

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



Aplicación del análisis de simetrías parciales en la restauración
de objetos arqueológicos

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Informática con
mención en Ciencias de la Computación que presenta:

Carlos Enrique Pérez Sinticala

Asesor:

César Armando Beltrán Castañón

Lima, 2023


Informe de Similitud

Yo, **César Beltrán BELTRÁN CASTAÑÓN**, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulada “Aplicación del análisis de simetrías parciales en la restauración de objetos arqueológicos”, del autor **Carlos Enrique PÉREZ SINTICALA**, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de **16%**. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el **28/11/2023**.
- He revisado con detalle dicho reporte y la tesis y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 28 de noviembre del 2023.

Apellidos y nombres del asesor: BELTRÁN CASTAÑÓN, César Armando	
DNI: 29561260	
ORCID: 0000-0002-0173-4140	
	Firma

Agradecimientos.

Este trabajo fue desarrollado dentro del marco del proyecto 062-218-FONDECYT-BM-IADT-AV, recibiendo el soporte científico de los miembros del equipo investigador.



Resumen

La restauración de objetos es una tarea crucial en el ámbito de la reconstrucción tridimensional de objetos dentro del campo de la computación gráfica. En el caso de los objetos arqueológicos, esta labor adquiere una gran relevancia debido a la inmensa riqueza cultural que posee el Perú. Las muestras obtenidas suelen presentar imperfecciones por el deterioro inherente al paso del tiempo o por procesos de fragmentación y su restauración manual por usuarios expertos, que ha sido una práctica común, es costosa y poco eficiente, lo que hace necesario contar con métodos automáticos de restauración digital.

En general, los procesos de restauración de objetos pueden ser divididos en dos categorías: los que completan objetos usando otros objetos como referencia y los que analizan el propio objeto, buscando detectar características repetitivas en el mismo. En esa segunda categoría, el análisis de simetrías es una de las principales técnicas de reconocimiento de patrones, los que serán expresados como transformaciones geométricas que al aplicarse permitirán completar los fragmentos perdidos.

La presente tesis propone un algoritmo de detección de simetrías aproximadas parciales basado en propiedades diferenciales de la superficie del objeto tridimensional, representado por una malla de triángulos. Sobre la base de las simetrías detectadas, se propone un algoritmo de refinamiento, para luego proceder con el completado del objeto.

La evaluación del algoritmo comprende el uso de objetos tridimensionales de los que se extrae los parámetros de las simetrías para medir su distancia con la simetría calculada por el algoritmo y la localización geométrica de sus vértices para, luego de simular una fractura retirando una porción del objeto, medir la congruencia del proceso de completado de la geometría faltante. Estos valores de congruencia del algoritmo propuesto son óptimos en la comparación con otros trabajos recientes del estado del arte.

Índice General

Agradecimientos	I
Resumen.....	II
1. Introducción	1
1.1. Problemática	1
1.2. Objetivos de la investigación.....	2
1.2.1. Objetivo general	2
1.2.2. Objetivos específicos.....	2
1.2.3. Justificación	2
1.2.4. Alcance.....	3
1.2.5. Limitaciones.....	3
1.3. Organización del Texto	3
2. Marco Teórico	4
2.1. Transformaciones Geométricas rígidas.....	4
2.2. Simetrías en objetos 3D.	4
2.2.1. Clasificación por la exactitud de la transformación.	5
2.2.2. Clasificación por el dominio de la transformación.....	6
2.2.3. Clasificación por la naturaleza de la medida de distancias.	6
2.2.4. Clasificación por aplicabilidad de la transformación.....	7
3. Revisión del Estado del Arte.....	9
3.1. Detección de simetrías parciales y aproximadas.	9
3.1.1. Votación en el espacio de transformaciones.	10
3.1.2. Detección de simetrías usando Líneas características.	11
3.1.3. Symmetry Factored Embedding (SFE).	12
3.1.4. Heat Kernel Signature.....	13
3.1.5. Problema de optimización restringida.	14
3.2. Completado por datos y Deep Learning.....	14
4. Descripción del método propuesto.....	16
4.1. Detección de clusters – simetrías de reflexión.	18
4.2. Detección de clusters – simetrías de rotación continua.....	20
4.3. Refinamiento y reconstrucción de objetos.	21
5. Experimentación y resultados.....	24

6. Conclusiones y Trabajos futuros.....	28
6.1. Limitaciones.....	28
6.2. Trabajos futuros.	28
6.3. Conclusión.	28
Bibliografía.....	30



Capítulo 1

1. Introducción

La simetría es una característica potencialmente muy útil que exhiben muchos objetos en el mundo real. Un objeto presenta simetría si existe una operación (rotación, reflexión, etc.) que mapea el objeto sobre sí mismo, es decir, el objeto es invariante bajo la transformación dada. La información sobre simetría en un objeto es útil en una variedad de aplicaciones, como compresión, edición simétrica y reconstrucción de objetos incompletos. En este último caso, rellenando las partes extraviadas usando la información de las contrapartes simétricas. No obstante, para cualquier objeto tridimensional, la información simétrica no es conocida anticipadamente y necesita primero ser extraída lo que significa que la simetría necesita primero ser detectada, preferiblemente de modo automático por una computadora. Esta es la tarea en la que nos enfocamos en este trabajo, la detección automática de simetrías, creando algoritmos que puedan ser usados para encontrar automáticamente simetrías en objetos geométricos. Es una tarea compleja, pues no existe la simetría perfecta en objetos del mundo real y no existe un método estricto para que una computadora decida si una transformación captura o no una simetría aproximada.

La detección de simetrías aproximadas tiene como meta encontrar simetrías que luzcan naturales al ojo humano. Las simetrías en objetos reales y en particular, en el caso de la representación tridimensional de objetos arqueológicos obtenidos mediante por fotogrametría o usando un escáner 3D, no son perfectas.

En computación gráfica, encontrar transformaciones simétricas en objetos tridimensionales con partes extraviadas es una de los desafíos más importantes en el campo de detección de simetrías [20]. Existen diversos tipos de simetría, tal como simetría respecto a un plano o simetría rotacional respecto a una línea eje y los objetos pueden tener formas variadas. Estos objetos pueden también estar dañados en diferentes formas, como por ruido o por haber extraviado algunas partes. Incluso los métodos que se especializan en detectar simetrías de un tipo pueden fallar al usarse en otros tipos de objetos o al analizar objetos dañados en cierta forma. Algunos métodos trabajan solamente con específicas representaciones de objetos (nube de puntos, malla, datos volumétricos) y otros consumen mucho tiempo. En muchos casos, el objeto presenta simetría parcial en lugar de global, por lo que solamente partes de un objeto son simétricas en lugar de todo el objeto. Aunque existen ya varios métodos para la detección de simetrías en objetos tridimensionales, aún hay espacio para mejoras en este campo.

1.1. Problemática

La digitalización de objetos arqueológicos es una herramienta importante en el sector cultural, pues permite preservarlos digitalmente, evitar mayores daños del objeto real por manipulación y permitir su acceso virtual e interactivo ante una audiencia más grande [2,13]. En particular, en el sector cultural del Perú es útil para crear entornos virtuales de aprendizaje de nuestra historia precolombina y como soporte a investigaciones arqueológicas futuras [32].

La digitalización de objetos arqueológicos está siendo cada vez más aplicada gracias a los recientes avances en tecnologías de recolección y procesamiento de objetos 3D. Estos avances tecnológicos también implican una necesidad de métodos de procesamiento inteligente que puedan lidiar con imperfecciones en el escaneo de objetos y, específicamente para objetos arqueológicos, con las imperfecciones en los objetos originales debido al deterioro o procesos de fragmentación [24].

Entre las diferentes aplicaciones, la restauración de objetos es de gran relevancia en la investigación arqueológica. La restauración manual por usuarios expertos ha sido una práctica común, pero se trata de un proceso lento y propenso a errores, lo que implica la necesidad de implementar técnicas de restauración digital que puedan procesar muestras con ruido e imperfecciones.

La restauración de objetos de patrimonio cultural puede ser entendida como un problema de completado de figuras, que consiste en predecir la forma geométrica de un objeto a partir de una observación parcial. La solución a ese problema suele asumir supuestos para limitar la búsqueda de salidas factibles. Una estrategia comúnmente adaptada en trabajos previos es el análisis de auto-similitud, que estudia la estructura del objeto buscando información para el proceso de completado. En este contexto, la detección de simetrías en el objeto puede ser usada para reproducir la información faltante de objetos aproximadamente simétricos.

1.2. Objetivos de la investigación.

1.2.1. Objetivo general

Desarrollar un algoritmo basado en la detección de simetrías en objetos tridimensionales que permita la reconstrucción digital de objetos arqueológicos deteriorados y con partes extraviadas. Este algoritmo debe ser competitivo respecto al estado del arte en términos de tiempo de ejecución y superficie reconstruida, independiente de parámetros establecidos manualmente y aplicable a los diferentes modelos de cerámicas del Perú precolombino.

1.2.2. Objetivos específicos

- Implementar un algoritmo que permita detectar la simetría extrínseca y aproximada de un objeto tridimensional incompleto. El método debe ser útil para las características particulares de los objetos arqueológicos.
- Sobre la base de las simetrías detectadas, proponer un método de completado de modelos tridimensionales, que preserve la geometría original y realice predicciones sobre la superficie faltante.
- Evaluar la eficiencia del algoritmo en la detección de simetrías y completado de objetos contra otros métodos existentes en el estado del Arte.

1.2.3. Justificación

La implementación del algoritmo permitirá la reconstrucción digital automática de objetos arqueológicos deteriorados y con partes extraviadas. Éstos pasarán posteriormente a catálogos digitales que permitan al público su exploración virtual y así propiciar un mayor interés en la historia y el patrimonio cultural.

1.2.4. Alcance.

El trabajo comprende el desarrollo del algoritmo de detección de simetrías y completado de objetos sobre la base de las simetrías detectadas. No incluye proponer modificaciones al proceso de digitalización de los objetos ni el completado del objeto usando herramientas distintas al análisis de simetrías.

1.2.5. Limitaciones.

El proceso de digitalización consistió en colocar los objetos arqueológicos sobre un plato giratorio para tomar las vistas. Sus resultados fueron afectados pues capturar la base de los objetos, que están en contacto con el plato, fue imposible.

El análisis de simetrías propuesto parte del supuesto de que los objetos arqueológicos del Perú precolombino comprenden esculturas que presentan simetría reflexiva y objetos de uso diario que presentan simetría parcial axial, pues suelen incluir asas y ornamentos. Por esta razón, el presente trabajo examinará estos dos tipos de simetría.

El algoritmo propuesto analiza mallas de triángulos, por lo que comparación del algoritmo propuesto requirió buscar artículos que usen como base de datos a mallas de triángulos o nubes de puntos que puedan ser convertidos a mallas.

La gran mayoría de los artículos publicados en la revisión sistemática no tenía el código disponible, por lo que la comparación con el algoritmo propuesto usó los datos y las métricas definidas en los mismos artículos seleccionados para la comparación.

1.3. Organización del Texto

El presente trabajo está organizado de la siguiente forma: el Capítulo 2 provee el marco teórico básico para el desarrollo del trabajo, incluyendo la definición de simetría en datos geométricos y la descripción de los diferentes tipos de simetría en las diferentes formas de clasificación.

En el Capítulo 3 se realiza una revisión sistemática orientada de los métodos propuestos para la detección de simetrías y su uso en la reconstrucción de objetos arqueológicos. Describiremos el trabajo previo en el campo, por lo que discutiremos las ventajas y desventajas de su aplicación en el problema.

En el Capítulo 4 describiremos nuestra propia contribución, un nuevo método de detección de simetrías de reflexión y rotación, construido como parte de este trabajo, indicando también su aplicación en la reconstrucción digital de objetos. También detallaremos el método propuesto para completar objetos tridimensionales. En el Capítulo 5 describiremos los resultados obtenidos al aplicar el método propuesto. Estos resultados serán comparados con los de otros métodos existentes. Finalmente, en el Capítulo 6 serán mostradas las conclusiones de la presente tesis y describiremos propuestas de trabajo futuro en el campo de detección de simetrías y restauración de objetos.

Capítulo 2

2. Marco Teórico

2.1. Transformaciones Geométricas rígidas.

Las transformaciones geométricas rígidas son operaciones realizadas en un conjunto de puntos que no cambian el tamaño ni la forma de una figura y mantienen la distancia euclidiana entre dos puntos. Constan de reflexiones, traslaciones, rotaciones o combinaciones de éstas [1], como se muestra en los ejemplos en 2 dimensiones de la Figura 1. Dado un objeto geométrico M en el que cada punto o vértice es expresado como un vector v , podemos afirmar que las transformaciones geométricas $T(M)$ pueden ser expresadas en términos de multiplicación de una matriz por cada vector v , productos vectoriales y sumas de vectores.

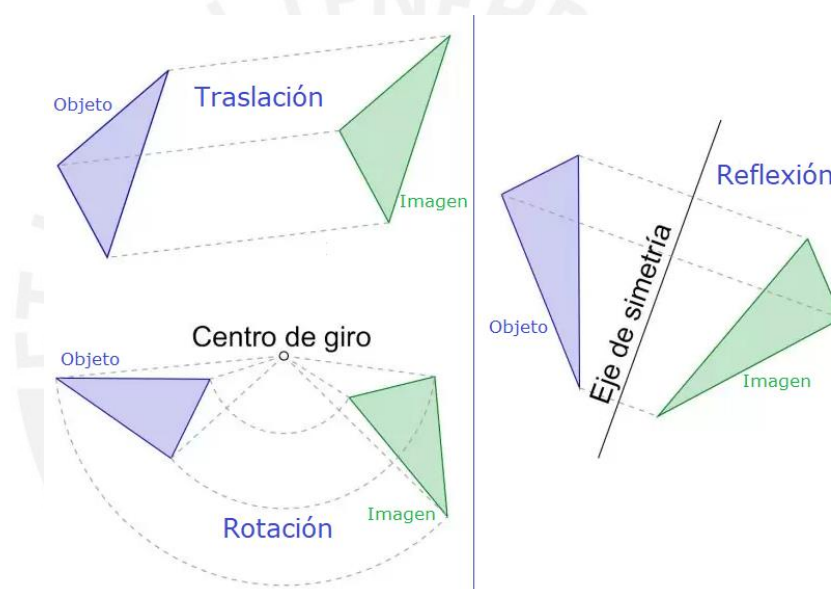


Figura 1. Transformaciones geométricas en dos dimensiones.

La definición de transformación geométrica incluye a la transformación trivial, que puede ser expresada como una función equivalente a la multiplicación por una matriz diagonal.

2.2. Simetrías en objetos 3D.

La simetría es un concepto universal en la naturaleza, la ciencia y el arte. En el mundo físico, las simetrías geométricas y regularidad estructural se producen en todas las escalas, desde redes cristalinas y nanoestructuras de carbono hasta en el cuerpo humano, los artefactos arquitectónicos, y la formación de las galaxias. Muchos procesos bioquímicos se rigen por la simetría y, como resultado, nos encontramos ante una gran cantidad de estructuras biológicas que exhiben fuertes patrones de regularidad. Esta abundancia de simetría en el mundo natural ha inspirado a la humanidad desde sus orígenes para incorporar la simetría en el diseño de herramientas, edificios y obras de arte. Además de consideraciones estéticas, los principios físicos de optimización y la búsqueda de la eficiencia en manufactura frecuentemente conducen a diseños simétricos en ingeniería y arquitectura. [1]

Hablando en términos generales, una simetría o invariancia conserva una cierta propiedad (por ejemplo, la similitud geométrica) de un objeto bajo alguna operación aplicada al objeto. Se dice que un objeto geométrico M es simétrico con respecto a una transformación no trivial T , si $M = T(M)$, es decir, M es invariante bajo la acción de la transformación T .

Existen diferentes clasificaciones de simetrías. Conocerlas nos permitirá una mejor comprensión del problema y facilitará la revisión del estado del arte.

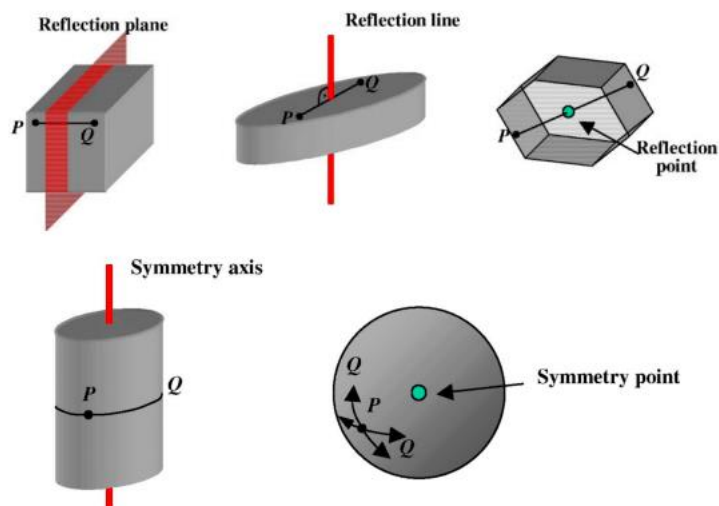


Figura 2. Simetrías de reflexión (arriba), axial y esférica (abajo). Tomado de Thrun et al.[34]

2.2.1. Clasificación por la exactitud de la transformación.

Se dice que un objeto geométrico M presenta una **simetría exacta** con respecto a una transformación T si esta cumple con la restricción de estricta igualdad impuesta por la definición de simetría usada en 2.2. En otros términos, un objeto M presenta una simetría aproximada con respecto a una transformación T si $d(M, T(M)) = 0$, bajo cierta métrica de distancia d .

En realidad, muy pocos objetos naturales o manufacturados exhiben una simetría perfecta que sigue a esta definición muy estricta; la mayoría de las veces, se observan desviaciones de una transformación de simetría exacta. No obstante, se puede encontrar fuertes patrones de regularidad que son cercanos a simetrías ideales.

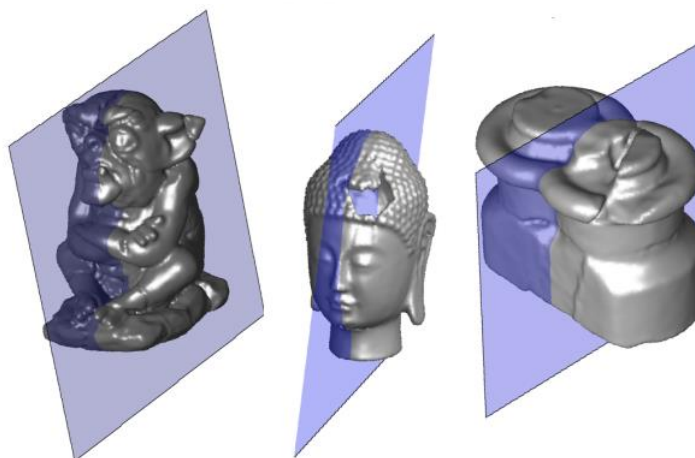


Figura 3. Planos de simetría de reflexión aproximada detectados. Tomado de Sipirán et al.[10]

Al necesitar una definición más general, que abarque casos de **simetría aproximada**, introducimos una función de distancia $d(X, Y)$, donde X e Y son objetos 3D. Empleando esta definición, podemos afirmar que un objeto M presenta una simetría aproximada con respecto a una transformación T si $d(M, T(M)) \leq \epsilon$.

2.2.2. Clasificación por el dominio de la transformación.

Para la detección de **simetrías globales**, buscamos transformaciones que asignen todo el objeto a sí mismo, es decir, $M = T(M)$. En consecuencia, no tiene que resolver el problema de la segmentación en subconjuntos potencialmente simétricos, lo que simplifica enormemente el proceso de detección de la simetría.

En las simetrías globales de un objeto finito, el centro de gravedad es un punto invariante bajo *transformaciones* de simetría. Por ejemplo, el centro de gravedad es un punto de paso de los ejes de rotación en las simetrías rotacionales continuas o los planos de reflexión en las simetrías de reflexión. Los métodos de detección de simetrías globales explotan esta propiedad para reducir significativamente el espacio de búsqueda.

Aunque cierto número de formas comunes presentan simetrías globales, las similitudes a menudo se producen sólo en partes de una forma. Para capturar estos patrones de regularidad y permitir un análisis detallado de objetos geométricos, consideramos el análisis de **simetrías parciales**, en los que la simetría puede limitarse a un subconjunto $M' \subseteq M$. Específicamente, decimos que una forma M tiene una simetría parcial con respecto a una transformación T si existen un subconjunto $M' \subseteq M$ tal que $T(M') = M'$ y $d(M, T(M)) > \epsilon$. En términos prácticos, las simetrías parciales aproximadas necesitan involucrar una considerable proporción de la superficie del objeto para poder ser detectadas.

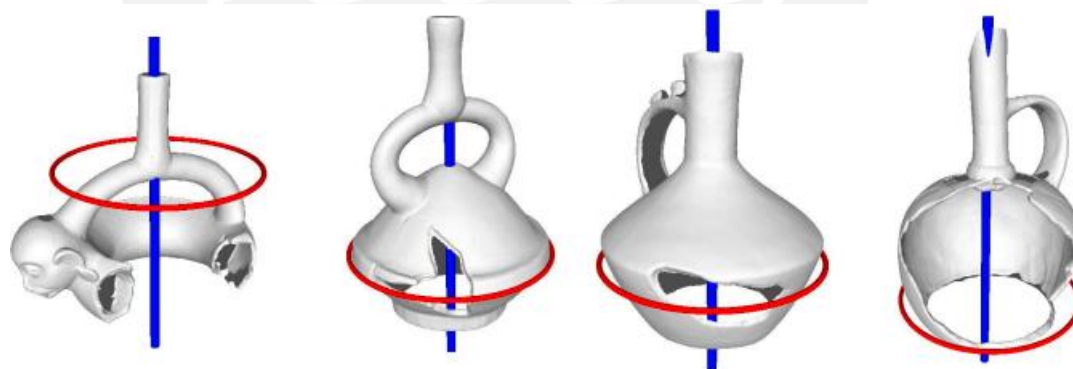


Figura 4. Simetrías de rotación continua parcial. Las asas de los objetos no están dentro de la región que cumple con la condición de la transformación. Tomado de Sipirán et al.[14]

2.2.3. Clasificación por la naturaleza de la medida de distancias.

Otra forma de distinguir los paradigmas de detección de simetría es la manera en la que se mide la distancia. En la mayoría de los casos se analiza la **simetría extrínseca**, que considera la distancia euclidiana entre los puntos. Una transformación extrínseca preserva esta métrica euclidiana en el espacio de la forma 3D. Si p y q dos puntos del objeto M , T es una transformación extrínseca y d es la función de la distancia euclidiana, se debe cumplir la ecuación 1:

$$d(p, q) = d(T(p), T(q)) \quad (1)$$

En ocasiones, sin embargo, se presentan transformaciones no rígidas; por ejemplo, en los cuerpos humanos sometidos a deformaciones isométricas por movimientos articulados, como se muestra en la Figura 5. En estos casos, una medida intrínseca es más apropiada, pues esta mide distancias geodésicas a través de la superficie del cuerpo [42].

Como se indica en [43], si p y q son dos puntos del objeto M , T es una transformación intrínseca y g la función de la distancia geodésica, se debe cumplir la ecuación 2:

$$g(p, q) = g(T(p), T(q)) \quad (2)$$

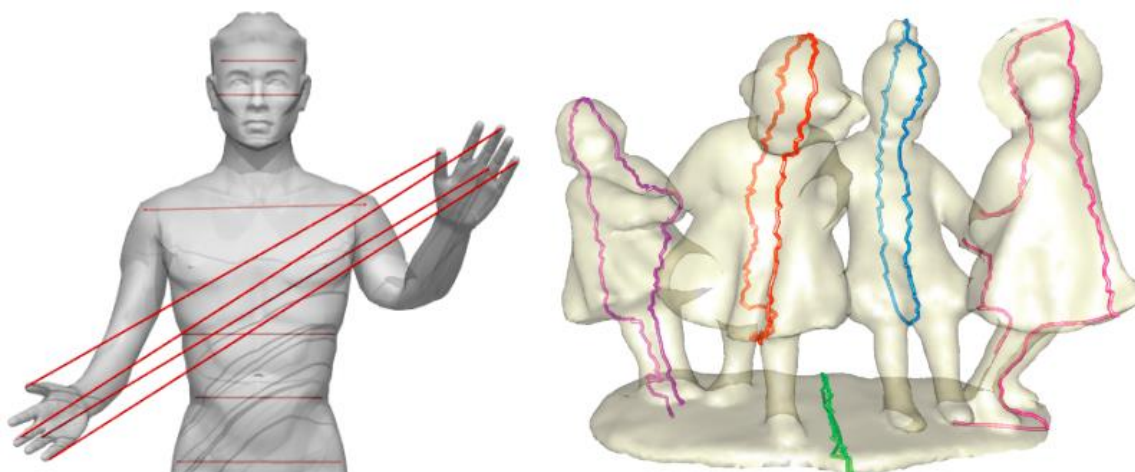


Figura 5. Simetrías intrínsecas [42, 43]. A la izquierda, las correspondencias (representadas por las líneas rectas) no dependen de la posición del objeto. En la figura derecha se resaltan los ejes de simetría detectados.

El análisis de **simetrías intrínsecas** no será incluido en el presente proyecto.

2.2.4. Clasificación por aplicabilidad de la transformación.

Se dice que un objeto M presenta **simetría discreta** con respecto a una transformación T si la cantidad de veces que se puede aplicar T a un objeto M es numerable, como se muestra en la Figura 6, que muestra dos objetos a los que se puede aplicar la transformación detectada 6 y 8 veces, respectivamente.

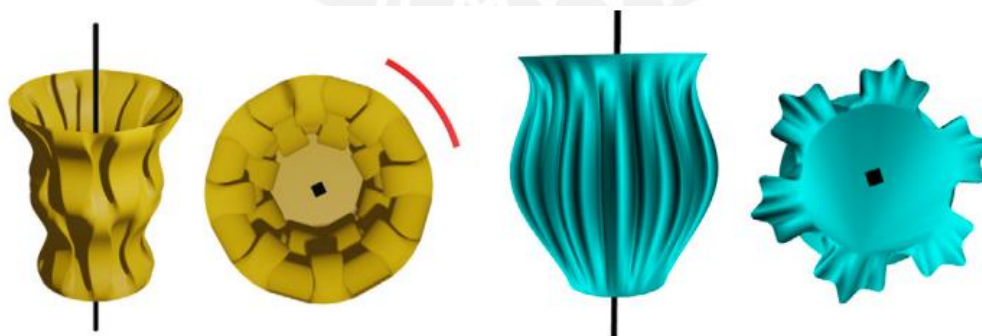


Figura 6. Objetos con simetrías de rotación discreta. A la izquierda, la simetría se cumple para ángulos de rotación múltiplos de 45° . A la derecha, para múltiplos de 60° . Tomada de Hrudá et al.[21]

Por otro lado, se dice que el objeto presenta **simetría continua** respecto a una transformación T si esta puede ser aplicada infinitas veces sobre el objeto, como se muestra en la Figura 4. En estos casos, es preferible que sean representadas por la ecuación del eje de rotación que por la propia función de transformación.

La detección de simetrías es el proceso por el cual encontramos esas transformaciones T que satisfacen la condición dada en un modelo tridimensional. Los datos geométricos son tradicionalmente representados como una colección de primitivas de bajo nivel; por ejemplo, nubes de puntos, mallas poligonales, datos volumétricos, etc., sin codificación explícita de alguna estructura subyacente de alto nivel. Encontrar simetrías es un problema importante en el procesamiento geométrico que ha recibido creciente atención en los últimos años. Numerosas aplicaciones se benefician de la información de simetrías, orientadas principalmente a la correspondencia de formas, la segmentación, la recuperación o la reconstrucción de objetos.



Capítulo 3

3. Revisión del Estado del Arte.

3.1. Detección de simetrías parciales y aproximadas.

Los métodos propuestos para La Tabla 1 muestra los trabajos realizados en detección de simetrías parciales en completado de objetos.

Referencia	Tipo de simetría	Features	Método
Thrun (2005) [3]	Reflexiva y axial	Modelo probabilístico de emparejamiento y oclusión.	Espacio de puntuación de simetrías.
Mitra (2006) [4]	Reflexiva y axial	Curvaturas y direcciones principales.	Votación de transformaciones.
Simari (2006) [5]	Reflexiva	Función distancia.	IRLS y Estimador M.
Pauly (2008) [6]	Reflexiva y rotacional	Curvaturas en porciones locales de superficie.	Votación de conjuntos de similitud.
Bokeloh (2009) [7]	Reflexiva y rotacional	Líneas características.	Clusters de emparejamiento, ICL y RANSAC.
Lipman (2010) [8]	Reflexiva y rotacional	Matriz de correspondencia entre simetrías.	Factorización de simetrías y análisis espectral.
Son (2013) [9]	Axial	Capas coplanares de puntos para ejes hipotéticos.	RANSAC.
Sipirán (2014) [10]	Reflexiva	Función de difusión de calor en dominios locales.	Votación y análisis de consistencia.
Mavridis (2015) [11]	Reflexiva y rotacional	Máxima dispersión de vectores de distancia residual.	Optimización restringida y RANSAC.
Shi (2016) [12]	Rotacional	Matrices de transformaciones como grupos de Lie	Votación por álgebra de Lie y RANSAC.
Li (2016) [45]	Reflexiva	Coordenadas en modelo PCA continuo.	Distribución de los valores de entropía por puntos de vista.
Sipirán (2017) [14]	Axial	Función de difusión de calor en dominios locales.	Votación y RANSAC.
Ji (2019) [15]	Reflexiva	Modelos simétricos	Redes neuronales y RANSAC.
Hong (2019) [16]	Axial	Vectores normales.	MLESAC.
Nagar (2020) [17]	Reflexiva	Plano de simetría inicializado aleatoriamente.	Optimización de la función de error.
Hruda (2021) [18]	Reflexiva	Vector normal, curvatura y distancia entre puntos.	Optimización de la medida de simetría.
Rumezhak (2021) [19]	Reflexiva	Vectores normales y casco convexo.	PCA
Xu (2021) [20]	Reflexiva	Malla característica inicial	Características locales + ICP
Hruda (2022) [21]	Rotacional	Planos de Simetría [18]	Uso de cuaterniones como espacio de rotaciones.
Žalik (2022) [22]	Reflexiva	División en celdas y ubicación de puntos perimetrales.	Iteraciones con función Test de simetría.

Tabla 1. Métodos de detección de simetrías. Se indica el tipo de datos de entrada (mallas, nubes de puntos), la clase de transformación detectada y las características del objeto usadas en el proceso.

La presente investigación tiene como objetivo la detección de simetrías en objetos incompletos, donde el centroide del objeto real es desconocido y varios de los métodos de detección de simetría global no son aplicables. Podemos notar que existen pocos estudios respecto a las simetrías rotacionales continuas, presentes en muchos objetos arqueológicos.

Cabe mencionar que una revisión general de métodos de detección de simetrías en objetos tridimensionales fue presentada por Mitra et al. [23]. No obstante, la mayor parte de los métodos encontrados en esta revisión presenta limitaciones al asumir que el objeto 3D analizado corresponde con una representación completa del objeto real y que el centroide del objeto es un punto fijo en las simetrías. Además, pocos métodos son en realidad robustos para analizar objetos arqueológicos digitalizados, que suelen presentar partes extraviadas y simetrías imperfectas [24].

En general, en estos métodos se distinguen tres etapas:

- Selección de características, que restringe los cálculos a un pequeño conjunto de características geométricas relevantes. La selección de características típicamente usa descriptores de forma locales para reducir significativamente el espacio de búsqueda considerando propiedades geométricas del objeto que sean invariantes bajo las transformaciones de simetría consideradas. Además, la característica seleccionada debe ser distintiva de una geometría local, eficientemente calculable y robusta en el procesamiento de data perdida, ruido y valores atípicos (*outliers*).
- Agregación, que acumula convenientemente la información de simetrías locales en una estructura de datos o espacio de transformaciones. La agregación es útil para reducir la complejidad en la validación de las posibles transformaciones.
- Extracción, que recupera las simetrías significativas parciales a partir de la representación establecida en la etapa anterior. Las simetrías extraídas son finalmente verificadas y refinadas en el dominio espacial.

A continuación presentamos algunos de los métodos propuestos, lo que servirá como referencia en el método que será propuesto.

3.1.1. Votación en el espacio de transformaciones.

El método de Mitra et al. [4] tiene como idea central que todo par de puntos en la superficie de un objeto 3D puede definir una única transformación que haga que el par de puntos coincida. Para esto, es necesario contar con información de las curvaturas principales en la vecindad de cada punto y el vector normal a la superficie 3D, para definir un espacio de transformaciones en el que se acumularán votos de simetrías locales.

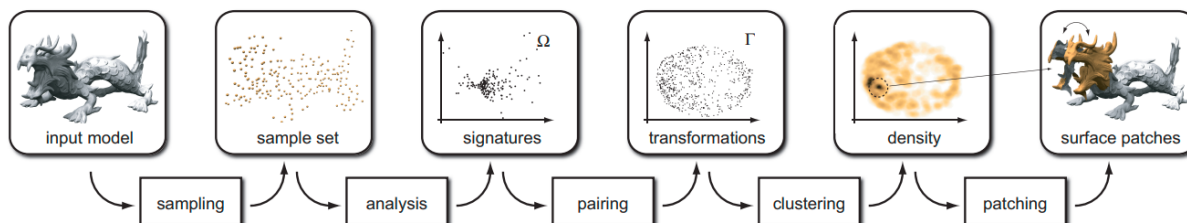


Figura 7. Proceso de extracción de simetrías propuesto por Mitra et al. [23]. El muestreo produce un conjunto P de puntos de la superficie. Para cada $p_i \in P$, es calculada una signatura local. Los puntos p_i, p_j con signaturas similares son emparejados y se busca la transformación necesaria para que el marco local de p_i coincida con el de p_j , obteniéndose un punto en el espacio de transformaciones Γ . La detección de *clusters* produce subconjuntos de P que permanecen invariantes bajo una transformación, que es refinada mediante un algoritmo ICP.

De esta manera, si se puede encontrar varios pares de puntos que describen una transformación semejante, se puede afirmar que dicha transformación es candidata a ser una simetría del objeto.

El método inicia con el cálculo de descriptores locales del objeto (curvatura principal, direcciones principales y vector normal) en un conjunto seleccionado de puntos. Este descriptor es utilizado para emparejar puntos, donde un punto perteneciente al conjunto puede ser convertido en otro bajo una acción. Entonces, la acción correspondiente a cada par es considerada como un voto para una simetría específica en un **espacio de transformaciones**. En este espacio, los pares con similares transformaciones forman *clusters* que proveen evidencia para la relación de simetría correspondiente.

En el espacio de transformaciones, se usa un algoritmo estocástico de detección de *clusters* para extraer las acumulaciones significativas de la distribución que se ha obtenido. Debido a que la información encontrada en el espacio de transformación no preserva la coherencia espacial o estructura de la forma original, se realiza una verificación espacial para cada *cluster* C_k , extrayendo los componentes conectados en el modelo que son invariantes bajo la transformación correspondiente T_k . Las partes de la superficie que cumplen la simetría son calculadas mediante un proceso incremental de expansión de regiones, empezando por un punto aleatorio de C_k , el cual corresponde a un par de puntos (p_i, p_j) de la superficie. Se busca en los vecinos más próximos de p_i , se aplica se aplica T_k a cada uno de estos y se verifica si la distancia de los puntos obtenidos a la superficie alrededor de p_j está debajo de cierto umbral. De estarlo, se agrega al cluster que se está validando y se continúa con el proceso para extender el cluster a lo largo de sus límites hasta que no puedan ser agregados más puntos. Este proceso es repetido usando el siguiente punto en C_k hasta que todos los puntos contenidos en este han sido considerados.

3.1.2. Detección de simetrías usando Líneas características.

El algoritmo propuesto por Bokeloh et al. [7] extrae líneas características que forman una aproximación dispersa de la geometría original, bajo el argumento de que para muchos objetos las líneas de pliegue guardan la información más importante. Como se muestra en la Figura 8, este método consiste de tres partes principales: selección de características, la correspondencia de líneas características y la validación geométrica.

En la primera etapa (*feature detection*) se extrae las líneas características y se identifica pares apropiados de estas características para definir sistemas de coordenadas locales que se denominan “bases”. Para ubicar las características, son escogidos los puntos de máxima curvatura principal ortogonal a la dirección de la línea. La detección es formulada como un problema de mínimos cuadrados móviles que toma una muestra de la geometría e iterativamente mueve los puntos dentro de las líneas hacia los extremos de curvatura. Luego debe construirse un grafo de los segmentos de línea encontrados, para conectar las combinaciones interesantes de las líneas características que son cercanas espacialmente.

La segunda etapa (*line feature matching*) trata estimar transformaciones iniciales a partir de una muestra de las bases (donde se emplea la curvatura de las líneas y la curvatura media de los puntos de la superficie de la geometría subyacente y serán preferidas las transformaciones simétricas que sean cumplidas por más instancias), para luego encontrar subconjuntos de estas

bases de tal modo que exista correspondencia entre las líneas características de las vecindades locales. El razonamiento bajo este diseño es que una comparación de un conjunto de líneas características es sustancialmente más eficiente que la comparación de la geometría real y se puede alcanzar una alta exactitud.

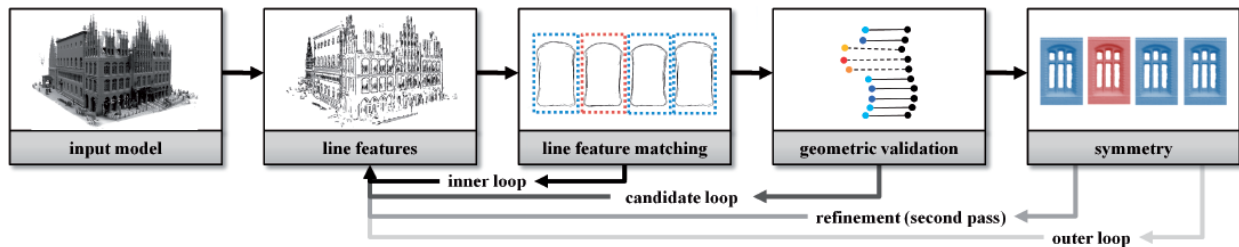


Figura 8. Método de Bokeloh et al. [7] inicia con la extracción de líneas características del modelo original. Dentro del *inner loop*, se busca constelaciones simétricas de líneas características y el mejor candidato para a una etapa de validación, en la cual se toman en cuenta todos los puntos para la verificación. Este proceso es repetido varias veces dentro del *candidate loop* para obtener el mejor candidato (una parte simétrica y sus instancias). Este conjunto es refinado con el objetivo de encontrar más instancias. El *outer loop* repite el proceso para encontrar varias simetrías.

La tercera etapa es de validación geométrica y consiste en transferir lo encontrado a la geometría real, es decir, la nube de puntos. Como la representación en líneas características es poco densa, este paso es necesario para asignar correctamente las regiones geométricas a las instancias encontradas. Las segunda y tercera etapas son repetidas en bucle para obtener la mejor coincidencia. Los resultados pueden ser refinados. El algoritmo completo puede ser repetido para encontrar varias instancias de simetría.

3.1.3. Symmetry Factored Embedding (SFE).

El método propuesto por Lipman et al. [8] parte de una muestra de n puntos para representar simetrías en una matriz de correspondencia de $n \times n$ elementos, donde cada uno de estos codifica la relación de simetría entre pares de puntos. Esta matriz es formada por un procedimiento basado en votos, pues para dos pares de puntos se contabiliza una transformación.



Figura 9. La distancia en el espacio espectral definido por Lipman et al. [8] (Symmetry Factored Distance) medida desde los puntos marcados por las flechas negras. Se usa el azul para pequeñas distancias y rojo para las grandes.

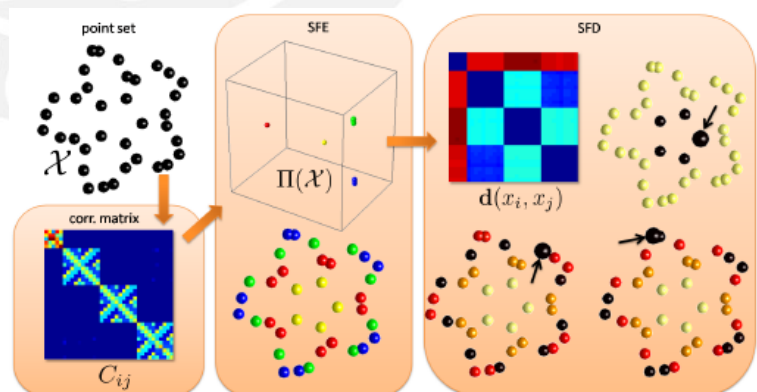


Figura 10. Algoritmo propuesto por Lipman et al. [8].
 Paso 1: Obtener la matriz de correspondencias simétricas C_{ij} .
 Paso 2: Usando propiedades espectrales, calcular SFE $\Pi(X)$
 Paso 3: Extraer en el nuevo espacio las distancias euclidianas, que son las SFD $d(x_i, x_j)$.

El autor observa que todos los puntos simétricos entre sí forman una órbita, la cual aparece como un clique en el grafo inducido por la matriz de correspondencias simétricas. Como resultado, el problema de encontrar simetrías aproximadas y parciales en un conjunto de puntos se convierte en un problema de medición de conectividad en el grafo de correspondencias, en el cual los métodos espectrales proveen una solución robusta.

El análisis de las propiedades espectrales de la matriz de correspondencias conduce a la definición de la forma en estudio dentro de un espacio euclidiano más dimensional, llamado *Symmetry Factored Embedding*, o SFE. En este espacio, las distancias euclidianas (denominadas *Symmetry Factored Distance* o SFD) entre dos puntos x_i y x_j cuantifican el grado en el que estos son simétricos. Esto es mostrado en la figura 9, en la cual se visualizan los valores de $SFD(x, -)$, que es la distancia de un punto a los demás, para dos modelos y dos diferentes elecciones de punto x en cada modelo (marcado con una flecha negra). Los puntos con mínima distancia respecto a un punto fijo serán sus correspondencias simétricas. La detección de simetría se basa en el espacio de invariabilidad de funciones. Se puede notar cómo los puntos en la misma órbita tienen pequeñas distancias (mostradas en azul). En la parte inferior de la figura, se puede notar que las simetrías son detectadas incluso cuando los objetos tienen partes faltantes o en presencia de ruido. Este algoritmo tiene como principal limitación su dependencia de parámetros en las secciones que lo componen.

3.1.4. Heat Kernel Signature.

El método propuesto por Sibirán et al. [10] usa la teoría de difusión del calor sobre superficies 3D para analizar la existencia de simetría de reflexión en objetos con partes faltantes, como es mostrado en la Figura 11.

Dado un objeto 3D con superficie S , se emplea la función *Heat Kernel Signature* $h(x, t)$ que describe la cantidad de calor que permanece en un punto $x \in S$ en un determinado tiempo t para construir $H(x, t)$, que es una integral de $h(x, t)$ que es útil para asociar la acumulación de calor hasta el tiempo t en cada punto x de la superficie. Esta nueva función se supone más robusta a perturbaciones locales en la superficie causada por partes faltantes. El estudio sostiene que los máximos locales de la función pueden ser considerados como candidatos a ser puntos simétricos.

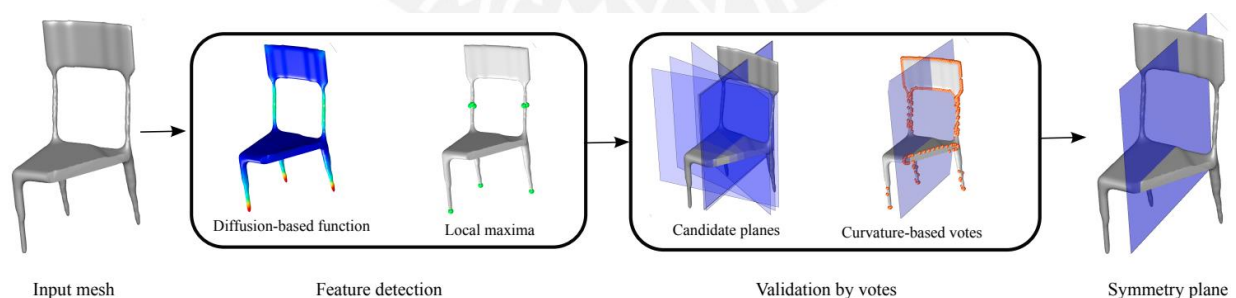


Figura 11. Método propuesto por Sibirán et al. [10], que tiene como primer paso el cálculo de una función en la malla de puntos, de modo tal que los máximos locales de esta función son potenciales correspondencias simétricas. Luego, es generado un conjunto de candidatos a planos de simetría para determinar los planos con mayor probabilidad de ser planos de simetría por medio de un sistema de votación.

Dado que la información del objeto es incompleta, el método plantea la acumulación de votos basada en características (en este caso, la difusión de calor en la superficie del objeto) para encontrar correspondencias simétricas y usar esta información como soporte para producir candidatos a planos de reflexión.

La muestra usada para la acumulación de votos debe satisfacer ciertos criterios, como el valor de la curvatura, la posición de dos puntos respecto al plano, coherencia en distancia al plano simétrico, orientación con respecto al plano, consistencia de normales y similitud geométrica. Una metodología similar fue usada por el mismo autor en [14], donde los puntos obtenidos son usados por el algoritmo RANSAC para determinar círculos, los que servirán para la acumulación de votos por orientación. Este método tiene como limitación el no poder trabajar correctamente en objetos sin puntos característicos.

3.1.5. Problema de optimización restringida.

El método propuesto por Mavridis et al. [11] formula el problema de detección de simetrías como un problema de maximización de la dispersión de un vector de distancias residuales entre M y $T(M)$, que mide, a partir de la distancia de los puntos a una superficie, la superposición entre una superficie y su transformada.

Este problema está sujeto a una restricción que indica que al menos una proporción k de los elementos deben ser mayores a cero (se usa 1 cuando la distancia es menor a cierto umbral y 0 si esta lo supera), pues se plantea usar los puntos que no se superponen en un paso posterior. En la práctica, se busca maximizar el número de elementos cero (dispersión) del vector residual, pero con la restricción de que al menos $k\%$ de los elementos no sean cero. La solución emplea un optimizador basado en RANSAC (consenso de muestra aleatoria) que permite detectar las simetrías disponibles en el objeto a partir de una nube de puntos, sin que sea necesario el cálculo de características o descriptores locales de geometría.

3.2. Completado por datos y Deep Learning.

El enfoque de completado de objetos basado en datos busca un método que pueda recuperar la estructura de un objeto a partir de un conjunto de objetos con estructura similar. Si existe un método para completar objetos con similar geometría, éste puede reutilizarse para inferir la geometría faltante en objetos incompletos. En el caso de los modelos *Deep Learning*, un limitante es la dificultad de obtener más objetos de ciertos tipos y culturas.

Los métodos basados en arquitecturas Deep Learning más recientes son:

- *Morphing and Sampling Network* (MSN) de Liu et. al [29], que en su primera etapa predice una nube de puntos completa aunque de baja granularidad, que será luego combinada con el objeto original.
- *Variational Relational Point Cloud Network* (VRCNet) de Pan et al. [30], que emplea modelamiento probabilístico que genera nubes de puntos completas que serán refinadas mediante la etapa de mejoramiento relacional, que explota las características de la nube de puntos. Estos dos primeros métodos, al predecir una nube de puntos completa, alteran la estructura de puntos original.
- *Point Fractal Network* (PF-Net) de Huang et. al [31], que usa redes neuronales generativas adversarias (GAN) aunque presenta una baja performance en términos de integración entre la observación original y la predicción.

- *Missing Part Prediction Network (MPN) + Point Refiner Network (PPN)* de Sipirán et. al [32], orientado a completar las imperfecciones en la base que ocurrieron durante el escaneo de los objetos.

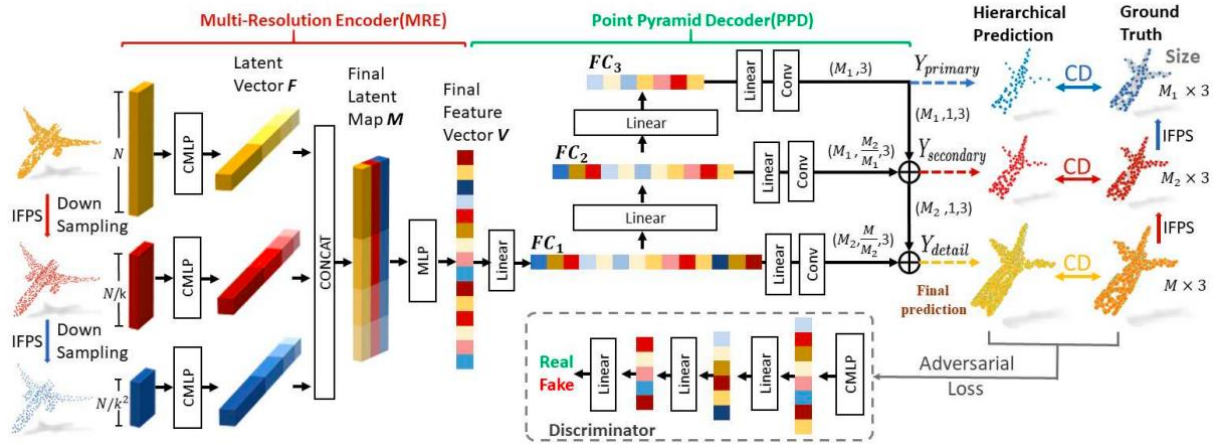


Figura 12. Arquitectura del método PF-Net propuesto por Huang et al. [31], que obtiene muestras del objeto a diferente escala y usa una red generativa multi-escala PPD. Las tres escalas de predicción son diferencias dos los colores azul, rojo y amarillo. CMLP es el extractor de características. CD significa distancia Chamfer, que mide la diferencia entre la predicción y *ground truth*.

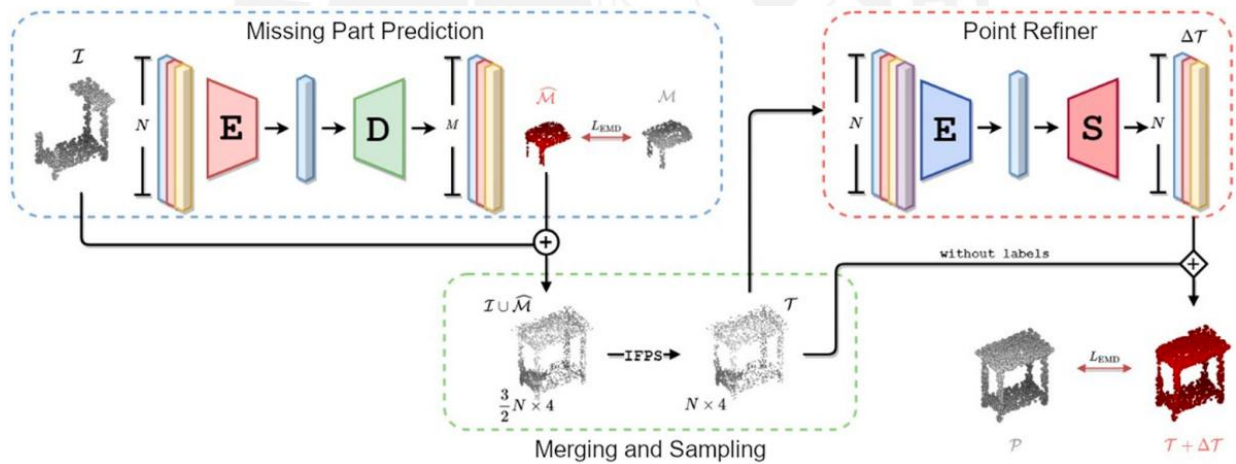


Figura 13. Método propuesto MPN + PPN por Sipirán et al. [32]. En su primera etapa, la red neuronal toma una nube de puntos incompleta y genera la parte faltante. Luego se procede a concatenar las partes y obtener una muestra cuya distribución será finalmente mejorada y refinada.

Capítulo 4

4. Descripción del método propuesto

El método propuesto busca detectar simetrías reflexivas y rotacionales continuas usando una muestra de puntos para crear un conjunto de transformaciones definidas por planos de reflexión basados en características locales de la superficie. De este conjunto serán extraídos los clústeres que representen las simetrías de reflexión. El conjunto de planos será usado también para intersectarlos por pares y crear un conjunto de transformaciones de rotación continua, de donde será extraído el clúster que represente la simetría de rotación continua. Estos clústeres serán refinados antes de proceder al completado del objeto.

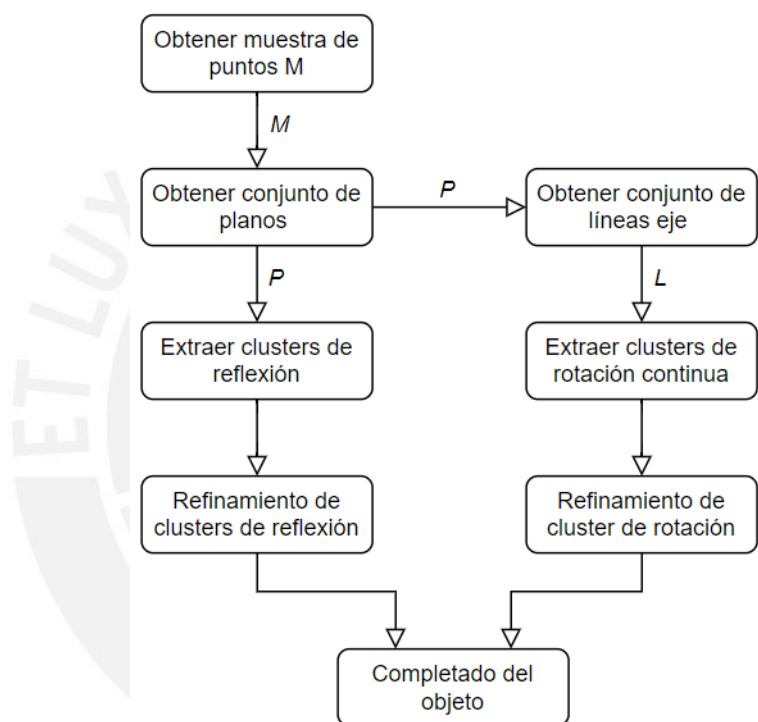


Figura 14. Esquema del método propuesto

La obtención del conjunto de planos base P sigue la idea propuesta por Mitra et al. [4], que busca pares de puntos que cumplan con restricciones definidas para los vectores normales, los planos de reflexión y las curvaturas, como se muestra en la Figura 15.

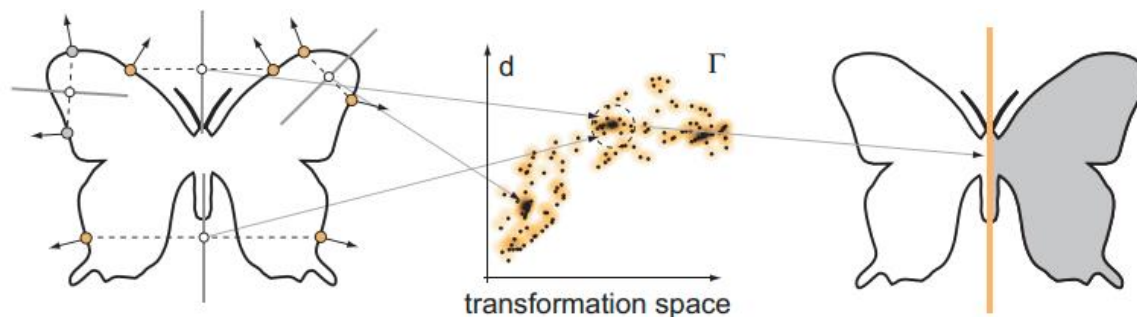


Figura 15. El método propuesto se inspira en el método de Mitra [4], pues parte de buscar pares de puntos cumplan una restricción relativa a la suma de sus vectores normales y la normal del plano de reflexión que definen.

Las principales diferencias entre el método propuesto y el de Mitra et al. [4] son:

- En esta tesis se buscan simetrías de rotación continua en lugar de rotación discreta. El proceso de identificación de clústeres que representan simetrías de reflexión está separado del proceso que detecta simetrías de rotación continua, la más frecuente en el tipo de objetos que estamos analizando.
- El método de identificación de clústeres sigue lo propuesto por Loew [36] en lugar de usar *Mean-Shift Clustering*, además de usar diferentes métricas de distancia entre elementos.
- El uso de estructuras K-D Tree para acelerar las consultas de proximidad espacial. La complejidad de las consultas en un árbol de n puntos es $O(\log(n))$.

El algoritmo fue implementado en Python y usa la librería libigl, útil para el procesamiento geométrico de los datos. Luego de remover los vértices que no pertenecen a algún triángulo, calcular para toda la malla los vectores normales y la curvatura gaussiana, bajo lo indicado por Meyer [34], según la ecuación 3:

$$k_G = 2\pi - \sum_{j \in N(i)} \theta_{ij} \quad (3)$$

Donde $N(i)$ son los triángulos que contienen al vértice i y θ_{ij} es el ángulo del vértice i en el triángulo j . Otro método aunque mucho menos rápido para calcular la curvatura gaussiana es el producto de las curvaturas principales k_1 y k_2 .

El algoritmo utiliza una muestra M del objeto, que contiene una fracción de los vértices y necesita información de las propiedades diferenciales de cada vértice $v_i \in M$. Si el objeto tiene n vértices, por evidencia empírica la muestra M debe tener por lo menos $3n^{1/2}$ vértices, donde el exponente de n garantiza la reducción de la complejidad del algoritmo. Una técnica usual es crear una muestra aleatoria de vértices de la malla, pero esto no suele representar bien la forma del objeto original. En su lugar, vamos a dividir el espacio 3D que ocupa el objeto en porciones cúbicas llamadas *voxels*. Si dividimos el espacio ocupado por el objeto en una grilla de k^3 voxels, para valores de k mayores a 100 obtendremos que aproximadamente $2k^2$ voxels son ocupados, es decir, contienen al menos un vértice de la malla. Se establece una base de longitud 100 voxels, pues los objetos presentan caras externa e interna, que deben ser correctamente separadas por el muestreo. Del conjunto ordenado de voxels ocupados, se debe seleccionar una muestra de al menos $3n^{1/2}$ vértices, como se indica arriba.

Por cada voxel seleccionado será elegido el punto de la malla más cercano al centro del cubo que no esté en un borde de la malla y cuente con una vecindad completa de dos anillos. Esta consulta por proximidad espacial es acelerada por el uso de *K-D Tree* a nivel de la malla de puntos. Deben ser excluidos los vértices cuya curvatura gaussiana k_G esté en dentro del quinto inferior de los valores de toda la malla, para evitar analizar puntos de superficie plana.

Los vértices seleccionados deben cumplir una restricción relativa a la razón entre el producto de las curvaturas principales k_1 y k_2 y el valor de la curvatura gaussiana k_G calculado en la ecuación 3. El cálculo de las curvaturas es costoso si se realiza para toda la malla, pero en este caso serán obtenidas solamente las los vértices seleccionados, siendo calculadas según el procedimiento indicado por Panozzo [35].

$$\frac{1}{3} < \frac{k_G}{k_1 k_2} < 3 \quad (4)$$

4.1. Detección de clusters – simetrías de reflexión.

Para la detección de **simetrías de reflexión**, la idea central es que todo par de puntos en la superficie de un objeto 3D puede definir una única transformación que haga que el par de puntos coincida. Cualquier par de puntos (v_i, v_j) de la muestra M define un único plano de reflexión que pasa por el punto medio del segmento que une estos dos puntos $v_m = (v_i + v_j)/2$ con dirección normal $v_i - v_j$. Este par debe tener similitud en los valores de su curvatura máxima y mínima, como se muestra en (5) y (6), para ser considerada como una evidencia de la existencia de esta específica simetría reflexiva. Asimismo, el vector suma de las normales n_i y n_j debe ser casi perpendicular a la dirección de la normal del plano, como se indica en (5), por lo que su producto escalar no debe ser mayor a δ . En el presente trabajo se usará $\gamma = 0.90$ y $\delta = 0.75$.

$$\gamma < \min(|k_{i1}|, |k_{j1}|) / \max(|k_{i1}|, |k_{j1}|) \quad (5)$$

$$\gamma < \min(|k_{i2}|, |k_{j2}|) / \max(|k_{i2}|, |k_{j2}|) \quad (6)$$

$$\frac{v_i - v_j}{|v_i - v_j|} \cdot \frac{n_i + n_j}{|n_i + n_j|} < \delta \quad (7)$$

Se debe realizar entonces la búsqueda de estos pares de puntos para acumular evidencias y extraer las relaciones de simetría relevantes. Para acelerar la consulta de proximidad espacial, será usada una estructura *K-D Tree* que contenga los valores de las dos curvaturas principales de cada punto.

Cada plano que cumpla con las condiciones anteriores está definido por un vector normal unitario de componentes $n = (n_x, n_y, n_z)$ y la proyección del centroide de los vértices del objeto sobre el plano, que denotaremos por $s = (s_x, s_y, s_z)$. Estos planos forman un conjunto P .

Si muchos pares de puntos coinciden aproximadamente en el mismo plano de reflexión, se puede creer que la correspondiente simetría está presente en el modelo. Los criterios para agregar un elemento a un consisten en establecer un límite para la distancia entre los vectores normales del elemento y el clúster (β_1), así como para la distancia entre los puntos de proyección desde el centroide del objeto (β_2). Estas distancias son validadas por separado, pues la distancia euclidiana de puntos y la distancia euclidiana de vectores normalizados están en diferentes escalas y no pueden ser comparadas.

En cada iteración, un elemento es agregado al clúster más cercano, mientras las distancias sean menores a los límites $\beta_1 = 0.05d$, donde d es la longitud de la diagonal del prisma perpendicular a los ejes que contiene al objeto y $\beta_2 = 0.16$, parámetro equivalente a que el ángulo entre dos vectores unitarios sea menor a 10° . Se debe recalcular el centroide del clúster luego de agregar un elemento. El proceso es acelerado por el uso de estructuras *K-D Tree* para ambas distancias, de modo tal que al crear un nuevo clúster serán agregadas al mismo los elementos de la intersección de las listas obtenidas en las dos consultas, mientras no hayan sido aún agregados a otro clúster. El algoritmo 1 detalla los pasos seguidos en la identificación de los clústeres.

Algorithm 1 Clustering algorithm

inputs: Figures $\{P\}$, distance thresholds $= (\beta_1, \beta_2)$, distance function $\lambda(\cdot)$,
K-d tree query ball function $\Phi(\cdot)$

function CLUSTERING(P, β_1, β_2)

Clusters $\{C\} \leftarrow \emptyset$, Unassigned List $\{A\} \leftarrow \{P\}$

for each element $p_i \in P$ **do**

$min_dist = \infty, ac = -1$

if $p_i \notin A$ **then**

for each cluster $c_k \in C$ **do**

if $\lambda(p_i, c_k) < min_dist$ **then**

$min_dist = \lambda(p_i, c_k)$

$ac = k$

end if

end for

if $ac \geq 0$ and $min_dist < (\beta_1, \beta_2)$ **then**

Assign p_i to C_{ac} and Update centroid of C_{ac}

Remove p_i from A

else

Create new cluster C_n and assign p_i

Assign p_i as centroid of C_n

Remove p_i from A

$nn \leftarrow \Phi(C_n.v, \beta_1) \cap \Phi(C_n.p, \beta_2) \cap A$

for each $p_j \in nn$ **do**

Assign p_j to C_n and Update centroid of C_n

Remove p_j from A

end for

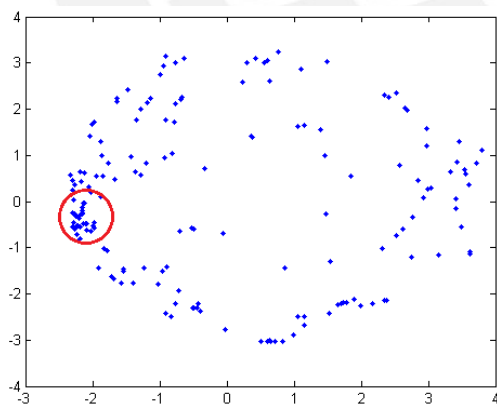
end if

end if

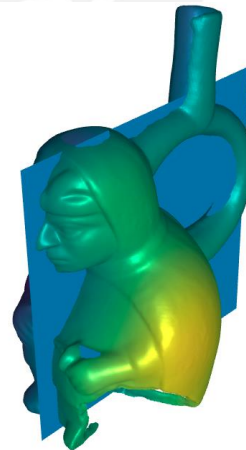
end for

return C

end function=0



(a)



(b)

Figura 16. Gráfica del espacio de transformaciones para el modelo ubicado a la derecha. El clúster resaltado refleja una simetría de reflexión

4.2. Detección de clusters – simetrías de rotación continua.

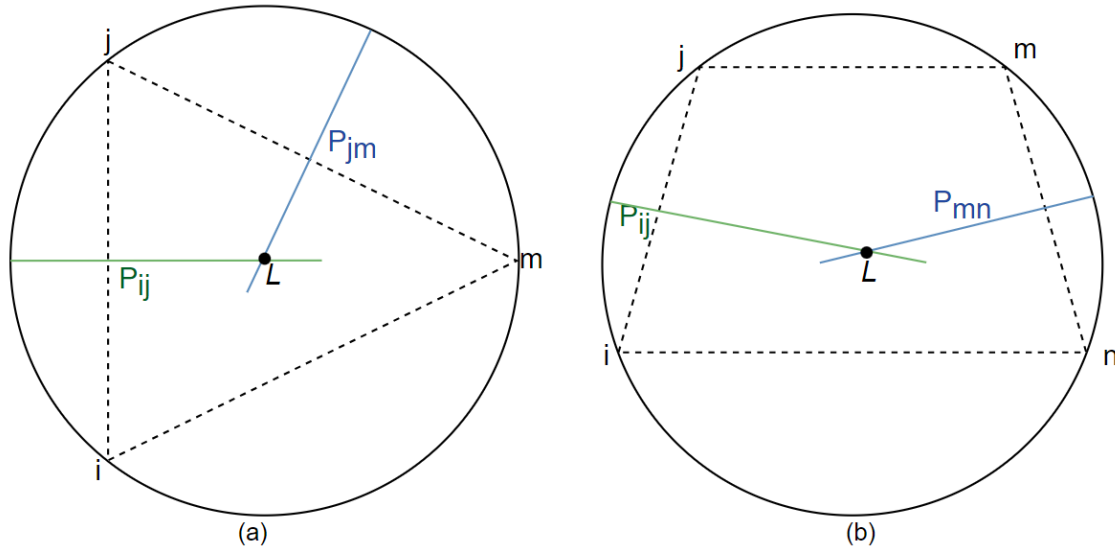


Figura 17. Ejemplos de simetrías de reflexión que al intersectarse resultan en simetrías rotacionales continuas, la línea de intersección está representada en ambas figuras por L . Los vértices están nombrados con letras minúsculas. En (a), L es la intersección de los planos P_{ij} y P_{jk} . En (b), L es la intersección de los planos P_{ij} y P_{km} .

El procedimiento para la detección de **simetrías de rotación continua** usa el mismo conjunto de planos P , que incluye la pareja de puntos que lo ha generado. Se sigue la idea mostrada en la figura 17, en la que los planos (mostrados como las líneas mediatrices) se intersectan en una recta (mostrada como un punto).

Se debe seleccionar dos pares de puntos (p_i, p_j) y (p_k, p_l) con valores de curvatura que deben seguir la restricción indicada en (6). Estos pares de puntos definen planos de reflexión P_{ij} y P_{kl} que se intersectan en la línea L . Como se puede deducir de la parte izquierda Figura 11, dos puntos de la cuaterna pueden coincidir. Para acelerar la búsqueda de planos compatibles, creamos una estructura K-D Tree basada en la semisuma de las curvaturas de los puntos que definen un plano. Los valores de las curvaturas de los pares de puntos $i-j$ y $m-n$ deben cumplir las restricciones indicadas en 8 y 9 y las normales de los planos P_{ij} y P_{kl} no deben ser paralelas, por lo que su producto escalar debe ser menor al valor $\gamma = 0.90$.

$$\gamma < \min(k_{i1} + k_{j1}, k_{m1} + k_{n1}) / \max(k_{i1} + k_{j1}, k_{m1} + k_{n1}) \quad (8)$$

$$\gamma < \min(k_{i2} + k_{j2}, k_{m2} + k_{n2}) / \max(k_{i2} + k_{j2}, k_{m2} + k_{n2}) \quad (9)$$

$$nP_{ij} \cdot nP_{mn} < \gamma \quad (10)$$

Si la distancia entre las proyecciones de los puntos medios de los dos pares de puntos a L es menor que cierto límite ω (que en el presente trabajo será el semiperímetro promedio de los triángulos de la malla original), los dos pares de puntos son una evidencia de la existencia de una simetría rotacional continua.

$$|\text{projection}\left(\frac{p_i + p_j}{2}, L\right) - \text{projection}\left(\frac{p_m + p_n}{2}, L\right)| < \omega \quad (11)$$

Cada línea que cumpla con las condiciones anteriores debe ser definida por el vector unitario de la línea (u_x, u_y, u_z) y la proyección del centroide del objeto sobre la línea (r_x, r_y, r_z). Estas líneas forman un conjunto P .

Si muchas líneas coinciden aproximadamente en una misma línea eje de rotación, se puede creer que la correspondiente simetría está presente en el modelo. El proceso de identificación de los clústeres es similar al detallado en el algoritmo 1. Los criterios para agregar un elemento a un consisten en establecer un límite para la distancia entre los vectores de dirección del elemento y el clúster (β_1), así como para la distancia entre los puntos de proyección desde el centroide del objeto (β_2). Las distancias son validadas por separado, pues la distancia euclidiana de puntos y la distancia euclidiana de vectores normalizados (o su similitud del coseno) están en diferentes escalas y no pueden ser comparadas.

En cada iteración, un elemento es agregado al clúster más cercano, mientras las distancias sean menores a los límites $\beta_1 = 0.05d$, donde d es la longitud de la diagonal del prisma perpendicular a los ejes que contiene al objeto y $\beta_2 = 0.16$, parámetro equivalente a que el ángulo entre los dos vectores unitarios sea menor a 10° . Se debe recalcular el centroide del clúster luego de agregar un elemento. El proceso es acelerado por el uso de estructuras K-D Tree para ambas distancias, de modo tal que al crear un nuevo clúster serán agregadas al mismo los elementos de la intersección de las listas obtenidas en las dos consultas, mientras no hayan sido aún agregados a otro clúster.

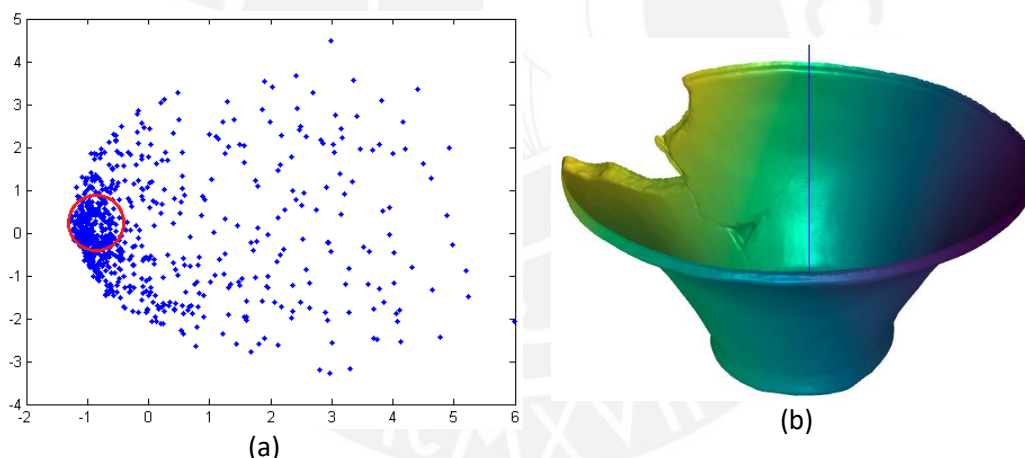


Figura 18. Gráfica del espacio de transformaciones para el modelo ubicado a la derecha. El clúster resaltado refleja una simetría de rotación

4.3. Refinamiento y reconstrucción de objetos.

Luego de que los planos de reflexión y/o ejes de rotación correspondientes a las simetrías detectadas han sido encontrados, los vértices V de la malla son proyectados sobre los ejes de simetría.

En el caso de la reflexión, si el clúster con la mayor votación define el plano por la normal n y el punto de paso p , la proyección es la mostrada en la ecuación 12.

$$V_{RX} = V(I_3 - 2n^T n) + 2pn^T n \quad (12)$$

En el caso de la rotación continua, si definimos la línea eje por el vector n y el punto de paso p , las proyecciones para rotaciones de 180° y 90° son mostradas en la ecuaciones 13 y 14, respectivamente.

$$V_{RT} = V(2n^T n - I_3) + 2p - 2pn^T n \quad (13)$$

$$V_{RT} = V(n^T n) + p - pn^T n + p \times n - V \times n \quad (14)$$

La simetría detectada es sólo aproximada, pues la superposición entre el objeto original y el obtenido luego de realizar una rotación no es perfecto. Por lo tanto, es necesario seguir un procedimiento para el alineamiento de superficies.

Este procedimiento usará la muestra de vértices empleados como datos de entrada en la sección 4.1. Luego de aplicar la rotación, se excluye a los vértices cuya transformación está a una distancia mayor que $0.5\beta_1$ de la superficie del objeto original, siendo β_1 el valor usado en la sección 4.2, pues estos casos se deben no sólo a pares inconsistentes o regiones del objeto que no cumplen la transformación [33], sino también a vértices transformados que no han encontrado una correspondencia cercana en la superficie del objeto, pues esta en realidad es parte del fragmento perdido, por lo que serán usados posteriormente en la reconstrucción del objeto.

El conjunto de vértices obtenido en el párrafo anterior debe ser alineado a las partes existentes del objeto original usando el algoritmo *Iterative Closest Point* (ICP) [33], que iterativamente determina la correspondencia entre los vértices transformados y la malla inicial, para luego encontrar los parámetros de la transformación que mejor alinee los pares de puntos correspondientes, minimizando la suma de cuadrados de los errores. Será usada la variante *point-to-plane*, mediante la cual la función a minimizar depende de las distancias de cada punto de origen (la muestra de vértices) y el plano tangente al correspondiente punto de destino.

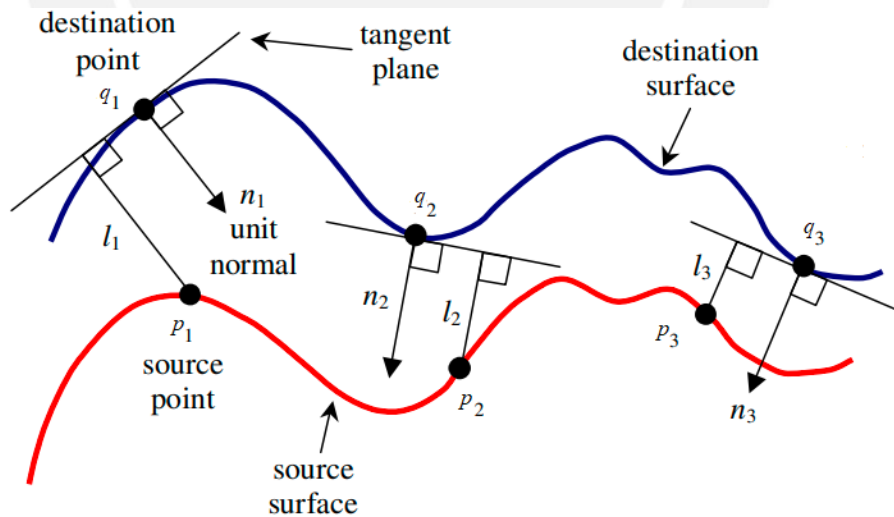


Figura 19. Representación de la distancia l_i entre los puntos correspondientes de dos superficies bajo el método ICP *point-to-plane*. Tomada de Low [46]

La función por minimizar es mostrada en la ecuación 15, en la que una transformación M es representada por la matriz R , que es multiplicada por cada vértice, y el término t . Los puntos de origen son p_i , los de destino q_i y las normales de estos n_i , como se muestra en la figura 19.

$$M_{opt} = \operatorname{argmin}_M \sum_i [(Rp_i + t - q_i) \cdot n_i]^2 \quad (15)$$

Este método de refinamiento es bastante eficiente en mallas cercanas [46]. Luego de aplicar la primera iteración y acercar la muestra a la malla original, para las siguientes iteraciones se excluye a los vértices cuya transformación está a una distancia mayor que $0.2\beta_1$ (es decir, el 1% de la medida de la diagonal) de la superficie del objeto original.

Una vez obtenida la transformación óptima y proyectada la malla original, debemos detectar aquellos vértices proyectados cuya distancia mínima respecto a la malla original sea menor a ω , que es el semiperímetro promedio de los triángulos de la malla, para luego ser retirados por tratarse de vértices repetidos.



Capítulo 5

5. Experimentación y resultados

En la fase de desarrollo del algoritmo de detección de simetrías se usó un conjunto de objetos generados sintéticamente, que simulen figuras con simetrías de reflexión y rotación como cántaros y vasos, de modo similar al generado sintéticamente por Koutsoudis et al. [28], pero con tamaño comparable al de las muestras usadas en la evaluación final, es decir, que contengan al menos 100 K triángulos por modelo [37]. De estos objetos completos son extraídas las simetrías de referencia o *ground truth*, que en este caso van a contener el centroide de cada objeto. Posteriormente, en cada objeto se retiró digitalmente el 20% del total de vértices para simular fracturas, luego de intersectarlos con una esfera, para verificar la precisión del modelo en el análisis de objetos con partes faltantes. Los objetos son mostrados en la figura 20.

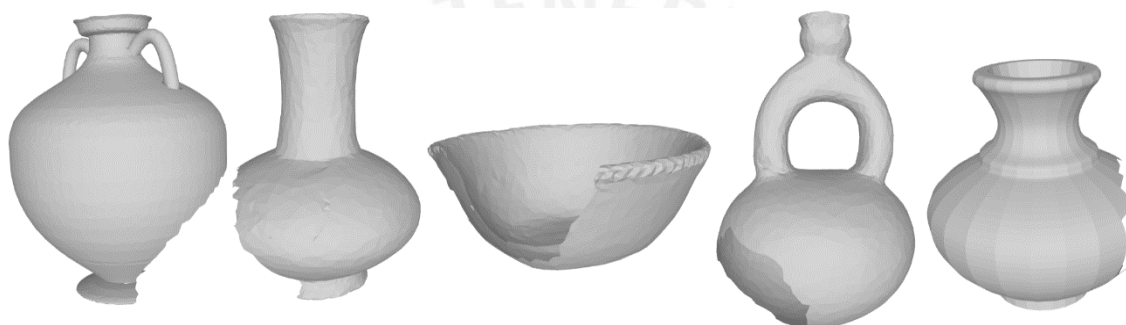


Figura 20. Muestra de los modelos generados y fracturados sintéticamente para las pruebas unitarias.

La evaluación del algoritmo de detección de simetrías de reflexión usa un conjunto de modelos sintéticos creados como parte del ICCV 2017 Workshop Challenge [39]. De esta base será revisado un conjunto de modelos que presentan simetría reflexiva. Estos son mostrados en la Figura 21. En la tabla 2 se muestran los resultados del proceso de detección de simetrías antes del refinamiento mediante ICP, en los que por cada objeto se indica el número de triángulos, el ángulo entre las normales del plano obtenido y el plano *ground truth*, la distancia entre las proyecciones desde el centroide del objeto hacia el plano obtenido y el plano *ground truth* y el tiempo que demora el proceso. El objeto (j) contiene 2 simetrías de reflexión y sus resultados han sido promediados.

	triángulos	ángulo	dist / diagonal	tiempo (s)
(a) Nefertiti	53k	0.21060502	2.432×10^{-3}	0.881
(b) Tortuga	811k	1.39486667	1.447×10^{-3}	6.6938
(c) Oso	637k	0.9714	2.341×10^{-3}	5.7428
(d) Busto	319k	1.48386667	3.581×10^{-3}	5.869
(e) Leopardo	66k	0.5138	2.113×10^{-3}	1.4374
(f) Perro 1	43k	0.26013333	1.541×10^{-3}	0.5977
(g) Rinoceronte	93k	1.17086667	6.064×10^{-3}	1.5881
(h) Perro 2	352k	0.43626667	1.059×10^{-3}	5.1614
(i) León	86k	0.92973333	5.170×10^{-3}	0.9733
(j) Olla	43k	0.9876	1.252×10^{-3}	1.4524

Tabla 2. Resultados por objeto

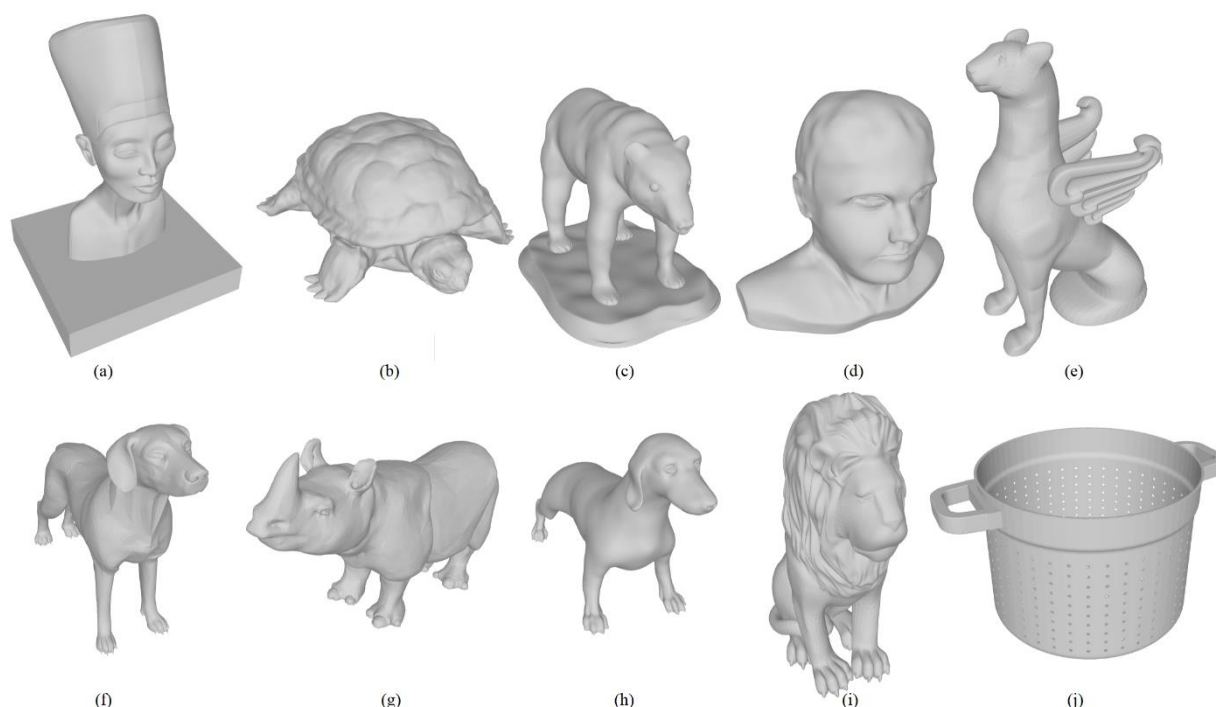


Figura 21. Objetos considerados en la comparación de los métodos de simetría reflexiva.

El método de reflexión propuesto será comparado con los publicados por Nagar [17] y Hrudá [18], siendo este último quien define un límite t_0 para el ángulo entre el plano detectado y el *ground truth*, así como un límite t_d para la distancia entre las proyecciones del centroide del objeto hacia el plano detectado y el plano *ground truth*, respecto a d , la diagonal del prisma rectangular que contiene al objeto. Son medidas la precisión (P) y recuperación (R, por *recall*). Estos valores son usados para calcular el F-Score, donde a mayor valor, mejor detección.

$$P = \frac{TP}{TP+FP} ; R = \frac{TP}{TP+FN} \quad (15),$$

$$F = \frac{2RP}{R+P} \quad (16)$$

Donde TP es el número de planos correctamente detectados, FP es el número de planos incorrectamente detectados y FN es el número de planos *según ground truth* que no fueron detectados. Los resultados obtenidos al variar los valores de t_0 y t_d son mostrados en la Tabla 3.

t_0 (en $^\circ$)	t_d (respecto a d)	F-Score Nagar [17]	F-Score Hrudá [18]	F-Score Método propuesto
1 $^\circ$	0.005	0.74	0.73	0.778
1 $^\circ$	0.155	0.84	0.79	0.842
10 $^\circ$	0.005	0.75	0.75	0.952
10 $^\circ$	0.155	0.85	0.82	1.000

Tabla 3. Resultados de la evaluación de la simetría de reflexión

La evaluación del algoritmo de detección de simetrías de rotación continua empleó un conjunto de 12 objetos originalmente recolectados del Museo Virtual Hampson [37], a los que se retiró digitalmente aproximadamente el 20% del total de vértices para simular fracturas, como indica Gregor et al. [41]. Los objetos fracturados son mostrados en la figura 22. Los archivos están en formato OBJ, pues son mallas de vértices.



Figura 22. Objetos considerados en la comparación de los métodos de simetría rotacional continua. Fueron tomados del museo virtual Hampson

El criterio de evaluación es la congruencia entre el objeto completado y el *ground truth*. Sea O_i un objeto en el conjunto y C_i el objeto completado con el algoritmo propuesto luego de remover un fragmento del objeto O_i . El fragmento removido debe ocupar aproximadamente un 12% de la superficie total del objeto. La medida de evaluación es definida como $E(O_i)$, que está en el rango $[0, 1]$ donde el mayor valor indica mejor congruencia.

$$E(O_i) = \frac{\text{área}(O_i \cap C_i)}{\text{área}(O_i \cup C_i)} \quad (17)$$

El método propuesto es comparado con los métodos de Mavridis [11] y Sipián [25]. Los resultados son mostrados en la tabla 4, en la que se ha marcado con un asterisco el mayor valor. El método propuesto presenta en promedio (0.778) una mejor medida de evaluación.

ID	# triángulos	fractura	tiempo (s)	Mavridis [11]	Sipián [25]	Propuesto
#31	482k	9.75%	4.713	0.793	0.630	0.785
#48	821k	9.07%	7.409	0.838	0.877	0.846
#73	1133k	14.02%	10.755	0.783	0.943	0.803
#77	744k	11.44%	4.215	0.736	0.509	0.807
#81	489k	14.72%	3.511	0.589	0.759	0.698
#217	636k	11.74%	3.957	0.558	0.846	0.641
#234	556k	10.18%	5.324	0.889	0.830	0.768
#424	269k	8.68%	2.707	0.704	0.529	0.813
#586	606k	14.71%	3.549	0.784	0.524	0.804
#661	477k	15.24%	3.363	0.848	0.827	0.799
#720	809k	13.12%	6.799	0.640	0.840	0.820
#1302	111k	11.93%	2.358	0.779	0.998	0.757

Tabla 4. Resultados de la evaluación de la simetría de rotación continua

El algoritmo fue aplicado en un grupo de objetos arqueológicos incompletos, obtenidos del catálogo del museo Larco de Lima, Perú. Es un subconjunto con 37 objetos 3D que provienen de una colección de muestras obtenidas por escáner de luz estructurada que incluye jarras, cántaros, figuras, tazones y vasos procedentes de diferentes culturas del antiguo Perú. Las muestras tienen en promedio 300K triángulos por modelo. Los objetos originales presentan deficiencias que son capturadas en los modelos 3D, como grietas y agujeros en el material, así como áreas desprendidas [37]. El tiempo de ejecución promedio para la detección de la transformación T_k en un modelo es de aproximadamente 3 segundos en una PC de 16 GB de RAM, en el que la mayor parte corresponde al cálculo de las curvaturas de los puntos de la muestra M y a la ejecución del algoritmo ICP. La figura 23 muestra en la fila superior los objetos adquiridos en la muestra y en la fila inferior los resultados de la restauración digital.

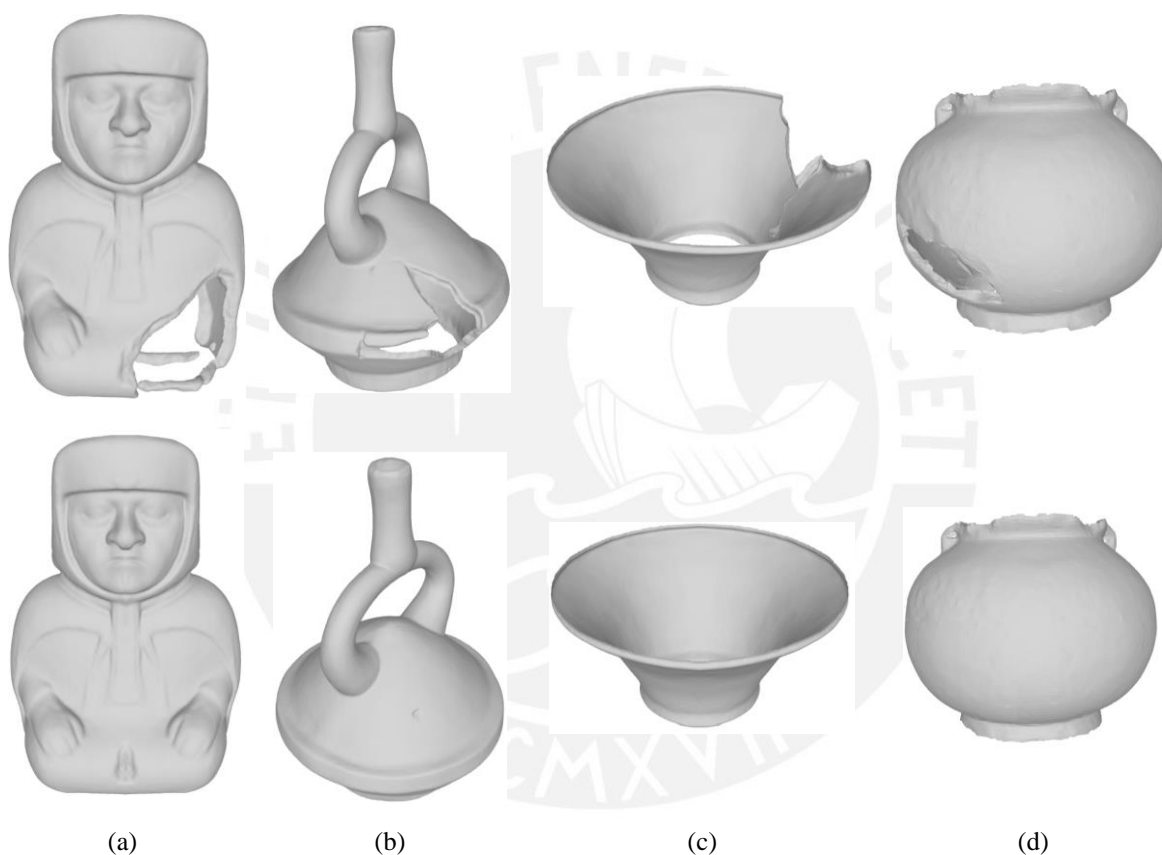


Figura 23. Restauración de los objetos arqueológicos del museo Larco.

Cabe mencionar que el método propuesto usa información exclusivamente del objeto de entrada. Por esta razón, puede haber porciones del objeto perdidas, como el gollete en el caso de las cerámicas, que no pueden recuperarse a partir del análisis de simetrías si la pérdida ha sido significativa.

Capítulo 6

6. Conclusiones y Trabajos futuros

6.1. Limitaciones.

La estrategia está basada en un muestreo uniforme y la acumulación de votos. Por lo tanto, las simetrías que involucran regiones pequeñas pueden recibir menos votos. En consecuencia, las simetrías de reflexión más pequeñas tienen menores probabilidades de ser detectadas. De modo similar, una malla de puntos irregular también distorsionará el análisis del objeto.

En las simetrías rotacionales continuas, una vez calculado el eje de simetría, el completado es realizado rotando el objeto alrededor de su eje. No obstante, si el eje de simetría pasa por una parte incompleta del objeto, no es posible completar esa superficie. Como se indicó en el Capítulo 1, las bases de los objetos originales no pudieron ser digitalizadas. En estos casos, será necesario un procesamiento posterior basado en el análisis de otras referencias externas para completar la parte perdida. Un análisis similar se da en las simetrías de reflexión, cuando la superficie perdida se interseca con el plano de reflexión.

Muchos objetos presentan simetría rotacional parcial, pues cuentan con partes que no cumplen con la simetría, como asas. Éstas son detectadas por las simetrías de reflexión, pero el refinamiento de la simetría puede procesar dos veces la parte que también cumple con la simetría de rotación, lo que hace necesario un proceso de segmentación de la malla anterior a la aplicación del análisis de simetrías.

6.2. Trabajos futuros.

El presente trabajo tiene como limitación el no poder completar objetos cuya parte perdida se interseca con su eje de rotación. En estos casos, el proceso de completado necesitará explorar el uso de algoritmos de redes neuronales, que deben poder soportar el volumen de datos y la precisión con la que los objetos fueron digitalizados. En el desarrollo de la red neuronal, se sugiere para una mejor identificación de patrones que los datos de entrada cuenten con una etiqueta por cada objeto para distinguir a los que pertenezcan a una misma cultura.

6.3. Conclusión.

En este trabajo se ha presentado un algoritmo que permite la detección de simetrías parciales de tipos reflexiva y rotacional continua aproximada en objetos tridimensionales que representan restos arqueológicos incompletos. Si bien es cierto el proceso usa parámetros en la determinación de los clústeres y su verificación, éstos son constantes o dependen de características de la muestra y su definición no varía de objeto a objeto. En particular, el método es robusto en la detección de simetrías rotacionales continuas en superficies sin puntos característicos, es decir, sin altos valores de curvatura, usual en las cerámicas del Perú precolombino.

El algoritmo de detección de simetrías tiene una exactitud óptima, lo que facilita el proceso de refinamiento y predicción de la geometría faltante. Este se ejecuta sin alterar las partes obtenidas originalmente y suavizando la transición entre la geometría original y la predicción, llegando en promedio a predecir correctamente el 78% de la geometría faltante.

En conjunto, el método sugerido mejora la precisión en términos de la proporción de superficie reconstruida respecto a los resultados obtenidos por otros trabajos recientes dedicados al análisis de simetrías.



Bibliografía

- [1] Mitra N. J., Pauly M., Wand M. y Ceylan D. (2013). *Symmetry in 3D Geometry: Extraction and Applications*. Computer Graphics Forum 32 (6), pp. 1–23.
- [2] Jin P. & Liu Y. (2022) Fluid space: Digitisation of cultural heritage and its media dissemination. Telematics and Informatics Reports, 8. pp.1-10
- [3] Thrun S. y Wegbreit B. (2005). *Shape from symmetry*. In Proc. Of the IEEE International Conference on Computer Vision ICCV 2005. 2(2), pp.1824–1831.
- [4] Mitra, N. J., Guibas, L. J. y Pauly, M. (2006). *Partial and Approximate Symmetry Detection for 3D Geometry*. ACM Transactions on Graphics. 25 (3), pp. 560-568.
- [5] Simari P., Kalogerakis E. y Singh K. (2006). *Folding meshes: Hierarchical mesh segmentation based on planar symmetry*. In Proceedings of Symposium of Geometry Processing, pp. 111–119.
- [6] Pauly M., Mitra N. J., Wallner J., Pottman H. y Guibas L. (2008). *Discovering structural regularity in 3D geometry*. ACM Transactions on Graphics. 27(3), pp. 43:1-43:11.
- [7] Bokeloh M., Berner A., Wand M., Seidel H.-P. y Schilling A. (2009). *Symmetry detection using line features*. Computer Graphics Forum. Proceedings Eurgraphics 2009, 28, 2, pp. 697–706.
- [8] Lipman Y., Chen X., Daubechies I. y Funkhousert. (2010) *Symmetry factored embedding and distance*. ACM Transactions on Graphics. 29(4), pp. 103:1–103:12.
- [9] Son, K., Almeida, E.B. y Cooper, D.B. (2013). Axially Symmetric 3D Pots Configuration System Using Axis of Symmetry and Break Curve. *2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 257-264.
- [10] Sipirán I., Gregor R. y Schreck T. (2014). *Approximate symmetry detection in partial 3D meshes*. Computer Graphics Forum. 33(7), pp.131-140.
- [11] Mavridis, P., Sipirán I., Andreadis, A. y Papaioannou, G. (2015). *Object Completion using k-Sparse Optimization*. Computer Graphics Forum, 34 (7), pp. 13-21.
- [12] Shi, Z., Alliez, P., Desbrun, M., Bao, H. y Huang, J. (2016), *Symmetry and Orbit Detection via Lie-Algebra Voting*. Computer Graphics Forum, 35(5), pp. 217-227.
- [13] Wang, Y., & Zhang, H. (2012). *The Application of Digital Technology in Ceramic Cultural Relics Restoration*. Information Technology Convergence and Services.
- [14] Sipirán I. (2017) *Analysis of partial axial symmetry on 3d surfaces and its application in the restoration of cultural heritage objects*. In 2017 IEEE International Conference on Computer Vision Workshops (ICCVW), pp. 2925–2933.
- [15] Ji, P. y Liu, X. (2019). *A fast and efficient 3D reflection symmetry detector based on neural networks*. Multimedia Tools and Applications, 78, pp. 35471 - 35492.
- [16] Hong, J.H., Kim, Y., Wi, K., y Kim, J. (2019). *PotSAC: A Robust Axis Estimator for Axially Symmetric Pot Fragments*. IEEE/CVF International Conference on Computer Vision Workshop (ICCVW), pp. 1421-1428.
- [17] Nagar, R., y Raman, S. (2020). *3DSymm: Robust and Accurate 3D Reflection Symmetry Detection*. Pattern Recognition, 107, 107483.

- [18] Hruda, L., Kolingerová, I., y Váša, L. (2022). *Robust, fast and flexible symmetry plane detection based on differentiable symmetry measure*. The Visual Computer: International Journal of Computer Graphics, 38(24), pp. 555-571.
- [19] Rumezhak T., Doboševych O., Hryniv R., Selotkin V., Karpiv V., Maksymenko M. (2021). *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV) Workshops*, pp. 2542-2550.
- [20] Xu, J., Cao, W., Liu, B. y Jiang, K. (2021). *Object restoration based on extrinsic reflective symmetry plane detection*. The Visual Computer, 38, pp. 3627 - 3642.
- [21] Hruda, L., Kolingerová, I., Lávička, M., & Maňák, M. (2022). *Rotational symmetry detection in 3D using reflectional symmetry candidates and quaternion-based rotation parameterization*. Computer Aided Geometric Design, 98, 102138.
- [22] Žalik, B., Strnad, D., Kohek, Š., Kolingerová, I., Nerat, A., Lukač, N. y Podgorelec, D. (2022). *A Hierarchical Universal Algorithm for Geometric Objects' Reflection Symmetry Detection*. Symmetry, 14(5), 1060.
- [23] Andreadis A., Gregor R., Sipirán I., Mavridis P., Papaioannou G. y Schreck T. (2015). *Fractured 3D object restoration and completion*. Proceedings of ACM SIGGRAPH Posters (SIGGRAPH '15). ACM, NY, USA, Article 74.
- [24] Gregor R., Sipirán I., Papaioannou G., Schreck T., Andreadis A. y Mavridis P. (2014). *Towards automated 3D reconstruction of defective cultural heritage objects*. Proceedings of the 12th Eurographics Workshop on Graphics and Cultural Heritage. Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, pp. 135-144.
- [25] Sipirán I. (2018). *Completion of cultural heritage objects with rotational symmetry*. Computer Graphics Forum. 33(7), pp.131-140. In EUROGRAPHICS Workshop on 3D Object Retrieval. EUROGRAPHICS Association, Geneve, Switzerland, pp. 87–93.
- [26] Cazals F. y Pouget M. (2005) *Estimating differential quantities using polynomial fitting of osculating jets*. Computer Aided Geometric Design, 22(2), Conference version: Symposium on Geometry Processing 2003.
- [27] Comaniciu D. y Meer P. (2002) *Mean shift: A robust approach toward feature space analysis*. IEEE PAMI 24, pp. 603–609.
- [28] Koutsoudis, A., Pavlidis, G., Liami, V., Tsiafakis, D. y Chamzas, C. (2010). *3D Pottery content-based retrieval based on pose normalisation and segmentation*. Journal of Cultural Heritage, 11, pp. 329-338.
- [29] Liu, M., Sheng, L., Yang, S., Shao, J., & Hu, S. (2019). *Morphing and Sampling Network for Dense Point Cloud Completion*. AAAI Conference on Artificial Intelligence.
- [30] Pan, L., Chen, X., Cai, Z., Zhang, J., Zhao, H., Yi, S., & Liu, Z. (2021). *Variational Relational Point Completion Network*. 2021 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), pp. 8520-8529.
- [31] Huang, Z., Yu, Y., Xu, J., Ni, F., & Le, X. (2020). *PF-Net: Point Fractal Network for 3D Point Cloud Completion*. IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), pp. 7659-7667.

- [32] Sipiran, I., Mendoza, A., Apaza, A., & Lopez, C. (2022). *Data-Driven Restoration of Digital Archaeological Pottery with Point Cloud Analysis*. *International Journal of Computer Vision*, 130, pp. 2149-2165.
- [33] Rusinkiewicz, S.M., & Levoy, M. (2001). *Efficient variants of the ICP algorithm*. *Proceedings of the 3rd International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling (3DIM)*, pp. 145-152.
- [34] Meyer M., Desbrun M., Schröder P. & Barr A. (2003) *Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds*. *International Workshop on Visualization and Mathematics*.
- [35] Panozzo, D., Puppo E., Rocca L. (2010). *Efficient multi-scale curvature and crease estimation*. *2nd International Workshop on Computer Graphics, Computer Vision and Mathematics*, pp. 9-16.
- [36] Leow W. K., Li R. (2004). *The analysis and applications of adaptive-binning color histograms*. *Computer Vision and Image Understanding*, 94(1-3), pp. 67-91.
- [37] Lengauer S., Sipiran I., Preiner R., Schreck T., Bustos B. (2021). *A Benchmark Dataset for Repetitive Pattern Recognition on Textured 3D Surfaces*. *Computer Graphics Forum*. 40(5), pp. 1-8
- [38] Limp F., Payne A., Simon K., Winters S., Cothren J. (2011). *Developing a 3D digital heritage ecosystem: from object to representation and the role of a virtual museum in the 21st century*. *Internet Archaeology*. 30
- [39] Funk C., Lee S., Oswald M.R., Tsogkas S., Shen W., Cohen A., Dickinson S., Liu Y. (2017). *ICCV Challenge: Detecting Symmetry in the Wild*, *IEEE International Conference on Computer Vision Workshops (ICCVW)*. Venice, Italy, pp. 1692-1701
- [40] Guidi, G., Frischer, B.D. (2020). *3D Digitization of Cultural Heritage*. In *3D Imaging, Analysis and Applications*, Springer Nature, Chapter 13, pp 631-697.
- [41] Gregor G., Bauer D., Sipiran I., Perakis P. & Schreck T. (2015). *Automatic 3D object fracturing for evaluation of partial retrieval and object restoration tasks*. In *Proceedings of the 2015 Eurographics Workshop on 3D Object Retrieval (3DOR)*. Eurographics Association, pp. 7-14.
- [42] Ovsjanikov, M., Sun, J. and Guibas, L. (2008), *Global Intrinsic Symmetries of Shapes*. *Computer Graphics Forum*, 27(5), pp.1341-1348
- [43] Xu K., Zhang H., Tagliasacchi A., Liu L., Li G., Meng M. & Xiong Y. (2009) *Partial intrinsic reflectional symmetry of 3D shapes*. *ACM Transactions on Graphics*. 28(5), pp.1-10
- [44] Andreadis A., Papaioannou G. y Mavridis P. (2015). *Generalized Digital Reassembly using Geometric Registration*. *Digital Heritage International Congress*, pp. 549-556.
- [45] Li, B., Johan, H., Ye, Y. y Lu, Y. (2016). *Efficient 3D reflection symmetry detection: A view-based approach*. *Graphical Models*, 83, pp. 2-14.
- [46] Low, K. (2004). *Linear Least-Squares Optimization for Point-to-Plane ICP Surface Registration*. TR04-004, Department of CS, University of North Carolina at Chapel Hill.