

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado



Análisis de la producción académica de Secciones Cónicas en la
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia
Universidad Católica del Perú en el período del 2014 al 2020

Tesis para optar el grado académico de Maestra en Enseñanza de
las Matemáticas que presenta:

Wendy Sayuri Yarihuamán Lima

Asesora:

Katia Vigo Ingar

Lima, 2023


Informe de Similitud

Yo, KATIA VIGO INGAR, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis titulada “Análisis de la producción académica de Secciones Cónicas en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú en el período del 2014 al 2020”, de la autora Wendy Sayuri Yarihuamán Lima, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 13%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 01/08/2022.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 08 de febrero del 2023

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: <u>VIGO INGAR KATIA</u>	
DNI: 07535055	Firma 
ORCID: 0000-0001-6814-2492	



Dedicado a mí madre, Virginia, y a mi padre, Héctor, debido a su apoyo a lo largo de esta aventura. Pese a los momentos difíciles siempre me incentivan a no abandonar mis estudios y seguir adelante.

AGRADECIMIENTOS

Le doy las gracias a la que fue mi asesora, la Dra. Katia Vigo Ingar, por la orientación, paciencia, exigencia y preocupación en la realización de mi investigación. Agradezco sus sugerencias y admiro su ardua labor con sus asesorados.

A los miembros del jurado: Cintya Gonzales Hernández y Flor Carrillo Lara, por sus aportes y correcciones en la presente investigación.

Asimismo, a la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), en especial a la Maestría de Enseñanza de Matemáticas en la Línea Investigativa de Visualización y Tecnología en la Educación Matemática (TecVEM), debido a la formación brindada a mi persona, que permitió culminar mi estudio.

Por otro lado, le agradezco a mis profesores de Maestría, que son el Dr. Uldarico Malaspina, la Dra. Jesús Flores Salazar, Dra. Cecilia Gaita, Dr. Francisco Ugarte y Dra. Nélida Medina por la formación recibida, por aquellas clases impartidas llenas de aprendizajes significativos.

A mi familia, en especial a mi padre, porque a pesar de los momentos difíciles que en la actualidad está viviendo siempre me anima a seguir estudiando.

RESUMEN

El presente estudio realizado se tuvo como propósito analizar las características fundamentales de los estudios realizados en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas (MEM) de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), las cuales tuvieron relación con la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas en el período 2014 – 2020, mediante una revisión documentada de los estados de arte. Para llevar a cabo nuestro objetivo buscamos aclarar la siguiente incógnita, *¿cuáles son las características de las investigaciones desarrolladas en relación con las secciones cónicas, en la MEM de la PUCP en el período 2014 – 2020?* Para dar respuesta a esta interrogante, se realizó una recolección de todas las tesis que se produjeron durante dicho período, se estableció nuestra unidad de análisis documental, que viene a ser una manera de estudio tipo técnico, es decir, un grupo de operaciones de índole intelectual. Estas técnicas e instrumentos consistieron en organizar y describir las tesis y de esta forma poder elaborar fichas. Para esto, no solo tuvimos que revisar los resúmenes de las investigaciones realizadas, sino que también la totalidad de las tesis para elaborar nuestras reseñas críticas. Al revisar las ocho tesis encontradas sobre secciones cónicas de la MEM, pudimos concluir que la mayoría emplean la metodología Ingeniería Didáctica seguida por la de tipo cualitativa; además, las tesis mencionadas se realizaron en el ambiente profesor – estudiante donde el investigador era el profesor. También podemos mencionar que hay concordancia entre el marco teórico y la metodología utilizada de las tesis analizadas; con respecto al uso de la tecnología, únicamente se empleó el software GeoGebra, y se obtuvo buenos resultados del aprendizaje y enseñanza de los estudiantes. Como resultado de esta investigación se pudo encontrar que la sección cónica más utilizada fue la elipse y la que no se ha considerado como objeto de estudio aún en las tesis de maestría es la sección cónica hipérbola.

Palabras clave: Secciones cónicas, estado del arte, investigación cualitativa.

ABSTRACT

The objective of this paper is to analyze the main characteristics of the research carried out in the Master of Mathematics Teaching (MEM) of the Pontifical Catholic University of Peru (PUCP) related to the teaching and learning of conic sections in the period 2014 - 2020, through a bibliographic review of the state-of-the-art type. To carry out our objective, we seek to answer the research question: ¿What are the characteristics of the research carried out in relation to conic sections, in the MEM of the PUCP in the period 2014 - 2020? To answer this question, a collection of all the theses that were produced during that period was carried out, confirming our documentary analysis unit, which is a form of technical research, that is, a group of intellectuals. These techniques and instruments consisted of organizing and describing the theses and thus being able to prepare files. For this, we not only had to review the summaries of the research carried out, but also the totality of the theses to prepare our critical reviews. When reviewing the eight theses found on conic sections of the MEM, we were able to conclude that the majority used the Didactic Engineering methodology followed by the qualitative type. In addition, the aforementioned theses were carried out in the teacher-student environment where the researcher was the teacher. We can also mention that there is agreement between the theoretical framework and the methodology used in the theses analyzed; regarding the use of technology, only the GeoGebra software was used, and good results were obtained in the teaching and learning of the students. As a result of this research, it was found that the most used conic section was the ellipse and the one that has not been considered as an object of study even in master's theses is the hyperbola conic section.

Keywords: Conic sections, bibliographical revision, elaboration of cards

ÍNDICE DE CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	iii
RESUMEN	iv
ABSTRACT	v
ÍNDICE DE CONTENIDO	vi
ÍNDICE DE TABLAS	vii
ÍNDICE DE FIGURAS	ix
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA.....	3
1.1 Antecedentes	3
1.2 Justificación	9
1.3 Pregunta y objetivos de investigación	15
CAPÍTULO II: LAS SECCIONES CÓNICAS.....	16
2.1 Aspectos matemáticos	16
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA.....	23
3.1 Tipo de investigación.....	24
3.2 Unidad de análisis documentales	26
CAPÍTULO IV: PRODUCCIONES ACADÉMICAS.....	30
4.1 Organización de datos	32
4.2 Elaboración de fichas de las tesis	37
CAPÍTULO V: CONSIDERACIONES FINALES.....	68
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73
ANEXOS O APÉNDICE	78

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Estándares de aprendizaje de la competencia Resuelve Problemas de forma, movimiento y localización.....	10
Tabla 2: Estándares de aprendizaje del área de matemáticas currículo nacional, 2016	10
Tabla 3: Resumen relativo a las cónicas	22
Tabla 4: Matriz bibliográfica.....	29
Tabla 5: Modelo de elaboración de fichas	32
Tabla 6: Año de sustentación	32
Tabla 7: Marco teórico empleado en las investigaciones.....	33
Tabla 8: Metodología empleada en las investigaciones.....	34
Tabla 9: Secciones cónicas utilizadas en las investigaciones.....	35
Tabla 10: Uso de software.....	35
Tabla 11: Relación de las investigaciones producidas en la PUCP desde 2014 al 2020	36
Tabla 12: Investigación propuesta por León (2014).....	37
Tabla 13: Investigación propuesta por Díaz (2014)	40
Tabla 14: Investigación propuesta por Echevarría (2016).....	44
Tabla 15: Investigación propuesta por Lara (2016).....	47
Tabla 16: Investigación propuesta por Olivares (2018).....	50
Tabla 17: Investigación propuesta por Olano (2018)	53
Tabla 18: Investigación propuesta por Contreras (2019)	55
Tabla 19: Investigación propuesta por Amaya (2020).....	59
Tabla 20: Distribución de las tesis revisadas en la MEM de la PUCP según su autor y objetivo general.....	61
Tabla 21: Distribución de las 8 tesis de la MEM de la PUCP según su autor, sujetos de investigación y nivel de estudios	64

Tabla 22: Distribución de las ocho tesis empleadas según autor y sus recursos utilizados 65

Tabla 23: Distribución de las 8 tesis de la MEM de la PUCP, según el autor y el año de publicación
..... 67



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Malla curricular – Programa de contenidos de las carreras de Ingeniería – PUCP ...	11
Figura 2: Malla curricular – Programa de contenidos de Arquitectura – PUCP	12
Figura 3: Cónicas en la arquitectura	13
Figura 4: Ejemplo de una sección cónica	17
Figura 5: Sección cónicas según el ángulo de inclinación	17
Figura 6: Elementos de la circunferencia.....	18
Figura 7: Elementos de la parábola.....	19
Figura 8: Elementos de la elipse	20
Figura 9: Elementos de la hipérbola.....	21
Figura 10: Procedimientos metodológicos.....	28
Figura 11: Elaboración de fichas	30
Figura 12: Repositorio institucional de la PUCP	31

INTRODUCCIÓN

Es notorio el crecimiento en magnitud respecto a la cantidad de información producida diariamente a nivel mundial, debido a que no solo se limita a la producción de un tema específico sino que esta se realiza en todos los campos de la investigación. Esto se puede evidenciar dentro del universo de las TIC, a través de la consolidación del internet. Este recurso existente es un medio que permite la trasmisión de los estudios, los cuales hacen posible la consulta de los catálogos de las bibliotecas, revistas internacionales, base de datos y repositorios digitales donde podemos encontrar distintos trabajos de licenciaturas, maestrías y doctorados de las distintas universidades a nivel mundial.

La presente investigación está motivada por la necesidad de organizar la información respecto a la producción académica del tema de secciones cónicas en la Maestría en la Enseñanza de Matemáticas (MEM), de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP); gracias a ello, surge la siguiente interrogante: ¿cuáles son las características de las investigaciones desarrolladas en relación con las secciones cónicas, en la MEM de la PUCP en el periodo 2014 – 2020? Para poder responder esta interrogante nos proponemos alcanzar el siguiente objetivo general: analizar las principales características de las investigaciones realizadas en la MEM de la PUCP relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas en el período 2014 – 2020.

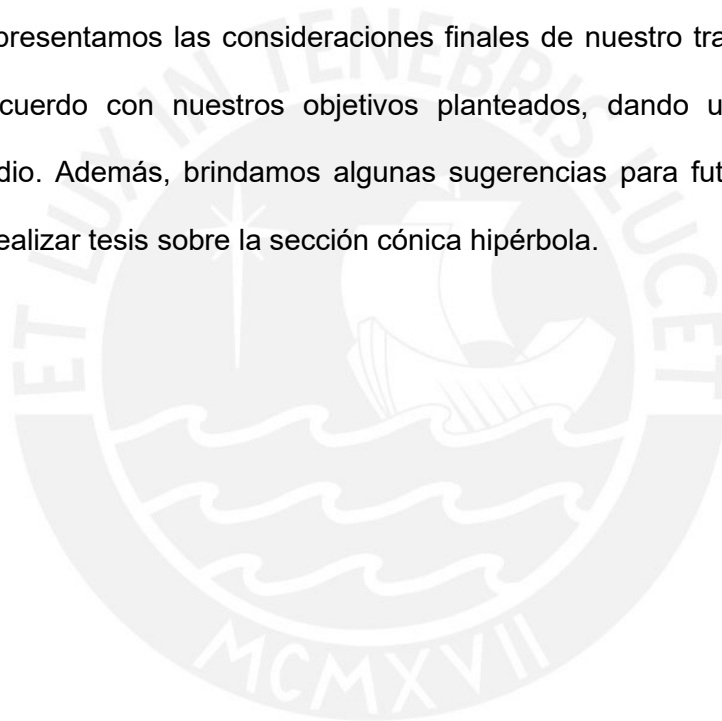
De acuerdo con lo planteado anteriormente, estructuramos el desarrollo de la investigación con cuatro capítulos que describiremos brevemente en las siguientes páginas.

Dentro del capítulo número uno, se expresan las problemáticas de nuestra investigación, dentro del cual se encuentran los antecedentes, la justificación, el problema del estudio, como también la incógnita de nuestro trabajo y la finalidad.

Asimismo, en el capítulo número dos se evidencian las secciones cónicas, dentro del cual abordamos los aspectos matemáticos como definiciones, conceptos y algunos gráficos que nos servirá de complemento a lo largo de nuestro trabajo.

En el tercer capítulo presentamos la metodología usada en nuestro trabajo la cuál es la cualitativa, el panorama de las investigaciones de tesis revisadas, haciendo la elaboración de fichas y reseñas críticas mediante las unidades de análisis documentales de cada una de las tesis de maestría relacionadas al área de las secciones cónicas.

Por último, presentamos las consideraciones finales de nuestro trabajo que incluye las conclusiones de acuerdo con nuestros objetivos planteados, dando una respuesta a las incógnitas del estudio. Además, brindamos algunas sugerencias para futuras investigaciones como por ejemplo realizar tesis sobre la sección cónica hipérbola.



CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

Dentro de este capítulo, desarrollaremos el problema de estudio, es decir, describiremos algunos estudios realizados como referencia que incluyen el aprendizaje y enseñanza de las secciones cónicas. Además, presentaremos los antecedentes, la justificación, la pregunta de investigación, objetivos y la metodología usada en nuestro estudio.

1.1 Antecedentes

La evolución de la ciencia implica la producción de nuevos conocimientos científicos en distintos ámbitos de la ciencia. En ese sentido, su carácter progresivo y acumulativo ha causado en la actualidad una gran expansión de la literatura encontrada a disposición nuestra. Dentro de este contexto, éstas tienen muchas ventajas, pero la sencillez de ingreso a todos los datos acumulados puede ser convertidos a una si se requiere realizar una investigación exhaustiva de un tema específico, ya que podemos perdernos en el gran volumen de toda la documentación disponible como lo menciona Ardenghi (2008, como se citó en Amorim, 2012); por ello, es necesario organizar los temas según las áreas de investigación.

Respecto a investigaciones de estados de arte tenemos la investigación realizada por Casallas y Páez (2016), que hicieron un trabajo de carácter cualitativo, se basa en la examinación y recaudo de información con la finalidad de desvelar incógnitas innovadoras mientras se da el procedimiento de interpretación. Dicho estudio tuvo como objetivo general describir las nuevas tendencias en los estudios sobre el aprendizaje y enseñanza de los factores cónicos en Colombia. Para ello analizaron y examinaron 14 trabajos de investigación, entre pregrado y posgrado, afines a los procedimientos de aprendizaje y enseñanza en las secciones cónicas, teniendo como finalidad identificar las características de cada uno y establecer las tendencias pedagógicas utilizadas. La investigación concluye que, de los 14 trabajos, 11 tienen elementos de la pedagogía activa, que consiste en manipular y experimentar con materiales, 12 contienen

algún punto propio de pedagogías contemporáneas y 10 tienen un enfoque más inclinado a actividades contemporáneas – activistas, que están directamente dirigidas al aprendizaje y enseñanza del área cónica.

En la investigación de dichos autores es fundamental para nuestro trabajo pues es de tipo documental, recopila documentos pertinentes que cumplan con condiciones requeridas con el objetivo del estudio, el cual fue cualitativo y se enfocó en el aprendizaje y enseñanza de las secciones cónicas en la Educación Secundaria en el altiplano Cundiboyacense. Esto nos permitió darnos una idea general de cómo organizar y distribuir nuestro trabajo.

Por otro lado, Ramírez (2015) realizó un trabajo que tuvo como finalidad elaborar estados de arte en tesis verificadas en seminarios dentro de la Maestría en Educación producidas durante el plazo temporal del 2009 – 2010. Este trabajo mostró una gran cantidad de tesis que aportan en la construcción de conocimiento, educativo, político, social y estructura de línea. El autor también analizó 13 tesis aprobadas, que se realizaron entre el 2009 y 2010, y seis tesis donde el investigador utiliza como técnica la observación, lo que permite tomar en cuenta los acontecimientos. En la investigación se desarrolla el problema, se recopila, organiza y valoran las conclusiones y datos, los cuales determinan las resoluciones de conflictos planteados.

Otro trabajo importante para nuestra investigación es el realizado por Montañez y Sánchez (2019), que hacen un estado de arte donde analizan los trabajos de grado de la Maestría en Pedagogía en la Universidad Santo Tomás (Colombia), realizados entre los años del 2013 al 2017. Esta investigación permite saber las características técnicas y metodológicas que se utilizan en dicha maestría para efectuar la propuesta de investigación de los trabajos de grado y se evidencia hallazgos con tendencia de la educación actual para fortalecer la formación y cultivar el estudio con un grado posgradual en el área pedagógica.

En el estudio realizado por los autores se analizan 73 trabajos de grado que tuvieron el siguiente resultado: en la categoría de “Líneas de Investigación”, 44 actividades del área de

Maestría, los cuales se inscribieron en la rama de Prácticas pedagógicas y mediaciones; 17 trabajos se ubicaron en el área de evaluación institucional del aprendizaje; y, finalmente 12 siguieron la línea de Humanismo y Educación. Para estos trabajos de grado, los niveles de educación formal fueron de básica primaria, preescolar, media vocacional y educación secundaria. En cuanto a las áreas tomadas, estas fueron las materias de Política, Historia, Democracia, Ciencias sociales, Análisis de práctica y Filosofía Cultura de Paz.

En el aspecto teórico metodológico del trabajo de los autores, en base a setenta y tres tesis que concluyen que la teoría del estado se investiga es la maestría, y que además es visto como una situación superficial. Estas tesis son investigaciones cualitativas que se basan en la docencia, asimismo, existen múltiples vacíos dentro de la metodología, como también en las propuestas de investigación. En cuanto a la caracterización de objetivos de estas 73 tesis, sus trabajos son del cuarto nivel, en los cuales 25 tesis utilizan el verbo analizar, 17 tesis usan el verbo comprender, 10 tesis aplican el verbo evaluar, nueve investigaciones utilizan el verbo conocer, ocho utilizan el verbo aplicar y cuatro trabajos usan el verbo sintetizar. El 65,9% de los antecedentes bibliográficos hacen referencias a libros y el 35,1% son de artículos.

Finalmente, los investigadores recomiendan a los maestrantes, docentes y directores mejorar en lo académico y administrativo, así como también en los procedimientos educacionales como la solución y calidad de educación y problemas sociales. Además, es necesario contar con publicaciones de productos que midan los impactos y la optimización de la docencia en la mayoría de sus grados, así como la capacidad de promoción, desarrollando proyectos de la realidad educativa.

Respecto a investigaciones de enseñanza y aprendizaje de las cónicas tenemos la realizada por Sánchez (2019) en la que tomó una muestra de 6 estudiantes (de entre 22 estudiantes) de décimo grado entre las edades de 15 a 16 años de una Institución Educativa privada de la ciudad de Tunja. El propósito de esta investigación fue identificar la comprensión

del objeto matemático parábola. Para esto, se implementaron actividades matemáticas con niveles de conflicto ascendente que movilizaran los conocimientos previos y posteriores, considerando también la creatividad desde distintos contextos y la autonomía, utilizando argumentos de lenguaje común para intervenir con una participación inmediata.

Teniendo en cuenta las dificultades de estos estudiantes en el aprendizaje de la parábola, se consideraron como categorías de análisis el tratamiento y conversión planteadas por Duval y Saenz (2016). Se aplicó como técnicas e instrumentos para la recolección y análisis de la información la observación participante, el cuestionario y la entrevista.

Se observó el proceso desarrollado por los estudiantes en actividades propuestas a los estudiantes para el aprendizaje de la parábola. Estas fueron planificadas considerando el tratamiento y la conversión (tipos de transformación semiótica) con los registros de representación gráfico, verbal y algebraico. Se aplicó un cuestionario con preguntas abiertas, detectándose errores y dificultades en el conocimiento de la parábola mediante estas transformaciones semióticas. Luego, se ejecutó una entrevista semiestructurada a los estudiantes que participaron en este cuestionario para completar el análisis del proceso realizado en sus respuestas que dieron en el cuestionario.

Se concluyó que las dificultades que tuvieron los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas de tratamiento y conversión estaban relacionadas con falta de conocimientos previos tales como: factorización, ecuaciones y operaciones con números reales. Además, no lograron la conversión del registro algebraico al gráfico, lo contrario sí pudieron desarrollarlo. Por otro lado, el tratamiento en el registro verbal fue uno de los menos desarrollados. En las entrevistas se constató que los estudiantes conocen el proceso que se debe desarrollar en el registro algebraico; sin embargo, no lo ejecutan correctamente. Finalmente, se corrobora lo que menciona Duval que para comprender un objeto matemático es necesario que se conozca y se ejecuten los diferentes tipos de representación semiótica.

No obstante a estas dificultades, mediante las actividades propuestas que consideraron la movilización del tratamiento y la conversión, los estudiantes evidenciaron ser más creativos, participativos y emotivos, logrando mejoras en su desempeño de las diversas tareas que tienen que realizar. Según continuaba la participación de los estudiantes, los avances eran más notorios, pues el desarrollo de las tareas era más rápido y abordaban la situación didáctica con más facilidad, consultando sus inquietudes en el salón de clases.

La investigación de Barrios (2018) también está relacionada con el objeto matemático parábola. En esta investigación se realizó una sistematización de una experiencia que se hizo en con una muestra de 20 estudiantes de grado décimo de una institución educativa de Santiago de Cali (Colombia). La experiencia fue el diseño una secuencia didáctica para reducir las dificultades de los estudiantes en los pensamientos espacial y variacional para la comprensión de la parábola. Para ello se consideraron los aportes de los autores. D Amore, Duval y Brousseau y algunas actividades se desarrollaron con base en la teoría antropológica de lo didáctico de Chevallard y la resolución de problemas investigadas por Shoenfeld. La secuencia didáctica se efectuó con el desarrollo de actividades en busca de la conceptualización de la parábola y la movilización de saberes previos y posteriores para mejorar el desempeño académico de los estudiantes. Se consideró la modelización de diferentes sistemas de representación mediante el tratamiento y conversión del lenguaje algebraico al gráfico y viceversa. Se aplicó el GeoGebra con el que se motivó a los estudiantes y permitió la participación y creatividad en la ejecución de las tareas. Las actividades se organizaron en los seis momentos de acuerdo con la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1999).

Las actividades fueron desarrolladas para que se pueden efectuar varios registros de representación semiótica. Esto junto con el uso adecuado del GeoGebra, se obtuvo mejoras después de la aplicación del primer momento de intervención. Además de mejoras en los

procesos de movilización de los sistemas de representación, los estudiantes participaron, exponiendo con propiedad, aportando como actores en la construcción de la parábola.

Las investigaciones de Sánchez (2019) y Barrios (2018) muestran que las actividades tipo tarea o ejercicios que deben ser efectuadas por los estudiantes deben tener en cuenta los diferentes registros de representación semiótica de Duval. Con ello se lograría un aprendizaje significativo de parte de los estudiantes. Y por supuesto, son los docentes quienes tienen que plantear y enseñar los objetos matemáticos con actividades diseñadas para el manejo de los distintos registros de representación. Como menciona Gonzáles y Novak (2004) citado en Cisternas, Gonzáles y Valdés (2014) el aprendizaje significativo es cuando las nuevas informaciones adquieren significado a través de la interacción con conceptos existentes, es decir se entiende su sentido.

Además, se constata que la inclusión de software matemáticos, como el GeoGebra permiten una interacción con el estudiante, pues como menciona (Vargas y Gamboa, 2012). ayuda en enriquecer la imagen conceptual que está muy ligada al concepto en Geometría.

Por otro lado, Garzón (2020) analiza el aporte del marco teórico situaciones didácticas en la comprensión del concepto de métrica para el estudio de las diferentes cónicas considerando su definición como lugar geométrico. La muestra de estudio fueron estudiantes de décimo grado de la ciudad de Tunja (.....) . Se realizó una investigación-acción (planeación, acción, observación y reflexión) en dos ciclos, Se diseñaron situaciones didácticas desarrolladas con medios virtuales que se analizaron siguiendo a Brousseau (2007). Uno de los principales resultados fue que los estudiantes lograron transitar por varios registros de representación semiótica para las cónicas: en las diferentes métricas, pudieron realizar conversiones del registro verbal al registro gráfico y tratamientos con el registro gráfico.

En todas estas investigaciones, se puede observar que con la aplicación de diferentes metodologías y actividades diseñadas considerando la tecnología y en unión de los distintos marcos teóricos como la teoría de registros semióticos y situaciones didácticas, se logra una

mejora en el aprendizaje de los estudiantes y además, sirve de reflexión para la toma de acción en la mediación de la enseñanza de los docentes con sus estudiantes para contribuir con un aprendizaje constructivista, en que el estudiante no sea pasivo en su aprendizaje.

1.2 Justificación

En diversas investigaciones (Santa y Jaramillo, 2011, citado en Calderón y Peñuela, sf, Vallejo, 2014) se ha constatado que el estudio de las cónicas, tanto en el nivel de educación básica como superior, se ha abordado mediante metodologías tradicionales basadas en la exposición magistral del profesor (con procedimientos algebraicos, ejercicios que se tiene a memorizar el proceso, etc.) y esto ha contribuido poco en el aprendizaje de los estudiantes, pues tienen gran dificultad en la formalización axiomática y la aplicación de los contenidos enseñados. La falta de conocimiento de este tema, por supuesto dificulta también la comprensión de otros temas o áreas de conocimiento.

Por otro lado, diversas investigaciones realizadas dan cuenta del progreso que han tenido los estudiantes en el aprendizaje de las cónicas mediante la aplicación de diversas estrategias metodológicas y recursos didácticos como el uso de tecnología como el GeoGebra y llevado de la mano del uso de marcos teóricos. tales como situaciones didácticas, teoría de representación semiótica (Barrios, 2018, Gonzáles, 2018, Sánchez, 2019)

Respecto al contexto peruano, en el programa curricular de matemática para la educación secundaria (según MINEDU, 2016), una de las cuatro competencias que deben desarrollar los estudiantes es el relacionado con los problemas de regularización y localización-forma, que a la vez está vinculado con el tema de secciones cónicas. Sin embargo, dicho tema es abordado en los últimos grados de formación académica en el 4° y 5° de educación secundaria de manera superficial y rápida (específicamente los temas de parábola, circunferencia y elipse que están incluidos en la competencia de “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización, - Ver

Tabla 1 y 2). Ello implica una base insuficiente de conocimientos de los estudiantes cuando escalan a estudios de nivel superior, donde los contenidos de geometría analítica (en temas de elipse, parábolas, circunferencias, elipses, hipérbolas) son fundamentales pues están presentes entre los semestres iniciales de las carreras universitarias de ingeniería y arquitectura según las mallas curriculares de las distintas universidades.

Tabla 1: Estándares de aprendizaje de la competencia Resuelve Problemas de forma, movimiento y localización.

Nivel/Ciclo	Descripción de los niveles de desarrollo de la competencia
<p>Nivel esperado al final del ciclo VII</p>	<p>Resuelve los problemas que poseen particularidades con formas geométricas que se visualizan compuestas, sus factores, puntos notables, ubicación, cuerpos de revolución, relaciones con triángulos, propiedades lineales, razones trigonométricas, propiedad de puntos accesibles, movimiento, planos a escala y trayectorias completas. Manifiestan su entendimiento asociado con las medidas sobre los lados de proyección y triángulos, el contraste de las transformaciones geométricas que mantienen su forma y las que poseen las medidas de objetos que estructuran cuerpos de revolución, utilizando estructura con un compás y regla. Categoriza los cuerpos geométricos y polígonos de acuerdo a las propiedades, identificando la comprensión de una clase a otra. Moldea, escoge y mezcla múltiples métodos, recursos y procesos para establecer el perímetro, volumen, longitud, y área de los elementos compuestos, asimismo, contrastar las afirmaciones en relación a enunciados ocultos específicos de la propiedad de las formas geométricas. Descarta, justifica y corrobora la veracidad de las afirmaciones a través de las propiedades geométricas o contraejemplos.</p>

Fuente: Diseño Curricular Nacional (2016, p. 158)

Tabla 2: Estándares de aprendizaje del área de matemáticas currículo nacional, 2016

Nivel	Descripción de los niveles de desarrollo de la competencia
<p>Nivel destacado</p>	<p>Analiza problemática modelando según su particularidad y ubicación de objetos los cuales poseen propiedades de formas geométricas, desplazamiento y ubicación utilizando las coordenadas cartesianas, Cómo también ecuaciones de las parábolas y elipses, y composiciones de alteraciones de formas bidimensionales. Manifiesta su entendimiento En relación a las asociaciones métricas entre los factores de polígonos y circunferencias inscritas; asimismo, utiliza la trayectoria de los objetos con ecuaciones de elipse, utilizando múltiples representaciones. Categoriza las formas geométricas compuestas según sus propiedades y criterios propios. Incluye y mezcla procesos y métodos para establecer las ecuaciones de las elipses, rectas y parábolas; Cómo también de herramientas es recursos en la estructuración de formas geométricas. Describe las afirmaciones en relación a las asociaciones de las definiciones geométricas, la sustenta y elabora hipótesis que dejan en evidencia su solvencia en las definiciones.</p>

Fuente: Diseño Curricular Nacional (2016, p. 155)

En cuanto a la educación superior universitaria, en específico en la Facultad de Estudios Generales de Ciencias de la PUCP se puede observar que el curso Álgebra Matricial y Geometría Analítica es una materia transversal en muchas carreras de ingeniería, y sirve como prerrequisito para los cursos posteriores (Figura 1). Sin embargo, los conceptos de sectores cónicos se abordan en el capítulo uno, aproximadamente en la octava semana, según el sílabo de dicho curso.

Figura 1: Malla curricular – Programa de contenidos de las carreras de Ingeniería – PUCP

<p style="text-align: center;">CICLO I INGENIERÍA CIVIL- INGENIERÍA ELECTRÓNICA- INGENIERÍA DE LAS TELECOMUNICACIONES- INGENIERÍA INDUSTRIAL -INGENIERÍA INFORMÁTICA</p>	<p style="text-align: center;">CICLO I INGENIERÍA BIOMÉDICA</p>
<ul style="list-style-type: none"> • FUNDAMENTOS DE FÍSICA • COMUNICACIÓN ACADÉMICA • <u>ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA.</u> • FUNDAMENTOS DE CÁLCULO • QUÍMICA 1 • LABORATORIO DE QUÍMICA 1 	<ul style="list-style-type: none"> • INTRODUCCIÓN A LA INGENIERÍA BIOMÉDICA • COMUNICACIÓN Y REDACCIÓN • FILOSOFÍA • FUNDAMENTOS DE FÍSICA • <u>ÁLGEBRA MATRICIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA</u> • FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

Unidad didáctica
Capítulo 1: Geometría Analítica (17 horas)
Descripción general de la unidad
Haciendo uso de un sistema de coordenadas cartesianas describiremos las diferentes secciones cónicas mediante una ecuación de segundo grado en dos variables.
Contenidos
Sistema de coordenadas cartesianas. Distancia entre dos puntos en el plano. División de un segmento en una razón dada. Aplicaciones. Ángulo de inclinación y pendiente de una recta. La recta y su ecuación punto-pendiente. Otras formas de ecuación de una recta: dos puntos, pendiente-ordenada en el origen y simétrica. Forma general de la ecuación de la recta. Ejemplos. Ángulo entre dos rectas. Teoremas sobre rectas paralelas y perpendiculares. Distancia de un punto a una recta. La circunferencia: Definición. Ecuaciones de una circunferencia: canónica y ordinaria. La parábola: definición, elementos, ecuaciones canónicas. Traslación de ejes y ecuaciones ordinarias de una parábola. La elipse: definición y elementos. Ecuaciones canónicas y ordinarias. La hipérbola: definición y elementos. Ecuaciones canónicas y ordinarias. Asíntotas de la hipérbola. Rotación de ejes. Definición analítica de sección cónica (ecuación general de segundo grado en dos variables).

Fuente: Adaptado del plan de estudios de la Pontificia Universidad Católica del Perú (2021)

Por otro lado, los cursos de Matemática I en la Facultad de Arquitectura de la PUCP son prerrequisito para el curso de Matemática II del segundo ciclo. En los cursos mencionados anteriormente, el tema de secciones cónicas es abordado en la unidad 3 y en la unidad 1, según el sílabo del curso de matemáticas I y II respectivamente, tal cual se aprecia en la figura número dos.

Figura 2: Malla curricular – Programa de contenidos de Arquitectura – PUCP

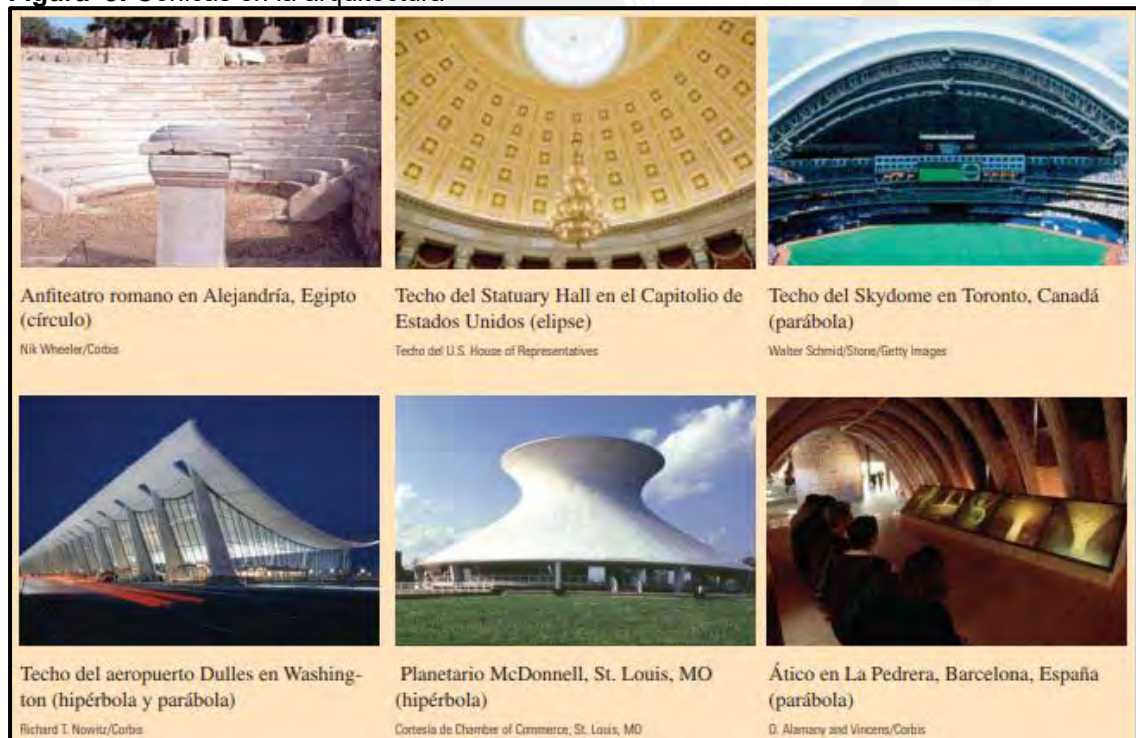
CICLO I		CICLO II		CICLO III	
<ul style="list-style-type: none"> • TALLER 1 • TALLER DE ESCRITURA E INTERPRETACIÓN DE TEXTOS • MATEMÁTICAS 1 • INTRODUCCIÓN A LA ARQUITECTURA • DIBUJO Y REPRESENTACIÓN 1 		<ul style="list-style-type: none"> • TALLER 2 • ARGUMENTACIÓN • MATEMÁTICAS 2 • DIBUJO Y REPRESENTACIÓN 2 		<ul style="list-style-type: none"> • DIBUJO ARQUITECTÓNICO 3 • ARQUITECTURA PREHISPÁNICA • TALLER 3 • FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA • ARGUMENTACIÓN 	
SÍLABO MATEMÁTICA I	CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES			
	Unidad 03: Lugar geométrico en el plano <i>Cónicas como lugar geométrico:</i> <i>La parábola</i> <i>La elipse</i> <i>La hipérbola</i> Unidad 04: Geometría en el espacio, vectores <i>Superficies cuádricas</i>	Unidad 03: Lugar geométrico en el plano Determinar las expresiones algebraicas de gráficas y circunferencias. Establecer las expresiones de hipérbolas, parábolas y elipses con ejes focales paralelos en los ejes de coordenadas, en la ubicación de los factores gráficos predominantes. Unidad 04: Geometría en el espacio, vectores Son las gráficas de superficies cuadradas que poseen 03 variables curvilíneas resultantes de la intersección de planos paralelos en superficies con planos de coordenadas.			
SÍLABO MATEMÁTICA II	CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES			
	Unidad 1: Geometría del espacio <i>Superficie</i> cilíndrica, <i>cónica</i> y de revolución como lugar geométrico. Representación gráfica y cartesiana.	Realiza conversiones de la representación de lugar geométrico de una superficie (registro gráfico) a su ecuación cartesiana (registro algebraico) y viceversa. Representa gráficamente superficies cilíndricas, cónicas y de revolución.			

Fuente: Adaptado del plan de estudios de la Pontificia Universidad Católica del Perú (2021)

Además, se debe mencionar la relevancia de la investigación de las secciones cónicas en las materias subsiguientes, tal como el Taller 3, el cual se encuentra en el tercer ciclo, Fundamentos de ingeniería (tercer ciclo), Estructuras I (quinto ciclo) y Estructuras II en séptimo ciclo, que son estudiados como construcciones en el área de arquitectura y se realizan maquetas donde se utilizan las diferentes secciones cónicas.

Cabe resaltar que el tema de secciones cónicas es importante para todo estudiante universitario del área de ciencias de la PUCP ya que las maneras en que las cónicas se encuentran ocultas las estructuras de la mayoría de objetos. Una correcta comprensión de dicho tema permitirá entender muchas cosas y fenómenos de su entorno, mientras que para aquellos estudiantes que están en el campo de ingeniería y arquitectura, la comprensión de estos temas resulta fundamentales ya que son aplicativos en su especialidad. Por ejemplo, en las estructuras de diseños arquitectónicos de la antigüedad y la actualidad como las mostradas en la Figura 3.

Figura 3: Cónicas en la arquitectura



Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2007, p.771)

Esta importancia mencionada respecto a la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas, condujo a una búsqueda de trabajos de investigación dentro del contexto peruano.

Dado que no se encontró una investigación que sistematice los aportes en cuanto a la metodología, las posturas aplicadas y mencionadas en estas investigaciones en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas se propuso la realización de una investigación en la que se examine, se organice y se ponga en comparación todos los aportes y mejoras dados tanto en la educación secundaria como en la educación superior en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las cónicas. que sirva de referente o apoyo a los docentes.

Pero como sería muy extenso abordar todas las investigaciones más relevantes hechas en Perú respecto a este tema, se delimitó la investigación a la organización de investigaciones realizadas en la MEM respecto a este tema.

Tal como menciona Ardenghi, (2008, como se citó en Amorim, 2012) con esta organización de las investigaciones realizadas se aprovecharía sus resultados obtenidos para la mejora, tanto de la enseñanza como del aprendizaje de los docentes y estudiantes (en aspectos como las dificultades; la implicación de la tecnología en la mediación de los docentes en la enseñanza y aprendizaje de este tema.

Además, tomando en consideración los aportes de investigaciones hechas en el contexto internacional (Ramos, 2015, Casallas y Paez, 2016, Barrios, 2018, Sánchez, 2018, Garzón, 2020) de tipo documental y empírico en la enseñanza de las cónicas, estas se pueden considerar en la discusión, análisis de lo que falta por intervenir o aplicar o conocer y contrastación en la enseñanza y aprendizaje de este tema con las investigaciones realizadas en la MEM.

Esta organización condujo a determinar las características dados en estos aspectos en las investigaciones para contribuir en la mediación de los docentes en el aprendizaje de sus estudiantes, además de dar a conocer a la comunidad educativa de estos avances, que por ejemplo, pueden ser tomados en cuenta en políticas educativas.

El período de tiempo escogido es del 2014 hasta 2020 dado que en este intervalo se encuentran todas las tesis de la MEM de la PUCP referidas a secciones cónicas (véase la definición en el capítulo II).

A continuación, presentaremos la incógnita del estudio, los objetivos generales y específicos para el trabajo.

1.3 Pregunta y objetivos de investigación

¿Cuáles son las características de las investigaciones desarrolladas en relación con las secciones cónicas, en la maestría en enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú en el período 2014 – 2020?

Objetivo general

Analizar las principales características de las investigaciones realizadas en la maestría en enseñanza de las matemáticas en la Pontificia Universidad Católica del Perú relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas en el período 2014 – 2020.

Objetivos específicos

- Seleccionar las investigaciones realizadas en secciones cónicas para identificar los referenciales teóricos, las metodologías y los recursos empleados en dichas investigaciones, en la MEM de la PUCP en el período en el 2014 – 2020.
- Describir las características esenciales de las investigaciones realizadas en secciones cónicas con relación a las particularidades metodológicas, referentes teóricos y los recursos empleados desde los cuales se han estructurado las propuestas investigativas de los trabajos desarrollados en las diferentes líneas de investigación de la MEM de la PUCP en el período en el 2014 – 2020.

CAPÍTULO II: LAS SECCIONES CÓNICAS

En esta sección mencionaremos algunas definiciones importantes, necesarias al momento de realizar la reseña crítica de las investigaciones. Dichas definiciones y conceptos son tomadas de Lehmann (2003).

2.1 Aspectos matemáticos

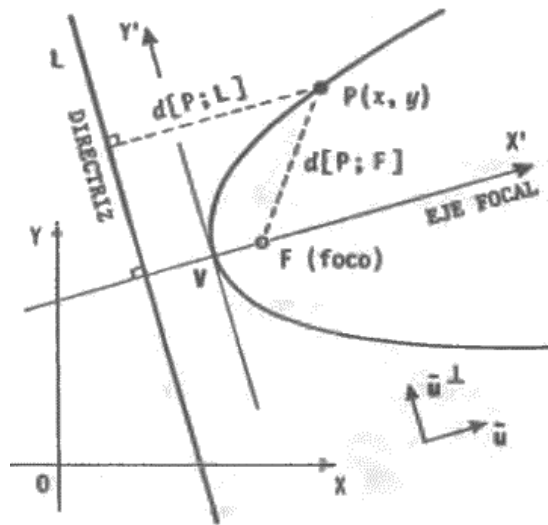
- **¿Qué es una cónica o sección cónica?**

Se llama cónica a ciertos lugares geométricos que se originan de un cono circular recto, al considerar cortes en diferentes ángulos a través de los planos. Ello les da una posición específica a las figuras denominadas *secciones cónicas*, existen de acuerdo al corte, las cuales con hipérbola, parábola y algunas situaciones degeneradas de cónicas, como las circunferencias, los puntos, las rectas paralelas, entre otros.

Todas las áreas cónicas tienen un factor similar el cual satisface cada punto por separado, la cual es “el cociente entre la distancia de cada uno de estos puntos hasta un punto fijo F y su distancia a una recta fija L es siempre constante”.

Esta constante se denota por “ e ” y es llamada de tipo excentricidad cónica. El punto concreto F se denomina “foco” y la recta fija se define como “directriz de la cónica”. En la Figura 4, se muestran los puntos mencionados en la propiedad.

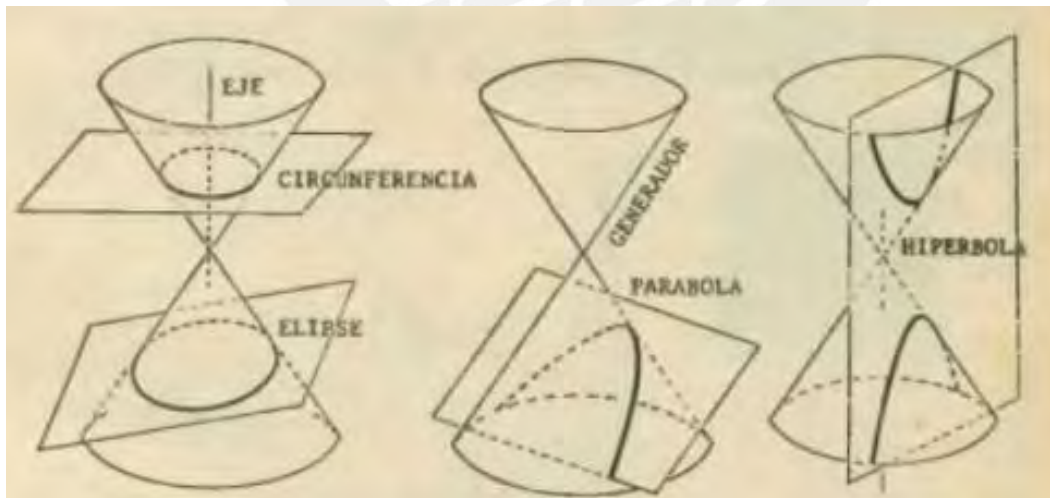
Figura 4: Ejemplo de una sección cónica



Fuente: Venero (2009, p. 342)

A continuación, vemos en la Figura 5 los diferentes cortes de un cono que forman diferentes cónicas.

Figura 5: Sección cónicas según el ángulo de inclinación



Fuente: Venero (2009, p. 342)

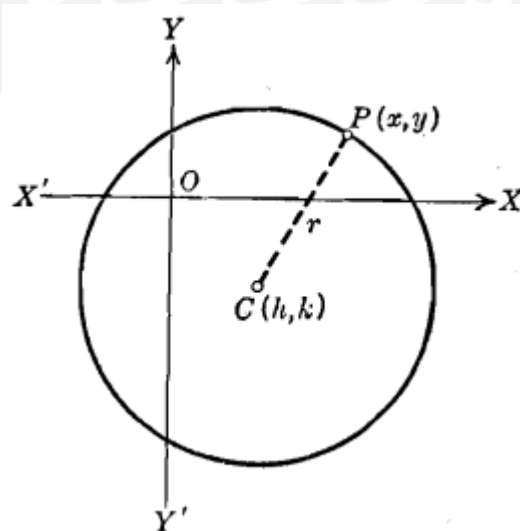
- **Lugar geométrico:** Se entiende como un grupo de puntos que acatan ciertas propiedades. Así, como por ejemplo, se pueden curvar cualquier lugar geométrico según el punto que tenga movimiento que pasa por los puntos, estos son conservados a una distancia permanente de un tipo de recta.
- **Circunstancia:** Puede entenderse como los lugares geométricos de puntos con movimiento en un plano conservado el cual mantienen distancia persistente en un punto específico del plano. Los puntos fijos se denominan cómo centro de las circunferencias, está distancia se le define como radio.

Teorema 1: La circunferencia la cual tiene como punto (h,k) , tiene como radio constante real r , teniendo como ecuación:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

La gráfica dentro del plano cartesiano en la circunferencia y sus elementos viene dada por la Figura 6 dada a continuación:

Figura 6: Elementos de la circunferencia



Fuente: Lehmann (2003, p.100)

- **Parábola:** Son los lugares geométricos de un punto en movimiento dentro de un plano, cuya distancia estaba en la recta fija, ubicada en el plano, es similar a la distancia de los puntos fijos de un plano y el cual no pertenece a las rectas.

Los puntos fijos se les define como foco y a la recta fija como directriz de la parábola. La denominación no incluye los focos vinculados a la directriz.

Designamos por F y l , (véase en la Figura 7), como la directriz de una parábola y el foco.

Las rectas a que pasan por F son perpendiculares a l se define como eje de la parábola.

Siendo A los puntos de intersección de la directriz y el eje. El punto V llamado *vértice*, son

el punto de los segmentos de AF . Los segmentos BB' denominado *cuerda*, el cual une a

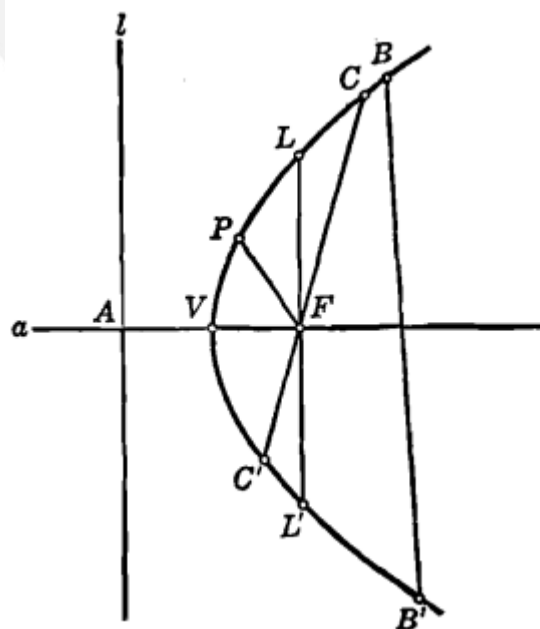
02 puntos de las múltiples parábolas, en particular la cuerda CC' , se llama cuerda *focal*

porque pasa por los focos. Las cuerdas focales LL' se llaman *lado recto* y es perpendicular

al eje. Siendo P son puntos de cualquier parábola, la recta FP se les define como radios

focales o también radio vector.

Figura 7: Elementos de la parábola



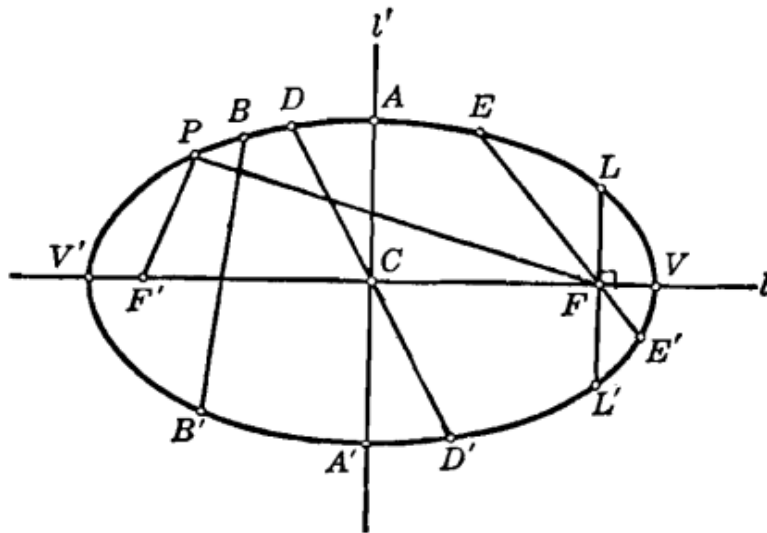
Fuente: Lehmann (2003, p.149)

- **Elipse:** Son lugares geométricos de los puntos en movimiento de un plano, del cual suma las distancias de 02 puntos fijos de los planos persistentes a una constante, superior a la distancia de los 02 puntos.

Los 02 puntos fijos F y F' , se denominan focos de la elipse. Las denominaciones de las elipses no incluyen los casos en los que el punto en movimiento se encuentre dentro del segmento el cual une a los focos.

En la Figura 8, la recta l la cual pasa en los focos es denominada ejes focales. Estos cortan la elipse en 02 puntos, que son V y V' denominados vértices. La recta de ejes focales las cuales están confirmadas por los vértices VV' , son llamadas como ejes superiores. El punto C que se encuentra sobre el eje focal, además es punto de los focos y vértices, se denomina centro. En las rectas l' las cuales pasan por C siendo perpendiculares con los ejes focales l se denominan ejes regulares. Estos últimos ejes l' pueden cortar las elipses en 02 puntos de A y A' a estos segmentos AA' se le denomina eje menor.

Figura 8: Elementos de la elipse

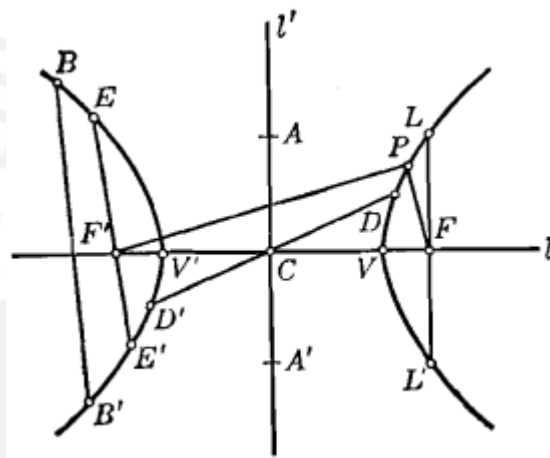


Fuente: Lehmann (2003, p.173)

- **Hipérbola:** Son entendidos como lugares geométricos de puntos en movimiento de planos, los cuales poseen valores absolutos de contraste con las distancias de 02 puntos fijos en los planos, se definen como foco, son iguales a las cantidades positivas y permanentes, son inferiores a la distancia entre los focos.

Las llamadas de la hipérbola no incluyen los casos, en los que los puntos en movimiento dentro de la recta pasan por los focos sin contar los segmentos que se juntan entre sí. Los puntos y focos de los segmentos no pertenecen a los lugares geométricos.

Figura 9: Elementos de la hipérbola.



Fuente: Lehmann (2003, p.191)

Dentro de la tabla N°3, son indicados los primeros resultados de las secciones cónicas, acerca de sus elementos como focos, vértices, centro, lado recto, excentricidad entre otros. También se indican algunas propiedades y expresiones algebraicas que serán mencionadas al realizar el análisis de nuestras reseñas críticas.

Tabla 3: Resumen relativo a las cónicas

CURVA		Parábola	Elipse	Hipérbola
Definición		Se entienden como los lugares geométricos de un punto en movimiento sobre un plano con una recta concreta, ubicada en un plano, está siempre posee una semejanza de distanciamiento de los puntos fijos de los planos los cuales no pertenecen a la recta.	Son los lugares geométricos de un punto en movimiento sobre un plano el cual suma las distancias de dos puntos concretos en un mismo plano, este siempre semejante y persistente, posee una distancia superior entre los dos puntos.	Puede entenderse como los lugares geométricos de un punto de movimiento en un plano con un valor absoluto de distinción entre las dos distancias de puntos fijos en un plano, se le denomina focos, estos son semejantes al conjunto de posiciones positivas, constantes e inferiores de la distancia entre focos.
Constantes		p= Distancia del vértice al foco o directriz	2a= Longitud de eje mayor 2b= Longitud de eje menor 2c= Distancia entre focos $c^2=a^2-b^2$	2a= Longitud de eje transverso 2b= Longitud de eje conjugado 2c= Distancia entre focos $c^2=a^2+b^2$
Primera ecuación ordinaria Vértice de parábola y centros de la elipse e hipérbola en el origen.	Eje focal coincidente con el eje X	$y^2=4px$; Directriz: $x=-p$; foco $(p;0)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos $(c; 0), (-c; 0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos $(c; 0), (-c; 0)$
	Eje focal coincidente con el eje Y	$x^2=4py$; Directriz: $y=-p$; foco $(0;p)$	$x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$ Focos $(0;c), (0;-c)$	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ Focos $(c;0), (-c;0)$
Segunda ecuación ordinaria Vértice de parábola y centros de hipérbolas y elipses dentro de puntos (h,k)	Eje focal paralelo al eje X	$(y-k)^2=4p(x-h)$	$(x-h)^2/a^2 + (y-k)^2/b^2 = 1$	$(x-h)^2/a^2 - (y-k)^2/b^2 = 1$
	Eje focal paralelo al eje Y	$(y-k)^2=4p(x-h)$	$(x-h)^2/b^2 + (y-k)^2/a^2 = 1$	$(y-k)^2/a^2 - (x-h)^2/b^2 = 1$
Longitud del lado recto		4p	$(2b^2) / a$	$(2b^2) / a$
Excentricidad		e=1	$e=c/a < 1$ (Para la circunferencia, e=0)	$e=c/a > 1$
Ecuación general de la cónica careciendo del término en xy' $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$		Como A=0 ó C=0	A y C del mismo signo Para la circunferencia A=C	A y C del mismo distinto

Fuente: Adaptado de Lehmann (2003)

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

En esta sección presentaremos la metodología de nuestro trabajo de investigación. Además, describiremos las clases de estudios investigativos y los procesos metodológicos, el cual nos permitirá llegar a nuestro objetivo general respondiendo las preguntas de investigación.

Una investigación cualitativa en un sentido amplio se caracteriza, como lo menciona Vasilachis (2006), son procedimientos interpretativos de búsqueda fundamentado en múltiples tradiciones bibliográficas y metodológicas, como la fenomenología, la teoría se basa en estudio de casos, información y etnografía, lo cual analizan los conflictos sociales o humanos. Los investigadores elaboran la holística e imagen total, estos examinan palabras y manifiestan perspectivas de las personas que informan, los cuales conducen la investigación en contextos naturales.

En ese sentido, el estudio cualitativo tiene un enfoque fenomenológico de una realidad por descubrir, comprender, construir como también interpretar, mediante los significados fabricados y las percepciones.

Para Hernández, Fernández y Baptista (2014), el estudio cualitativo es de base descriptiva. Puede ser descripción de personas, situaciones, acontecimientos, y también se incluye transcripciones de entrevistas, extractos de documentos, cuestionarios, entrevistas, registros de observación, grabaciones de videos o audios.

Por todo lo anterior podemos afirmar que nuestra investigación es cualitativa ya que el interés del estudio está dado con la recolección, interpretación, examinación y comprensión de los datos extraída de las producciones académicas en el área de las secciones cónicas de la MEM, comprendidas entre el período del 2014 al 2020. Dentro del enfoque cualitativo, nuestra investigación es de tipo documental; que son usadas como herramientas de recaudación de datos, los cuales hemos considerado el uso de fichas (fichaje). Además, en relación con la

metodología cualitativa, Hernández et al (2014) señalan que esta se identifica por brindar a los investigadores metodologías e instrumentos que puedan facilitar los estudios, debido a que posibilitan la toma de decisiones en la selección de datos de interés según el objetivo de la investigación y facilita el entendimiento de los fenómenos. En este caso, para nuestro trabajo, seleccionaremos la información de interés mediante los trabajos de las tesis de la MEM sobre los objetivos de investigaciones de las secciones de las cónicas, tomando en cuenta el período de tiempo establecido. Para esto se usaron los siguientes criterios:

- Técnica: Análisis documental de las tesis de la MEM de la PUCP.
- Instrumento: Elaboración de fichas de la tesis de la MEM de la PUCP, donde recolectaremos los datos.
- Archivos de registros: Utilizaremos los documentos confiables para la fuente de información. En nuestro caso serán las tesis de la MEM de la PUCP debido a que dichos documentos pasan por el software TURNITIN (verificador de plagio), además de la revisión de dos jurados y del asesor.

3.1 Tipo de investigación

Dentro del estudio existe una investigación tipo cualitativa, descriptiva y corresponde a los estados de arte, los cuales requieren revisiones documentales y bibliográficas sobre la pertinencia de búsqueda, examinación y recopilación de textos escogidos. (Tamayo y Tamayo, 2004).

Para empezar a describir que es un estado de arte, teniendo como referencia el planteamiento realizado por Guevara (2016), el cual destaca que los estados del arte dentro del marco del estudio documental benefician la investigación con una modalidad colectiva de producción de conocimientos.

En ese sentido, para Torres (1995), los estudios documentales son procesos científicos, asimismo se entienden como procedimientos sistematizados de información, organización, interpretación, recolección y examinación de datos o información del entorno. Es decir, el estudio tipo documental se elabora mediante una consulta de documentos como revistas, libros, tesis, anuarios, registros y memorias.

Del mismo modo para Peña y Pirela (2007), el procedimiento de análisis puede ser entendido como una examinación documental la cual es presentada como una vía que facilita el acceso a fuentes informativas. Por otro lado, Vickery (1970) citado en Peña y Pirela (2007) destaca que, existen metodologías de recuperación como los exámenes documentales los cuales responden a tres requerimientos informativos:

- Saber lo que otros científicos han elaborado y lo que elaborarán en el futuro.
- Saber los segmentos concretos de datos de cualquier documento.
- Saber todos los datos fundamentales en relación a un tema en concreto.

Para nuestro estudio, el estado de arte bajo el enfoque de análisis documental se trabajará con cada uno de los aspectos mencionados por Vickery (1970) citado en Peña y Pirela (2007), ya que tiene como objetivo identificar y dar cuenta del saber acumulado relativo a secciones cónicas preguntándonos inicialmente ¿qué se ha hecho y no se ha hecho? y también ¿cómo se ha hecho? para luego someterlo a un determinado análisis. Además, el estado de arte que realizaremos se basará en documentar y analizar las producciones colectivas de conocimiento acerca de secciones cónicas de la MEM de la PUCP en el período de tiempo establecido, ya que según el estado de arte implica El desenvolvimiento y estructuración de las habilidades como el análisis, documentación, resultados y contrastación de información, con la finalidad de establecer relaciones de texto y contexto. Para nosotros dicha comparación y resultados obtenidos del análisis de las tesis nos permitirá relacionarlas y comparar los resultados. (Gómez, Galeano y Jaramillo, 2016).

Por lo tanto, en nuestro trabajo intentaremos articular los datos, para buscar la categorización y organización adquiridas con la finalidad de producir insumos, que posibiliten visualizar y entender lo que está sucediendo en un área específica del conocimiento (en nuestro caso las secciones cónicas), generando nuevas sapiencias al encontrar similitudes, contrastes y metodologías, para poder replantear y desarrollar investigaciones posteriores en la misma línea de investigación de un determinado campo del conocimiento. Además, analizaremos nuestras reseñas, las organizaremos por nombre del documento, autor, año de sustentación de las tesis, por su marco teórico y por su metodología.

En este mismo orden de ideas, el estado del arte se considera como un tipo de investigación documental a partir del cual se recupera y trasciende el conocimiento acumulado sobre determinado objeto de estudio (Gómez, Galeano y Jaramillo, 2016). Beneficiando al incremento de la comunidad científica y académica en las distintas líneas de estudio con enfoques y conceptos innovadores, como también las comprensiones alcanzadas en todo el procedimiento con la finalidad de ser presentadas en los estados actuales de las ciencias en un campo en concreto. Para ello hemos determinado un período de tiempo del 2014 – 2020 dado que en este período podemos obtener todo el contenido acumulado de los temas referentes a secciones cónicas de la MEM de la PUCP y a su vez analizar el enfoque actual el cual posee un procedimiento de aprendizaje y enseñanza.

3.2 Unidad de análisis documentales

Dulzaides y Molina (2004) señalan que es una operación intelectual que implica un procedimiento de examinación e interpretación de los datos, dando lugar a un nuevo documento que lo representa de manera abreviada.

Para nuestro trabajo, revisaremos investigaciones que estén acorde con las secciones cónicas y para limitar la búsqueda, utilizaremos los siguientes criterios con el propósito de realizar

las unidades de análisis documentales para las tesis encontradas.

- Ubicación: repositorio virtual institucional de la PUCP
- Alcance geográfico: a nivel institucional (PUCP)
- Horizonte temporal: producciones académicas en el período del 2014 al 2020
- Idioma de los documentos: español
- Modalidad: documentos virtuales
- Tipos de fuente: tesis de la MEM de la PUCP

3.3 Procedimientos metodológicos

Nuestro procedimiento metodológico de análisis se basa en un procedimiento basado en la revisión bibliográfica.

Los procedimientos de revisión bibliográfica fueron trabajados continuamente para lograr comprender un cierto tema se realiza una revisión la cual corresponde a una descripción detallada de dicho tema en un determinado campo del conocimiento científico (Gómez, Galeano y Jaramillo, 2016). En nuestro caso el tema seleccionado son las secciones cónicas.

La metodología que se presenta en la revisión bibliográfica del tipo del estado de arte establece fases o etapas que se han de seguir, las cuales deben retroalimentarse a lo largo de la búsqueda.

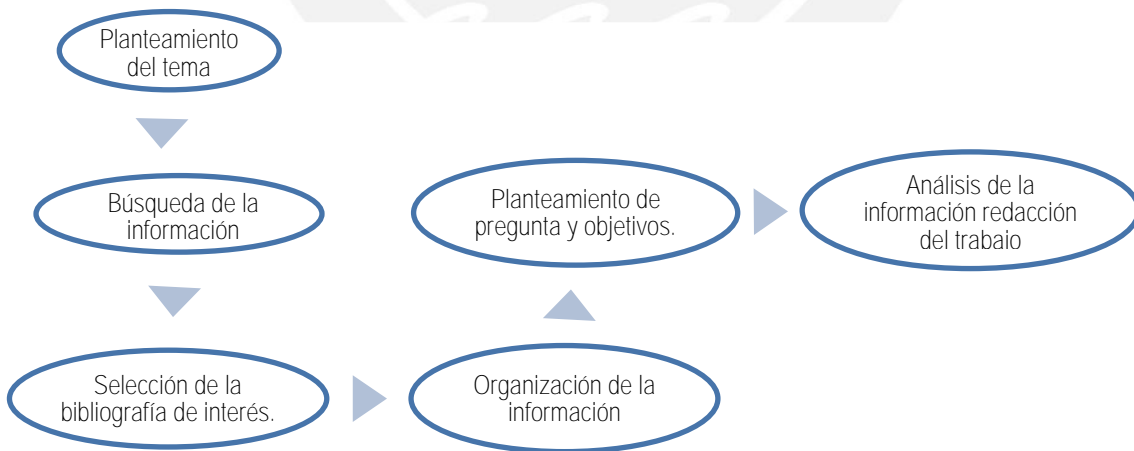
- Definición del problema: planteamos el concepto del trabajo de secciones cónicas en función de la relevancia que teníamos, eran ordenar y clasificar. Posteriormente, se formula la finalidad principal con el propósito de alcanzar las estructuras de los dos objetivos específicos.
- Búsqueda de la información: una vez definido el problema a investigar se consultaron las tesis de maestría en el repositorio PUCP, se incluyeron las palabras claves del concepto

escogido como secciones cónicas, así como también, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.

- Escoger referencias bibliográficas relevantes: Luego de elaborar la búsqueda, se escogen aquellas tesis cuyos objetivos responden al propósito del estudio.
- Jerarquización de datos: se entiende como la parte de revisión bibliográfica en la que se diferencia los dos apartados en relación al carácter del trabajo encontrado. Generando una sección donde se agrupan los estudios de carácter general de la geometría, específicamente en secciones cónicas, una segunda fase dónde se juntan según los aspectos de los estados del arte y revisión bibliográfica cada parte tiene como propósito responder las incógnitas de los objetivos específicos.
- Análisis de la información.

A continuación, en la Figura 10 vemos nuestro plan de análisis.

Figura 10: Procedimientos metodológicos



Fuente: Adaptado de Newman y Gough (2020)

Para finalizar, se elaboró la redacción del estudio de acuerdo con la bibliografía escogida y revisada, respondiendo así las incógnitas del objetivo planteado y haciendo la conclusión total del estudio.

En la recolección, examinación y jerarquización de datos utilizaremos el siguiente instrumento:

Matriz bibliográfica: es un cuadro el cual posee una doble entrada, esta consta de siete columnas, en la cual se registra la información de las fuentes bibliográficas, como se visualiza en la tabla N°4.

Tabla 4: *Matriz bibliográfica*

Nombre de documento	Autor	Año de sustentación	N.º de páginas	Uso de tecnología	Marco teórico	Metodología

Fuente: Propia

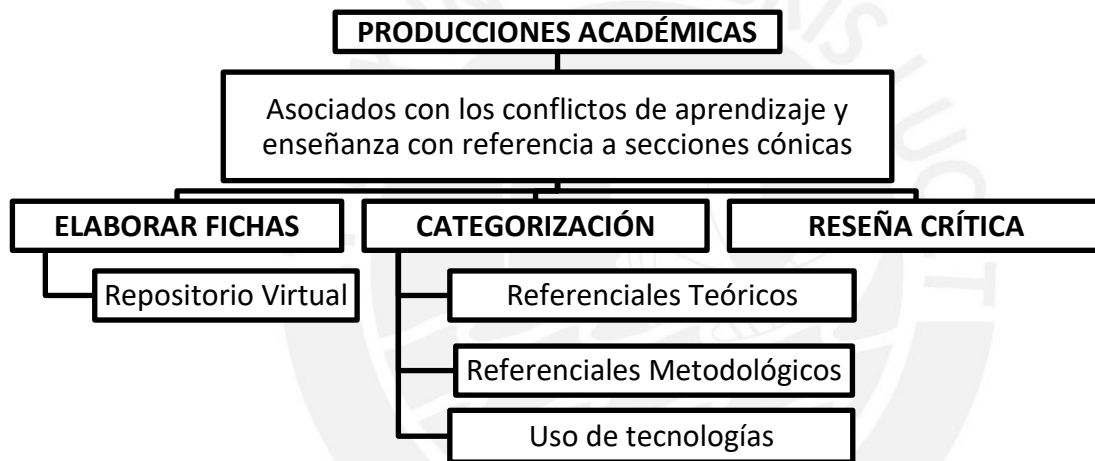
Podemos observar que en la primera columna se encuentra el nombre del documento, en la siguiente columna de la derecha el autor, el año de sustentación, el número de páginas, uso de la tecnología, marco teórico y finalmente la metodología empleada.

CAPÍTULO IV: PRODUCCIONES ACADÉMICAS

En este capítulo analizaremos las producciones académicas de tesis emitidas en la MEM de la PUCP, en el período del 2014 al 2020 referente al objeto matemático de las secciones cónicas.

A continuación, en la Figura 11 mostraremos las actividades que realizaremos para la elaboración de las fichas.

Figura 11: *Elaboración de fichas*



Fuente: *Adaptación de Rengifo (2015)*

Para poder elaborar las fichas se recolectó información de todas las tesis que fueron desarrolladas en la MEM en el período del 2014 al 2020 referente a las secciones cónicas.

En la Figura 12, se muestra la búsqueda realizada en el Repositorio Institucional de la PUCP de manera virtual (URL:<https://repositorio.pucp.edu.pe/index/>) en la sección *tesis con grado académico (Maestría)*, también se consideró en la fecha de publicación que corresponda al período de tiempo mencionado, además, que los trabajos de investigación fueran exclusivamente de la MEM, y en cuanto al tema a investigar restringiremos nuestra búsqueda

sólo a los grupos cónicos como la parábola, hipérbola, circunferencia y elipse, resultando ocho trabajos de tesis en total.

En la Figura 12, se muestra los distintos criterios de búsqueda tales como: período de tiempo, sección cónica de estudio, tesis PUCP, etc., empleados para encontrar las tesis del periodo 2014 al 2020 descritos con detalle anteriormente en nuestro trabajo.

Figura 12: Repositorio institucional de la PUCP



Fuente: Página oficial repositorio PUCP

A continuación, se procedió a elaborar las fichas. Comenzamos organizándolas por temas referentes a secciones cónicas y clasificando a través de los años de los datos obtenidos en el repositorio virtual de la PUCP. Seguidamente, dentro de la tabla N°5 se evidencian los modelos de elaboración de las fichas producidas para la organización de tesis sigue la siguiente estructura: nombre del documento, autor, año de sustentación, número de páginas, palabras clave, ubicación como la dirección electrónica concreta o la jerarquización tipográfica de la biblioteca en la que se localizan, marco teórico del estudio, metodología del trabajo de investigación, población, uso de la tecnología.

Tabla 5: Modelo de elaboración de fichas

Investigación propuesta por autor	
Nombre del documento	
Autor	
Año de sustentación	
Número de páginas	
Palabras clave	
Ubicación (dirección electrónica específica) y/o clasificación topográfica de la biblioteca dónde se encuentra.	
Marco teórico de investigación	
Metodología del trabajo de investigación	
Muestra	
Uso de tecnología	

Fuente: propia

4.1 Organización de datos

Después de haber realizado la búsqueda de las investigaciones desarrolladas en la MEM sobre secciones cónicas, la información encontrada de las investigaciones en el repositorio de tesis de la PUCP vía la página web, hemos organizado como primer punto según el año de sustentación cómo se evidencia en la tabla.

Tabla 6: Año de sustentación

Año de sustentación	Número de investigaciones publicadas
2014	2
2015	1
2016	1
2017	0
2018	2
2019	1
2020	1

Fuente: propia

Según los datos presentados en la tabla número 6, observamos que está el mayor número de tesis publicadas sobre secciones cónicas fue en el año 2014 y 2018, notamos que tanto en el año 2017 no hubo publicaciones y que el menor número de publicaciones fueron en los años 2015, 2016, 2019 y 2020, siendo ocho las investigaciones realizadas en el período del 2014 al 2020.

De todas estas producciones académicas logramos encontrar también la cantidad de tesis desarrolladas de acuerdo con su marco teórico, cómo se visualiza en la tabla número 7.

Tabla 7: Marco teórico empleado en las investigaciones

Marco teórico utilizado	Número de investigaciones
Teoría de registros de representación semiótica (TRRS)	4
Creación de problemas	1
Juego de Cuadros	1
Enfoque Instrumental	1
Teoría de la dialéctica herramienta-objeto (DHO)	1

Fuente: propia

En esta nueva clasificación en la Tabla 7, podemos observar que el marco teórico más utilizado es la teoría de representación de registros semióticos, con cuatro investigaciones, seguidos por la Creación de problemas, Juegos de Cuadros, Enfoque Instrumental, Teoría de la Dialéctica Herramienta – Objeto, con una investigación cada uno.

Continuando con la organización de datos, vemos en la Tabla 8 la metodología empleada en las investigaciones, presentada a continuación:

Tabla 8: Metodología empleada en las investigaciones

Metodología empleada	Número de investigaciones
Investigación Cualitativa (procedimientos metodológicos)	3
Ingeniería Didáctica	4
Estudio de Casos	1
Investigación – acción	1

Fuente: propia

Cuando nos referimos a la investigación cualitativa es porque las tesis se están trabajando con investigación cualitativa en general y sus procedimientos metodológicos no especifica si es una Ingeniería Didáctica, si es un estudio de casos o una investigación acción es decir en términos generales una investigación cualitativa.

La ingeniería didáctica forma parte de una investigación cualitativa, así como las demás mencionadas en la Tabla 8. Es decir, todas las metodologías están incluidas dentro de la investigación cualitativa (conjunto universal) y dentro de ello se encuentran la ingeniería didáctica, estudio de casos, investigación – casos.

Además, en la Tabla 8, evidencia que el uso más frecuente en metodologías es la Ingeniería didáctica con cuatro investigaciones en la cual dado por su forma de trabajo dividido en cuatro fases hace que este trabajo siga un orden y desarrollo apropiado.

Seguidamente vemos la Tabla 9, que resume la sección cónica desarrollada en el período del 2014 al 2020.

Tabla 9: Secciones cónicas utilizadas en las investigaciones

Secciones cónicas utilizadas	Número de investigaciones
Circunferencia	2
Parábola	2
Elipse	4
Hipérbola	0

Fuente: propia

También, en la Tabla 9 mostramos las secciones cónicas estudiadas en el período 2014 al 2020 desarrolladas en la MEM sobre las secciones cónicas. Observamos que la sección cónica más utilizada es la elipse con cuatro investigaciones, seguido por la circunferencia y parábola con 2 investigaciones. Además, evidenciamos que no se encontró ningún estudio acerca de la sección cónica hipérbola en el período mencionado.

A continuación, describiremos en la Tabla 10 aquellas investigaciones realizadas en la MEM que requirieron el uso de algún software matemático.

Tabla 10: Uso de software

Uso de software	Número de investigaciones
Si	4
No	4
Total	8

Fuente: propia

Como podemos observar en la Tabla 10, el número de investigaciones que usan el software matemático en sus investigaciones son el 50% y las investigaciones no usan el software son el 50%. Además, las investigaciones mencionadas solo hacen uso del software GeoGebra, el cual se convierte en un mediador para poder adquirir conocimiento de nuestro objeto de estudio.

De las ocho investigaciones encontradas que se relacionan con la sección cónica en la cual veremos autor, título de la investigación, asesor y año de sustentación, la numeración

presentada al lado izquierdo representa el orden correlativo de las sustentaciones de las tesis. A continuación, nos muestra la información mencionada en la Tabla 11.

Tabla 11: *Relación de las investigaciones producidas en la PUCP desde 2014 al 2020*

N.º	Autor	Título de la investigación	Año de sustentación	Sección Cónica
1	Díaz Villegas, Roger	La construcción del concepto circunferencia desde la dialéctica herramienta-objeto con el apoyo del software GeoGebra en estudiantes de quinto de secundaria.	2014	Circunferencia
2	León Ríos, José Carlos	Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos.	2014	Elipse
3	Echevarría Anaya, Julio Antonio	Estudio de la circunferencia desde la geometría sintética y la geometría analítica, mediado por el GeoGebra, con estudiantes de quinto grado de educación secundaria.	2016	Circunferencia
4	Lara Torres, Isabel Mercedes	La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la teoría de registros de representación semiótica.	2016	Parábola
5	Olivares López, Edwin Hernán	Coordinación de diferentes registros de representación semiótica para movilizar la noción de elipse en estudiantes de física.	2018	Elipse
6	Olano Cruces, Mario Fernando	Registros de representación semiótica de la elipse: secuencia de actividades mediada con el GeoGebra para estudiantes de quinto de secundaria	2018	Elipse
7	Contreras Ochoa, Greyson Martín	Niveles de demanda cognitiva de problemas creados sobre parábola como lugar geométrico. Una propuesta para la formación de profesores de secundaria.	2019	Parábola
8	Amaya Siesquen, Junior Alan	Estudio de la elipse basada en aspectos de la teoría de registros de representación semiótica con estudiantes de la carrera de arquitectura	2020	Elipse

Fuente: propia

Con respecto a estas ocho investigaciones halladas dentro de la base de datos de la MEM, buscamos los estudios con seis años de antigüedad con el fin de tener una visión actualizada de la producción académica de las secciones cónicas.

4.2 Elaboración de fichas de las tesis

De acuerdo con los criterios propuestos para realizar la caracterización de cada una de las investigaciones encontradas, se toma como referencia la organización de la información el modelo de ficha bibliográfica de Londoño, Maldonado y Calderón (2016) y de Guevara (2016).

La elaboración de las tesis producidas en la MEM de la PUCP sigue los siguientes ítems: nombre del documento, autor, año de sustentación, número de páginas, palabras clave, la ubicación como dirección electrónica concreta o jerarquización topográfica según dónde se localiza, marco teórico del estudio, metodología del trabajo de investigación, población y tecnología.

A continuación, presentaremos las fichas elaboradas por las ocho tesis encontradas, con sus respectivas reseñas críticas.

Tabla 12: *Investigación propuesta por León (2014)*

Nombre del documento	Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos
Autor	León Ríos, José Carlos
Año de sustentación	2014
Número de páginas	306
Palabras clave	No posee
Ubicación (dirección electrónica específica) y/o clasificación topográfica de la biblioteca dónde se encuentra	http://hdl.handle.net/20.500.12404/5652
Marco teórico de investigación	Enfoque instrumental
Metodología del trabajo de investigación	Ingeniería didáctica
Muestra	Veinte estudiantes
Uso de tecnología	Si presenta (GeoGebra)

Fuente: propia

Reseña crítica 1: estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos

El estudio de León (2014) trata de los procesos de instrumentalización de las elipses cuando los alumnos trabajan un conjunto de tareas valiéndose del uso del software GeoGebra. Se seleccionó a 20 alumnos del primer semestre en el curso de matemáticas 1 de Estudios Generales en la universidad donde se aplicó la prueba diagnóstica, que se diseña para evaluar las sapiencias previas en relación a los análisis cognitivos en la ingeniería dinámica. Debido a esto se generaron un grupo de incógnitas y procedimientos para cumplir con el objetivo de ayudar a la instrumentalización de una elipse cuando los estudiantes trabajan en un conjunto de tareas mediadas por el GeoGebra.

Para el autor, la importancia de este estudio es dar prioridad a la representación de un lugar geométrico en el aprendizaje de las secciones cónicas, y no enfocarlas como los tratamientos de análisis en los que se prioriza la perspectiva algebraica. Al igual que Garzón (2020), el autor dio importancia del aprendizaje de las cónicas como lugar geométrico.

La metodología utilizada en esta tesis fue ingeniería dinámica de Artigue en el año 1995, cuyo marco teórico del estudio es el enfoque instrumental en el cual se estudia la instrumentalización de una elipse mediada por el GeoGebra, donde mediante una actividad o uso de artefactos se logra relacionar los elementos formado por el objeto, el sujeto y el instrumento.

Con respecto a los resultados obtenidos, en este proceso el autor trabajó con estudiantes que de manera voluntaria participaron en una secuencia de actividades, de los cuales solo se seleccionó seis estudiantes que presentaron pruebas aprobatorias que estuvo compuesto por tres equipos de dos estudiantes. El cuestionario constaba de seis preguntas relativas al tema de un lugar geométrico de la parábola, mediatriz y circunferencia, donde en la primera parte se les pedía conocer el concepto de mediatriz, trazar las gráficas y explicar su estructura y cómo se ejecutan los conceptos de otras representaciones de índole geométrica. En la segunda parte, se

pedía conocer los lugares geométricos de una circunferencia, identificar su cuerda y radio, y aplicar las propiedades de una mediatriz en cuerdas de una circunferencia. En la tercera pedían usar el concepto de parábola, para identificar el lado recto y factores como el foco, y reconocer la mayoría de propiedades las cuales no son alteradas de la parábola en las cuales no existen ejes coordenados.

En el trabajo del autor, se observa que los estudiantes tienen conocimientos previos acerca del software GeoGebra la cual propició una instrumentalización de nociones de una elipse. De esta manera, surgió el condicionamiento geométrico de las elipses, la excentricidad, los focos, la ubicación de sus vértices, los límites del eje menor asociados con los parámetros $a^2 = b^2 + c^2$, teniendo un lado recto, y vinculación entre la representación gráfica y la representación algebraica correspondiente.

Finalmente, León (2014) indica como futuras investigaciones usar conceptos de rotación y traslación de ejes, para así lograr establecer un nuevo sistema de coordenadas, donde se calcule la expresión algebraica y propiedades de sus elementos. También propone utilizar las elipses en la estructuración de superficies cuadradas cómo por ejemplo el hiperboloide, paraboloides elíptico, el hiperboloide en dos hojas, y elipsoide. A su vez, propone ejecución del campo científico, como en la Medicina en el uso de litotriptor, el cual es entendido como un equipo médico que funciona para exterminar piedras del organismo y se basa en la propiedad focal de la elipse; los detalles de las órbitas elípticas de la tierra, de otros planetas dentro del sistema solar y en la arquitectura, a través de maquetas, diseños y arcos semielípticos,

Además, el autor logra responder a la incógnita del estudio: ¿Una secuencia de actividades mediadas por el GeoGebra permite que los estudiantes de arquitectura y administración de proyectos instrumentales en la elipse?, lo cual se pone de manifiesto que la investigación es pertinente, pues los estudiantes logran diseñar actividades e identificar sus

acciones mediadas con el GeoGebra, haciendo uso del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995).

Tabla 13: *Investigación propuesta por Díaz (2014)*

Nombre del documento	La construcción del concepto circunferencia desde la dialéctica herramienta-objeto con el apoyo del software GeoGebra en estudiantes de quinto de secundaria
Autor	Roger Díaz Villegas
Año de sustentación	2014
Número de páginas	139
Palabras clave	Circunferencia, Dialéctica Herramienta – Objeto, GeoGebra
Ubicación (dirección electrónica específica) y/o clasificación topográfica de la biblioteca dónde se encuentra	http://hdl.handle.net/20.500.12404/5707
Marco teórico de investigación	Teoría de la dialéctica herramienta-objeto (DHO)
Metodología del trabajo de investigación	Investigación cualitativa
Muestra	Seis alumnos del quinto año de secundaria dentro de una institución estatal en el Perú
Uso de tecnología	GeoGebra

Fuente: propia

Reseña crítica 2: la construcción del concepto circunferencia desde la dialéctica herramienta - objeto con el apoyo del software GeoGebra en estudiantes de quinto de secundaria

La investigación de Díaz (2014) propone la experimentación y diseño de un conjunto de tareas las cuales son fundamentadas por la teoría dialéctica del objeto y herramienta, que consiste en hacer uso de los saberes previos como los instrumentos para desenvolver sapiencias innovadoras las cuales se describen en objetos matemáticos que, una vez desarrollados, son usados como instrumentos en nuevos conceptos del aprendizaje. Cabe resaltar que, para la construcción de las actividades, previamente se identificaron como las problemáticas del procedimiento de aprendizaje en relación a la circunferencia. Dichas dificultades se presentan cuando el objeto matemático se encuentra en cualquier representación las cuales van desde su origen como un lugar geométrico mediante una representación de tipo gráfica, como también

algebraica las cuales se asocian como tres representaciones. Además, las actividades propuestas utilizan como instrumento mediador al software GeoGebra.

Ante las dificultades encontradas, se planearon una serie de preguntas y procedimientos con el fin de cumplir con el propósito general de examinar, mediante un conjunto de tareas las cuales tienen etapas dialécticas de objeto y herramienta mediadas por el software GeoGebra, la elaboración de las definiciones de circunferencia desde cuadros geométricos analíticos en alumnos de quinto año de secundaria.

Para el autor es fundamental diseñar actividades con el fin de que los estudiantes logren producir un desenvolvimiento cognitivo, cómo también generar interés en los alumnos por el curso de matemáticas, teniendo como finalidad el realizar definiciones matemáticas las cuales se necesiten y, de esta forma, tener un desarrollo exitoso en el ámbito social, académico y personal. En ese sentido es fundamental el estudio de la circunferencia, porque están presentes en grados inferiores de la educación básica regular (EBR) así como en los cursos de los primeros ciclos de la educación superior.

Asimismo, al pretender construir el objeto circunferencia, el autor diseña actividades en donde se promuevan el intercambio de información y discusiones a través del diálogo en una atmósfera de trabajo colectivo como una conducta persistente, teniendo como objetivo visualizar, mediante la justificación de las respuestas, la evolución de los procedimientos de construcción de definiciones en relación a la circunferencia.

El procedimiento metodológico utilizado en el trabajo de investigación de Díaz (2014) fue la cualitativa de tipo experimental, pues ayudó al autor en el análisis, aplicación y elaboración de una secuencia de actividades para la producción y recolección de información, mediante correcciones a los estudiantes, que brindaron datos en las tareas las cuales fueron diseñadas para las construcciones de los objetos matemáticos de la investigación. El procedimiento de

construcción de la definición de circunferencia, posibilitó que los alumnos organizaron y mejoran la estructura cognitiva de las definiciones, beneficiando el aprendizaje.

Con respecto al desarrollo de las actividades, el autor trabajó con 6 alumnos de quinto grado de educación secundaria los cuales estuvieron matriculados en el año lectivo 2013, de una institución estatal del Perú, quienes fueron escogidos de un grupo de individuos mayor, ya que estos asistieron a todas las actividades de experimentación. En el plazo en el que se efectuaron las tareas, los estudiantes fueron categorizados en pareja, con las notaciones D1, D2 y D3. Seguidamente se elaboraron talleres de introducción al software GeoGebra y un grupo de cuatro tareas. La primera actividad tuvo como objetivo conocer los saberes previos que son necesarios para abordar el concepto de circunferencia, tales como propiedades de una mediatriz, la distancia de dos puntos, coordenadas del punto medio en un segmento. La segunda actividad el cual tuvo como finalidad que los alumnos movilizarán sus conocimientos previos para resolver con textos dados, para adquirir conocimientos innovadores los cuales hacen referencia a los previos. La tercera actividad tuvo como fin que los estudiantes evidencian que las definiciones de circunferencia son las sapiencias que se necesitan desenvolver y, finalmente la cuarta actividad tuvo como fin que los estudiantes utilicen lo aprendido mediante una resolución de contextos y problemáticas nuevas.

Con respecto a los resultados obtenidos, en la primera actividad se evidenciaron algunas dificultades en los saberes previos; sin embargo, se logró alcanzar el objetivo pretendido. En la segunda actividad se presentó un problema contextualizado que consistía en localizar entidades como la comisaría en una misma distancia en relación a otras tres entidades las cuales fueron resueltas sin problemas con el apoyo del GeoGebra; sin embargo, en un ítem cuya interrogante era: ¿Cuáles son los posibles lugares dónde se podría ubicar este nuevo banco? El estudiante tenía que posicionar la nueva entidad bancaria a la misma distancia que las otras tres, en relación a la comisaría, cómo también examinar otras posibles localizaciones de la nueva entidad

financiera, con ayuda del GeoGebra, construyeron un segmento con extremo fijo (comisaría) y el extremo movable donde se ubicó el nuevo banco. Pero, las duplas presentaron dificultades para identificar la figura adquirida con la localización probable de la nueva entidad ya que a simple vista se generaba una circunferencia.

Díaz (2014), sostiene que dicha dificultad se debe a que los estudiantes no reconocen que la circunferencia está constituida por infinitos puntos que cumplen una determinada propiedad. Entonces, ante ese inconveniente fue oportuno usar los comandos de rastro y animación automática del GeoGebra, lo que permitió visualizar todas las probabilidades de localización del nuevo banco. En este mismo orden de ideas, se resaltan los aportes dados por el software GeoGebra en la estructuración de los objetos matemáticos en una circunferencia.

En tercera actividad, los estudiantes lograron representar algebraicamente a la circunferencia desde perspectiva geométrica, para luego representarlos gráficamente. O sea, se alcanzó la meta institucional local, la cual posibilitó continuar con la siguiente etapa de formalización o institucionalización de las nuevas definiciones. Finalmente, en la 4ta actividad se evidenció que los estudiantes con los nuevos conocimientos adquiridos e institucionalizados ya incluidos dentro del esquema mental para que pudieran resolver situaciones nuevas en contextos diferentes.

En el trabajo de investigación no se evidencia que el autor incita a que los estudiantes apliquen fórmulas para establecer las ecuaciones de una circunferencia, sino que lo hace paso a paso movilizandoo conceptos elementales de la geometría mediados por el software GeoGebra para poder construir el objeto circunferencia.

Al responder la incógnita del estudio: ¿Una secuencia de actividades que sigue las fases de la dialéctica objeto y herramienta mediada por el software GeoGebra, contribuye la construcción del concepto circunferencia desde el cuadro de la geometría analítica en estudiantes de quinto de secundaria?, se pone en manifiesto que la investigación es pertinente ya que el

aprendizaje está diseñado según las cinco etapas de la dialéctica las cuales permiten que los estudiantes elaboren las definiciones de circunferencia desde su propia perspectiva como un lugar geométrico contando con una representación algebraica y gráfica, utilizando el software GeoGebra como un hábil mediador de los procedimientos de aprendizaje y enseñanza.

Finalmente, el autor indica como futuras investigaciones diseñar actividades bajo el marco teórico de la dialéctica herramienta – objeto para abordar otros conceptos matemáticos como la parábola, elipse e hipérbola, apoyados por el software GeoGebra aprovechando su potencial gráfico y algebraico. También señala que las futuras investigaciones deben considerar nuevas situaciones y problemas de tal manera que permita descubrir otros instrumentos en el software GeoGebra. Además recalca que este software no es el único, sino que más bien debe ser entendido como una alternativa; en ese sentido, incita a incluir otros softwares de tal forma que se genere un ambiente dinámico entre profesor – estudiante, con el fin de consolidar y garantizar el proceso de aprendizaje, permitiendo desenvolver autonomía para la corroboración y manifestación de las conjeturas sobre las definiciones de un determinado objeto matemático.

Tabla 14: *Investigación propuesta por Echevarría (2016)*

Nombre del documento	Estudio de la circunferencia desde la geometría sintética y la geometría analítica, mediado por el GeoGebra, con estudiantes de quinto grado de educación secundaria
Autor	Julio Antonio, Echevarría Anaya
Año de sustentación	2016
Número de páginas	95
Palabras clave	Circunferencia, Geometría Sintética, Geometría Analítica
Ubicación (dirección electrónica específica) y/o clasificación topográfica de la biblioteca dónde se encuentra	http://hdl.handle.net/20.500.12404/6756
Marco teórico de investigación	Juego de Cuadros
Metodología del trabajo de investigación	Estudio de Casos
Muestra	Alumnos de quinto año de secundaria pertenecientes al turno tarde de la I.E.I “Santo Domingo Savio”. Los cuales poseen edades entre los 15 y 17 años.
Uso de tecnología	GeoGebra

Fuente: propia

Reseña crítica 3: estudio de la circunferencia desde la geometría sintética y la geometría analítica, mediado por el GeoGebra, con estudiantes de quinto grado de educación secundaria

El estudio de Echevarría (2016) propone identificar y describir los resultados de actividades que permitan estudiar la circunferencia bajo los enfoques de la geometría analítica y la geometría sintética. Para esto, se plantearon una serie de preguntas y procedimientos con el fin de cumplir con el objetivo general de determinar cómo los alumnos de quinto grado de secundaria elaboran los cambios de cuadro desde una perspectiva geométrica de índole sintética, cuándo estos trabajan en el objeto de estudio matemático y utiliza GeoGebra para analizar la circunferencia.

De acuerdo con Echevarría (2016), la importancia de estudiar la circunferencia en alumnos de quinto año de secundaria se debe a que dicho objeto matemático está inmerso en grados inferiores de la educación básica regular, específicamente en segundo y cuarto de secundaria, en donde la mayoría de los problemas presentados se resuelven bajo procedimientos netamente algebraicos y aplicaciones directas del plano cartesiano, siendo un porcentaje muy bajo los que la utilizan y aplican como propiedad geométrica. Este inconveniente genera dificultades para buscar soluciones a las múltiples problemáticas de las distintas estructuras, cómo las superficies planas, los planos tridimensionales, cuyos temas son tratados en la educación superior.

Asimismo, al pretender establecer conexiones entre estos dos campos de las matemáticas (geometría sintética y geometría analítica) al estudiar la circunferencia, el autor diseña actividades que le permite analizar los procedimientos en cada uno de ellos, de tal forma que las conexiones entre estas dos perspectivas permitan el progreso del conocimiento respecto al objeto matemático de la circunferencia.

La metodología utilizada por el investigador fue el estudio de caso, pues ayudó en el análisis, aplicación y elaboración de las actividades cuya validación se basa en que los estudiantes transiten por la geometría analítica y sintética.

Con respecto al desarrollo de las actividades relacionadas con la circunferencia, Echevarría (2016) trabajó con 12 estudiantes de quinto año de educación secundaria de la I.E.I “Santo Domingo Savio”, pero se analizó el trabajo solo de cuatro estudiantes, quienes fueron escogidos aleatoriamente. Se desarrollaron tres sesiones: en la primera sesión los estudiantes tuvieron que recordar algunos saberes previos, en la segunda sesión se familiarizaron con la utilización del software GeoGebra y, finalmente en la tercera etapa se realizó la fase experimental donde los estudiantes se enfrentaron a cuatro problemas que fueron diseñados con la finalidad de que puedan establecer uniones entre la geometría analítica y sintética. Cabe resaltar que en estas actividades el autor pide graficar una circunferencia por tres puntos no alineados y dado tres puntos fijos se pide encontrar la ecuación de la circunferencia.

Respecto a los resultados obtenidos, el autor identificó una tarea en relación a las circunferencias que pudo ser abordado con un enfoque geométrico analítico y sintético, de tal forma que los estudiantes coordinaron elementos propios de cada campo de la geometría. Los trabajos algebraicos tienen sentido, debido a que cada etapa analítica proviene de una acción geométrica.

En este trabajo de investigación no se evidencia que el autor incita a que los estudiantes apliquen fórmulas para establecer ecuaciones de circunferencias, sino que lo hace paso a paso, movilizandolos conceptos elementales de la geometría, mediados por el software GeoGebra.

Al responder la incógnita del estudio: ¿Qué resultados se tendrá en los aprendizajes de los estudiantes al abordar problemas sobre circunferencias desde la geometría sintética y también desde la geometría analítica, Y de qué manera el uso de GeoGebra contribuirá a que los estudiantes establezcan conexiones entre estos dos cuadrantes de la matemática?, se pone

de manifiesto que la investigación es pertinente, ya que los estudiantes logran establecer coordinaciones entre cuadros de geometría analítica y sintética, lo cual evidencian el progreso de los conocimientos respecto a la circunferencia. También resalta la importancia de los saberes previos, para que puedan establecer dichas coordinaciones; además, se resalta que la utilización del software GeoGebra posibilitó que los alumnos puedan verificar los resultados adquiridos en el desarrollo de las actividades, pudiendo enfocarse en las ideas principales y así entendiendo los cálculos y resolverlo con mayor facilidad.

Similar como Sánchez (2019) y Garzón (2020) la interacción de los estudiantes con el GeoGebra resulta muy favorecedora: los estudiantes se hacen más autónomos en su aprendizaje y logra una mayor interacción entre ellos, siendo más activos y reflexivos, desligándose de que el docente sea quien guíe cada uno de sus pasos en la realización de sus tareas o actividades de aprendizaje.

Finalmente, Echevarría (2016) indicó como futuras investigaciones, realizar más actividades con el objeto matemático de la circunferencia tomando en cuenta la teoría denominada Juego de cuadros de Regine Douady, ya que ayuda beneficiosamente en el aprendizaje de los alumnos. También señaló que las futuras investigaciones a realizarse deben apoyarse en la geometría dinámica ya que ayuda a elaborar estructuras de múltiples objetos matemáticos y, a la vez permite verificar si los cálculos algebraicos son correctos con la respuesta ideal comprobada en su construcción.

Tabla 15: *Investigación propuesta por Lara (2016)*

Nombre del documento	La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemática basada en la teoría de registros de representación semiótica
Autor	Isabel Mercedes Lara Torres
Año de sustentación	2016
Número de páginas	145
Palabras clave	Parábola; lugar geométrico, registros de representación semiótica, GeoGebra

Ubicación (dirección electrónica específica) y/o clasificación topográfica en la biblioteca dónde se encuentra	http://hdl.handle.net/20.500.12404/7363
Marco teórico de investigación	Teoría de registros de representación semiótica
Metodología del trabajo de investigación	Ingeniería didáctica
Muestra	Docentes en servicio de educación secundaria especializados en el área de matemáticas del Colegio Particular Bertolt Brecht
Uso de tecnología	GeoGebra

Fuente: propia

Reseña crítica 4: la parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemática basada en la teoría de registros de representación semiótica

El trabajo de Lara (2016), plantea a una parábola como un lugar geométrico el cual se encuentra en formación continua por los docentes especializados en el área matemática, a través de un conjunto de tareas, teniendo como mediador el GeoGebra. Describe las dificultades que tienen los estudiantes en el entendimiento de las parábolas como lugares geométricos y por consiguiente la autora menciona que los docentes no poseen sapiencias básicas en relación a la noción de una parábola pues no utilizan el GeoGebra dado que no conocen el software o lo identifican, sin embargo, no son utilizados en sus clases de matemáticas. Por tal motivo, para la autora es importante la formación consistente de los docentes del área matemática, de manera que así puedan movilizar su sapiencia sobre las parábolas, haciendo uso del GeoGebra.

Para sus cuatro actividades, la autora hizo partícipe a quince docentes de la carrera pública magisterial de modalidad de educación básica regular en formación continua. Estos docentes eran alumnos de la MEM de la Pontificia Universidad Católica del Perú en el curso de geometría plana y del espacio, se tomó algunas horas de clase de la maestría mencionada. Para esto, se planteó una serie de preguntas y procedimientos con la intención de lograr el objetivo de examinar como los docentes de matemática pueden movilizar las nociones de lugares geométricos, cuándo desenvuelven un conjunto qué usan distintas representaciones de registros semióticos.

De acuerdo con Lara (2016), la importancia que los docentes movilicen la noción de parábola se debe a que al incluir la utilización de un software en particular y el GeoGebra en diversos temas como la enseñanza de la parábola va a permitir generar situaciones en la que los estudiantes adquieran esta noción de forma novedosa, interactiva y atractiva. Además, porque en la Evaluación Nacional del 2004 en la capacidad aplicación de algoritmo se considera a la ecuación cónica y sus elementos.

La metodología utilizada por la autora es la ingeniería didáctica de Artigue en el año 1995, pues dicha metodología ayudó en elaborar un esquema experimental en relación a la observación, análisis, concepción, validación y elaboración de las definiciones de enseñanza a través de un contraste entre lo que planificó (a priori) y lo que sucede en la realidad en la clase (posteriori).

Con respecto a los resultados obtenidos, la investigadora propone cuatro actividades. La primera consiste en motivar a que los docentes puedan movilizar las nociones de las parábolas como lugares geométricos a través del uso de definiciones como equidistancia y mediatriz, teniendo como mediador el GeoGebra; la segunda fue construir la parábola en base a movilizar los conocimientos previos acerca de la propiedad de la circunferencia; la tercera actividad fue construir la parábola en el plano cartesiano mediante propiedades y elementos, y finalmente la cuarta actividad fueron aplicaciones de parábola con el fin de realizar construcción geométrica. Esta secuencia de actividades propició que los profesores realicen tratamientos dentro del registro de índole algebraica y conversiones de registro geométrico.

En la investigación de la autora se observa el uso de las herramientas del GeoGebra para así poder movilizar la noción de parábola mediante sus elementos, sin utilizar ninguna tecla que podría facilitar la construcción del elemento, como la herramienta cónica – parábola presente en dicho software.

Finalmente, la investigadora menciona para futuras investigaciones poder investigar acerca de la noción de las parábolas como lugares geométricos en conflictos los cuales están contextualizados valiéndose de un software en una formación de profesores. Además, propone hacer uso de otros instrumentos tecnológicos dentro de la enseñanza de distintos lugares geométricos en continúa formación para docentes especializados en matemáticas.

Al responder la incógnita del estudio: ¿Cómo profesores de matemática movilizan la noción de parábola como lugar geométrico, cuándo desarrollan una secuencia en la que utilizan diferentes registros de representación semiótica?, se pone de manifiesto que es pertinente pues los docentes evidencian falencias en las coordinaciones de los registros de lenguas naturales y gráficas, asimismo de los registros figurativos, por tal motivo no permite la una conversión entre la representación de los registros.

Tabla 16: *Investigación propuesta por Olivares (2018)*

Nombre del documento	Coordinación de diferentes registros de representación semiótica para movilizar la noción de elipses en estudiantes de física
Autor	Olivares López, Edwin Hernán
Año de sustentación	2018
Número de páginas	120
Palabras clave	Teoría de registros; ingeniería didáctica; cónicas; elipse
Ubicación (dirección electrónica específica) y/o clasificación topográfica de la biblioteca dónde se encuentra	http://hdl.handle.net/20.500.12404/12989
Marco teórico de investigación	Teoría de registros de representación semiótica
Metodología del trabajo de investigación	Ingeniería Didáctica
Muestra	Dos alumnos de la facultad de ciencias naturales y matemáticas de la universidad del callao
Uso de tecnología	No presenta

Fuente: propia

Reseña crítica 5: coordinación de diferentes registros de representación semiótica para movilizar la noción de elipse en estudiantes de física

La investigación de Olivares (2018) describe las dificultades que poseen los estudiantes al coordinar las distintas representaciones de registros de las elipses del primer ciclo de la especialidad de Física del curso de Complemento de Matemática de una universidad pública del Perú. Para esto, se plantearon una serie de preguntas y procedimientos con el fin de cumplir con el objetivo de examinar la coordinación de múltiples registros representativos semióticos que los alumnos de física elaboran al movilizar nociones de elipses.

Para el autor, la importancia de estudiar la elipse en estudiantes de física se debe a que, en cursos posteriores como Mecánica Clásica, estudian temas relacionados a dicho objeto matemático, como las normativas de Kepler y los conflictos de dos cuerpos. Otro curso importante en el que se aborda dicho tema es el de Resistencia de Materiales, donde se estudia la elipse de inercia, que no es más que una placa que se le hace girar, y sus ejes rotativos los cuales están ubicados en una única placa ya que pasan por el centro gravitacional.

Asimismo, debido a las dificultades identificadas en los estudiantes en la comprensión y aprendizaje de la elipse, Olivares (2018) decide que es pertinente generar una secuencia didáctica que les permita a los estudiantes detallar e identificar las conversiones y tratamientos que movilizan la noción de la elipse.

La metodología utilizada por el autor fue la ingeniería dinámica de Artigue en el año 1995, pues ayudó al análisis, aplicación y elaboración de una secuencia de actividades cuya validación se basa en un debate entre los exámenes a priori y posteriori.

En relación a los resultados adquiridos, dentro del proceso de construcción de la elipse, el autor trabajó con 25 estudiantes, pero se analizó el trabajo de dos de ellos con seudónimos de Jack y Rose, quienes fueron escogidos por su alto desempeño académico. Se desarrollaron cinco actividades de aprendizaje las cuales consistieron en cinco ítems donde se les pedía inicialmente

reconocer elementos de la elipse, a través de su excentricidad, el eje mayor, el eje normal y luego, con estos elementos identificados, poder hacer un bosquejo. Luego, en los siguientes ítems el autor indicaba un posible cambio de coordenadas y hacer cálculos respectivos para poder hallar las directrices y finalmente graficar dicha elipse con todos sus elementos.

En el trabajo del autor no se ve que incite a que los estudiantes apliquen las fórmulas para calcular cada elemento de la elipse, sino que lo hace de manera natural, paso a paso, y a través del gráfico, con geometría sencilla, para así poder hallar cada elemento. También se pudo notar que el autor no utiliza el GeoGebra como mediador, sin embargo, no declara explícitamente el motivo por el cual no lo usa.

Finalmente, el investigador indica como futuras investigaciones realizar secuencias que examinen las articulaciones entre los distintos registros representativo semióticos de los objetos matemáticos; elaborar investigaciones del ipssset de una manera vectorial con el marco teórico de la teoría de representación de registros semióticos de Duval en el año 2004 fundamentados por el software GeoGebra en un contexto geométrico dinámico, debido a que el programa contiene instrumentos que posibilitan la optimización del entendimiento sobre los objetos matemáticos elípticos de forma vectorial a través de las perspectivas gráficas y algebraicas. Dada la ejecución de la propiedad elíptica, bien sea en arquitectura, a través de la estructura de coliseos acústicos hasta monumentales estadios de fútbol, o también en la física médica, a través del tratamiento para cálculos renales, como para el estudio de cuerpos celestiales, se sugiere realizar una investigación en relación a estas ejecuciones.

Al responder la incógnita del estudio: ¿Cómo la coordinación de diferentes registros de representación semiótica favorece la movilización de la noción de elipse en estudiantes de física?, se pone de manifiesto que el estudio del autor es pertinente, pues los estudiantes logran identificar y describir las distintas actividades cognitivas fundamentales, con lo cual se observa

las acciones de los estudiantes valiéndose de su marco teórico referencial, la teoría de representación de registros semióticos de Duval elaborada en el año 2004.

El análisis presentado pone en evidencia el fuerte lazo que hay entre los papeles experimentales, la indagación y la acción en los procedimientos de enseñanza en las elaboraciones dinámicas de la clase.

Tabla 17: *Investigación propuesta por Olano (2018)*

Nombre del documento	Registro de representación semiótica de la elipse: secuencia de actividades mediada con el GeoGebra para estudiantes de quinto de secundaria
Autor	Plano Cruces, Mario Fernando
Año de sustentación	2018
Número de páginas	128
Palabras clave	Elipse; registros; GeoGebra; coordinación de registros
Ubicación (dirección electrónica específica) y/o clasificación topográfica de la biblioteca dónde se encuentra	http://hdl.handle.net/20.500.12404/12039
Marco teórico de investigación	Teoría de registros de representación semiótica
Metodología del trabajo de investigación	Ingeniería didáctica
Muestra	Seis estudiantes de la Institución privada del distrito de Santiago de surco
Uso de tecnología	GeoGebra

Fuente: propia

Reseña crítica 6: registros de representación semiótica de la elipse: secuencia de actividades mediada con el GeoGebra para estudiantes de quinto de secundaria

El estudio de Olano (2018), nos manifiesta las dificultades en identificar las definiciones de elipse como lugar geométrico, pues en la educación secundaria se prioriza más el factor algebraico que el geométrico. En esta investigación participaron 6 alumnos pertenecientes al

quinto año de secundaria en la institución educativa privada del distrito de Santiago de Surco. Para ello, se elaboraron un conjunto de incógnitas y procedimientos los cuales tuvieron que cumplir con el objetivo de examinar la coordinación de la representación de registro semiótico que elabora alumnos de quinto año de secundaria en grupos de tareas en relación a las elipses mediadas por el software GeoGebra.

Teniendo en cuenta los investigadores, la importancia radica en mejorar la comprensión de la noción de la elipse a través de las representaciones curvilíneas de diversos registros, la cual al movilizar dicho estudio es fundamental para el aprendizaje en el área matemática. Asimismo, debido a los conflictos identificados en la comprensión de la elipse, se realiza un conjunto de actividades que permite a los estudiantes coordinar las distintas representaciones de registros tales como las lenguas gráficas, naturales y algebraicas.

La metodología utilizada por el autor fue el ingeniero dinámico de Artigue en el año 1995, la cual permitió poder examinar los procedimientos realizados por los alumnos de quinto de secundaria con respecto a su aprendizaje del concepto de la elipse a través de la sistematización de la representación de registros semióticos en conjuntos de tareas usando el GeoGebra.

Con respecto a los resultados obtenidos, el investigador convocó a un taller con 20 estudiantes y de ellos asistieron 06 alumnos, los cuales eran del 5to año de secundaria. Se desarrollaron dos actividades con un tiempo establecido de 60 minutos y 80 minutos respectivamente. La primera actividad requirió de conocimientos previos para construir la elipse usando el GeoGebra, ya que permite explorar el software mediante un conjunto de procedimientos (arrastre el punto, trace la recta, cambie el valor, entre otras) a realizar. En la segunda actividad se observó que realizan tratamientos al pasar de una ecuación general a una ecuación de la forma ordinaria con ayuda del GeoGebra, y a su vez realizan conversiones del registro gráfico y algebraicos.

En el trabajo de Olano (2018) vemos que los estudiantes recibieron conocimientos previos acerca del uso del GeoGebra, y fue realizada de manera individual. Además, se observó que las actividades en su mayoría fueron diseñadas para que los tratamientos encontrados no solamente sean en el registro algebraico, sino que hace uso de los distintos registros de representación.

Finalmente, el autor indica como futuras investigaciones revisar documentos universitarios o escolares sobre el aprendizaje y enseñanza sobre cónicas, tal como las elipses, para así poder examinar las visiones del profesorado respecto a su comprensión.

Al responder la incógnita del estudio: ¿Qué registros de representación semiótica coordinan estudiantes de quinto de secundaria en una secuencia de actividades sobre la elipse mediada por el GeoGebra?, se evidencia que el estudio del autor es pertinente, pues los alumnos identifican la representación de registros semióticos del elipse y coordinar los diferentes registros como los de índole algebraica, gráfica y figural a través de su marco teórico sobre la teoría de representación de registros semióticos.

Tabla 18: Investigación propuesta por Contreras (2019)

Nombre del documento	Niveles de demanda cognitiva de problemas creados sobre parábola como lugar geométrico. Una propuesta para la formación de profesores de secundaria
Autor	Greyson Martín Contreras Ochoa
Año de sustentación	2019
Número de páginas	165
Palabras clave	Creación de problemas; modelo de demanda cognitiva; parábola
Ubicación (dirección electrónica específica) y/o clasificación topográfica en la biblioteca dónde se encuentra	http://hdl.handle.net/20.500.12404/15694
Marco teórico de investigación	Creación de problemas
Metodología del trabajo de investigación	Investigación Cualitativa

Muestra	Profesores en servicio de educación secundaria de la especialidad de matemáticas del Colegio Particular Bertolt Brecht
Uso de tecnología	No presenta

Fuente: propia

Reseña crítica 7: Niveles de demanda cognitiva de problemas creados sobre parábola como lugar geométrico: una propuesta para la formación de profesores de secundaria

La Investigación de Contreras (2019) muestra un aporte para la investigación de actividades afines con las parábolas desde un punto de vista del área geométrica en relación a la formación de docentes de secundaria en actividad. Dicho aporte consiste en diseñar y crear problemas sobre parábolas bajo la adaptación de métodos con demanda cognitiva elaborados por Smith y Stein en el año 1988, que consta de cuatro niveles los cuales son procesos conectivos, memorización, elaboración matemática y proceso sin conexión.

Para ello, se ejecutan talleres denominados “creación de problemas de matemáticas sobre parábolas como lugar geométrico” con la finalidad de examinar los grados de la demanda cognitiva la cual predomina en los conflictos de un conjunto de docentes en servicio en la secundaria I.E.P. Bertolt Brecht, al momento de estudiar parábolas como lugares geométricos, a través de un método de origen de conflictos.

El autor resalta que el origen de los conflictos (CP) se entiende como una tarea del aprendizaje la cual promueve las habilidades, creatividad y razonamiento matemático de los alumnos. Por ello es pertinente que los profesores incluyan actividades relacionadas con CP en sus prácticas pedagógicas, en seminarios, en libros y artículos que se escriben, con la finalidad de hacer sencillo el entendimiento y la utilización de los factores matemáticos de las parábolas, de manera que se pueda instruir a los alumnos a mejorar sus creaciones y a resolver los conflictos. Además, el investigador identificó dificultades en el aspecto cognitivo por parte de los profesores, al elaborar una conversión de los registros de lenguas naturales a las gráficas, así como la conversión de registro gráfico al algebraico; asimismo, también identifica dificultades en

la parte didáctica ya que los dos libros analizados de acuerdo al libro del Ministerio de Educación del Perú y del Instituto de Ciencias y Humanidades, las cuales presentan una perspectiva académica la cual no produce contextos que optimicen el aprendizaje de parábolas como lugares geométricos.

Debido a las dificultades identificadas y en base al objetivo general, el autor crea un taller que duró aproximadamente 08 horas, que fueron sistematizadas en 04 sesiones de 02 horas. La muestra estuvo conformada por 13 docentes en servicio de educación secundaria especializados en matemáticas.

La metodología utilizada por Contreras (2019) fue el estudio de caso, pues ayudó a examinar las problemáticas que originan los docentes de educación secundaria. Dicho análisis se realizó en base a las entrevistas directas y análisis de documentos que posibilitó el establecimiento y detección de los conflictos del desenvolvimiento de los talleres.

Con respecto a los resultados obtenidos, en la primera sesión que ayudó en la adquisición de las sapiencias previas de los docentes relacionados a las parábolas bajo un enfoque de índole geométrica, se evidenció que los docentes tienen conocimientos del objeto matemático de estudio. Sin embargo, en la segunda sesión después de una presentación del origen en el procedimiento del aprendizaje y enseñanza de matemáticas se pidió la creación de un problema – pre, las problemáticas de resolución y entendimiento de los problemas dados, y se evidenció múltiples conflictos al originar problemáticas de altos grados de demandas cognitivas. En la tercera actividad, después de la presentación de una propuesta de diapositivas del instrumento con demandas cognitivas alteradas por los factores matemáticos de para olas como lugares geométricos, se pidió la creación de un problema – pre en donde se evidenció una diferencia notable correspondiente a los grados de las demandas cognitivas, ya que se ubican en los segundos grados, los cuales son procesos sin una conexión. Finalmente, dentro de la cuarta sesión se concluyó que la presentación y enseñanza de los grados de las demandas cognitivas

son parte de la optimización de grados de las demandas cognitivas en la creación de conflictos por parte de los docentes que participaron en el estudio.

En el trabajo del autor se evidencia el planteamiento de los enunciados de las preguntas el registro gráfico y de lenguaje. Para que los docentes den respuestas a las preguntas planteadas necesariamente deben ejecutar una conversión en los registros algebraicos, debido a que la pregunta predominante en todas las sesiones es encontrar la ecuación de la parábola. También se pudo evidenciar que el investigador no utiliza el GeoGebra como mediador a pesar de que se está abordando la parábola desde un punto de vista geométrico.

Finalmente, el autor indica como futuras investigaciones proponer un modelo de demanda cognitiva de otros objetos matemáticos específicos enmarcados en el conjunto de cónicas para experimentar en talleres mediante el origen de conflictos elaborados por docentes en actividad o en curso de formación. También propone corroborar el prototipo moldeado a las demandas cognitivas de las parábolas, bajo un enfoque de la geometría que posibilita el diseño para una correcta práctica del profesorado para facilitar la comprensión del objeto matemático. Por último, propone la examinación a través de los modelos con una mayor demanda cognitiva según su objetivo matemático; actividades con problemáticas de pre y pos estructurados por los docentes en formación o servicio.

Al responder la pregunta de investigación: ¿Cuáles son los niveles de demanda cognitiva que predominan en los problemas que crean los profesores de secundaria al estudiar la parábola, como lugar geométrico, mediante la creación de problemas?, se pone en manifiesto que la investigación es pertinente pues se logró analizar los grados de las demandas cognitivas de los conflictos elaborados por profesores teniendo un antes y después al desarrollar un taller sobre creación de problemas. El análisis presentado pone en evidencia la relación que hay entre la investigación y la repercusión en las buenas prácticas docentes ya que se pretende brindar propuestas analíticas en relación a los conflictos de las parábolas previamente vistas como

lugares geométricos, mediante los modelos de demanda cognitiva los cuales permitieron obtener dominio específico en cada grado.

Tabla 19: *Investigación propuesta por Amaya (2020)*

Nombre del documento	Estudio de la elipse basada en aspectos de la teoría de registros de representación semiótica con estudiantes de la carrera de arquitectura
Autor	Amaya Siesquen, Junior Alan
Año de sustentación	2020
Número de páginas	107
Palabras clave	Teoría de registros; investigación cualitativa; elipse
Ubicación (dirección electrónica específica) y/o clasificación topográfica de la biblioteca dónde se encuentra	http://hdl.handle.net/20.500.12404/17249
Marco teórico de investigación	Teoría de registro de representación semiótica
Metodología del trabajo de investigación	Investigación cualitativa
Muestra	Tres alumnos del primer ciclo de la carrera de arquitectura de una universidad privada de Lima.
Uso de tecnología	GeoGebra

Fuente: propia

Reseña crítica 8: Estudio de la elipse basada en aspectos de la teoría de registros de representación semiótica con estudiantes de la carrera de arquitectura

La investigación de Amaya (2020) identifica y describe que las conversiones y manipulación que usan los alumnos al resolver un problema didáctico en relación a las elipses dentro del curso de matemáticas básicas del primer ciclo de arquitectura en una universidad privada ubicada en Lima. Se ejecutaron múltiples incógnitas con el fin de lograr el objetivo de examinar la forma en que los alumnos de arquitectura realizan la movilización de nociones de elipses al resolver una incógnita dinámica que necesite la utilización de representación de registros semióticos.

Para Amaya (2020), la importancia de estudiar la elipse se debe a los problemas identificados que presentan los alumnos en el aprendizaje, como no reconocerla como lugar

geométrico, usando mayormente su ecuación, y pidiendo identificar sus elementos. Además, señala que hay pocas investigaciones en el Perú de la investigación de elipses en grados altos, dado que los conceptos de elipse se ven en varias carreras como Ingeniería, Medicina, Administración, Física, Matemática, etc.

La metodología usada por el autor fue el estudio cualitativo realizado por Hernández, Fernández y Baptista (2010), pues analiza y describe las conductas, opiniones, interacciones y actitudes al momento de resolver alguna tarea dinámica.

De acuerdo con las actividades presentadas por el investigador donde participaron 34 estudiantes, se pudo observar que las preguntas se basan en identificar los elementos de la elipse y utilizar las ecuaciones para poder hallar dichos elementos. Las soluciones de los estudiantes a las actividades 1, 3 y 4 nos indican que no ha sido necesario graficar la elipse para poder dar con la respuesta. Por lo tanto, en dichas actividades planteadas no se pone de manifiesto a la elipse como lugar geométrico debido a que a la definición vista en el capítulo II.

Una observación para considerar respecto a la última pregunta de las actividades planteadas por el autor sería darle al estudiante solo el plano cartesiano sin escalas debido a que con las escalas se le estaría ayudando de una manera implícita.

Finalmente, el investigador indica que para futuras investigaciones se debe estudiar la sección cónica elipse utilizando un software, por ejemplo el GeoGebra, pues indica que tendrán un mejor entendimiento de la elipse, debido a los comandos que posee dicho software. Al respecto no explica por qué no utilizó algún software en el diseño de sus actividades. Además recomienda realizar actividades de contexto real referentes a su carrera pues así se motivará al estudiante en su aprendizaje. También propone analizar los textos universitarios sobre secciones cónicas para mejorar el proceso de enseñanza en nuestro país pues estos conceptos son estudiados en el primer ciclo de casi todas las carreras universitarias.

Al responder la incógnita del estudio: ¿Cómo los estudiantes de la carrera de arquitectura movilizan la noción de elipse la resolver una actividad didáctica que requiere el uso de registros de lengua natural, algebraico y gráfico?, notamos que la investigación es pertinente pues identifica la representación de registros semióticos y estudia la conversación y manipulación de los registros gráficos, algebraico y de lengua natural, con lo cual validan el marco teórico de la teoría de Representación de registros semióticos realizado por Duval (2004).

Habiendo realizado la reseña crítica de las investigaciones de la MEM, se observa lo fundamental que es que los estudiantes “reconozcan y describa curvas o lugares geométricos” (MEN, 2003, p. 21) antes de “resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas de manera algebraica” (p.20), aunque no lo digan explícitamente. En el caso de Garzón (2020) sí se consideró fundamental el enfoque en el aprendizaje significativo del lugar geométrico.

En la tabla N°20 se expresa la organización de las tesis revisadas de la MEM en la PUCP, con el fin de determinar si se logró alcanzar los objetivos propuestos y establecer las relaciones entre los objetos matemáticos estudiados en cada una de ellas.

Tabla 20: *Distribución de las tesis revisadas en la MEM de la PUCP según su autor y objetivo general*

N.º	AUTOR	OBJETIVO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN/ RECORTES DE TEXTO QUE MUESTRAN SI LOS OBJETIVOS SE LOGRARON
1	León Ríos, José Carlos	Ayudar en la instrumentalización de las elipses cuando los estudiantes trabajan en un conjunto de tareas mediadas por el GeoGebra. “Al término de nuestro estudio podemos señalar que hemos respondido a la pregunta de investigación ya que hay indicios que las actividades propuestas permitieron el surgimiento y el enriquecimiento progresivo de las propiedades de la elipse influenciado por el GeoGebra.” (p. 269)
2	Díaz Villegas Roger	Determinar mediante una secuencia de tareas las cuales siguen en etapas de la dialéctica de objeto y herramienta mediadas por GeoGebra, cuáles son estructuradas a través de definiciones circunferenciales de cuadros geométricos analíticos en alumnos de quinto año de secundaria.

		<p>“Luego de haber alcanzado nuestro objetivo general, consideramos que nuestra pregunta de investigación ¿una secuencia de actividades que sigue las fases de la Dialéctica Herramienta – Objeto y mediada por el software GeoGebra? contribuye a la construcción del concepto circunferencia desde el cuatro de la geometría analítica en estudiantes del quinto año de secundaria.” (p.125)</p>
3	Echevarría Anaya Julio Antonio	<p>Determinar cómo los alumnos de quinto año de secundaria elaboran alteraciones en los cuadros utilizando la geometría sintética y analítica, al momento de estudiar los objetos matemáticos circunferenciales con el uso de GeoGebra.</p> <p>“Se logró identificar una actividad sobre circunferencia que podía ser abordada desde la geometría sintética y también desde la geometría analítica. En cada uno de dichos cuadros, se tendría que hacer uso de procedimientos propios particulares; así, mientras que desde la geometría sin coordenadas prevalecerían las construcciones exactas, desde la geometría analítica, la solución del problema se basaría en resolver sistemas de ecuaciones”. (p. 81)</p>
4	Lara Torres, Isabel Mercedes	<p>Analizar cómo los docentes especializados en el área matemática tienden a movilizar las nociones de las parábolas como lugares geométricos, al momento de desarrollar secuencias usadas para múltiples representaciones de registros semióticos.</p> <p>“En el análisis del proceso de movilización de las nociones de la parábola como lugar geométrico pudimos observar que la mayoría de los profesores, coordinan mejor el registro figural de la construcción de la parábola con el registro de lengua natural, realizando tratamientos y conversiones en los mencionados registros”. (p.134)</p>
5	Olivares López, Edwin Hernán	<p>Analizar la coordinación de diferentes registros semióticos representativos que los alumnos de física efectúan para lograr la movilización de la noción de elipses.</p> <p>“La situación dada durante la aplicación de la actividad, posibilita a los sujetos de investigación aprendizaje y reflexión sobre la articulación de las representaciones de lengua natural, algebraica y gráfica, ya que la secuencia de preguntas permitió que los sujetos transiten entre los registros de representación semiótica y se apropien de la noción de elipse.” (p. 107)</p>
6	Olano Cruces, Mario Fernando	<p>Examinar la coordinación entre la representación de registros semióticos que elaboran los alumnos del quinto grado de la escuela secundaria en un conjunto de tareas relacionadas a las elipses mediadas por el software GeoGebra.</p> <p>“Se logró alcanzar el objetivo general, porque, en el desarrollo de la secuencia de actividades, los estudiantes identificaron los registros de representación semiótica: lengua natural, figural, gráfico y algebraico. Por lo tanto, afirmamos que los estudiantes serán capaces de reconocer la Elipse en sus diferentes representaciones. Es decir, por la definición, por el diseño de su curva, por la forma canónica o por la ecuación general de segundo grado”. (p. 115)</p>
7	Contreras Ochoa, Greyson Martín	<p>Examinar los grados de demanda cognitiva persistentes en los conflictos que originan un conjunto de docentes en servicio en una escuela secundaria llamada IEP Bertolt Brecht, al momento de estudiar las parábolas, Cómo lugares geométricos, a través de metodologías de creación de problemáticas matemáticas.</p>

		<p>“A través del análisis del episodio de clase No 1 actividad individual (sesión 2), y de la rúbrica, concluimos que los profesores presentaron serias dificultades en generar problemas de un nivel alto de demanda cognitiva. Esto lo percibimos tanto en la solución a los problemas del episodio de clase N.º 1, como en los problemas pre, que crearon los profesores a partir del problema del mismo episodio. Esto confirma la importancia del conocimiento de los niveles de demanda cognitiva y de nuestra propuesta de adaptación del modelo de demanda cognitiva para problemas de parábolas como lugar geométrico. Esto permitió analizar los niveles de demanda cognitiva de los problemas creados por los profesores de secundaria, acerca de la parábola, como lugar geométrico, antes de desarrollar un taller sobre creación de problemas”. (p. 132)</p>
8	Amaya Siesquien, Junior Alan	<p>Examinar la forma en que los alumnos de la carrera de arquitectura tienden a movilizar las nociones de elipses al momento de resolver una tarea dinámica que necesite la utilización de registros gráficos, naturales y algebraicos.</p> <p>“Se observa en la actividad didáctica que, mediante la secuencia de preguntas, se logra identificar los tratamientos y las conversiones realizados por los estudiantes Rocío, Danilo y Corina en lengua natural, gráfica y algebraica. De manera particular, la pregunta 2, que contó con tres ítems y que tuvo como objetivo que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos referentes a los elementos de la Elipse, como vértices del eje mayor, menor y centro de la Elipse, ha permitido que los estudiantes Rocío, Danilo y Corina transitaran entre los registros de representación semiótica.” (p. 98)</p>

Fuente: propia

Con base a la Tabla 20, verificamos que todos los investigadores lograron más metas previamente planteadas en los estudios. Además, según la misma tabla encontramos que, de las ocho investigaciones revisadas de la MEM de la PUCP, la mayoría hace uso del verbo Analizar mediante una secuencia de actividades sobre una determinada sección cónica a excepción de León (2014), quien tiene como finalidad el brindar herramientas de la elipse cuando los estudiantes resuelven un conjunto de tareas elaboradas por GeoGebra.

Cabe resaltar que la examinación de todas las tesis revisadas se realiza sobre un conjunto de procedimientos cognitivos que emergen al aplicar unas secuencias de actividades, descritos bajo los términos propios de cada metodología y marco teórico, siendo la más usada el método dinámico se ingeniería y la teoría de representación de registros semióticos, elaborada por Duval en el año 2004. Los términos propios de la metodología de la Ingeniería Didáctica corresponden al examen a priori y posteriori mientras que dentro del marco teórico propuesto por Duval

corresponden al registro figural, lengua natural, algebraico y sus conversiones y tratamientos entre ellos. En los resultados de los trabajos revisados según los enfoques señalados, todos convergen en que los sujetos de investigación presentan mayor dificultad al realizar conversiones entre los registros algebraico y figural.

En la Tabla 21, organizamos las tesis revisadas de la MEM de la PUCP según los sujetos de investigación y el nivel educativo donde se aplica, de la siguiente manera:

Tabla 21: Distribución de las 8 tesis de la MEM de la PUCP según su autor, sujetos de investigación y nivel de estudios

N.º	Autor	Sujetos de Investigación	Nivel de estudios
1	León Ríos, José Carlos	Estudiantes	Universitario (1º ciclo)
2	Díaz Villegas, Roger	Estudiantes	Educación Secundaria (5º)
3	Echevarría Anaya, Julio Antonio	Estudiantes	Educación Secundaria (5º)
4	Lara Torres, Isabel Mercedes	Profesores	Universitario (Formación continua)
5	Olivares López, Edwin Hernán	Estudiantes	Universitario (1º ciclo)
6	Olano Cruces, Mario Fernando	Estudiantes	Educación Secundaria (5º)
7	Contreras Ochoa, Greyson Martín	Profesores	Educación Secundaria (5º)
8	Amaya Siesquien, Junior Alan	Estudiantes	Universitario (1º ciclo)

Fuente: propia

Con base a la Tabla 21, observamos que los sujetos de las investigaciones afines al tema de sección cónicas se dan más en estudiantes que están cursando la educación básica regular o los primeros ciclos de la educación universitaria, a excepción de Lara (2018) y Contreras (2019) donde los sujetos de investigación son profesores en servicio de educación superior y educación secundaria.

Además, en los trabajos de grado se encontró que el nivel de estudio donde se llevó a cabo las investigaciones corresponde de manera equitativa a universitarios y educación

secundaria. También se evidencia que todos los trabajos se desenvuelven en la educación superior los cuales se elaboran en universidades de la ciudad de Lima, ya que la tesis de Lara (2016) se trabaja con docentes de maestría en enseñanza de las matemáticas de la PUCP, Olivera (2018) trabaja con alumnos en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Universidad Nacional del Callao, mientras León (2014) y Amaya (2020) trabajan con alumnos de la carrera de arquitectura en una universidad privada ubicada en Lima, pero no especifican el nombre de la institución.

Respecto a los trabajos aplicados en el nivel educativo de educación secundaria, la mayoría se realizan en instituciones privadas y estatales del departamento de Lima excepto la investigación de Echevarría (2016) que lleva a cabo su investigación en la institución I.E.I. Santo Domingo Savio, y son ubicados en la zona urbana “El Milagro” dentro del distrito San Ramón en la provincia de Chanchamayo.

Además, en la Tabla 22, organizamos las tesis revisadas en la MEM de la PUCP según los recursos utilizados para llevar a cabo la secuencia de actividades, que posteriormente son analizadas bajo los referentes de un determinado marco teórico de la siguiente manera:

Tabla 22: *Distribución de las ocho tesis empleadas según autor y sus recursos utilizados*

N.º	AUTOR	RECURSOS UTILIZADOS	
		TECNOLOGÍA (GeoGebra)	LÁPIZ Y PAPEL
1	León Ríos, José Carlos	X	
2	Díaz Villegas, Roger	X	
3	Echevarría Anaya, Julio Antonio	X	
4	Lara Torres, Isabel Mercedes		X
5	Olivares López, Edwin Hernán		X
6	Olano Cruces, Mario Fernando	X	
7	Contreras Ochoa, Greyson Martín		X
8	Amaya Siesquien, Junior Alan		X

Fuente: propia

En relación a la información de la tabla N°22, se ha encontrado que el 50% de los trabajos revisados proponen la enseñanza de un determinado objeto matemático afines a las secciones cónicas, a partir del estudio de un conjunto de secuencias de tareas mediadas por atmósferas de representaciones didácticas del GeoGebra. El uso de este software permitió a los estudiantes la realización de una construcción geométrica, alteración de tareas propuestas, exploración e interacción con la finalidad de consolidar las definiciones de las secciones cónicas tal como los lugares geométricos mediante la visión didáctica de los puntos infinitos que la conforman. Además, permitió desenvolver la autonomía en relación a validación de conjetura y vivencia de experiencias, ubicando al estudiante como el elemento fundamental en el aprendizaje y al docente como una clase de compañero científico en el desenvolvimiento de conceptos innovadores.

Del mismo modo, también se encontró que el 50% de los trabajos analizados hacen uso de lápiz y papel, dentro de los cuales en su mayoría enfocan las actividades bajo el marco teórico de las teorías de registro y representación de la Semiótica, a excepción Contreras (2019) que trabaja bajo en enfoque de creación de problemas. Cabe resaltar que para estas investigaciones es suficiente usar lápiz y papel por el enfoque teórico de sus actividades ya que en la hipótesis de Duval se busca la coordinación entre los registros y necesariamente para realizar conversiones al registro algebraico se tiene que determinar una ecuación, en ese mismo sentido las actividades propuestas en el trabajo de investigación de Contreras enfatizan en la determinación la ecuación de la parábola.

Finalmente, en la Tabla 23, podemos notar que desde el 2014 hasta el 2020 hubo investigaciones realizadas sobre secciones cónicas a excepción del año 2017 que no hubo publicaciones.

Tabla 23: Distribución de las 8 tesis de la MEM de la PUCP, según el autor y el año de publicación

N.º	Autor	Año de publicación de las investigaciones revisadas						
		2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
1	León Ríos, José Carlos	X						
2	Díaz Villegas, Roger	X						
3	Echevarría Anaya, Julio Antonio		X					
4	Lara Torres, Isabel Mercedes			X				
5	Olivares López, Edwin Hernán					X		
6	Olano Cruces, Mario Fernando					X		
7	Contreras Ochoa, Greyson Martín						X	
8	Amaya Siesquien, Junior Alan							X

Fuente: propia



CAPÍTULO V: CONSIDERACIONES FINALES

El presente estudio tuvo como finalidad el examinar las principales características de investigación realizadas en la maestría en enseñanza de las matemáticas en la PUCP sobre la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas en el período 2014 – 2020, lo cual se centró en organizar y describir las características de las tesis de la MEM de la PUCP referentes al tema de secciones cónicas.

Para encaminar nuestra investigación, planteamos la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las características de las investigaciones desarrolladas en relación con las secciones cónicas, en la maestría en enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú en el período 2014 – 2020? En la búsqueda de poder responder nuestra pregunta, comenzamos la recopilación de datos en el repositorio de la PUCP en las tesis realizadas en la MEM alusivos a secciones cónicas. Seguidamente empezamos a organizarlos de acuerdo con el nombre del documento, autor, año de sustentación, número de páginas, palabras clave, marco teórico, metodología, población y uso de tecnología, además de describir las características esenciales mediante la elaboración de fichas.

Al hacer la elaboración de las fichas de las investigaciones producidas, nos permitió conocer los objetivos generales y específicos de cada investigación y también la pregunta de investigación, el marco teórico donde se desarrolló, la metodología empleada y los procedimientos experimentales empleados, así como los sujetos investigados o analizados y si hicieron uso de alguna herramienta tecnológica como por ejemplo uso del GeoGebra, además de los resultados que se pudieron obtener al término de cada investigación. Con esta información hemos podido realizar un análisis de las investigaciones producidas en la MEM de la PUCP en secciones cónicas en el período 2014 – 2020.

Por lo tanto, conseguimos alcanzar el objetivo de este estudio, respondiendo la incógnita planteada en el estudio. Por ello, revelamos las principales particularidades en los estudios realizados por otros investigadores al estudiar las secciones cónicas, verificando si dichas características propias de cada investigación contribuyeron a la adquisición o expansión de las sapiencias de los propósitos matemáticos de la investigación. Luego de la revisión, sistematización y análisis de las investigaciones de la MEM se pueden extraer algunas conclusiones que sintetizamos del siguiente modo.

En cuanto a la línea del estudio en la Maestría en Enseñanza de Matemáticas de la PUCP, las cuales son: Tecnologías y Visualización en Educación Matemática, desarrollo de la competencia dinámica matemática en docentes matemáticos, la creación y resolución de conflictos epistemológicos matemáticos, encontramos ocho estudios elaborados en campos de geometría, referentes a las secciones cónicas, pertenecientes a la línea de tecnologías y visualización, ya que las investigaciones de León (2014), Díaz (2014), Echevarría (2015), Lara (2016), Olivares (2018), Olano (2018) y Amaya (2020) elaboraron, analizaron y aplicaron secuencias de actividades en los grados educacionales de índole universitaria y de secundaria bajo distintos marcos teóricos, con la finalidad de garantizar la asimilación de los conceptos involucrados en los procedimientos de aprendizaje y enseñanza de las áreas cónicas. Respecto la línea de resolución y creación de problemas solo se encontró la investigación Contreras (2019), mientras que en las líneas del desenvolvimiento de habilidades dinámicas matemáticas en docentes especializados en matemáticas y epistemología, no se encontró ninguna investigación.

Con relación al período de tiempo seleccionado (del 2014 al 2020) podemos indicar que es en este lapso en donde se realizan el tema de secciones cónicas tomando como definición el capítulo II, en donde encontramos ocho investigaciones realizadas en dicho periodo en la MEM de la PUCP. También, hemos notado que estas han tenido una mayor producción en los años 2014, 2016 y 2018, con 3, 2 y 2 tesis respectivamente; y en cuanto a los marcos teóricos donde

se desarrollaron estas investigaciones, la mayor producción se dio con la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS).

Con respecto a la tecnología utilizada en las tesis sobre secciones cónicas en la MEM de la PUCP, se concluye que en su mayoría usan el software GeoGebra. Además, podemos notar que dicho software contribuye al procedimiento de aprendizaje y enseñanza de los estudiantes ya que, utilizan algunos instrumentos del software, estos tienen mejores oportunidades de visualización, logrando desarrollar una perspectiva más amplia de tal forma que alcanzan a consolidar la definición mediante perspectivas dinámicas de los puntos infinitos que constituye una cónica. Además, juntamente con la interacción entre el docente y alumnos, se evidenció el entendimiento del objeto de estudio, logrando consolidar la definición y sus propiedades según la perspectiva estudiada.

Con respecto al enfoque, podemos notar en las tesis revisadas, que la mayoría trabaja con la sección cónica de la elipse, abordándola desde una perspectiva geométrica, la cual debe construir la sección cónica a través de un conjunto de secuencias de tareas elaboradas por el software GeoGebra, el cual posibilita el descubrimiento y origen de la cónica estudiada. Vemos también que, para todas las tesis revisadas, las cuales se aplicaron en estudiantes o profesores, estos deben tener conocimiento de algunos conocimientos previos básicos e importantes tales como bisectriz, que se entiende como la igualdad de los puntos en relación a una sola recta, con posiciones relativas de 02 rectas y una ecuación sobre la recta.

Asimismo, evidenciamos que ningún trabajo de investigación hizo uso de materiales manipulativos o concretos, que son todos los factores u objetos que son de sencilla adquisición en relación al aprendizaje a través de las experiencias y manipulación de estos factores, mejorando los niveles de adquisición de conocimientos.

Al igual, que en las investigaciones internacionales mencionadas (Gonzáles, 2018, Sánchez, 2019 y Garzón, 2020) se favorece a un aprendizaje constructivista desde procesos de tratamiento y conversión.

Finalmente, indicamos que hay algunas investigaciones que no mencionan explícitamente por qué eligen una determinada población, la cual fue un grupo de estudiantes de 5to grado de secundaria o del primer ciclo universitario, como también no mencionan por qué trabajan con el GeoGebra.

Dejamos abierta la sugerencia y posibilidad que este trabajo se reproduzca en otras universidades, pues nuestro análisis se centró en la MEM de la PUCP. Así también nos queda la pregunta abierta: ¿De qué manera podemos analizar las principales características que presentan las investigaciones desarrolladas en otras universidades?, así como también ¿qué objeto matemático es más investigado?

Recomendamos para futuras investigaciones recopilar trabajos que hagan uso de otros softwares, ya que en todas las tesis revisadas en la MEM de la PUCP acerca de secciones cónicas solo se utiliza el GeoGebra. A su vez también recomendamos que se debería estudiar la sección cónica hipérbola, ya que no se encuentra ningún trabajo de investigación de la MEM de la PUCP sobre dicho objeto. También sugerimos realizar un estudio de todas las producciones académicas afines al tema de las secciones cónicas, bajo la perspectiva del corte de un cono con un plano ya que en todas las tesis revisadas en la MEM de la PUCP no se encontró investigaciones bajo dicha perspectiva.

Asimismo, sugerimos aprovechar la modalidad virtual y/o híbrida debido a la pandemia para poder realizar investigaciones sobre las secciones cónicas con profesores o estudiantes que no pertenezcan a colegios o universidades ubicadas en la capital de Lima, con la finalidad de conocer el verdadero propósito y procedimiento del aprendizaje y enseñanza de las cónicas, y así poder hacer comparaciones con las investigaciones ejecutadas en Lima con la de provincia.

Finalmente, sugerimos realizar un estudio de todas las producciones académicas afines al tema de las secciones cónicas que trabajaron con materiales concretos ya que en todas las tesis revisadas en la MEM de la PUCP no se encontró investigaciones que hizo uso de dichos materiales.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amaya, J. (2020). *Estudio de la elipse basada en aspectos de la teoría de registros de representación semiótica con estudiantes de la carrera de Arquitectura* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional PUCP. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/17249>
- Amorim, K. (2012). Cultura, significado y afectividad. *Temas en Psicología*, 20 (2). Recuperado de http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-389X2012000200002
- Artigue, M. (2007) *Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental*. Conferencia Internacional de Educación Matemática. Queretano. México.
- Barrios, A. (2018). *Diseño didáctico para la enseñanza de las secciones cónicas centrado en la parábola a través de su modelación en diferentes sistemas de representación*. [Tesis, Universidad Icesi]. <https://repositorioslatinoamericanos.uchile.cl/handle/2250/2940951>
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal. books.google.com
- Casallas, A., & Páez, N. (2020). Análisis documental de la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas en el Altiplano Cundiboyacense. [Tesis, Universidad Santo Tomás de Aquino]. Repositorio institucional. <https://doi.org/http://hdl.handle.net/11634/29901>
- Contreras, G. (2019). *Niveles de demanda cognitiva de problemas creados sobre parábola como lugar geométrico. Una propuesta para la formación de profesores de secundaria* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional PUCP. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/15694>
- Díaz, R. (2014). *La construcción del concepto circunferencia desde la dialéctica herramienta-objeto con el apoyo del software GeoGebra en estudiantes de quinto de secundaria* [Tesis

- de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional PUCP. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/5707>
- Dulzaides, M., y Molina, A. (2004). Análisis documental y de información: dos componentes de un mismo proceso. *ACIMED*, 12(2), 1. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1024-94352004000200011&lng=es&tlng=es.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia. Universidad del Valle.
- Duval, R., y Saenz, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José De Caldas.
- Echevarría, J. (2016). *Estudio de la circunferencia desde la geometría sintética y la geometría analítica, mediado por el GeoGebra, con estudiantes de quinto grado de educación secundaria* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional PUCP. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/6756>
- Ely, R. (2010). Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 117-146. <https://pubs.nctm.org/view/journals/jrme/41/2/article-p117.xml>
- Gamba, N. Montilla, M. & Villareal, S. (2019). *Estado del arte de la producción investigativa en la Línea de Educación y Medios interactivos 2011 – 2018*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Colombia.
- Garzón, C. (2020). *Situaciones didácticas para el aprendizaje de las cónicas desde el concepto de métrica* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja]. <http://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/3720>.
- Gómez, M; Galeano, C y Jaramillo D. (2016). El estado del arte: Una metodología de investigación. *Revista Colombiana de Ciencias Sociales*, 6 (2), 423-442. Obtenido de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=497856275012>

- Guevara, R. (2016). El estado del arte en la investigación: ¿análisis de los conocimientos acumulados o indagación por nuevos sentidos? *Revista Folios*, 44, 165–179.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=345945922011>
- Hernández R. Fernández C. Batista P (2014). *Metodología de la Investigación*. Sexta Edición, Mc. Graw Hill Educación. México.
- Hoyos, C. (2000). *Un modelo para investigación documental: Guía teórico-práctico sobre construcción de Estados del Arte con importantes reflexiones sobre la investigación*. Editora Señala, Medellín.
- Lam, L. (2020). *El caso $0.999\dots = 1$ en didáctica de las matemáticas: Un estado del arte desde el análisis no-estándar* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional PUCP.
<https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/17171>
- Lara, I. (2016). *La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional PUCP.
<http://hdl.handle.net/20.500.12404/7363>
- Lehmann Ch. (2003). *Geometría Analítica*. Editorial LIMUSA, S.A. Trigésimo-quinta edición. México.
- León, J. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional PUCP.
<http://hdl.handle.net/20.500.12404/5652>
- Londoño, O; Maldonado L y Calderón, C. (2014). *Guías para la construcción estados del arte*. Obtenido de <https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/4637>
- Ministerio de Educación (2016). *Programa curricular de educación secundaria*. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf>

- Montañez, L. y Sánchez, C. (2019). *Estado del arte de la investigación del programa de maestría en pedagogía de la Universidad Santo Tomás Seccional Tunja (2013-2017)*. [Tesis, Universidad Santo Tomás] Repositorio Institucional <https://repository.usta.edu.co/handle/11634/18320>
- Newman M y Gough (2020). *Systematic Reviews in Educational Research: Methodology, perspectives and Application*. Obtenido de <https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/23142/1007012.pdf?sequence=1#page=22>
- Olano, M. (2018). *Registros de representación semiótica de la elipse: secuencia de actividades mediada con el GeoGebra para estudiantes de quinto de secundaria* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional PUCP. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/12039>
- Olivares, E. (2018). *Coordinación de diferentes registros de representación semiótica para movilizar la noción de elipse en estudiantes de Física* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional PUCP. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/12989>
- Peña T. & Pirela J. (2007). La complejidad del análisis documental. *Información, cultura y sociedad*, (16), 55-81. <http://www.scielo.org.ar/pdf/ics/n16/n16a04.pdf>
- Ramírez, L. (2015). *Estado del arte de las tesis de la maestría en educación de la Universidad Pedagógica Nacional sustentadas en 2009 y 2010*. [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/951>
- Rengifo, M (2015). La globalización de la sociedad del conocimiento y la transformación universitaria. *Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales, Niñez y Juventud*, 12(2), 809-822. Obtenido de <http://biblioteca.clacso.edu.ar/Colombia/alianza-cinde-umz/20160114034614/LaGlobalizacionDeLaSociedad.pdf>

- Sánchez, L (2019). *La comprensión de la parábola a través de las representaciones semióticas*. [Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja]. <http://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/2994>
- Tamayo y Tamayo M. (2004). *El proceso de la investigación científica*. Cuarta edición. México.
- Torres, A. (1995). *Aprender a investigar en comunidad*. Colombia.
- Universidad Católica del Perú (2021). *Plan de estudio de matemática*. Recuperado de <https://www.pucp.edu.pe/carrera/matematicas/>
- Vallejo, V. (2014). *Implementación y aplicación de software educativo y material concreto en el aprendizaje de las ecuaciones de las cónicas en geometría analítica plana de los estudiantes del tercer año de bachillerato del colegio Manuel J. Calle*. [Tesis de Maestría, Universidad de Cuenca]. Repositorio institucional de Universidad de Cuenca <http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/20808>
- Vasilachis, I. (2006). *La investigación cualitativa en estrategias de investigación cualitativa*. Editorial Gedisa. España.
- Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). EL MODELO DE VAN HIELE Y LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA. *Uniciencia* , 27 (1), 74-94
- Venero, A. (Ed.). (2009). *Introducción al Análisis Matemático*. (2ª ed., Vol.). Editorial Gemar.

ANEXOS O APÉNDICE

Matriz bibliográfica

Nombre de documento	Autor	Año de sustentación	N.º de páginas	Uso de tecnología	Marco Teórico	Metodología
Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos	León Ríos, José Carlos	2014	306	No presenta	Enfoque Instrumental	Ingeniería Didáctica
La Construcción del concepto Circunferencia desde la dialéctica herramienta-objeto con el apoyo del software GeoGebra en estudiantes de quinto de secundaria.	Díaz Villegas, Roger	2014	139	GeoGebra	Teoría de la Dialéctica Herramienta-Objeto (DHO)	Investigación Cualitativa
Estudio de la circunferencia desde la geometría sintética y la geometría analítica, mediado por el GeoGebra, con estudiantes de quinto grado de educación secundaria.	Echevarría Anaya, Julio Antonio	2016	95	GeoGebra	Juegos de Cuadros	Estudio de Casos
La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica	Lara Torres, Isabel Mercedes	2016	145	GeoGebra	Teoría de Registros de Representación Semiótica	Ingeniería Didáctica
Coordinación de diferentes registros de representación semiótica para movilizar la noción de elipse en estudiantes de Física.	Olivares López, Edwin Hernán	2018	120	No presenta	Teoría de Registros de Representación Semiótica	Ingeniería Didáctica
Registros de representación semiótica de la elipse: secuencia de actividades mediada con el	Olano Cruces,	2018	128	GeoGebra	Teoría de Registros de	Ingeniería Didáctica

GeoGebra para estudiantes de quinto de secundaria.	Mario Fernando				Representación Semiótica	
Niveles de demanda cognitiva de problemas creados sobre parábola como lugar geométrico. Una propuesta para la formación de profesores de secundaria.	Greyson Martín Contreras Ochoa	2019	165	No presenta	Creación de problemas	Investigación Cualitativa
Estudio de la elipse basada en aspectos de la teoría de registros de representación semiótica con estudiantes de la carrera de Arquitectura.	Amaya Siesquen, Junior Alan	2020	107	GeoGebra	Teoría de Registros de Representación Semiótica	Investigación Cualitativa

Fuente: propia

