



PONTIFICIA **UNIVERSIDAD CATÓLICA** DEL PERÚ

Esta obra ha sido publicada bajo la licencia Creative Commons  
Reconocimiento-No comercial-Compartir bajo la misma licencia 2.5 Perú.

Para ver una copia de dicha licencia, visite  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/pe/>



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ  
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



DISEÑO DE CONTROL PARA EL PROBLEMA DE SOBREEXPLOTACIÓN DE  
RECURSOS RENOVABLES MODELADOS COMO SISTEMAS NO LINEALES

Tesis para optar el Título de:  
INGENIERO ELECTRÓNICO

Presentada por:

Magno Enrique Mendoza Meza

LIMA - PERÚ

2006

## RESUMEN

Los peces así como los pastizales, constituyen un ejemplo clásico de recursos naturales renovables. El origen de este tipo de recursos es del tipo biológico y sus características temporales son: a) el agotamiento del recurso debido a la utilización o consumo del mismo y b) la regeneración automática del recurso según un cierto mecanismo (generalmente de base biológica).

Estos recursos en muchos casos, tienden a agotarse, esto se debe a la característica a), lo cual se da, cuando aparecen ciertas condiciones relacionadas con el manejo de este recurso, tales como el agotamiento o colapso del recurso (extinción). Si en la explotación comercial de los peces o del pasto, las capturas y el pasteo, se realizan a un ritmo superior a la tasa de regeneración biológica de la población, se producirá el agotamiento por exceso de pesca (colapso por sobreexplotación) o agotamiento de los recursos renovables. En la actualidad, la sobreexplotación de los ecosistemas es uno de los problemas más serios que existen en la administración (gerencia) de estos recursos.

Los sistemas de recursos renovables pueden ser modelados como sistemas predador-presa. Una amplia clase de modelos del tipo predador-presa son modelados como sistemas dinámicos no lineales de una y dos especies (o variables).

En un contexto ecológico, a lo largo de esta tesis, el control poblacional debe ser entendido como una remoción o extracción proporcional de la población de una determinada especie. El control propuesto debe satisfacer algunas restricciones, desde el punto de vista de la teoría de control y/o poseer ciertas características, tales como: i) simplicidad de implementación, es decir la expresión matemática del control debe ser lo más simple posible; ii) no negatividad, es decir el control debe tener un único sentido (remoción o extracción); iii) monitorización mínima, es decir un número mínimo de las densidades poblacionales que tiene que ser medidas (a fin de implementar un control); y iv) capaz de fomentar coexistencia, es decir a pesar de la remoción realizada las especies deben equilibrarse en niveles sostenibles.

El objetivo de esta tesis es estudiar los problemas de gerencia de recursos renovables desde un punto de vista de control, específicamente del problema de sobreexplotación de recursos. La posible solución a este problema es la aplicación de un control denominado de política de umbral (PU). Esta política de umbral es aplicada a modelos del tipo depredador-presa de una y dos especies. Entre los modelos de una especie están: el modelo de Noy-Meir (en pasteo) y el modelo de Collie-Spencer (en pesca) y el modelo de dos especies es el de la vegetación–herbívoro en sistemas de pasteo en suelo semiárido. La realización del diseño del control propuesto, consta de las etapas de descripción de los modelos y conceptos de control no lineal a emplear, así como el diseño del control conmutado. En este trabajo se demuestra que para varios modelos de una especie utilizados en ecología matemática, la política de umbral sirve para estabilizar la población de dicha especie en un nivel deseado.

La política de umbral presenta ventajas tales como beneficio económico (cuando es aplicado a un sistema de una especie) y evita la extinción de la especie aún cuando la sobreexplotación no puede ser evitada. El beneficio económico promedio y la productividad promedio sostenible dependen del valor de nivel de umbral; además eligiendo un valor de umbral podemos maximizar la productividad o el beneficio económico promedio sostenible.



*A mis padres Magno y Flora Silvia, a  
mi hermana Beatriz. Y con cariño a mi  
esposa Eliane Cristina.*

# Agradecimientos

A mis padres Magno Mendoza Pomalaza, Flora Silvia Meza López y a mi hermana Jacinta Beatriz Mendoza Meza por el apoyo, cariño y confianza que me brindan.

Al Prof. Amit Bhaya por el apoyo moral y por ser un ejemplo de investigador, mi admiración y respeto.

A mi esposa Eliane Cristina de Carvalho Mendoza Meza por su paciencia, apoyo desinteresado y por el grande cariño.

A los Profs. Javier Sotomayor, Julio Tafur y Hugo Pratt por su ayuda, sugerencias y recomendaciones que mejoraron enormemente esta tesis.

A mis amigos Carlos Alfaro, Jorge Palomino, Christian Schaerer que de alguna u otra forma me insentivaron a concluir esta tesis.

# Índice general

Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xii
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Modelos y Conceptos de Control No Lineal</b>	<b>3</b>
2.1 Introducción	3
2.2 Modelos de Dinámica Poblacional	6
2.3 Modelos de Dinámica Poblacional con Control	9
2.4 Objetivo y Características Deseables de un Control en un Contexto Ecológico	11
2.5 Sistemas no Lineales del Punto de Vista de Control	14
2.5.1 Plano de Fase	14
2.5.2 Puntos de Equilibrio	15
2.5.3 Isóclinas	15
2.5.4 Ciclo Límite	15
2.5.5 Estabilidad de los Sistemas No Lineales	16
2.5.6 Estabilidad de los Puntos de Equilibrio	16
2.5.7 Análisis de Estabilidad de los Puntos de Equilibrio de los Sistemas No Lineales	18
2.5.8 Estabilidad en el Sentido de Lyapunov	18
2.5.9 Funciones de Lyapunov con Control	22
2.6 Términos Ecológicos desde un Punto de Vista de Control	23
2.6.1 Política de Umbral (PU)	23
2.6.2 Definición del Equilibrio Virtual	25
2.6.3 Modo Deslizante y Equilibrio de Deslizamiento	25
2.6.4 Notación Estandar Utilizada para Equilibrios y Umbrales	26
2.6.5 Control Equivalente	28
<b>3 Diseño del Control Conmutado para Sistemas Poblacionales de Una Especie</b>	<b>30</b>
3.1 Modelo de Una Especie con Consumo Exógeno Controlado	31
3.2 Demostración del Teorema de Estabilidad Global para Modelos de Una Especie	33
3.3 Modelo de un Sistema de Pasteo sujeto a una Política de Umbral	36

3.3.1	Análisis de los Puntos de Equilibrio . . . . .	37
3.3.2	Diseño de la Política de Umbral . . . . .	38
3.3.3	Simulación del Comportamiento del Modelo Noy-Meir sujeto a una Política de Umbral . . . . .	40
3.3.4	Diseño de la Política Continua de Umbral . . . . .	41
3.3.5	Simulación del Comportamiento del Modelo Noy-Meir sujeto a la Política Continua de Umbral . . . . .	43
3.4	Modelo de un Sistema de Pesca sujeto a una Política de Umbral . . . . .	44
3.4.1	Análisis de los Puntos de Equilibrio . . . . .	45
3.4.2	Diseño de la Política de Umbral . . . . .	47
3.4.3	Simulación del Comportamiento del Modelo Collie–Spencer sujeto a una Política de Umbral . . . . .	49
3.4.4	Diseño de la Política Continua de Umbral . . . . .	49
3.4.5	Simulación del Comportamiento del Modelo Collie–Spencer sujeto a la Política Continua de Umbral . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Diseño del Control Conmutado para la Dinámica Vegetación–Herbívoro en Sistemas de Pasteo en Suelo Semiárido</b>	<b>53</b>
4.1	Modelo Vegetación–Herbívoro . . . . .	54
4.2	Dinámica de los Herbívoros en Sistemas de Pasteo en Suelo Semiárido sujeto a una PU . . . . .	57
4.3	Diferentes Tipos de Umbral . . . . .	59
4.3.1	Umbral del Herbívoro . . . . .	60
4.3.2	Umbral de la Vegetación . . . . .	61
4.3.3	Umbral Inclinado . . . . .	62
4.4	Análisis: Umbral de la Vegetación . . . . .	63
4.4.1	Calculo de la Dinámica sobre el Umbral de la Vegetación . . . . .	63
4.4.2	Conclusión . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Comparación de la Productividad y Rentabilidad Sostenible para Modelos de Una Especie</b>	<b>66</b>
5.1	Modelo sometido a una Política de Tasa de Pesca Constante . . . . .	66
5.2	Modelo sometido a una Política de Umbral . . . . .	68
5.3	Modelo Económico de un Sistema de Una Especie . . . . .	70
5.3.1	Pesca de Acceso Abierto con Política de Tasa Constante . . . . .	70
5.3.2	Pesca de Acceso Abierto con Política de Umbral . . . . .	71
5.4	Comparación por simulación . . . . .	72
	<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>
	<b>Anexo</b>	<b>85</b>



<b>A</b>	<b>Términos del modelo Collie–Spencer</b>	<b>85</b>
A.1	Términos del Sistema Libre . . . . .	85
A.2	Términos del Sistema Controlado . . . . .	86
A.3	Términos del Sistema con Política Continua . . . . .	86



# Índice de figuras

2.1	Diagrama de bloques representando la gerencia de recursos renovables como un problema de control realimentado. . . . .	6
2.2	Representación e interpretación gráfica del modelo Lotka–Volterra. . . . .	8
2.3	Contexto en el cual se desarrolla esta tesis. Clasificación de los modelos de sistemas predador-presa. El término <i>Remoción</i> debe ser entendido dependiendo del contexto como pesca o pasteo. Los cuadros y flechas con líneas sólidas son los modelos estudiados en esta tesis. . . . .	10
2.4	Realimentación interna inducida. . . . .	13
2.5	Puntos de equilibrio en $z = 0$ con trayectorias de soluciones representativas para un caso: (a) estable, (b) inestable y (c) asintóticamente estable. . . . .	17
2.6	Interpretación geométrica de las superficies de Lyapunov para el caso de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	21
2.7	Modos deslizantes ocurren en la frontera entre $G^1$ y $G^2$ . El equilibrio de deslizamiento $z_{sl}^{eq}$ es mostrado por un “bullet”. Círculos sólidos grises representan equilibrios virtuales estables. . . . .	25
2.8	(a) Política de Umbral (PU). (b) Política Continua de Umbral con Region Lineal de ancho $2\sigma$ . . . . .	27
3.1	(a) Equilibrio con una curva de tasa de consumo lineal con inclinación media ( $\varepsilon_1 < r$ ). Puntos de equilibrio del sistema libre $x_2^{sc}, x_1^{sc} = 0$ . Puntos de equilibrio del sistema con pasteo $x_2^{cc}, x_1^{cc} = 0$ . Valores de los parámetros: $r = 1, \varepsilon_1 = 0,3, x_{th} = 0,85, K = 1$ . (b) Equilibrio con una curva de tasa de consumo lineal con inclinación grande ( $\varepsilon_2 > r$ ). Punto de equilibrio del sistema libre $x_2^{sc} = K$ . Punto de equilibrio del sistema con pasteo $x_2^{cc} = 0$ . Valores de los parámetros: $r = 1, \varepsilon_2 = 1,2, x_{th} = 0,5, K = 1$ . . . . .	40
3.2	(a) Densidad de la vegetación $x$ , cuando $\varepsilon < r$ , como una función del tiempo, sujeto a la PU con $\varepsilon_1 = 0,3, x_2^{cc} = 0,7, g = 1$ y $x_{th} = 0,85$ . (b) Densidad de la vegetación $x$ , cuando $\varepsilon > r$ , como una función del tiempo, sujeto a la PU con $\varepsilon_2 = 1,2, r = 1, x_2^{sc} = K, x_2^{cc} = 0$ y $x_{th} = 0,5$ . . . . .	41
3.3	El control, en la simulación, oscila en alta frecuencias cuando la densidad de la vegetación se ‘estabiliza’ alrededor del valor de umbral $x_{th}$ , esto porque el método de integración utilizado, Euler, presenta errores de aproximación, motivo por el cual se presenta oscilación en alta frecuencia. . . . .	42

3.4	(a) Densidad de la vegetación $x$ como una función del tiempo, sujeto a la política continua de umbral con $\varepsilon = 0,3$ , $r = 1$ , $\sigma = 0,05$ , $x_2^{cc} = 0,7$ , $x_2^{sc} = K$ y $x_{th} = 0,85$ . (b) Densidad de la vegetación $x$ como una función del tiempo, sujeto a la política continua de umbral con $\varepsilon = 0,833$ , $g = 1$ , $\sigma = 0,05$ , $x_2^{cc} = 0$ , $x_2^{sc} = K$ y $x_{th} = 0,5$ . . . . .	44
3.5	Dinámica del modelo Collie–Spencer sin término de pesca, es decir, $f(x) - c_{end}(x)$ . . .	48
3.6	(a) Equilibrios con una tasa de pesca lineal con inclinación media $\varepsilon$ , $x_m$ es el punto de equilibrio real estable de la dinámica sin control. (b) Equilibrio con una curva de tasa de pesca lineal con inclinación grande $\varepsilon$ , el origen es el único punto de equilibrio real estable de la dinámica con control. . . . .	48
3.7	(a) Respuesta del modelo Collie–Spencer sujeto a la política de umbral para dos condiciones iniciales $x_0 = 12$ y $x_0 = 20$ . Valor del umbral $x_{th} = 16,8$ y $\varepsilon = 0,4$ . (b) Respuesta del modelo Collie–Spencer sujeto a la PU para dos condiciones iniciales $x_0 = 4$ y $x_0 = 8$ . Valor del umbral $x_{th} = 6,8$ y $\varepsilon = 0,6$ . Valores de los parámetros: $r = 0,6$ , $K = 90$ , $c_1 = 4$ , $d = 15$ . . . . .	50
3.8	Respuesta del sistema sujeto a la política continua de umbral para dos condiciones iniciales $x_0 = 4$ y $x_0 = 8$ . Valores de los parámetros: $r = 0,6$ , $K = 90$ , $c_1 = 4$ , $d = 15$ , $x_{th} = 6,8$ , $\varepsilon = 0,9088$ , $\sigma = 0,08$ . . . . .	51
4.1	Comportamiento de cada una de las estructuras del sistema 4.10): (a) Cuando $\tau(V, H) < 0$ , los puntos de equilibrio son $Z_1^c = (0, 0)$ , $Z_2^{cc} = (0,063, 0)$ , $Z_3^{cc} = (39,93, 0)$ y $Z_4^{cc} = (15, 9,312)$ . La región gris $\Omega^{cc}$ es el dominio de atracción de $Z_1^{cc}$ . (b) Cuando $\tau(V, H) > 0$ , los equilibrios son $Z_1^{sc} = (0, 0)$ , $Z_2^{sc} = (0,063, 0)$ y $Z_3^{sc} = (39,93, 0)$ . La región gris $\Omega^{sc}$ es el dominio de atracción de $Z_1^{sc}$ . Los valores de los parámetros son escogidos como en Koppel y Rietkerk (2000), i.e., $p = 10$ , $W_0 = 0,09$ , $k = 5$ , $\mu = 0,02$ , $r_W = 0,1$ , $h = 0,01$ , $l = 0,1$ , $b = 0,01$ , $e = 0,2$ , $d = 0,03$ y $k_1 = 0,0275$ . Los círculos sólidos grises representan equilibrios estables, mientras que los círculos abiertos representan equilibrios inestables. . . . .	59
4.2	(a) Representación gráfica de los puntos de equilibrio y la política de umbral del herbívoro en el plano de fase $x \times y$ (umbral horizontal). (b) Representación gráfica de los puntos de equilibrio y la PU de la vegetación en el plano de fase $x \times y$ (umbral vertical). Las líneas sólidas representan la isóclina de los herbívoros del sistema con pasteo, la línea trazada representa la isóclina de la vegetación del sistema con pasteo, la línea punteada representa la isoclina de la vegetación del sistema sin pasteo. El origen es un equilibrio localmente estable. $Z_4^{cc}$ y $Z_3^{sc}$ son puntos de equilibrio virtuales y estables. La línea trazada-punteada representa el umbral $\tau = 0$ . . . . .	60
4.3	Simulación de la PU del herbívoro. (a) La evolución en el tiempo de $x(t)$ , $y(t)$ . (b) El plano de fase del sistema. Note que la estabilización es por medio de un modo deslizante alrededor del valor del nivel de umbral $y_{th} = 8$ . Los valores de los parámetros son $p = 10$ , $W_0 = 0,1$ , $k = 5$ , $\mu = 0,02$ , $r_W = 0,1$ , $h = 0,01$ , $l = 0,1$ , $b = 0,01$ , $e = 0,2$ , $d = 0,03$ , $k_1 = 0,0275$ . . . . .	61
4.4	Simulación de la PU de la vegetación. (a) La evolución en el tiempo de $x(t)$ , $y(t)$ . (b) El plano de fase del sistema. Note que la estabilización es por medio de un modo deslizante alrededor del valor del nivel de umbral $x_{th} = 30$ . Los valores de los parámetros son como en la Figura 4.3. . . . .	62

4.5	Simulación de la PU inclinada. (a) La evolución en el tiempo de $x(t), y(t)$ . (b) El plano de fase del sistema. Notese que la estabilización es por medio de un modo deslizante alrededor del umbral. Los valores de los parámetros son como los utilizados en la Figura 4.3. . . . .	63
4.6	Curva de posibles puntos de equilibrio del sistema $(x_{th}, y^{eq})$ , cuando está sometido a una política de umbral de la vegetación. . . . .	64
5.1	(a) Equilibrio con una curva de tasa de consumo lineal con inclinación intermedia ( $\varepsilon_1 < r$ ). Puntos de equilibrio del sistema - $x_2^{eq}, x_1^{eq} = 0$ . Valores de los parámetros: $r = 1, \varepsilon_1 = 0,3, K = 1$ . (b) Equilibrio con una curva de tasa de consumo lineal con inclinación grande ( $\varepsilon_2 > r$ ). Puntos de equilibrio del sistema - $x_2^{eq} = x_1^{eq} = 0$ . Valores de los parámetros: $r = 1, \varepsilon_2 = 1,2, K = 1$ . . . . .	67
5.2	Puntos de equilibrio del sistema sin pastoreo - $x_1^{sc} = 0, x_2^{sc}$ . Puntos de equilibrio del sistema con pastoreo - $x_1^{cc} = 0, x_2^{cc}$ . (a) Equilibrio con una curva de tasa de consumo lineal con inclinación intermedia ( $\varepsilon_1 < r$ ). $x_2^{cc} = (1 - \varepsilon/r)K$ . Valores de los parámetros: $r = 1, \varepsilon_1 = 0,3, x_{th} = 0,85, K = 1$ . (b) Equilibrio con una curva de tasa de consumo lineal con inclinación grande ( $\varepsilon_2 > r$ ). $x_2^{cc} = 0$ . Valores de los parámetros: $r = 1, \varepsilon_2 = 1,2, x_{th} = 0,5, K = 1$ . . . . .	68
5.3	(a) Diagrama de bloques del modelo (5.6-5.7). (b) Diagrama de bloques de la dinámica del modelo. (c) Diagrama de bloques de la Política de Tasa de Pesca Constante. . . . .	73
5.4	(a) Diagrama de bloques del modelo (5.14-5.17). (b) Diagrama de bloques de la dinámica del modelo. (c) Diagrama de bloques de la Política de Umbral. . . . .	73
5.5	(a) Evolución en el tiempo de la densidad poblacional del modelo de Pesca de Acceso Abierto sometido a una Política de Tasa de Pesca Constante, ecuación (5.6-5.7). (b) Evolución en el tiempo de la densidad poblacional del modelo de Pesca de Acceso Abierto sometido a una Política de Umbral, ecuación (5.14-5.17). Valores de los parámetros: $r = 1, \varepsilon_2 = 1,2, K = 1$ y $x_{th} = 0,5$ . . . . .	74
5.6	(a) Comparación de la productividad de la ecuación (5.8) con la productividad de la ecuación (5.18). (b) Comparación de la rentabilidad de la ecuación (5.11) con la productividad de la ecuación (5.19). . . . .	75
5.7	Comparación del beneficio económico sostenible: (a) Sistema SIN política de umbral (5.6)-(5.7). (b) Sistema CON política de umbral (5.14)-(5.17). . . . .	76

# Índice de tablas

2.1	Clasificación Convencional de los Puntos Singulares para Sistemas Bidimensionales . . . . .	19
3.1	Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Noy-Meir sin Control . . . . .	38
3.2	Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Noy-Meir con Control . . . . .	38
3.3	Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Noy-Meir sometido a una Política Continua en la Región sin Control . . . . .	42
3.4	Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Noy-Meir sometido a una Política Continua en la Región Lineal . . . . .	43
3.5	Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Noy-Meir sometido a una Política Continua en la Región con Control . . . . .	43
3.6	Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Collie–Spencer sin Control . . . . .	46
3.7	Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Collie–Spencer con Control. . . . .	47
3.8	Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Collie–Spencer sujeto a una Política Continua de Umbral . . . . .	51

# Capítulo 1

## Introducción

En la actualidad, la sobreexplotación de los ecosistemas es uno de los problemas más serios que existen en la gerencia de recursos. Entre los ecosistemas sobreexplotados podemos mencionar el de pasteo y el de pesca (Collie y Spencer, 1993; Van de Koppel y Rietkerk, 2000).

En un contexto ecológico, el control poblacional debe ser entendido como una remoción o extracción proporcional de la población de una determinada especie, así como debe satisfacer algunas restricciones tales como: (i) simplicidad de implementación; (ii) no negatividad; (iii) monitorización mínima de especies; y (iv) fomentar coexistencia de especies, es decir, evitar extinción.

El objetivo de esta tesis es estudiar los problemas de gerencia de recursos renovables desde un punto de vista de control, específicamente del problema de sobreexplotación de recursos. Los recursos renovables se modelaran como sistemas no lineales.

El diseño a realizar consta de etapas tales como descripción de los modelos y conceptos de control no lineal, así como el diseño del control conmutado para un sistema vegetación-herbívoro de pasteo en suelo semiárido. Finalmente se realiza una comparación de la productividad y la rentabilidad promedio del control conmutado con otros tipos de control (políticas o estrategias).

En el Capítulo 2 del presente trabajo, se describen los modelos de dinámica poblacional, así como las características deseadas de un control en un contexto ecológico. Se exponen los conceptos necesarios de sistema no lineales con el objetivo de entender la teoría desarrollada

a lo largo de la tesis y finalmente se describen los términos ecológicos desde un punto de vista de control.

En cuanto a la solución del problema en el capítulo 3 se muestra el diseño del control conmutado para sistemas poblacionales de una especie y se demuestra el teorema de estabilidad global para estos modelos. Los modelos considerados para la aplicación de la política de umbral son: (i) Modelo Noy-Meir en el contexto de pasteo y (ii) Modelo de Collie–Spencer en el contexto de pesca.

En el Capítulo 4 se muestra el diseño del control conmutado para la dinámica vegetación–herbívoro en el sistema de pasteo en suelo semiárido para diferentes tipos de umbral. El modelo estudiado fue tomado del trabajo de Van de Koppel y Rietkerk (2000).

En el Capítulo 5 se realiza la comparación de la productividad y rentabilidad sostenible de la política de umbral para modelos de una especie. Finalmente se exponen las Conclusiones y Recomendaciones de esta tesis.

## Capítulo 2

# Modelos y Conceptos de Control No Lineal

### 2.1 Introducción

Desde el inicio de su existencia el ser humano ha establecido diferentes formas de relacionarse con la naturaleza. De hecho, no hay un solo momento de nuestra vida que no tengamos contacto con ella: respiramos su aire, usamos su agua, nos alimentamos de sus plantas y animales. Todo aquello que hemos detectado como nuestras necesidades a cubrir, tiene que ver con el uso de los recursos naturales. Y es esta utilización de recursos la que ha llevado a la transformación del medio, modificando los sistemas naturales.

En el transcurso de la historia, el hombre ha encontrado las herramientas para extraer de la naturaleza los recursos necesarios para su existencia y supervivencia. Esto ha determinado diferentes formas de vida dependiendo de los recursos naturales, historia y cultura de las diversas regiones.

La gerencia de los recursos renovables (donde ha sido practicado), se ha basado generalmente en el concepto de la productividad sostenible máxima (comúnmente abreviada como *MSY* del inglés *Maximum Sustainable Yield*). Éste es quizás, el objetivo posible más simple en la gerencia de los recursos, el cual considera el hecho que una fuente de recursos biológica no puede ser explotada tan intensamente sin una pérdida máxima de la productividad (Clark, 1985; Jensen, 2002).



La sobreexplotación de los ecosistemas es uno de los problemas más serios que existe en la gerencia de recursos. Dos ejemplos de ecosistemas sometidos a sobreexplotación son el de pasteo y el de pesca. La sobreexplotación de recursos renovables debe ser entendida como la acción que lleva al ecosistema a su extinción, es decir el exceso de esfuerzo de explotación, de manera que el sistema cae en la extinción. Un ejemplo real de sobreexplotación fue el que ocurrió en Perú con la anchoveta. Nuestro país desde 1960 hasta 1972 fue el mayor productor de harina de pescado y la pesca el principal sector económico. Los expertos en pesca advirtieron que la *MSY* debería ser de 10 millones de toneladas anualmente y la captura debería estar de acuerdo a este límite. Pero, el crecimiento de capacidad de las embarcaciones de pesca, dio lugar a que en 1973 la cantidad de anchoveta en nuestro mar decrezca abruptamente y como consecuencia de esto el nivel poblacional de las aves guaneras disminuya de forma dramática, lo anterior afectó catastróficamente la economía peruana (Idyll, 1973). La sobreexplotación de la anchoveta pareció ser la principal causa del colapso, aunque su efecto combinado con las influencias de las fluctuaciones profundas del medio ambiente (El Niño) causó la quiebra de la industria de la anchoveta. Una moratoria de la pesca pudo haber permitido la recuperación de la anchoveta, pero esto no fue políticamente posible porque 20 000 personas eran dependientes de la industria de la anchoveta. Por lo tanto, el gobierno peruano tenía que permitir que la pesca continúe cada año, por lo que la anchoveta nunca se recuperó (Idyll, 1973).

Otro ejemplo de sobreexplotación es observado en los sistemas de pasteo, donde el ganado consume la vegetación de una determinada área. Si no se realiza una rotación de áreas, es evidente que la vegetación será extinguida y el área erosionada.

Siendo la sobreexplotación un problema serio, durante la década de los 70s se establecieron estrategias de regulación, principalmente en la pesca, e.g., el establecimiento de zonas nacionales e internacionales de pesca, 200 millas. Las políticas de pesca (estrategias de regulación) más comúnmente utilizadas son: (i) política de cuota constante; (ii) política de tasa de pesca constante; y (iii) política de umbral (Collie y Spencer, 1993).

## Gerencia de Recursos Renovables

La gerencia de pasteo se refiere a la sistemática manipulación del ganado en los periodos de pasteo y no pasteo – término usual aplazamiento (*deferment*) o descanso (*rest*). Los principales objetivos son controlar los efectos del pasteo en el nivel de la planta para proteger el suelo y mejorar la producción del ganado. Similarmente, una política de pesca se refiere a la gerencia de la población de peces por el control sistemático del periodo de extracción y el tipo de pesca (política). Nuevamente, el principal objetivo es maximizar la productividad, sin llevar a extinción a la especie.

En la gerencia de pasteo, es posible controlar el consumo de los herbívoros (predador) permitiendo o no permitiendo el pasteo. En el modelo de pesca, donde dos especies son modeladas y la pesca de una de las especies es de interés, generalmente no es posible controlar el consumo de la presa por la especie predador, es decir, referenciado como *consumo endógeno*, sin embargo un control puede ser realizado mediante la remoción (pesca) de una determinada cantidad de la especie deseada, el cual es referenciado como *consumo exógeno*.

Un modelo matemático que se utiliza mucho en el estudio de pasteo de los herbívoros fue propuesto por Noy-Meir (1975) y será estudiado en esta tesis. En el contexto de pesca, un modelo similar es denominado Gordon–Schaefer (Clark, 1976, 1985; Kot, 2001) y sus variantes (Collie y Spencer, 1993) también son estudiadas.

El modelo Noy–Meir describe el crecimiento de la vegetación bajo la suposición que está sujeto a la acción de una población constante de herbívoros. En común con la mayoría de los otros modelos de una especie (autores), este modelo tiene un término de crecimiento logístico y un término de consumo que modela la acción de los herbívoros. En el contexto de la gerencia de pasteo, cuando un esquema con rotación de aplazamiento es utilizado, significa que el término de consumo está siendo conmutado entre *on* (cuando el pasteo de una área en particular es permitido) y *off* (cuando el ganado es retirado de dicha área en particular).

En el contexto del modelo Gordon-Schaefer, tenemos un término de crecimiento logístico para los peces, un término de predación endógena (correspondiente a los peces presa comidos por los peces predador, cuya población se asume que es constante en el tiempo,

así que entra como una tasa de predación) y una tasa de remoción correspondiente a la remoción de los peces presas por un agente exógeno (hombre).

## Gerencia como un Problema de Control

El problema de la gerencia de recursos renovables, e.g. pasteo y pesca, puede ser formulado y resuelto en términos de la ingeniería de control. El diagrama de bloques de la Figura 2.1 representa un sistema que puede ser familiar para el gerente de recursos como para el ingeniero de control. El “objeto de control” es una población removida (recurso) del cual el esfuerzo de remoción  $\varepsilon$  produce la captura  $q$  y el tamaño  $x$  de la población. La relación entre estas variables es gobernada por la dinámica y por los procesos internos de renovación de la población (Jacobs et al., 1991).

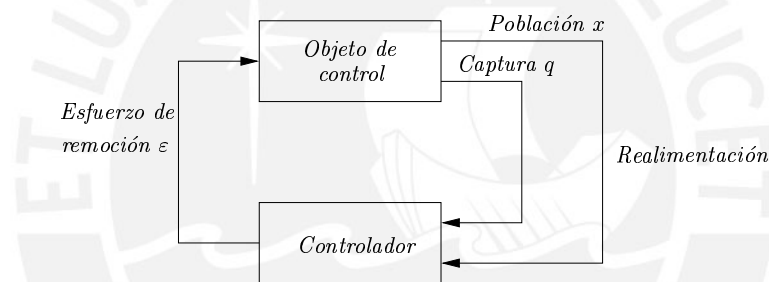


FIGURA 2.1: Diagrama de bloques representando la gerencia de recursos renovables como un problema de control realimentado.

El valor de  $x$  es utilizado como base para las decisiones de la gerencia, representado por el control realimentado, en la Figura 2.1, el cual es una característica de la ingeniería de control.

En esta tesis, se consideran modelos matemáticos de una y dos especies que pueden ser representados por ecuaciones diferenciales ordinarias. Éstos modelos son descritos de una manera general como se muestra en la siguiente sección.

## 2.2 Modelos de Dinámica Poblacional

Una amplia clase de modelos que describen la dinámica poblacional (por ejemplo, del tipo predador-presa) pueden ser descritos como sistemas dinámicos no lineales (Costa et al.,

2000).

- Modelos de **una especie**. En este caso la densidad de una población (generalmente, el predador) es considerada constante. Estos modelos son denominados unidimensionales o de una dimensión (1-D)

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.1)$$

donde la variable de estado  $x$  denota la densidad poblacional de la especie,  $f(x)$  describe la función de crecimiento de la especie, la cual generalmente es continua, no negativa y limitada (por ejemplo, una función logística).

- Modelos de **dos especies**. También denominados de modelos bidimensionales o de dos dimensiones (2-D)

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(x) y \quad (2.2)$$

$$\dot{y} = f_3(x) y \quad (2.3)$$

en los cuales la variable de estado  $x$  denota la densidad poblacional de las presas, la variable de estado  $y$  denota la densidad poblacional de los predadores;  $f_1$ ,  $f_3$  describen las funciones de crecimiento de la presa y del predador respectivamente y  $f_2$  es la función de consumo del predador.

Como ejemplo de un modelo de dos especies, consideremos el modelo clásico de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r_1 x - a x y, \\ \dot{y} &= -r_2 y + e a x y, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde  $x$  es la densidad poblacional de las presas,  $y$  es la densidad poblacional de los predadores,  $r_1$  es la tasa de crecimiento de las presas,  $r_2$  es la tasa de muerte natural de los predadores,  $a$  es el factor de consumo de presas por los predadores,  $e$  es el factor de eficiencia de consumo de las presas por los predadores. Este modelo puede ser representado gráficamente, ver Figura 2.2.

Para describir una relación predador-presa es necesario especificar la tasa de consumo de la presa por un predador  $f_2$ , también denominada *respuesta funcional* que determinada la

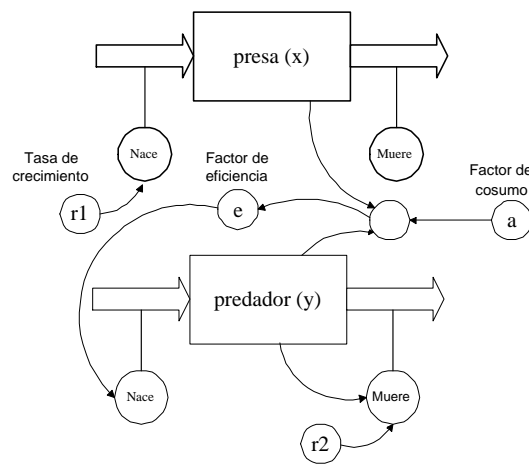


FIGURA 2.2: Representación e interpretación gráfica del modelo Lotka–Volterra.

estabilidad dinámica, la respuesta a las influencias del medio ambiente y puede ser clasificada como: (1) dependiente de la presa, llamado también dependiente de la densidad, cuando solo la densidad de la presa determina la respuesta, es decir, la función  $f_2$  depende solamente de la densidad de la presa  $x$ ; (2) dependiente del predador o de la razón, cuando ambas densidades, presa y predador, afectan la respuesta funcional, es decir la función  $f_2$  depende de las densidades de la presa y del predador.

La tasa de crecimiento de una población de predadores no depende solo del consumo de los individuos, sino también depende de la manera como los predadores convierten las presas consumidas en nuevos predadores, esta tasa es llamada también de *respuesta numérica*  $f_3$ .

La respuesta funcional y la numérica en conjunto proporcionan una descripción completa de la dinámica poblacional. Es necesario el conocimiento de ambas para entender completamente como el predador y la presa interactúan. La suposición más común es que la respuesta numérica es una función linealmente creciente de la respuesta funcional.

Las propiedades de estabilidad de sistemas predador-presa son estudiadas desde hace mucho tiempo, empezando por las técnicas gráficas (Rosenzweig, 1971; Tanner, 1975; Noy-Meir, 1975; May, 1977; Van de Koppel y Rietkerk, 2000; Van de Koppel et al., 1996), es decir el análisis de la estabilidad en el plano de fase por medio de las isóclinas del predador y de la presa, las cuales son complementadas por el análisis matemático del comportamiento del sistema (Brauer, 1976; Fisher et al., 1979; Conway y Smoller, 1986; Ho y Huang, 2001). Existe también una serie de trabajos que tratan acerca de sistemas predador-presa sujetos

a extracción (pesca) (Brauer et al., 1976; Azar et al., 1995; Dai y Tang, 1998; Costa et al., 2000).

Los sistemas de pasteo utilizados y controlados por el hombre pueden ser considerados como un caso especial de sistemas predador-presa. Muchas de las teorías de sistemas predador-presa fueron desarrolladas con una referencia explícita o implícita de dos poblaciones de animales. En particular el caso de la interacción herbívoro-planta (predador-presa) se puede plantear de esta manera dada sus características generales (Noy-Meir, 1975; May, 1977; Rietkerk y Van de Koppel, 1997; Van de Koppel et al., 1997; Rietkerk et al., 1997; Augustine et al., 1998; Van de Koppel y Rietkerk, 2000).

Este trabajo está orientado a la introducción de un control,  $u$  del tipo *on-off*, en los modelos de sistema dinámicos poblacionales de una y dos especies, como se muestra en la siguiente sección.

## 2.3 Modelos de Dinámica Poblacional con Control

- Modelos de **una especie**.

$$\dot{x} = f(x) - x u, \quad (2.5)$$

- Modelos de **dos especies**.

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(x) y, \quad (2.6)$$

$$\dot{y} = f_3(x) y - y u_2. \quad (2.7)$$

En este trabajo, el control se realiza actuando en la remoción de una proporción de la población de las presas (en los modelos de una especie) mediante la introducción del término de control  $x u$  en el modelo (2.5). En el contexto de dos especies, la acción de control de remoción proporcional correspondería a la extracción de la especie predador, mediante la introducción del término de control  $y u_2$  en la dinámica del predador (2.7).

En la Figura 2.3 se muestra la clasificación de los modelos predador-presa más conocidos en ecología matemática, donde los cuadros de líneas continuas corresponden al desarrollo que se realiza en esta tesis.

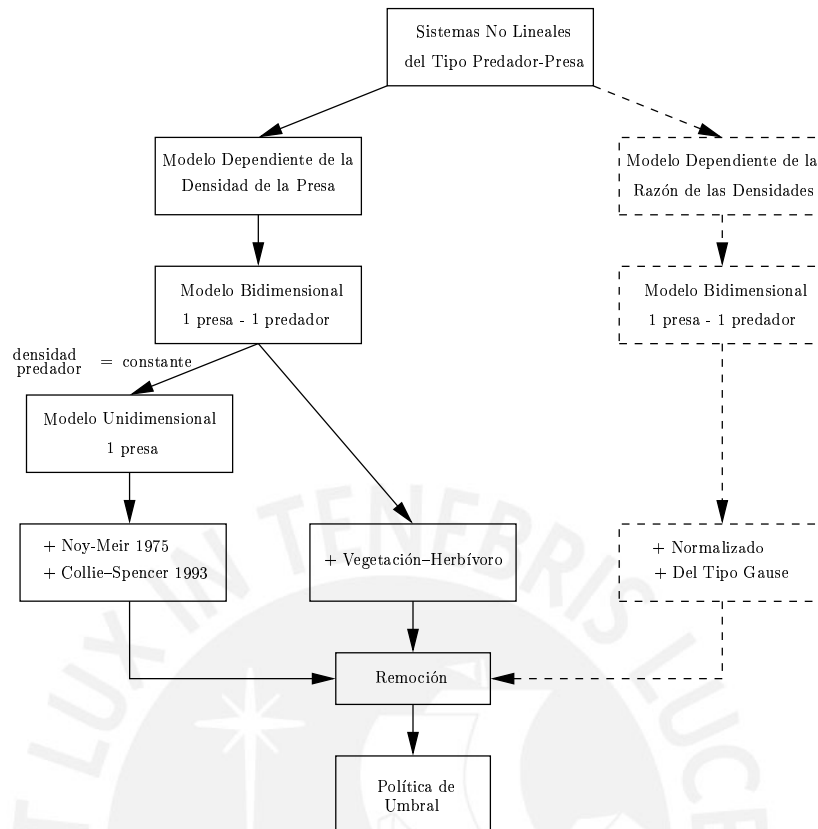


FIGURA 2.3: Contexto en el cual se desarrolla esta tesis. Clasificación de los modelos de sistemas predador-presa. El término *Remoción* debe ser entendido dependiendo del contexto como pesca o pasteo. Los cuadros y flechas con líneas sólidas son los modelos estudiados en esta tesis.

Los modelos dependientes de la densidad de la presa, estudiados en esta tesis, presentan las siguientes paradojas:

1. **Paradoja de enriquecimiento.** Estos modelos son desestabilizados si la capacidad de carga de los recursos (el área donde la población de las presas es intersectada por su propio eje) es aumentada, es de decir el incremento del nivel de entrada de nutrientes al sistema tiende a desestabilizar la interacción entre la presa y el predador (Rosenzweig, 1971; Gilpin, 1972), lo que es contrario a lo lógico.
2. **Paradoja del control biológico.** El control biológico es la regulación de la población de una plaga en niveles bajos, estables de la densidad del predador y/o parásitos (Hsu et al., 2003; Lu et al., 2003). La paradoja significa que no es posible obtener niveles bajos y estables de la densidad de equilibrio de la presa.

Los modelos dependientes de la razón tienen las siguientes características:

1. Modelos predador-presa del tipo razón dependientes son confiables para la interacción entre predador-presa cuando la predación envuelve un proceso de busca, es decir, se tiene que compartir o competir por el alimento.
2. El análisis de estabilidad local muestra que los modelos de este tipo son capaces de producir dinámicas más ricas y más razonables o aceptables desde el punto de vista biológico.
3. La paradoja de enriquecimiento no sucede en este tipo de modelos. La paradoja de control biológico puede ocurrir para estos modelos, es decir, es posible obtener puntos de equilibrio estables a niveles bajos de la densidad de la presa (Hsu et al., 2001a,b).
4. Note que para sistemas dependientes de la razón, en general, la estabilidad asintótica local del estado estacionario ni siempre garantiza la persistencia de los sistemas y, por lo tanto, no implica la estabilidad asintótica global (Kuang y Beretta, 1998; Jost et al., 1999).

## 2.4 Objetivo y Características Deseables de un Control en un Contexto Ecológico

En este trabajo, el control debe ser entendido como una remoción de parte de la población de una determinada especie de manera que no provoque extinción de las especies. El objetivo de esta tesis es estudiar problemas de la gerencia de recursos renovables desde un punto de vista de ingeniería de control, utilizando los conceptos de la teoría control para diseñar una ley adecuada para la gerencia de los recursos. En un contexto ecológico, la ley de control debe satisfacer las siguientes restricciones, es decir, el control  $u$  debe ser:

- **simple de implementar.** Esto es: (i) la expresión matemática del control debe ser lo más simple posible, (ii) el control no debe depender de los parámetros del sistema, para que estos no deban ser estimados.



- **no negativo.** Interpretado en este trabajo como la remoción de una proporción de la población de una determinada especie. Por lo tanto, se considera que el control debe tener un único sentido (signo), correspondiente a la remoción.
- **de monitorización mínima.** Se refiere al número de densidades que tienen que ser medidas para implementar un determinado control. Cuando se trata de sistemas de dos especies y el vector de estados tiene dos componentes, existe dos posibilidades para la monitorización de las densidades, apuntando a realimentación. Si se mide apenas una especie – en este caso el término correspondiente utilizado en la teoría de control es la realimentación de salida. La otra opción, si se mide ambas especies, es denominada realimentación de estados.
- **capaz de fomentar coexistencia.** Esto es, a pesar de la remoción realizada, las especies deben equilibrarse en niveles sostenibles, en los cuales el valor de las poblaciones son positivas.

**Unidad de Densidad:** La densidad poblacional es el tamaño de la población en relación a alguna unidad de espacio. Generalmente es evaluada y expresada como el número de individuos o biomasa de la población, por unidad de área o de volumen.

**Unidad de Tiempo:** Tiempo en los sistemas ecológicos es medido usualmente en días, semanas o años.

## Control de la Dinámica Poblacional por medio de Conmutación

Citamos como ejemplo de un control *on-off* (política de umbral) formalmente definida en el Capítulo 3 conocida como *weighted escapement policy (WEP)*, en el cual el umbral es construido de una combinación de los pesos de las densidades de la presa y del predador, propuesta en Costa et al. (2000), donde esta política fue utilizada para estabilizar un modelo Lotka–Volterra sujeto a una pesca simultánea en ambas especies. Otra técnica de diseño, es ofrecida en Emel’yanov et al. (1998), en el cual una metodología general, denominada **realimentación interna inducida** ver Figura 2.4, para el control de sistemas dinámicos no lineales inciertos es desarrollada, fundamentándose en el control *on-off*, donde se muestra una aplicación al modelo Lotka–Volterra.

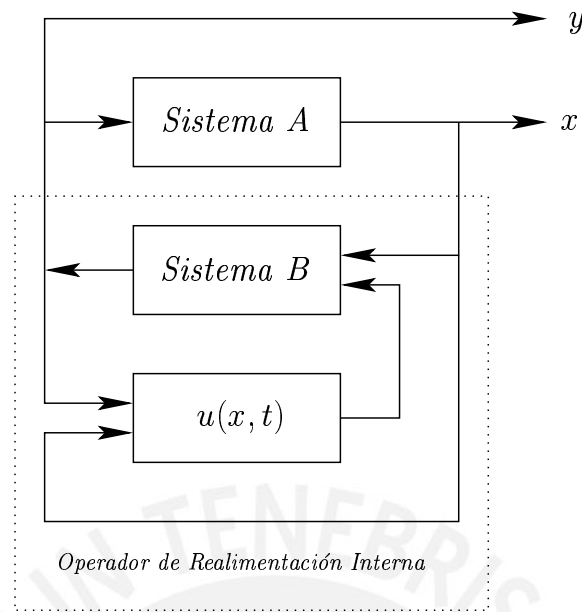


FIGURA 2.4: Realimentación interna inducida.

En el contexto de control de sistemas sujetos a perturbaciones, existen los trabajos de Corless y Leitmann (1981), Lee y Leitmann (1983), Vincent et al. (1985), Vincent (1987), en los cuales una forma de hacer continuo el control *on-off* (llamado también de *bang-bang*) y aliviar el inconveniente de la conmutación en frecuencia infinita (denominada *chattering*), es introducir una faja límite,  $2\sigma$  (*boundary layer*), alrededor del umbral, de manera que un control continuo substituye el control discontinuo cuando el sistema está dentro de la faja límite (Lee y Leitmann, 1983; Vincent et al., 1985; Slotine y Coetsee, 1986). Al suavizar el control discontinuo dentro de la faja límite esencialmente designa la estructura de un filtro pasa-bajo a la dinámica local del umbral (Slotine y Coetsee, 1986; Wong et al., 1998), eliminando de esta manera el *chattering*. Sin embargo en el contexto de sistemas ecológicos, la implementación puede ser impracticable (Lee y Leitmann, 1983; Vincent et al., 1985; Slotine y Coetsee, 1986).

## 2.5 Sistemas no Lineales del Punto de Vista de Control

Un sistema dinámico no lineal es descrito por la siguiente ecuación

$$\dot{z} = f(z, t) \quad (2.8)$$

en el cual  $z \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $t$  es el tiempo y  $f(z, t)$  en general es una función no lineal localmente Lipschitz. Para este trabajo, se considera un sistema de dimensión dos,  $z \in \mathbb{R}^2$ , por lo tanto nuestro sistema puede ser descrito por

$$\dot{z} = \begin{cases} \dot{x} = f_a(x, y) \\ \dot{y} = f_b(x, y) \end{cases} \quad (2.9)$$

en el cual  $x$  e  $y$  son los estados del sistema,  $z \in \mathbb{R}^2$ ,  $f = [f_a \ f_b]^T$ ,  $f_a$  y  $f_b$  son en general no lineales con respecto a  $x$  e  $y$ <sup>1</sup>. Más detalles con respecto a sistemas no lineales pueden ser encontrados en Cook (1986), Slotine y Li (1991) y Khalil (1992). Un sistema bidimensional puede ser estudiado gráficamente en el plano de fase.

### 2.5.1 Plano de Fase

El plano de fase está relacionado con el estudio gráfico de sistemas de dimensión dos descritos por

$$\begin{cases} \dot{x} = f_a(x, y) \\ \dot{y} = f_b(x, y) \end{cases} \quad (2.10)$$

en los cuales  $x$  e  $y$  son los estados del sistema,  $f_a$  y  $f_b$  son funciones no lineales de los estados del sistema. Geométricamente, el espacio de estados de este sistema es el plano que tiene como coordenadas  $x$  e  $y$ . Este plano es denominado *plano de fase*. Dado un conjunto de condiciones iniciales  $z_0$ , la ecuación (2.10) define una solución  $z(t)$ . En función del tiempo la solución  $z(t)$  puede ser representada geoméricamente como una curva en el plano de fase. Tal curva en el plano de fase es llamada de *trayectoria*. Una familia de

<sup>1</sup>El super-índice  $T$  denota que se debe realizar la operación del transpuesto.

trayectorias en el plano de fase correspondientes a varias condiciones iniciales es llamada de *retrato de fase* de un sistema. Los puntos que indican como la dinámica del sistema se comporta en el plano de fase, son los puntos singulares o puntos de equilibrio.

## 2.5.2 Puntos de Equilibrio

Un punto singular es un punto de equilibrio,  $z^{eq} = [x^{eq} \ y^{eq}]^T = 0$ , en el plano de fase. Un punto de equilibrio es aquel en el cual los estados del sistema pueden permanecer por siempre, Slotine y Li (1991), su localización puede ser obtenida resolviendo  $\dot{x} = 0$  y  $\dot{y} = 0$  para los estados  $x$  e  $y$ , es decir

$$f(z, t) = 0, \quad \text{o} \quad f_a(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad f_b(x, y) = 0. \quad (2.11)$$

## 2.5.3 Isóclinas

Una isóclina es definida como el lugar geométrico de los puntos con una dada inclinación tangencial. Por ejemplo, la isóclina con inclinación  $\alpha$  es definida como  $(x, y)$  tal que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f_b(x, y)}{f_a(x, y)} = \alpha.$$

En el método de las isóclinas, el retrato de fase de un sistema es generado en dos pasos. En el primer paso, un campo de dirección de las tangentes a las trayectorias es obtenido. En el segundo paso, las trayectorias en el plano de fase son formados del campo de direcciones.

## 2.5.4 Ciclo Límite

En el plano de fase un **ciclo límite** es definido como una curva cerrada aislada. La trayectoria tiene que ser cerrada, indicando la naturaleza periódica del movimiento, y aislada, indicando la naturaleza limitada del ciclo (con trayectorias próximas convergentes o divergentes del ciclo límite). Se puede diferenciar tres tipos de ciclo límite: (i) todas las trayectorias en la vecindad del ciclo límite convergen a él; en este caso el ciclo límite es denominado estable; (ii) todas las trayectorias en la vecindad del ciclo límite divergen de él; el ciclo límite es inestable; (iii) algunas trayectorias convergen a él, mientras otras divergen

de él; el ciclo límite es semi-estable.

### 2.5.5 Estabilidad de los Sistemas No Lineales

La estabilidad es una de las características más importantes de los sistemas dinámicos. Al analizar la estabilidad de dichos sistemas, surgen diferentes problemas según la manera en que se la caracterice y a los sistemas a ser considerados. Por ejemplo, considerando sistemas lineales y estacionarios, existen métodos para poder determinar su BIBO-estabilidad, como el criterio de la respuesta al impulso, el criterio de Routh y el de Nyquist. Sin embargo cuando se tratan sistemas no lineales, estos métodos no tienen validez.

La riqueza dinámica de los sistemas no lineales presenta ciertos fenómenos que no se evidencia al estudiar los sistemas lineales (ver (Khalil, 1992)). Uno de estos fenómenos es la existencia de múltiples puntos de equilibrio aislados. Un sistema lineal puede tener un solo punto de equilibrio aislado y por lo tanto un solo estado de régimen estacionario que – si el punto es asintóticamente estable – atrae al estado del sistema independientemente del estado inicial. En cambio, los sistemas no lineales pueden tener varios puntos de equilibrio y la convergencia a uno equilibrio estable depende del estado inicial. Debido a esto, resulta importante estudiar la estabilidad de los diferentes puntos de equilibrio de los sistemas no lineales para poder entender mejor el comportamiento del mismo.

Aquí se analiza la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas no lineales mediante el estudio del comportamiento del estado en un entorno de los mismos. Para ello se presenta el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov, como también una introducción los métodos de Lyapunov para el análisis de estabilidad.

### 2.5.6 Estabilidad de los Puntos de Equilibrio

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable en el sentido de Lyapunov si todas las soluciones que nacen en la cercanía del punto de equilibrio permanecen en dicha cercanía; de otra forma resulta inestable. El punto de equilibrio es asintóticamente estable si las soluciones además de permanecer en las cercanías del mismo, tienden hacia el punto de equilibrio a medida que transcurre el tiempo. A continuación se formalizan estos conceptos.

Considerase un sistema

$$\dot{z} = f(z, t) \tag{2.12}$$

el cual tiene un equilibrio en el origen,  $z = 0$ .

**Definición 1** Si  $z(t)$  representa la solución de (2.12) dada a partir de la condición inicial  $z(t_0) = z_0$  a partir del instante inicial  $t = t_0$ , entonces el punto de equilibrio  $z = 0$  de (2.12) es:

- **Lyapunov estable** si para cada  $R > 0$ , existe un  $r = r(R) > 0$  tal que

$$\|z(0)\| < r \implies \|z(t)\| < R, \forall t \geq 0$$

- **Inestable** si no es estable.
- **Asintóticamente estable** si es estable y  $r$  se puede elegir de modo que

$$\|z(0)\| < r \implies \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

En la Figura 2.5 se muestra una representación gráfica de la Definición 1 para los tres casos de estabilidad antes definidos (Khalil, 1992).

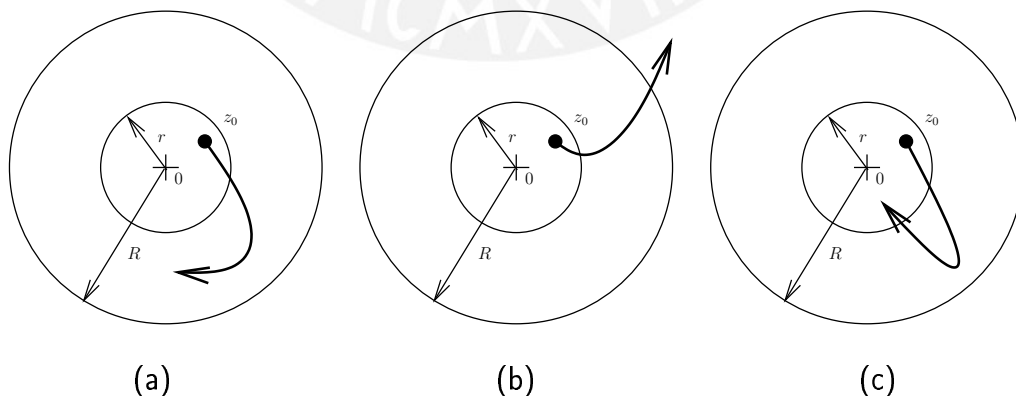


FIGURA 2.5: Puntos de equilibrio en  $z = 0$  con trayectorias de soluciones representativas para un caso: (a) estable, (b) inestable y (c) asintóticamente estable.

## 2.5.7 Análisis de Estabilidad de los Puntos de Equilibrio de los Sistemas No Lineales

Usualmente, el primer paso en el análisis de sistemas no lineales es realizar una linealización en torno de un punto de equilibrio y analizar el comportamiento del modelo lineal. A continuación se establece las condiciones bajo las cuales es posible extraer conclusiones sobre la estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema no lineal a través del análisis de estabilidad del modelo linealizado en torno de dicho punto de equilibrio (Khalil, 1992).

### Método Indirecto de Lyapunov

Sea  $z = 0$  un punto de equilibrio del sistema no lineal dado por (2.12) donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ , es continuamente diferenciable y  $D$  es un entorno del origen. Sea la matriz Jacobiana

$$A = \nabla_z f(z^{eq}).$$

Entonces, denotando con  $\lambda_i$  a los autovalores de  $A$  ( $i = 1, 2$ ).

- El origen es asintóticamente estable si  $Re\{\lambda_i\} < 0$ , para todo  $\lambda_i$ .
- El origen es inestable si  $Re\{\lambda_i\} > 0$  para uno o más autovalores de  $A$ .

Esta aproximación será suficiente para determinar el comportamiento de las trayectorias en la vecindad de los puntos de equilibrio. La naturaleza del equilibrio es determinada esencialmente por los autovalores de  $A$  (Khalil, 1992). Para sistemas bidimensionales existe una detallada clasificación convencional de los puntos singulares según sus autovalores, como es mostrado en la Tabla 2.1.

## 2.5.8 Estabilidad en el Sentido de Lyapunov

De la teoría clásica de la mecánica, es sabido que un sistema es estable si su energía, una función positiva, es continuamente decreciente, o sea tiene derivada negativa, hasta que el sistema alcanza su estado de equilibrio (Ogata, 1990). El segundo método de Lyapunov es

TABLA 2.1: Clasificación Convencional de los Puntos Singulares para Sistemas Bidimensionales

nodo estable	:	autovalores reales y negativos
foco estable	:	autovalores complejos conjugados, con parte real negativa
nodo inestable	:	autovalores reales y positivos
foco inestable	:	autovalores complejos conjugados, con parte real positiva
silla	:	autovalores reales y de signos opuestos
centro	:	autovalores imaginarios conjugados puros.

una generalización de este hecho. Lyapunov demostró que ciertas otras funciones además de la función energía pueden ser utilizadas para la determinación de la estabilidad del punto de equilibrio de un sistema. Antes de presentar el método directo de Lyapunov es necesario revisar algunos conceptos.

Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio en  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene al origen, entonces:

- $V(z)$  se dice que es una función **definida positiva** si  $V(0) = 0$  y  $V(z) > 0$  en  $D - 0$ .
- $V(z)$  se dice que es una función **semidefinida positiva** si  $V(0) = 0$  y  $V(z) \geq 0$  en  $D$ .
- $V(z)$  se dice que es una función **definida negativa** si  $-V(z)$  es definida positiva.
- $V(z)$  se dice que es una función **semidefinida negativa** si  $-V(z)$  es semidefinida positiva.
- La derivada temporal de  $V$  sobre las trayectorias de (2.12) se denomina **derivada orbital**, se denota  $\dot{V}(z)$ , y esta dada por:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(z) &= \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial V}{\partial z} f(z) = \nabla V(z) \cdot f(z) \\
 &= \left( \frac{\partial V}{\partial z_1} \quad \frac{\partial V}{\partial z_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial z_n} \right) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = L_f V(z). \quad (2.13)
 \end{aligned}$$



La derivada de  $V$  sobre las trayectorias del sistema depende de la ecuación vectorial del estado del sistema (Khalil, 1992). De este modo,  $\dot{V}(z)$  será diferente para diferentes sistemas.

Si  $z(t)$  representa la solución de (2.12) dada a partir de la condición inicial  $z(0) = z_0$ , a partir del instante inicial  $t = t_0$ , entonces

$$\dot{V}(z) = \frac{d}{dt}V(z(t)).$$

Consecuentemente, si  $\dot{V}(z)$  es negativa,  $V$  será decreciente sobre las trayectorias solución de (2.12). Ahora estamos en condiciones de presentar el segundo método o método directo de Lyapunov.

## Método Directo de Lyapunov

Sea  $z = 0$  un punto de equilibrio del sistema  $\dot{z} = f(z)$  y sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene al origen, entonces

- Si  $V(z)$  es **definida positiva** y  $\dot{V}(z)$  es **semidefinida negativa**, el origen es un punto de equilibrio **estable**.
- Si  $V(z)$  es **definida positiva** y  $\dot{V}(z)$  es **definida negativa**, el origen es un punto de equilibrio **asintóticamente estable**.

Una función  $V(z)$  que cumple con las condiciones impuestas anteriormente se denomina **función de Lyapunov** (Khalil, 1992). Este método es una herramienta de análisis muy poderoso. Sin embargo, presenta dos desventajas. La primera es que no hay un método sistemático para hallar una función de Lyapunov, por lo tanto hay que proponer una función candidata a función de Lyapunov y probar si la misma cumple con los requisitos de estabilidad. La segunda es que solo brinda condiciones suficientes por lo tanto el hecho de no encontrar una función candidata a Lyapunov que satisfaga las condiciones de estabilidad o de estabilidad asintótica no significa que el origen es inestable o no es asintóticamente estable.

Se puede demostrar que si  $V(z)$  es una función de Lyapunov, el conjunto de los  $z$  tal que  $V(z) = c$ , para alguna constante  $c > 0$  es una hipersuperficie cerrada (denominada **superficie de Lyapunov** o **superficie de nivel**) en el espacio de estados que encierra al origen. El uso de las superficies de Lyapunov hace que el método sea fácilmente interpretable. Las superficies que corresponden a constantes decrecientes  $0 < c_2 < c_1$ , se encuentran íntegramente contenidas, como lo muestra la Figura 2.6 para el caso  $\mathbb{R}^2$ .

La condición  $\dot{V}(z) \leq 0$  se puede interpretar geoméricamente a través de (2.13) ya que la misma significa que el producto escalar entre el gradiente de  $V$  y el campo vectorial  $f$  es negativo:

$$\nabla V(z) \cdot f(z) \leq 0.$$

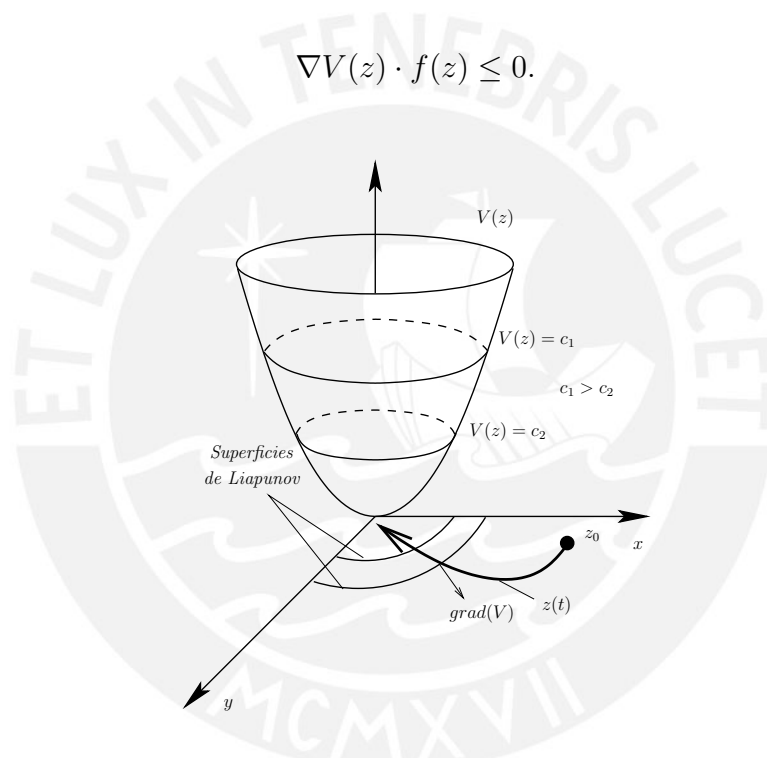


FIGURA 2.6: Interpretación geométrica de las superficies de Lyapunov para el caso de  $\mathbb{R}^2$ .

Teniendo en cuenta que  $f$  es un vector tangente a la trayectoria solución, la condición  $\dot{V}(z) = \nabla V(z) \cdot f(z) \leq 0$  significa que cuando una trayectoria cruza una superficie de Lyapunov, esta trayectoria lo haga hacia adentro y nunca vuelva a salir. Además cuando  $\dot{V}(z) < 0$  las trayectorias se mueven desde una superficie hacia una otra interior correspondiente a un  $c$  menor. Cuando  $c$  decrece, las superficies de Lyapunov correspondientes se achican hacia el origen mostrando que las trayectorias se aproximan al origen a medida que transcurre el tiempo. En cambio, si  $\dot{V}(z) \leq 0$  no se puede asegurar que las trayectorias converjan al origen, pero se puede concluir que el origen es estable ya que las trayectorias

quedarán contenidas en algún entorno del origen si la condición inicial  $z_0$  está dentro de alguna superficie de Lyapunov contenida en dicho entorno (Khalil, 1992).

### 2.5.9 Funciones de Lyapunov con Control

Suponiendo que el sistema en lazo cerrado  $\dot{z} = f(z, t)$  tiene una solución de estado estacionario en  $z = 0$ , la función de Lyapunov será conocida como un funcional  $V_1(z)$  para el cual  $V_1(z) \geq 0$ ,  $V_1(z) = 0 \iff z = 0$  y  $dV_1(z)/dt \leq 0$  considerando el sistema. La siguiente afirmación es válida: si una función de Lyapunov existe, entonces la solución  $z = 0$  es estable en el sentido de Lyapunov. Este resultado es utilizado para diseñar un control, de la siguiente manera: si es necesario dar a la solución  $z = 0$  la propiedad de estabilidad en el sentido de Lyapunov se fija un cierto funcional y se asume una forma de acción de control con la finalidad de proveer a este funcional con las propiedades de una función de Lyapunov (Emel'yanov et al., 1998).

En otras palabras, una manera de estabilizar un sistemas no lineal es seleccionar una función de Lyapunov  $V_1(z)$  e intentar encontrar un control de realimentación de estados  $u_\tau$  que convierte  $\dot{V}_1(z, u_\tau)$  en negativa definida. Con una elección arbitraria de  $V_1(z)$ , mas esta tentativa puede fallar, pero si  $V_1(z)$  es una función de Lyapunov con control (*CLF* del inglés *Control Lyapunov Function*), se puede encontrar una ley de control de estabilización  $u_\tau$ . Para el sistema no lineal

$$\dot{z} = f(z) + g(z)u_\tau \quad (2.14)$$

$V_1(z)$  es una *CLF* si, para todo  $z \neq 0$ ,

$$\frac{\partial V}{\partial z} g(z) = 0 \implies \frac{\partial V}{\partial z} f(z) < 0. \quad (2.15)$$

Si el sistema (2.14) puede ser estabilizado, una *CLF* existe. De (2.15), se observa que el conjunto para el cual  $\partial V/\partial z g(z) = 0$  es significativo, porque en este conjunto el sistema no controlable tiene la propiedad  $\partial V/\partial z f(z) < 0$ . Si sucede que  $\partial V/\partial z f(z) > 0$  cuando  $\partial V/\partial z g(z) = 0$ , entonces  $V_1(z)$  no es una *CLF* y no puede ser utilizada para el diseño de estabilidad por realimentación (una observación que ayuda a eliminar *CLF* candidatas inadecuadas, Kokotović y Arcak (2001)).

## 2.6 Términos Ecológicos desde un Punto de Vista de Control

### 2.6.1 Política de Umbral (PU)

Entre las estrategias de pesca que han sido ampliamente aplicadas en la gerencia de la pesca están: (i) **política de cuota constante** (*constant escapement*), que busca mantener el abastecimiento en un nivel meta, permitiendo la pesca de todos los peces encima de la meta y no permitiendo la pesca si el tamaño de la población está abajo de la meta; (ii) **política de tasa de pesca constante** (*constant harvest rate*), retira una fracción deseada de la meta de cada año; y (iii) **política de umbral** (*threshold policy*), intermedio entre las dos anteriores y es definida en el siguiente párrafo.

Collie y Spencer (1993) introdujeron la llamada **política de umbral (PU)** que es definida como sigue: si la abundancia de los peces está debajo del nivel de umbral, entonces no es permitido pescar, se está encima del umbral, entonces una tasa de pesca constante es aplicada.

Aplicaciones de la PU pueden ser observadas en Funk y Rowell (1995) que estudiaron esta política aplicada en la pesca del arenque en la costa del Pacífico de la Bahía de Bristol. Hjerne y Hansson (2001) modelaron la pesca de bacalao en la costa oriental del Mar Báltico y aplicaron a este modelo la PU. Milner-Gulland et al. (2001) mostraron un caso de estudio del uso de los modelos de simulación para desarrollar y probar estrategias para la gerencia de poblaciones sujetos a incertidumbres, entre las estrategias estudiadas está la PU. Debemos remarcar que ninguno de los trabajos mencionados arriba propone una metodología sistemática para el diseño de la PU – solamente investigan los efectos de aplicación de tal política. La política de umbral también es referida como un control *on-off* y puede ser vista en las referencias de control (Utkin, 1978; Filippov, 1988; Utkin, 1992; Edwards y Spurgeon, 1998).

Las políticas de umbral para sistemas dinámicos con entradas de control, son estrategias que conmutan los controles de entrada de un nivel para otro tan pronto como una cierta variable de medida cruza un valor predeterminado llamado **umbral**. En otras palabras, el espacio de estados del sistema dinámico es dividido en regiones y, en cada región, la dinámica

es determinada por el vector de estados y la respectiva entrada de control. En términos de control, tales sistemas dinámicos también son referidos como sistemas de estructura variable y una PU nos conduce a un sistema de estructura variable con dos estructuras diferentes. En términos matemáticos, esto puede ser escrito como:

$$\dot{z} = f_j(z, t, u_j), \quad z \in G^j, \quad z(0) = z_0 \in \mathbb{R}_+^2, \quad (2.16)$$

en el cual  $z = [x \ y]^T$  es el vector de estados del sistema y  $x$  e  $y$  pueden representar las densidades poblacionales de las especies,  $\mathbb{R}_+^2 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$  y la variedad abierta  $M$  es definida como

$$M = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \tau(z) = 0\} \quad (2.17)$$

donde  $\tau(z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es la variedad que define el umbral dependiente del vector de estados. La variedad  $M$  divide el espacio de estados  $\mathbb{R}_+^2$  en regiones abiertas  $G^j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , en las cuales los campos vectoriales continuos correspondientes  $f_j : G^j \rightarrow \mathbb{R}^2$  son especificados ( $f_1 \neq f_2$ ). El control  $u_\tau$ ,

$$u_\tau(z, t) = \begin{cases} u_1(z, t) & \text{con } \tau(z) > 0, \quad z \in G^1 \\ u_2(z, t) & \text{con } \tau(z) < 0, \quad z \in G^2, \end{cases} \quad (2.18)$$

especificado usualmente como una función de  $z$ , conmuta de un valor para otro conforme  $z \in G^1$  o  $z \in G^2$ , es decir cuando el estado cruza el umbral  $\tau(z)$ . La función de control  $u_\tau$  ( $u_1 \neq u_2$ ) es indefinida cuando el vector de estados pertenece al conjunto  $M$ , i.e.  $u_\tau$  es una función de control discontinua, aunque  $u_1$  y  $u_2$  sean funciones continuas. Consideraciones matemáticas cuidadosas tienen que ser adoptadas al respecto del sentido en el cual las soluciones de (2.16) son definidas, ya que el lado derecho puede ser discontinuo (Edwards y Spurgeon, 1998; Filippov, 1988; Utkin, 1992). Ahora se define el concepto de equilibrio *real* y *virtual*, para el sistema (2.16) sujeto al control (2.18).

## 2.6.2 Definición del Equilibrio Virtual

**Definición 2** Sea  $z_{G^i}^{eq}$  tal que  $f_i(z_{G^i}^{eq}, u_i) = 0$  para algún  $u_i$  en (2.16). Entonces  $z_{G^i}^{eq}$  es llamado **equilibrio real** si pertenece a  $G^i$  y un **equilibrio virtual** si pertenece a  $G^j$ ,  $j \neq i$ .

A partir de la definición, queda claro que un equilibrio virtual estable nunca será alcanzado en realidad. Pues, por ejemplo, una trayectoria iniciada, digamos en  $G^1$  “busca” un equilibrio virtual estable  $z_{G^1}^{eq}$  localizado en  $G^2$ , por lo tanto nunca alcanzará  $z_{G^1}^{eq}$  porque la dinámica cambia tan pronto como la trayectoria cruza el umbral  $\tau(z)$ .

También, de esto se puede concluir que un fenómeno interesante ocurrirá en la frontera entre  $G^1$  y  $G^2$ . De hecho, ocurre el llamado “modo deslizante” encima de la variedad  $M$  conforme se describe a continuación.

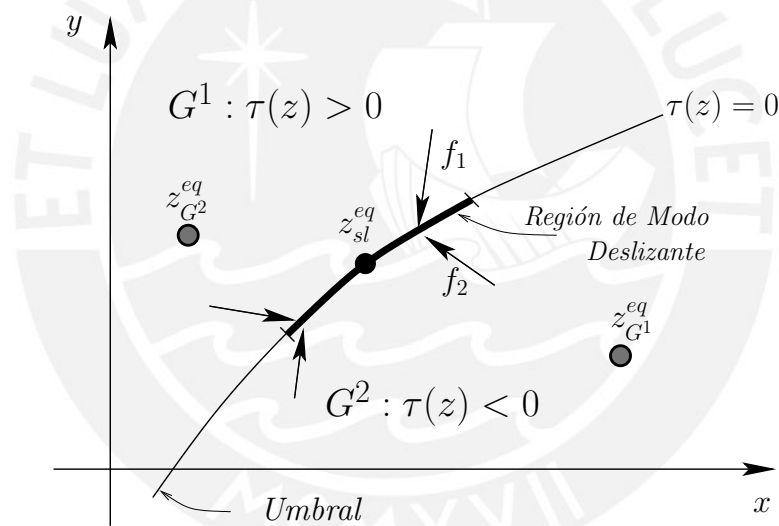


FIGURA 2.7: Modos deslizantes ocurren en la frontera entre  $G^1$  y  $G^2$ . El equilibrio de deslizamiento  $z_{sl}^{eq}$  es mostrado por un “bullet”. Círculos sólidos grises representan equilibrios virtuales estables.

## 2.6.3 Modo Deslizante y Equilibrio de Deslizamiento

Para definir el modo deslizante, considerase el sistema de dinámica no lineal de estructura variable sujeto a un control  $u_\tau(z, t)$  como mostramos a continuación

$$\dot{z} = f(z, t, u_\tau), \quad z \in \mathbb{R}_+^2, \quad u_\tau \in \mathbb{R}, \quad z_0 \in \mathbb{R}_+^2, \quad (2.19)$$

en la cual  $u_\tau$  es definido como en (2.18).

Un **modo deslizante** ocurre si existen regiones en la vecindad de la variedad  $M$  en las cuales los vectores  $f_1(z, t, u_1)$  y  $f_2(z, t, u_2)$  están en dirección un para el otro (Figura 2.7). Matemáticamente, la condición para que un modo deslizante surja en el umbral es que la distancia a este umbral  $\tau$  y su velocidad de cambio  $\dot{\tau}$ , deben ser de signos opuestos, i.e.,

$$\lim_{\tau \rightarrow -0} \dot{\tau} > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \dot{\tau} < 0, \quad (2.20)$$

o, equivalentemente,

$$\tau \dot{\tau} < 0. \quad (2.21)$$

La introducción de un control *on-off* es responsable por el nuevo comportamiento dinámico, i.e., convergencia para el umbral seguido por el movimiento a lo largo del umbral (referenciado como un movimiento de deslizamiento o modo deslizante) hacia un punto llamado de **equilibrio de deslizamiento** ( $z_{sl}^{eq}$  en la Figura 2.7) o, alternativamente, equilibrio alcanzado a través de un **modo deslizante** (Filippov, 1988; Utkin, 1992).

## 2.6.4 Notación Estandar Utilizada para Equilibrios y Umbrales

A lo largo de la tesis se utilizará la PU que definimos como la función  $\phi(\tau)$

$$\phi(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau > 0 \\ 0 & \text{si } \tau < 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

siendo que  $\tau$  es la variable que define el umbral, que es dependiente de los estados del sistema (ver Figura 2.8.(a)). La política continua de umbral es definida como una función  $\phi(\tau, \sigma)$ ,

$$\phi(\tau, \sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau > \sigma \\ \frac{\tau + \sigma}{2\sigma} & \text{si } -\sigma \leq \tau \leq \sigma \\ 0 & \text{si } \tau < -\sigma. \end{cases} \quad (2.23)$$

en la cual  $\tau$  es la variable que define el umbral, que dependen de los estados del sistema,  $2\sigma$  es el ancho de la región lineal de la política y  $\sigma$  es una constante positiva (vea Figura

2.8.(b)).

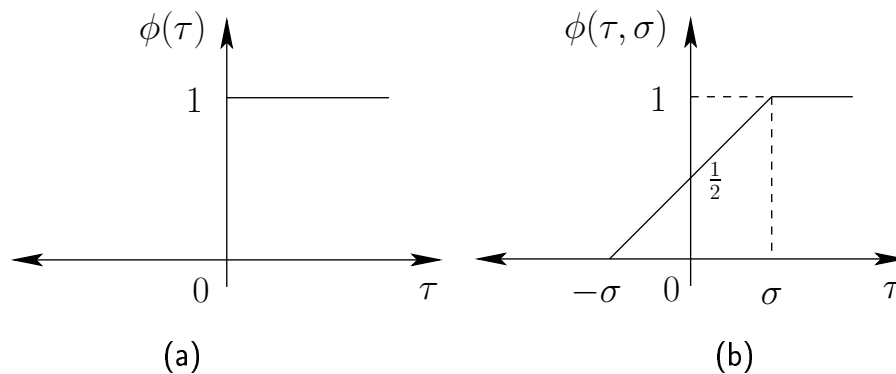


FIGURA 2.8: (a) Política de Umbral (PU). (b) Política Continua de Umbral con Region Lineal de ancho  $2\sigma$ .

Esta forma de convertir en continua la PU tiene por objetivo aliviar el inconveniente de la conmutación en frecuencia infinita con la introducción de una faja límite ( $2\sigma$  en el caso de la política  $\phi(\tau, \sigma)$ ) alrededor del umbral, de manera que un control continuo substituya al control discontinuo cuando el sistema está dentro de la faja límite (Utkin, 1977, 1978; Lee y Leitmann, 1983; Vincent et al., 1985; Slotine y Coetsee, 1986; DeCarlo et al., 1988; Xu et al., 1989; Utkin, 1992; Guldner y Utkin, 2000). La suavización del control discontinuo dentro de la faja límite designa principalmente una estructura de un filtro pasa-bajo a la dinámica local del umbral (Slotine y Coetsee, 1986; Wong et al., 1998), eliminando así la conmutación.

**Definición 3** La control  $u_\tau$  en un contexto biológico es definido como

$$u_\tau = u_1(z, t) \phi(z) = \begin{cases} u_1(z, t) & \text{si } \tau(z) > 0 \\ 0 & \text{si } \tau(z) < 0, \end{cases}$$

donde  $u_1$  es una función continua. El **sistema controlado** es aquel en el cual el control  $u_\tau = u_1$  es aplicado, y el **sistema libre** es aquel en el cual ningún control (i.e.,  $u_\tau = 0$ ) es aplicado.

La notación padrón para los diferentes tipos de equilibrio del sistema que se muestra a lo largo de la tesis es: (i)  $z_i^{cc}$  denota un punto de equilibrio del sistema con control; (ii)  $z_i^{sc}$



denota un punto de equilibrio del sistema sin control; (iii)  $z_{sl}^{eq}$  denota un punto de equilibrio de deslizamiento del sistema alcanzado a través de un modo deslizante; (iv)  $z_i^{eq}$  denota un punto de equilibrio real del sistema.

## 2.6.5 Control Equivalente

Una técnica formal denominada método de control equivalente (Utkin, 1977, 1978, 1992) es utilizada para calcular las ecuaciones del modo deslizante ideal del sistema como se muestra a continuación

$$\dot{z} = f(z) + g(z) u_\tau. \quad (2.24)$$

En esta técnica la derivada en el tiempo del vector  $\tau$  (el umbral) a lo largo de las trayectorias del sistema (2.24) es igualada a cero y el sistema algebraico resultante es resuelto para el vector de control. Ese “control equivalente” (si existe) es substituido en el sistema original. Las ecuaciones resultantes son las ecuaciones del modo deslizante ideal. Desde un punto de vista geométrico, el método indicado arriba tiene por objetivo calcular un control continuo el cual guía el vector velocidad a lo largo de la intersección de las superficies de discontinuidad (a lo largo del umbral).

Esta técnica formal es establecida para sistemas lineales en relación al control (2.24) en el cual  $u_\tau$  es determinado por (2.18). Supongamos que un modo deslizante existe sobre la variedad  $M$ . Calculemos el control continuo de manera que para una condición inicial del vector de estados sobre esta variedad, la derivada en el tiempo del vector  $\tau$  a lo largo de las trayectorias del sistema (2.24) es:

$$\dot{\tau} = S (f(z) + g(z) u_{eq}) = 0, \quad (2.25)$$

en el cual las líneas de la matriz  $S = \{\partial \tau / \partial z\}$  es el gradiente de la función  $\tau$ . Suponiendo que la matriz  $Sg$  no es singular para todo  $z$  y  $t$ , el control equivalente es como se muestra a continuación

$$u_{eq} = -[S(z)g(z)]^{-1} S(z)f(z, t). \quad (2.26)$$

Substituyendo el control (2.26) en (2.24) resulta en la ecuación

$$\dot{z} = f(z) - g(z) (Sg)^{-1} g f, \quad (2.27)$$

la cual describe el movimiento del modo deslizante sobre la variedad  $\tau = 0$ .

Descrito los modelos de dinámica poblacional y los conceptos de sistemas no lineales que serán utilizados a lo largo de toda la tesis, en el siguiente capítulo desarrollamos el **análisis del diseño del control de un sistema no lineal de una especie sometido a una PU.**



## Capítulo 3

# Diseño del Control Conmutado para Sistemas Poblacionales de Una Especie

Los ecosistemas de pasteo tienen algunas ventajas al experimentar hipótesis ecológicas, sobretodo en los casos simples de la teoría de ecología general. Ejemplos de estos casos se dan: (i) cuando el número de especies es limitada (usualmente un herbívoro y una o pocas especies de planta) y (ii) cuando el desplazamiento de los animales es controlado. Estas hipótesis son razonables al gerenciar ecosistemas de pasteo en los cuales el número de los herbívoros es mantenido constante por la intervención del hombre. Existe un creciente número de observaciones y experiencias en ecosistemas de pasteo en muchas partes del mundo (Van de Koppel et al., 1996; Augustine et al., 1998, y refs. contenidas en estas).

Noy-Meir (1975) y May (1977) explicaron los efectos irreversibles de la sequía y del exceso de pasteo de vegetación en ecosistemas de áreas semiáridas, en estos trabajos se propuso estados estables alternativos en la vegetación.

Con el objetivo de introducir un control exógeno (externo) a la dinámica poblacional de modelos de una especie, se utiliza la técnica de *CLF* para elegir un control simple del tipo conmutado. Esta técnica permite que el sistema dinámico se establezca en un equilibrio deseado y globalmente estable.

### 3.1 Modelo de Una Especie con Consumo Exógeno Controlado

En la forma tradicional del modelo de una especie, los cambios en la abundancia de la presa pueden ser descritos por

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - c(x), \quad (3.1)$$

donde la función continua  $f(x)$  describe el crecimiento de la presa como una función de su densidad y la función continua  $c(x)$  es la pérdida debido al consumo de presas por el herbívoro o la remoción (esta función es denominada también de respuesta funcional); en esta última la densidad del predador se asume que es constante. El modelo mencionado fue también estudiado por Clark (1976), Clark (1985), Kot (2001) con énfasis en aspectos productivos en la gerencia de recursos renovables, específicamente en la pesca.

Para introducir al modelo un término de consumo exógeno controlado se introduce una notación y una suposición. Denotase el lado derecho de la ecuación (3.1) como sigue:

$$\bar{f}(x) = f(x) - c_{end}(x). \quad (3.2)$$

Supongase que la función de consumo exógena, denotada como  $c_{exo}(x)$ , es proporcional a la densidad  $x$  y no negativa para todo  $x > 0$ :

$$c_{exo}(x) = \varepsilon x, \quad (3.3)$$

en el cual  $\varepsilon$  es la tasa de consumo exógena. Ahora, se introduce el modelo general de una especie, el cual tiene un consumo endógeno, como también un consumo exógeno controlado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) - c_{end}(x) - c_{exo}(x) \phi(\tau), \\ &= \bar{f}(x) - \varepsilon x \phi(\tau), \end{aligned} \quad (3.4)$$

en el cual  $u_\tau$  es el control (PU) a ser diseñado. En otras palabras, se escoge

$$u_\tau = \varepsilon x \phi(\tau) \quad (3.5)$$

$$\tau = x - x_{th} \quad (3.6)$$

donde  $\varepsilon$  es el parámetro de esfuerzo de control a ser diseñado,  $\phi(\tau)$  es definido como en (2.22) y  $x_{th}$  es el valor de umbral de la densidad poblacional.

La introducción del término  $x \varepsilon \phi(x - x_{th})$  significa que se está eligiendo un control proporcional a la densidad de la presa y que es conmutado (*on-off*). Para la función  $\bar{f}(x)$  en (3.4), se puede considerar las siguientes formas:

$$\text{CL + sin CE} \quad : \quad r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (3.7)$$

$$\text{CL + CE del Tipo Holling II} \quad : \quad r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{c_1 x}{x + d} \quad (3.8)$$

$$\text{CL + CE del Tipo Holling III} \quad : \quad r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{c_1 x^2}{x^2 + d^2}, \quad (3.9)$$

donde CL significa *crecimiento logístico*, CE significa *consumo endógeno*,  $r$  es la tasa de crecimiento intrínseca,  $K$  es la capacidad máxima de soporte del medio ambiente,  $c_1$  es la tasa de consumo endógena (considerada constante) y  $d$  está relacionada a la densidad de la presa en la cual el predador se sacia. Aquí definimos  $x_m$  como el punto de intersección de valor positivo de las curvas (3.8) y (3.9) con el eje  $x$ .

Para este modelo general de una especie, se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 3.1** *Considerase un sistema del tipo (3.4), con un control como en (3.5), (3.6). Se asume que la función  $\bar{f}(x)$  es no negativa en el intervalo  $[0, x_m]$ . Suponiendo que se desea mantener la densidad poblacional  $x$  en un valor deseado  $x_d$ , con  $x_d < x_m \leq K$ .*

Entonces,

- a. *con un control  $\varepsilon x \phi(\tau)$  como en (3.5), (3.6), el sistema se estabiliza en un modo deslizante en el umbral  $x_{th}$ , de manera que la selección  $x_{th} = x_d$  resulta en el equilibrio deseado.*
- b. *con un control continuo  $\varepsilon x \phi(\tau, \sigma)$ , con  $\phi(\tau, \sigma)$  como en (2.23), el sistema estabiliza*

en el umbral, de manera que la selección  $x_d = x_{th}$  resulta en el equilibrio deseado, el cual es globalmente asintóticamente estable.

### 3.2 Demostración del Teorema de Estabilidad Global para Modelos de Una Especie

La PU  $\phi(\tau)$ , con umbral  $\tau := x - x_d$  divide  $\mathbb{R}$  en dos Segmentos y sea  $x_d$  el punto de equilibrio deseado. En cada segmento el sistema tiene una estructura diferente. Sea  $S^1$  el segmento correspondiente a  $\tau < 0$ , con PU  $u_\tau = 0$  y  $S^2$  el segmento correspondiente a  $\tau > 0$ , con PU  $u_\tau = \varepsilon$ . La dinámica en cada segmento es:

$$S^1 : \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \bar{f}(x), \end{array} \right. \quad (3.10)$$

$$S^2 : \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \bar{f}(x) - \varepsilon x. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

a. Sea la Función de Lyapunov con Control  $V_1(x)$  definida como

$$V_1(x) = \frac{1}{2}(x - x_d)^2. \quad (3.12)$$

Derivando (3.12) respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de (3.4) se obtiene

$$\dot{V}_1 = (x - x_d) (\bar{f}(x) - \varepsilon x \phi), \quad (3.13)$$

y haciendo el análisis por segmentos:

1. **Segmento  $S^1$ ,  $u = 0$ :** En este segmento  $\dot{V}_1$  tiene la siguiente forma,

$$\dot{V}_1 = (x - x_d) \bar{f}(x), \quad (3.14)$$

y debido a que  $x$  y  $\bar{f}(x)$  son no negativas,  $\dot{V}_1$  es negativa definida para todas las formas de  $\bar{f}(x)$ .

2. **Segmento**  $S^2$ ,  $u = \varepsilon$ : En este segmento  $\dot{V}_1$  tiene la siguiente forma,

$$\dot{V}_1 = (x - x_d) (\bar{f}(x) - \varepsilon x), \quad (3.15)$$

el término  $\bar{f}(x) - \varepsilon x$  debe ser negativo definido, i.e.,

$$\varepsilon > \bar{f}(x)/x := \Gamma(x), \quad (3.16)$$

por lo tanto  $\varepsilon$  debe ser lo suficientemente grande para que  $\dot{V}_1$  sea negativa definida. Para el cálculo de  $\varepsilon$ , se considera la función  $\Gamma(x)$  diferenciable y que alcanza su máximo en el intervalo  $[0, x_m]$ ; para calcular el valor de  $x$  en el cual  $\Gamma(x)$  es máximo, se debe derivar  $\Gamma(x)$  con respecto a  $x$  y resolver la ecuación resultante para  $x$ , dicho valor de  $x$  es denotado como  $\hat{x}$ , es decir  $\hat{x}$  es el valor en el cual  $\Gamma(x)$  alcanza su máximo, denotado como  $\Gamma_{\text{máx}}$ , y  $0 < \hat{x} < x_m$ ,

$$\varepsilon > \Gamma_{\text{máx}} = \Gamma(\hat{x}).$$

Esto demuestra que es posible estabilizar el sistema en un punto de equilibrio de deslizamiento y como se desea estabilizar el sistema en el umbral, se debe escoger  $x_d = x_{th}$ , es decir el equilibrio de deslizamiento.

b. Un sistema del tipo:

$$\dot{x} = \bar{f}(x) - \varepsilon x \phi(\tau, \sigma) \quad (3.17)$$

para el cual la política continua de umbral es como en (2.23) siendo  $\tau := x - x_{th}$ ,  $2\sigma$  es el ancho de la región lineal del control. De modo similar que en el caso anterior, se escoge el umbral  $x_{th} = x_d$ . Sea  $V_1(x)$  una función de Lyapunov con control definida como

$$V_1(x) = \frac{1}{2}(x - x_d)^2. \quad (3.18)$$

Derivando (3.18) con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}_1 = (x - x_d) (\bar{f}(x) - \varepsilon x \phi). \quad (3.19)$$

Para las diferentes formas de  $\bar{f}(x)$ , el análisis de  $\bar{f}(x) - \varepsilon x \phi$  es calculado para las diferentes regiones del control:

1. **Segmento**  $\tau < \sigma$ ,  $\phi(\tau, \sigma) = 0$ : En este segmento  $\dot{V}_1$  es de la siguiente forma

$$\dot{V}_1 = (x - x_d) \bar{f}(x), \quad (3.20)$$

se considera  $x_d = x_{th}$ , como  $x$  y  $\bar{f}(x)$  son no negativos, por lo tanto  $\dot{V}_1 < 0$ .

2. **Segmento**  $-\sigma \leq \tau \leq \sigma$ : En este segmento  $\dot{V}_1$  es de la siguiente forma

$$\dot{V}_1 = (x - x_d) \left( \bar{f}(x) - \varepsilon x \left( \frac{\tau + \sigma}{2\sigma} \right) \right), \quad (3.21)$$

como se desea estabilizar el sistema en un punto que pertenezca a esta región se escoge  $x_d = x_{th}$ , es decir  $\tau = 0$ , entonces el valor de  $\varepsilon$  que hace que el sistema estabilice en  $x = x_{th}$  es

$$\varepsilon = 2 \bar{f}(x_{th}) / x_{th}$$

con esto  $\dot{V}_1 = 0$  en  $x = x_{th}$  y  $\dot{V}_1 < 0$  para todo  $x_{th} - \sigma \leq x \leq x_{th} + \sigma$ , i.e.  $-\sigma \leq \tau \leq \sigma$ .

3. **Segmento**  $\tau > \sigma$ ,  $\phi(\tau, \sigma) = 1$ : En este segmento  $\dot{V}_1$  es de la siguiente forma

$$\dot{V}_1 = (x - x_d) (\bar{f}(x) - \varepsilon x), \quad (3.22)$$

como  $\bar{f}(x_{th}) - \varepsilon x_{th}/2 = 0$ , entonces para valores de  $x > x_{th} + \sigma$  el factor  $\bar{f}(x) - \varepsilon x < 0$ , por lo tanto  $\dot{V}_1 < 0$ . ■

**Observación 1** Para las diferentes formas de  $\bar{f}(x)$  del sistema con política discontinua o continua, es posible calcular el valor del esfuerzo  $\varepsilon$  de forma que el sistema tenga un equilibrio de deslizamiento o un equilibrio global y asintóticamente estable.



### 3.3 Modelo de un Sistema de Pasteo sujeto a una Política de Umbral

El modelo Noy-Meir describe el crecimiento de la vegetación bajo la suposición que está sujeta a la acción de una población constante de herbívoros. A semejanza con la mayoría de los otros modelos (Rosenzweig, 1971; May, 1977; Collie y Spencer, 1993; Kot, 2001), este modelo tiene un término de crecimiento logístico y un término de consumo que modela la acción de los herbívoros.

El modelo mostrado en Noy-Meir (1975), asume una simplificación drástica de la complejidad inherente del mundo real en sistemas vegetación-herbívoro, y proporciona ideas útiles del comportamiento de los sistemas. En la forma simple del modelo Noy-Meir los cambios en la abundancia de la vegetación son descritos por

$$\frac{dx}{dt} = \bar{f}(x) - c_{exo}(x), \quad (3.23)$$

en el cual en la ausencia de pasteo la función  $\bar{f}(x)$  describe el crecimiento de la vegetación como una función de su densidad  $x$ , la función  $c_{exo}(x)$  es la tasa de pérdida debido al consumo de los herbívoros o simplemente llamada tasa de consumo (correspondiente a un consumo *per capita*  $c_{exo}(x)$  y puede ser escrita como  $C_{exo}(x) = c_{exo}(x)y$ ). La función  $c_{exo}(x)$  es llamada de respuesta funcional e  $y$  es la densidad de los herbívoros (considerada constante).

El modelo Noy-Meir considera  $\bar{f}(x)$  como en (3.7), logística, y la tasa de consumo  $c_{exo}(x)$  es considerada lineal en relación a la densidad de la vegetación, esto es  $c_{exo}(x) = \varepsilon x$ . Este modelo también fue estudiado en May (1977); Clark (1976, 1985); Kot (2001).

#### Modelo Noy-Meir sujeto a una Política de Umbral

En el contexto de la gerencia del pasteo, cuando un esquema de rotación de aplazamiento es utilizado, significa que el término de consumo está siendo conmutado entre *on* (cuando el pasteo de una área en particular es permitido) y *off* (cuando el ganado es retirado de dicha área en particular, lo que permite la recuperación de la vegetación).

En este modelo la PU es introducida en el término de la tasa de consumo, es decir, si la cantidad de vegetación está debajo del nivel de umbral, el pasteo es prohibido; si la cantidad de vegetación está encima del nivel de umbral, el pasteo es permitido. El modelo de Noy-Meir sujeto a la PU tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \varepsilon x \phi(\tau), \\ u_\tau &= \phi(\tau)\end{aligned}\quad (3.24)$$

siendo que  $\phi(\tau)$  es la PU definida como en (2.22) y  $\tau$  es el umbral definido como:

$$\tau := x - x_{th}, \quad (3.25)$$

y  $x_{th}$  es el valor del nivel del umbral. Se puede observar que una PU (2.22) aplicada al sistema (3.24) genera dos estructuras y los puntos de equilibrio de la dinámica de cada estructura serán analizados en la siguiente sub-sección.

### 3.3.1 Análisis de los Puntos de Equilibrio

Para poder clasificar los puntos de equilibrio de cada sub-sistema, es necesario linealizar los mismos, obteniéndose:

1. Sistema sin control o libre, cuando  $\tau < 0$ , es decir  $\phi(\tau) = 0$ ,

$$A_{\tau < 0} = \frac{\partial \bar{f}(x)}{\partial x} = r - \frac{2r}{K} x,$$

2. Sistema con control, cuando  $\tau > 0$ , es decir  $\phi(\tau) = 1$ ,

$$A_{\tau > 0} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{f}(x) - \varepsilon x) = r - \frac{2r}{K} x - \varepsilon.$$

Con la linealización calculada, se analiza los puntos de equilibrio.

#### 1. Sistema Libre

Cuando  $\phi(\tau) = 0$ , es decir, sistema para el cual no es permitido el pasteo (llamado también sistema sin control). La dinámica es como se muestra a continuación,

$$\frac{dx}{dt} = r x \left( 1 - \frac{x}{K} \right).$$

Los puntos de equilibrio del sistema libre son mostrados en la Tabla 3.1.

TABLA 3.1: Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Noy-Meir sin Control

Punto de Equilibrio	Autovalor	Clasificación
$x_1^{sc} = 0$	Positivo, $r$	Equilibrio Inestable
$x_2^{sc} = K$	Negativo, $-r$	Equilibrio Estable

## 2. Sistema con Pasteo

Cuando  $\phi(\tau) = 1$ , es decir el sistema en el cual es permitido el pasteo (llamado también sistema controlado). La dinámica es como se muestra a continuación

$$\frac{dx}{dt} = r x \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \varepsilon x.$$

Los puntos de equilibrio del sistema con pasteo son mostrados en la Tabla 3.2.

TABLA 3.2: Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Noy-Meir con Control

Punto de Equilibrio	Autovalor	Clasificación
$x_1^{cc} = 0$	Positivo, si $r - \varepsilon > 0$	Equilibrio Inestable
$x_2^{cc} = K (1 - \varepsilon/r)$	Negativo, si $-r + \varepsilon < 0$	Equilibrio Estable

### 3.3.2 Diseño de la Política de Umbral

El gráfico de la curva logística  $\bar{f}(x)$  es una parábola convexa, intersectando el eje  $x$  en el origen, en el cual se tiene una inclinación  $r$ , y en el punto  $K$ . La curva de la tasa de consumo es una línea recta que pasa por el origen con una inclinación  $\varepsilon$ . Se consideran dos casos para los valores de  $\varepsilon$  en relación a  $r$ ,

1. Cuando  $\varepsilon < r$ .

En este caso, el sistema libre tiene el punto de equilibrio inestable  $x_1^{sc} = 0$  y el punto de equilibrio estable  $x_2^{sc} = K$ . El sistema controlado tiene el punto de equilibrio inestable  $x_1^{cc} = 0$  debido a que  $r - \varepsilon > 0$  y el punto de equilibrio estable  $x_2^{cc}$  debido a que  $-r + \varepsilon < 0$ . Con el objetivo de hacer los puntos de equilibrio  $x_2^{sc}$  y  $x_2^{cc}$  *virtuales*, se debe escoger el valor de umbral  $x_{th}$  en la siguiente faja de valores

$$x_2^{cc} < x_{th} < x_2^{sc} = K,$$

este caso es mostrado en la Figura 3.1.(a). El cálculo del valor de  $\varepsilon$  debe satisfacer la restricción 3.16). Para los valores de los parámetros dados en la Figura 3.1.(a), el valor de  $\varepsilon_1$  es:

$$\varepsilon_1 = 0,3 < r.$$

2. Cuando  $\varepsilon > r$ .

En este caso el sistema libre tiene el punto de equilibrio inestable  $x_1^{sc} = 0$  y el punto de equilibrio estable  $x_2^{sc} = K$ . El sistema controlado tiene el punto de equilibrio estable  $x_1^{cc} = 0$  y el punto de equilibrio  $x_2^{cc}$  no tiene sentido ecológico pues es un valor negativo. Con el objetivo de hacer los puntos de equilibrio  $x_1^{cc} = 0$  y  $x_2^{sc} = K$  *virtuales*, se debe escoger el valor del umbral  $x_{th}$  en la siguiente faja de valores

$$0 < x_{th} < K,$$

este caso es mostrado en la Figura 3.1.(b). El valor de  $\varepsilon_2$  para los valores de los parámetros dados en la Figura 3.1.(b) es:

$$\varepsilon_2 = 1,2 > r.$$

**Observación 2** Como se puede observar la localización del umbral desempeña un papel importante en el diseño del control, pues el objetivo es hacer que los puntos de equilibrio

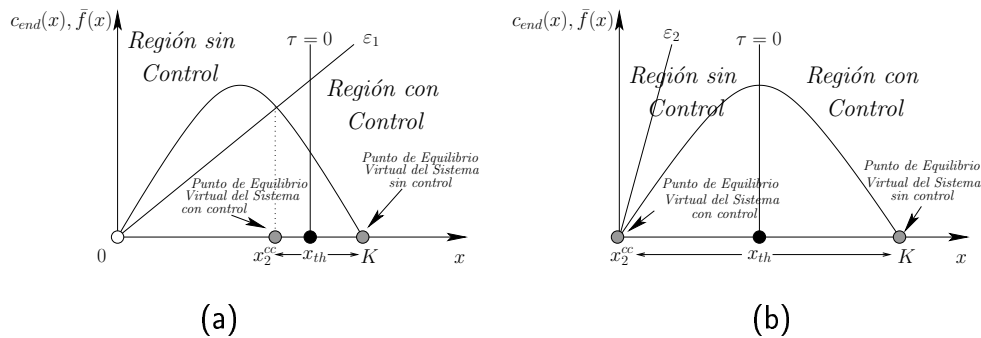


FIGURA 3.1: (a) Equilibrio con una curva de tasa de consumo lineal con inclinación media ( $\varepsilon_1 < r$ ). Puntos de equilibrio del sistema libre –  $x_2^{sc}, x_1^{sc} = 0$ . Puntos de equilibrio del sistema con pasteo –  $x_2^{cc}, x_1^{cc} = 0$ . Valores de los parámetros:  $r = 1, \varepsilon_1 = 0,3, x_{th} = 0,85, K = 1$ . (b) Equilibrio con una curva de tasa de consumo lineal con inclinación grande ( $\varepsilon_2 > r$ ). Punto de equilibrio del sistema libre  $x_2^{sc} = K$ . Punto de equilibrio del sistema con pasteo  $x_2^{cc} = 0$ . Valores de los parámetros:  $r = 1, \varepsilon_2 = 1,2, x_{th} = 0,5, K = 1$ .

estables de cada estructura al escoger la posición del umbral se conviertan en puntos de equilibrio virtuales.

### 3.3.3 Simulación del Comportamiento del Modelo Noy-Meir sujeto a una Política de Umbral

En la Figura 3.2 se muestra las simulaciones de la evolución de la densidad de la vegetación en el tiempo que resulta de la aplicación de la política de umbral en cada caso descrito en las Figuras 3.1.(a) y 3.1.(b).

**Observación 3** En la simulación, la política discontinua de umbral (on-off) estabiliza el sistema alrededor del nivel de umbral  $x = x_{th}$ , con una rápida alternación entre pasteo y no pasteo. La densidad de la vegetación se ‘estabiliza’ en una oscilación de alta frecuencia alrededor del valor de umbral  $x_{th}$ .

Esto demuestra que la aplicación de esta política no es recomendable y motiva el siguiente desarrollo, el cual es el diseño de una política continua de similares características.

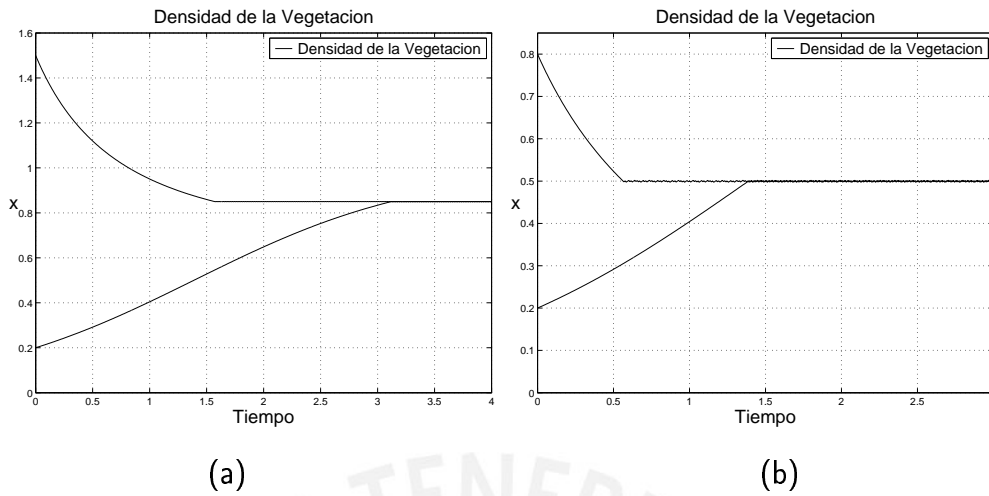


FIGURA 3.2: (a) Densidad de la vegetación  $x$ , cuando  $\varepsilon < r$ , como una función del tiempo, sujeto a la PU con  $\varepsilon_1 = 0,3$ ,  $x_2^{cc} = 0,7$ ,  $g = 1$  y  $x_{th} = 0,85$ . (b) Densidad de la vegetación  $x$ , cuando  $\varepsilon > r$ , como una función del tiempo, sujeto a la PU con  $\varepsilon_2 = 1,2$ ,  $r = 1$ ,  $x_2^{sc} = K$ ,  $x_2^{cc} = 0$  y  $x_{th} = 0,5$ .

### 3.3.4 Diseño de la Política Continua de Umbral

Considerase el siguiente modelo sujeto a una política continua de umbral  $\phi(\tau, \sigma)$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r x \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \varepsilon x \phi(\tau, \sigma), \\ u_\tau &= ) - \varepsilon x \phi(\tau, \sigma) \end{aligned} \quad (3.26)$$

siendo que  $\phi(\tau, \sigma)$  es la política continua de umbral definida como en (2.23) y  $\tau$  es el umbral definido como

$$\tau := x - x_{th} \quad (3.27)$$

donde  $x_{th}$  es el valor del nivel de umbral.

Note que, para analizar esta política, será necesario considerar tres regiones. La idea es escoger  $\varepsilon$  de forma que el sistema tenga su punto de equilibrio real (y deseado) dentro de la región lineal del control, es decir  $-\sigma \leq \tau \leq \sigma$ , y que los equilibrios en las dos regiones restantes ( $\tau > \sigma$  y  $\tau < -\sigma$ ) sean *virtuales*. El análisis en cada región es como se muestra a continuación:

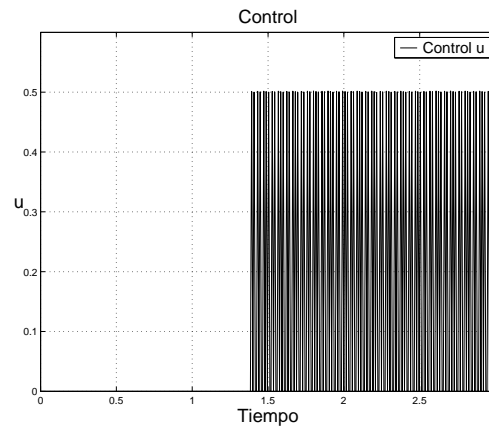


FIGURA 3.3: El control, en la simulación, oscila en alta frecuencias cuando la densidad de la vegetación se ‘estabiliza’ alrededor del valor de umbral  $x_{th}$ , esto porque el método de integración utilizado, Euler, presenta errores de aproximación, motivo por el cual se presenta oscilación en alta frecuencia.

1. **Región**  $\tau < -\sigma$ : La dinámica es

$$\dot{x} = r x \left( 1 - \frac{x}{K} \right).$$

Los punto de equilibrio son mostrados en la Tabla 3.3.

TABLA 3.3: Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Noy-Meir sometido a una Política Continua en la Región sin Control

Punto de Equilibrio	Autovalor	Clasificación
$x_1^{sc} = 0$	Positivo, $r$	Equilibrio Inestable
$x_2^{sc} = K$	Negativo, $-r$	Equilibrio Estable

2. **Región**  $-\sigma \leq \tau \leq \sigma$ : La dinámica en esta región es descrita a seguir

$$\dot{x} = r x \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \varepsilon x \phi(\tau, \sigma).$$

Los puntos de equilibrio del sistema en esta región son mostrados en la Tabla 3.4.

Se desea que el equilibrio  $x_2^{eq}$  sea igual al valor del umbral  $x_{th}$ , de esta forma se puede calcular el valor de  $\varepsilon$

$$\varepsilon = 2 r \left( 1 - \frac{x_{th}}{K} \right).$$

TABLA 3.4: Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Noy-Meir sometido a una Política Continua en la Región Lineal

Punto de Equilibrio	Clasificación
$x_1^{eq} = 0$	Equilibrio Inestable
$x_2^{eq} = \frac{r + (x_{th} - \sigma) \frac{\varepsilon}{2\sigma}}{\frac{r}{K} + \frac{\varepsilon}{2\sigma}}$	Equilibrio Estable

3. **Región  $\tau > \sigma$ :** La dinámica es

$$\dot{x} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \varepsilon x.$$

Los puntos de equilibrio son mostrados en la Tabla 3.5.

TABLA 3.5: Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Noy-Meir sometido a una Política Continua en la Región con Control

Punto de Equilibrio	Autovalor	Clasificación
$x_1^{cc} = 0$	Positivo	Equilibrio Inestable
$x_2^{cc} = K(1 - \varepsilon/r)$	Negativo	Equilibrio Estable

### 3.3.5 Simulación del Comportamiento del Modelo Noy-Meir sujeto a la Política Continua de Umbral

Las simulaciones son dadas para diferentes valores de los parámetros, como son indicadas en la leyenda de la Figura 3.4.

**Observación 4** *Notar que con una política continua se resuelve el problema de oscilación de alta frecuencia. La vegetación aún estabiliza en el nivel de umbral deseado  $x_{th}$ . En la Figura 3.4 se muestra la respuesta del sistema a una política continua de umbral.*

**Observación 5** *Notar que  $x_{th}$  es seleccionado de la siguiente manera:*

$$x_{th} = \frac{x_2^{sc} + x_2^{cc}}{2},$$



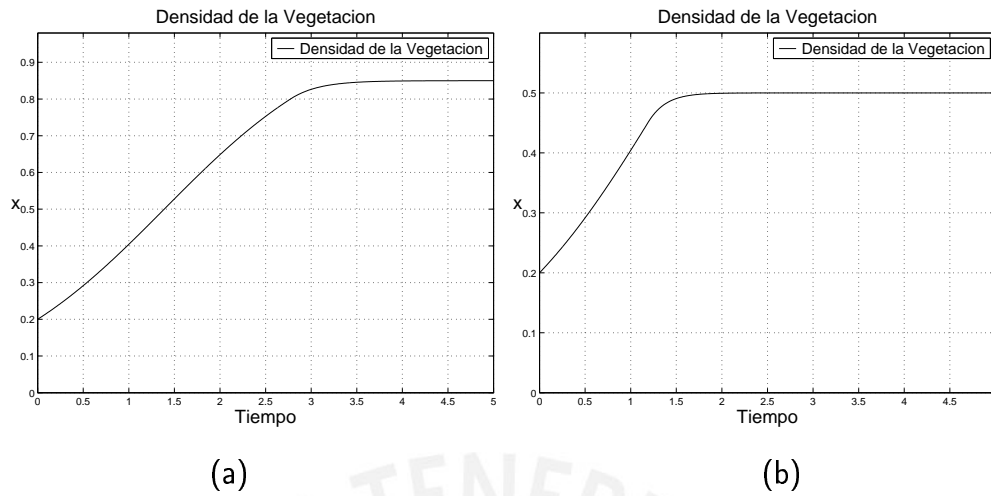


FIGURA 3.4: (a) Densidad de la vegetación  $x$  como una función del tiempo, sujeto a la política continua de umbral con  $\varepsilon = 0,3$ ,  $r = 1$ ,  $\sigma = 0,05$ ,  $x_2^{cc} = 0,7$ ,  $x_2^{sc} = K$  y  $x_{th} = 0,85$ . (b) Densidad de la vegetación  $x$  como una función del tiempo, sujeto a la política continua de umbral con  $\varepsilon = 0,833$ ,  $g = 1$ ,  $\sigma = 0,05$ ,  $x_2^{cc} = 0$ ,  $x_2^{sc} = K$  y  $x_{th} = 0,5$ .

y  $\sigma$  es escogido arbitrariamente de manera que cumpla la siguiente restricción: si  $x_{th}$  es escogido como el valor intermedio de  $x_2^{sc}$  y  $x_2^{cc}$  el valor de  $\sigma$  debe satisfacer

$$\sigma < \frac{x_2^{sc} - x_2^{cc}}{2}.$$

caso contrario,

$$\sigma = \text{mín} \{x_2^{sc} - x_{th}, x_{th} - x_2^{cc}\}.$$

### 3.4 Modelo de un Sistema de Pesca sujeto a una Política de Umbral

El modelo Collie–Spencer fue estudiado en el área de la gerencia de pesca (Collie y Spencer, 1993; Quinn y Deriso, 2000). Este modelo es definido como en (3.9) y se añade un término de pesca  $\varepsilon x$ . Por lo tanto, el modelo resultante tiene la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{c_1 x^2}{d^2 + x^2} - \varepsilon x, \tag{3.28}$$

en el cual  $x$  es la densidad poblacional de los peces y  $\varepsilon$  es la tasa de consumo de pesca (esfuerzo de control). El estudio de este modelo fue realizado para investigar los efectos de la pesca en la dinámica de la población.

## Modelo Collie–Spencer sujeto a una Política de Umbral

El modelo Collie–Spencer sujeto a la PU en el término de la pesca es mostrado a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{c_1 x^2}{d^2 + x^2} - \varepsilon x \phi(\tau), \\ u_\tau &= \varepsilon x \phi(\tau),\end{aligned}\quad (3.29)$$

siendo que  $u_\tau$  es el control a ser diseñado,  $\varepsilon$  es el esfuerzo de control y  $\phi(\tau)$  es la PU definida en (2.22) en la cual  $\tau$  es la variable que define el umbral, definido como

$$\tau := x - x_{th} \quad (3.30)$$

y  $x_{th}$  es el valor de nivel de umbral.

### 3.4.1 Análisis de los Puntos de Equilibrio

Para poder clasificar los puntos de equilibrio de cada sistema, se necesita linealizar el mismo, obteniendo

1. Sistema sin control o libre, cuando  $\tau < 0$ , i.e.  $\phi(\tau) = 0$ ,

$$A_{\tau < 0} = r - \frac{2r}{K} x - \frac{2c_1 d^2 x}{(d^2 + x^2)^2},$$

2. Sistema con control, cuando  $\tau > 0$ , i.e.  $\phi(\tau) = 1$ ,

$$A_{\tau > 0} = r - \frac{2r}{K} x - \frac{2c_1 d^2 x}{(d^2 + x^2)^2} - \varepsilon.$$

Con la linealización realizada, analizamos los puntos de equilibrio.

### 1. Sistema Libre

Cuando  $\phi(\tau) = 0$ , es decir, el sistema para el cual no es permitida la pesca, la dinámica es como se muestra a continuación:

$$\frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{c_1 x^2}{d^2 + x^2}.$$

El primer término de la ecuación representa el crecimiento de la especie, función logística  $r x (1 - x/K)$ , el segundo término representa el consumo de las presas por los predadores, cuya densidad es considerada constante. Los puntos de equilibrio del sistema son en total cuatro, dos de los cuales son imaginarios conjugados que no serán tomados en cuenta, pues sólo se consideran los puntos de equilibrio de valor real, los cuales son mostrados en la Tabla 3.6, siendo que los términos  $T_1^{free}$  y  $T_2^{free}$  son mostrados en el Apéndice A.1.

TABLA 3.6: Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Collie–Spencer sin Control

Punto de Equilibrio	Autovalor	Clasificación
$x_1^{sc} = 0$	Positivo, $g$	Equilibrio Inestable
$x_2^{sc} = \frac{1}{6} \frac{\left(T_1^{free}\right)^{\frac{1}{3}}}{r} - \frac{2}{3} T_2^{free} + \frac{1}{3} K$	Negativo	Equilibrio Estable

### 2. Sistema con Pesca

Cuando  $\phi(\tau) = 1$ , es decir, sistema para el cual está permitida la pesca, la dinámica es como se muestra a continuación:

$$\frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{c_1 x^2}{d^2 + x^2} - \varepsilon x.$$

El primer término de la ecuación representa el crecimiento de la especie, función logística  $r x (1 - x/K)$ , el segundo término representa el consumo de las presas por los predadores, cuya densidad es considerada constante, el tercer término representa la pesca, que es proporcional a la densidad poblacional de la especie. Los puntos de equilibrio del sistema con pesca son en total cuatro, dos de los cuales son imaginarios

conjugados y no serán considerados, puesto que sólo nos interesa los puntos de equilibrios con valor real, los cuales son mostrados en la Tabla 3.7, siendo los términos  $T_1^{con}$  y  $T_2^{con}$  los cuales son mostrados en el Apéndice A.2.

TABLA 3.7: Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Collie–Spencer con Control.

Punto de Equilibrio	Autovalor	Clasificación
$x_1^{cc} = 0$	Positivo	Equilibrio Inestable
$x_2^{cc} = \frac{1}{6} \frac{(T_1^{con})^{\frac{1}{3}}}{r} - \frac{2}{3} T_2^{con} + \frac{1}{3} \frac{K(-\varepsilon + r)}{r}$	Negativo	Equilibrio Estable

### 3.4.2 Diseño de la Política de Umbral

El gráfico de  $dx/dt$  sin control, es una curva convexa que intersecta el eje  $x$  en el origen y en el punto  $x_2^{sc} = x_m$ . La curva de pesca es una línea recta que pasa por el origen con una inclinación  $\varepsilon$ .

Considerase valores positivos para el esfuerzo, es decir  $\varepsilon > 0$ . En este caso el sistema libre tiene un punto de equilibrio inestable  $x_1^{sc}$  y un punto de equilibrio estable  $x_2^{sc} = x_m$ . El sistema con control tiene un punto de equilibrio inestable  $x_1^{cc} = 0$  y un punto de equilibrio estable  $x_2^{cc}$ . Con el objetivo de convertir los puntos de equilibrio  $x_2^{sc}$  y  $x_2^{cc}$  en *virtuales*, se debe de escoger el valor del umbral  $x_{th}$  en la siguiente faja de valores:

$$x_2^{cc} < x_{th} < x_2^{sc},$$

este caso es mostrado en la Figuras 3.6.(a) y 3.6.(b). El valor de  $\varepsilon$  debe de satisfacer la siguiente restricción

$$\varepsilon > \frac{f(x_{th}) - c_{end}(x_{th})}{x_{th}} = \frac{\bar{f}(x_{th})}{x_{th}}.$$

### Explicación Gráfica

Explicando gráficamente lo que sucede con la dinámica del modelo Collie–Spencer cuando se añade el término de pesca.

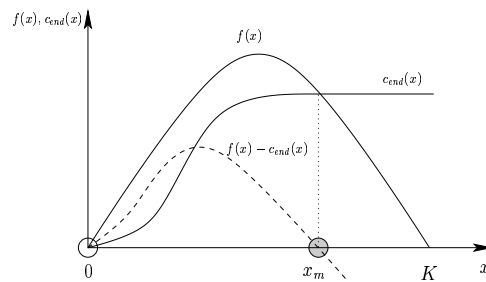


FIGURA 3.5: Dinámica del modelo Collie–Spencer sin término de pesca, es decir,  $f(x) - c_{end}(x)$ .

En la Figura 3.5 se muestra las características de las no linealidades del modelo Collie–Spencer sin el término de pesca (sistema libre). Notese que el sistema libre tiene dos puntos de equilibrio: el origen que es inestable y  $x_m = x_2^{sc}$  que es estable.

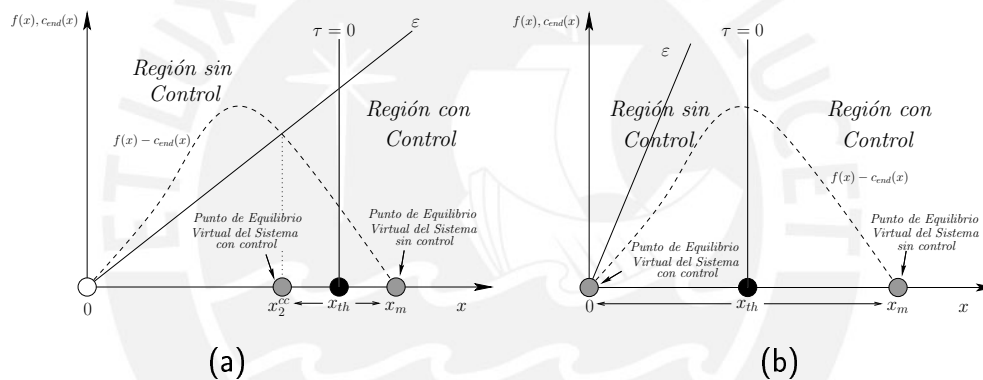


FIGURA 3.6: (a) Equilibrios con una tasa de pesca lineal con inclinación media  $\varepsilon$ ,  $x_m$  es el punto de equilibrio real estable de la dinámica sin control. (b) Equilibrio con una curva de tasa de pesca lineal con inclinación grande  $\varepsilon$ , el origen es el único punto de equilibrio real estable de la dinámica con control.

En la Figura 3.6.(a) se muestra la dinámica del modelo Collie–Spencer con el término de pesca (sistema controlado). Notese que el valor del esfuerzo de control  $\varepsilon$  tiene un valor medio. El término de pesca interseca la curva  $\bar{f}(x)$  en dos puntos, el origen que es inestable y  $x_2^{cc}$  con valor positivo y estable. Por lo tanto, para que los puntos  $x_2^{cc}$  y  $x_2^{sc} = x_m$  se conviertan en puntos de equilibrio virtuales, el valor del nivel de umbral debe satisfacer

$$x_2^{cc} < x_{th} < x_m,$$

y, con esta selección, el sistema sujeto a la PU (control conmutado) posee un equilibrio

globalmente estable,  $x_{th}$ , alcanzado por medio de un modo deslizante.

En la Figura 3.6.(b) se muestra la dinámica del modelo Collie–Spencer controlado con un otro conjunto de parámetros. Notese que el único punto de equilibrio del sistema es el origen, el cual es estable (el valor del esfuerzo de control  $\varepsilon$  tiene un valor grande). Por lo tanto, para que los puntos 0 y  $x_m$  se conviertan en puntos de equilibrio virtuales, el valor del nivel de umbral debe satisfacer:

$$0 < x_{th} < x_m,$$

y nuevamente el equilibrio  $x_{th}$  es alcanzado por medio de un modo deslizante.

**Observación 6** *El análisis gráfico, Figura 3.6, muestra claramente la principal ventaja de la PU, que proporciona una densidad de equilibrio sostenible **mayor** que aquel proporcionado por la política de pesca lineal (sin PU) con el mismo valor de esfuerzo  $\varepsilon$ , es decir  $x_{th} > x_2^{cc}$  en la Figura 3.6.(a). En el caso de sobreexplotación, Figura 3.6.(b), la ventaja de la PU resalta más, debido a que la pesca lineal (sin PU) con el valor de  $\varepsilon$  no es sostenible y provoca extinción, mientras que la PU evita la extinción, estabilizando la población en  $x_{th}$  con el mismo valor de esfuerzo  $\varepsilon$ .*

### 3.4.3 Simulación del Comportamiento del Modelo Collie–Spencer sujeto a una Política de Umbral

En la Figura 3.7 se muestra la evolución de la densidad de los peces en el tiempo, la cual resulta de la aplicación de la política de umbral para diferentes valores del nivel de umbral  $x_{th}$ .

### 3.4.4 Diseño de la Política Continua de Umbral

Considerase el siguiente modelo sujeto a la política continua de umbral  $\phi(\tau, \sigma)$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{c_1 x^2}{d^2 + x^2} - \varepsilon x \phi(\tau, \sigma), \\ u_\tau &= \varepsilon x \phi(\tau, \sigma) \end{aligned} \quad (3.31)$$

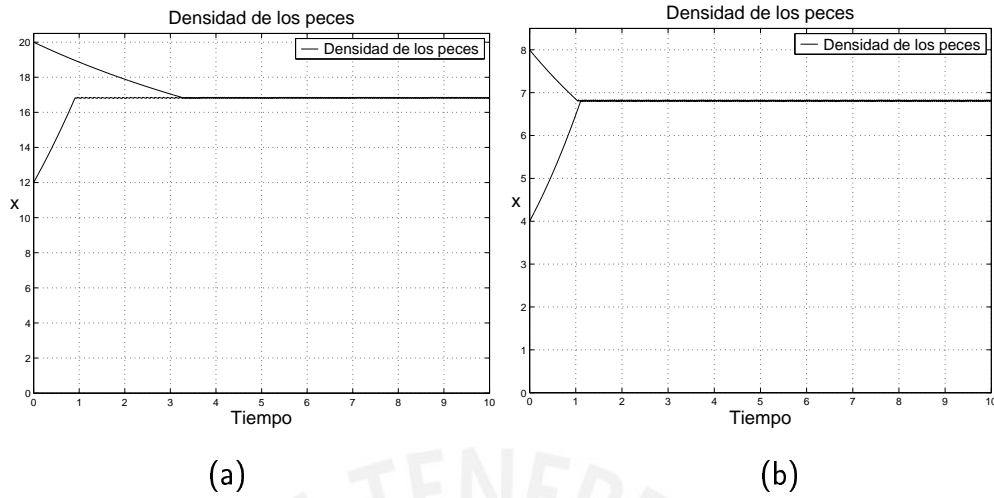


FIGURA 3.7: (a) Respuesta del modelo Collie–Spencer sujeto a la política de umbral para dos condiciones iniciales  $x_0 = 12$  y  $x_0 = 20$ . Valor del umbral  $x_{th} = 16,8$  y  $\varepsilon = 0,4$ . (b) Respuesta del modelo Collie–Spencer sujeto a la PU para dos condiciones iniciales  $x_0 = 4$  y  $x_0 = 8$ . Valor del umbral  $x_{th} = 6,8$  y  $\varepsilon = 0,6$ . Valores de los parámetros:  $r = 0,6$ ,  $K = 90$ ,  $c_1 = 4$ ,  $d = 15$ .

siendo que  $\phi(\tau, \sigma)$  es la política continua de umbral definida como en (2.23) y  $\tau$  es el umbral definido como:

$$\tau := x - x_{th},$$

y  $x_{th}$  es el valor de nivel de umbral.

Notese que, para analizar esta política será necesario considerar tres regiones. La idea del diseño es escoger  $\varepsilon$  de forma que el sistema tenga su punto de equilibrio real (y deseado) dentro de la región lineal del control,  $-\sigma \leq \tau \leq \sigma$ , y el equilibrio en las regiones restantes ( $\tau > \sigma$  y  $\tau < -\sigma$ ) sean *virtuales*. A continuación se muestra solo el análisis en la región lineal del control:

1. Región  $-\sigma \leq \tau \leq \sigma$ : La dinámica en esta región es descrita a continuación

$$\frac{dx}{dt} = r x \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{c_1 x^2}{d^2 + x^2} - \varepsilon x \phi(\tau, \sigma).$$

Los puntos de equilibrio son mostrados en la Tabla 3.8, siendo los términos  $T_1^{cc}$  y  $T_2^{cc}$ , los cuales son mostrados en el Apéndice A.3.

Se desea que el equilibrio  $x_2^{eq}$  sea igual al valor del umbral  $x_{th}$ , de esta forma se

TABLA 3.8: Clasificación de los Puntos de Equilibrio del Modelo Collie–Spencer sujeto a una Política Continua de Umbral

Punto de Equilibrio	Clasificación
$x_1^{eq} = 0$	Equilibrio Inestable
$x_2^{eq} = \frac{1}{6} \frac{(T_1^{cc})^{\frac{1}{3}}}{r} - \frac{1}{6} T_2^{cc} + \frac{1}{6} \frac{K(-\varepsilon + 2r)}{r}$	Equilibrio Estable

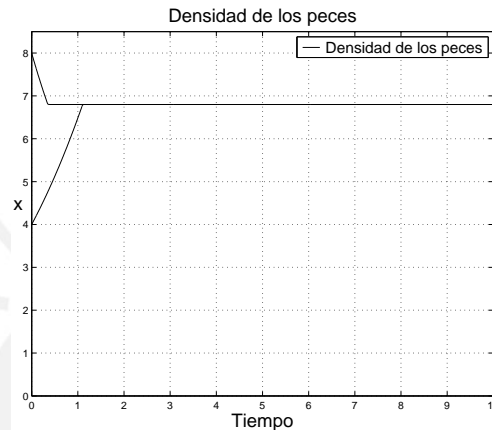


FIGURA 3.8: Respuesta del sistema sujeto a la política continua de umbral para dos condiciones iniciales  $x_0 = 4$  y  $x_0 = 8$ . Valores de los parámetros:  $r = 0,6$ ,  $K = 90$ ,  $c_1 = 4$ ,  $d = 15$ ,  $x_{th} = 6,8$ ,  $\varepsilon = 0,9088$ ,  $\sigma = 0,08$ .

puede calcular el valor de  $\varepsilon$  de la ecuación del sistema (3.31) en el cual se substituye  $x = x_{th}$ , i.e.,  $\tau = 0$ , obteniéndose

$$\varepsilon = 2r \left( 1 - \frac{x_{th}}{K} \right) - \frac{2c_1 x_{th}}{d^2 + x_{th}^2}.$$

### 3.4.5 Simulación del Comportamiento del Modelo Collie–Spencer sujeto a la Política Continua de Umbral

En la Figura 3.8 se muestra la simulación de la evolución de la densidad de los peces en el tiempo, que resulta de la aplicación de la política continua de umbral.

Con lo anterior, queda demostrado que una política de umbral puede estabilizar un sistema no lineal de una especie en una vecindad próxima al valor del nivel de umbral y que una política continua de umbral puede estabilizar un sistema no lineal de una especie sobre un nivel de umbral deseado. En el siguiente Capítulo desarrollamos el diseño de una PU



aplicada a un sistema de dos especies, la dinámica estudiada es la de vegetación–herbívoro en sistemas de pastoreo en suelo semiárido.



## Capítulo 4

# Diseño del Control Conmutado para la Dinámica Vegetación–Herbívoro en Sistemas de Pasteo en Suelo Semiárido

Los modelos de los sistemas de vegetación–herbívoro son de dos dimensiones, pues tratan de la interacción de dos especies, una especie es la presa (vegetación) y la otra es el predador (herbívoro).

Es conocido (bibliografía) que los estados alternativos de la vegetación pueden ocurrir en sistemas de pasteo. Este fenómeno es de gran importancia cuando, por ejemplo, pequeñas fluctuaciones del medio ambiente pueden conducir a un salto repentino e irreversible entre estados de la vegetación. Los modelos desarrollados para explicar los saltos repentinos e irreversibles de la vegetación en suelos semiáridos, normalmente asumen que la densidad de los herbívoros es independiente del estado de la vegetación. Esta hipótesis fue relajada y se demostró (bibliografía) que cambios irreversibles en la vegetación podrían ocurrir en sistemas donde la dinámica poblacional de los herbívoros es afectado por cambios en la vegetación.

Los estados alternativos puede ser entendidos como estados en los cuales la densidad de la vegetación es alta y el otro estado es caracterizado por suelo sin vegetación. Los

cambios en el número de herbívoros provoca que uno de estos estados desaparezca y de la consecuencia es un dramático e irreversible cambio en la densidad de la vegetación.

El objetivo de este Capítulo es mostrar que al aplicarse una política de umbral en la dinámica de la vegetación-herbívoro, los estados alternativos son evitados. Estos estados pasan a ser puntos de equilibrio virtuales, los cuales nunca podrán ser alcanzados ya que la dinámica cambia tan pronto como la trayectoria cruza el umbral especificado.

## 4.1 Modelo Vegetación–Herbívoro

Un modelo más realista de sistemas de vegetación–herbívoro fue propuesto por Van de Koppel y Rietkerk (2000). Estos autores investigaron las implicaciones de la dinámica de la población de los herbívoros con la vegetación regulada, en sistemas sensibles a la degradación del suelo, es decir, estudiaron las condiciones para las cuales los estados estables múltiples surgen como una consecuencia de la degradación del suelo.

Aquí se muestra un resumen del modelamiento realizado por Van de Koppel y Rietkerk (2000), donde la dinámica de la vegetación es representada por:

$$\frac{dx}{dt} = x f(x) - c(x) y, \quad (4.1)$$

en el cual  $x$  es la densidad de la vegetación,  $f(x)$  representa el crecimiento *per capita* de la vegetación como una función de  $x$ ,  $c(x)$  es la tasa de pasteo por los herbívoros e  $y$  es la densidad de los herbívoros. Este modelo considera el fenómeno referenciado como la degradación del suelo, dado que  $f(x)$  presenta las siguientes características: es pequeño en densidades bajas de la vegetación, es máximo en densidades intermedias de la vegetación y pequeño nuevamente en densidades altas de la vegetación (en otras palabras, convexa).

Para observar el potencial de los estados estables múltiples en relación a las condiciones del suelo y del clima, el crecimiento de la planta  $f(x)$  es explícitamente relacionado a las propiedades del sistema de pasteo en suelo semiárido. Un factor importante para el crecimiento de la vegetación es la disponibilidad de agua, así el crecimiento *per capita* de

la vegetación  $f$  puede ser expresada como una función de la disponibilidad de agua:

$$f(z) = h z - l, \quad (4.2)$$

$h$  es el coeficiente que relaciona el crecimiento de la vegetación específica con la disponibilidad del agua,  $z$  es el agua disponible en el suelo y  $l$  es la tasa de pérdida de la vegetación debido a la vejez. La disponibilidad del agua es determinada por la infiltración de la precipitación, absorbida por la vegetación, evaporación y drenaje:

$$\frac{dz}{dt} = z_{in}(x) - \mu z x - r_W z, \quad (4.3)$$

$z_{in}(x)$  es la tasa de infiltración del agua como una función de la densidad de la vegetación,  $\mu$  es un coeficiente que relaciona la tasa específica de absorción de agua por la vegetación en relación a la disponibilidad de agua y  $r_W$  es la tasa de pérdida de agua debido a la evaporación y drenaje.

La infiltración del agua es mínima cuando la vegetación está ausente, y aumenta con la densidad de la vegetación. La relación entre la infiltración del agua y la densidad de la vegetación puede ser descrita utilizando la siguiente ecuación:

$$z_{in}(x) = p \frac{x + k z_0}{x + k}, \quad (4.4)$$

$p$  representa la tasa de precipitación y es determinado por el clima,  $z_0$  es la mínima infiltración del agua en la ausencia de la vegetación y es determinada por las propiedades del suelo: las tasas de infiltración son mayores en suelo arenoso que en suelo arcilloso y  $k$  es una constante de saturación media.

Dado que la dinámica del agua en el suelo actúa en una escala de tiempo más rápida que el crecimiento de la vegetación, se asume que la disponibilidad del agua está próxima al equilibrio cuando se considera el crecimiento de las plantas:  $dz/dt = 0$ . Esta suposición permite expresar la disponibilidad del agua como una función de la densidad de la vegetación:

$$z^*(x) = p \frac{x + k z_0}{x + k} \frac{1}{\mu x + r_W}. \quad (4.5)$$

Entonces la ecuación diferencial del crecimiento de la vegetación para este sistema es:

$$\frac{dx}{dt} = (h z^*(x) - l - b y) x, \quad (4.6)$$

$b$  es un coeficiente que relaciona el consumo *per capita* con la densidad de los herbívoros.

Se asume que el consumo de los herbívoros  $c(x)$  generalmente aumenta con la densidad de la vegetación. La función más simple utilizada es una de relación lineal entre el consumo de los herbívoros y la densidad de la vegetación.

En los modelos de sistemas con dinámica poblacional de los herbívoros en la naturaleza, la tasa de cambio de la población de los herbívoros tiene que ser considerada explícitamente. En muchos modelos vegetación–herbívoro, la tasa de cambio es representada como

$$\frac{dy}{dt} = (g(x) - d) y, \quad (4.7)$$

donde  $g(x)$  representa el crecimiento *per capita* de la población de los herbívoros como una función de la densidad de la vegetación y  $d$  representa la tasa de mortalidad. Frecuentemente, pero no necesariamente,  $g(x)$  se relaciona linealmente con  $c(x)$ :  $g(x) = e c(x)$ , siendo  $e$  la eficacia de crecimiento de los herbívoros.

Para estimar el potencial de los estados estables múltiples en sistemas con dinámica de población en los herbívoros, es necesario incluir la dinámica de los herbívoros en el modelo. En su forma más simple, el crecimiento de los herbívoros es modelado por una respuesta numérica lineal:

$$\frac{dy}{dt} = (e b x - d) y, \quad (4.8)$$

siendo  $e$  el coeficiente de conversión del consumo al crecimiento y  $d$  la tasa de mortalidad natural de los herbívoros.

Por lo tanto, el modelo considerado es el siguiente:

$$\begin{cases} dx/dt = (h z^*(x) - l - b y) x \\ dy/dt = (e b x - d) y \end{cases} \quad (4.9)$$

donde  $x$  es la densidad de la vegetación,  $y$  es la densidad del herbívoro,  $h$  es el coeficiente

que relaciona el crecimiento de la vegetación específica con la disponibilidad del agua,  $l$  es la tasa de pérdida de la vegetación debido a la senectud,  $b$  es un coeficiente que relaciona el consumo *per capita* con la densidad de los herbívoros,  $e$  el coeficiente de conversión del consumo a crecimiento y  $d$  la tasa de mortalidad natural de los herbívoros. En la siguiente sección se propone una modificación apropiada del modelo (4.9), en el cual es aplicada una PU.

## 4.2 Dinámica de los Herbívoros en Sistemas de Pásteo en Suelo Semiárido sujeto a una PU

Aquí se propone una modificación del modelo (4.9), en el cual se incluye una PU, el modelo propuesto es como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} dx/dt = (hz^*(x) - l - \phi_1(\tau)) x, \\ dy/dt = (\phi_2(\tau) - d) y, \end{cases} \quad (4.10)$$

con

$$\phi_1(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau(x, y) > 0, \\ by & \text{si } \tau(x, y) < 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\phi_2(\tau) = \begin{cases} k_1 & \text{si } \tau(x, y) > 0, & k_1 \leq d & k_1 \simeq d \\ ebx & \text{si } \tau(x, y) < 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

$\tau(x, y)$  es la variable que define el umbral que crea dos estructuras en el sistema (4.10): (i) pásteo cuando  $\tau < 0$  y (ii) ausencia de pásteo cuando  $\tau > 0$ . Desde que cada estructura posee sus propios puntos de equilibrio no triviales, la localización de  $\tau$  determinará si esos puntos permanecen en su respectiva región o no *equilibrios reales* o *equilibrios virtuales*, respectivamente.

La justificación para la modificación propuesta (4.10–4.12) es la siguiente: (i) cuando  $\tau < 0$ , la dinámica del modelo propuesto es la misma que el sistema (4.9); (ii) cuando  $\tau > 0$ , el pásteo no es permitido, el consumo por los herbívoros es cero, lo cual significa que la densidad de la vegetación puede recuperarse. Por otro lado, la densidad de los

herbívoros comienza a decrecer, porque ellos no pueden pastear, pero pueden comer otros alimentos menos sabrosos y menos nutritivos, lo que conduce a la hipótesis de que la tasa de crecimiento de los herbívoros es cero o ligeramente negativa ( $k_1 \leq d$ ,  $k_1 \simeq d$ ).

## Puntos de Equilibrio del Sistema sujeto a una Política de Umbral

El sistema (4.10) sujetos a las PU (4.11) y (4.12), tiene los siguientes puntos de equilibrio:

1. Para  $\tau < 0$ , los cuatro puntos de equilibrio del sistema con pasteo son:

$$\begin{aligned} Z_1^{cc} &= (0, 0) & Z_2^{cc} &= (x_2^{cc}, 0) \\ Z_3^{cc} &= (x_3^{cc}, 0) & Z_4^{cc} &= (x_4^{cc}, y_4^{cc}) \end{aligned}$$

$$\text{con } x_4^{cc} = \frac{d}{eb}, \quad y_4^{cc} = \frac{hz^*(x_4^{cc})-l}{b}.$$

El equilibrio  $Z_1^{cc}$  es un punto localmente estable, los equilibrios  $Z_2^{cc}$ ,  $Z_3^{cc}$  son puntos sillas y el equilibrio  $Z_4^{cc}$  es un foco estable. El equilibrio  $Z_1^{cc}$  puede ser interpretado como la extinción del sistema para ciertas condiciones iniciales (colapso del sistema), vea Figura 4.1.(a).

2. Para  $\tau > 0$ , los tres puntos de equilibrio del sistema sin pasteo son:

$$\begin{aligned} Z_1^{sc} &= (0, 0) & Z_2^{sc} &= (x_2^{sc}, 0) \\ Z_3^{sc} &= (x_3^{sc}, 0) \end{aligned}$$

siendo que  $\{x_2^{cc}, x_3^{cc}\}$  y  $\{x_2^{sc}, x_3^{sc}\}$  son las raíces de

$$-l\mu x^2 + (hp - lr_W - lk\mu)x + hpkW_0 - lkr_W = 0.$$

El punto equilibrio  $Z_1^{sc}$  es localmente estable,  $Z_2^{sc}$  es un punto de equilibrio silla y el punto de equilibrio  $Z_3^{sc}$  es un nodo estable. El punto de equilibrio  $Z_1^{sc}$  puede ser entendido como la extinción del sistema (colapso del sistema) y el punto de equilibrio  $Z_3^{sc}$  como la extinción del herbívoro (colapso del herbívoro), vea Figura 4.1.(b).

**Observación 7** El comportamiento del sistema (4.10): (i) cuando  $\tau(V, H) < 0$ , Figura 4.1.(a), existen condiciones iniciales para las cuales el sistema tiende a la extinción  $Z_1^{cc}$

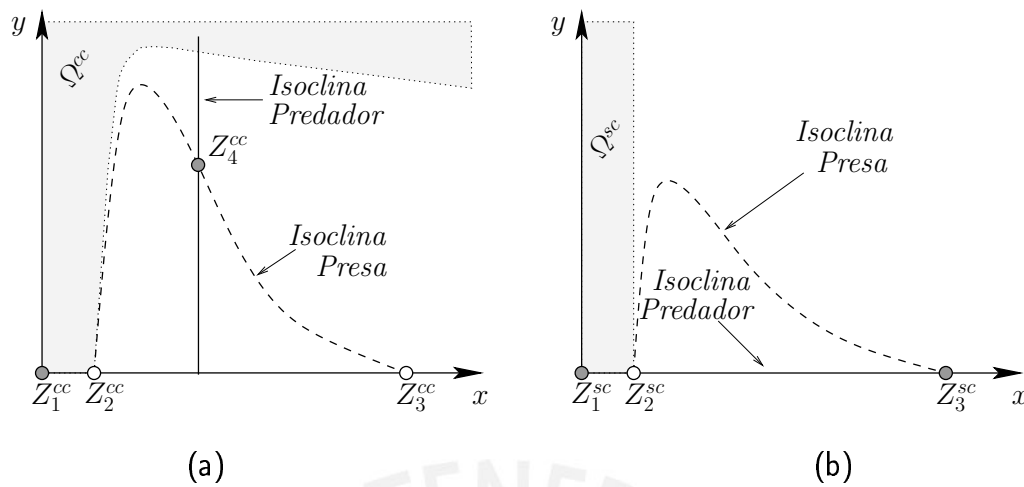


FIGURA 4.1: Comportamiento de cada una de las estructuras del sistema 4.10): (a) Cuando  $\tau(V, H) < 0$ , los puntos de equilibrio son  $Z_1^c = (0, 0)$ ,  $Z_2^{cc} = (0, 0,63, 0)$ ,  $Z_3^{cc} = (39,93, 0)$  y  $Z_4^{cc} = (15, 9,312)$ . La región gris  $\Omega^{cc}$  es el dominio de atracción de  $Z_1^c$ . (b) Cuando  $\tau(V, H) > 0$ , los equilibrios son  $Z_1^{sc} = (0, 0)$ ,  $Z_2^{sc} = (0,063, 0)$  y  $Z_3^{sc} = (39,93, 0)$ . La región gris  $\Omega^{sc}$  es el dominio de atracción de  $Z_1^{sc}$ . Los valores de los parámetros son escogidos como en Koppel y Rietkerk (2000), i.e.,  $p = 10$ ,  $W_0 = 0,09$ ,  $k = 5$ ,  $\mu = 0,02$ ,  $r_W = 0,1$ ,  $h = 0,01$ ,  $l = 0,1$ ,  $b = 0,01$ ,  $e = 0,2$ ,  $d = 0,03$  y  $k_1 = 0,0275$ . Los círculos sólidos grises representan equilibrios estables, mientras que los círculos abiertos representan equilibrios inestables.

(colapso del sistema), como también existen condiciones iniciales para las cuales el sistema estabiliza en el equilibrio  $Z_4^{cc}$ , es decir, el sistema es sensible a la degradación del suelo; (ii) cuando  $\tau(V, H) > 0$ , Figura 4.1.(b), existen condiciones iniciales para las cuales el sistema va para extinción  $Z_1^{sc}$  (colapso del sistema) y los herbívoros tienden a la extinción,  $Z_3^{sc}$  (colapso de los herbívoros). Para esta estructura, la vegetación se puede recuperar.

En vista que el origen es un punto de equilibrio localmente estable para ambas estructuras y  $Z_3^{sc}$  es un punto de equilibrio estable, el colapso del sistema o de los herbívoros es inevitable a menos que sean protegidos mediante una política. Para esto, es necesario que las condiciones iniciales de la vegetación  $x(0)$  sea mayor que  $x_2^{sc}$ , es decir se exige que exista un nivel mínimo de vegetación, de manera que el sistema o los herbívoros no colapse.

### 4.3 Diferentes Tipos de Umbral

Se muestra tres tipos específicos de  $\tau$ , de fácil implementación, como también los efectos de estos umbrales en la dinámica del sistema (4.10):



Umbral Horizontal o del Herbívoro:	$\tau = y - y_{th}$	si $0 < y_{th} < y_4^{cc}$
Umbral Vertical o de la Vegetación	$\tau = x - x_{th}$	si $x_4^{cc} < x_{th} < x_3^{sc}$
Umbral Inclinado:	$\tau = y - mx + b$ .	si $Z_1^{cc}, Z_3^{sc}$ y $Z_4^{cc}$ conservan su naturaleza.

En todos los casos los equilibrios estables deben ser virtuales cuando la PU es aplicada al sistema.

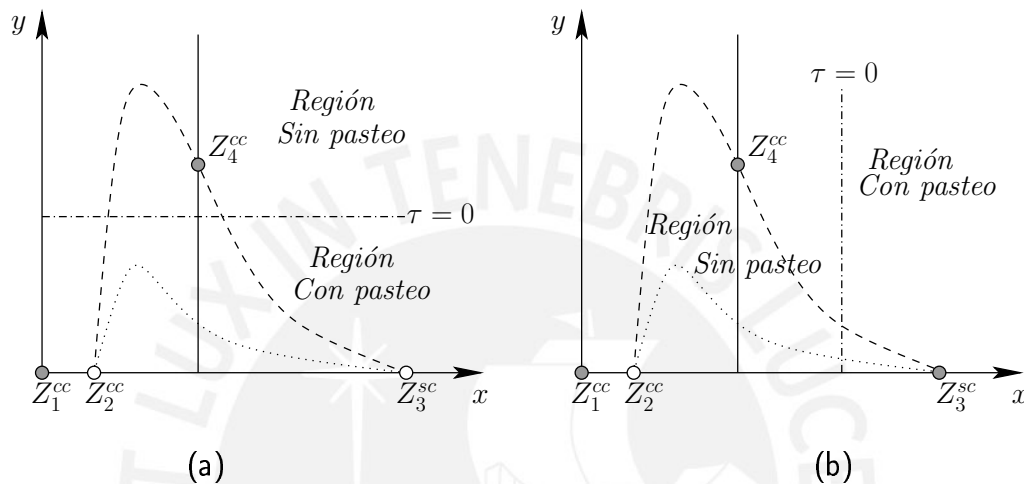


FIGURA 4.2: (a) Representación gráfica de los puntos de equilibrio y la política de umbral del herbívoro en el plano de fase  $x \times y$  (umbral horizontal). (b) Representación gráfica de los puntos de equilibrio y la PU de la vegetación en el plano de fase  $x \times y$  (umbral vertical). Las líneas sólidas representan la isóclina de los herbívoros del sistema con pasteo, la línea trazada representa la isóclina de la vegetación del sistema con pasteo, la línea punteada representa la isoclina de la vegetación del sistema sin pasteo. El origen es un equilibrio localmente estable.  $Z_4^{cc}$  y  $Z_3^{sc}$  son puntos de equilibrio virtuales y estables. La línea trazada-punteada representa el umbral  $\tau = 0$ .

### 4.3.1 Umbral del Herbívoro

Este tipo de umbral es definido por un valor crítico del herbívoro ( $y_{th}$ ) de manera que la política es descrita geoméricamente como una línea horizontal en el plano de fase  $x \times y$  (vegetación–herbívoro). Esto puede ser interpretado como: cuando el número de herbívoros supera  $y_{th}$  el pasteo es prohibido, y cuando el número de herbívoros es menor que  $y_{th}$  el pasteo es reiniciado. La representación gráfica de la PU junto con los puntos de equilibrio de cada estructura es mostrada en la Figura 4.2.(a). Simulaciones de la dinámica sujeta a una PU del herbívoro son mostradas en la Figura 4.3.

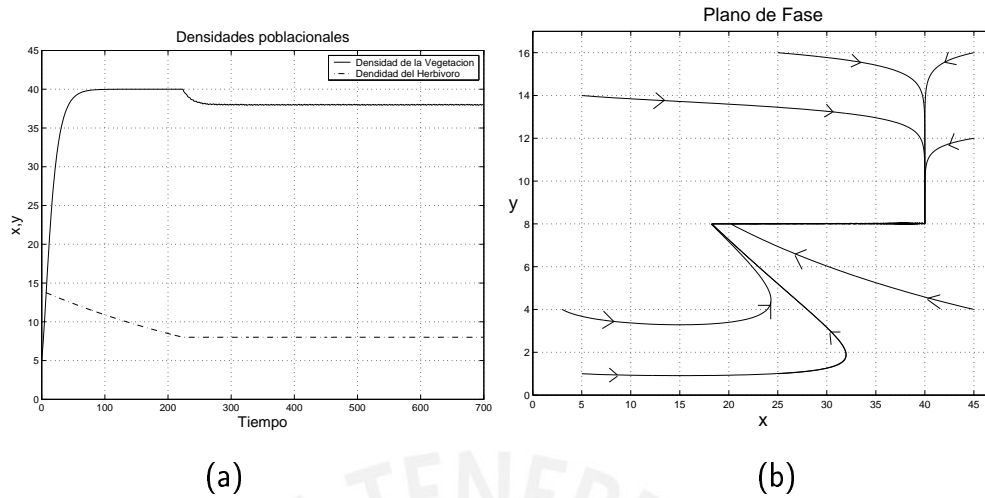


FIGURA 4.3: Simulación de la PU del herbívoro. (a) La evolución en el tiempo de  $x(t)$ ,  $y(t)$ . (b) El plano de fase del sistema. Note que la estabilización es por medio de un modo deslizante alrededor del valor del nivel de umbral  $y_{th} = 8$ . Los valores de los parámetros son  $p = 10$ ,  $W_0 = 0,1$ ,  $k = 5$ ,  $\mu = 0,02$ ,  $r_W = 0,1$ ,  $h = 0,01$ ,  $l = 0,1$ ,  $b = 0,01$ ,  $e = 0,2$ ,  $d = 0,03$ ,  $k_1 = 0,0275$ .

**Observación 8** El diseño de la PU (es decir, la elección del valor del nivel de umbral del herbívoro  $y_{th}$ ) es determinado por la localización de los puntos de equilibrio estables como puntos de equilibrio virtuales en relación a la línea horizontal  $\tau = y - y_{th} = 0$ . En este caso el origen se mantiene como un punto de equilibrio localmente estable. Por lo tanto, existen condiciones iniciales para las cuales el sistema se encuentra en peligro de ser extinto.

### 4.3.2 Umbral de la Vegetación

El umbral es definido para un valor crítico de la vegetación  $x_{th}$  de manera que la política es descrita geoméricamente como una línea vertical en el plano de fase  $x \times y$  (vegetación–herbívoro). La interpretación de esta política es: cuando la vegetación está abajo del nivel crítico  $x_{th}$  el pasteo es suspendido y cuando la vegetación está arriba del nivel crítico el pasteo es reiniciado. La representación gráfica de la PU junto con los puntos de equilibrio de cada estructura es mostrado en la Figura 4.2.(b).

El diseño de la PU (es decir, la elección del nivel crítico de la vegetación  $x_{th}$ ) es determinado por la localización de los puntos de equilibrio estables como puntos de equilibrio virtuales en relación a la línea vertical  $\tau = x - x_{th} = 0$ . La dinámica resultando es un

modo deslizante sobre el nivel crítico de la vegetación  $x_{th}$ , como es mostrado en la Figura 4.4. Este diseño garantiza la estabilización del sistema (4.10–4.12) alrededor de un valor predeterminado de la vegetación. Nuevamente, dado que los puntos de equilibrio estables son virtuales, el valor asignado a  $x_{th}$  debe estar entre los valores de  $x_4^{cc}$  y  $x_3^{sc}$ .

**Observación 9** *Notese que la faja de posibles valores para elegir el valor de umbral es el intervalo entre  $x_4^{cc}$  y  $x_3^{sc}$  ( $x_{th} \in [x_4^{cc}, x_3^{sc}]$ ), el cual puede ser interpretado como un margen de error permitido para el posicionamiento del umbral o en la medición de la vegetación. Esto confiere la propiedad deseable de robustez (a estas incertidumbres) de la PU.*

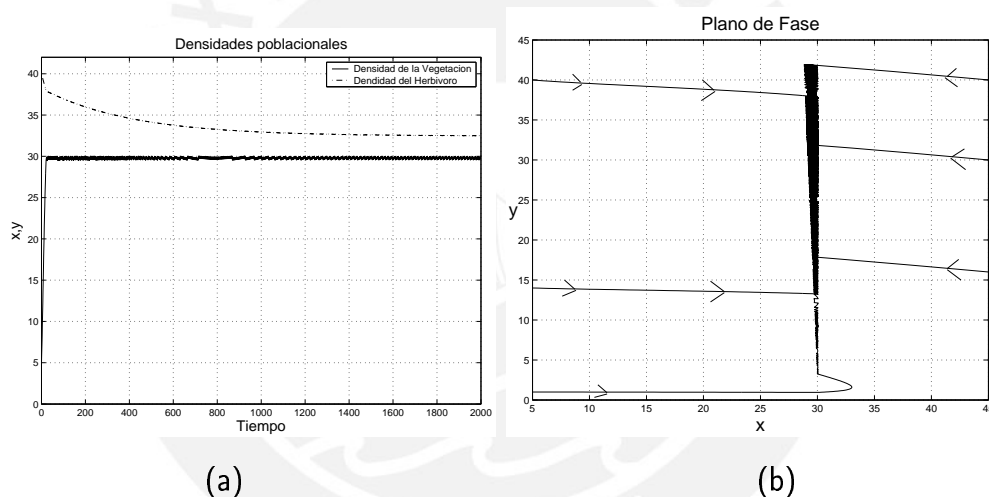


FIGURA 4.4: Simulación de la PU de la vegetación. (a) La evolución en el tiempo de  $x(t)$ ,  $y(t)$ . (b) El plano de fase del sistema. Note que la estabilización es por medio de un modo deslizante alrededor del valor del nivel de umbral  $x_{th} = 30$ . Los valores de los parámetros son como en la Figura 4.3.

### 4.3.3 Umbral Inclinado

En este caso el umbral es definido como una suma ponderada de las densidades de la vegetación y de los herbívoros, esto matemáticamente puede ser expresado como:

$$\tau = y - mx + b$$

el cual es una línea recta con inclinación positiva ( $m > 0$ ) en el plano de fase  $x \times y$  (vegetación–herbívoro). El procedimiento para determinar la inclinación de la línea se fundamenta en la creación de puntos de equilibrios virtuales sucesivos. Se debe resaltar que en este ejemplo la aplicación de la política depende del monitoreo de ambas densidades, del herbívoro y de la vegetación. Si el umbral del herbívoro o de la vegetación fuese utilizado, entonces solamente una de las especies necesita ser monitoreada. Simulaciones de la PU inclinada son mostradas en la Figura 4.5.

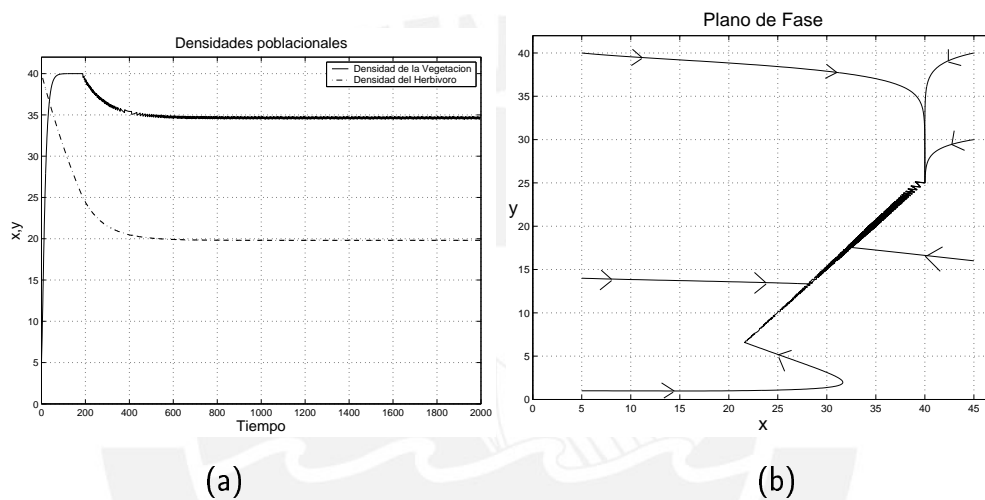


FIGURA 4.5: Simulación de la PU inclinada. (a) La evolución en el tiempo de  $x(t)$ ,  $y(t)$ . (b) El plano de fase del sistema. Notese que la estabilización es por medio de un modo deslizando alrededor del umbral. Los valores de los parámetros son como los utilizados en la Figura 4.3.

## 4.4 Análisis: Umbral de la Vegetación

### 4.4.1 Calculo de la Dinámica sobre el Umbral de la Vegetación

Considerase el sistema (4.10), para poder calcular la dinámica sobre el umbral  $\tau = x - x_{th}$ , se utiliza la siguiente relación, obtenida de Utkin (1992)

$$\dot{z} = \frac{S_{\tau} f^{\tau < 0}}{S_{\tau} (f^{\tau < 0} - f^{\tau > 0})} - \frac{S_{\tau} f^{\tau > 0}}{S_{\tau} (f^{\tau < 0} - f^{\tau > 0})} \quad (4.13)$$

donde  $S\tau$  es el gradiente del umbral,  $z = [x \ y]^T$ ,  $f^{\tau < 0}$  es la dinámica del sistema cuando  $\tau < 0$  y  $f^{\tau > 0}$  es la dinámica del sistema cuando  $\tau > 0$ , substituyendo las dinámicas se obtiene la siguiente ecuación para la dinámica del sistema sobre el umbral

$$\begin{cases} dx/dt = 0 \\ dy/dt = \left(-hp \frac{x+kz_0}{x+k} \frac{1}{\mu x+rW} - l - by\right) \frac{k_1-d}{b} + \left(hp \frac{x+kz_0}{x+k} \frac{1}{\mu x+rW} - l\right) \frac{ebx-d}{b} \end{cases} \quad (4.14)$$

en el caso del umbral de la vegetación, la dinámica del sistema sobre el umbral,  $\tau = x - x_{th}$ , depende únicamente de la densidad del herbívoro como se muestra en la ecuación (4.14). La solución de la ecuación (4.14) para el estado estacionario, para los valores de los parámetros de la Figura 4.3, es:

$$y^{eq} = -\frac{2x_{th}(2200 - 215x_{th} + 4x_{th}^2)}{(x_{th} + 5)^2},$$

esta ecuación muestra el conjunto de posibles valores de umbral  $x_{th}$ , para los cuales  $y^{eq}$  es positivo, ver Figura 4.6, que pueden ser considerados para que el sistema establezca. Calcúlese el valor de  $x_{th}$  que maximice  $y^{eq}$ , es decir,

$$x_{th}^{m\acute{a}x} = 24,63$$

y el nivel máximo de la densidad del herbívoro es

$$y_{m\acute{a}x}^{eq} = 37,53.$$

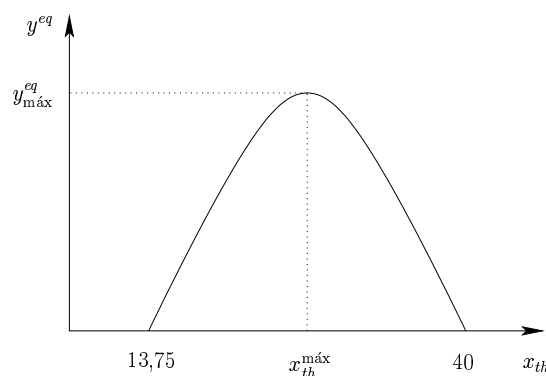


FIGURA 4.6: Curva de posibles puntos de equilibrio del sistema  $(x_{th}, y^{eq})$ , cuando está sometido a una política de umbral de la vegetación.

#### 4.4.2 Conclusión

El control propuesto (PU) estabiliza los sistemas estudiados sobre el nivel de umbral deseado, siempre que los puntos de equilibrio estables de cada una de las estructuras sean mantenidas como equilibrios virtuales; por ello los sistemas estabilizan sobre el nivel de umbral, a través de un modo deslizante. En este sentido observamos dos etapas (fases) en las trayectorias del sistema: i) Etapa de alcance (modo no deslizante), las trayectorias comienzan en cualquier condición inicial y se mueven en la dirección de la superficie de conmutación (umbral) y alcanza la superficie en tiempo finito; ii) Etapa de deslizamiento (modo deslizante), en la cual las trayectorias tienden asintóticamente al equilibrio de deslizamiento. El modo deslizante es una trayectoria que no es inherente a ninguna de las dos estructuras (Utkin, 1977, 1978; DeCarlo et al., 1988; Utkin, 1992; Edwards y Spurgeon, 1998).

Es pertinente remarcar que el origen en el sistema vegetación–herbívoro es localmente estable para ambas estructuras (con y sin control). Por este motivo, existen condiciones iniciales para las cuales el sistema se extingue, vea la Figura 4.1. La ventaja observada de la PU, es que la región de atracción del origen ( $\Omega^{cc}$ ) del sistema sin PU, es reducida con la aplicación de la PU a una región de atracción del origen menor ( $\Omega^{sc}$ ). La PU consigue estabilizar el sistema vegetación–herbívoro sobre el nivel de umbral; por lo tanto se puede conjeturar que la productividad y la rentabilidad pueden ser maximizadas para una elección adecuada del umbral.

El modelo original, ecuación (4.9), tiene dos puntos de equilibrio, siendo uno de estos el origen y el otro el punto (15, 9,375).

Con la modificación propuesta, la ecuación (4.10), y aplicando un umbral en la vegetación, se obtiene el equilibrio ( $x_{th}, y^{eq}$ ). Además si la productividad del sistema es expresada en función de la densidad de los herbívoros, entonces, se puede deducir que, la densidad  $y^{eq}$  puede ser máxima para un determinado valor de umbral  $x_{th}$ .

Por lo tanto, el modelo propuesto (con PU) tendrá una productividad mayor que en el caso original.

Una vez descrito el diseño de la PU en un sistema de dinámica vegetación–herbívoro, desarrollamos un análisis económico de la PU en un sistema de una especie, para facilitar los cálculos matemáticos.

## Capítulo 5

# Comparación de la Productividad y Rentabilidad Sostenible para Modelos de Una Especie

### 5.1 Modelo sometido a una Política de Tasa de Pesca Constante

Considerase un modelo unidimensional (de consumo por pesca) con una función logística de crecimiento,  $\bar{f}(x) = r x (1 - x/K)$ , se supone, por ejemplo, que la captura de los peces por unidad de esfuerzo es proporcional al nivel existente de peces  $x$ , en esta sección **no** se está incluyendo la PU. Entonces el modelo tiene la siguiente forma

$$\frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - q \varepsilon x. \quad (5.1)$$

Este modelo también fue estudiado en Clark (1976), Clark (1985), Kot (2001) y Wang y Wang (2004), en el contexto de la gerencia de la pesca, con el objetivo de obtener una *Productividad sostenible*. La tasa de pesca es el producto de tres factores:  $\varepsilon$  es el esfuerzo de pesca,  $q$  es la constante proporcional que mide la captura y  $x$  es el nivel existente de peces. El producto de la constante proporcional que mide la captura y el esfuerzo de pesca,  $q\varepsilon$ , es denominado *mortalidad de la pesca*, tiene la misma dimensión que  $r$  y desempeña

un papel importante. Para simplificar los cálculos se normaliza  $q = 1$  y la mortalidad de la pesca será denotada como  $\varepsilon$ , expresada, en términos ya conocidos. Cuando la tasa de crecimiento de la población de peces es igual a la tasa de pesca, los puntos de equilibrio del sistema (5.1) son:

$$x_1^{eq} = 0, \quad x_2^{eq} = \frac{K}{r} (r - \varepsilon).$$

El primer punto de equilibrio,  $x_1^{eq}$ , es inestable y en términos ecológicos este equilibrio representaría la extinción del nivel existente de peces. El segundo punto de equilibrio,  $x_2^{eq}$ , es estable (vea Figura 5.1.(a)). En la bibliografía se utiliza el concepto de **Productividad sostenible** dado en Clark (1976), citetClark85 y Kot (2001), tomando como referencia el punto de equilibrio estable  $x_2^{eq}$ , la productividad sostenible<sup>1</sup> del sistema (5.1) es definida como

$$Y_{sin-PU} = \varepsilon x_2^{cc} = \frac{K}{r} (r - \varepsilon) \varepsilon. \quad (5.2)$$

Observase claramente, que si  $\varepsilon > r$ , conocido como exceso de pesca, entonces la curva de remoción y la curva logística se intersectan solamente en el origen, correspondiendo a la extinción (vea Figura 5.1.(b)). Así es necesario que  $\varepsilon$  sea menor que  $r$  para que el sistema tenga un equilibrio no nulo, que en el gráfico está entre 0 y  $K$ , precisamente en  $x_2^{eq} = (1 - \frac{\varepsilon}{r})K$  (vea Figura 5.1.(a)).

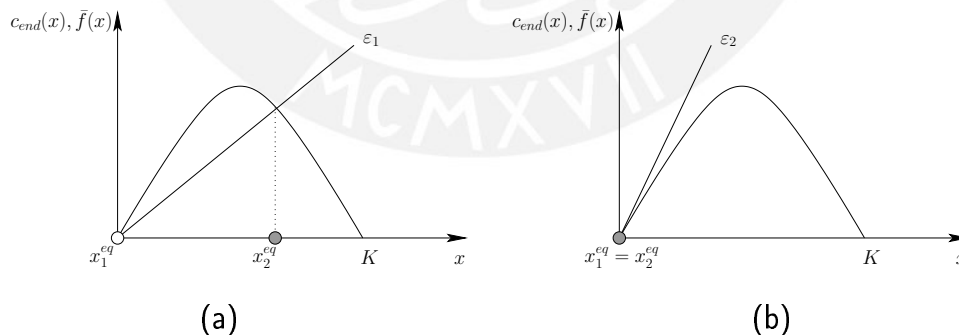


FIGURA 5.1: (a) Equilibrio con una curva de tasa de consumo lineal con inclinación intermedia ( $\varepsilon_1 < r$ ). Puntos de equilibrio del sistema -  $x_2^{eq}$ ,  $x_1^{eq} = 0$ . Valores de los parámetros:  $r = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 0,3$ ,  $K = 1$ . (b) Equilibrio con una curva de tasa de consumo lineal con inclinación grande ( $\varepsilon_2 > r$ ). Puntos de equilibrio del sistema -  $x_2^{eq} = x_1^{eq} = 0$ . Valores de los parámetros:  $r = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 1,2$ ,  $K = 1$ .

<sup>1</sup>La notación  $Y_{sin-PU}$  significa productividad sostenible sin PU



## 5.2 Modelo sometido a una Política de Umbral

Ahora, considerase una población de peces con crecimiento logístico y que está siendo pescado a una unidad de esfuerzo que es proporcional al nivel existente de la densidad  $x$  y con una PU  $\phi(\tau)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \varepsilon x \phi(\tau), \\ u_\tau &= \varepsilon x \phi(\tau) \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde  $\varepsilon$  es la mortalidad de la pesca cuando una PU (2.22) es aplicada,  $\tau$  es la variable que define el umbral definido como

$$\tau := x - x_{th},$$

donde  $x_{th}$  es el valor de nivel de umbral de la especie, escogido como el equilibrio deseado, descrito arriba.

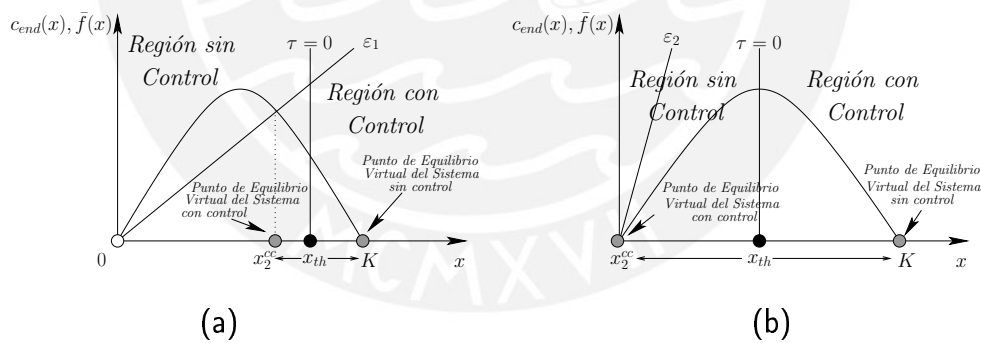


FIGURA 5.2: Puntos de equilibrio del sistema sin pastoreo –  $x_1^{sc} = 0$ ,  $x_2^{sc}$ . Puntos de equilibrio del sistema con pastoreo –  $x_1^{cc} = 0$ ,  $x_2^{cc}$ . (a) Equilibrio con una curva de tasa de consumo lineal con inclinación intermedia ( $\varepsilon_1 < r$ ).  $x_2^{cc} = (1 - \varepsilon/r)K$ . Valores de los parámetros:  $r = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 0,3$ ,  $x_{th} = 0,85$ ,  $K = 1$ . (b) Equilibrio con una curva de tasa de consumo lineal con inclinación grande ( $\varepsilon_2 > r$ ).  $x_2^{cc} = 0$ . Valores de los parámetros:  $r = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 1,2$ ,  $x_{th} = 0,5$ ,  $K = 1$ .

Como la PU es discontinua, para calcular la productividad sostenible del sistema (5.3) y compararlo con la productividad sostenible (5.2), es necesario calcular el valor promedio de  $u_\tau$ . El valor promedio considerado es calculado utilizando el concepto de control equivalente

(ver Capítulo 2)

$$u_{\tau eq} = \frac{r}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{x_{th}}{K} \right) \quad (5.4)$$

de modo que la productividad promedio sostenible<sup>2</sup> en el equilibrio  $x_{th}$  es:

$$Y_{PU} = \varepsilon x_{th} u_{\tau eq} = r \left( 1 - \frac{x_{th}}{K} \right) x_{th}. \quad (5.5)$$

## Conclusión

Cuando el sistema (5.1) es sometido a una pesca con una mortalidad de la pesca  $\varepsilon > r$ , sucede el llamado exceso de pesca (sobreexplotación), lo cual se convierte en una catástrofe pues el nivel existente de peces tiende a cero y la productividad sostenible del sistema (5.1) llega a ser

$$Y_{sin-PU} = 0.$$

Ahora, cuando el mismo sistema (5.3) es sometido a una PU con  $\bar{\varepsilon} > r$ , esta situación correspondería al exceso de pesca si es aplicado continuamente. Por otra parte, fue demostrado que el sistema (5.3) estabiliza en  $x_{th} > 0$ . Por lo tanto, la ecuación de la productividad promedio sostenible del sistema (5.3) es

$$Y_{PU} = g \left( 1 - \frac{x_{th}}{K} \right) x_{th}.$$

**Observación 10** *Esto muestra claramente la ventaja de la PU en una situación de sobreexplotación o exceso de pesca, pues es posible estabilizar sin provocar extinción y mantener el nivel de productividad promedio.*

**Observación 11** *La productividad promedio sostenible,  $Y_{PU}$  del sistema (5.3), en el equilibrio de deslizamiento  $x_{th}$ , expresada por la ecuación (5.5), puede ser maximizada cuando  $x_{th} = K/2$ ,  $Y_{PU}^{m\acute{a}x} = r K/4$ . Por lo tanto, se obtiene el mismo valor de productividad sostenible máxima,  $Y_{sin-PU}^{m\acute{a}x} = r K/4$  que en el caso de la política de tasa de pesca constante estudiada en Clark (1976), Clark (1985) y Kot (2001).*

<sup>2</sup>Denotada como  $Y_{PU}$ , significa productividad promedio sostenible del sistema sometido a una PU

## 5.3 Modelo Económico de un Sistema de Una Especie

### 5.3.1 Pesca de Acceso Abierto con Política de Tasa Constante

En la teoría de pesca de acceso abierto se predice que el equilibrio en el cual la rentabilidad económica desaparece cuando el esfuerzo se amplía a un nivel  $\varepsilon_\infty$ , en el cual la rentabilidad y el costo de oportunidad son exactamente iguales. Considerase el modelo de crecimiento logístico con un término de remoción lineal, por simplicidad, como se muestra a continuación:

$$\dot{x} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \varepsilon x \quad (5.6)$$

$$SR_{sin-PU} = TR_{sin-PU} - TC_{sin-PU} = p Y_{sin-PU}(\varepsilon) - c \varepsilon \quad (5.7)$$

donde la variable  $x$  denota la biomasa poblacional de los peces,  $r$  y  $K$  son constantes positivas referenciadas como la tasa de crecimiento intrínseca y la capacidad de carga del medio ambiente, respectivamente y  $\varepsilon$  denota la mortalidad de pesca,  $TR_{sin-TP}$  representa el beneficio económico sostenible del sistema sin PU resultando del esfuerzo  $\varepsilon$ ,  $p$  es el precio considerado fijo,  $TC_{sin-PU}$  representa el costo total sin PU donde  $c$  es el costo, considerado fijo, por unidad de esfuerzo. La diferencia entre  $TR_{sin-TP}$  y  $TC_{sin-PU}$  es denominada la rentabilidad económica sostenible y es denotada como  $SR_{sin-PU}$ . La productividad sostenible sin PU del sistema (5.6–5.7) tiene la siguiente forma:

$$Y_{sin-PU}(\varepsilon) = K \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right). \quad (5.8)$$

**Observación 12** Si  $\varepsilon > r$  entonces ocurre una sobreexplotación, el sistema va para extinción y la productividad sostenible llega a ser cero,  $Y_{sin-PU} = 0$ .

Ecuaciones (5.6) y (5.7) pueden ser resueltas con facilidad para el nivel de equilibrio de esfuerzo  $\varepsilon = \varepsilon_\infty$ :

$$\varepsilon_\infty = r \left(1 - \frac{c}{pK}\right) \quad (5.9)$$

para el correspondiente nivel poblacional  $x = x_\infty$ :

$$x_\infty = \frac{c}{p}. \quad (5.10)$$

Con el propósito de expresar  $SR_{sin-PU}$  como una función del esfuerzo de pesca  $\varepsilon$ , se substituye la ecuación (5.8) en (5.7), obteniéndose

$$SR_{sin-PU} = \varepsilon \left( K p \left( 1 - \frac{\varepsilon}{r} \right) - c \right) \quad (5.11)$$

y el valor de  $\varepsilon$  que maximiza  $SR_{sin-PU}$  es

$$\varepsilon^{\text{máx}} = \frac{r}{2} \left( 1 - \frac{c}{pK} \right) = \frac{\varepsilon_\infty}{2}. \quad (5.12)$$

Por lo tanto el valor máximo de  $SR_{sin-PU}$  es

$$SR_{sin-PU}^{\text{máx}} = \frac{r p K}{4} \left( 1 - \frac{c}{pK} \right)^2. \quad (5.13)$$

Ahora considerase el mismo sistema, pero en esta ocasión, sujeto a una PU.

### 5.3.2 Pesca de Acceso Abierto con Política de Umbral

El modelo es como se muestra a continuación

$$\dot{x} = r x \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \varepsilon x \phi(\tau) \quad (5.14)$$

$$u_\tau = \varepsilon x \phi(\tau) \quad (5.15)$$

$$\tau = x - x_{th} \quad (5.16)$$

$$SR_{PU} = TR_{PU} - TC_{PU} = pY_{PU} - c u_{PU} \quad (5.17)$$

donde  $\tau$  es el umbral y  $x_{th}$  es el valor de nivel de umbral. Dado que PU es discontinua y para calcular la productividad sostenible del sistema (5.14–5.17), se necesita calcular la productividad promedio sostenible,  $Y_{PU}$ , en el equilibrio  $x_{th}$ , para esto se utiliza el concepto de control equivalente  $u_{\tau eq}$  (Capítulo 2), se obtiene la siguiente expresión del control

equivalente

$$u_{\tau eq} = \frac{r}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{x_{th}}{K} \right),$$

la productividad promedio sostenible tiene la siguiente forma

$$Y_{PU} = \varepsilon x_{th} u_{\tau eq} = r x_{th} \left( 1 - \frac{x_{th}}{K} \right), \quad (5.18)$$

el beneficio promedio sostenible  $TR_{PU}$  es

$$TR_{PU} = p Y_{PU} = p x_{th} u_{\tau eq} = p r x_{th} \left( 1 - \frac{x_{th}}{K} \right),$$

y el costo promedio total  $TC_{PU}$  es como sigue

$$TC_{PU} = c u_{\tau eq} = c r \left( 1 - \frac{x_{th}}{K} \right).$$

Entonces, la rentabilidad promedio económica sostenible es

$$SR_{PU} = TR_{PU} - TC_{PU} = \frac{r p}{K} (K - x_{th}) \left( x_{th} - \frac{c}{p} \right) \quad (5.19)$$

el valor que maximiza  $SR_{PU}$  es

$$x_{th}^{\max} = \frac{1}{2} \left( K + \frac{c}{p} \right) \quad (5.20)$$

y el valor máximo de  $SR_{PU}$  se halla

$$SR_{PU}^{\max} = \frac{r p K}{4} \left( 1 - \frac{c}{p K} \right)^2. \quad (5.21)$$

## 5.4 Comparación por simulación

En la Figura 5.3 mostramos el diagrama de bloques del modelo de Pesca de Acceso Abierto sometido a una Política de Tasa de Pesca Constante, ecuación (5.6-5.7), elaborado en *Simulink* del Matlab.

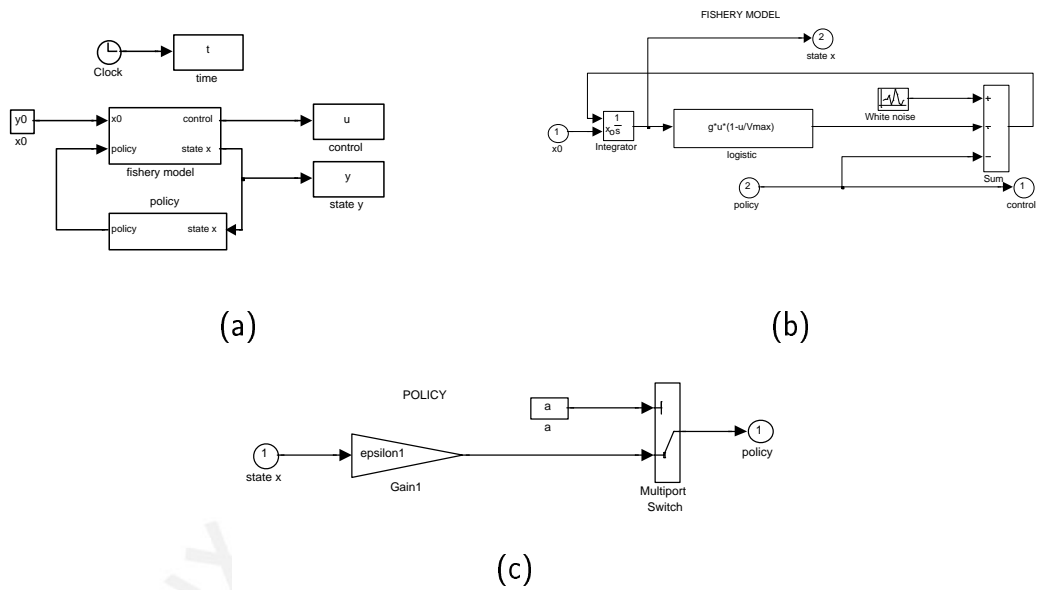


FIGURA 5.3: (a) Diagrama de bloques del modelo (5.6-5.7). (b) Diagrama de bloques de la dinámica del modelo. (c) Diagrama de bloques de la Política de Tasa de Pesca Constante.

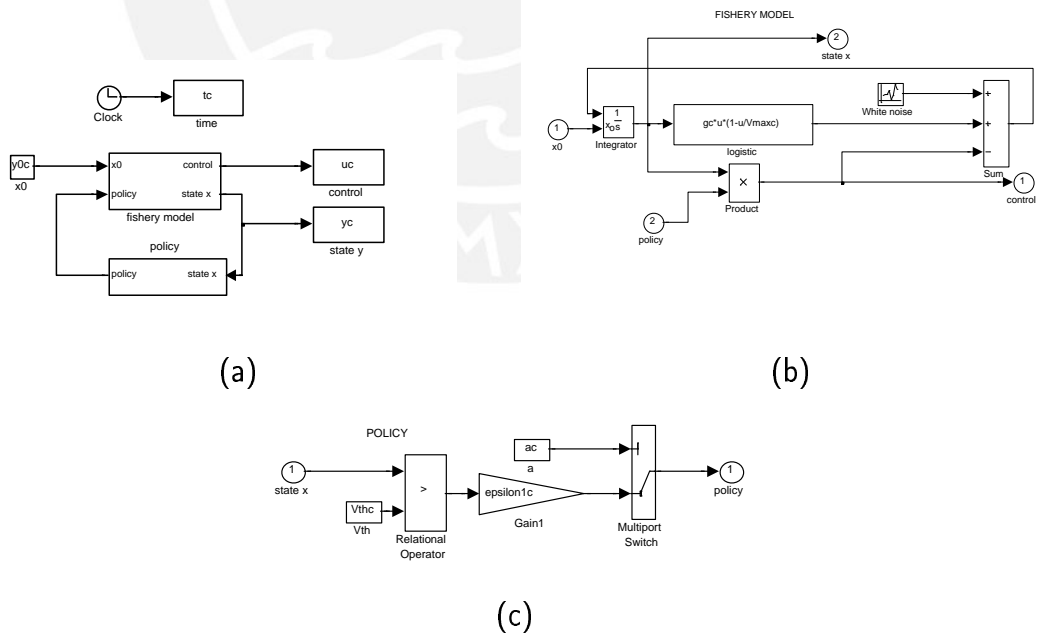


FIGURA 5.4: (a) Diagrama de bloques del modelo (5.14-5.17). (b) Diagrama de bloques de la dinámica del modelo. (c) Diagrama de bloques de la Política de Umbral.

En la Figura 5.4 mostramos el diagrama de bloques del modelo de Pesca de Acceso Abierto sometido a una Política de Umbral, ecuación (5.14-5.17), elaborado en *Simulink* del Matlab ©. Cabe remarcar que en los modelos implementados en *Simulink*, Figuras 5.3 y 5.4, se incluye un factor de ruido blanco de una amplitud de  $\pm 0,25$ .

En la Figura 5.5 mostramos la comparación de la evolución en el tiempo de las densidades poblacionales, para las mismas condiciones iniciales  $x_0 = 1$  y  $x_0 = 0,2$ , de los modelos (5.6-5.7) y (5.14-5.17).

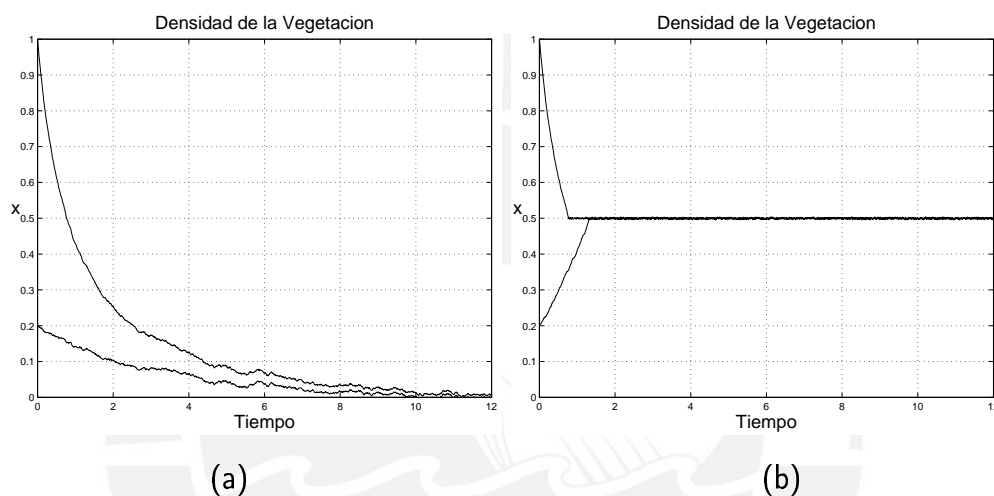


FIGURA 5.5: (a) Evolución en el tiempo de la densidad poblacional del modelo de Pesca de Acceso Abierto sometido a una Política de Tasa de Pesca Constante, ecuación (5.6-5.7). (b) Evolución en el tiempo de la densidad poblacional del modelo de Pesca de Acceso Abierto sometido a una Política de Umbral, ecuación (5.14-5.17). Valores de los parámetros:  $r = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 1,2$ ,  $K = 1$  y  $x_{th} = 0,5$ .

En la Figura 5.6 mostramos la comparación de la productividad y rentabilidad, para las mismas condiciones iniciales  $x_0 = 1$  y  $x_0 = 0,2$ , de los modelos (5.6-5.7) y (5.14-5.17).

## Conclusión

Cuando el sistema (5.6–5.7) es sometido a una pesca con mortalidad  $\varepsilon > r/2$ , sobreexplotación o exceso de pesca, ocurrirá una catastrofe, de la ecuación (5.8) se deduce que el nivel de peces va para extinción y la productividad sostenible llega a ser nula,  $Y_{sin-PU} = 0$  ver Figura 5.6.(a), y la rentabilidad económica sostenible llega a ser negativa de acuerdo con (5.11), ver Figura 5.6.(b). Esto comprueba, desde un punto de vista de control, la

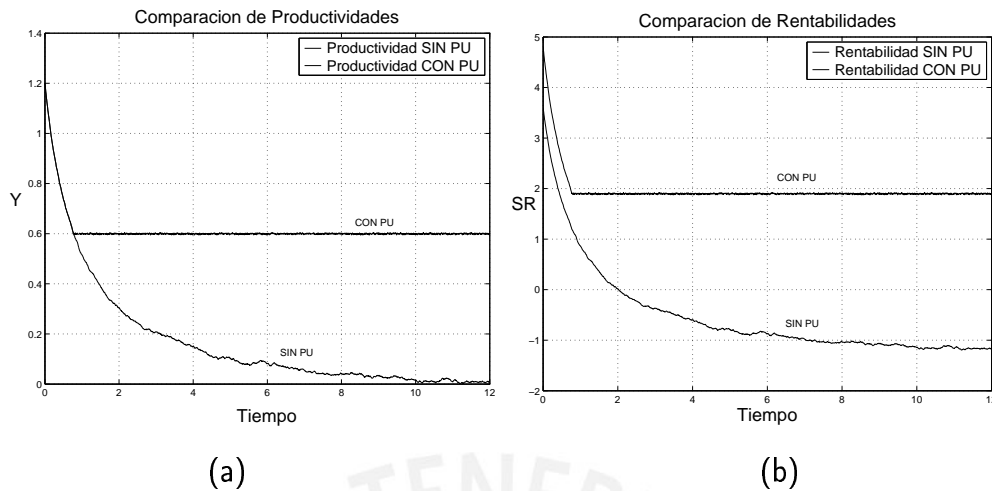


FIGURA 5.6: (a) Comparación de la productividad de la ecuación (5.8) con la productividad de la ecuación (5.18). (b) Comparación de la rentabilidad de la ecuación (5.11) con la productividad de la ecuación (5.19).

catástrofe que ocurrió en Perú en el año de 1973 (Idyll, 1973), cuando la industria de la anchoveta quebró a consecuencia de la sobreexplotación de la misma.

Cuando el sistema (5.14–5.17) es sometido a una pesca con  $\varepsilon > r$ , el nivel poblacional se estabiliza sobre el valor de umbral  $x_{th}$  por lo que la productividad promedio sostenible,  $r x_{th} (1 - x_{th}/K)$ , es positiva y la rentabilidad promedio económica sostenible es positiva de acuerdo con (5.19), ver Figura 5.6.(a) y (b).

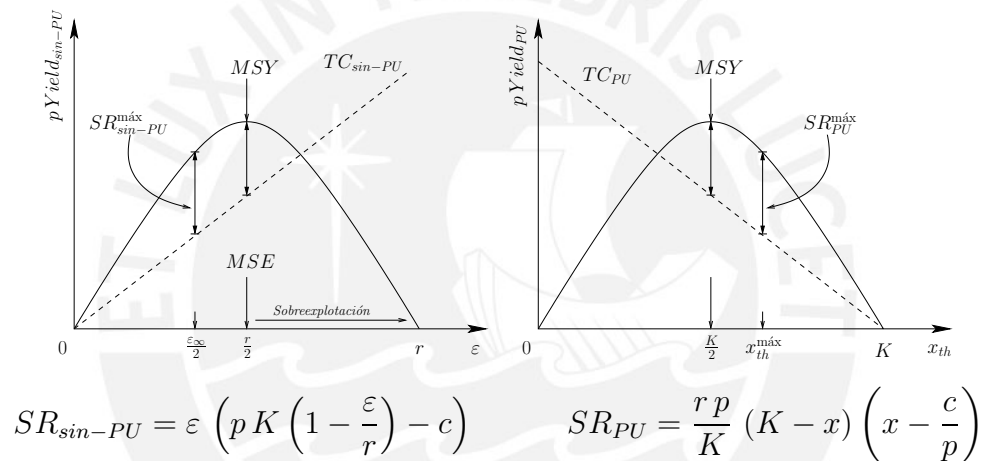
Resumiendo, si una sobreexplotación ocurre, entonces:

1. la productividad promedio sostenible  $Y_{PU}$  es maximizada cuando  $x_{th} = K/2$  y la productividad promedio es  $K r/4$ , exactamente el mismo valor que en el caso de tasa de pesca constante continua estudiada en (Clark, 1976, 1985; Kot, 2001).
2. el beneficio económico promedio sostenible es maximizado cuando  $x_{th} = (K + c p^{-1})/2$  y el beneficio promedio es como en (5.21), exactamente el mismo valor que en el caso sin PU (5.13).
3. Con una PU se puede escoger el valor de nivel de umbral con el cual podemos maximizar la productividad o el beneficio económico promedio.

En la Figura 5.7 se muestra un cuadro comparativo del beneficio económico sostenible



entre un sistema *sin*, una política de umbral y el mismo sistema sometido a una política de umbral. Se debe enfatizar que el beneficio económico promedio sostenible (sistema con PU) depende explícitamente del valor de nivel de umbral. Normalmente en la referencia bibliográfica de la gerencia de recursos renovables, el beneficio económico sostenible depende del esfuerzo de pesca, es decir de  $\varepsilon$ , este esfuerzo normalmente significa estimar el número de barcos, la capacidad de cada barco, lo anterior causa mayores errores de estimación. Por lo que, en el caso de la política de umbral, la única fuente de error de estimación sería la estimación de la densidad poblacional de una determina especie. Resumen de la conclusión en la Figura 5.7.



SIN política de umbral	COM política de umbral
1. Sobreexplotación cuando $\varepsilon > r/2$	1. Situación de sobreexplotación
2. $MSY$ con $\varepsilon = r/2$	2. $MSY$ con $x_{th} = K/2$
3. $SR_{sin-PU}^{m\acute{a}x}$ (beneficio económico máximo) cuando $\varepsilon = \varepsilon_{\infty}/2 < r/2$	3. $SR_{PU}^{m\acute{a}x}$ (beneficio económico máximo) cuando $x_{th} = x_{th}^{m\acute{a}x} > K/2$
4. $SR_{sin-PU}$ en función de $\varepsilon$	4. $SR_{PU}$ en función de $x_{th}$
5. Manera de proteger sistema, limitando $\varepsilon$	5. Manera de proteger sistema, aumentando $x_{th}$

FIGURA 5.7: Comparación del beneficio económico sostenible: (a) Sistema SIN política de umbral (5.6)-(5.7). (b) Sistema CON política de umbral (5.14)-(5.17).

# Conclusiones y Recomendaciones

## Conclusiones

1. Se demostró en esta tesis, que para modelos de una especie utilizados en ecología matemática, un control *on-off* (PU) adecuadamente diseñado permite remoción, sin provocar extinción. Ello significa que, los sistemas de una especie sometidos a una PU, estabilizan en una vecindad próxima al valor de nivel de umbral.
2. El control PU posee ventajas en situaciones en las cuales existe sobreexplotación de las poblaciones; en el presente trabajo de investigación se demostró que aún ante una situación de sobreexplotación se puede implementar una PU (control) que evitaría la extinción de las especies estudiadas.
3. En esta tesis el control es considerado como una extracción (consumo, remoción) de una determinada especie. El control diseñado satisface las siguientes restricciones: (i) simplicidad de implementación; (ii) no negatividad; (iii) monitorización mínima; (iv) fomenta coexistencia. Estas restricciones son impuestas, debido al hecho que las densidades poblacionales resultan siempre positivas.
4. Con el control propuesto(PU), la densidad poblacional estabiliza sobre el nivel de umbral deseado (escogido) y como se ha demostrado es posible obtener una productividad y rentabilidad positivas, ver Capítulo 5.
5. La PU es una versión más simple del control *on-off*, el mismo que tiene como valores de control  $-u$  o  $+u$ , dependiendo de la estructura. El control *on-off* estudiado en los sistemas de control de estructura variable (VSCS) tiene las siguientes características:

- i) invariancia a perturbaciones externas; ii) invariancia a incertidumbres en los parámetros (Utkin, 1977, 1978, 1992). Se observa que el control diseñado (PU) hereda las características de robustez del control de estructura variable en general.
6. Los conceptos utilizados de la teoría de control son: control *on-off*, funciones de Lyapunov con control (*CLF*), punto de equilibrio virtual, los cuales son de fácil interpretación. Esto permite que el diseño del control (PU) tenga un análisis matemático simple y de sencillo entendimiento. Esta combinación de conceptos sirvió para introducir un equilibrio globalmente estable en los modelos no lineales de una especie utilizados en la ecología matemática.

## Recomendaciones

1. La idea que esta tesis ofrece es, de mantener el nivel poblacional sobre un nivel de umbral deseado de manera que la rentabilidad y productividad sean lo máximo posible, de acuerdo al nivel poblacional actual. Así, es de verse que la catástrofe de la anchoveta en el mar peruano ocurrida en los años 70, pudo ser evitada si se hubiese respetado la recomendación de los especialistas: pescar hasta lo máximo 10 millones de toneladas por año. En aquella época una mejor y más rigurosa fiscalización, hubiese ayudado a mantener los niveles de productividad y rentabilidad adecuados. Estudios indican (Idyll, 1973; Clark, 1976, 1985) que el nivel poblacional de la anchoveta nunca se recupero hasta el nivel que tenía antes del año de 1970.

## Futuros trabajos

1. Creemos conveniente, saber qué modelo se adecua mejor al sistema de pesca en el mar peruano; a partir de ello, sería interesante estudiar este modelo adicionando otros modelos económicos más realistas, considerando el precio y el costo fijos y/o variables. En el mismo ámbito, convendría saber qué tipo de política es la más adecuada para el sistema del mar peruano. Estudios muestran que la política de umbral presenta mejores resultados que las políticas de cuota constante y que la política de tasa de pesca constante (Collie y Spencer, 1993; Funk y Rowell, 1995; Quinn y Deriso, 2000; Hjerne y Hansson, 2001; Milner-Gulland et al., 2001).
2. Medir con exactitud la densidad poblacional de los peces es imposible, puesto que la dinámica está sujeta a variaciones de los parámetros del sistema, a perturbaciones en la medida de los estados del sistema y normalmente solo se dispone de una estimación de los estados del sistema (densidades poblacionales). Un futuro trabajo sería: i) incluir en el modelo perturbaciones en los estados y aplicar la política de umbral, verificar la robustez de dicha política a este tipo de perturbaciones; ii) mismo modelo, incluyendo un estimador (observador) de los estados del modelo, verificar robustez.
3. Estabilizar un sistema, con un determinado control, en un punto de equilibrio deseado es una exigencia muy fuerte. La política de umbral utilizada, viene siendo muy criticada por el fenómeno de *chattering* que se origina debido a su aplicación, y otra crítica es que dicha política es poco realista. Una manera de hacer que esta política sea más realista es considerando el efecto de histéresis en el control, lo que probablemente origine un movimiento oscilatorio, y se debe verificar si este movimiento oscilatorio es limitado, estable y aislado (ciclo límite).
4. Para el modelo vegetación–herbívoro estudiado, sería necesario calcular la productividad y la rentabilidad promedio sostenible, sabiendo que se trata de una modificación del modelo original desarrollado por Van de Koppel y Rietkerk (2000).
5. Existe un creciente interés en encontrar controles para aplicaciones en la biología, como por ejemplo, estabilizar poblaciones de virus en niveles bajos; por tanto un

futuro trabajo sería extender el control propuesto para modelos semejantes en la dinámica de virus (VIH).

6. Modelos de mayor dimensión, entre los cuales están, el de un quimiostato simple del tipo dos nutrientes y una fuente de alimento. Un futuro trabajo sería extender la aplicación del control propuesto para este tipo de modelos, que son comúnmente utilizados en la industrialización de productos lácteos, e.g., yogurt.



# Bibliografía

1. COLLIE, J. S.; SPENCER, P. D. Management strategies for fish populations subject to long term environmental variability and depensatory predation. Technical Report 93-02, Alaska Sea Grant College, 1993. 629-650.
2. VAN DE KOPPEL, J.; RIETKERK, M. Herbivore regulation and irreversible vegetation change in semi-arid grazing systems. *Oikos*, Vol. 90, Págs. 253-260, 2000.
3. CLARK, C. W. 1985. *Bioeconomics Modelling and Fisheries Management*. John Wiley & Sons, USA.
4. JENSEN, A. L. Maximum harvest of a fish population that has the smallest impact on population biomass. *Fisheries Research*, Vol. 57 No. 1, Págs. 89-91, 2002.
5. IDYLL, C. P. The anchovy crisis. *Scientific American*, Vol. 228 No. 6, Págs. 22-29, 1973.
6. NOY-MEIR, I. Stability of grazing systems: An application of predator-prey graphs. *J. Ecology*, Vol. 63 No. 2, Págs. 459-481, 1975.
7. CLARK, C. W. 1976. *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*. John Wiley & Sons, USA.
8. KOT, M. 2001. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press, Cambridge.
9. JACOBS, O. L. R.; BALLANCE, D. J.; HORWOOD, J. W. Fishery management as a problem in feedback control. *Automatica*, Vol. 27 No. 4, Págs. 627-639, 1991.
10. COSTA, M. I. S.; KASZKUREWICZ, E.; BHAYA, A.; HSU, L. Achieving global convergence to an equilibrium population in predator-prey systems by the use of discontinuous harvesting policy. *Ecological Modelling*, Vol. 128, Págs. 89-99, 2000.
11. ROSENZWEIG, M. L. Paradox of enrichment: Destabilization of exploitation ecosystems in ecological time. *Science*, Vol. 171, Págs. 385-387, 1971.
12. TANNER, J. T. The stability and the intrinsic growth rates of prey and predator populations. *Ecology*, Vol. 56, Págs. 855-867, 1975.
13. MAY, R. M. Threshold and breakpoints in ecosystems with a multiplicity of stable states. *Nature*, Vol. 269, Págs. 471-477, 1977.

14. VAN DE KOPPEL, J.; HUISMAN, J.; VAN DER WAL, R.; OLFF, H. Patterns of herbivory along a productivity gradient: An empirical and theoretical investigation. *Ecology*, Vol. 77 No. 3, Págs. 736–745, 1996.
15. BRAUER, F. De-stabilization of predator–prey under enrichment. *Internat. J. Control*, Vol. 23 No. 4, Págs. 541–552, 1976.
16. FISHER, M. E.; GOH, B. S.; VINCENT, T. L. Some stability conditions for discrete-time single species models. *Bull. Math. Biol.*, Vol. 41 No. 6, Págs. 861–875, 1979.
17. CONWAY, E. D.; SMOLLER, J. A. Global analysis of a system of predator-prey equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 46 No. 4, Págs. 630–642, 1986.
18. HO, C.-P.; HUANG, S.-T. Global stability for a predator-prey system with predator self-limitation. *Tunghai Science*, Vol. 3, Págs. 9–27, 2001.
19. BRAUER, F.; SOUDACK, A. C.; JAROSCH, H. S. Stabilization and de-stabilization of predator–prey under harvesting and nutrient enrichment. *Internat. J. Control*, Vol. 23 No. 4, Págs. 553–573, 1976.
20. AZAR, C.; HOLMBERG, J.; LINDGREN, K. Stability analysis of harvesting in a predator-prey model. *J. Theor. Biol.*, Vol. 174, Págs. 13–19, 1995.
21. DAI, G.; TANG, M. Coexistence region and global dynamics of a harvested predator-prey system. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 58 No. 1, Págs. 193–210, 1998.
22. RIETKERK, M.; VAN DE KOPPEL, J. Alternate stable states and threshold effects in semi-arid grazing systems. *Oikos*, Vol. 79, Págs. 69–76, 1997.
23. VAN DE KOPPEL, J.; RIETKERK, M.; WEISSING, F. J. Catastrophic vegetation shifts and soil degradation in territorial grazing systems. *Trends in Ecology and Evolution*, Vol. 12 No. 9, Págs. 352–356, 1997.
24. RIETKERK, M.; VAN DEN BOSCH, F.; VAN DE KOPPEL, J. Site-specific properties and irreversible vegetation changes in semi-arid grazing systems. *Oikos*, Vol. 80, Págs. 241–252, 1997.
25. AUGUSTINE, D. J.; FRELICH, L. E.; JORDAN, P. A. Evidence for two alternate stable states in an ungulate grazing system. *Ecol. Appl.*, Vol. 8 No. 4, Págs. 1260–1269, 1998.
26. GILPIN, M. E. Enrichment predator–prey systems: Theoretical stability. *Science*, Vol. 177, Págs. 902–904, 1972.
27. HSU, S.-B.; HWANG, T.-W.; KUANG, Y. A ratio-dependent food chain model and its applications to biological control. *Math. Biosci.*, Vol. 18, Págs. 55–83, 2003.
28. LU, Z.; CHI, X.; CHEN, L. Impulsive control strategies in biological control of pesticide. *Theoretical Population Biology*, Vol. 64, Págs. 39–47, 2003.
29. HSU, S.-B.; HWANG, T.-W.; KUANG, Y. Global analysis of the Michaelis-Menten-type ratio-dependent predator-prey system. *J. Math. Biol.*, Vol. 42, Págs. 489–506, 2001a.

30. HSU, S.-B.; HWANG, T.-W.; KUANG, Y. Rich dynamics of a ratio-dependent one-prey two-predators model. *J. Math. Biol.*, Vol. 43, Págs. 377–396, 2001b.
31. KUANG, Y.; BERETTA, E. Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system. *J. Math. Biol.*, Vol. 36, Págs. 389–406, 1998.
32. JOST, C.; ARINO, O.; ARDITI, R. About deterministic extinction in ratio-dependent predator-prey models. *Bull. Math. Biol.*, Vol. 61, Págs. 19–32, 1999.
33. EMEL'YANOV, S. V.; BUROVOI, I. A.; LEVADA, F. YU. 1998. Control of Indefinite Nonlinear Dynamics Systems, volume 231 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer - Verlag, Great Britain. ISBN 3-540-76245-0.
34. CORLESS, M. J.; LEITMANN, G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. AC-26 No. 5, Págs. 1139–1144, 1981.
35. LEE, C. S.; LEITMANN, G. On optimal long-term management of some ecological systems subject to uncertain disturbances. *Internat. J. Systems Science*, Vol. 14 No. 8, Págs. 979–994, 1983.
36. VINCENT, T. L.; LEE, C. S.; GOH, B. S. Maintenance of an equilibrium state in the presence of uncertain inputs. *Internat. J. Systems Science*, Vol. 16 No. 11, Págs. 1335–1344, 1985.
37. VINCENT, T. L. Modeling and management in the presence of uncertain inputs. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, Vol. 44 No. 2, Págs. 267–274, 1987.
38. SLOITINE, J.-J. E.; COETSEE, J. A. Adaptive sliding controller synthesis for non-linear systems. *Internat. J. Control*, Vol. 43 No. 6, Págs. 1631–1651, 1986.
39. WONG, L. K.; LEUNG, F. H. F.; TAM, P. K. S. A chattering elimination algorithm for sliding mode control of uncertain non-linear systems. *Mechatronics*, Vol. 8 No. 7, Págs. 765–775, 1998.
40. COOK, P. A. 1986. *Nonlinear Dynamical Systems*. Prentice / Hall International, UK. ISBN 0-13-623216-7.
41. SLOITINE, JEAN-JACQUES E.; LI, WEIPING. 1991. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
42. KHALIL, HASSAN K. 1992. *Nonlinear Systems*. Macmillan Publishing.
43. OGATA, K. 1990. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall.
44. KOKOTOVIĆ, P. V.; ARCAK, M. Constructive nonlinear control: a historical perspective. *Automatica*, Vol. 37, Págs. 637–662, 2001.
45. FUNK, F.; ROWELL, K. A. Population model suggests new threshold for managing Alaska's Togiak fishery for Pacific Herring in Bristol Bay. *Alaska Fishery Research Bulletin*, Vol. 2 No. 2, Págs. 125–136, 1995.



46. HJERNE, O.; HANSSON, S. Constant catch or constant harvest rate? The Baltic Sea cod (*gadus morhua* L.) fishery as a modelling example. *Fisheries Research*, Vol. 53 No. 1, Págs. 57–70, 2001.
47. MILNER-GULLAND, E. J.; SHEA, K.; POSSINGHAM, H.; COULSON, T.; WILCOX, C. Competing harvesting strategies in a simulated population under uncertainty. *Animal Conservation*, Vol. 4, Págs. 157–167, 2001.
48. UTKIN, V. I. 1978. *Sliding Modes And Their Applications In Variable Structure Systems*. Mir, Moscow.
49. FILIPPOV, A. F. 1988. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic, Dordrecht.
50. UTKIN, V. I. 1992. *Sliding Modes In Control And Optimization*. Springer-Verlag, Berlin.
51. EDWARDS, C.; SPURGEON, S. K. 1998. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*, volume 7 of *Systems and Control Book Series*. Taylor and Francis, London. ISBN 0748406018.
52. UTKIN, V. I. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. AC-22 No. 2, Págs. 212–222, 1977.
53. DECARLO, R. A.; ZAK, S. H.; MATTHEWS, G. P. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 76 No. 3, Págs. 212–232, 1988.
54. XU, J.-X.; HASHIMOTO, H.; SLOTINE, J.-J. E.; ARAI, Y.; HARASHIMA, F. Implementation of VSS control to robotic manipulators—smoothing modification. *IEEE Trans. Industrial Electronics*, Vol. 36 No. 3, Págs. 321–329, 1989.
55. GULDNER, J.; UTKIN, V. I. The chattering problem in sliding mode systems. In *Proceeding of the 14<sup>th</sup> International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems, MTNS 2000*, Perpignan, France, June 19 - 23 2000.
56. QUINN, T. J.; DERISO, R. B. 2000. *Quantitative Fish Dynamics*. Biological Resource Management Series. Oxford University Press, Oxford. ISBN 0195076311.
57. WANG, J.; WANG, K. Optimal control of harvesting for single population. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 156 No. 1, Págs. 235–247, 2004.

## Anexo A

### Términos del modelo Collie–Spencer

#### A.1 Términos del Sistema Libre

$$\begin{aligned}
 T_1^{free} &= \left( 72rKd^2 - 36c_1K^2 + 8K^3r + 12\sqrt[3]{3T_3} \right) r^2, \\
 T_2^{free} &= \frac{3rd^2 + 3c_1K^2r}{(T_1)^{\frac{1}{3}}}, \\
 T_3^{free} &= \frac{(4r^3d^2 - c_1^2r)K^4 + (4c_1^3 - 20r^2d^2c_1)K^3 + (8r^3d^4 + 12rd^2c_1^2)K^2}{r} \\
 &\quad + \frac{12r^2d^4c_1K + 4r^3d^6}{r}.
 \end{aligned}$$

## A.2 Términos del Sistema Controlado

$$\begin{aligned}
 T_1^{con} &= -72K\epsilon r^2 d^2 + 36\epsilon r c_1 K^2 - 8K^3 \epsilon^3 + 24K^3 \epsilon^2 r - 24\epsilon K^3 r^2 + 72K r^3 d^2 \\
 &\quad - 36r^2 c_1 K^2 + 8K^3 r^3 + 12\sqrt[3]{3T_3}, \\
 T_2^{con} &= \frac{3r^2 d^2 + 3r c_1 K - K^2 \epsilon^2 + 2K^2 \epsilon r - K^2 r^2}{r (T_1)^{\frac{1}{3}}}, \\
 T_3^{con} &= (-20r d^2 c_1 K^3 \epsilon^2 + 40r^2 d^2 c_1 K^3 \epsilon + 8r^4 d^4 K^2 + 4r c_1^3 K^3 - r^2 c_1^2 K^4 \\
 &\quad + 4r^4 d^2 K^4 - 16r^3 d^2 K^4 \epsilon - 16r d^2 K^4 \epsilon^3 + 24r^2 d^2 K^4 \epsilon^2 - 16r^3 d^4 K^2 \epsilon \\
 &\quad + 12r^2 d^2 c_1^2 K^2 - 20r^3 d^2 c_1 K^3 + 4d^2 K^4 \epsilon^4 + 12r^3 d^4 c_1 K + 8r^2 d^4 K^2 \epsilon^2 \\
 &\quad - c_1^2 K^4 \epsilon^2 + 2r c_1^2 K^4 \epsilon + 4r^4 d^6) r.
 \end{aligned}$$

## A.3 Términos del Sistema con Política Continua

$$\begin{aligned}
 T_1^{cc} &= -36K\epsilon r^2 d^2 + 18\epsilon r c_1 K^2 - K^3 \epsilon^3 + 6K^3 \epsilon^2 r - 12\epsilon K^3 r^2 + 72K r^3 d^2 \\
 &\quad - 36r^2 c_1 K^2 + 8K^3 r^3 + 6\sqrt[3]{3T_3}, \\
 T_2^{cc} &= \frac{12r^2 d^2 + 12r c_1 K - K^2 \epsilon^2 + 4K^2 \epsilon r - 4K^2 r^2}{r (T_1)^{\frac{1}{3}}}, \\
 T_3^{cc} &= (-20r d^2 c_1 K^3 \epsilon^2 + 80r^2 d^2 c_1 K^3 \epsilon + 32r^4 d^4 K^2 + 16r c_1^3 K^3 - 4r^2 c_1^2 K^4 \\
 &\quad + 16r^4 d^2 K^4 - 32r^3 d^2 K^4 \epsilon - 8r d^2 K^4 \epsilon^3 + 24r^2 d^2 K^4 \epsilon^2 - 32r^3 d^4 K^2 \epsilon \\
 &\quad + 48r^2 d^2 c_1^2 K^2 - 80r^3 d^2 c_1 K^3 + d^2 K^4 \epsilon^4 + 48r^3 d^4 c_1 K + 8r^2 d^4 K^2 \epsilon^2 \\
 &\quad - c_1^2 K^4 \epsilon^2 + 4r c_1^2 K^4 \epsilon + 16r^4 d^6) r.
 \end{aligned}$$