial puede representarse por medio de una regla de correspondencia en el registro algebraico donde se aprecia el valor que tiene la base, así como también las variables tanto dependiente como independiente que intervienen, además, damos cuenta que la función exponencial en la representación tabular se presenta para este caso en una tabla de 5 filas y dos columnas donde también se aprecian sus variables. Por último, en el registro gráfico la función exponencial representada en un plano cartesiano mediante una curva nos permite a través de la observación reconocer algunas de sus características y propiedades.

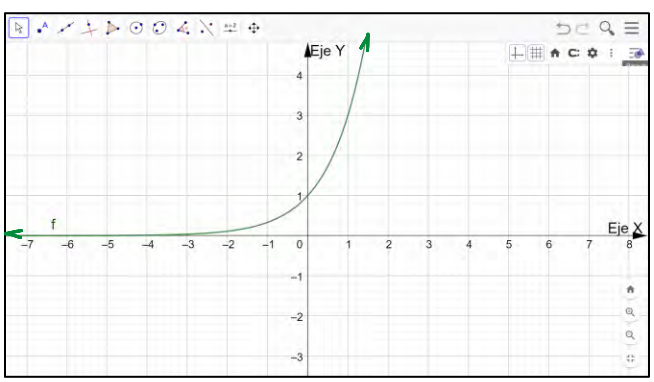
Registro Gráfico-Dinámico

El estudio iniciado por Salazar y Almouloud (2015), hizo referencia a la importancia de los ARD para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Pudo entonces configurar el Registro Figural Dinámico estableciendo las transformaciones que se pueden realizar en él. Luego, Peñaloza y Salazar (2018), propusieron extender el estudio de la visualización del paraboloide realizado por Peñaloza (2016, citado en Peñaloza y Salazar, 2018) en el que, con base en los estudios de Salazar y Almouloud (2015), definieron el registro Gráfico-Dinámico (RGD), para configurar las transformaciones que pueden realizarse al representar gráficamente dicho objeto en el ARD GeoGebra 3D, resultando lograr adaptaciones de las transformaciones que propuso Duval.

Así, al utilizar el GeoGebra en Línea para representar a la función exponencial, hacemos uso del RGD tal como lo muestra la Figura 3.

Figura 3

Registro Gráfico-Dinámico de la Función Exponencial



En la Figura 3, podemos apreciar que el RGD según Peñaloza y Salazar (2018) puede ser representado en la Vista Gráfica de GeoGebra en Línea, la cual nos permite realizar diversas acciones valiéndonos de las herramientas propias del software y del puntero del mouse para conocer datos que probablemente requerimos al resolver una situación problema.

En nuestro estudio tomaremos en cuenta actividades que promuevan el uso del registro en lengua natural relacionado a los enunciados de las actividades que representen a la función exponencial. Asimismo, el uso del registro algebraico al escribir expresiones algebraicas asociadas a nuestro objeto matemático para la construcción de actividades o el desarrollo de las mismas por parte de los estudiantes. Finalmente, el RGD que lo encontraremos al representar la función exponencial en la Vista Gráfica cuando se utilice el ARD GeoGebra en Línea.

Duval (1999) nos dice que, todo registro de representación semiótica para ser considerado como tal, debe tener asociado 3 acciones cognitivas: la formación, el tratamiento y la conversión. Pasaremos a explicar cada una de ellas.

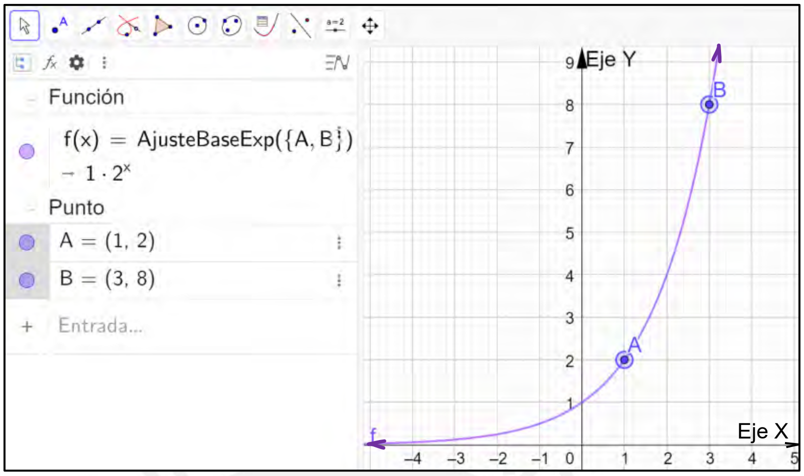
La formación, en el sentido de Duval (2004), está referida a toda oración, expresión algebraica, fórmula, dibujo, gráfico, etc. que recoge los caracteres de un objeto que permiten identificarlo por medio de su representación en un determinado registro expresando de esta manera una representación mental o una representación real. La formación debe respetar las reglas propias que tiene el registro en el que se representa.

Un ejemplo de formación para el caso de la función exponencial, a partir de las reglas que tiene el registro algebraico, la encontramos cuando se plantea el crecimiento de bacterias dada por $B(t) = 2^t,$ donde $t \geq 0$. Así, podemos identificar y reconocer que la representación está formada por la cantidad de bacterias en un tiempo determinado que usa la letra B, los paréntesis y la letra t, luego, su resultado mediante el signo igual, resulta de operar una potencia formada por la base 2 y como exponente, el tiempo transcurrido usando la letra $t.$ Esta formación ocurre a partir de las reglas que tiene el registro algebraico.

Según Peñaloza y Salazar (2018), la formación gráfico-dinámica se presenta cuando hacemos uso de las herramientas del GeoGebra para originar la representación en la Vista Gráfica. Así, por ejemplo, si deseamos representar en el RGD a una función exponencial que pasa por los puntos (1; 2) y (3; 8) podemos hacer uso de la Vista Algebraica y escribir en la *barra de entrada* uno a uno los puntos dados para que luego de presionar la tecla *enter* aparezcan en la Vista Gráfica. Finalmente, ajustamos de forma exponencial los puntos ingresando en la *barra de entrada* el comando *AjusteBaseExp(<Lista de puntos>)* quien nos pedirá los nombres de los puntos asociados y dando un clic en *enter* tendremos la gráfica de la función exponencial en el RGD, esto lo apreciamos en la Figura 4.

Figura 4

Formación en el Registro Gráfico-Dinámico de la Función Exponencial



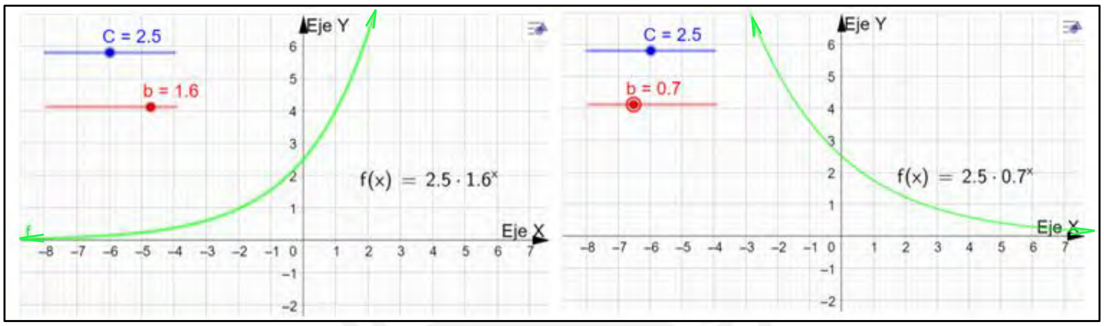
El tratamiento para Duval (2004), es la transformación de una representación inicial, dentro de un registro dado, a otra representación final que responde a una necesidad dentro de una situación planteada tomando en cuenta las propias reglas del registro. Se dice entonces que el tratamiento es una transformación interna al registro porque no se cambia la semiótica que conlleva se vale únicamente de los procesos propios del sistema de representación. Por ello, podemos indicar que cada registro lleva en si sus propias posibilidades de tratamiento.

Así, podemos ejemplificar tratamientos en la función exponencial en el registro de lengua natural. La situación planteada se puede expresar mediante signos lingüísticos cuando en un inicio se tuvo 1 bacteria, posterior a una hora se duplicaron, luego de la segunda hora pasaron a convertirse en 4 de ellas, posteriormente, se contabilizaron 8 bacterias al término de la siguiente hora y así sucesivamente. Esta situación nos hace reescribir la idea con la intención de poder conocer mejor las relaciones matemáticas que aparecen en el registro de legua natural expresándola de la forma siguiente: Cada grupo de bacterias será el resultado de trabajar con potencias de 2, donde el exponente relaciona la hora que transcurre. De este modo, es más sencillo comprender las relaciones matemáticas reconociendo al objeto función exponencial.

Según Peñaloza y Salazar (2018), el tratamiento gráfico-dinámico se presenta cuando se hace uso de herramientas que forman parte de GeoGebra de forma directa o indirecta. Así, según los autores, existen dos clases de tratamientos en el RGD, el primero de ellos corresponde a *tratamientos con deslizador,* caracterizado por el uso de un elemento o herramienta formada por una porción de línea y un punto, llamado dial, sobre ella que se puede mover a lo largo lo que produce variación de algún parámetro como por ejemplo, un coeficiente en una expresión algebraica, un punto en el plano cartesiano, etc. que a su vez produce modificaciones en la representación gráfica-dinámica del objeto matemático. La Figura 5, muestra la forma cómo se realizan tratamientos en el RGD con el uso de deslizadores.

Figura 5

Tratamientos Con Deslizador en el Registro Gráfico-Dinámico de la Función Exponencial

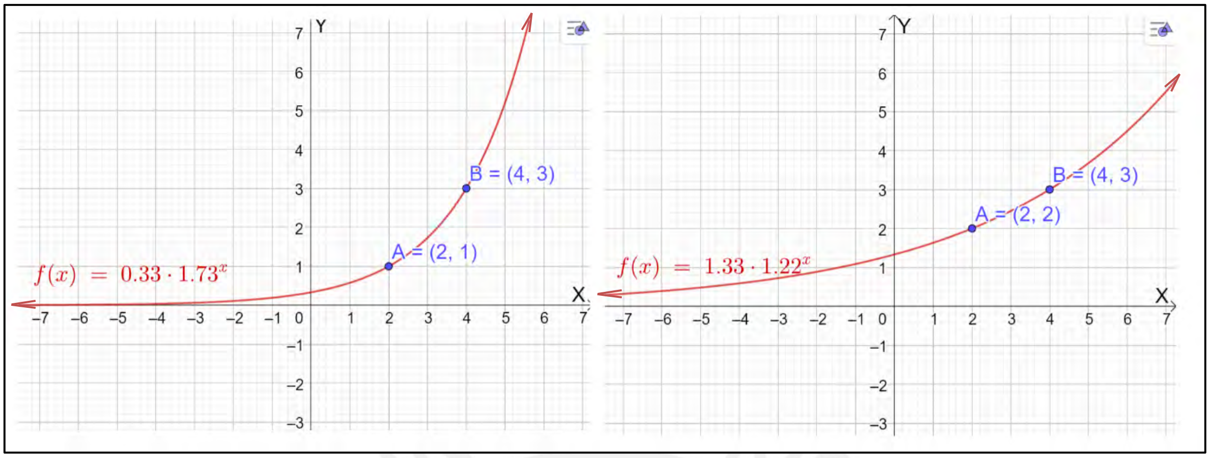


En la Figura 5, podemos apreciar que la representación gráfico-dinámica de la función exponencial está asociada a dos deslizadores. El primero, de color azul, hace referencia al coeficiente que acompaña a la potencia, el cual hemos considerado, para una mejor observación, mantenerlo en un valor determinado, por ejemplo, el valor 2,5. Mientras, el segundo deslizador, de color rojo, hace referencia a la base de la potencia la misma que comenzamos a variar moviendo el dial del deslizador desde el valor 1,6 al valor 0,7. Así, obtenemos que en la representación gráfico-dinámica la función exponencial se transforma de ser una función creciente a ser una función decreciente logrando con ello hacer un tratamiento.

También, en el RGD pueden realizarse *tratamientos sin deslizadores*, como lo clasifican Peñaloza y Salazar (2018), que consiste en hacer uso de elementos directos como, por ejemplo, el puntero del mouse para realizar modificaciones en el RGD del objeto representado tal como lo podemos advertir en la Figura 6.

Figura 6

Tratamientos Sin Deslizador en el Registro Gráfico-Dinámico de la Función Exponencial



La Figura 6, muestra el tratamiento realizado en el RGD por medio del puntero del mouse. Donde, teniendo inicialmente a la función exponencial con dos puntos A y B, se decide mover la representación del punto A desde la posición (2; 1) a la posición (2; 2) utilizando el puntero del mouse, con lo cual se observa que la representación gráfica ha sufrido una transformación en el RGD.

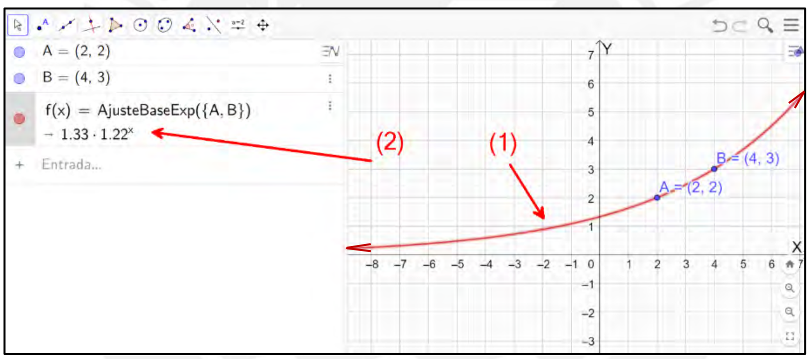
La conversión en el sentido de Duval (2004), es la transformación de la representación de un objeto de un registro de partida a otro de llegada. En ese sentido, la transformación es de carácter externo y los elementos que contiene la representación semiótica de un objeto pueden conservarse en su totalidad o llegar con algunos de ellos al registro de destino, asimismo, la conversión puede realizarse en el sentido inverso. Se convierte en una transformación que no resulta ser espontánea, requiere ser provocada para que se produzca. Por ello, resulta ser más compleja que el tratamiento y permite la comprensión del objeto matemático en estudio, así "parece ser que la conversión es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento. El problema que la mayoría de estudiantes encuentra es tan profundo que la conversión puede ser considerada como el umbral de la comprensión" (Duval, 2006, p. 149).

Para el caso de la función exponencial, podemos seguir tomando el ejemplo de la reproducción de bacterias, donde el objeto matemático enunciado en el registro de lengua natural como: *Cada grupo de bacterias será el resultado de trabajar con potencias de 2, donde el exponente relaciona la hora que transcurre*, pasa al registro algebraico mediante la expresión: $B(t) = 2^t,\ t \geq 0$. Esta transformación, permite conocer aspectos algebraicos que ayudan a reconocer una representación diferente de la función exponencial y el proceso de conversión resulta de gran ayuda para comprender al objeto matemático. Al respecto, Duval (2006) expresa que no se debe confundir al objeto matemático con su representación de producirse traería consecuencias negativas para lograr no solo comprender al objeto matemático sino también a otros. Por ello, la conversión nos permite reconocer esa diferencia del objeto con su representación al producirse esas transformaciones semióticas.

Por otro lado, en relación a la conversión gráfico-dinámico, Peñaloza y Salazar (2018), la enuncian como aquella transformación que se hace entre algún registro de representación semiótica con el RGD. Particularmente, explicaron la conversión Gráfico-Dinámico entre el RGD y el registro algebraico. Esta conversión puede darse de forma inmediata si el sujeto relaciona el RGD con la representación algebraica que se encuentra en la Vista Algebraica del GeoGebra o viceversa. Podemos observar esto en la Figura 7.

Figura 7

Conversión Gráfico-Dinámico de la Función Exponencial del RGD al Registro Algebraico

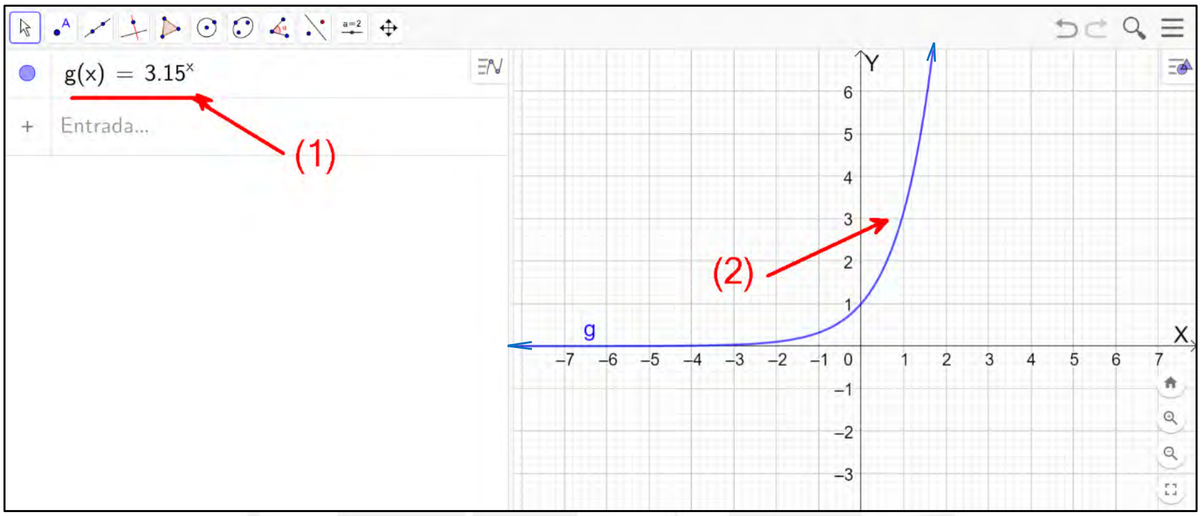


En la figura 7, podemos observar la conversión Gráfico-Dinámico. Estando en el RGD (1) se requiere conocer la representación algebraica de la función exponencial, para ello, bastará con solo observar la Vista Algebraica, encontrando la expresión $f(x) = 0{,}33 \cdot 1{,}73^{x}$ que es la representación de la función exponencial en el registro algebraico (2), con lo cual se estaría produciendo la conversión en ese sentido. Además, una conversión Gráfico-Dinámico desde el RGD al registro algebraico puede producirse también si el sujeto utiliza algunas herramientas de la Vista Gráfica para reconocer algunos valores especiales como puntos de paso o ecuación de la asíntota lo que le ayudará, mediante tratamientos realizados en el registro algebraico mediante lápiz y papel, a encontrar la ecuación que represente a la función exponencial.

En el sentido inverso, la conversión Gráfico-Dinámico puede producirse, por ejemplo, cuando se tiene la regla de correspondencia de una función exponencial y se desea conocer su representación gráfica. En este escenario, se ingresa la expresión algebraica en la barra de entrada del GeoGebra en línea y presionando la tecla *Enter* del teclado podemos observar rápidamente como aparece la representación de la función exponencial en el RGD, produciéndose la conversión del registro algebraico al RGD, tal como se muestra en la Figura 8.

Figura 8

Conversión Gráfico-Dinámico de la Función Exponencial del Registro Algebraico al RGD



En la actividad matemática se usan registros de representación que son de naturaleza semiótica. Por ello, es necesario conocer cómo se usan estas representaciones semióticas a través de los requisitos cognitivos que son la transformación y la coordinación y sigue:

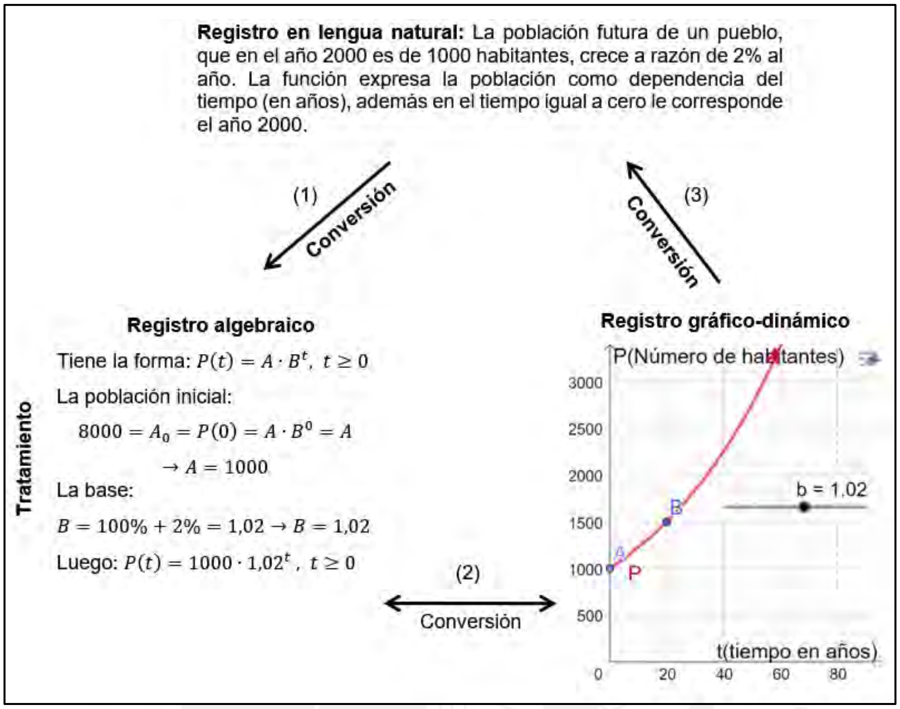
> Estas son las dos caras de la actividad matemática que no se pueden considerar separadamente la una de la otra, sobre todo para comprender los problemas de aprendizaje, y que proporcionan la idea clave para analizar los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático. (Duval, 2006, p. 145)

En consecuencia, esto impacta directamente en nuestro estudio dado que, según el autor, debe existir tratamientos y conversiones entre los registros de representación semiótica para garantizar la referencia a un solo objeto matemático a comprender, es decir, la función exponencial en nuestro caso. Este punto es necesario tomarlo en cuenta para el planteamiento de las actividades que formarán parte de nuestra experimentación.

Veamos los tratamientos y conversiones que se pueden presentar para la función exponencial presentada en la Figura 9.

Figura 9

Transformaciones de una Función Exponencial



Nota. Adaptado de *Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación (p. 146)*, por R. Duval, 2006, Universidad del Valle.

Así, considerando a Duval (2006), sobre los tratamientos y conversiones podemos advertir en la Figura 9, la formación de la función exponencial puede presentarse en el registro en lengua natural mediante signos lingüísticos, reconociendo sus características o elementos. Sin embargo, dada alguna necesidad de poder expresar la función exponencial en una representación que permita reconocer la dependencia entre el número de habitantes y el tiempo en años, se procede a realizar transformaciones de conversión llevando la representación del registro en lengua natural al registro algebraico (1). Luego, es necesario reconocer de forma explícita los elementos que conforman a la función exponencial en este último registro, para ello en base a la representación obtenida de la conversión, se hacen tratamientos que permiten realizar transformaciones que derivan en la expresión $P(t) = 1000 \cdot 1{,}02^t,\ t \geq 0$ que representa la relación de dependencia de la cantidad de habitantes en función a los años transcurridos utilizando signos propios del registro algebraico. Es claro observar que esta transformación no ha sido inmediata, ha requerido de cambios en la representación en dicho registro respetando sus propias reglas. Luego, puede resultar necesario ver el comportamiento de la variable dependiente en función de su variable independiente de forma visual usando un gráfico. Así, se realizó la transformación de conversión pasando de una representación del registro algebraico a otra en el registro gráfico (2) utilizando sea el papel y lápiz o el GeoGebra como un ARD. Esta representación permite reconocer comportamientos de la función que no se aprecian directamente en el registro algebraico, por ejemplo, cómo se comporta la cantidad de habitantes pasado 20 años. Por último, esta representación en el RGD puede interpretarse como lo enuncia su representación en lengua natural (3). Es posible también realizar la conversión en el sentido inverso como se aprecia en (2), así si el sujeto requiere ir de una representación gráfica a una representación algebraica, deberá reconocer características del objeto que puedan ser representadas en el registro algebraico de forma tal que, al realizar tratamientos en este registro puede llegar a obtener la regla de correspondencia $P(t) = 1000 \cdot 1{,}02^{t},\ t \geq 0$, para el caso, que relacione la población con el tiempo transcurrido en años.

En tal sentido, Duval (2004) indica que para el pensamiento matemático es necesario usar representaciones semióticas diversas así, cada registro de representación ayuda a comprender al objeto matemático de forma parcial en tanto son requeridas sus representaciones diversas y las transformaciones de conversión que permitan ir de un registro a otro. Se hace necesario por parte del docente poder proponer actividades que permitan estas transformaciones.

Duval (2006) nos recuerda no confundir un objeto matemático con su representación. Así, debemos advertir que la comprensión de un objeto matemático pasa por articular al menos dos registros de representación semiótica, el objeto puede encontrarse en representaciones diferentes, sin embargo, las acciones que se puedan tomar en sus transformaciones se efectúan sobre dichos registros de representación.

Según Duval (2012), las dificultades que se presentan al leer o interpretar una representación gráfica en el plano cartesiano, por ejemplo; si tratásemos de que el estudiante realice la conversión del registro gráfico al registro algebraico, se presentan en estudios diversos. Sin embargo, la raíz no debe buscarse en el concepto del objeto en sí, sino más bien en la falta de conocimiento de las reglas de coordinación entre los registros gráfico y algebraico.

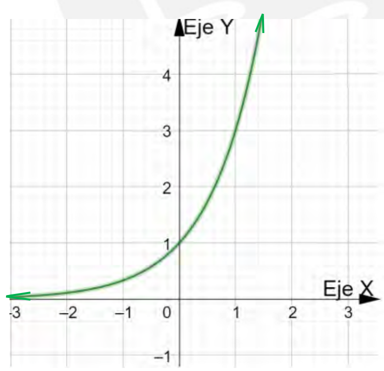
Pensamos que, la conversión realizada por un estudiante que parte del registro algebraico y va al registro gráfico, requiere tratamientos en ese registro para conseguir la gráfica de una función exponencial determinada. Sin embargo, para la conversión en el sentido inverso, será necesario que el estudiante realice tratamientos en el RGD por lo que deberá desarrollar aprehensiones. Al respecto Duval (1995) nos señala que una aprehensión proviene de la acción de *aprehender* lo que se traduce en la comprensión de un objeto que se tiene por medio de sus representaciones y propiedades las que pertenecen a un determinado registro quien, teniendo sus propias reglas, permiten inferir otras propiedades que resultarán en aplicar lo aprehendido a otros contextos y situaciones.

Para nuestro estudio, será relevante conocer las aprehensiones en el RGD que adaptaron Salazar y Peñaloza (2015) con base a las aprehensiones en el registro gráfico configuradas por Ingar (2014) en un estudio hecho sobre la visualización de valores máximos y mínimos de una función real de dos variables reales tomadas de las aprehensiones en el registro figural estudiadas por Duval (1995) para la geometría euclidiana.

Si un estudiante ha identificado la función exponencial en el RGD, es decir, ha logrado percibir elementos explícitos que le permiten reconocer al objeto matemático representado, entonces podemos decir que ha desarrollado una *aprehensión perceptiva*. Así, la Tabla 3, nos permite comprender que la aprehensión perceptiva está dada por el sujeto cuando reconoce la función exponencial por medio de características que se aprecian en su representación gráfico-dinámico, aunque todavía puede resultar difícil reconocer, por ejemplo, la base de dicha función, lo que lleva a un mayor análisis, que implica desarrollar otras aprehensiones.

Tabla 3

Aprehensión Perceptiva de la Función Exponencial en el Registro Gráfico-Dinámico

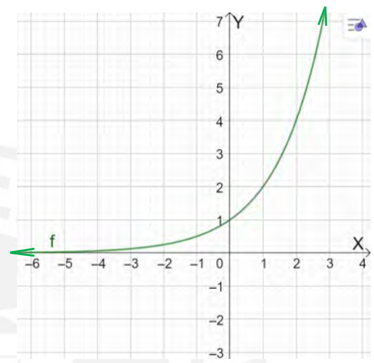
Representación gráfico-dinámico del objeto	Aprehensión perceptiva
	El objeto es una función exponencial

Nota. Adaptado de *Aprehensiones y modificaciones en el registro gráfico-dinámico del paraboloide elíptico.* (p. 73), por Peñaloza y Salazar, 2018, https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/34170/pdf

Cuando sea necesario que un sujeto deba realizar la representación gráfico-dinámica de la función exponencial f desde su representación algebraica y, el sujeto reconozca los pasos que son necesarios realizar para lograr dicha representación habrá desarrollado la *aprehensión secuencial* de la función exponencial. En este sentido, será necesario valerse de herramientas de construcción que tiene el GeoGebra en Línea para poder graficar a la función exponencial, como podemos apreciar en la Tabla 4.

Tabla 4

Aprehensión Secuencial de la Función Exponencial en el Registro Gráfico-Dinámico

Aprehensión secuencial de la función exponencial $f(x) = 2^x$	
Paso 1: Activar la Vista Gráfica. Paso 2: Ingresar la regla de correspondencia de la función exponencial. Abrir el teclado virtual. Entrada: $f(x) = 2^x$	

Nota. Adaptado de *Aprehensiones y modificaciones en el registro gráfico-dinámico del paraboloide elíptico.* (p. 74), por Peñaloza y Salazar, 2018, https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/34170/pdf

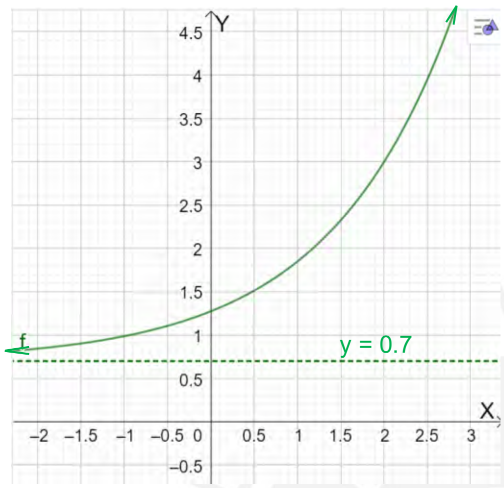
En la Tabla 4, observamos que el sujeto ha sido capaz de reconocer los procedimientos realizados para lograr la representación gráfico-dinámico a través de una serie de pasos considerados tratamientos secuenciales.

Para que un sujeto pueda evidenciar una *aprehensión discursiva* con el objeto función exponencial es necesario que a partir de su representación gráfico-dinámica pueda reconocer características o elementos del objeto que no se encuentren dados de forma explícita en ese registro. Por ejemplo, intervalos donde se encuentra el valor de la base, la posición de la asíntota de la función, si existen puntos de paso con valores enteros, hacia qué posición en el eje X están los mayores o menores valores de la variable independiente, entre otros y con la capacidad de poder nombrarlas. Además, el sujeto puede tener necesidad de formular alguna conjetura y para ello realizará tratamientos en la representación gráfico-dinámica que le permita establecer un discurso y poder validar alguna situación determinada.

En la Tabla 5, se muestra el desarrollo de la aprehensión discursiva de un sujeto sobre la función exponencial, lo cual le permite reconocer características o propiedades que no están explícitas en el RGD.

Tabla 5

Aprehensión Discursiva de la Función Exponencial en el Registro Gráfico-Dinámico

Representación gráfico-dinámico	Aprehensión discursiva
	Su asíntota es paralela al eje X. La asíntota pasa por un punto en el eje Y cuya ordenada mayor a 0,5 y menor a 1. La función muestra dos puntos de paso A y B cuyas coordenadas pueden conocerse por inspección de la cuadrícula. La función tiende a 0,7 cuando el valor de la abscisa tiende a $-\infty$ La función tiende a $+\infty$ cuando el valor de la abscisa tiende a $+\infty$ En su expresión algebraica, la base es mayor a 1.

Nota. Adaptado de *Aprehensiones y modificaciones en el registro gráfico-dinámico del paraboloide elíptico.* (p. 75), por Peñaloza y Salazar, 2018, https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/34170/pdf

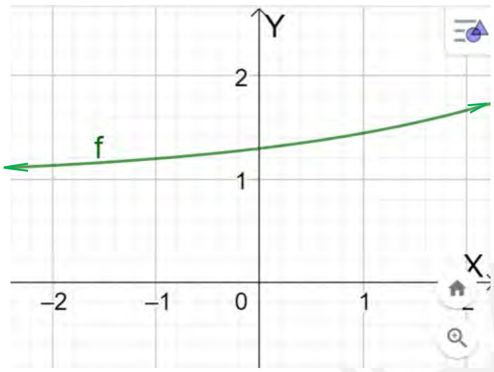
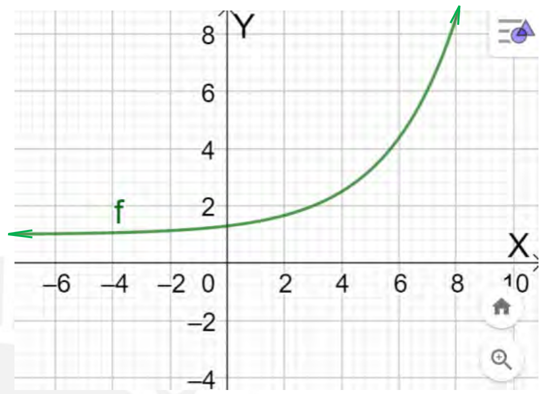
Así, la Tabla 5 muestra la acción del sujeto al identificar las propiedades implícitas en la representación gráfico-dinámico que permiten la representación, reconoce lo que llamamos en la TRRS variables visuales; asíntota, puntos de paso identificables gracias a la cuadrícula, que permiten expresar el discurso asociado.

En cuanto a la *aprehensión operatoria*, podemos indicar que para evidenciar su desarrollo en relación a la función exponencial es necesario que el sujeto realice transformaciones en la representación gráfico dinámica llamadas *modificaciones* que para nuestra investigación pueden ser *óptica* y *posicional*. Estas modificaciones realizadas por el sujeto, permiten reconocer figuras y valores de los elementos que conforman a la función exponencial tales como; crecimiento, decrecimiento, límite inferior de la función, punto de corte con el eje de ordenadas que pueden permitir resolver una situación problema. Todo ello, tomando como referencia lo estudiado por Salazar y Peñaloza (2018) respecto a las modificaciones para el paraboloide elíptico.

La modificación óptica de una función exponencial se realiza por un sujeto en el RGD al utilizar el acercamiento o alejamiento en el GeoGebra online para poder descubrir aspectos relacionados a la forma y valores necesarios para la solución problémica. La Tabla 6, muestra este aspecto.

Tabla 6

Modificación Óptica de Tipo Acercamiento para la Función Exponencial

Representación gráfico-dinámico de la función exponencial	Modificación óptica mediante la herramienta alejar
	

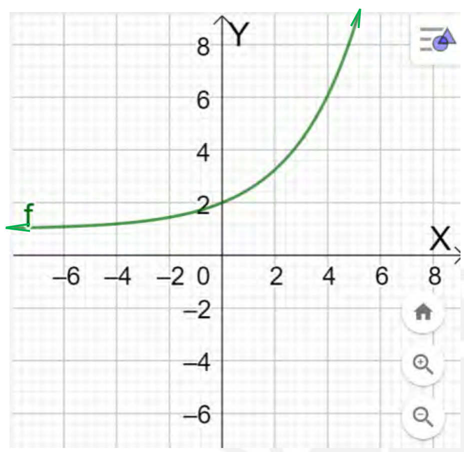
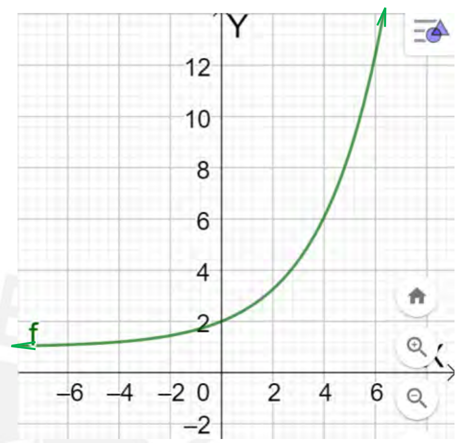
Nota. Adaptado de *Aprehensiones y modificaciones en el registro gráfico-dinámico del paraboloide elíptico.* (p. 77), por Peñaloza y Salazar, 2018, https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/34170/pdf

La Tabla 6, corresponde a la función exponencial $f(x) = 1{,}5^{(x-3)} + 1$ la cual no puede ser percibida en su totalidad para ser reconocida, lo que provoca en el sujeto el utilizar la herramienta alejar para apreciar mejor su representación, finalmente lo que se está realizando es un cambio en la escala de los ejes coordenados.

La modificación posicional de un objeto matemático en el RGD, nos refieren Salazar y Peñaloza (2018), consiste en realizar movimientos de rotación o traslación del objeto con la finalidad de advertir formas y valores que sean necesarios para la solución de un problema determinado. Así, podemos indicar que un sujeto realiza una aprehensión de este tipo con relación a la función exponencial cuando traslada la gráfica haciendo uso de la herramienta *Mueve*  o la herramienta *Desplaza Vista Gráfica*  , lo que permitirá también reconocer formas y valores asociados al objeto en un contexto determinado. La función exponencial no presenta modificaciones posicionales en el sentido de la rotación dado que por el hecho de ser una función en una variable no lo requiere. La Tabla 7 muestra las modificaciones de posición que asume la función exponencial $f(x) = 1{,}5^{x} + 1$ para reconocer el valor aproximado de la función en la abscisa 6.

Tabla 7

Modificación Posicional de Tipo Traslación para la Función Exponencial

Representación gráfico-dinámico de la función exponencial	Traslación
	

Nota. Adaptado de *Aprehensiones y modificaciones en el registro gráfico-dinámico del paraboloide elíptico.* (p. 78), por Peñaloza y Salazar, 2018, https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/34170/pdf

De esta forma hemos configurado las aprehensiones que pueden presentarse en el RGD en torno a la función exponencial, las cuales serán pertinentes para identificarlas en el desarrollo de las actividades que realizarán los sujetos de investigación.

De esta forma, ya es posible definir nuestra pregunta y objetivos de investigación.

1.4 Pregunta y Objetivos de la Investigación

En este estudio hemos planteado la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo comprenden los estudiantes de quinto de secundaria la noción de función exponencial con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica?

Para lograr responder a esta pregunta, nos planteamos los siguientes objetivos:

Objetivo General

Analizar cómo estudiantes de quinto de secundaria comprenden la noción de función exponencial con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

Objetivos Específicos

1. Identificar los registros de representación semiótica de la función exponencial que utilizan estudiantes de quinto de secundaria.
2. Describir los tratamientos, conversiones entre los registros de lengua natural, algebraico, gráfico y gráfico-dinámico, así como las aprehensiones que realizan

estudiantes de quinto de secundaria en las representaciones de la función exponencial.

1.5 Aspectos de la Ingeniería Didáctica

Una investigación cuya metodología es de tipo cualitativa tiene como característica la de tomar la realidad para ser observada tal y cual ocurre, de forma natural y a partir de ello realizar una interpretación buscando el significado de las acciones, comprender la perspectiva de quienes intervienen para establecer conclusiones. En ese sentido, va de lo particular a lo general característica del método inductivo. Para ello se hace una recolección de datos que pueden encontrarse en lenguaje escrito, verbal, visual la cual no es estandarizada, no utiliza una medición numérica, tampoco hace un análisis estadístico, como sí lo hace la investigación cuantitativa, promueve el descubrir y mejorar una pregunta de investigación dado que siempre se plantean interrogantes en todo el proceso (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Además, en la idea de los autores toda investigación cualitativa apunta a "describir, comprender e interpretar los fenómenos a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes" (p. 11).

Consideramos también a Borda (2004, citado en Portugal, 2015) quien caracteriza a una investigación cualitativa como aquella que obtiene los datos del medio natural, se apropia más del proceso que de los resultados otorgando al significado un puesto predominante.

Finalmente, podemos declarar que la metodología de nuestra investigación es de tipo cualitativa descriptiva ello en virtud a que, observaremos el desarrollo de las actividades que realizarán estudiantes de 5to de secundaria del Programa del Diploma del Bachillerato Internacional con el apoyo de GeoGebra en Línea para luego, describir y analizar las posibles transformaciones semióticas que se presentarán en su desarrollo lo que nos permitirá llegar a determinadas conclusiones.

La ID como método de investigación en la didáctica de las matemáticas surge en Francia por la década de los 80 como resultado de los descubrimientos de la Teoría de Situaciones Didácticas y de la Trasposición Didáctica. Su principal exponente es Michèle Artigue, quien la denominó así, para relacionar el trabajo didáctico del docente con el del ingeniero.

Según Artigue, Douady, Moreno, y Gómez (1995), en las realizaciones didácticas, se señalan dos divisiones para la ID: la micro ingeniería y la macro ingeniería. La micro ingeniería es la que corresponde a nuestro trabajo dado que está enfocada a un tema y en un ambiente de clase. Además, la micro ingeniería es más factible de ponerse en práctica ya que toma en cuenta los fenómenos propios en la clase, se reconoce por el registro en la que se encuentra (registro de estudio de casos) y la validación a la que se asocia (contraste entre el análisis a priori y a posteriori). La macro ingeniería relaciona las investigaciones de la micro ingeniería con el tiempo en que se desarrolla la enseñanza y el aprendizaje.

Para nuestra investigación, definida como cualitativa, se ajusta al método de la ID debido a que, "se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (Artigue et al., 1995, p. 36).

Así, considerando lo dicho por los autores, el método de la ID realiza, sobre las experiencias didácticas de clase, un análisis preliminar para luego, plantear la secuencia didáctica, ejecutarla y finalmente analizar los resultados obtenidos del desarrollo de las actividades hechas por los estudiantes.

Por ello realizaremos un trabajo experimental en el estudio de la comprensión desde el punto de vista de Duval (2006), entre los registros de representación semiótica de la función exponencial en estudiante de 5to de secundaria de una institución privada mediada por GeoGebra.

Consideramos, siguiendo a Artigue et al. (1995), 4 fases para el desarrollo de este método: el análisis preliminar, la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, la experimentación y finalmente, el análisis a posterior y la validación. Pasaremos a explicar cada una de ellas.

Fase 1: Análisis Preliminar

En palabras de Artigue et al. (1995):

> En una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción se basa no solo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares. (p. 38)

Esta fase está formada por el análisis que se hace sobre las concepciones que tiene los estudiantes sobre el objeto función exponencial, la forma cómo este concepto se aborda en las escuelas, su génesis, las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del objeto, entre otros.

Tomando a Artigue et al. (1995), consideramos para nuestro trabajo el estudio de las siguientes dimensiones:

Dimensión Epistemológica. Se asocia al saber en juego, analizamos los aspectos de la génesis del objeto matemático función exponencial y sus obstáculos, con la finalidad de conocer las diferentes concepciones que ha tenido a lo largo del tiempo, la forma como ha ido evolucionando este concepto matemático en manos de los hombres de ciencia. En el caso nuestro esto será desarrollado a través de algunos aspectos en el estudio histórico del objeto matemático función exponencial.

Dimensión Cognitiva. Está relacionado a cómo los estudiantes interpretan el concepto de función exponencial, los errores que presentan en relación a sus conocimientos previos. Esto se apoya en las investigaciones de referencia y textos de formación docente que incluiremos en nuestro estudio.

Dimensión Didáctica. En esta dimensión se analiza la manera cómo los estudiantes han recibido el concepto de función exponencial, nos enfocamos al sistema de enseñanza, así como los efectos que ha tenido este aprendizaje. Así, se analizan los conceptos de función exponencial en textos utilizados por estudiantes.

Fase 2: Concepción y Análisis A priori

En esta fase tomamos el conjunto de, antecedentes, el estudio del objeto función exponencial, los aspectos de la TRRS y las actividades que, deben guardar relación con el objetivo de nuestra investigación. Así, en esta fase se toma las concepciones que tienen los estudiantes, incluyendo sus restricciones cognitivas, para la comprensión del objeto función exponencial.

El control de las actividades está sujeta, como afirma Artigue et al. (1995), a las variables didácticas que están ligadas el objeto de estudio. Estas variables son de dos tipos, variables macro didácticas y variables micro didácticas, las primeras a nivel global y las segundas a nivel local.

Para nuestro estudio vamos a considerar las variables micro didácticas que serán definidas para cada actividad.

En un análisis a priori se presentan las posibles soluciones que darían los estudiantes a cada uno de los ítems de las actividades, estos supuestos (hipótesis) permitirán ser contrastados luego con el análisis a posteriori que se realiza en la cuarta fase. En consecuencia, Artigue et al. (1995), nos expresan: “Tradicionalmente, este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar de llevar a los alumnos” (p. 45).

Fase 3: Experimentación

En esta etapa, Artigue et al. (1995) señalan que corresponde a la ejecución de todas las actividades que han sido preparadas con anticipación y que forman parte de la secuencia didáctica. El profesor-investigador, los observadores y estudiantes interaccionan en el aula, se inicia el contrato didáctico que define los roles y obligaciones que tendrá cada integrante.

Esta etapa se desarrolla de la manera siguiente: Primero, se expresa a los estudiantes de 5° de secundaria, que aceptaron participar voluntariamente de la investigación, los objetivos y condiciones para la aplicación de los instrumentos de recolección. Segundo, se ejecutan los instrumentos, entre los que se encuentran las actividades que desarrollarán los estudiantes ayudados del GeoGebra, y por otro lado el uso de lápiz y papel.

Consideramos como instrumentos de recojo de información a las fichas de actividades en físico, usaremos el software OBS para grabar lo que realizan los estudiantes en la pantalla de su computadora en relación a las actividades de mediación con GeoGebra online y una grabadora de voz para la entrevista en el trabajo a lápiz y papel, todo ello con la finalidad de realizar un posterior análisis.

Fase 4: Análisis A Posteriori y Validación

Artigue et al. (1995) nos expresan que en esta etapa el investigador organiza los datos recogidos de la etapa anterior, seguidamente se hace un contraste o validación entre el análisis a priori y los resultados la que se caracteriza por ser una validación interna. Esta refutación finalmente es entre lo que se espera que realizará el estudiante (hipótesis) y lo realmente hecho por él.

En nuestra investigación, con el marco teórico establecido realizaremos el análisis de las acciones que realizan los estudiantes de 5° de secundaria cuando desarrollan las actividades propuestas y contrastarlas con lo que se espera que realicen de manera que podamos realizar la validación, dado que nuestro interés es conocer la comprensión de la noción función exponencial a través de las transformaciones por los diferentes registros de representación.

En el capítulo siguiente, abordaremos aspectos epistemológicos; para conocer la evolución del concepto, matemáticos; donde presentaremos al concepto formal de la función exponencial y didácticos; entendido a cómo se muestra el concepto de función exponencial a los estudiantes en los textos.

Capítulo II: ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO

Este capítulo profundiza en los hitos históricos significativos en el desarrollo del concepto de función exponencial en matemáticas. Explora cómo esta idea ha evolucionado a lo largo del tiempo a través de las contribuciones de figuras importantes de la historia de las matemáticas. Además, se examinan los aspectos didácticos, concretamente cómo se enseña actualmente el concepto de función exponencial en determinados libros de texto de quinto de secundaria.

2.1 Aspectos Epistemológicos del Objeto Función Exponencial

Freitas (2015) nos dice que el concepto propiamente de función exponencial que conocemos hoy en día no es el que se tuvo en sus orígenes, hubo necesariamente contribución de diversos pueblos en su construcción. La idea de función exponencial nace a partir del concepto de potencia, que actualmente se escribe como b^n la que se corresponde como potencia de base b y exponente n. Dado que la función exponencial está asociado al concepto de función, es necesario recorrer también los orígenes de este concepto. Para ello, nos valemos de Rossini (2006) quien realizó un cuadro con la evolución de estos dos conceptos que muestra la Tabla 8.

Tabla 8

Cronología de las Concepciones de Función

Año	Matemático	Concepto
1594	Napier	Invención de los logaritmos.
1637	Descartes	Ecuación x e y que muestra dependencia entre variables.
1670	Newton	Cantidades relacionadas; fluidos relacionados analíticamente.
1673	Leibniz	Relación, cantidades geométricas que dependen de un punto de la curva, máquina.
1696	Jean Bernoulli	Cálculo con exponenciales.
1718	Jean Bernoulli	Relación entre cantidades variables
1748	Euler	Expresión analítica. Introduce por primera vez el concepto de función exponencial como inversa de la función logarítmica
1755	Euler	Dependencia arbitraria
1778	Condorcet	Dependencia arbitraria
1797	Lacroix	Dependencia arbitraria
1797	Lagrange	Expresión de cálculo, expresión analítica.
1821	Cauchy	Resultado de operaciones hechas sobre una o varias cantidades constantes y variables
1822	Fourier	Series trigonométricas; secuencia de valores; ordenadas no sujetas a una ley común.

1834	Lobachevsky	Expresión analítica; condición para probar los números, dependencia arbitraria.
1837	Dirichlet	Correspondencia: para cada valor de x (abscisa), único valor de y (ordenada); función definida por partes.
1870	Hankel	Para cada valor de x en cierto intervalo, corresponde un valor bien definido de y; no es necesario una misma ley para todo el intervalo; y no necesita ser definido por una expresión matemática explícita en x.
1888	Dedekind	Correspondencia entre elementos de dos conjuntos, obedeciendo dos condiciones.
	Cantor	Subconjunto de un producto cartesiano obedeciendo dos condiciones
1939	Bourbaki	Correspondencia entre elementos de dos conjuntos obedeciendo las dos condiciones

Nota. Adaptado de *Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias* (p. 54), por Rossini, 2006, https://ariel.pucsp.br/jspui/bitstream/handle/11099/1/Renata%20Rossini.pdf

La Tabla 8, muestra el desarrollo conceptual de función mediante una cronología bien detallada. Hemos observado en la revisión de la literatura que el concepto de función exponencial está siempre vinculado a conocer el de función, por ello, es necesario reconocer también la evolución de este concepto. Observamos que la concepción de función y función exponencial ha recibido influencia en un inicio del matemático Napier, llegando hasta Bourbaki.

Boyer y Merzbach (2011), nos expresa que el concepto de función exponencial pudo haber empezado con el concepto de logaritmo, en ese sentido John Napier (1550-1617) estaba atento a las series de potencias que se presentaban en publicaciones, como la que se muestra en la Figura 10.

Figura 10

Primera Tabla de Logaritmos Elementales

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

Nota. Adaptado de *Enseñanza de las Funciones Exponenciales en la escuela secundaria. Aspectos didácticos y cognitivos*, Sureda, 2012.

La Figura 10, muestra dos sucesiones que se corresponden una aritmética y la otra geométrica. Se llegó a descubrir que, si se multiplicaban dos valores de la sucesión geométrica, el resultado se encontraba en la casilla que corresponde a la suma de los valores que se encontraban en la sucesión aritmética. Lo mismo ocurre si es que se dividen dos valores de la sucesión geométrica, el resultado era el valor que se encuentra debajo de la diferencia de los valores que se encuentran en la sucesión aritmética. Así, “las sumas y diferencias de los índices de las potencias correspondían a los productos y cocientes de las propias potencias” (Boyer y Merzbach, 2011, p. 213). De esto nace las ecuaciones exponenciales como cercano ya a la idea de logaritmos. La función logarítmica se encontraba sobreentendida en las definiciones de Napier, quien no tenía la definición de logaritmo que utilizamos hoy en día, tampoco la noción de base en un logaritmo. Sus estudios lograron obtener una expresión que permitía tener próximos a términos en una progresión geométrica, así se obtuvo la expresión $N = 10^7(1 - 1/10^7)^L$ donde L introduciría la idea de logaritmo, pero aún no con ese nombre. Los logaritmos empiezan a aparecer entre 1727 a 1728, encontramos que Freitas (2015) reconoce que la función N tiene la representación de una función exponencial, por ello es que se asocia a los logaritmos con la función exponencial como su operación inversa.

Según Boyer y Merzbach (2011), Leonhard Paul Euler (1707-1783) fue uno de los científicos que mejores aportes realizó en cuanto a las notaciones matemáticas dado que ya utilizaba el número e para representar la base de un logaritmo natural, al parecer esta notación provino de la palabra *exponencial* que utilizó en su obra *Mechanica*. Además, Maor (2008) expresa que fue Euler quien ya no solo veía que la inversa de la función logarítmica era una simple expresión, sino más bien la iba reconociendo como una función.

Por aquel entonces, ya era posible expresar una función como una serie conformada por potencias. Un ejemplo, lo podemos tener cuando se desea expresar la función $f(x) = e^x$, a través de la serie de Taylor cuando se tiene un entorno $a = 0$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Ya se comenzaba a estudiar a expresiones exponenciales, por ejemplo, Boyer (2011), nos cuenta que ya existía el cálculo exponencial que se le atribuye a Jean Bernoulli (1667-1748). Este matemático estudió funciones exponenciales de la forma $f(x) = a^x$ y $g(x) = x^x$, quien al preocuparse por esta última logró realizar cálculos relacionados al área bajo la curva tomando como inicio a $x = 0$ y como extremo a $x = 1$, utilizando para la expresión x^x como e^{xlnx} expresándola de la siguiente manera:

$$\frac{1}{1^1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots$$

Entonces, el surgimiento de la noción de función exponencial estuvo siempre asociado a ser la inversa de la función logaritmo, siendo Euler que la caracteriza con las propiedades que conocemos hasta el día de hoy.

2.2 La Función Exponencial

Los componentes matemáticos del concepto de función exponencial se establecen en los libros de análisis matemático y cálculo diferencial, basándose en los conocimientos proporcionados por Apóstol (2001) y Spivak (1967).

Desde el punto de vista de Apóstol (2001), define en primer término la función logaritmo natural para continuar con la definición de la función exponencial. En este sentido, coincide con la forma histórica en que se formó este concepto.

Empleando las palabras del autor, la función logaritmo natural se define de la manera siguiente:

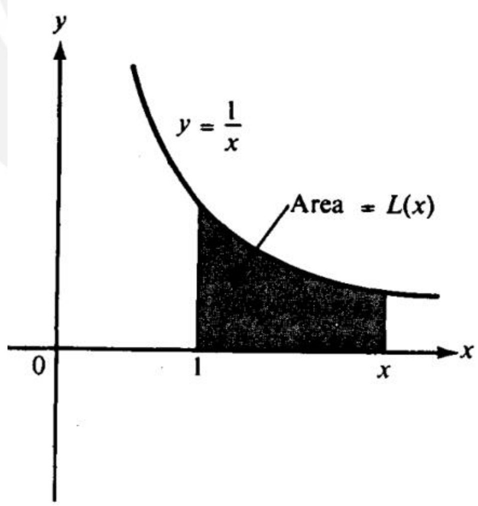
"DEFINICIÓN: Si x es un número real positivo, definimos el logaritmo natural de x, designando provisionalmente por $L(x)$, como la integral:

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Cuando $x > 1$, $L(x)$ puede interpretarse geométricamente como el área de la región sombreada bajo la curva" (Apóstol, 2001, p. 281), la que se muestra en la Figura 11.

Figura 11

Interpretación del Logaritmo como Área



Nota. Tomado de *Calculus. Volumen I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* (p. 282), por Apóstol, 2001, Reverté.

Luego, se enuncia las propiedades de la función logaritmo natural:

a) $L(1) = 0$

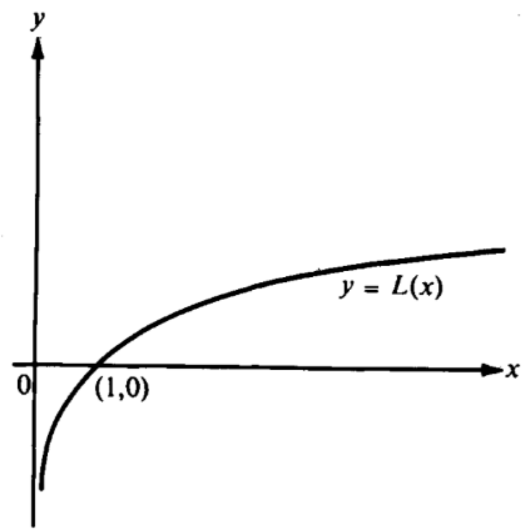
b) $L'(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x > 0$.

c) $L(ab) = L(a) + L(b)$

Apóstol (2001), hace referencia a la gráfica de la función logaritmo natural, describiendo sus características a partir de las propiedades enunciadas anteriormente. A continuación, la Figura 12 muestra la gráfica de la función logaritmo natural.

Figura 12

Representación Gráfica de la Función Logaritmo Natural



Nota. Tomado de *Calculus. Volumen I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* (p. 282), por Apóstol, 2001, Reverté.

Con base en el autor, la gráfica de la función logaritmo natural a partir de las propiedades mencionadas, tiene su derivada positiva en todo momento, por ello es creciente. Dado que la gráfica corta al eje x en el punto (1 ; 0), se encuentra por encima del eje x si $x > 1$ y se encuentra debajo si $0 < x < 1$. Además, la curva presenta como pendiente el valor 1 cuando $x = 1$. Si $x > 1$ y crece de manera infinita la pendiente de la curva va disminuyendo tendiendo a cero. Para valores de $0 < x < 1$, donde x decrece la pendiente de la curva va haciéndose infinita. Por último, si calculamos la segunda derivada de la función logaritmo natural obtenemos $L''(x) = 1/x^2$ siempre es negativa para cualquier valor de x, lo que nos hace advertir que la gráfica de la función es cóncava.

Posteriormente, empleando las palabras del autor, se prosigue con la definición de la función exponencial como sigue:

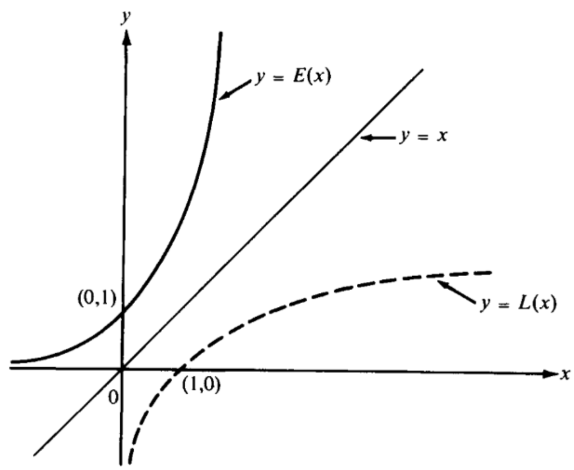
> Para cualquier x real, definimos $E(x)$ como aquel número y cuyo logaritmo es x. Esto es, $y = E(x)$ significa $L(y) = x$. El dominio de E es todo el eje real; su recorrido es el conjunto de números reales positivos. La gráfica de E, se obtiene de la gráfica del logaritmo

mediante una simetría respecto a la recta $y = x$. Puesto que L y E son inversas una de otra, se tiene $L[E(x)] = x$ para todo x y $E[L(y)] = y$ para todo $y > 0$. (Apóstol 2001, p. 296)

La Figura 13, muestra la representación gráfica de la función exponencial en relación a la función logarítmica.

Figura 13

La Gráfica de la Función Exponencial como Inversa de la Función Logaritmo



Nota. Tomado de *Calculus. Volumen I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* (p. 297), por Apóstol, 2001, Reverté.

Como lo hace notar Apóstol (2001), la función logaritmo natural es estrictamente creciente y continua en el semieje positivo de las x, se deduce que la función exponencial será también estrictamente creciente y continua en todo el eje real, de esta forma se pueden enunciar sus propiedades.

"TEOREMA: La función exponencial tiene las propiedades siguientes:

a) $E(0) = 1, \quad E(1) = e$

b) $E'(x) = E(x),$ para todo x

c) $E(a + b) = E(a)E(b),$ para todo a y para todo b" (p. 297).

De este teorema se obtienen las siguientes expresiones:

Para todo número r que es un número racional se tiene

$$E(r) = e^r$$

Para todo n entero positivo se cumple

$$En(a) = E(a)^n$$

Para el caso particular cuando $n = 1$, se tiene que $E(n) = e^n$.

Para cuando $a = 1/n$ se tiene

$$E\left(\frac{1}{n}\right) = e^{1/n}$$

Como lo hace notar Apóstol (2001), define la potencia en base e de la manera siguiente:

$$e^x = E(x), \text{ para todo } x \text{ real.}$$

Teniendo en cuenta al autor, prosigue con la definición de la función exponencial de forma general como sigue:

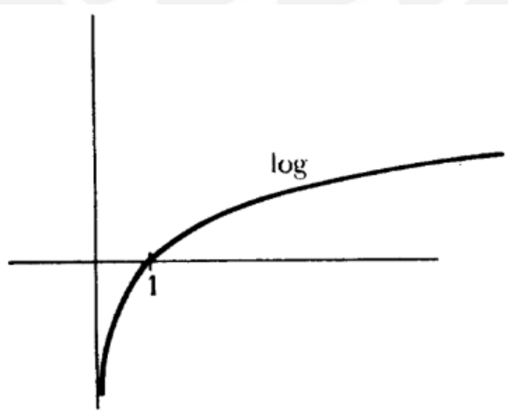
Si $a \neq 1$, entonces $y = a^x$ si y solo si $x = log_a y$

En el contexto de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, se puede observar que el autor emplea el registro de lengua natural para transmitir la definición del objeto función exponencial, así como también la representación gráfica de la misma para comprender mejor su concepto. Es decir, se basa en una colección de signos lingüísticos y gráficos para articular las características del objeto que pretende representar.

Por otra parte, Spivak (1967) de igual modo empieza definiendo la función logaritmo considerando su relación con la integral como sigue “Si $x > 0$, entonces $\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$” (p. 468). Muestra la representación gráfica de la función logaritmo como se puede apreciar en la Figura 14.

Figura 14

Representación Gráfica de la Función Logaritmo



Nota. Tomado de *Calculo infinitesimal.* (p. 468), por Spivak, 1967, Reverté.

Spivak (1967), define las propiedades y características de la función logaritmo de la forma siguiente:

si $x, y > 0$, entonces

$$log(xy) = log\ x + log\ y,$$

si n es un número natural y $x > 0$, entonces

$$log(x^n) = nlogx$$

si $x, y > 0$, entonces

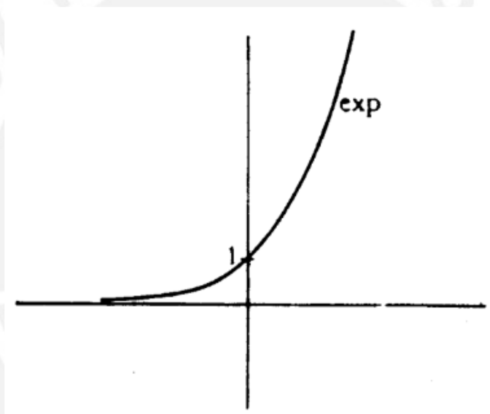
$$log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

Luego el autor pasa a la definición de función exponencial como sigue: "La función exponencial, exp, se define como log^{-1}. Dado que $log\, x$ se define solamente para $x > 0$, tenemos siempre que $\exp(x) > 0$" (Spivak, 1967, p. 471).

Se muestra entonces la gráfica de la función exponencial, como lo indica la Figura 15.

Figura 15

Representación Gráfica de la Función Exponencial por Spivak



Nota. Tomado de *Calculo infinitesimal.* (p. 472), por Spivak, 1967, Reverté.

Spivak (1967), presenta las propiedades y características de la función exponencial de la forma siguiente:

Para todos los números x se cumple

$$exp'(x) = \exp(x)$$

Si x e y son dos números cualesquiera, se cumple

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Del mismo modo, el autor hace la siguiente definición:

$$e = \exp(1)$$

Para todo número x, se cumple

$$e^x = \exp(x)$$

Si $a > 0$, entonces para cualquier x que sea real se cumple

$$a^x = e^{xloga}$$

Según la Teoría de Registros de Representación Semiótica, Spivak (1967) hace uso de la representación en lengua natural y la representación gráfica para definir la función exponencial. En tal sentido se alinea con lo dicho por Duval (1995) en el sentido que la comprensión de un objeto matemático está en relación al uso de al menos dos registros de representación. Si bien es cierto que, su definición es diferente en cuanto a la notación que usa Apóstol (2001), enfatizan en el uso consistente de la función logarítmica para definir a la función exponencial partiendo de la base e; base de los logaritmos naturales o neperianos y llegando a una forma general para una base $a > 0$ y $a \neq 1$.

2.3 La Enseñanza de la Función Exponencial en el Bachillerato Internacional

En el nivel de escuela secundaria de la educación básica regular, los maestros utilizan diversos materiales instructivos, con énfasis actual en el libro de actividades del estudiante por sobre el libro de teoría. Para el análisis didáctico se ha elegido el libro de texto "Matemática 5" de la editorial Corefo (2018), de uso común por parte de los estudiantes de su educación básica regular. La Tabla 9 proporciona detalles esenciales, incluido el nombre del autor, la unidad que cubre el concepto de función exponencial, las páginas específicas dedicadas a este tema y el título del libro.

Tabla 9

Libro de Consulta de Educación Básica Regular del Nivel Secundario

Editorial	Unidad	Páginas	Título
Corefo	3 Funciones II	Libro de texto 201-205 Libro de actividades 211-212	Matemática 5

En el texto existe una categorización de temas organizados por cada unidad. Vale la pena señalar que la sección de Funciones II es donde se originan ciertos temas, como se ilustra en la Tabla 10.

Tabla 10

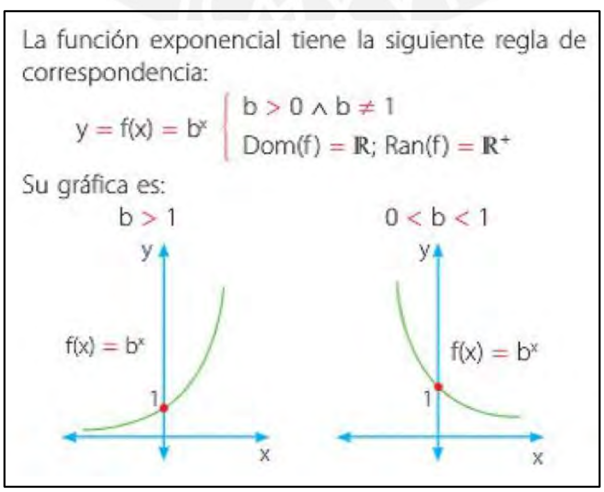
Temas de Función Exponencial del Texto Matemática 5 Corefo

Matemática 5		
Unidad	**Sección**	**Temas**
III	Funciones II	Función exponencial Propiedades Función logarítmica Propiedades

El libro de consulta "Matemática 5" de la editorial Corefo (2018) se presenta en dos volúmenes. El primer volumen es usado como libro de texto, proporcionando una base teórica para los conceptos tratados en sus respectivas unidades didácticas. El segundo volumen se centra en aplicaciones prácticas, reforzando la teoría mediante ejercicios. Este doble enfoque ofrece al estudiante recursos tanto teóricos como prácticos para su aprendizaje. En el texto teórico, se ofrece una exposición de la regla de correspondencia que rige la función exponencial, así como las características de la función logarítmica. Continúa ilustrando cómo las características del gráfico de una función exponencial dependen del valor que tiene la base y también proporciona información sobre el dominio y el rango, posterior a ello se hace lo mismo para la función logarítmica. A continuación, la Figura 16 muestra la forma como se introduce la noción de función exponencial en el texto de teoría.

Figura 16

Definición de la Función Exponencial en el Libro de Teoría



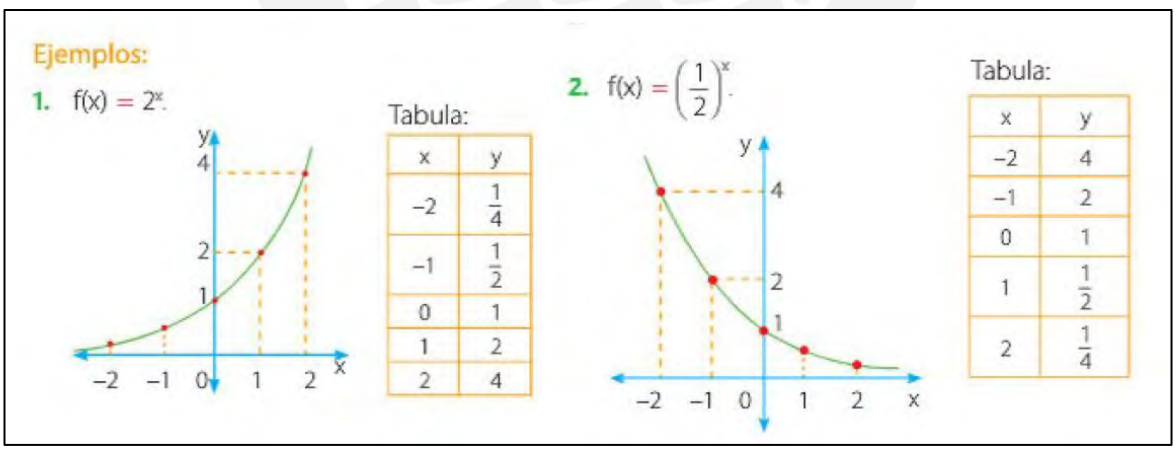
Nota. Tomado de *Matemática 5. Libro del Área.* (p. 201), Corefo, 2018.

La interpretación utilizada en el texto de Corefo (2018) no se alinea con el punto de vista expuesto por Apóstol (2001), ni por Spivak (1967), dado que ambos autores mencionan a la función exponencial como la exponencial del número natural e utilizando notaciones diferentes. Esta forma de introducir la noción de función exponencial no se alinea con la construcción del concepto como tal. Se presentan directamente su representación algebraica por medio de una regla de correspondencia y su representación gráfica utilizando el plano cartesiano. Creemos que al momento no hay acciones que permitan al estudiante apropiarse mejor de estas nociones. No aparece alguna explicación de cómo se forma dicha regla de correspondencia y como asociarla a su representación gráfica. Además, el texto no aborda la asíntota horizontal de la función exponencial. En el contexto de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, el concepto de función exponencial está asociado a mostrar la representación algebraica de la misma mediante $f(x) = b^x$, donde $b > 0$ y $b \neq 1$ y la representación gráfica asociados a los intervalos de valores que asume la base b.

Posteriormente, el texto de teoría muestra ejemplificaciones de lo que es la función exponencial a través de su regla de correspondencia, de su gráfica en el plano cartesiano y de los valores que tienen las variables ubicadas en una tabla. Así lo presenta la Figura 17.

Figura 17

Noción de Función Exponencial por medio de Representaciones Semióticas



Nota. Tomado de *Matemática 5. Libro del Área.* (p. 201), Corefo, 2018.

Se aprecia desde la teoría de registros de Representación Semiótica que utilizan para ello representaciones algebraicas, gráficas y tabulares. En la idea de Duval (1995), las representaciones semióticas permiten comunicar lo que es la representación mental de un objeto matemático. El texto no ofrece alguna explicación respecto a cómo se realizan las conversiones de un registro a otro, lo que en términos de Duval (1995) no permitiría la comprensión del objeto función exponencial.

El texto de teoría de Corefo (2018), nos muestra luego las propiedades de la función exponencial asociadas a la monotonía. Así, presenta el crecimiento o decrecimiento según el valor que tenga la base b, tal como se muestra en la Figura 18.

Figura 18

Propiedades de la Función Exponencial

Propiedades

- Si $b > 1$, entonces f es creciente, es decir:

$$x_1 < x_2 \leftrightarrow b^{x_1} < b^{x_2}$$

- Si $0 < b < 1$, entonces f es decreciente, es decir:

$$x_1 < x_2 \leftrightarrow b^{x_1} > b^{x_2}$$

Nota. Tomado de *Matemática 5. Libro del Área.* (p. 201), Corefo, 2018.

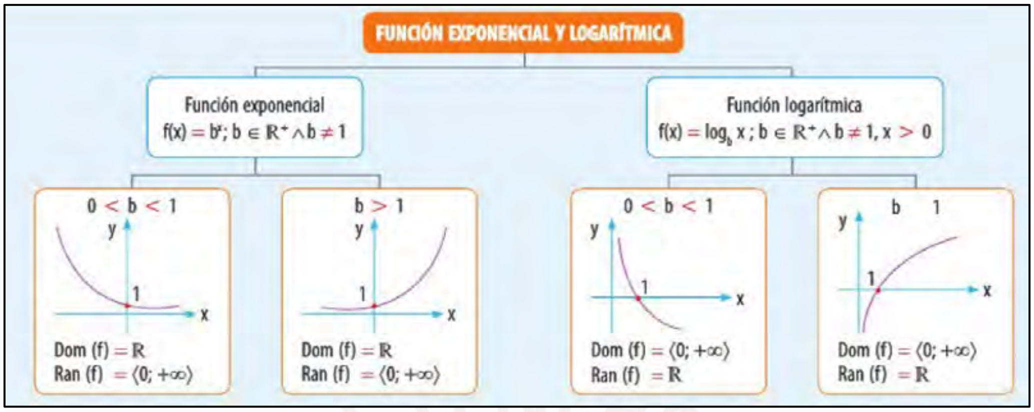
Las propiedades que aborda el libro de teoría, describen el crecimiento y decrecimiento de la función exponencial, sin embargo, no describen características de puntos especiales como el de corte con el eje y, además, es conveniente agregar una descripción para la asíntota de la función.

Desde la óptica de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, observamos que utilizan la representación en lengua natural para describir aprehensiones perceptivas en relación a las representaciones gráficas de nuestro objeto de estudio y su aprehensión discursiva respecto a las características de crecimiento o decrecimiento de la función exponencial, así como también hace uso de la representación algebraica para referirse a esta misma característica pero tomando en cuenta la comparación de dos valores para la variable independiente y lo que ocurrirá en cuanto a aumento o disminución de los valores de la función.

En cuanto al libro de actividades que presenta Corefo (2018), presenta a la función exponencial junto a la función logarítmica. Por un lado, a la función exponencial se le presenta con su regla de correspondencia y sus representaciones gráficas de acuerdo al valor de la base b, y por el otro, a la función logarítmica con su propia regla de correspondencia y las representaciones gráficas que pueda tener de acuerdo también a la base b. Esta presentación no relaciona que una es la función inversa de la otra, se observan como dos objetos matemáticos que están juntos pero que no guardan una relación clara entre ellos. Así lo presenta la Figura 19.

Figura 19

La Función Exponencial en el Texto de Actividades



Nota. Tomado de *Matemática 5. Libro de Actividades.* (p. 211), Corefo, 2018.

Desde la TRRS se hace uso de representaciones algebraicas en relación a la regla de correspondencia y de representaciones gráficas. Dado que es un cuadro sintético de lo que se presentó en el texto de teoría, consideramos que deben estar presentes algunas características importantes como, por ejemplo, la asíntota de la función exponencial, además, de establecer el vínculo importante de la función inversa de una sobre la otra. Quizá algunas representaciones en lengua natural permitirán subsanar estas observaciones que hacemos en el análisis didáctico.

En cuanto a los ejercicios o problemas que propone el texto de actividades se disponen en dos niveles, con una actividad reto para los estudiantes. La Figura 20, muestra el ítem 1.

Figura 20

Nivel 1: Pregunta 1 del Libro de Actividades

Resuelve los siguientes ejercicios de forma individual:

Nivel 1

1. **Indica** la relación de cada función con su inversa.

Función	Inversa
I. $\log_2 x$	a. $\log_2(x - 2)$
II. $2^x + 2$	b. 2^x
III. $2^{x-2} - 2$	c. $\log_2(x + 2) + 2$

a. (I, b);(II, c);(III, a)
b. (I, a);(II, c);(III, b)
c. (I, a);(II, b);(III, c)
d. (I, c);(II, b);(III, a)
e. (I, b);(II, a);(III, c)

Nota. Tomado de *Matemática 5. Libro de Actividades.* (p. 212), Corefo, 2018.

En el nivel 1, tenemos la pregunta 1, la cual pretende que el estudiante relacione la representación algebraica en su forma exponencial con su forma logarítmica. Bajo el análisis de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, en el nivel 1, el ítem 1 hace uso de una representación tabular en la que se colocan las funciones exponenciales y logarítmicas; para darle solución, el estudiante deberá realizar tratamientos en el registro algebraico para lograr la representación algebraica que corresponda a la inversa de la función.

El ítem 2, relacionada al uso de la función logarítmica solicita que se determine el rango a partir de la función mostrada, tal como se muestra en la Figura 21.

Figura 21

Nivel 1: Pregunta 2 del Libro de Actividades

2. Si $f:\langle 1; +\infty\rangle \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida por $f(x) = 1 + \log_x 10$ **determina** su rango:

a. $\langle 1;10\rangle$

b. $\langle -\infty;10\rangle - \{1\}$

c. $\langle 3;+\infty\rangle$

d. $\langle 1;+\infty\rangle$

e. $\langle 0;+\infty\rangle$

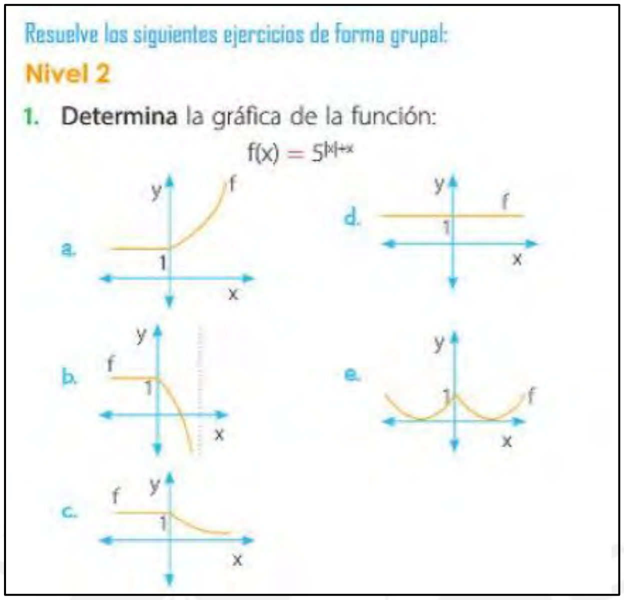
Nota. Tomado de *Matemática 5. Libro de Actividades.* (p. 212), Corefo, 2018.

En cambio, el ítem 2 considera una representación en forma de intervalo al usar el dominio. El estudiante deberá partir de la representación algebraica de la función a la cual le dará un intervalo correspondiente, a partir de allí deberá construir la representación algebraica en su totalidad.

A continuación, el texto de actividades solicita a través del nivel 2, pregunta 1, que determinen la gráfica de la función a partir de su regla de correspondencia, tal y como lo muestra la Figura 22.

Figura 22

Nivel 2: Pregunta 1 del Libro de Actividades



Nota. Tomado de *Matemática 5. Libro de Actividades.* (p. 212), Corefo, 2018.

Tomando la representación algebraica de la función que se le presenta al estudiante, este deberá realizar algunas transformaciones de tratamiento, luego, utilizar alguna estrategia que le permita realizar una conversión del registro algebraico al registro gráfico.

> "Cambiar la representación de objetos o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro es siempre un salto cognitivo. A diferencia del tratamiento, no hay reglas ni asociaciones básicas, como entre palabras e imágenes en el lenguaje cotidiano, para este tipo de transformación de representación. La conversión no se reduce pues a una codificación". (Duval, 2006, p. 150)

La pregunta 2, pretende que el estudiante logre determinar el conjunto solución de una inecuación tal como lo muestra la Figura 23.

Figura 23

Nivel 2: Pregunta 2 del Libro de Actividades

2. **Indica** el conjunto solución de la inecuación:

$$2^{(x+4)}(2^{x-4} - 1) < 2^x - 16.$$

a. $\langle 4; 64 \rangle$ c. $\langle 0; 4 \rangle$ e. $\langle 1; 16 \rangle$
b. $\langle 0; 16 \rangle$ d. $\langle 2; 8 \rangle$

Nota. Tomado de *Matemática 5. Libro de Actividades.* (p. 212), Corefo, 2018.

En esta pregunta los estudiantes deberán hacer uso de las propiedades que caracterizan a las potencias y de la logaritmación. En ese sentido, el estudiante realizará transformaciones en el registro algebraico; multiplicando y trasponiendo términos. Luego, transformará la expresión a una representación algebraica que sea equivalente a la anterior con el uso de las propiedades de los logaritmos. Finalmente, determinará el conjunto de solución.

Finalmente, tenemos la sección Asume el Reto, que tiene por finalidad que los estudiantes se desafíen así mismos, la que se muestra en la Figura 24.

Figura 24

Nivel 2: Pregunta 1 Asume el Reto del Libro de Actividades

1. **Determina** el número de soluciones reales de la ecuación.

$$|\mathrm{sen}\,(x)| = |\mathrm{Ln}\,|x - \pi||.$$

Nota. Tomado de *Matemática 5. Libro de Actividades.* (p. 212), Corefo, 2018.

En este caso, el estudiante deberá aplicar las propiedades del valor absoluto que les permitirán realizar tratamientos en el registro algebraico, además del propio uso de la base y de la logaritmación. Una vez que tenga el resultado el estudiante debe tomar en cuenta las restricciones y valores que ha obtenido de x.

Desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica se privilegia en el desarrollo de este ítem el registro algebraico en el contexto de una ecuación. En ese sentido, la propuesta de los problemas a resolver requiere de enfocarse más al concepto de función exponencial dado que no se aprecian ítems relacionados a construir este concepto.

Finalmente, el texto de Corefo (2018) empieza por presentar la función exponencial y luego la función logaritmo, a diferencia de las concepciones de Apóstol (2001) y Spivak (1967) quienes empiezan por definir la función logaritmo y luego la función exponencial del número neperiano. En buena parte del texto tanto de la parte teórica como de la parte de actividades, no se observa la construcción de la noción de función exponencial, se presentan directamente las representaciones algebraicas, gráficas acompañadas de sus características y propiedades, lo que puede provocar en los estudiantes dificultades para la comprensión de este objeto matemático. Es importante hacer notar que, en los problemas propuestos para los estudiantes, se privilegia el uso del registro algebraico; así tenemos que le solicitan enlazar la representación algebraica de la función logaritmo con su inversa, o también el estudiante deberá trabajar calculando el dominio a partir de una representación algebraica o resolver una ecuación e inecuación sea exponencial o logarítmica. Se observa también la necesidad de incorporar problemas de contexto extramatemático. Hay pocas oportunidades de poder realizar transformaciones como conversiones y tratamientos utilizando el registro gráfico, el registro de lengua natural y la representación tabular, lo que puede traer como consecuencia que los estudiantes presenten dificultades para la comprensión del concepto de función exponencial.

Para conocer de qué forma se enseña la función exponencial en el Programa del Bachillerato Internacional en las instituciones educativas elegimos el texto de Mathematics: Applications and Interpretation de la editorial Oxford. En razón que este es el texto promovido por la institución educativa y utilizado por los estudiantes de grado 11 (5to de secundaria), que se preparan en su formación matemática para el Programa del Diploma y sobre quienes se realiza la presente investigación. Analizaremos desde la TRRS, especialmente desde la formación, tratamiento y conversión, de qué manera se presenta la función exponencial con el fin de conocer definiciones, las propiedades que presenta y los ejemplos que promueve el texto.

Los autores del texto en mención, Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman (2019) presentan la función exponencial tal como se muestra en la Tabla 12.

Tabla 11

Secciones del Capítulo 10: Modelling Rates of Change: Exponential and Logarithmic Functions

Sección	Título	Página
10.1	Geometric sequences and series	462
10.2	Compound interest, annuities, amortization	470
10.3	Exponential models	481
10.4	Exponential equations and logarithms	487

Chang et al. (2019) inician el capítulo con una breve reseña sobre las aplicaciones de los modelos exponenciales en el registro de lengua natural, tomando en cuenta la reducción de la temperatura de una bebida caliente, el interés compuesto, la depreciación del valor de un automóvil, entre otras. A estas, le acompañan algunas imágenes de situaciones acompañadas de texto que sugieren el uso de modelos exponenciales. De igual manera, aquí también se hace uso del registro en lengua natural. Lo podemos observar en la Figura 25.

Figura 25

Presentación Introductoria de la Función Exponencial

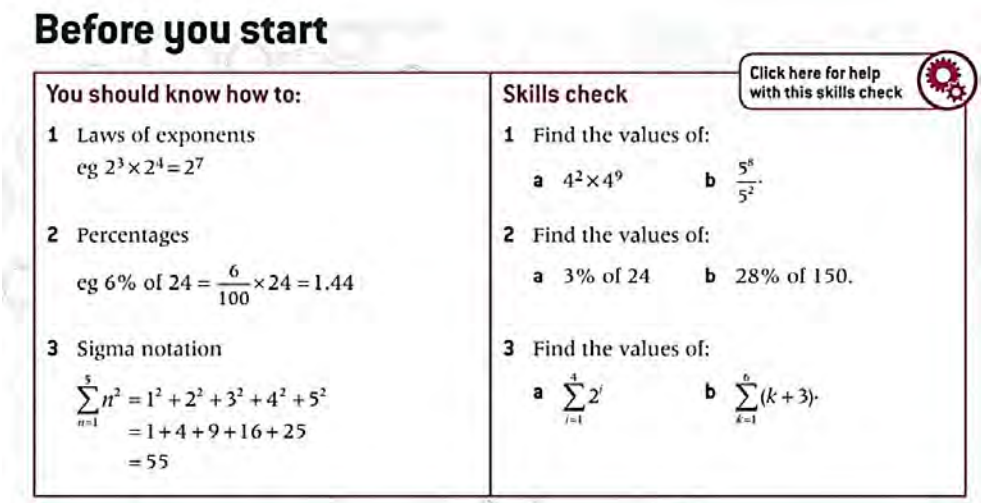
Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 460), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

La Figura 25, sugiere el uso de los modelos exponenciales desde situaciones de contexto extramatemático. Sin embargo, en este registro de lengua natural, las expresiones no son del todo claras o asociadas directamente al objeto matemático. Creemos que, en este aspecto, no se logra involucrar al estudiante con el objeto función exponencial.

Luego, Chang et al. (2019), presentan una sección inicial que busca activar los saberes previos de los estudiantes sobre aspectos matemáticos que les servirán para el desarrollo del capítulo, tal como se muestra en la Figura 26.

Figura 26

Activación de los Saberes Previos



Before you start

You should know how to:	Skills check
1 Laws of exponents eg $2^3 \times 2^4 = 2^7$	**1** Find the values of: **a** $4^2 \times 4^9$ **b** $\frac{5^8}{5^2}$.
2 Percentages eg 6% of $24 = \frac{6}{100} \times 24 = 1.44$	**2** Find the values of: **a** 3% of 24 **b** 28% of 150.
3 Sigma notation $\sum_{n=1}^{5} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ $= 1 + 4 + 9 + 16 + 25$ $= 55$	**3** Find the values of: **a** $\sum_{i=1}^{4} 2^i$ **b** $\sum_{k=1}^{6} (k+3)$.

Click here for help with this skills check

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 461), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

Las situaciones propuestas en la Figura 17, exigen del estudiante que tenga recuerdos sobre aspectos algorítmicos en relación a las leyes de exponentes en la parte de multiplicación de bases iguales, la obtención del porcentaje de un número y el reconocimiento de la notación sigma como sumatoria. Estas herramientas numéricas, creemos que serán usadas para operar con funciones exponenciales, aplicarlas al uso de matemática financiera como el interés compuesto y el uso de series geométricas. Esto representa un estadio inicial para activar los saberes que utilizarán los estudiantes para la comprensión del objeto función exponencial.

El capítulo 10, inicia de manera formal con el uso de las *Secuencias y Series Geométricas*, los autores presentan esta sección a través de la historia de Sissa, que se considera el inventor del ajedrez, con una narrativa sobre el agradecimiento del Rey Shihram con el juego donde se involucra el tablero de ajedrez. La historia se muestra en la Figura 27.

Figura 27

Historia de los Granos de Trigo y el Ajedrez

The game of chess was invented in India by a man named Sissa ibn Dahir. The king, Shihram, was so pleased with the game that he offered Sissa any reward that he wanted. Sissa said that he would take this reward: the king should put one grain of wheat on the first square of a chessboard, two grains of wheat on the second square, four grains on the third square, eight grains on the fourth square, and so on, doubling the number of grains of wheat with each square.

How would you be able to find out the number of grains of wheat on the last square of the chessboard?

How would you be able to find the total number of grains of wheat on the chessboard?

This is one example of a geometric sequence.

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 462), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

En esta historia, el Rey Shihram en agradecimiento deberá dar la cantidad de granos de trigo que ocupa la última casilla de un tablero de ajedrez, sabiendo que en la primera casilla se coloca un grano, en la segunda 2 granos, en la tercera 4 granos, en la cuarta 8 granos de trigo y así sucesivamente. Con la historia mostrada en la Figura 18, creemos que busca del estudiante descubrir una secuencia numérica para hallar la cantidad de granos de trigo que deberá dar el Rey Shihram al llegar a conocer la cantidad de granos de trigo que corresponde a la última casilla del tablero de ajedrez. En esta parte, se presenta la secuencia geométrica en el registro de lengua natural, la cual luego obliga al estudiante para resolver la primera pregunta, a realizar una conversión hacia el registro tabular para abordar la secuencia geométrica: $2^0\ ;\ 2^1\ ;\ 2^2\ ;\ 2^3\ ; \ldots ;\ 2^{64}$ reconociendo en este último término la cantidad de granos de trigo que deberá entregar el Rey. Asimismo, para poder obtener el valor, el estudiante deberá hacer tratamientos en registro tabular para obtener el valor. Y, para resolver la segunda pregunta, el estudiante deberá reconocer al objeto matemático serie geométrica como $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{64}$, realizar tratamientos en el registro tabular y obtener el resultado.

Consideramos que, el inicio del uso de una secuencia geométrica, es importante para abordar el concepto de función exponencial. Una de las características de este objeto matemático radica en estar asociada a una progresión geométrica. En la idea de Duval (1999), el uso de al menos dos registros de representación permite la comprensión del objeto matemático.

En el texto, Chang et al. (2019) pasa a definir lo que es una secuencia y serie geométrica para pasar a dos trabajos de investigación.

El primero de ellos contiene un grupo de secuencias numéricas, donde el objetivo está en que el estudiante descubra cómo se puede reconocer una secuencia geométrica entre otras que no lo son. En este aspecto, el estudiante deberá realizar tratamientos a la representación, para descubrir si pertenece o no a una secuencia donde el producto por un factor constante produce la sucesión.

El segundo de ellos, consiste en que, una vez reconocida la idea del factor multiplicativo, es decir, la base de la función exponencial, ésta se use para completar secuencias geométricas y reconocer la razón de una progresión geométrica. Las características de una secuencia geométrica se realizan en la representación tabular. En los ítems que le sigue, se busca que la secuencia se construya a partir del primer término y su razón. Así, en este apartado también se hace en la representación tabular.

Creemos que la intención de las secciones llamadas investigación 1 y 2 son las de ir reconociendo la aparición exponencial en su formación como secuencia geométrica. Sin embargo, pensamos que esta noción no es pertinente para la comprensión del objeto, dado que solo se encuentra en una representación semiótica: la tabular.

Chang et al. (2019) dan indicios de una cercanía a la función exponencial al definir la representación algebraica del término general para una secuencia geométrica, tal como se muestra en la Figura 28.

Figura 28

Representación Algebraica del Término General

The nth term in a geometric sequence is given by the formula $u_n = u_1 r^{n-1}$.

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 464), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

La Figura 28, consideramos, es un primer acercamiento del texto a la función exponencial desde la representación algebraica. Observamos cómo los autores generan la formación de lo que será el registro algebraico a partir de los signos como el término de un lugar $\boldsymbol{n}$, por medio de $\boldsymbol{u_n}$, el primer término de la secuencia $\boldsymbol{u_1}$, la razón $\boldsymbol{r}$ de la secuencia, que representa la base y la variable independiente se encuentra en el exponente como $\boldsymbol{n-1}$.

Presentamos un primer ejemplo que propone el texto, en la Figura 29.

Figura 29

Transformaciones Semióticas de la Secuencia Geométrica

1 For each of these geometric sequences, write down:

i the first term, u_1 **ii** the common ratio, r **iii** u_{10}.

a 2, 6, 18, 54, … **b** −3, 6, −12, 24, … **c** 16, 8, 4, 2, …

1 a i $u_1 = 2$

ii $r = \frac{6}{2} = 3$

iii $u_{10} = 2(3)^9 = 39\,366$

b i $u_1 = -3$

ii $\frac{6}{-3} = -2$

iii $u_{10} = -3(-2)^9 = 1536$

c i $u_1 = 16$

ii $r = \frac{8}{16} = 0.5$

iii $u_{10} = 16(0.5)^9 = 0.031\,25$

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 464), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

En este primer ejemplo, Chang et al. (2019) tienen el propósito de mostrar en principio el reconocer el primer término de la secuencia geométrica $\boldsymbol{u_1}$ y la razón $\boldsymbol{r}$. Para ello, realizan la conversión desde el registro en lengua natural (al solicitar el cálculo del primer término o de la razón) al registro tabular de la secuencia geométrica para identificar la variable y finalmente a la representación algebraica, donde en el ítem ii, utilizan el tratamiento, en este registro, por medio del cociente para obtener lo pedido. Además, el ejemplo también presenta en su ítem iii, por medio de una representación algebraica como $\boldsymbol{u_{10}}$, hacer uso de la representación algebraica de la secuencia geométrica $\boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{r^{n-1}}$, y a través de tratamientos en el registro algebraico sea posible obtener el valor del término que ocupa el lugar 10.

Consideramos que existe una conexión articulada en la construcción del uso de la representación algebraica: término general. En esta parte se aprecian conversiones entre los registros en lengua natural y algebraico. En palabras de Duval (1999):

> Cada registro presenta posibilidades de tratamiento que le son propios o que, siéndoles comunes, son considerablemente más económicos en relación con otros registros. De ahí el interés de un cambio de registro. Esto es equivalente a decir que no hay tratamientos que tengan la misma naturaleza en dos registros diferentes. Sin embargo, hay una excepción para los registros de lengua. (…). Una comparación de los tratamientos por negación, tal como pueden efectuarse en cada uno de estos dos registros, es entonces esencial en la perspectiva de una coordinación de registros. (p. 139)

Posterior a ello, los autores presentan problemas en contextos extramatemáticos, relacionados a la constante porcentual que muestra el aumento de sueldo que se gana por año. Para luego, presentar un problema de contexto intramatemático, donde se pretende utilizar la idea de formación que tiene un término general de una secuencia para ser aplicada a cualquier término, tal como lo muestra la Figura 30.

Figura 30

Conversiones entre el Registro en Lengua Natural y el Registro Algebraico

2 Carolien is starting a new job. She earns €48 000 in her first year, and her salary increases by 5% each year. Show that Carolien's annual salary follows a geometric sequence, and state the common ratio. Calculate how much Carolien will earn in her fifth year at work.

3 The third term of a positive geometric sequence is 63 and the fifth term is 567. Find the common ratio and the first term.

2 $u_1 = 48\,000$

$u_2 = 48\,000 + 5\% \times 48\,000$

$= 48\,000(1 + 5\%)$

$= 48\,000(1 + 0.05)$

$= 48\,000 \times 1.05$

So, $r = 1.05$

Therefore,

$u_5 = u_1 r^4 = 48\,000(1.05)^4 = €58\,344.30$

3 $u_3 = 63$

So, $u_1 r^2 = 63$

$u_5 = 567$

So, $u_1 r^4 = 567$

Then you can write:

$\frac{u_5}{u_3} = \frac{u_1 r^4}{u_1 r^2} = \frac{567}{63} = 9$

$r^2 = 9$

$r = \pm 3$

You are told that all the terms are positive, so $r = 3$

Substituting back into the first equation:

$u_1 = \frac{63}{9} = 7$

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 464), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

En la Figura 30, se aprecia en la solución del segundo problema donde se pretende construir un modelo exponencial a partir de los aumentos porcentuales que se dan cada año. Así, se aprecia la conversión de la representación en lengua natural hacia la representación algebraica de la secuencia geométrica, en este último registro de representación se realizan tratamientos que llevan a la regla de correspondencia que permitirá hallar lo que recibe en el quinto año. Podemos atribuir a la conversión entre estos dos registros la comprensión de este objeto matemático tal como lo indica Duval (1999).

Sin embargo, consideramos que si bien es cierto las características matemáticas de la secuencia geométrica son el foco de atención de los autores, el descubrimiento de modelos exponenciales debería recobrar mayor relevancia. Por ello, consideramos insuficiente los ejemplos relacionados a este punto.

Chang et al. (2019), continúan la propuesta de esta sección: Secuencias y Series Geométricas, presentando ejercicios de contexto extramatemático referidos sobre crecimiento poblacional, uso de la constante en el aumento porcentual en el precio del tomate y sobre depreciaciones, para seguir con el concepto de series geométricas que representa también una transformación de la función exponencial, culminando con ejercicios y problemas relativos a este último concepto. Se resalta que, en la propuesta de actividades, son los problemas de contexto extramatemático lo que más hay en comparación a los ejercicios o problemas intramatemáticos.

La sección 10.2 que se propone en el texto está relacionada al interés compuesto, anualidades y amortización. Nuevamente, Chang et al. (2019) apuestan por ir introduciendo aplicaciones de la función exponencial para poder generar su comprensión. La sección parte de una situación de contexto donde Yun Lu cumple 10 años y el asunto está relacionado a la inversión de dinero producto de una herencia para colocarlo en un banco a un interés compuesto anual de 2% hasta que cumpla 21 años o recibir USD 1400 cuando Yun Lu cumpla esa edad. Este problema pretende inducir al estudiante a buscar un modelo matemático, probablemente, una representación algebraica, que le permita obtener la cantidad de dinero al interés compuesto en mención y compararla con los USD 1400 que podría recibir Yun Lu y decidir cuál es la mejor opción.

Luego, los autores proponen una actividad llamada *Investigation 4* donde se solicita que, a partir de una cantidad dada, se averigüe el interés generado al cabo de 3 años. Tal como se muestra en la Figura 31.

Figura 31

Tratamientos en la Representación Tabular

Investigation 4

For each of the following amounts deposited in a bank, calculate how much interest would be paid at the end of three years.

Amount	Simple interest at 5%	Compound interest at 5% compounded annually
US$100	Year 1: 5% of 100 = US$5 Year 2: also US$5 Year 3: also US$5 So, total is US$15	Year 1: 5% of 100 = US$5 Year 2: 5% of 105 = US$5.25 Year 3: 5% of 110.25 = US$5.5125 So, total is US$15.76
US$500	Year 1: Year 2: Year 3: Total =	
US$2000	Year 1: Year 2: Year 3: Total =	

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 470), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

De la Figura 31, podemos advertir del propósito de la actividad, la misma está en que el estudiante pueda reconocer la diferencia entre un interés simple de otro compuesto a partir del cálculo del interés que se produce año a año y contabilizar el interés generado en este tiempo. Así, en el texto se propone que la comprensión de estos objetos matemáticos, pasen por diferenciarlos dentro de la representación tabular a través de tratamientos a partir de la cantidad de dinero inicial que se coloca. Finalmente, esta idea es utilizada para mostrar al estudiante cómo se puede modelar matemáticamente un interés compuesto a través del depósito de USD 100 a un interés del 5% anual, llegando a la expresión final del dinero que obtendrá al final del año $\boldsymbol{n}$, como sigue:

$$100\left(1+\frac{5}{100}\right)^{n}$$

Así, en el texto el uso de la representación en lengua natural permite hacer una conversión hacia una representación algebraica que es utilizada para dar la idea de cómo construir el modelo exponencial. Consideramos al respecto, que este paso es importante en la construcción del objeto matemático función exponencial dado que, si bien esta representación algebraica aún no guarda formalmente una representación funcional, ya da indicios de ella más aún al momento de expresar el *Future Value (**FV**),* es decir, Valor Futuro por medio de una fórmula:

$$FV = PV\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$$

Apreciamos en esta fórmula, una representación algebraica que utiliza el modelo exponencial en su formación compuesto por el *Present Value (**PV**)* que está referido al Valor Presente, el período anual de interés $\boldsymbol{r}$, y la cantidad de años $\boldsymbol{n}$ a la que se impondrá el capital.

Chang et al. (2019), utilizan un ejemplo en el que intervienen dos personajes Peter y Paul, el primero invierte AUD 2000 (dólares australianos) en un banco a interés simple con tasa de 3% y Paul invierte la misma cantidad de dinero en el otro banco bajo interés compuesto anualmente con una tasa de 2,9%. Con el apartado del primer sub-ítem se solicita calcular la cantidad de dinero recibida al término de 10 años. Los autores buscan con ello que el estudiante comprenda la diferencia de cálculo entre un interés simple y otro compuesto, en este momento se ha pasado del registro de representación en lengua natural al registro algebraico cuando usan las fórmulas y reemplazan los valores para obtener los intereses solicitados realizando tratamientos en este registro de representación. Y en el segundo sub-ítem se busca ejemplificar la forma cómo se utilizan las fórmulas para calcular el tiempo en el que logran al menos en ambas personas una cantidad de AUD 5000. Para lograr ello han hecho una conversión del registro de lengua natural al registro algebraico cuando utilizan la fórmula para colocar los datos y ubicar l variable tiempo.

Resolver las ecuaciones que aparecen, implican realizar tratamientos en este registro. A continuación, el problema presentado en la Figura 32.

Figura 32

Conversiones del Registro de Lengua Natural al Registro Algebraico

Example 4

Peter invests AUD 2000 (Australian dollars) in a bank that offers simple interest at a rate of 3% per annum.

Paul invests AUD 2000 in another bank that offers 2.9% interest compounded annually.

a Calculate how much money they each have in the bank after 10 years.

b Determine after how many years they will each have at least AUD 5000 in their accounts.

a Peter:

3% of 2000 = AUD 60

$60 \times 10 = 600$

So at the end of 10 years, Peter has AUD 600 + his original AUD 2000 = AUD 2600

Paul:

Using the formula, Paul has

$$FV = 2000\left(1+\frac{2.9}{100}\right)^{10}$$

FV = AUD 2661.85

b Peter:

3% of 2000 = AUD 60

So, Peter earns AUD 60 interest each year.

In order to have AUD 5000, Peter will have to make 5000 − 2000 = AUD 3000 interest.

So, it will take $\frac{3000}{60} = 50$ years before he has AUD 5000 in the bank.

Paul:

Using the formula:

$$5000 = 2000\left(1+\frac{2.9}{100}\right)^{n}$$

So $n = 32.05$

It will take Paul just over 32 years to have AUD 5000 in the bank.

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 471), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

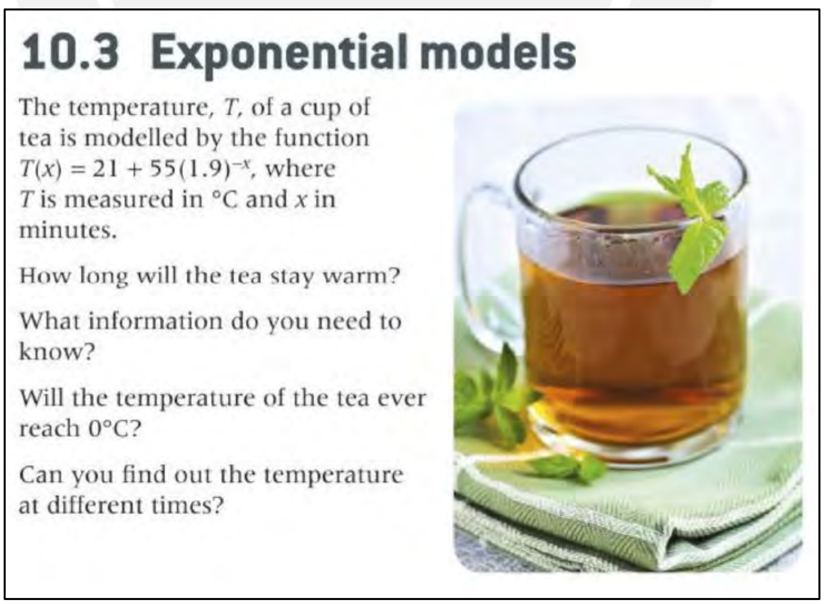
Posterior a ello, se presentan una serie de problemas asociados a interés compuesto donde el estudiante deberá realizar conversiones desde la representación en lengua natural que tiene el problema sobre interés compuesto al algebraico, donde utilizará la fórmula para reemplazar valores y determinar, a través de tratamientos en este registro lo solicitado. Así, los autores van mostrando los modelos exponenciales a través de la inflación y la amortización bajo la misma idea: presentan una situación de contexto extramatemático asociada al modelo que se quiere mostrar en el registro de lengua natural, utilizan un razonamiento lógico para iniciar con la conversión al registro algebraico, donde finalmente presentan la fórmula, luego, en base a ejemplificaciones y problemas de contexto extramatemático, fomentan en el estudiante las conversiones desde el enunciado del problema que representa el modelo representado en lengua natural hacia el registro algebraico para poder utilizar el modelo que se presenta en la fórmula y por medio de tratamientos en las representaciones algebraicas obtener finalmente la respuesta a lo solicitado.

Creemos importante destacar el uso de las conversiones entre estos registros y los tratamientos realizados y explicados líneas arriba. Sin embargo, consideramos que para que los estudiantes puedan tener una mayor comprensión de los modelos exponenciales sería conveniente usar también por ejemplo, la representación tabular, lo que permitiría acercar al estudiante a la dependencia e independencia de variables en el modelo en el que trabaja, con ello su comprensión sobre el objeto matemático será mejor, tomando la idea de Duval (2006), en la solución de un problema se necesita que los estudiantes identifiquen las cantidades conocidas, y la relación entre las cantidades conocidas y desconocidas, y que traduzcan un enunciado a una ecuación.

El texto de Chang et al. (2019) continúa con la sección 10.3 denominada *Exponential models*, la misma empieza presentando una situación relacionada al modelo exponencial de la temperatura $\boldsymbol{T}$ en °C de una taza de té y el tiempo $\boldsymbol{x}$ en minutos que transcurre, tal como lo evidencia la Figura 33.

Figura 33

Presentación del Modelo Exponencial en su Representación Algebraica



10.3 Exponential models

The temperature, T, of a cup of tea is modelled by the function $T(x) = 21 + 55(1.9)^{-x}$, where T is measured in °C and x in minutes.

How long will the tea stay warm?

What information do you need to know?

Will the temperature of the tea ever reach 0°C?

Can you find out the temperature at different times?

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 481), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

Nótese que la expresión $T(x) = 21 + 55(1{,}9)^{-x}$ en la Figura 24, corresponde a la transformación de una función exponencial. Para comprender esta representación algebraica, el texto propone responde preguntas vinculadas a características de la función exponencial tales como: ¿cuánto tiempo permanecerá caliente el té?, esta pregunta induce al estudiante a buscar información de ¿cuándo se considera caliente el té?, siendo este el valor de al menos 27°C, es decir, hay una conversión desde la representación de lengua natural hacia la representación tabular. Este valor será utilizado en la representación algebraica de la temperatura $T(x) = 21 + 55(1{,}9)^{-x}$ para reconocer el intervalo de tiempo en que tendremos un té caliente. En tal sentido se producen tratamientos en el registro algebraico que permitirán obtener el intervalo de tiempo buscado.

Otra pregunta que se presenta en el texto es ¿alguna vez la temperatura será de 0°C? para ello uno de los caminos que puede tomar el estudiante es realizar una conversión desde el registro algebraico, que lo marca la regla de correspondencia, hacia el RGD. Por ejemplo, con ayuda del GeoGebra, el estudiante puede ver claramente que la temperatura más baja se acercará a 22 °C, lo que implica que realice una aprehensión perceptiva, además de poder utilizar la herramienta para mover el gráfico y observar que la función tiene una asíntota cuya ecuación es $y = 22$. Así, el estudiante habrá realizado una aprehensión operatoria que le permitió modificaciones en el RGD para lograr comprender esta característica. Una última pregunta, está asociada a ¿puedes calcular la temperatura en diversos tiempos?, la que obliga al estudiante a probablemente utilizar la representación algebraica dada por la regla de correspondencia $T(x) = 21 + 55(1{,}9)^{-x}$ y realizar una tabla con diversos valores para el tiempo y sus respectivas temperaturas reconociendo que el tiempo no puede ser negativo y que existe una temperatura de inicio, así como una temperatura final que se espera la pueda asociar a la característica de asíntota que descubrió en la pregunta anterior. Así, el estudiante ha realizado una conversión desde el registro algebraico hacia el registro tabular, en el cual se han producido tratamientos para obtener valores de pares ordenados de ambas variables para reconocer características como temperatura inicial, final y decrecimiento de la función.

Posteriormente, de Chang et al. (2019), inician con una sección de investigación. En ella, solicitan en primer término utilizar la tecnología, que en el bachillerato puede ser la calculadora de pantalla gráfica o algún software relacionado a un ARD para graficar diversas funciones exponenciales de la forma $f(x) = b^x, b > 0, b \neq 1$, luego les pide ordenarlas en dos grupos: crecientes y decrecientes, y finalmente, utilizar la función $g(x) = e^x$ para determinar en el gráfico el valor de $\boldsymbol{e}$. Al final de esta investigación, el texto presenta a todas las funciones usadas como funciones exponenciales. Así lo podemos ver en la Figura 34.

Figura 34

Conversión del Registro Algebraico al Registro Gráfico-Dinámico

Investigation 8

1 Using technology, sketch the following functions:

a $f(x)=2^x$ b $f(x)=1.5^x$ c $f(x)=0.5^x$

d $f(x)=0.3^x$ e $f(x)=e^x$

In part **e**, e is a special number that we will discuss shortly.

2 Sort the functions into two groups, increasing and decreasing.

3 For the function $f(x)=e^x$, what value of x gives $f(x)=e$? Use this to find the value of e from your graph.

These are all examples of **exponential** functions.

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 482), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

Analizando la actividad de investigación desde nuestro marco teórico, podemos advertir en la pregunta 1 que se produce una conversión del registro algebraico, cuando se presentan diversas reglas de correspondencias asociadas a funciones exponenciales, hacia el RGD cuando el estudiante utiliza un software de ARD o incluso su calculadora de pantalla gráfica para realizar la representación gráfico-dinámica de las funciones exponenciales.

En la pregunta 2, el estudiante hace solo ordenamientos de funciones en el RGD crecientes y decrecientes utilizadas en la pregunta 1. En esta parte el estudiante hace uso de su aprehensión perceptiva al reconocer el crecimiento y decrecimiento de las funciones. Consideramos que en este aspecto el texto puede proveer también algunos tratamientos en el RGD que permitan comprender mejor esta noción. Por ejemplo, al solicitarles desarrollen su aprehensión operatoria cuando utilicen en GeoGebra la función de coordenadas de un punto y mover el punto a medida que se avanza en la variable independiente y observar que los valores de la función suben o bajan para conocer el crecimiento o decrecimiento de la función.

Finalmente, en la pregunta 3, al solicitar el valor del número $\boldsymbol{e}$, se está induciendo al estudiante a realizar tratamientos en el RGD cuando el valor del exponente sea 1, y mediante una aprehensión perceptiva y operatoria obtiene que el valor de $\boldsymbol{e = 2,718281}$ ...

Consideramos que estas actividades son insuficientes para el desarrollo de la noción de función exponencial, dado que los autores Chang et al. (2019) proponen el reconocimiento de las características como el crecimiento o decrecimiento y el valor del número $\boldsymbol{e}$ realizando básicamente aprehensiones en este RGD. Por ello, nos parece importante no quedarnos en un solo registro, es recomendable hacer conversiones. Como dice Duval (1999), las conversiones son las operaciones cognitivas más demandantes y permiten la comprensión del objeto matemático.

Luego, Chang et al. (2019), presentan la definición de función exponencial como sigue en la Figura 35.

Figura 35

Definición de Función Exponencial

An exponential function has a number, called the base, raised to a power.
The independent or input variable is the power.
The general equation is of the form $f(x) = ka^x + c, \quad a > 0, \; k \neq 0$

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 482), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

El texto, muestra en la Figura 26 la definición de una función exponencial, como aquella que tiene una base y un exponente, siendo ésta última su variable independiente. Además, muestra la representación algebraica de lo que es su ecuación general en la forma $f(x) = ka^x + c$, donde $a > 0$ y $k \neq 0$.

La definición que presenta el texto, requiere que la base $a \neq 1$, al igual que presentar la función exponencial por la representación algebraica en su forma $f(x) = a^x$, con la intención que el estudiante pueda familiarizarse con la forma elemental de la función. Consideramos que la presentación que hace el texto de la función exponencial, no está articulada, dado que primero muestra en una situación problema a la función exponencial en su forma general con el ejemplo de la temperatura de la taza de té, luego pasa que en las actividades de investigación usa la representación algebraica de funciones exponenciales elementales, para pasar luego, mostrar la definición de función exponencial en su forma general.

Luego, los autores proponen otra actividad de investigación. En ella, se les presentan 3 funciones exponenciales $f(x) = 2^x$; $g(x) = e^x$; $h(x) = 3^x$ y con el uso de un software de ARD se realiza una conversión del registro algebraico al registro gráfico, con la intención que los estudiantes puedan reconocer la tasa de cambio usando la pendiente de una recta. Ello, con la intención de presentar el crecimiento o decrecimiento de la función exponencial.

Uno de los ejemplos que presenta el texto está orientado a determinar características de la función exponencial en su forma general $f(x) = ka^x + c$. Así, los ítems de la Figura 36 preguntan por la ecuación de la asíntota horizontal, coordenadas del punto donde la curva corta al eje Y, y por último determinar si es creciente o decreciente.

Figura 36

Tratamientos y Conversiones en el Registro Algebraico y de Lengua Natural

Example 10

For each of the following functions, find:

i the equation of the horizontal asymptote

ii the coordinates of the point where the curve cuts the y-axis

iii state whether the function is increasing or decreasing.

a $f(x) = 3^x + 2$

b $f(x) = 5 \times 0.2^x - 3$

a **i** The horizontal asymptote has equation $y = 2$.	2 is the value for c
ii The curve cuts the y-axis at the point $(0, 3)$.	$k = 1$ and $c = 2$, so, $1 + 2 = 3$
iii The function is increasing because 3 is greater than 1.	
b **i** The horizontal asymptote has equation $y = -3$.	-3 is the value for c
ii The curve cuts the y-axis at the point $(0, 2)$.	$k = 5$ and $c = -3$, so $5 - 3 = 2$
iii The function is decreasing because 0.2 lies between 0 and 1.	

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 484), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

En la Figura 36, podemos observar que, dada la regla de correspondencia, el estudiante debe permanecer en el registro algebraico para identificar valores asociados a las características que se le solicitan. Por ejemplo, el ítem a) presenta la representación algebraica de la función exponencial $f(x) = 3^x + 2$, se le solicita al estudiante en el subítem i) escribir la ecuación de la asíntota. Para ello, el desarrollo que propone el texto utiliza la identificación del coeficiente $\boldsymbol{c}$ en $f(x) = ka^x + c$, estando en el mismo registro, se ubica el valor de $c = 2$ lo que se traduce en que la ecuación de la asíntota será $\boldsymbol{y} = \mathbf{2}$. Para el subítem ii) se solicita las coordenadas del punto que corta al eje Y, para ello, estando en el registro algebraico, se identifican los valores de $k = 1$ y $c = 2$, el tratamiento continúa al sumar estas cantidades $k + c = 3$, lo que ayuda a obtener las coordenadas del punto de corte de la curva con el eje Y como (0 ; 3). Finalmente, el subítem iii) solicita indicar si la función es creciente o decreciente; para ello, el ejemplo estando en el registro algebraico, identifica la base 3 y la compara con una base mayor a 1, hace una conversión al registro de lengua natural concluyendo así que la función es creciente. Lo mismo sucede para la función de la parte b).

Creemos que la solución que se propone en el texto está dirigida a una solución algorítmica de la matemática; al identificar coeficientes claves para reconocer asíntotas, intercepto con el eje Y e indicar el crecimiento o decrecimiento, manejándose mayormente la solución en el registro algebraico. Ello a consideración de Duval (1999) representa un trabajo que no genera desarrollo en la comprensión del objeto matemático al permanecer en un mismo registro de representación semiótica.

Luego, se propone una serie de ejercicios relacionados a determinar el intercepto con el eje Y, la ecuación de la asíntota y el crecimiento o decrecimiento de las funciones exponenciales propuestas, como lo muestra la Figura 37.

Figura 37

Tratamientos en el Registro Algebraico

Exercise 10H

For the following equations, find:

a the y-intercept

b the equation of the horizontal asymptote

c state whether the function shows growth (increasing) or decay (decreasing).

1 $f(x)=4^x+1$ **2** $f(x)=0.2^x-3$

3 $f(x)=e^{2x}$ **4** $f(x)=3^{0.1x}+2$

5 $f(x)=3(2)^x-5$ **6** $f(x)=4(0.3)^{2x}+3$

7 $f(x)=5(2)^{0.5x}-1$ **8** $f(x)=2(0.4)^x-1$

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 485), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

La Figura 37, se le muestra al estudiante para que pueda aplicar los mismos procedimientos que en el ejemplo anterior. Nuevamente el desarrollo se estaría produciendo en el registro algebraico.

Posterior a ello, Chang et al. (2019) presenta la aplicación del modelo exponencial al interés compuesto, para ello introduce un ejemplo, donde previamente ya ha indicado que "Exponentials functions can be used to model real-life situations where there is a constant percentage change" [Las funciones exponenciales se pueden usar para modelar situaciones de la vida real donde hay un cambio porcentual constante]. Este ejemplo se puede observar en la Figura 38.

Figura 38

Conversiones entre los Registros de Lengua Natural, Algebraico y Gráfico

Example 11

Bailey invests US$2000 in a bank that pays interest at a rate of 4.5% per annum compounded monthly.

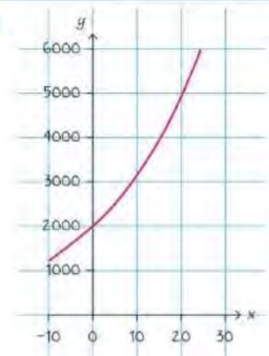
a Sketch a graph to model how much Bailey has in the bank after x years.

b Deduce whether an exponential model is a reasonable choice to model how much she has in the bank.

c Calculate how much money Bailey has in the bank after four years.

d Calculate how long it will take for her to have US$3000 in the bank.

a



b Yes, because the independent variable is the exponent.

c US$2393.63

d 9.03 years, so after 10 years she will have US$3000 in the bank.

If US$$y$ represents how much Bailey has in the bank, and x represents the time in years, then the formula to use is:

$$y = 2000\left(1+\frac{4.5}{1200}\right)^{12\times x} \quad \text{or}$$

$$y = 2000(1.003\,75)^{12x}$$

Put $x = 4$ into the equation or use your GDC.

Sketch the line $y = 3000$ and find the point of intersection.

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 485), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

El enunciado del problema, muestra la función exponencial a través de una situación aplicada de interés compuesto de 4,5% anual con un capital inicial de US$ 2000. Esta expresión en el registro de lengua natural es abordada en otros registros según los ítems del problema.

En el ítem a) se solicita dibujar un gráfico que exprese lo que tiene Bailey al cabo de x años. Aquí se hace una conversión desde el registro en lengua natural hacia el registro gráfico. Se muestra una gráfica, la que no indica cómo se obtuvo, sin embargo, podemos inferir que ha sido bosquejada en la idea de que, si existe un porcentaje constante, el resultado de la gráfica es una función exponencial. Ha tomado en cuenta el capital inicial de US$ 2000 y se ha trazado una curva exponencial.

Consideramos que en esta gráfica debió tenerse cuidado en que la gráfica no llegue hacia el semieje negativo de la variable tiempo x. Esto puede confundir al estudiante al reconocer el dominio de la función en el contexto de la situación.

En el ítem b) se pide deducir si un modelo exponencial sería el más adecuado para conseguir el capital que tiene en determinado tiempo. En este caso, se parte del registro en lengua natural para hacer un tratamiento en este mismo registro explicando que sí es posible dado que la variable independiente está en el exponente.

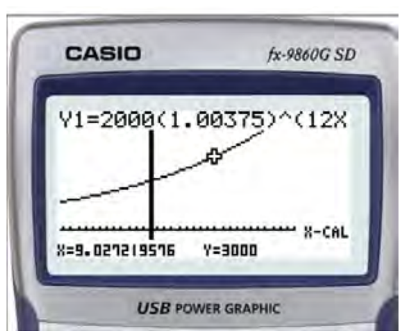
En el ítem c) se solicita desde el registro en lengua natural, calcular cuánto recibe Bailey al cabo de 4 años de haber puesto su dinero. Así, en la solución se hace una conversión al registro algebraico, construyendo el modelo exponencial: $y = 2000(1{,}00375)^{12x}$, este modelo le permite hacer tratamientos en este registro al reemplazar el valor de 4 en el tiempo $\boldsymbol{x}$ y conseguir el dinero que recibirá Bailey.

Cabe mencionar que, en esta expresión algebraica, Chang et al. (2019) la presentan como una ecuación, más no con la notación funcional $C(x)$, por ejemplo. Esta notación que presentan puede traer confusiones a los estudiantes, dado que las ecuaciones no se someten a las variables dependientes e independientes como sí las funciones, y es esta última quien modela la situación de contexto extramatemático.

Finalmente, en el ítem d) se solicita calcular el tiempo para el cual Bailey recibirá US$ 3000. En este desarrollo, los autores solo indican que se trace la línea $y = 3000$ y que se consiga el valor de la función en la intersección. Presentando la respuesta como 9,03 años y aproximando el tiempo a 10 años para conseguir los US$ 3000. No queda claro cómo han resuelto esta parte, sin embargo, podemos asumir que, dado que los estudiantes aún no manejan tópicos relacionados a ecuaciones logarítmicas, se ha hecho uso de la calculadora de pantalla gráfica. Se ha ingresado la representación algebraica $y = 2000(1{,}00375)^{12x}$ a la calculadora, la cual hace una conversión al RGD como se presenta en la Figura 39.

Figura 39

Representación Gráfico-Dinámica de la Función Exponencial en un Interés Compuesto



En la Figura 30, observamos que al cruzar la línea $y = 3000$, es sinónimo de utilizar la herramienta X-Cal e ingresar como valor de Y el número 3000, haciendo estos tratamientos en el RGD, es posible obtener el valor del tiempo como se aprecia 9,0272… años.

Lo que se propone después en el texto de Chang et al. (2019) es una serie de problemas que se presentan en contextos extramatemáticos, aplicaciones a la vida real donde la función exponencial tiene presencia. Hemos tomado uno de ellos para analizarlo a la luz de nuestro marco teórico mostrado en la Figura 40.

Figura 40

Conversiones y Tratamientos entre Registros en Lengua Natural y Algebraico

3 The temperature, T°C, of a cup of hot chocolate can be modelled by the equation $T(x) = 70(1.45)^{-x} + 21$, where x is the time in minutes.

a Sketch the graph of $T(x)$ for $0 \leq x \leq 12$.

b Find the initial temperature of the hot chocolate.

c Find the temperature after five minutes.

d Find the number of minutes it takes for the hot chocolate to reach 50°C.

e Write down the equation of the horizontal asymptote of the graph.

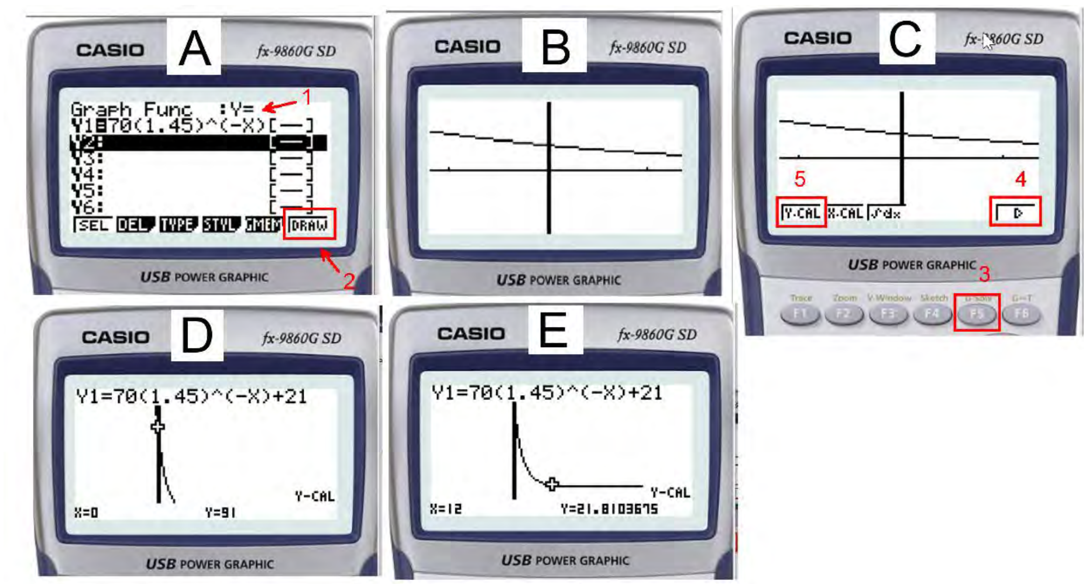
f Write down the temperature of the room.

Nota. Tomado de *Mathematics: Applications and Interpretation.* (p. 486), por Chang, Doering, Forrest, Harris, Stoyanova y Waldman, 2019, Oxford.

El presente problema presenta un contexto real relacionado a la temperatura de una taza de chocolate en el transcurso de los minutos. Este escenario está modelado por la función $T(x) = 70(1{,}45)^{-x} + 21$. Esta representación algebraica permite será el punto de partida para responder a cada ítem. El ítem a) hace referencia a graficar la función para el dominio $0 \leq x \leq 12$. En este sentido, una de las opciones que se puede esperar del estudiante, dado que es parte del Programa del Bachillerato Internacional, es que pueda usar alguna herramienta tecnológica como parte del ARD que le permita encontrar la gráfica y luego poder dibujar bajo el dominio indicado. Dado que la preferencia la tiene la calculadora de pantalla gráfica (CPG), el estudiante procedería de la manera siguiente: primero, utilizaría la representación algebraica de la temperatura de la taza de chocolate para introducirla en la entrada de la opción *Graph*. Segundo, presionaría la tecla *Draw* para obtener la gráfica de la función. Tercero, utilizando la tecla *Y-Calc* buscará el valor de la función en el dominio $0 \leq x \leq 12$, obteniendo los valores de la función para poder dibujarla en el rango que corresponde. A continuación, se muestra este proceso en las capturas de pantalla que aparece en la Figura 41.

Figura 41

Pasos para Obtener Valores de una Función Exponencial en una CPG Casio



En la Figura 41, en la secuencia A, el ingreso de la representación algebraica en la entrada de la calculadora produce la conversión hacia el RGD, mostrándose la gráfica de la función exponencial en la secuencia B. En la secuencia C, se ingresan los valores extremos del dominio, uno por uno, estos tratamientos en el RGD, permiten obtener las secuencias D y E, donde se aprecian los valores de la función respectivos. Así, el estudiante graficará en su hoja la función exponencial $T(x) = 70(1{,}45)^{-x} + 21$, bajo el dominio $0 \leq x \leq 12$. Hacer ello, implica que el estudiante desarrolle su aprehensión perceptiva al reconocer las características de la función exponencial a dibujar y también su aprehensión operatoria, al hacer modificaciones como moverse a través de la gráfica para reconocerla de mejor manera y saber ubicar la posición que ocupará el rango de la función.

En el ítem b) se solicita encontrar la temperatura inicial de la taza de chocolate. Para ello, se espera que un camino del estudiante sea el reconocer de la parte a) que el tiempo 0 min le corresponde 91°C. En este caso utilizaría su aprehensión perceptiva y discursiva al momento de reconocer el valor de la función al inicio y de poder expresarlo por medio de una representación en lengua natural; la temperatura inicial es de 91°C. Otro camino que utilizaría es el de partir de la representación algebraica $T(x) = 70(1{,}45)^{-x} + 21$ y realizar tratamientos en este registro reemplazando el valor de 0 min en la variable $\boldsymbol{x}$, para así obtener 91°C como temperatura de inicio.

En el ítem c) se pide encontrar la temperatura de la taza de chocolate a los 5 min de transcurrido el tiempo. De igual manera, un estudiante del Programa del Bachillerato, puede tomar como camino usar su CPG, buscar la función *Y-Calc* y escribir el valor 5, que le arrojará el resultado 31,92 °C. En este caso, hará uso del RGD en el que con su aprehensión perceptiva y secuencial encontrará los comandos que le permitan calcular lo que se solicita, coincidimos en que se está realizando un tratamiento en este registro.

En el ítem d) se solicita determinar el número de minutos en que la taza de chocolate alcanza los 50°C. Para ello, una vía esperada es que el estudiante use nuevamente su CPG y haga clic en *GSolve*, luego en *X-Calc* y escriba el valor 50, presiona *Exe* y finalmente, obtiene el resultado 2,37 min. En esta situación encontrándonos en el RGD, el estudiante a través del reconocimiento de las secuencias de comandos (aprehensión perceptiva y secuencial) logra introducir el valor 50 y obtener en estos tratamientos del registro el valor de 2,37 min.

En cuanto al ítem e) escribir la ecuación de la asíntota horizontal, pasa por el hecho que el estudiante, como ya vimos en ejemplos anteriores, identifique el término independiente de la función exponencial. Así, de la función $T(x) = 70(1{,}45)^{x} + 21$, se observa que el término independiente es 21, por lo tanto, la ecuación de la asíntota horizontal será $y = 21$. Analizando, vemos que desde la representación algebraica de la función exponencial se ha hecho tratamientos para reconocer la ecuación de la asíntota de la función exponencial.

Finalmente, el ítem f) que indica determinar la temperatura de la habitación. Para este caso, se espera que el estudiante reconozca de la representación algebraica $T(x) = 70(1{,}45)^{-x} + 21$ que la disminución de la temperatura puede llegar a igualar la temperatura de la habitación, pero no ser menor a ella, es decir, la asíntota horizontal indica que la temperatura de la taza de café disminuye y tiende a 21°C, lo cual indica que la temperatura de la habitación será esa. Lo que podemos indicar es que aquí en la representación semiótica del sujeto, puede haber reconocido esta representación algebraica y llevarla a una representación gráfica (conversión) donde finalmente por una aprehensión perceptiva, reconoce que la temperatura de la habitación será la mencionada línea arriba.

Consideramos que este problema propuesto por el texto que utilizan los estudiantes del Programa del Bachillerato, propone mayormente el uso del registro algebraico. Esta es una acción común en la enseñanza de la matemática, en especial en el caso de las funciones. Si bien es cierto hay conversiones que realiza con el registro gráfico o RGD, pensamos que ello puede mejorarse en favor de la comprensión del estudiante sobre este objeto matemático. Vincular las preguntas con tratamientos y conversiones con otros registros, puede ayudar a mejorar la comprensión de función exponencial. A la luz de lo que menciona Duval (1999) los aspectos cognitivos del sujeto están relacionados a una noción del objeto matemático al realizar conversiones en dos registros de representación.

Capítulo III: EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS

En este capítulo se abordará la parte experimental; contextualizamos a través de una descripción del escenario y quienes son los sujetos de investigación, además, presentamos la secuencia de actividades haciendo hincapié en los medios y describiremos en qué consiste cada una de ellas. Posterior a ello, mostramos en extenso las actividades junto a sus variables didácticas, el análisis a priori, el análisis a posteriori contrastando los resultados para poder realizar la validación.

3.1 Descripción del Escenario y Sujetos de la Investigación

El escenario para la experimentación será en un aula de una institución educativa privada de Lima, que contiene carpetas unipersonales, un proyector multimedia, computadora para el docente, conexión a internet por cable y wifi, pizarra, mota, plumones. Los estudiantes harán uso de sus laptops, en caso hubiera alguna consulta, la misma será respondida en forma verbal utilizando la pizarra y los plumones.

Los sujetos de investigación son 4 estudiantes del curso de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación Nivel Medio, que pertenecen al grupo de 27 estudiantes que forman parte del Programa del Bachillerato Internacional, y éstos a su vez a 81 estudiantes de 5° año de educación secundaria de la institución educativa. La elección de estos 4 estudiantes se justifica en su rendimiento académico aceptable, considerados estudiantes promedio, mostrándose en las clases dispuestos y participativos. Cabe mencionar que los estudiantes elegidos poseen nociones sobre funciones, construcción de la gráfica de una función, uso de la regla de correspondencia para determinar valores de la función o valores de la variable independiente, determinación del dominio y rango, así como también nociones sobre sucesiones aritméticas y geométricas. Los estudiantes no han desarrollado aún el concepto de función exponencial, por ello, las actividades están enfocadas tomando en cuenta este aspecto, que nos permitirá responder a nuestra pregunta de investigación. Además, los estudiantes cuentan con conocimientos de GeoGebra, dado que es una exigencia para los estudiantes conocerlo a través de las clases impartidas en el Programa del Diploma del Bachillerato Internacional.

Para el desarrollo de las actividades se establecieron dos duplas etiquetadas como Dupla A y Dupla B, ello en virtud que la interacción entre los estudiantes ayudaría a favorecer las conjeturas que tuvieran dado que aún no tienen conocimiento sobre la función exponencial. Cada dupla recibirá una ficha de actividades las mismas que contienen las instrucciones para el desarrollo sea a lápiz y papel o con el uso de GeoGebra en Línea.

Es conveniente hacer notar que la presente investigación es de tipo cualitativo, así Borba y Araujo (2004) expresan que el objetivo es el de entender el fenómeno que se estudia, por lo cual no es necesaria una muestra grande.

Esta experimentación contó con la participación del docente del curso de matemática quien cumple la función de profesor-investigador y se desarrolló en horario extracurricular por la tarde, en la intención de no perjudicar las clases regulares que reciben los estudiantes.

Seguidamente presentamos la descripción de la secuencia de actividades.

3.2 Descripción de la Secuencia de Actividades

La presente secuencia está organizada en dos actividades, la primera con una duración de 80 minutos y la segunda actividad de 60 minutos realizados en dos días distintos. Cada actividad cuenta con problemas de contexto intramatemáticos y extramatemáticos, estos a su vez con ítems que nos permitirán analizar la comprensión de los estudiantes mediante las transformaciones con diversos registros de representación en las actividades que ellos realizan.

En algunos problemas, se proporciona a los estudiantes el trabajo con GeoGebra en Línea, en la intención de comprender algunos conceptos presentados en la vista gráfica que les permita resolver siguientes problemas a lápiz y papel.

En la Tabla 13, presentamos la organización de la secuencia de actividades, el número de actividad, el medio que se usará y una descripción para cada una de ellas.

Tabla 12

Descripción de las Actividades

Actividad	Medio	Descripción
1	Lápiz y papel	Dado el crecimiento de bacterias bajo variables de cantidad y tiempo, expresar su representación numérica en forma de tabla y luego su representación algebraica en la forma $f(x) = A \cdot b^x$.
	GeoGebra en Línea	Conseguida la representación algebraica del crecimiento de bacterias realizar la conversión del registro algebraico al RGD para reconocer aspectos del domino y rango a través de aprehensiones.
	Lápiz y papel	A partir de la representación gráfica de una situación de crecimiento animal, realizar conversiones del registro gráfico al registro algebraico para obtener la regla de correspondencia considerando el dominio.
2	GeoGebra en Línea	Dada la regla de correspondencia $\boldsymbol{C(x) = 4 \cdot b^x}$ reconocer mediante el uso de GeoGebra en Línea, por medio de

Lápiz y papel	tratamientos y aprehensiones, los valores que puede admitir la base $\boldsymbol{b}$, en relación a la existencia de la función exponencial, así como el crecimiento y decrecimiento de la misma. Dada una situación de crecimiento y decrecimiento poblacional en el registro de lengua natural, realizar conversiones del registro de lengua natural a los registros algebraico y gráfico para interpretar en el registro de lengua natural.

Según lo que apreciamos en la Tabla 13, hemos considerado momentos en las actividades para el uso de lápiz y papel, porque en los casos donde los estudiantes deben de realizar soluciones a problemas de contextos extramatemáticos, se pueden agenciar de los conocimientos previos que tienen sobre funciones y de lo que van comprendiendo en relación al concepto de función exponencial. En cambio, hay otros ítems que demandan del uso de GeoGebra en Línea; ello en virtud a que las representaciones gráficas en ese medio tecnológico se presenta óptimo para reconocer algunos conceptos claves en el aprendizaje de la noción de función exponencial tales como descripción de la gráfica, reconocimiento del domino y rango, reconocimiento de los valores que asume la base $\boldsymbol{b}$ en una función de la forma $\boldsymbol{C(t) = A \cdot b^t}$ para su existencia y para el analizar el comportamiento funcional de crecimiento y decrecimiento.

Es conveniente anotar que al término de cada actividad el docente-investigador realiza una formalización de las cuestiones matemáticas que desarrollaron los estudiantes a partir de las dudas y errores que presentaban en el desarrollo de la actividad realizada. Ello se hacía de modo expositivo en la pizarra acrílica.

Los instrumentos de recolección de datos que se usaron fueron: las fichas de actividades; cada una contiene una actividad, la que a su vez muestra las instrucciones, problemas e ítems a desarrollar por las duplas. Además, se ha grabado las interacciones entre los estudiantes de cada dupla, así como las acciones realizadas en GeoGebra online mediante el software de videoconferencia Zoom.

3.3 Análisis de las Actividades

Seguidamente, desarrollaremos el análisis de las dos actividades propuestas por el docente-investigador. Cada actividad mostrará sus objetivos, así también, para cada pregunta presentaremos su respectivo análisis a priori y a posteriori junto al contraste que demandan estos dos análisis para conocer si logramos el objetivo de la pregunta y por consiguiente el de la actividad.

Las actividades propuestas fueron diseñadas de manera que puedan permitir realizar transformaciones semióticas en los registros de lengua natural, algebraico, gráfico y RGD, así como manifestar aprehensiones en el registro gráfico o gráfico-dinámico para conocer la comprensión de la noción del objeto matemático función exponencial por parte de los estudiantes.

Así, presentamos el análisis de lo que desarrollaron las dos duplas que para este caso llamaremos Dupla A y Dupla B.

Actividad 1: Función Exponencial $f(x) = A.b^x$ con su Domino y Rango

La primera actividad tiene por objetivo que el estudiante pueda reconocer la función exponencial por medio de la conversión desde el registro en lengua natural hacia el registro tabular. Además, identificar las variables que intervienen para hacer una conversión desde el registro tabular hacia el registro algebraico por medio de la expresión del modelo exponencial que corresponde. Identificar el domino y rango de la función exponencial en el RGD donde articulen sus aprehensiones perceptiva y operatoria y representar gráficamente la función exponencial a lápiz y papel. Finalmente, valiéndose de las nociones vistas, resolver un problema de contexto de la población de venados.

En este apartado se procede a describir las variables micro didácticas asociadas a esta primera actividad. Consideramos que estas variables están asociadas a la expresión:

$$f(x) = A.b^x$$

Donde A y b son constantes que pertenecen al conjunto de los números reales, con $b > 1$ y $b \neq 1$.

Así, podemos indicar que las características que presenta esta función están vinculadas a la variación de A y b y por la naturaleza que tiene la variable x. Por esta razón hemos considerado las siguientes variables micro didácticas:

El valor inicial. Para la expresión $f(x) = A.b^x$ al determinar el valor inicial podemos advertir que está dado por $A = f(0)$.

Ahora bien, considerando la secuencia de la Actividad 1, el valor inicial está asociado a la cantidad inicial de bacterias identificada por los estudiantes en el ítem 1c). En el ítem 3, aparece ligada a la cantidad inicial de 300 venados en el estudio realizado por un biólogo sobre el aumento de ellos.

El tipo de registro de representación. Para la expresión $f(x) = A.b^x$ los registros de representación que se presentan para f son: el registro en lengua natural, el registro tabular, el registro algebraico, el registro gráfico y el RGD.

Así, en el ítem 1a) se presenta la necesidad de realizar una conversión desde el registro en lengua natural hacia el registro tabular; en el ítem 1c) se presenta la necesidad de realizar la conversión desde el registro tabular hacia el registro algebraico. En el ítem 2d) existe la necesidad de realizar la conversión del RGD al registro gráfico. En el ítem 3, se presenta la necesidad de realizar una conversión del registro gráfico al registro algebraico.

En nuestra investigación, consideraremos el control sobre todas las variables micro didácticas. Nos parece indispensable el control de las variables en mención dado que con ello se producirá el concepto de función exponencial.

Presentamos a continuación la actividad 1 con su respectivo análisis a priori y a posteriori.

ACTIVIDAD 1

1. En un laboratorio de biología celular, se encontró un grupo de bacterias cuya reproducción se caracteriza porque después de cada hora resulta ser el doble de la cantidad que había la hora anterior. Si inicialmente se encontraron 3 bacterias.
   a) En la tabla siguiente exprese la cantidad de bacterias que hay después de cada hora transcurrida.

Tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de bacterias								

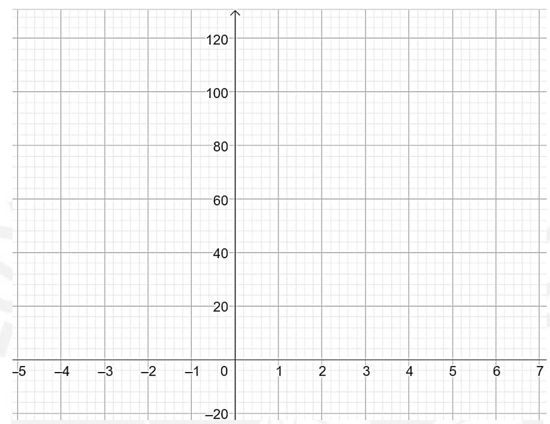
   b) Escribe la secuencia de la cantidad de bacterias de la tabla anterior en función del factor 2.

   c) Escriba una expresión algebraica de la forma $f(x) = A \cdot b^x$ que relacione la cantidad de bacterias que se reproducen en función al tiempo transcurrido por hora. ¿qué representan A y b en el contexto de la situación?

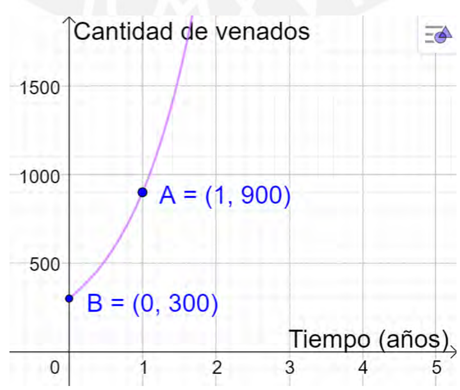
2. Abra GeoGebra en Línea (www.geogebra.org/classic) e ingrese la expresión matemática que escribió sobre el crecimiento de bacterias en el tiempo.
   a) Tomando en cuenta que el crecimiento de bacterias es limitado, ¿es posible que la variable ***tiempo*** tome todos los valores del eje horizontal que se observan en la gráfica?, ¿por qué?

b) Tomando en cuenta que el crecimiento de bacterias es limitado, ¿es posible que la variable ***cantidad de bacterias*** tome todos los valores que se observan a lo largo del eje vertical?, ¿por qué?

c) Con lo abordado, esboce en la Ficha de Actividades la representación gráfica de la función exponencial para una reproducción de bacterias durante las primeras 5 horas, sea lo más preciso posible.



3. En una región de África, la cantidad de venados se encuentra en aumento debido al alejamiento de los depredadores y de la prohibición para cazarlos. Un biólogo mostró el crecimiento por año a través de la siguiente gráfica. Escriba la expresión algebraica acompañado de su dominio, que represente el modelo exponencial que mide el crecimiento de los venados hasta los 2,5 años.



Nota: En los anexos la ficha se encuentra en forma íntegra.

Análisis A Priori de los ítems 1a, 1b, 1c. En este bloque esperamos que las duplas utilicen lápiz y papel y logren en un primer momento reconocer algunas características propias de la función exponencial asociadas a su construcción y al dominio y rango, partiendo de la representación en lengua natural produciéndose una conversión desde el registro en lengua natural hacia el registro tabular y de esta otra conversión hacia el registro algebraico de la cantidad de bacterias en función del tiempo.

En el **ítem 1a**, se espera que las duplas reconozcan a partir de la representación en lengua natural la frase referida a la cantidad de bacterias: **resulta ser el doble de la cantidad que había en la hora anterior**, que le permita realizar la conversión desde el registro en lengua natural hacia el registro tabular colocando la información en la tabla adjunta. Así, podrían empezar de 3 bacterias, luego, se espera que para la primera hora transcurrida la cantidad sea de $3(2) = 6$ bacterias, para la segunda hora transcurrida será de $6(2) = 12$ bacterias, la tercera hora será de $12(2) = 24$ bacterias, para la cuarta hora será $24(2) = 48$ bacterias, luego, al término de la quinta hora será $48(2) = 96$ bacterias, al término de la sexta hora será $96(2) = 192$ bacterias y finalmente, a la séptima hora será $192(2) = 384$ bacterias, con ello se respondería a la pregunta 1a. En consecuencia, la única solución que se presenta es la que aparece en la Tabla 13.

Tabla 13

Representación Tabular de la Cantidad de Bacterias en Función del Tiempo

Tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de bacterias	3	6	12	24	48	96	192	384

En el **ítem 1b**, un comportamiento esperado es que los grupos puedan reconocer que en la formación de la cantidad de bacterias intervienen las potencias de 2. Así, realizarían tratamientos en la representación tabular bajo representaciones funcionales. Cabe mencionar que el uso de las potencias en la función exponencial lo hemos recogido de nuestro análisis preliminar.

Así, las duplas representarían la secuencia de la manera siguiente:

$$3(2)^0 \quad ; \quad 3(2)^1 \quad ; \quad 3(2)^2 \quad ; \quad 3(2)^3 \quad ; \quad 3(2)^4 \quad ; \quad 3(2)^5 \quad ; \quad 3(2)^6 \quad ; \quad 3(2)^7$$

Es de esperar también que, alguna dupla no escriba la potencia de 2 para la cantidad inicial y solo coloque 3.

En el **ítem 1c**, con lo desarrollado en el ítem anterior 1b, se espera que las duplas interpreten la representación en lengua natural del problema y utilizando la representación tabular obtenida en la parte 1b, construyan la ley de formación que relacione la cantidad de bacterias en función del tiempo bajo la forma $f(x) = A \cdot b^x$, produciéndose una conversión desde el registro tabular hacia el registro algebraico. En la formación de esta representación algebraica, esperamos que el estudiante identifique a los valores A y b como la cantidad inicial de bacterias y el factor multiplicativo, escribiendo a lápiz y papel:

$$C(t) = 3 \cdot 2^t$$

Donde, $C(t)$: Cantidad de bacterias en función del tiempo.

t : Tiempo transcurrido por hora.

Además, los grupos deberán responder mediante una representación en lengua natural qué representan los valores de A y b en el contexto de la situación. Esperamos que su respuesta sea: **A representa la cantidad de bacterias que había en un inicio y b representa el factor multiplicativo que aparece al usar el factor 2.**

Es evidente que esta respuesta tiene sus equivalentes en el registro de lengua natural. Es por ello, que consideraremos la respuesta correcta como aquella que represente la idea esperada.

Análisis A Posteriori de los ítems 1a, 1b, 1c.

Dupla A. Realizando un contraste entre la ficha de actividades y la grabación de las interacciones, tenemos lo siguiente.

Para el **ítem 1a**, la Dupla A reconoce en el registro de lengua natural que aparece en el enunciado, la expresión relacionada a la cantidad de bacterias que por cada hora resulta ser el doble de la anterior, logrando realizar una conversión desde el registro en lengua natural hacia el registro tabular cuando coloca los valores que corresponden a la tabla: 3, 6 , 12 , 24 , 48, 96 , 192 y 384 bacterias.

Algo que es interesante hacer notar es que la Dupla A logra también mencionar la palabra creciente, reconociendo que los valores de la variable dependiente van en aumento, sin aún tener en claro que hay una relación entre las variables: tiempo en horas y cantidad de bacterias. Así lo muestra la Figura 42.

Figura 42

Representación Tabular de la Cantidad de Bacterias - Dupla A

Tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de bacterias	3	6	12	24	48	96	192	384

Para el **ítem 1b**, la Dupla A ha tomado los valores de la cantidad de bacterias que aparecen en la tabla y han realizado tratamientos en la representación tabular, obteniendo potencias de base 2. La Figura 43, muestra lo realizado por la Dupla A.

Figura 43

Tratamientos en el Registro Tabular - Dupla A

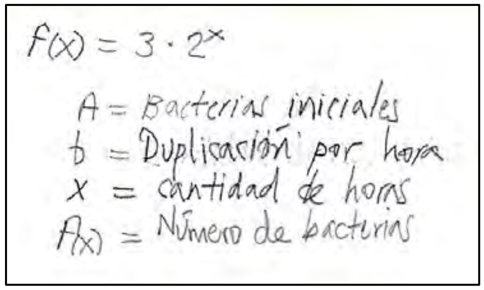
Tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de bacterias	3	$(3)2$	$(3)2^2$	$(3)2^3$	$(3)2^4$	$(3)2^5$	$(3)2^6$	$(3)2^7$

En este punto podemos notar, que la Dupla A no ha escrito el primer término como $3 \cdot 2^0$, por ello, ha realizado de forma incompleta lo que se esperaba. Sin embargo, podemos observar que los demás valores fueron escritos correctamente lo que no desmerece la idea que tiene respecto de la formación del patrón con las variables a pesar de que el primer término no fue escrito como se esperaba. Por otro lado, la Dupla A, no lo escribió, pero se advirtió en sus interacciones que se presenta una secuencia geométrica, algo que no estaba dentro del análisis a priori.

En relación al **ítem 1c**, la Dupla A utilizó los valores escritos en potencias de 2 presentados en la tabla para lograr reconocer la representación algebraica que corresponde a la cantidad de bacterias en función del tiempo. A continuación, la Figura 44 muestra la respuesta de la Dupla A.

Figura 44

Representación Algebraica de la Cantidad de Bacterias - Dupla A



En la Figura 44, los estudiantes lograron identificar la secuencia que se presenta en la tabla y rápidamente escribir la representación algebraica de la función exponencial como $f(x) = 3 \cdot 2^x$, en este sentido han realizado una conversión desde el registro tabular hacia el registro algebraico de la función exponencial. Identificaron el coeficiente A como *bacterias iniciales*, lo cual revela que aún falta un adecuado manejo del lenguaje matemático para escribir *cantidad inicial de bacterias*. Por otro lado, identificaron a b como *duplicación por hora*, de igual forma la comunicación matemática está en proceso, lo adecuado es haber escrito el factor multiplicativo como 2 o *la base de la función exponencial*. Luego, a x como *horas*, cuando lo adecuado es la *cantidad de horas transcurridas*. Por último, a $f(x)$ se le identificó como *número de bacterias*, lo cual es aceptable. En este sentido, es recomendable trabajar las formas de comunicación matemática en el contexto de las funciones lo que afianzara su desarrollo.

Finalmente, la Dupla A ha realizado la conversión desde el registro en lengua natural hacia el registro tabular, que ha sido de apoyo para realizar tratamientos en dicho registro produciéndose una conversión al registro algebraico lo que finalmente se traduce en escribir la regla de correspondencia de la función exponencial, pudiendo identificar los valores que intervienen en su formación. Empleando las palabras de Duval (2006) "lo que importa es el tratamiento, que es el que hace relevante la elección del "mejor" cambio de registro (economía de medios, más potencia para la generalización, o más intuitivo...) para resolver el problema dado" (p. 149).

Dupla B. De igual manera, recurrimos a lo que han realizado en la ficha de actividades en contraste con la grabación de las voces en las interacciones y la pantalla donde los estudiantes realizaron acciones que se les solicita utilizando el GeoGebra.

Para el **ítem 1a**, la Dupla B en las interacciones se escucha decir a uno de los estudiantes que el número de bacterias se va duplicando cada hora que pasa. Así, la Dupla B logró transformaciones semióticas de la función exponencial por medio de la conversión desde el registro en lengua natural hacia el registro tabular al expresar la cantidad de bacterias según el enunciado del problema, tal como se muestra en la Figura 45.

Figura 45

Representación Tabular de la Cantidad de Bacterias – Dupla B

Tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de bacterias	3	6	12	24	48	96	192	384

Para el **ítem 1b**, la Dupla B a partir de la representación tabular de la función exponencial realizada en el ítem anterior, ha realizado tratamientos en la representación tabular mediante el uso de potencias con base 2. Podemos indicar que se cumplió el propósito indicado para este ítem, donde los estudiantes de la Dupla B reconocieron al factor 2 inmerso en la secuencia de números que aparecía en la tabla. A continuación, el trabajo realizado por la Dupla B para este ítem que muestra la Figura 46.

Figura 46

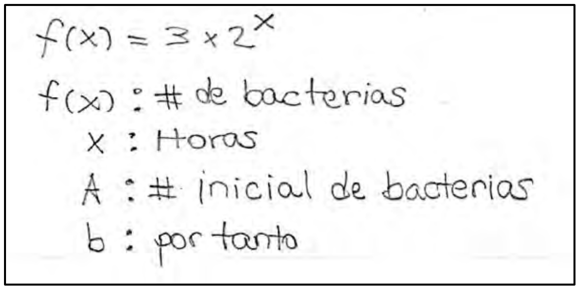
Tratamientos en el Registro Tabular - Dupla B

Tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de bacterias	$2^0 \times 3$	$2^1 \times 3$	$2^2 \times 3$	$2^3 \times 3$	$2^4 \times 3$	$2^5 \times 3$	$2^6 \times 3$	$2^7 \times 3$

Para el **ítem 1c**, la Dupla B logró encontrar la representación algebraica de la función exponencial, reconociendo la cantidad inicial de bacterias como A y el factor multiplicativo b al que ellos llaman, *por tanto*. Definieron la relación entre las variables cantidad de horas $f(x)$ y la variable x tiempo transcurrido al que ellos llamaron *horas*. La Dupla B logra así realizar la conversión desde el registro tabular hacia el registro algebraico. La Figura 47, muestra el trabajo de la Dupla B para este ítem.

Figura 47

Representación Algebraica de la Función Exponencial - Dupla B



En conclusión, podemos reconocer que la Dupla B utilizó representaciones de la función exponencial en el registro de lengua natural, registro tabular y registro algebraico. Además, logró realizar tratamientos en la representación tabular por medio de una representación funcional, al transformar la secuencia de la cantidad de bacterias en potencias de 2. Con ello estos tratamientos se realizó la conversión desde el registro tabular hacia el registro algebraico al lograr escribir la expresión $f(x) = 3 \cdot 2^{x}$.

Análisis A Priori de los ítems 2a, 2b, 2c. En relación a la pregunta 2, el propósito es que los grupos mediante el uso de un ARD como GeoGebra puedan reconocer en el RGD, por medio de sus aprehensiones perceptiva y operatoria, al usar las herramientas *Mover* y *Lupa*, el dominio y rango de la función exponencial utilizando su aprehensión discursiva para describir lo solicitado. Por último, en la intención que pueda evidenciarse estas nociones que va descubriendo, las duplas esbozarán mediante papel y lápiz la gráfica de la función determinada considerando el dominio y rango según el contexto.

En el **ítem 2a**, se tiene como propósito que las duplas reconozcan el dominio de la función en un contexto determinado. En este apartado, se les cuestiona si a partir del crecimiento limitado de bacterias ¿es posible que la variable tiempo asuma todos los valores en el eje horizontal? Se espera que los grupos realicen la conversión del registro algebraico al RGD, para luego, utilizando la herramienta *Mueve* y *Zoom,* logren comprender mediante su aprehensión perceptiva y operativa, qué valores asume el tiempo en el eje horizontal. En esta idea, mediante las modificaciones de tipo posicional que realicen, encontrarían que el tiempo no puede tomar valores negativos, y que el punto de partida corresponde a las 0 horas. Además, dado que el crecimiento de bacterias es limitado, entonces el valor del tiempo también lo es. Finalmente, la respuesta esperada por las duplas sería: La variable tiempo no puede tomar todos los valores en el eje horizontal, dado que no es posible valores negativos del tiempo. Se parte desde las 0 horas hasta un tiempo determinado dado que la cantidad de bacterias es limitada. Esto último, estaría produciendo el desarrollo de la aprehensión discursiva respecto de la función exponencial.

En el **ítem 2b**, se espera que las duplas logren reconocer en la representación algebraica ingresada al GeoGebra y la representación en el RGD, que los valores del rango de la función están limitados por la cantidad inicial de bacterias con que se comienza hasta una cantidad determinada que no especifica, pero que indica el enunciado como limitada. Para ello, hacen uso de las aprehensiones perceptiva, cuando observa el objeto matemático buscando la característica asociada y la aprehensión operatoria, al modificar la posicionalmente al objeto matemático utilizando las herramientas *Zoom y Mueve* para encontrar los valores que asume el rango de la función lo que se traduce en una aprehensión discursiva como sigue: No es posible que la variable cantidad de bacterias tome todos los valores en el eje vertical, dado que la cantidad de bacterias inicia en 3 y termina en una cantidad determinada, dado que se indica limitada pero no especificada.

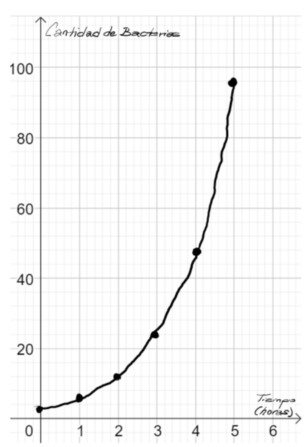
En el **ítem 2c**, se espera que las duplas puedan reconocer los valores que se relacionan a este crecimiento de bacterias y los ubiquen por medio de representaciones en pares ordenados en el plano cartesiano para luego trazar una línea continua. Así, utilizarían la tabla de valores que realizaron en el ítem 1a y con ello ubicar los puntos en el plano cartesiano dado en la ficha de actividades para las primeras 5 horas

$$(0; 3), (1; 6), (2; 12), (3; 24), (4; 48), (5; 96).$$

Entonces realizarían una conversión desde el registro en lengua natural el registro gráfico reflejado en la construcción de la representación gráfica de la función exponencial como lo muestra la Figura 48.

Figura 48

Representación Gráfica de la Función Cantidad de Bacterias en el Tiempo



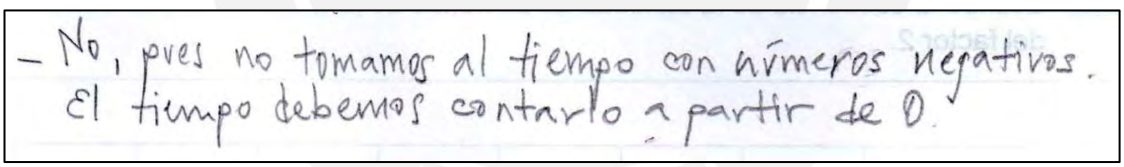
También podría presentarse dificultades en la conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico. Por ejemplo, cuando los estudiantes observan en los valores de la representación tabular como pares ordenados y al trazar la gráfica de la función confundan la naturaleza de la variable tiempo y coloquen solo puntos en la cuadrícula en vez de una línea continua. Esta dificultad puede presentarse debido a que los estudiantes no reconocen el tipo de variable independiente que se está utilizando, para el caso: continua, dado que la variable tiempo t es de esa naturaleza.

Análisis A Posteriori de los ítems 2a, 2b, 2c.

Dupla A. En relación al **ítem 2a**, las grabaciones de pantalla y audio demuestran que teniendo la representación algebraica de la función exponencial $C(x) = 3 \cdot 2^x$ la ingresaron a GeoGebra y se produjo una conversión del registro algebraico al RGD. Es en la vista gráfica que, para reconocer la variable tiempo como limitada en el contexto, tuvieron que realizar modificaciones de tipo óptico y posicional, desarrollando su aprehensión perceptiva y operatoria para finalmente, por medio de su aprehensión discursiva expresa que el tiempo no puede asumir valores negativos, tal como lo muestra la Figura 49.

Figura 49

Aprehensión Discursiva – Dupla A

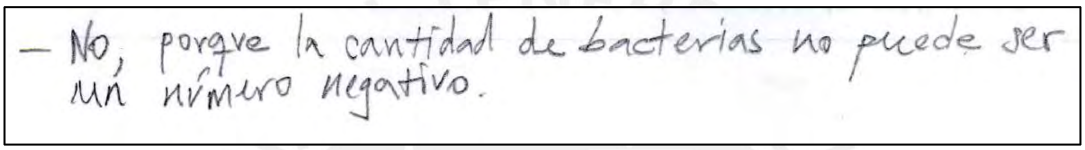

– No, pues no tomamos al tiempo con números negativos.
El tiempo debemos contarlo a partir de 0.

Es necesario hacer notar que la Dupla A no reconoció que el tiempo debe encontrarse limitado al saber que la reproducción de bacterias sí lo está. Esto puede deberse a que no interpretaron la representación en lengua natural del enunciado, dado que en GeoGebra la curva se ve continua en todo su dominio. Consideramos que ejercitar los valores de la función y de la variable independiente en el contexto extramatemático o intramatemático de una situación puede ser de gran apoyo.

Con respecto al **ítem 2b**, la Dupla A acciona de la misma forma que en el ítem anterior. Nuevamente observando la representación algebraica de la función exponencial $C(x) = 3 \cdot 2^x$ ingresada a GeoGebra se produce la conversión del registro algebraico al RGD. Así, en la vista gráfica la Dupla A utiliza su aprehensión perceptiva y operatoria realizando con esta última modificación de tipo óptico y posicional; alejando y acercando el plano cartesiano con la intención de utilizar su aprehensión perceptiva y reconocer a la variable cantidad de bacterias como un valor que debe ser entero y positivo. La Dupla A, si bien con ello logra reconocer que la cantidad de bacterias es un valor mayor que 0, no distingue los valores iniciales y finales que caracterizan al rango de la función. Podemos advertir que la Dupla A tuvo dificultades para reconocer los valores de la función cantidad de bacterias. Ello puede producirse dado que en GeoGebra se muestra una curva continua. De igual modo esto puede apoyarse en ejercitación respecto a los valores de las variables de una función en el plano cartesiano en especial en situaciones de contexto extramatemático. Ello se observa en la Figura 50.

Figura 50

Aprehensión Discursiva – Dupla A

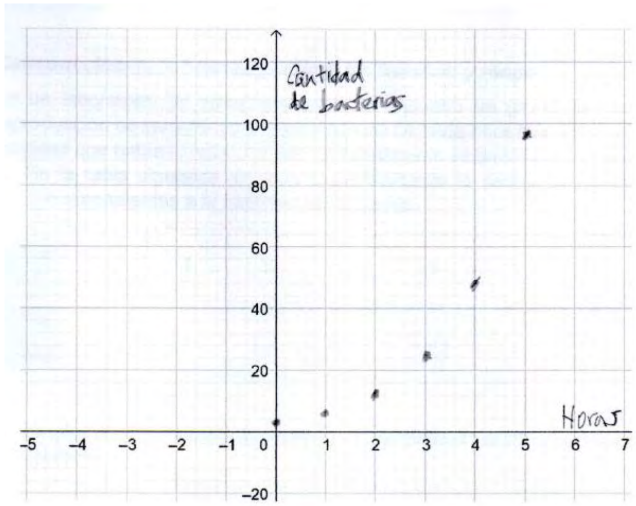

— No, porque la cantidad de bacterias no puede ser un número negativo.

Tomando en cuenta el **ítem 2c**, la Dupla A utilizó la tabla del ítem 1a y GeoGebra para reconocer la gráfica de la función. En la Vista Gráfica, la representación de la función exponencial sufre modificaciones de tipo óptico y posicional para comprobar los valores de la tabla y reconocer que coinciden. En la interacción que tienen los integrantes mencionan que deben colocar en el papel puntos hasta llegar al valor 96 de la cantidad de bacterias que corresponde al transcurrir 5 horas. Hay evidencia que su aprehensión operatoria tiene desarrollo, sin embargo, presentan dificultades en su aprehensión perceptiva. Ello puede ser debido a que como en la tabla de valores pueden tomarla como pares ordenados no se percataron que la variable tiempo es continua, lo que significa que debe haber un trazo continuo también hasta la hora 5. Esto puede solucionarse si se ejercita la identificación de la naturaleza de la variable independiente.

Podemos indicar que la dupla ha tenido dificultades para realizar transformaciones semióticas como la conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico hecho a papel y lápiz. Esta acción corresponde a un comportamiento esperado en el análisis a priori tal como se puede apreciar en la Figura 51.

Figura 51

Representación Gráfica de la Función Exponencial - Dupla A

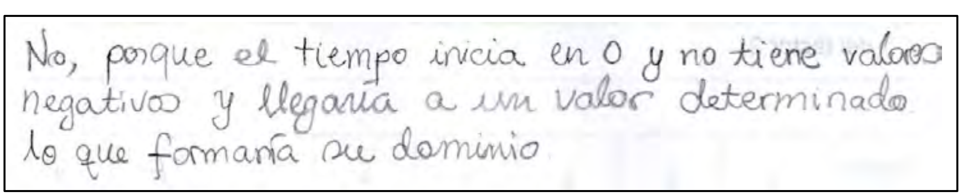


Entonces, las conversiones desde el registro algebraico hacia el RGD se dieron de forma correcta, sin embargo, la Dupla A presentó dificultades en su aprehensión perceptiva y discursiva cuando identificaron características del dominio y rango de la función. Así también, dificultades al realizar la gráfica de la función reproducción de bacterias en el contexto de la situación.

Dupla B. En relación al **ítem 2a**, los integrantes ingresaron la expresión $C(x) = 3 \cdot 2^x$ al cuadro de entrada en GeoGebra, aquí se produjo una conversión del registro algebraico al RGD, donde buscaron a través de alejamientos y acercamientos utilizando la herramienta *lupa* y, movimientos del plano cartesiano con la herramienta *Mueve* de GeoGebra para reconocer los valores del tiempo. Apelaron a su aprehensión perceptiva y discursiva donde evidenciaron reconocer el dominio de la función, comportamiento que se encontraba en lo esperado, mencionado el valor inicial del tiempo en 0 horas, como el inicio para esta reproducción de bacterias hasta llegar a un determinado valor. Así lo evidencia la Figura 52.

Figura 52

Aprehensión Discursiva - Dupla B


No, porque el tiempo inicia en 0 y no tiene valores negativos y llegaría a un valor determinado lo que formaría su dominio

Con respecto al **ítem 2b**, la Dupla B tomando la representación algebraica como $C(x) = 3 \cdot 2^x$ siendo introducida en la vista gráfica de GeoGebra, se produce una conversión del registro algebraico al RGD donde, los integrantes de la dupla estuvieron realizando tratamientos de tipo óptico y posicional, sin embargo, el profesor tuvo que intervenir realizando preguntas respecto al dominio de una función: ¿cuál es la mínima cantidad de bacterias que se puede producir?, ¿cuál es la máxima cantidad de bacterias que se puede producir?. Luego, los integrantes realizando modificaciones óptica y posicional lograron reconocer el valor mínimo de la cantidad de bacterias en 3 y un valor máximo que no se puede determinar pero que sí indica el enunciado cuando pone límites a la reproducción, evidenciando desarrollo en su aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva. La Figura 53 nos muestra su aprehensión discursiva.

Figura 53

Aprehensión Discursiva – Dupla B

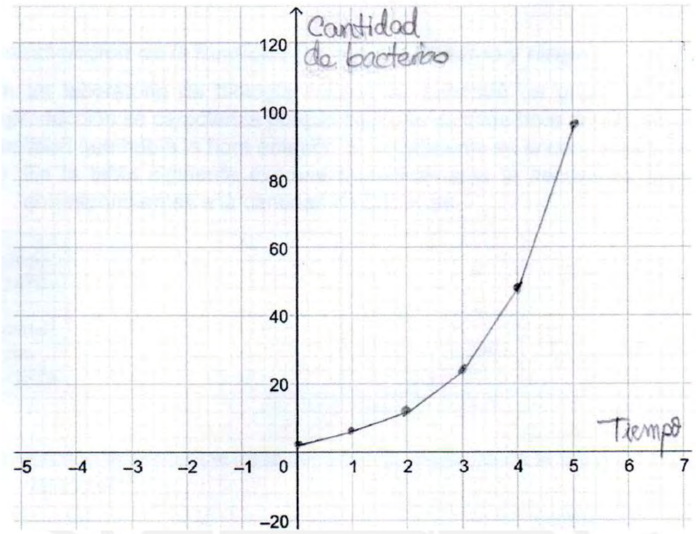
No, no existe cantidad de bacterias negativas, además la cantidad de bacterias inicia en 0 y termina en cierta cantidad.

Tomando en cuenta el **ítem 2c**, la Dupla B utilizó la tabla del ítem 1a para reconocer la gráfica de la función. Así, se observó que los datos que aparecen en la tabla del ítem 1a son utilizados para realizar la formación de la representación gráfica de la función exponencial en el ítem 2c. Se presentó dificultades en su aprehensión perceptiva dado que se utilizaron puntos para los pares ordenados desde el tiempo 0 hasta el tiempo 5 y estos puntos fueron unidos con segmentos de recta, lo que originó que no se produzca una correcta representación gráfica de la función a partir de su representación tabular. Creemos que esto se produce debido al poco reconocimiento que pudieron tener respecto a la función exponencial en su representación gráfica, lo que definitivamente provoca que no tenga desarrollada su aprehensión perceptiva. Esto puede superarse en la medida que se ejercita respecto a las características gráficas de la función exponencial.

A continuación, la representación gráfica de la función exponencial propuesta por la Dupla B en la Figura 54.

Figura 54

Representación Gráfica de la Función Exponencial - Dupla B



Al terminar la solución de los ítems 1 y 2, el profesor-investigador realizó precisiones respecto de lo abordado, mostró en GeoGebra dos funciones exponenciales crecientes y estableció una forma de aclarar las características gráficas por medio de preguntas: ¿está la representación gráfica de la función exponencial formada por trozos de segmentos de recta que unen algunos de sus puntos?, las duplas advirtieron que está formada por una línea curva continua. Además, el profesor-investigador preguntó si existe una diferencia entre dibujar una línea curva de forma continua o dibujar puntos y si esto tiene relación con la variable independiente. El docente aclaró a través de dos representaciones de la función exponencial, por un lado, para una secuencia geométrica en función al lugar que ocupa un número de la progresión y por otro lado, para el crecimiento de bacterias en función del tiempo. Se compararon las variables independientes y ambas duplas lograron aclarar las características de la variable independiente al momento de representar gráficamente una función, en particular una función exponencial.

Análisis A Priori del ítem 3. En el **ítem 3**, el propósito va orientado a que las duplas puedan, en base a las nociones adquiridas en los ítems anteriores como; el reconocimiento de la función exponencial por medio de su representación algebraica, de las características del valor inicial de la función para contextos de tiempo, el factor multiplicativo que tiene la base y la representación gráfica, puedan integrarlas en la solución de un problema de contexto extramatemático a lápiz y papel, sin apoyo de GeoGebra. Cabe mencionar que para este caso hemos cambiado los valores de nuestras variables didácticas como el valor inicial, que en el problema se presenta como 300 venados, el valor de la base que para el problema tiene el valor 3, el tipo de variable independiente ha permanecido continua y los tipos de registros de representación que para el problema es el registro gráfico y el registro algebraico.

Se espera que las duplas para el desarrollo de este ítem, hagan uso de su aprehensión perceptiva en el registro gráfico, para reconocer el valor inicial de la población de venados, que para el caso es de 300 venados. Además, tomando en consideración que el enunciado del problema hace mención a un crecimiento exponencial, logren a través de su aprehensión perceptiva, identificar la base de la función exponencial al observar los pares ordenados $B(0; 300)$ y $A(1; 900)$, obteniendo que el valor del factor multiplicativo es 3. Con esta información se espera que las duplas puedan hacer la conversión del registro gráfico al registro algebraico obteniendo:

$$V(t) = 300 \cdot 3^t$$

Además, mediante el desarrollo de su aprehensión perceptiva, puedan reconocer el dominio de la función crecimiento de venados, que al observar el eje del tiempo reconozcan que la variable es de naturaleza continua dado que, el enunciado hace mención que el crecimiento de la cantidad de venados (variable discreta) es a través de los años y que los límites van de 0 hasta $2{,}5$ años. Se espera que escriban finalmente que el dominio de la función es:

$$t \in [0; 2{,}5] \text{ años}$$

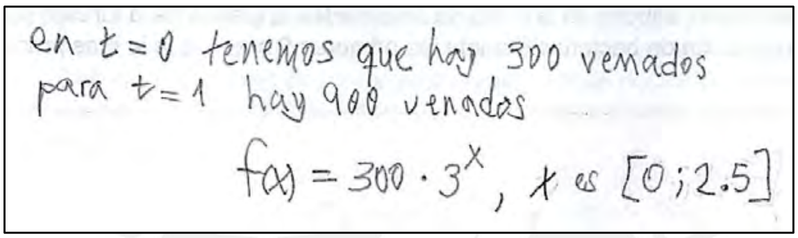
Análisis A Posteriori del ítem 3.

Dupla A. La dupla empieza reconociendo al problema con características que vieron en el problema con bacterias. Intentan relacionar los datos que se aprecian en la gráfica como el valor 300 venados y 900 venados, por medio del desarrollo de su aprehensión perceptiva reconocen el valor inicial y el valor de la cantidad de venados al final del primer año. Uno de los estudiantes menciona “para pasar de 300 a 900 se debió multiplicar por 3” esto revela que también desarrollaron su aprehensión discursiva. Así, logran realizar una conversión desde el registro gráfico hacia el registro algebraico al escribir $f(x) = 300.3^x$ y discuten la pertinencia del modelo dado que presentan dudas al no ver un punto más que les permita confirmarlo. El profesor-investigador se acerca y les pregunta: “lean el enunciado, allí está la respuesta a su duda”, los estudiantes encuentran la frase *“representa el modelo exponencial”* lo que les da la seguridad finalmente de lo escrito. Cabe señalar que la conversión en este sentido tuvo más de una dificultad. Al respecto Duval (2017) señala que, una de las formas de comprensión sobre un objeto matemático está ligada a la transformación de las representaciones semióticas donde se reconoce el objeto y la autoconfianza generada por medio de la búsqueda de lo pertinente que significa lo hallado.

Luego, la Dupla A hizo desarrollo de su aprehensión perceptiva y discursiva al escribir el dominio de la función con la notación de intervalo $[0: 2,5]$. Consideramos que esta dupla logró reconocer la naturaleza de la variable tiempo como continua, así logró superar la dificultad que presentó cuando discretizó la variable tiempo en el ítem 2c al elaborar la representación gráfica sobre la reproducción de bacterias. El trabajo realizado por la Dupla A en el ítem 3 lo podemos apreciar en la Figura 55.

Figura 55

Representación Algebraica de la Función Exponencial – Dupla A


en $t=0$ tenemos que hay 300 vemados
para $t=1$ hay 900 venados
$f(x) = 300 \cdot 3^x$, x es $[0;2.5]$

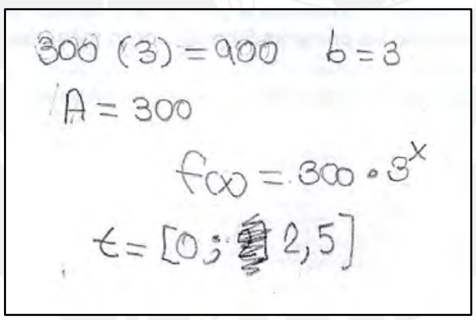
En conclusión, podemos indicar que la Dupla A pudo realizar transformaciones semióticas de la función exponencial como la conversión del registro gráfico hacia el registro algebraico, después de procesar cuestionamientos para lograr confianza en su modelo algebraico. Asimismo, queda evidenciado el desarrollo de su aprehensión perceptiva y discursiva al reconocer los elementos como el valor inicial, la base y, la naturaleza del tipo de variable independiente (variable micro didáctica) que para el caso es continua.

Dupla B. Cabe recordar que esta dupla tuvo dificultades en la conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico de la función exponencial en el ítem anterior. Para este **ítem 3**, la Dupla B revela en sus interacciones reconocer la gráfica de la función exponencial, el docente les preguntó: "¿sólo la reconocen por qué piensan que está en forma gráfica?, la dupla responde: "no, está escrito arriba como *modelo exponencial* por eso la gráfica es una función exponencial". En este diálogo, la dupla logra reconocer gráficamente la representación de la función exponencial que confirma en el enunciado, sin embargo, confunde el objeto matemático con la representación cuando menciona que la gráfica es la de una función exponencial. Al respecto, Duval (2017) señala que no se debe confundir el objeto con su representación. En este sentido, consideramos que los estudiantes la reconocen como función exponencial no solo a la representación gráfica como lo mencionan, sino también llama función exponencial a la representación algebraica, probablemente esto se deba a que aún no hay claro discernimiento entre la representación de un objeto matemático y el propio objeto matemático. Esto puede superarse en la medida que se haga mención a cada representación de la función exponencial como tal y hacer la diferencia entre lo que es este objeto de su representación.

En su camino para encontrar la representación algebraica de la función exponencial, la Dupla B, en sus interacciones reconoce que la cantidad de venados al inicio es de 300, pero para llegar a 900 es necesario haberlo multiplicado por 3, encontrando que la base o factor multiplicativo es 3, y el valor de $A = 300$. Esto nos hace notar que la aprehensión realizada en los ítems 1 y 2 ha influido en su comprensión pues identifican el valor inicial como A y la base como lo que va multiplicando, escribiendo $f(x) = 300 \cdot 3^x$ que lo han relacionado con la reproducción de bacterias con la representación algebraica $C(x) = A \cdot b^x$. Además, al escribir el dominio de la función crecimiento de venados, la Dupla B ahora considera a la variable tiempo en forma continua. Podemos advertir que la dupla ha realizado correctamente la conversión del registro gráfico al registro algebraico, además han desarrollado su aprehensión perceptiva y discursiva al escribir el dominio utilizando un intervalo. Así lo muestra la Figura 56.

Figura 56

Representación Algebraica de la Función Exponencial - Dupla B



En la Figura 56, podemos apreciar que la Dupla B escribió el dominio considerando inicialmente al tiempo hasta el valor 2. Un cuestionamiento que surgió en la interacción fue que si les pedían escribir el dominio hasta 2,5 años ¿será necesario escribir ese valor?, creemos que aún tenían un tanto la concepción discreta del tiempo, sin embargo, se observa como tachado el valor 2 y escriben finalmente el valor $2{,}5$ como el tiempo límite. Con ello han logrado desarrollar su aprehensión perceptiva y discursiva cuando advirtieron que la variable tiempo es continua. Por otro lado, en la Figura 48 observamos que, la variable independiente ha recibido una notación diferente; por un lado, en la representación algebraica de la función exponencial como x y por otro lado al escribir el dominio como t. Creemos que la dupla en todo momento se refiere al tiempo cuando la usa como exponente en la representación algebraica y cuando la usa para señalar el tiempo en años del dominio, lo que nos hace pensar que sólo es una cuestión de forma más no de fondo.

En suma, podemos señalar que la Dupla B, realizó la conversión desde el registro gráfico hacia el registro algebraico de la función exponencial referida al crecimiento de los venados, reconociendo elementos y características propias mediante el desarrollo de sus aprehensiones perceptiva y discursiva en la representación gráfica que fueron evidenciadas en su ficha de trabajo y en sus interacciones. Creemos que la intervención del profesor-investigador en los ítems 1 y 2 fue importante para dejar en claro la forma cómo debe comprenderse la naturaleza de la variable continua para el tiempo, lo que ayudó a escribir correctamente el dominio de la función.

Actividad 2: Función Exponencial $f(x) = A.b^x$ factor multiplicativo y monotonía

La segunda actividad tiene por objetivo que las duplas puedan reconocer los valores que asume el factor multiplicativo b y la influencia que tiene en el crecimiento y decrecimiento de la función. Para ello, hemos considerado que, a partir del uso de GeoGebra en Línea, puedan usar en el RGD de la función cantidad de bacterias en un tiempo t para reconocer por medio de tratamientos con deslizador los valores que puede asumir este factor multiplicativo b, así como también, que puedan reconocer en el RGD por medio de tratamientos con el deslizador la monotonía de la función relacionada al crecimiento o decrecimiento. Finalmente, consideramos que las duplas deben lograr aplicar las nociones aprendidas hasta el momento al desarrollar un problema de crecimiento o decrecimiento poblacional a lápiz y papel, a través de conversiones entre los registros de lengua natural, registro algebraico, registro tabular y registro gráfico.

En este apartado procederemos a describir las variables micro didácticas asociadas a esta segunda actividad. Consideramos que estas variables están asociadas a la expresión:

$$f(x) = A.b^x$$

Donde A y b son constantes que pertenecen al conjunto de los números reales, con $b > 0$ y $b \neq 1$.

Así, podemos indicar que las características que presenta esta función están vinculadas a la variación de A y b y por la naturaleza que tiene la variable x. Por esta razón hemos considerado las siguientes variables micro didácticas:

El valor inicial. Para la expresión $f(x) = A.b^x$ al determinar el valor inicial podemos advertir que está dado por $A = f(0)$.

Ahora bien, considerando la secuencia de la Actividad 2, el valor inicial está asociado a la cantidad $C(0) = 4$ identificada en el ítem 1b). En el ítem 2, aparece ligada a la cantidad inicial de 1 000 pobladores de una región de terminada de China, mientras en otra región aparece como cantidad inicial 64 000 pobladores, todo ello en un estudio sobre el crecimiento y decrecimiento poblacional.

La monotonía de la función. En la función $f(x) = A.b^x$ el aspecto de la monotonía está dado por los intervalos específicos que toma b. Así:

Si consideramos que $b > 1$ la función es estrictamente creciente.

Si consideramos que $0 < b < 1$ la función es estrictamente decreciente.

Encontramos en la segunda actividad que la monotonía de la función exponencial aparece en el sub-ítem 1ai) donde por medio de transformaciones con el deslizador puedan reconocer el crecimiento y decrecimiento exponencial. En el ítem 2, la monotonía de la función está dada en los modelos de crecimiento y decrecimiento poblacional en dos regiones distintas en China, específicamente cuando el valor de $b = 2 > 1$ se relaciona con el crecimiento exponencial de la población, mientras que con el valor de $b = \frac{1}{2} \in < 0; 1 >$ se relaciona con el decrecimiento exponencial para la población de otra región de China.

El tipo de registro de representación. Para la expresión $f(x) = A.b^x$ los registros de representación que se presentan para f son: el registro en lengua natural, el registro algebraico, el registro tabular, el registro gráfico y el RGD.

Así, en el ítem 1a) se presenta la necesidad de realizar la conversión desde registro algebraico hacia el RGD cuando se requiere percibir los valores que asume b para reconocer características de la representación gráfica de la función exponencial. En el ítem 2) se presenta la necesidad de realizar conversiones del registro en lengua natural, al registro algebraico cuando se busca la regla de correspondencia de dos poblaciones en regiones diferentes de China. Otra conversión desde el registro algebraico hacia el registro tabular, cuando se requieren puntos de la representación gráfica de las poblaciones en dos regiones de China. Y por último otra conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico, cuando se realiza las representaciones gráficas de las poblaciones en dos regiones distintas de China.

En nuestra investigación, consideraremos el control sobre todas las variables micro didácticas. Nos parece indispensable el control de las variables en mención, dado que con ello se producirá el concepto de función exponencial.

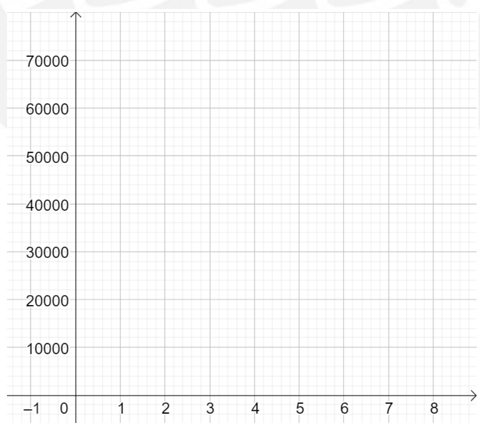
A continuación, se muestra la actividad 2 y el análisis a priori y a posteriori.

ACTIVIDAD 2

1. Abre el siguiente enlace https://www.geogebra.org/classic/p9uuzn93
   a) Mueva el deslizador que representa la base $\boldsymbol{b}$ de la función $C(x) = 4b^x$. Exprese qué sucede con la gráfica de la función exponencial cuando:
   i) $\boldsymbol{b}$ tiene valores positivos.
   ii) $\boldsymbol{b = 1}$.
   iii) $\boldsymbol{b}$ tiene valores negativos.
   iv) $\boldsymbol{b = 0}$.
   v) Finalmente ¿entre qué valores se encontraría $\boldsymbol{b}$ para que la función exponencial exista?

   b) Para cualquiera de los valores de $\boldsymbol{b}$ encontrados en la parte 1av), ¿cambia $C(0)$? Explique.

2. En determinada región de China se realizó un primer censo y se determinó una población de 1 000 personas, con los censos siguientes, este número se ha ido duplicando por año dado que hubo una baja en las campañas de planificación familiar. En otra región, por el contrario, en el primer censo se contó 64 000 personas, para los siguientes censos se observó que este número baja a la mitad con respecto al año anterior, ello debido al Covid-19 que azotó dicha región. Este comportamiento para ambas regiones se ha mantenido hasta los primeros 6 años. Representa de forma algebraica y luego, en la cuadrícula de forma gráfica los modelos de crecimiento y decrecimiento que se observó en cada población.



Nota: En los anexos se encuentra en forma íntegra.

Análisis A Priori de los ítems 1ai, 1aii, 1aiii, 1aiv, 1av. Esta parte tiene como finalidad que las duplas por medio de un enlace a GeoGebra en Línea, puedan reconocer la representación algebraica de la función $C(x) = 4b^x$ y realizar una conversión del registro algebraico al RGD, donde a través de tratamientos con deslizador para $\boldsymbol{b}$ reconozcan por medio de sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva la existencia de la función exponencial, así como los comportamientos de crecimiento y decrecimiento que la caracterizan.

En el **sub-ítem 1ai)**, a priori se espera que las duplas ingresando a GeoGebra por medio del enlace, reconozcan a la función exponencial en el registro algebraico con la expresión $C(x) = 4b^x$ y al mover el deslizador que representa a $\boldsymbol{b}$ en valores positivos, se produzcan tratamientos con deslizador en el RGD. En ese momento, a través del desarrollo de su aprehensión perceptiva y operatoria con modificaciones de tipo óptico y posicional reconozcan la existencia de la función exponencial. Así, se espera que las duplas puedan expresar también por medio de su aprehensión discursiva el crecimiento y decrecimiento que se observa. Otra solución que pueden dar está relacionada a que las duplas puedan indicar que el crecimiento de la función exponencial está ligado para cuando $b > 1$ y el decrecimiento de la misma para cuando $0 < b < 1$.

En el **sub-ítem 1aii)**, se espera que las duplas nuevamente reconozcan la representación algebraica $C(x) = 4b^x$ y realicen una conversión desde el registro algebraico hacia el RGD, muevan el deslizador a $b = 1$, donde a través del desarrollo de su aprehensión perceptiva y operatoria con modificaciones de tipo óptico y posicional traslacional puedan reconocer que no aparece la función exponencial. Finalmente, por medio de su aprehensión discursiva las duplas deberían expresar que la función exponencial no aparece para $b = 1$, o también puede darse el caso que su respuesta sea que aparece la gráfica de una función constante $C(x) = 4$. Se espera también que alguna dupla pueda solo describir que se observa una línea horizontal que pasa por el valor 4 en el eje Y, dado que aún no puede haber interiorizado el concepto de función.

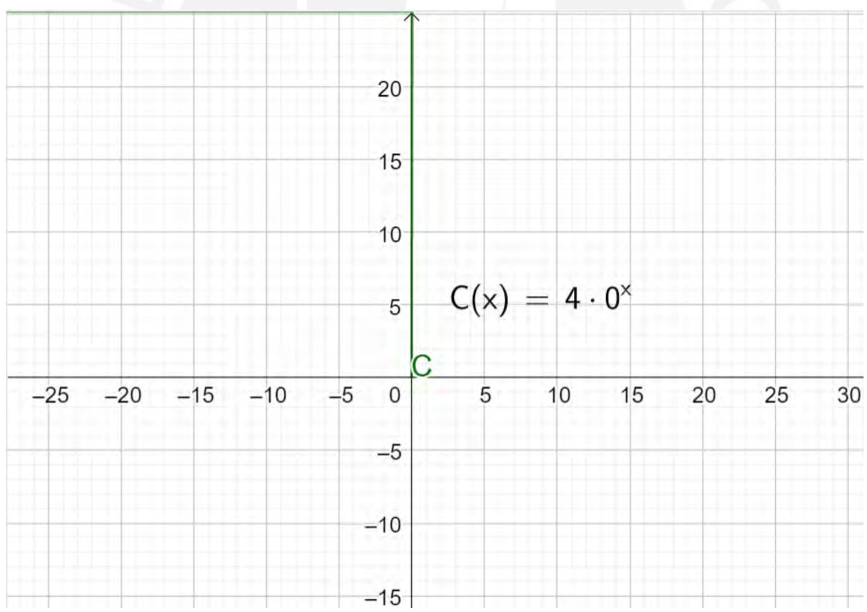
En el **sub-ítem 1aiii)**, a priori se espera que las duplas identifiquen la representación algebraica $C(x) = 4b^x$ y realicen una conversión del registro algebraico hacia el RGD, y por medio de tratamientos en dicho registro muevan el deslizador $\boldsymbol{b}$ a valores negativos. Utilizando el desarrollo de sus aprehensiones perceptiva y operatoria con modificaciones de tipo óptico y posicional puedan reconocer si aparece o no la función exponencial. Finalmente, haciendo uso del desarrollo de su aprehensión discursiva las duplas deberían indicar que no aparece la función exponencial.

En el **sub-ítem 1aiv)**, de igual manera, se espera que las duplas puedan reconocer primero la representación algebraica $C(x) = 4b^x$ y realizar la conversión desde el registro algebraico hacia el RGD, donde puedan ubicar el dial en el valor $b = 0$, así con el desarrollo de sus aprehensiones perceptiva y operatoria con modificaciones de tipo óptico y posicional traslacional puedan reconocer si aparece la gráfica de la función exponencial. Así, valiéndose de su aprehensión discursiva es de esperar que las duplas expresen que no existe la gráfica de la función exponencial o también que solo describan que se aprecia una semirrecta que descansa sobre el semieje positivo de las Y.

Cabe resaltar que lo mostrado por GeoGebra representa una limitación del software, este obstáculo puede llevar a confusión a los estudiantes podrían salvarla si comprueban lo que el GeoGebra les dice. Sin embargo, se espera que esto no se de. Así, si la base $b = 0$ la regla de correspondencia de la representación algebraica sería $C(x) = 0^x,\ x > 0$, dado que si $x = 0$: $C(0) = 0^0$ no está definida en R, asimismo, si $x < 0$: $C(x) = \frac{1}{0^{-x}}$ se generaría una división entre 0 la cual no está definida en R. Por tanto, esto se reflejaría como una función lineal constante a lo largo del semieje positivo de las abscisas. Sin embargo, GeoGebra lo muestra como una recta que descansa sobre el semieje positivo de las ordenadas, tal como se observa en la Figura 57.

Figura 57

Representación Gráfico-Dinámica de C(x)=4b^x cuando b=0



En el **sub-ítem 1av)**, se espera que las duplas en base a la noción que han logrado de los sub-ítems anteriores puedan hacer uso de los resultados y responder que los valores de b asociados a la función exponencial son $b > 0$ y $b \neq 1$ o sus equivalentes.

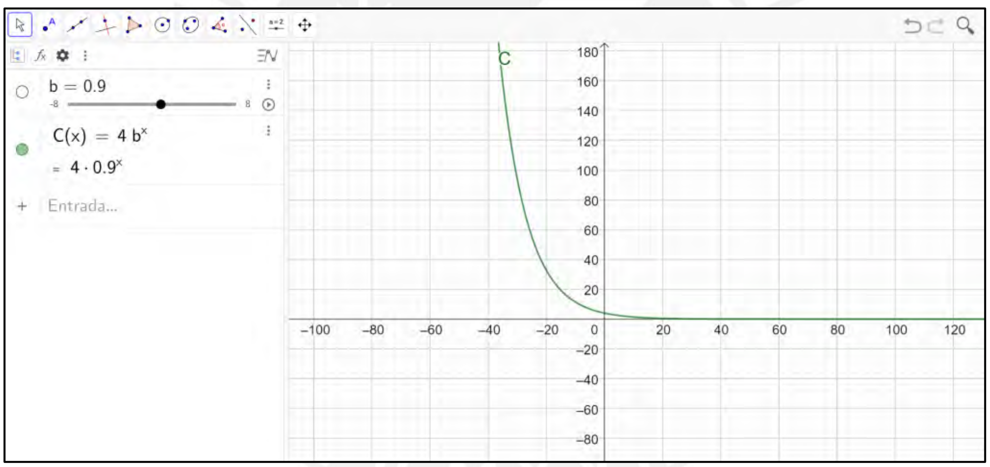
Análisis A Posteriori de los ítems 1ai, 1aii, 1aiii, 1aiv, 1av.

Dupla A. Para este análisis ha sido necesario revisar tanto lo escrito por la dupla en la ficha de actividades como la grabación de las voces en la interacción y la grabación de la pantalla para observar y describir el fenómeno de estudio.

Para el **sub-ítem 1ai**, la Dupla A ingresó al enlace de GeoGebra en Línea que aparece en la ficha de actividades, en su interacción mencionaron que la representación algebraica $C(x) = 4b^x$ que se encuentra presenta un deslizador para la base $\boldsymbol{b}$, asimismo, mientras ellos movían el deslizador a valores positivos observaban las representaciones gráfico-dinámicas que aparecían. En este sentido, podemos hacer notar que la Dupla A, realizó una conversión del registro algebraico al RGD de la función exponencial. Así lo muestra la Figura 58.

Figura 58

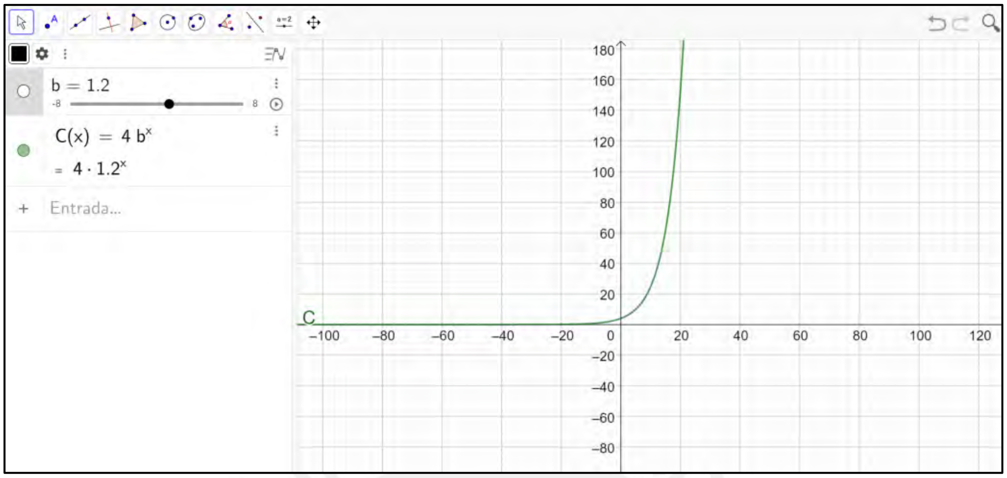
Conversión del Registro Algebraico al RGD de la Función Exponencial (Dupla A)



La Dupla A, realizaba alejamientos y cambios de posición para reconocer mejor la representación gráfica de la función exponencial y reconocieron que mientras aumentaba el valor de $\boldsymbol{b}$ la función exponencial cambiaba de decreciente a creciente. Así, podemos indicar que la Dupla A desarrolló sus aprehensiones perceptiva y operatoria con modificaciones de tipo óptico al alejar la gráfica y con modificaciones de tipo posicional traslacional al mover el plano cartesiano con la gráfica. A continuación, la Figura 59.

Figura 59

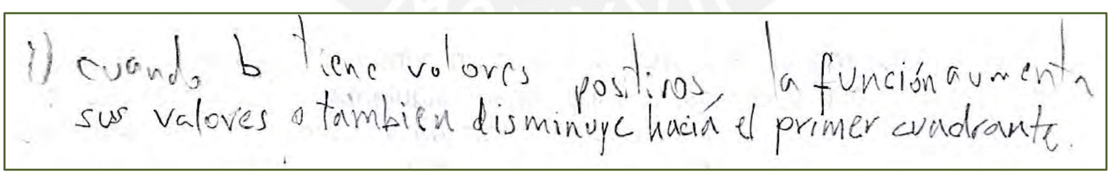
Crecimiento en la Representación Gráfica de la Función Exponencial (Dupla A)



Asimismo, la Dupla A da muestra de su aprehensión discursiva cuando escribieron que mientras $\boldsymbol{b}$ aumentaba la función exponencial pasaba de ser decreciente a creciente. Mientras al mover el dial de b, advirtieron que sus valores pasaban de números mayores a 0 a valores mucho más grandes. Sin embargo, cabe resaltar que en la interacción que esta dupla tuvo, se detuvieron en $b = 1$, reconociendo que allí no aparece la representación gráfica de la función exponencial. Presentamos la aprehensión discursiva de la Dupla B para esta tarea en la Figura 60.

Figura 60

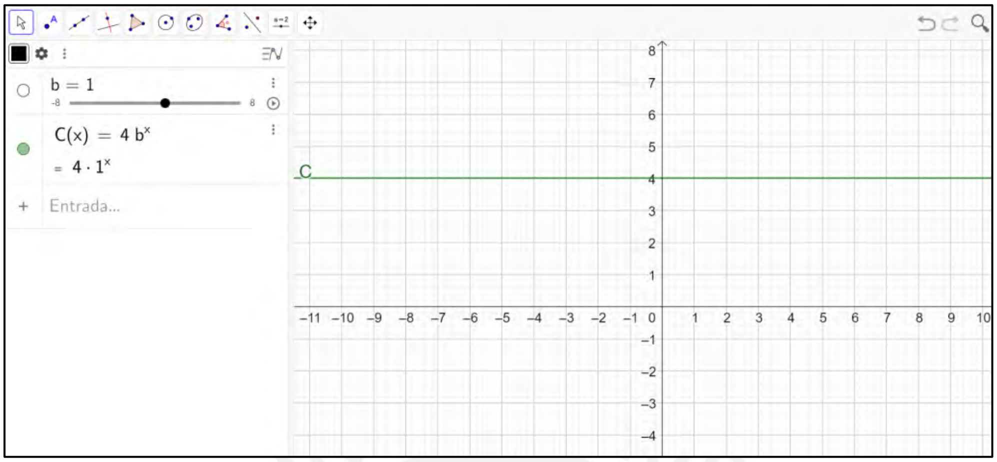
Aprehensión Discursiva de la Función Exponencial cuando $b > 0$ (Dupla A)



Para el **sub-ítem 1aii)** la Dupla A debe reconocer la existencia o no de la representación gráfica de la función exponencial cuando $b = 1$. En su interacción se observó que volvió a reconocer la representación algebraica $C(x) = 4b^x$ en la Vista Algebraica de GeoGebra en Línea se produjo entonces la conversión del registro algebraico al RGD, la Dupla A comenzó a realizar tratamientos al mover el dial del deslizador. Luego, lleva el dial a 1, también se produjeron tratamientos con deslizador. Entonces, la Dupla A, coloca el deslizador a 1, como se muestra en, la Figura 61 muestra el momento en que la Dupla A ubica el deslizador $\boldsymbol{b}$ en el valor 1.

Figura 61

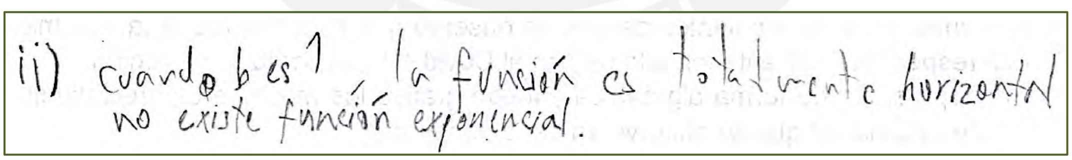
Tratamientos con Deslizador de la Función Exponencial cuando $b = 1$ (Dupla A)



La Dupla A ha desarrollado su aprehensión operatoria con modificaciones de tipo óptico cuando realiza alejamientos con la herramienta alejar y modificaciones de tipo posicional traslacional cuando realizó cambios de posición del plano cartesiano utilizando la herramienta *Mueve* lo que les ha permitido reconocer que no aparece la función exponencial. La Figura 62, muestra la aprehensión discursiva para la función exponencial.

Figura 62

Aprehensión Discursiva de la Función Exponencial cuando $b = 1$ (Dupla A)

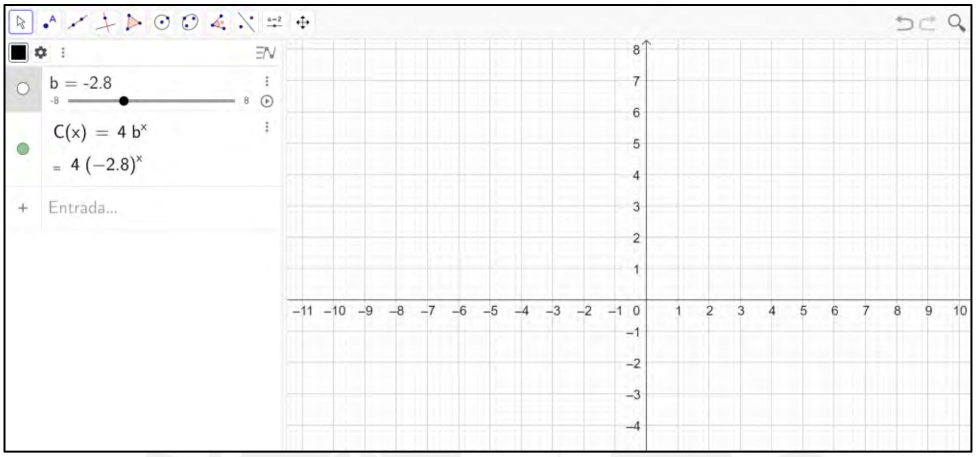

ii) cuando b es 1 la función es totalmente horizontal
no existe función exponencial.

Lo que observamos en la Figura 62 es que la Dupla A menciona que no existe función exponencial, ello en virtud al conocimiento que tienen sobre su gráfica. Es curioso que la Dupla A no menciona a la función constante en este apartado a pesar que la ve. Esto nos hace pensar que hace falta reconocer a algunas funciones especiales como la función constante $f(x) = A$.

Para el **sub-ítem 1aiii)** la Figura 63 muestra que la Dupla A fijó su atención nuevamente en la representación algebraica de la función exponencial $C(x) = 4b^x$ y realizó su conversión del registro algebraico al RGD, allí observan la representación gráfica cuando empiezan a mover el deslizador $\boldsymbol{b}$ a valores negativos una y otra vez, lo que coincide con la conducta esperada además de estar haciendo tratamientos en el RGD.

Figura 63

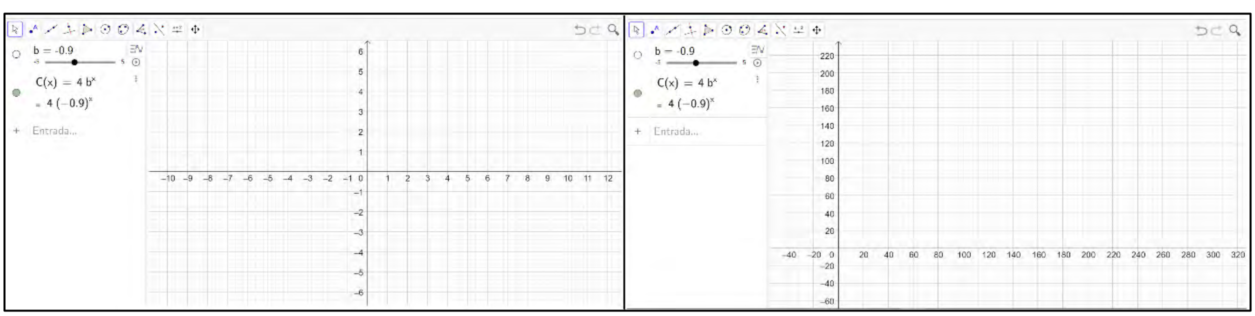
Conversión de la Función Exponencial del Registro Algebraico al RGD para $b < 0$ (Dupla A)



En la Figura 64, se observa que se producen acciones esperadas cuando la Dupla A se detiene en algunos valores negativos y por medio del desarrollo de su aprehensión perceptiva y operatoria, realizan tratamientos a través de modificaciones ópticas cuando acercan y alejan la vista gráfica mediante la herramienta  y modificaciones posicionales de tipo traslacional cuando mueven el plano cartesiano con la herramienta  para lograr reconocer si aparece o no la función exponencial para valores donde $b < 0$.

Figura 64

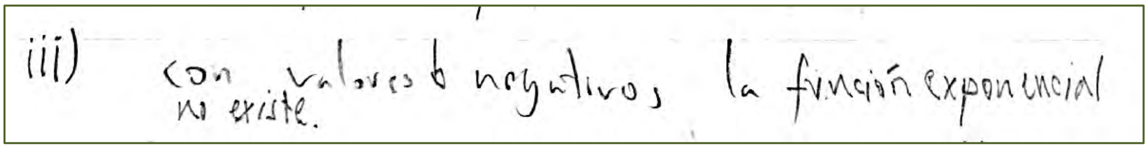
Aprehensión Operatoria con Modificaciones Óptica y Posicional (Dupla A)



En la Figura 65, se puede apreciar que la Dupla A reconoció las características propias de la función exponencial cuando la base $b < 1$, en el desarrollo de su aprehensión perceptiva y operatoria explicada líneas arriba, con un comportamiento esperado desarrolló su aprehensión discursiva al indicar que la gráfica de la función exponencial no aparece cuando $\boldsymbol{b}$ tiene valores negativos.

Figura 65

Aprehensión Discursiva de la Función Exponencial para $b < 0$ (Dupla A)

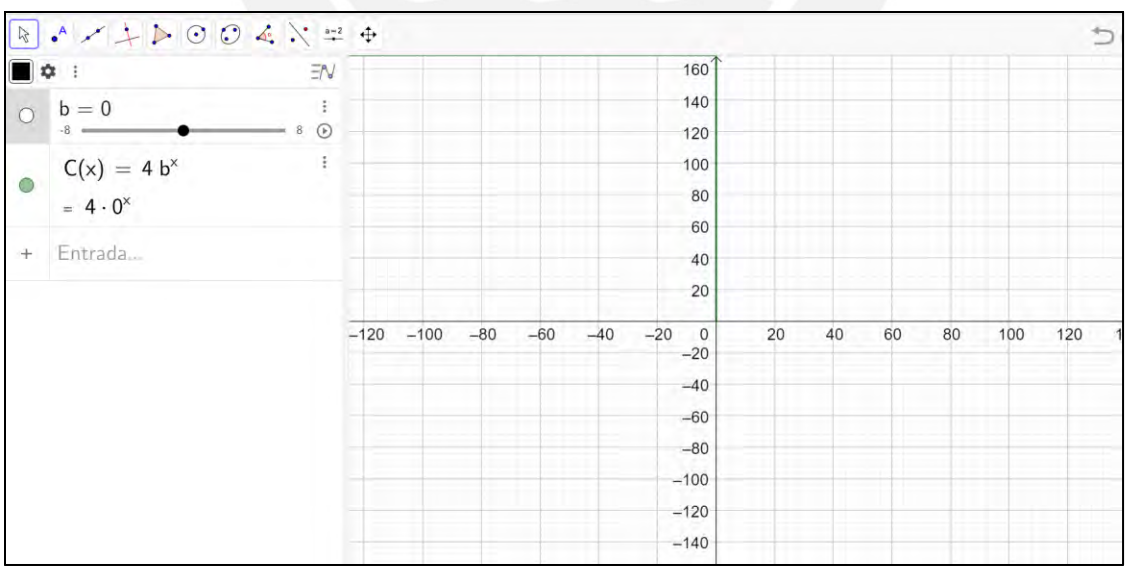

iii) con valores b negativos, la función exponencial no existe.

En relación al **sub-ítem 1aiv)** junto a la revisión de las interacciones de la Dupla A, presentan un reconocimiento de la representación algebraica $C(x) = 4b^x$ al ser mencionada por sus integrantes al momento de buscar la función exponencial en su representación gráfica produciéndose una conversión del registro algebraico al RGD.

La Figura 66, muestra el tratamiento con deslizador realizado por la Dupla A, al mover el dial que representa a $\boldsymbol{b}$ al valor 0.

Figura 66

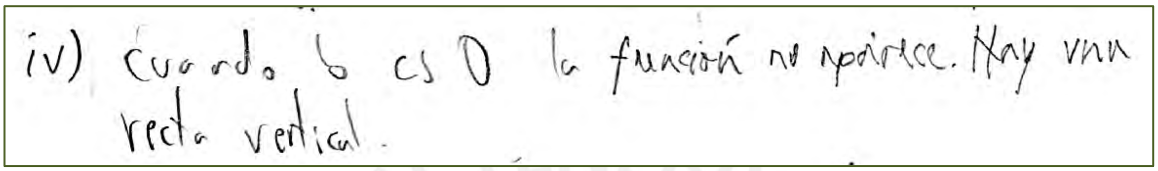
Tratamientos con Deslizador de la Función Exponencial cuando $b = 0$ (Dupla A)



La Figura 67 muestra la respuesta de la Dupla A. Hay evidencia en la comunicación que sostienen los integrantes de la Dupla A al dar cuenta que no aparece la función exponencial, solo una línea vertical. Fue esto último que escribieron, sin embargo, no deja de ser válido reconocer en la Dupla A que llegaron a una respuesta esperada y además podemos indicar que hubo desarrollo en su aprehensión discursiva, dado que reconocieron que no se presenta la función exponencial.

Figura 67

Aprehensión Discursiva de la Función Exponencial cuando $b = 0$ *(Dupla A)*

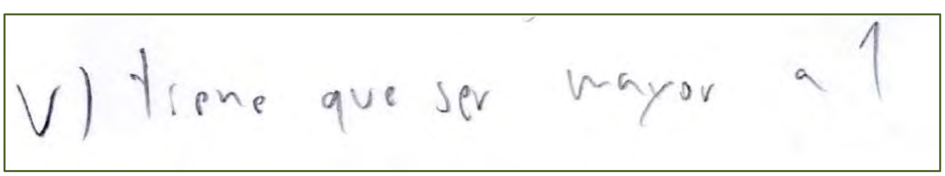


En relación al **sub-ítem 1av)**, la interacción de la Dupla A consistió en regresar al GeoGebra y reconocer nuevamente la representación algebraica $C(x) = 4b^x$ y su correspondiente representación gráfico-dinámica. Observamos que han realizado una conversión del registro algebraico al RGD, para que por medio de tratamientos con el deslizador que representa a $\boldsymbol{b}$ reconozcan la aparción o no de la función exponencial por los valores de $\boldsymbol{b}$ que indican los sub-ítems 1ai), 1aii), 1aiii) y 1aiv). Entonces, los estudiantes de esta dupla expresan que los valores de $\boldsymbol{b}$ son mayores a 1 para la existencia de la función exponencial. Cabe resaltar que la Dupla A no expresó que los valores de $b > 0$, pensamos que esto puede superarse en la medida que los estudiantes exploren las características propias de la función exponencial lo que incluye también sus restricciones.

A continuación, la Figura 68 muestra la aprehensión discursiva de la Dupla A, correspondiente al sub-ítem 1av).

Figura 68

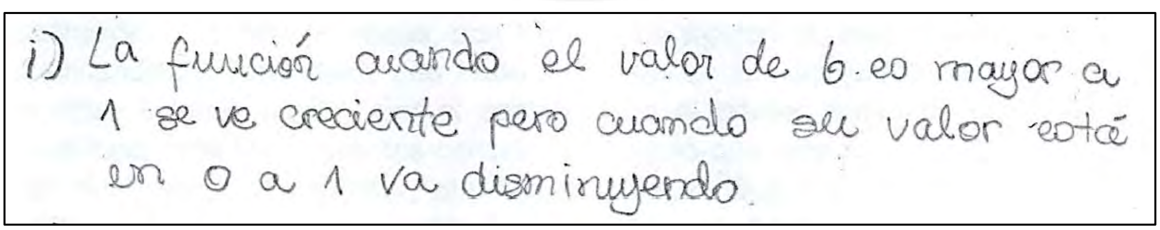
Aprehensión Discursiva de la Función Exponencial (Dupla A)



Dupla B. La dupla empezó la solución al **ítem 1a,** según se aprecia en la grabación en video, ingresaron a GeoGebra a través del enlace dado en la ficha de trabajo, que también la tenían de manera virtual en formato pdf. Una vez en este ambiente de representaciones dinámica pasaron a resolver el **sub-ítem 1ai**, reconocieron la representación algebraica de la función $C(x) = 4b^x$ en la vista algebraica, así como también identificaron el deslizador b como la base de la función dada. Luego, se produjo la conversión desde el registro algebraico al RGD, así movieron el deslizador para buscar qué sucede con esta última representación de la función exponencial. Cuando la base b toma valores positivos, se produjeron conversiones del registro algebraico al RGD y viceversa, además de transformaciones de tratamientos con deslizador en el RGD de la familia de funciones $C(x) = 4b^x$. Así, los estudiantes de la Dupla B expresaban en primer término que buena parte de la gráfica estaba sobre el primer cuadrante, luego a través de modificaciones posicionales y ópticas utilizaron la herramienta *Mueve*  y la herramienta *Alejar*  o *Acercar*  del GeoGebra, mediante su aprehensión perceptiva y operatoria lograron advertir que la gráfica se extiende por todo el primer y segundo cuadrante, además, reconocen por medio de su aprehensión perceptiva que, la gráfica toma dos posiciones distintas; en particular cuando $b > 1$, la posición de la gráfica la identifican como creciente, sin embargo, para la posición decreciente asumen que su valor corresponde de 0 a 1. Creemos que esto último no se ha resuelto para los estudiantes, dado que no tomaron detalle respecto a lo que sucede en $b = 0$ y $b = 1$. Pensamos que luego de resolver los siguientes sub-ítems podrán reconocer y definir finalmente cuando la función es creciente y cuando es decreciente. A continuación, mostramos la aprehensión discursiva de la Dupla B al **sub-item1ai** en la Figura 69.

Figura 69

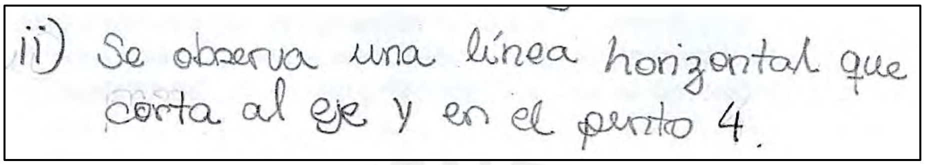
Aprehensión Discursiva de la Función Exponencial cuando $b > 1$ (Dupla B)


i) La función cuando el valor de b es mayor a 1 se ve creciente pero cuando su valor está en 0 a 1 va disminuyendo.

En relación al desarrollo del **sub-ítem 1aii**, la Dupla B utilizó la representación algebraica dada de la función exponencial $C(x) = 4b^x$, produciéndose una conversión del registro algebraico al RGD. Así, se enfocaron en la vista gráfica del GeoGebra para reconocer qué sucede cuando $b = 1$. La dupla haciendo uso de su aprehensión perceptiva y operatoria observó y expresó que aparecía una línea recta en forma horizontal, algo que está en nuestro análisis a priori. Esto nos hace suponer que aún el concepto de función constante no está del todo interiorizado. Además, reconocieron que esta representación gráfica pasa por el punto 4 del eje y. Presentamos el desarrollo de la Dupla B en la Figura 70.

Figura 70

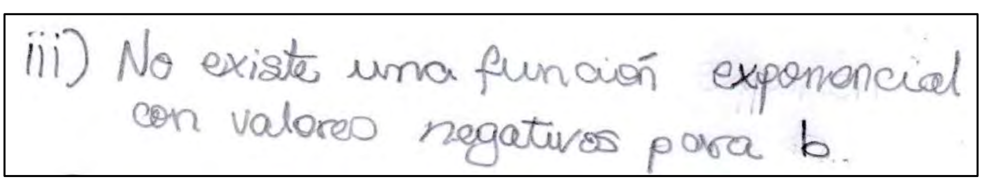
Aprehensión Discursiva cuando $b = 1$ (Dupla B)


ii) Se observa una línea horizontal que corta al eje y en el punto 4.

Para el desarrollo del **sub-ítem 1aiii**, la Dupla B nuevamente utilizó el deslizador que representa a los valores de la base b reconociendo la representación algebraica de la función exponencial $C(x) = 4b^x$, los movió para valores negativos produciéndose tratamientos entre las representaciones algebraica y gráfica-dinámico y conversiones entre el registro algebraico y el RGD. En un primer momento los estudiantes de la Dupla B pensaron que se habían equivocado, dado que no se veía alguna representación gráfica. Luego, por medio de su aprehensión perceptiva y operatoria realizaron modificaciones de tipo óptico y posicional con las herramientas *Mueve* y *Acercar* o *Alejar* para reconocer si aparece alguna gráfica, asimismo, utilizaron la opción *Ver todos los objetos* y no encontraron gráfica alguna. Finalmente, lograron a través de su aprehensión perceptiva y discursiva expresar que no existe la función exponencial cuando $b < 0$. En esta parte los estudiantes confunden y piensan que la función exponencial está en la representación gráfica y es pertinente aclarar que la representación gráfica es solo una parte. A continuación, la Figura 71, muestra la respuesta de la Dupla B.

Figura 71

Aprehensión Discursiva cuando $b < 0$ (Dupla B)

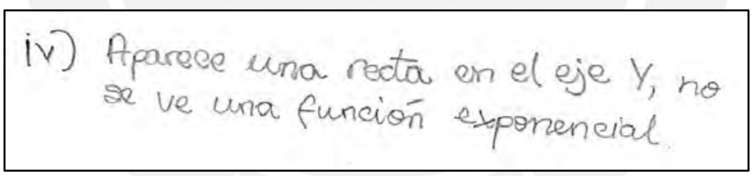

iii) No existe una función exponencial con valores negativos para b.

Para el desarrollo del **sub-ítem 1aiv**, la Dupla B siguió la indicación de esta parte, la de expresar qué sucede con la representación gráfica de la función exponencial cuando $b = 0$. La

Dupla B reconoció la representación algebraica $C(x) = 4b^x$ y movió el deslizador que representa a la base b hacia el valor 0, se produce una conversión desde el registro algebraico al RGD y utilizando su aprehensión operatoria utilizó las herramientas *Mueve*  y la herramienta *Alejar*  o *Acercar*  del GeoGebra y por medio de su aprehensión perceptiva en el RGD reconocieron que aparece una recta en el eje Y. Aquí no hubo precisión dado que lo que se esperaba es que respondieran que se ve una recta en el semieje positivo de las Y, podemos pensar que su aprehensión discursiva no fue la mejor. Ocurrió algo singular en esta dupla, luego de responder, repasaron las respuestas de cada sub-ítem desarrollado hasta el momento, finalmente agregaron a su respuesta que no existe función exponencial para este sub-ítem. Podemos reconocer que los estudiantes de esta dupla no conjeturaron si realmente la representación algebraica obtenida como $C(0) = 4b^0$ produce una recta vertical, solo se limitaron a describir lo que observaron. Esto nos hace pensar que los estudiantes requieren de un trabajo de análisis del objeto matemático función para llegar a estos razonamientos. Mostramos en la Figura 72 la respuesta al sub-ítem 1aiv.

Figura 72

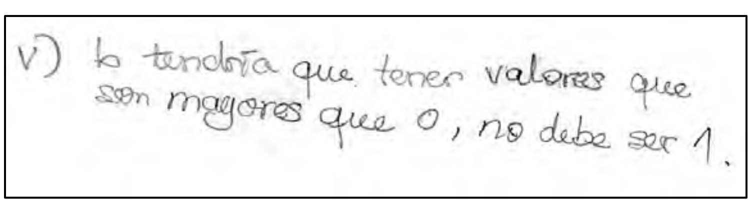
Aprehensión Discursiva cuando $b = 0$ (Dupla B)


iv) Aparece una recta en el eje Y, no se ve una función exponencial

Para el desarrollo del **sub-ítem 1av**, la Dupla B teniendo ya una mirada general de lo que realizó, no le resultó complejo darse cuenta, en su interacción expresaron que “los valores que asume la base b son positivos” y escriben en la ficha que son mayores a 0 y diferentes a 1. Así lo muestra la Figura 73.

Figura 73

Aprehensión Discursiva para Valores de b (Dupla B)


v) b tendría que tener valores que son mayores que 0, no debe ser 1.

En conclusión, la Dupla B identificó las representaciones algebraicas que se producían en $C(x) = 4b^x$ para diversos valores que asume la base b, así también reconoce las diversas representaciones gráficas de la función exponencial en su mayoría, se producen conversiones desde el registro algebraico con la expresión $C(x) = 4b^x$ hacia el RGD la cual se realiza también en sentido inverso al ir reconociendo mediante sus aprehensiones perceptiva y operatoria lo que sucede con la representación gráfico-dinámica de la función exponencial. Podemos indicar que usaron su aprehensión perceptiva para identificar la existencia o no de la función exponencial, lo cual ocurrió en la mayoría de las respuestas. En cuanto a la aprehensión operatoria, si hay evidencia en las grabaciones de video de las herramientas utilizadas para reconocer características de la función exponencial. De igual modo, la Dupla B ha reconocido características de la función exponencial las que por medio de su aprehensión discursiva ha podido escribir con lo que hay evidencia de desarrollo de la función exponencial.

El profesor-investigador intervino para aclarar definiciones y conceptos cuando las duplas han terminado el desarrollo de este apartado. Así, les preguntó: ¿por qué b no puede ser 0?, los estudiantes utilizando el GeoGebra respondieron que “no aparece la función exponencial, solo una recta vertical”. El profesor-investigador responde: ¿alguno se tomó el tiempo de comprobarlo algebraicamente? Y el docente desarrolló la expresión $C(x) = 4b^x$ para cuando $b = 0$ explicando qué sucede con valores negativos y con el valor 0 en la variable independiente. Expresando que GeoGebra puede tener algunas limitaciones en ciertos casos.

Análisis A Priori del ítem 1b. En el **ítem 1b)**, se espera que alguna dupla pueda partir del registro algebraico, hacer tratamientos para encontrar el valor de $C(0)$:

$$C(x) = 4b^x \quad , \quad b > 0, b \neq 1$$
$$C(0) = 4b^0$$
$$C(0) = 4(1)$$
$$C(0) = 4$$

O también, mediante tratamientos de la función $C(x) = 4b^x$ con el uso del deslizador para la base b puedan reconocer en el RGD mediante su aprehensión perceptiva, que el valor $C(0)$ representa al valor en el punto de abscisa 0 que resulta en la vista gráfica es el punto de corte con el eje $C(x)$ y no cambia a pesar de los diversos valores que tiene b para la función exponencial. Finalmente, utilizando su aprehensión discursiva se espera que expresen que **el valor 4 no cambia a pesar de los diversos valores que pueda tomar b para la función exponencial**.

Análisis A Posteriori del ítem 1b.

Dupla A. Esta dupla utiliza el GeoGebra en línea para encontrar si el valor $C(0)$ cambia. Se produce la conversión del registro algebraico al RGD y viceversa al realizar tratamientos con el deslizador b moviéndolo para valores positivos y diferentes de 1, generando otras representaciones gráfico-dinámicas y mediante su aprehensión perceptiva y operatoria con modificaciones de tipo óptico como el acercamiento o alejamiento y de tipo posicional de traslación mediante la herramienta *Mueve*, reconocen que el valor $C(0)$ representa al valor de la función en el punto 0 y observan que es 4 y éste no cambia, algo que tomamos como un comportamiento esperado en nuestro análisis a priori. Podemos ver su respuesta en lo que respecta a su aprehensión discursiva en la Figura 74.

Figura 74

Aprehensión Discursiva Sobre la Función Exponencial - Dupla A

No cambia debido a que el coeficiente que multipli-
ca a b cuando este es b^0 no le afecta y perma-
nece siendo 4.

Dupla B. Esta dupla utilizó también el GeoGebra en línea para reconocer si el valor $C(0)$ cambia o no para diferentes valores de b en la expresión $C(x) = 4b^x$. La dupla en la grabación de video y audio se observa que reconocen la representación algebraica de la función exponencial $C(x) = 4b^x$, manipula el deslizador b por diversos valores tanto positivos como diferentes a 1, produciéndose la conversión del registro algebraico al RGD y viceversa, además, realizando tratamientos con deslizador a la representación gráfico-dinámica. Así, los estudiantes reconocen a $C(0)$ como el valor de la función cuando la variable independiente es 0, además, por medio de su aprehensión perceptiva y operatoria reconocen dicho valor; en las interacciones que tienen expresan "¡mira, siempre es 4!" ello revela también el uso de su aprehensión discursiva. Ello lo observamos en la Figura 75.

Figura 75

Aprehensión Discursiva Sobre la Función Exponencial - Dupla B

No cambia, el C(0) siempre se mantiene en
4.

En suma, podemos indicar que ambas duplas han utilizado la conversión producida del registro algebraico al RGD y viceversa, el uso de transformaciones tipo tratamientos con deslizador en el RGD les permite reconocer con el desarrollo de sus aprehensiones perceptiva, operatoria que a diferentes valores de $b > 0$ y $b \neq 1$ el valor de la función en $x = 0$ es siempre 4, manifestado por un desarrollo de su aprehensión discursiva. Podemos señalar que ambas duplas han realizado conversiones y desarrollo de aprehensiones evidenciando comprensión.

Análisis A Priori del ítem 2a.

En el **ítem 2a)**, se espera que las duplas puedan en primer lugar realizar la conversión del registro en lengua natural al registro algebraico asociado al estudio de la población en dos regiones de China.

Así, reconocen para la primera región que el primer censo realizado es el valor inicial en la población igual a 1 000 personas. Al leer la frase "este número se ha ido duplicando por año", con las nociones aprendidas en la actividad 1, reconocen que la base de la función es 2, asimismo, este valor les debe indicar que la función a construir es de crecimiento exponencial. Finalmente, mediante el reconocimiento de la formación en el registro algebraico proceden a escribir: $P_1(t) = 1000 \cdot 2^t$.

Para la segunda región de China, se espera que las duplas reconozcan como valor inicial aquel que proviene del primer censo realizado tomándolo como 64 000 pobladores. Al leer la frase "este número baja a la mitad con respecto al año anterior", usando las nociones aprendidas en la actividad 1, reconocen que la base de la función exponencial es $\frac{1}{2}$, además, $0 < \frac{1}{2} < 1$, se espera que las duplas con ello logren identificar que el decrecimiento de esta población. Finalmente, mediante el reconocimiento de la formación en el registro algebraico proceden a escribir: $P_2(t) = 64000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

Luego, un comportamiento esperado es que las duplas logren la conversión desde el registro algebraico al registro gráfico cuando dibujen las funciones exponenciales a lápiz y papel. Para ello, se espera que tomen una de las regiones, por ejemplo, la región 1 y realicen tratamientos en la representación algebraica para obtener algunos de los pares ordenados que les ayuden a graficar la función exponencial.

Una dificultad esperada es que las duplas al inicio no reconozcan que la gráfica solo está en el primer cuadrante. Sin embargo, al realizar la gráfica con los puntos que encuentren se espera que alguna dupla reconozca que el dominio de la función pertenece al primer cuadrante porque la variable tiempo en años empieza de 0.

Así, una solución esperada es elaborar una tabla de valores a partir del cálculo:

Para $t = 0 \rightarrow\ P_1(0) = 1000 \cdot 2^0\ \rightarrow\ P_1(0) = 1000 \cdot 1\ \rightarrow\ P_1(0) = 1000$

Para $t = 1 \rightarrow\ P_1(1) = 1000 \cdot 2^1\ \rightarrow\ P_1(1) = 1000 \cdot 2\ \rightarrow\ P_1(1) = 2000$

Para $t = 2 \rightarrow\ P_1(2) = 1000 \cdot 2^2\ \rightarrow\ P_1(2) = 1000 \cdot 4\ \rightarrow\ P_1(2) = 4000$

Para $t = 3 \rightarrow\ P_1(3) = 1000 \cdot 2^3\ \rightarrow\ P_1(3) = 1000 \cdot 8\ \rightarrow\ P_1(3) = 8000$

Para $t = 4 \rightarrow\ P_1(4) = 1000 \cdot 2^4\ \rightarrow\ P_1(4) = 1000 \cdot 16\ \rightarrow\ P_1(4) = 16000$

Para $t = 5 \rightarrow\ P_1(5) = 1000 \cdot 2^5\ \rightarrow\ P_1(5) = 1000 \cdot 32\ \rightarrow\ P_1(5) = 32000$

Para $t = 6 \rightarrow\ P_1(6) = 1000 \cdot 2^6\ \rightarrow\ P_1(6) = 1000 \cdot 64\ \rightarrow\ P_1(6) = 64000$

Construyen la tabla:

t	0	1	2	3	4	5	6
$P_1(t)$	1000	2000	4000	8000	16000	32000	64000

Luego, se espera que las duplas tomen la región 2 cuya representación algebraica es $P_2(t) = 64000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ y consigan los puntos de la función que les permitan graficarla a lápiz y papel. Nuevamente, una dificultad esperada es que las duplas inicialmente no reconozcan que la gráfica de la función solo tomará el primer cuadrante dado que el tiempo tiene valores positivos y empieza en 0. Sin embargo, luego de colocar los puntos que ellos elijan se espera que logren identificar la gráfica de la función en el primer cuadrante.

Así, el comportamiento esperado es:

Para $t = 0 \rightarrow\ P_2(0) = 64000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0\ \rightarrow\ P_2(0) = 64000 \cdot 1\ \rightarrow\ P_2(0) = 64000$

Para $t = 1 \rightarrow\ P_2(1) = 64000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1\ \rightarrow\ P_2(1) = 64000 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow\ P_2(1) = 32000$

Para $t = 2 \rightarrow\ P_2(2) = 64000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\ \rightarrow\ P_2(2) = 64000 \cdot \frac{1}{4}\ \rightarrow\ P_2(2) = 16000$

Para $t = 3 \rightarrow\ P_2(3) = 64000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\ \rightarrow\ P_2(3) = 64000 \cdot \frac{1}{8}\ \rightarrow\ P_2(3) = 8000$

Para $t = 4 \rightarrow\ P_2(4) = 64000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4\ \rightarrow P_2(4) = 64000 \cdot \frac{1}{16}\ \rightarrow\ P_2(4) = 4000$

Para $t = 5 \rightarrow\ P_2(5) = 64000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5\ \rightarrow P_2(5) = 64000 \cdot \frac{1}{32}\ \rightarrow\ P_2(5) = 2000$

Para $t = 6 \rightarrow\ P_2(6) = 64000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6\ \rightarrow P_2(6) = 64000 \cdot \frac{1}{64}\ \rightarrow\ P_2(6) = 1000$

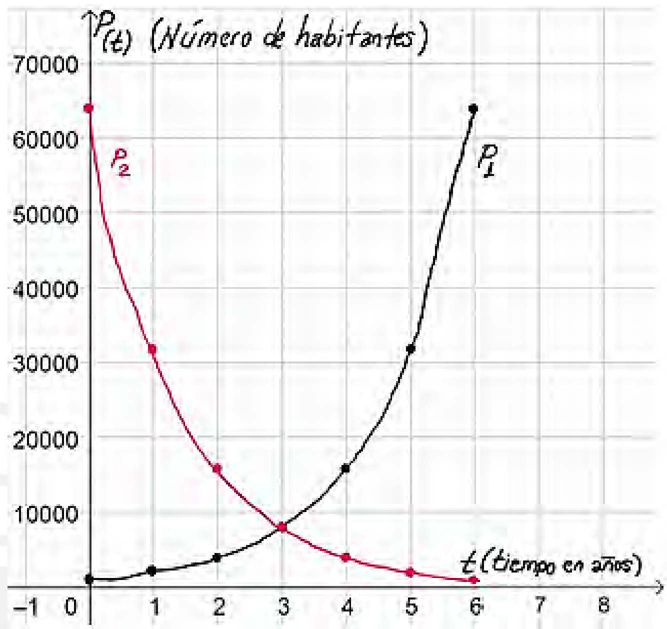
Construyen la tabla:

t	0	1	2	3	4	5	6
$P_2(t)$	64000	32000	16000	8000	4000	2000	1000

Luego de este proceso, se espera que alguna dupla reconozca la variable independiente como continua y que la respuesta para las representaciones gráficas que modelan el crecimiento y decrecimiento poblacional de dos regiones de China sea el que se muestra en la Figura 76.

Figura 76

Representación Gráfica de los Modelos Poblacionales en Dos Regiones de China



La Figura 76, muestra finalmente la conversión desde el registro tabular al registro gráfico que se espera realicen las duplas para la función que modela la población de dos regiones en China.

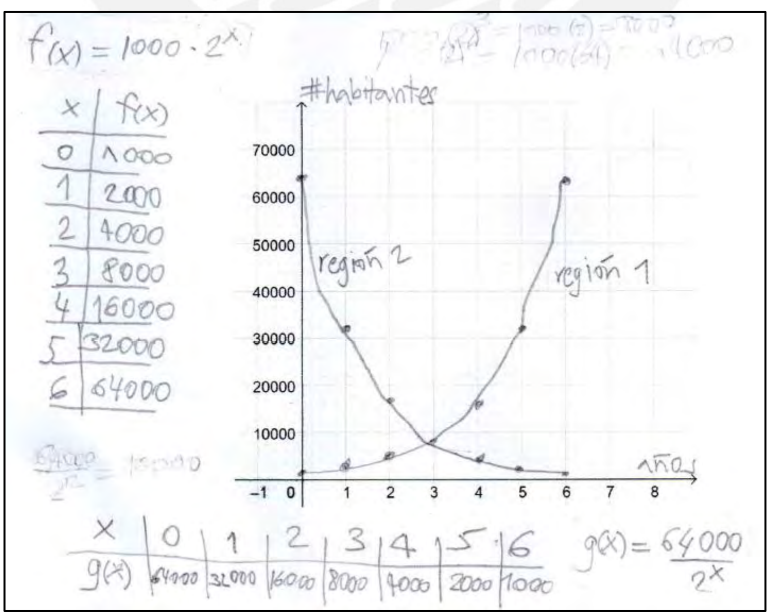
Análisis A Posteriori del ítem 2a.

Dupla A. La dupla empieza leyendo el enunciado y buscando comprender el contexto, trata de identificar una relación entre los datos y lo que se pide hallar. En su interacción, reconocen que hay dos poblaciones cada una perteneciente a una región distinta de China. Identifican que una región va duplicando su valor. En este punto, la dupla recordó lo que se hizo en el problema de las bacterias y reconoció que el problema está refiriéndose a una función exponencial. Identifican que la expresión que permite la regla de correspondencia tiene la forma $C(x) = A \cdot b^x$ y escriben $f(x) = 1000 \cdot 2^x$ es en este momento que se produce la conversión desde el registro en lengua natural al registro algebraico de la función exponencial. Además, para la otra región, identifican del mismo modo los elementos de la función exponencial que aparecen en su representación en lengua natural para realizar la conversión desde el registro en lengua natural hacia el registro algebraico escribiendo $g(x) = \frac{64000}{2^x}$, es curioso notar esta representación, que no estaba en nuestro análisis a priori. Pensamos que, como por cada año la población en esta región resulta ser la mitad de la del año anterior, consideraron dividirla entre un factor cuya potencia es 2. Así, convienen que, para determinar la gráfica de la función es necesario obtener puntos para cada regla de correspondencia por región, realizan tratamientos en la representación algebraica por medio de cálculos, determinando una tabla de valores. Así, se produce la conversión desde el registro algebraico hacia el registro tabular de la función exponencial. Para Duval (2006), la conversión y el tratamiento forman pieza importante en la resolución de problemas, pues el tratamiento permite finalmente hacer el cambio de registro más adecuado.

Luego, colocan los puntos sobre la cuadrícula para una región y luego para la otra. Comentan que debido a que la población cambia con el tiempo deben utilizar una línea continua que pase por dichos puntos: con ello se reconoce la variable didáctica tiempo de naturaleza continua. Se observa que en la ficha de actividades la dupla llegó también a colocar los rótulos para los ejes coordenados; número de habitantes y tiempo en años. Así, se produce la conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico. Presentamos el desarrollo de este ítem en la Figura 77.

Figura 77

Transformaciones de la Función Exponencial para el Ítem 2a - Dupla A

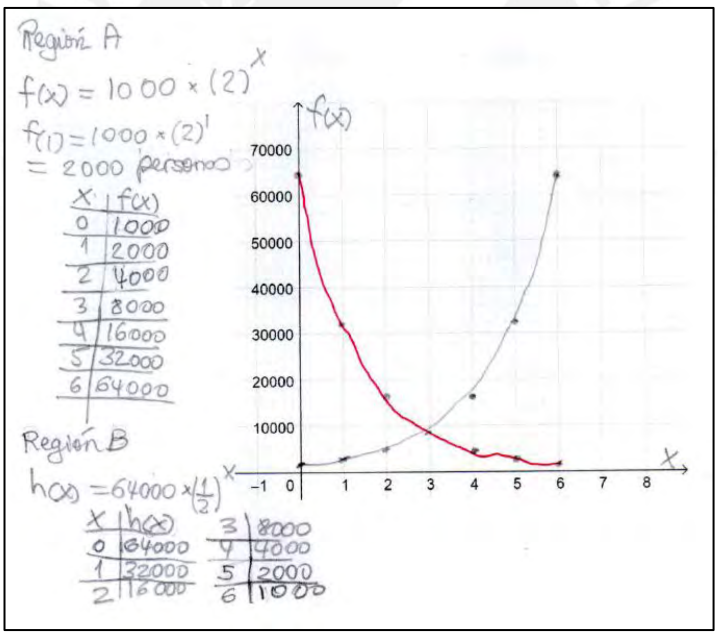


Finalmente, podemos mencionar que la Dupla A identificó desde el enunciado de la situación la representación en lengua natural de la función exponencial. Asimismo, realizó una conversión desde el registro en lengua natural hacia el registro algebraico al escribir la representación algebraica por medio de la regla de correspondencia que pertenece a la cantidad de habitantes en función al tiempo en años por cada región de China. La Dupla A, hizo tratamientos en la representación algebraica para determinar los puntos correspondientes a cada modelo poblacional que le permita construir una tabla de valores produciéndose la conversión desde el registro algebraico hacia el registro tabular. Por último, al colocar los puntos que corresponden al modelo poblacional de cada región en la cuadrícula, rotulando los ejes, se produce la conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico.

Dupla B. Para este apartado, la dupla al igual que la anterior, empieza por comprender el enunciado buscando alguna relación entre los datos y lo solicitado. En un primer momento les dificultaba reconocer la representación de la función exponencial en el registro de lengua natural. Sin embargo, el docente tuvo que intervenir para preguntarles: ¿cómo se entiende la expresión "este número se ha ido duplicando por año" y la expresión "este número baja a la mitad con respecto al año anterior?, ¿tiene alguna relación con el problema del crecimiento de bacterias? La dupla empezó a recordar qué es lo que se relacionaba en esa situación del crecimiento de bacterias e identificaron que se generaba un modelo exponencial. Así, en sus interacciones se percibe que reconocen la forma de su representación algebraica como $f(x) = A \cdot b^x$. Identificaron al valor A como la cantidad inicial que para el primer caso corresponde a la población de 1 000 personas. Luego, la base b como el factor que multiplica, que para el caso es 2 porque la cantidad de habitantes se duplica cada año y escriben $f(x) = 1000 \times (2)^x$. Lo mismo hicieron para la segunda región a la que llamaron Región B, identificaron el valor inicial 64000 habitantes y el valor de la base $b = \frac{1}{2}$, escribiendo $h(x) = 64000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Con ello se produce la conversión desde el registro en lengua natural al registro algebraico. Posteriormente, se produce la formación de la tabla de valores a partir del hecho que en la Región A, a la que así llamaron, el valor de la función era el doble de aquel que corresponde al año anterior, finalmente se la conversión desde el registro algebraico hacia el registro tabular. Del mismo modo, en la Región B, advirtieron también que lo único que tendrían que hacer para obtener los valores de esta función era de extraer la mitad a cada año en relación al anterior, produciéndose la formación y la conversión desde el registro algebraico hacia el registro tabular. Finalmente, colocaron los puntos en la cuadrícula y los unieron con líneas continuas. En la interacción no se comenta si el trazo realizado tiene que ver con la variable independiente tiempo, sin embargo, suponemos que ello ha sido tomado en cuenta al momento de formar la representación gráfica. Advertimos que cada representación gráfica de la función exponencial no tiene un nombre que la identifique, pero podemos concluir que la referencia para cada una la obtenemos de las representaciones algebraicas escritas como $f(x)$ y $h(x)$. Otro aspecto a resaltar, es que el eje de la variable dependiente esté con el nombre $f(x)$ en vez de $f(x); h(x)$, por ejemplo, o solo con el nombre cantidad de habitantes. Creemos que esta omisión no es evidencia de confusión de una función con otra, dado que en la interacción se menciona a la función h la que será pintada de color rojo ello nos hace pensar que la dupla tiene claro que la función f no es igual a la función h. En ese sentido, se logra producir la conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico para ambas regiones. Así lo evidencia la Figura 78.

Figura 78

Transformaciones de la Función Exponencial - Dupla B



Concluimos sobre los comportamientos observados en la Dupla B, que identificaron los registros de lengua natural en el enunciado con dificultades, identificaron el registro algebraico al lograr reconocer la representación algebraica de la función exponencial, la representación tabular y la representación gráfica. Realizaron conversiones, primero del registro en lengua natural al registro algebraico, hicieron tratamientos en la representación algebraica al conseguir los valores iniciales y acciones de formación de la tabla para cada región, produciéndose la conversión desde el registro algebraico hacia el registro tabular. Finalmente, al graficar las funciones exponenciales para cada modelo poblacional de dos regiones de China, la dupla consiguió realizar la conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico.

Resultados de la Parte Experimental

Durante el proceso de la parte experimental en nuestra investigación, logramos aplicar el marco teórico propuesto; la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2006) y la configuración del RGD de Peñaloza y Salazar (2018), lo que nos ofreció herramientas para realizar el análisis de los resultados de la investigación tomando en cuenta las fortalezas, debilidades y obstáculos que se han presentado en los comportamientos de los sujetos para el desarrollo de las actividades.

Durante nuestra experimentación encontramos limitaciones en el uso de GeoGebra en línea, que influyeron en cierta medida en la comprensión de algunas características como, por ejemplo, la base b del modelo exponencial $f(x) = A \cdot b^x$, dado que, cuando la $b = 0$ GeoGebra en línea muestra una línea en el semieje positivo de la variable dependiente, algo que los estudiantes aceptaron confiados en que el software no tiene limitación alguna, además, ello tampoco animó a comprobarlo de forma analítica. Consideramos que para futuras actualizaciones mejorará la precisión de GeoGebra lo que permitirá aprovechar de mejor manera sus utilidades en investigaciones próximas.

En relación a la **Actividad 1**, requirió en primer momento el uso de papel y lápiz con el objetivo que los estudiantes puedan reconocer el modelo exponencial partiendo de su representación en lengua natural, realizando la conversión desde el registro en lengua natural hacia el registro tabular. Luego, utilizar GeoGebra en línea para buscar aspectos del dominio y rango en el ARD por medio de las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva, finalmente realizar la conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico. Por último, mediante el uso de lápiz y papel con las nociones anteriores partir de una situación de contexto extramatemático como es el crecimiento de venados en una región de África, representada gráficamente, buscar el modelo de representación algebraica produciéndose la conversión del registro gráfico al registro algebraico, el cual estaría acompañado de su dominio, reconociendo la naturaleza discreta de la variable tiempo para este caso.

En cuanto a los objetivos de la investigación se han cumplido los 3 objetivos específicos de nuestra investigación. Se ha identificado los registros en lengua natural, algebraico, gráfico y gráfico-dinámico de la función exponencial realizado por ambas duplas. Así también, se han producido conversiones desde el registro de lengua natural hacia el registro tabular, luego tratamientos en la representación tabular. En este punto, la Dupla A no presentó el valor inicial de la cantidad de bacterias como potencia de 2, sin embargo, si lo hizo con todos los demás valores de la tabla. Posteriormente, se ha producido en el RGD aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva para describir características del dominio y rango de la función exponencial reproducción de bacterias. Además, las duplas realizaron la conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico. Aquí, podemos indicar que la Dupla B tuvo dificultades para graficar la función exponencial como una línea continua y la dibujo con segmentos de recta, desarrollando de forma incompleta su aprehensión perceptiva. Luego, ambas duplas realizaron correctamente la conversión del registro gráfico al registro algebraico al resolver un problema de contexto extramatemático relacionado al crecimiento de venados.

La **Actividad 2**, tuvo como objetivo que mediante el uso del GeoGebra en línea los estudiantes puedan reconocer los valores que toma la base b de la función exponencial $C(x) = 4b^x$ para conocer el intervalo que corresponde a la función exponencial. Ambas duplas realizaron conversiones del registro algebraico al RGD utilizando sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva dieron respuesta a los valores que asume b para que la función exponencial exista. Es de mencionar que se presentó una limitación de GeoGebra en línea cuando se buscó observar en la vista gráfica si $C(x) = 4 \cdot 0^x$, donde el ARD lo presentaba como una semirrecta que descansa sobre Y. Por último, las duplas con las nociones aprehendidas hasta el momento, realizan un problema de contexto poblacional para dos regiones de China produciéndose conversiones desde el registro en lengua natural hacia el registro tabular, de esta hacia la representación en pares ordenados para conseguir la correspondencia con la representación gráfica para ambas poblaciones.

En relación a los objetivos de nuestra investigación, podemos indicar que se llegaron a cumplir. Ello en virtud a que en los ítems desarrollados por las duplas se identifican los registros gráfico-dinámico, el registro algebraico y el registro en lengua natural. Asimismo, las duplas han logrado en general realizar un desarrollo de aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva bastante cercanos a lo esperado. Ambas duplas no lograron reconocer a la función constante en el sub-ítem 1aii, diferenciándola de la función exponencial. Para el desarrollo del problema de contexto extramatemático, donde se entiende que las duplas han podido recoger las nociones necesarias de la función exponencial, de ambas duplas, fue la Dupla B la que vacilaba en reconocer en el registro de lengua natural la expresión “este número se ha ido duplicando por año” o “este número baja a la mitad con respecto al año anterior”. Sin embargo, cuando el profesor-investigador intervino a manera de preguntas con lo que la Dupla B logró realizar la conversión del registro en lengua natural al registro algebraico. Además, ambas duplas realizaron tratamientos en el registro algebraico y la conversión desde el registro algebraico hacia el registro tabular al elaborar la tabla de valores para el problema del ítem 2. Finalmente, lograron también la conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico cuando representaron a la función exponencial en la cuadrícula del plano cartesiano utilizando algunos de los valores de la tabla para ubicarlos y trazar la gráfica.

CONSIDERACIONES FINALES

En esta sección realizaremos una reflexión a la luz de los aspectos más importantes de la investigación como son los antecedentes de investigación y la justificación, el marco teórico y los aspectos metodológicos, la pregunta de investigación y el objetivo general, la parte experimental y las perspectivas futuras.

En relación a los Antecedentes e Investigaciones de Referencia y la Justificación

Tomando como base los antecedentes y la justificación de nuestra investigación, podemos mencionar que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de la función exponencial, específicamente, estudiantes de quinto año de educación secundaria. Ello se debe a que los estudiantes trabajan mayormente en el registro algebraico, dado que el docente prioriza este registro al desarrollar sus sesiones de clases. Además, las investigaciones de referencia señalan la importancia que tiene el uso de contextos extramatemáticos y el uso de ambiente de representaciones dinámicas para mejorar la comprensión del objeto matemático función exponencial.

En nuestra investigación los estudiantes desarrollaron actividades a papel y lápiz, por otro lado, en un ambiente de representación dinámica como GeoGebra y tuvieron oportunidad de resolver problemas de contexto extramatemático relacionados a la función exponencial. Ello ayudó a que se acercaran a la comprensión de la noción de este objeto matemático desde la teoría de Duval (2006). Sin embargo, este acercamiento no se dio de manera inmediata, fue necesaria la intervención del docente-investigador para permitir que los estudiantes puedan asimilar características y propiedades de la función exponencial a través de preguntas puntuales. Esperamos que nuestra investigación se convierta en un aporte para poder acercar al estudiante al concepto de función exponencial mediante la comprensión de sus características y propiedades en un ARD y su posterior aplicación en problemas de contexto extramatemático.

En Relación al Marco Teórico y Metodológico

Pensamos que la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2012) como marco teórico de base, apoyado de la reconfiguración teórica para el Registro Gráfico Dinámico de Peñaloza y Salazar (2018), han permitido explicar la manera cómo se realiza la actividad matemática en los estudiantes agrupados en duplas. Así, las transformaciones semióticas entre los registros en lengua natural, tabular, algebraica y gráfica, han permitido analizar los comportamientos en la actividad matemática de los estudiantes al desarrollar la Actividad 1. Además, las conversiones del registro algebraico al RGD y viceversa utilizando el GeoGebra en línea, así como la conversión del registro en lengua natural al registro algebraico, la conversión del registro algebraico hacia el registro tabular y finalmente de este último hacia el registro gráfico, permitió explicar la actividad matemática de las duplas en la Actividad 2. Mención también la valiosa ayuda de GeoGebra en línea para que los estudiantes puedan desarrollar sus aprehensiones en el RGD: perceptiva, operatoria y discursiva que articuladas convenientemente han permitido puedan resolver situaciones y acercarse a comprender la noción de función exponencial.

En relación al método de la Ingeniería Didáctica, ha sido el más adecuado dado que al desarrollarse en sus 4 fases: análisis preliminar, concepción y el análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación, nos ha permitido poder hacer un análisis de la actividad matemática que realizaron los estudiantes en el desarrollo de las actividades para comprender la noción de función exponencial, tal como nos dice Duval (2017), "No hay noesis sin semiosis, no hay pensamiento matemático sin transformación de las representaciones semióticas, cualesquiera que sean" (p. 22). En el análisis preliminar logramos comprender la dimensión epistemológica para reconocer cómo se ha ido formando el concepto de función exponencial que empezó asociado a la inversa de la función logaritmo, siendo este hecho usado también en nuestra Actividad 1. La dimensión cognitiva que está apoyada en las investigaciones de referencia que dan cuenta de las dificultades para la comprensión de la función exponencial, las mismas que pasan por solo el trabajo en el registro algebraico o la conversión desde este registro hacia el registro gráfico, sin considerar en general otros cambios de registro. Asimismo, el conocimiento del objeto matemático a través de textos de matemática formales. La dimensión didáctica, donde se analizaron los textos que manejan los estudiantes en el bachillerato internacional para el curso de Matemática: Aplicaciones e Interpretación Nivel Medio, dan cuenta de que se empieza mostrando la concepción de la función exponencial a través de problemas agrupados por temas como el financiero, el biológico, el médico, entre otros.

En Relación al Objetivo General y la Pregunta de Investigación

Se han logrado cumplir los tres objetivos específicos de la investigación en el desarrollo de las actividades que realizaron los estudiantes en la experimentación:

Identificar los registros de representación semiótica de la función exponencial que utilizan estudiantes de quinto de secundaria.

En nuestra investigación en el apartado 1.3 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, hemos definido los registros de representación que utilizaremos para la función exponencial. Ello nos ha permitido tener el fundamento teórico que ayudó a diseñar los ítems para las actividades. En las actividades en que formaron parte estudiantes agrupados en las Duplas A y B, hemos podido identificar los registros que han utilizado para desarrollar las situaciones propuestas: el registro en lengua natural, el registro algebraico, el registro tabular, el registro gráfico y el RGD.

En la actividad 1, pregunta 1a ambas duplas realizaron la conversión del registro de lengua natural hacia el registro tabular. En la pregunta 1a y 1b utilizan la tabla para lograr la representación algebraica que modela la cantidad de bacterias en función del tiempo transcurrido. En la pregunta 2a y 2b, hacen uso del registro algebraico y el registro gráfico-dinámico para reconocer características del dominio y rango de la función exponencial cantidad de bacterias. En la pregunta 2c, ambas duplas hacen uso del registro gráfico para la elaboración de la representación gráfica de la función exponencial cantidad de bacterias hasta el tiempo de 5 horas. En la pregunta 3, las duplas utilizan el registro en lengua natural, el registro gráfico y el registro algebraico para resolver un problema sobre población de venados.

En la actividad 2, pregunta 1a las duplas realizan la conversión desde la representación algebraica hacia la representación gráfico-dinámica para reconocer características de la representación gráfica a partir del valor de la base b. En la pregunta 1b, de igual forma hacen uso de la representación algebraica y gráfico-dinámico para reconocer en la representación gráfica si el punto de corte con el eje y cambia al varirar los valores de la base b. En la pregunta 2, las duplas hacen uso del registro en lengua natural, registro algebraico, registro tabular y registro gráfico para modelizar y graficar la función población de dos regiones en China. Al respecto, Duval (2004) nos expresa: “Estos sistemas constituyen registros de representación semiótica. Su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es la condición absolutamente necesaria para poder comprender en matemáticas” (p. 24).

Describir los tratamientos, conversiones entre los registros de lengua natural, algebraico, gráfico y gráfico-dinámico, así como las aprehensiones que realizan estudiantes de quinto de secundaria en las representaciones de la función exponencial.

De igual manera que en el objetivo específico anterior, antes de describir la metodología de investigación se ha mencionado lo que significan las transformaciones (tratamiento y conversión) de una representación semiótica. Asimismo, se han descrito las aprehensiones (perceptiva, operativa y discursiva) que utilizaron los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

Así, en la Actividad 1 las Dupla A y B realizaron transformaciones semióticas al objeto matemático función exponencial referida a la cantidad de bacterias; de conversión del registro en lengua natural hacia el registro tabular cuando construyeron una tabla de valores en la reproducción de bacterias. Conversión desde el registro tabular hacia el registro algebraico cuando escribieron la representación algebraica de la reproducción de bacterias, en este aspecto, la Dupla B es la que realizó un correcto tratamiento en el registro tabular descubriendo el patrón que apreciaban en la secuencia de valores de la tabla. La Dupla A realizó un tratamiento incompleto al no colocar el primer término como $3 \cdot 2^0$. Consideramos que es conveniente que los estudiantes interioricen que la identificación de un patrón pasa por representar adecuadamente cada término para identificar dicha regularidad. Ambas duplas realizaron la conversión desde el registro algebraico al RGD para reconocer el dominio y rango de la función cantidad de bacterias, asimismo, realizaron tratamientos con deslizador y modificaciones de tipo óptico y posicional para generalizar su respuesta. Además, ambas duplas mostraron desarrollo en sus aprehensiones perceptiva y operatoria pero solo la Dupla B mostró desarrollo también en su aprehensión discursiva cuando reconoció claramente los límites tanto en el dominio como en el rango. En la pregunta 2c, solo la Dupla B realizó correctamente la representación gráfica de la función exponencial referida a la cantidad de bacterias durante las 5 primeras horas. En la pregunta 3, ambas duplas lograron realizar la conversión desde el registro gráfico hasta el registro algebraico identificando claramente los elementos que componen a tal representación hasta los 2,5 años.

En la Actividad 2, preguntas 1a y 1b, ambas duplas realizaron la conversión desde el registro algebraico al registro gráfico-dinámico cuando ingresaron la representación algebraica de la cantidad de bacterias a GeoGebra en línea produciéndose la representación gráfica. De igual forma, ambas duplas realizaron tratamientos en la representación gráfico-dinámica para reconocer características de presencia o ausencia de la función exponencial según los valores de la base b. En cuanto al desarrollo de las aprehensiones perceptiva y operatoria, la Dupla A presentó dificultades para responder ambas preguntas dado que no logra reconocer una función creciente o decreciente, una función constante además del poco manejo algebraico para interpretar situaciones gráficas. En tal sentido, el docente-investigador tuvo que hacer precisiones en relación a estos puntos al finalizar la actividad lo que ayudó a la Dupla A en la mejora del desarrollo de sus aprehensiones. Por otro lado, la Dupla B demostró desarrollo en sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva. En la pregunta 2, ambas duplas realizaron correctamente la conversión desde el registro de lengua natural hacia el registro algebraico al escribir a lápiz y papel la representación algebraica que corresponde a cada población de dos regiones de China. Según Duval (2012), para lograr la comprensión de un objeto matemático, es requisito por lo menos de la conversión de dos registros de representación. Sólo la Dupla A realizó correctamente la conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico. La Dupla B no hizo correctamente la representación gráfica de la función exponencial que corresponde al modelo de las poblaciones de dos regiones de China porque le faltó rotular los ejes adecuándolo al contexto. Sin embargo, demostró rotular correctamente los ejes en el contexto del crecimiento de bacterias. Creemos que es necesario reafirmar en los estudiantes la importancia de atender la rotulación de ejes según el contexto de la situación.

Al cumplir con los objetivos específicos de la investigación, podemos afirmar que se ha logrado alcanzar el objetivo general:

Analizar cómo estudiantes de quinto de secundaria comprenden la noción de función exponencial con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

Hemos analizado el desarrollo de las actividades realizando, como lo menciona Artigue et al. (1995), la validación; la contrastación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori de las actividades en conformidad con el método de la Ingeniería Didáctica.

Es por ello que, al cumplir con el objetivo general de la investigación, hemos logrado responder a nuestra pregunta de investigación:

¿Cómo comprenden los estudiantes de quinto de secundaria la noción de función exponencial con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica?

Así, hemos logrado conocer cómo los estudiantes de quinto de secundaria del programa del Bachillerato Internacional comprenden la noción de función exponencial con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica reconociendo tratamientos, conversiones en los registros de lengua natural, registro algebraico, registro gráfico, complementando este estudio con las aprehensiones en el registro gráfico y RGD.

Perspectivas Futuras

Una de las características presentadas en el desarrollo de la parte experimental es relacionada a la dificultad que presentaron las duplas en diferenciar por medio de su aprehensión perceptiva las funciones de las ecuaciones matemáticas. En la actividad 2, por ejemplo, los estudiantes agrupados por duplas, no reconocieron a través de su aprehensión perceptiva a la función constante en la Vista Gráfica de GeoGebra, cuando se presentó la función de la forma $C(x) = 4 \cdot 1^x$, donde $b = 1$, solo la mencionaron como una recta horizontal (lo que hace referencia a la ecuación de una recta lineal o afín). De igual modo, cuando tuvieron que utilizar su aprehensión perceptiva para reconocer en la Vista Gráfica la existencia de la función exponencial de la expresión $C(x) = 4 \cdot 0^x$, GeoGebra en línea la mostraba como una semirrecta vertical, lo cual evidentemente es una limitación de GeoGebra dado que, la función que debe aparecer es una función constante $C(x) = 0$, para $x > 0$. De igual manera, al hacer uso de su aprehensión operatoria, las duplas tuvieron que utilizar muchas veces modificaciones de tipo óptico (alejando o acercando los ejes coordenados) y de tipo posicional de traslación (moviendo los ejes coordenados) para observar si aparece o no la función exponencial para cierto valor de b en la expresión $C(x) = 4b^x$.

Consideramos que en investigaciones que puedan realizarse en adelante en relación al uso de funciones, es importante considerar realizar actividades previas que permitan a los estudiantes reconocer aspectos de representación gráfica y representación algebraica y la conversión entre los registros gráfico y algebraico en ambos sentidos de forma tal que, el estudiante logre familiarizarse con ello y tenga la capacidad de comprobar analíticamente por medio de tratamientos en la representación algebraica, si la representación gráfica es la que corresponde a determinada representación algebraica. Además, sería importante añadir una revisión y ampliación del uso de diversas herramientas en GeoGebra en línea donde hagan uso de situaciones referidas al campo de las funciones y las ecuaciones para lograr ampliar sus conocimientos y lograr mayor intensidad en el desarrollo de su aprehensión operatoria, lo que finalmente redundará también en aumentar el desarrollo de su aprehensión discursiva a través de las conjeturas y razonamientos que se puedan presentar.

La presente investigación se abordó para estudiantes de quinto de secundaria del Programa del Bachillerato Internacional en el curso de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación Nivel Medio. Dado que nuestros antecedentes dan cuenta que este objeto matemático también es utilizado por estudiantes de nivel superior, sería interesante realizar una investigación que haga un contraste entre estos dos niveles de educación de manera que se pueda rescatar acciones que pueda tomar el docente para proveer de aprendizajes que permitan logros en la comprensión que va más allá de la noción de función exponencial. Asimismo, creemos que es importante abordar otros objetos matemáticos relacionados a funciones: la función logaritmo, por ejemplo. Por último, consideramos que es pertinente realizar un estudio de la comprensión de la función exponencial dirigido a docentes del nivel secundaria, dado que ellos son los que mediante sus metodologías y concepciones enseñan este objeto matemático y es importante conocer reflexivamente ello.

Dada la revisión del texto de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación Nivel Medio, que utilizan los estudiantes del Programa del Bachillerato Internacional, damos cuenta que se privilegia el uso del registro algebraico al abordar el concepto de función exponencial, destacando el uso de problemas de contexto extramatemático como apoyo para su comprensión. Creemos importante que los estudiantes puedan realizar conversiones por ejemplo no solo del registro de lengua natural al registro algebraico, sino también en el sentido inverso. De igual manera, no solo realizar la conversión del registro algebraico al registro gráfico, sino también en el sentido inverso. Esto es importante, dado que los estudiantes de quinto de secundaria se encuentran ya al término de sus estudios en la Educación Básica Regular y en los estudios de Educación Superior Universitaria, se les exige una comprensión muy fluida respecto de la actividad matemática relacionada a las funciones y en particular el de la función exponencial.

Finalmente, del párrafo anterior se desprende la importancia de realizar estudios sobre los textos de matemática o las fichas de trabajo que se usan en las instituciones educativas para el aprendizaje del objeto matemático función exponencial. Así, el análisis de material de trabajo en las instituciones educativas nos daría información de la forma en que se viene impartiendo la enseñanza de este concepto, asumiendo una postura reflexiva y crítica para la mejora de los aprendizajes.

REFERENCIAS

Alvarez, L. (2017). *Comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas, desde los registros de representación semiótica con la asistencia de entornos virtuales de aprendizaje en estudiantes de primer semestre de la Universidad Tecnológica de Pereira.* [Tesis de maestría, Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia]. Repositorio Institucional de la Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia. https://hdl.handle.net/11059/8295

Apóstol (2001). *Calculus. Volumen I. Calculo con funciones de una variable y una introducción al algebra lineal.* Editorial Reverte.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica. http://hdl.handle.net/1992/40560

Boyer, C. B. y Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics. New Jersey:* John Wiley & Sons, Inc.

Brandt, C., Moretti, M. y Lopes, F. (2018). O desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em geometría Segundo Raymond Duval: uma articulação com o ambiente dinâmico GeoGebra. *Olhar de Professor, 21(*1),98-115. ISSN: 15185648. https://doi.org/10.5212/OlharProfr.v.21i1.0008

Borba, M. y Araújo, J. (2004). A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica. http://www1.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf

Campo, K. y García, J. (2020). Explorando las conexiones matemáticas asociadas a la función exponencial y logarítmica en estudiantes universitarios colombianos. *Educación Matemática. 32*(3). 209-240. https://doi.org/10.24844/em3203.08

Cano, J. (2012). *La definición del concepto de función bajo el enfoque de la enseñanza para la comprensión en estudiantes de grado 11 de una Institución educativa oficial de Medellín*. [Tesis maestría]. Universidad de Antioquia. Medellín. Colombia. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/7497/1/JhonyCano_2012_conceptofuncion.pdf

Chacón, A. (2017). *Función lineal: una aproximación por medio de los registros de representaciones semióticas con estudiantes de nivel secundario.* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional de la Pontifica Universidad Católica del Perú. http://hdl.handle.net/20.500.12404/9756

Chang, J., Doering, S., Forrest, J., Harris, D., Stoyanova, N. y Waldman, P. (2019). *Mathematics: Applications and Interpretation.* Standard Level. Oxford.

Corefo (2018). *Matemática 5.* Lima-Perú. Corefo.

Díaz, D. (2021). *Propuesta didáctica sobre el concepto de función con base en las transformaciones semióticas para quinto de secundaria.* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional de la Pontifica Universidad Católica del Perú. http://hdl.handle.net/20.500.12404/21441

Díaz-Berrios, T. y Martínez-Planell, R. (2022). High school student understanding of exponential and logarithmic functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *66*, 100953. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100953

Duval, R. (1995). *Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings.* Université Louis Pasteur, I.R.E.M. de Strasbourg, pp. 142-157.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Universidad del Valle.

Duval, R. (2006) Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1984436

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat*, *7*(2), 266-297. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer International Publishing, pp 28-43. https://extras.springer.com/?query=978-3-319-56909-3

Elstak, I. (2007). *College students' understanding of rational exponents: A teaching.* [Tesis doctoral] The Ohio State University, USA.

https://etd.ohiolink.edu/acprod/odb_etd/ws/send_file/send?accession=osu1186505864&disposition=inline

Flores, R. (2019). *Construcción de la función exponencial con estudiantes de quinto de secundaria por medio de situaciones didácticas* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional de la Pontifica Universidad católica del Perú. http://hdl.handle.net/20.500.12404/14603

Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de las gráficas. El caso de la parábola. *Revista EMA*. *6*(2), pp. 180-200.

Freitas, R. L. (2015). *A influência de organizações didáticas no trabalho matemático dos estagiários da licenciatura: um estudo da função exponencial*. [Tesis de Maestría, Pontificia Universidade Catolica de São Paulo]. https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11041

García-Cuéllar, D. y Martínez-Miraval, M. (2018). Estudio del proceso de génesis instrumental del artefacto simbólico función exponencial. *Transformación, 14*(2), 252-261. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2077-29552018000200010&lng=es&tlng=es

García-Cuéllar, D. y Martínez-Miraval, M. (2020). Estudio de la función exponencial mediado por el GeoGebra para Tablet. *Avances en Matemática Educativa. Diagnósticos y Estudios en el Aula.* 110-130. https://www.researchgate.net/publication/342764112_ESTUDIO_DE_LA_FUNCION_EXPONENCIAL_MEDIADO_POR_EL_GEOGEBRA_PARA_TABLET

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed.). Editorial McGraw-Hill. https://www.esup.edu.pe/wp-content/uploads/2020/12/2.%20Hernandez,%20Fernandez%20y%20Baptista-Metodolog%C3%ADa%20Investigacion%20Cientifica%206ta%20ed.pdf

Ingar, K. V. (2014). *A Visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais*. [Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica de São Paulo]. Repositorio de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo. https://repositorio.pucsp.br/bitstream/handle/11013/1/Katia%20Vigo%20Ingar.pdf

Jiménez, J. y Jiménez, I. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista electrónica sobre tecnología, educación y sociedad, 4*(7). https://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654

Maor, E. (2008). E: A história de um número. Tradução Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record.

MINEDU (2016a). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/4551

MINEDU (2016b). *Programa Curricular de Educación Secundaria*. https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/4550

Peñaloza, T. y Salazar, J. V. F. (2018). Aprehensiones y modificaciones en el registro gráfico-dinámico del paraboloide elíptico. *Educação Matemática Pesquisa, 20*(1), pp. 61-83. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/34170/pdf

Portugal, M. (2015). *El cubo y sus elementos: una secuencia didáctica basada en el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes del cuarto grado de educación primaria*. [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional de la Pontifica Universidad católica del Perú. http://hdl.handle.net/20.500.12404/6782

Rossini, R (2006). *Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias.* [Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica de São Paulo]. Repositorio de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo. https://ariel.pucsp.br/jspui/bitstream/handle/11099/1/Renata%20Rossini.pdf

Salazar, J. V. F. y Almouloud, S. A. (2015) *Registro figural no ambiente de geometría 132inámica Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, Brasil, p. 927–932.*

Sawalha, Y. (2018). The Effects Of Teaching Exponential Functions Using Authentic Problem Solving On Students' Achievement And Attitude. [Tesis Doctoral, Wayne State University]. Repositorio de la Wayne State University. https://digitalcommons.wayne.edu/oa_dissertations/1959

Spivak (1967). *Calculo infinitesimal, Segunda Edición.* Editorial Reverte.

Sureda, P. (2012). Enseñanza de las Funciones Exponenciales en la Escuela Secundaria. Aspectos Didácticos y Cognitivos. Enseñanza de las Ciencias. *Revista de investigación y experiencias didácticas, 30*(3), 321-326.

Tarira, C., Parra-Sandoval, H. y Delgado, M. (2020). Procesos de enseñanza de la función exponencial. Un acercamiento cualitativo. *Revista Científica UISRAEL, 7*(3), 37–50. https://doi.org/10.35290/rcui.v7n3.2020.303

Toledo, L. A. D. (2018). *Ensino da função exponencial: análise de resultados*. [Tesis de maestría, Universidade Estadual Paulista “Julio de Mequita Filho”]. Repositorio institucional de la Universidade Estadual Paulista “Julio de Mequita Filho”. https://repositorio.unesp.br/items/786efd7c-8be8-4867-ab93-bbc0c5e04ad3

Villa-Ochoa, J. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación, 8*(16),133-148. ISSN: 2027-1174. https://www.redalyc.org/pdf/2810/281042327008.pdf

ANEXOS

ACTIVIDAD 1

APELLIDOS Y NOMBRE(S):		GRADO/ AÑO:	11° A B C
		FECHA:	__ /__ / 23

Construcción de la función $f(x) = A.b^x$- Dominio y rango

1. En un laboratorio de biología celular, se encontró un grupo de bacterias cuya reproducción se caracteriza porque después de cada hora resulta ser el doble de la cantidad que había la hora anterior. Si inicialmente se encontraron 3 bacterias.
   a) En la tabla siguiente exprese la cantidad de bacterias que hay después de cada hora transcurrida.

Tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de bacterias								

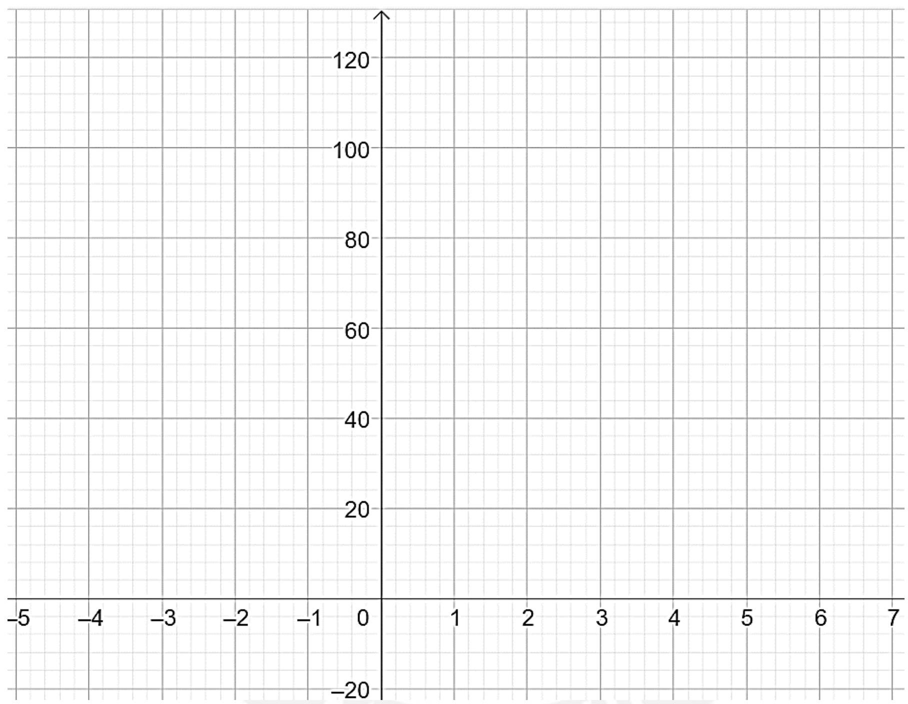
   b) Escribe la secuencia de la cantidad de bacterias de la tabla anterior en función del factor 2.

   c) Escriba una expresión algebraica de la forma $f(x) = A \cdot b^x$ que relacione la cantidad de bacterias que se reproducen en función al tiempo transcurrido por hora. ¿Qué representan A y b en el contexto de la situación?

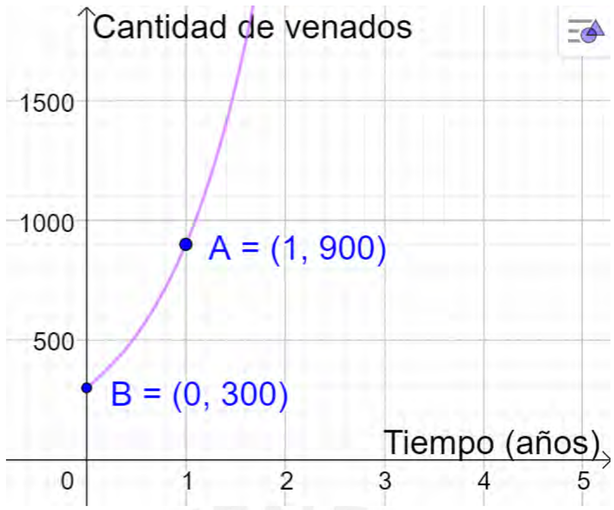
2. Abra GeoGebra en Línea (www.geogebra.org/classic) e ingrese la expresión matemática que escribió sobre el crecimiento de bacterias en el tiempo.
   a) Tomando en cuenta que el crecimiento de bacterias es limitado, ¿es posible que la variable ***tiempo*** tome todos los valores del eje horizontal que se observan en la gráfica?, ¿por qué?

b) Tomando en cuenta que el crecimiento de bacterias es limitado, ¿es posible que la variable ***cantidad de bacterias*** tome todos los valores que se observan a lo largo del eje vertical?, ¿por qué?

c) Con lo abordado, esboce en la Ficha de Actividades la representación gráfica de la función exponencial para la reproducción de bacterias durante las primeras 5 horas, sea lo más preciso posible.



3. En una región de África, la cantidad de venados se encuentra en aumento debido al alejamiento de los depredadores y de la prohibición para cazarlos. Un biólogo mostró el crecimiento por año a través de la siguiente gráfica. Escriba la expresión algebraica acompañado de su dominio, que represente el modelo exponencial que mide el crecimiento de los venados hasta los 2,5 años.



ACTIVIDAD 2

APELLIDOS Y NOMBRE(S):		GRADO/ AÑO:	11° A B C
		FECHA:	__ /__ / 23

Valores de b – Monotonía de la función

1. Abre el siguiente enlace https://www.geogebra.org/classic/p9uuzn93
   a) Mueva el deslizador que representa la base $\boldsymbol{b}$ de la función $C(x) = 4b^x$. Exprese qué sucede con la representación gráfica de la función exponencial cuando:
   i) $\boldsymbol{b}$ tiene valores positivos.
   ii) $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$.
   iii) $\boldsymbol{b}$ tiene valores negativos.
   iv) $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.
   v) Finalmente ¿entre qué valores se encontraría $\boldsymbol{b}$ para que la función exponencial exista?

   b) Para cualquiera de los valores de $\boldsymbol{b}$ que corresponden a una función exponencial encontrados en la parte 1av), ¿cambia $C(0)$? Explique.

2. En determinada región de China se realizó un primer censo y se determinó una población de 1 000 personas, con los censos siguientes, este número se ha ido duplicando por año dado que hubo una baja en las campañas de planificación familiar. En otra región, por el contrario, en el primer censo se contó 64 000 personas, para los siguientes censos se observó que este número baja a la mitad con respecto al año anterior, ello debido al Covid-19 que azotó dicha región. Este comportamiento para ambas regiones se ha mantenido hasta los primeros 6 años. Representa de forma algebraica y luego, en la cuadrícula de forma gráfica los modelos de crecimiento y decrecimiento que se observó en cada población.