PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

Dominios de Fatou Bieberbach generados por automorfismos

Tesis para optar el Grado de
Magíster en Matemáticas

Autor
JOSE LUIS PUCHOC QUISPE

Asesor
Dr. RUDY JOSÉ ROSAS BAZÁN

Lima, Noviembre 2022

DOMINIOS DE FATOU BIEBERBACH GENERADOS POR AUTOMORFISMOS

Jose Luis Puchoc Quispe

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Escuela de Postgrado,de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado de académico de Magister en Matemática

Miembros del jurado

Dr. Percy Braulio Fernández Sánchez
(Presidente)

Dr. Rudy José Rosas Bazán
(Asesor)

Dra. Liliana Puchuri Medina
(Miembro)

Lima-Perú
Noviembre-2022

Informe de similitud

Yo, Rudy José Rosas Bazán, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulado Dominios de Fatou Bieberbach generados por automorfismos, del autor Jose Luis Puchoc Quispe, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de similitud de 6 % Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 13/12/2022.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- La cita a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lima, 13 de diciembre de 2022

Rosas Bazán Rudy José	
DNI: 40037412 ORCID:0000-0002-4740-389X	Firma: Rudy Rosas

Resumen

En la presente tesis se estudia una forma de encontrar dominios de Fatou-Bieberbach, a partir de un automorfismo de $\mathbb{C}^n$. Específicamente estos dominios serán las cuencas de atracción hacia un punto fijo del automorfismo. El trabajo está basado en la investigación desarrollada por Jean Pierre Rosay y Walter Rudin en [RR88]. En el primer capítulo se desarrolla los preliminares que necesitamos para la demostración de los teoremas de los capítulos posteriores: básicamente, el estudio de aplicaciones holomorfas y teoría espectral de operadores lineales. En el segundo capítulo se prueba una versión débil del teorema principal de este trabajo. Este teorema nos brinda varios ejemplos interesantes de dominios de Fatou-Bieberbach en $\mathbb{C}^2$. Finalmente, en el capítulo 3 se desarrolla el teorema principal de la tesis. Se prueba que si un automorfismo tiene un punto fijo y en ese punto fijo su radio espectral es menor que uno, entonces la cuenca de atracción del punto fijo vía el automorfismo es un dominio de Fatou-Bieberbach.

Abstract

In this thesis we study a way to find Fatou-Bieberbach domains from an automorphism of $\mathbb{C}^n$. Specifically, these domains will be the basins of attraction towards a fixed point of the automorphism. The work is based on the research developed by Jean Pierre Rosay and Walter Rudin in [RR88]. In the first chapter the preliminaries that we need for the proof of the theorems of the later chapters are developed: basically, the study of holomorphic applications and spectral theory of linear operators. In the second chapter a weak version of the main theorem of this work is proved. This theorem gives us several interesting examples of Fatou-Bieberbach domains in $\mathbb{C}^2$. Finally, in chapter 3 the main theorem of the thesis is developed. It is shown that if an automorphism has a fixed point and at that fixed point its spectral radius is less than one, then the basin of attraction of the fixed point via the automorphism is a Fatou-Bieberbach domain.

Dedicado: A mi hermano Luis Miguel. A mis padres Flavio y Bertha

Índice general

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi asesor, el Dr. Rudy Rosas, por haberme guiado en el desarrollo de este trabajo. A mi jurado el Dr. Percy Fernández y la Dra. Liliana Puchuri por sus sugerencias para la mejora de la tesis. A mi familia por su comprensión en el trayecto de este periodo.

Introducción

En la presente tesis se estudia una forma de encontrar dominios de Fatou-Bieberbach, a partir de un automorfismo de $\mathbb{C}^n$. El trabajo está basado en la investigación desarrollada por Jean Pierre Rosay y Walter Rudin en [RR88]. Los dominios de Fatoiu-Bieberbach tienen propiedades importantes, ya que son subconjuntos propios que son biholomorfos a $\mathbb{C}^n$. Estos dominios no existen en $\mathbb{C}$. Los pioneros en el estudio de tales conjuntos fueron los matemáticos Pierre Fatou y Ludwig Bieberbach ([Fat22] y [Bie33]).

En el primer capítulo se desarrolla los preliminares que necesitamos para la demostración de los teoremas de los capítulos posteriores: básicamente, el estudio de aplicaciones holomorfas y teoría espectral de operadores lineales. En el segundo capítulo se prueba una versión débil del teorema principal de este trabajo. Este teorema nos brinda varios ejemplos interesantes de dominios de Fatou-Bieberbach en $\mathbb{C}^2$. Finalmente, en el capítulo 3 se desarrolla el teorema principal de la tesis. Se prueba que si un automorfismo tiene un punto fijo y en ese punto fijo su radio espectral es menor que uno, entonces la cuenca de atracción del punto fijo vía el automorfismo es un dominio de Fatou-Bieberbach.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos conceptos y resultados preliminares que nos servirán en el desarrollo de nuestro trabajo. Por tratarse de nociones básicas omitiremos en algunos casos las demostraciones.

1.1. Operadores lineales en espacios vectoriales normados

En esta sección definiremos lo que es un operador lineal sobre un espacio vectorial normado. También se definirá lo que es un operador lineal acotado, luego se darán algunos resultados sobre operadores acotados pueden ser consultado en [Lag14]. Finalmente, probaremos que los operadores invertibles es un conjunto abierto de los operadores lineales acotados.

Definición 1.1. Sean E, F espacios vectoriales y K un cuerpo. Una transformación lineal $A : E \longrightarrow F$ es una correspondencia que asocia a cada vector $u \in E$ un vector $A(v) \in F$ de forma que se cumplen las siguientes propiedades :

1. $A(u + v) = A(u) + A(v)$, $\forall u, v \in E$;
2. $A(\alpha u) = \alpha A(u)$, $\forall \alpha \in K$ y $u \in E$.

La suma de dos transformaciones lineales $A, B : E \longrightarrow F$ y el producto de una transformación lineal $A : E \longrightarrow F$ por un escalar $\alpha \in K$ son las transformaciones lineales $A + B : E \longrightarrow F$ y $\alpha A : E \longrightarrow E$, definidas respectivamente por $(A + B)(u) = A(u) + B(u)$ y $(\alpha A)(u) = \alpha A(u)$, para todo $u \in E$. O es el símbolo que indica la transformación nula $O : E \longrightarrow F$ definida por $O(u) = 0$. Además, definimos $-A : E \longrightarrow F$ por $(-A)(u) = -A(u)$.

Sea $L(E;F)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de E en F, con las operaciones ya indicadas es un espacio vectorial. Cuando $E = F$ usaremos la notación $L(E)$ en vez de $L(E;E)$. Las transformaciones lineales $A : E \longrightarrow E$ son llamados operadores lineales. Por su parte, las transformaciones lineales $\phi : E \longrightarrow K$ son llamados funcionales lineales. Escríbase E^* en vez de $L(E;K)$. El conjunto E^* es llamado el espacio vectorial dual de E.

Definición 1.2. Sean E, F espacios vectoriales. Una transformación lineal $A : E \longrightarrow F$ se dice que es acotado, si existe una constante real $C \geq 0$ tal que

$$\|A(x)\| \leq C\|x\|.$$

Al conjunto de transformaciones lineales de E en F que son acotados se le denota por $B(E,F)$.

Lema 1.3. *Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces cada operador lineal sobre E es acotado.*

Definición 1.4. Sea E un espacio vectorial normado y $A : E \to E$ un operador lineal acotado. Definimos la norma del operador A

$$\|A\| = \sup \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \qquad x \in E, x \neq 0.$$

Con esta norma el espacio vectorial $B(E;E)$ se convierte en un espacio vectorial normado.

Lema 1.5. *Sean E, F y G espacios normados, $T : E \longrightarrow E$, $T_1 : F \longrightarrow G$ y $T_2 : E \longrightarrow F$ operadores lineales acotados. Entonces se cumple lo siguiente*

$$\|T_1 \circ T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|, \qquad \|T^n\| \leq \|T\|^n.$$

Definición 1.6. Daremos las siguientes definiciones:

I. Una sucesión (x_n) en un espacio normado E es convergente si E contiene un x tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Entonces nosotros escribimos $x_n \to x$ y llamamos a x el límite de (x_n).

II. Una sucesión (x_n) en un espacio normado E es de Cauchy, si para cada $\epsilon > 0$ existe un entero $N > 0$ tal que

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon,$$

para todo $m, n > N$.

III. Un espacio vectorial normado E donde toda sucesión de Cauchy es convergente es llamado un espacio de Banach.

IV. Sea(x_k) es una sucesión en E. Podemos considerar la sucesión s_n de sumas parciales
$$s_n = x_1 + \cdots + x_n.$$
Si s_n es convergente a $s \in E$, entonces la serie denotado por
$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots \tag{1.1}$$
es convergente. El límite s es llamado la suma de la serie y escribiremos.
$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots$$
Si $\|x_1\| + \|x_2\| + ...$ converge, la serie (1.1) se dice que es absolutamente convergente.

Lema 1.7. *En un espacio normado de Banach toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Teorema 1.8. *Cada subespacio de dimensión finita F de un espacio vectorial normado E es de Banach. En particular cada espacio vectorial normado de dimensión finita es de Banach.*

Teorema 1.9. *Si E es un espacio de Banach, entonces $B(E;E)$ es un espacio de Banach.*

Teorema 1.10. *Sea $T \in B(E;E)$, donde E es un espacio de Banach. Si $\|T\| < 1$, entonces $(I-T)^{-1}$ existe como un operador lineal acotado sobre el espacio E y*
$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \cdots,$$
donde la serie es convergente en la norma sobre $B(E;E)$.

Denotemos por $R(E;E)$ al espacio vectorial formado por todos los operadores lineales invertibles. Probaremos que $R(E;E)$ es un conjunto abierto de $B(E;E)$.

Teorema 1.11. *El espacio vectorial $R(E;E)$ es un conjunto abierto de $B(E;E)$.*

Demostración. Sea $T \in R(E;E)$. Sea $A \in B(E;E)$ tal que $\|A-T\| < \dfrac{1}{\|T^{-1}\|}$, si definimos $B = T^{-1} \circ A$, se tiene que

$$\|I - B\| = \|T^{-1} \circ (T - A)\| \leq \|T^{-1}\|\|T - A\| < 1.$$

Usando el teorema 1.10 tenemos que $B \in R(E;E)$. Teniendo en cuenta que $A = T \circ B$, concluimos que $A \in R(E;E)$. Por lo tanto, $R(E;E)$ es un conjunto abierto de $B(E;E)$. □

1.2. Teoría espectral de un operador lineal

De ahora en adelante se trabajará en espacios vectoriales de dimensión finita. En esta parte se tratará la teoría espectral de un operador lineal . Para ello definiremos el espectro, el radio spectral. Finalmente, enunciaremos la fórmula de Gelfand que nos será de gran utilidad. Todos estos resultados pueden ser consultados en [BL88].

Definición 1.12. El espectro de un operador lineal A sobre un espacio vectorial complejo ($K = \mathbb{C}$) de dimensión finita n denotado por $\mathrm{spec}(A)$ es definido como el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que el operador $A - \lambda I$ es no invertible.

$A - \lambda I$ es no invertible si y solo si el subespacio $Nu(A - \lambda I) \neq \{0\}$, es decir, si y solo si λ es un autovalor de A. Se sabe que λ es un autovalor de A si y solamente si λ es raíz del polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. De esta manera el espectro de A coincide con el conjunto de todas las raíces del polinomio característico $p_A(\lambda)$. En particular, este conjunto es no vacío y a lo más tiene n elementos.

Definición 1.13. Para cada $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$ se define la multiplicidad (algebraica) $m(\lambda)$ como la multiplicidad que le corresponde al ser una raíz en el polinomio característico.

Como consecuencia de la definición tenemos

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{spec}(A)} m(\lambda) = n.$$

Si $m(\lambda) = 1$ para todo $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$ el espectro de A es llamado simple, en caso contrario se dice que A tiene espectro múltiple.

Definición 1.14. Sea A un operador lineal en E, se define el radio espectral de A como el número :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{spec}(A)} |\lambda|.$$

En otras palabras $\rho(A)$ es el radio del disco más pequeño centrado en cero que contiene al espectro de A.

Teorema 1.15. *La desigualdad*

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

se cumple para cualquier operador lineal A.

Teorema 1.16. *(Fórmula de Gelfand)*

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}},$$

esta igualdad no depende de la norma elegida para el operador lineal A.

1.3. Funciones holomorfas en una variable compleja

En esta sección estudiaremos las funciones holomorfas en una variable compleja. Mencionaremos algunos resultados sobre este tema que pueden ser consultados en [Gom01] y [Lin08].

Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ una función. Denotaremos $f \in O(U)$, si f es holomorfa sobre U. Los siguientes teoremas se usarán en el capítulo 2, nos ayudarán para el desarrollo de algunos ejemplos de dominios de Fatou-Bieberbach. Para más detalle se puede consultar [Rem98].

Teorema 1.17. *(Mapeo de Riemann) Sea $U \subsetneq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y simplemente conexo. Entonces existe un biholomorfismo entre U y el disco unitario $D(0, 1)$.*

En el teorema mencionado un biholomorfismo es una función holomorfa con inversa holomorfa.

Teorema 1.18. *(Pequeño Teorema de Picard) Sea f una función entera no constante. Entonces f toma cada número complejo como valor infinitas veces, con una excepción como máximo.*

Lema 1.19. *(Hurtwiz) Sea la sucesión* $f_n \in O(G)$ *que converge de manera compacta en* G *a una función no constante* $f \in O(G)$*. Entonces para cada punto* $c \in G$ *existe un* $n_c \in N$ *y una secuencia* $c_n \in G$*,* $n \geq n_c$*, tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \ \ y \ \ f_n(c_n) = f(c), n \geq n_c.$$

Corolario 1.20. *Sea la sucesión* $f_n \in O(G)$ *que converge de manera compacta en* G *a* $f \in O(G)$*. Si todas las funciones* f_n *no se anulan en* G *y* f *no es idénticamente cero, entonces* f *no se anula en* G*.*

Definición 1.21. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y T un conjunto en D. Se dice que T es localmente finito en D, si para cada punto $a \in D$ existe una vecindad V de a tal que la vecindad contiene un número finito de puntos de T.

Teorema 1.22. *(Interpolación de Mittag- Leffler) Sea* $D \subset \mathbb{C}$ *un conjunto abierto y* T *un conjunto localmente finito en* D*. A cada punto* $d \in T$ *le asignamos un polinomio*

$$p_d(z) = \sum_{v=0}^{n_d} a_{dv}(z-d)^v.$$

Entonces existe una función holomorfa f *en* D *tal que su serie de Taylor alrededor de* d *comienza con el polinomio* p_d*.*

Para el caso especial de $D = \mathbb{C}$, este teorema significa que existe funciones enteras que tienen valores arbitrariamente prescritos sobre una sucesión $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ sin puntos de acumulación en $\mathbb{C}$.

Teorema 1.23. *(Pequeño Teorema de Runge)Sea* $K \subset \mathbb{C}$ *un conjunto compacto, tal que* $\mathbb{C}\backslash K$ *es conexo. Entonces cada función holomorfa sobre* K *puede ser aproximado uniformemente sobre* K *por polinomios.*

Lema 1.24. *(Criterio M de Weierstrass) Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un abierto,* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones holomorfas en* Ω*. Si para cada compacto* $K \subset \Omega$ *existen constantes* $M_n(K)$ *tal que* $|f_n(z)| \leq M_n(K)$ *para* $z \in K$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(K)$ *converge, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *converge uniformemente sobre compactos en* Ω *y define una función* F *holomorfa en* Ω*.*

1.4. Funciones holomorfas en varias variables complejas

En esta sección definiremos función holomorfa en varias variables, además daremos algunos resultados básicos que son análogos al de una variable compleja. Estos resultados se pueden consultar en [Sch05].

En $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times ... \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$, si $w \in \mathbb{C}^n$ denotaremos a $w = (z_1, ..., z_n)$, donde $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, ..., n$ es la descomposición de la j-ésima coordenada en la parte real e imaginaria.

Un poliradio es una n-upla de números reales positivos $r = (r_1, ..., r_n)$. El polidisco de centro $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ y poliradio $r = (r_1, ..., r_n)$ es el conjunto

$$P_r^n(a) = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus |z_j - a_j| < r_j \ , \forall j = 1, ..., n\}.$$

Es decir el polidisco $P_r^n(a)$ es el producto de discos $D_{r_1}(a_1) \times ... \times D_{r_n}(a_n)$. La bola abierta de centro $a = (a_1, ..., a_n)$ y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B_r(a) = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n, \sum_{j=1}^{n} |z_j - a_j|^2 < r^2\},$$

es decir, es la bola en la métrica euclidiana.

$$\|z - a\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j - a_j|^2}.$$

Definición 1.25. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^m$, $a \in U$ y $\|.\|$ una norma arbitraria en $\mathbb{C}^n$. Diremos que:

1. La función f es llamado complejo diferenciable en a, si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ y una aplicación $\mathbb{C}$ lineal:

   $$Df(a) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

   tal que para todo $z \in U$ con $\|z - a\| < \delta$ la desigualdad

   $$\|f(z) - f(a) - Df(a)(z - a)\| \leq \epsilon \|z - a\|$$

   se cumple. Si existe $Df(a)$ es llamada la derivada compleja de f en a.

2. La función f es llamada holomorfa en U, si f es complejo diferenciable en todo punto de $a \in U$.

3. El conjunto

$$\mathcal{O}(U;\mathbb{C}^m){:=}\{f : U \longrightarrow \mathbb{C}^m / f \text{ es holomorfa }\}$$

es llamado el conjunto de aplicaciones holomorfas en U, si $m = 1$ escribimos

$$\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}(U;\mathbb{C}),$$

llamado el conjunto de funciones holomorfas en U.

Las pruebas de las siguientes proposiciones son análogas al caso real por lo cual lo omitiremos.

Proposición 1.26. *Se tiene los siguientes resultados:*

1. *Si f es $\mathbb{C}$ diferenciable en a, entonces f es continua en a.*

2. *La derivada $Df(a)$ es única.*

3. *El conjunto $\mathcal{O}(U;\mathbb{C}^m)$ es un C espacio vectorial y*

$$D(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha Df(a) + \beta Dg(a)$$

para todo $f, g \in \mathcal{O}(U;\mathbb{C}^m)$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

4. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$,$V \subset \mathbb{C}^m$ conjuntos abiertos, $a \in U$,*

$$f \in \mathcal{O}(U;V){:=}\{\varphi : U \longrightarrow V/\varphi \text{ es holomorfa }\}$$

y $g \in \mathcal{O}(V;C^k)$. Entonces $g \circ f \in \mathcal{O}(U;\mathbb{C}^k)$ y

$$D(g \circ f)(a) = Df(g(a)) \circ Dg(a).$$

5. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto. Una aplicación*

$$f = (f_1, ..., f_m) : U \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

es holomorfa si y solo si las componentes $f_1, ..., f_m$ son funciones holomorfas en U.

6. *$\mathcal{O}(U)$ es un $\mathbb{C}$ algebra.*

Ejemplo 1.27. Para cada $k = 1, ..., n$ la proyección

$$pr_k : U \longrightarrow \mathbb{C}, (z_1, ..., z_n) \mapsto z_k$$

es holomorfa y $Dpr_k(a) = e_k$ (el k- esimo vector canónico) para todo $a \in U$.

Ejemplo 1.28. La subálgebra compleja $C[z_1, ..., z_n]$ de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ generada por las constantes y las proyecciones es llamado el álgebra de polinomios. Estos elementos son de la forma

$$\sum_{\alpha \in N^n} c_\alpha z^\alpha$$

con $c_\alpha \neq 0$, solo para un número finito de $c_\alpha \in \mathbb{C}$, donde para $z \in \mathbb{C}^n$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ usamos la notación

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} ... z_n^{\alpha_n}.$$

Tenemos los siguientes resultados análogos al caso de una variable compleja.

Teorema 1.29. *(Liouville) Toda función holomorfa acotada $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es constante.*

Teorema 1.30. *(Identidad) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ abierto y conexo, $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $f = 0$ en una vecindad de a. Entonces f es la función nula.*

Teorema 1.31. *(Aplicación abierta) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ abierto y conexo, $U \subset \Omega$ un subconjunto abierto y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una función no constante. Entonces $f(U)$ es abierto, es decir, cada función holomorfa no constante es una aplicación abierta.*

1.5. $\mathcal{O}(U)$ como un espacio topológico

En esta sección estudiaremos la convergencia en el espacio $\mathcal{O}(U)$ de las funciones holomorfas en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^n$. Para este objetivo introduciremos la topología del compacto-abierto sobre $\mathcal{O}(U)$. El mayor resultado de esta sección es el teorema convergencia de Weierstrass. Para ello estudiaremos los espacios localmente convexos. Para más detalles puede consultarse [Sch05].

1.5.1. Espacios localmente convexos

Definición 1.32. Sea K uno de los cuerpos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y V un $K-$ espacio vectorial. Una seminorma sobre V, es una aplicación $p : V \longrightarrow [0, +\infty[$ con las siguientes propiedades:

1. La aplicación p es positivamente homogéneo $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para $x \in V$ y $\alpha \in K$.

2. La aplicación p es subaditivo $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para $x, y \in V$.

Ejemplo 1.33. Cada norma $\|.\|$ en un espacio vectorial V es una seminorma.

Ejemplo 1.34. Sea $R[a, b]$ el espacio de funciones Riemann-integrables sobre $[a, b]$ y sea

$$p : R[a, b] \longrightarrow R, f \mapsto \int_a^b |f(t)|dt.$$

Entonces p es una seminorma, pero no una norma, ya que $p(f) = 0$ no implica que $f = 0$. Para ello basta tomar la siguiente función

$$f : [a, b] \longrightarrow R$$

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad t = b \\ \\ 0 & \text{si} \quad t \neq b \end{cases}$$

Seminormas sobre espacios vectoriales pueden ser usadas para construir topologías en estos espacios.

Ejemplo 1.35. Sea $C(U, E)$ el espacio de funciones continuas de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ en un espacio normado de Banach E. Definimos una seminorma en $C(U, E)$ por

$$p_K(f) = \|f|_K\|_\infty.$$

Lema 1.36. *Sea I un conjunto indexado, V un espacio vectorial (real o complejo) y $(p_i)_{i \in I}$ una familia de seminormas en V. Para un subconjunto finito $F \subset I$ y $\epsilon > 0$ ponemos*

$$U_{F;\epsilon} := \bigcap_{i \in F} \{x \in V | p_i(x) < \epsilon\}$$

y definimos

$$\mathcal{U} = \{U_{F;\epsilon} | \epsilon > 0, F \subset I, F finito\}.$$

Entonces el conjunto

$$\mathcal{T} = \{O \subset V| \text{ para todo } x \in O \text{ existe } U \in \mathcal{U}, \text{ tal que } x + U \subset O\}$$

define una topología en V.

Un espacio vectorial con una topología inducida por una familia de seminormas como en el lema 1.36, es llamado un espacio localmente convexo. En los espacios localmente convexos, los conjuntos $U_{F;\epsilon}$ cumplen el rol de las $\epsilon-$bolas abiertas $B_\epsilon^n(0)$ en $\mathbb{C}^n$ o $\mathbb{R}^n$. Es decir, ellos forman una base vecindades abiertas del cero.

Definición 1.37. Sea $(V, (p_i)_{i\in I})$ un espacio localmente convexo, $\mathcal{T}$ la topología inducida por la familia $(p_i)_{i\in I}$ de seminormas y $\mathcal{U}$ la base de vecindades del cero como se definió en el Lema 1.36.

1. Una sucesión $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en V converge al límite $x \in V$, si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe algún $N \in \mathbb{N}$, tal que $x - x_j \in U$ para $j \geq N$.

2. Una secuencia $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en V es llamada sucesión de Cauchy, si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe algún $N \in \mathbb{N}$, tal que $x_k - x_l \in U$ para $k, l \geq N$.

3. El espacio V es llamado secuencialmente completo con respecto a la topología $\mathcal{T}$, si toda sucesión de Cauchy es convergente en V.

Lema 1.38. *Una sucesión $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in V$ si y solo si*

$$\lim_{j\to\infty} p_i(x_j - x) = 0$$

para todo $i \in I$.

1.5.2. La topología del compacto-abierto en $C(U, E)$

Utilizaremos los resultados obtenidos de espacios localmente convexos y la noción de convergencia, en el espacio $C(U, E)$ de aplicaciones continuas de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ con valores en un espacio de Banach $(E, \|.\|)$. Es conocido para un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}^n$ el espacio $C(K, E)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|f\|_{E,\infty} = sup_{x\in K}\|f(x)\|_E.$$

El hecho importante aquí es la completitud de $C(K, E)$. La completitud tambien se puede obtener para funciones continuas definidas sobre conjuntos abiertos.

Lema 1.39. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ conjunto abierto. Para cada $j \in \mathbb{N}^+$ define*

$$K_j = \left\{ z \in U / \||z\|_\infty \leq j, dist_{\|.\|_\infty}(z, \mathbb{C}^n \backslash U) \geq \frac{1}{j} \right\}$$

Entonces lo siguiente se cumple:

1. *Cada K_j es un conjunto compacto.*
2. *Para todo $j \in \mathbb{N}^+$ tenemos $K_j \subset K_{j+1}^\circ$.*
3. *El conjunto U es la unión de los K_j*

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j.$$

4. *Si K es un subconjunto arbitrario compacto de U, entonces existe algún $j_K \in \mathbb{N}^+$ tal que $K \subset K_{j_K}$.*

Definición 1.40. Usando la descomposición del conjunto abierto U en el lema 1.39, definimos la topología $\mathcal{T}_{co}$ sobre el espacio $C(U, E)$ como la topología definida por la familia de seminormas

$$p_{K_j}(f) = \|f|_{K_j}\|_\infty.$$

La topología $\mathcal{T}_{co}$ sobre $C(U, E)$ es llamada la topología del compacto-abierto o la topología de la convergencia compacta.

Proposición 1.41. *Una sucesión $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C(U, E)$ converge con respecto a la topología $\mathcal{T}_{co}$ si y solamente si $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge compactamente(uniformemente sobre cada compacto) sobre U.*

Es importante mencionar que la topología $\mathcal{T}_{co}$ no depende de la descomposición compacta que se realice de U, es decir, si $(K'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es otra descomposición compacta de U, entonces la topología inducida por las seminormas $p_{K'_j}$ es la misma topología $\mathcal{T}_{co}$ definida anteriormente.

Proposición 1.42. *$(C(U, E), \mathcal{T}_{co})$ es completo.*

Retornaremos ahora al estudio del espacio $\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ de las aplicaciones holomorfas. Como $\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ un subespacio de $C(U, \mathbb{C}^m)$ este hereda la topología de la convergencia compacta de $C(U, \mathbb{C}^m)$. De esta nanera, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.43. *(Weierstrass) Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto. Entonces $O(U, \mathbb{C}^m)$ es un subespacio cerrado de $C(U, \mathbb{C}^m)$ con respecto a la topología de la convergencia compacta. Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ el operador lineal*

$$D^\alpha : \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m) \longrightarrow \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m), f \mapsto D^\alpha f$$

es continuo.

1.6. Series de potencias y teoría local de funciones holomorfas

En esta sección estudiaremos series de potencias en varias variables complejas y algo de teoría local para funciones holomorfas. Para esta parte se puede consultar [Sch05], [Sha92] y [GR65] .

Empezaremos con la teoría de series de potencias de n variables complejas. Como el conjunto $\mathbb{N}^n$ no trae ningún orden natural, empezaremos por dar algunos resultados conocidos de sumabilidad en espacios de Banach. Sea $(E, \|\|)$ un espacio de Banach y I un conjunto numerable.

Definición 1.44. Sea $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia numerable en E. $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ es llamada absolutamente sumable si existe una biyección

$$\tau : \mathtt{N} \longrightarrow I$$

tal que la serie $\sum_{n\geq 0} \|a_{\tau(n)}\|$ converge.

Los siguientes 2 lemas se pueden consultar en [BF87].

Lema 1.45. *Sea $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia absolutamente sumable en E. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *La serie $\sum_{n\geq 0} \|a_{\varphi(n)}\|$ converge para cualquier biyección $\varphi : \mathtt{N} \longrightarrow I$ hacia al mismo límite.*
2. *Si $I = \mathbb{N}^n$,el límite puede ser calculado mediante la siguiente expansión homogénea*
$$\sum_{\alpha\in\mathtt{N}^n} a_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \right).$$

Gracias a este lema la expresión

$$\sum_{\alpha\in\mathtt{N}^n} a_\alpha = \sum_{n\geq 0} a_{\tau(n)}$$

está bien definido. Así decimos que la serie $\sum_{\alpha\in\mathtt{N}^n} a_\alpha$ converge absolutamente.

Lema 1.46. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *La familia $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ es absolutamente sumable.*

2. *La serie $\sum\limits_{\alpha\in I} a_\alpha$ converge absolutamente.*

3. *Existe una constante $C \geq 0$ tal que $\sum\limits_{\alpha\in F} \|a_\alpha\| < C$ para todo subconjunto finito $F \subset I$.*

Definición 1.47. Sea $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ una familia de números complejos, la expresión

$$\sum_{\alpha\in N^n} c_\alpha(z-a)^\alpha = \sum_{\alpha\in N^n} c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(z_1-a_1)^{\alpha_1}\ldots(z_n-a_n)^{\alpha_n}$$

es llamada una serie de potencias en n variables complejas z_1,...,z_n centrada en $a \in \mathbb{C}^n$.

Para simplificar la notación principalmente trabajaremos con $a = 0$. Se puede observar que la serie de potencias siempre converge para $z = a$, esto nos hace preguntar por el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}^n$, para el cual la serie converge.

Definición 1.48. Sea $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha z^\alpha$ una serie de potencias. El interior del conjunto de puntos donde converge la serie es llamado el dominio de convergencia de la serie.

Ejemplo 1.49. La serie geométrica

$$\sum_{\alpha\in N^n} z^\alpha$$

converge sobre el polidisco unitario. Esto se puede ver de la siguiente manera. Sea $z \in P_1^n(0)$ y F un subconjunto finito de $\mathbb{N}^n$. Entonces existe algún $q \in [0,1[$ tal que $|z_j| \leq q$ para todo $j = 1,2,...,n$. Se sigue que

$$\sum_{\alpha\in F} |z^\alpha| = \sum_{\alpha\in F} |z_1|^{\alpha_1}\ldots|z_n|^{\alpha_n} \leq \sum_{\alpha\in F} q^{\alpha_1+\ldots\alpha_n} \leq \sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}.$$

Además, el límite puede ser calculado de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} z^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{|\alpha|=k} z^\alpha\right)\\ &= \sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\dots\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} z_1^{\alpha_1}\dots z_n^{\alpha_n}\\ &= \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} z_1^{\alpha_1}\right)\dots\left(\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} z_n^{\alpha_n}\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-z_j}.\end{aligned}$$

Lema 1.50. *Si los términos de la serie de potencias múltiple* $\sum_{\alpha\in N^n} c_\alpha(z-a)^\alpha$ *son acotados en algún punto* $\xi\in\mathbb{C}^n$ *entonces este converge absolutamente y uniformemente en cualquier subconjunto compacto* K *del polidisco* $P_r^n(a)$ *donde el radio* $r=(r_1,...,r_n)$ *está dado* $r_j=|\xi_j-a_j|$.

Definición 1.51. Sean U,V vecindades abiertas de un punto $w\in\mathbb{C}^n$ y considere dos funciones holomorfas $f:U\to\mathbb{C}$, $g:V\to\mathbb{C}$. Las funciones f,g serán equivalentes en w si existe una vecindad abierta W de w tal que $W\subset U\cap V$ y $f|W=g|W$; la clase de equivalencia de estas funciones se denomina un germen de función en el punto w.

Está claro que la relación introducida es una relación de equivalencia. En general los gérmenes (clases de equivalencia) serán denotados por letras en negrita. Cualquier función f definida en una vecindad abierta U de w pertenece a una clase de equivalencia, clase que será llamada germen de la función f en w y será denotado por $\mathbf{f}=\mathbf{f_w}$.

A este conjunto de clases de equivalencia se le puede dotar estructura de un anillo de la siguiente manera. Sean dos gérmenes $\mathbf{f},\mathbf{g}$ en w. Seleccionamos representantes f_U,g_V respectivamente. La función suma f_U+g_V y la función producto $f_U.g_V$ son funciones holomorfas sobre la vecindad abierta $U\cap V$ y los gérmenes de estas funciones son definidos para ser la suma $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ y el producto $\mathbf{f}.\mathbf{g}$ de dos gérmenes. Este anillo será denotado por $\mathcal{O}_{\mathbf{n},\mathbf{w}}y$, cuando $w=0$, por $\mathcal{O}_{\mathbf{n}}$.

Proposición 1.52. *El anillo* $\mathcal{O}_{\mathbf{n}}$ *es un dominio de integridad.*

Teorema 1.53. *El anillo* $\mathcal{O}_{\mathbf{n}}$ *es isomorfo al anillo de series de potencias convergentes en* $0\in\mathbb{C}^n$.

El siguiente teorema lo enunciaremos como está en el libro de [Sha92] y lo utilizaremos más adelante. Sea $a = (a_1, ..., a_{n-1}, a_n) \in \mathbb{C}^n$ denotamos por $a' = (a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Teorema 1.54. *(Preparación de Weierstrass) Sea f una función holomorfa en una vecindad U del punto $a \in \mathbb{C}^n$ con $f(a) = 0$ y la función g definida por $g(z_n) = f(a', z_n)$ no idénticamente nula. Entonces en alguna vecindad abierta $V = W \times D(a_n; r)$ de a, con W como una vecindad abierta de a' se tiene*

$$f(z) = \left(z_n^k + c_{k-1}(z_1, ..., z_{n-1})z_n^{k-1} + ... + c_0(z_1, ..., z_{n-1})\right) \varphi(z),$$

donde $k \geq 1$ es el orden del cero de g en el punto $z_n = a_n$. Las funciones c_j son funciones holomorfas en W, con $c_j(a') = 0$, para $j = 0, ..., k-1$ y φ función holomorfa que no se anula en V.

Teorema 1.55. *El anillo $\mathcal{O}_{\mathbf{n}}$ es un dominio de factorización única.*

1.7. Funciones parcialmente holomorfas y la ecuación diferencial de Cauchy- Riemann

El objetivo en esta sección es enunciar las ecuaciones de Cauchy -Riemann. Definiremos función parcialmente holomorfa y daremos algunos resultados, los cuales pueden ser consultados en [Sch05].

Como en el caso de las funciones reales uno puede considerar fijas todas las variables menos una de una función holomorfa dada

$$(z_1, ..., z_n) \mapsto f(z_1, ..., z_n).$$

Esto conduce al concepto de parcialmente holomorfa.

Definición 1.56. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto, $a \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Para $j = 1, ..., n$ se define

$$U_j = \{z \in \mathbb{C}\ (a_1, ..., a_{j-1}, z, a_{j+1}, ..., a_n) \in U\}$$

y

$$\hat{f}_j : U_j \longrightarrow C,\ z \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, z, a_{j+1}, ..., a_n).$$

La función f es llamado parcialmente holomorfa sobre U si todos los $\hat{f}_j$ son holomorfas.

Toda función holomorfa f sobre un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ puede ser considerado como una función diferenciable de $2n$ variables reales. De esta manera definimos

$$\mathbb{C}^k(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{C}/\ f \text{ es } k \text{ veces } \mathbb{R} \text{ diferenciable } \}.$$

Sea $a \in U$ y $f \in C^1(U)$. Entonces existe un $\mathbb{R}$ funcional lineal

$$d_a f : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}$$

llamada la diferencial real de f en a, tal que

$$f(z) = f(a) + d_a f(z-a) + O(z-a),$$

donde $O(z-a)/|z-a| \to 0$ cuando $z \to a$.

Comparando esto con la definición 1.25 podemos decir que f es $\mathbb{C}$ diferenciable en a si y solo si $d_a f$ es $\mathbb{C}$- lineal. Por lo tanto es necesario estudiar la relación entre las funciones $\mathbb{R}$- lineal y $\mathbb{C}$- lineal de un espacio vectorial complejo.

Lema 1.57. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y V^* su dual algebraico ,es decir,*

$$V^* = \{\mu : V \longrightarrow \mathbb{C}/\mu \textit{ es } \mathbb{C}\textit{- lineal } \}.$$

Además, definimos

$$\begin{aligned} \overline{V}^* &= \{\mu : V \longrightarrow \mathbb{C}/\mu \textit{ es } \mathbb{C}\textit{- antilineal } \} \\ &= \{\mu : V \longrightarrow \mathbb{C}/\overline{\mu} \textit{ es } \mathbb{C}\textit{- lineal } \} \end{aligned}$$

y

$$V_{\mathbb{R}}^* = \{\mu : V \longrightarrow \mathbb{C}/\mu \textit{ es } \mathbb{R}\textit{- lineal } \}.$$

Entonces $V_{\mathbb{R}}^*$ es un espacio vectorial complejo, V^*, $\overline{V}^*$ son subespacios de $V_{\mathbb{R}}^*$ y tenemos la descomposición directa

$$V_{\mathbb{R}}^* = V^* \oplus \overline{V}^*.$$

Usaremos este lema 1.57 en el caso especial $V := \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$. Sea $w = u + iv \in \mathbb{C}^n$. Para $j = 1, ..., n$ consideramos los siguientes funcionales lineales

$$dx_j, dy_j : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, dx_j(w) = u_j, dy_j(w) = v_j.$$

Observe que $dx_j, dy_j \in V_R^*$ y

$$dx_j(iw) = -v_j, dy_j(iw) = u_j.$$

Ahora definimos

$$dz_j(w) = dx_j(w) + idy_j(w), d\overline{z_j}(w) = dx_j(w) - idy_j(w).$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} dz_j(w) &= u_j + iv_j, \\ d\overline{z_j}(w) &= u_j - iv_j. \end{aligned}$$

Observe que $dz_j \in V^*$ y $d\overline{z_j} \in \overline{V}^*$. Aplicando combinaciones lineales de los dz_j, respectivamente $d\overline{z_j}$, a los vectores de la base canónica $e_1, ..., e_n$ de $\mathbb{C}^n$, encontramos que los conjuntos $\{dz_1, ..., dz_n\}$, respectivamente $\{d\overline{z_1}, ..., d\overline{z_n}\}$, son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$. De esta manera forman bases para V^*, $\overline{V}^*$ respectivamente. Su unión entonces forma una base para V_R^* por el lema 1.57. Esto conduce a la siguiente representación para el diferencial real $d_a f$:

$$d_a f = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j(f, a) dz_j + \beta_j(f, a) d\overline{z_j})$$

con únicos coeficientes $\alpha_j(f, a)$, $\beta_j(f, a) \in \mathbb{C}$. Establecemos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned} \partial_j f(a) &= \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) = \alpha_j(f, a), \\ \overline{\partial_j} f(a) &= \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a) = \beta_j(f, a). \end{aligned}$$

Realizamos las siguientes observaciones:

1. Si consideramos a $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ como función de $2n$ variables reales $w = (x_1, ..., x_n) + i(y_1, ..., y_n)$, siendo $u = Re(f)$ y $v = Im(f)$ tenemos

$$\begin{aligned} df(w) &= \sum_{v=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_v} x_v + \frac{\partial u}{\partial y_v} y_v + i(\frac{\partial v}{\partial x_v} x_v + \frac{\partial v}{\partial y_v} y_v) \right), \\ df(w) &= \sum_{v=1}^{n} \left((\frac{\partial u}{\partial x_v} + i \frac{\partial v}{\partial x_v}) x_v + (\frac{\partial u}{\partial y_v} + i \frac{\partial v}{\partial y_v}) y_v \right). \end{aligned}$$

Usando la siguiente notación

$$\frac{\partial f}{\partial x_v} = \frac{\partial u}{\partial x_v} + i\frac{\partial v}{\partial x_v} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y_v} = \frac{\partial u}{\partial y_v} + i\frac{\partial v}{\partial y_v},$$

tenemos que

$$df(w) = \sum_{v=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_v} x_v + \frac{\partial f}{\partial y_v} y_v \right).$$

De la definición de dx_j y dy_j se tiene

$$df = \sum_{v=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_v} dx_v + \frac{\partial f}{\partial y_v} dy_v \right). \tag{1.2}$$

2. Sabemos que $dz_v = dx_v + idy_v$ y $d\overline{z_v} = dx_v - idy_v$. Por lo tanto,

$$dx_v = \frac{1}{2}(dz_v + d\overline{z_v}) \text{ y } dy_v = \frac{1}{2i}(dz_v - d\overline{z_v}).$$

Reemplazando en (1.2) tendremos

$$df = \sum_{v=1}^{n} \left(\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x_v} - i\frac{\partial f}{\partial y_v})dz_v + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x_v} + i\frac{\partial f}{\partial y_v})d\overline{z_v} \right)$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial z_v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_v} - i\frac{\partial f}{\partial y_v} \right) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z_v}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_v} + i\frac{\partial f}{\partial y_v} \right). \tag{1.3}$$

Definición 1.58. El funcional lineal

$$\partial_a f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, w \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)w_j$$

es llamado la diferencial compleja de f en a. El funcional antilineal

$$\overline{\partial_a} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a)d\overline{z_j} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, w \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a)\overline{w_j}$$

es llamado el diferencial complejo-conjugado de f en a.

Con estas notaciones podemos descomponer la diferencial real

$$d_a f = \partial_a f + \overline{\partial}_a f \in (C^n)^* \oplus \overline{(C^n)}^*.$$

Todos estos resultados pueden ser resumidos en el siguiente teorema.

Teorema 1.59. *(Cauchy-Riemann) Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ conjunto abierto y $f \in C^1(U)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a. La función f es holomorfa en U.

b. Para cada $a \in U$ el diferencial $d_a f$ es C- lineal, es decir, $d_a f \in (C^n)^*$.

c. Para cada $a \in U$ se tiene que $\overline{\partial_a} f = 0$.

d. Para cada $a \in U$ la función f satisface la ecuación de Cauchy- Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a) = 0 \text{ para todo } j = 1, ..., n.$$

Esta ecuación es equivalente a

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial v}{\partial y_j}(a),\ \frac{\partial u}{\partial y_j}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x_j}(a) \text{ para } j = 1, ..., n,$$

donde $u = Re(f)$ y $v = Im(f)$.

Lema 1.60. *Sea $\hat{f}_j$ definido como en la definición 1.56. Si f es holomorfa sobre U, entonces f es parcialmente holomorfa y se cumple que*

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(a) = (\hat{f}_j)'(a_j) \text{ para } j = 1, ..., n\ .$$

Demostración. Sea $\hat{f}_j$ como en la definición 1.56 con $z = x_j + iy_j$, $\hat{u_j} = Re(\hat{f}_j)$ y $\hat{v_j} = Im(\hat{f}_j)$. Como $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en U y $a = (a_1, ..., a_j, ..., a_n) \in U$, entonces $\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a) = 0$. Usando (1.3) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y_j}(a) &= 0,\\
\frac{\partial u}{\partial x_j}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x_j}(a) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y_j}(a) + i\frac{\partial v}{\partial y_j}(a)\right) &= 0,\\
\frac{\partial u}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial v}{\partial y_j}(a) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial u}{\partial y_j}(a)\right) &= 0,\\
\frac{\partial u}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial v}{\partial y_j}(a), \frac{\partial u}{\partial y_j}(a) &= -\frac{\partial v}{\partial x_j}(a).
\end{aligned}$$

Además $\hat{u}_j = u|_{U_j}$ y $\hat{v}_j = v|_{U_j}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_j}(a_j) = \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial y_j}(a_j), \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y_j}(a_j) = -\frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_j}(a_j).$$

De esta manera $\hat{f}_j$ cumnple las ecuaciones de Cauchy -Riemman, por lo tanto es holomorfa y de esta manera f es parcialmente holomorfa. Sabemos que

$$(\hat{f}_j)(a_j) = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_j}(a_j) + i\frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_j}(a_j),$$
$$(\hat{f}_j)(a_j) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x_j}(a).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z_j}(a) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y_j}(a)\right),\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x_j}(a) - i(\frac{\partial u}{\partial y_j}(a) + i\frac{\partial v}{\partial y_j}(a))\right),\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial v}{\partial y_j}(a) + i(\frac{\partial v}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial u}{\partial y_j}(a))\right).
\end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de Cauchy -Riemman

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial v}{\partial y_j}(a), \frac{\partial u}{\partial y_j}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x_j}(a),$$

obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(a) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x_j}(a) = (\hat{f}_j)(a_j).$$

□

Finalmente, necesitaremos el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en [BM48].

Teorema 1.61. *(Hartogs) Sea $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ con U abierto, parcialmente holomorfa. Entonces f es holomorfa.*

1.8. La fórmula de la integral de Cauchy

En esta sección enunciaremos la fórmula integral de Cauchy, la cual nos permitirá expresar a la función holomorfa como una serie de potencias. Para estos resultados puede consultarse [Sch05].

Empezaremos por considerar el toro $T_r^n(a)$. Para $a \in \mathbb{C}^n$ y $r \in \mathbb{R}_+^n$ sea

$$T_r^n(a) = \{z \in \mathbb{C}^n \backslash |z_j - a_j| = r_j, j = 1, 2, ..., n\}.$$

$T_r^n(a)$ es la copia de n círculos en el plano complejo y está contenido en la frontera del polidisco $P_r^n(a)$. Sea

$$f : T_r^n(a) \longrightarrow \mathbb{C}$$

continua y definimos $h : P_r^n(a) \longrightarrow \mathbb{C}$ por la integral de línea iterada

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_r^n(a)} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)...(\xi_n - z_n)} d\xi_1...d\xi_n \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_n - a_n| = r_n} ... \int_{|\xi_1 - a_1| = r_1} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)...(\xi_n - z_n)} d\xi_1...d\xi_n, \end{aligned}$$

donde la notación $\int_{|\xi_j - a_j| = r_j}$ representa la integral de linea sobre el circulo de centro a_j y radio r_j.

Lema 1.62. *La función h es parcialmente holomorfa en $P_r^n(a)$.*

Demostración. Sea $b \in P_r^n(a)$y escojamos $\delta > 0$ tal que $|z_j - a_j| < r_j$ para todo z que cumpla que $|z_j - b_j| < \delta$, $j = 1, 2, ..., n$. Entonces definimos la función

$$\hat{h}_j : B_\delta^1(b_j) \longrightarrow \mathbb{C}, z_j \mapsto h(b_1, ..., b_{j-1}, z_j, b_{j+1}, ..., b_n).$$

Debido a la continuidad de f tenemos que $\hat{h}_j$ es continua. Elijamos un triángulo cerrado $\Delta \subset B_\delta^1(b_j)$. Usando el teorema de Fubini-Tonelli obtenemos

$$\int_{\partial\Delta} \hat{h}_j(z_j) dz_j = \int_{|\xi_n - a_n| = r_n} ... \int_{|\xi_1 - a_1| = r_1} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{(\xi_j - z_j)...(\xi_n - z_n)} dz_j d\xi_1...d\xi_n.$$

Este integrando es holomorfo en la variable z_j en el triángulo Δ. Aplicando el teorema Cauchy-Goursat al integrando se obtiene que

$$\int_{\partial\Delta} \hat{h}_j(z_j) dz_j = 0.$$

Por el teorema de Morera vemos que $\hat{h}_j$ es holomorfa y por lo tanto h es parcialmente holomorfa. Aplicando el teorema 1.61, tenemos que h es holomorfa. $\square$

Ahora introducimos cierta notación. Dado $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, llamaremos a α multi-índice y definimos

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + ... + \alpha_n, \\ \alpha + 1 &= (\alpha_1 + 1, ..., \alpha_n + 1), \\ \alpha! &= \alpha_1!...\alpha_n!. \end{aligned}$$

Para $z \in \mathbb{C}^n$ y un multi-índice α escribimos

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1}...z_n^{\alpha_n}$$

y definimos el operador derivada parcial

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}...\partial z_n^{\alpha_n}}.$$

Teorema 1.63. *(Fórmula Integral de Cauchy) Sea $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con U conjunto abierto, $a \in U$ tal que $\overline{P_r^n(a)} \subset U$ y $z \in P_r^n(a)$. Entonces*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_r^n(a)} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)...(\xi_n - z_n)} d\xi_1...d\xi_n.$$

Es decir, f se puede representar como la integral iterada

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_n - a_n| = r_n} ... \int_{|\xi_1 - a_1| = r_1} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)...(\xi_n - z_n)} d\xi_1...d\xi_n. \quad (1.4)$$

Demostración. Sea $a = (a_1, ..., a_n) \in U$. Dado $w = (z_1, ..., z_n) \in P_r^n(a)$ y como f es parcialmente holomorfa por el lema 1.60, aplicamos la fórmula integral de Cauchy para la función de una variable compleja $z_1 \longrightarrow f(z_1, z_2, ..., z_n)$ (con las últimas $n-1$ coordenadas fijas), holomorfa en una vecindad de $\overline{B_{r_1}(a_1)}$. Tenemos

$$f(z_1, z_2, ..., z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi_1 - a_1| = r_1} \frac{f(\xi_1, z_2, ..., z_n)}{\xi_1 - z_1} d\xi_1.$$

De modo análogo, fijando $\xi_1 \in B_{r_1}(a_1)$,$z_3, ..., z_n$ obtenemos

$$f(\xi_1, z_2, ..., z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi_2 - a_2| = r_2} \frac{f(\xi_1, \xi_2, ..., z_n)}{\xi_2 - z_2} d\xi_2.$$

Procediendo de esta manera, obtenemos la integral iterada

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_1 - a_1| = r_1} ... \int_{|\xi_n - a_n| = r_1} f(\xi_1, ..., \xi_n) \frac{d\xi_n}{\xi_n - z_n} ... \frac{d\xi_1}{\xi_1 - z_1}.$$

Como f es continua, podemos aplicar el teorema de Fubini, lo que nos da lo pedido:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_r^n(a)} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)...(\xi_n - z_n)} d\xi_1...d\xi_n.$$

□

Considere una función holomorfa $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, con U conjunto abierto. Si consideramos la representación en forma integral en un polidisco $\overline{P_r^n(a)} \subset U$ dada por (1.4), tomando operador derivada parcial D^α sobre (1.4) para $z \in P_r^n(a)$ tenemos

$$\begin{aligned} D^\alpha f(z) &= \frac{\alpha_1!...\alpha_n!}{(2\pi i)^n} \int_{T_r^n(a)} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)^{\alpha_1+1}...(\xi_n - z_n)^{\alpha_n+1}} d\xi_1...d\xi_n, \\ D^\alpha f(z) &= \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{T_r^n(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{\alpha+1}} d\xi. \end{aligned} \tag{1.5}$$

De (1.5) evaluando en a y tomando norma tenemos

$$\begin{aligned} |D^\alpha f(a)| &= \left| \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{T_r^n(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{\alpha+1}} d\xi \right| \\ &\leq \frac{\alpha!}{(2\pi)^n} \int_{T_r^n(a)} \left| \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{\alpha+1}} \right| d\xi \\ &\leq \frac{\alpha!}{(2\pi)^n r^{\alpha+1}} \|f|_{T_r^n(a)}\|_\infty \int_{T_r^n(a)} 1 d\xi \\ &\leq \frac{\alpha!(2\pi)^n r}{(2\pi)^n r^{\alpha+1}} \|f|_{T_r^n(a)}\|_\infty \int_{T_r^n(a)} 1 d\xi \end{aligned}$$

$$|D^\alpha f(a)| \leq \frac{\alpha!}{r^\alpha} \|f|_{T_r^n(a)}\|_\infty. \tag{1.6}$$

La expresión (1.6) es llamada la desigualdad de Cauchy.

Lema 1.64. *Sea U conjunto abierto y sea $f \in \mathcal{O}(U)$. Entonces la función $D^\alpha f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa.*

Demostración. Usando el mismo razonamiento que se utilizó en el lema 1.62 se prueba que $D^\alpha f$ es parcialmente holomorfa. Finalmente, usando el teorema 1.61 (Hartogs) se tiene que $D^\alpha f$ es holomorfa. □

Lema 1.65. *Sea $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, donde U es un conjunto abierto. Entonces f es de clase $C^1(U)$.*

Demostración. Como $f = (u, v)$ es holomorfa entonces es continua, además por las ecuaciones de Cauchy Riemann tenemos

$$\frac{\partial f(a)}{\partial z_j} = \frac{\partial u(a)}{\partial x_j} + i\frac{\partial v(a)}{\partial x_j} \text{ para } j = 1, ..., n.$$

Por el anterior lema $\dfrac{\partial f}{\partial z_j}$ es holomorfa y por lo tanto continua. De esta manera las derivadas parciales reales de f son continuas. Entonces f es de clase $C^1(U)$. □

Teorema 1.66. *Sea U conjunto abierto, $f \in O(U)$ y considere $a \in U \subset \mathbb{C}^n$. Entonces existe un poliradio $P_r^n(a) \subset U$ de a tal que f se puede representar como la serie de potencias alrededor de a*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha (z - a)^\alpha,$$

con coeficientes

$$c_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_r^n(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} d\xi.$$

Demostración. Dado $a \in U$, existe un poliradio $P_r^n(a)$ tal que $\overline{P_r^n(a)} \subset U$. De la demostración del teorema 1.63, f puede ser representado mediante una integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_r^n(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi.$$

Podemos expresar

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a} . \frac{1}{\left(1 - \dfrac{z_1 - a_1}{\xi_1 - a_1}\right) ... \left(1 - \dfrac{z_1 - a_1}{\xi_n - a_n}\right)}.$$

Luego, debido a que $\left|\dfrac{z_j - a_j}{\xi_j - a_j}\right| < 1$ para $j = 1, 2, ..., n$, tenemos

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a} \sum_{|k|=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\xi - a}\right)^k,$$

donde $k = (k_1, ..., k_n)$ es un vector entero,$|k| = k_1 + ... + k_n$ y

$$\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^k = \left(\frac{z_1-a_1}{\xi_1-a_1}\right)^{k_1} ... \left(\frac{z_n-a_n}{\xi_n-a_n}\right)^{k_n}.$$

Esta expansión puede ser reescrito de la forma

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}},$$

donde $k+1 = (k_1+1, ..., k_n+1)$ y $z \in P_r^n(a)$. La serie converge absoluta y uniformemente en ξ sobre $T_r^n(a)$, multiplicando esto por la función continua $f(\xi)/(2\pi i)^n$ en $T_r^n(a)$ e integrando término a término sobre $T_r^n(a)$, obtenemos lo deseado.

Corolario 1.67. *(Expansión de Taylor) Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ conjunto abierto, $a \in U$, $r \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $\overline{P_r^n(a)} \subset U$ y $f \in \mathcal{O}(U)$. Entonces lo siguiente se cumple:*

1. *La serie de potencias $\displaystyle\sum_{\alpha \in N^n} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha$ converge absolutamente e uniformemente sobre todo compacto $K \subset P_r^n(a)$.*

2. *La función*

$$j_f : P_r^n(a) \longrightarrow C, z \mapsto \sum_{\alpha \in N^n} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha$$

es holomorfa.

3. *Para todo $z \in P_r^n(a)$ se tiene la siguiente igualdad*

$$f(z) = j_f(z).$$

1.9. Aplicaciones holomorfas

En esta parte estudiaremos algunas propiedades de las aplicaciones holomorfas y definiremos lo que es un biholomorfismo. Para ver las demostraciones consultar [Sch05] y [Sha92].

Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ conjunto abierto y sea $f = (f_1, ..., f_m) : U \to \mathbb{C}^m$. Esta aplicación, como ya se había mencionado, es holomorfo si todas sus componentes

f_j $(j = 1, ..., m)$ son holomorfas en U. Además, si $z_0 \in U$ la aplicación derivada $Df(z_0) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ es $\mathbb{C}$- lineal y se puede mostrar que $Df(z_0) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, llamada matriz jacobiana de f en z_0. El determinante de esta matriz

$$\det Df(z_0) = J_f(z_0),$$

es el Jacobiano de f en z_0.

Definición 1.68. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto y $f \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$. f es llamado biholomorfo si $f(U)$ es abierto y existe una aplicación

$$g : f(U) \longrightarrow U$$

tal que $f \circ g = id_{f(U)}$ y $g \circ f = id_U$. Si g existe nosotros escribimos $f^{-1} = g$.

Lema 1.69. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto y $f \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ aplicación biholomorfa. Entonces $m = n$ y $\det Df(a) \neq 0$ para $a \in U$.*

Demostración. Sea $a \in U$ y $f(a) = b$. Por la regla de la cadena tenemos que

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b)Df(a) = Id_{\mathbb{C}^n}$$
$$D(f \circ g)(b) = Df(a)Dg(b) = Id_{\mathbb{C}^m}.$$

Entonces $Df(a) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ y $Dg(b) : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ son inyectivas. Por lo tanto $\dim Im(Df(a)) = n \leq m$ y $\dim Im(Dg(b)) = m \leq n$. Así $m = n$. Tomando determinante a la composición obtenemos que $\det Df(a) \neq 0$. □

Definición 1.70. Sea $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Diremos que F es un automorfismo de $\mathbb{C}^n$ si es una aplicación biholomorfa de $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}^n$. En este caso escribimos $F \in Aut(\mathbb{C}^n)$.

Teorema 1.71. *(Función inversa) Sea $X \subset \mathbb{C}^n$un abierto, $a \in X$ y $f \in \mathcal{O}(X, \mathbb{C}^n)$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *El funcional determinante $detDf(a) \neq 0$.*
2. *Existen vecindades abiertas $U = U(a) \subset X$,$V = V(f(a)) \subset \mathbb{C}^n$ tal que $f(U) \subset V$ y*
$$f/U : U \longrightarrow V$$
es biholomorfismo.

Teorema 1.72. *Si las funciones $f_1, ..., f_k$ $(k < n)$ son holomorfas en una vecindad de $z_0 \in \mathbb{C}^n$ con $(f_1(z_0), ..., f_k(z_0) = w_0$ y $det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}(z_0)\right) \neq 0$ en esa vecindad $(i, j = 1, 2, ..., k)$, entonces el sistema de ecuaciones*

$$f_1(z) = w_0^1,$$
$$\vdots$$
$$f_k(z) = w_0^k,$$

es localmente soluble relativo a $z_1, ..., z_k$ *y la solución* $z_v = g_v(z_{k+1}, ..., z_n)$ $(v = 1, ..., k)$ *es holomorfa en una vecindad de* $(z_0^{k+1}, ..., z_0^n)$.

Para desarrollar el siguiente teorema, enunciaremos algunas definiciones y demostraremos unos lemas. El siguiente teorema es importante, ya que nos facilita demostrar que una aplicación holomorfa e inyectiva es biholomorfismo. Primero definiremos lo que es la resultante de un polinomio y daremos algunos resultados que nos ayudarán en la demostración del teorema. Para más detalles puede consultarse [GL01].

Definición 1.73. Sean D un dominio, $f(X), g(X) \in D[X]$ dos polinomios de grado mayor o igual que uno de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(X) &= a_0X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n; & a_0 \neq 0 \\ g(X) &= b_0X^m + b_1X^{m-1} + ... + b_m; & b_0 \neq 0. \end{aligned}$$

La resultante de $f(X)$ y $g(X)$, denotado por $R_{f,g}$, está dado por el determinante de la siguiente matriz $(m + n) \times (m + n)$

$$R_{f,g} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & ... & & & a_n & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_0 & ... & \vdots & \vdots & & a_n & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & ... & & a_0 & ... & & ... & & a_n \\ b_0 & b_1 & ... & & & b_m & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_0 & ... & \vdots & \vdots & & b_m & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & ... & & b_0 & ... & & ... & & b_m \end{vmatrix}.$$

A la resultante entre un polinomio $f(X)$ y su derivada $f'(X)$ se le denomina discriminante de $f(X)$.

Ejemplo 1.74. Sea $f(X) = 2X^3 + a_1X^2 + a_2 \in C[X]$. Vamos a calcular el discriminante de $f(X)$. Tenemos

$$\begin{aligned} f(X) &= 2X^3 + a_1X^2 + a_2, \\ f'(X) &= 6X^2 + 2a_1X. \end{aligned}$$

Luego,

$$R_{f,f'} = \begin{vmatrix} 2 & a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 2 & a_1 & 0 & a_2 \\ 6 & 2a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2a_1 & 0 \end{vmatrix} = 216a_2^2 + 8a_1^3a_2.$$

Proposición 1.75. *Sea D un dominio de factorización única y sean $f(X), g(X) \in D[X]$ dos polinomios de grado mayor o igual que uno. Entonces $R_{f,g} = 0$ si y solamente si $f(X)$ y $g(X)$ poseen un factor en común de grado mayor o igual que uno en $D[X]$.*

Proposición 1.76. *Sea D un dominio. Sea*

$$f[X] = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n = a_0(X - x_1)...(X - x_n) \qquad a_0 \neq 0$$

un polinomio en $D[X]$ de grado mayor o igual que dos, con $x_1, ..., x_n$ en algún cuerpo $L \supset D$. Sea $f'(X)$ la derivada de $f(X)$ con grado igual a $n-1$. Entonces tenemos que

$$R_{f,f'} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-1} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

Proposición 1.77. *Sea D un dominio y $f \in D[X]$. Tenemos $R_{f,f'} \neq 0$ si y solamente si $f(X)$ tiene raíces simples.*

Lema 1.78. *Sea F una función holomorfa en $U \subset \mathbb{C}^n$, vecindad abierta de 0, $F \not\equiv 0$, $F(0) = 0$. Entonces existe $\alpha : [0,1] \longrightarrow U$ de clase C^∞ e inyectiva tal que $\alpha(1) = 0$, $\alpha(t) \notin F^{-1}(0)$ para $t \in [0,1\rangle$.*

Demostración. Realizando cambio de coordenadas podemos asumir que la función g definida por $g(z_n) = F(0, ..., 0, z_n)$, diferente a la función nula. Usando el teorema 1.54 tenemos que

$$F(z) = \left(z_n^k + c_{k-1}(z_1, ..., z_{n-1})z_n^{k-1} + \cdots + c_0(z_1, ..., z_{n-1})\right)\varphi(z)$$

para $z \in V \times D(0,r) \subset U$ vecindad abierta de 0, con $V \subset \mathbb{C}^{n-1}$ vecindad de $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$. $P(z) = z_n^k + c_{k-1}(z_1, ..., z_{n-1})z_n^{k-1} + \cdots + c_0(z_1, ..., z_{n-1})$ es el polinomio de Weierstrass de F .Consideremos una curva de clase C^∞ e inyectiva $\beta : [0,1] \longrightarrow D(0,r)$ con $\beta(1) = 0$. De esta forma la curva α que estamos buscando será

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

definido como $\alpha(t) = (0, ..., 0, \beta(t))$. Como $c_j(0') = 0$ para $j = 0, ..., k-1$ se tiene que $F(\alpha(t)) \neq 0$ para $t \in [0,1\rangle$. □

Lema 1.79. *Sea* $\nu : [0;\rho\rangle \longrightarrow \mathbb{C}$ *un camino de clase* C^∞ *que verifica la igualdad*

$$v(t)^k + a_{k-1}(t)v(t)^{k-1} + ... + a_0(t) = 0 \tag{1.7}$$

donde las $a_j : [0;\rho] \longrightarrow \mathbb{C}$ *son continuas y acotadas. Entonces existe* $\lim\limits_{t\to\rho} \nu(t)$*.*

Demostración. Primero probaremos que ν es acotada. Supongamos lo contrario. Entonces existe $t_n \in [0;\rho\rangle$ tal que

$$|\nu(t_n)| \geq n \qquad (n \geq 1, n \in \mathbb{N}).$$

Reemplazando $\nu(t_n)$ en (1.7) tenemos

$$\begin{aligned} |\nu(t_n)|^k &= |a_{k-1}(t_n)v(t_n)^{k-1} + a_{k-2}(t_n)v(t_n)^{k-2} + ... + a_0(t_n)| \\ |\nu(t_n)| &\leq |a_{k-1}(t_n)| + \frac{|a_{k-1}(t_n)|}{|\nu(t_n)|} + ... + \frac{|a_0(t_n)|}{|\nu(t_n)|^{k-1}}. \end{aligned}$$

Sabemos que los a_j son acotados, podemos encontrar un $A > 0$ donde $|a_j(t)| \leq A$. Además del hecho que $|\nu(t_n)| \geq n$ tendremos

$$\begin{aligned} |\nu(t_n)| &\leq A(1 + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n^{k-1}}) \\ |\nu(t_n)| &\leq Ak. \end{aligned}$$

Esta contradicción prueba que ν es acotada. Ahora probaremos la existencia del límite. Sea A el siguiente conjunto:

$$A = \{b \in \mathbb{C} : \exists t_n \to \rho, \quad \nu(t_n) \to b\}.$$

Como ν es acotada, podemos encontrar una sucesión t_n que converge a ρ tal que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(t_n)$. De esta manera el conjunto A no es vacío. Ya que ν cumple la ecuación en (1.7), reemplazando $\nu(t_n)$ en (1.7) y tomando límite obtenemos que

$$b^k + a_{k-1}(\rho)b^{k-1} + ... + a_0(\rho) = 0.$$

Luego, si $b \in A$ entonces b es una raíz del polinomio

$$P(z) = z^k + a_{k-1}(\rho)z^{k-1} + ... + a_0(\rho)$$

y por lo tanto el conjunto A es finito. Probaremos que el conjunto tiene un solo elemento. Para ello usaremos el siguiente teorema que puede consultarse en [Lag99].

Teorema de la aduana.-Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario. Si un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ conexo contiene un punto $a \in X$ y un punto $b \notin X$, entonces C contiene algún punto de la frontera de X.

Supongamos que el conjunto A tiene al menos dos elementos a y b, entonces existen sucesiones t_n, r_n tal que

$$t_n \to \rho, \quad \nu(t_n) \to a$$
$$r_n \to \rho, \quad \nu(r_n) \to b.$$

Sea la bola cerrada $B[a,r]$ tal que $B[a,r] \cap \{b\} = \emptyset$. De la convergencia de $\nu(t_n)$ existe n_0 tal que $\nu(t_{n_0}) \in B[a,r]$. Luego, de la convergencia $\nu(r_n)$ existe un n_1 tal que $\nu(r_{n_1}) \notin B[a,r]$. Como $\nu([0;\rho\rangle])$ es conexo, tenemos por el teorema de la aduana que existe un s_1 tal que $\nu(s_1)$ pertenece a la frontera de $B[a,r]$. Siguiendo con este razonamiento obtendremos una sucesión $s_n \in \partial B[a,r]$ con $s_n \to \rho$ y podemos encontrar una subsucesión s_{n_k} tal que $\nu(s_{n_k})$ converge a un punto $p \in \partial B[a,r]$. Esto es una contradicción, ya que p no sería una raíz del polinomio P. Por lo tanto el conjunto A tiene un solo elemento y de esta manera existe $\lim\limits_{t\to\rho} \nu(t)$.

Teorema 1.80. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ una vecindad de 0, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Sea S el conjunto definido por*

$$S = \{z \in \mathbb{C}^n / f(z) = 0\}.$$

Suponga que $0 \in S$. Entonces existe una curva $\gamma : [0;1] \longrightarrow S$ de clase C^∞ e inyectiva tal que $\gamma(1) = 0$.

Demostración. Si $f \equiv 0$ no hay nada que probar. Caso contrario, se puede encontrar una recta $l \subset U$ que contenga al 0 tal que f restringido a la recta no es la función nula. Realizando un cambio de coordenadas se puede suponer que la función f no se anula en el eje $z = z_n$, es decir, $f(0, z_n) \not\equiv 0$. Aplicando el teorema 1.54 (preparación de Weierstrass), tenemos

$$f(z) = \left(z_n^k + c_{k-1}(z_1, ..., z_{n-1})z_n^{k-1} + \cdots + c_0(z_1, ..., z_{n-1})\right)\varphi(z)$$

en alguna vecindad abierta $V = W \times D(0;r)$ de $0 \in \mathbb{C}^n$, con W como una vecindad abierta de $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$. Denotamos

$$P(z) = z_n^k + c_{k-1}(z_1, ..., z_{n-1})z_n^{k-1} + \cdots + c_0(z_1, ..., z_{n-1}),$$

el polinomio de Weierstrass de f . Podemos asumir que P es irreducible en $O_{n-1}[z]$. Sea ΔP el discriminante del polinomio P, o sea, $\Delta P = R_{P,P'}$, la resultante de P y P'. Definimos el conjunto

$$D = \{(z_1, ..., z_{n-1}) \in W \,/ \Delta P(z_1, ..., z_{n-1}) = 0\} \subset W.$$

Supongamos que $\Delta P \equiv 0$, entonces $R_{P,P'} = 0$. De esta manera, por la proposición 1.75, P y P' tienen factor común por lo cual concluimos que P no es irreducible en $O_{n-1}[z]$, lo cual es una contradicción al suponer que ΔP es idénticamente nulo en W. Del lema 1.78, considerando la función holomorfa $\Delta P : W \to \mathbb{C}$ tenemos una curva $\alpha : [0,1] \longrightarrow W$ con $\alpha(1) = 0$ tal que $\alpha(t) \notin D$ para $t \in [0,1\rangle$. Consideremos el polinomio de Weierstrass de f en 0 restricto a α

$$P_t(z_n) = z_n^k + c_{k-1}(\alpha(t))z_n^{k-1} + ...c_0(\alpha(t)).$$

Para cada $t \in [0,1]$ tenemos que P_t es un polinomio complejo en la variable z_n. Sea α_0 una raíz del polinomio P_0 ,es decir, $P_0(\alpha_0) = 0$. Así, definimos $z(0) = \alpha_0$, como $\alpha(0) \notin D$ tenemos que $\Delta P(\alpha(0)) \neq 0$. Esto es equivalente a que el discriminante del polinomio P_0 es diferente de cero. De esta forma, por la proposición 1.77 se tiene que α_0 es una raíz simple y por lo tanto $P_0'(\alpha_0) = \dfrac{\partial P}{\partial z_n}(0, \alpha_0) \neq 0$. Entonces por el teorema 1.72 localmente existe

$$z : [0, \epsilon\rangle \longrightarrow \mathbb{C}$$

de clase C^∞ tal que $P_t(z(t)) = 0$, para todo $z \in [0, \epsilon\rangle$. Esta función z permite encontrar para cada $t \in [0, \epsilon\rangle$ una raiz $z(t)$ del polinomio P_t. Sea $\rho \in \langle 0, 1]$ el supremo del siguiente conjunto

$$A = \{\rho \in \langle 0,1] \backslash \exists\ z : [0, \rho\rangle \longrightarrow \mathbf{C} \text{ de clase } \mathbf{C}^\infty, P_t(z(t)) = 0 \text{ para } t \in [0, \rho\rangle\}.$$

Este conjunto A, por lo anterior, es diferente del vacío. Si $\rho = 1$, como z es acotada se tiene que $\lim\limits_{t \to 1} z(t) = 0$, por lo tanto se puede extender de manera continua z a $[0, 1]$. Suponga que $\rho < 1$, en este caso de igual manera tendremos que z es acotada y por consiguiente existe una sucesión t_k tal que existe $\lim\limits_{k \to \infty} z(t_k)$ con $t_k \to \rho$. Además del hecho de que $P_t(z(t)) = 0$, necesariamente ρ es una raíz del polinomio P_ρ, por lo cual podemos aplicar el lema 1.79, con lo cual obtenemos que existe $\lim\limits_{t \to \rho} z(t)$. De esta manera, podremos extender z al intervalo $[0, \rho]$. Por otra parte, como $\alpha(\rho) \notin D$ tenemos que $\Delta_\rho \neq 0$, con lo cual $z(\rho)$ es una raíz simple de P_ρ y por lo tanto $\dfrac{\partial P}{\partial z_n}(0, z(\rho)) \neq 0$. Luego, por el teorema 1.72, localmente se puede extender la función z con lo cual ρ no sería el maximal. Esta contradicción surge al suponer que $\rho \neq 1$, por lo tanto $\rho = 1$. Así, conseguimos $z : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ de clase C^∞, $P_t(z(t)) = 0$ para $t \in [0, 1]$. La curva γ que estamos buscando es $\gamma(t) = (\alpha(t), z(t))$. □

Teorema 1.81. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ una vecindad de z_0 y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ una aplicación holomorfa. Si f es inyectiva en una vecindad de z_0, entonces el Jacobiano $J_f(z_0) \neq 0$.*

Demostración. Usaremos inducción sobre n. Para $n = 1$, es un resultado conocido de la teoría de funciones holomorfas de una variable. Supongamos que es verdadero para dimensiones menores que n. Asumimos que $J_f(z_0) = 0$ y denotamos por k $(0 \leq k \leq n-1)$ el rango de la matriz $f'(z_0)$. Si $k > 0$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que det $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial w_j}\right) \neq 0$ $(i, j = 1, ..., k)$. Sea $h(z) = (f_1(z), ..., f_k(z), z_{k+1}, ..., z_n)$. Entonces

$$J_h(z) = det \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_k} & \frac{\partial f_1}{\partial z_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \frac{\partial f_k}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial z_k} & \frac{\partial f_k}{\partial z_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial z_n} \\ \hline & & & 1 & \dots & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & \dots & 1 \end{array} \right),$$

$$J_h(z) = det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_k} \\ & \ddots & \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial z_1} & \dots & \dfrac{\partial f_k}{\partial z_k} \end{pmatrix}.$$

De esta manera el jacobiano de h en z_0 es diferente de cero. Por el teorema 1.71 de la función inversa existe una vecindad de z_0 donde h es un biholomorfismo. Si componemos $g = h^{-1}$ con f obtendremos

$$\check{f}(z) = (g \circ f)(z) = (z_1, ..., z_k, f_{k+1}(z), ..., f_n(z)).$$

Esta aplicación también es inyectiva en una vecindad V de z_0 y como es un cambio de coordenadas podemos considerar a $\check{f}$ como f. Además, su jacobiano sería

$$J_f(z) = det \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 \dots & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & 0 \dots & 1 & & & \\ \hline \frac{\partial f_{k+1}}{\partial z_1} & \dots & & \frac{\partial f_{k+1}}{\partial z_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_{k+1}}{\partial z_n} \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \dots & & \frac{\partial f_n}{\partial z_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{array} \right), \qquad (1.8)$$

$$J_f(z) = det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_{k+1}}{\partial z_{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{k+1}}{\partial z_n} \\ & \ddots & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial z_{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}.$$

Así en el punto z_0 esta última determinante es igual a cero. La aplicación f sobre el plano $\Pi = \{z_1 = ... = z_k = 0\}$ de dimensión $n-k$ es aplicado hacia el plano $\{w_1 = ... = w_k = 0\}$. Sea la restricción $\hat{f}(z) = (f_{k+1}(z), ..., f_n(z)|_{\Pi}$ aplica la vecindad $\check{V} = V \cap \Pi$ de dimensión $n-k$ en $\mathbb{C}^{n-k}$ de forma inyectiva. El jacobiano de esta aplicación en el punto $(z_0^{k+1}, ..., z_0^n)$ es igual a cero. Según (1.8) y por hipótesis inductiva $\hat{f}$ no sería inyectiva en $\check{V}$, pero entonces f no sería inyectiva en V, lo cual sería una contradicción. Falta considerar el caso cuando $k = 0$, es decir, $\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j} = 0$ para todo $i, j = 1, ..., n$ en z_0. Por el teorema 1.80, para un punto donde la función es igual a cero, existe un camino suave que termina en este punto y donde la función se anula. Desde que la función Jacobiano es holomorfa y $J_f(z_0) = 0$ se tiene que existe un camino γ que termina en z_0 sobre el cual el jacobiano se anula. Tenemos 2 posibilidades: a) todos los $\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j} = 0$ sobre un segmento de γ colindando con z_0 b) arbitrariamente cerca de z_0 existe un punto donde no todos $\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}$ son iguales a cero. En el caso a) f transforma el segmento de γ en un punto, y en b) existe un punto cerca de z_0 donde $J_f(z) = 0$ y el rango de $f'(z) = k > 0$. En ambos casos f no es inyectiva en una vecindad de z_0, en el caso b) esto se sigue por lo que fue probado anteriormente. Esto es una contradicción.

Corolario 1.82. *Sea U conjunto abierto en $\mathbb{C}^n$ y $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ una aplicación holomorfa e inyectiva. Entonces f es un biholomorfismo.*

Demostración. Sea $z_0 \in U$. Por el teorema 1.81 tenemos que $J_f(z_0) \neq 0$. Luego, aplicando el teorema 1.71 de la función inversa, f es un biholomorfismo local. Como f es inyectiva, tendremos que f es un biholomorfismo.

En la demostración del siguiente lema usaremos la norma del máximo en $\mathbb{C}^n$. Con la única finalidad de que la constante de acotación sea 1. Si trabajamos con otra norma entonces sólo cambiaría la constante de acotación. Tambien utilizaremos el lema de Schwartz para funciones holomorfas de una variable.

Lema 1.83. *Sea* $f : D(0;1) \subset \mathbb{C} \longrightarrow B_1(0) \subset \mathbb{C}^n$ *una aplicación holomorfa, donde* $D(0;1)$ *es el disco abierto unitario y* $f(0) = 0$*. Entonces* $\|f(z)\| \leq \|z\|$ *para* $z \in \mathbb{C}$ *y* $\|f'(0)\| \leq 1$*.*

Demostración. Sea $f = (f_1; f_2; ...; f_n)$ y $z \in D(0;1)$. Como $\|f(z)\| < 1$ tenemos que $\|f_i(z)\| < 1$. Además, se tiene $f_i(0) = 0$ para $i = 1, 2, ..., n$. Aplicando el lema de Schwartz a cada f_i obtenemos

$$\begin{aligned} \|f_i(z)\| &\leq \|z\|, \\ \|f_i'(0)\| &\leq 1, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, ..., n$. Por lo tanto, $\|f_(z)\| \leq \|z\|$ y $\|f'(0)\| \leq 1$. □

Teorema 1.84. *Sea* $F : B_1(0) \longrightarrow B_1(0)$ *una aplicación holomorfa, donde* $B_1(0) \subset \mathbb{C}^n$ *es la bola abierta unitaria y* $F(0) = 0$*. Entonces* $\|F(z)\| \leq \|z\|$ *para* $z \in B_1(0)$ *y* $\|F'(0)\| \leq 1$*.*

Demostración. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ vector unitario. Definimos

$$\begin{aligned} g : D(0;1) \subset \mathbb{C} &\longrightarrow B_1(0) \\ g(t) &= F(tu). \end{aligned}$$

Aplicamos el lema 1.83 en g. Como consecuencia tenemos

$$\|g(t)\| = \|F(tu)\| \leq \|t\| \tag{1.9}$$

$$\|g'(0)\| = \|F'(0)u\| \leq 1. \tag{1.10}$$

Sea $z \in \mathbb{C}^n$ con $z \neq 0$. Consideremos $u = \dfrac{z}{\|z\|}$, $t = \|z\|$ y reemplazamos en (1.9) obtenemos

$$\|F(z)\| \leq \|z\|.$$

De (1.10), como u es un vector unitario arbitrario tenemos

$$\|F'(0)\| \leq 1.$$

□

Corolario 1.85. *Sea* $F : B_{r_1}(a) \longrightarrow B_{r_2}(b)$ *aplicación holomorfa, donde* $B_{r_1}(a)$*,* $B_{r_2}(b)$ *son bolas abiertas en* $\mathbb{C}^n$ *y* $F(a) = b$*. Entonces* $|F'(a)| \leq \dfrac{r_2}{r_1}$ *.*

Demostración. Definimos las aplicaciones holomorfas $g : B_{r_2}(b) \longrightarrow B_1(0)$ y $h : B_1(0) \longrightarrow B_r(a)$ como $g(z) = \dfrac{z-b}{r_2}$ y $h(z) = r_1 z + a$ entonces $g \circ F \circ h : B_1(0) \longrightarrow B_1(0)$ es holomorfa. Aplicamos el teorema 1.84 a $g \circ F \circ h$ tenemos $\|(g \circ F \circ h)'(0)\| \leq 1$. Luego usamos la regla de la cadena obteniendo $\|g'(b).F'(a).h'(0)\| \leq 1$. Finalmente utilizamos que $h'(0) = r_1 I$, $g'(b) = \dfrac{1}{r_2} I$ para reemplazar en $g'(b).F'(a).h'(0)$ y obtener $|F'(a)| \leq \dfrac{r_2}{r_1}$. □

Antes de probar el siguiente colorario enunciaremos lo siguientes teoremas de análisis real en varias variables. Estos teoremas nos serán de utilidad en el desarrollo de la tesis que pueden ser consultados en [Lag99].

Teorema 1.86. *(Desigualdad del valor medio) Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y convexo. Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable, con $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$ entonces f es Lipchitz. Es decir, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para cualquier $x, y \in U$.*

Teorema 1.87. *(Perturbación de la Identidad) Sea $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una contracción definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces la aplicación $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $f(x) = x + \varphi(x)$ es un homeomorfismo de U sobre el conjunto abierto $f(U) \subset \mathbb{R}^n$.*

Corolario 1.88. *Sea $F : B_1(0) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow B_R(0) \subset \mathbb{C}^n$ aplicación holomorfa, donde $F(0) = 0$. Entonces $|F(z) - F(w)| \leq 4R|z - w|$ para todo $|z| < 1/2$, $|w| < 1/2$.*

Demostración. Por el teorema 1.84 tenemos que $|F(z)| \leq R|z|$ para todo $|z| < 1$. Como consecuencia se tiene $F(B_{1/2}(0)) \subset B_{R/2}(0)$. Ahora, si $z \in B_{1/2}(0)$ entonces $B_{1/2}(z) \subset B_1(0)$. De esta manera si restringimos F a $B_{1/2}(z)$ se tiene

$$F : B_{1/2}(z) \longrightarrow B_R(0) \subset B_{2R}(F(z)).$$

Luego, aplicamos el corolario 1.85 a F obteniendo $\|F'(z)\| \leq \dfrac{2R}{1/2} = 4R$ para $|z| < 1/2$. Por último usamos el teorema de valor medio para la aplicación

$$F : B_{1/2}(0) \longrightarrow B_R(0).$$

Ya que su dominio es convexo y $\|F'(z)\| \leq 4R$ tenemos

$$\|F(z) - F(w)\| \leq 4R|z - w|$$

para todo $|z| < 1/2$, $|w| < 1/2$. □

Capítulo 2

Dominios de Fatou-Bieberbach generados por un Automorfismo

En este capítulo, introduciremos un tipo especial de abiertos de $\mathbb{C}^n$, llamados dominios de Fatou-Bieberbach. Usando el teorema 1.17 mapeo de Riemann se prueba que estos conjuntos no existen en el plano complejo. Pierre Fatou y Ludwig Bieberbach fueron los primeros en estudiar estos conjuntos en dimensiones mayores, en la década de 1920.

Luego, probaremos el teorema 2.15, que nos da una forma de generar dominios de Fatou-Bieberbach a través de un automorfismo. Finalmente, daremos varios ejemplos de estas regiones usando dicho teorema. Comenzaremos con algunos lemas que nos serán de utilidad para probar el teorema principal del capítulo.

Lema 2.1. *Sean $F \in Aut(\mathbb{C}^n)$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, donde $F'(0) = A$, $F(0) = 0$ y $\beta_1 < \beta_2 < 1$. Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|A^m\| < \beta_1^m$, entonces existe $r > 0$ tal que*

$$\|F^m(z)\| \leq \beta_2^m \|z\|$$

para $\|z\| \leq r$.

Demostración. Si derivamos F^2 tenemos

$$(F^2)'(0) = (F \circ F)'(0) = F'(F(0)) \circ F'(0) = F'(0) \circ F'(0) = A \circ A = A^2.$$

Análogamente se ve que, para nuestro m fijado, se tiene que $(F^m)'(0) = A^m$. Ya que F^m es holomorfa en 0, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|F^m(z) - A^m(z)\| \leq \epsilon \|z\|$$

para $\|z\| \leq \delta$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|F^m(z)\| &\leq \epsilon\|z\|+\|A^m(z)\| \\
\|F^m(z)\| &\leq (\epsilon+\|A^m\|)\|z\| \\
\|F^m(z)\| &\leq (\epsilon+\beta_1^m)\|z\|.
\end{aligned}$$

De esta manera, si $\varepsilon = \beta_2^m - \beta_1^m$, entonces existe un $r > 0$ tal que

$$\|F^m(z)\| \leq \beta_2^m\|z\|$$

para $\|z\| \leq r$. $\square$

Lema 2.2. *Sean $F \in Aut(\mathbb{C}^n)$, $m \in \mathbb{N}$, $r > 0$, donde $F'(0) = A$ y $F(0) = 0$. Entonces el conjunto*

$$A = \left\{ \frac{\|F^j(z)\|}{\|z\|}; 0 \leq j < m; 0 < \|z\| < r \right\}.$$

es acotado.

Demostración. Si $j = 0$, no hay nada que probar, ya que $F^0 = I$. Como F^j es holomorfa en 0 con $(F^j)(0) = 0$ y $(F^j)'(0) = A^j$, para $0 < j < m$. Se sigue que para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe δ_j tal que

$$\|F^j(z) - A^j(z)\| \leq \frac{1}{2}\|z\|$$

para $\|z\| < \delta_j$ y $0 < j < m$. Luego, se tiene

$$\begin{aligned}
\|F^j(z)\| &\leq \frac{1}{2}\|z\|+\|A^j\|\|z\| \\
\frac{\|F^j(z)\|}{\|z\|} &\leq \frac{1}{2}+\|A^j\|.
\end{aligned}$$

Sea $C = \max\left\{\frac{1}{2}+\|A^j\|\right\}$, $\delta = \min \delta_j$, donde $0 < j < m$. Entonces obtenemos $\frac{\|F^j(z)\|}{\|z\|} \leq C$, donde $0 < \|z\| < \delta$ y $0 < j < m$. Ahora, si $r \leq \delta$ no hay nada que probar, pero si $\delta < r$ se sigue que $\frac{1}{\delta} \geq \frac{1}{\|z\|} > \frac{1}{r}$. Además $|F^j(z)| \leq K$ para $0 \leq j < m$, ya que $F^j(\bar{B}(0;r))$ es acotado. Por lo tanto $\frac{\|F^j(z)\|}{\|z\|}$ es acotado. De esta manera la prueba queda finalizada. $\square$

Lema 2.3. *Sea $F \in Aut(\mathbb{C}^n)$, $a > 0$ tal que $F'(0) = I$ y $F(0) = 0$. Entonces existe $b > 0$ tal que*

$$\|z - F(z)\| \leq b\|z\|^2$$

con $\|z\| \leq a$.

Demostración. Sea $F = (F_1, ..., F_n)$ y $z = (z_1, ..., z_n)$. Como $F'(0) = I$, si expresamos a F_1 en su serie de potencias alrededor del 0 tenemos que $F_1(z) = \sum\limits_{|k|\geq 1} b_k^1 z^k$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|z_1 - F_1(z)\| &= \| \sum_{|k|\geq 2} b_k^1 z^k \| \\
&\leq \sum_{|k|\geq 2} |b_k^1||z_1|^{k_1}...|z_n|^{k_n} \\
&\leq \sum_{|k|\geq 2} |b_k^1|\|z\|^k.
\end{aligned}$$

Esta última serie, como $F_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, por el corolario 1.67 converge uniformemente para todo $K \subset \mathbb{C}^n$ compacto. Reordenando la serie $\sum\limits_{|k|\geq 2} |b_k^1|\|z\|^k$ obtendremos $\sum\limits_{i\geq 2} \alpha_i\|z\|^i = \|z\|^2 \sum\limits_{i\geq 2} \alpha_i\|z\|^{i-2}$. Por lo tanto, si $\|z\| \leq a$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|z_1 - F_1(z)\| &\leq \sum_{i\geq 2} \alpha_i\|z\|^i \\
&\leq \|z\|^2 \sum_{i\geq 2} \alpha_i\|z\|^{i-2} \\
&\leq \|z\|^2 \sum_{i\geq 2} \alpha_i a^{i-2}.
\end{aligned}$$

La serie $\sum\limits_{i\geq 2} \alpha_i\|z\|^{i-2}$ converge para $\|z\| = a$ debido a la convergencia de $\sum\limits_{i\geq 2} \alpha_i a^i$. Si $b_1 = \sum\limits_{i\geq 2} \alpha_i a^{i-2}$ entonces $\|z_1 - F_1(z)\| \leq b_1\|z\|^2$. Siguiendo con el mismo razonamiento se tendrá $\|z_j - F_j(z)\| \leq b_j\|z\|^2$ para $j = 1, 2, ..., n$. Usamos la norma del máximo en $\mathbb{C}^n$ y sea $b = \max_{1\leq j\leq n} b_j$ obtenemos

$$\|z - F(z)\| \leq b\|z\|^2.$$

□

Lema 2.4. *Sea A un operador lineal en $\mathbb{C}^n$ tal que $\rho(A) < 1$. Entonces $A^k(v) \to 0$ para todo $v \in \mathbb{C}^n$.*

Demostración. Como $\rho(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} < 1$, entonces existe $k_0 \in N$ y $r < 1$ tal que

$$\|A^k\|^{\frac{1}{k}} < r$$
$$\|A^k\| < r^k$$

para $k \geq k_0$. Por lo tanto, $\|A^k\| \to 0$ y, como $\|A^k(v)\| \leq \|A^k\|\|v\|$ para $v \in \mathbb{C}^n$, obtenemos lo deseado:

$$A^k(v) \to 0.$$

□

Lema 2.5. *Sea $F \in Aut(\mathbb{C}^n)$ con $F(0) = 0$ y $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ abierto y conexo. Entonces $B = \bigcup\limits_{-\infty}^{\infty} F^k(\Omega)$ es abierto y conexo, donde F^k es la composición k-ésima de F.*

Demostración. Como F^k es holomorfa, entonces F^k es continua. $F^k(\Omega)$ es conexo, ya que Ω es conexo y F^k es continua. Además, $0 \in F^k(\Omega)$ para todo $k \in Z$ y en consecuencia $\bigcup\limits_{-\infty}^{\infty} F^k(\Omega)$ es conexo. Sea $F^k = (F_1^k, ..., F_n^k)$. Ya que $F^k \in Aut(\mathbb{C}^n)$ entonces $F_i^k : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa no constante. Por el teorema 1.31, $F_i^k(\Omega)$ es abierto para todo $i = 1, 2, 3...n$. Por lo tanto $F^k(\Omega)$ es abierto para todo $k \in Z$. Como consecuencia $\bigcup\limits_{-\infty}^{\infty} F^k(\Omega)$ es abierto y de ahí se tiene que B es abierto y conexo. □

Antes de probar el siguiente lema recordaremos algunas definiciones. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con U conjunto abierto.

Definición 2.6. Diremos que f es Lipchitz sobre el conjunto U, cuando existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

para $x, y \in U$. Si $L < 1$, decimos que f es una contracción.

Definición 2.7. f es localmente Lipchitz sobre el conjunto U, cuando dado un punto arbitrario $x_0 \in U$, existe una constante $L_0 > 0$ y una bola abierta $B_{r_0}(x_0)$ tal que f es Lipchitz sobre $B_{r_0}(x_0)$ de constante L_0.

Lema 2.8. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Se tiene que f es localmente Lipchitz sobre U si y solo si para todo $K \subset U$ compacto, f es Lipchitz sobre K.*

Demostración. Sea $K \subset U$ compacto. Como f es localmente Lipchitz para cada $x \in K$ existe un $r_x > 0$ y $L_x > 0$ tal que f es L_x Lipchitz sobre $B_{r_x}(x)$. Entonces las bolas abiertas $B_{\frac{r_x}{2}}(x)$ con $x \in K$ forman un cubrimiento abierto de K. Así, existe un subcubrimiento finito que lo denotaremos $B_{\frac{r_k}{2}}(x_k)$ con $k = 1, ..., m$. Sea $M = \sup_{x \in K} |f(x)|$, $r = \frac{1}{2} \min r_k$, $L_0 = \dfrac{2M}{r}$ y $L = \max(L_0, L_k)$. Entonces L es la constante de Lipchitz para f sobre K. Para ver esto tomamos x,$y \in K$. Si $|x - y| \geq r$ entonces vemos que

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \frac{2M}{r} \leq L.$$

Ahora, si $|x - y| < r$ entonces para algún x_k tenemos que $x \in B_{\frac{r_k}{2}}(x_k)$. De esta manera $y \in B_{r_k}(x_k)$ y por lo tanto

$$|f(x) - f(y)| \leq L_k |x - y| \leq L|x - y|,$$

con lo cual queda probado la ida. Para probar el otro sentido. Sea $x \in U$ y la bola cerrada $B_r[x] \subset U$, que es un compacto. Entonces f es Lipchitz en $B_r[x]$. Es decir, f es localmente Lipchitz sobre U. □

Corolario 2.9. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ y $F : U \longrightarrow \mathbb{C}^m$ holomorfa. Entonces F es Lipchitz para todo conjunto compacto $K \subset U$.*

Demostración. Como F es holomorfa, entonces por el lema 1.65 tenemos que $F \in C^1(U)$. Además, por un resultado conocido de análisis, si $F \in C^1(U)$ se tiene que F es localmente Lipchitz en U y por el lema anterior F es Lipchitz para todo compacto $K \subset U$. □

Para demostrar el siguiente lema usaremos el teorema 1.86 desigualdad del valor medio y el teorema 1.87 perturbación de la identidad). Lo que usaremos del teorema de la perturbación de la identidad, es el hecho de que $f(U)$ es abierto. En la prueba realizada en [Lag99] se toma un elemento $a \in U$, con $f(a) = b \in f(U)$. Se consigue una bola abierta $B_s(b) \subset f(U)$, donde el radio está dado por $s = (1 - \lambda)r$, donde λ es la constante de contracción de φ y r es tal que $B_r[a] \subset U$. Se puede observar que el radio de la bola abierta $B_s(b)$ solo depende de la constante de contracción λ de φ y del radio r de la bola cerrada $B_r[a] \subset U$. Este hecho lo usaremos en la prueba del siguiente lema.

Lema 2.10. *Sea $F_n \in Aut(\mathbb{C}^n)$, donde $F_n \longrightarrow F$ de manera compacta en Ω, con $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Sea $a \in \Omega$ tal que $JF(a) \neq 0$ y $F(a) = b$. Entonces existe $r > 0$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $B_r(b) \subset F_n(\Omega)$ para todo $n \geq n_1$.*

Demostración. Sea $a \in \Omega$, con $F(a) = b$. Como $JF(a) \neq 0$, por el teorema 1.71 de la función inversa se puede encontrar una bola abierta $B_{r_2}(b)$ y una vecindad abierta V_a de a tal que

$$F^{-1} : B_{r_2}(b) \longrightarrow V_a$$

es holomorfa. Además, como $F_n \longrightarrow F$ de manera compacta, existe una bola cerrada $B_{r_3}[a] \subset V_a$ tal que

$$|F_n(z) - F(z)| < \frac{r_2}{2}$$

para $n \geq n_0$. Por otra parte, F es continua en a, entonces existe $B_{r_4}(a) \subset \Omega$ tal que

$$|F(z) - b| < \frac{r_2}{2} \text{ para } z \in B_{r_4}(a).$$

Por lo tanto, escogiendo $r_1 = \min\{r_3, r_4\}$, para $z \in B_{r_1}(a)$ y $n \geq n_0$ se tiene

$$|F_n(z) - b| \leq |F_n(z) - F(z)| + |F(z) - b| < \frac{r_2}{2} + \frac{r_2}{2} = r_2.$$

Se han encontrado 2 bolas abiertas $B_{r_1}(a) \subset \Omega$, $B_{r_2}(b)$ y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_n(B_{r_1}(a)) \subset B_{r_2}(b)$ y $F(B_{r_1}(a)) \subset B_{r_2}(b)$ para $n \geq n_0$. Ahora, definamos g_n como $g_n = F^{-1} \circ F_n : B_{r_1}(a) \to V_a$.Ya que $F_n \to F$ de manera compacta en Ω, para un n suficientemente grande $F_n(z)$, $F(z)$ estarán contenidos en un compacto de $B_{r_2}(b)$. Por otra parte, F^{-1} es holomorfa en $B_{r_2}(b)$ y, por el corolario 2.9, F^{-1} es Lipchitz en todo compacto $K \subset B_{r_1}(b)$. De esta forma tenemos para $z \in K$ y $n \geq n_0$

$$|F^{-1}(F_n(z)) - F^{-1}(F(z))| \leq \lambda |F_n(z) - F(z)| < \lambda\epsilon.$$

De esta manera $g_n \to I$ de forma compacta en $B_{r_1}(a)$. Luego, si definimos $\varphi_n = g_n - I$ entonces $\varphi_n \to 0$ de manera uniforme en cada compacto de $B_{r_1}(a)$. Como consecuencia, si usamos el teorema 1.54, tenemos que $D\varphi_n \to 0$ de manera compacta. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar la misma bola $B_{r_1}(a)$ tal que $\|D\varphi_n(x)\| \leq \frac{1}{2}$ para todo $x \in B_{r_1}(a)$ y n suficientemente grande. Así que, si usamos el teorema 1.86 tenemos

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

para $x, y \in B_{r_1}(a)$ y $n \geq n_1$. Luego, definimos $g_n = I + \varphi_n$, siendo φ_n contracción con $\lambda = \frac{1}{2}$ para todo $n \geq n_1$. Ahora, si aplicamos el teorema 1.87 a g_n tendremos que $g_n(B_{r_1}(a))$ es abierto . Si $g_n(a) = a_n$ entonces existe una bola abierta $B_s(a_n)$ tal que $B_s(a_n) \subset g_n(B_{r_1}(a))$ para $n \geq n_1$. Por otra parte, como $a_n \to a$, se puede encontrar un $s_1 > 0$ y n suficientemente grande tal que

$$B_{s_1}(a) \subset B_s(a_n) \subset g_n(B_{r_1}(a)). \tag{2.1}$$

Por último, aplicamos F en (2.1), sabiendo que F es abierto debido a que es biholomorfo en una vecindad de a. Entonces existe un $r > 0$ tal que

$$B_r(b) \subset F(B_{s_1}(a)) \subset F_n(B_{r_1}(a)) \subset F_n(\Omega)$$

para $n \geq n_1$. □

Lema 2.11. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $f_n \in \mathcal{O}(\Omega; \mathbb{C})$ tal que no se anulan en Ω y $f_n \longrightarrow f$ en la topología de la convergencia compacta sobre Ω. Entonces f es idénticamente nula en Ω o nunca se anula en Ω.*

Demostración. Para el caso $n = 1$, esto ya fue desarrollado en el corolario 1.20. Ahora, veamos cuando $n = 2$. Supongamos que existe un punto $(p_1, p_2) \in \Omega$ tal que $f(p_1, p_2) = 0$. Como $(p_1, p_2) \in \Omega$ es abierto, existe una bola abierta $B_r(p_1, p_2)$ tal que $B_r(p_1, p_2) \subset \Omega$. Sea $\pi_1(B_r(p_1, p_2)) = \Delta_1$, la proyección a la primera coordenada del conjunto $B_r(p_1, p_2)$ y $\pi_2(B_r(p_1, p_2)) = \Delta_2$, la proyección a la segunda coordenada del conjunto $B_r(p_1, p_2)$. Ambos conjuntos son dominios, ya que las proyecciones son abiertas y continuas. Ahora, definimos $g_n(z) = f_n(z, p_2) \in O(\Delta_1)$,$g(z) = f(z, p_2)$. Se observa que $g_n \to g$ en la topología de la convergencia compacta en Δ_1. Además, g_n no se anula en Δ_1 y $g(p_1) = 0$. Por lo tanto, $g(z) = f(z, p_2) = 0$ para todo $z \in \Delta_1$. Siguiendo la misma idea para cada $z^1 \in \Delta_2$ tendremos que $f(z, z^1) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $(z, z^1) \in B_r(p_1, p_2)$. De esta manera $f(z_1, z_2) = 0$, para todo $(z_1, z_2) \in B_r(p_1, p_2)$. Finalmente, por el teorema 1.30 de la identidad $f(z_1, z_2) = 0$ para todo $(z_1, z_2) \in \Omega$. Un similar argumento se aplica para cualquier valor de n. □

Lema 2.12. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $F_n \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^n)$ tal que $F_n \to F$ uniformemente sobre todo compacto $K \subset \Omega$. Entonces $JF_n \to JF$ uniformemente sobre todo compacto $K \subset \Omega$.*

Demostración. Sea $F_k = (F_{1k}, ..., F_{nk})$ y $F = (F_1, ..., F_n)$. Ahora, definamos las siguientes aplicaciones $\Psi_k : \Omega \to \mathbb{C}^{nxn}$ y $\Psi : \Omega \to \mathbb{C}^{nxn}$ de la siguiente manera

$$\Psi_k(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_{1k}(z)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{1k}(z)}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{nk}(z)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{nk}(z)}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1(z)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1(z)}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n(z)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n(z)}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

Sea $\alpha_i = (0, .., 1..., 0)$ la n-upla que tiene en la i-ésima posición al 1 con $i = 1, ..., n$. Como $F_k \to F$ de manera compacta sobre Ω, tenemos por el teorema 1.54 de Weierstrass que $D^{\alpha_i} F_k \to D^{\alpha_i} F$ de manera compacta sobre Ω. Esto significa que

$$\left(\frac{\partial F_{1k}(z)}{\partial z_i}, ..., \frac{\partial F_{nk}(z)}{\partial z_i}\right) \longrightarrow \left(\frac{\partial F(z)}{\partial z_i}, ..., \frac{\partial F(z)}{\partial z_i}\right)$$

de manera compacta para $i = 1, ..., n$. Por lo tanto, cada coordenada de Ψ_k tiende uniformemente a cada coordenada de Ψ. Así, $\Psi_k \to \Psi$ de manera compacta sobre Ω. Ahora, si $\phi : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}$ es la función determinante definida por $\phi(A) = det(A)$, entonces el jacobiano de F y F_k estarían determinados por $JF = \phi \circ \Psi$, $JF_k = \phi \circ \Psi_k$ respectivamente. Escojamos $K \subset \Omega$ conjunto compacto. Debido a la convergencia uniforme de Ψ_k sobre Ψ se puede encontrar un conjunto compacto $M \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ y un $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\Psi_k(K) \subset M$ y $\Psi(K) \subset M$ para $k \geq k_0$. Por otra parte, ϕ es multiplicación de polinomios entonces tenemos que ϕ es holomorfa en $\mathbb{C}^{n\times n}$. En particular ϕ es de clase C^1, entonces ϕ es localmente Lipchitz en $\mathbb{C}^{n\times n}$. Por lo tanto, debido al colorario 2.9 se tiene que ϕ es Lipchitz sobre M. De esta manera existe un $L > 0$ tal que

$$|\phi(\Psi_k(x)) - \phi(\Psi(x))| \leq L|\Psi_k(x) - \Psi(x)|$$

para $x \in K$y $k \geq k_0$. Como consecuencia se tiene que $\Psi_k \to \Psi$ de manera compacta sobre Ω y así $JF_k \to JF$ uniformemente sobre K, con lo cual queda terminada la prueba. □

Lema 2.13. *Sea Ω un dominio, sea $F_n \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^n)$, donde cada F_n es inyectiva. Si $F_n \to F$ uniformemente para todo compacto $K \subset \Omega$ entonces o bien F es inyectiva, o bien JF es idénticamente nulo.*

Demostración. Sea $\Phi_n = JF_n$ y $\Phi = JF$. Debido al lema 2.12 nuestra hipótesis implica que Φ_n converge uniformemente Φ de manera compacta en Ω. Entonces por el lema 2.11 JF es idénticamente cero o nunca se anula en Ω. Ahora en el segundo caso, cuando $JF(z) \neq 0$ en Ω tendremos que F es localmente inyectiva y nosotros queremos mostrar que es inyectiva en Ω. Esto se sigue del lema 2.10. Si suponemos que F aplica dos puntos distintos p, q en el mismo punto w. Primero podemos conseguir 2 bolas abiertas $B_{r_1}(p)$, $B_{r_2}(q)$ tal que su intersección es vacía. Como $F_n \to F$ de manera compacta en Ω entonces tendremos que

$$F_n|_{B_{r_1}(p)} \longrightarrow F|_{B_{r_1}(p)} \text{ y } F_n|_{B_{r_2}(q)} \longrightarrow F|_{B_{r_2}(q)}$$

de manera compacta en sus respectivos dominios. Utilizando el lema 2.10 se puede encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ y una bola abierta $B_r(w)$ tal que $B_r(w) \subset F_n(B_{r_1}(p))$ y $B_r(w) \subset F_n(B_{r_2}(q))$ para $n \geq n_0$. De esta manera para $n \geq n_0$ existen $a_n \in B_{r_1}(p)$, $b_n \in B_{r_2}(q)$ tal que $F_n(a_n) = F_n(b_n) = w$. Esto es una contradicción, ya que cada F_n es inyectiva. $\square$

Definición 2.14. Decimos que un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $\Omega \neq \mathbb{C}^n$ es un dominio de Fatou-Bieberbach si es biholomorfo a $\mathbb{C}^n$, es decir, si existe un biholomorfismo $\Psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$.

El siguiente teorema que probaremos nos dará la posibilidad de encontrar dominios de Fatou-Bieberbach. Estas regiones serán generadas a través de las cuencas de atracción a un punto fijo mediante un automorfismo .

Teorema 2.15. *Sea $F \in Aut(\mathbb{C}^n), p \in \mathbb{C}^n, F(p) = p$, y suponga que los autovalores λ_i de $A = F'(p)$ son tales que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$ y*

$$|\lambda_1|^2 < |\lambda_n|. \tag{2.2}$$

Definimos

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \lim_{k\to\infty} F^k(z) = p\}. \tag{2.3}$$

Entonces Ω es abierto y conexo, y existe un biholomorfismo de Ω a $\mathbb{C}^n$, dado por

$$\Psi = \lim_{k\to\infty} B^{-k}F^k, \tag{2.4}$$

donde $B^{-k}(z) = A^{-k}(z-p)$. La convergencia en (2.4) es uniforme sobre subconjuntos compactos de Ω.

Al conjunto Ω se le denomina cuenca de atracción hacia el punto fijo p a través del automorfismo F. Note que (2.2) implica que $0 < |\lambda_i| < 1$ para todo

$i = 1, 2, ..., n$. Podemos describir a Ω como el dominio que es atraída hacia p por F. Una inmediata consecuencia de (2.4) es la ecuación funcional

$$\Psi = A^{-1}\Psi F.$$

Además se tiene que $J\Psi \equiv 1$ siempre cuando JF sea constante.

Demostración. Podemos suponer $p = 0$ sin pérdida de generalidad. En caso contrario, definimos $G(z) = F(z + p) - p$ obteniendo $G(0) = 0$. Sean las constantes $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta$ tal que $\alpha < |\lambda_n|, |\lambda_1| < \beta_1 < \beta_2 < \beta$, y $\beta^2 < \alpha$. Escogiendo $\alpha = |\lambda_n| - \frac{(|\lambda_n| - |\lambda_1|^2)}{3}$, $\beta = \sqrt{\frac{\alpha + |\lambda_1|^2}{2}}$, $\beta_2 = \frac{\beta + |\lambda_1|}{2}$ y $\beta_1 = \frac{\beta_2 + |\lambda_1|}{2}$ se obtiene lo afirmado. Como el radio espectral de A está dado por

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$$

y $\rho(A) = |\lambda_1| < \beta_1$. Entonces existe $N > 0$ tal que si $k \geq N$, se tiene

$$\beta_1^k > \|A^k\|.$$

De igual forma para el radio espectral de A^{-1} se tiene

$$\rho(A^{-1}) = \lim_{k\to\infty} \|(A^{-1})^k\|^{\frac{1}{k}}$$

y los autovalores de A^{-1} son $\lambda_1^{-1}; \lambda_2^{-1}; ...; \lambda_n^{-1}$. Además, tenemos que $\rho(A^{-1}) = |\lambda_n|^{-1} < \alpha^{-1}$. Entonces existe $M > 0$ tal que si $k \geq M$, se tiene

$$\alpha^{-k} > \|A^{-k}\|.$$

Sea $m = \max\{N, M\}$. Se sigue que $\alpha^{-k} > \|A^{-k}\|$ y $\beta_1^k > \|A^k\|$ para todo $k \geq m$. Ahora, aplicamos el lema 2.1 en F para obtener un $r > 0$ tal que

$$\|F^m(z)\| \leq \beta_2^m \|z\| \tag{2.5}$$

para $\|z\| \leq r$. Definimos $M = sup\{\frac{|F^j(z)|}{|z|}; 0 \leq j < m; 0 < |z| < r\}$, por el lema 2.2 el conjunto está bien definido. Ahora, acotaremos $\|F^N(z)\|$ para $N \in \mathbb{N}$ y $\|z\| < r$. Para ello, primero acotemos $\|F^{2m}(z)\|$. Si usamos (2.5), tenemos

$$|F^{2m}(z)| = |F^m(F^m(z))| \leq \beta_2^m |F^m(z)| \leq \beta_2^{2m} |z| < r.$$

Luego, sea $N = km + j, k = 1, 2, 3, ..., 0 \leq j < m$ y $\|z\| < r$. Si seguimos con la iteración obtendremos que $\|F^{km}(z)\| \leq \beta_2^{km}|z| < r$. Por lo tanto,

$$|F^N(z)| = |F^j(F^{km}(z))| \leq C|F^{km}(z)| \leq C\beta_2^{km}\|z\|.$$

Como $C\beta_2^{km}|z|< Cr\beta_2^{km}$, si despejamos k de la desigualdad $Cr\beta_2^{km} \leq \beta^N$, obtenemos $k \geq \dfrac{ln(\frac{\beta^N}{Cr})}{mln(\beta_2)}$. De esta manera, para todo número suficientemente grande $N \geq N_0$ (donde $N_0 \geq m$ depende solo de m y r) se cumplirá que

$$\|F^N(z)\|< \beta^N \tag{2.6}$$

para $\|z\|< r$. Se sigue de (2.6) que $B(0;r) \subset \Omega$, ya que $\beta < 1$. Como consecuencia se tiene

$$\Omega = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} F^k(B(0;r)). \tag{2.7}$$

En efecto, sea $z = F^p(u)$, $p \in Z$ con $|u|< r$. Ya que $B(0;r) \subset \Omega$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F^n(z) &= \lim_{n\to\infty} F^{n+p}(u) \\ &= \lim_{n\to\infty} F^n(u) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $z \in \Omega$, con lo cual tenemos $\bigcup_{-\infty}^{+\infty} F^k(B(0;r)) \subset \Omega$. Probemos la otra inclusión. Si $a \in \Omega$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|F^m(a)|< r$. Como consecuencia, si $b = F^m(a)$ tenemos que $F^{-m}(b) = a$. Entonces $a \in F^{-m}(B(0;r))$ y se sigue que $\Omega \subset \bigcup_{-\infty}^{+\infty} F^k(B(0;r))$. De esta manera queda probado (2.7). De (2.7) y del lema 2.5 se sigue que Ω es abierto y conexo. También de (2.7) obtenemos que $F(\Omega) = \Omega$. Ahora, probaremos la convergencia dada en (2.7). Escojamos un conjunto compacto $K \subset \Omega$. De (2.7) tenemos que $K \subset \bigcup_{-\infty}^{+\infty} F^k(B(0;r))$. Luego de la compacidad de K se obtiene $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} F^{k_i}(B(0;r))$. Se sigue de (2.6) que existe un $N_1 \geq N_0$ tal que

$$\|F^{N_1}(z)\|< \beta^{N_1} < r$$

para $z \in B(0;r)$. Sea $s = \max\{N_1 - k_i, 1\}$ con $1 \leq i \leq n_0$ y $z \in K$. Evaluemos F^s en z

$$F^s(z) = F^s(F^{k_i}(u)) = F^{s+k_i}(u)$$

donde $u \in B(0;r)$. Como $s \geq N_1 - k_i$ tenemos que $s + k_i \geq N_1$. Luego,

$$F^s(z) < \beta^{s+k_i} \leq \beta^{N_1} < r.$$

Entonces $F^s(K) \subset B(0;r)$ y de ahí se sigue que $K \subset F^{-s}(B(0;r))$. Ahora, si $z \in K$ se tiene $\|F^N(z)\| = \|F^N(F^{-s}(u))\| = \|F^{N-s}(u)\|$, con u $\in B(0;r)$. Se sigue de (2.6) que

$$\|F^N(z)\| \leq \beta^{N-s} = a\beta^N \qquad (z \in K, N \geq s + N_0) \tag{2.8}$$

donde $a = \beta^{-s}$. Debido a que $(A^{-1} \circ F)'(0) = I$ y si usamos el lema 2.3, existe una constante b tal que

$$\|w - A^{-1}F(w)\| \leq b\|w\|^2 \qquad (\|w\| \leq a). \tag{2.9}$$

Así, si $z \in K$ y establecemos $w_N = F^N(z)$, obtenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned}\|A^{-N}F^N(z) - A^{-N-1}F^{N+1}(z)\| &\leq \|A^{-N}\| |w_N - A^{-1}F(w_N)| \\ &\leq \alpha^{-N} b |w_N\|^2 \leq a^2 b \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^N\end{aligned}$$

para todo $N \geq s + N_0$. De esto obtendremos

$$\begin{aligned}\|A^{-N}F^N(z) - A^{-N-k}F^{N+k}(z)\| &\leq a^2 b \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^N + ... + a^2 b \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{N+k} \\ &\leq a^2 b \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^N \left(1 + ... + \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^k\right) \\ &\leq \frac{a^2 b \alpha}{\alpha - \beta^2} \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^N.\end{aligned}$$

Debido a que $\frac{\beta^2}{\alpha} < 1$, se sigue que la sucesión $\Psi_k(z) = \left(A^{-k}F^k(z)\right)$ es una sucesión de Cauchy para todo $z \in K$. Como $\mathbb{C}^n$ es completo, entonces existe $\lim_{k\to\infty} A^{-k}F^k(z)$ y lo denotaremos como $\Psi(z)$. Entonces se verifica (2.4) y por el teorema 1.43 Ψ es holomorfa en Ω. Ahora, probemos que Ψ es inyectiva. Sabemos que Ψ es el límite de automorfismos $\Psi_k = A^{-k} \circ F^k$ y esta convergencia es uniforme en compactos de Ω. Si utilizamos el lema 2.13 en Ψ_k tenemos que Ψ es inyectiva o $J\Psi$ es idénticamente nulo. Calculemos el $J\Psi_k(0)$. Para ello, derivamos Ψ_k en 0

$$\begin{aligned}(\Psi_k)'(0) &= (A^{-k} \circ F^k)'(0) = (A^{-k})'(F^k(0))(F^k)'(0), \\ (\Psi_k)'(0) &= A^{-k}A^k = I.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $J\Psi_k(0) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Debido a que $\Psi_k \to \Psi$ uniformemente en compactos, entonces, por el lema 2.12, $J\Psi_k(0) \to J\Psi(0) = 1$. Así, $J\Psi$ no es idénticamente nulo, entonces Ψ es inyectiva. Ahora probemos que Ψ es sobreyectiva. Ya que $F(\Omega) = \Omega$ y $\Psi = A^{-1}\Psi F$, observamos que Ψ y $A^{-1}\Psi$ tienen la misma imagen. Sea $\Psi(\Omega) = U$. Como el radio espectral de A es menor que uno, utilizando el lema 2.4, si $v \in \mathbb{C}^n$, entonces $A^k(v) \to 0$. Luego, como U contiene una vecindad de 0, tenemos para un k_0 suficientemente grande $A^{k_0}(v) \in U$. De la relación $A^{-1}(U) = U$ se tiene $A^{-k}(U) = U$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De esta manera, como $A^{k_0}(v) \in U$ tenemos que $A^{-k_0}(A^{k_0}(v)) = v \in U$. Por lo tanto $U = \mathbb{C}^n$, así Ψ es sobreyectiva y por el corolario 1.82 Ψ^{-1} es holomorfa. De esta manera Ψ es un biholomorfismo. Supongamos que el JF sea contamte, entonces $JF(z) = det(A)$. Como $\Psi_k = A^{-k} \circ F^k$ se tiene que $J\Psi_k(z) = 1$. Finalmente por el lema 2.12, $J\Psi_k(z) \to J\Psi(z) = 1$. De esta manera queda probado el teorema. □

Ahora veremos algunos ejemplos de aplicación de este teorema que acabamos de probar.

Ejemplo 2.16. En este ejemplo, primero definiremos una aplicación holomorfa F que nos mostrará la importancia de la condición (2.2) en el teorema 2.15. Luego, modificaremos un poco la aplicación holomorfa F, para obtener el primer ejemplo de un dominio de Fatou-Bieberbach. Definamos $F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ por $F(z, w) = (\alpha z, \beta w + z^2)$, donde $0 < \beta < \alpha < 1$. Veamos que F es inyectiva. Sea $F(z_1; w_1) = F(z_2; w_2)$. Luego,

$$(\alpha z_1, \beta w_1 + z_1^2) = (\alpha z_2, \beta w_2 + z_2^2)$$

entonces $\alpha z_1 = \alpha z_2$ y $\beta w_1 + z_1^2 = \beta w_2 + z_2^2$. Como $\alpha > 0$, de la primera igualdad se obtiene que $z_1 = z_2$. Reemplazamos esto en la segunda igualdad y como $\beta > 0$ obtenemos $w_1 = w_2$. Por lo tanto F, es inyectiva. Ahora, veamos que F es sobreyectiva. Sea $(u; v) \in \mathbb{C}^2$ tal que $F(z; w) = (u; v)$. Se sigue que $\alpha z = u$ y $\beta w + z^2 = v$. Resolviendo obtenemos $z = \dfrac{u}{\alpha}$ y $w = \dfrac{1}{\beta}(v - \dfrac{u^2}{\alpha^2})$, con lo cual F es sobreyectiva. F es holomorfa, ya que sus componentes son polinomios. De igual forma $F^{-1}(z; w) = \left(\dfrac{z}{\alpha}, \dfrac{w}{\beta} - \dfrac{z^2}{\beta\alpha^2}\right)$, también es holomorfa por la misma razón. Por lo tanto, $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$. El automorfismo F fija el origen, es decir, $F(0, 0) = (0, 0)$. La derivada de F en $(0, 0)$ está dado por

$$A = F'(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Por inducción se tiene que

$$F^k(z, w) = (\alpha^k z, \beta^k w + \beta^{k-1}(1 + c + ... + c^{k-1})z^2),$$

donde $c = \alpha^2/\beta$. En consecuencia se tiene

$$(A^{-k}F^k)(z,w) = (z, w + \beta^{-1}(1 + c + ... + c^{k-1})z^2).$$

El coeficiente de z^2 en la segunda componente de $A^{-k}F^k$ tiende a infinito, excepto si $c < 1$, es decir, cuando $\alpha^2 < \beta$. En conclusión, la secuencia (2.4) del teorema 2.15 puede no converger si se omite la condición (2.2) de dicho teorema. De esta manera usando el teorema 2.15 se obtiene un dominio Ω biholomorfo a $\mathbb{C}^2$, pero este dominio atraída al origen vía F es todo $\mathbb{C}^2$. Para evitar esta situación, definimos $G(z,w) = (\alpha z + (\beta w + z^2)^2, \beta w + z^2)$. De nuevo, $G \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ y $F'(0,0) = G'(0,0)$. Los coeficientes en G^k son al menos tan grandes como los de F^k. Sabemos que el coeficiente de z^2 en $A^{-k}F^k$ diverge, por lo tanto $A^{-k}G^k$ seguirá divergiendo cuando $\alpha^2 \geq \beta$. Pero, ahora el dominio Ω que es atraída hacia 0 por G, no es todo $\mathbb{C}^2$, ya que G tiene otros tres puntos fijos dados por $z^3 = (1-\alpha)(1-\beta)^2$ y $w = z^2/(1-\beta)$. De esta manera el conjunto Ω es un dominio de Fatou-Bieberbach.

Ejemplo 2.17. Ahora, mostraremos un ejemplo de un dominio de Fatou-Bieberbach $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ cuya intersección con cada línea compleja está limitada. Para ello definamos $F(z,w) = (u,v)$ por

$$u = \alpha w, \quad v = \alpha z + w^2 \tag{2.10}$$

para algún α fijo, $0 < |\alpha| < 1$. Mostraremos que $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$. Primero probaremos que F es inyectiva. Si $F(z_1,w_1) = F(z_2,w_2)$, entonces tenemos que $w_1 = \alpha w_2$ y $\alpha z_1 + w_1^2 = \alpha z_2 + w_2^2$. De la primera igualdad se tiene $w_1 = w_2$ y reemplazamos esto en la segunda igualdad obtenemos $z_1 = z_2$. F es sobreyectiva. En efecto, dado $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ existe $(\frac{v - \frac{u^2}{\alpha^2}}{\alpha}, \frac{u}{\alpha})$ tal que $F(\frac{v - \frac{u^2}{\alpha^2}}{\alpha}, \frac{u}{\alpha}) = (u,v)$. Luego, F es holomorfa, ya que cada componente es holomorfa. Por lo tanto del corolario 1.82, $F \in \mathrm{Aut}(\mathrm{C}^2)$. Por otra parte F fija $(0,0)$. Si hallamos $F'(0,0)$ tenemos

$$A = F'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculemos los autovalores de A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha \\ \alpha & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \alpha^2 = 0.$$

Por lo tanto, sus autovalores son $\pm\alpha$ y se tiene que $|\alpha|^2 < |\alpha|$. Así, se cumplen las condiciones del teorema 2.15. Sea Ω la región atraída al punto $(0,0)$ por

F como en el teorema mencionado. Definamos el siguiente conjunto

$$E = \{(z,w) \in C^2 / |w| > 1 + 2|\alpha| + |z|\}.$$

Ahora, mostraremos que $F(E) \subset E$. Sea $(z,w) \in E$. De la definición de F se sigue que

$$|v| = |\alpha z + w^2| \geq |w|^2 - |\alpha z|.$$

Como $(z,w) \in E$ tenemos que $|w| > |z|$. De esta manera conseguimos

$$|v| > |w|^2 - |\alpha w| = |w|(|w| - |\alpha|).$$

De igual forma, ya que $(z,w) \in E$ obtenemos que $|w| \geq 1 + 2|\alpha|$. Luego,

$$\begin{aligned} |v| &> |w|(|w| - |\alpha|) \geq |w|(|1 + |\alpha|) = |u| + |w| \\ |v| &> |u| + |w| > 1 + 2|\alpha| + |u|, \end{aligned}$$

de modo que $(u,v) \in E$. Así, $F(E) \subset E$ y se sigue que $F^k(E) \subset E$. Esto muestra que ningún punto de E se encuentra en Ω. Si existiese un punto $a \in E$ que perteneciera a Ω esto implicaría que el $0 \in \overline{E}$, lo que sería una contradicción, ya que todo $(z,w) \in E$ cumple que $|w| > 1$. Ahora, sea L una línea compleja en $\mathbb{C}^2$. Parametrizamos L por

$$z = a + b\lambda, w = c + d\lambda,$$

donde a, b, c, d son constantes complejas y λ varia en $\mathbb{C}$. Evaluamos F en L

$$F(z,w) = (\alpha c + \alpha\lambda d, \alpha a + \alpha\lambda b + (c + \lambda d)^2).$$

Mostraremos que tan pronto como $|\lambda|$ sea lo suficientemente grande se tendrá que $F(z,w) \in E$. Para ello se debe cumplir que

$$|\alpha a + \alpha\lambda b + (c + \lambda d)^2| > 1 + 2|\alpha| + |\alpha c + \alpha\lambda d|.$$

Tenemos la siguiente desigualdad

$$|\alpha a + \alpha\lambda b + (c + \lambda d)^2| \geq |d|^2|\lambda|^2 - (2|cd| + |\alpha b|)|\lambda| - |c|^2 - |\alpha a| = P(|\lambda|)$$

donde P es un polinomio dado por $P(x) = |d|^2x^2 - (2|cd| + |\alpha b|)x - |c|^2 - |\alpha a|$. Además, tenemos

$$1 + 2|\alpha| + |\alpha c + \alpha\lambda d| \leq 1 + |\alpha|(2 + |c|) + |\alpha d||\lambda| = Q(|\lambda|)$$

donde Q es el polinomio dado por $Q(x) = 1 + |\alpha|(2 + |c|) + |\alpha d|x$. Todo se reduce a probar que

$$P(|\lambda|) > Q(|\lambda|)$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande, lo que es equivalente a que $P(|\lambda|)-Q(|\lambda|) > 0$. Como $P(|\lambda|) - Q(|\lambda|)$ es un polinomio de segundo grado con coeficiente principal positivo, se tendrá lo pedido para $|\lambda|$ suficientemente grande. De esta manera, si (z, w) pertenece a la recta, entonces ya no pertenecerá a Ω para $|\lambda|$ suficientemente grande. Por lo tanto la intersección de Ω con cualquier línea compleja está limitada.

Ejemplo 2.18. Sea la función $F(z, w) = (u, v)$ dada por

$$u = z + w, \qquad v = \frac{1}{2}(1 - w - e^{z+w}). \tag{2.11}$$

F es holomorfa, ya que cada componente es holomorfa. De la definición de F se tiene que es inyectiva y sobreyectiva sobre $\mathbb{C}^2$. Utilizando el corolario 1.82 tenemos que $F \in \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$. Este automorfismo nos conduce a varios fenómenos interesantes. Hallemos los puntos fijos de F. Para ello igualamos $F(z, w) = (z, w)$. Así se tiene que

$$z + w = z, \qquad \frac{1}{2}(1 - w - e^{z+w}) = w.$$

Si resolvemos ambas ecuaciones obtenemos que $w = 0$ y $z = 2m\pi i$. Los puntos fijos son $p_m = (2m\pi i; 0)$, para cada entero m. Calculemos los autovalores de $F'(p_m)$

$$F'(z, w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}e^{z+w} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{z+w} \end{pmatrix}$$

$$F'(p_m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = A_m$$

$$|A_m - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}.$$

Así, tenemos que los autovalores de $F'(p_m)$ son $\pm 1/\sqrt{2}$. De esta manera se cumplen las condiciones del teorema 2.15. Por lo tanto, existen dominios de Fatou-Bieberbach disjuntas $\Omega_m \subset \mathbb{C}^2$ $(m = 0; \pm 1; \pm 2; ...)$, ya que son atraídas por diferentes puntos fijos p_m de F. Estos dominios de Fatou-Bieberbach son translaciones uno del otro:

$$\Omega_m = \Omega_0 + p_m. \tag{2.12}$$

Para obtener (2.12) tenga en cuenta que $F((z;w)+p_m) = F(z,w)+p_m$. Realizamos inducción sobre esta última igualdad para obtener

$$F^k((z,w)+p_m) = F^k(z,w)+p_m. \tag{2.13}$$

Ahora, si $(z,w) \in \Omega_0$ y tomando límite en (2.13)

$$\lim_{k\to\infty} F^k((z;w)+p_m) = \lim_{k\to\infty}(F^k(z;w)+p_m) = p_m.$$

Entonces se tiene que $\Omega_0 + p_m \subset \Omega_m$. Análogamente se prueba la otra inclusión $\Omega_m \subset \Omega_0 + p_m$. Por lo tanto, $\Omega_m = \Omega_0 + p_m$. La aplicación E dado por

$$E(u,v) = (e^u, ve^{-u}) \tag{2.14}$$

es uno a uno en cada Ω_m. En efecto, sea (a,b) y $(c,d) \in \Omega_m$ tal que $E(a,b) = E(c,d)$. Entonces tenemos $e^a = e^c$ y $be^{-a} = de^{-c}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Si resolvemos ambas ecuaciones, entonces $c = a + 2n\pi i$ y $b = d$. Se sigue que

$$(c,d) = (a,b) + (2n\pi i, 0).$$

Luego, evaluando en F^k y tomando límite se tiene

$$\begin{aligned} F^k((a,b)+(2n\pi i,0)) &= F^k(a,b)+(2n\pi i,0) \\ \lim_{k\to\infty} F^k(c,d) &= \lim_{k\to\infty}(F^k(a,b)+(2n\pi i,0) \\ p_m &= p_m + p_n. \end{aligned}$$

Así, obtenemos que $n = 0$. Por lo tanto, E es inyectiva en Ω_m. Por otra parte, de la definición de E y del hecho de que $\Omega_m = \Omega_0 + p_m$ tenemos

$$E(\Omega_m) = E(\Omega_0 + p_m) = E(\Omega_0).$$

Por consiguiente, el conjunto

$$\Omega^* = E(\Omega_m) \tag{2.15}$$

será independiente de m. Sea Ψ_0 el biholomorfismo de Ω_0 a $\mathbb{C}^2$ dado por el teorema 2.15. Entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega_0 \arrow[r, "E"] \arrow[d, "\Psi_0"'] & \Omega^* \arrow[dl, "\Psi\circ E^{-1}"] \\ C^2 & \end{tikzcd}$$

De esta manera, la aplicación $\Psi_0 \circ E^{-1} : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{C}^2$ nos da el dominio de Fatou-Bieberbach Ω^*. La región Ω^* en $\mathbb{C}^2$ no intersecta a la linea $z = 0$, ya que la imagen de E no lo intersecta. Además, dado que $JF \equiv -1/2$ (constante),por el teorema 2.15 se tiene $J\Psi = 1$. Si calculamos el jacobiano de E tenemos

$$JE = \begin{vmatrix} e^u & 0 \\ -ve^{-u} & e^{-u} \end{vmatrix} = 1$$

por lo cual $J(\Psi \circ E^{-1}) = J(\Psi).J(E^{-1}) = 1$. De esta forma, tanto los Ω_m como Ω^* son imágenes biholomorfas de $\mathbb{C}^2$ vía aplicaciones cuyos jacobianos son idénticamente a la unidad, por lo cual preservan el volumen. Es por eso que definimos E por (2.14) más que por la simple fórmula $E(u, v) = (e^u, v)$. Ya que si definimos E por $E(u, v) = (e^u, v)$ obtenemos todo lo anterior, pero el JE no es idéntico a la unidad.

Es conocido de [Gre72] que el rango de una aplicación holoforma de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$ no degenerado no puede omitir 3 líneas complejas. Mostraremos que esto no es cierto, si las líneas complejas son reemplazadas por traslaciones de R^2. Donde R^2 denota los puntos de $\mathbb{C}^2$ con ambas componentes reales. Definamos

$$\Pi_k = R^2 + ((2k+1)\pi i, 0)$$

para $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Se tiene que $F(\Pi_k) = \Pi_k$, y ningún p_m se encuentra en Π_k. Por lo tanto ningún punto de Π_k es atraído a cualquier p_m vía F. Con lo que concluimos que Π_k no intersecta a ningún Ω_m. Finalmente, modificaremos las regiones Ω_m para obtener dominios de Fatou-Bieberbach disjuntas $\hat{\Omega}_m$ con la siguiente propiedad:

Para cada m, $\hat{\Omega}_m \cap \{w = 0\}$ tiene infinitas componentes.

El teorema 1.18 (Picard) muestra que a lo más una línea $u =$ constante omite Ω_0. En efecto, supongamos que Ω_0 omite dos líneas $u = a$ y $u = b$. Consideremos la función proyección $\Pi_1 : \Omega_0 \to \mathbb{C} - \{a, b\}$, la proyección a la primera componente. Por otra parte, sabemos que existe un biholomorfismo $\Psi = \Psi_0^{-1} : \mathbb{C}^2 \to \Omega_0$. Así, tenemos $G = \Pi_1 \circ \Psi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} - \{a, b\}$ holomorfa. Sea L una recta compleja. Entonces G restricto a L, $G|_L \to \mathbb{C} - \{a, b\}$ omite dos puntos. Por el teorema 1.18 (Picard) tenemos que $G|_L$ es constante. Ya que la recta L es arbitraria se tiene que $G = \Pi_1 \circ \Psi$ es constante. Esto implica que la imagen de Ψ está incluido en una recta $u =$ constante, lo cual es una contradicción, ya que $\Psi(\mathbb{C}^2) = \Omega_0$ es un conjunto abierto. Así, Ω_0 contiene puntos $(u_s; v_s)$, con $u_s = s + iy_s$, $2\pi s < y_s \leq (2s+1)\pi$ para $s \in \mathbb{Z}$. Elegimos números complejos c_s, d_s tal que $c_s + \overline{d_s} = v_s$. Por otra parte, los e^{u_s} son no reales y ninguno dos de ellos son el complejo conjugado del otro. Como consecuencia de esto el conjunto $\{e^{u_s}; \overline{e^{u_s}}\}$ es localmente finito en $\mathbb{C}$. Entonces aplicamos el teorema 1.22 (Interpolación de Mittag- Leffter) al conjunto $\{e^{u_s}; \overline{e^{u_s}}\}$ y obtenemos una función entera $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(e^{u_s}) = c_s$ y $f(\overline{e^{u_s}}) = d_s$. Sea $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$ la serie de f alrededor de 0. Definimos $\overline{f}(z) = \overline{a_0} + \overline{a_1} z + ...$ La función $\overline{f}$ también es entera. Además, sea $g(z) = f(z) + \overline{f}(z)$. Esta función g cumple que $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ y $g(e^{u_s}) = v_s$. Definimos la aplicación holomorfa Φ

$$\Phi(u, v) = (u, v - g(e^u))$$

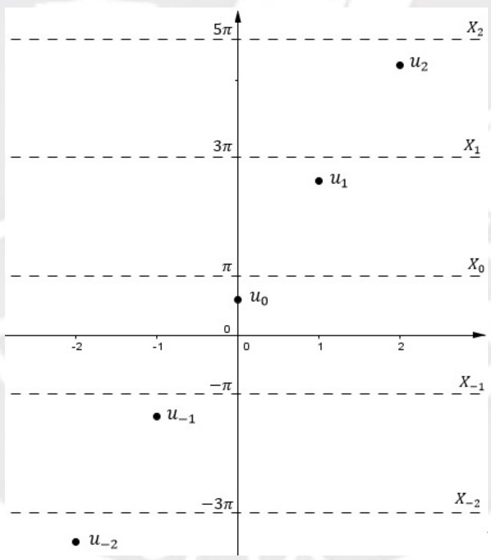
y hacemos $\hat{\Omega}_m = \Phi(\Omega_m)$. Ya que $\Phi(\Pi_k) = \Pi_k$, ningún Π_k intersecta a ningún $\hat{\Omega}_m$. Cada $\hat{\Omega}_m$ contiene los puntos

$$(u_s + 2m\pi i, v_s - g(e^{u_s + 2m\pi i})) = (s + (y_s + 2m\pi)i, 0),$$

uno en cada franja delimitada por las lineas reales

$$X_k = (x + (2k+1)\pi i, 0) \qquad (-\infty < x < \infty),$$

que se encuentran en Π_k para $s \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $\hat{\Omega}_m \cap \{w = 0\}$ tiene al menos una componente en cada una de estas franjas. En el siguiente gráfico se muestra las componentes de $\hat{\Omega}_0 \cap \{w = 0\}$.



Ejemplo 2.19. Acabamos de ver que existen dominios de Fatou- Bieberbach Ω_m en $\mathbb{C}^2$ que omiten infinitas traslaciones de R^2. Lo mismo puede ser demostrado para finitas rotaciones de R^2. Sea N un entero positivo. Ponemos $\alpha = e^{\frac{\pi i}{2N}}$ y $E_k = \alpha^k R^2$ para $k = 0, 1, 2, ..., 2N-1$. Cada E_k es una rotación de R^2. Definamos $F(z, w) = (u, v)$ por

$$u = z + w, \qquad v = \frac{1}{2N+1}[z + (z+w)^{2N+1}. \tag{2.16}$$

De la definición de F, se sigue que F es inyectiva y sobreyectiva. Además, F es holomorfa entonces por el corolario 1.82 $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$. También de la definición de F, se tiene que $F(E_k) = E_k$ para $k = 0, 1, 2, ..., 2N-1$. Hallemos los puntos fijos de F. De la igualdad $F(z; w) = (z; w)$ tenemos que $z + w = z$ y $\frac{1}{2N+1}[z + (z + w)^{2N+1}] = w$. Se sigue que $w = 0$, $z = 0$ o $z^{2N} = -1$. Resolviendo $z^{2N} = -1$ obtenemos los puntos fijos $(0, 0)$ y $p_m = (\alpha^m, 0)$, para m impar $(m = 1, 3, ..., 4N - 1)$. Calculemos los autovalores de $F'(p_m)$

$$F'(z,w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2N+1} + (z+w)^{2N} & (z+w)^{2N} \end{pmatrix}$$

$$F'(p_m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{2N+1} - 1 & -1 \end{pmatrix} = A_m$$

$$|A_m - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ \dfrac{1}{2N+1} - 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2N+1}.$$

Los autovalores de $F'(p_m)$ son $\pm(2N+1)^{-\frac{1}{2}}$. Se sigue del teorema 2.15 que existen N pares disjuntos dominios de Fatou-Bieberbach Ω_m, atraídos a p_m por F. Además si suponemos que algún $z \in \Omega_m$, pertenece también algún E_k. Se sigue del hecho de que $F(E_k) = E_k$ y que E_k es un conjunto cerrado,

$$\lim_{k\to\infty} F^k(z) \in E_k.$$

Pero como $z \in \Omega_m$ tenemos $\lim\limits_{k\to\infty} F^k(z) = (\alpha^m; 0) \in \Omega_m$, con m impar. Por lo tanto, k no puede ser par, de esta manera tenemos que

$$\Omega_m \subset \mathbb{C}^2 \backslash (E_0 \cup E_2 \cup ... E_{2N-2}).$$

Note también que $F(\alpha^2 z, \alpha^2 w) = \alpha^2 F(z, w)$, por (1). De esto uno puede deducir que la rotación $(z, w) \mapsto (\alpha^2 z, \alpha^2 w)$ permuta las regiones Ω_m.

Ejemplo 2.20. Mostraremos un dominio de Fatou-Bieberbach Ω_0 cuya clausura omite una línea compleja. Escogemos $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 < |\alpha| < 1$ y encontremos una función entera $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$e^{f(0)} = 1/\alpha, \quad f'(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Esto es posible, si consideramos que f es un polinomio de la forma

$$f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$$

con $a = 2log\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$, $b = -3log\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$, $c = 0$ y $d = log\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. Se puede observar que f cumple con las condiciones requeridas. Definamos $F(z, w) = (u, v)$ por

$$u = 1 - \alpha^2 + \alpha^2 z e^{f(zw)}, \quad v = we^{-f(zw)}.$$

F es holomorfa, ya que cada componente es producto y composición de funciones holomorfas. Veamos que F es inyectiva. Si $F(z_1, w_1) = F(z_2, w_2)$ tendríamos que

$$z_1 e^{f(z_1 w_1)} = z_2 e^{f(z_2 w_2)}, \quad w_1 e^{-f(z_1 w_1)} = w_2 e^{-f(z_2 w_2)}. \tag{2.17}$$

Multiplicamos ambas expresiones se obtiene $z_1 w_1 = z_2 w_2$. Reemplazando en (2.17) se obtiene que $z_1 = z_2$ y $w_1 = w_2$. Por lo tanto, F es inyectiva. Ahora, sea $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. Tomando $z = \frac{u-1+\alpha^2}{\alpha^2 e^{f(\frac{v.(u-1+\alpha^2)}{\alpha^2})}}$ y $w = ve^{f(\frac{v.(u-1+\alpha^2)}{\alpha^2})}$ se tendrá que $F(z, w) = (u, v)$. Por lo tanto, F es sobreyectiva. Por el corolario 1.82 tenemos que $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$. Además de la definición de F se observa que $(1, 1)$ es un punto fijo. Hallemos $F'(z, w)$

$$F'(z, w) = \begin{pmatrix} \alpha^2(e^{f(zw)} + ze^{f(zw)} f'(zw)w) & \alpha^2 z^2 e^{f(zw)} f'(zw) \\ -w^2 e^{-f(zw)} f'(zw) & e^{-f(zw)} - we^{-f(zw)} f'(zw)z \end{pmatrix},$$

reemplazando el punto $(1, 1)$ se tiene

$$F'(1, 1) = \begin{pmatrix} \dfrac{2\alpha^2}{1-\alpha^2} & \dfrac{\alpha^2+\alpha^4}{1-\alpha^2} \\ -\dfrac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} & \dfrac{-2\alpha^2}{1-\alpha^2} \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F'(1, 1)$ son $\pm i\alpha$ con $|\alpha|^2 < |\alpha|$. Así, F cumple las condiciones del teorema 2.15. Sea Ω_0 la región atraída a $(1, 1)$ por F. Por otra parte,

$$F(1 + \alpha; 0) = (1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^2(1 + \alpha)}{\alpha}; 0) = (1 + \alpha; 0)$$

entonces $(1 + \alpha, 0)$ es punto fijo de F. Si calculamos $F'(1 + \alpha, 0)$

$$F'(1 + \alpha, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

obtenemos que su autovalor es α, con $|\alpha|^2 < |\alpha|$. De esta manera F cumple con las condiciones del teorema 2.15 en el punto $(1+\alpha, 0)$. Sea Ω_1 la región atraída a $(1+\alpha, 0)$ via F. Entonces $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$. Además, se tiene que

$$F(z,0) = (1-\alpha^2+\alpha z, 0)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Se prueba por inducción que

$$F^k(z,0) = (1+\alpha-\alpha^k-\alpha^{k+1}+\alpha^k z, 0).$$

Entonces $\lim\limits_{k\to\infty} F^k(z,0) = (1+\alpha, 0)$, por lo tanto Ω_1 contiene a la recta $w = 0$. De esta forma Ω_1 sería una vecindad de la recta y como $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$ se tiene que $\overline{\Omega}_0$ no intersecta a la recta $w = 0$.

Antes de comenzar con el siguiente ejemplo, enunciaremos un lema que nos será de utilidad.

Lema 2.21. *Sean los discos abiertos* $X_p = 2^{4p}D(1, \frac{1}{4}) \subset \mathbb{C}$ *y* $\epsilon_p > 0$ *para* $p = 0, 1, 2, ...$ *Entonces existe una función entera* g *tal que*

$$e^{g(0)} = 2 \ y \ |\tfrac{1}{2} - e^g| < \epsilon_p \ en \ X_p$$

para $p = 0, 1, 2...$

Demostración. Primero, debido a que la función $f(z) = e^z$ es continua y $f(ln(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}$. Es suficiente para probar el lema , encontrar $\delta_p > 0$ tal que si

$$\left| g - ln(\frac{1}{2}) \right| < \delta_p \tag{2.18}$$

en X_p, entonces $|\frac{1}{2} - e^g| < \epsilon_p$ en X_p para $p = 0, 1, 2...$

Para ello, usaremos el teorema 1.23(Pequeño teorema de Runge). Sea un disco $\overline{D(0, r_1)}$ tal que $\overline{D(0, r_1)} \cap X_0 = \emptyset$. Consideremos la función constante $f_1(z) = ln(2)$. Observamos que es holomorfa en $\overline{D(0, r_1)}$ y $C \backslash \overline{D(0, r_1)}$ es conexo. Entonces por el teorema 1.23 f_1 se puede aproximar uniformemente en $\overline{D(0, r_1)}$ por polinomios en particular es aproximado en $D(0, r_1)$ de manera uniforme. Es decir, dado $\delta > 0$ existe polinomio P_1 tal que

$$|P_1(z) - ln(2)| < \frac{\delta}{2^2}, \forall z \in D(0, r_1). \tag{2.19}$$

Sea $P_1(0) = b_1$. Definamos el polinomio $Q_1(z) = P_1(z) - b_1 + ln(2)$ para obtener $Q_1(0) = ln(2)$. Si usamos (2.19) tenemos que

$$|Q_1(z) - ln(2)| \leq |P_1(z) - ln(2)| + |b_1 - ln(2)| < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2}$$

para $z \in D(0,r_1)$. Ahora, consideremos la función $f_2 : \overline{D(0,r_1)} \cup \overline{X_0} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_2(z) = 0$ en $\overline{D(0,r_1)}$ y $f_2(z) = ln(\frac{1}{2}) - Q_1(z)$ en $\overline{X_0}$. Observamos que f_2 es holomorfa y $\mathbb{C} \backslash \overline{D(0,r_1)} \cup \overline{X_0}$ es conexo. Entonces por el teorema 1.23 existe un polinomio P_2 tal que

$$|P_2(z)| < min\left\{\frac{\delta}{2^3}, \frac{\delta_0}{2^2}\right\}$$

en $D(0,r_1)$ y

$$|P_2(z) - (ln(\frac{1}{2}) - Q_1(z)| < min\left\{\frac{\delta}{2^3}, \frac{\delta_0}{2^2}\right\}$$

en X_0. Si $P_2(0) = b_2$, de la condición que cumple P_2 en $D(0,r_1)$ obtenemos que $|b_2| < min\{\frac{\delta}{2^3}, \frac{\delta_0}{2^2}\}$. Así, definimos $Q_2(z) = P_2(z) - b_2$ para obtener que $Q_2(0) = 0$. Luego,

$$|Q_2(z)| = |P_2(z) - b_2| \leq |P_2(z)| + |b_2| < min\left\{\frac{\delta}{2^2}, \frac{\delta_0}{2}\right\}$$

en $D(0,r_1)$. Por otra parte, se tiene en X_0 que

$$|Q_2(z) - (ln(\frac{1}{2}) - Q_1(z))| \leq |P_2(z) - (ln(\frac{1}{2}) - Q_1(z)| + |b_2| < \frac{\delta_0}{2^2} + \frac{\delta_0}{2^2} = \frac{\delta_0}{2}.$$

De esta manera conseguimos un polinomio Q_2 tal que $|Q_2(z)| < min\left\{\frac{\delta}{2^2}, \frac{\delta_0}{2}\right\}$ en $D(0,r_1)$ y $|Q_2(z) - (ln(\frac{1}{2}) - Q_1(z))| < \frac{\delta_0}{2}$ en X_0. Sea un disco $D(0,r_2)$ tal que $X_0 \subset D(0,r_2)$ y $\overline{D(0,r_2)} \cap \overline{X_1} = \emptyset$. Ahora, consideremos la función $f_3 : \overline{D(0,r_2)} \cup \overline{X_1} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_3(z) = 0$ en $\overline{D(0,r_2)}$ y $f_2(z) = ln(\frac{1}{2}) - Q_1(z) - Q_2(z)$ en $\overline{X_1}$. Así, f_3 es holomorfa y $\mathbb{C} \backslash \overline{D(0,r_2)} \cup \overline{X_1}$ es conexo. Entonces por el teorema 1.23 existe un polinomio P_3 tal que

$$|P_3(z)| < \min\left\{\frac{\delta}{2^4}, \frac{\delta_0}{2^3}, \frac{\delta_1}{2^2}\right\}$$

en $D(0,r_2)$ y

$$|P_3(z) - (ln(\frac{1}{2}) - Q_1(z) - Q_2(z))| < \min\left\{\frac{\delta}{2^4}, \frac{\delta_0}{2^3}, \frac{\delta_1}{2^2}\right\}$$

en X_1. Sea $P_3(0) = b_3$. Definamos $Q_3(z) = P_3(z) - b_3$ para obtener $Q_3(0) = 0$. Luego,

$$|Q_2(z)| < \min\left\{\frac{\delta}{2^3}, \frac{\delta_0}{2^2}, \frac{\delta_1}{2}\right\}$$

en $D(0, r_2)$ y en X_1 se tiene

$$|Q_3(z) - (ln(\frac{1}{2}) - Q_1(z) - Q_2(z))| < \frac{\delta_1}{2}.$$

De esta manera, obtendremos una sucesión de polinomios Q_k y discos $D(0, r_{k-1})$ tal que

$$|Q_k(z)| < \min\left\{\frac{\delta}{2^k}, \frac{\delta_0}{2^{k-1}}, ... \frac{\delta_{k-2}}{2}\right\} \tag{2.20}$$

en $D(0, r_{k-1})$ y

$$|Q_k(z) - (ln(\frac{1}{2}) - Q_1(z) - Q_2(z) - ... - Q_{k-1}(z))| < \frac{\delta_{k-2}}{2} \tag{2.21}$$

en X_{k-2}. Donde el disco abierto $D(0, r_{k-1})$ cumple que $X_{k-3} \subset D(0, r_{k-1})$ y $\overline{D(0, r_{k-1})} \cap \overline{X}_{k-2} = \emptyset$. Además, $Q_1(0) = ln(2)$ y $Q_k(0) = 0$ para $k \geq 2$. Definimos la serie $\sum\limits_{k\geq 1} Q_k(z)$. Probaremos que satisface las hipótesis del lema 1.24. Sea K un compacto de $\mathbb{C}$. Por la construcción de los polinomios Q_k existe un disco $D(0, r_{no})$ que contenga a K. Además, se cumple que

$$|Q_{n_0+1}(z)| < \frac{\delta}{2^{n_0+1}}$$

en $D(0, r_{n_0})$ y

$$|Q_{n_0+2}(z)| < \frac{\delta}{2^{n_0+2}}$$

en $D(0, r_{n_0+1})$. Pero como $D(0, r_{n_0}) \subset D(0, r_{n_0+1})$ se tiene que $|Q_{n_0+2}(z)| < \frac{\delta}{2^{n_0+2}}$ en $D(0, r_{n_0})$. Si seguimos este razonamiento, obtenemos

$$|Q_k(z)| < \frac{\delta}{2^k}$$

para $k \geq n_0 + 1$ y $z \in K$. Luego,

$$\sum_{k\geq n_0+1}^{\infty} |Q_k(z)| \leq \sum_{k\geq n_0+1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \frac{\delta}{2^{n_0}}.$$

Como $\sum_{k=1}^{n_0} Q_k(z)$ es continua en el compacto K entonces existe una constante M_K tal que $\sum_{k=1}^{n_0} |Q_k(z)| \leq M_K$ en K. Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k(z)| \leq \frac{\delta}{2^{n_0}} + M_K$$

para $z \in K$. Luego, por el lema 1.24 la serie $\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(z) = g(z)$ define una función entera con $g(0) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(0) = ln(2)$. Ahora, mostraremos que g satisface (2.18). Si fijamos un X_p tenemos que

$$\left|g(z) - ln(\frac{1}{2})\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(z) - ln(\frac{1}{2})\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(z) + \sum_{k=1}^{p+2} Q_k(z) - \sum_{k=1}^{p+2} Q_k(z) - ln(\frac{1}{2})\right|.$$

Se sigue que

$$\left|g(z) - ln(\frac{1}{2})\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{p+2} Q_k(z) - ln(\frac{1}{2})\right| + \left|\sum_{k=p+3}^{\infty} Q_k(z)\right|. \tag{2.22}$$

De (2.21) se tiene que

$$\left|\sum_{k=1}^{p+2} Q_k(z) - ln(\frac{1}{2})\right| < \frac{\delta_p}{2}. \tag{2.23}$$

Por otra parte, para Q_{p+3} de (2.20) se tiene

$$|Q_{p+3}(z)| < \frac{\delta_p}{2^2}$$

en $D(0, r_{p+2})$. Como $X_p \subset D(0, r_{p+2})$ la desigualdad anterior se cumplirá para X_p. Luego, usamos (2.20) en Q_{p+4} para obtener

$$|Q_{p+4}(z)| < \frac{\delta_p}{2^3}$$

en $D(0, r_{p+3})$. De igual forma, como $X_p \subset D(0, r_{p+3})$ la desigualdad anterior se cumplirá para X_p. Siguiendo con la misma idea se tendrá

$$|Q_k(z)| < \frac{\delta_p}{2^{k-1}}$$

en X_p para $k \geq p+3$. Luego,

$$\left|\sum_{k=p+3}^{\infty} Q_k(z)\right| \leq \sum_{k=p+3}^{\infty} |Q_k(z)| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\delta_p}{2^k}. \tag{2.24}$$

Si reemplazamos (2.24) y (2.23) en (2.22) tenemos

$$\left| g(z) - ln(\frac{1}{2}) \right| < \frac{\delta_p}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\delta_p}{2^k} = \delta_p$$

en X_p. Finalmente, usando (2.18) se obtendrá

$$\left| \frac{1}{2} - e^{g(z)} \right| < \epsilon_p$$

en X_p. De esta forma, se obtiene la función g

□

Ejemplo 2.22. Daremos un ejemplo de un dominio de Fatou-Bieberbach $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ que contiene al conjunto $\{zw = 0\}$ y no es denso en $\mathbb{C}^2$. Sean $g, h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones enteras tal que

$$e^{g(0)} = 2, \qquad e^{h(0)} = 1/4 \tag{2.25}$$

$$e^{g(2^{4p})} = 1/2, \qquad e^{h(2^{2p+2})} = 4 \tag{2.26}$$

para $p = 0, 1, ...$ Para encontrar dichas funciones, por ejemplo para g, es suficiente conseguir una función entera tal que $g(0) = ln(2)$ y $g(2^{4p}) = ln(1/2)$ para $p = 0, 1, 2....$ Dicha función g se obtiene aplicando el teorema 1.22 (Interpolación de Mittag- Leffter), ya que el conjunto $\{0, 2^{4p}\}$ para $p = 0, 1, 2...$ es localmente finito. Un razonamiento análogo se aplica para demostar la existencia de h. Ahora, definamos

$$G(z, w) = (ze^{g(z^3 w)}, we^{-3g(z^3 w)}),$$
$$H(u, v) = (ue^{h(uv)}, ve^{-h(uv)}),$$

y precisamos $F = H \circ G$. Probaremos que $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ para ello basta que $G, H \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$,procederemos primero para G. G es holomorfa, ya que cada componente es holomorfa al ser producto y composición de funciones holomorfas. Verifiquemos que G es inyectiva. Si $G(a, b) = G(c, d)$ tenemos

$$ae^{g(a^3 b)} = ce^{g(c^3 d)}), \tag{2.27}$$

$$be^{-3g(a^3 b)} = de^{-3g(c^3 d)}. \tag{2.28}$$

Elevamos al cubo la primera condición

$$a^3 e^{3g(a^3 b)} = c^3 e^{3g(c^3 d)}.$$

Luego, multiplicamos $a^3e^{3g(a^3b)} = c^3e^{3g(c^3d)}$ por $be^{-3g(a^3b)} = de^{-3g(c^3d)}$ obteniendo

$$a^3b = c^3d.$$

Reemplazamos esta condición en (2.27) y (2.28) tenemos que $a = c$ y $b = d$. Por lo tanto $(a, b) = (c, d)$ y así G es inyectiva. Veamos ahora que G es sobreyectiva. Dado $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, si tenemos $G(z, w) = (u, v)$, entonces

$$ze^{g(z^3w)} = u, \tag{2.29}$$

$$we^{-3g(z^3w)} = v. \tag{2.30}$$

Elevando al cubo (2.29) y multiplicándolo por (2.30) se tiene que $z^3w = u^3v$. Reemplazamos en (2.29) y (2.30), se tendrá que $z = \dfrac{u}{e^{g(u^3v)}}$ y $w = \dfrac{v}{e^{-3g(u^3v)}}$. Por lo tanto, G es sobreyectiva. Su inversa G^{-1} también será holomorfa entonces $G \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$. Siguiendo el mismo razonamiento se prueba que $H \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$. Por lo tanto, $F = H \circ G \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$. De la definición de F tenemos

$$F(z, 0) = \left(\frac{z}{2}, 0\right), \qquad F(0, w) = \left(0, \frac{w}{2}\right) \tag{2.31}$$

y

$$F(2^p, 2^p) = (2^{p+1}, 2^{p+1}) \qquad (p = 0, 1, 2...). \tag{2.32}$$

Ahora, hallemos $F'(0, 0)$. Para ello primero calculemos $H'(0, 0)$ y $G'(0, 0)$. Luego,

$$G'(z, w) = \begin{pmatrix} e^{g(z^3w)}(1 + 3z^3wg'(z^3w)) & z^4e^{g(z^3w)}g'(z^3w) \\ -9z^2w^2e^{-3g(z^3w)}g'(z^3w) & e^{-3g(z^3w)}(1 - 3z^3wg'(z^3w)) \end{pmatrix}$$

$$G'(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$H'(u, v) = \begin{pmatrix} e^{h(uv)}(1 + uvh'(uv)) & u^2e^{h(uv)}h'(uv) \\ -v^2e^{-h(uv)}h'(uv) & e^{-h(uv)}(1 - uvh'(uv)) \end{pmatrix}$$

$$H'(0, 0) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Como $F'(0, 0) = H'(0, 0).G'(0, 0)$ tenemos que $F'(0, 0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. De esta manera si denotamos $A = F'(0, 0)$ tenemos que $A = \dfrac{1}{2}I$. Los autovalores de $A = F'(0, 0)$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ que satisfacen $|\lambda_1|^2 < |\lambda_2|$. Así F satsiface las condiciones del teorema 2.15. Entonces existe una aplicación biholomorfo $\Psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^2$, donde Ω es el conjunto

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n / \lim_{k\to\infty} F^k(z) = (0, 0)\}.$$

De (2.31) obtenemos que

$$\lim_{k\to\infty} F^k(z,0) = \lim_{k\to\infty} (\frac{z}{2^k}, 0) = (0,0),$$
$$\lim_{k\to\infty} F^k(0,w) = \lim_{k\to\infty} (0, \frac{w}{2^k}) = (0,0).$$

Concluimos que Ω contiene al conjunto $\{zw = 0\}$ y por (2.32) Ω no contiene a los puntos $(2^p, 2^p)$. En particular $\Omega \neq \mathbb{C}^2$. Queremos probar que Ω no es denso en $\mathbb{C}^2$. Para obtener esto, elegiremos con más cuidado a g y h, específicamente, fortaleceremos (2.26) al requerir que g y h sean casi constantes en los discos centrados en 2^{4p} y 2^{2p+2}, respectivamente. Por otra parte, como la función $f(x) = x^4$ es creciente en $\langle 0; +\infty\rangle$ y $f(1) = 1$. Entonces existe $c > 0$ tal que $(1+c)^4 < \frac{5}{4}$ que es equivalente a $(1+c)^4 - 1 < \frac{1}{4}$. Además, se pueden elegir constantes c_p tal que

$$0 < c_0 < c_1 < ... < c, \qquad (1+c)^4 - 1 < \frac{1}{4}. \tag{2.33}$$

Consideremos los siguientes discos en $\mathbb{C}$

$$D_p = 2^p D(1, c_p), \qquad X_p = 2^{4p} D(1, \frac{1}{4}), \qquad Y_p = 2^{2p+2} D(1, \frac{1}{4})$$

y los polidiscos

$$\Delta_p = D_p \times D_p$$

para $p = 0, 1, 2...$

Los X_p's tienen clausura disjunta, lo mismo sucede para los Y_p's. Dado $\epsilon_p > 0$, se puede encontrar funciones enteras g y h tal que cumplen (2.25) y

$$|\frac{1}{2} - e^g| < \epsilon_p \; en \; X_p, \qquad |4 - e^h| < \epsilon_p \; en \; Y_p \tag{2.34}$$

para $p = 0, 1, 2....$ Para obtener g utilizamos el lema 2.21. Usando el mismo razonamiento del lema 2.21 también se obtiene la función h.

Ahora, probaremos que Ω no es denso en $\mathbb{C}^2$. Nuestra elección en (2.33) garantiza que $z^3w \in X_p$ y $4zw \in Y_p$ para todo $(z; w) \in \overline{\Delta}_p$. En efecto, si $(z; w) \in \Delta_p$ tenemos que $z = 2^p a$ con $a \in D(1; c_p)$ y $w = 2^p b$ con $b \in D(1; c_p)$. Así, se tiene que $z^3 w = 2^{4p} a^3 b$. Es suficiente, mostrar que $a^3 b \in D(1; \frac{1}{4})$ para que $z^3 w \in X_p$. Luego,

$$|a^3 b - 1| = |a^3 b - 1 + a^3 - a^3|$$
$$|a^3 b - 1| \leq |a^3(b-1)| + |a-1||a^2 + a + 1|.$$

Como $|a-1| < c_p$, $|b-1| < c_p$ y $|a| < 1 + c_p$ tendremos

$$|a^3b-1| < (c_p+1)^3 c_p + c_p(c_p^2 + 3c_p + 3)$$
$$|a^3b-1| < (1+c_p)^4 - 1 < (1+c)^4 - 1 < \frac{1}{4}.$$

Análogamente, se prueba que $4zw \in Y_p$ para todo $(z; w) \in \overline{\Delta}_p$. Realizaremos la siguiente notación. Dado 2 puntos (a, b) y (c, d) en $\mathbb{C}^2$. Denotaremos $(a, b) \approx (c, d)$, si existe $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tal que

$$|(a, b) - (c, d)| < \epsilon$$

Por lo tanto, si $(z; w) \in \overline{\Delta}_p$ y $(u, v) = G(z, w)$, entonces $(u, v) \approx (\frac{z}{2}, 8w)$. Esto se debe a que $e^g \approx \frac{1}{2}$ en X_p Así que si ϵ_p es lo suficientemente pequeño, se sigue que $uv \in Y_p$, y por lo tanto

$$F(z, w) = H(u, v) \approx (4u, \frac{v}{4}) \approx (2z, 2w).$$

Podemos concluir, si elegimos ϵ_p lo suficientemente pequeño (2.34) nos asegurará de que

$$F(\Delta_p) \subset \Delta_{p+1}. \quad (p = 0, 1, 2, 3...)$$

Como $2^p(1-c) \leq \|(z, w)\|$ para $(z, w) \in \Delta_p$ y del resultado anterior, obtendremos $\|F^k(z, w)\| \to \infty$ cuando $k \to \infty$, para (z, w) en cualquier Δ_p. Esto muestra que Ω no intersecta a ningún Δ_p. Así, conseguimos que Ω no es denso en $\mathbb{C}^2$.

Capítulo 3

Dominio de Fatou-Bieberbach generado por un punto fijo cuya derivada tiene radio espectral menor que uno.

En este capítulo se demostrará el resultado principal de la tesis que se desarrolla en [RR88]. Se obtendrá una generalización del teorema desarrollado en el capítulo 2. Para ello daremos algunas definiciones y lemas previos.

Definición 3.1. Sea $G = (g_1, ..., g_n)$ una aplicación holomorfa de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ de la forma

$$\begin{aligned} g_1(z) &= c_1 z_1, \\ g_2(z) &= c_2 z_2 + h_2(z_1), \\ &\vdots \\ g_n(z) &= c_n z_n + h_n(z_1, ..., z_{n-1}), \end{aligned}$$

donde $c_1, ..., c_n$ son escalares y cada h_i es una función holomorfa de $(z_1, ..., z_{i-1})$ que se anulan en el origen. Diremos que estas aplicaciones holomorfas son triangulares inferiores.

La matriz que representa al operador lineal $G'(0)$ es triangular inferior. Así, $G'(0)$ es invertible si y solo si ningún c_i es cero. De esto se sigue que G es un automorfismo de $\mathbb{C}^n$ si y solo si ningún c_i es cero. Si $g_1, ..., g_n$ son polinomios, el grado de $G = (g_1, ..., g_n)$ es definido como

$$\operatorname{grado} G = \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{grado} g_i.$$

Definición 3.2. Sea p un polinomio complejo $p : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$. Diremos que p es homogéneo de grado m si cumple la siguiente relación

$$p(\lambda z) = \lambda^m p(z),$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}^n$.

De la definición podemos observar que el polinomio nulo es homogéneo de grado m. Aunque esto no es lo más usual, lo aceptaremos, ya que es conveniente para el desarrollo del capítulo.

Definición 3.3. Definimos H_m como el espacio vectorial de todas las aplicaciones holomorfas $H : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, donde $H = (h_1, ..., h_n)$, cuyas componentes h_i son polinomios homogéneos de grado m.

Una base conveniente $\mathcal{B}$ para H_m consiste de todos las aplicaciones H que tienen solo una componente diferente de cero, y esta componente h_j es un monomio z^α con $|\alpha| = m$. El número de diferentes monomios homogéneos de grado m en n variables es $\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$. De esta manera, la dimensión de H_m es $n.\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$.

Dado un operador lineal invertible $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, donde la norma de todos autovalores λ_i son menores que uno. Ordenamos los autovalores de la siguiente forma

$$0 < |\lambda_n| \leq ... \leq |\lambda_1| < 1$$

Entre los miembros de la base $\mathcal{B}$ de H_m nosotros llamaremos especiales a los h_j que tienen la forma

$$h_j(z) = z_1^{\alpha_1} ... z_{j-1}^{\alpha_{j-1}},$$

y son tales que la relación

$$\lambda_j = \lambda_1^{\alpha_1} ... \lambda_{j-1}^{\alpha_{j-1}}$$

se cumple. Esta noción de especial depende de nuestro operador más específicamente del espectrum de A. Note que tal relación no existe, si m es lo suficientemente grande tal que $|\lambda_1|^m < |\lambda_n|$. En efecto, en este caso tenemos

$$|\lambda_1|^m < |\lambda_n| \leq ... \leq |\lambda_1|,$$

luego

$$\begin{aligned} &|\lambda_1|^m < |\lambda_j| = |\lambda_1|^{\alpha_1} ... |\lambda_{j-1}|^{\alpha_{j-1}} \leq |\lambda_1|^{\alpha_1 + ... + \alpha_{j-1}} \\ &|\lambda_1|^m < |\lambda_1|^m, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Note también que estos elementos especiales de $\mathcal{B}$ son triangulares inferiores. Definamos X_m como el subespacio de H_m que es generado por estos elementos especiales de $\mathcal{B}$ ($X_m = \{0\}$ cuando no hay ninguno). Sea Y_m el subespacio de H_m generado por los otros miembros de la base que no son especiales. Definiremos una norma en el espacio vectorial H_m, de la siguiente manera para $p \in H_m$:

$$\|p\| = \operatorname*{Sup}_{\|z\|=1} \|p(z)\| \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Definición 3.4. Sea $F : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ una aplicación holomorfa tal que U es un conjunto abierto y $0 \in U$. Diremos que F es de orden p y lo denotaremos con $F = O(\|z\|^p)$, si existe $M \geq 0$ y $r > 0$ tal que

$$\|F(z)\| \leq M\|z\|^p$$

para $\|z\| \leq r$.

Proposición 3.5. *Sea $F \in \mathcal{O}(U;\mathbb{C}^m)$ con $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$ tal que todas sus derivadas de orden menor que p de sus componentes en 0 se anulan. Entonces existe $M \geq 0$ y $a > 0$ tal que*

$$\|F(z)\| \leq M\|z\|^p,$$

para $\|z\| \leq a$.

Demostración. Sea $F = (F_1; ...; F_m)$ y $z = (z_1, ..., z_n)$. Si expresamos a F_1 en su serie de potencias alrededor del 0 tenemos $F_1(z) = \sum_{|k|\geq p} b_k^1 z^k$. Luego, tenemos que

$$\|F_1(z)\| = \| \sum_{|k|\geq p} b_k^1 z^k \| \leq \sum_{|k|\geq p} |b_k^1||z_1|^{k_1}...|z_n|^{k_n} \leq \sum_{|k|\geq p} |b_k^1|\|z\|^k.$$

Esta última serie converge, por el corolario 1.67, uniformemente para todo $K \subset U$ compacto. Reordenando la serie $\sum_{|k|\geq p} |b_k^1|\|z\|^k$ obtendremos

$$\|F_1(z)\| \leq \sum_{i\geq p} \alpha_i\|z\|^i = \|z\|^p \sum_{i\geq p} \alpha_i\|z\|^{i-p}.$$

La serie $\sum_{i\geq p} \alpha_i\|z\|^{i-p}$ converge para $\|z\|$ suficientemente pequeño, debido a la convergencia de $\sum_{i\geq p} \alpha_i\|z\|^i$. Entonces existe $a > 0$ tal que si $\|z\| \leq a$ se tiene

$$\sum_{i\geq p}\alpha_i\|z\|^{i-p} \leq \sum_{i\geq p}\alpha_i a^{i-p} = M_1$$
$$\|F_1(z)\| \leq \|z\|^p \sum_{i\geq p} \alpha_i a^{i-p} = M_1\|z\|^p.$$

Siguiendo con el mismo razonamiento en cada componente de F se tendrá

$$\|F_j(z)\| \leq M_j\|z\|^p$$

para $j = 1, 2, ..., m$. Finalmente, usamos la norma del máximo en $\mathbb{C}^m$ y sea $M = \max\limits_{1\leq j\leq m} M_j$ tenemos

$$\|F(z)\| \leq M\|z\|^p.$$

□

Para la siguiente proposición utilizaremos el siguiente lema que se puede consultar en [Lag99].

Lema 3.6. *Sea $r : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial p veces diferenciable en 0. Entonces r juntamente con todas sus derivadas parciales de orden $\leq p$ de sus componentes se anulan en 0 si y solamente si $\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{\|r(v)\|}{\|v\|^p} = 0$.*

Proposición 3.7. *Sea $F \in \mathcal{O}(U; \mathbb{C}^m)$ con $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$. Entonces F es de orden p si y solamente si todas sus derivadas de orden menor que p de sus componentes en 0 se anulan.*

Demostración. La condición suficiente ya se probó en la proposición 3.5, falta probar la condición necesaria. Si $F = (F_1, ..., F_m)$ probaremos que todas las derivadas de orden menor que p de $F_1 : U \longrightarrow \mathbb{C}$ se anulan en 0. Consideremos a $F_1 : U \subset \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, como $F_1 = O(\|z\|^p)$ tenemos que

$$\|F_1(z)\| \leq M\|z\|^p$$
$$\frac{\|F_1(z)\|}{\|z\|^{p-1}} \leq M\|z\|$$
$$\lim_{z\to 0}\frac{\|F_1(z)\|}{\|z\|^{p-1}} = 0.$$

Utilizando el lema anterior mencionado, obtenemos que todas las derivadas parciales de orden menor que p reales de F_1 en 0 se anulan. Como consecuencia se puede probar que las derivadas complejas de orden menor que p de F_1 en 0 también se anulan. De igual manera, se procede con las otras componentes de F, con lo que queda probado la proposición. □

Para la demostración de las siguientes proposiciones introduciremos algunas notaciones para las series de aplicaciones holomorfas.

Sea $F : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ una aplicación holomorfa, donde U es un conjunto abierto, $0 \in U$ y $F(0) = 0$. Para $F = (F^1, F^2, ..., F^m)$ consideremos su serie de potencias centrada en 0

$$F = \left(\sum_{\alpha \in N^n} a_\alpha^1 z^\alpha, \sum_{\alpha \in N^n} a_\alpha^2 z^\alpha, ..., \sum_{\alpha \in N^n} a_\alpha^m z^\alpha \right).$$

Esta serie puede ser expresada como una sumatoria de polinomios homogéneos

$$F = \left(F_1^1 + F_2^1 + \cdots, F_1^2 + F_2^2 + \cdots, F_1^m + F_2^m + \cdots \right),$$

donde F_j^i es el polinomio homogéneo de grado j de la serie correspondiente a la i-ésima componente de F. Además, para $F : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, denotaremos

$$(F)|_m = F_1 + F_2 + \cdots + F_m,$$

la serie de Taylor para F en 0 hasta de orden m.

Proposición 3.8. *Sean $H \in H_m$ y $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ una aplicación holomorfa tal que $F(0) = 0$ y $F'(0) = I$. Entonces $H \circ F - H = O(\|\|z\|^{m+1})$.*

Demostración. Como $F(0) = 0$ y $F'(0) = I$, F es de la forma

$$F = (z_1 + F_2^1 + \cdots, z_2 + F_2^2 + \cdots, ..., z_n + F_2^n + \cdots).$$

Por otra parte $H = (H_1, H_2, ..., H_n)$, donde cada componente de H es un polinomio homogéneo de grado m. Analicemos

$$(H \circ F)(z) = (H_1(F(z)), H_2(F(z)), ..., H_n(F(z))).$$

Supongamos que las componentes de H no son nulas, caso contrario la prueba sería inmediata. Si $H_1(z) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha^1 z^\alpha$ tenemos que

$$H_1(F(z)) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha^1 (z_1 + F_2^1 + F_3^1 + \cdots)^{\alpha_1} ... (z_n + F_2^n + F_3^n + \cdots)^{\alpha_n}$$

$$H_1(F(z)) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha^1 z^\alpha + \sum_{k=m+1}^{\infty} r_k^1(z),$$

donde r_k^1 es un polinomio homogéneo de grado k, de igual forma se procede con las otras componentes de H. Así, probamos que la expansión en su serie de Taylor de $H \circ F$ alrededor en 0 es la misma que la de H, hasta de orden m. Por lo tanto $H \circ F - H = O(\|z\|^{m+1})$. $\square$

Proposición 3.9. *Sean $G, H, F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$ que se anulan en 0, tal que $H - F = O(\|z\|^{m+1})$. Entonces $G \circ F - G \circ H = O(\|z\|^{m+1})$.*

Demostración. Probaremos que la serie de Taylor de $G \circ F$ y la de $G \circ H$ coinciden hasta el orden m en 0, en cada una de sus componentes. Sea $G = (G^1, G^2, ..., G^n)$. Analizaremos $G^1 \circ F$ y $G^1 \circ H$, lo mismo se hace con las demás componentes. Luego, si

$$G^1 = G_1^1 + G_2^1 + \cdots + G_p^1 + \cdots$$

y

$$F = \left(F_1^1 + F_2^1 + \cdots, F_1^2 + F_2^2 + \cdots, F_1^n + F_2^n + \cdots\right),$$

tenemos que

$$G^1 \circ F = G_1^1(F) + G_2^1(F) + \cdots + G_p^1(F) + \cdots .$$

Se sigue que

$$(G^1 \circ F)|_m = (G_1^1(F))|_m + (G_2^1(F))|_m + \cdots + (G_p^1(F))|_m + \cdots .$$

Calculemos $(G_p^1(F))|_m = \sum_{|\alpha|=p} C_p^\alpha((F_1^1 + F_2^1 + \cdots)^{\alpha_1} ...(F_1^n + F_2^n + \cdots)^{\alpha_n})|_m$. Fijemos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ tal que $|\lambda| = p$ para calcular la parte homogénea de orden menor o igual que m de $(F_1^1 + F_2^1 + \cdots)^{\lambda_1} ...(F_1^n + F_2^n + \cdots)^{\lambda_n}$, es decir, $((F_1^1 + F_2^1 + \cdots)^{\lambda_1} ...(F_1^n + F_2^n + \cdots)^{\lambda_n})|_m$. Así,

$$((F_1^1 + F_2^1 + \cdots)^{\lambda_1} ...(F_1^n + F_2^n + \cdots)^{\lambda_n})|_m$$

estará conformado por todos los monomios de la forma

$$F_{k_{11}}^1 ... F_{k_{1\lambda_1}}^1 ... F_{k_{n1}}^n ... F_{k_{n\lambda_n}}^n,$$

donde el grado de este polinomio está dado por

$$k_{11} + k_{12} + \cdots + k_{1\lambda_1} + k_{21} + \cdots + k_{2\lambda_2} + \cdots + k_{n1} + k_{n2} + \cdots + k_{n\lambda_n} \leq m.$$

Para que suceda esto, el orden del polinomio homogéneo $F_{k_{st}}^j$ debe ser menor o igual que m. Debido a que $H - F \in O(|z|^{m+1})$, los polinomios homogéneos F_k^j y H_k^j son iguales para $j = 1, 2, ..., n$ y $k = 1, 2, ..., m$. De esta manera, tenemos

$$((F_1^1 + F_2^1 + \cdots)^{\lambda_1} ...(F_1^n + F_2^n + \cdots)^{\lambda_n})|_m = ((H_1^1 + H_2^1 + \cdots)^{\lambda_1} ...(H_1^n + H_2^n + \cdots)^{\lambda_n})|_m.$$

Así, $(G_p^1(F))|_m = (G_p^1(H))|_m$ para p arbitrario, con lo cual se tiene

$$(G^1(F))|_m = (G^1(H))|_m.$$

Por lo tanto, $G \circ F - G \circ H = O(\|z\|^{m+1})$. □

Lema 3.10. *Sea G un automorfismo polinomial triangular inferior de $\mathbb{C}^n$.*

a. *El grado de las iteraciones G^k de G están acotadas, y existe una constante $\beta < \infty$ tal que*

$$G^k(U^n) \subset \beta^k U^n \quad (k = 1, 2, 3...). \tag{3.1}$$

Aquí U^n es el polidisco unitario en $\mathbb{C}^n$.

b. *Si además $|c_i|< 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, entonces $G^k(z) \to 0$, uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}^n$, y*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G^{-k}(V) = \mathbb{C}^n \tag{3.2}$$

para cualquier vecindad V de 0.

Demostración. Sea $G = (g_1, ..., g_n)$, $G^k = (g_1^k, ..., g_n^k)$, colocamos $u_i =$ grado g_i, y $S(m, k)$ la afirmación

$$\text{grado}\, g_i^k \leq u_1...u_i \tag{3.3}$$

para $1 \leq i \leq m$. Nosotros queremos probar $S(n, k)$ para $k = 1, 2, 3, ...$ De la definición de G, tenemos que $1 \leq u_i$ para $1 \leq i \leq n$. Verifiquemos que $S(n, 1)$ se cumpla, es decir,

$$\text{grado}\, g_i = u_i \leq u_1...u_i$$

para $1 \leq i \leq n$. Esto es cierto, ya que $1 \leq u_1...u_{i-1}$. Supongamos que $S(n, k)$ se cumpla. Ya que $G^{k+1} = G \circ G^k$ nosotros tenemos

$$g_i^{(k+1)} = c_i g_i^k + h_i(g_1^{(k)}, ..., g_{i-1}^{(k)}) \qquad (2 \leq i \leq n).$$

Sea $h_i(z_1, ..., z_{i-1}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} z_1^{d_{1j}^i} ... z_{i-1}^{d_{(i-1)j}^i}$. Como grado $h_i \leq u_i$ entonces tenemos $d_{1j}^i + ... + d_{(i-1)j}^i \leq u_i$. Por otra parte $h_i(g_1^k, ..., g_{i-1}^k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} (g_1^k)^{d_{1j}^i} ... (g_{i-1}^k)^{d_{(i-1)j}^i}$, acotemos el grado de cada sumando. Par ello usamos (3.3) obteniendo

$$\text{grado}(g_1^k)^{d_{1j}^i} ... (g_{i-1}^k)^{d_{(i-1)j}^i} \leq u_1.d_{1j}^i + u_1.u_2 d_{2j}^i + \cdots + u_1...u_{i-1}.d_{(i-1)j}^i.$$

Luego, ya que $1 \leq u_i$ para $1 \leq i \leq n$ obtenemos que

$$u_1 \leq u_1...u_{i-1},$$
$$u_1.u_2 \leq u_1...u_{i-1},$$

$$\vdots$$

$$u_1...u_{i-2} \leq u_1...u_{i-1}.$$

De esta manera se tiene

$$\begin{aligned} \text{grado}(g_1^k)^{d_{1j}^i}...(g_{i-1}^k)^{d_{(i-1)j}^i} &\leq u_1...u_{i-1}(d_{1j}^i + \cdots + d_{(i-1)j}^i) \leq u_1...u_i \\ \text{grado}\, h_i(g_1^k, ..., g_{i-1}^k) &\leq u_1.u_2...u_i. \end{aligned}$$

Por la hipótesis inductiva y por lo último se deduce que

$$\text{grado}\, g_i^{(k+1)} \leq u_1...u_i$$

para $2 \leq i \leq n$. Además, $g_1^{(k+1)}(z) = c_1^{k+1} z_1$ entonces tenemos

$$\text{grado}\, g_1^{(k+1)} = 1 \leq u_1...u_i.$$

Por lo tanto $S(n,k)$ se verifica para $k = 1, 2, ...$ Poniendo $d = u_1 u_2 ... u_n$ hemos probado que grado $G^k \leq d$ $(k = 1, 2, ...)$. Ahora, sea M el número de multi-índices de $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tal que $|\alpha| \leq d$. Debido a que g_i es continua podemos escoger $C \geq 1$ tal que $|g_i| \leq C$ sobre $\overline{U^n}$ para $1 \leq i \leq n$. Si $\beta = M.C^d$, pretendemos

$$|g_i^k(z)| \leq \beta^k \qquad (z \in \overline{U^n}, 1 \leq i \leq n, k = 1, 2...). \tag{3.4}$$

Ya que $C \leq \beta$, (3.4) se cumple para $k = 1$. Asumimos (3.4) para algún $k > 1$. Los coeficientes a_α en

$$g_i^k(z) = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha z_1^{\alpha_1} ... z_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha z^\alpha \tag{3.5}$$

está dado por

$$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_1^n(0)} \frac{g_i^k(w)}{w^{\alpha+1}} dw.$$

Así, usando (3.4) y la desigualdad de Cauchy dada en el teorema 1.63 implica $|a_\alpha| \leq \beta^k$. Ya que $G^{k+1} = G \circ G^k$, (3.5) muestra que

$$\begin{aligned} g_i^{k+1} &= g_i^k(g_1, ..., g_n) = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha g_1^{\alpha_1} ... g_n^{\alpha_n} \\ |g_i^{k+1}| &\leq |\sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha g_1^{\alpha_1} ... g_n^{\alpha_n}| \leq \sum_{|\alpha| \leq d} |a_\alpha| |g_1|^{\alpha_1} ... |g_n|^{\alpha_n} \\ |g_i^{k+1}| &\leq M \beta^K C^{\alpha_1} ... C^{\alpha_n} \leq M \beta^k C^d = \beta^{k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto está probado (3.4), en particular se cumple para U^n, escogiendo $\nu = \beta + 1$ se tiene que $G^k(U^n) \subset \nu^k U^n$. Ahora, probaremos la parte b). Sea $E \subset \mathbb{C}^n$ un compacto. Como $g_1^k(z) = c_1^k z_1$ tenemos

$$|g_1^k(z)| \leq |c_1|^k |z_1| \leq |c_1|^k N.$$

Debido a que $|c_1| < 1$, tendremos $\|g_1^k\|_E \to 0$ si $k \to +\infty$. Sabemos que

$$g_i^{(k+1)} = c_i g_i^k + h_i(g_1^{(k)}, ..., g_{i-1}^{(k)}) \qquad (2 \leq i \leq n). \tag{3.6}$$

Supongamos que $1 < i \leq n$ y

$$\lim_{k\to\infty} \|g_j^{(k)}\|_E = 0 \tag{3.7}$$

para $1 \leq j < i$. Probaremos (3.7) para $j = i$. Como h_i es continua, dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si

$$|(z_1, ..., z_{i-1})| < \delta \to |h_i(z_1, ..., z_{i-1})| < \epsilon.$$

De la hipótesis, para $\delta > 0$ existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq k_0$ y $z \in E$ se tiene

$$|(g_1^k(z), ..., g_{i-1}^k(z)| < \delta.$$

De esta manera, $|h_i(g_1^{(k)}, ..., g_{i-1}^{(k)})| < \epsilon$ para todo $k \geq k_0$ y $z \in E$. Así, obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} \|h_i(g_1^{(k)}, ..., g_{i-1}^{(k)})\|_E = 0. \tag{3.8}$$

Como consecuencia de (3.8), dado $\epsilon > 0$, (3.6) muestra que

$$|g_i^{(k+1)}| \leq |c_i||g_i^{(k)}| + \epsilon \tag{3.9}$$

sobre E, para todo k suficientemente grande. Tomando límite superior en (3.9) se tendrá

$$\lim_{k\to\infty} sup\|g_i^{(k)}\|_E \leq \frac{\epsilon}{1 - |c_i|}$$

para todo $\epsilon > 0$. Por lo consiguiente (3.7) se cumplirá para $j = i$ y usando inducción tendremos que

$$\lim_{k\to\infty} \|g_j^{(k)}\|_E = 0$$

para $1 \leq j \leq n$. Por lo tanto, $G^k(z) \to 0$ uniformemente sobre E. La segunda afirmación del lema es una consecuencia de la primera afirmación. $\square$

A partir de ahora, trabajaremos con una transformación lineal invertible fija $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, donde la norma de todos sus autovalores λ_i son menores que uno. Los ordenamos de la siguiente manera:

$$0 < |\lambda_n| \leq ... \leq |\lambda_1| < 1$$

y escogemos coordenadas en $\mathbb{C}^n$ de tal manera que la matriz que representa dicho operador lineal sea triangular inferior. Si $A = (a_{ij})$ entonces $a_{ii} = \lambda_i$ y $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$.

Sea Γ_A la aplicación conmutador definido por $\Gamma_A(H) = A \circ H - H \circ A$. Para cada m, Γ_A es un operador lineal sobre H_m.

Lema 3.11. *Para $m \geq 2$, $H_m = X_m + \Gamma_A(H_m)$.*

Demostración. En lugar de A comenzaremos con la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Sea $H = (0, ..., 0, z^\alpha, 0, ..., 0) \in \mathcal{B}$ (base de H_m) con z^α en la j-ésima coordenada. Usamos la aplicación conmutador Γ_D sobre H obteniendo

$$\Gamma_D(H) = (\lambda_j - \lambda_1^{\alpha_1} ... \lambda_n^{\alpha_n})H.$$

Esto muestra que Γ_D anula aquellos elementos de $\mathcal{B}$ llamados especiales. Γ_D actua como un operador lineal sobre el espacio Y_m. Además, si H es un elemento de la base de Y_m se tiene que $\lambda_j \neq \lambda_1^{\alpha_1} ... \lambda_{j-1}^{\alpha_{j-1}}$ o existe un $\alpha_k > 0$ para algún $k \geq j$. En el primer caso se tiene que $\Gamma_D(H) \neq 0$. Para la otra posibilidad tenemos

$$|\lambda_1^{\alpha_1} ... \lambda_n^{\alpha_n}| = |\lambda_k||\lambda_k|^{\alpha_k - 1}.|\lambda_1|^{\alpha_1} ... |\lambda_n|^{\alpha_n} = |\lambda_k|a.$$

Como $|\alpha| = m \geq 2$, se tiene que $a < 1$. Luego de la relación $|\lambda_j| \geq |\lambda_k|$ tenemos que

$$\begin{aligned} |\lambda_j| \geq |\lambda_k| > a|\lambda_k| &= |\lambda_1^{\alpha_1} ... \lambda_n^{\alpha_n}| \\ &\rightarrow \lambda_j - \lambda_1^{\alpha_1} ... \lambda_n^{\alpha_n} \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Gamma_D(H) \neq 0$ para H siendo un elemento de la base de Y_m. Por otra parte, si $H \in Y_m$, entonces $H = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_i$, $X_i \in$ base de Y_m. Ahora, veamos que Γ_D es inyectiva sobre Y_m. Sea $H \in Y_m$ tal que $\Gamma_D(H) = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \Gamma_D(H) = \alpha_i \sum_{i=1}^{p} \Gamma_D(X_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i X_i &= 0 \\ \alpha_i a_i &= 0. \end{aligned}$$

Como $a_i \neq 0$, esto es debido a la observación anterior, entonces tenemos $\alpha_i = 0$. Así, conseguimos que $H = 0$. De esta manera, Γ_D es inyectiva sobre Y_m y como Y_m es de dimensión finita se obtiene que Γ_D es invertible sobre Y_m. Sea π la proyección en H_m cuyo rango es X_m y su núcleo es Y_m, definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \pi : H_m &\to H_m \\ \pi(X_m) &= X_m \\ \pi(Y_m) &= 0. \end{aligned}$$

Mostraremos que $\pi + \Gamma_D$ es un operador lineal invertible sobre H_m. En efecto, la linealidad es obvia, veamos la inyectividad del operador lineal. Sea $f \in H_m$. Entonces f es de la forma $f = h+g$, con $h \in X_m$ y $g \in Y_m$. Así, $h = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i A_i$ y $g = \sum_{j=1}^{p} \beta_j B_j$, con α_i ,$\beta_j \in \mathbb{C}$, $A_i \in$ base X_m y $B_j \in$ base Y_m. Hallemos el núcleo del operador $\pi + \Gamma_D$. Luego,

$$\begin{aligned} (\pi + \Gamma_D)(h + g) &= 0 \\ (\pi + \Gamma_D)(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i A_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j B_j) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{s} \alpha_i A_i + \sum_{j=1}^{p} a_j \beta_j B_j &= 0. \end{aligned}$$

Así, $\alpha_i = 0$ y $a_i\beta_i = 0$, ya que $a_i \neq 0$ entonces $\beta_i = 0$. Por lo tanto. $F = 0$. De esta manera, $\pi + \Gamma_D$ es inyectiva sobre H_m y como H_m es de dimensión finita se obtiene que $\pi + \Gamma_D$ es invertible sobre H_m. Ahora, volvamos a nuestra matriz dada A. Para cada $\epsilon > 0$, sea $S = S_\epsilon$ la matriz diagonal

$$S_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon^n \end{pmatrix}$$

Como A es triangular inferior, también lo es $S_\epsilon A S_\epsilon^{-1}$, obteniéndose $\epsilon^{i-j}a_{ij}$ en la fila i con columna j, si $i \geq j$. Así, $S_\epsilon A S_\epsilon^{-1}$ converge a D cuando ϵ tiende a 0. Como consecuencia $\pi + \Gamma_{S_\epsilon A S_\epsilon^{-1}}$ converge al operador lineal $\pi + \Gamma_D$. Además, por el teorema 1.11 se tiene que los operadores invertibles forman un conjunto abierto en el álgebra de los operadores lineales sobre H_m. Concluimos de esto que existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\pi + \Gamma_{S_\epsilon A S_\epsilon^{-1}}$ es invertible sobre H_m. En otras palabras, para cada $G \in H_m$ corresponde algún $H_0 \in X_m$ y algún $H \in H_m$ tal que

$$\begin{aligned} S^{-1}GS &= H_0 + (S^{-1}AS)H - H(S^{-1}AS) \\ G &= SH_0S^{-1} + A(SHS^{-1}) - (SHS^{-1})A. \end{aligned}$$

Debido a que S es diagonal, esto muestra que SHS^{-1} es un múltiplo escalar de H para cada $H \in \mathcal{B}$. Ya que $H_0 \in X_m$ se sigue que $SH_0S^{-1} \in X_m$. Así, $G \in X_m + \Gamma_A(H_m)$, con lo cual queda finalizada la prueba.

Lema 3.12. *Sea V una vecindad de 0 en $\mathbb{C}^n$ tal que $F : V \to \mathbb{C}^n$ es holomorfo, $F(0) = 0$, y todos los autovalores λ_i de $A = F'(0)$ satisfacen que $0 < |\lambda_i| < 1$. Entonces existen*

a. un automorfismo polinomial triangular inferior G de $\mathbb{C}^n$ con $G(0) = 0$ y $G'(0) = A$, y

b. aplicaciones polinomiales $T_m : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ con $T_m(0) = 0$, $T_m'(0) = I$ tal que
$$G^{-1} \circ T_m \circ F - T_m = O(|z|^m). \tag{3.10}$$

En otras palabras, la conclusión es que el desarrollo en series de potencias del lado izquierdo de (3.10) en el origen de $\mathbb{C}^n$ no contiene términos de grado menores que m.

Demostración. Primero elegimos coordenadas de tal manera que A es una matriz triangular inferior y $|\lambda_1| \geq |...|\lambda_n|$. Supongamos que la siguiente hipótesis inductiva se cumple para un $m \geq 2$: T_m es como en *b*) , G_m es automorfismo polinomial triangular inferior de $\mathbb{C}^n$ con $G_m'(0) = A$, y

$$T_m \circ F - G_m \circ T_m = O(|z|^m). \tag{2_m}$$

Note que esta hipótesis es verdadero, cuando $m = 2$, con $G_2 = A$, $T_2 = I$. Ahora puede ser reescrito de la siguiente manera

$$T_m \circ F - G_m \circ T_m - P_m = O(|z|^{m+1}) \tag{3_m}$$

para algún $P_m \in H_m$. Usando el lema 3.11 descomponemos P_m

$$P_m = Q + A \circ H - H \circ A$$

para algún $Q \in X_m$, $H \in H_m$. Definamos

$$G_{m+1} = G_m + Q, \qquad T_{m+1} = T_m + H \circ T_m.$$

Ahora, tenemos que probar (2_{m+1}). Ahora, sea el símbolo $\sim$ que significa que la diferencia entre los dos términos de ambos lados es de $O(|z|^{m+1})$. Entonces como $T_{m+1} - T_m = H \circ T_m$ tendremos que $T_{m+1} - T_m \sim H$ y $Q \circ T_{m+1} \sim Q$ por la proposición 3.8, y la diferencia Δ entre los lados izquierdos de (2_{m+1}) y (3_m) satisface por lo tanto

$$\Delta = T_{m+1} \circ F - G_{m+1} \circ T_{m+1} - (T_m \circ F - G_m \circ T_m - P_m)$$
$$\Delta = (T_{m+1} - T_m) \circ F - G_{m+1} \circ T_{m+1} + G_m \circ T_m + P_m.$$

Además, se tiene que $T_{m+1} - T_m = H \circ T_m$ y $G_{m+1} = G_m + Q$, por lo tanto $\Delta = H \circ T_m \circ F + G_m \circ T_m - G_m \circ T_{m+1} - Q \circ T_{m+1} + P_m$. Sea $B_m = H \circ A + G_m \circ T_m - G_m \circ (T_m + H) + A \circ H - H \circ A$. Para probar (2_{m+1}) es suficiente mostrar que Δ es de $O(|z|^{m+1})$, ya que (3_m) es de $O(|z|^{m+1})$. Primero probaremos que $\Delta \sim B_m$. En efecto, desarrollemos $\Delta - B_m$ y utilizando que $Q = P_m - A \circ H + H \circ A$ tenemos

$$\Delta - B_m = H \circ T_m \circ F - H \circ A + G_m \circ (T_m + H) - G_m \circ T_{m+1} + Q - Q \circ T_{m+1}.$$

Sabemos que $Q \circ T_{m+1} \sim Q$, por probar que $H \circ T_m \circ F \sim H \circ A$ y $G_m \circ (T_m + H) \sim G_m \circ T_{m+1}$ lo que completaría la afirmación. En efecto, $H \circ T_m \circ F$ se puede expresar de la forma $H \circ T_m \circ F = H \circ A \circ A^{-1} \circ T_m \circ F$. Como $H \circ A \in H_m$ y $(A^{-1} \circ T_m \circ F)'(0) = I$, entonces usando la proposición 3.8 obtenemos que $H \circ T_m \circ F \sim H \circ A$. Para la otra afirmación, del hecho de que $T_{m+1} - T_m \sim H$ obtenemos que $T_m + H \sim T_{m+1}$. De esta manera utilizando la proposición 3.9 concluimos que $G_m \circ (T_m + H) \sim G_m \circ T_{m+1}$. Así, por lo tanto

$$-\Delta \sim G_m \circ (T_m + H) - G_m \circ T_m - G'_m(0)H$$

o, equivalentemente

$$-\Delta(z) \sim \int_0^1 \{G'_m[T_m(z) + tH(z)] - G'_m(0)\}H(z)dt.$$

Sea $R : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2}$, definido por $R(w) = G'_m(w) - G'_m(0)$. Observamos que $R(0) = 0$, por lo cual $R = O(\|z\|)$. Como $T_m(z) + tH(z) \to 0$, cuando $z \to 0$ tenemos que

$$\|G'_m(T_m(z) + tH(z)) - G'_m(0)\| \leq C\|T_m(z) + tH(z)\|$$

para $\|z\| \leq r$. Por otra parte, $T_m = O(\|z\|)$ y $H = O(\|z\|^m)$, se sigue que

$$\|G'_m(T_m(z) + tH(z)) - G'_m(0)\| \leq C(C_1\|z\| + C_2\|z\|^m)$$
$$\|G'_m(T_m(z) + tH(z)) - G'_m(0)\| \leq C(\|z\|(C_1 + C_2\|z\|^{m-1})).$$

Si consideramos $\|z\|$ suficientemente pequeño obtenemos

$$\|G'_m(T_m(z) + tH(z)) - G'_m(0)\| \leq M\|z\|. \tag{3.11}$$

Volviendo a la integral tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^1 \{G'_m[T_m(z) + tH(z)] - G'_m(0)\}H(z)dt\right\| &\leq \int_0^1 M\|z\|C_2\|z\|^m dt \\ &\leq K\|z\|^{m+1}.\end{aligned}$$

Esto muestra que $\Delta(z) = O(|z|^{m+1})$ y prueba (2_{m+1}). Para un m suficientemente grande tendremos que $X_m = 0$, por lo tanto $G_{m+1} = G_m$. Esto nos da un G como en (a) que satisface

$$T_m \circ F - G \circ T_m = O(|z|^m) \tag{3.12}$$

para todo $m \geq 2$. Finalmente, aplicamos G^{-1} a (3.12) y utilizamos la proposición 3.9 para obtener (3.10). Ahora, si estamos listos para el resultado principal.

Teorema 3.13. *Suponemos que* $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n), p \in \mathbb{C}^n, F(p) = p$, *y los autovalores* λ_i *de* $A = F'(p)$ *satisfacen la propiedad* $0 < |\lambda_i| < 1$. *Entonces*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \lim_{k\to\infty} F^k(z) = p\}$$

es abierto y conexo, y existe un biholomorfismo Φ *de* $\mathbb{C}^n$ *a* Ω. *Además, se tiene que* $J\Phi \equiv 1$, *siempre cuando* JF *sea constante.*

Demostración. Podemos considerar $p = 0$. Como antes, elegimos coordenadas de tal forma que $A = F'(0)$ es triangular inferior y $|\lambda_1| \geq ... \geq |\lambda_n|$. Podemos encontrar un operador diagonal S_ϵ como en la solución del lema 3.11 de tal manera que $A_0 = S_\epsilon^{-1}AS_\epsilon$ sea igual a:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \epsilon a_{21} & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon^{n-1}a_{n1} & \epsilon^{n-2}a_{n2} & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Debido a que $|\lambda_i| < 1$ para $i = 1, 2..., n$ y escogiendo ϵ suficientemente pequeño obtendremos que $\|A_0\| < 1$. Por lo tanto $\|A_0(z)\| \leq c\|z\|$ para algún $c < 1$ y para todo $z \in \mathbb{C}^n$. Si probamos el teorema para $F_0 = S_\epsilon^{-1} F S_\epsilon$ obteniendo Φ_0 y Ω_0, entonces esto se cumple también para F con $\Phi = S_\epsilon \Phi_0$ y $\Omega = S_\epsilon(\Omega_0)$. Así, podemos asumir que $\|A\| < 1$, fijando α tal que $\|A\| < \alpha < 1$. Debido a que F es complejo diferenciable en 0, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(z) - F(0) - A(z)| \leq \epsilon|z|$$
$$|F(z)| \leq \epsilon|z| + |A(z)| \leq (\epsilon + \|A\|)|z|.$$

Si tomamos $\epsilon = \alpha - \|A\|$ existe $r = \delta$ tal que

$$|F(z)| \leq \alpha|z| \tag{3.13}$$

para $|z| \leq r$. Se sigue de (3.13) que $|F^k(z)| \leq \alpha^k|z|$ para $|z| \leq r$, por lo tanto, $B(0; r) \subset \Omega$. Como en la prueba del teorema 2.15 se tendrá que $\Omega = \bigcup_{-\infty}^{\infty} F^k(B(0; r))$. Entonces Ω es abierto y conexo, y $F(\Omega) = \Omega$. Ahora, asociamos G a F como en el lema 3.12, y aplicamos el lema 3.10 a G^{-1}(automorfismo triangular inferior) en lugar de G para concluir con la ayuda del corolario 1.88 que existe una constante $\gamma < \infty$ tal que

$$|G^{-k}(x) - G^{-k}(y)| \leq \gamma^k|x - y| \qquad (k = 1, 2, 3...) \tag{3.14}$$

para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$ con $|x| < 1/2, |y| < 1/2$. Fijando un entero m tal que $\alpha^m < 1/\gamma$. El lema 3.12 nos da una aplicación polinomial $T = T_m$, con $T(0) = 0$, $I = T'(0)$, y como $G^{-1}TF - T = O(|z|^m)$ entonces existe $\delta > 0$, $C_1 > 0$, tal que si $|w| < \delta$ implica que

$$|G^{-1}TF(w) - T(w)| = C_1|w|^m. \tag{3.15}$$

Sea $E \subset \Omega$ un compacto. Como en la demostración del teorema 2.15, $F^s(E) \subset B(0; r)$ para algún entero s. De ahí que $F^{s+k}(E) \subset F^k(B(0; r)) \subset \alpha^k B(0; r)$, para todo $k \geq 0$, por (3.13). Escogemos un k_1 suficientemente grande tal que $\alpha^{s+k_1} < \delta$ y $s + k_1 > 0$. Se sigue que para $C_2 = \alpha^{-s}r$, $k \geq s + k_1 = k_0$ y $z \in E$ se tendrá

$$|F^k(z)| \leq C_2\alpha^k < \delta. \tag{3.16}$$

Para tal z y k, (3.15) y (3.16) muestran que

$$|G^{-1}TF^{k+1}(z) - TF^k(z)| \leq C_1|F^k(z)|^m \leq C_1 C_2^m \alpha^{mk}. \tag{3.17}$$

De (3.16) se tiene que $F^k(z) \to 0$ uniformemente en E. Como $G^{-1}T$ y T son continuas y se anulan en 0, entonces para un $k \geq k_2$, $|G^{-1}TF^{k+1}(z)|$ y $|TF^k(z)|$ son $< 1/2$, para todo $z \in E$. De esta manera (3.14) puede aplicarse a (3.17), y concluiremos que para $k \geq k_2$ y para todo $z \in E$,

$$|G^{-k-1}TF^{k+1}(z) - G^{-k}TF^k(z)| \leq 4C_1C_2^m(\gamma\alpha^m)^k.$$

Dado que $\gamma\alpha^m < 1$ y procediendo de igual manera que en el teorema 2.15, tenemos probado que el límite

$$\Psi(z) = \lim_{k\to\infty}(G^{-k} \circ T \circ F^k)(z)$$

existe, uniformemente sobre cada subconjunto compacto de Ω. Entonces se define una aplicación holomorfa $\Psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ que satisface $\Psi(0) = 0$ y $\Psi'(0) = I$. Además, $(G^{-1}\circ\Psi\circ F)(z) = G^{-1}(\lim_{k\to\infty}(G^{-k}\circ T\circ F^k)(F(z)))$, y como G^{-1} es continua se tiene $(G^{-1}\circ\Psi\circ F)(z) = \lim_{k\to\infty}(G^{-k-1}\circ T\circ F^{k+1})(z) = \Psi(z)$. Así, tenemos la siguiente ecuación funcional

$$G^{-1} \circ \Psi \circ F = \Psi. \tag{3.18}$$

Ya que $F(\Omega) = \Omega$, (3.18)muestra que Ψ tiene la misma imagen que $G^{-1} \circ \Psi$. Así

$$\Psi(\Omega) = G^{-1}(\Psi(\Omega)) = ... = G^{-k}(\Psi(\Omega)) = ...$$

y ya que cada componente de Ψ no es constante ($\Psi'(0) = I$) entonces $\Psi(\Omega)$ contiene una vecindad de cero. Luego, usando el lema 3.10 muestra que $\Psi(\Omega) = \mathbb{C}^n$. Ahora, probaremos que Ψ es inyectiva. Sea x, $y \in \Omega$ tal que $\Psi(x) = \Psi(y)$. Por (3.18), $\Psi \circ F = G \circ \Psi$. Por lo tanto $\Psi(F(x)) = \Psi(F(y))$. Continuando, observamos que $\Psi(F^k(x)) = \Psi(F^k(y))$ para todo k positivo. Para un k suficientemente grande $F^k(x)$ y $F^k(y)$ estarán en una vecindad de cero en el cual Ψ es inyectiva ($J\Psi(0) \neq 0$). Así $F^k(x) = F^k(y)$, y esto implica que $x = y$. Por lotanto, Ψ es inyectiva en Ω. De esta manera hemos probado que Ψ es una aplicación biholomorfo de Ω en $\mathbb{C}^n$. La primera conclusión del teorema es por lo tanto satisfecho para $\Phi = \Psi^{-1}$. Finalmente, asumamos que JF es constante. Debido a que G es un automorfismo polinomial de $\mathbb{C}^n$, el polinomio JG no tiene cero en $\mathbb{C}^n$, por lo tanto es también constante. Además, $G'(0) = F'(0)$ entonces $JF = JG$. Si aplicamos la regla de la cadena a $\Psi \circ F = G \circ \Psi$, obtenemos para $z \in \Omega$,

$$(J\Psi)(F(z))(JF)(z) = (JG)(\Psi(z))(J\Psi)(z).$$

Como $JF = JG$ y son constantes se tiene

$$(J\Psi)(z) = (J\Psi)(F(z)) = ... = (J\Psi)(F^k(z)).$$

Ya que $F^k(z) \to 0$ cuando $k \to \infty$ nosotros concluimos que

$$(J\Psi)(z) = (J\Psi)(0) = 1,$$

para todo $z \in \Omega$. Por lo tanto $J\Phi = 1$ en $\mathbb{C}^n$. $\square$

Finalmente daremos un ejemplo de dominio de Fatou-Bieberbach que es generado por un automorfismo F que cumple con las condiciones del teorema 3.13, pero no cumple con la hipótesis del teorema 2.15.

Ejemplo 3.14. Sea la función $F(z, w) = (u, v)$ dada por

$$u = z + w, \qquad v = \frac{1}{4}(1 - w - e^{z+w}). \tag{3.19}$$

De la definición de F se tiene que es holomorfa, inyectiva y sobreyectiva sobre $\mathbb{C}^2$. Utilizando el corolario 1.82 tenemos que $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$. Calculemos los puntos fijos de F. Para ello igualamos $F(z, w) = (z, w)$. Así se tiene que

$$z + w = z, \qquad \frac{1}{4}(1 - w - e^{z+w}) = w.$$

Si resolvemos ambas ecuaciones obtenemos que $w = 0$ y $z = 2m\pi i$. Los puntos fijos son $p_m = (2m\pi i; 0)$, para cada entero m. Calculemos los autovalores de $F'(p_m)$

$$F'(z, w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4}e^{z+w} & -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{z+w} \end{pmatrix}$$

$$F'(p_m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = A_m$$

$$|A_m - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\dfrac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4} = 0.$$

Así, tenemos que los autovalores de $F'(p_m)$ son $\lambda_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4} < 1$ y $\lambda_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4} < 1$. De esta manera se cumplen las condiciones del teorema 3.13, pero se tiene que $|\lambda_1|^2 > |\lambda_2|$. De sta forma obtenemos dominios de Fatou-Bieberbach Ω_m generados por un automorfismo que no cumple las condiciones del teorema 2.15.

Conclusiones

- Es importante hallar dominios de Fatou-Bieberbach ya que son copias propias y holomorfas de $\mathbb{C}^n$, para $n \geq 2$. Esto resulta al ser conjuntos propios y biholomorfos a $\mathbb{C}^n$.

- Dado un automorfismo F en $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ con un punto fijo p, se ha encontrado condiciones para que la cuenca de atracción del punto fijo p sea un dominio de Fatou-Bieberbach. Específicamente, el radio espectral del operador lineal $A = F'(p)$ tiene que ser menor que uno.

- Si un automorfismo F en $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ tiene más de un punto fijo y en cada uno de ellos se cumple las condiciones del teorema 3.13. Entonces para cada punto fijo existirá un dominio de Fatou-Bieberbach y estos dominios serán disjuntos.

- Utilizando el teorema 2.15 se pueden encontrar ejemplos de dominios de Fatou-Bieberbach en $\mathbb{C}^2$ con algunas propiedades interesantes. Como por ejemplo que omitan una línea compleja o contengan al conjunto $\{zw = 0\}$, por mencionar algunos.

Bibliografía

[BF87] M. Barner, F. Flohr, *Analysis I.* De Gruyter (1987).

[BL88] G.R. Belitskii, Y.I. Lyubich, *Matrix norms and their applications.*. Birkhäuser (1988).

[Bie33] L. Bieberbach, *Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplearer Variablen, welche eine schlichte volumentreue Abbildung des R, auf einen Teil seiner selbst vermitteln.* Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, 476-479 (1933).

[BM48] S. Bochner, W. T. Martin, *Several Complex Variables.* Princeton University Press (1948).

[Fat22] P. Fatou, *Sur les fonctions méromorphes de deux variables.* CR Acad. Sci. Paris 175, 862-865 (1922).

[GL01] A. Garcia, I. Lequain, *Elementos de álgebra.* Projeto Euclides (2001).

[Gre72] M.Green, *Holomorphic maps into complex projective space omitting hyperplanes.* Transactions of the American Mathematical Society, 169, 89-103 (1972).

[GR65] R.C. Gunning, H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables.* Prentice -Hall (1965).

[Lag14] E.L. Lima, *Álgebra linear.* IMPA (2014).

[Lag99] E.L. Lima, *Curso de Analise Vol 2.* Projeto Euclides (1999).

[Lin08] A. Lins Neto, *Funções de uma variável complexa.* Projeto Euclides (2008).

[Rem98] R. Remmert, *Classical topics in complex function theory.* Editorial Springer (1998).

[RR88] J.P. Rosay, W. Rudin, *Holomorphic maps from C^n to C^n.* Transactions of the American Mathematical Society, 310(1), 73-86 (1988).

[Sch05] V. Scheidemann, *Introduction to complex analysis in several variables.* Editorial Springer (2005).

[Sha92] B. Shabat, *Introducction to complex analysis:function of several variables.* American Mathematical Soc (1992).

[Gom01] M.G. Soares, *Cálculo en una variable compleja.* IMCA (2001).