

Pontificia Universidad Católica del Perú
Escuela de Posgrado



Inmersiones isométricas de variedades completas con curvatura negativa en espacios euclidianos

Tesis para optar el grado académico de
Magíster en Matemáticas

Autor

MIGUEL ANGEL HUAYLLA SALOMÉ

Asesor

RUDY JOSÉ ROSAS BAZÁN

Lima - Perú

Octubre - 2022

INMERSIONES ISOMÉTRICAS DE VARIEDADES COMPLETAS CON CURVATURA
NEGATIVA EN ESPACIOS EUCLIDIANOS¹

Miguel Angel Huaylla Salomé

Tesis presentada en la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) para obtener el grado académico de Magíster en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. Christiam Bernardo Figueroa Serrudo, PUCP
(Presidente del jurado)

Dr. Rudy José Rosas Bazán, PUCP
(Asesor)

Dr. Roland Rabanal Montoya, PUCP
(Tercer miembro)

Lima - Perú
Octubre - 2022

¹Version final con las correcciones del jurado

Resumen

INMERSIONES ISOMÉTRICAS DE VARIEDADES COMPLETAS CON CURVATURA
NEGATIVA EN ESPACIOS EUCLIDIANOS

Miguel Angel Huaylla Salomé

2022

Asesor: Rudy José Rosas Bazán

Título obtenido: Magíster en Matemáticas

Las superficies pseudo-esféricas tienen localmente la misma geometría que \mathbb{H}^2 , además podemos obtener una realización (inmersión isométrica) de un horodisco de \mathbb{H}^2 en la pseudo-esfera. ¿Se podrá realizar todo \mathbb{H}^2 en \mathbb{R}^3 como una superficie sin singularidades? ¿Existe alguna variedad completa con curvatura constante negativa que se pueda realizar en \mathbb{R}^3 ? Una respuesta negativa lo da el teorema de Hilbert. ¿Es realmente esencial que la curvatura sea constante como hipótesis en este teorema? ¿Es posible dilatar las hipótesis de este teorema de modo que la conclusión siga siendo válida? Encontraremos las respuestas a estas preguntas en el teorema de Efimov. ¿Existirá algún entero p tal que \mathbb{H}^2 pueda realizarse en \mathbb{R}^p ? ¿La respuesta a la pregunta anterior se puede generalizar para \mathbb{H}^n ? Como último objetivo de este trabajo, es estudiar a detalle el teorema de Blauša quien logra responder a estas preguntas, de manera afirmativa. Posteriormente Rozendorn, Henke-Nettekovén y Azov, redujeron la codimensión de estas realizaciones, haciendo uso del método planteado por Blauša el cual será expuesto a detalle.

Palabras clave: inmersión isométrica, curvatura gaussiana, curvatura negativa, superficie completo, espacio hiperbólico, variedad riemanniana.

Abstract

The pseudo-spherical surfaces locally have the same geometry as \mathbb{H}^2 , furthermore we can obtain a realization (isometric immersion) of a horodisk of \mathbb{H}^2 in the pseudo-sphere. Will all \mathbb{H}^2 in \mathbb{R}^3 be realized as a surface without singularities? Is there a complete manifold with constant negative curvature that can be realized on \mathbb{R}^3 ? A negative answer is given by the Hilbert's theorem. Is it really essential that the curvature be constant as an assumption in this theorem? Is it possible to weaken the hypotheses of this theorem so that the conclusion holds? We will find the answers to these questions in Efimov's theorem. Will there exist some integer p such that \mathbb{H}^2 can be realized in \mathbb{R}^p ? Can the answer to the previous question be generalized to \mathbb{H}^n ? As the last objective of this work, it is to study in detail the Blanuša theorem who manages to answer these questions, in an affirmative way. Subsequently, Rozendorn, Henke-Nettekoven and Azov reduced the codimension of these realizations, using the method proposed by Blanuša, which will be explained in detail.

Key words and phrases. isometric immersion, gaussian curvature, negative curvature, complete surface, hyperbolic space, riemannian manifold.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 53A07, 53C45, 53C42; Secondary 53C40, 53A05, 35L55.

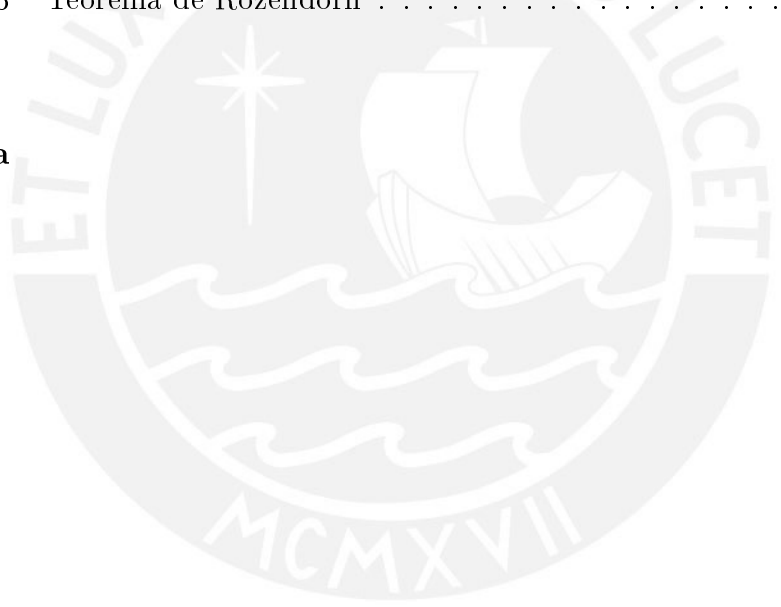


El presente trabajo de tesis está dedicado a mis abuelitos José Salomé Chuquillanqui y Viviana Gómez Cunyas.

Índice general

Introducción	1
1 Preliminares	7
1.1 Geometría Diferencial	7
1.1.1 Superficie de revolución	12
1.2 Topología	14
1.3 Geometría Riemanniana	16
1.3.1 Espacio Hiperbólico \mathbb{H}^2 y \mathbb{H}^n	20
2 Superficies completas de curvatura gaussiana constante no negativa	29
2.1 Superficies completas de curvatura gaussiana constante nula	29
2.2 Superficies completas de curvatura gaussiana positiva	38
3 Superficies de curvatura gaussiana constante negativa	46
3.1 Red de Tchebycheff	47
3.2 La ecuación de sine-Gordon	55
3.3 Superficies pseudo-esféricas	58
3.3.1 Pseudo-esfera	59
3.3.2 Superficie de Dini	62
3.4 Las transformadas de Bianchi y Bäcklund	63
3.4.1 La transformada de Bianchi	63
3.4.2 Superficie de Kuen	66
3.4.3 Generalización de Bäcklund	68
3.4.4 Superficie pulsante (Breather surface)	70
4 Imposibilidad de una inmersión isométrica de \mathbb{H}^2 en \mathbb{R}^3	75
4.1 Teorema de Hilbert	76

4.1.1	Primera demostración	83
4.1.2	Segunda demostración	85
4.2	Teorema de Efimov	88
4.2.1	Demostración del lema A	96
4.2.2	Demostración del lema B	102
4.2.3	Demostración del Lema Principal	114
5	Inmersión isométrica de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^p	156
5.1	Inmersión isométrica local de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^{2n-1}	157
5.2	Inmersión isométrica de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^p , con $p = \infty$	158
5.3	Inmersión isométrica de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^p , con $p < \infty$	164
5.3.1	Teorema de Blauša para el plano hiperbólico \mathbb{H}^2	165
5.3.2	Teorema de Blauša para el espacio hiperbólico \mathbb{H}^n	178
5.3.3	Teorema de Rozendorn	184
Apéndice		188
Bibliografía		191
Índice		202



Índice de figuras

1.1	Superficie de Revolución	13
1.2	Inmersión de un horodisco	26
2.1	Cono de Revolución	38
2.2	Superficie de curvatura $K_{const.} = 1$ con $C = 7/4$	44
2.3	Superficies de curvatura $K_{const.} = 1$	45
3.1	Red de Tchebycheff.	47
3.2	Una red de Tchebycheff en la esfera	48
3.3	Una red de Tchebycheff en el Catenoide.	49
3.4	Ilustración de los ángulos entre las curvas de coordenadas de una red de Tchebycheff en Ω	54
3.5	Superficies pseudo-esféricas de revolución tipo Minding top y Minding bobbing.	59
3.6	Tractriz	60
3.7	Superficie de Beltrami	61
3.8	Superficie de Dini (a) $a = 1$, $\zeta = 2\pi/5$ y (b) $a = 3/2$, $\zeta = 20\pi/41$	62
3.9	Transformación de Bianchi	64
3.10	Superficie de Kuen	67
3.11	Superficie pulsante, $w = 1/2$	71
3.12	Superficie pulsante, $w = 3/7$	72
3.13	Superficie pulsante, $w = 1/5$	73
3.14	Superficie pulsante, $w = 3/7$	74
4.1	Aplicación $d(\exp_p)_q$	77
4.2	Curva asintótica $\alpha(u)$	78
4.3	Buena definición de $\alpha(u)$	78
4.4	Campo de vectores $W(u)$	79
4.5	Definición de la parametrización \mathbf{x}	79

4.6	Curva coordenada $u \mapsto h(u, v_0)$	80
4.7	Imágenes consecutivas de las funciones $h'_j s$	81
4.8	Entorno \mathcal{R}	82
4.9	ω crece al menos $\varepsilon = \min\{\omega_1, \omega_2\}$	84
4.10	Rectángulo exterior de un arco no geodésico.	90
4.11	Imagen del hiperboloide \mathcal{H} , por medio de N	91
4.12	Imagen del \mathcal{G} , por medio de N	93
4.13	Definición de los conjuntos D y \mathcal{D}	96
4.14	Aplicación auxiliar μ	97
4.15	Camino $\mu(\gamma)$ y parábola $y^2 = -nx$	98
4.16	\mathcal{D} contiene a D	98
4.17	Construcción de la inmersión F	99
4.18	$N(D_r(p))$; cuando $\pi/2 < r < \pi$	104
4.19	Una ε -franja de $N \circ \gamma$	105
4.20	$N(U(\hat{\varepsilon}))$, $\hat{\varepsilon} < r$	106
4.21	r -franja (sombreada) y $N(V_{\hat{\theta}})$ (rayado)	107
4.22	Cilindro elíptico \mathcal{C}	107
4.23	θ -entorno de $N \circ \gamma$	108
4.24	θ -entorno.	109
4.25	$\widehat{\theta}$ -entorno.	109
4.26	$D = D_\varepsilon(p)$ con $\varepsilon < \pi/2$	111
4.27	$d(\hat{q}, p) = \delta$ donde $\delta < \min\{\rho - r, \pi/2 - r\}$	112
4.28	$d(\hat{q}, \overline{E} \setminus (D \cap \overline{E})) > r$	113
4.29	$d(q, p_1) = d(q, p_2) = r < \pi/2$	113
4.30	Triángulo geodésico en H	114
4.31	\mathcal{R} y $F(\mathcal{R})$	115
4.32	$F(D)$ sombreado	123
4.33	Δ sombreado	123
4.34	R sombreado	124
4.35	K sombreado	127
4.36	$N_\varepsilon(V_1 \cap H)$ y $N_\varepsilon(V_2 \cap H)$	132
4.37	Caso A	134
4.38	R sombreado y ρ interseca al eje y	136
4.39	R sombreado y ρ evita al eje y	136
4.40	$D(k)$ sombreado	139
4.41	Intersección transversal de h_u con ρ y ∂D	141

4.42	$F(N \cap D)$ sombreado dentro de $F(N)$.	141
4.43	Región G .	143
4.44	Región $G(u)$.	144
4.45	Región K sombreado.	145
4.46	$G_1 \subset G$ y $X_1 < X$.	147
4.47	x -cadena \mathcal{C}' .	148
4.48	B sombreado.	149
4.49	B sombreado.	151
5.1	Funciones auxiliares $\psi_j(u)$	166
5.2	Función $\chi(t)$	168
5.3	Funciones $\chi(t)$ y $\varphi_2(u)$ para $u \in [0, 1]$	174



Agradecimiento

Agradezco a mis padres, mi mamá Teresa Salomé Gómez y mi papá Wilfredo Huaylla Meza, por el apoyo que siempre me brindan y por el incansable esfuerzo que hicieron día a día para que sea un profesional. Sin su apoyo constante este nuevo logro no sería posible.

A los profesores de la maestría en matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por su valiosa enseñanza y permanente orientación en el transcurso de mi formación académica.

Al Dr. Rudy Rosas por su asesoramiento, el tiempo y la dedicación brindada a lo largo de la presente investigación, también por su motivación, paciencia y sugerencias para concluir con éxito esta tesis.

A los doctores Roland Rabanal y Christiam Figueroa por haberse dado el tiempo de leer esta tesis a detalle, por sus correcciones, observaciones y valiosos aportes que sirvieron de gran ayuda para culminar esta tesis.

Al Dr. Hermann Karcher por asesorarme y ayudarme generosamente en la realización de muchas de los gráficos presentados en este trabajo.

Introducción

En 1827, Carl Friedrich Gauss publicó [Gau27] en la que se introducen conceptos como la aplicación de Gauss, la curvatura gaussiana y las ecuaciones básicas que permitieron su estudio e interpretación. En 1899, Heinrich Liebmann muestra el conocido teorema de la rigidez de la esfera, ver [Lie99].

Teorema (Liebmann, 1899). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, conexa y compacta, cuya curvatura gaussiana $K > 0$ es constante. Entonces S es una esfera.*

Posteriormente, fueron Philip Hartman y Louis Nirenberg en 1959 quienes logran mostrar el siguiente resultado, ver [HN59].

Teorema (Hartman-Nirenberg, 1959). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa con curvatura gaussiana idénticamente nula, entonces S es un cilindro o un plano.*

El estudio de superficies de curvatura gaussiana negativa en \mathbb{R}^3 está relacionado con el problema de interpretación de la geometría no euclidiana. Como afirma Rozendorn en [Roz92, p. 90]:

“A finales de la década de 1830 Ferdinand Minding investigó ciertas propiedades de las superficies con curvatura gaussiana constante negativa. En [Min39], Minding descubrió superficies helicoidales con estas características, posteriormente investigadas por Ulisse Dini en [Din65]. Minding demostró que estas superficies de revolución se pueden dividir naturalmente en tres tipos. Además, bajo la condición $K_{const.} < 0$, Minding en [Min40] encontró una serie de relaciones entre los lados y ángulos de triángulos formados por geodésicas. El hecho de que las fórmulas que encontró son equivalentes a relaciones trigonométricas en el plano hiperbólico, o plano de Lobachevsky, pasó entonces desapercibido. Algunos historiadores suponen que Minding no estaba interesado en el problema asociado con la geometría no

euclidiana, y que estas obras suyas solo se referían accidentalmente a Lobachevsky.”

Para una lectura complementaria véase [Nor56], en este libro Aleksandr Petrovich Norden comienza con un trabajo sobre la teoría de las superficies: la memoria principal de Gauss y cuatro artículos de Minding (sobre la geometría intrínseca de las superficies). A esto le sigue el trabajo de Beltrami [Bel68a] que contiene la primera interpretación de la geometría de Lobachevsky, este trabajo se complementa con el artículo de Hilbert [Hil01]. Según lo mencionado por Rozendorn en [Roz92], el hecho de establecer una conexión directa entre la geometría de Lobachevsky y las superficies de curvatura gaussiana constante negativa se remonta a 1868, cuando Eugenio Beltrami, en [Bel68a] y [Bel72], utilizando los resultados de Minding llevó a cabo un análisis detallado de la superficie de la pseudo-esfera mostrando así que las superficies en el espacio euclidiano tridimensional con curvatura gaussiana constante negativa tiene localmente la misma geometría que el plano hiperbólico.

“De [Bel68a] queda claro, entre otras cosas, que Beltrami ya había visto la diferencia entre los enunciados locales y globales del problema, y comprendió que la cuestión de la interpretación de todo el plano de Lobachevsky como una superficie de curvatura constante negativa en \mathbb{R}^3 seguía sin resolverse en ese momento. Por otro lado el artículo [Bel68a] jugó un papel importante en la asimilación y popularización de las ideas de la geometría no Euclidiana; tal vez menos conocido es que sirvió como una etapa preparatoria importante para futuras investigaciones del propio Beltrami, en [Bel68b] construyó un modelo analítico del espacio hiperbólico n -dimensional.”

Regresando a las superficies en \mathbb{R}^3 , veremos que en el borde de la pseudo-esfera se incumple su suavidad y su curvatura media se vuelve infinita. En cada una de las dos partes suaves de la pseudo-esfera separadas por su borde, en forma de cubrimiento universal, podemos obtener una realización de un horodisco recortado del plano hiperbólico. No solo en la pseudo-esfera, sino también en otras superficies de curvatura gaussiana constante negativa. De modo que es natural hacerse las siguientes preguntas

¿De todos modos, se puede realizar todo el plano hiperbólico en \mathbb{R}^3 como una superficie sin singularidades?

¿Existe una inmersión isométrica de todo el plano hiperbólico en \mathbb{R}^3 ?

¿Existe alguna superficie completa con curvatura constante negativa en \mathbb{R}^3 ?

En 1873, Ludwing Schläfli en [Sch71] discutió la forma local de esta última pregunta. Conjeturó que una variedad riemanniana de dimensión n puede ser inmerso isométricamente en un espacio euclidiano de dimensión $s_n = \frac{n}{2}(n+1)$. Es apropiado asumir en todo momento que Schläfli tenía en mente métricas analíticas e inmersiones analíticas locales. Más de medio siglo después, en 1926, Maurice Janet [Jan26] publicó una prueba² de la conjetura de Schläfli para el caso $n = 2$, mientras que en 1927, Élie Cartan probó el caso general en [Car27]. El teorema de Schläfli-Janet-Cartan establece que en cualquier variedad riemanniana analítica de dimensión n , dado un punto en esta variedad existe un entorno de este punto que tiene una inmersión isométrica analítica en \mathbb{R}^{s_n} . Regresando a las preguntas planteadas arriba, fue David Hilbert en 1901, quien abordó el problema de la realización del plano hiperbólico en \mathbb{R}^3 , y dio una respuesta negativa a todas las preguntas anteriores, probando así el siguiente teorema, ver [Hil01] y [Hil09].

Teorema (Hilbert, 1901). *Una variedad riemanniana bidimensional completa con curvatura constante negativa, no se puede aplicar en \mathbb{R}^3 mediante una inmersión isométrica.*

En consecuencia no es posible extender una superficie de curvatura gaussiana constante negativa sin la aparición de singularidades. David Hilbert notó que en la prueba utilizó una suavidad C^r suficientemente alta de la superficie en cuestión, pero no determinó con precisión qué r se requiere. Cabe mencionar que no solo es imposible realizar la totalidad del plano hiperbólico como una superficie de curvatura gaussiana constante negativa en \mathbb{R}^3 , sino incluso el semiplano hiperbólico (ver [Efi75]), y para la demostración, según Vorob'eva en [Vor75], también es suficiente asumir solo la suavidad C^2 de la superficie desconocida. Debido a los conocidos resultados de Nicolaas H. Kuiper (véanse Kuiper 1955 [Kui55a], [Kui55b] y John Nash 1954 [Nas54]), el teorema de Hilbert no puede extenderse a la clase de superficies C^1 -suaves. El trabajo de Hilbert atrajo la atención de muchos geómetras que investigaron en esta dirección y comenzaron a hacerse preguntas en relación a las hipótesis del teorema, por ejemplo ¿es realmente esencial que la curvatura gaussiana sea constante? Hasta

²En 1931, C. Burstin [Bur31] hizo esta prueba completamente convincente.

donde se sabe, esta pregunta fue planteada por el mismo Hilbert. En 1936, Cohn-Vossen en [CV36] conjeturó que el teorema de Hilbert puede ser generalizado a superficies con curvatura gaussiana no constante, pero acotado superiormente por una cantidad estrictamente negativa, es decir $K \leq \text{const.} < 0$. Es natural llamar a esta conjetura el problema de Hilbert & Cohn-Vossen. En 1955, Erhard Heinz probó en [Hei55] que no existen gráficos enteros inmersos en \mathbb{R}^3 con curvatura gaussiana acotada superiormente por una constante negativa, es decir dio una solución parcial del problema de Hilbert & Cohn-Vossen. Finalmente en 1964, Nikolai Vladimirovich Efimov fue quien dio una solución total a este problema, ver [Efi63] y [Efi64], estableciendo así el siguiente teorema

Teorema (Efimov, 1964). *No existen superficies completas C^2 -inmersas en \mathbb{R}^3 con curvatura gaussiana acotada superiormente por una constante negativa.*

Posteriormente, el propio Efimov generalizó este resultado dilatando la condición de la curvatura, pidiendo así que la curvatura K satisfaga la siguiente desigualdad

$$\left| \frac{1}{\sqrt{-K(p)}} - \frac{1}{\sqrt{-K(q)}} \right| \leq \varepsilon_1 d(p, q) + \varepsilon_2$$

para cualesquiera para de puntos p y q de la superficie, ver [Efi68]. Esta generalización se hizo dilatando las hipótesis del teorema de Hilbert, pero podemos pensar en tener una generalización dimensional, es decir ¿admite el espacio hiperbólico \mathbb{H}^n una realización como superficie en \mathbb{R}^p ? De ser así ¿bajo que relaciones entre p y n ?

En 1886 Friedrich Heinrich Schur en [Sch86] construyó una inmersión isométrica local de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^{2n-1} . Posteriormente en 1919-1920 Élie Cartan muestra que no existe inmersión isométrica de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^{2n-2} incluso de manera local, véase [Car19] y [Car20]. Una década más tarde en 1932 Ludwig Bieberbach presenta en [Bie32] el primer resultado global sobre la inmersibilidad de \mathbb{H}^2 en \mathbb{R}^p , cuando $p = \infty$. Sin embargo, parece que las fórmulas usadas por Bieberbach para tal inmersión del plano hiperbólico no se pueden generalizar al caso de un espacio hiperbólico multidimensional. Por tanto, Danilo Blanuša dándose cuenta de este hecho construyó en 1952 una inmersión isométrica inyectiva del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 en \mathbb{R}^p , con $p = \infty$, que pueda generalizarse al caso multidimensional, ver [Bla52]. Veamos ahora que ocurre con el caso p finito, observamos que las construcciones generales de John Nash y Mikhael Gromov para una inmersión

isométrica suave en \mathbb{R}^p de una variedad riemanniana no compacta M^n requieren dimensiones $p = p(n)$ considerablemente altas, comparadas que lo encontrado por Danilo Blanuša, por ejemplo nos permite encontrar inmersiones isométricas de \mathbb{H}^2 en \mathbb{R}^{51} ; ver John Nash (1956) [Nas56], Mikhael Gromov y Vladimir Rokhlin (1970) [GR70], Mikhael Gromov (1986) [Gro86], Matthias Günther (1989) [Gü89] y (2010) [Gü10]. Por otro lado casi en paralelo, se presenta una de las primeras inmersiones isométricas inyectivas de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^p para p finito la cual también fue construidas por Danilo Blanuša en 1955, ver [Bla55]. En el cual muestra que \mathbb{H}^2 puede ser inmerso isométricamente de manera inyectiva en \mathbb{R}^6 , y además \mathbb{H}^n , en \mathbb{R}^{6n-5} , para $n \geq 3$. Cabe resaltar que las inmersiones son de clase C^∞ y se dan mediante fórmulas explícitas. En 1960, Èmil' Renol'dovich Rozendorn haciendo uso de la construcción obtenida por Blanuša logra construir una inmersión isométrica no inyectiva de \mathbb{H}^2 en \mathbb{R}^5 , ver [Roz60]. Esta última construcción, en 1981, se pudo generalizar en dimensión y dar una inmersión isométrica de clase C^∞ de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^{4n-3} , esto gracias al Wolfgang Henke ver [Hen81].

El objetivo principal de este trabajo es hacer un estudio detallado de la posibilidad e imposibilidad de una inmersión isométrica del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^p para $n \geq 2$ y $p = p(n)$. Los objetivos secundarios son: detallar la clasificación de superficies de acuerdo a su curvatura gaussiana constante; entender la estructura de las superficies con curvatura gaussiana constante negativa así como brindar ejemplos no tan usuales; y finalmente entender el método usado por Blanuša.

En el capítulo 1 se introduce la notación, terminología y resultados preliminares que serán usados a lo largo de este trabajo. Este capítulo se divide en tres secciones, la sección 1.1 está destinada a la geometría diferencial en general donde veremos resultados sin demostración como el teorema de Minding entre otros, y haremos también una subsección sobre superficies de revolución. En la sección 1.2 veremos resultado de topología que serán usados posteriormente. La sección 1.3 está destinada a introducir resultados preliminares de geometría riemanniana y haremos una subsección sobre el espacio hiperbólico, en el cual veremos sus distintos modelos, por ejemplo el disco de Poincaré.

El capítulo 2, se divide en dos secciones donde estudiaremos la clasificación de superficies completas de curvatura constante no negativa, mediante el teorema de Hartmann-Nirenberg y el teorema de Liebmann. En el capítulo 3 haremos un análisis detallado de las superficies de curvatura gaussiana constante negativa. Este capítulo se divide en cuatro secciones, en la sección 3.1 daremos la

definición de una red de Tchebycheff así como una caracterización de ella, el resultado principal de esta sección es que siempre existe una red de Tchebycheff asintótica local en superficies de curvatura constante negativa. En la sección 3.2 introduciremos la ecuación de sine-Gordon, la cual describe inmersiones isométricas de partes del plano hiperbólico en el espacio \mathbb{R}^3 . En la sección 3.3 estudiaremos las superficies pseudo-esféricas, dando como ejemplo de ellas a la pseudo-esfera y a la superficie de Dini. En la sección 3.4 analizaremos las transformadas de Bianchi y Bäcklund, luego las usaremos para proporcionar más ejemplos de superficies de curvatura constante negativa, por ejemplo la superficie de Kuen entre otras, además se dan figuras que muestran sus comportamientos y autointersecciones. En el capítulo 4 estudiaremos la imposibilidad de una inmersión isométrica del plano hiperbólico en el espacio euclidiano tridimensional. Este capítulo se divide en dos secciones, en la sección 4.1 estudiaremos el teorema de Hilbert y presentaremos dos demostraciones las cuales se van a separar en subsecciones. En la sección 4.2 demostraremos a detalle el teorema de Efimov. En el capítulo 5 abordaremos el tema de la realización del espacio hiperbólico n -dimensional en espacios euclidianos. Este capítulo se divide en tres secciones. En la sección 5.1 veremos la construcción de una inmersión isométrica local del plano hiperbólico \mathbb{H}^n en el espacio euclidiano \mathbb{R}^{2n-1} dado por Friedrich Schur. En la sección 5.2 estudiaremos el primer resultado global sobre inmersiones isométricas del plano hiperbólico en \mathbb{R}^∞ este resultado fue obtenido por Ludwig Bieberbach; también veremos un resultado importante sobre una inmersión local dado por Alexander von Brill. En la sección 5.3 finalmente analizaremos la posibilidad de un inmersión isométrica del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n en un espacio euclidiano \mathbb{R}^p con $p < \infty$, esto se da gracias al teorema de Blanuša, al cual dedicamos dos subsecciones: uno para el caso bidimensional y el otro para el caso n -dimensional. En la subsección 5.3.3 veremos el teorema de Rozendorn, sin demostración, cuyo impacto es la reducción de la codimensión de la inmersión isométrica que brindó Danilo Blanuša. En esta subsección también enunciaremos sin prueba los teoremas de Henke, Azov y Henke-Nettekoven, quienes hicieron uso del método de Danilo Blanuša para generalizar el teorema de Rozendorn.

Miguel Angel Huaylla Salomé
Lima, Perú.
2022

Capítulo 1

Preliminares

Surely it is not knowledge, but learning;
not owning but earning; not being there,
but getting there; that gives us
the greatest pleasure.

Carl Friedrich Gauss.

En este capítulo se muestran las principales definiciones, teoremas y resultados generales que serán usados a lo largo de este trabajo. Se busca conectar la geometría de Lobachevsky con las superficies de curvatura gaussiana constante negativa. Las demostraciones se pueden encontrar en textos como [PdC16], [Spi99a] o [Sto89].

1.1 Geometría Diferencial

Teorema 1.1.1 (Minding). *Dos superficies con la misma curvatura gaussiana constante son localmente isométricas.*

Demostración. [PdC16, p. 292]

□

Definición 1.1.2. Un cilindro es una superficie regular S tal que por cada punto $p \in S$ pasa una única recta $R(p) \subset S$ (la generatriz que pasa por p), que satisface la condición de que si $q \neq p$, entonces las rectas $R(p)$ y $R(q)$ son paralelas o iguales.

Definición 1.1.3. Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es llamada conexa si cualesquiera dos de sus puntos pueden ser unidos por una curva continua enteramente contenida en S .

Definición 1.1.4. Sea S una superficie regular y conexa. S es denominada completa cuando para cualquier punto $p \in S$, cualquier geodésica parametrizada $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$ puede ser extendida a una geodésica parametrizada $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$, definida sobre toda la recta real \mathbb{R} .

Definición 1.1.5. Un campo de direcciones r , en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in U$ una recta $r(p)$ en \mathbb{R}^2 que pasa por p .

Definición 1.1.6. Una curva regular conexa $C \subset U$ es una curva integral de un campo de direcciones r , definido en $U \subset \mathbb{R}^2$, si $r(q)$ es la recta tangente a C en q , para todo $q \in C$.

Teorema 1.1.7. Sea X un campo de vectores C^∞ en S , una variedad bidimensional, con $X(p) \neq 0$. Entonces existe un sistema de coordenadas (x, U) alrededor de p tal que $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$, en U .

Demostración. Ver [Spi99b, p. 148]. □

Proposición 1.1.8. Sean X_1 y X_2 campos de vectores linealmente independientes en una vecindad del punto p en una superficie S . Entonces existe un difeomorfismo $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, donde $U \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto y $p \in h(U)$, cuya i -ésima curva coordenada es una curva integral de X_i .

Demostración. Ver [Spi99b, p. 167]. □

Proposición 1.1.9. Sea $p \in S$ un punto no umbílico de S , entonces es posible parametrizar una vecindad de p de tal modo que las curvas coordenadas de esta parametrización sean líneas de curvatura.

Demostración. Ver [AT12, p. 279]. □

Definición 1.1.10. Sea $p \in S$. Una dirección asintótica de S en el punto p es una dirección v de $T_p S$ para la cual la curvatura normal es cero, es decir $\Pi_p(v) = 0$. Una curva asintótica de S es una curva regular conexa $C \subset S$ tal que para cada $p \in C$ la recta tangente de C en p es una dirección asintótica.

Proposición 1.1.11. Sea $p \in S$ un punto hiperbólico de S . Entonces es posible parametrizar una vecindad de p de tal modo que las curvas coordenadas de esta parametrización sean las curvas asintóticas.

Demostración. Ver [AT12, p. 279]. \square

Proposición 1.1.12 (Olinde Rodrigues). *Una condición necesaria y suficiente para que una curva conexa y regular C en S sea una línea de curvatura es que $(N \circ \alpha)'(t) = -\lambda(t) \cdot \alpha(t)$, para cualquier parametrización $\alpha(t)$ de C , donde $\lambda(t)$ es una función diferenciable de t . En este caso, $-\lambda(t)$ es la curvatura (principal) a lo largo de $\alpha'(t)$.*

Demostración. Ver [PdC16, p. 147] \square

Definición 1.1.13. Se dice que una curva asintótica que pasa por un punto $p \in S$ es maximal si no es un subconjunto propio de alguna curva asintótica que pase por p .

Dada una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de una vecindad $\mathbf{x}(U)$ en una superficie S tenemos que las funciones

$$E(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \quad F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p, \quad G(u, v) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ es el producto interno en el plano tangente T_S inducido por el producto interno euclidiano de \mathbb{R}^3 , son los coeficientes de la primera forma fundamental en el base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_p S$.

Tenemos también que dada esta parametrización, podemos escoger, para cada punto de $\mathbf{x}(U)$, un vector unitario

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}(p), \quad p \in \mathbf{x}(U).$$

De esta manera obtenemos las funciones

$$e(u, v) = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle_p, \quad f(u, v) = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle_p, \quad g(u, v) = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle_p,$$

que son llamados los coeficientes de la segunda forma fundamental en el base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_p S$.

El teorema fundamental de superficies dice que una superficie se caracteriza por los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales. Esto nos permite proyectar gran parte de la teoría de superficies en términos de estos coeficientes. Las ecuaciones se pueden escribir en términos de estos coeficientes fundamentales. Estas ecuaciones lineales se conocen como las ecuaciones de Gauss-Weingarten, y sus condiciones de compatibilidad, conocidas como las

ecuaciones de Mainardi-Codazzi y el teorema Egregium de Gauss restringen los coeficientes fundamentales admisibles.

Dada una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de una vecindad $\mathbf{x}(U)$ en una superficie S obtenemos las ecuaciones de Gauss,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + eN, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + fN, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + gN, \end{cases} \quad (1.1)$$

y las ecuaciones de Weingarten son

$$\begin{cases} N_u &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2} \mathbf{x}_v, \\ N_v &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \mathbf{x}_v. \end{cases} \quad (1.2)$$

Las condiciones de compatibilidad $(\mathbf{x}_{uu})_v = (\mathbf{x}_{uv})_u$ y $(\mathbf{x}_{uv})_v = (\mathbf{x}_{vv})_u$ aplicadas a las ecuaciones de Gauss (1.1) producen las ecuaciones de Mainardi-Codazzi, para un abordaje más detallado véase [PdC16, p. 239] o [Spi99a, p. 53].

$$\begin{cases} e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \end{cases} \quad (1.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

son los símbolos de Christoffel.

Es conveniente observar cómo se simplifican las ecuaciones de Mainardi-Codazzi cuando el entorno coordenado no contiene puntos umbílicos y las curvas coordenadas son líneas de curvatura ($F = f = 0$). Entonces tenemos

$$e_v = e\Gamma_{12}^1 - g\Gamma_{11}^2, \quad g_u = g\Gamma_{12}^2 - e\Gamma_{22}^1. \quad (1.5)$$

Teniendo en cuenta que $F = 0$ implica que

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \frac{E_v}{E}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{G_u}{E}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \frac{G_u}{G},\end{aligned}\tag{1.6}$$

concluimos entonces que las ecuaciones de Mainardi-Codazzi adoptan la forma:

$$\begin{cases} e_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right), \\ g_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right). \end{cases}\tag{1.7}$$

Proposición 1.1.14. *Para todo $p \in S$ existe una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ de una vecindad V de p tal que las curvas coordenadas $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ se intersecan ortogonalmente para cada $q \in V$ (se dice que tal \mathbf{x} es una parametrización ortogonal).*

Demostración. Ver [PdC16, p. 186] □

Proposición 1.1.15. *Sea $\mathbf{x}(u, v)$ un sistema de coordenadas en una vecindad de $p \in S \subset \mathbb{R}^3$, entonces*

$$K = -\frac{1}{4W^4} \det \begin{pmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{pmatrix} + \frac{1}{2W} \left[\left(\frac{F_v - G_u}{W} \right)_u + \left(\frac{F_u - E_v}{W} \right)_v \right]\tag{1.8}$$

donde $W = \sqrt{EG - F^2}$. Esta expresión para K es conocida como la expresión de Frobenius.

En particular, si $E = G = 1$, entonces obtenemos la fórmula de Gauss:

$$K = \frac{1}{2W} \left[\left(\frac{F_v}{W} \right)_u + \left(\frac{F_u}{W} \right)_v \right]\tag{1.9}$$

En particular, si \mathbf{x} es una parametrización ortogonal, es decir $F = 0$, entonces obtenemos:

$$K = -\frac{1}{2W} \left[\left(\frac{G_u}{W} \right)_u + \left(\frac{E_v}{W} \right)_v \right]\tag{1.10}$$

Demostración. Ver [Spi99a, p. 230] y [Spi99c, p. 129]. O también puede ver [PS90, p. 383]. □

Definición 1.1.16. Dados dos puntos $p, q \in S$, la distancia entre p y q está dada por

$$d(p, q) = \inf\{l(\alpha) : \alpha \text{ une } p \text{ con } q\} \quad (1.11)$$

donde α es una curva diferenciable por partes que une los puntos p y q .

Proposición 1.1.17. Sea $K \equiv 0$. Entonces $\exp_p : T_p S \rightarrow S$, $p \in S$, es una isometría local.

Demostración. Ver [PdC16, p. 391] □

Por otro lado, tenemos que una curva regular conexa C en el entorno coordenado $(U, \mathbf{x}(u, v))$ es una curva asintótica si, y solamente si, para cualquier parametrización $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $t \in I$ de C tenemos $\text{II}(\alpha'(t)) = 0$, para todo $t \in I$, es decir, si, y solamente si

$$e du^2 + 2f du dv + g dv^2 = 0, \quad t \in I. \quad (1.12)$$

Una condición necesaria y suficiente para que las curvas coordenadas de una parametrización en un entorno de un punto hiperbólico ($eg - f^2 < 0$) sean asintóticas es que $e = g = 0$. En efecto, si las curvas $u = \text{const.}$, $v = v(t)$ y $u = u(t)$, $v = \text{const.}$ Satisfacen la ecuación (1.12) tenemos:

$$\begin{aligned} u = \text{const.}, v = v(t) &\Rightarrow g du^2 = 0 \Rightarrow g = 0, \\ u = u(t), v = \text{const.} &\Rightarrow e du^2 = 0 \Rightarrow e = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Recíprocamente, si $e = g = 0$ y $f \neq 0$, entonces la ecuación (3.14) se convierte en $f du dv = 0$ ecuación que claramente satisfacen las curvas coordenadas.

1.1.1 Superficie de revolución

Durante el mismo período de tiempo en el que se originó el trabajo de Lobachevsky, Ferdinand Minding estudió las superficies de revolución de curvatura constante. Sus obras [Min38], [Min39] y [Min40] fueron reconocidas como aplicaciones importantes de la teoría de superficies, que antes de su época fue tratada sistemáticamente por Gaspard Monge en su manual clásico sobre geometría diferencial “Feuilles d’analyse appliquée à la géométrie” [Mon01]. Siguiendo el enfoque de Monge, en el que las coordenadas cartesianas (x, y, z) de

un punto arbitrario en una superficie en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 están conectadas por la relación implícita

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1.14)$$

o, más frecuentemente, en la forma

$$z = f(x, y), \quad (1.15)$$

Minding estudió superficies de revolución de curvatura constante K , tanto positivas como negativas.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto que se obtiene al rotar una curva regular plana ζ alrededor de un eje. Tomemos, para nuestros fines, el plano xz como el plano donde está la curva ζ y el eje z como el eje de rotación. Sea la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad f(v) > 0, \quad (1.16)$$

del conjunto abierto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$ en S . Los

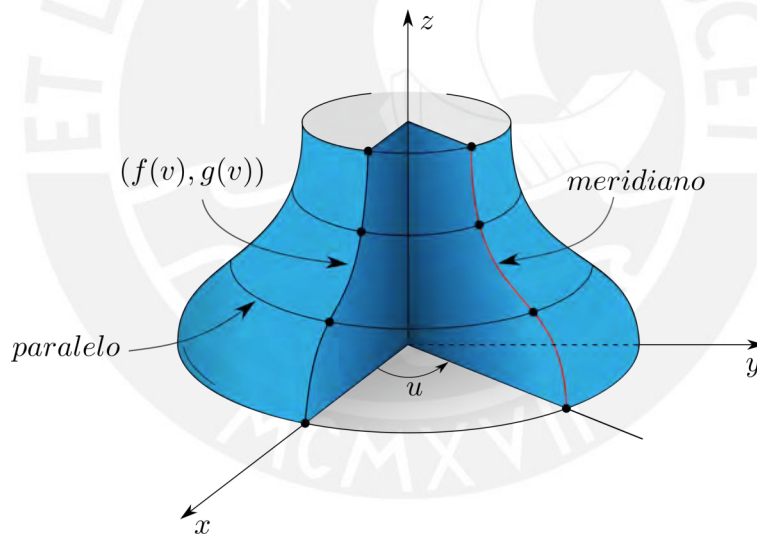


Figura 1.1: Superficie de Revolución

coeficientes de la primera forma fundamental vienen dados por

$$E = f^2(v), \quad F = 0, \quad G = [f'(v)]^2 + [g'(v)]^2. \quad (1.17)$$

Es conveniente admitir que la curva ζ está parametrizada por longitud de arco, es decir

$$[f'(v)]^2 + [g'(v)]^2 = G = 1. \quad (1.18)$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental son:

$$e = -f(v)g'(v), \quad f = 0, \quad G = g'(v)f''(v) - g''(v)f'(v). \quad (1.19)$$

Como $F = f = 0$, concluimos que los paralelos ($v = \text{const.}$) y los meridianos ($u = \text{const.}$) de una superficie de revolución son líneas de curvatura de tal superficie. Como

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{g'(v)[g'(v)f''(v) - g''(v)f'(v)]}{f(v)} \quad (1.20)$$

y f siempre es positiva, deducimos que los puntos parabólicos vienen dados bien por $g'(v) = 0$ (la recta tangente a la curva generatriz es perpendicular al eje de rotación) o bien $g'(v)f''(v) - g''(v)f'(v) = 0$ (la curvatura de la curva generatriz es cero). Un punto que satisfaga ambas condiciones es un punto plano, ya que estas condiciones implican que $e = f = g = 0$.

Es conveniente expresar la curvatura gaussiana de otra manera. Al derivar $[f'(v)]^2 + [g'(v)]^2 = 1$ obtenemos $f'(v)f''(v) = -g'(v)g''(v)$, de esta manera tenemos:

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= -\frac{g'(v)[g'(v)f''(v) - g''(v)f'(v)]}{f(v)} \\ &= -\frac{[g'(v)]^2 f''(v) + [f'(v)]^2 f''(v)}{f(v)} \\ &= -\frac{f''(v)}{f(v)}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

1.2 Topología

Definición 1.2.1. Se dice que una aplicación continua y sobreyectiva $f : X \rightarrow Y$ tiene la propiedad del levantamiento de caminos cuando, para cualquier camino arbitrario $\alpha : [s_0, s_1] \rightarrow Y$ y cada punto $x \in X$ tal que $f(x) = \alpha(s_0)$, existe un camino $\bar{\alpha} : [s_0, s_1] \rightarrow X$ tal que $\bar{\alpha}(s_0) = x$ y $f \circ \bar{\alpha} = \alpha$.

Sabemos que no todo homeomorfismo local $f : X \rightarrow Y$ tiene la propiedad de levantamiento de caminos pero, cuando X es un espacio de Hausdorff, el levantamiento $\bar{\alpha} : [s_0, s_1] \rightarrow X$ de un camino $\alpha : [s_0, s_1] \rightarrow Y$ está completamente determinado por α y el punto inicial $x = \bar{\alpha}(s_0)$.

Cuando f es sobreyectiva y, para todo camino arbitrario $\alpha : [s_0, s_1] \rightarrow Y$ y todo punto $x \in X$ con $f(x) = \alpha(s_0)$, existe un único camino $\bar{\alpha} : [s_0, s_1] \rightarrow X$ tal que $f \circ \bar{\alpha} = \alpha$ y $\bar{\alpha}(s_0) = x$, diremos que $f : X \rightarrow Y$ tiene la propiedad del levantamiento de camino único.

Definición 1.2.2. Dos caminos α y β , que aplican $[0, 1]$ en X , se dice que son homotópicos por caminos si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1 y si existe una aplicación continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s), & H(s, 1) &= \beta(s), \\ H(0, t) &= x_0, & H(1, t) &= x_1, \end{aligned}$$

para cada $s, t \in [0, 1]$. La aplicación H recibe el nombre de homotopía de caminos entre α y β .

Proposición 1.2.3. *Sea S una superficie completa con curvatura gaussiana $K \leq 0$. Entonces la aplicación $\exp_p : T_p S \rightarrow S$, $p \in S$ es una aplicación de recubrimiento.*

Demostración. Ver [PdC16, p. 392] □

Proposición 1.2.4 (Unicidad del levantamiento de caminos). *Sea $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ una aplicación de recubrimiento, $\alpha : [0, l] \rightarrow B$ un camino en B y $\tilde{p}_0 \in \tilde{B}$ tal que $\pi(\tilde{p}_0) = \alpha(0) = p_0$. Entonces existe un único levantamiento $\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow \tilde{B}$ de α con origen en \tilde{p}_0 , es decir $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$.*

Demostración. Ver [PdC16, p. 382] □

Proposición 1.2.5. *Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo local con la propiedad de levantamiento de camino único. Si X es conexo por caminos y Y es simplemente conexo, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Ver [LL03, p. 140] □

Proposición 1.2.6. *Sea X un espacio de Hausdorff. Si un homeomorfismo local sobreyectivo $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación cerrada, entonces f tiene la propiedad de levantamiento de camino único.*

Demostración. Ver [LL03, p. 144] □

1.3 Geometría Riemanniana

Definición 1.3.1. Una variedad diferenciable de clase C^k de dimensión m , con $1 \leq k \leq +\infty$, es un espacio topológico Hausdorff M la cual tiene una base numerable de abiertos y está dotado de un atlas diferenciable $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$, es decir, una familia de homeomorfismos $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$ tales que:

1. cada U_α es un abierto de M mientras que cada $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ es un abierto de \mathbb{R}^m y además $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$,
2. la aplicación $\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mathbf{x}_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un difeomorfismo de clase C^k entre abiertos de \mathbb{R}^m , para cualesquiera α y β en Λ tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.
3. la familia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ es maximal con respecto a la condición (2), es decir, si (U, \mathbf{x}) es una carta local tal que $\mathbf{x} \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}$ y $\mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{x}^{-1}$ son difeomorfismos de clase C^k para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $(U, \mathbf{x}) \in \mathcal{A}$.

Los homeomorfismos \mathbf{x}_α son llamados *cartas locales*, los homeomorfismos \mathbf{x}_α^{-1} son llamados *parametrizaciones* o *coordenadas locales*, y las funciones $\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}$ son llamadas *cambio de coordenadas*. A menos que se indique lo contrario, consideraremos variedades diferenciables conexas, es decir, tales que los únicos subconjuntos abiertos y cerrados simultáneamente son el propio M y el conjunto vacío \emptyset .

Diremos que una aplicación $f : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciables es diferenciable si

$$\mathbf{y}_\beta \circ f \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbf{x}(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \rightarrow \mathbf{y}_\beta(V_\beta \cap f(U_\alpha)) \quad (1.22)$$

es una aplicación diferenciable para toda carta local $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbf{x}(U_\alpha)$ de M y toda carta local $\mathbf{y}_\beta : V_\beta \rightarrow \mathbf{y}(V_\beta)$ de N con $f(U_\alpha) \cap V_\beta \neq \emptyset$. Además, diremos que f es de clase C^k si M y N son variedades diferenciables de clase C^k y toda aplicación $\mathbf{y}_\beta \circ f \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}$ en (1.22) es de clase C^k . Llamaremos *difeomorfismo* a toda biyección $f : M \rightarrow N$ tal que tanto f como f^{-1} son diferenciables, si ambas aplicaciones fueran de clase C^k diremos que el difeomorfismo es de clase C^k .

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Para cada $p \in M$, consideremos el conjunto $C_p(M)$ de todas las curvas $\gamma : I \rightarrow M$, donde I es un intervalo abierto que contiene a 0, tales que $\gamma(0) = p$ y γ es diferenciable

en el punto 0, es decir la aplicación $\mathbf{x}_\alpha \circ \gamma$ es diferenciable en el punto 0, para toda carta local $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ con $p \in U_\alpha$. Diremos que dos curvas γ_1, γ_2 en $C_p(M)$ son equivalentes si $\left. \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_\alpha \circ \gamma_1)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_\alpha \circ \gamma_2)(t) \right|_{t=0}$ para toda carta local $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$. De hecho, si la igualdad vale para una carta local entonces ella vale para cualquier otra, en efecto notemos que dada cualquier otra carta local $\mathbf{x}_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbf{x}_\beta(U_\beta)$ con $p \in U_\beta$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_\beta \circ \gamma_1)(t) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt}((\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}) \circ (\mathbf{x}_\alpha \circ \gamma_1))(t) \right|_{t=0} \\ &= d(\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1})(\mathbf{x}_\alpha \circ \gamma_1(0)) \left. \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_\alpha \circ \gamma_1)(t) \right|_{t=0} \\ &= d(\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1})(\mathbf{x}_\alpha \circ \gamma_2(0)) \left. \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_\alpha \circ \gamma_2)(t) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_\beta \circ \gamma_2)(t) \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Representamos por $[\gamma]$ a la clase de equivalencia de cualquier curva $\gamma \in C_p(M)$. El espacio tangente a la variedad M en el punto p es el conjunto de tales clases de equivalencia, el cual será denotado por T_pM . Dada cualquier carta local $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ con $p \in U_\alpha$, la aplicación

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_\alpha(p) : T_pM &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ [\gamma] &\longmapsto d\mathbf{x}_\alpha(p)([\gamma]) := \left. \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_\alpha \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

está bien definida y es una biyección. Podemos usar esta biyección para identificar T_pM con \mathbb{R}^m . De esta manera, el espacio tangente adquiere una estructura de espacio vectorial. Aunque la identificación $d\mathbf{x}_\alpha$ depende de la elección de la carta local, la estructura de espacio vectorial de T_pM no depende de ella.

Definición 1.3.2. Sea M una variedad de clase C^k , donde $1 \leq k \leq +\infty$. Un atlas \mathcal{A} sobre M es llamado *coherente* si los cambios de coordenadas preservan la orientación de \mathbb{R}^m , es decir si $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta \in \mathcal{A}$, entonces $\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}$ tiene jacobiano positivo para todo punto de $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. Diremos que M es una *variedad orientable* si M admite un atlas coherente, caso contrario, diremos que M es una *variedad no orientable*. Fijada una orientación en M , diremos que una base ordenada v_1, v_2, \dots, v_m en un espacio tangente T_pM tiene *orientación positiva*, si su imagen por la derivada de cualquier carta $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ en el atlas coherente, con

$p \in U_\alpha$, tiene orientación positiva en \mathbb{R}^m , es decir cuyos vectores columna son

$$d\mathbf{x}_\alpha(p) \cdot v_1, d\mathbf{x}_\alpha(p) \cdot v_2, \dots, d\mathbf{x}_\alpha(p) \cdot v_m$$

tiene determinante positivo. Caso contrario diremos que ella tiene orientación negativa.

Ejemplo 1.3.3. La superficie S dada por (1.16), vista como una variedad diferenciable, es orientable. Podemos tomar dos parametrizaciones

$$\varphi_1 : (0, 2\pi) \times (a, b) \rightarrow S \quad \text{y} \quad \varphi_2 : (-\pi, \pi) \times (a, b) \rightarrow S$$

cuyas imágenes cubren toda la superficie S , donde

$$\varphi_j(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad j = 1, 2.$$

Tomando las cartas $\mathbf{x}_1 = \varphi_1^{-1}$ y $\mathbf{x}_2 = \varphi_2^{-1}$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2^{-1} : (-\pi, \pi) - \{0\} &\longrightarrow (0, 2\pi) - \{\pi\} \\ (u, v) &\longmapsto \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2^{-1}(u, v) := \begin{cases} (u, v) & , \quad 0 < u < \pi \\ (u + 2\pi, v) & , \quad -\pi < u < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto el jacobiano es la identidad en todo punto, ya que el cambio de coordenadas en el peor de los casos es una traslación. Esto muestra que S es una variedad orientable.

Definición 1.3.4. Una métrica riemanniana (o estructura riemanniana) en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto p de M un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, es decir una forma bilineal simétrica, positiva definida en el espacio tangente $T_p M$ que varía diferenciablemente en el siguiente sentido: Si $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es un sistema de coordenadas locales en torno de p , con $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$, entonces $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ y una función diferenciable en U .

Es claro que esta definición no depende de la elección del sistema de coordenadas. Es usual dejar de indicar el índice p en $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ siempre que no hubiese posibilidad de confusión. Las funciones g_{ij} son llamadas expresiones de la métrica riemanniana en el sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Una variedad diferenciable M con una dada métrica riemanniana g se llama una variedad riemanniana, y la denotaremos por (M, g) .

Planteemos ahora el problema de encontrar en el espacio euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 un dominio S que realice la geometría de una variedad bidimensional suave dada, M . En otras palabras: ¿Es posible, y en qué casos, encontrar en \mathbb{R}^3 algún subconjunto, cuya geometría intrínseca coincida con la geometría de la variedad bidimensional suave dada? Además, el método para calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera del dominio buscado $S \subset \mathbb{R}^3$, realizada usando la métrica del espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , debe corresponder en S con precisión a la métrica de la variedad M dada.

Definición 1.3.5. Dos variedades riemannianas (M, g_M) y (N, g_N) son isométricas si existe un difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ tal que $\varphi^*(g_N) = g_M$, es decir

$$g_N(d\varphi(v), d\varphi(w)) = g_M(v, w),$$

para todos los vectores tangentes v, w en T_pM y todo punto p en M . En este caso, φ^{-1} también es una isometría.

Definición 1.3.6. Sean (M, g_M) y (N, g_N) dos variedades riemannianas. Una aplicación $\varphi : M \rightarrow N$ es una isometría local si cada punto p en M tiene un entorno U , tal que $\varphi|_U$ es una isometría sobre un subconjunto abierto de N . Es usual decir que una variedad riemanniana M es localmente isométrica a la variedad riemanniana N si para todo punto p en M existe un entorno U de p en M y una isometría local $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset N$.

Generalmente, el problema de encontrar un subconjunto en algún espacio \mathbb{R}^n que tiene las mismas propiedades intrínseco-geométricas que una variedad suave dada a priori M se conoce como el problema de la inmersión isométrica de la variedad M en el espacio \mathbb{R}^n . Claramente, en la formulación del problema de inmersión isométrica hay un alto grado de arbitrariedad en la elección de la variedad original, así como en la elección del espacio ambiental.

Definición 1.3.7. Una variedad riemanniana S completa, simplemente conexa y con curvatura gaussiana no positiva es llamada una variedad de Hadamard.

Teorema 1.3.8 (Hadamard). *Si S es una variedad de Hadamard (inmersa en \mathbb{R}^3). Entonces $\exp_p : T_pS \rightarrow S$, donde $p \in S$, es un difeomorfismo.*

Demostración. Ver [PdC16, p. 393] □

Definición 1.3.9. Diremos que \tilde{S} es un recubrimiento duplo orientable si existe una aplicación $p : \tilde{S} \rightarrow S$, con las siguientes propiedades:

- S es una variedad conexa, \tilde{S} es una variedad orientada y p es un difeomorfismo local;
- Para cada $y \in S$, la imagen inversa $p^{-1}(y)$ contiene exactamente dos puntos;
- Si $p(x_1) = p(x_2)$ con $x_1 \neq x_2$ entonces el isomorfismo lineal $dp_{x_2}^{-1} \circ dp_{x_1} : T_{x_1}\tilde{S} \rightarrow T_{x_2}\tilde{S}$ invierte la orientación.

Teorema 1.3.10. *Toda variedad conexa S posee un recubrimiento duplo orientable.*

Demostración. [LL03, p. 196]. □

1.3.1 Espacio Hiperbólico \mathbb{H}^2 y \mathbb{H}^n

En esta sección definiremos el plano hiperbólico y sus isometrías, luego haremos una generalización encontrando así el espacio hiperbólico.

Definición 1.3.11. Sea $M = \mathbb{R}^2$ un plano de coordenadas (x, y) y definamos en cada punto $q = (x, y)$ en \mathbb{R}^2 el producto interno asociado a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}(q), \frac{\partial}{\partial x}(q) \right\rangle_q &= E = 1, \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x}(q), \frac{\partial}{\partial y}(q) \right\rangle_q &= F = 0, \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial y}(q), \frac{\partial}{\partial y}(q) \right\rangle_q &= G = e^{2x}. \end{aligned}$$

La geometría de M difiere de la geometría usual de \mathbb{R}^2 , por ejemplo usando (1.10) tenemos que la curvatura de M , está dada por

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_y}{\sqrt{EG}} \right)_y + \left(\frac{G_x}{\sqrt{EG}} \right)_x \right] = -\frac{1}{2e^{2x}} \left(\frac{2e^{2x}}{e^x} \right)_x = -1.$$

Esta variedad riemanniana bidimensional es conocida como plano de Lobachevsky o plano hiperbólico, y será denotado por \mathbb{H}^2 .

Sin embargo, existen otros modelos que representan el mismo espacio, pero de diferente manera. Por lo que estudiaremos algunos de estos modelos:

a) **El modelo del sistema de coordenadas horocíclicas:**

Sea \mathbb{R}^2 con la métrica asociada dada por

$$g_e = dx^2 + e^{2x} dy^2.$$

b) **El modelo del disco de Poincaré:**

Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ cuya métrica está dada por

$$g_D = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - (x^2 + y^2))^2}.$$

c) **El modelo de Lorentz:**

Sea $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$ cuya métrica está dada por

$$g_L = dx^2 + dy^2 - dz^2.$$

d) **El modelo del semiplano de Poincaré:**

Sea $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ cuya métrica está dada por

$$g_P = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

e) **El modelo en coordenadas geodésicas o coordenadas de Fermi**

Sea \mathbb{R}^2 con la métrica asociada dada por

$$g_{\cosh} = dx^2 + \cosh^2 x dy^2.$$

f) **El modelo de la semiesfera:**

Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ cuya métrica asociada está dada por

$$g_S = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}.$$

Veamos que estos modelos son equivalentes,

- 1) El modelo en coordenadas geodésicas (e) es equivalente (bajo isometría) al modelo del sistema de coordenadas horocíclicas (a):

Consideremos la función

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}^2, g_{\cosh}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, g_e) \\ (x, y) &\longmapsto \varphi(x, y) := (-y + \ln(\cosh x), e^y \tanh x) \end{aligned}$$

la cual es una isometría con inversa

$$\varphi^{-1}(x, y) = \left(\sinh^{-1}(ye^x), \ln(\sqrt{e^{-2x} + y^2}) \right).$$

Sean $u = -y + \ln(\cosh x)$, $v = e^y \tanh x$, luego

$$\begin{aligned} du &= \tanh x dx - dy \\ du^2 &= \tanh^2 x dx^2 - 2 \tanh x dx dy + dy^2 \\ dv &= e^y \operatorname{sech}^2 x dx + e^y \tanh x dy \\ dv^2 &= e^{2y} \operatorname{sech}^2 x [\operatorname{sech}^2 x dx^2 + 2 \tanh x dx dy + \sinh^2 x dy^2]. \end{aligned}$$

En consecuencia tenemos el pull-back,

$$\begin{aligned} \varphi^* g_e &= du^2 + e^{2u} dv^2 \\ &= du^2 + e^{2(-y + \ln(\cosh x))} dv^2 \\ &= du^2 + e^{-2y} \cosh^2 x dv^2 \\ &= \tanh^2 x dx^2 - 2 \tanh x dx dy + dy^2 + \operatorname{sech}^2 x dx^2 + 2 \tanh x dx dy + \sinh^2 x dy^2 \\ &= (\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x) dx^2 + (1 + \sinh^2 x) dy^2 \\ &= dx^2 + \cosh^2 x dy^2 = g_{\cosh}. \end{aligned}$$

- 2) El modelo en coordenadas geodésicas (e) es equivalente (bajo isometría) al modelo del semiplano de Poincaré (d):

Consideremos ahora la función

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}^2, g_{\cosh}) &\longrightarrow (P, g_P) \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) := (e^y \tanh x, e^y \operatorname{sech} x) \end{aligned}$$

la cual es una isometría con inversa

$$\varphi^{-1}(x, y) = \left(\sinh^{-1}(x/y), \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \right).$$

Sean $u = e^y \tanh x$, $v = e^y \operatorname{sech} x$, luego

$$\begin{aligned} du &= e^y (\operatorname{sech}^2 x dx + \tanh x dy) \\ du^2 &= e^{2y} \operatorname{sech}^2 x [\operatorname{sech}^2 x dx^2 + 2 \tanh x dx dy + \sinh^2 x dy^2] \\ dv &= e^x \operatorname{sech} x (-\tanh x dx + dy) \\ dv^2 &= e^{2y} \operatorname{sech}^2 x [\tanh^2 x dx^2 - 2 \tanh x dx dy + dy^2] \end{aligned}$$

En consecuencia tenemos el pull-back,

$$\begin{aligned}
 \varphi^* g_P &= \frac{du^2 + dv^2}{v^2} \\
 &= \operatorname{sech}^2 x dx^2 + 2 \tanh x dx dy + \operatorname{senh}^2 x dy^2 + \tanh^2 x dx^2 - 2 \tanh x dx dy + dy^2 \\
 &= (\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x) dx^2 + (1 + \operatorname{senh}^2 x) dy^2 \\
 &= dx^2 + \operatorname{cosh}^2 dy^2 = g_{\operatorname{cosh}}.
 \end{aligned}$$

- 3) El modelo de la semiesfera (f) es equivalente (bajo isometría) al modelo del disco de Poincaré (d)

Consideremos ahora la función

$$\begin{aligned}
 \varphi : (S, g_S) &\longrightarrow (D, g_D) \\
 (x, y, z) &\mapsto \varphi(x, y, z) := \left(\frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1} \right)
 \end{aligned}$$

la cual es una isometría con inversa

$$\varphi^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Sean $u = \frac{x}{z+1}$, $v = \frac{y}{z+1}$, luego

$$du = \frac{dx}{z+1} - \frac{xdz}{(z+1)^2}$$

$$dv = \frac{dy}{z+1} - \frac{ydz}{(z+1)^2}$$

En consecuencia tenemos el pull-back,

$$\begin{aligned}
 \varphi^* g_D &= 4 \frac{du^2 + dv^2}{(1 - (u^2 + v^2))^2} \\
 &= 4 \frac{[(z+1)dx - xdz]^2 + [(z+1)dy - ydz]^2}{(z+1)^4 \left[1 - \left(\frac{x}{z+1} \right)^2 - \left(\frac{y}{z+1} \right)^2 \right]^2} \\
 &= \frac{(z+1)^2(dx^2 + dy^2) + 2(z+1)zdz^2 + (1 - z^2)dz^2}{z^2(z+1)^2} \\
 &= \frac{(z+1)^2(dx^2 + dy^2) + (z+1)^2dz^2}{z^2(z+1)^2} \\
 &= \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2} = g_S.
 \end{aligned}$$

- 4) El modelo de Lorentz (c) es equivalente (bajo isometría) al modelo de la semiesfera (f)

Consideremos ahora la función

$$\begin{aligned}\varphi : (L, g_L) &\longrightarrow (S, g_S) \\ (x, y, z) &\mapsto \varphi(x, y, z) := \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{1}{z} \right)\end{aligned}$$

la cual es una isometría con inversa

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{1}{z} \right).$$

Sean $u = \frac{x}{z}$, $v = \frac{y}{z}$ y $w = \frac{1}{z}$, luego

$$du = \frac{dx}{z} - \frac{xdz}{z^2}$$

$$dv = \frac{dy}{z} - \frac{ydz}{z^2}$$

$$dw = -\frac{dz}{z^2}$$

En consecuencia tenemos el pull-back,

$$\begin{aligned}\varphi^* g_S &= \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2} \\ &= \frac{\left(\frac{dx}{z} - \frac{xdz}{z^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{z} - \frac{ydz}{z^2}\right)^2 + \frac{dz^2}{z^4}}{\frac{1}{z^2}} \\ &= \frac{z^2(dx^2 + dy^2) - 2z(xdx + ydy)dz + (x^2 + y^2)dz^2 + dz^2}{z^2} \\ &= \frac{z^2(dx^2 + dy^2) - 2z^2dz^2 + (z^2 - 1)dz^2 + dz^2}{z^2} \\ &= dx^2 + dy^2 - dz^2 = g_L\end{aligned}$$

- 5) El modelo de la semiesfera (f) es equivalente (bajo isometría) al modelo del semiplano de Poincaré (d)

Consideremos ahora la función

$$\begin{aligned}\varphi : (S, g_S) &\longrightarrow (P, g_P) \\ (x, y, z) &\mapsto \varphi(x, y, z) := \left(\frac{2y}{x+1}, \frac{2z}{x+1} \right)\end{aligned}$$

la cual es una isometría con inversa

$$\varphi^{-1}(x, y) = \left(\frac{4 - x^2 - y^2}{4 + x^2 + y^2}, \frac{4x}{4 + x^2 + y^2}, \frac{4y}{4 + x^2 + y^2} \right).$$

Sean $u = \frac{2y}{x+1}$, $v = \frac{2z}{x+1}$, luego

$$du = \frac{2dy}{x+1} - \frac{2ydx}{(x+1)^2}$$

$$dv = \frac{2dz}{x+1} - \frac{2zdx}{(x+1)^2}$$

En consecuencia tenemos el pull-back,

$$\begin{aligned} \varphi^* g_P &= \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2} \\ &= \frac{(x+1)^2}{4z^2} \left(\frac{2dy}{x+1} - \frac{2ydx}{(x+1)^2} \right)^2 + \frac{(x+1)^2}{4z^2} \left(\frac{2dz}{x+1} - \frac{2zdx}{(x+1)^2} \right)^2 \\ &= \frac{4(x+1)^2}{(x+1)^4} \frac{[(x+1)(dy+dz) - (y+z)dx]^2}{4z^2} \\ &= \frac{(x+1)^2(dy^2 + dz^2) - 2(x+1)(ydy + zdz)dx + (y^2 + z^2)dx^2}{z^2(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1)^2(dy^2 + dz^2) + 2(x+1)xdx^2 + (1-x^2)dx^2}{z^2(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1)^2(dy^2 + dz^2) + (x+1)^2dx^2}{z^2(x+1)^2} \\ &= \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2} = g_S. \end{aligned}$$

Ahora de manera natural podemos definir el espacio hiperbólico n -dimensional, como el espacio euclidiano n -dimensional cuya métrica asociada está dada por

$$g_e = dx^2 + e^{2x}(dy_1^2 + \cdots + dy_{n-1}^2).$$

Así mismo podemos tener sus modelos correspondientes clásicos, definidos de la siguiente manera:

a) **El modelo del disco de Poincaré:**

Sea $D = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ cuya métrica está dada por

$$g_D = 4 \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{(1 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2))^2}.$$

b) **El modelo de semiplano de Poincaré:**

Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : y_{n-1} > 0\}$ cuya métrica está dada por

$$g_P = \frac{dx^2 + dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_{n-1}^2}{y_{n-1}^2}.$$

c) **El modelo en coordenadas geodésicas o coordenadas de Fermi:**

Sea \mathbb{R}^n con la métrica asociada dada por

$$g_{\text{cosh}} = dx^2 + \cosh^2 x (dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_{n-1}^2).$$

Sabemos que el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 y la pseudo-esfera tienen la misma curvatura gaussiana constante negativa igual a -1 , de modo que en virtud del teorema de Minding, ellas son localmente isométricas. Pero como curiosidad podemos preguntarnos ¿qué parte del plano hiperbólico realmente se está modelando como la pseudo-esfera? Para responder a esta pregunta, tomemos una parametrización $t \mapsto (f(t), g(t))$ de la tractriz que comienza en $(1, 0)$. Luego definimos $\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (f(v) \cdot \cos u, f(v) \cdot \sin u, g(v))$ una parametrización de la pseudo-esfera

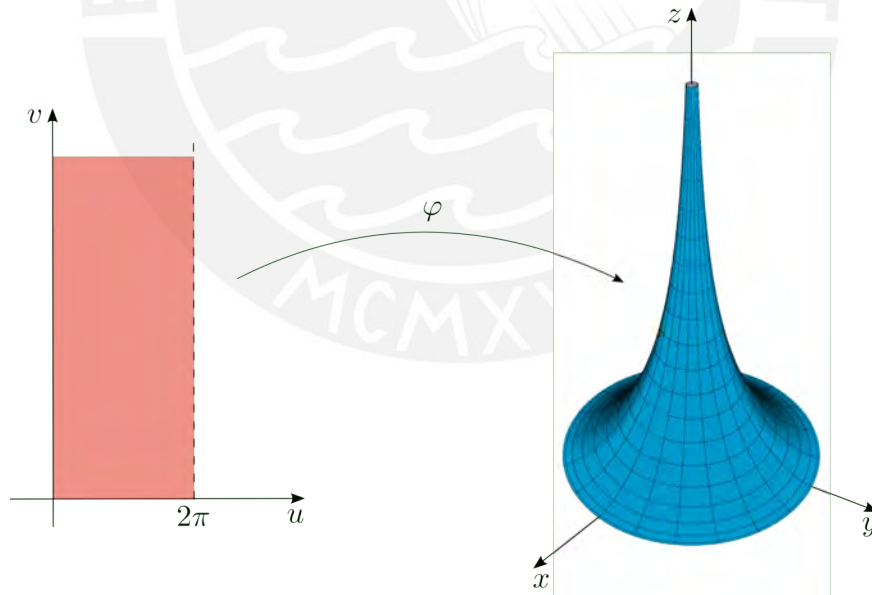


Figura 1.2: Inmersión de un horodisco

Considerando el modelo del semiplano de Poincaré, tomemos el horodisco

$\mathbb{D} = \{(x, y) \in P : y > 1\}$. Sean $p = (x, y)$, $q = (x, 1)$ en P con $y > 1$. Entonces

$$\begin{aligned} d_P(p, q) &= 2 \operatorname{arctanh}^{-1} \frac{\|(x, y) - (x, 1)\|}{\|(x, y) - (x, 1)\|} \\ &= 2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{y-1}{y+1} \right) \\ &= 2 \ln(\sqrt{y}) = \ln y. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Definamos $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(x, y) = \left(\underbrace{f(\ln y) \cdot \cos x}_u, \underbrace{f(\ln y) \cdot \operatorname{sen} x}_v, \underbrace{g(\ln y)}_w \right).$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} du &= -f(\ln y) \cdot \operatorname{sen} x dx + f'(\ln y) \cdot \frac{1}{y} \cdot \cos x dy \\ dv &= f(\ln y) \cdot \cos x dx + f'(\ln y) \cdot \frac{1}{y} \cdot \operatorname{sen} x dy \\ dw &= g'(\ln y) \cdot \frac{1}{y} dy \end{aligned}$$

de modo que el pull-back de F resulta

$$\begin{aligned} F^*g &= du^2 + dv^2 + dw^2 \\ &= [f(\ln y)]^2 dx^2 + \left[(f'(\ln y))^2 + (g'(\ln y))^2 \right] \frac{dy}{y^2}, \end{aligned}$$

tomemos ahora $t \mapsto (f(t), g(t))$ una parametrización por longitud de arco, $(f')^2 + (g')^2 = 1$ y además $f(t) = e^{-t}$. Entonces

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t \sqrt{1 - e^{-2u}} du \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1 - e^{-2t}} + 1}{\sqrt{1 - e^{-2t}} - 1} \right) - \sqrt{1 - e^{-2t}} \\ &= \operatorname{arctanh}(\sqrt{1 - e^{-2t}}) - \sqrt{1 - e^{-2t}}. \end{aligned}$$

Por tanto $F(x, y) = \left(\frac{\cos x}{y}, \frac{\operatorname{sen} x}{y}, \underbrace{\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}} \right) - \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}}_{\operatorname{arccosh} y} \right)$ es una

inmersión isométrica del horodisco \mathbb{D} sobre la pseudo-esfera. Por otro lado la ecuación (1.23) nos dice que esta es la distancia que debemos recorrer a lo largo de la tractriz para asegurar la distancia geodésica correcta entre $F(x, 1)$ y $F(x, y)$.

De esta manera podemos notar que la pseudo-esfera en sí puede interpretarse como una superficie que está cubierta muchas veces por el horodisco. Y si de pronto se nos ocurre pensar que esta cobertura se puede extender a todo el plano hiperbólico, inmediatamente notamos que esto no es posible dado que la pseudo-esfera no es una superficie completa, lo mismo sucede con las demás superficies de curvatura gaussiana constante negativa como veremos en el capítulo 3, de esta manera ellas logran representar solamente una región del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 .



Capítulo 2

Superficies completas de curvatura gaussiana constante no negativa

I don't have any magical ability.
I look at a problem, play with it,
work out a strategy.

Terence Tao.

En este capítulo clasificaremos las superficies completas de curvatura gaussiana constante no negativa en \mathbb{R}^3 según el signo de su curvatura. La hipótesis de la completitud juega un papel importante para esta clasificación. Para mayor detalle y desarrollo del tema véase por ejemplo [Spi99a], [PdC16], [Wil59] y [AT12].

2.1 Superficies completas de curvatura gaussiana constante nula

En el capítulo 1 enunciamos el teorema de Minding 1.1.1, sin demostración, el cual muestra que las superficies con curvatura gaussiana constante nula, o también llamada idénticamente nula, son localmente isométricas a un plano. El objetivo principal de esta sección es demostrar el siguiente teorema

Teorema (Hartman-Nirenberg, 1959). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa con curvatura gaussiana idénticamente nula, entonces S es un cilindro o un plano.*

Observación 2.1.1. La primera demostración apareció en 1959 como un corolario de un teorema de Philip Hartman y Louis Nirenberg [HN59] que trata de una situación mucho más general que la nuestra, el cual es enunciado a continuación

Sea M^n una variedad riemanniana completa conexa en un espacio euclidiano $(n+1)$ -dimensional \mathbb{R}^{n+1} . Si el rango de la aplicación de Gauss es ≤ 1 en todas partes, entonces M^n es un cilindro generalizado.

Este teorema es la primera determinación global de una variedad plana M en el espacio euclidiano. De hecho, la condición sobre el rango de la aplicación de Gauss es equivalente a la planitud de M . En ese momento, sólo se tenía la clasificación local de superficies planas. Una versión compleja del teorema anterior fue demostrada por Kinetsu Abe en [Abe72].

Más tarde en 1961, William Schumacher Massey [Mas61] y James Johnston Stoker [Sto61] obtuvieron demostraciones elementales y directas del teorema, de manera independiente. La demostración que presentamos aquí está basada en la demostración de Massey, la cual también se puede encontrar en [PdC16].

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con curvatura gaussiana $K_{const.} = 0$. Como $K = k_1 k_2$, donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales, los puntos de S o bien son puntos parabólicos, o bien son puntos planos. Denotaremos por P al conjunto de puntos planos y por $U = S \setminus P$ al conjunto de puntos parabólicos de S . Notemos que P es cerrado en S , dado que los puntos de P satisfacen $H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0$, por tanto $P = H^{-1}(0)$. Luego sigue que $U = S \setminus P$ es abierto, en consecuencia $Fr(U) \subset P$.

Proposición 2.1.2. *La única curva asintótica que pasa por un punto parabólico $p \in U$ de una superficie S con curvatura gaussiana $K_{const.} = 0$ es un segmento (abierto) de una recta contenida en S .*

Demostración. Siendo $K_{const.} = 0 = k_1 k_2$, donde k_1, k_2 son las curvaturas principales y U es formado apenas por los puntos parabólicos, entonces una de estas es no nula. Luego estamos hablando de un punto no umbílico.

La proposición 1.1.9 garantiza que es posible parametrizar un entorno $V \subset U$ de p por $\mathbf{x}(u, v)$ de modo que las curvas coordenadas sean líneas de curvatura. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $k_1 = 0$, donde k_1 es la curvatura

correspondiente a $v = \text{const.}$, es decir $\alpha(t) = \mathbf{x}(u, v_0)$ es una curva asintótica en V . Luego, en virtud del teorema de Olinde Rodrigues 1.1.12, podemos escribir

$$(N \circ \alpha)'(t) = -\lambda(t) \cdot \alpha'(t), \quad (2.1)$$

donde α es una parametrización cualquiera de la curva coordinada $v = \text{const.}$, $\lambda(t)$ es la curvatura principal asociada a $\alpha'(t)$, la cual es siempre nula a lo largo de $v = \text{const.}$ en V . Tomemos α como $\alpha(t) = \mathbf{x}(t, v_0)$, luego tenemos

$$N_u = N_u \cdot 1 + N_v \cdot 0 = N_u \cdot u' + N_v \cdot v' = (N \circ \alpha)'(t) = -\lambda(t) \cdot \alpha'(t) = 0. \quad (2.2)$$

Dado que por cada punto del entorno V pasa una curva $v = \text{const.}$, la relación $N_u = 0$ vale para todos los puntos de V . Se deduce entonces que en V , tenemos

$$\langle \mathbf{x}, N \rangle_u = \langle \mathbf{x}_u, N \rangle + \langle \mathbf{x}, N_u \rangle = 0. \quad (2.3)$$

Por tanto

$$\langle \mathbf{x}, N \rangle = \varphi(v), \quad (2.4)$$

donde $\varphi(v)$ es una función diferenciable que sólo depende de v . Derivando la ecuación (2.4) con respecto a v obtenemos:

$$\langle \mathbf{x}, N_v \rangle = \varphi'(v). \quad (2.5)$$

Por otro lado, N_v es ortogonal a N y diferente de cero, puesto que los puntos de V son parabólicos. En consecuencia, N y N_v son linealmente independientes. Además sabemos que $N_{uv} = N_{vu} = 0$ en V .

Observamos ahora que a lo largo de la curva $v = \text{const.} = v_0$ el vector $N(u) = N_0$ y que $N_v(u) = (N_v)_0 = \text{const.}$ Así, la ecuación (2.4) implica que la curva $\mathbf{x}(u, v_0)$ está contenida en un plano normal al vector constante N_0 y la ecuación (2.5) implica que dicha curva está contenida en un plano normal al vector constante $(N_v)_0$. Como los vectores N_0 y $(N_v)_0$ son linealmente independientes, tenemos que la curva $\mathbf{x}(u, v_0)$ está contenida en la intersección de dos planos, es decir es un segmento rectilíneo. \square

Observación 2.1.3. En la proposición anterior la hipótesis $K_{\text{const.}} = 0$ es fundamental, dado que si consideramos el paralelo inferior del toro de revolución, es una curva asintótica construida por puntos parabólicos que no es un segmento de recta.

En breve veremos qué ocurre cuando prolongamos este segmento de recta. La siguiente proposición garantiza que la prolongación de la recta nunca interseca al conjunto P , es decir, o bien termina en un punto de la frontera de S o bien permanece indefinidamente en U . Para verificar esta afirmación usaremos la siguiente consecuencia de las ecuaciones de Mainardi-Codazzi (1.7),

Lema 2.1.4. *Sea s la longitud de arco de la curva asintótica que pasa por un punto parabólico p de una superficie S , con curvatura nula, y sea $H = H(s)$ la curvatura media de S a lo largo de dicha curva. Entonces, en U tenemos,*

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{H} \right) = 0. \quad (2.6)$$

Demostración. En un entorno $V \subset U$ de p , introducimos un sistema de coordenadas (u, v) tal que las curvas coordenadas son líneas de curvatura y las curvas $v = \text{const.}$ son curvas asintóticas de V . Sean e, f y g los coeficientes de la segunda forma fundamental con respecto a esta parametrización. Como $f = 0$ y la curva $v = \text{const.}$, $u = u(s)$ debe satisfacer la ecuación diferencial de las curvas asintóticas

$$e \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2f \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + g \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0 \quad (2.7)$$

entonces concluimos que $e = 0$. Bajo estas condiciones, tenemos

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = \frac{1}{2} \frac{g}{G}. \quad (2.8)$$

La proposición 1.1.14 garantiza que $F = 0$. Luego introduciendo los valores $F = f = e = 0$ en las ecuaciones de Mainardi-Codazzi (1.7), obtenemos

$$0 = \frac{1}{2} \frac{gE_v}{G}, \quad g_u = \frac{1}{2} \frac{gG_u}{G}. \quad (2.9)$$

A partir de la primera ecuación de (2.9), tenemos que $gE_v = 0$. Siendo p un punto parabólico de S , en cada punto una de las curvaturas principales no se anula. De esto podemos concluir que $g \neq 0$, pues de la ecuación (2.8) tenemos $0 \neq H = \frac{1}{2} \frac{g}{G}$. Luego, de $gE_v = 0$ concluimos que $E_v = 0$. Por tanto, $E = E(u)$ es una función que sólo depende de u . Entonces la aplicación $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi(u, v) = \left(\int_0^u \sqrt{E(u)} du, v \right) \quad (2.10)$$

es un difeomorfismo con su imagen, y la aplicación $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \circ \varphi^{-1}$ sigue siendo una parametrización local con todas las propiedades de \mathbf{x} , ya que lo único que hicimos fue cambiar la parametrización de las curvas $v = \text{const.}$ para que ahora estén parametrizadas por longitud de arco, es decir $E = 1$. Por un abuso de notación, volveremos a llamar u y v a los nuevos parámetros. En la nueva parametrización la expresión de la curvatura gaussiana, usando la ecuación (1.10), es

$$\begin{aligned} 0 = K_{\text{const.}} &= -\frac{1}{2W} \left[\left(\frac{G_u}{W} \right)_u + \left(\frac{E_v}{W} \right)_v \right] \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{G}} \left(\frac{G_u}{\sqrt{G}} \right)_u \\ &= -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\sqrt{G} \right)_{uu}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Entonces es posible escribir,

$$\sqrt{G} = c_1(v)u + c_2(v), \quad (2.12)$$

donde $c_1(v)$ y $c_2(v)$ son funciones que solo dependen de v . Por otro lado la segunda ecuación en (2.9) puede escribirse en la forma ($g \neq 0$)

$$\frac{g_u}{g} = \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{G}\sqrt{G}} = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}}, \quad (2.13)$$

luego tenemos

$$g = c_3(v)\sqrt{G}, \quad (2.14)$$

donde $c_3(v)$ es una función que solo depende de v . Introducimos las ecuaciones (2.12) y (2.14) en la ecuación (2.8), obteniendo así

$$H = \frac{1}{2} \frac{c_3(v) \sqrt{G}}{\sqrt{G} \sqrt{G}} = \frac{1}{2} \frac{c_3(v)}{c_1(v)u + c_2(v)}. \quad (2.15)$$

Finalmente, recordando que $u = s$ y derivando la expresión anterior con respecto a s , concluimos que

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{H} \right) = 2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{c_1(v)s + c_2(v)}{c_3(v)} \right) = 0. \quad (2.16)$$

□

Proposición 2.1.5 (Massey, 1961). *Sea r una curva asintótica maximal que pasa por un punto parabólico $p \in U \subset S$ de una superficie con curvatura $K_{const.} = 0$ y sea $P \subset S$ el conjunto de puntos planos de S . Entonces $r \cap P = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que la curva asintótica maximal r que pasa por p , está parametrizada por la longitud de arco s y contiene un punto $q \in P$. Como r es conexa y U es abierto, existe un punto p_0 de r , correspondiente a s_0 , tal que $p_0 \in P$ y los puntos de r con $s < s_0$ pertenecen a U .

Ahora, el lema 2.1.4 nos dice que a lo largo de r y para $s < s_0$, existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$H(s) = \frac{1}{as + b}, \quad (2.17)$$

entonces, dado que la curvatura media es cero en todos los puntos planos, deberíamos tener

$$0 = H(p_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} H(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{as + b} = \frac{1}{as_0 + b} \neq 0, \quad (2.18)$$

lo cual es una contradicción. \square

Proposición 2.1.6 (Massey, 1961). *Sea $p \in Fr(U) \subset S$ un punto de la frontera del conjunto U de puntos parabólicos de una superficie S con curvatura $K_{const.} = 0$. Entonces por p pasa un único segmento abierto de recta $C(p) \subset S$. Además, $C(p) \subset Fr(U)$, es decir, la frontera de U está constituida por segmentos rectilíneos.*

Demostración. Sea $p \in Fr(U)$. Entonces existe una sucesión $(p_n)_n \subset U$ tal que $p_n \rightarrow p$. Para cada p_n , sea $C(p_n)$ la única curva asintótica maximal (un segmento abierto de recta) que pasa por p_n , esto es gracias a la proposición 2.1.2. Nuestro objetivo es mostrar que, cuando $n \rightarrow \infty$ las direcciones de los segmentos $C(p_n)$ convergen hacia una cierta dirección que no depende de la elección de la sucesión $(p_n)_n$.

En efecto, sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una esfera con centro en p suficientemente pequeña. Como la esfera Σ es compacta, los puntos de intersección $(q_n)_n$ de $C(p_n)$ con Σ , tienen al menos un punto de acumulación $q \in \Sigma$, lo mismo ocurre de manera simultánea para el punto antipodal de q . Si hubiera además de q y de su punto antipodal, otro punto de acumulación r , entonces en cada par de puntos p_n y p_m

arbitrariamente próximos las curvas asintóticas $C(p_n)$ y $C(p_m)$ deberían formar un ángulo mayor que

$$\theta = \frac{\angle(pq, pr)}{2} \quad (2.19)$$

lo cual genera una contradicción con la continuidad de las curvas asintóticas. Concluimos entonces que las curvas $C(p_n)$ tienden a una dirección límite. De manera análoga se demuestra que esta dirección límite no depende de la sucesión $(p_n)_n$, con $p_n \rightarrow p$.

Como las direcciones de los $C(p_n)$ convergen y $p_n \rightarrow p$, los segmentos rectilíneos $C(p_n)$ convergen a un segmento $C(p) \subset S$ que pasas por p . El segmento $C(p)$ no se reduce solamente al punto p , pues en caso contrario como $C(p_n)$ es maximal entonces $p \in S$ sería un punto de acumulación de los extremos de los $C(p_n)$, que no pertenece a S , en virtud de la proposición 2.1.5. Por el mismo razonamiento se tiene que el segmento $C(p)$ no contiene a sus puntos extremos.

Para terminar mostraremos que $C(p) \subset Fr(U)$. En efecto, si $q \in C(p)$, existe una sucesión

$$(q_n)_n \subset C(p_n) \subset U \text{ tal que } q_n \rightarrow q. \quad (2.20)$$

Entonces $q \in U \cup Fr(U)$. Supongamos que $q \notin Fr(U)$. Luego $q \in U$ y por la continuidad de las direcciones asintóticas, $C(p)$ es la única curva asintótica que pasa por q . Esto implica, gracias a la proposición 2.1.5, que $p \in U$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $q \in Fr(U)$, es decir $C(p) \subset Fr(U)$. \square

Ahora ya estamos listos para demostrar el resultado principal de esta sección,

Teorema 2.1.7 (Hartman-Nirenberg, 1959). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa con curvatura gaussiana idénticamente nula. Entonces S es un cilindro o un plano.*

Demostración. Admitamos que S no es un plano. Entonces por la proposición 2.2.2 tenemos que S contiene puntos parabólicos. Sea U el conjunto (abierto) de los puntos parabólicos de S y P el conjunto (cerrado) de los puntos planos de S . El conjunto $int(P)$ es un abierto en S que solo contiene puntos planos. En consecuencia, cada componente conexa de $int(P)$ está contenida en un plano, esto ocurre gracias a la proposición 2.2.2.

Primero demostraremos que si $q \in S$ y $q \notin int(P)$, entonces por q pasa una única recta $R(q) \subset S$, y dos rectas de este tipo o bien son iguales, o bien no

se cortan. En efecto, cuando $q \in U$, existe una única curva maximal asintótica r que pasa por q , donde r es un segmento de recta (por tanto, una geodésica) y $r \cap P = \emptyset$ (la cual es una consecuencia de las proposiciones 2.1.2 y 2.1.5). Parametrizando r por longitud de arco comprobamos que r no es un segmento finito. Caso contrario, existiría una geodésica que no puede prolongarse a todos los valores del parámetro y esto generaría una contradicción con la completitud de S . Por tanto r es la totalidad de una recta $R(q)$ y como $r \cap P = \emptyset$, concluimos que $R(q) \subset U$. Deducimos entonces que cuando p es otro punto de U , $p \notin R(q)$, $R(p) \cap R(q) = \emptyset$. Caso contrario, por el punto de intersección deberían pasar dos curvas asintóticas, lo cual contradice la propiedad de unicidad.

Por otra parte, si $q \in Fr(U) = Fr(P)$, entonces en virtud de la proposición 2.1.6 tenemos que por q pasa un único segmento abierto de recta que está contenido en $Fr(U)$. Mediante el argumento previo, este segmento puede prolongarse a la totalidad de una recta $R(q) \subset Fr(U)$ y si $p \in Fr(U)$, $p \notin R(q)$, entonces $R(p) \cap R(q) = \emptyset$.

Está claro que al ser U un abierto, si $q \in U$ y $p \in Fr(U)$, entonces $R(p) \cap R(q) = \emptyset$. De esta manera, por cada punto de $S \setminus \text{int}(P) = U \cup Fr(U)$ pasa una única recta contenida en $S \setminus \text{int}(P)$, y como habíamos afirmado, dos rectas de este tipo o bien son iguales, o bien no se cortan. Si demostramos que estas rectas son paralelas, concluiremos que $Fr(U)$ está constituido por rectas paralelas y que cada componente conexa de $\text{int}(P)$ es un conjunto abierto de un plano, delimitado por dos rectas paralelas. Por tanto, por cada punto $t \in \text{int}(P)$ pasa una única recta $R(t) \subset \text{int}(P)$, paralela a la dirección común. Deducimos entonces que por cada punto de S pasa una única generatriz y que las generatrices son paralelas, es decir S es un cilindro; el objetivo de la demostración.

Para demostrar que las rectas que pasan por los puntos de $U \cup Fr(U)$ son paralelas, procedemos de la siguiente manera. Sea $q \in U \cup Fr(U)$ y $p \in U$. Como S es conexa, existe un arco $\alpha : [0, l] \rightarrow S$, con $\alpha(0) = p$, $\alpha(l) = q$. La aplicación $\exp_p : T_p S \rightarrow S$ es una aplicación de recubrimiento, gracias a la proposición 1.2.3, y una isometría local, gracias a la proposición 1.1.17. Sea $\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow T_p S$ el levantamiento de α , con origen en $0 \in T_p S$. Para cada $\tilde{\alpha}(t)$, con $\exp_p \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) \in U \cup Fr(U)$, sea r_t el levantamiento de $R(\alpha(t))$ con origen en $\tilde{\alpha}(t)$. Como \exp_p es una isometría local, r_t es una recta en $T_p S$. Demostraremos que cuando $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, con $t_1, t_2 \in [0, l]$, las rectas r_{t_1} y r_{t_2} son paralelas. En

efecto si $v \in r_{t_1} \cap r_{t_2}$, entonces

$$\exp_p(v) \in R(\alpha(t_1)) \cap R(\alpha(t_2)), \quad (2.21)$$

lo cual es una contradicción.

Hasta ahora no hemos definido $R(\alpha(t))$ cuando $\alpha(t) \in \text{int}(P)$. Veamos esto ahora, cuando $\alpha(t)$ es tal que $\exp_p \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) \in \text{int}(P)$, por $\tilde{\alpha}(t)$ trazamos una recta r en $T_p S$ paralela a la dirección común que acabamos de obtener hace un momento. Está claro que $\exp_p(r) \subset \text{int}(P)$ y como $\exp_p(r)$ es una geodésica, entonces $\exp_p(r)$ es una recta completa contenida en S . De esta manera, la recta $R(\alpha(t))$ está definida para cada $t \in [0, l]$. Ahora mostraremos que las rectas $R(\alpha(t))$, con $t \in [0, l]$, son paralelas. En efecto por el argumento habitual de compacidad, es posible recubrir el intervalo $[0, l]$ con un número finito de intervalos abiertos I_1, \dots, I_n tal que $\tilde{\alpha}(I_j)$ está contenido en una vecindad V_j de $\alpha(t_j)$, con $t_j \in I_j$, donde la restricción de \exp_p es una isometría en V_j . Ahora observemos que, cuando $t_1, t_2 \in I_j$ y $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, entonces $R(\alpha(t_1))$ es paralela a $R(\alpha(t_2))$. En efecto, como r_{t_1} es paralela a r_{t_2} y la \exp_p es una isometría en V_j , el segmento abierto $\exp_p(r_{t_1} \cap V_j)$ es paralelo a $\exp_p(r_{t_2} \cap V_j)$, lo cual significa que las rectas $\exp_p r_{t_1} = R(\alpha(t_1))$ y $\exp_p r_{t_2} = R(\alpha(t_2))$ contienen segmentos abiertos que son paralelos, luego son paralelas. Pero entonces, utilizando la descomposición de $[0, l]$ en I_1, \dots, I_n podemos demostrar que las rectas $R(\alpha(t))$ son paralelas. En particular, la recta $R(q)$ es paralela a $R(p)$. Si s es otro punto de $U \cup Fr(U)$, entonces por el mismo argumento $R(s)$ es paralela a $R(p)$, y por tanto paralela a $R(q)$. De esta manera, se ha probado que todas las rectas que pasan por $U \cup Fr(U)$ son paralelas. \square

Ejemplo 2.1.8. La hipótesis de la completitud en el teorema de Hartman-Nirenberg es esencial, dado que hay superficies no completas con curvatura gaussiana idénticamente nula no contenidas en un plano o en un cilindro. Un ejemplo muy simple es la parte superior de un cono circular. Sea

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, z > 0\},$$

la superficie de revolución de la curva ζ en el plano xz parametrizada por $(f(v), g(v)) = (v, v)$, con $v > 0$. Luego tenemos que $K_{\text{cosnt.}} = 0$ y $H(x, y, z) = 1/z$. En particular, S sólo consta de puntos parabólicos, por lo que no está contenido en un plano. Tampoco está contenido en un cilindro, dado que a través de cada punto parabólico de S pasa un segmento único contenido en S gracias a la

proposición 2.1.2, y por lo tanto debería ser un generador del cono. Por tanto, si S estuviera contenido en un cilindro, los generadores serían paralelos, pero esto no ocurre.

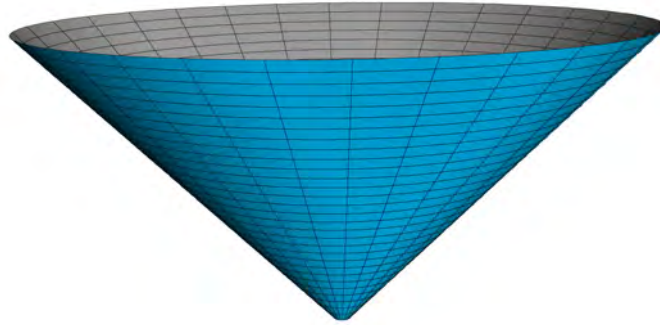


Figura 2.1: Cono de Revolución

2.2 Superficies completas de curvatura gaussiana positiva

El teorema de Bonnet nos garantiza que una superficie completa S de curvatura gaussiana constante positiva, es compacta. En realidad, el teorema nos dice mucho más,

Teorema 2.2.1 (Bonnet, 1855). *Si la curvatura gaussiana K de una superficie completa S satisface la condición*

$$K \geq \delta > 0. \quad (2.22)$$

Entonces S es compacta y el diámetro de S satisface la desigualdad

$$\text{diam}(S) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}. \quad (2.23)$$

Demostración. [PdC16, p. 358] □

La primera demostración de este teorema fue obtenida en 1855 por Pierre Ossian Bonnet en [Bon55] y [Bon56]. Una formulación del teorema, en términos de superficies completas, puede encontrarse en el artículo de Heinz Hopf y Willi Rinow [HR31]. En realidad, no es necesario que K esté acotada inferiormente

lejos de cero sino que no se aproxime muy rápidamente a cero, véase por ejemplo el artículo de Eugenio Calabi [Cal67] o el artículo de Rolf Schneider [Sch72].

Por tal motivo no perdemos generalidad si suponemos que estamos trabajando con una superficie compacta. Así el resultado principal de esta sección es probar el siguiente teorema

Teorema (Liebmann, 1899). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, conexa y compacta, cuya curvatura gaussiana K es constante. Entonces S es una esfera cuyo radio es $1/\sqrt{K}$.*

La primera demostración de este teorema se dio en 1899 y se debe a Heinrich Liebmann [Lie99]. La demostración que presentamos aquí es una modificación, efectuada por Shiing-Shen Chern [Che45], de la demostración que dio David Hilbert [Hil09], esta también se puede encontrar en [PdC16].

Proposición 2.2.2. *Una superficie orientada y conexa S que consiste enteramente de puntos umbílicos está necesariamente contenida en una esfera o en un plano (y estas son superficies que consisten sólo de puntos umbílicos).*

Demostración. Sea $p \in S$ y sea $\mathbf{x}(u, v)$ una parametrización de S en p teniendo así un entorno coordenado V . De la hipótesis tenemos que existe una función $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en V tal que $dN(w) = \lambda(q) \cdot w$ para todo $w \in T_q S$ y $q \in V$. Primero demostraremos que $\lambda(q)$ es constante en V . En primer lugar, notamos

$$N_u = dN(\mathbf{x}_u) = \lambda \mathbf{x}_u \quad \text{y} \quad N_v = dN(\mathbf{x}_v) = \lambda \mathbf{x}_v.$$

Diferenciando de nuevo obtenemos

$$N_{uv} = \lambda_v \mathbf{x}_u + \lambda \mathbf{x}_{uv},$$

$$N_{vu} = \lambda_u \mathbf{x}_v + \lambda \mathbf{x}_{vu}$$

y entonces $\lambda_u \mathbf{x}_v - \lambda_v \mathbf{x}_u = 0$. Pero como \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son linealmente independientes, entonces

$$\lambda_u = \lambda_v = 0,$$

para todo $q \in V$. Lo cual muestra que λ es localmente constante. Como S es conexo, entonces λ es constante en todo S . En efecto, tomemos $q_0 \in S$ y sea $R = \{q \in S : \lambda(q) = \lambda(q_0)\}$. Este conjunto no vacío es cerrado dado que λ es

continua, y es abierto por que λ es localmente constante, luego por la conexidad de S tenemos que $R = S$, es decir λ es constante en todo S .

Si $\lambda \equiv 0$, entonces el diferencial de la aplicación de Gauss es cero en todos lados, es decir $N \equiv N_0 \in \mathbb{S}^2$. Tomemos $p_0 \in S$, y definamos $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(q) = \langle q - p_0, N_0 \rangle$. Si nos restringimos al entorno coordenado tenemos,

$$h_u = \langle \mathbf{x}_u, N_0 \rangle = 0 = \langle \mathbf{x}_v, N_0 \rangle = h_v,$$

de esto se sigue que h es localmente constante, y por tanto es constante por el mismo argumento usado anteriormente. Como $h(p_0) = 0$, obtenemos $h \equiv 0$, lo cual significa que S está contenida en un plano que pasa por p_0 y es ortogonal a N_0 .

Si $\lambda \equiv \lambda_0 \neq 0$, sea $q : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $q(p) = p - \frac{1}{\lambda_0}N(p)$. Obteniendo así

$$dq_p = id - \frac{1}{\lambda_0}dN_p = id - \frac{1}{\lambda_0}\lambda_0 id \equiv 0,$$

entonces q es (localmente constante y por lo tanto) constante, denotamos por q_0 el valor de q , es decir $q \equiv q_0$. Luego $p - q_0 \equiv \frac{1}{\lambda_0}N(p)$, y entonces

$$\|p - q_0\|^2 = \frac{1}{\lambda_0^2}, \quad \forall p \in S.$$

En otras palabras, S está contenido en una esfera de centro q_0 y radio $\frac{1}{|\lambda_0|}$. \square

Proposición 2.2.3. *Toda superficie compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ contiene un conjunto abierto que consta de puntos elípticos.*

Demostración. Como S es compacto, tiene un punto p_0 que tiene una distancia máxima desde el origen, queremos mostrar que p_0 es elíptico. Denotemos por $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la esfera con centro en el origen y radio $\|p_0\|$. Es claro que $p_0 \in \Sigma \cap S$, y S está contenida en la bola cerrada con frontera Σ . En particular, S es tangente a Σ en p_0 , por tanto p_0 es ortogonal a $T_{p_0}S$.

Dado que solo nos interesa lo que sucede en una vecindad de p_0 , podemos suponer sin pérdida de generalidad que S es orientable, y escogemos una aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que $N(p_0) = \frac{p_0}{\|p_0\|}$. Sea ahora $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\sigma(0) = p_0$. La función $s \mapsto \|\sigma(s)\|^2$ tiene un máximo global para $s = 0$, por lo que su segunda derivada no es positiva en 0. Al diferenciar obtenemos

$$k_n(0) \leq -\frac{1}{\|p_0\|},$$

donde k_n es la curvatura normal de σ .

Dado que σ era una curva arbitraria, se deduce que todas las curvaturas normales de S en p_0 tienen el mismo signo y, por tanto, p_0 es elíptica. Finalmente, $K(p_0) > 0$ implica que K es positivo en una vecindad de p_0 , de modo que S contiene un conjunto abierto que consta de puntos elípticos. \square

Regresando al resultado principal de esta sección observamos que en realidad podemos suponer que la superficie tiene una curvatura gaussiana constante positiva, porque la proposición 2.2.3 nos dice que toda superficie compacta tiene puntos elípticos. En la proposición 2.2.2 vimos que las esferas se caracterizan por el hecho de que consisten enteramente de puntos umbílicos (y no son planos). La proposición 2.2.3 implica, en particular, que una superficie compacta no puede estar contenida en un plano, por lo que esto sugiere que intentemos demostrar que una superficie compacta con una curvatura gaussiana constante consiste enteramente de puntos umbílicos. Para llegar a esto, usaremos el siguiente criterio para obtener puntos umbílicos, originalmente debido a Hilbert:

Lema 2.2.4 (Hilbert, 1909). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, donde $k_1, k_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ son sus curvaturas principales correspondientes, con $k_1 \geq k_2$. Sea $p \in S$ un punto de S que satisface las siguientes condiciones:*

- 1) $K(p) > 0$, es decir, la curvatura gaussiana en p es positiva,
- 2) p es simultáneamente un punto de máximo local para la función k_1 y un punto de mínimo local para la función k_2 .

Entonces p es un punto umbílico de S .

Demostración. Supongamos que p no es un punto umbílico de S . Entonces por la proposición 1.1.9 es posible parametrizar un entorno de p por coordenadas (u, v) de manera que las curvas coordenadas sean líneas de curvatura. En estas condiciones, $F = f = 0$ y las curvaturas principales vienen dadas por e/E y g/G . Como el punto p no es umbílico podemos admitir que intercambiando u y v , si fuera necesario, en un entorno de p

$$k_1 = \frac{e}{E}, \quad k_2 = \frac{g}{G}. \quad (2.24)$$

En el sistema coordenado así obtenido, las ecuaciones de Mainardi-Codazzi (1.7) se escriben como

$$e_v = \frac{E_v}{2}(k_1 + k_2), \quad (2.25)$$

$$g_u = \frac{G_u}{2}(k_1 + k_2). \quad (2.26)$$

Derivando con respecto a v la primera ecuación de (2.24) y usando la ecuación (2.25), obtenemos

$$E(k_1)_v = \frac{E_v}{2}(-k_1 + k_2). \quad (2.27)$$

Análogamente, derivando con respecto a u la segunda ecuación de (2.24) y usando la ecuación (2.26),

$$G(k_2)_u = \frac{G_u}{2}(k_1 - k_2). \quad (2.28)$$

Por otro lado, cuando $F = 0$, la fórmula de Gauss se reduce a la expresión

$$K_{const.} = -\frac{1}{2W} \left[\left(\frac{G_u}{W} \right)_u + \left(\frac{E_v}{W} \right)_v \right] \quad (2.29)$$

de modo que,

$$-2EGK_{const.} = E_{vv} + G_{uu} + mE_v + nG_u \quad (2.30)$$

donde $m = m(u, v)$ y $n = n(u, v)$ son funciones de (u, v) , cuyas expresiones son irrelevantes para la demostración. La misma observación se aplica a las expresiones $\tilde{m}, \tilde{n}, \bar{m}$ y \bar{n} , que se introducirán a continuación.

De las ecuaciones (2.27) y (2.28) obtenemos expresiones para E_v y G_u que, tras ser derivadas e introducidas en la ecuación (2.30), dan lugar a

$$-2EGK_{const.} = -\frac{2E}{k_1 - k_2}(k_1)_{vv} + \frac{2G}{k_1 - k_2}(k_2)_{uu} + \bar{m}(k_1)_v + \bar{n}(k_2)_u \quad (2.31)$$

luego,

$$-2(k_1 - k_2)EGK_{const.} = -2E(k_1)_{vv} + 2G(k_2)_{uu} + \tilde{m}(k_1)_v + \tilde{n}(k_2)_u. \quad (2.32)$$

Como $K_{const.} > 0$ y $k_1 > k_2$ en p , el primer miembro de la ecuación (2.32) es estrictamente negativo en p . Como k_1 alcanza un máximo local en p y k_2 alcanza un mínimo local en p , tenemos

$$(k_1)_v = 0, \quad (k_2)_u = 0, \quad (k_1)_{vv} \leq 0, \quad (k_2)_{uu} \geq 0 \quad (2.33)$$

en p . Sin embargo, esto implica que el segundo miembro de (2.32) es positivo o cero, lo cual es una contradicción. \square

Ahora ya podemos probar el resultado principal de esta sección,

Teorema 2.2.5 (Liebmann, 1899). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, conexa y compacta, cuya curvatura gaussiana K es constante. Entonces S es una esfera cuyo radio es $1/\sqrt{K}$.*

Demostración. Como S es compacta, por la proposición 2.2.3, tenemos que existe al menos un punto elíptico, en consecuencia $K_{const.} > 0$ en S , de modo que S no está contenida en un plano. Dado que la curvatura gaussiana es siempre positiva, el valor de la curvatura media no puede ser cero en ninguna parte, por tanto S es orientable. Fijando una orientación de S , y sean $k_1, k_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ las curvaturas principales de S , con $k_1 \geq k_2$. En virtud a la compacidad, la función continua k_1 alcanza su máximo en un punto $p \in S$. Dado que $k_1 k_2 = K_{const.}$ es una constante positiva, k_2 es una función decreciente de k_1 y, en consecuencia alcanza su mínimo en p . Deducimos del lema de Hilbert 2.2.4 que p es un punto umbílico, es decir $k_1(p) = k_2(p)$. Entonces para todo $q \in S$ tenemos

$$k_1(p) \geq k_1(q) \geq k_2(q) \geq k_2(p) = k_1(p). \quad (2.34)$$

Por tanto, $k_1(q) = k_2(q)$ para todo $q \in S$. Concluimos así que todos los puntos de S son umbílicos y por la proposición 2.2.2, S está contenida en una esfera Σ . Por la compacidad, S es cerrada en Σ y al ser S una superficie regular, entonces es una unión de imágenes de parametrizaciones locales, por lo que está abierto en Σ . Como Σ es conexa y, S es cerrada y abierta en Σ , entonces $S = \Sigma$. En consecuencia la superficie S es una esfera. Supongamos que S tiene radio r , entonces $K = K_{const.} = 1/r^2$, y por tanto $r = 1/\sqrt{K}$. \square

Debemos observar que no surge contradicción alguna en la demostración del lema de Hilbert 2.2.4 si suponemos que k_1 tiene un mínimo local y k_2 un máximo local en p . En realidad, tal situación puede ocurrir, sin ser p un punto umbílico, en una superficie de curvatura positiva, como veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.6. Sea S la superficie de revolución dada por

$$x = f(v) \cos u, \quad y = f(v) \sin u, \quad z = g(v), \quad 0 < u < 2\pi,$$

donde

$$\begin{aligned} f(v) &= C \cos(v), & C &> 1 \\ g(v) &= \int \sqrt{1 - C^2 \sin^2 v} \, dv, & g(0) &= 0. \end{aligned}$$

Tomamos $|v| < \arcsen(1/C)$, de forma que $g(v)$ está bien definida. Usando las expresiones vistas en la sección 1.1.1 obtenemos:

$$\begin{aligned} E &= C^2 \cos^2 v, & F &= 0, & G &= 1, \\ e &= -C \cos v (\sqrt{1 - C^2 \sin^2 v}), & f &= 0, & g &= -\frac{C \cos v}{\sqrt{1 - C^2 \sin^2 v}}, \end{aligned}$$

luego tenemos

$$k_1 = \frac{e}{E} = -\frac{\sqrt{1 - C^2 \sin^2 v}}{C \cos v}, \quad k_2 = \frac{g}{G} = -\frac{C \cos v}{\sqrt{1 - C^2 \sin^2 v}}. \quad (2.35)$$

Por tanto, S tiene curvatura $K = k_1 k_2 = 1 > 0$, es decir constante y positiva. Es sencillo comprobar que $k_1 > k_2$ en todos los puntos de S , pues $C > 1$. Por tanto, S carece de puntos umbílicos. Además, como $k_1 = -1/C$ para $v = 0$ y

$$k_1 = -\frac{\sqrt{1 - C^2 \sin^2 v}}{C \cos v} > -\frac{1}{C} \quad \text{para } v \neq 0, \quad (2.36)$$

concluimos que k_1 alcanza un mínimo (por tanto, al ser $K_{const.} = 1$, k_2 alcanza un máximo) en los puntos del paralelo $v = 0$.

Observemos que el único efecto de la conexidad en el teorema de Liebmann es prevenir la presencia de dos o más esferas en la conclusión final. Por otro lado, el ejemplo 2.2.6 muestra lo esencial de la hipótesis de la compacidad en el teorema de Liebmann antes mencionado, dado que la superficie S tiene curvatura gaussiana constante positiva y no está contenidas en una esfera, en las siguientes figuras se muestran algunos casos particulares de esta situación.

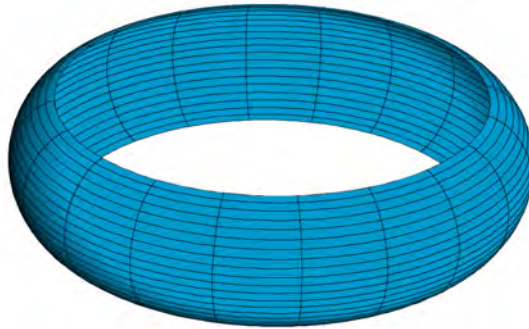
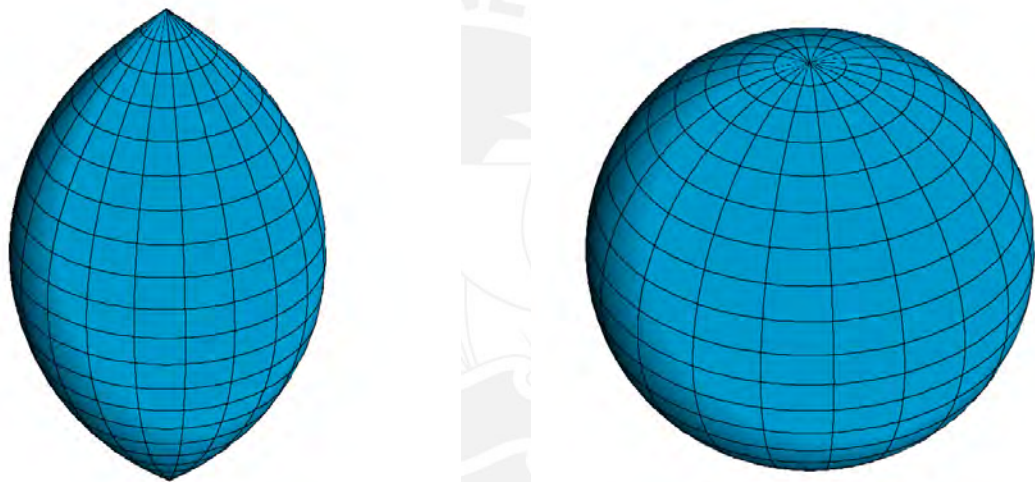


Figura 2.2: Superficie de curvatura $K_{const.} = 1$ con $C = 7/4$.



(a) $C = 3/4$

(b) $C = 1$

Figura 2.3: Superficies de curvatura $K_{const.} = 1$.

Capítulo 3

Superficies de curvatura gaussiana constante negativa

Among the thousand-and-one faces whereby form chooses to reveal itself to us, the one that fascinates me more than any other, and continues to fascinate me, is the structure hidden in mathematical things.

Alexander Grothendieck.

Este capítulo está dedicado al estudio de las superficies de curvatura gaussiana constante negativa. En relación a este capítulo y al siguiente, unas lecturas complementarias clásicas e interesantes pueden ser [AVS93] y [PS76]. Nos ocuparemos en cuestiones que están relacionadas de una forma u otra con propiedades de superficies en general. Veremos también la estrecha relación que existe entre las superficies pseudo-esféricas y la ecuación de sine-Gordon, para un estudio más amplio de esta sección se puede recurrir a [BP96], [Joh94], [McL94], [MS93], [Vin93], [Pop07] y [PM07].

La transición del estudio de las propiedades meramente locales, al estudio más amplio y más profundo de las conexiones entre las propiedades locales de los objetos geométricos y su estructura global es característica de la geometría del siglo XX, especialmente en las últimas décadas. Históricamente, el estudio de superficies de curvatura gaussiana negativa en \mathbb{R}^3 estuvo estrechamente

relacionado con el problema de la interpretación de la geometría no Euclidiana, como veremos en el siguiente capítulo. Cuando pensamos en una superficie en \mathbb{R}^3 con curvatura gaussiana constante negativa tal vez la primera superficie que se nos viene a la mente es la superficie de Beltrami o también llamada pseudo-esfera. Con esta motivación diremos que una superficie es pseudo-esférica, si esta es una superficie en \mathbb{R}^3 con curvatura gaussiana constante negativa.

3.1 Red de Tchebycheff

El matemático ruso Pafnuti Lvóvich Tchebycheff¹ en su obra de 1878 “Sur la coupe des vêtements” [Tch78], introdujo una clase especial de redes de curvas, que actualmente se conocen como redes de Tchebycheff. Para un estudio más amplio sobre esta red, véase por ejemplo [SD95] y [Mas17].

Definición 3.1.1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ son iguales, diremos que ellas constituyen una red de Tchebycheff.

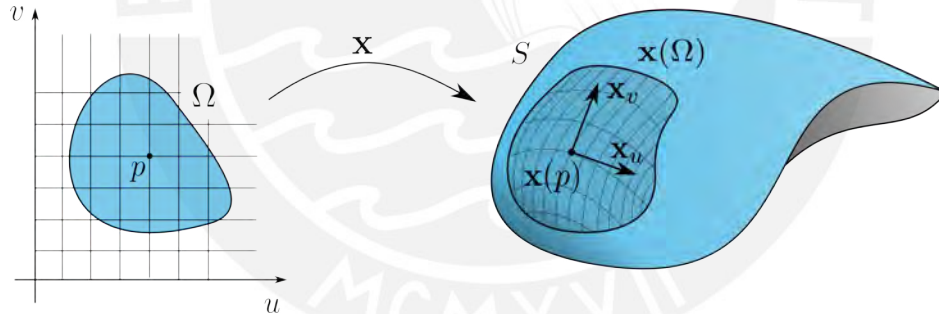


Figura 3.1: Red de Tchebycheff.

Posteriormente, se desarrolló una generalización de esta noción de red, ver [Shu63]. El primer ejemplo es, sin duda, el de las superficies de revolución. Sea $\zeta(t) = (f(t), g(t))$ una curva suave del plano xz parametrizada por longitud del arco. Luego sea S la superficie de revolución definida por la parametrización

¹A lo largo de la historia encontramos que su nombre se translitera también como Tchebichev, Tchebychev, Tscheytscheff, Chebyshev o Čebišëv; de acuerdo a [che55] en este trabajo usaremos Tchebycheff.

$\mathbf{x} : U \rightarrow S$, dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

donde $E = f^2(v)$, $F = 0$ y $G = 1$. Definimos, para cada $\alpha > 0$, el abierto

$$U_\alpha = \{(u, v) \in U : (\alpha f(v))^2 < 4, f(v) \neq 0\} \subset U.$$

Además, sean $\tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha : \mathbf{x}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^3$ los campos de vectores en $\mathbf{x}(U_\alpha)$ dados por

$$\tilde{X}_\alpha = \alpha \cdot \mathbf{x}_u, \quad \tilde{Y}_\alpha = \sqrt{4 - \alpha^2 f^2(v)} \cdot \mathbf{x}_v.$$

Entonces los campos de vectores $\tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha$ satisfacen $\langle \tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha \rangle = 0$ y

$$\|\tilde{X}_\alpha\|^2 + \|\tilde{Y}_\alpha\|^2 = \alpha^2 f^2(v) + 4 - \alpha^2 f^2(v) = 4.$$

Por tanto, los campos de vectores $X_\alpha = \frac{\tilde{X}_\alpha + \tilde{Y}_\alpha}{2}$ e $Y_\alpha = \frac{\tilde{X}_\alpha - \tilde{Y}_\alpha}{2}$ satisfacen $\|X_\alpha\| = 1$ y $\|Y_\alpha\| = 1$. Por tanto, deducimos la existencia de un sistema de coordenadas $\mathbf{x}_\alpha : V_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U_\alpha)$ tal que $(\mathbf{x}_\alpha)_u = X_\alpha$ y $(\mathbf{x}_\alpha)_v = Y_\alpha$. Además, la aplicación \mathbf{x}_α es, por definición, una red de Tchebycheff. Presentamos ahora dos aplicaciones que permiten la construcción de redes de Tchebycheff, ver más en [Ghy11].

Ejemplo 3.1.2. Sea $\zeta : [-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva definida por $\zeta(t) = (\cos(t), \sin(t))$. La superficie de revolución definida por ζ es la esfera unitaria de \mathbb{R}^3 . En la figura 3.2 se presenta un ejemplo de una red de Tchebycheff en la esfera, construida por este método. Podemos observar en esta red un punto de singularidad en cada polo.

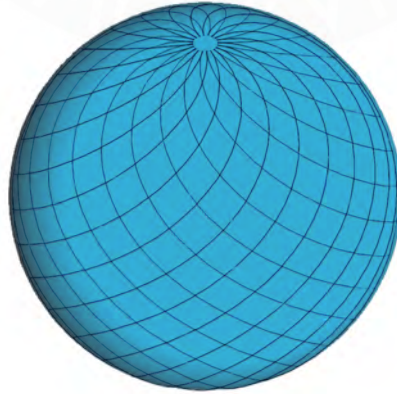


Figura 3.2: Una red de Tchebycheff en la esfera

Ejemplo 3.1.3. Un segundo ejemplo viene dado por la curva $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ obtenido por reparametrización por longitud de arco de la curva $\tilde{\zeta}$ definida por $\tilde{\zeta}(t) = (t, \cosh(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$. La superficie de revolución definida por ζ es el Catenoide. En la figura 3.3 se presente la red de Tchebycheff \mathbf{x}_α , con $\alpha < 1$, construida sobre esta superficie. Podemos observar que al reducir α , se agranda el dominio de definición U_α de \mathbf{x}_α y podemos construir de esta manera una red de Tchebycheff sobre cualquier dominio acotado de la superficie.

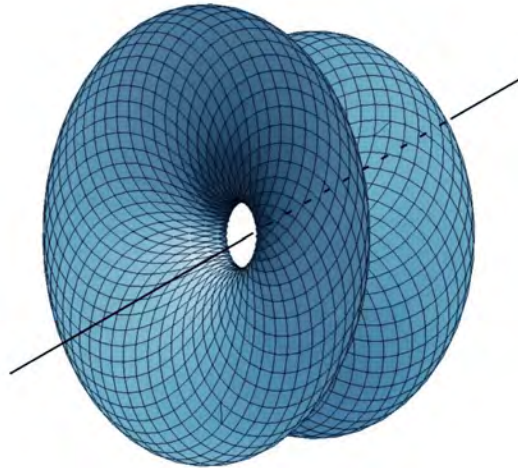


Figura 3.3: Una red de Tchebycheff en el Catenoide.

Las siguientes dos proposiciones caracterizan las redes de Tchebycheff,

Proposición 3.1.4. *Una condición necesaria y suficiente para que las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ formen una red de Tchebycheff es*

$$E_v(u, v) = G_u(u, v) = 0. \quad (3.1)$$

Demostración. Supongamos que las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ forman una red de Tchebycheff. Sean $(u_0, v_0) \in U$ fijo y $(u, v) \in U$ fijo aunque arbitrario. Sean $\alpha_j : [u_0, u] \rightarrow \mathbb{R}^2$, para $j = 1, 2$, dadas por $\alpha_1(t) = \mathbf{x}(t, v_0)$ y $\alpha_2(t) = \mathbf{x}(t, v)$ curvas coordenadas de la parametrización $\mathbf{x}(u, v)$. Sabemos que las longitudes de arcos de α_1 y α_2 , entre u_0 y u están dadas por

$$l(\alpha_1) = \int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v_0)} dt, \quad (3.2)$$

$$l(\alpha_2) = \int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v)} dt. \quad (3.3)$$

Como $l(\alpha_1) = l(\alpha_2)$, entonces $E(u, v_0) = E(u, v)$, $\forall (u, v) \in U$, es decir $E_v(u, v) = 0$. De manera análoga podemos tomar $\beta_j : [v_0, v] \rightarrow \mathbb{R}^2$, para $j = 1, 2$, dadas por $\beta_1(t) = \mathbf{x}(u_0, t)$ y $\beta_2(t) = \mathbf{x}(u, t)$, y concluir que $G_u(u, v) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $E_v(u, v) = G_u(u, v) = 0$, entonces $E(u, v) = E(u)$ y $G(u, v) = G(v)$. Luego dados $(u_0, v_0), (u, v) \in U$ tenemos,

$$l(\alpha_1) = \int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v_0)} dt = \int_{u_0}^u \sqrt{E(t, v)} dt = l(\alpha_2), \quad (3.4)$$

$$l(\beta_1) = \int_{v_0}^v \sqrt{G(u_0, t)} dt = \int_{v_0}^v \sqrt{G(u, t)} dt = l(\beta_2). \quad (3.5)$$

Por tanto la curvas coordenadas de \mathbf{x} constituyen una red de Tchebycheff. \square

Proposición 3.1.5. *Cuando las curvas coordenadas constituyen una red de Tchebycheff es posible reparametrizar el entorno coordinado U de tal forma que los coeficientes de la primera forma fundamental sean:*

$$E = 1, \quad F = \cos \omega \quad y \quad G = 1, \quad (3.6)$$

donde ω es el ángulo entre las curvas coordenadas.

Demostración. De la proposición 3.1.4 sabemos que $E(u, v) = E(u)$ y $G(u, v) = G(v)$. Entonces la aplicación $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi(u, v) = \left(\int_0^u \sqrt{E(u)} du, \int_0^v \sqrt{G(v)} dv \right) \quad (3.7)$$

es un difeomorfismo con su imagen, y la aplicación $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \circ \varphi^{-1}$ sigue siendo una parametrización, en coordenadas (\tilde{u}, \tilde{v}) . De modo que $\tilde{u}_u(u, v) = \sqrt{E(u)}$ y $\tilde{v}_v(u, v) = \sqrt{G(v)}$. Luego $\mathbf{x}(u, v) = (\tilde{\mathbf{x}} \circ \varphi)(u, v) = \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u}, \tilde{v})$, de donde podemos notar que

$$\mathbf{x}_u = \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}} \cdot \tilde{u}_u + \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}} \cdot \tilde{v}_u = \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}} \cdot \tilde{u}_u = \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}} \cdot \sqrt{E}. \quad (3.8)$$

En consecuencia tenemos

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \left\langle \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}} \cdot \sqrt{E}, \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}} \cdot \sqrt{E} \right\rangle = E \cdot \langle \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}}, \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}} \rangle, \quad (3.9)$$

entonces $\tilde{E} = 1$. De manera análoga $\tilde{G} = 1$. Finalmente,

$$\tilde{F} = \langle \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}}, \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{\|\mathbf{x}_u\| \cdot \|\mathbf{x}_v\|} = \cos \omega \quad (3.10)$$

donde ω es el ángulo formado por las curvas coordenadas. \square

En las condiciones de la proposición 3.1.6, es decir $e = g = 0$, las ecuaciones de Mainardi-Codazzi (1.3) se convierten en

$$\begin{cases} f_u = f(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) \\ f_v = f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1). \end{cases} \quad (3.11)$$

Usando los símbolos de Christoffel (1.4) tenemos:

$$\begin{aligned} f_u &= f(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) \\ f_u &= f\left(\frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} - \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}\right) \\ f_u &= f\left(\frac{GE_u + EG_u - 2FF_u + 2FE_v - 2EG_u}{2(EG - F^2)}\right) \\ f_u &= f\left(\frac{(EG - F^2)_u + 2FE_v - 2EG_u}{2(EG - F^2)}\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

de manera análoga tenemos

$$f_v = f\left(\frac{(EG - F^2)_v + 2FG_u - 2GE_v}{2(EG - F^2)}\right). \quad (3.13)$$

Aplicando la proposición 1.1.8, es posible parametrizar un entorno de p de forma que las curvas coordenadas sean asintóticas. En otras palabras,

Proposición 3.1.6. *Sea p un punto de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Si la curvatura gaussiana en p es $K(p) < 0$, entonces existe un difeomorfismo $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, con $p \in h(U)$, donde las curvas coordenadas son curvas asintóticas.*

Demostración. Ver [Spi99a, p. 217]. □

Lema 3.1.7. *Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 con curvatura gaussiana constante $K_{const.} < 0$. Entonces para cada $p \in S$ existe $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, con $h(0, 0) = p$, una parametrización local centrada en p cuyas curvas coordenadas son curvas asintóticas parametrizadas por longitud de arco, y en consecuencia constituyen una red de Tchebycheff.*

Demostración. De la proposición 3.1.6 tenemos que para cada $p \in S$ existe una parametrización local $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, con $h(0, 0) = p$, tal que las curvas coordenadas son curvas asintóticas. Por una reparametrización

adecuada obtenemos dos curvas coordenadas pasando por $p = h(0, 0)$ que son parametrizadas por longitud de arco. Así tenemos

$$E(u, 0) = 1, \quad G(0, v) = 1. \quad (3.14)$$

Ahora vamos a probar que todas las curvas coordenadas están parametrizadas por longitud de arco. Para probar esto, notemos que en estas condiciones las ecuaciones de Mainardi-Codazzi pueden ser escritas de la siguiente manera, haciendo uso de las ecuaciones (3.12) y (3.13):

$$\begin{cases} (f^2)_u = 2ff_u = f^2 \left(\frac{(EG - F^2)_u + 2FE_v - 2EG_u}{EG - F^2} \right) \\ (f^2)_v = 2ff_v = f^2 \left(\frac{(EG - F^2)_v + 2FG_u - 2GE_v}{EG - F^2} \right). \end{cases} \quad (3.15)$$

Por otro lado, de la ecuación de Gauss tenemos

$$\begin{aligned} K_{const.} &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ K_{const.} &= \frac{-f^2}{EG - F^2} \\ f^2 &= -K_{const.}(EG - F^2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Reemplazando f^2 en la primera ecuación de (3.15),

$$-K_{const.}(EG - F^2)_u = -K_{const.}((EG - F^2)_u + 2FE_v - 2EG_u) \quad (3.17)$$

entonces

$$EG_u - FE_v = 0. \quad (3.18)$$

De manera análoga, reemplazando f^2 en la segunda ecuación de (3.15), obtenemos $-FG_u + GE_v = 0$. Es decir, tenemos un sistema de ecuaciones donde $EG - F^2 \neq 0$,

$$\begin{cases} EG_u - FE_v = 0 \\ -FG_u + GE_v = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

el cual tiene como única solución $G_u = E_v = 0$, y por tanto $E(u, v) = E(u, 0) = 1$ y $G(u, v) = G(0, v) = 1$. \square

El lema anterior muestra que siempre existe una red de Tchebycheff asintótica local en superficies de \mathbb{R}^3 , con curvatura gaussiana constante negativa.

Lema 3.1.8. Sea S una superficie regular en \mathbb{R}^3 y sea $h : (a, b) \times (c, d) \rightarrow S$ una red de Tchebycheff. Defina una aplicación diferenciable $\omega : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada punto (u_0, v_0) le asocia un único número $\omega(u_0, v_0)$ tal que $0 < \omega(u_0, v_0) < \pi$ y $\omega(u_0, v_0)$ es el ángulo entre

$$\left. \frac{d}{du} h(u, v_0) \right|_{u=u_0} \quad \text{y} \quad \left. \frac{d}{dv} h(u_0, v) \right|_{v=v_0}. \quad (3.20)$$

Entonces ω satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\omega_{uv} = -K \operatorname{sen} \omega. \quad (3.21)$$

Demostración. De la proposición 3.1.5 podemos considerar $E = G = 1$ y $F = \cos \omega$. Entonces $W = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \omega} = \operatorname{sen} \omega$. Usando la proposición 1.1.15 tenemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2W} \cdot \left[\left(\frac{F_v}{W} \right)_u + \left(\frac{F_u}{W} \right)_v \right] \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \omega} \cdot \left[\left(\frac{-\operatorname{sen} \omega \cdot \omega_v}{\operatorname{sen} \omega} \right)_u + \left(\frac{-\operatorname{sen} \omega \cdot \omega_u}{\operatorname{sen} \omega} \right)_v \right] \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \omega} \cdot [-2 \cdot \omega_{uv}] \end{aligned}$$

En consecuencia tenemos $\omega_{uv} = -K \operatorname{sen} \omega$. □

En 1878 Pafnuti Lvóvich Tchebycheff, en [Tch78], obtuvo por primera vez una ecuación no lineal del tipo

$$K \operatorname{sen}^2 \omega = (\cos \omega)_{uv} + \omega_u \omega_v \cos \omega \quad (3.22)$$

conocida hoy como la ecuación de Tchebycheff, que se reduce a la forma

$$\omega_{uv} = -K \operatorname{sen} \omega. \quad (3.23)$$

Aproximadamente al mismo tiempo una ecuación de la forma (3.23) apareció también en el trabajo de Hazzidakis [Haz80], quien obtuvo una fórmula para el cálculo del área de un cuadrilátero de coordenadas de una red de Tchebycheff en una superficie de curvatura gaussiana negativa, como un corolario del siguiente teorema

Teorema 3.1.9 (Hazzidakis, 1880). *Sea S una superficie con curvatura gaussiana negativa K . Sea $U = [L_0, L_1] \times [M_0, M_1]$ con $L_1 > L_0$, $M_1 > M_0$ y también $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una red de Tchebycheff. Denotando $\Omega = \mathbf{x}(U)$ y definiendo los siguientes puntos*

$$A = \mathbf{x}(L_0, M_0), \quad B = \mathbf{x}(L_1, M_0), \quad C = \mathbf{x}(L_1, M_1) \quad \text{y} \quad D = \mathbf{x}(L_0, M_1).$$

Los ángulos entre las curvas de coordenadas en estos puntos se denotan respectivamente,

$$\omega_A = \omega(L_0, M_0), \quad \omega_B = \omega(L_1, M_0), \quad \omega_C = \omega(L_1, M_1), \quad \text{y} \quad \omega_D = \omega(L_0, M_1).$$

Estos ángulos satisfacen la fórmula de Hazzidakis

$$\omega_A + \omega_C = \omega_B + \omega_D - \int_{\Omega} K dA.$$

Sean $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C$ y α_D los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCD$, tenemos

$$- \int_{\Omega} K dA = \alpha_A + \alpha_B + \alpha_C + \alpha_D - 2\pi.$$

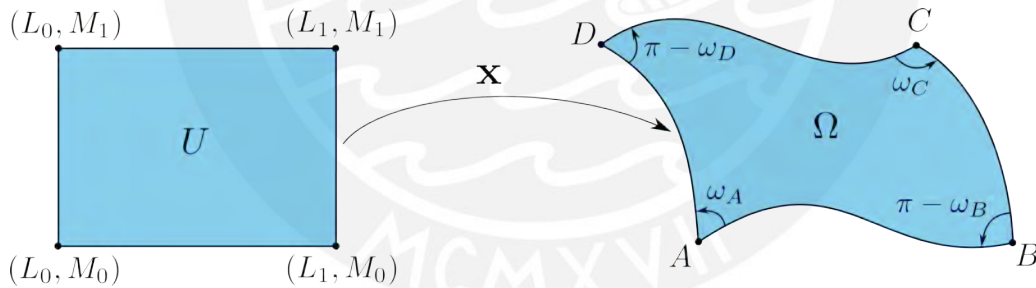


Figura 3.4: Ilustración de los ángulos entre las curvas de coordenadas de una red de Tchebycheff en Ω .

Por otro lado, volviendo a la ecuación de Tchebycheff (3.23) el caso en que $K_{const.} = -1$, dicha ecuación se convierte en la ecuación de sine-Gordon más conocida hoy en día en aplicaciones, véase por ejemplo [PBSF21] y [AM21].

3.2 La ecuación de sine-Gordon

Desde su descubrimiento en 1965 por Zabusky y Kruskal [ZK65], los solitones² y las ecuaciones que los admiten como soluciones han sido objeto de gran investigación por parte de matemáticos y otros científicos, véase por ejemplo [Joh94]. Un ejemplo de una ecuación con solitones es la ecuación de sine-Gordon. Este tema fue ampliamente analizado por los grandes geómetras europeos del siglo XIX. Esto se debió a que surgió originalmente en conexión con la teoría de superficies pseudo-esféricas véase por ejemplo [Eis60].

Consideramos una superficie S con curvatura gaussiana negativa en la cual las curvas coordenadas son curvas asintóticas. Luego, de la ecuación de Gauss, tenemos que

$$K = -\frac{f^2}{EG - F^2} = -\frac{f^2}{W^2} = -\frac{1}{\rho^2}, \quad (3.24)$$

donde $\rho = W/f$ y el ángulo ω entre las curvas coordenadas es tal que

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \text{sen } \omega = \frac{W}{\sqrt{EG}} \quad (3.25)$$

y como $E, G > 0$ podemos tomar sin pérdida de generalidad $E = \rho^2 \alpha^2$, $G = \rho^2 \beta^2$. Por tanto las formas fundamentales se transforman en:

$$I = \rho^2 [\alpha^2 du^2 + 2\alpha\beta \cos \omega dudv + \beta^2 dv^2] \quad (3.26)$$

$$II = 2\rho\alpha\beta \text{sen } \omega dudv. \quad (3.27)$$

Las ecuaciones de Mainardi-Codazzi ahora toman la forma:

$$\alpha_v + \frac{\rho_v}{2\rho} \alpha - \frac{\rho_u}{2\rho} \beta \cos \omega = 0 \quad (3.28)$$

$$\beta_u + \frac{\rho_u}{2\rho} \beta - \frac{\rho_v}{2\rho} \alpha \cos \omega = 0 \quad (3.29)$$

mientras que el teorema de Gauss proporciona,

$$\omega_{uv} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_u}{\rho} \frac{\beta}{\alpha} \text{sen } \omega \right)_u + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_v}{\rho} \frac{\alpha}{\beta} \text{sen } \omega \right)_v - \alpha\beta \text{sen } \omega = 0. \quad (3.30)$$

Las ecuaciones de Gauss-Mainardi-Codazzi en esta forma fueron presentadas en [LS90].

²Los solitones son ondas localizadas que se propagan sin deformarse que satisfacen ecuaciones diferenciales no lineales, véase por ejemplo [MD05].

Estamos interesados en el caso en que la superficie S es una superficie pseudo-esférica, de modo que ρ es constante, digamos a , esto se hace únicamente para no sobrecargar la notación. Por otro lado, de la proposición 3.1.5, de las ecuaciones (3.26), (3.27) y del lema 3.1.8 tenemos

$$I = du^2 + 2 \cos \omega \, dudv + dv^2 \quad (3.31)$$

$$II = \frac{2}{a} \operatorname{sen} \omega \, dudv \quad (3.32)$$

$$\omega_{uv} = \frac{1}{a^2} \operatorname{sen} \omega. \quad (3.33)$$

La ecuación (3.33) es conocida como la ecuación sine-Gordon. El teorema fundamental de la teoría de superficies dice que las formas fundamentales (3.31) y (3.32) corresponden a una superficie si, y solamente si, se satisface la ecuación (3.33). Por tanto, podemos hacer una correspondencia uno a uno entre las soluciones de la ecuación de sine-Gordon y las superficies pseudo-esféricas parametrizadas de la forma antes mencionada. Para referencia posterior notamos que las ecuaciones de Gauss, en este caso, son:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \cot \omega \cdot \omega_u \cdot \mathbf{x}_u - \operatorname{csc} \omega \cdot \omega_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_{uv} &= \frac{1}{a} \cdot \operatorname{sen} \omega \cdot N \\ \mathbf{x}_{vv} &= -\operatorname{csc} \omega \cdot \omega_v \cdot \mathbf{x}_u + \cot \omega \cdot \omega_v \cdot \mathbf{x}_v \end{aligned} \quad (3.34)$$

y las ecuaciones de Weingarten,

$$\begin{aligned} N_u &= \frac{1}{a} \cdot \cot \omega \cdot \mathbf{x}_u - \frac{1}{a} \cdot \operatorname{csc} \omega \cdot \mathbf{x}_v \\ N_v &= -\frac{1}{a} \cdot \operatorname{csc} \omega \cdot \mathbf{x}_u + \frac{1}{a} \cdot \cot \omega \cdot \mathbf{x}_v. \end{aligned} \quad (3.35)$$

En primer lugar, observamos que en lo que sigue a menudo es útil trabajar en términos de parámetros medidos a lo largo de líneas de curvatura, en lugar de curvas asintóticas. El cambio de parámetros $x = u + v$, $y = u - v$ corresponde a la transición de la red de Tchebycheff en una superficie pseudo-esférica a la red de coordenadas ortogonales asociada a las líneas de curvatura principal de la superficie (por ejemplo, en el caso de la pseudo-esfera tal red ortogonal está formada por los meridianos de revolución y los paralelos circulares). Si además escribimos $\theta = \omega/2$ encontramos que la primera y segunda formas fundamentales

son:

$$\begin{aligned}
 I &= du^2 + 2 \cos \omega \, dudv + dv^2 \\
 I &= \left(\frac{1 + \cos \omega}{2} \right) dx^2 + \left(\frac{1 - \cos \omega}{2} \right) dy^2 \\
 I &= \cos^2 \theta dx^2 + \sin^2 \theta dy^2
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
 II &= \frac{2}{a} \operatorname{sen} \omega \, dudv \\
 II &= \frac{2}{a} \operatorname{sen} \omega \, dx^2 + \frac{2}{a} \operatorname{sen} \omega \, dy^2 \\
 II &= \frac{1}{a} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \, dx^2 + \frac{1}{a} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \, dy^2.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Por tanto $\|\mathbf{x}_x\| = \cos \theta$, $\|\mathbf{x}_y\| = \operatorname{sen} \theta$ y $\langle \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y \rangle = 0$, entonces el triedro-ortonormal está dado por $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{x}_x}{\cos \theta}$, $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{x}_y}{\operatorname{sen} \theta}$, $\mathbf{C} = N$.

Podemos calcular las ecuaciones de Gauss-Weingarten en las variables x e y ,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & \theta_y & \frac{1}{a} \operatorname{sen} \theta \\ -\theta_y & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} \operatorname{sen} \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 & \theta_x & 0 \\ -\theta_x & 0 & -\frac{1}{a} \cos \theta \\ 0 & \frac{1}{a} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

Estos sistemas son compatibles si, y solamente si,

$$\theta_{xx} - \theta_{yy} = \frac{1}{a^2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \tag{3.40}$$

es decir (3.33) en las variables transformadas. Esta forma de la ecuación sine-Gordon es la que se ve en la mayoría de las aplicaciones físicas, como por ejemplo el efecto Josephson ver [BEMS71], [CPS⁺78]; entre otras aplicaciones para un abordaje más amplio véase por ejemplo [CMKW14].

La ecuación sine-Gordon tiene un carácter universal. Por un lado, describe inmersiones isométricas de partes del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 como veremos en el siguiente capítulo, y por otro, es una ecuación modelo ampliamente utilizada en física. Destaquemos además que es en el trabajo de Tchebycheff, citado anteriormente, que se observó por primera vez una conexión entre una ecuación diferencial y una determinada red de coordenadas, la red que ahora lleva su nombre.

3.3 Superficies pseudo-esféricas

Comenzamos el estudio de las superficies pseudo-esféricas de revolución. Sea S una superficie pseudo-esféricas de revolución dada por

$$x = f(v) \cos u, \quad y = f(v) \sin u, \quad z = g(v), \quad 0 < u < 2\pi,$$

Como se vio en la sección 1.1.1, tenemos

$$K_{const.} = -\frac{f''(v)}{f(v)} \quad (3.41)$$

así que para encontrar las superficies pseudo-esféricas de revolución tomamos $K_{const.} = -1/a^2$, donde a es una constante y al resolvemos (3.41) obtenemos la siguiente solución general

$$f(v) = c_1 \cosh\left(\frac{v}{a}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{v}{a}\right). \quad (3.42)$$

Basta considerar los casos $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ y $c_1 = c_2$, dado que cualquier otra solución puede ser escrita como

$$f(v) = C \cosh\left(\frac{v}{a} + b\right) \quad \text{o} \quad f(v) = C \sinh\left(\frac{v}{a} + b\right)$$

coincidiendo así con uno de los dos primeros casos luego de un desplazamiento. Además como la curva plana está parametrizada por longitud de arco, tenemos

$$g(v) = \int_0^v \sqrt{1 - [f'(v)]^2} dv. \quad (3.43)$$

Por tanto, las ecuaciones de los meridianos para los tres tipos de superficies pseudo-esféricas de revolución están dadas por

$$(1) \quad f(v) = c \cosh\left(\frac{v}{a}\right), \quad g(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sinh^2\left(\frac{v}{a}\right)} dv,$$

$$(2) \quad f(v) = c \sinh\left(\frac{v}{a}\right), \quad g(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)} dv,$$

$$(3) \quad f(v) = c \exp\left(\frac{v}{a}\right), \quad g(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \exp\left(\frac{2v}{a}\right)} dv.$$

Las superficies correspondientes se conocen como superficies pseudo-esféricas de revolución de los tipos Minding top, Minding bobbing y pseudo-esfera, respectivamente.

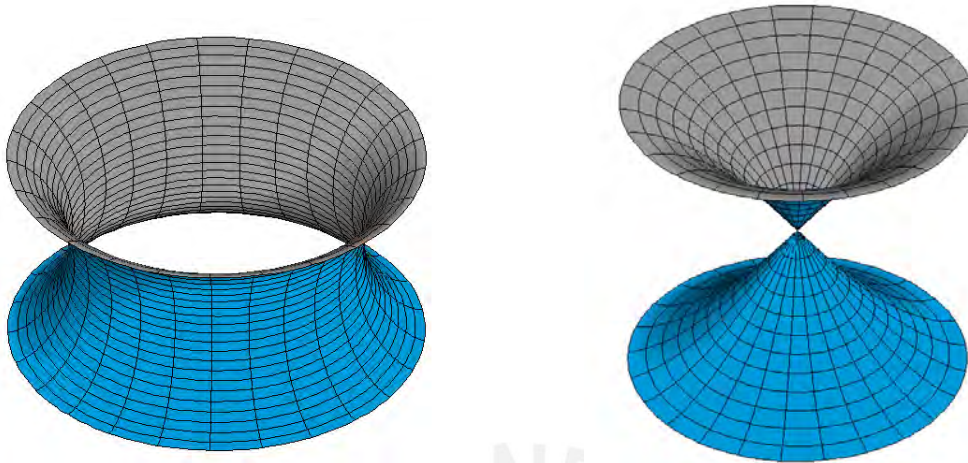
(a) Minding top $a = c = 1$ (b) Minding bobbing $a = 1, c = 1/2$

Figura 3.5: Superficies pseudo-esféricas de revolución tipo Minding top y Minding bobbing.

3.3.1 Pseudo-esfera

Consideramos ahora el caso (3) en detalle. La integral para $g(v)$ se puede evaluar en este caso mediante la sustitución

$$\sin \psi = \left(\frac{c}{a}\right) \exp\left(\frac{v}{a}\right) \quad (3.44)$$

dando como resultado,

$$z = g(v) = a \left(\cos \psi + \ln \left| \tan \frac{\psi}{2} \right| \right). \quad (3.45)$$

Además, encontramos que

$$\frac{dg}{df} = \cot \psi \quad (3.46)$$

de modo que ψ es el ángulo que forma la tangente al con el eje z . Además, si calculamos la distancia desde un punto del meridiano al eje z , medido a lo largo de la tangente, encontramos que es a , por tanto una constante. Una curva con esta propiedad se denomina tractriz, de modo que la superficie pseudo-esférica del caso (3) es una superficie de revolución generada por la tractriz.

Esta superficie es denominada pseudo-esfera o también conocida como la superficie de Beltrami.

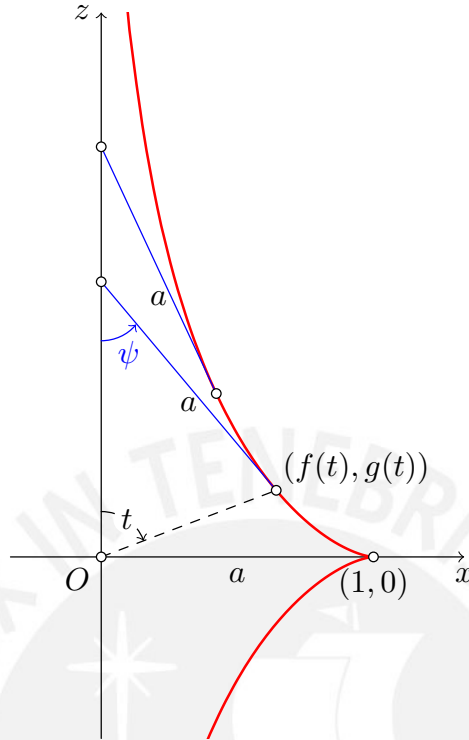


Figura 3.6: Tractriz

Establezcimos una correspondencia uno a uno entre superficies pseudo-esféricas parametrizadas según (3.36), (3.37) y las soluciones de (3.40). Para encontrar la solución de (3.40) correspondiente a la pseudo-esfera debemos parametrizarla de la manera antes mencionada. En términos de u y ψ , tenemos:

$$\mathbf{x}(u, \psi) = \left(a \operatorname{sen} \psi \cos u, a \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} u, a \left(\cos \psi + \ln \left| \tan \frac{\psi}{2} \right| \right) \right) \quad (3.47)$$

por tanto

$$\begin{aligned} \text{I} &= a^2 \operatorname{sen}^2 \psi \, du^2 + a^2 \cot^2 \psi \, d\psi^2 \\ \text{II} &= -a \operatorname{sen} \psi \cos \psi \, du^2 + a \cot \psi \, d\psi^2. \end{aligned}$$

Si introducimos x de manera que

$$dx = a \operatorname{csc} \psi \, d\psi \quad (3.48)$$

y sea $y = au$, entonces I y II toman la forma (3.36), (3.37) con $\theta = \psi$. La integración de la ecuación (3.48) muestra que la solución de la ecuación sine-

Gordon correspondiente a la pseudo-esfera es

$$\theta = 2 \arctan \left(\exp \left(\frac{x}{a} - c \right) \right) \quad (3.49)$$

donde c es una constante de integración. Esto se conoce como la solución de 1-soliton estacionaria. En términos de los parámetros x e y la parametrización de la pseudo-esfera es $\mathbf{x}(x, y) = (\mathbf{x}_1(x, y), \mathbf{x}_2(x, y), \mathbf{x}_3(x, y))$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(x, y) &= a \operatorname{sech} \left(\frac{x}{a} - c \right) \cos \left(\frac{y}{a} \right), \\ \mathbf{x}_2(x, y) &= a \operatorname{sech} \left(\frac{x}{a} - c \right) \operatorname{sen} \left(\frac{y}{a} \right), \\ \mathbf{x}_3(x, y) &= a \left[\left(\frac{x}{a} - c \right) - \tanh \left(\frac{x}{a} - c \right) \right]. \end{aligned}$$

En la figura 3.7 se muestra una pseudo-esfera, trazada usando la parametrización anterior.

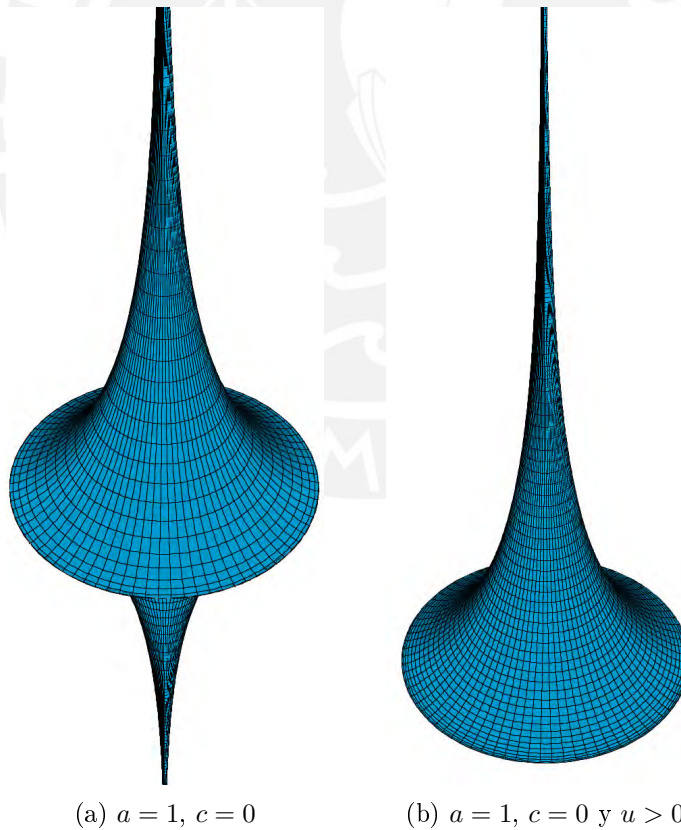


Figura 3.7: Superficie de Beltrami

3.3.2 Superficie de Dini

El helicoides generado por la tractriz se conoce como superficie de Dini, y es una superficie pseudo-esférica. Si la parametrizamos como en el caso de la pseudo-esfera, encontramos $\mathbf{x}(x, y) = (\mathbf{x}_1(x, y), \mathbf{x}_2(x, y), \mathbf{x}_3(x, y))$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(x, y) &= a \operatorname{sen} \zeta \operatorname{sech} \xi \cos \left(\frac{y}{a} \right), & \mathbf{x}_2(x, y) &= a \operatorname{sen} \zeta \operatorname{sech} \xi \operatorname{sen} \left(\frac{y}{a} \right), \\ \mathbf{x}_3(x, y) &= x - a \operatorname{sen} \zeta \tanh \xi, \end{aligned}$$

$\xi = \frac{x - y \cos \zeta}{a \operatorname{sen} \zeta}$ y ζ es una constante (la longitud de la tangente de la tractriz es $a \operatorname{sen} \zeta$ y el parámetro helicoidal, que refleja las velocidades relativas de traslación y rotación de la curva generadora, es $a \cos \zeta$). La solución correspondiente de (3.40) es

$$\theta = 2 \arctan (\exp (\xi)) = 2 \arctan \left(\exp \left(\frac{x - y \cos \zeta}{a \operatorname{sen} \zeta} \right) \right). \quad (3.50)$$

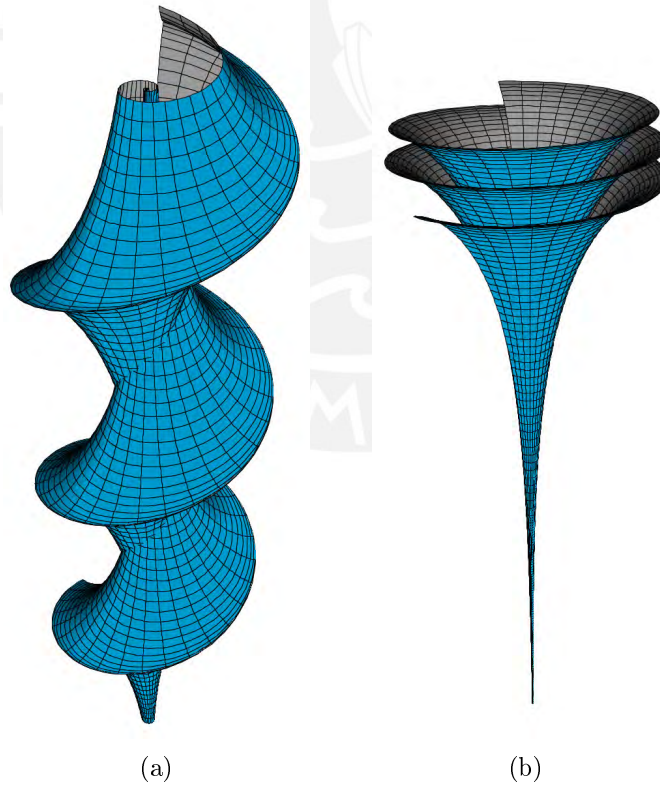


Figura 3.8: Superficie de Dini (a) $a = 1$, $\zeta = 2\pi/5$ y (b) $a = 3/2$, $\zeta = 20\pi/41$.

3.4 Las transformadas de Bianchi y Bäcklund

En las secciones anteriores vimos que un análisis de los tipos más sencillos de superficies pseudo-esféricas conduce de manera bastante natural a la solución 1–solitón de la ecuación de sine-Gordon. Sin embargo, esto no proporciona indicios sobre cómo encontrar soluciones más generales de la ecuación de sine-Gordon, así como tipos más generales de superficies pseudo-esféricas. La clave para lograr esta tarea es una transformación geométrica propuesta por Luigi Bianchi, que surge de la idea matemática atrevida sobre la posible existencia de un vínculo específico entre superficies pseudo-esféricas, formulada en su tesis doctoral en 1879, véase [Bia79]. El significado general de la idea de la transformación propuesta es la siguiente: ¿Es posible, dada una superficie pseudo-esférica, construir una superficie pseudo-esférica nueva y diferente, de modo que el algoritmo de construcción se base exclusivamente de información sobre la superficie en cuestión? La respuesta resultó ser afirmativa, y hoy en día a dicha transformación la conocemos como transformación de Bianchi. Posteriormente, la idea geométrica propuesta fue ampliamente desarrollada y generalizada en 1883 por Albert Victor Bäcklund en [Bäc83]. Analizaremos a continuación el contenido geométrico de estas transformaciones, véase por ejemplo las obras originales de Bianchi [Bia23] y [Bia92], o en todo caso [Joh94]. La aplicación del método de transformación de Bäcklund a la construcción de soluciones de ecuaciones no lineales es uno de los enfoques efectivos en la física matemática moderna. Se dedica especial atención a la clase de soluciones de solitones de la ecuación de sine-Gordon y a su interpretación geométrica, principalmente nos centramos en la pseudo-esfera, la superficie de Dini, la superficie de Kuen y también en la superficie pulsante (Breather surface).

3.4.1 La transformada de Bianchi

Supongamos que S es una superficie pseudo-esférica de curvatura $-1/a^2$, a la cual le asociamos otra superficie \tilde{S} , que satisface la siguiente propiedad:

Para cualquier punto $\tilde{p} \in \tilde{S}$, existe un punto $p \in S$ tal que la recta que los une sea tangente a S en p , a \tilde{S} en \tilde{p} y tenga longitud a . Además pedimos que los planos $T_{\tilde{p}}\tilde{S}$ y $T_p S$ sean perpendiculares.

Bianchi mostró que bajo estas condiciones, \tilde{S} también es una superficie pseudo-esférica de curvatura gaussiana $-1/a^2$.

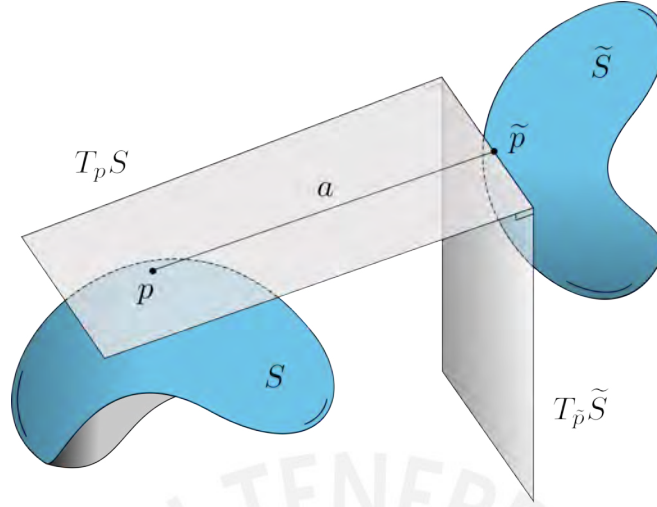


Figura 3.9: Transformación de Bianchi

Supongamos que S y \tilde{S} se dan en términos de líneas de curvatura por $\mathbf{x}(x, y)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(x, y)$ respectivamente. La condición de que las rectas que unen los puntos correspondientes en S y \tilde{S} sean de longitud a y tangentes a S nos permiten

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + a \cos \alpha \mathbf{A} + a \operatorname{sen} \alpha \mathbf{B}, \quad (3.51)$$

donde α es una función de x e y . Derivando esta expresión y usando las ecuaciones (3.38) y (3.39) obtenemos

$$\tilde{\mathbf{x}}_x = (\cos \theta - a(\alpha_x + \theta_y) \operatorname{sen} \alpha) \mathbf{A} + (a(\alpha_x + \theta_y) \cos \alpha) \mathbf{B} + \cos \alpha \operatorname{sen} \theta \mathbf{C}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_y = (-a(\alpha_y + \theta_x) \operatorname{sen} \alpha) \mathbf{A} + (\operatorname{sen} \theta + a(\alpha_y + \theta_x) \cos \alpha) \mathbf{B} + (-\operatorname{sen} \alpha \cos \theta) \mathbf{C}.$$

El hecho de que la recta que une p con \tilde{p} es tangente a \tilde{S} en \tilde{p} puede expresarse como

$$\langle \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}_x \times \tilde{\mathbf{x}}_y \rangle = 0, \quad (3.52)$$

es decir,

$$\begin{vmatrix} a \cos \alpha & a \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \cos \theta - a(\alpha_x + \theta_y) \operatorname{sen} \alpha & a(\alpha_x + \theta_y) \cos \alpha & \cos \alpha \operatorname{sen} \theta \\ -a(\alpha_y + \theta_x) \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{sen} \theta + a(\alpha_y + \theta_x) \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta \end{vmatrix} = 0$$

el cual resulta,

$$\begin{aligned} & (\alpha_x + \theta_y)a \cos \theta \operatorname{sen} \alpha + (\alpha_y + \theta_x)a \operatorname{sen} \theta \cos \alpha + \\ & + \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \theta = 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

La condición que los planos tangentes en los puntos correspondientes sean perpendiculares se pueden escribir como $\langle \mathbf{C}, \tilde{\mathbf{x}}_x \times \tilde{\mathbf{x}}_y \rangle = 0$, es decir,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta - a(\alpha_x + \theta_y) \sin \alpha & a(\alpha_x + \theta_y) \cos \alpha & \cos \alpha \sin \theta \\ -a(\alpha_y + \theta_x) \sin \alpha & \sin \theta + a(\alpha_y + \theta_x) \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \theta \end{vmatrix} = 0$$

el cual resulta,

$$(\alpha_x + \theta_y)(-a \sin \theta \sin \alpha) + (\alpha_y + \theta_x)(a \cos \theta \cos \alpha) + \cos \theta \sin \theta = 0. \quad (3.54)$$

Resolviendo el sistema (3.53) y (3.54) tenemos

$$\alpha_x + \theta_y = \frac{1}{a} \sin \alpha \cos \theta \quad (3.55)$$

$$\alpha_y + \theta_x = -\frac{1}{a} \cos \alpha \sin \theta. \quad (3.56)$$

Cuando se satisfacen estas condiciones, obtenemos

$$\tilde{\mathbf{x}}_x = (\cos^2 \alpha \cos \theta) \mathbf{A} + (\sin \alpha \cos \alpha \cos \theta) \mathbf{B} + (\cos \alpha \sin \theta) \mathbf{C}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_y = (\sin \alpha \cos \alpha \sin \theta) \mathbf{A} + (\sin^2 \alpha \sin \theta) \mathbf{B} + (-\sin \alpha \cos \theta) \mathbf{C}.$$

las cuales muestran que $\langle \tilde{\mathbf{x}}_x, \tilde{\mathbf{x}}_x \rangle = \cos^2 \alpha$, $\langle \tilde{\mathbf{x}}_x, \tilde{\mathbf{x}}_y \rangle = 0$ y $\langle \tilde{\mathbf{x}}_y, \tilde{\mathbf{x}}_y \rangle = \sin^2 \alpha$. Por tanto la primera forma fundamental de \tilde{S} es

$$I = \cos^2 \alpha dx^2 + \sin^2 \alpha dy^2. \quad (3.57)$$

Se puede mostrar fácilmente que la normal de \tilde{S} es $\tilde{N} = \cos \alpha \mathbf{B} - \sin \alpha \mathbf{A}$ y en consecuencia la segunda forma fundamental de \tilde{S} es

$$II = \frac{1}{a} \sin \alpha \cos \alpha dx^2 - \frac{1}{a} \sin \alpha \cos \alpha dy^2 \quad (3.58)$$

una comparación de las formas fundamentales de \tilde{S} con S , y las ecuaciones (3.36) y (3.37), muestra que \tilde{S} es una superficie pseudo-esférica de la misma manera que S y que α juega el mismo papel en relación con \tilde{S} que θ en relación con S . En particular α debe ser una solución de (3.40). Todos los enunciados anteriores dependen de que podamos encontrar un α que satisfaga (3.55) y (3.56).

3.4.2 Superficie de Kuen

Las ecuaciones (3.55) y (3.56) proporcionan un medio para obtener una solución de la ecuación de sine-Gordon a partir de otra. Para ilustrar el uso de la transformación de Bianchi consideramos la solución de la ecuación de sine-Gordon correspondiente a la pseudo-esfera, (3.49) con $c = 0$, es decir

$$\theta = 2 \arctan \left(\exp \left(\frac{x}{a} \right) \right).$$

Para este θ particular, las ecuaciones (3.55) y (3.56) se convierten en:

$$\alpha_x = -\frac{1}{a} \tanh \left(\frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \alpha \quad (3.59)$$

$$\alpha_y = -\frac{1}{a} \operatorname{sech} \left(\frac{x}{a} \right) (1 + \cos \alpha). \quad (3.60)$$

Al integrar estas ecuaciones por separado y juntando las mismas obtenemos la solución

$$\alpha = 2 \arctan \left(\frac{c - y}{a} \operatorname{sech} \left(\frac{x}{a} \right) \right), \quad (3.61)$$

donde c es una constante arbitraria. Usando la fórmula (3.51) y la parametrización de la pseudo-esfera obtenida anteriormente, encontramos que la parametrización de la transformación de Bianchi de la pseudo-esfera, con $a = 1$ y $c = 1$, es $\mathbf{x}(x, y) = (\mathbf{x}_1(x, y), \mathbf{x}_2(x, y), \mathbf{x}_3(x, y))$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(x, y) &= 2 \cdot \frac{\cosh x (\cos y + y \operatorname{sen} y)}{y^2 + \cosh^2 x} \\ \mathbf{x}_2(x, y) &= 2 \cdot \frac{\cosh x (\operatorname{sen} y - y \cos y)}{y^2 + \cosh^2 x} \\ \mathbf{x}_3(x, y) &= \frac{(x(y^2 + \cosh^2 x) - \operatorname{senh}(2x))}{y^2 + \cosh^2 x}. \end{aligned}$$

Esto coincide con la expresión dada en [Eis60]. Tengamos en cuenta que nada sugiere que la correspondencia entre los puntos de una superficie pseudo-esférica y los puntos de la transformación de Bianchi de esa superficie sea uno a uno. Evidentemente la transformación de Bianchi de la pseudo-esfera es una superficie complicada, que posee auto-intersecciones y es también conocida como superficie de Kuen. En la figura 3.10 se busca mostrar desde distintos puntos de vista a la superficie de Kuen,

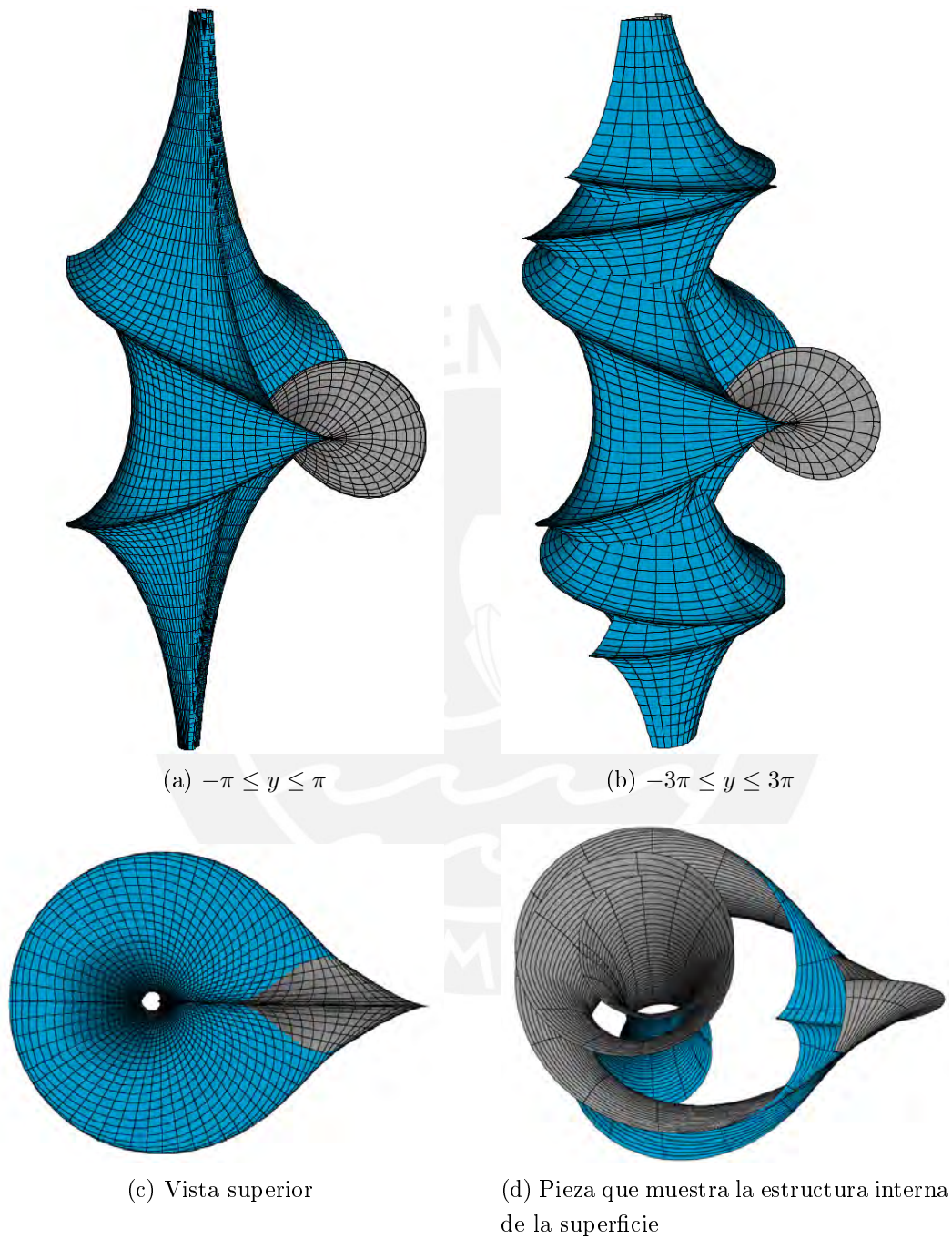


Figura 3.10: Superficie de Kuen

3.4.3 Generalización de Bäcklund

El geómetra sueco Bäcklund hizo una simple pero muy importante generalización de la transformación de Bianchi. Él mostró que si se relaja el requisito de que los planos tangentes a S y \tilde{S} , en los puntos correspondientes, sean perpendiculares y en su lugar se requeriría que los planos se encuentren en algún ángulo constante ζ , entonces \tilde{S} todavía podría verse obligada a ser una superficie pseudo-esférica eligiendo la longitud de la recta que une los puntos correspondientes para que sea una constante que depende de ζ , en lugar de tener longitud a como en el caso de la transformación de Bianchi.

Podemos obtener este resultado de una manera análoga a la que empleamos para obtener la transformación de Bianchi. Podemos escribir

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + L \cos \alpha \mathbf{A} + L \sin \alpha \mathbf{B}, \quad (3.62)$$

donde L es alguna constante, que representa la longitud de la recta que une los puntos correspondientes, y como antes obtenemos expresiones para $\tilde{\mathbf{x}}_x$ y $\tilde{\mathbf{x}}_y$. El hecho de que la recta que une los puntos correspondientes sea tangente a \tilde{S} implica

$$\begin{aligned} (\alpha_x + \theta_y)L \cos \theta \sin \alpha + (\alpha_y + \theta_x)L \sin \theta \cos \alpha + \\ + \cos^2 \alpha \sin^2 \theta - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

El requisito de que los planos tangentes se encuentren en el ángulo constante ζ puede expresarse como $\langle \mathbf{D}, \tilde{\mathbf{x}}_x \times \tilde{\mathbf{x}}_y \rangle = 0$, donde $\mathbf{D} = \mathbf{C} - \cot \zeta (\sin \alpha \mathbf{A} - \cos \alpha \mathbf{B})$, es decir

$$\begin{vmatrix} -\cot \zeta \sin \alpha & \cot \zeta \cos \alpha & 1 \\ \cos \theta - L \sin \alpha (\alpha_x + \theta_y) & L \cos \alpha (\alpha_x + \theta_y) & \frac{L}{a} \cos \alpha \sin \theta \\ -L \sin \alpha (\alpha_y + \theta_x) & \sin \theta + L \cos \alpha (\alpha_y + \theta_x) & -\frac{L}{a} \sin \alpha \cos \theta \end{vmatrix} = 0$$

el cual resulta

$$\begin{aligned} (\alpha_x + \theta_y)(-L \sin \theta \sin \alpha) + (\alpha_y + \theta_x)(L \cos \theta \cos \alpha) + \\ + \cos \theta \sin \theta + \frac{L}{a} \cot \zeta \sin \alpha \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Resolviendo el sistema (3.63) y (3.64) tenemos

$$\alpha_x + \theta_y = \frac{1}{L} \sin \alpha \cos \theta + \frac{1}{a} \cot \zeta \cos \alpha \sin \theta \quad (3.65)$$

$$\alpha_y + \theta_x = -\frac{1}{L} \cos \alpha \sin \theta - \frac{1}{a} \cot \zeta \sin \alpha \cos \theta. \quad (3.66)$$

Viendo esto como un sistema para α , con θ una solución dada por (3.40), debemos verificar la condición de compatibilidad $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$. Encontramos, usando el hecho de que θ satisface la ecuación (3.40), que:

$$\alpha_{xy} - \alpha_{yx} = \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{a^2 \sin^2 \zeta} - \frac{1}{L^2} \right), \quad (3.67)$$

por lo que la compatibilidad requiere que $L^2 = a^2 + \sin^2 \zeta$, por tanto tomamos $L = a \sin \zeta$, con esta elección de L el sistema (3.65) y (3.66) se transforman en:

$$\alpha_x + \theta_y = \frac{1}{a \sin \zeta} (\sin \alpha \cos \theta + \cos \zeta \cos \alpha \sin \theta) \quad (3.68)$$

$$\alpha_y + \theta_x = -\frac{1}{a \sin \zeta} (\cos \alpha \sin \theta + \cos \zeta \sin \alpha \cos \theta). \quad (3.69)$$

Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones de Bäcklund para la ecuación sine-Gordon. La constante ζ es conocida como parámetro de Bäcklund. Si α es la solución de las ecuaciones de Bäcklund para algunos θ y ζ específicos, entonces α es llamada la transformación de Bäcklund de θ vía el parámetro ζ . Como era de esperar, las ecuaciones de Bäcklund se reducen a las ecuaciones correspondientes de la transformada de Bianchi, esto ocurre cuando $\zeta = \pi/2$. De manera análoga, como hicimos con la transformación de Bianchi, podemos calcular la primera y segunda formas fundamentales de \tilde{S} , y encontraremos que tienen la forma apropiada para que \tilde{S} sea una superficie pseudo-esférica de la misma manera que S , y con α jugando el mismo papel en relación con \tilde{S} que θ en relación con S .

3.4.4 Superficie pulsante (Breather surface)

La superficie pulsante es una superficie de curvatura gaussiana $-1/a^2$ que corresponde a la siguiente solución de la ecuación de sine-Gordon:

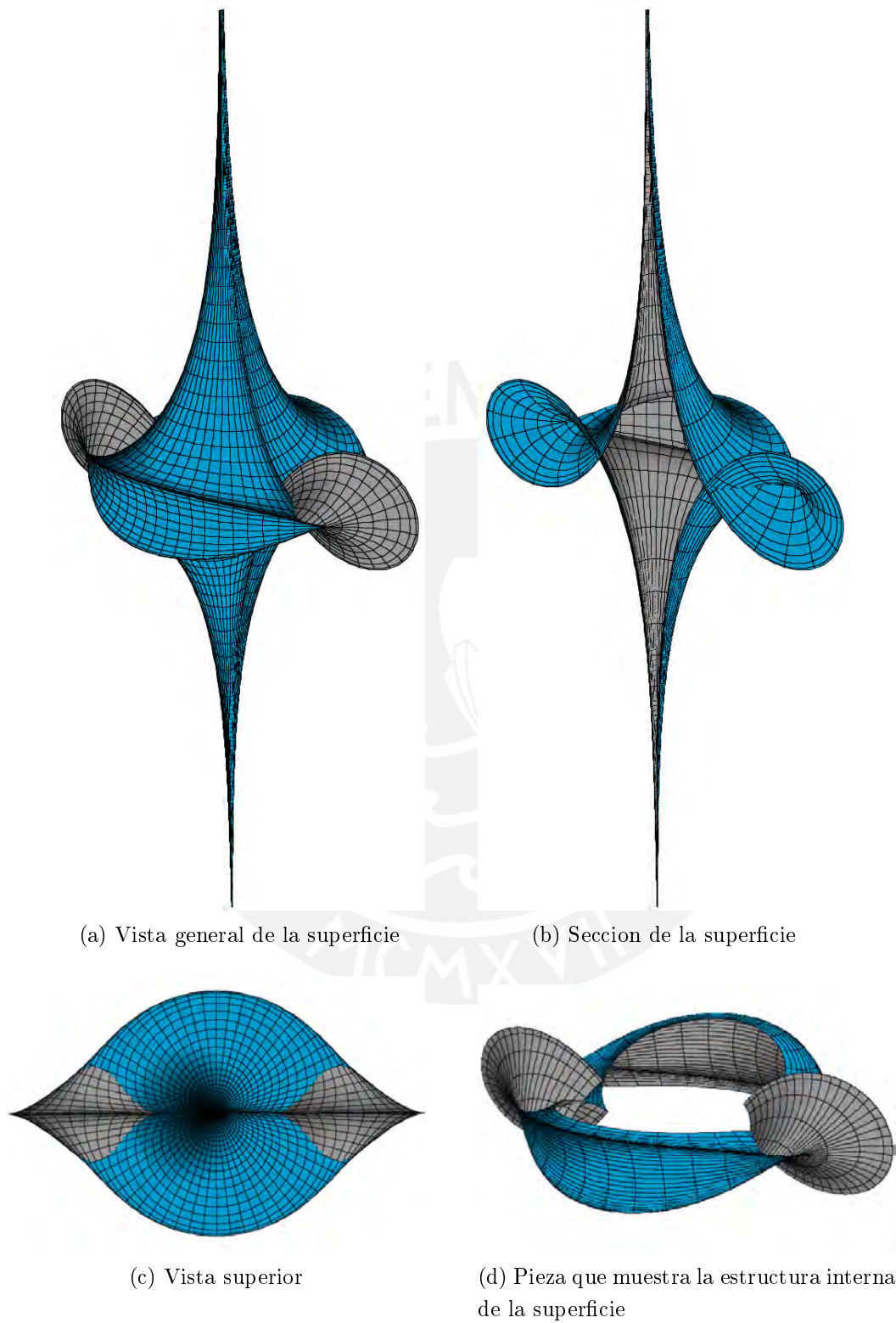
$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{1-w^2}}{w} \operatorname{sen}(wy) \operatorname{sech} \left(\sqrt{1-w^2}x \right) \right) \quad (3.70)$$

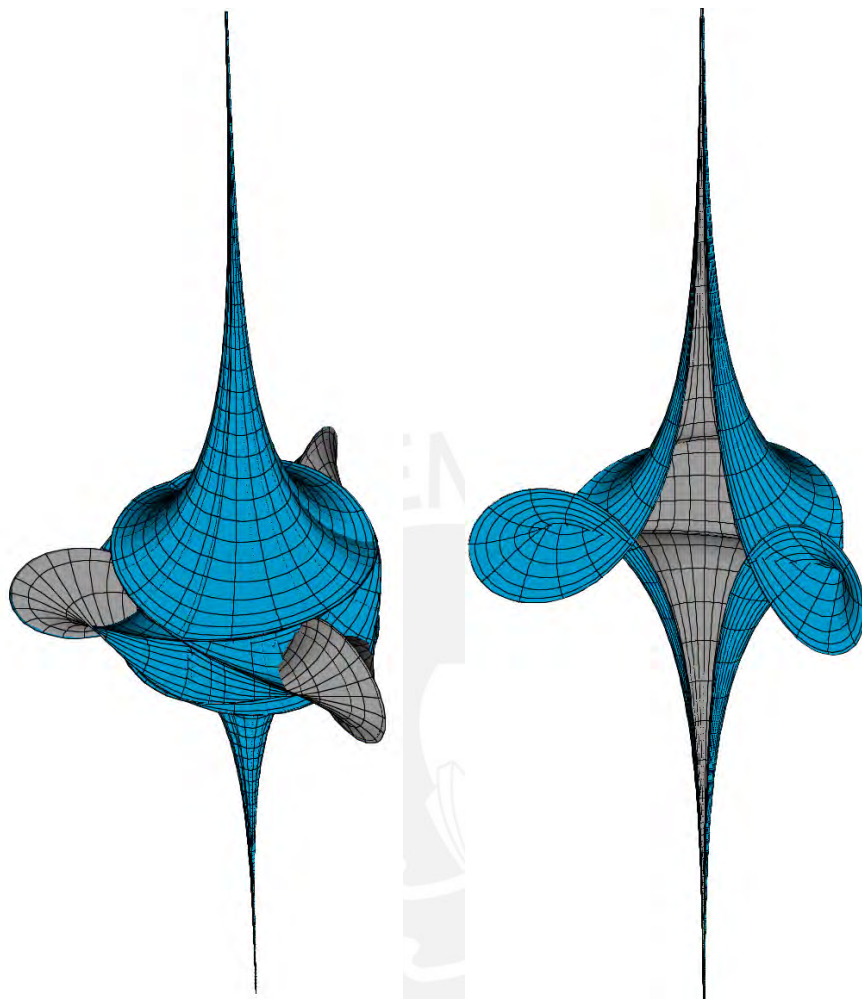
La superficie pulsante se puede parametrizar mediante $\mathbf{x}(x, y) = (\mathbf{x}_1(x, y), \mathbf{x}_2(x, y), \mathbf{x}_3(x, y))$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(x, y) &= \frac{-2aw \cosh(\sqrt{1-w^2}x) (w \cos y \cos(wy) - \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(wy))}{\sqrt{1-w^2} (w^2 \cosh^2(\sqrt{1-w^2}x) + (1-w^2) \operatorname{sen}^2(wy))}, \\ \mathbf{x}_2(x, y) &= \frac{2aw \cosh(\sqrt{1-w^2}x) (-w \operatorname{sen} y \cos(wy) + \cos y \operatorname{sen}(wy))}{\sqrt{1-w^2} (w^2 \cosh^2(\sqrt{1-w^2}x) + (1-w^2) \operatorname{sen}^2(wy))}, \\ \mathbf{x}_3(x, y) &= -ax + \frac{2aw^2 \cosh(\sqrt{1-w^2}x) \operatorname{senh}(\sqrt{1-w^2}x)}{\sqrt{1-w^2} (w^2 \cosh^2(\sqrt{1-w^2}x) + (1-w^2) \operatorname{sen}^2(wy))}. \end{aligned}$$

De la expresión anterior de la superficie obtenida no es difícil deducir que las líneas de curvatura $y = \text{const.}$ son curvas planas en el espacio. La propia superficie pseudo-esférica pulsante pertenece a la clase de superficies Joachimsthal-Enneper. Por superficie de Joachimsthal-Enneper en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 nos referimos aquí a una superficie para el cual una familia de líneas de curvatura consta de curvas planas, que se encuentran en planos que pasan por un eje fijo común general \mathcal{L} . La otra familia de líneas de curvatura consiste en “líneas esféricas”, es decir, líneas en esferas cuyos centros se encuentran en el eje \mathcal{L} . La propia superficie de Joachimsthal-Enneper interseca cada una de estas esferas a lo largo de una línea de curvatura en un ángulo de $\pi/2$. Para más detalle sobre esta clase de superficies, puede ver [KI15], [Gar05] o [Mas00].

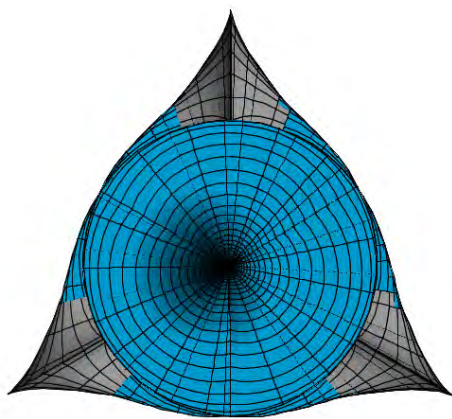
Para la realización de los gráficos presentados en este capítulo se usó el siguiente programa <https://3d-xplormath.org/TopLevel/download.html>.

Figura 3.11: Superficie pulsante, $w = 1/2$

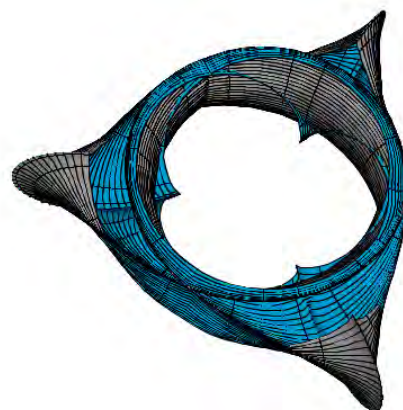


(a) Vista general de la superficie

(b) Seccion de la superficie

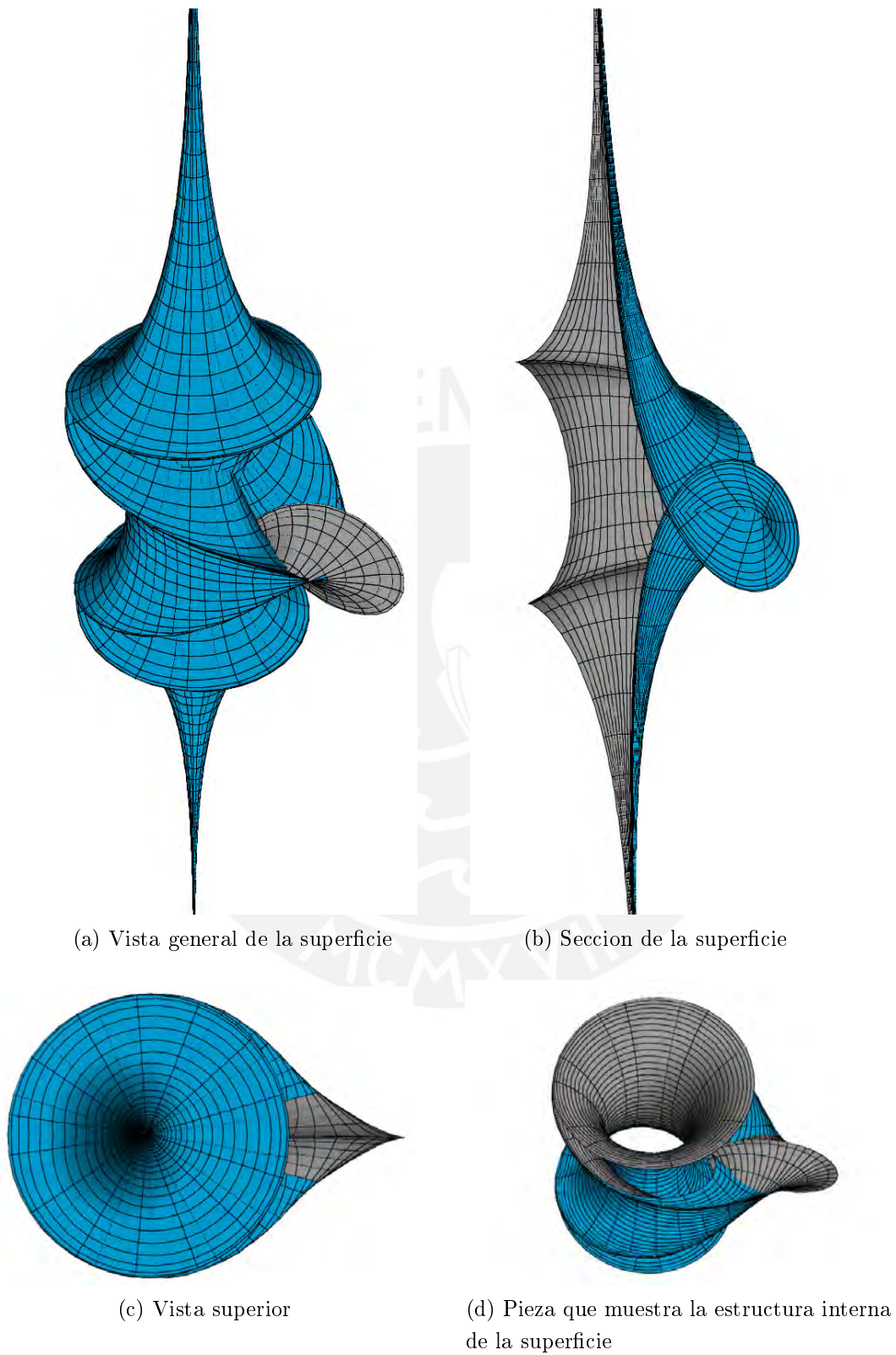


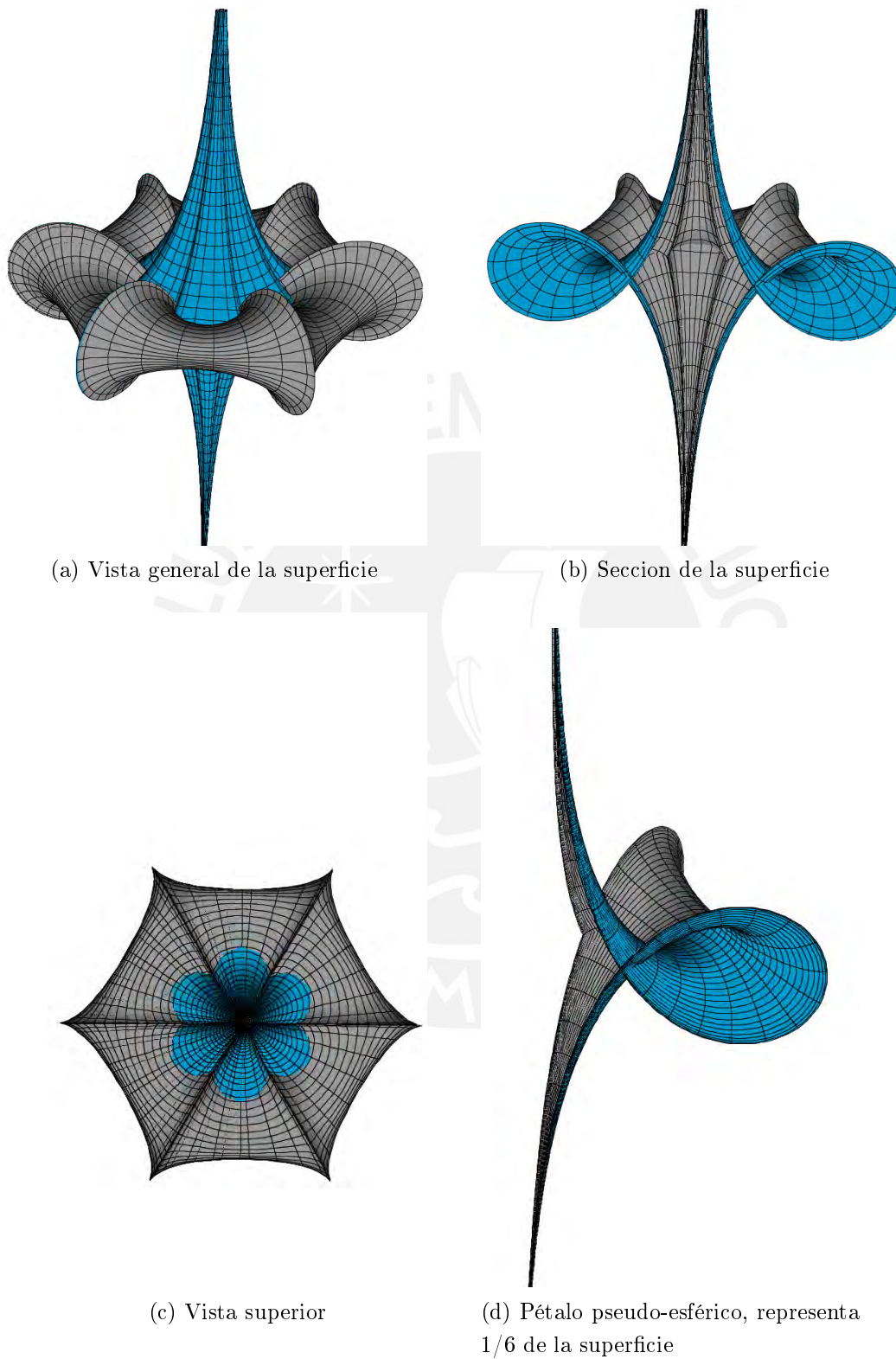
(c) Vista superior



(d) Pieza que muestra la estructura interna de la superficie

Figura 3.12: Superficie pulsante, $w = 3/7$

Figura 3.13: Superficie pulsante, $w = 1/5$

Figura 3.14: Superficie pulsante, $w = 3/7$

Capítulo 4

Imposibilidad de una inmersión isométrica de \mathbb{H}^2 en \mathbb{R}^3

In mathematics the art of proposing
a question must be held of higher
value than solving it.

Georg Cantor.

El objetivo de este capítulo es responder a las siguientes interrogantes, que surgen de manera bastante natural luego del capítulo 3. ¿Es posible encontrar una superficie completa con curvatura gaussiana constante negativa en el espacio euclidiano tridimensional? En otras palabras ¿Es posible encontrar una inmersión isométrica de todo el plano hiperbólico en el espacio euclidiano tridimensional? ¿Qué tan esencial es la condición de tener una curvatura gaussiana constante? A lo largo de este capítulo iremos respondiendo estas interrogantes, mostrando resultados como el teorema de Hilbert y el teorema de Efimov, así mismo también daremos paso a nuevas interrogantes acerca de la realización del plano hiperbólico.

4.1 Teorema de Hilbert

Dedicamos esta sección a probar el siguiente teorema

Teorema 4.1.1 (Hilbert, 1901). *Una variedad riemanniana bidimensional completa con curvatura constante negativa, no puede ser inmersa isométricamente en \mathbb{R}^3 .*

Este teorema garantiza la inexistencia de una geometría de Lobachevsky para superficies completas inmersas isométricamente en \mathbb{R}^3 . Veremos además las diferentes demostraciones del Teorema de Hilbert, cabe resaltar que esencialmente sólo hay dos demostraciones diferentes, la de David Hilbert [Hil01], y la de M. Erik Holgrem [Hol02]. Las demás demostraciones que se pueden encontrar difieren poco de las anteriormente mencionadas, ver por ejemplo [PdC16], [PdC15], [Spi99a], [Mil72] y [Sto89]. Todos ellos, a pesar de usar diferentes técnicas, aprovecharon la posibilidad de parametrizar una superficie completa, con curvatura gaussiana constante negativa, por curvas asintóticas formando una red de Tchebycheff. Y también usaron la ecuación de sine-Gordon, $\omega_{uv} = \sin \omega$ donde $\omega(u, v)$ representa el ángulo entre las curvas asintóticas, la cual está estrechamente relacionada con superficies de curvatura gaussiana constante negativa, como se vio en el capítulo 3. En la sección 1.3.1 observamos que ninguna de las superficies pseudo-esféricas clásicas, de curvatura $K_{const.} = -1$, que consideramos en la sección 3.3 puede servir como ejemplo de realización en \mathbb{R}^3 del plano hiperbólico completo \mathbb{H}^2 . En tales superficies, solo se puede lograr una realización parcial del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , que refleja la geometría de algunos de sus sub-dominios individuales: horodisco, franja equidistante, etc., que no puede extenderse más allá de las singularidades que surgen en la superficie: bordes irregulares, puntos pico, etc. Geométricamente, la “no extensibilidad” antes mencionada significa intuitivamente que es imposible extender continuamente una superficie de curvatura gaussiana constante negativa más allá de una singularidad de tal manera que el plano tangente a la superficie también varíe de manera continua. En primer lugar, podemos suponer sin pérdida de generalidad que tenemos una superficie S tiene curvatura gaussiana igual a -1 , bastaría multiplicar el producto interno por un factor constante. Además de la proposición 1.2.3 tenemos que para cada $p \in S$, la aplicación $\exp_p : T_p S \rightarrow S$ es un difeomorfismo local, que induce un producto interno en $T_p S$:

$$\langle v, w \rangle_q := \langle d(\exp_p)_q(v), d(\exp_p)_q(w) \rangle_{\exp_p(q)}$$

tenemos que este producto interno está bien definido, pues siendo \exp_p un difeomorfismo local, la aplicación $d(\exp_p)_q : (T_p S)_q \approx T_p S \rightarrow T_{\exp_p(q)} S$ es un isomorfismo para todo $q \in T_p S$.

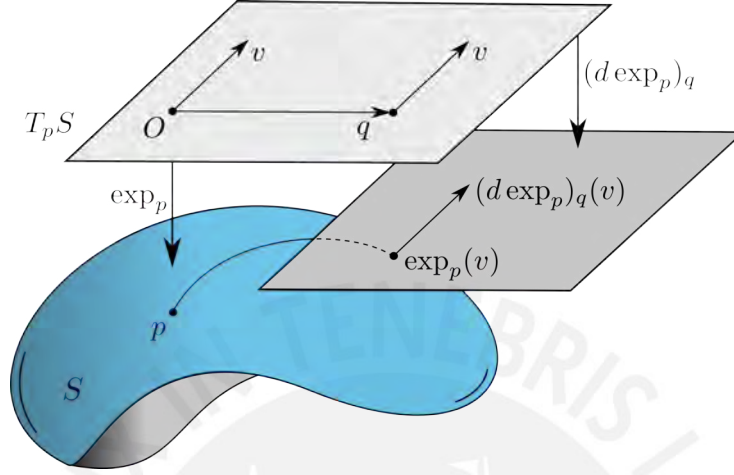


Figura 4.1: Aplicación $d(\exp_p)_q$

Sea \tilde{S} la variedad riemanniana $T_p S$ con este producto interno. Tenemos que si $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión isométrica, también lo es $\psi = \varphi \circ \exp_p : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$. De hecho, sean $q \in T_p S$, $v \in (T_p S)_q \approx T_p S$, por la regla de la cadena

$$d\psi_q(v) = d(\varphi \circ \exp_p)_q(v) = d\varphi_{\exp_p(q)}(q) \cdot d(\exp_p)_q(v).$$

Por tanto, para todo $q \in T_p S$, $v, w \in (T_p S)_q \approx T_p S$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle d\psi_q(v), d\psi_q(w) \rangle_{\psi(q)} &= \left\langle d\varphi_{\exp_p(q)}(q) \cdot d(\exp_p)_q(v), d\varphi_{\exp_p(q)}(q) \cdot d(\exp_p)_q(w) \right\rangle_{\varphi \circ \exp_p(q)} \\ &= \langle d(\exp_p)_q(v), d(\exp_p)_q(w) \rangle_{\exp_p(q)} \\ &= \langle v, w \rangle_q. \end{aligned}$$

Con el producto interno en \tilde{S} y el teorema Egregium de Gauss se concluye que la curvatura de \tilde{S} es -1 . Ahora, solo basta probar que no existe una inmersión isométrica $\psi : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un plano \tilde{S} , con un producto interno tal que $K = -1$ en \mathbb{R}^3 .

De esta manera podemos enunciar el teorema de Hilbert de la siguiente manera:

Teorema (Hilbert, 1901). *Una variedad riemanniana S , con curvatura constante negativa igual a -1 , no puede ser inmersa isométricamente en \mathbb{R}^3 .*

Admitamos la existencia de una inmersión isométrica $\psi : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde \tilde{S} es una variedad riemanniana bidimensional homeomorfa a un plano y con curvatura gaussiana $K = -1$. A fin de evitar las dificultades asociadas a posibles auto-intersecciones en $\psi(\tilde{S})$, trabajaremos con \tilde{S} y usaremos la inmersión ψ para inducir en \tilde{S} la geometría extrínseca local de $\psi(\tilde{S}) \subset \mathbb{R}^3$. Concretamente, al ser ψ una inmersión, para cada $p \in \tilde{S}$ existe un entorno $\tilde{V} \subset \tilde{S}$ de p tal que la restricción $\psi|_{\tilde{V}} = \tilde{\psi}$ es un difeomorfismo. En cada $\tilde{\psi}(q) \in \tilde{\psi}(\tilde{V})$, existen por ejemplo dos direcciones asintóticas. Por medio de $\tilde{\psi}$, estas direcciones inducen dos direcciones en $q \in \tilde{S}$, que se denominan las direcciones asintóticas de \tilde{S} en q . de esta manera, tiene sentido hablar de curvas asintóticas en \tilde{S} , y el mismo procedimiento se puede aplicar a cualquier otra entidad local de $\psi(\tilde{S})$.

Teorema 4.1.2. *Existe una parametrización global $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{S}$, tal que las curvas coordenadas de \mathbf{x} , son curvas asintóticas y constituyen una red de Tchebycheff.*

Con el fin de demostrar este resultado, tomemos un punto $p_0 \in \tilde{S}$. Como $K(p_0) < 0$, entonces existen dos direcciones asintóticas v_1 y v_2 . Consideremos $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \tilde{S}$ la curva asintótica parametrizada por longitud de arco, con $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha'(0) = v_1$.

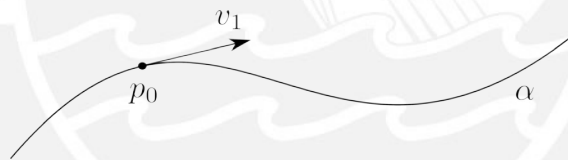


Figura 4.2: Curva asintótica $\alpha(u)$

Notemos que α está definida para todo \mathbb{R} . Supongamos que existe u_1 tal que $\alpha(u)$ está definido para todo $u < u_1$. Sea $q = \lim_{u \rightarrow u_1} \alpha(u)$, por la completitud de \tilde{S} tenemos que $q \in \tilde{S}$. Por el lema 3.1.7, tenemos que α, β y γ son curvas asintóticas

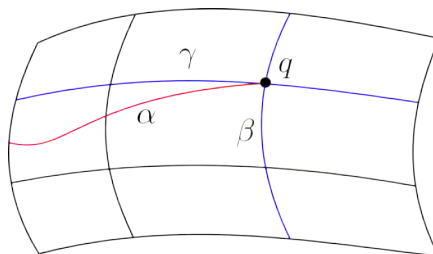


Figura 4.3: Buena definición de $\alpha(u)$

pero como sabemos únicamente pasan dos curvas asintóticas entonces sin pérdida de generalidad $\beta = \alpha$. Entonces α puede ser extendido, en consecuencia $\alpha(u_1)$ está bien definido.

Sea $W(0) = v_2$ el vector, unitario, asintótico en $\alpha(0) = p_0$ linealmente independiente con $\alpha'(0) = v_1$, y sea $W(u)$ el único campo continuo a lo largo de α tal que $W(u) \in T_{\alpha(u)}\tilde{S}$ es un vector, unitario, asintótico linealmente independiente con $\alpha'(u)$.

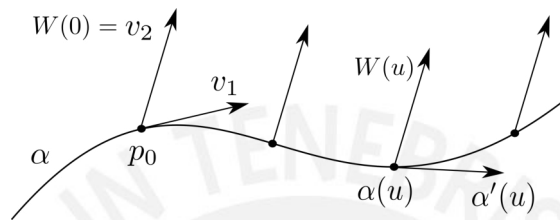


Figura 4.4: Campo de vectores $W(u)$

El campo de vectores W a lo largo de α es sólo una herramienta que nos permite distinguir una dirección para cada valor del parámetro de α .

Ahora definamos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \tilde{S} \\ (u, v) &\mapsto \mathbf{x}(u, v) := \gamma_u(v) \end{aligned}$$

donde cada γ_u es la única curva asintótica parametrizada por longitud de arco con $\gamma_u(0) = \alpha(u)$ y $\gamma'_u(0) = W(u)$.

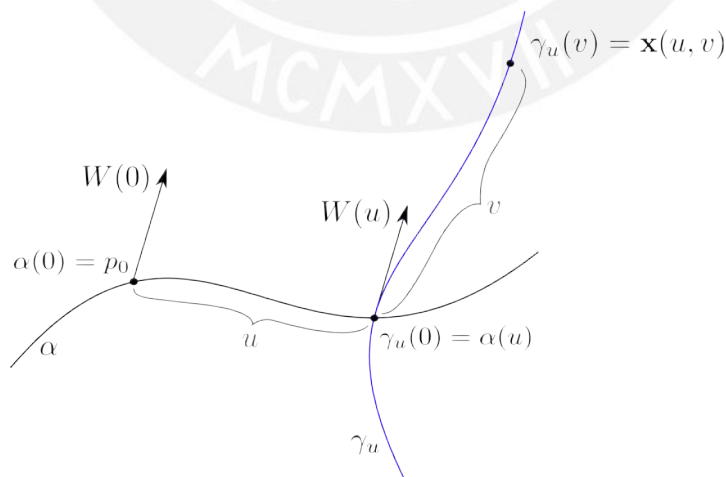


Figura 4.5: Definición de la parametrización \mathbf{x}

Tenemos que probar que \mathbf{x} es realmente una parametrización de \tilde{S} . Para ello procederemos mediante una serie de lemas.

Lema 4.1.3. *Para un v fijo, la curva $\mathbf{x}(u, v)$, $-\infty < u < \infty$, es una curva asintótica, cuya longitud de arco es u .*

Demostración. En virtud del lema 3.1.7, para cada $\mathbf{x}(u, v) \in \tilde{S}$ existe una red de Tchebycheff parametrizada por longitud de arco $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \tilde{S}$, con $h(0, 0) = \mathbf{x}(u, v)$, alrededor del punto $\mathbf{x}(u, v)$. A partir de la definición de \mathbf{x} al menos queda claro la siguiente observación:

Observación 4.1.4. Si para algún $v_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ la curva coordenada $u \mapsto h(u, v_0)$ se encuentra a lo largo de la curva coordenada $u \mapsto \mathbf{x}(u, \bar{v})$, entonces *todas* las curvas coordenadas $u \mapsto h(u, v_0)$ se encuentran a lo largo de las curvas coordenadas de \mathbf{x} . En efecto, sea $u \mapsto h(u, \bar{v})$ con $-\varepsilon < \bar{v} < \varepsilon$ una curva coordenada y sea además $k = \bar{v} - v_0$. Como las curvas coordenadas forman una red de Tchebycheff tenemos que $u \mapsto h(u, \bar{v})$ se encuentra a lo largo de la curva coordenada $u \mapsto \mathbf{x}(u, \tilde{v} + k)$.

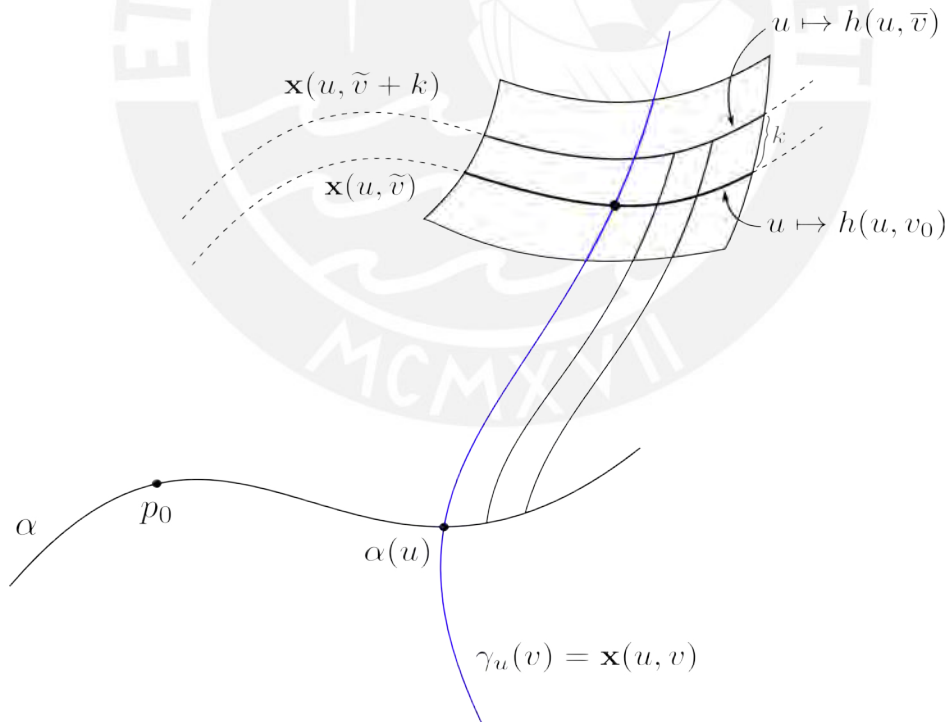


Figura 4.6: Curva coordenada $u \mapsto h(u, v_0)$

Sea ahora $\mathbf{x}(u_1, v_1) \in \tilde{S}$, un punto arbitrario. Por la compacidad del segmento $\{\mathbf{x}(u_1, v) : 0 \leq v \leq v_1\}$ es posible encontrar un número finito de redes de Tchebycheff h_1, \dots, h_n cuyas imágenes cubren $\{\mathbf{x}(u_1, v) : 0 \leq v \leq v_1\}$. Ordenando las funciones h_j 's como en la figura 4.7, esas imágenes consecutivas se superponen, notando que $u \mapsto \mathbf{x}(u, 0)$ es por definición una curva asintótica y aplicando la observación 4.1.4 repetidamente vemos que $u \mapsto \mathbf{x}(u, v_1)$ es una curva asintótica en un entorno de u_1 . Como (u_1, v_1) era arbitrario, esto concluye la prueba del lema.

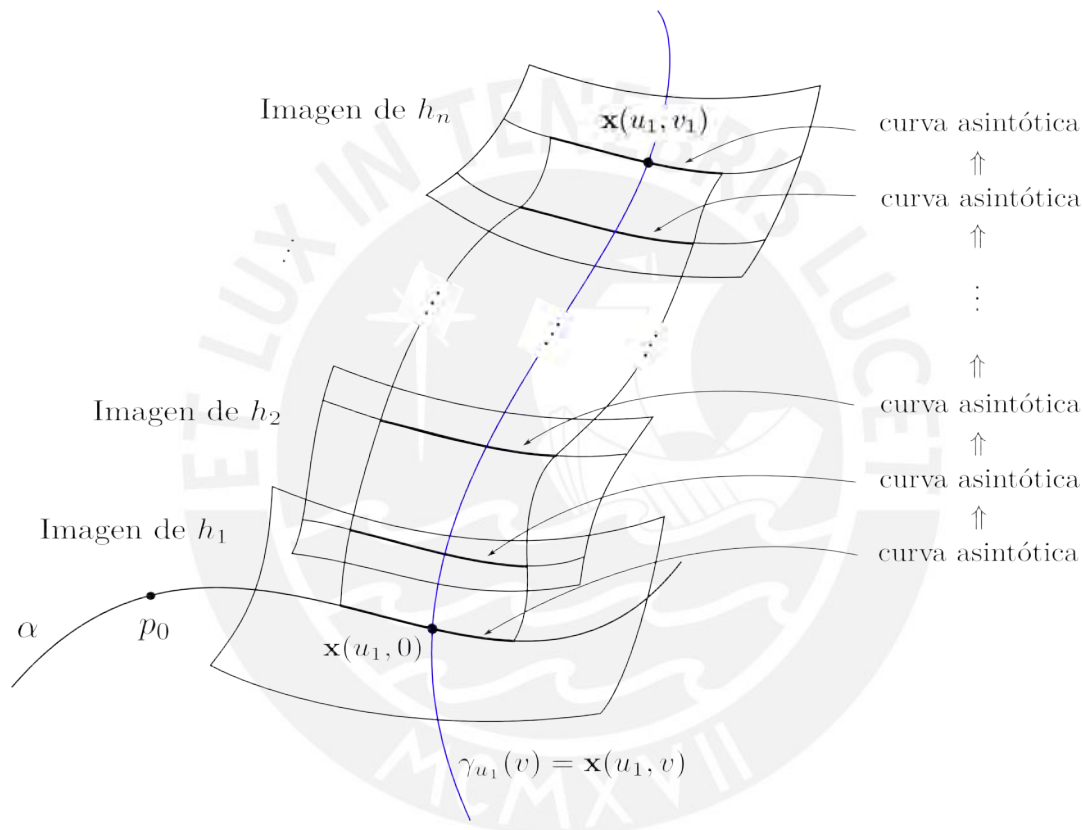


Figura 4.7: Imágenes consecutivas de las funciones h_j 's

□

Lema 4.1.5. $\mathbf{x}(u, v)$ es un difeomorfismo local.

Demostración. Dado $q \in \mathbb{R}^2$, tenemos $d\mathbf{x}_q : T_q\mathbb{R}^2 \rightarrow T_p\tilde{S} \approx \tilde{S}$. Como $d\mathbf{x}_q = [\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_v]$ es inyectiva dado que $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$. Además $\dim T_p\mathbb{R}^2 = 2 = \dim T_p\tilde{S} = \dim \tilde{S}$. Entonces $d\mathbf{x}_q$ es un isomorfismo para todo $q \in \mathbb{R}^2$. Por el teorema de la función inversa existe una vecindad $V \subset \mathbb{R}^2$ de p tal que $\mathbf{x}|_{V \cap U} : V \cap U \rightarrow \mathbf{x}(V \cap U)$ es un difeomorfismo local. □

Lema 4.1.6. $\mathbf{x}(u, v)$ es sobreyectiva.

Demostración. Sea $Q = \mathbf{x}(\mathbb{R}^2)$, como \mathbf{x} es un difeomorfismo local, entonces Q es un abierto de \tilde{S} , en efecto para cada $p \in \mathbb{R}^2$, existe $V_p \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{x}|_{V_p}$ es un difeomorfismo local, entonces $\mathbf{x}(\mathbb{R}^2) = \mathbf{x}\left(\bigcup_{p \in \mathbb{R}^2} V_p\right) = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^2} \mathbf{x}(V_p)$ el cual es abierto.

Recordamos además del lema 3.1.7 que si $q = \mathbf{x}(u_0, v_0)$, entonces las curvas asintóticas que pasan por q están contenidas completamente en $Q = \mathbf{x}(\mathbb{R}^2)$. Supongamos que $Q \neq \tilde{S}$. como \tilde{S} es conexa y Q es abierto no vacío tenemos que $\partial Q \neq \emptyset$ pues de lo contrario Q sería cerrado y por tanto $Q = \tilde{S}$. Tomemos $p \in \partial Q$, además $p \notin Q$ (Q es abierto). Consideremos un entorno \mathcal{R} de p en el cual las curvas asintóticas formen una red de Tchebycheff. Sea $q \in Q \cap \mathcal{R}$.

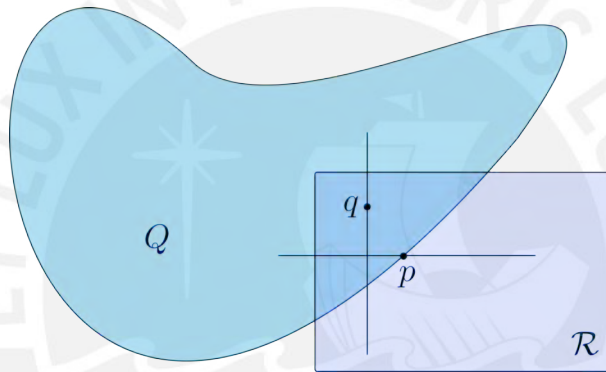


Figura 4.8: Entorno \mathcal{R} .

Entonces una de las curvas asintóticas que pasa por q interseca a una de las curvas asintóticas que pasa por p lo que contradice el hecho de que las curvas coordenadas que pasan por un punto q de Q están completamente contenidas en Q . \square

Proposición 4.1.7. La aplicación \mathbf{x} es cerrada.

Demostración. Supongamos que $Y \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado pero $\mathbf{x}(Y)$ no lo es. Entonces existe una sucesión z_n cuyo límite $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ está en Y , pero $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(z_n)$ no está en $\mathbf{x}(Y)$. Consideramos un conjunto compacto $C \subset \mathbb{R}^2$ que contiene la sucesión z_n . El lema de la aplicación cerrada establece que una función continua de un conjunto compacto a un espacio de Hausdorff es cerrada, entonces \mathbf{x} restringida a C es una aplicación cerrada. Por tanto $\mathbf{x}(C \cap Y)$ es cerrada. En particular, $z_n \in C \cap Y$, entonces tenemos que $\mathbf{x}(z_n) \in \mathbf{x}(C \cap Y)$ y además $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(z_n) \in \mathbf{x}(Y)$. \square

Como tenemos que \mathbf{x} es un difeomorfismo local sobreyectivo, es suficiente probar que \mathbf{x} es inyectivo.

Proposición 4.1.8. *La aplicación \mathbf{x} inyectivo*

Demostración. Como \mathbf{x} es un difeomorfismo local sobreyectivo cerrado, entonces por la proposición 1.2.6 tenemos que \mathbf{x} tiene la propiedad de levantamiento de camino único. Luego como \mathbb{R}^2 es conexo por caminos y S' es homeomorfo a un plano, entonces es simplemente conexo, luego por la proposición 1.2.5 tenemos que \mathbf{x} es un homeomorfismo y en consecuencia \mathbf{x} es inyectivo. \square

En consecuencia de estos lemas tenemos que $\mathbf{x}(u, v)$ es una red de Tchebycheff global de \tilde{S} . Lo cual prueba el teorema 4.1.2.

4.1.1 Primera demostración

En esta subsección, presentamos una demostración del teorema de Hilbert que fue originalmente hecha por M. Erik Holmgren en 1902, ver [Hol02], cuya idea central fue utilizada posteriormente por Tilla Klotz Milnor [Mil72], ver también [Spi99a] y [Sto89]. Esta demostración depende esencialmente de dos resultados:

- (A) Supongamos que S puede ser inmersa en \mathbb{R}^3 . Entonces existe una red de Tchebycheff global $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de todo el plano \mathbb{R}^2 en S y una función ω definida en todo \mathbb{R}^2 , que da el ángulo entre las curvas coordenadas, que son en realidad curvas asintóticas, satisfaciendo:

$$\omega_{uv} = \text{sen } \omega, \quad 0 < \omega < \pi.$$

- (B) No existe función $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\omega_{uv} = D \text{sen } \omega, \quad 0 < \omega < \pi,$$

donde $D > 0$ es una constante cualquiera.

Demostración de (A). Este resultado se sigue inmediatamente del teorema 4.1.2 y del lema 3.1.8. \square

Demostración de (B). Supongamos que tenemos una función $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface

$$\omega_{uv} = D \text{sen } \omega, \quad 0 < \omega < \pi, \tag{4.1}$$

para una constante $D > 0$. Luego en particular tenemos que $\omega_{uv}(u, v) > 0$ en \mathbb{R}^2 . Lo cual implica que $\omega_u(u, v)$ como función de v es creciente, es decir

$$\omega_u(u, v) > \omega_u(u, 0) \quad \text{para } v > 0. \quad (4.2)$$

Como no podemos tener $\omega_u(u, v) = 0$ en todas partes, podemos asumir, cambiando nuestras coordenadas por una traslación de ser necesario, que $\omega_u(0, 0) \neq 0$. Como la aplicación $(u, v) \mapsto \omega(-u, -v)$ también satisface la ecuación (4.1), incluso podemos asumir que $\omega_u(0, 0) > 0$. Tomemos ahora tres números fijos $0 < u_1 < u_2 < u_3$ tales que $\omega_u(u, 0) > 0$ para $0 \leq u \leq u_3$. Luego sean $\omega_1 = \omega(u_1, 0) - \omega(0, 0) > 0$, $\omega_2 = \omega(u_3, 0) - \omega(u_2, 0) > 0$ y ω se encuentra en cualquier caso entre 0 y π , luego se sigue que el menor de ω_1 y ω_2 es positivo y además menor que $\pi/2$. Sea $\varepsilon = \min\{\omega_1, \omega_2\} < \pi/2$.

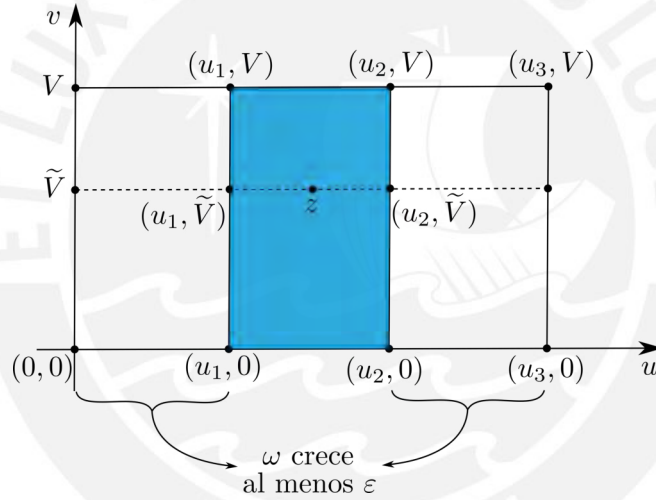


Figura 4.9: ω crece al menos $\varepsilon = \min\{\omega_1, \omega_2\}$

Como $\omega_u(u, v)$ es creciente en v y positivo en $[0, u_3]$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \omega(u_3, V) - \omega(u_2, V) &= \int_{u_2}^{u_3} \omega_u(u, v) du \\ &> \int_{u_2}^{u_3} \omega_u(u, 0) du \\ &= \omega(u_3, 0) - \omega(u_2, 0) \\ &\geq \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(u_1, V) - \omega(0, V) &= \int_0^{u_1} \omega_u(u, v) du \\
&> \int_0^{u_1} \omega_u(u, 0) du \\
&= \omega(u_1, 0) - \omega(0, 0) \\
&\geq \varepsilon
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos $\omega(u_1, V) > \varepsilon + \omega(0, V) > \varepsilon$ y $\omega(u_2, V) < \omega(u_3, V) - \varepsilon < \pi - \varepsilon$. Como V es constante y fue escogida de manera arbitraria, se sigue para un punto $z = (u, v)$ en cualquier rectángulo sobre el segmento $[u_1, u_2]$ que

$$\varepsilon < \omega(u, \tilde{V}) < \omega(u, v) < \omega(u_2, \tilde{V}) < \pi - \varepsilon.$$

En consecuencia para $u \in [u_1, u_2]$ y $v > 0$ tenemos $\varepsilon < \omega(u, v) < \pi - \varepsilon$, entonces $\operatorname{sen} \omega(u, v) > \operatorname{sen} \varepsilon$. Ahora integrando la ecuación (4.1) sobre el rectángulo $[u_1, u_2] \times [0, V]$. Obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^V \int_{u_1}^{u_2} \omega_{uv} dudv &= D \int_0^V \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{sen} \omega(u, v) dudv \\
\omega(u_2, V) - \omega(u_1, V) - \omega(u_2, 0) + \omega(u_1, 0) &> D \int_0^V \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{sen} \varepsilon dudv \\
\omega(u_2, V) - \omega(u_1, V) - \omega(u_2, 0) + \omega(u_1, 0) &> (D)(V)(u_2 - u_1) \operatorname{sen} \varepsilon
\end{aligned}$$

Tomando por ejemplo $V \geq \frac{2\pi}{D(u_2 - u_1) \operatorname{sen} \varepsilon}$ obtenemos una contradicción. \square

4.1.2 Segunda demostración

En esta subsección, presentaremos la demostración del teorema de Hilbert que puede ser encontrada en el libro de Manfredo Perdigão do Carmo [PdC16], o de James Johnston Stoker [Sto89]. La parte local de esta demostración es esencialmente igual a la del trabajo original de Hilbert [Hil01], pero la parte global sin embargo es notablemente diferente. Esta demostración trata de la existencia de una parametrización de una superficie completa S , con curvatura gaussiana constante negativa, por curvas asintóticas. También se usa el hecho de que la superficie en cuestión es en realidad una variedad de Hadamard, que tiene área infinita. Sin embargo, con la posibilidad de parametrizar la superficie mediante curvas asintóticas, obtenemos que tiene un área finita, con lo cual tenemos una contradicción.

Proposición 4.1.9. *Toda variedad de Hadamard M tiene área infinita.*

Demostración. Sean $p \in M$ y $v \in T_pM$. El teorema de existencia y unicidad de las EDO's garantiza la existencia de una única geodésica γ que pasa por p con velocidad v , es decir $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$.

Por el teorema de Hadamard 1.3.8 tenemos que $\exp_p : T_pM \rightarrow M$ es difeomorfismo, entonces este induce un producto interno en T_pM . Escribimos en coordenadas cartesianas (u, v) la primera forma fundamental como

$$I = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2.$$

Para escribir I en coordenadas polares hacemos $u = r \cos \theta$ y $v = r \sin \theta$, así

$$\begin{aligned} du &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ du^2 &= \cos^2 \theta dr^2 - 2r \sin \theta \cos \theta dr d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2. \end{aligned}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned} dv &= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \\ dv^2 &= \sin^2 \theta dr^2 + 2r \sin \theta \cos \theta dr d\theta + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2. \end{aligned}$$

De donde notamos que $\bar{E}(r, \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, $\bar{F}(r, \theta) = 0$ y $\bar{G}(r, \theta) = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$. De modo que se satisface

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{G} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{\bar{G}} \right)_r = 1.$$

Luego la curvatura gaussiana puede ser escrita como

$$K = - \frac{\left(\sqrt{\bar{G}} \right)_{rr}}{\sqrt{\bar{G}}}.$$

Como $K \leq 0$ en S , entonces $\left(\sqrt{\bar{G}} \right)_{rr} \geq 0$, es decir $\left(\sqrt{\bar{G}} \right)_r$ es una función creciente respecto de r . Por tanto $\left(\sqrt{\bar{G}} \right)_r \geq \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{\bar{G}} \right)_r = 1$, lo cual implica que $\sqrt{\bar{G}} \geq r$, para todo $r \geq 0$. Además por el teorema de Hadamard la vecindad de coordenadas polares geodésicas es global, luego

$$\text{Área}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \sqrt{\bar{G}} dr d\theta \geq \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r dr d\theta = +\infty.$$

□

Lema 4.1.10. *Sea $U \subset S$ un entorno coordinado de S tal que las curvas coordinadas son curvas asintóticas de U . Entonces el área de cualquier cuadrilátero formado por las curvas coordinadas es menor que 2π .*

Demostración. Dado un rectángulo \mathcal{R} descrito en S por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, Hartman y Wintner mostraron que la integral para el área de \mathcal{R} está dada por, ver [HW51],

$$\int_c^d \int_a^b \operatorname{sen} w \, dx dy = w(a, c) - w(a, d) + w(b, d) - w(b, c). \quad (4.3)$$

Por tanto, en virtud del teorema de Hazzidakis 3.1.9 con $K_{const.} = -1$, tenemos

$$\text{área}(\mathcal{R}) = \int_{\Omega} dA = - \int_{\Omega} K \, dA = \sum_{j=1}^4 \alpha_j - 2\pi < 2\pi$$

pues $\alpha_j < \pi$, para $j = 1, 2, 3, 4$. □

Demostración del Teorema de Hilbert

Supongamos que existe una inmersión isométrica $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde S es una superficie completa con curvatura gaussiana $K_{const.} = -1$. Sea $p \in S$ y denotemos por \tilde{S} el plano tangente a S en el punto p dotado del producto interno inducido por el difeomorfismo local $\exp_p : T_p S \rightarrow S$. Entonces $\psi = \varphi \circ \exp_p : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión isométrica, el teorema 4.1.2 muestra la existencia de una parametrización $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{S}$ de todo \tilde{S} , tal que las curvas coordinadas de \mathbf{x} son curva asintóticas en \tilde{S} . De esta manera, podemos cubrir \tilde{S} por una unión de cuadrilátero coordinados Q_n con $Q_n \subset Q_{n+1}$, por ejemplo podemos escribir $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) \times (-n, n)$. Definamos $Q_n = \mathbf{x}((-n, n) \times (-n, n))$. Es claro que $Q_n \subset Q_{n+1}$. Además tenemos que

$$\tilde{S} = \mathbf{x}(\mathbb{R}^2) = \mathbf{x} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) \times (-n, n) \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{x}((-n, n) \times (-n, n)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n.$$

Por el lema 4.1.10, el área de cada Q_n es menor que 2π . Pero por otro lado, la proposición 4.1.9 concluye que el área de \tilde{S} es ilimitada, lo cual nos conduce a una contradicción.

El teorema de Hilbert da respuesta negativa a la propuesta de una realización del plano hiperbólico en el espacio euclidiano tridimensional. Entonces surge una

pregunta de manera natural ¿podemos generalizar este teorema? para tratar de responder a esta pregunta en primer lugar debemos fijar cómo deseamos hacer dicha generalización, en la siguiente sección trataremos de debilitar las hipótesis del teorema de Hilbert, mientras que en el siguiente capítulo trataremos de ver si el teorema de Hilbert puede ser generalizado en dimensión.

4.2 Teorema de Efimov

Esta sección busca responder a las siguientes preguntas ¿es realmente esencial que la curvatura gaussiana sea constante como hipótesis en el teorema de Hilbert? ¿Es posible dilatar las hipótesis del teorema de Hilbert de modo que la conclusión siga siendo válida? Encontraremos la respuesta a la primera pregunta en los ejemplos 4.2.7 y 4.2.8 que veremos más adelante.

Siendo así, el objetivo principal de esta sección demostrar el problema de Hilbert & Cohn-Vossen, que fue conjeturado en 1936 por Cohn-Vossen en [CV36] y demostrado en 1964 por Nikolai Vladimirovich Efimov en [Efi64]. Cohn-Vossen conjeturó que el teorema de Hilbert puede ser generalizado a superficies con curvatura gaussiana no constante, pero acotada superiormente por una cantidad estrictamente negativa, es decir $K \leq -k < 0$, para alguna constante positiva k . Dando como resultado el siguiente teorema

Teorema (Efimov, 1964). *No existen superficies¹ completas C^2 -inmersas en \mathbb{R}^3 con curvatura gaussiana acotada superiormente por una constante negativa.*

En 1972, Tilla Klotz Milnor presentó una demostración completa y detallada de este teorema en [Mil72] basada en la demostración dada por Nikolai Efimov [Efi64]. En este trabajo usaremos ambas referencias además de [BZ92] y [Roz92].

La demostración de este teorema se hará por contradicción y está basada en dos hechos de suma importancia, a los que llamaremos lema A y lema B. Consideremos φ una C^2 -inmersión de una superficie S en el espacio euclidiano tridimensional, la cual es completa con la métrica inducida y su curvatura gaussiana satisface $K \leq -k < 0$, donde k es una constante positiva. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que S es orientable, ya que en caso contrario basta tomar su recubrimiento duplo orientable \tilde{S} , gracias al teorema 1.3.10. Es claro, que si \tilde{S} no puede ser C^2 -inmerso en \mathbb{R}^3 , entonces S tampoco podrá serlo.

¹En esta sección usaremos la palabra superficie para denotar una variedad riemanniana bidimensional conexa diferenciable.

Sea $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ la aplicación normal de Gauss. Como para cada p en S , dN_p es un operador lineal y $\det(dN_p) = K(p) < 0$, entonces N da una C^1 -inmersión y difeomorfismo local de S en \mathbb{S}^2 . Denotemos por S_{III} a la forma cuadrática sobre S inducida por N y denotaremos por S_{III} a la variedad riemanniana bidimensional obtenida usando la métrica asociada a la forma cuadrática III sobre S , denotaremos además por g^* dicha métrica. Siendo $\mathbf{x}(u, v)$ una parametrización local de S , tenemos que los coeficientes $E^*(u, v)$, $F^*(u, v)$ y $G^*(u, v)$ de la forma cuadrática III son dadas por:

$$E^*(u, v) = \langle N_u, N_u \rangle, \quad F^*(u, v) = \langle N_u, N_v \rangle \quad \text{y} \quad G^*(u, v) = \langle N_v, N_v \rangle.$$

Es claro que la curvatura gaussiana K_{III} en todo punto p de S_{III} es igual a 1.

Proposición 4.2.1. S_{III} no es completa.

Demostración. Supongamos que S_{III} es completa, luego tenemos una superficie completa con curvatura gaussiana constante igual a 1. Por el teorema de Bonnet tenemos que S_{III} es compacta. Como S_{III} es homeomorfa a S , entonces S también es compacta. Luego por la proposición 2.2.3 existe $p \in S$ tal que $K(p) > 0$, lo cual es contradicción ya que $K(p) \leq -k < 0$, para todo $p \in S$. \square

Como S_{III} no es completa, consideramos la completación \tilde{S}_{III} de S_{III} como espacio métrico. Es válido observar que como N es una inmersión local y \mathbb{S}^2 es completa, entonces podemos extender N , de forma continua a $\tilde{N} : \tilde{S}_{\text{III}} \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Para la demostración de Efimov, es de vital importancia el estudio de \tilde{N} cerca del “borde” de \tilde{S}_{III} es decir cerca de los puntos de \tilde{S}_{III} que no pertenecen a S_{III} . En este sentido, veamos un par de definiciones que serán usados a lo largo de la presente sección

Definición 4.2.2. Sea Ω es una superficie con una métrica diremos que el conjunto

$$D_r(p) = \{q \in \Omega : d(p, q) < r\}$$

es un disco geodésico de centro $p \in \Omega$ y radio $r > 0$.

El centro de un círculo no geodésico γ es el centro del disco geodésico de menor área que posee a γ como frontera. En el caso particular de $\Omega = \mathbb{S}^2$ y la métrica inducida por el espacio euclidiano tridimensional, diremos que la frontera de un disco geodésico es un círculo no geodésico, si la frontera no corresponde a un círculo grande.

Definición 4.2.3. Sea γ un arco circular no geodésico en \mathbb{S}^2 y p un punto interior de γ . Sea C el centro del círculo no geodésico γ . Para cada punto $p_j \in \gamma$ consideramos la geodésica que contiene a C y p_j . Partiendo de p_j se recorre a lo largo de esta geodésica una distancia ε suficientemente pequeña de γ_j en la dirección que se aleja del centro de γ en \mathbb{S}^2 . Entonces la “franja” construida alrededor de γ es llamada **rectángulo exterior** a γ en p y será denotado por $R(\gamma, \varepsilon)$.

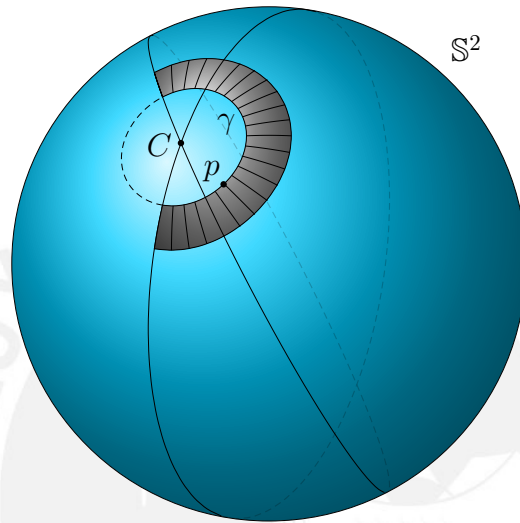


Figura 4.10: Rectángulo exterior de un arco no geodésico.

Supongamos ahora que Ω es cualquier C^1 -superficie y tenemos una aplicación $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ la cual es una C^1 -inmersión, entonces Ω tiene una C^0 -métrica riemanniana y N es una inmersión isométrica. S_{III} con la aplicación normal de Gauss es un ejemplo de esta situación. Sea $\tilde{\Omega}$ la completación como espacio métrico de Ω , y definimos $\partial\tilde{\Omega} := \tilde{\Omega} \setminus \Omega$. Extendemos N a una aplicación continua $\tilde{N} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^2$, como se hizo anteriormente con la aplicación normal de Gauss. En lo que sigue de esta sección usaremos la siguiente notación, si $U \subset \Omega$ denotamos por \bar{U} a la cerradura de U en Ω y si $U \subset \tilde{\Omega}$ denotaremos por \tilde{U} a la cerradura de U en $\tilde{\Omega}$. Es claro además, que $\bar{U} = \tilde{U}$, para $U \subset \Omega$ si, y solamente si, $\tilde{U} \cap \partial\tilde{\Omega} = \emptyset$.

Definición 4.2.4. Diremos que $\tilde{\Omega}$ es cóncavo en $p \in \partial\tilde{\Omega}$, si $p \in \tilde{U}$ para algún subconjunto abierto $U \subset \Omega$ tal que:

- a) \tilde{N} es inyectiva en \tilde{U} , (en particular N es inyectiva en U);
- b) $N(U)$ contiene el interior de algún rectángulo exterior a $\tilde{N}(p)$.

Definición 4.2.5. Diremos que Ω es pseudo-convexo si no existe $p \in \partial\tilde{\Omega}$ para el cual $\tilde{\Omega}$ es cóncavo en p . En otras palabras, Ω es pseudo-convexo si $\tilde{\Omega}$ no es cóncavo en ningún punto de $\partial\tilde{\Omega}$. (Por tanto, tomando la aplicación identidad tenemos que \mathbb{S}^2 es pseudo-convexo).

Observación 4.2.6. Las definiciones 4.2.4 y 4.2.5 parecen depender de la inmersión isométrica $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$. Por tanto, deberíamos haber definido en su lugar los términos “cóncavo en p con respecto a N ” o “pseudo-convexo con respecto a N ”. De hecho, se puede comprobar que estas nociones son independientes de la C^1 -inmersión isométrica particular $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$, siempre y cuando Ω y su métrica sean fijas. Por tanto no hay problema alguno en usar el lenguaje abreviado dado en estas definiciones.

Efimov ilustra estas nociones con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4.2.7. Sea \mathcal{H} el hiperboloide de una hoja dada por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, con la métrica inducida por \mathbb{R}^3 . Escojamos una orientación en \mathcal{H} tal que N asigna la normal exterior en cada punto $p \in \mathcal{H}$. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ de modo que la aplicación normal de Gauss es

$$N(x, y, z) = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} = \frac{(x, y, -z)}{\sqrt{2x^2 + 2y^2 - 1}}.$$

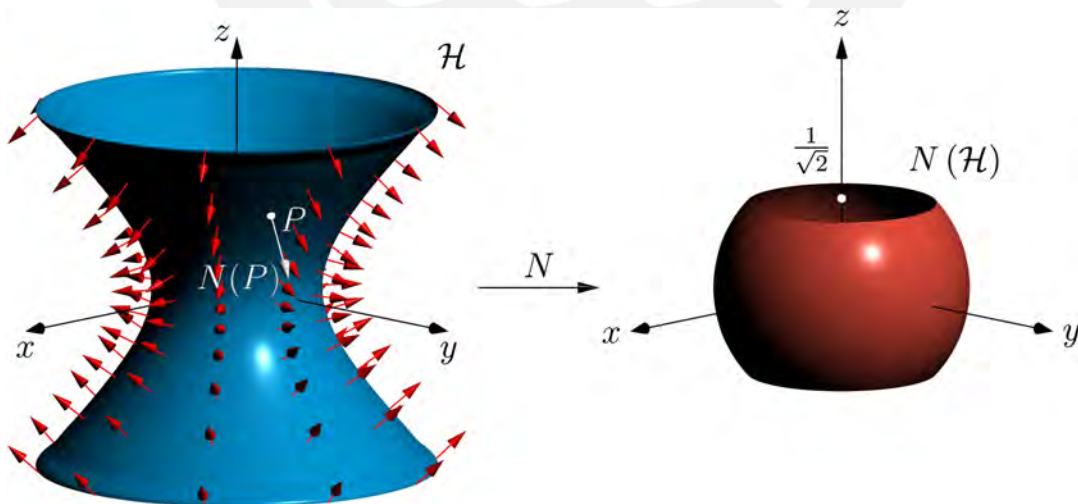


Figura 4.11: Imagen del hiperboloide \mathcal{H} , por medio de N

Entonces $N(\mathcal{H}) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : -\frac{1}{\sqrt{2}} < z < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$, es decir tenemos que $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ en \mathbb{S}^2 cuando $z(p) \rightarrow +\infty$ en \mathcal{H} y $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en \mathbb{S}^2 cuando $z(p) \rightarrow -\infty$ en \mathcal{H} dado que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pm\infty} N(0, y, z) &= \lim_{z \rightarrow \pm\infty} N(0, y, \pm\sqrt{y^2 - 1}) \\ &= \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \left(0, \frac{y}{\sqrt{2y^2 - 1}}, \mp \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{\sqrt{2y^2 - 1}} \right) \\ &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

$\tilde{\mathcal{H}}_{\text{III}}$ es cóncava en todos los puntos que pertenecen a $\partial\tilde{\mathcal{H}}_{\text{III}}$. Basta tomar $U = \mathcal{H}$ y $\varepsilon < \pi/2$. Notemos que la curvatura gaussiana de \mathcal{H} es negativa, pero no satisface las hipótesis del teorema de Efimov, dado que la curvatura tiende a cero cuando los puntos se alejan del origen, para ver esto tomemos la siguiente parametrización local de \mathcal{H} ,

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u \cdot \cosh v, \sin u \cdot \cosh v, \sinh v), \quad u \in]0, 2\pi[\text{ y } v \in \mathbb{R}$$

luego tenemos

$$K(p) = \frac{-1}{\cosh v (\cosh^2 v + \sinh^2 v)} < 0$$

tomando ahora un punto alejado del origen obtenemos $\lim_{v \rightarrow +\infty} K(p) = 0$. De modo que esto responde a nuestra primera pregunta, acerca de la importancia de que la curvatura gaussiana sea constante, pero más aún transparenta la condición dada por Cohn-Vossen.

Ejemplo 4.2.8. Sea \mathcal{G} la superficie dada por $z = f(x, y) = e^x \sin y$, con la métrica inducida por \mathbb{R}^3 . Consideremos la aplicación normal de Gauss,

$$N(x, y) = \frac{-(f_x(x, y), f_y(x, y), -1)}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}} = \frac{(-e^x \sin y, e^x \cos y, 1)}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$$

luego $N(\mathcal{G}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : 0 < z < 1\}$. Cuando $x(p) \rightarrow +\infty$ en \mathcal{G} , tenemos que $N(p)$ se acerca al ecuador de \mathbb{S}^2 mientras que cuando $x(p) \rightarrow -\infty$ en \mathcal{G} , tenemos que $N(p)$ se acerca al polo norte en \mathbb{S}^2 .

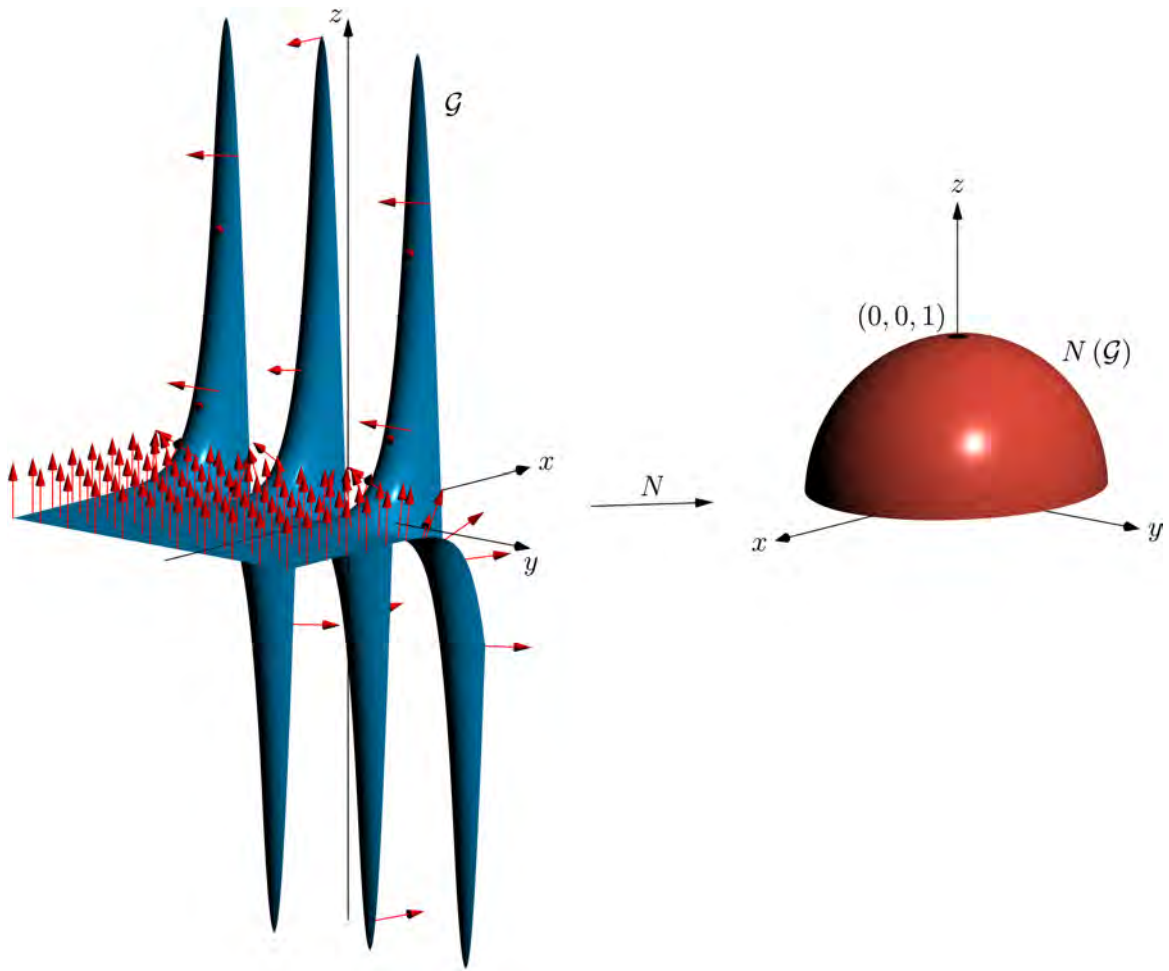


Figura 4.12: Imagen del \mathcal{G} , por medio de N

Aquí existe exactamente un punto de $\partial\tilde{\mathcal{G}}_{\text{III}}$ en el cual $\tilde{\mathcal{G}}_{\text{III}}$ es cóncavo, llamemos \hat{p} a la pre-imagen bajo \tilde{N} del polo norte en \mathbb{S}^2 . Vemos que $\tilde{\mathcal{G}}_{\text{III}}$ es cóncavo en \hat{p} , para verificar este hecho, tomemos el siguiente subconjunto abierto de \mathcal{G} ,

$$U = \left\{ (x, y, e^x \sin y) \in \mathcal{G} : x < 0 \wedge -\frac{2\pi}{3} < y < \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

Definición 4.2.9. Un subconjunto $H \neq \emptyset$ de Ω es llamado convexo si dos puntos cualesquiera pueden ser unidos por un único arco geodésico contenido en H cuya longitud es igual a la distancia en Ω entre esos dos puntos. Este es un uso estricto de la palabra “convexo”, dado que por ejemplo \mathbb{S}^2 no es convexo.

Asumiremos la veracidad de los lemas A y B que se enunciarán dentro de un breve momento, y serán demostrados en las sub-secciones 4.2.1 y 4.2.2,

respectivamente. Tengamos en cuenta que la conclusión de lema A falla para los ejemplos dados anteriormente, aunque ambas son completas con curvatura gaussiana negativa.

Lema A. *Sea S una superficie orientada, completa, C^2 -inmersa en \mathbb{R}^3 con $K \leq -k < 0$, donde K es la curvatura gaussiana y k es una constante positiva. Si S_{III} es obtenida usando en S la métrica inducida por la aplicación normal de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Entonces S_{III} es pseudo-convexo.*

Lema B. *Sea Ω una superficie dotada de una métrica riemanniana. Si la aplicación normal de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una C^1 -inmersión isométrica y Ω es pseudo-convexa, entonces*

- a) N es inyectiva;
- b) $N(\Omega) = \mathbb{S}^2$ o $N(\Omega)$ es convexa (en particular, Ω es simplemente conexa);
- c) Ω tiene área finita. Si $N(\Omega) = \mathbb{S}^2$, entonces el área es 4π , y menor o igual a 2π caso contrario.

Ahora ya estamos listos para demostrar el resultado principal de esta sección,

Teorema 4.2.10 (Efimov, 1964). *No existen superficies² completas C^2 -inmersas en \mathbb{R}^3 con curvatura gaussiana acotada superiormente por una constante negativa.*

Demostración.

La demostración será hecha por contradicción. Supongamos que S es orientable. Necesitamos de esta suposición para hacer uso del lema A. Pero en el caso de que S no sea orientable basta tomar su recubrimiento duplo orientable. Por hipótesis tenemos que existe $k > 0$ tal que $K \leq -k < 0$. Fijando una orientación para S , tomemos la correspondiente aplicación normal de Gauss N asociada a la inmersión. Por tanto, del lema A tenemos que S_{III} es pseudo-convexa, y en consecuencia simplemente convexa. De la proposición 4.2.1 sabemos que S_{III} no es completo, luego $N(S_{\text{III}})$ no es toda la esfera. Entonces por el ítem b del lema B se sigue que $N(S_{\text{III}})$ tiene área menor o igual a 2π . Fijemos un punto cualquiera $p \in S$ y sea $\sigma(r)$ el área en S , con la métrica asociada a la forma cuadrática I, del disco geodésico $D_r(p)$ con centro en p y radio $r > 0$. Consideremos además

²En esta sección usaremos la palabra superficie para denotar una variedad riemanniana bidimensional conexa diferenciable.

$\sigma^*(r)$ el área en S , con la métrica asociada a la forma cuadrática III. Así, por la conclusión del párrafo anterior, tenemos que

$$\sigma^*(r) \leq 2\pi.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2\pi \geq \sigma^*(r) &= \int_{D_r(p)} \|N_u \times N_v\| \, dudv \\ &= \int_{D_r(p)} |K| \cdot \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, dudv \geq k \cdot \int_{D_r(p)} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, dudv = k \cdot \sigma(r) \end{aligned}$$

Por tanto

$$\sigma(r) \leq \frac{2\pi}{k}.$$

Sabemos, por el ítem b del lema B, que S_{III} es simplemente conexa y entonces S también lo es. En consecuencia tenemos que S es una variedad de Hadamard y por tanto tiene área infinita, esto gracias a la proposición 4.1.9. Lo cual es una contradicción. \square

Ahora que ya hemos demostrado el teorema de Efimov, lo restante de esta sección está dedicado a mostrar la veracidad de los resultados admitidos en esta demostración. Para lo cual enunciaremos y asumiremos cierto el siguiente lema (nombrado por Efimov como el lema principal) que debido a su extensa demostración será demostrado más adelante. Sean c y r constantes positivas. Consideremos el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq r^2 \wedge y^2 \geq -cx\}$$

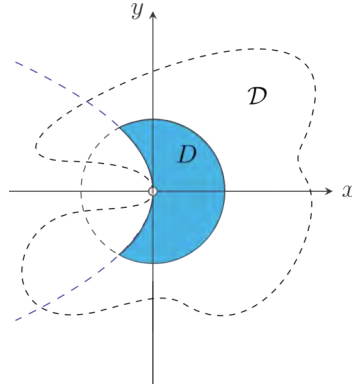
y tomemos $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ cualquier abierto, simplemente conexo que contiene a D , pero excluyendo al origen $(0, 0)$

Sea $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una C^1 -inmersión que induce una métrica g^* en \mathcal{D} . Dados q_1 y q_2 en D , definimos la distancia $d_D^*(q_1, q_2)$ tomando el ínfimo de las g^* -longitudes de todos los caminos C^1 por partes en D que unen q_1 con q_2 .

Lema Principal. *Si $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una C^1 -inmersión y si los autovalores λ_1 y λ_2 de dF a lo largo de \mathcal{D} son reales y están uniformemente acotados, es decir satisfacen*

$$-\alpha \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \alpha$$

para alguna constante $\alpha > 0$, entonces D dotada con la distancia d_D^ no es un espacio métrico completo.*

Figura 4.13: Definición de los conjuntos D y \tilde{D}

4.2.1 Demostración del lema A

Supongamos que S_{III} no es pseudo-convexa, entonces S_{III} es cóncava en algún punto p en $\partial\tilde{S}_{\text{III}} := \tilde{S}_{\text{III}} \setminus S_{\text{III}}$. De modo que por la definición se sigue que $p \in \tilde{U}$ para algún subconjunto abierto $U \subset S$ tal que \tilde{N} es inyectiva en \tilde{U} y $N(U)$ contiene el interior de un rectángulo exterior $R(\gamma, \varepsilon)$ a $\tilde{N}(p)$. Reduciendo $N(U)$ si fuera necesario, podemos considerar $N(U) = R(\gamma, \varepsilon)$ para cierto $\varepsilon > 0$ y cierto arco circular no geodésico de \mathbb{S}^2 . Rotando S en \mathbb{R}^3 , de ser necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\tilde{N}(p)$ lleva el punto p al polo norte $(0, 0, 1)$ de \mathbb{S}^2 y que γ está en el hemisferio $y \geq 0$ en \mathbb{S}^2 . Notemos además que el arco no geodésico γ que contiene a $\tilde{N}(p)$ es tangente a un círculo grande ($y = 0$) en $\tilde{N}(p)$. Finalmente sustituyendo $R(\gamma, \varepsilon)$ por un rectángulo más pequeño, podemos suponer que $R(\gamma, \varepsilon)$ está en el polo norte, de manera más precisa $R(\gamma, \varepsilon)$ está contenida en la región $z > \frac{1}{\sqrt{2}}$ en \mathbb{S}^2 , lo cual implica que el ángulo entre $N(q)$ y el vector $(0, 0, 1)$ es menor que $\pi/4$ para $q \in U$ arbitrario.

Así, la proyección vertical π de U en el plano $z = 0$ es una C^2 -inmersión. Usando una inversa local de π cualquier entorno suficientemente pequeño en U puede ser descrito por la función $z = f(x, y)$ de clase C^2 . Usando coordenadas locales, el vector normal a $(x, y, f(x, y)) \in U$ viene dado por

$$N(x, y, f(x, y)) = \frac{-(f_x(x, y), f_y(x, y), -1)}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}.$$

Además podemos notar que

$$z > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) < 1.$$

Consideremos la función auxiliar

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{S}_+^2 &\longrightarrow \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \\ (x, y, z) &\mapsto \mu(x, y, z) := \left(\frac{-y}{z}, \frac{x}{z}, 0 \right) \equiv \left(\frac{-y}{z}, \frac{x}{z} \right) \end{aligned}$$

con $z = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} > 0$.

Geoméricamente, μ lleva el punto (x, y, z) por la proyección radial al plano $z = 1$, luego proyecta esta imagen verticalmente en el plano $z = 0$ y finalmente rota esa imagen un ángulo de $\pi/2$ en sentido antihorario.

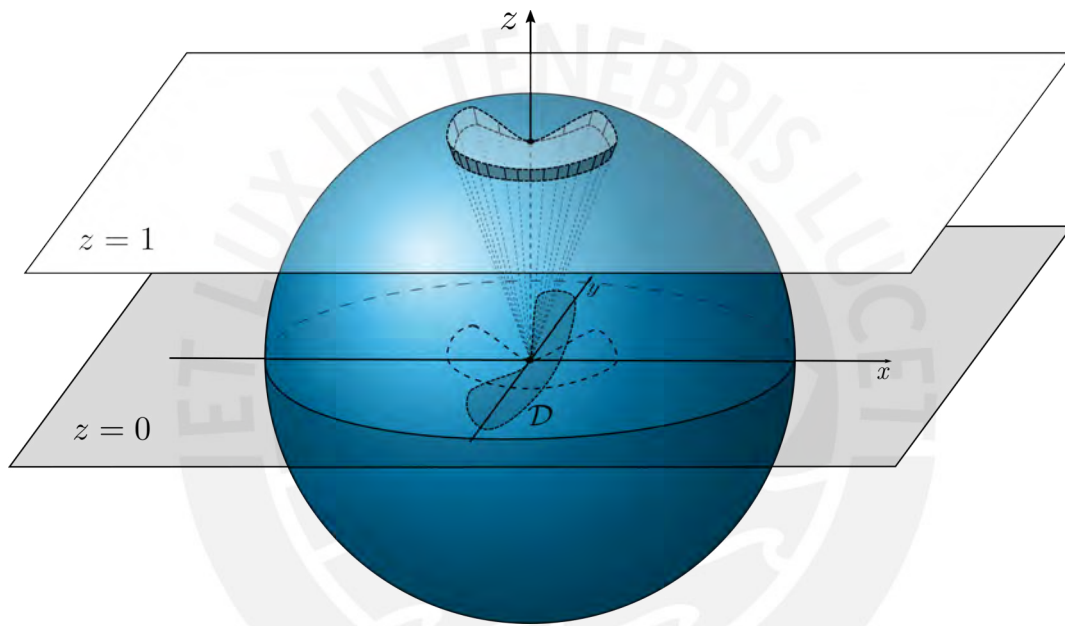


Figura 4.14: Aplicación auxiliar μ .

Es sencillo ver que μ es inyectiva en \mathbb{S}_+^2 , y que la función inversa μ^{-1} está dada por

$$\mu^{-1}(x, y) = \frac{(y, -x, 1)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \quad \forall x, y \in \mu(\mathbb{S}_+^2).$$

Entonces μ es un difeomorfismo sobre su imagen y aplica $N(U) = R(\gamma, \varepsilon)$ en una región abierta en el plano $z = 0$, que llamaremos \mathcal{D} . Notemos que $\mu(\tilde{N}(p)) = \mu(0, 0, 1) = (0, 0)$, mientras que $\mu(\gamma)$ es un camino, tangente al eje y en el origen, de alguna sección canónica no lineal que contiene al origen de coordenadas, el cual está contenido en el hemisferio $x \leq 0$. Luego para algún n suficientemente grande $\mu(\gamma)$ está contenido en la región $y^2 \leq -nx$

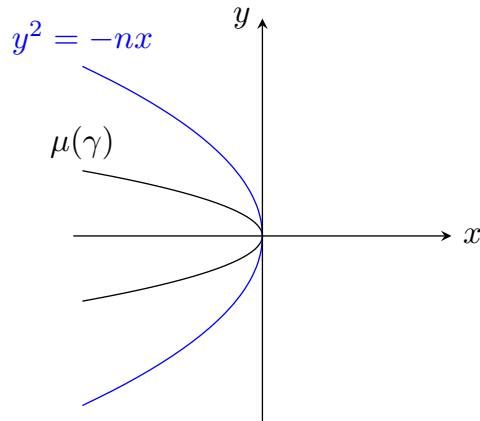


Figura 4.15: Camino $\mu(\gamma)$ y parábola $y^2 = -nx$

Consideremos r un número positivo suficientemente pequeño para que el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq r^2 \wedge y^2 \geq -nx\}$$

esté contenido en \mathcal{D} .

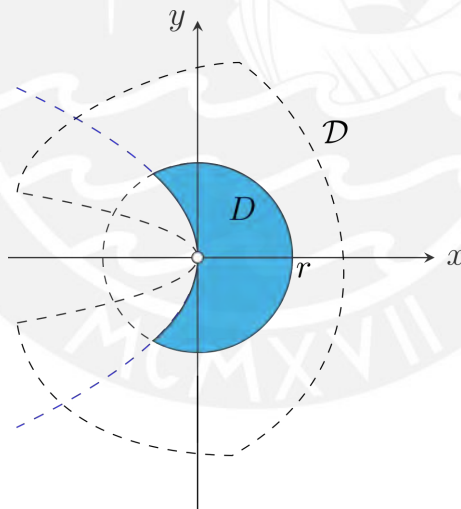


Figura 4.16: \mathcal{D} contiene a D

Finalmente la aplicación $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F := \pi \circ N^{-1} \circ \mu^{-1}$ que lleva \mathcal{D} de vuelta al plano $z = 0$, además es claro que F es una C^1 -inmersión. Es importante destacar el carácter local de todo el proceso de construcción de F , es decir podríamos repetirlo alrededor de un punto interior de una superficie con borde compacto sin tocar a dicho borde.

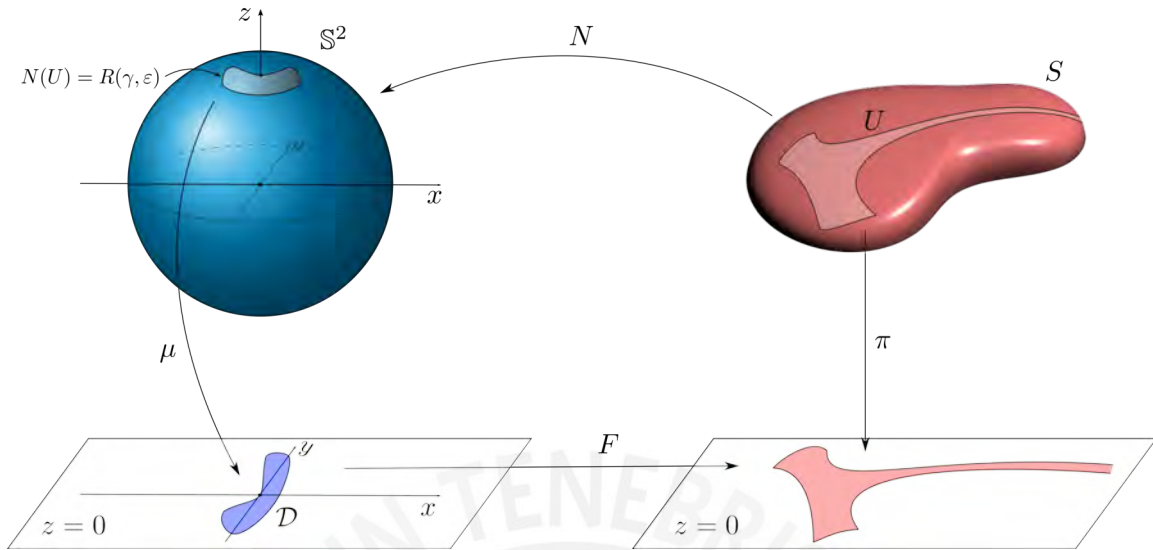


Figura 4.17: Construcción de la inmersión F .

Nuestra intención es aplicar el lema Principal en la inmersión F . Primero verifiquemos que F satisface dichas hipótesis.

Afirmación 4.2.11. *Los autovalores λ_1 y λ_2 de dF son reales, con signos opuestos y uniformemente acotado en \mathcal{D} , es decir existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$-\alpha \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \alpha.$$

Demostración. Sea $q = (x, y, z) \in U$. Consideremos un entorno de q (en U) descrita por $z = f(x, y)$, luego tenemos que

$$\begin{aligned} (\mu \circ N)(x, y, z) &= (\mu \circ N)(x, y, f(x, y)) \\ &= \mu \left(\frac{(-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}} \right) \\ &= (f_y(x, y), -f_x(x, y)). \end{aligned}$$

Por tanto, cualquier inversa local $F^{-1} = \mu \circ N \circ \pi^{-1}$ de F tiene la forma

$$F^{-1}(x, y) = \mu \circ N \circ \pi^{-1}(x, y) = \mu \circ N(x, y, f(x, y)) = (f_y(x, y), -f_x(x, y)).$$

Así, la matriz Jacobiana de F^{-1} es

$$dF^{-1} = \begin{pmatrix} f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \\ -f_{xx}(x, y) & -f_{xy}(x, y) \end{pmatrix}$$

Como f es una función de clase C^2 , entonces

$$\begin{aligned}\det(dF^{-1}) &= f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) \\ &= \frac{f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)}{(1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y))^2} \cdot (1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y))^2 \\ &= K \cdot (1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y))^2 \leq -k < 0.\end{aligned}$$

Entonces por definición, los autovalores β_1 y β_2 de dF^{-1} son las raíces de la ecuación $\det(dF^{-1} - \beta I) = 0$, luego

$$0 = \det(dF^{-1} - \beta I) = \beta^2 - \text{tr}(dF^{-1})\beta + \det(dF^{-1}) = \beta^2 + \det(dF^{-1}),$$

entonces los autovalores β_1 y β_2 del diferencial dF^{-1} satisfacen

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \beta_1 \cdot \beta_2 = \det(dF^{-1}) \leq -k < 0. \end{cases}$$

Por tanto β_1 y β_2 son números reales de signos opuestos y cumplen además que $|\beta_1| = |\beta_2| \geq \sqrt{k}$. Es claro que k es independiente de la elección de F^{-1} para F . Entonces los autovalores del diferencial dF , $\lambda_1 = \frac{1}{\beta_1}$ y $\lambda_2 = \frac{1}{\beta_2}$, son reales, de signos opuestos y uniformemente acotados por $\frac{1}{\sqrt{k}}$, es decir

$$-\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

□

Afirmación 4.2.12. D con la métrica d_D^* es un espacio métrico completo.

Demostración. Sea \bar{g}^* la métrica riemanniana en U obtenida a partir del pullback de la métrica g^* en \mathcal{D} vía el difeomorfismo $\mu \circ N$. Es claro que \bar{g}^* es la métrica inducida en U por la métrica Euclidiana del plano $z = 0$ con la inmersión π . Consideremos el conjunto $U = (\mu \circ N)^{-1}(D)$ y definamos la distancia en U , que denotaremos por d_U^* , de la siguiente manera

$$d_U^*(q_1, q_2) = d_D^*((\mu \circ N)(q_1), (\mu \circ N)(q_2)); \quad \forall q_1, q_2 \in U.$$

Es decir d_U^* es el ínfimo de las g^* -longitudes de todos los caminos C^1 por partes en U que une q_1 con q_2 . Luego la afirmación 4.2.12 es equivalente a decir que: U

con la métrica d_U^* es un espacio métrico completo. De hecho, veamos que U es un conjunto cerrado de S , pues caso contrario existiría un punto de acumulación $q \in U$ en $S \setminus U$. Como la aplicación normal de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es continua, entonces se sigue que $N(q)$ está en la clausura de $N(U)$ en \mathbb{S}^2 . Pero $N(q)$ no puede estar en $N(U)$, pues $\tilde{N} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{S}^2$ es inyectiva y $q \notin U$ entonces $N(q) \notin N(U)$. Por la construcción de \mathcal{D} , el único punto de acumulación de $N(U) = \mu^{-1}(D)$ que está en $\mathbb{S}^2 \setminus N(U)$ es el polo norte $\tilde{N}(p)$. Luego

$$\tilde{N}(p) = N(q) = \tilde{N}(q) \Rightarrow p = q,$$

pero esto no puede ocurrir dado que $p \in \partial S_{\text{III}}$ y $q \in S \setminus U$. Como U es un subconjunto cerrado de una superficie completa S , entonces U también es completo si medimos la distancia $d_U(q_1, q_2)$ entre puntos de U como el ínfimo de las longitudes (en la métrica inducida por φ) de todos los caminos C^1 por partes en U que une q_1 con q_2 , esto debido a que U es una sub-variedad de S con borde C^1 por partes, para la demostración de este hecho ver [Mil72, Apéndice 3].

Resta mostrar que si U es completo con la métrica d_U , también lo será con la métrica d_U^* . Por tanto es suficiente mostrar que

$$d_U^*(q_1, q_2) \leq d_U(q_1, q_2) \leq \sqrt{2} \cdot d_U^*(q_1, q_2); \quad \forall q_1, q_2 \in U \quad (4.4)$$

Dado que si (x_n) es una sucesión de Cauchy en la distancia d_U^* y como $d_U \leq \sqrt{2} \cdot d_U^*$, entonces (x_n) es de Cauchy en la distancia d_U y por tanto es convergente con la métrica d_U . Por otro lado, como $d_U^* \leq d_U$, la convergencia en la métrica d_U implica convergencia en la métrica d_U^* . Por tanto U con la métrica d_U^* es un espacio métrico completo. Ahora sólo basta mostrar (4.4). Notemos que cualquier camino γ en U dado por $z = f(x(s^*), y(s^*))$ donde s^* es un \bar{g}^* -parámetro de longitud de arco para γ , tiene como longitud de arco $s(s^*)$:

$$s(s^*) = \int_0^{s^*} \sqrt{1 + (x'f_x + y'f_y)^2} ds^*.$$

Como $f_x^2 + f_y^2 \leq 1$ mientras que $(x')^2 + (y')^2 = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} f_x^2 + f_y^2 &= [(x')^2 + (y')^2] (f_x^2 + f_y^2) \\ &= (x')^2 f_x^2 + (x')^2 f_y^2 + (y')^2 f_x^2 + (y')^2 f_y^2 \\ &= (x'f_x + y'f_y)^2 - 2x'f_x y'f_y + (y')^2 f_x^2 + (x')^2 f_y^2 \\ &= (x'f_x + y'f_y)^2 + (y'f_x - x'f_y)^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$(x'f_x + y'f_y)^2 = f_x^2 + f_y^2 - (y'f_x - x'f_y)^2 \leq f_x^2 + f_y^2 \leq 1.$$

Por tanto

$$s^* \leq s(s^*) \leq \sqrt{2} \cdot s^* \Rightarrow d_U^*(q_1, q_2) \leq d_U(q_1, q_2) \leq \sqrt{2} \cdot d_U^*(q_1, q_2)$$

para todo $q_1, q_2 \in U$, como queríamos. Para finalizar la demostración de la afirmación 4.2.12 veamos que como U con la métrica d_U^* es un espacio métrico completo, tenemos también que D con la métrica d_D^* es un espacio métrico completo, pues la métrica riemanniana \bar{g}^* en U corresponde a la métrica riemanniana g^* en \mathcal{D} sobre el difeomorfismo $\mu \circ N$. Por tanto las afirmaciones 4.2.11 y 4.2.12 dicen que los autovalores asociados al diferencial de la inmersión son reales con signos opuestos y que con métrica d_D^* es un espacio métrico completo lo cual contradice el lema Principal. Por tanto el lema A queda demostrado. \square

4.2.2 Demostración del lema B

La demostración del lema B es independiente del lema Principal. Pero si uno desea aplicar el lema B con $\Omega = S_{\text{III}}$, entonces debemos involucrar el lema A, usando así el lema Principal. Observemos primero que si γ es una geodésica parametrizada por longitud de arco en Ω , entonces $N \circ \gamma$ también lo es. Si $l(\gamma) < \pi$, entonces $N \circ \gamma$ es un arco minimizante en \mathbb{S}^2 entre dos de sus puntos y además $N|_{\gamma}$ es inyectiva.

Definición 4.2.13. Diremos que un disco geodésico $D_r(p) \subset \Omega$ es un disco geodésico completo, si podemos partir de p en cualquier dirección, a lo largo de un radio geodésico semi-abierto en Ω de longitud r .

Afirmación 4.2.14. Si $D_r(p)$ es un disco geodésico completo en Ω , con $r > \pi$. Entonces Ω es una esfera y $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una isometría.

Demostración. En primer lugar observemos que como $r > \pi$ tenemos que $D_r(p) \supset D_\pi(p)$. Ahora veamos que $N|_{D_\pi(p)}$ es inyectiva. En efecto, sean $q_1, q_2 \in D_\pi(p)$ tal que $q_1 \neq q_2$. Consideremos los caminos geodésicos α_j que unen q_j con p , para $j = 1, 2$ donde además $l(\alpha_j) < \pi$. Por otro lado $N \circ \alpha_j$ son caminos geodésicos en \mathbb{S}^2 con longitud menor que π . Por la observación anterior tenemos que $N|_{\alpha_j}$

es inyectiva, para $j = 1, 2$. Si $p \in \{q_1, q_2\}$, entonces $N(q_1) \neq N(q_2)$. Por tanto, $N|_{D_\pi(p)}$ es inyectiva. Además de eso $N(D_\pi(p)) = \mathbb{S}^2 \setminus \{\text{punto antipodal de } N(p)\}$. En efecto, si γ es un camino geodésico que parte de p con $l(\gamma) < \pi$, entonces N lleva γ en una porción de un círculo grande que parte de $N(p)$ con la misma longitud que γ . Sabiendo que $N|_{D_\pi(p)}$ es inyectiva y podemos partir de p a lo largo de una geodésica en cualquier dirección, entonces obtenemos que $N(D_\pi(p)) = \mathbb{S}^2 \setminus \{\text{punto antipodal de } N(p)\}$ y $N|_{D_\pi(p)}$ es una isometría. Sea $\partial D_r(p) = \{q \in \Omega : d(p, q) = r\}$ entonces como N es continua, tenemos $N(D_r(p)) = \{\text{punto antipodal de } N(p)\}$. Observemos además que $\partial D_\pi(p)$ es conexo y N es localmente inyectiva, por tanto $\partial D_\pi(p)$ consiste de un único punto. En consecuencia, Ω debe ser la esfera y $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ una isometría. \square

Hasta el momento no hemos usado la pseudo-convexidad de Ω . Usando esta hipótesis se obtiene un resultado más fuerte que la afirmación 4.2.14.

Afirmación 4.2.15. *Si $D_r(p)$ es un disco geodésico completo, con $r > \pi/2$, entonces Ω es una esfera y $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una isometría.*

Demostración. La idea que queremos usar es aumentar el radio r para obtener otro radio \tilde{r} tal que $\tilde{r} > \pi$, luego aplicando la afirmación 4.2.14 ya concluiríamos la demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\pi/2 < r \leq \pi$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer todavía que r es maximal, es decir, no existe un disco geodésico completo de radio mayor que r y centro p . Esto, a su vez, garantiza la existencia de un punto \hat{p} en la clausura métrica de $D_r(p)$ en $\tilde{\Omega}$ que pertenece a $\partial \tilde{\Omega}$, y por tanto no a Ω . Con el mismo argumento usado en la demostración de la afirmación 4.2.14, podemos concluir que si $r < \pi$, entonces $N(D_r(p))$ es un disco geodésico de radio r en \mathbb{S}^2 . Como $N|_{D_r(p)}$ es inyectiva, podemos concluir que $\tilde{N}(\hat{p}) \in \partial N(D_r(p))$. Luego se sigue que Ω es cóncavo en \hat{p} , para ver esto sea γ algún arco abierto que pasa por $\tilde{N}(\hat{p})$ de un círculo no geodésico Γ en \mathbb{S}^2 el cual se elige de modo que la mayor de las dos regiones abiertas en \mathbb{S}^2 delimitada por Γ esté contenida en $N(D_r(p))$.

En la figura 4.18 hemos tomado $\pi/2 < r < \pi$, dado que para el caso $r = \pi$ es claro que cualquier círculo no geodésico Γ que pasa por $\tilde{N}(\hat{p})$ serviría. Entonces tomamos

$$U = N^{-1}(\text{int}R(\gamma, \varepsilon))$$

para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, satisfaciendo que el interior de $R(\gamma, \varepsilon)$ esté en $N(D_r(p))$, entonces \tilde{N} es inyectiva en \tilde{U} y $N(U)$ es el interior de $R(\gamma, \varepsilon)$,

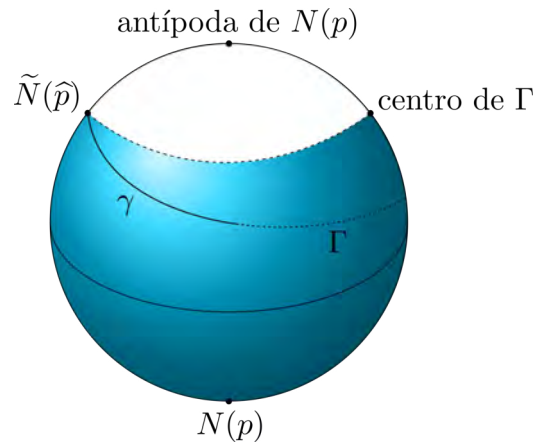


Figura 4.18: $N(D_r(p))$; cuando $\pi/2 < r < \pi$.

entonces podemos concluir que $\tilde{\Omega}$ es cóncavo en \hat{p} . Lo cual es una contradicción con el hecho de que Ω es pseudo-convexo. Por tanto, $D_r(p)$ puede ser agrandado para que sea un disco geodésico completo con radio mayor que π como queríamos. \square

Afirmación 4.2.16. *Si Ω no es una esfera, entonces cualquier camino geodésico γ que une dos puntos del interior de Ω tiene longitud menor que π .*

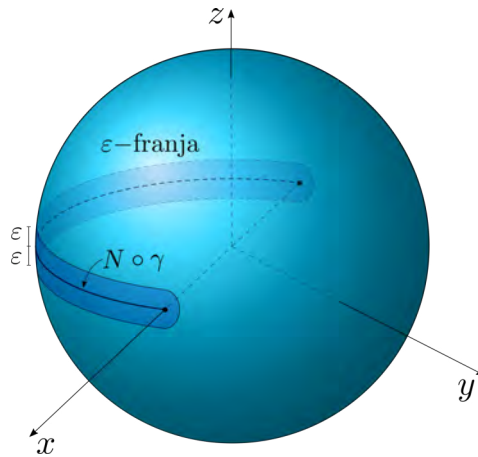
Demostración. Por reducción al absurdo supongamos que $l(\gamma) \geq \pi$. sin pérdida de generalidad podemos suponer que $l(\gamma) = \pi$, pues basta con sustituir γ por una porción de sí misma, de ser necesario. Por simplicidad, supongamos que $N \circ \gamma$ está parametrizando la parte $y \leq 0$ del ecuador de \mathbb{S}^2 . Dado γ , una rotación adecuada de \mathbb{S}^2 proporciona esta situación.

Definimos como una ε -franja entorno de $N \circ \gamma$ como la unión de todos los discos geodésicos abiertos $D_\varepsilon(p)$ en \mathbb{S}^2 , con centro en algún punto p de $N \circ \gamma$ y radio ε , es decir

$$\bigcup_{p \in N \circ \gamma} D_\varepsilon(p).$$

Como γ es compacto en Ω y $l(\gamma) = \pi$, entonces existe $\varepsilon > 0$ y un entorno U_0 de γ en Ω tal que $N|_{U_0}$ es inyectivo sobre la ε -franja de $N \circ \gamma$, ver figura 4.19.

Tomando ε suficientemente pequeño, podemos suponer que la clausura \tilde{U}_0 de U en $\tilde{\Omega}$ está enteramente contenida en Ω , de modo que N aplica la clausura \bar{U}_0 de U en Ω de manera inyectiva sobre la clausura de la ε -franja alrededor de $N \circ \gamma$. Finalmente, asumimos que $\varepsilon < \pi/2$. Dado un número $\theta \geq 0$, consideremos las rotaciones de la ε -franja, en \mathbb{S}^2 , entorno del eje x por medio de θ . Vamos

Figura 4.19: Una ε -franja de $N \circ \gamma$.

a llamar θ -región de $N \circ \gamma$ en \mathbb{S}^2 , al interior del conjunto de todos los puntos de \mathbb{S}^2 alcanzadas durante estas rotaciones. Así por ejemplo la 0 -región de $N \circ \gamma$ en \mathbb{S}^2 es precisamente la ε -franja. Además, si $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2$ entonces θ_1 -región $\subset \theta_2$ -región.

Ahora, sea $\hat{\theta}$ el supremo de todos los valores θ en el intervalo $[0, \pi/2]$ para los cuales algún entorno U_θ de γ en Ω sea aplicado por N de manera biunívoca en la θ -región de $N \circ \gamma$ en \mathbb{S}^2 .

Observemos que el caso $\hat{\theta} > \pi/2 - \varepsilon$ no ocurre, dado que si $\hat{\theta}$ fuese mayor que $\pi - \varepsilon$, entonces existe un disco geodésico $D_r(p)$ centrado en $p = (0, -1, 0)$ y radio $r > \pi/2$ tal que $D_r(p)$ está contenido en una θ -región, es decir existe un disco geodésico en Ω centrado en $N^{-1}(p)$ y radio mayor que $\pi/2$ que no es una esfera. Lo cual contradice la afirmación 4.2.15. ahora veremos que el caso $\hat{\theta} \leq \pi/2 - \varepsilon$ tampoco ocurre, pues de ser así $\hat{\theta}$ se convierte en un máximo. Entonces existe el entorno $U_{\hat{\theta}}$ de γ en Ω , pero algún punto p en la clausura de $U_{\hat{\theta}}$ en $\tilde{\Omega}$ pertenece a $\partial\tilde{\Omega}$. Luego como $N(U_0)$ es la ε -franja y además $\tilde{U}_0 = \bar{U}_0 \in \Omega$, tenemos que p no pertenece a \tilde{U}_0 .

En consecuencia, $\tilde{N}(p)$ debe estar a una distancia mayor que ε de ambos extremos de $N \circ \gamma$, lo que significa que $\tilde{N}(p)$ pertenece a la parte de la frontera de $N(U_{\hat{\theta}})$ que es un arco de un círculo no geodésico Γ cuyo centro se encuentra en el lado opuesto de Γ sobre \mathbb{S}^2 . Entonces se sigue que $\tilde{\Omega}$ es cóncavo en p , lo cual es una contradicción pues $\tilde{\Omega}$ es pseudo-convexo. \square

Afirmación 4.2.17. Si Ω no es una esfera y si γ es un arco geodésico en Ω que une los centros de los discos geodésicos de $D_r(p_1)$ y $D_r(p_2)$, entonces:

- a) $l(\gamma) + 2r \leq \pi$;
- b) Existe un conjunto abierto convexo H en Ω que contiene a γ , $D_r(p_1)$ y $D_r(p_2)$;
- c) γ es la única geodésica en Ω que une p_1 con p_2 . Además se tiene $l(\gamma) = d(p_1, p_2)$.

Demostración. Si $p_1 = p_2$ no hay nada a probar, así que a lo largo de la demostración vamos a suponer que $p_1 \neq p_2$.

- a) Supongamos por reducción al absurdo que $l(\gamma) + 2r > \pi$, luego podemos extender γ a alguna geodésica que tenga longitud π lo cual contradice la afirmación 4.2.16. Por tanto $l(\gamma) + 2r > \pi$.
- b) Podemos considerar $N \circ \gamma$ como la parametrización de una parte $y < 0$ del ecuador de \mathbb{S}^2 con el punto medio $(0, -1, 0)$, rotando la esfera \mathbb{S}^2 de ser necesario. Del ítem a) tenemos que N es inyectiva en $D_r(p_1) \cup \gamma \cup D_r(p_2)$.

Por el momento vamos a suponer de manera adicional que las clausuras $\tilde{D}_r(p_1)$ y $\tilde{D}_r(p_2)$ en $\tilde{\Omega}$ están en Ω , es decir $\tilde{D}_r(p_1) = \overline{D}_r(p_1)$ y $\tilde{D}_r(p_2) = \overline{D}_r(p_2)$. Notemos que N es inyectiva sobre la unión de $\overline{D}_r(p_1)$, $\overline{D}_r(p_2)$ y γ .

Para algún $\varepsilon > 0$, N aplica un entorno $U(\varepsilon)$ de γ en Ω de manera inyectiva sobre la ε -franja alrededor de $N \circ \gamma$. De hecho N seguirá siendo inyectiva sobre la unión de $U(\varepsilon)$ con $\overline{D}_r(p_1)$ y $\overline{D}_r(p_2)$. Sea $\hat{\varepsilon} > 0$ el supremo de todos los valores de ε que pertenecen al intervalo $(0, r)$ para el cual $U(\varepsilon)$ exista. Además es claro que $U(\hat{\varepsilon}) \subset \Omega$. Supongamos que $\hat{\varepsilon} < r$. Ver figura 4.20.

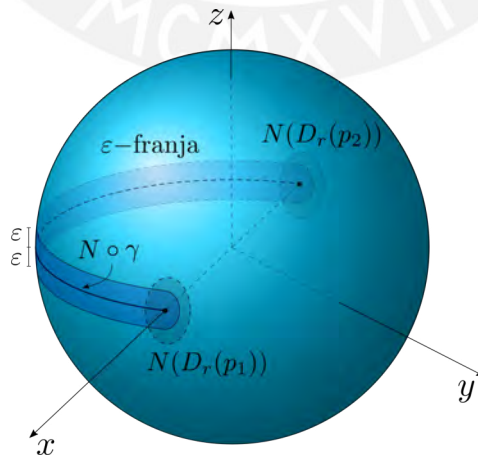


Figura 4.20: $N(U(\hat{\varepsilon}))$, $\hat{\varepsilon} < r$.

Entonces en algún lugar de la clausura de $U(\hat{\varepsilon})$ en $\tilde{\Omega}$ debe haber un punto p en $\partial\tilde{\Omega}$. Además de eso, $\tilde{N}(p)$ debe encontrarse en la parte de la frontera de $N(U(\hat{\varepsilon}))$ que corre a lo largo de un círculo no geodésico Γ sobre \mathbb{S}^2 paralelos a $N \circ \gamma$ con su centro en el lado opuesto de Γ . En consecuencia $\tilde{\Omega}$ sería cóncavo en p , contradiciendo el hecho de que Ω es pseudo-convexo. Por tanto concluimos que $\hat{\varepsilon} = r$. El próximo paso de la demostración es construir una familia decreciente de entornos V_θ en Ω , con $0 \leq \theta \leq \hat{\theta} \leq \pi/2$, de modo que $N(V_0)$ es justamente la r -franja alrededor de $N \circ \gamma$ y entonces $V_{\hat{\theta}}$ es convexo. Ver la figura 4.21

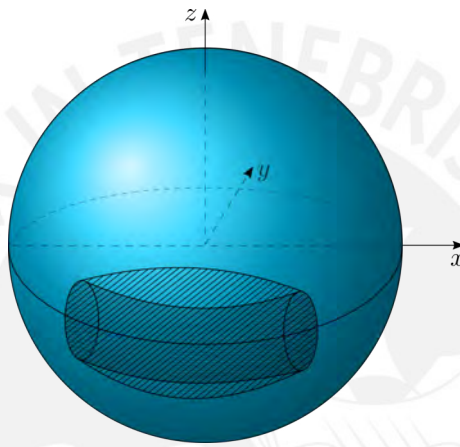


Figura 4.21: r -franja (sombreada) y $N(V_{\hat{\theta}})$ (rayado)

Y su construcción se da de la siguiente manera. Sea \mathcal{C} el cilindro elíptico formado por la unión de todas las líneas paralelas al eje x en entre los bordes de $N(D_r(p_1))$ y $N(D_r(p_2))$. Ver la figura 4.22

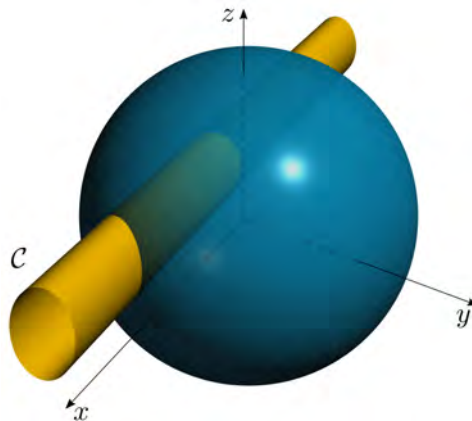
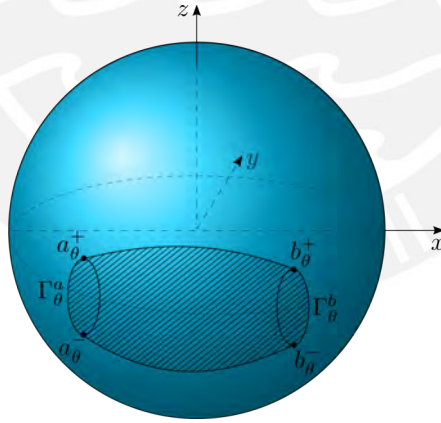
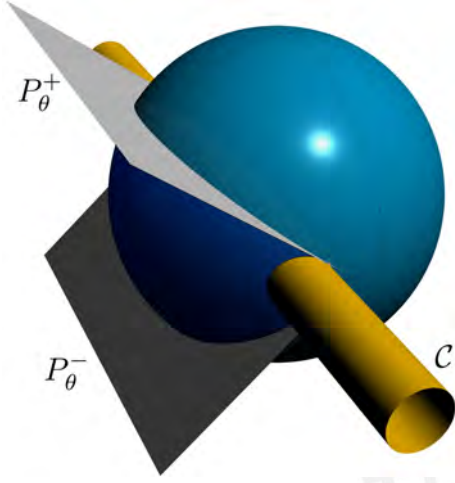
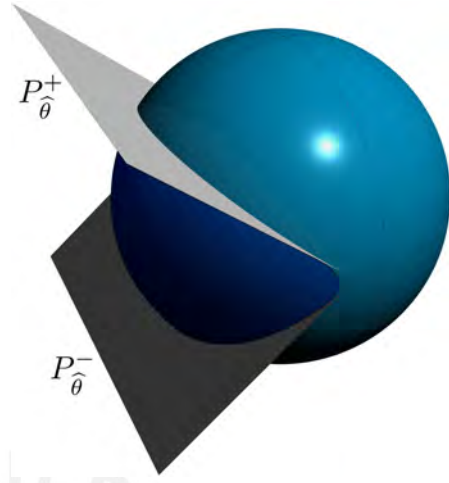


Figura 4.22: Cilindro elíptico \mathcal{C} .

Sean P_0^+ y P_0^- los planos horizontales en \mathbb{R}^3 tangentes a \mathcal{C} por encima y por debajo, respectivamente. Sea $y_0 < 0$ la ordenada del centro de $N(D_r(p_1))$ y $N(D_r(p_2))$. Para cualquier θ en el intervalo $(0, \pi/2]$, denotemos por P_θ^+ y P_θ^- a los planos en \mathbb{R}^3 que forman un ángulo θ con el plano $z = 0$ y que son tangentes a \mathcal{C} a lo largo de la recta $y = \text{const.} \geq y_0$ con $z = \text{const.} \geq 0$ y $z = \text{const.} \leq 0$, respectivamente. Es claro que los planos $P_{\pi/2}^+$ y $P_{\pi/2}^-$ coinciden y son verticales. Por otro lado, ambas familias de planos P_θ^+ y P_θ^- son continuas en $[0, \pi/2]$, y representan “el enrollamiento hacia atrás” a lo largo de \mathcal{C} de P_0^+ y P_0^- , respectivamente, hasta que se logre la posición vertical común. Es claro que existe un único valor $\hat{\theta}$ en $(0, \pi/2]$ para el cual los planos $P_{\hat{\theta}}^+$ y $P_{\hat{\theta}}^-$ pasan por el origen de coordenadas y cortan a \mathbb{S}^2 en círculos geodésicos tangentes a los bordes de $N(D_r(p_1))$ y $N(D_r(p_2))$. Antes de definir los entornos V_θ en Ω para $\theta \in [0, \hat{\theta}]$, serán necesarias algunas construcciones adicionales en \mathbb{S}^2 . Sean a_θ^+ y b_θ^+ los puntos donde P_θ^+ interseca las clausuras de $N(D_r(p_1))$ y $N(D_r(p_2))$ respectivamente, a_θ^- y b_θ^- los puntos donde P_θ^- interseca las clausuras de $N(D_r(p_1))$ y $N(D_r(p_2))$ respectivamente. Sea Γ_θ^a el camino a lo largo del lado izquierdo de la frontera de $N(D_r(p_1))$ uniendo a a_θ^+ con a_θ^- y sea Γ_θ^b el camino a lo largo del lado izquierdo de la frontera de $N(D_r(p_2))$ uniendo a b_θ^+ con b_θ^- .

Figura 4.23: θ -entorno de $N \circ \gamma$

Finalmente para cualquier valor $\theta \in [0, \hat{\theta}]$, la región abierta en \mathbb{S}^2 debajo de P_θ^+ y encima de P_θ^- , a la derecha de Γ_θ^a y a la izquierda de Γ_θ^b será llamado un θ -entorno de $N \circ \gamma$ en \mathbb{S}^2 . Observamos que el 0-entorno de $N \circ \gamma$ es la f -franja y el θ -entorno contiene cualquier θ' -entorno, donde $0 \leq \theta' \leq \theta \leq \hat{\theta}$.

Figura 4.24: θ -entorno.Figura 4.25: $\hat{\theta}$ -entorno.

Ahora sea $\tilde{\theta} > 0$ el supremo de todos los valores de θ en el intervalo $[0, \hat{\theta}]$ tal que algún entorno V_θ de γ en Ω es aplicada de manera inyectiva por N en un θ -entorno de $N \circ \gamma$ en \mathbb{S}^2 . Queda claro que $V_{\tilde{\theta}}$ existe. Supongamos que $\tilde{\theta} < \hat{\theta}$, entonces debe existir algún punto p en la clausura de $V_{\tilde{\theta}}$ en $\tilde{\Omega}$ que está en $\partial\tilde{\Omega}$. Bajo nuestra suposición que Ω contiene las clausuras $\tilde{D}_r(p_1)$ y $\tilde{D}_r(p_2)$ de $D_r(p_1)$ y $D_r(p_2)$ en $\tilde{\Omega}$, entonces $\tilde{N}(p)$ debe tener distancia mayor que r de los extremos de $N \circ \gamma$. Por tanto $\tilde{N}(p)$ estaría a lo largo del arco de un círculo no geodésico $\Gamma = P_{\tilde{\theta}}^+ \cap \mathbb{S}^2$ o $P_{\tilde{\theta}}^- \cap \mathbb{S}^2$, cuyo centro en \mathbb{S}^2 está del lado opuesto de Γ del $\tilde{\theta}$ -entorno de $N \circ \gamma$. Por tanto, si $\tilde{\theta} < \hat{\theta}$ tenemos que $\tilde{\Omega}$ sería cóncavo en p , lo cual es una contradicción. En consecuencia $\tilde{\theta} = \hat{\theta}$. Ahora consideremos H como el conjunto $V_{\hat{\theta}}$ en Ω . Entonces Y es convexo pues el $\hat{\theta}$ -entorno de $N \circ \gamma$ en \mathbb{S}^2 es convexo. Para completar la demostración necesitamos ver que ocurre cuando las clausuras de $D_r(p_1)$ y $D_r(p_2)$ en $\tilde{\Omega}$ no están completamente dentro de Ω . Observemos que para cada ρ en $(0, r)$, los discos geodésicos completos $D_\rho(p_1)$ y $D_\rho(p_2)$ tienen clausura en $\tilde{\Omega}$ que están completamente dentro de Ω . aplicando los argumentos del caso previo tenemos la existencia de un conjunto H_ρ en Ω que contiene a γ , $D_\rho(p_1)$ y $D_\rho(p_2)$. Entonces basta tomar H como la unión de todos los H_ρ con $\rho \in (0, r)$, es decir

$$H = \bigcup_{\rho \in (0, r)} H_\rho$$

el conjunto abierto H es convexo y contiene a γ , $D_r(p_1)$ y $D_r(p_2)$.

- c) Supongamos que existen dos caminos geodésicos distintos γ_1 y γ_2 en Ω que unen p_1 con p_2 , luego por la afirmación 4.2.16, si Ω no es una esfera, entonces $l(\gamma_j) < \pi$ para $j = 1, 2$. Entonces $N \circ \gamma_1 = N \circ \gamma_2$ lo cual contradice el hecho de que N es localmente inyectiva en Ω . Por tanto existe una única geodésica γ en Ω que une p_1 con p_2 , donde además $l(\gamma) = d(p_1, p_2)$.

□

Con todas estas herramientas a la mano, ya estamos listos para demostrar el lema B.

Demostración del lema B. En primer lugar observemos que si Ω es una esfera, entonces N es inyectiva sobre Ω , $N(\Omega) = \mathbb{S}^2$ y Ω tiene área finita igual a 4π . Entonces asumimos de ahora en adelante que Ω no es una esfera. Supongamos que p y q son puntos distintos en Ω . Como Ω es conexo, entonces podemos elegir un camino parametrizado Γ en Ω que une p con q . Tenemos además que Γ es compacto y N es una isometría local, entonces existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que cada punto de Γ es el centro de un disco geodésico completo de radio ε en Ω . Ahora fijemos un número finito de puntos $p = p_0, p_1, \dots, p_n = q$ en Γ , indexados en el orden indicado de la parametrización de Γ , de manera que $d(p_{j-1}, p_j) < \varepsilon$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Sea D_j el disco geodésico completo centrado en p_j con radio ε . Observemos que por construcción el centro de D_j está dentro de D_{j-1} , es decir $p_j \in D_{j-1}$. Entonces por ejemplo que en Ω , p_0 puede ser unido a p_1 por una única geodésica γ_1 , con $l(\gamma_1) = d(p_0, p_1)$. Veamos por inducción que existe una única geodésica γ que une a p_0 con p_n . Supongamos que para todo $j = 1, 2, \dots, n-1$ fijo podemos unir p_0 con p_j por una única geodésica γ_j en Ω , con $l(\gamma_j) = d(p_0, p_j)$. Por la afirmación 4.2.16 tenemos que $l(\gamma_j) < \pi$ y por la afirmación 4.2.17, $l(\gamma_j) + 2\varepsilon \leq \pi$ con $l(\gamma_j) = d(p_0, p_j)$. Por otro lado podemos usar el conjunto abierto convexo H proporcionado por la afirmación 4.2.17 para garantizar la existencia de una geodésica γ_{j+1} que une p_0 con p_{j+1} , ya que el último punto se encuentra dentro de D_j . Finalmente, γ_{j+1} debe ser la única geodésica en Ω que une p_0 con p_{j+1} y $l(\gamma_{j+1}) = d(p_0, p_{j+1})$. Así, por inducción, $p = p_0$ puede ser unido con $q = p_n$ por medio de una única geodésica γ_n , con $l(\gamma_n) = d(p, q)$. Esto significa que Ω es convexo.

- a) Sean p y q dos puntos distintos de Ω , entonces por el argumento anterior existe una única geodésica γ en Ω que une p con q y además $l(\gamma) = d(p, q) <$

- π . Pero como $N|_\gamma$ es inyectiva, tenemos que $N(p) \neq N(q)$. Por tanto N es inyectiva en Ω .
- b) Observemos que $N(\Omega)$ es la imagen isométrica inyectiva de la superficie convexa Ω . Dado que cualquier conjunto convexo en \mathbb{S}^2 debe ser simplemente conexo, Ω en sí mismo debe ser simplemente conexo.
- c) La primer afirmación de este ítem se deriva directamente del ítem *a*, ya que \mathbb{S}^2 tiene área finita. La afirmación más específica de que Ω tiene área $\leq 2\pi$, cuando Ω no es la esfera, se establece mediante la siguiente afirmación. (Ver también el ejercicio 1 de [Sto89, p. 280]).

Afirmación 4.2.18. *Si E es un subconjunto convexo de \mathbb{S}^2 , entonces E está contenido en un hemisferio de \mathbb{S}^2 . (Si E es además abierto, entonces E está contenido en un hemisferio abierto de \mathbb{S}^2).*

Sea q un punto de \mathbb{S}^2 cuya distancia r a \overline{E} es maximal. Si $r \geq \pi/2$ la afirmación quedaría demostrada. Supongamos entonces que $0 < r < \pi/2$ y que existe un único punto $p \in \overline{E}$ a una distancia de q , es decir $r = d(p, q) = d(q, \overline{E})$. Sea D el disco geodésico centrado en p y de radio $\varepsilon < r/2$.

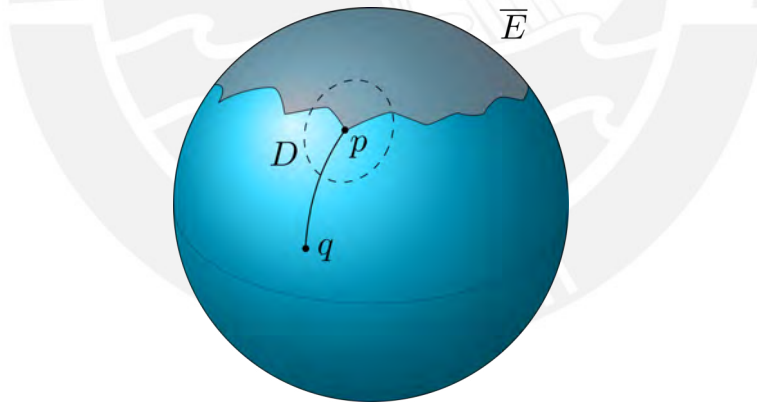


Figura 4.26: $D = D_\varepsilon(p)$ con $\varepsilon < \pi/2$.

Entonces el conjunto compacto $\overline{E} \setminus (D \cap \overline{E})$ tiene distancia $\rho > r$ de q . Traslademos el punto q a una distancia δ del punto p , donde $\delta < \min\{\rho - r, \pi/2 - r\}$ a lo largo de la geodésica que une p con q en la esfera. El nuevo punto \hat{q} alcanzado en \mathbb{S}^2 tiene una distancia mayor que r a $\overline{E} \cap \overline{D}$, ya que \overline{D} se encuentra en el hemisferio abierto de \mathbb{S}^2 que consta de todos los puntos más cercanos a q que a \hat{q} . Pero, por nuestra elección de δ , la distancia de \hat{q} a $\overline{E} \setminus (D \cap \overline{E})$

también es mayor que r . En efecto, tomamos el punto medio q_m del arco geodésico γ que une q con \hat{q} , sea C_{q_m} el círculo geodésico que pasa por q_m formando un ángulo recto con γ

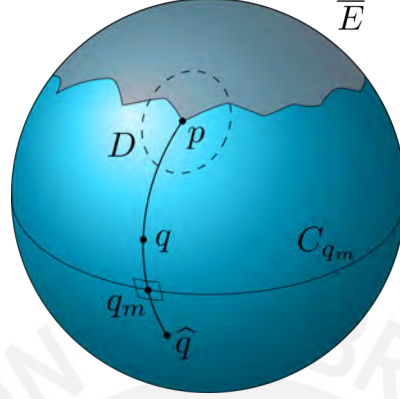


Figura 4.27: $d(\hat{q}, p) = \delta$ donde $\delta < \min\{\rho - r, \pi/2 - r\}$.

Sea $u \in \bar{D}$, entonces

$$\begin{aligned} d(\hat{q}, u) &\leq d(\hat{q}, q) + d(q, u) \\ &< \min\{\rho - r, \pi/2 - r\} + d(q, p) + d(p, u) \\ &< \pi/2 - r + r + r/2 \\ &< 3\pi/4 \end{aligned}$$

dado que $0 < r < \pi/2$. Entonces, existe un hemisferio abierto que contiene a \bar{D} , q , q_m y \hat{q} . Para cualquier $u \in \bar{D}$, existe un arco geodésico γ_1 uniendo u con q y γ_2 uniendo u con \hat{q} . Sea $Q = \gamma_2 \cap C_{q_m}$. Luego

$$d(q, u) \leq d(p, Q) + d(Q, u) = d(\hat{q}, Q) + d(Q, u) = d(\hat{q}, u).$$

Notemos que $\bar{E} \cap \bar{D}$ es compacto y que $d(q, \bar{E} \cap \bar{D}) = r$, entonces

$$d(\hat{q}, \bar{E} \cap \bar{D}) > d(q, \bar{E} \cap \bar{D}) = r.$$

Por otro lado, si $u \in \bar{E} \setminus (D \cap \bar{E})$, entonces

$$d(\hat{q}, u) \geq d(q, u) - d(q, \hat{q}) > \rho - \delta > r.$$

En consecuencia $d(\hat{q}, \bar{E} \setminus (D \cap \bar{E})) > r$.

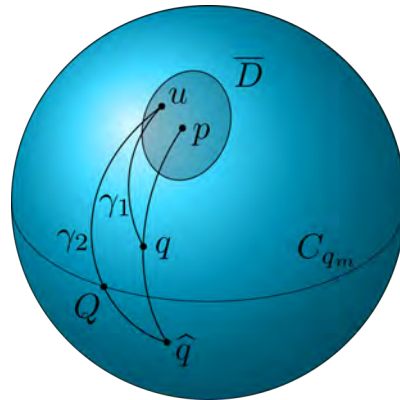


Figura 4.28: $d(\hat{q}, \bar{E} \setminus (D \cap \bar{E})) > r$.

Por tanto \hat{q} está más lejos de \bar{E} que q , lo que contradice nuestra elección de q . De ello se deduce que debe haber al menos dos puntos p_1 y p_2 de \bar{E} a una distancia r de q .

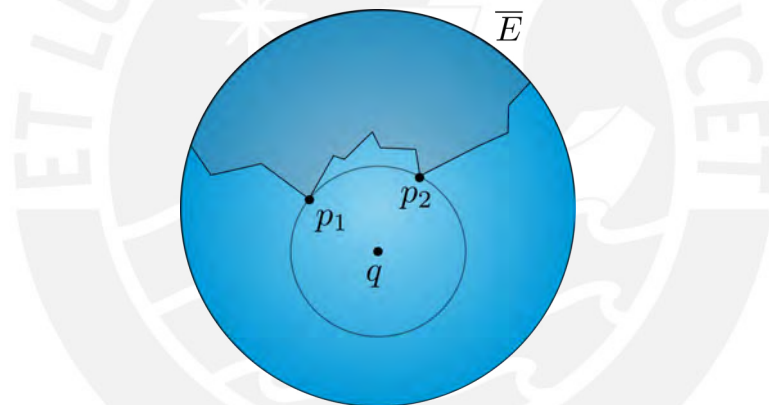


Figura 4.29: $d(q, p_1) = d(q, p_2) = r < \pi/2$.

Consideremos ahora el arco geodésico en \mathbb{S}^2 que minimiza la distancia entre p_1 y p_2 . Excepto en sus extremos, este arco está fuera de \bar{E} , pues $0 < r < \pi$. Como p_1 y p_2 pertenecen a \bar{E} , existen puntos q_1 y q_2 en E arbitrariamente próximos de p_1 y p_2 , respectivamente. Podemos escoger q_1 y q_2 de manera que el arco geodésico minimizante que une estos puntos contenga puntos fuera de E . Esto contradice la convexidad de E . Por tanto el caso $0 < r < \pi/2$ no ocurre.

Ahora sólo resta eliminar la posibilidad $r = 0$. Como $r = 0$, tenemos que E es denso en \mathbb{S}^2 . Dado que \mathbb{S}^2 no es convexo, entonces existe un punto q en \mathbb{S}^2 que no pertenece a E . Consideremos el hemisferio abierto H con centros en q y tomamos algún triángulo geodésico T en H , cuyo interior de T contenga a q . Como E

es denso en \mathbb{S}^2 , existen tres puntos distintos p_1, p_2 y p_3 en E arbitrariamente próximos de los vértices de T , tal que el triángulo geodésico determinado por estos puntos tiene a q en su interior, en H .

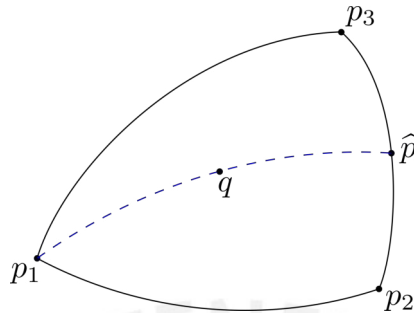


Figura 4.30: Triángulo geodésico en H .

Pero el arco geodésico minimizante en \mathbb{S}^2 que une a p_1 con q se extiende hasta un arco geodésico minimizante en \mathbb{S}^2 que une a p con \hat{p} que se encuentra al lado opuesto del triángulo. Como E es convexo, q debe pertenecer a E , lo cual es una contradicción. \square

4.2.3 Demostración del Lema Principal

El resultado en el corazón de la demostración de Efimov es el lema Principal que se demostrará en esta sub-sección. El lema Principal afirma que si existe una inmersión de cierta región en \mathbb{R}^2 tal que sus autovalores asociados al diferencial de la inmersión son reales y están uniformemente acotados, entonces existe un conjunto dentro de esta región que no es un espacio métrico completo con la distancia en la métrica inducida por la inmersión.

La forma bastante particular de la región D facilita la demostración del teorema de Efimov y es natural preguntarse si otro tipo de regiones también servirían para este propósito. Tilla Klotz Milnor observó en [Mil72], que la conclusión del lema Principal sigue siendo válida bajo ciertas modificaciones en la forma de dicha región, pero la propiedad esencial que debe mantenerse es que D sea cóncavo en el origen, es decir en el punto de ∂D que falta en D . El siguiente ejemplo pretende enfatizar este hecho.

Ejemplo 4.2.19. Consideremos la aplicación

$$F : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto F(x, y) := \left(x, \frac{1}{x} - y \right)$$

donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Luego tenemos

$$dF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & -1 \end{pmatrix}$$

y en consecuencia

$$\det(dF - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

Entonces los autovalores de dF son reales y uniformemente acotados, dado que

$$-2 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq 2.$$

Además como $\det(dF) \neq 0$, entonces dF es inyectiva, de donde se sigue que F es una inmersión. Observemos que esta inmersión F aplica la región convexa

$$\mathcal{R} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, x > 0\}$$

en un subconjunto cerrado (y por tanto completo) del plano.

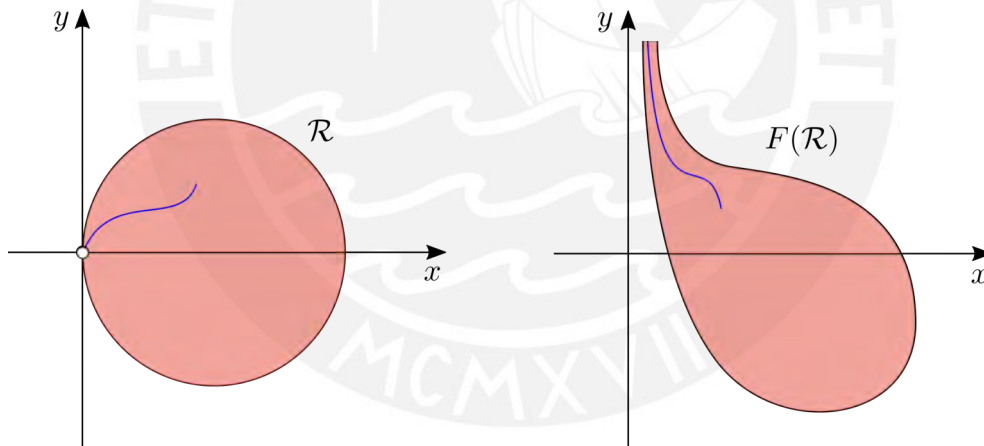


Figura 4.31: \mathcal{R} y $F(\mathcal{R})$.

Las curvas en \mathcal{R} que se acercan al origen son aplicadas por F en curvas que tienden al infinito, lo que implica que las longitudes de sus imágenes en $F(\mathcal{R})$ divergen para la métrica Euclidiana. Luego \mathcal{R} dotada con la distancia d_D^* asociada a la métrica riemanniana g^* inducida por F es un espacio completo.

Tengamos en cuenta que Efimov en su lema Principal (original) asume que los autovalores λ_1 y λ_2 tienen signos opuestos. Dado que su prueba no hace uso de esta suposición, T. Milnor lo descarta.

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un camino no necesariamente regular. Consideremos $\mathcal{P}([a, b])$ el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$. Una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$ termina una secuencia de puntos $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$ en el camino γ que definen un poligonal con longitud dada por

$$V(P) = \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|.$$

Definición 4.2.20. Diremos que γ es un camino rectificable cuando el conjunto $\{V(P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$ está acotado superiormente. En este caso definimos la longitud del camino γ como

$$\sup \{V(P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}.$$

Denotaremos por $l(\gamma)$ la longitud del camino Euclidiana ordinaria de cualquier camino γ en \mathbb{R}^2 , escribiendo así $l(\gamma) = \infty$ en caso γ no es rectificable. Para un camino γ en \mathcal{D} , denotaremos por $l^*(\gamma)$ a la g^* -longitud de γ , de modo que, como se señaló anteriormente $l^*(\gamma) = l(F \circ \gamma)$. Si un camino γ en \mathcal{D} no es rectificable, tenemos $l^*(\gamma) = \infty$. Es claro que $d_D^* = \inf \{l^*(\gamma) : \gamma \text{ une } p \text{ con } q \text{ en } D\}$.

Definición 4.2.21. Una función ξ se dice que es de variación acotada en un camino $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ si existe un número real positivo $M > 0$ tal que para cualquier partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$ se tiene

$$V_\xi(P) = \sum_{k=1}^n \|\xi(\gamma(t_k)) - \xi(\gamma(t_{k-1}))\| \leq M.$$

Definimos la variación total de ξ en γ , que será denotada por $l_\xi(\gamma)$, como

$$l_\xi(\gamma) = \sup \{V_\xi(P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}.$$

Consideremos en lo que sigue de esta sección los conjuntos D y \mathcal{D} definidos en 4.2.

Hipótesis 1. $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una C^1 -inmersión.

Definición 4.2.22. Un camino γ en D , parametrizado por g^* -longitud de arco, que une dos puntos p y q en D es llamado un camino g^* -minimizante si no existe otro arco en D que una p con q que tenga una g^* -longitud menor que la g^* -longitud de γ .

Observación 4.2.23. Un camino g^* -minimizante γ en D debe ser C^1 -suave. Esto es obvio cuando γ evita la frontera C^∞ por partes ∂D de D , ya que cualquier sub-camino conexo de γ dentro del interior de D es aplicado por F de manera inyectiva sobre un segmento de línea en \mathbb{R}^2 . Para la demostración de que un camino g^* -minimizante γ es de clase C^1 incluso si este toca a ∂D , puede ver [Mil72, Apéndice 3].

Definición 4.2.24. Un camino $\rho : [0, \infty) \rightarrow D$ es llamado rayo distinguido si la restricción de ρ a cualquier intervalo finito $[0, s]$ es un camino g^* -minimizante en D . (Por tanto cualquier rayo distinguido ρ está parametrizado por su g^* -longitud de arco mientras que $l^*(\gamma) = \infty$. Según la observación 4.2.23, cualquier rayo distinguido es C^1 -suave).

Observación 4.2.25. Si ρ es un rayo distinguido, entonces $\rho(s)$ debe converger al origen en \mathbb{R}^2 cuando $s \rightarrow +\infty$. Caso contrario, para valores arbitrariamente grandes del parámetro de g^* -longitud de arco s , tenemos que ρ volvería a algún subconjunto compacto $K \subset D$. Pero como la g^* -longitud de ρ entre dos de sus puntos es igual a la distancia d_D^* entre ellos, esto produciría puntos del compacto K arbitrariamente alejados en la distancia d_D^* , lo cual es imposible.

Observación 4.2.26. Si $\rho : [0, \infty) \rightarrow D$ es tal que $F \circ \rho$ produce la parametrización por longitud de arco de un rayo euclidiano, entonces ρ es un rayo distinguido.

Definición 4.2.27. Dado un número real θ , consideremos la función lineal en \mathbb{R}^2 ,

$$\xi(x, y) = x \cos \theta + y \sin \theta.$$

Sea γ un camino rectificable y $l_\xi(\gamma)$ la variación total de ξ en γ . Por tanto, cuando $\theta = 0$, tenemos $l_x(\gamma)$ que es la variación total de x en γ ; y cuando $\theta = \pi/2$ tenemos $l_y(\gamma)$ que es la variación total de y en γ . Ahora, si γ pertenece completamente a \mathcal{D} vamos a denotar por $l_\xi^*(\gamma)$ a la variación total de ξ en $F \circ \gamma$, es decir

$$l_\xi^*(\gamma) = l_\xi(F \circ \gamma).$$

En particular,

$$l_x^*(\gamma) = l_x(F \circ \gamma), \quad l_y^*(\gamma) = l_y(F \circ \gamma).$$

Observación 4.2.28. Notemos que $l(\gamma) \leq l_x(\gamma) + l_y(\gamma)$, y si γ está en \mathcal{D} , entonces $l^*(\gamma) \leq l_x^*(\gamma) + l_y^*(\gamma)$.

Definición 4.2.29. Una cuasi-distancia \widehat{d} en D es una función de $D \times D$ en \mathbb{R} que satisface las propiedades usuales de una distancia, excepto que $\widehat{d}(p, q) = 0$ es posible incluso si $p \neq q$. De manera más específica, \widehat{d} debe satisfacer:

- a) $\widehat{d}(p, q) \geq 0$,
- b) $\widehat{d}(p, p) = 0$,
- c) $\widehat{d}(p, q) = \widehat{d}(q, p)$,
- d) $\widehat{d}(p, q) \leq \widehat{d}(p, r) + \widehat{d}(r, q)$,

para todo p, q y r en D . Diremos que una cuasi-distancia \widehat{d} es mayorada por d_D^* siempre que $\widehat{d}(p, q) \leq d_D^*(p, q)$ para todo p y q en D .

Definición 4.2.30. Definimos la cuasi-longitud de un camino rectificable $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ como

$$\widehat{l}(\gamma) = \sup \sum_{k=1}^n \widehat{d}(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)),$$

para todas las particiones finitas $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$. Es claro que $\widehat{l}(\gamma)$ puede ser infinito.

Observación 4.2.31. La distancia d_D^* es una cuasi-distancia, mayorada por sí misma, con la cuasi-longitud asociada l^* . De manera más precisa, dado cualquier θ con $\xi = x \cos \theta + y \sen \theta$, la función d_ξ^* dada por

$$d_\xi^*(p, q) = \inf \{l_\xi^*(\gamma) : \gamma \text{ une } p \text{ con } q \text{ en } D\}$$

es una cuasi-distancia en D , mayorada por d_D^* , con la cuasi-longitud asociada l_ξ^* .

Lema 4.2.32. Si una sucesión de caminos $\nu_j : [0, 1] \rightarrow D$ converge uniformemente en la distancia d_D^* para un camino $\nu : [0, 1] \rightarrow D$, necesariamente continuo, y si \widehat{d} es una cuasi-distancia en D mayorada por d_D^* , entonces

$$\widehat{l}(\nu) \leq \liminf \widehat{l}(\nu_j).$$

Demostración. Desde luego $\widehat{l}(\nu)$, así como $l^*(\nu_j)$, puede ser finito o infinito. En cualquier caso, dado un $M < \widehat{l}(\nu)$, elegimos una partición

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$$

de $[0, 1]$ tal que

$$M < \sum_{i=1}^k \widehat{d}(\nu(t_{i-1}), \nu(t_i)).$$

como ν_j converge uniformemente para ν y \widehat{d} es mayorada por d_D^* , entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero $N = N(M, \varepsilon)$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} \widehat{d}(\nu(t), \nu_j(t)) \leq \max_{t \in [0,1]} d_D^*(\nu(t), \nu_j(t)) < \frac{\varepsilon}{2k}$$

para todo $j \geq N$. Luego tenemos que,

$$\begin{aligned} M &< \sum_{i=1}^k \widehat{d}(\nu(t_{i-1}), \nu_j(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \widehat{d}(\nu_j(t_{i-1}), \nu_j(t_i)) + \sum_{i=1}^k \widehat{d}(\nu_j(t_i), \nu(t_i)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2k} \cdot k + \widehat{l}(\nu_j) + \frac{\varepsilon}{2k} \cdot k = \widehat{l}(\nu_j) + \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $j \geq N$. tomando supremo a ambos lados, y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$, tenemos

$$\widehat{l}(\nu) \leq \liminf \widehat{l}(\nu_j).$$

□

Corolario 4.2.33. *Si la sucesión de caminos $\nu_j : [0, 1] \rightarrow D$ converge uniformemente en la distancia d_D^* para un camino $\nu : [0, 1] \rightarrow D$, necesariamente continuo, entonces*

$$l_\xi^*(\nu) \leq \liminf l_\xi^*(\nu_j)$$

para cualquier θ fijo, con $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$.

Demostración. Basta aplicar el lema 4.2.32 a la cuasi-distancia d_ξ^* . □

Corolario 4.2.34. *Si la sucesión $\gamma_j : [a, b] \rightarrow D$ de caminos g^* -minimizantes en D converge uniformemente en la métrica d_D^* para el camino $\gamma : [a, b] \rightarrow D$, entonces γ es también un camino g^* -minimizante en D .*

Demostración. Notemos primero que la distancia d_D^* desde $\gamma_j(a)$ hasta $\gamma_j(b)$ es $b - a$ para todo j . Luego haciendo $j \rightarrow \infty$, se sigue que

$$d_D^*(\gamma(a), \gamma(b)) = b - a.$$

El lema 4.2.32 garantiza que

$$l^*(\gamma) \leq \liminf l^*(\gamma_j) = b - a,$$

dado que d_D^* es una cuasi-distancia mayorada por si mismas. Por tanto $l^*(\gamma) = b - a$, y para mostrar que γ es un camino g^* -minimizante en D , solo necesitamos verificar que γ está parametrizado por un parámetro de g^* -longitud de arco. con este fin, dado cualquier s fijo en (a, b) aplicamos los argumentos recién completados a los caminos $\gamma_j|_{[a, s]}$ en lugar de a los caminos γ_j . Eso da como resultado el hecho de que $\gamma_j|_{[a, s]}$ tiene g^* -longitud $s - a$, lo cual prueba el corolario. \square

Lema 4.2.35. *Si D es completo en la distancia d_D^* , entonces existe un radio distinguido en D .*

Demostración. Queremos construir un rayo distinguido $\rho : [0, +\infty) \rightarrow D$. Cualquier punto en D puede servir como punto inicial p_0 para ρ . Por conveniencia, tomamos $p_0 = (r, 0)$, donde $r > 0$ es el radio de la circunferencia C usada en la construcción de D . Para $k = 1, 2, \dots$ consideremos la exhaustión de D por los conjuntos compactos

$$D(k) = \left\{ (x, y) \in D : x^2 + y^2 \geq \frac{r^2}{2^k} \right\},$$

y sea $d_{D(k)}^*$ la distancia en $D(k)$ definida por

$$d_{D(k)}^* = \inf \{ l^*(\gamma) : \gamma \text{ une } p \text{ con } q \text{ en } D(k) \}.$$

Como $C(k) = \left\{ (x, y) \in D : x^2 + y^2 = \frac{r^2}{2^k} \right\}$ es compacto para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces existe un punto $p_k \in C(k)$ tal que

$$d_{D(k)}^*(p_0, C(k)) = d_{D(k)}^*(p_0, p_k) := c_k.$$

Diremos que el camino $\gamma : [0, l^*(\gamma)] \rightarrow D(k)$ es g^* -minimizante en $D(k)$ si γ está parametrizado por g^* -longitud de arco, con $l(\gamma)$ igual a la distancia $d_{D(k)}^*$ entre sus extremos. Vamos a construir para cada $k \in \mathbb{N}$ un camino g^* -minimizante en $D(k)$ de p_0 a p_k . Tomando k fijo. Por la definición de $d_{D(k)}^*$, podemos encontrar una sucesión de caminos

$$\nu_j : [0, l^*(\nu_j)] \rightarrow D(k)$$

que van de p_0 a p_k , tal que cada ν_j sea parametrizado por g^* -longitud de arco y que $l^*(\nu_j) \rightarrow c_k$ cuando $j \rightarrow +\infty$. Restringiendo cada ν_j al intervalo $[0, c_k]$, tenemos que $\nu_j([0, c_k])$ está enteramente contenido en $D(k)$, pues caso contrario

tendríamos para algún j_0 y algún $s_0 < c_k$ que $\nu_{j_0}(s_0) = \bar{p} \in C(k)$ lo que implicaría que $d_{D(k)}^*(p_0, \bar{p}) < c_k = d_{D(k)}^*(p_0, C_k)$ lo cual es una contradicción. De este modo $\nu_j|_{[0, c_k]}$ es camino en $D(k)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $(\nu_j|_{[0, c_k]})_j$ es equicontinua y el conjunto $\{\nu_j(s) : j \in \mathbb{N}\} \subset D(k)$ es relativamente compacto entonces el teorema de Ascoli-Arzelá garantiza la existencia de una subsucesión de $(\nu_j|_{[0, c_k]})_j$ que converge uniformemente para un camino, necesariamente continuo,

$$\gamma_k : [0, c_k] \rightarrow D(k)$$

que va de p_0 a p_k . como $l^*(\nu_j|_{[0, c_k]}) \rightarrow c_k$ cuando $j \rightarrow +\infty$, se sigue del lema 4.2.32 que

$$l^*(\gamma_k) \leq \lim_{j \rightarrow +\infty} l^*(\nu_j|_{[0, c_k]}) = c_k.$$

Pero por la definición de c_k tenemos $l^*(\gamma_k) \geq c_k$, en consecuencia $l^*(\gamma_k) = c_k$.

Para mostrar que γ_k es g^* -minimizante en D nos resta ver que γ_k está parametrizado por g^* -longitud de arco, para esto consideremos cualquier s en $[0, c_k]$ y aplicamos nuevamente el lema 4.2.32 a las restricciones de γ_k y ν_j a $[0, s]$ y $[s, c_k]$. Obteniendo así

$$\begin{aligned} l^*(\gamma_k|_{[0, s]}) &\leq \lim_{j \rightarrow +\infty} l^*(\nu_j|_{[0, s]}) = s, \\ l^*(\gamma_k|_{[s, c_k]}) &\leq \lim_{j \rightarrow +\infty} l^*(\nu_j|_{[s, c_k]}) = c_k - s. \end{aligned}$$

Pero como vimos antes $l^*(\gamma_k) = c_k$, entonces $l^*(\gamma_k|_{[0, s]}) + l^*(\gamma_k|_{[s, c_k]}) = c_k$. Luego tenemos

$$\begin{aligned} l^*(\gamma_k|_{[0, s]}) &= l^*(\gamma_k|_{[0, s]}) + l^*(\gamma_k|_{[s, c_k]}) - l^*(\gamma_k|_{[s, c_k]}) \\ &= c_k - l^*(\gamma_k|_{[s, c_k]}) \geq s. \end{aligned}$$

Por tanto $l^*(\gamma_k|_{[0, s]}) = s$, es decir γ_k es una camino g^* -minimizante en $D(k)$ que une p_0 con p_k .

Pero observemos ahora que γ_k también debe ser un camino g^* -minimizante en D que une p_0 con p_k , ya que cualquier camino g^* -minimizante en D que une p_0 con p_k que sale de $D(k)$ tendría algún primer punto q el cual intersecaría con $C(k)$, y q estaría más cerca a p en la distancia $d_{D(k)}^*$ que p_k , lo cual es una contradicción.

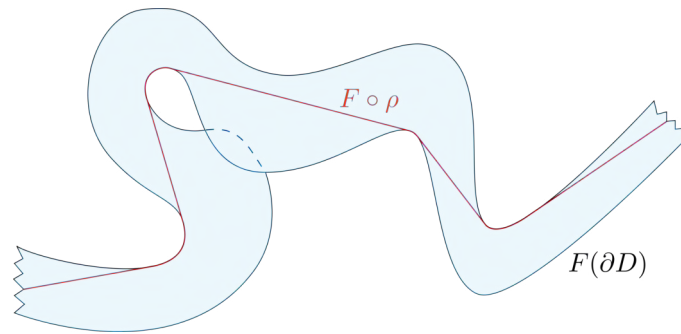
Para cada $m = 1, 2, \dots, k$ denotemos por γ_k^m a la porción de γ desde $\gamma_k(0)$ hasta $\gamma_k(c_m)$, es decir $\gamma_k^m = \gamma_k|_{[0, c_m]}$. Como un sub-camino de γ_k , esta restricción γ_k^m de γ_k a $[0, c_m]$ es en sí misma un camino g^* -minimizante en D . Haciendo uso nuevamente del teorema de Ascoli-Arzelá tenemos: Como $D(1)$ es compacto, entonces existe una subsucesión $N_1 \subset \mathbb{N}$ tal que los caminos $\gamma_k^1 : [0, c_1] \rightarrow D(1)$, para k en N_1 , convergen uniformemente para un camino $\rho_1 : [0, c_1] \rightarrow D(1)$ cuando $k \rightarrow +\infty$ en N_1 . Por el corolario 4.2.34, tenemos que ρ_1 es un camino g^* -minimizante en D . De manera análoga, como $D(2)$ es compacto, entonces existe una subsucesión $N_2 \subset N_1$ tal que los caminos $\gamma_k^2 : [0, c_2] \rightarrow D(2)$, para k en N_2 , converge uniformemente para un camino $\rho_2 : [0, c_2] \rightarrow D(2)$ cuando $k \rightarrow +\infty$ en N_2 , el cual es una extensión de ρ_1 y también es un camino g^* -minimizante en D . Por un proceso inductivo, obtenemos para cada $m = 2, 3, \dots$ una extensión $\rho_m : [0, c_m] \rightarrow D(m)$ de ρ_1 que es un camino g^* -minimizante en D .

Por construcción tenemos que $0 < c_1 < c_2 < \dots$. Sea $c_\infty \leq \infty$ el límite de la sucesión creciente $(c_m)_m$ cuando $m \rightarrow +\infty$. Para cada s en $[0, c_\infty)$ definamos $\rho(s) := \rho_m(s)$, usando cualquier m suficientemente grande de modo que $c_m \geq s$. De esta manera $\rho : [0, c_\infty) \rightarrow D$ así definido es un camino g^* -minimizante entre cualesquiera dos puntos. Es claro que ρ es candidato a ser el rayo distinguido que estábamos buscando, pero para que esto ocurra debemos mostrar que $c_\infty = \infty$. Supongamos entonces que $c_\infty = l^*(\rho) < \infty$. Notemos además que

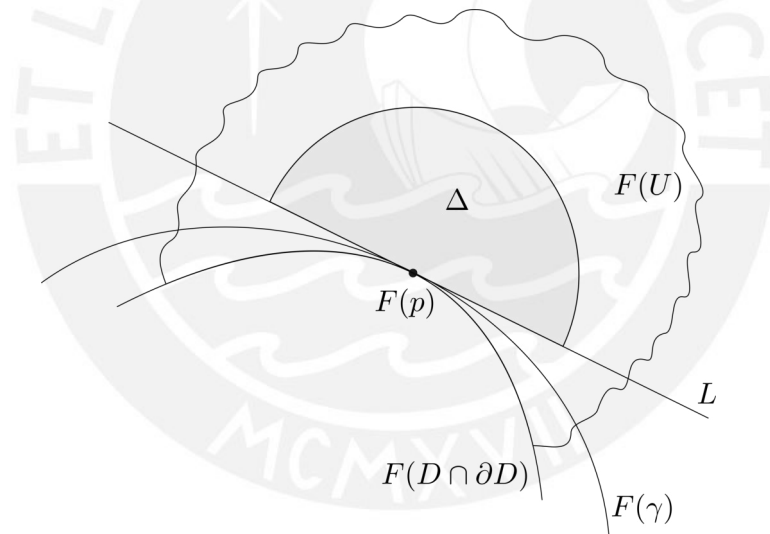
$$d_D^*(p_0, p_1) < d_D^*(p_0, p_2) < \dots < d_D^*(p_0, p_0) < \dots < c_\infty.$$

De esta manera, los puntos $\rho(c_m) = \rho_m(c_m) = p_m$ formarían una sucesión de Cauchy en la métrica d_D^* , esto ocurre dado que $d_D^*(p_i, p_j) = d_D^*(\rho(c_i), \rho(c_j)) = \|c_i - c_j\|$. Como D es completo, entonces la sucesión $(\rho(c_m))_m$ converge para un punto de D . Por la construcción, de los puntos $\rho(c_m)$ en $C(m)$, tenemos que esta sucesión converge para el origen en \mathbb{R}^2 , lo cual es una contradicción. Por tanto ρ es realmente un rayo distinguido. \square

Habiendo probado el lema 4.2.35, será útil tener información sobre el comportamiento de $F \circ \rho$ para cualquier rayo distinguido ρ . Como indica la observación 4.2.23, F toma cualquier sub-camino de ρ que se encuentre en el interior de D y lo lleva a un segmento de recta en \mathbb{R}^2 . Pero, si ρ tiene partes a lo largo de $D \cap \partial D$, la situación puede ser más complicada. de manera general, $F \circ \rho$ puede parecerse a la curva de la figura 4.32.

Figura 4.32: $F(D)$ sombreado

Lema 4.2.36. Sea γ un camino g^* -minimizante en D , sea p en $D \cap \partial D$ un punto interior de γ , y sea U cualquier entorno de p en D . Entonces $F(U)$ contiene uno de los dos semidisks cerrados Δ cortado por la recta tangente L a $F(\gamma)$ en $F(p)$ de algún disco cerrado en \mathbb{R}^2 con centro $F(p)$. Además, $F(\gamma \cap U)$ es disjunto del interior de Δ , siempre que F sea inyectiva en U .

Figura 4.33: Δ sombreado

Demostración. Es suficiente considerar el caso en el que U es compacto y simplemente conexo, con $U \cap \partial D$ conexo, F inyectiva en U y ninguno de los extremos de γ en U . (Cualquier entorno de p en D contiene tal U). De la observación 4.2.23, tenemos que la recta L es tangente a $F(\gamma)$ y $F(D \cap \partial D)$ en $F(p)$. Véase [Mil72, Apéndice 3]. En particular, p no puede ser una esquina de $D \cap \partial D$. Como F es un difeomorfismo local en algún entorno de p en \mathcal{D} , y

como $D \cap \partial D$ es suave en p , la recta L corta el plano tangente a \mathbb{R}^2 en $F(p)$ en dos semiplanos abiertos que consisten de vectores que apuntan para “dentro” o “fuera” de $F(U)$. (De lo contrario, elegimos U aún más pequeño). Elegimos un rayo euclidiano que comience en $F(p)$ cuyo vector tangente inicial apunta “hacia” $F(U)$ en $F(p)$. Algún segmento inicial de este rayo se encuentra dentro de $F(U)$, y puede extenderse hasta que llegue por primera vez al borde del conjunto $F(U)$, digamos en el punto q .

Notemos que q no puede estar en $F(U \cap \partial D)$. Si lo estuviera, el segmento de recta ν desde $F(p)$ hasta q junto con el camino de $F(U \cap \partial D)$ desde $F(p)$ hasta q formarían una curva de Jordan que delimita una región $R \subset F(U)$, como se muestra en la figura 4.34.

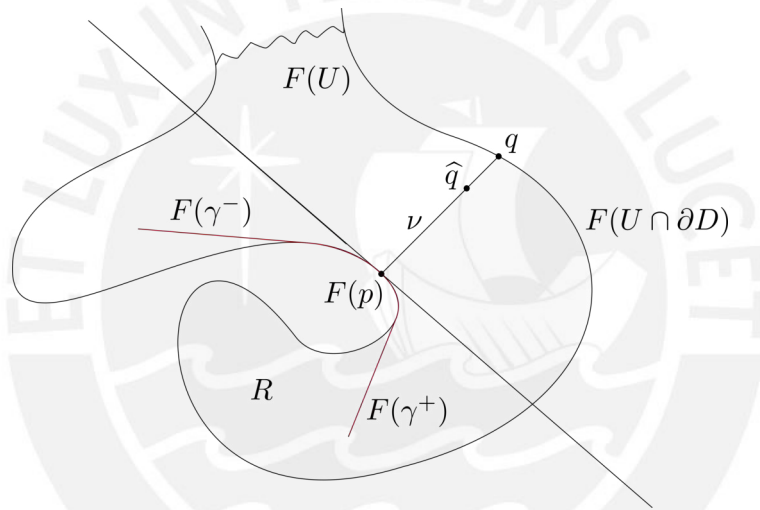


Figura 4.34: R sombreado

Expresemos a γ como la unión de dos sub-caminos cerrados, que se intersecan solo en p . Uno de estos, digamos γ^+ , es llevado por F a un camino que entra inmediatamente en \bar{R} , y que eventualmente debe dejar \bar{R} , ya que ninguno de los extremos de γ se encuentra en el conjunto compacto U . Pero γ no puede cruzar $D \cap \partial D$. Por tanto, $F(\gamma^+)$ sale primero de \bar{R} desde un punto \hat{q} de ν . Esto implicaría, sin embargo, que $F \circ \gamma^+$ coincide con ν de $F(p)$ a \hat{q} , dado que γ^+ es un camino g^* -minimizante en D entre dos de sus puntos. Pero $F \circ \gamma$ es tangente a L en p , lo que lleva a una contradicción.

Se sigue entonces que q se encuentra en $F(\hat{U})$, donde \hat{U} es el subconjunto

compacto

$$\widehat{U} = \overline{\partial U \cap \text{int}(D)}$$

de ∂U . Si la distancia entre $F(p)$ y $F(\widehat{U})$ es 2ε , el semidisco cerrado de radio ε al lado apropiado de L servirá como el Δ indicado en el lema 4.2.36. Para mostrar que $F(\gamma \cap U)$ es disjunto del interior de Δ si F es inyectiva en U , supongamos que $F(\gamma \cap U)$ contiene un punto $F(\widehat{p})$ que pertenece al interior de Δ . Entonces el segmento de recta β de $F(p)$ a $F(\widehat{p})$ estaría completamente dentro de $F(U)$. Dado que γ es un camino g^* -minimizante, β debe coincidir con el camino de $F \circ \gamma$ de $F(p)$ a $F(\widehat{p})$. Pero $F \circ \gamma$ es tangente a $F(\partial D)$ en $F(p)$, mientras que β no. Esta contradicción completa la demostración. \square

Lema 4.2.37 (Lema de Comparación). *Sea γ un camino g^* -minimizante en D que une a con b , y sea ψ cualquier camino de clase C^1 por partes en D que une a con b el cual está libre de auto-intersecciones. Entonces para cualquier θ fijo*

$$l_\xi^*(\gamma) \leq l_\xi^*(\psi)$$

donde $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$.

Demostración. Es suficiente demostrar el lema para el caso $\theta = 0$, de modo que $\xi = x$. Para ajustar el argumento a un θ general, basta reemplazar x en todas partes por ξ , y usemos en la dirección vertical mencionada a lo largo de la demostración, las direcciones paralelas a la recta $\xi \equiv 0$ en \mathbb{R}^2 .

- a) Consideremos primero el caso en el que γ y ψ se encuentran solo en sus extremos a y b . entonces el subconjunto K de D limitado por γ y ψ , es compacto y simplemente conexo. Denotemos por N el conjunto de todas las coordenadas x de los puntos de $F(\partial K)$ en los que la recta tangente a $F(\partial K)$ no está definida o es vertical. Definamos $x^*(p)$ en cualquier punto p de D , igual a la coordenada x en $F(p)$, tengamos en cuenta que las funciones de valores reales $x^* \circ \gamma$ y $x^* \circ \psi$ son de clase C^1 y C^1 por partes, respectivamente. Además, N incluye todos los valores críticos de $x^* \circ \gamma$ y $x^* \circ \psi$, si s_0 es una valore crítico de $x^* \circ \gamma$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(x^* \circ \gamma)(s_0) &= \frac{d}{ds}(\pi_x \circ F \circ \gamma)(s_0) \\ &= \pi_x(dF_{\gamma(s_0)}\gamma'(s_0)) = 0. \end{aligned}$$

Es decir, la recta tangente a $F(\partial K)$ en $F(\gamma(s_0))$ es vertical, luego $(x^* \circ \gamma)(s_0)$ está en N . De manera análoga los valores críticos de $x^* \circ \psi$ están en ψ . Además N contiene como máximo una cantidad finita de valores adicionales, es decir los valores de x^* en las “esquinas” de ∂K .

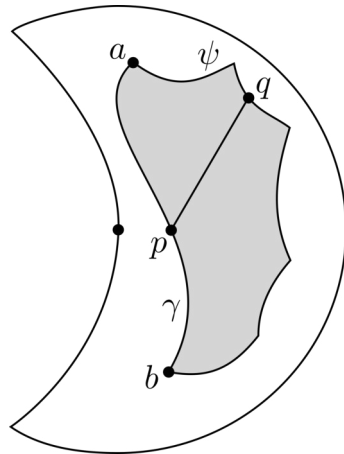
Luego por el teorema de Sard tenemos que N es un conjunto cerrado de medida nula. denotemos por γ^0 la porción de γ en la que $x^* \notin N$.

Definición 4.2.38. Diremos que un camino parametrizado ν en D es pre-vertical si $F \circ \nu$ produce una parametrización por longitud de arco ordinaria de un segmento de recta vertical en \mathbb{R}^2 (que puede ser abierto, cerrado; finito o infinito). Por tanto, un camino pre-vertical ν es siempre un g^* -minimizante en D entre dos de sus puntos.

Dado cualquier punto p en γ^0 , como F es un difeomorfismo local, existe un entorno U (en K) tal que $p \in U$ y $F(U)$ es la intersección de una bola abierta en \mathbb{R}^2 con $F(K)$. Sabiendo que $x^*(p)$ no pertenece a N , podemos escoger un segmento de recta vertical en $F(K)$ que comienza en $F(p)$. Tomando la imagen de ese segmento de recta por una inversa local de F , obtenemos en K un camino pre-vertical que comienza en p (observemos además que un camino de ese tipo es único). Con un argumento análogo podemos extender ese camino pre-vertical ν hasta que él interseque algún punto de la frontera de K , digamos en q . Otra manera de ver este hecho, es que si tal extensión ν a ∂K fuera imposible, entonces ν podría extenderse a un camino pre-vertical $\nu : [0, +\infty) \rightarrow K$ que comienza en p . Esto produciría puntos de K en ν arbitrariamente alejados de p en la distancia d_D^* , lo cual es una contradicción ya que K es compacto.

Además, q debe estar en ψ , y no en γ por que de lo contrario el segmento del camino g^* -minimizante γ que va de p a q tendría que coincidir con ν , lo cual es una contradicción dado que $p \in \gamma^0$, de modo que $F \circ \gamma$ no es vertical en $F(p)$. Finalmente, el vector tangente a $F \circ \psi$ en $F(q)$ está bien definido y no es vertical pues $p \in \gamma^0$, es decir $x^*(q) = x^*(p) \notin N$. Debido a que solo hay una dirección orientada en la que un camino pre-vertical puede salir de un punto $p \in \gamma^0$ para entrar al interior de K , solo existe el camino pre-vertical ν dentro de K que comienza en $p \in \gamma^0$ y termina en ψ .

Por tanto, podemos pensar el punto final q de ν en ψ como una función $q = q(p)$ para p en γ^0 . Denotemos por ψ^0 la imagen de γ^0 debajo de q .

Figura 4.35: K sombreado

Dado cualquier punto $q = q(p)$ en ψ^0 , solo hay un arco pre-vertical no trivial en K que comienza en ∂K y termina en q , digamos, el arco ν desde p usado para definir $q = q(p)$. Para ver esto, observemos que q fue el primer punto más allá de p en ν en el que ν interseca con ∂K , y que solo hay una dirección pre-vertical orientada desde la cual uno puede acercarse a q dentro de K , ya que $x^*(q) \notin N$ si $q \in \psi^0$. Concluimos entonces que la función $q = q(p)$ es inyectiva. El teorema de la función implícita indica que q es de clase C^1 como una función del parámetro g^* -longitud de arco en γ^0 (heredado de la parametrización de γ). Dado cualquier p en γ^0 , ψ es de clase C^1 en $q = q(p)$, con $F \circ \psi$ no vertical en $F(q)$.

Por nuestra definición de ψ , tenemos

$$l_x^*(\gamma^0) = l_x^*(\psi^0) \leq l_x^*(\psi).$$

Denotemos por S^0 al conjunto $[0, l^*(\gamma)]$ en el cual

$$\frac{d}{ds}x^*(\gamma(s)) \neq 0.$$

Entonces

$$l_x^*(\gamma) = \int_0^{l^*(\gamma)} \left| \frac{d}{ds}x^*(\gamma(s)) \right| ds = \int_{S_0} \left| \frac{d}{ds}x^*(\gamma(s)) \right| ds.$$

Por definición de S_0 , tenemos que la restricción $x^* \circ \gamma|_{S_0}$ es una C^1 -inmersión. Si retiramos de S_0 un conjunto de medida nula, la preimagen de N por la aplicación $x^* \circ \gamma$, la integral anterior no se ve alterada.

Luego $l_x^*(\gamma) = l_x^*(\gamma^0)$. Por tanto

$$l_x^*(\gamma) = l_x^*(\gamma^0) \leq l_x^*(\psi).$$

Esto prueba el lema 4.2.37 en caso de que γ y ψ se intersequen solo en sus extremos.

- b) Supongamos entonces que γ y ψ tienen puntos interiores en común. si γ y ψ coinciden, entonces nada a probar. Denotaremos por ψ' la parte de ψ disjunta de γ . Como γ es cerrado en \mathbb{R}^2 tenemos que ψ' es un abierto relativo de ψ . Así, podemos escribir ψ' como una unión disjunta numerable y disjunta de sub-caminos abiertos ψ_i de ψ ,

$$\psi' = \bigcup_i \psi_i.$$

Supongamos que la enumeración es tal que

$$l^*(\psi_1) \geq l^*(\psi_2) \geq \dots$$

Si están involucrados más de un número finito de caminos ψ_i , entonces

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} l^*(\psi_i) = 0,$$

dado que $l^*(\psi)$ es finito. Haciendo un cambio lineal de parámetro, de ser necesario, de modo que $\psi : [0, 1] \rightarrow D$. Esto induce las parametrizaciones

$$\psi_i : (a_i, b_i) \rightarrow D,$$

donde los (a_i, b_i) son sub-intervalos disjuntos de $[0, 1]$. Consideremos ahora el sub-camino γ_1 de γ entre los extremos $\psi(a_1)$ y $\psi(b_1)$ de ψ_1 . Haciendo un cambio lineal en la parametrización por g^* -longitud de arco de γ_1 si fuese necesario (que puede tener que invertir la orientación), tenemos

$$\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow D$$

donde $\gamma_1(a_1) = \psi(a_1)$ y $\gamma_1(b_1) = \psi(b_1)$. Como γ_1 y la clausura del camino ψ_1 se encuentran solo en sus extremos, luego por el argumento dado en la primera parte de la demostración tenemos,

$$l_x^*(\gamma_1) \leq l_x^*(\overline{\psi_1}) = l_x^*(\psi_1).$$

Definamos un nuevo camino $\nu_1 : [0, 1] \rightarrow D$ dado por

$$\nu_1(t) = \begin{cases} \psi(t) & , \quad t \notin [a_1, b_1] \\ \gamma_1(t) & , \quad t \in [a_1, b_1] \end{cases}$$

entonces tenemos $l_x^*(\psi) \geq l_x^*(\nu_1)$. De manera similar, el camino γ_2 de γ entre los extremos $\psi(a_2)$ y $\psi(b_2)$ de ψ_2 puede ser reparametrizado si es necesario (posiblemente invirtiendo su orientación) para convertirse en

$$\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow D,$$

con $\gamma_2(a_2) = \psi(a_2)$ y $\gamma_2(b_2) = \psi(b_2)$, entonces $l_x^*(\gamma_2) \geq l_x^*(\psi_2)$. Si definimos un nuevo camino $\nu_2 : [0, 1] \rightarrow D$ dado por

$$\nu_2(t) = \begin{cases} \nu_1(t) & , \quad t \notin [a_2, b_2] \\ \gamma_2(t) & , \quad t \in [a_2, b_2] \end{cases}$$

entonces tenemos $l_x^*(\psi) \geq l_x^*(\nu_1) \geq l_x^*(\nu_2)$.

Continuando este procedimiento, obtenemos una sucesión de caminos $\nu_j : [0, 1] \rightarrow D$, que unen $\psi(0)$ y $\psi(1)$. Por supuesto, si solo hay m sub-caminos ψ_i , donde $1 \leq m < \infty$, entonces tomamos $\nu_j = \nu_m$ para todo $j \geq m$. En cualquier caso,

$$l_x^*(\psi) \geq l_x^*(\nu_1) \geq l_x^*(\nu_2) \geq \dots,$$

mientras que todos los caminos ν_j se encuentran en el conjunto compacto $\gamma \cup \psi$. Como $l^*(\psi_i) \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow +\infty$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo i_0 tal que $l^*(\psi_i) < \varepsilon$ para $i > i_0$. Por otro lado, si $i \geq j \geq i_0$, entonces

$$\sup_{t \in [0, 1]} d_D^*(\nu_i(t), \nu_j(t)) \leq 2l^*(\psi_j),$$

dado que $l^*(\psi_1) \geq l^*(\psi_2) \geq \dots$. Por tanto los ν_j 's convergen uniformemente en la distancia d_D^* para un camino, necesariamente continuo $\nu : [0, 1] \rightarrow D$. Haciendo uso de las últimas desigualdades anteriores y el corolario 4.2.33, tenemos

$$l_x^*(\psi) \geq \lim_{j \rightarrow +\infty} l_x^*(\nu_j) \geq l_x^*(\nu).$$

Pero, por construcción, todos los puntos de ν se encuentran a lo largo del camino γ , con ν uniendo continuamente los extremos de γ . Luego $l_x^*(\nu) \geq l_x^*(\gamma)$, lo que concluye la demostración del lema 4.2.37.

□

Observación 4.2.39. La conclusión del lema 4.2.37 sigue siendo válida incluso si el camino ψ de clase C^1 por partes tiene un número finito de auto-intersecciones. Por que uno puede construir fácilmente, usando porciones de ψ entre auto-intersecciones, un nuevo camino $\widehat{\psi}$ de clase C^1 uniendo los extremos originales de ψ , y libre de auto-intersecciones. Como $l_x^*(\widehat{\psi}) \leq l_x^*(\psi)$, el lema 4.2.37 aplicado a γ y $\widehat{\psi}$ nos da

$$l_\xi^*(\gamma) \leq l_\xi^*(\widehat{\psi}) \leq l_\xi^*(\psi).$$

Para el resto de la sub-sección, supongamos además de la hipótesis 1 lo siguiente:

Hipótesis 2. Los autovalores λ_1 y λ_2 de dF son reales y además están uniformemente acotados a lo largo de \mathcal{D} por alguna constante α .

Juntas, las hipótesis 1 y 2 garantizan que los autovalores λ_1 y λ_2 de dF sobre \mathcal{D} son reales, distintos y no nulos. Por tanto, dado que F es de clase C^1 , los campos vectoriales unitarios asociados a la primera y segunda auto-dirección nunca coinciden en \mathcal{D} , cada una es continua y están libres de singularidades.

Definición 4.2.40. Un camino C^1 en \mathcal{D} que es tangente a la primera (o segunda) auto-dirección en todas partes se denomina primer (o segundo) camino propio.

El vector tangente a un camino propio en p en \mathcal{D} es aplicado por dF en un vector paralelo, tangente a $F \circ \gamma$ en $F(p)$. Por tanto dF conservará la orientación del vector tangente si el autovalor asociado en p es positivo, e invertirá la orientación si ese autovalor es negativo. Según las hipótesis 1 y 2, los autovalores λ_1 y λ_2 mantienen cada uno un signo fijo en todo \mathcal{D} .

Como D es simplemente conexo, podemos fijar una orientación en cada campo de auto-direcciones son continuos y libre de singularidades, ningún camino propio puede cruzarse, ver [Har02, p. 150]. En particular, no hay caminos propios cerrados.

Definición 4.2.41. Dado cualquier θ fijo y la función línea asociada $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$, una ξ -cadena es cualquier camino parametrizado C^1 por partes en D formado por un número finito de caminos propios, y a lo largo del cual ξ es estrictamente creciente.

Lema 4.2.42. *Dado un punto p en el interior de D , en el que $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta \geq 0$, entonces existe una ξ -cadena \mathcal{C} que comienza en p y termina en un punto de la frontera de D .*

Demostración. Dado t , introducimos las coordenadas ξ, η en \mathbb{R}^2 donde

$$\begin{cases} \xi = x \cos \theta + y \sin \theta, \\ \eta = -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases}$$

Sea V_1 (o V_2) el conjunto relativamente cerrado de D que consta de todos los puntos en los que la primera auto-dirección (o la segunda) es paralela al eje η . Notemos que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Denotaremos por f_1 (o f_2) a la función continua de valor real en $D \setminus V_1$ (o $D \setminus V_2$) que asigna la pendiente $\frac{d\eta}{d\xi}$ asociada con la primera (o segunda) auto-dirección en cada punto. Por tanto, un camino propio que no es paralelo en ninguna parte al eje η puede expresarse como la gráfica de una C^1 -función $\eta = \eta(\xi)$ que satisface una de las cuales diferenciales

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f_1(\xi, \eta) \quad \text{o} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = f_2(\xi, \eta),$$

con una orientación apropiada.

Sea $\xi_0 \geq 0$ la coordenada ξ en el punto p dado en el enunciado. Primero probaremos el lema 4.2.42 bajo el supuesto de que $\xi_0 > 0$. con este supuesto, el semiplano H que consiste de todos los puntos en \mathbb{R}^2 tales que $\xi \geq \xi_0$ interseca a D en un conjunto compacto.

Sea 3ε la distancia Euclidiana entre los subconjuntos compactos $V_1 \cap H$ y $V_2 \cap H$. Se sigue que los ε -entornos cerrados $N_\varepsilon(V_1 \cap H)$ y $N_\varepsilon(V_2 \cap H)$ de $V_1 \cap H$ y $V_2 \cap H$ en $D \cap H$ tienen distancia Euclidiana al menos ε . Por tanto p no está en $N_\varepsilon(V_1 \cap H)$ o bien p no está en $N_\varepsilon(V_2 \cap H)$ donde, por supuesto, p puede no estar en ninguno de los dos. Por conveniencia, supongamos que p no está en $N_\varepsilon(V_1 \cap H)$. Como $p \notin N_\varepsilon(V_1 \cap H)$, entonces cerca de p , el primer camino propio que comienza en p puede ser expresado por

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f_1(\xi, \eta)$$

el cual tiene una solución de clase C^1 , $\eta = \eta(\xi)$ sobre algún intervalo $[\xi_0, \xi_0 + \delta)$ con $\eta(\xi_0)$ igual a la coordenada η en el punto p . Por el lema de Zorn, esta solución puede ser extendida sobre algún intervalo maximal $[\xi_0, \xi_1)$ sujeto a la restricción de que el gráfico de la solución permanece dentro de $D \setminus V_1$. Si este gráfico

no interseca a $N_\varepsilon(V_1 \cap H)$, entonces el gráfico permanece dentro del conjunto compacto

$$\overline{(D \cap H) \setminus N_\varepsilon(V_1 \cap H)}$$

sobre el cual la función continua $f_1(\xi, \eta)$ es acotada. En particular, $\frac{d\eta}{d\xi} = f_1(\eta, \xi)$ está acotada en la gráfica de $\eta = \eta(\xi)$, de modo que nuestra solución $\eta(\xi)$ debe tender a un límite $\eta_1 < \infty$ cuando $\xi \rightarrow \xi_1$. Además, el punto (ξ_1, η_1) debe estar en ∂D . De lo contrario, (ξ_1, η_1) es un punto interior de D , y para algún $\delta > 0$ la solución $\eta = \eta(\xi)$ de $\frac{d\eta}{d\xi} = f_1(\xi, \eta)$ puede extenderse a un intervalo más grande $[\xi_0, \xi_1 + \delta)$, contradiciendo así nuestra elección de ξ_1 .

Si el gráfico interseca a $N_\varepsilon(V_1 \cap H)$, digamos en p' , entonces $p' \notin N_\varepsilon(V_2 \cap H)$ y podemos elegir un segundo camino propio que comienza en p' con ξ creciente, y lo extendemos (por un argumento análogo al anterior) hasta que interseque a ∂D o bien a $N_\varepsilon(V_2 \cap H)$.

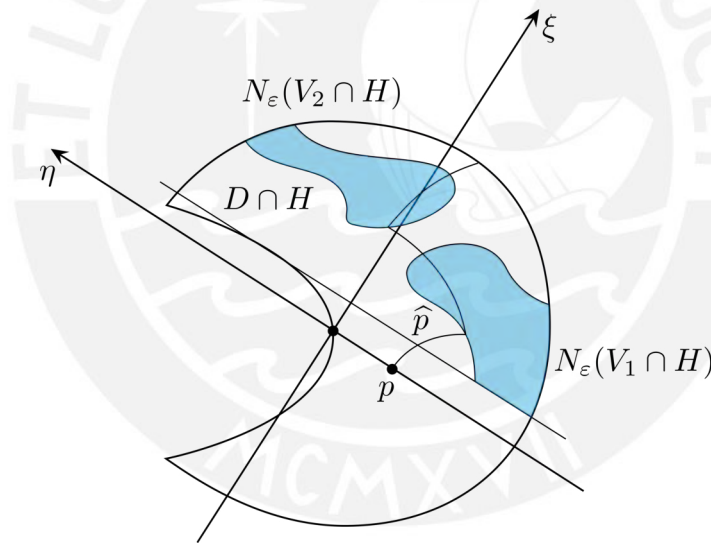


Figura 4.36: $N_\varepsilon(V_1 \cap H)$ y $N_\varepsilon(V_2 \cap H)$

Continuando con este proceso eligiendo de manera alternada el segundo y luego el primer camino propio, la construcción termina con un número finito de pasos con el último camino propio terminando en un punto de ∂D . Para probar este hecho, tengamos en cuenta que todos los caminos propios utilizados en la construcción tienen pendiente acotada, dado que los primeros caminos propios evitan $N_\varepsilon(V_1 \cap H)$, y los segundos caminos propios evitan $N_\varepsilon(V_2 \cap H)$. Además, los valores de ξ en el camino \mathcal{C} que se está construyendo están acotados, ya

que D es acotado. Por tanto \mathcal{C} tiene longitud finita, lo que significa que \mathcal{C} no puede oscilar infinitamente entre los conjuntos $N_\varepsilon(V_1 \cap H)$ y $N_\varepsilon(V_2 \cap H)$, los cuales están separados al menos por una distancia $\varepsilon > 0$. Por tanto, después de un número finito de pasos se completa la construcción de \mathcal{C} . De este modo el lema 4.2.42 queda probado para $\xi_0 > 0$. Pero si $\xi_0 = 0$, simplemente elijamos cualquier porción suficientemente pequeña de un camino propio que deja p con ξ creciente, dado que $p \notin N_\varepsilon(V_1 \cap H)$ entonces la primera auto-dirección no puede ser paralela al eje η cerca de p . Alcanzando así un punto cercano \hat{p} en el cual $\xi > 0$. La demostración del lema 4.2.42 procede como arriba, usando \hat{p} en lugar de p . \square

Lema 4.2.43. *Para cualquier ξ -cadena \mathcal{C} tenemos,*

$$l_\xi^*(\mathcal{C}) \leq \alpha \cdot l_\xi(\mathcal{C})$$

donde α es la constante usada en el enunciado del lema principal.

Demostración. Sea I un subconjunto del dominio de \mathcal{C} , tal que $\mathcal{C}|_I$ es de clase C^1 y $dF_{\mathcal{C}(t)}\mathcal{C}'(t) = \lambda_1\mathcal{C}'(t)$, para todo t en I . Entonces

$$\begin{aligned} \int_I \left| \frac{d}{dt}(\xi \circ F \circ \mathcal{C})(t) \right| dt &= \int_I |d\xi_{F(\mathcal{C}(t))}(dF_{\mathcal{C}(t)}\mathcal{C}'(t))| dt \\ &= \int_I |\lambda_1| \cdot |d\xi_{F(\mathcal{C}(t))}\mathcal{C}'(t)| dt \\ &\leq \alpha \cdot \int_I |d\xi_{F(\mathcal{C}(t))}\mathcal{C}'(t)| dt \end{aligned}$$

luego $l_\xi^*(\mathcal{C}|_I) \leq \alpha \cdot l_\xi(\mathcal{C}|_I)$. Si $\mathcal{C}'(t)$ fuese un autovector asociado a λ_2 llegaríamos a la misma conclusión. Como \mathcal{C} se compone de caminos propios sobre los cuales ξ es creciente, entonces se concluye que $l_\xi^*(\mathcal{C}) \leq \alpha \cdot l_\xi(\mathcal{C})$. \square

Como $|\xi| \leq r$ en D , entonces tenemos el siguiente resultado

Corolario 4.2.44. *Si \mathcal{C} es una ξ -cadena tenemos,*

$$l_\xi^*(\mathcal{C}) \leq 2\alpha r$$

donde r es el radio usado en la definición del conjunto D .

Lema 4.2.45. Si ρ es un rayo distinguido, entonces $l_x^*(\gamma)$ es finito, y por tanto l_y^* es infinito.

Demostración. Supongamos que ρ comienza en el punto p_0 en D . Sea ν un segmento de recta vertical en D desde p_0 a un punto q_0 en el arco circular $C' = C \cap D$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Si p_0 pertenece a C' , entonces $p_0 = q_0$ y ν es degenerado. Luego, existen dos casos posibles. Denotaremos por $x(p)$ a la coordenada x del punto p , para cualquier punto p en \mathbb{R}^2 .

Caso A: Existe una sucesión $s_j \rightarrow +\infty$ de valores del parámetro de g^* -longitud de arco para ρ tal que $x(\rho(s_j)) \geq 0$, donde $j = 1, 2, \dots$

Caso B: Para algún $\sigma \geq 0$, $x(\rho(s)) < 0$ para todo $s > \sigma$.

Para demostrar el lema 4.2.45 en el caso A consideremos los puntos $p_j = \rho(s_j)$ en ρ . Tomando una subsucesión de $(p_j)_j$ de ser necesario, podemos suponer que los p_j 's están en el interior de D . Luego, por el lema 4.2.42, podemos considerar para cada j , una x -cadena \mathcal{C}_j que comienza en p_j y termina en algún punto q_j en ∂D .

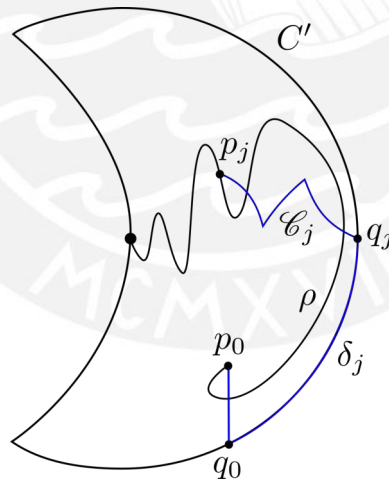


Figura 4.37: Caso A

Como $x(p_j) \geq 0$, mientras x es creciente en \mathcal{C}_j , se sigue que q_j se encuentra en C' . Denotemos por δ_j el arco a lo largo de C' que une q_j con q_0 . Entonces

$$l_x^*(\delta_j) \leq l_x^*(C'),$$

y si ρ_j denota la porción de ρ que va desde p_0 hasta p_j , es decir $\rho_j = \rho|_{[0,s_j]}$ entonces del lema de comparación 4.2.37 tenemos

$$l_x^*(\rho_j) \leq l_x^*(\mathcal{C}_j) + l_x^*(C') + l_x^*(\nu)$$

donde el camino g^* -minimizante ρ_j es comparado con el camino formado por \mathcal{C}_j seguido por δ_j y luego por ν . Este camino compuesto puede tener alguna intersección propia donde ν puede (posiblemente) cruzar \mathcal{C}_j . Pero como se señaló en la observación 4.2.39, la conclusión del lema 4.2.37 así sigue siendo válida. Usando ahora el corolario 4.2.44, tenemos

$$l_x^*(\rho_j) \leq 2\alpha r + l_x^*(C') + l_x^*(\nu).$$

Por tanto obtenemos una cota superior para $l_x^*(\rho)$, una vez que $\lim_{j \rightarrow +\infty} l_x^*(\rho_j) = l_x^*(\rho)$.

Para demostrar el lema 4.2.45 en el caso B, consideramos dos subcasos:

Caso B1: Existe una sucesión $s_j \rightarrow +\infty$ de valores del parámetro de g^* -longitud de arco para ρ tal que la distancia d_D^* entre $\rho(s_j)$ y la porción del eje y perteneciente a D es menor o igual a 1 para todo $j = 1, 2, \dots$.

Caso B2: Existe un $\sigma_1 > 0$ tal que la distancia d_D^* entre $\rho(s)$ y la porción del eje y perteneciente a D es mayor que 1 para todo $s > \sigma_1$.

La demostración del lema 4.2.45 en el caso B1 es muy parecida a la demostración en el caso A. También podemos suponer que la distancia d_D^* entre $\rho(s_i)$ y el camino ν es mayor que 2 para todo $j = 1, 2, \dots$, dado que $\rho|_{[0,s]}$ es un camino g^* -minimizante en D para todo $s > 0$, $l^*(\rho) = \infty$, y ν es compacto en D . Para cada y , tomemos un camino ν_j en D que esté libre de auto-intersecciones, y uniendo $p_j = \rho(s_j)$ al eje y , con

$$l_x^*(\nu_j) \leq l^*(\nu_j) < 2.$$

Desde el extremo p'_j de ν_j en el eje y , construimos una x -cadena \mathcal{C}_j . Con ρ_j y δ_j definidos en el caso A, procediendo como se hizo anteriormente, se obtiene

$$l_x^*(\rho_j) \leq 2 + 2\alpha r + l_x^*(C') + l_x^*(\nu).$$

Luego haciendo $j \rightarrow +\infty$, tenemos $l_x^*(\rho) < \infty$.

Para demostrar el lema 4.2.45 en el caso B2, se necesita un tipo diferente de argumento. Si ρ interseca al eje y , ver figura 4.38, sea $\rho(\sigma_2)$ el último punto de ρ que se encuentra en el eje y .

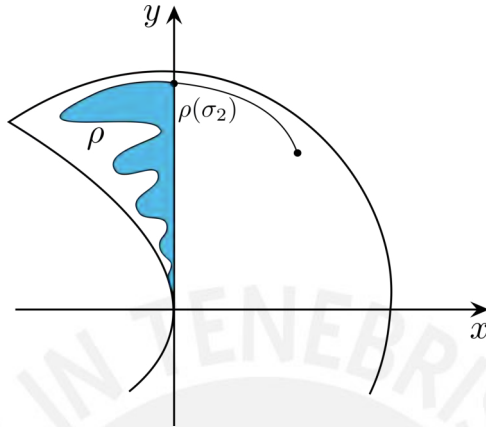


Figura 4.38: R sombreado y ρ interseca al eje y .

Denotemos por R al subconjunto relativamente cerrado de D limitado por la porción de ρ desde $\rho(\sigma_2)$ en adelante, y el intervalo en el eje y desde $\rho(\sigma_2)$ a $(0, 0)$. En caso de que ρ nunca cruce el eje y , ver figura 4.39,

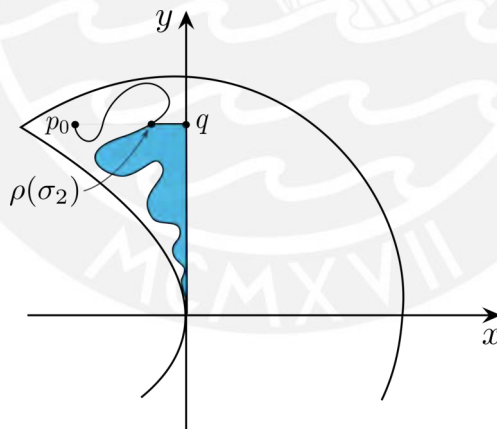


Figura 4.39: R sombreado y ρ evita al eje y .

sea $\rho(\sigma_2)$ el último punto de ρ que se encuentra en el segmento horizontal desde p_0 al eje y . dada esta definición de $\rho(\sigma_2)$, sea R el subconjunto relativamente cerrado de D limitado por la porción de ρ desde $\rho(\sigma_2)$ en adelante, el segmento horizontal μ desde $\rho(\sigma_2)$ hasta el punto q en el eje y , y el intervalo en el eje y desde q a $(0, 0)$. En cualquier caso, R es simplemente conexo. Si ρ interseca al

eje y , tomemos $\widehat{\sigma} = \sigma_1 + 1$. Si ρ evita al eje y , tomemos $\widehat{\sigma} > \sigma_1$ tan grande que $d_D^*(\rho(s), \mu) > 1$ si $s > \widehat{\sigma}$. Consideremos $p_j = \rho(\widehat{\sigma} + 2j)$ donde $j = 1, 2, \dots$. Para cada j , definimos

$$U_j = \{p \in D : d_D^*(p, p_j) < 1\}.$$

Por construcción tenemos que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y por las hipótesis del caso B2, cada U_j es disjunto de la región $x \geq 0$ en D . Supongamos que demostramos lo siguiente,

Afirmación 4.2.46. *El g^* -área de $U_j \cap R$ es mayor que π para todo $j = 1, 2, \dots$*

Entonces el g^* -área de R debería satisfacer

$$\text{área}^*(R) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \text{área}^*(U_j \cap R) = \infty.$$

Pero D es acotado, entonces el área ordinaria de $R \subset D$ deber ser finita. Además, como $-\alpha < \lambda_1 < \lambda_2 < \alpha$ tenemos $|JF| < \alpha^2$ en cada punto de \mathcal{D} . Por tanto,

$$\text{área}^*(R) \leq \alpha^2 \cdot \text{área}(R) < \infty$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, para completar la demostración del lema 4.2.45 en el caso B2, solo necesitamos verificar la afirmación. Para ello, recordemos que ρ es de clase C^1 . Para cualquier p_j fijo, sea L la recta tangente a $F(\rho)$ en $F(p_j)$. Elegimos un entorno $U'_j \subset U_j$ de p_j tan pequeño que F sea inyectiva en U'_j . Entonces L corta al plano tangente de \mathbb{R}^2 en $F(p_j)$, en dos semiplanos abiertos que consisten de vectores que apuntan para “dentro” o “fuera” de $F(R \cap U'_j)$. Si p_j pertenece a ∂D , entonces el lema 4.2.36 asegura que $F(U'_j)$ contiene uno de los semidiscos cerrados Δ cortados por L de algún disco cerrado en \mathbb{R}^2 centrado en $F(p)$, con $F(\partial R \cap U'_j)$ disjunto del interior de Δ , de modo que $\Delta \subset F(R \cap U'_j)$. Si p_j no se encuentra en ∂D , alguna porción de $F \circ \gamma$ que pasa por $F(p_j)$ es en realidad un segmento de L , en cuyo caso la existencia de tal $\Delta \subset F(R \cap U'_j)$ es trivial.

Dado cualquier vector en $F(p_j)$ que apunta “hacia” $F(R \cap U'_j)$, considere un segmento de recta en Δ que comienza en $F(p_j)$, tangente al vector dado. La preimagen de este segmento de recta bajo F puede ser parametrizado para producir un camino g^* -minimizante τ que comienza en p_j y se encuentra dentro de R .

Afirmamos que τ se puede extender a un camino g^* -minimizante en R con g^* -longitud de arco igual a 1. De lo contrario, extendiendo τ como un camino

g^* -minimizante, que comienza en p_j hasta que vuelva intersecar a ∂R en algún punto q_j , tenemos $l^*(\tau) < 1$, de modo que, según las hipótesis del caso B2 y nuestra elección de $\widehat{\sigma}$, q_j no puede estar en μ o en el eje y . Por tanto q_j debe estar en ρ , de modo que τ coincide con la porción de ρ que va de p_j a q_j . Pero esto es una contradicción, dado que las tangentes de $F \circ \rho$ y $F \circ \tau$ en $F(p_j)$ son distintas. concluimos que $F(R \cap U_j)$ contiene uno de los semidiscos abiertos cortados por L del disco de radio 1 centrado en $F(p_j)$. Esto muestra la afirmación.

Como se señaló en el enunciado del lema, $l_x^*(\rho) < \infty$, implica que $l_y^*(\rho) = \infty$, dado que

$$\infty = l^*(\rho) \leq l_x^*(\rho) + l_y^*(\rho).$$

□

Definición 4.2.47. Un camino parametrizado γ en \mathcal{D} , es llamado pre-horizontal si $F \circ \gamma$ produce una parametrización por longitud de arco ordinaria de un segmento horizontal en \mathbb{R}^2 (que puede ser abierto, semi-abierto o cerrado; finito o infinito).

Definición 4.2.48. Dado algún rayo distinguido ρ fijo, sea $u = t(s)$ que denota la variación total de y sobre $F \circ \gamma|_{[0,s]}$, esto vale pues $u = t(s) = l_y \left(F \circ \gamma|_{[0,s]} \right) = l_y^* \left(\rho|_{[0,s]} \right)$, garantizando la existencia de una función $t : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , mientras la derivada $\frac{dt}{ds}$ satisface la inecuación $0 \leq \frac{dt}{ds} \leq 1$ para todo $s \in [0, \infty)$. Además del lema 4.2.45, que $t(s) \rightarrow +\infty$, cuando $s \rightarrow \infty$. Ahora, para cualquier número $u = t(s)$, denotaremos por h_u al camino pre-horizontal maximal en D que contiene a $\rho(s)$. Notemos que h_u es determinado de manera única para cualquier u en $[0, \infty)$, dado que si $u = t(s_1) = t(s_2)$, entonces la parte de ρ que une $\rho(s_1)$ con $\rho(s_2)$ es pre-horizontal.

El siguiente enunciado se deriva con bastante facilidad del lema 4.2.45,

Corolario 4.2.49. Para cualquier rayo distinguido fijo ρ , los caminos h_u tienden al origen cuando $u \rightarrow +\infty$.

Demostración. Fijemos un rayo distinguido ρ , y sea h_u la sección pre-horizontal que pasa a través de $\rho(s)$, donde $u = t(s)$ mide la variación total de y en $F \circ \rho$ desde $\rho(0)$ hasta $\rho(s)$, como en la definición 4.2.48. Para cualquier $k = 1, 2, \dots$ fijo, mostraremos que h_u es disjunto del conjunto compacto

$$D(k) = \left\{ (x, y) \in D : x^2 + y^2 \geq \frac{r^2}{2^k} \right\}$$

para todo u suficientemente grande, donde r es el radio de C . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\rho(0)$ está en $D(k)$. Sea $p(\widehat{s})$ el último punto de ρ en $D(k)$, ver la observación 4.2.25. Si h_u con $u = t(s)$ y $s > \widehat{s}$ interseca a $D(k)$, entonces h_u debería intersecar al arco circular

$$C(k) = \left\{ (x, y) \in D : x^2 + y^2 = \frac{r^2}{2^k} \right\}.$$

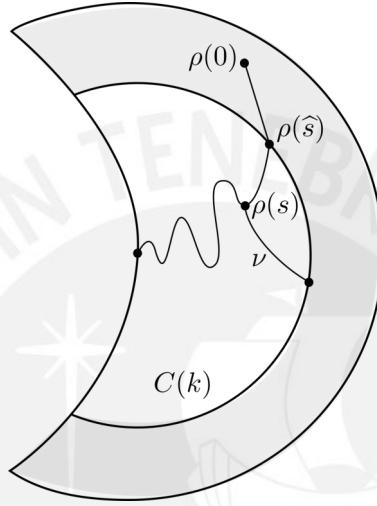


Figura 4.40: $D(k)$ sombreado

Sea ν el sub-camino de h_u que une $\rho(s)$ a un punto en $C(k)$. Por la desigualdad triangular la g^* -longitud de ρ entre $\rho(s)$ y $\rho(\widehat{s})$ debe satisfacer

$$s - \widehat{s} \leq l^*(\nu) + l^*(C(k)).$$

Por otro lado, el lema de comparación 4.2.37 indica que

$$l_x^*(\nu) \leq l_x^*(\rho) + l_x^*(C(k)).$$

Pero, $l_x^*(\nu) = l^*(\nu)$ dado que ν es pre-horizontal. Luego,

$$\begin{aligned} s - \widehat{s} &\leq l^*(\nu) + l^*(C(k)) \\ &= l_x^*(\nu) + l^*(C(k)) \\ &\leq l_x^*(\rho) + l_x^*(C(k)) + l^*(C(k)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Por el lema 4.2.45, el lado derecho es finito. Entonces, eligiendo para s cualquier valor, suficientemente grande, que no cumpla (4.5), sabemos que h_u no interseca $D(k)$, lo que prueba el corolario. \square

Observación 4.2.50. Supongamos que D es completo en la distancia d_D^* , y que γ es un camino pre-horizontal maximal en D . Si $F \circ \gamma$ es un segmento de línea finito al que le falta uno de sus extremos, digamos q , entonces cualquier sucesión $\{q_n\}$ de puntos en $F \circ \gamma$ que converja para q conduce a una d_D^* -sucesión de Cauchy $\{F^{-1}(q_n)\}$ en D . Como se supone que D es completa, entonces $F^{-1}(q_n) \rightarrow p$ para algún p en D , y γ puede extenderse a un camino pre-horizontal que contenga a p , lo que contradice la maximalidad de γ . Pero si $F \circ \gamma$ no es finito, es decir $l^*(\gamma) = \infty$, entonces midiendo la g^* -longitud de arco a lo largo de γ desde cualquier punto fijo en γ en una dirección apropiada, obtenemos un camino pre-horizontal $\hat{\gamma} : [0, \infty) \rightarrow D$. Por la observación 4.2.26, tenemos que $\hat{\gamma}$ es un rayo distinguido. Pero al ser pre-horizontal, $l_x^*(\hat{\gamma}) = l^*(\hat{\gamma}) = +\infty$, lo cual contradice al lema 4.2.45. Concluimos entonces que si D es completo, cualquier camino pre-horizontal maximal γ en D da como resultado un segmento de línea cerrado y de longitud finita $F \circ \gamma$, de modo que γ es un camino que une dos puntos de $D \cap \partial D$, dado que todo segmento cerrado en el interior de $F(D)$ puede ser extendido hasta intersectar a $F(\partial D)$.

Esta observación se aplica en particular a los caminos h_u , descritos anteriormente, en caso de que D sea completo.

Denotemos por P_0 la porción abierta de la parábola $y^2 = -cx$ que está contenida en D y no interseca a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Sean además P_0^+ y P_0^- las componentes de P_0 que se encuentran por encima y por debajo del eje x , respectivamente. El siguiente es un resultado clave,

Lema 4.2.51. *Supongamos que D es completo con la distancia d_D^* y sea ρ un rayo distinguido fijo. Consideremos Ω como el subconjunto de \mathbb{R}^+ , formado por todos los valores de u para los cuales la sección pre-horizontal h_u :*

- a) *interseca a ρ de manera transversal, y*
- b) *interseca a ∂D de manera transversal en un punto $b^+(u)$ sobre P_0^+ y $b^-(u)$ sobre P_0^- .*

entonces Ω es abierto y $\mathbb{R}^+ \setminus \Omega$ tiene medida finita.

Demostración. Si u está en Ω , entonces h_u se encuentra con ρ solo en único punto $\rho(s)$. De lo contrario, si h_u también se encontrara con ρ en $\rho(s')$, entonces ρ y h_u tendrían que coincidir entre $\rho(s)$ y $\rho(s')$, y su intersección no sería transversal. De manera similar, si u está en Ω , entonces h_u se encuentra con ∂D sólo en

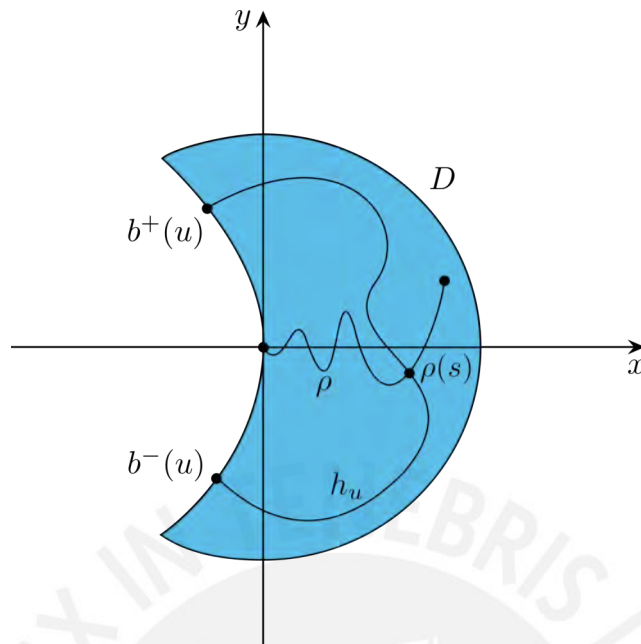


Figura 4.41: Intersección transversal de h_u con ρ y ∂D

sus extremos P_0^+ y P_0^- . Dado que el camino g^* -minimizante h_u no puede pasar por una esquina de ∂D , y cualquier otra intersección de h_u y ∂D no podría ser transversal. Para mostrar que Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^+ , fijemos cualquier u en Ω , y notemos que el subconjunto compacto $h_u \subset \mathcal{D}$ posee un entorno N en \mathcal{D} tan pequeña que F es inyectiva en N , mientras $N \cap \partial D = N \cap P_0$. Además, N puede elegirse tan pequeño que $F(N \cap P_0)$ y $F(N \cap \rho)$ no tienen una tangente horizontal en ninguna parte, ya que el conjunto de todos los puntos de p en P_0 o ρ para los cuales $F(P_0)$ o $F(\rho)$ es horizontal en $F(p)$ tiene una distancia positiva del conjunto compacto h_u . Notemos que $F(h_u)$ es un segmento de recta horizontal que interseca $F(N \cap \rho)$ y $F(N \cap P_0)$ transversalmente, con un extremo en $F(N \cap P_0^+)$ y el otro en $F(N \cap P_0^-)$.

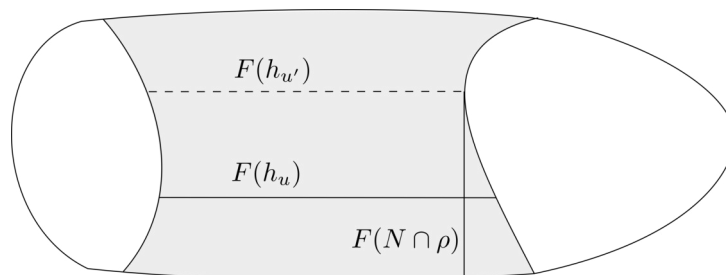


Figura 4.42: $F(N \cap D)$ sombreado dentro de $F(N)$.

Claramente, si u' está suficientemente próximo de u , entonces $F(h_{u'})$ es también un segmento de recta horizontal que interseca $F(N \cap \rho)$ y $F(N \cap P_0)$ transversalmente, con un extremo en $F(N \cap P_0^+)$ y el otro en $F(N \cap P_0^-)$. Por tanto, u' pertenece a Ω , y en consecuencia Ω es abierto. Nos resta mostrar que $\mathbb{R}^+ \setminus \Omega$ tiene medida finita, fijamos cualquier \hat{u} en \mathbb{R}^+ tan grande que para $u > \hat{u}$, el camino entero h_u está más ceca del origen en \mathbb{R}^2 que $\rho(0)$. Según el corolario 4.2.49, tal \hat{u} debe existir. Ahora mostremos que $\mathbb{R}^+ \setminus \Omega$ interseca al intervalo $(\hat{u}, +\infty)$ en un conjunto de medida nula. Con este fin, sea W_1 el conjunto de valores críticos de la función de clase C^1 $u = t(s)$, donde

$$\frac{dt}{ds} = \left| \frac{d}{ds} y^*(\rho(s)) \right|,$$

con y^* asignando a cada p en \mathcal{D} la coordenada y de $F(p)$. Entonces por el teorema de Sard tenemos que W_1 tiene medida nula. Claramente, $\mathbb{R}^+ \setminus W_1$ es solo el conjunto abierto que consiste de todos los u para el cual h_u interseca a ρ transversalmente. La función inversa $s = t^{-1}(u)$ está bien definida y es de clase C^1 en $\mathbb{R}^+ \setminus W_1$. Además, la función

$$\begin{aligned} Y^* : \mathbb{R}^+ \setminus W_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto Y^*(u) := y^*(\rho(t^{-1}(u))) \end{aligned}$$

es de clase C^1 y $\frac{dY^*}{du} \neq 0$. En realidad

$$\frac{dY^*}{du} = \frac{dy^*}{ds} \cdot \frac{ds}{du} = \pm \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \pm 1.$$

Notamos que y^* es constante a lo largo de h_u , de modo que $Y^*(u)$ es también el valor de y^* en cualquier extremo de h_u en P_0 . Si V es el conjunto de valores críticos para la función y^* restringida a P_0 , entonces V tiene medida nula por el teorema de Sard, y por tanto su imagen inversa W_2 bajo la C^1 -inmersión Y^* debe ser un conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^+ \setminus W_1$ (no importa que V contenga valores no alcanzados por Y^*). Para completar la demostración de que $\mathbb{R}^+ \setminus \Omega$ interseca al intervalo $(\hat{u}, +\infty)$ en un conjunto de medida nula, mostremos que para cada $u > \hat{u}$ en $\mathbb{R}^+ \setminus (W_1 \cup W_2)$ debe estar en Ω . Tomando $u > \hat{u}$ en $\mathbb{R}^+ \setminus (W_1 \cup W_2)$, los extremos de h_u existen, y pertenecen a $D \cap \partial D$, como se señala en la observación 4.2.50. (La suposición de que D es completo en la distancia d_D^* es esencial aquí). como $u \notin W_1$ entonces h_u interseca ρ transversalmente. Como $u > \hat{u}$, entonces h_u permanece más cerca del origen que $\rho(0)$, y por tanto nunca se encuentra

con el arco $C' \subset \partial D$. En consecuencia los extremos de h_u se encuentran en P_0 . Además, h_u interseca a P_0 transversalmente, ya que $u \notin W_2$. Supongamos ahora que ambos extremos de h_u se encuentran en el mismo eje x en P_0 . Entonces h_u junto con un camino cerrado de P , deben limitar una región compacta $K \subset D$. El rayo distinguido ρ que comienza en $\rho(0) \notin K$ y cruza K en $\rho(t^{-1}(u))$, nunca más interseca ∂K . Pero esto es imposible por la observación 4.2.25. Por tanto los extremos de h_u deben estar en lados opuestos del eje x en P_0 , de modo que u se encuentra en Ω . Luego

$$m((\mathbb{R}^+ \setminus \Omega) \cap (\hat{u}, +\infty)) \subset m((W_1 \cup W_2) \cap (\hat{u}, +\infty)) = 0.$$

Esto completa la demostración del lema 4.2.51. \square

Observación 4.2.52. Dadas las hipótesis del lema 4.2.51, y haciendo uso del teorema de la función implícita tenemos que a) implica que $t^{-1}(u)$ está bien definido y es continua en Ω . De manera similar, b) implica que $b^+(u)$ y $b^-(u)$ son funciones continuas en Ω .

Definición 4.2.53. Cada punto p sobre el eje x positivo determina dos rectas L^+ y L^- en \mathbb{R}^2 tangentes a la parábola \mathcal{P} desde arriba y desde abajo, respectivamente. Para cualquier p , denotamos por G la región cerrada, finita y acotada por un segmento de L^+ , un segmento de L^- y un arco de \mathcal{P} .

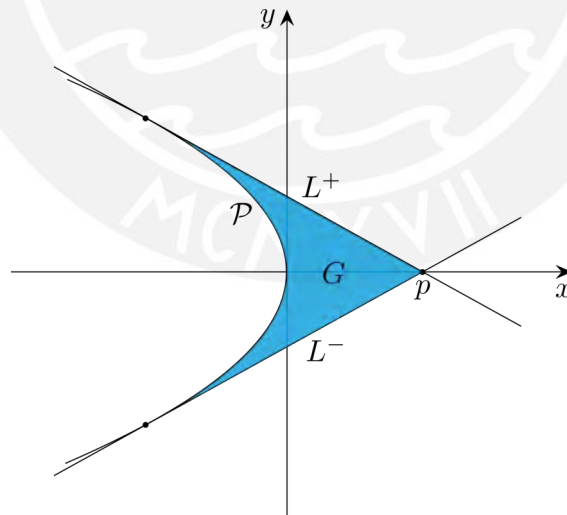


Figura 4.43: Región G .

Definición 4.2.54. Para cada u en Ω existe claramente un punto $p(u)$ más próximo al origen en el eje x positivo, de modo que la región cerrada $G = G(u)$

determinada por $p = p(u)$ contenga h_u . Denotemos el área Euclidiana de $G(u)$ por $A(u)$. Las líneas a lo largo de la frontera de $G(u)$ serán denotados por $L^+(u)$ y $L^-(u)$.

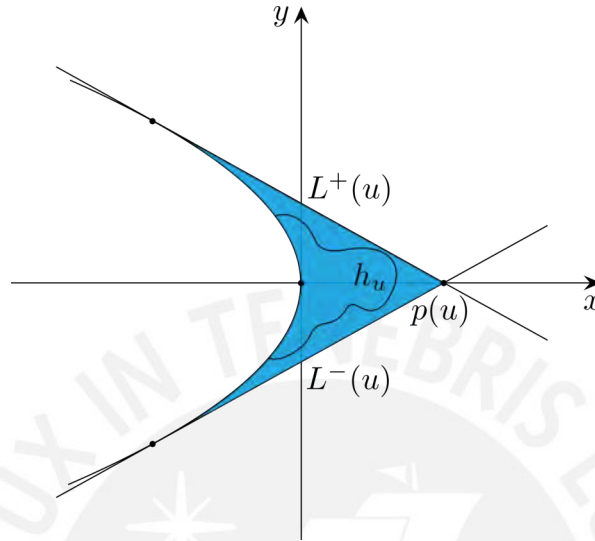
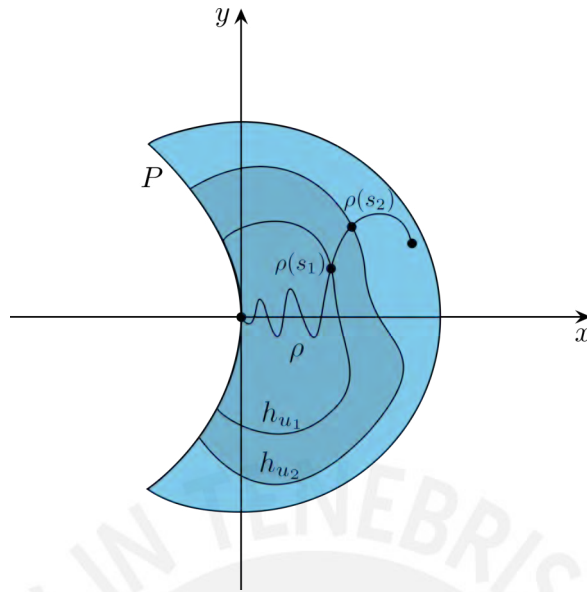


Figura 4.44: Región $G(u)$.

Observación 4.2.55. Por supuesto, $G(u)$ no necesita estar dentro de \bar{D} . Pero del corolario 4.2.49 del lema 4.2.45 se deduce que $G(u) \subset \bar{D}$ para valores suficientemente grandes de u en Ω .

Corolario 4.2.56. *Bajo las hipótesis del lema 4.2.51, la función $A(u)$ es estrictamente decreciente sobre Ω y $A(u) \rightarrow 0$ cuando $u \rightarrow +\infty$ en Ω . De hecho, $A(u)$ es continua en Ω , pero esta información no será necesaria.*

Demostración. Del corolario 4.2.49, tenemos que h_u tiende al origen cuando $u \rightarrow +\infty$, entonces $A(u)$ tiende a cero cuando $u \rightarrow +\infty$ en Ω . Sean u_1 y u_2 en Ω con $u_1 < u_2$, entonces $h_{u_1} \cap h_{u_2} = \emptyset$. Sea K la región limitada por el arco P y h_{u_2} . Ver la figura 4.45. Como $u_2 \in \Omega$, entonces h_{u_2} interseca a ρ transversalmente en solo un punto, digamos $\rho(s_2)$. Por tanto $\rho|_{[s_2, +\infty)} \subset K$. Sea $\rho(s_1)$ la intersección de h_{u_1} con ρ , entonces $s_1 > s_2$ luego $\rho(s_1) \in K$ y $h_{u_1} \subset K$. Por tanto $A(u)$ es estrictamente decreciente. \square

Figura 4.45: Región K sombreado.

Sea $z = z(u)$ la función que asigna a cada u en Ω la g^* -longitud de h_u , es decir $z(u) = l^*(h_u) > 0$. Es claro que z es continuo en Ω . Para cada u fijo en Ω , denotemos por $\mathcal{H}(u)$ a la unión de todos los $h_{u'}$ para valores $u' > u$ en Ω , de modo que

$$\mathcal{H}(u) = \bigcup_{\substack{u' \in \Omega \\ u' > u}} h_{u'}.$$

Dado algún intervalo I de $\Omega \cap (u, +\infty)$, denotemos por \mathcal{H}_I a la unión de todos los $h_{u'}$ para valores $u' \in I$. Como Y^* es inyectiva en $I \subset \Omega$, se sigue que F es una C^1 -imbedding en \mathcal{H}_I , de modo que la g^* -área de \mathcal{H}_I es

$$\text{área}^* \mathcal{H}_I = \int_I z(u) du.$$

por tanto, la g^* -área de $\mathcal{H}(u)$ está dada por

$$\sigma^*(u) = \text{área}^* \mathcal{H}(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{I_j} z(u) du,$$

donde el conjunto abierto $\Omega \cap (u, +\infty)$ se escribe como una unión numerable de intervalos abiertos I_j .

Lema 4.2.57. *La función $\sigma^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ es estrictamente decreciente, con*

$$\frac{d\sigma^*}{du} = -z(u).$$

Demostración. Recordemos que $|JF| \leq \alpha^2$ en \mathcal{D} para una constante α . Como $\mathcal{H}(u) \subset D$, mientras que D tiene área menor que πr^2 , tenemos

$$\sigma^*(u) \leq \alpha^2 \cdot \text{área}^* \mathcal{H}(u) < \alpha^2 \pi r^2,$$

de modo que $\sigma^*(u)$ es finita para todo $u \in \Omega$. Como Ω es abierto y no vacío, $z > 0$ en Ω entonces $\sigma^*(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{I_j} z(u) du$ debe ser estrictamente decreciente y positiva. Escribiendo $I_1 = (u, a)$ para algún a en \mathbb{R} , tenemos

$$\sigma^*(u) = - \int_a^u z(u) du + \sum_{j=2}^{\infty} \int_{I_j} z(u) du$$

luego por el teorema fundamental del cálculo, se sigue que

$$\frac{d\sigma^*}{du} = -z(u).$$

□

Ahora establecemos la desigualdad básica necesaria para demostrar el lema Principal.

Lema 4.2.58. *Si D es completo en la distancia d_D^* , y si se ha elegido un rayo distinguido, de modo que Ω es definido como en el lema 4.2.51, entonces existe un subconjunto abierto W de Ω cuyo complemento $\Omega \setminus W$ tiene medida finita, y tal que*

$$u_1 - u \leq C \cdot \frac{A^{2/3}(u)}{A^{1/3}(u_1)}$$

para cualesquiera números u y u_1 en W , donde $c > 0$ es una constante.

Demostración. Si denotamos por $\sigma(u)$ el área euclidiano de $\mathcal{H}(u)$, entonces para todo u en Ω , tenemos

$$\sigma^*(u) \leq \alpha^2 \cdot \sigma(u) \leq \alpha^2 \cdot A(u),$$

dado que $\mathcal{H}(u) \subset G(u)$ para todo u .

Denotamos por $X = X(u)$ la función estrictamente decreciente en Ω la cual asigna a cada u el máximo valor de x en $G(u)$, es decir la coordenada x del punto $p(u)$. Es claro que existe una cota superior X_0 para el conjunto de todos los

$X(u)$ para u en Ω . Nuestro objetivo es probar la desigualdad del lema 4.2.58, que implica la comparación de los valores $A(u)$ y $A(u_1)$ para u y u_1 en el subconjunto $W \subset \Omega$. Es conveniente tener una notación abreviada para nuestros cálculos. Por tanto, teniendo valores fijos $u_1 > u$ en Ω , escribimos $A = A(u)$, $A_1 = A(u_1)$, $\sigma = \sigma(u)$, $\sigma_1 = \sigma(u_1)$, $\sigma^* = \sigma^*(u)$, $\sigma_1^* = \sigma^*(u_1)$, $z = z(u)$, $z_1 = z(u_1)$, $h = h(u)$, $h_1 = h(u_1)$, $G = G(u)$, $G_1 = G(u_1)$, etc. Notemos que $u_1 - u = l_y^*(\gamma)$ donde γ es el arco ρ entre $\rho(t^{-1}(u))$ y $\rho(t^{-1}(u_1))$. Como $u < u_1$ son valores en Ω , tenemos $G_1 \subset G$ y $X_1 < X$.

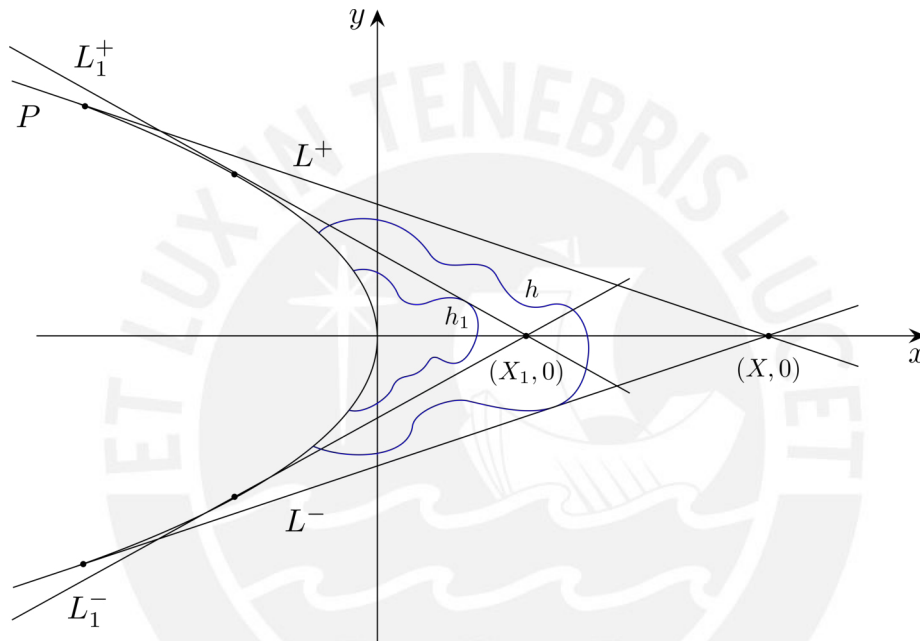


Figura 4.46: $G_1 \subset G$ y $X_1 < X$.

Por la definición de G_1 , tenemos que h_1 debe tocar en algún lado ya sea a L_1^+ o L_1^- digamos en \hat{q} . Es completamente indiferente si \hat{q} se encuentra en L_1^+ o L_1^- . En el primer caso, estamos interesados en encontrar límites superior e inferior para $l_{\xi_1}^*(\gamma)$ donde $\xi_1 = x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1$ toma un valor constante $\xi_1' > 0$ en L_1^+ , con θ_1 el ángulo agudo positivo que L_1^+ hace con el eje y . En el segundo caso, estamos interesados en encontrar límites superior e inferior para $l_{\xi_1}^*(\gamma)$ donde $\xi_1 = x \cos(-\theta_1) + y \sin(-\theta_1)$ toma un valor constante $\xi_1' > 0$ en L_1^- .

Dado que los argumentos involucrados son esencialmente idénticos en ambos casos, asumiremos, para fijar nuestras ideas, que \hat{q} se encuentra en L_1^+ .

Dado que los extremos de h_1 , se encuentran en lados opuestos del eje x , entonces h_1 debe cruzar en algún lugar el eje x positivo. Por tanto, si q es cualquier

punto situado más a la derecha en h_1 , la coordenada x de q debe ser positiva. Por el lema 4.2.42, existe una x -cadena \mathcal{C} que comienza en q y termina en un punto de ∂D , y en particular, para $C' \subset \partial D$ dado que x es creciente a lo largo de \mathcal{C} . Por tanto \mathcal{C} debe cruzar h para llegar a C' , por lo que podemos considerar el arco \mathcal{C}' de \mathcal{C} desde q hasta su primera intersección q' con h .

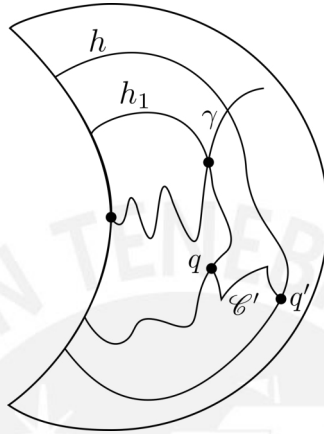


Figura 4.47: x -cadena \mathcal{C}' .

Por el lema 4.2.43, tenemos que $l_x^*(\mathcal{C}') \leq \alpha \cdot l_x(\mathcal{C}')$. Pero $l_x(\mathcal{C}')$ no es mayor que el valor de x en q' , que a su vez no es mayor que X . Por tanto

$$l_x^*(\mathcal{C}') \leq \alpha \cdot l_x(\mathcal{C}') \leq \alpha \cdot X.$$

Como γ es un camino g^* -minimizante, el lema de comparación 4.2.37 establece que

$$l_x^*(\gamma) \leq l_x^*(h) + l_x^*(h_1) + l_x^*(\mathcal{C}').$$

En consecuencia,

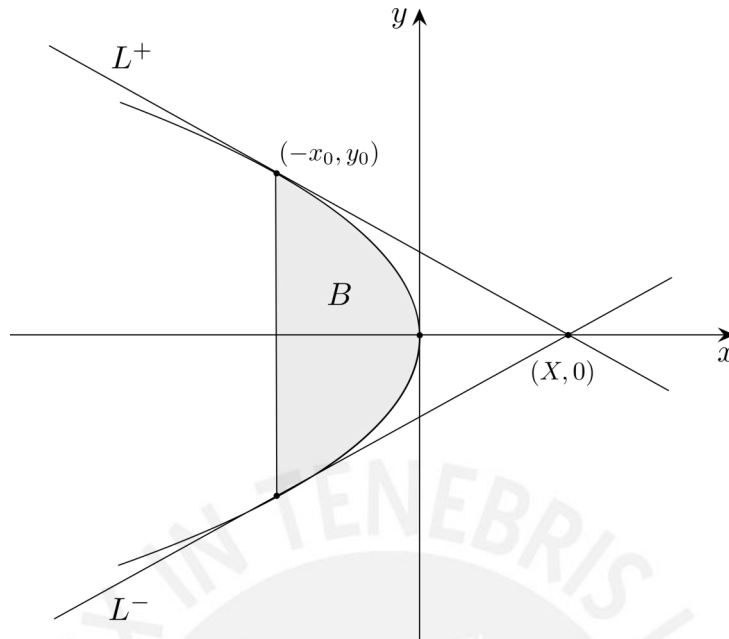
$$l_x^*(\gamma) \leq z + z_1 + \alpha X. \tag{4.6}$$

En este punto, usaremos la ecuación $x = -cy^2$ para P . Sea $p_0^+ = (-x_0, y_0)$ el punto de intersección entre L^+ y la parábola P . Sea B la región limitada por esta parábola y la recta $x = -x_0$. Luego tenemos

$$\sigma(B) + A = y_0(x_0 + X)$$

La ecuación de la recta L^+ está dada por

$$y - y_0 = -\frac{1}{2\sqrt{cx_0}}(x + x_0)$$

Figura 4.48: B sombreado.

como $y_0 = \sqrt{\frac{x_0}{c}}$, entonces podemos reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera

$$y - \sqrt{\frac{x_0}{c}} = -\frac{1}{2\sqrt{cx_0}}(x + x_0).$$

Como el punto $p(u) = (X(u), 0) = (X, 0)$ pertenece a L^+ , obtenemos

$$-\sqrt{\frac{x_0}{c}} = -\frac{1}{2\sqrt{cx_0}}(X + x_0)$$

de donde podemos concluir que $X = x_0$. Por otro lado observemos que

$$\sigma(B) = 2 \int_{-x_0}^0 \sqrt{\frac{-x}{c}} dx = \frac{4c}{3} \left(\frac{x_0}{c}\right)^{3/2},$$

luego tenemos

$$\frac{4c}{3} \left(\frac{x_0}{c}\right)^{3/2} + A = \sqrt{\frac{X}{c}} \cdot (2X)$$

de donde $X = \left(\frac{3}{2}\sqrt{c}A\right)^{2/3}$ y de manera análoga $X_1 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{c}A_1\right)^{2/3}$. Por tanto, podemos reescribir (4.6) de la siguiente manera

$$l_x^*(\gamma) \leq z + z_1 + \alpha_0 \cdot A^{2/3}, \quad (4.7)$$

donde $\alpha_0 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{c}\right)^{2/3} > 0$ es constante. Volvamos al problema de encontrar límites superior e inferior para $l_{\xi_1}^*(\gamma)$. Como $\xi_1 = x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1$, escribiendo $(F \circ \gamma)(t) = (x(t), y(t))$ tenemos

$$|y(t) - y(t_0)| \sin \theta_1 \leq |\xi_1(F(\gamma(t))) - \xi_1(F(\gamma(t_0)))| + |x(t) - x(t_0)| \cos \theta_1$$

luego

$$l_y^*(\gamma) \cdot \sin \theta_1 \leq l_{\xi_1}^*(\gamma) + l_x^*(\gamma) \cdot \cos \theta_1.$$

En particular,

$$l_{\xi_1}^*(\gamma) \geq l_y^* \cdot \sin \theta_1 - l_x^*(\gamma). \quad (4.8)$$

Por otro lado,

$$\sin \theta_1 = \frac{2X_1}{\sqrt{\frac{X_1}{x} + 4X_1^2}} = 2\sqrt{\frac{cX_1}{4cX_1 + 1}}.$$

Usando el hecho de que $X_0 > X > X_1$ tenemos

$$\sin \theta_1 > \alpha_1 \cdot A^{1/3} \quad (4.9)$$

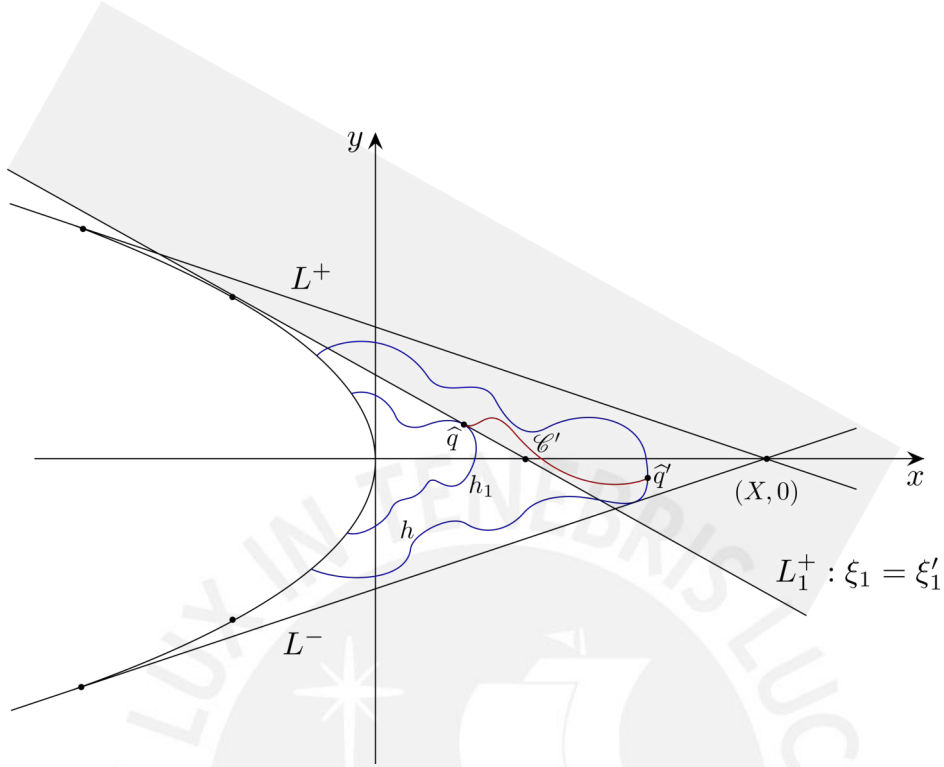
donde $\alpha_1 = \frac{(12c^2)^{1/3}}{\sqrt{4cX_0 + 1}} > 0$. Por tanto de (4.7), (4.8) y (4.9), logramos obtener

$$\begin{aligned} l_{\xi_1}^*(\gamma) &\geq l_y^* \cdot \sin \theta_1 - l_x^*(\gamma) \\ &\geq l_y^*(\gamma) \cdot \alpha_1 \cdot A_1^{1/3} - (z + z_1 + \alpha_0 \cdot A^{2/3}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

De esta manera, obtenemos el límite inferior deseado. Para encontrar el límite superior, recordemos que la función lineal ξ_1 asume algún constante $\xi'_1 > 0$ a lo largo de L_1^+ . Además $\xi \leq \xi'_1$ en G y en todas partes de la parábola P . Ver figura 4.49.

Así, el lema 4.2.42 garantiza la existencia de una ξ_1 -cadena \mathcal{C} que comienza en \hat{q} de h_1 en L_1^+ y termina en un punto de C' en el cual $\xi_1 > \xi'_1$, dado que ξ_1 es estrictamente creciente en \mathcal{C} . De ello se deduce que \mathcal{C} debe cruzar h para llegar a C' , y podemos considerar el arco \mathcal{C}' de \mathcal{C} desde \hat{q} hasta su primera intersección \hat{q}' con h . Por el lema de comparación 4.2.37,

$$l_{\xi_1}^*(\gamma) \leq l_{\xi_1}^*(h) + l_{\xi_1}^*(h_1) + l_{\xi_1}^*(\mathcal{C}').$$

Figura 4.49: B sombreado.

Luego, usando el lema 4.2.43 tenemos

$$l_{\xi_1}^*(\gamma) \leq z + z_1 + \alpha \cdot l_{\xi_1}(\mathcal{C}'). \quad (4.11)$$

Pero $l_{\xi}(\mathcal{C}')$ es solo la distancia Euclidiana de \hat{q} a L_1^+ . Además, de todos los puntos en G con $\xi_1 \geq \xi_1'$, el punto $(X, 0)$ es el más alejado de L_1^+ . Por tanto

$$l_{\xi_1}(\mathcal{C}') \leq \cos \theta_1 \cdot (X - X_1) < X,$$

de modo que de la ecuación (4.11) tenemos,

$$\begin{aligned} l_{\xi_1}^*(\gamma) &\leq z + z_1 + \alpha \cdot X \\ &= z + z_1 + \alpha \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{cA}\right)^{2/3} \\ &\leq z + z_1 + \alpha_0 \cdot A^{2/3} \end{aligned} \quad (4.12)$$

el cual es el límite superior para $l_{\xi_1}^*(\gamma)$ que buscábamos. Usando las ecuaciones (4.10), (4.12) y el hecho que $l_y^*(\gamma) = u_1 - u$, obtenemos

$$\alpha_1 \cdot (u_1 - u) \cdot A^{1/3} \leq 2 \cdot (z + z_1 + \alpha_0 \cdot A^{2/3}).$$

Por tanto, para una elección apropiada de las constantes positivas α_2 y α_3 , tenemos

$$(u_1 - u) \cdot A^{1/3} \leq \alpha_2 \cdot (z + z_1) + \alpha_3 \cdot A^{2/3}.$$

Por el lema 4.2.57,

$$(u_1 - u) \cdot A_1^{1/3} \leq \alpha \left(\left| \frac{d\sigma^*}{du}(u) \right| + \left| \frac{d\sigma^*}{du}(u_1) \right| \right) + \alpha_3 \cdot A^{2/3}. \quad (4.13)$$

Ahora definimos las funciones f y g en Ω por

$$f(u) = A^{1/3}(u), \quad g(u) = (\sigma^*)^{1/3}(u).$$

Reescribimos la ecuación (4.13) en términos de f y g , tenemos

$$(u_1 - u) \cdot f(u_1) \leq \alpha \left(\left| 3g^2(u) \cdot \frac{dg}{du}(u) \right| + \left| 3g^2(u_1) \cdot \frac{dg}{du}(u_1) \right| \right) + \alpha_3 \cdot f^2(u),$$

dado que $\frac{\sigma^*}{du} = 3g^2 \frac{dg}{du}$. Pero $\sigma^*(u_1) \leq \sigma^*(u) \leq \alpha^2 A(u)$ implica que $g(u_1) \leq g(u) \leq \alpha^{2/3} f(u)$, de modo que

$$(u_1 - u) \cdot f(u_1) \leq f^2(u) \left[3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha^{4/3} \left(\left| \frac{dg}{du}(u) \right| + \left| \frac{dg}{du}(u_1) \right| \right) + \alpha_3 \right]. \quad (4.14)$$

Por el lema 4.2.57 y la definición de g , sabemos que $\frac{dg}{du}$ es continua en Ω , con $g(u) > 0$ estrictamente decreciente. Luego el subconjunto Ω' de Ω dado por

$$\Omega' = \left\{ u \in \Omega : \left| \frac{dg}{du}(u) \right| \geq 1 \right\}$$

es cerrado en Ω y debe tener medida finita. Si $W = \Omega \setminus \Omega'$, y si C es la constante $6 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha^{4/3} + \alpha_3$, entonces la ecuación (4.14) quedaría

$$(u_1 - u) \cdot f(u_1) \leq C \cdot f^2(u),$$

para todo u y u_1 en W . Esto demuestra el lema 4.2.58, dado que $f = A^{1/3}$, es decir

$$(u_1 - u) \cdot A^{1/3}(u_1) \leq C \cdot A^{2/3}(u).$$

□

Finalmente nos encontramos en condiciones de demostrar el lema Principal. La demostración será hecha por contradicción.

Lema 4.2.59. *Si W es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^+ , y si $\mathbb{R}^+ \setminus W$ tiene medida finita, entonces no existe una función $f : W \rightarrow \mathbb{R}^+$ estrictamente decreciente tal que*

$$u_1 - u \leq C \cdot \frac{f^2(u)}{f(u_1)} \quad (4.15)$$

para cualesquiera números u y u_1 en W , donde $C > 0$ es una constante.

Demostración. Supongamos que existe una constante C y una función estrictamente decreciente f que satisface la ecuación (4.15). Como $f(u) > 0$ para todo u en W , podemos escribir

$$f(u) = e^{-\phi(u)},$$

para alguna función ϕ estrictamente creciente en W , luego

$$(u_1 - u) \leq C e^{-\phi(u)} (e^{\phi(u_1) - \phi(u)}), \quad (4.16)$$

Manteniendo u fijo en (4.16), y haciendo $u_1 \rightarrow +\infty$ en W vemos que $\phi(u_1) \rightarrow +\infty$. Comenzamos construyendo una sucesión $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$ en W tal que para todo $i = 0, 1, 2, \dots$,

$$\phi(x_{2i+1}) \leq \phi(x_{2i}) + 1 \leq \phi(x_{2i+2}) \quad \text{y} \quad m(W \cap (x_{2i+1}, x_{2i+2})) < \frac{1}{2^i}. \quad (4.17)$$

La construcción se realiza de manera inductiva. Tomemos en x_0 cualquier en W . Supongamos que $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{2j}$ se han elegido de modo que (4.17) sea válido para $i = 0, 1, \dots, (j-1)$, elijamos x_{2j+1} y x_{2j+2} de la siguiente manera.

Si $\phi(x_{2j} + 1)$ pertenece a $\phi(W)$, tomemos $x_{2j+1} = x_{2j+2} = \phi^{-1}(\phi(x_{2j}) + 1)$.

Si $\phi(x_{2j} + 1)$ no está en $\phi(W)$, consideremos

$$a = \inf \{x \in W : \phi(x) > \phi(x_{2j}) + 1\},$$

$$b = \sup \{x \in W : \phi(x) < \phi(x_{2j}) + 1\}.$$

Si $x_{2j} \neq b$, escojamos para x_{2j+1} cualquier valor en W tal que

$$x_{2j} \leq x_{2j+1} < b \quad \text{y} \quad b - x_{2j+1} < \frac{1}{2^{j+1}}.$$

Si $x_{2j} = b$, escojamos $x_{2j+1} = x_{2j}$. Para x_{2j+2} escojamos cualquier valor en W tal que

$$a < x_{2j+2} \quad \text{y} \quad x_{2j+2} - a < \frac{1}{2^{j+1}}.$$

En cualquier caso, tenemos $x_{2j} \leq x_{2j+1} \leq x_{2j+2}$ mientras (4.17) se mantiene para $i = j$. De la ecuación (4.17) podemos concluir que

$$\phi(x_{2i}) \geq \phi(x_0) + i, \quad (4.18)$$

para todo $i = 0, 1, 2, \dots$, entonces $x_j \rightarrow +\infty$ cuando $j \rightarrow +\infty$. Combinando las ecuaciones (4.16), (4.17) y (4.18), obtenemos

$$\begin{aligned} (x_{2i+1} - x_{2i}) &\leq C e^{-\phi(x_{2i})} (e^{\phi(x_{2i+2}) - \phi(x_{2i})}) \\ &\leq C e^{-\phi(x_{2i}) + 1} \\ &\leq C e^{-\phi(x_0) - i + 1}. \end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x_{2i+1} - x_{2i}) < \infty. \quad (4.19)$$

Pero si sumamos a ambos lados de (4.17) la medida de $(\mathbb{R}^+ \setminus W) \cap (x_{2i+1}, x_{2i+2})$ tenemos

$$\begin{aligned} x_{2i+2} - x_{2i+1} &= m(x_{2i+1}, x_{2i+2}) \\ &= m \left[(W \cap (x_{2i+1}, x_{2i+2})) \cup ((\mathbb{R}^+ \setminus W) \cap (x_{2i+1}, x_{2i+2})) \right] \\ &\leq m(W \cap (x_{2i+1}, x_{2i+2})) + m((\mathbb{R}^+ \setminus W) \cap (x_{2i+1}, x_{2i+2})) \\ &< \frac{1}{2^i} + m((\mathbb{R}^+ \setminus W) \cap (x_{2i+1}, x_{2i+2})). \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x_{2i+2} - x_{2i+1}) < 2 + m(\mathbb{R}^+ \setminus W) < \infty \quad (4.20)$$

De modo que, las ecuaciones (4.19) y (4.20) indican que

$$\sum_{j=0}^{\infty} (x_{j+1} - x_j) < \infty.$$

Pero esto implica que $(x_j)_j$ debe ser acotada, lo cual es una contradicción dado que $x_j \rightarrow +\infty$ cuando $j \rightarrow +\infty$. \square

Por tanto, las hipótesis 1 y 2 junto con el supuesto de que D es completo usando la distancia d_D^* , conducen a una contradicción. Quedando así demostrado el lema Principal.



Capítulo 5

Inmersión isométrica de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^p

Perhaps I could best describe my experience of doing mathematics in terms of entering a dark mansion. You go into the first room and it's dark, completely dark. You stumble around, bumping into the furniture. Gradually, you learn where each piece of furniture is. And finally, after six months or so, you find the light switch and turn it on. Suddenly, it's all illuminated and you can see exactly where you were. Then you enter the next dark room...

Andrew John Wiles.

Dedicamos este capítulo a tratar de responder a una posible generalización del teorema de Hilbert, pero lo abordaremos desde la siguiente pregunta ¿existe algún p entero tal que el plano hiperbólico pueda ser inmerso isométricamente en \mathbb{R}^p ? ¿Y la respuesta correspondiente se puede aún generalizar para \mathbb{H}^n ? A lo largo de este capítulo veremos resultados dados por Schur [Sch86], Bierbebach [Bie32], Blanuša [Bla55], Rozendorn [Roz60], Henke [Hen81], Azov [Azo85], Henke-Nettekoven[HN87], etc.

Como se vio en el capítulo 2 comenzamos analizando las superficies de curvatura gaussiana constante negativa, luego vimos que ellas representan una inmersión isométrica local de \mathbb{H}^2 en \mathbb{R}^3 , ver el capítulo 3, luego tratamos el caso general en el capítulo 4 de una inmersión isométrica global de \mathbb{H}^2 en \mathbb{R}^3 . Siguiendo este camino, en la siguiente sección veremos la existencia de una inmersión isométrica, local, de \mathbb{H}^n en el espacio euclidiano $(2n - 1)$ -dimensional.

5.1 Inmersión isométrica local de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^{2n-1}

En 1886, Friedrich Schur construyó una inmersión isométrica local del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n = (P, g_P)$ en el espacio euclidiano \mathbb{R}^{2n-1} , ver [Sch86]. Considerando la siguiente aplicación,

$$\begin{aligned} \varphi : (P, g_P) &\longrightarrow (\mathbb{R}^{2n-1}, g) \\ z = (u_1, \dots, u_n) &\mapsto \varphi(z) := (x_0(z), x_1(z), \dots, x_{2n-2}(z)) \end{aligned}$$

tal que para cada $1 \leq k \leq n-1$, tenemos

$$x_0(u_1, \dots, u_n) = a \int_{a\sqrt{n-1}}^{u_n} \frac{\sqrt{u_n^2 - (n-1)a^2}}{u_n^2} du_n. \quad (5.1a)$$

$$x_{2k-1}(u_1, \dots, u_n) = \frac{a^2}{u_n} \cos\left(\frac{u_k}{a}\right), \quad (5.1b)$$

$$x_{2k}(u_1, \dots, u_n) = \frac{a^2}{u_n} \operatorname{sen}\left(\frac{u_k}{a}\right), \quad (5.1c)$$

De modo que

$$dx_{2k-1} = -\frac{r}{u_n} \operatorname{sen}\left(\frac{u_k}{a}\right) du_k - \frac{r^2}{u_n^2} \cos\left(\frac{u_k}{a}\right) du_n \quad (5.2a)$$

$$dx_{2k} = \frac{r}{u_n} \cos\left(\frac{u_k}{a}\right) du_k - \frac{r^2}{u_n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{u_k}{a}\right) du_n \quad (5.2b)$$

en consecuencia obtenemos

$$dx_{2k-1}^2 + dx_{2k}^2 = \frac{a^2}{u_n^2} du_k^2 + \frac{a^4}{u_n^4} du_n^2$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \varphi^* g &= dx_0^2 + \sum_{k=1}^{2n-2} dx_k^2 \\ &= dx_0^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (dx_{2k-1}^2 + dx_{2k}^2) \\ &= a^2 \left(\frac{du_1^2 + \dots + du_n^2}{u_n^2} \right) \\ &= a^2 g_P \end{aligned}$$

De modo que la imagen $\varphi(\mathbb{H}^n)$ es una hipersuperficie $(2n-1)$ -dimensional con curvatura constante $-1/a^2$. Hay muchas inmersiones isométricas locales, explícitas en algunos casos, de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^{2n-1} . Estos se pueden construir utilizando la transformación de Ribaucour o Bäcklund, ver por ejemplo [TT80] y [DT02].

5.2 Inmersión isométrica de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^p , con $p = \infty$

El primer resultado global sobre la inmersibilidad de \mathbb{H}^2 en \mathbb{R}^p , fue obtenido en 1932 por Ludwig Bieberbach, para el caso $p = \infty$, en [Bie32] quien construyó una inmersión isométrica analítica de $\mathbb{H}^2 = (D, g_D)$ en el espacio de Hilbert ℓ^2 , representado aquí como \mathbb{R}^∞ . Considerando la siguiente aplicación,

$$\begin{aligned} \varphi : (D, g_D) &\longrightarrow (\mathbb{R}^\infty, g_\infty) \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) := (x_1(u, v), x_2(u, v), \dots) \end{aligned}$$

donde para cada $k = 1, 2, \dots$ tenemos

$$x_{2k-1}(u, v) = 2 \operatorname{Re} \frac{(u + iv)^k}{\sqrt{k}}, \quad x_{2k}(u, v) = 2 \operatorname{Im} \frac{(u + iv)^k}{\sqrt{k}}. \quad (5.3a, b)$$

Sea $z = u + iv$ y $z_k = x_{2k-1} + ix_{2k} = \frac{2z^k}{\sqrt{k}}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, luego tenemos

$$\begin{aligned} \varphi^* g_\infty &= \sum_{k=1}^{\infty} dx_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (dx_{2k-1}^2 + dx_{2k}^2) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |dz_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 4k |z|^{2(k-1)} |dz|^2 \\ &= 4|dz|^2 \sum_{k=1}^{\infty} k |z|^{2(k-1)} \\ &= 4 \frac{|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2} \\ &= 4 \frac{du^2 + dv^2}{(1 - (u^2 + v^2))^2} \\ &= g_D \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se usó que

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

De este modo Ludwig Bieberbach consiguió una inmersión isométrica del plano hiperbólico en \mathbb{R}^∞ . Sin embargo, Blanuša se dio cuenta que estas fórmulas no se pueden generalizar al caso de un espacio hiperbólico n -dimensional. Por tanto, Blanuša construyó en 1952 una inmersión isométrica inyectiva de plano hiperbólico en \mathbb{R}^∞ , que pueda generalizarse, ver [Bla52].

Para hacer esto, veamos primero la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : (\cdot, g_P) &\longrightarrow (\mathbb{R}^3, g) \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) := (x_0(u, v), x_1(u, v), x_2(u, v)) \end{aligned}$$

dada por

$$x_1(u, v) = \frac{\cos(av)}{u}, \quad x_2(u, v) = \frac{\operatorname{sen}(av)}{u}, \quad x_0(u, v) = \int_{1/a}^u \frac{\sqrt{a^2 u^2 - 1}}{u^2} du \quad (5.4)$$

que, como es bien sabido, determina una inmersión isométrica local del plano hiperbólico en el espacio euclidiano tridimensional dado por la pseudo-esfera. Sin embargo, solo la parte del plano hiperbólico ubicada dentro de un horocírculo está inmersa y, además, la correspondencia entre los puntos de esta parte del plano hiperbólico y los de la pseudo-esfera no es uno a uno, ya que el borde interior del horocírculo se enrolla en la pseudo-esfera infinitamente. El pullback es fácil de obtener

$$\varphi^* g = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 = a^2 \left(\frac{du^2 + dv^2}{u^2} \right) = a^2 g_P.$$

El integrando en (5.4) solo es real para $u \geq 1/a$, por lo que la parte $0 < u < 1/a$ no está inmersa.

En 1886 Alexander von Brill, en [Bri86], muestra que el espacio hiperbólico tridimensional puede ser inmerso isométricamente, de manera local, de forma análoga al caso anterior en un espacio euclidiano de cinco dimensiones, según la aplicación. Sea $z = (u, v_1, v_2)$,

$$\begin{aligned} \varphi : (P, g_P) &\longrightarrow (\mathbb{R}^5, g) \\ z &\mapsto \varphi(z) := (x_0(z), x_1(z), x_2(z), x_3(z), x_4(z)) \end{aligned}$$

dada por

$$x_1 = \frac{\cos(av_1)}{u}, \quad x_2 = \frac{\operatorname{sen}(av_1)}{u}, \quad x_3 = \frac{\cos(av_2)}{u}, \quad x_4 = \frac{\operatorname{sen}(av_2)}{u}, \quad (5.5a)$$

$$x_0 = \int_{\sqrt{2}/a}^u \frac{\sqrt{a^2 u^2 - 2}}{u^2} du \quad (5.5b)$$

(En el artículo de Alexander von Brill, los límites de integración se omiten y aparece un signo negativo delante de la integral). Por otro lado para que el integrando en (5.5) esté bien definido necesitamos que $u \geq \frac{\sqrt{2}}{a}$. Entonces, sólo la parte del espacio hiperbólico que se encuentra dentro de una hoersfera está incrustada. Aquí también el pullback es fácil de obtener

$$\varphi^*g = dx_0^2 + \sum_{k=1}^5 dx_k^2 = a^2 \left(\frac{du^2 + dv_1^2 + dv_2^2}{u^2} \right) = a^2 g_P.$$

De manera análoga ahora consideramos una aplicación del espacio hiperbólico n -dimensional en el espacio euclidiano $(2n - 1)$ -dimensional,

$$\begin{aligned} \varphi : \quad (P, g_P) &\longrightarrow (\mathbb{R}^{2n-1}, g) \\ z = (u, v_1, \dots, v_{2n-2}) &\mapsto (x_0(z), x_1(z), \dots, x_{2n-2}(z)) \end{aligned}$$

tal que para cada $1 \leq k \leq n - 1$, tenemos

$$x_0(u, v_1, \dots, v_{2n-2}) = \int_{\sqrt{n-1}/a}^u \frac{\sqrt{a^2 u^2 - (n-1)}}{u^2} du \quad (5.6a)$$

$$x_{2k-1}(u, v_1, \dots, v_{2n-2}) = \frac{\cos(av_k)}{u}, \quad (5.6b)$$

$$x_{2k}(u, v_1, \dots, v_{2n-2}) = \frac{\text{sen}(av_k)}{u}, \quad (5.6c)$$

la cual es una inmersión isométrica local del espacio hiperbólico n -dimensional en el espacio euclidiano $(2n - 1)$ -dimensional. El pullback se da de manera análoga a los casos anteriores

$$\varphi^*g = dx_0^2 + \sum_{k=1}^{2n-2} dx_k^2 = a^2 \left(\frac{du^2 + dv_1^2 + \dots + dv_{2n-2}^2}{u^2} \right) \quad (5.7)$$

donde u está sujeto a la condición $u \geq \frac{\sqrt{n-1}}{a}$.

Ahora queremos buscar una inmersión isométrica en el espacio de Hilbert ℓ^2 análoga a la fórmula (5.4), en la que, sin embargo, pueda ser inmerso todo el plano hiperbólico y, además, la correspondencia entre los puntos del plano hiperbólico y la superficie obtenida debe ser uno a uno. Si esto tiene éxito, podemos esperar que el resultado se generalice, de forma análoga a cómo (5.4) se generaliza a (5.6a).

Para este propósito, consideramos la siguiente aplicación,

$$\begin{aligned}\varphi : (P, g_P) &\longrightarrow (\mathbb{R}^\infty, g_\infty) \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) := (x_1(u, v), x_2(u, v), \dots)\end{aligned}$$

en el cual para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos

$$x_0(u, v) = F(u), \quad (5.8a)$$

$$x_{2k-1}(u, v) = f_k(u) \cos(a_k v), \quad (5.8b)$$

$$x_{2k}(u, v) = f_k(u) \operatorname{sen}(a_k v), \quad (5.8c)$$

y exigimos que el pullback tenga la siguiente forma

$$\varphi^* g_\infty = dx_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} dx_i^2 = a^2 \left(\frac{du^2 + dv^2}{u^2} \right).$$

La cual implica las siguientes ecuaciones

$$\sum_{k=1}^{\infty} [f'_k(u)]^2 + [F'(u)]^2 = \frac{a^2}{u^2}, \quad (5.9a)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 [f_k(u)]^2 = \frac{a^2}{u^2}. \quad (5.9b)$$

Dado que $F'(u)$ debe ser real para cada $u > 0$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} [f'_k(u)]^2 \leq \frac{a^2}{u^2} \quad (5.10)$$

Para obtener las funciones $f_k(u)$ y valores a_k , tenemos que expandir el lado derecho de (5.9a) en una serie, cuyos términos siguen siendo positivos para cada $u > 0$. Tomemos

$$t = \frac{1}{1 + u^2}, \quad u^2 = \frac{1 - t}{t},$$

luego

$$\frac{1}{u^2} = \frac{t}{1 - t} = t + t^2 + t^3 + \dots$$

Dado que $u > 0$ se sigue inmediatamente que $0 < t < 1$, de modo que esta serie es convergente para todos los valores de t y los términos son positivos. Entonces en (5.9b) podemos colocar

$$f_k(u) = \frac{a}{a_k} t^{k/2}$$

Debido a

$$\frac{dt}{du} = -\frac{2u}{(1+u^2)^2} = -\frac{1}{u} \frac{2u^2}{(1+u^2)^2} = -\frac{2}{u}(1-t)t$$

tenemos

$$f'_k(u) = -\frac{ak}{a_k u} t^{k/2}(1-t)$$

de modo que

$$[f'(u)]^2 = \frac{a^2 k^2}{u^2 a_k^2} (t^k - 2t^{k+1} + t^{k+2}). \quad (5.11)$$

Después de una ligera reordenación de los elementos de la serie obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} [f'_k(u)]^2 = \frac{a^2}{u^2} \left[\frac{t}{a_1^2} + \left(\frac{4}{a_2^2} - \frac{2}{a_1^2} \right) t^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{k^2}{a_k^2} - \frac{2(k-1)^2}{a_{k-1}^2} + \frac{(k-2)^2}{a_{k-2}^2} \right) t^k \right]$$

se supone, por supuesto, que los coeficientes a_k se eligen de tal manera que se garantice la convergencia absoluta para $|t| < 1$ y, por tanto, la reordenación sea posible.

Ahora estableceremos condiciones para que la serie obtenida anteriormente sea igual a $\frac{a^2}{u^2}t$, lo que satisface lo requerido en la ecuación (5.10) debido a $0 < t < 1$.

La comparación de coeficientes da

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1^2} &= 1, \\ \frac{4}{a_2^2} - \frac{2}{a_1^2} &= 0, \\ \frac{k^2}{a_k^2} - \frac{2(k-1)^2}{a_{k-1}^2} + \frac{(k-2)^2}{a_{k-2}^2} &= 0, \quad k = 3, 4, \dots, \end{aligned}$$

y esto es claramente satisfecho por

$$a_k = \sqrt{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ahora es sencillo ver la convergencia absoluta de la serie con los términos (5.11).

De la ecuación (5.9a) se sigue que

$$[F'(u)]^2 = \frac{a^2}{u^2} - \frac{a^2}{u^2}t = a^2t = \frac{a^2}{1+u^2},$$

luego

$$F(u) = a \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = a \operatorname{arcsenh} u.$$

Por tanto, la inmersión deseada tiene como funciones coordenada a

$$x_0 = a \operatorname{arcsenh} u, \quad (5.12a)$$

$$x_{2k-1} = \frac{a \cos(\sqrt{k}v)}{\sqrt{k}(1+u^2)^{k/2}}, \quad (5.12b)$$

$$x_{2k} = \frac{a \operatorname{sen}(\sqrt{k}v)}{\sqrt{k}(1+u^2)^{k/2}}. \quad (5.12c)$$

Antes de realizar la generalización análoga a (5.6a), queremos conocer las propiedades de la inmersión obtenida.

La superficie está en realidad inmersa en el espacio de Hilbert ℓ^2 , dado que

$$x_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = a^2 (\operatorname{arcsenh} u)^2 + a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+u^2)^k}$$

es convergente.

La relación entre el plano hiperbólico y la superficie es uno a uno. De hecho, cada par $(u > 0, v \text{ arbitrario})$ corresponde a uno y sólo un punto en el espacio de Hilbert. Por el contrario, dos pares de valores diferentes no pueden corresponder a un mismo punto en el espacio de Hilbert. Esto se puede ver fácilmente en las ecuaciones

$$x_1 = \frac{a \cos v}{\sqrt{1+u^2}}, \quad x_2 = \frac{a \operatorname{sen} v}{\sqrt{1+u^2}} \quad (5.13)$$

y

$$x_3 = \frac{a \cos(\sqrt{2}v)}{\sqrt{2}(1+u^2)}, \quad x_4 = \frac{a \operatorname{sen}(\sqrt{2}v)}{\sqrt{2}(1+u^2)}. \quad (5.14)$$

Debido a que

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{a^2}{1+u^2}$$

entonces u debe ser el mismo para ambos puntos. Si se supone que dos valores diferentes v y \bar{v} corresponden a estos dos puntos, entonces de la ecuación (5.13) tenemos

$$v = \bar{v} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

y por tanto no se obtiene el mismo par de valores x_3, x_4 en (5.14) debido a la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Además la superficie está libre de singularidades, dado que la matriz de las derivadas $\frac{\partial x_k}{\partial u}$ y $\frac{\partial x_k}{\partial v}$ tiene rango 2. El determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{a^2 u}{(1+u^2)^2}$$

siempre es diferente de cero para $u > 0$.

De modo que ahora es más sencillo realizar la generalización análoga a las ecuaciones (5.6a). Por lo tanto, un espacio hiperbólico n -dimensiones está inmerso en un espacio de Hilbert por medio de la siguiente aplicación, donde $z = (u, v_1, \dots, v_{n-1})$,

$$\begin{aligned} \varphi: (P, g_P) &\longrightarrow (\mathbb{R}^\infty, g_\infty) \\ z &\longmapsto \varphi(z) := (x_0(z), x_1(z), \dots) \end{aligned}$$

tal que para cada $k = 1, 2, \dots$ y $r = 1, 2, \dots, n-1$, tenemos

$$x_0 = a \operatorname{arsenh} u, \quad (5.15a)$$

$$x_{2(k-1)(n-1)+2r-1} = \frac{a \cos(\sqrt{k(n-1)}v_r)}{\sqrt{k(n-1)}(1+u^2)^{k/2}}, \quad (5.15b)$$

$$x_{2(k-1)(n-1)+2r} = \frac{a \operatorname{sen}(\sqrt{k(n-1)}v_r)}{\sqrt{k(n-1)}(1+u^2)^{k/2}}. \quad (5.15c)$$

Es sencillo confirmar que el pullback tiene la siguiente forma (5.7), es decir

$$\varphi^* g = dx_0^2 + \sum_{k=1}^5 dx_k^2 = a^2 \left(\frac{du^2 + dv_1^2 + \dots + dv_{n-1}^2}{u^2} \right).$$

y las propiedades mencionadas previamente de la inmersión (5.12c) se mantiene de manera análoga.

5.3 Inmersión isométrica de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^p , con $p < \infty$

En la sección anterior vimos que es posible conseguir una inmersión isométrica de todo el espacio hiperbólico n -dimensional en un espacio de dimensión infinita. Así que el objetivo de esta sección es estudiar el caso de una posible inmersión isométrica de todo el espacio hiperbólico n -dimensional dentro de un espacio euclidiano de dimensión finita.

Los conocidos resultados de Nash-Kuiper (véanse Kuiper (1955) -[Kui55a], [Kui55b] y Nash (1954) - [Nas54]), muestran que el Teorema de Hilbert no puede extenderse a la clase de superficies C^1 -suaves. Presentamos aquí uno de sus resultados

Teorema (Nash, 1954 - Kuiper, 1955). *El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n tiene una C^1 -inmersión isométrica en el espacio euclidiano $(n + 1)$ -dimensional.*

En 1956 John Nash en su artículo [Nas56] introdujo una técnica importante al utilizar funciones suavizantes para compensar la pérdida de derivadas. Dando paso al siguiente teorema

Teorema (Nash, 1956). *Cualquier variedad riemanniana n -dimensional suave admite, para $k \geq 3$, un C^k -embedding isométrico (global) en el espacio euclidiano \mathbb{R}^p , para $p = 3s_n + 4n$ en el caso compacto y $p = (n + 1)(3s_n + 4n)$ en el caso no compacto.*

La técnica demuestra ser extremadamente útil para resolver ecuaciones diferenciales no lineales. Ha sido modificado por muchas personas, incluidos Moser y Hörmander, y ahora se conoce como el teorema de la función implícita rígida, o iteración de Nash-Moser.

En consecuencia del teorema anterior, el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 posee un C^r -embedding isométrico en \mathbb{R}^{51} . Siguiendo a John Nash, uno naturalmente busca la dimensión p más pequeña, es decir minimizar la co-dimensión de la inmersión isométrica. Mikhael Gromov en su libro [Gro86], publicado en 1986, estudió varios problemas relacionados con las inmersiones isométricas de variedades Riemannianas. Demostró por ejemplo que $p = s_n + 2n + 3$ es suficiente para el caso compacto. Luego, en 1989, Matthias Günther simplificó enormemente la demostración original de Nash, en [Gü89]. Al reescribir inteligentemente las ecuaciones diferenciales, pudo emplear el principio de mapeo de contracciones, en lugar de la iteración de Nash-Moser, para construir soluciones. Günther también mejoró la dimensión del espacio objetivo a $p = \max\{s_n + 2n, s_n + n + 5\}$. Todavía no está claro si este es el mejor resultado posible en la dimensión del espacio ambiente. Notemos además que todas estas inmersiones no son inyectivas.

5.3.1 Teorema de Blauša para el plano hiperbólico \mathbb{H}^2

Como bien dice el título de esta subsección, centraremos nuestra atención a los detalles de la demostración del teorema de Danilo Blauša que garantiza

la realización del plano hiperbólico en el espacio euclidiano \mathbb{R}^6 , ver [Bla55].

Teorema 5.3.1 (Blanuša, 1955). *Existe una inmersión isométrica inyectiva, de clase C^∞ , del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 en \mathbb{R}^6 .*

Además dicha inmersión es dada de manera explícita y el método usado por Blanuša es de vital importancia para posteriores generalizaciones y también disminuir la codimensión de esta inmersión, como veremos más adelante. Un papel importante en su construcción lo juegan dos pares de funciones auxiliares, uno de estos pares se da a continuación

$$\psi_1(u) = \exp\left(2\left[\frac{|u|+1}{2}\right] + 5\right), \quad \psi_2(u) = \exp\left(2\left[\frac{|u|}{2}\right] + 6\right) \quad (5.16a,b)$$

Donde $[x]$ denota la parte entera de x .

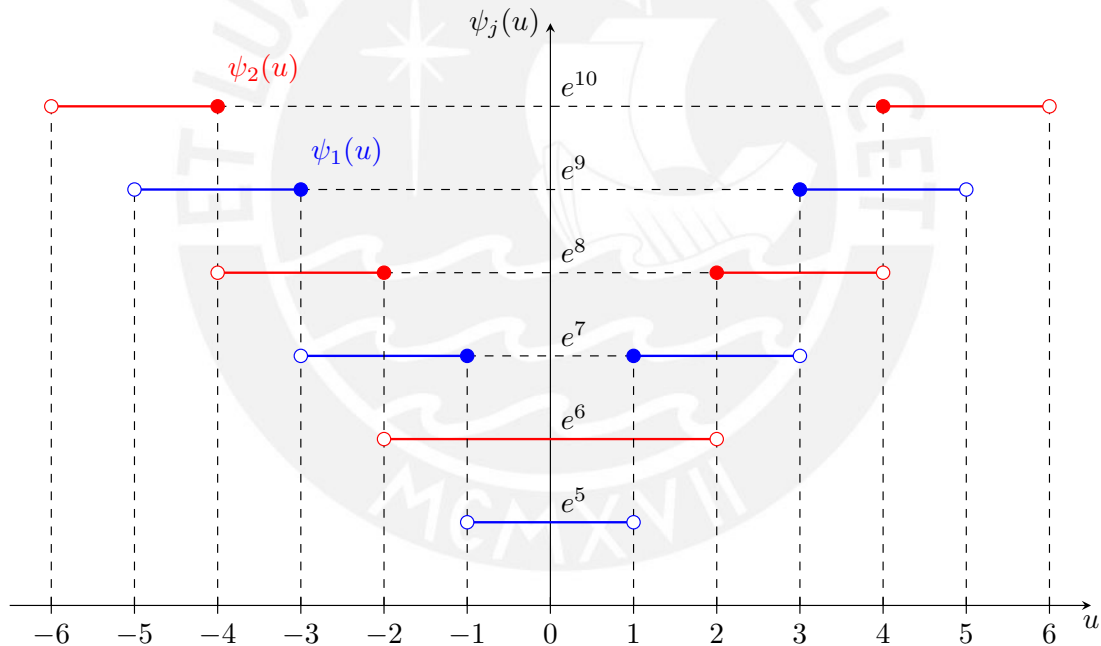


Figura 5.1: Funciones auxiliares $\psi_j(u)$

Las funciones ψ_1 y ψ_2 son funciones escalonadas con puntos de discontinuidad en los números impares y pares, respectivamente. Para lo que sigue, es importante que las funciones escalonadas para diferenciación se comporten como constantes, pero además crecen arbitrariamente rápido cuando $u \rightarrow \pm\infty$, es decir $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \psi_j(u) = +\infty$.

Sea la constante $A = \int_0^1 \text{sen}(\pi t) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi t)}\right) dt$, y consideremos el segundo par de funciones auxiliares de la siguiente manera

$$\varphi_1(u) = \sqrt{\frac{1}{A} \int_0^{u+1} \text{sen}(\pi t) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi t)}\right) dt} \quad (5.17a)$$

$$\varphi_2(u) = \sqrt{\frac{1}{A} \int_0^u \text{sen}(\pi t) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi t)}\right) dt} \quad (5.17b)$$

luego definimos las funciones f_1 y f_2 de la siguiente manera

$$f_1(u) = \frac{\varphi_1(u)}{\psi_1(u)} \cdot \text{senh } u, \quad f_2(u) = \frac{\varphi_2(u)}{\psi_2(u)} \cdot \text{senh } u \quad (5.18a,b)$$

Consideremos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}^2, g_{\text{cosh}}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^6, g) \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) := (x_1(u, v), x_2(u, v), \dots, x_6(u, v)) \end{aligned}$$

con las funciones coordenadas $x_k(u, v)$ dadas por

$$x_1(u, v) = \int_0^u \sqrt{1 - [f_1'(t)]^2 - [f_2'(t)]^2} dt, \quad (5.19a)$$

$$x_2(u, v) = v, \quad (5.19b)$$

$$x_3(u, v) = f_1(u) \cdot \cos(v \cdot \psi_1(u)), \quad (5.19c)$$

$$x_4(u, v) = f_1(u) \cdot \text{sen}(v \cdot \psi_1(u)), \quad (5.19d)$$

$$x_5(u, v) = f_2(u) \cdot \cos(v \cdot \psi_2(u)), \quad (5.19e)$$

$$x_6(u, v) = f_2(u) \cdot \text{sen}(v \cdot \psi_2(u)), \quad (5.19f)$$

afirmamos entonces que φ es una inmersión isométrica de clase C^∞ del plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 = (\mathbb{R}^2, g_{\text{cosh}})$ sin auto-intersecciones en \mathbb{R}^6 . Veremos más adelante que el pullback tiene la siguiente forma

$$\varphi^* g = du^2 + \cosh^2 v dv^2. \quad (5.20)$$

Hasta el momento no nos hemos preocupado por la buena definición de las funciones $\varphi_j(u)$, $f_j(u)$ ni mucho menos de $x_1(u, v)$ así que en este punto vale la pena estudiar sus buenas definiciones, para esto tomemos

$$\chi(u) = \text{sen}(\pi u) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi u)}\right)$$

la cual tiende a cero cuando u tiende a un entero, entonces debemos completar $\chi(u) = 0$ para $u \in \mathbb{Z}$. Sean

$$\rho_1(u) = \frac{1}{A} \int_0^{u+1} \chi(t) dt, \quad \rho_2(u) = \frac{1}{A} \int_0^u \chi(t) dt \quad (5.21a,b)$$

luego con respecto a (5.17a) y (5.17b) tenemos

$$\varphi_1(u) = \sqrt{\rho_1(u)}, \quad \varphi_2(u) = \sqrt{\rho_2(u)} \quad (5.22a,b)$$

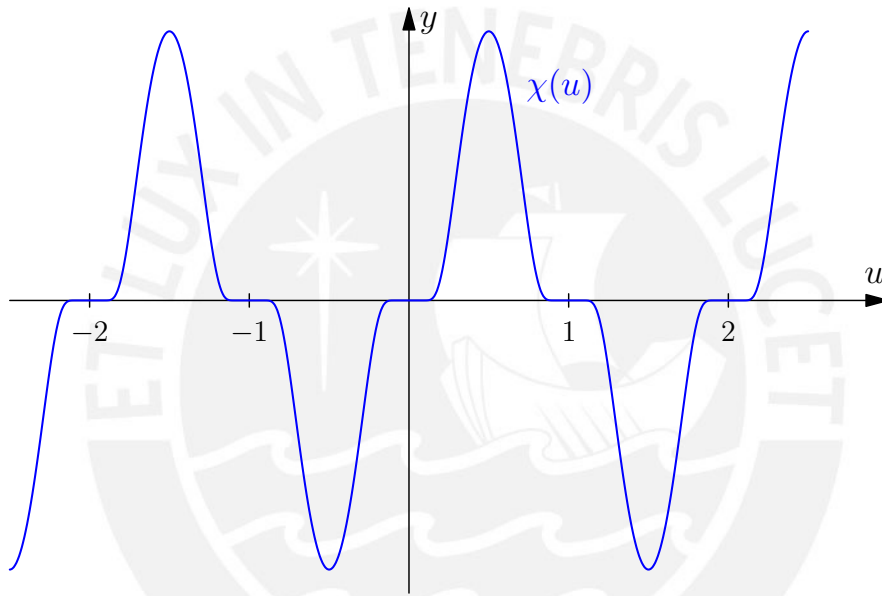


Figura 5.2: Función $\chi(t)$

De esta manera se tiene $\chi \geq 0$ en el intervalo $[0, 1]$, entonces $\rho_2(u)$ es creciente en este intervalo, dado que $\rho_2(0) = 0$, $\rho_2(1) = 1$ y $\rho_2'(u) = \chi(u) > 0$ con $u \in (0, 1)$. Lo mismo se aplica entonces a la función $\varphi_2(u)$. Por otro lado tenemos que $\chi(u)$ satisface:

$$\chi(u+1) = -\chi(u) \quad (5.23)$$

por tanto

$$\begin{aligned}
 A \cdot \rho_1(u) &= \int_0^{u+1} \chi(t) dt \\
 &= \int_0^1 \chi(t) dt + \int_1^{u+1} \chi(t) dt \\
 &= A + \int_0^u \chi(t+1) dt \\
 &= A - \int_0^u \chi(t) dt \\
 &= A - A \cdot \rho_2(u)
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

luego tenemos

$$\rho_1(u) + \rho_2(u) = 1 \tag{5.25}$$

es decir

$$\varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u) = 1. \tag{5.26}$$

Debido a (5.25), tenemos que $\rho_1(u)$ es decreciente en el intervalo $[0, 1]$. Por otro lado, de (5.21a,b) tenemos

$$\rho_1(u) = \rho_2(u+1) \tag{5.27}$$

y de (5.22a,b),

$$\varphi_1(u) = \varphi_2(u+1). \tag{5.28}$$

Luego tenemos

$$\rho_1(u) = \rho_2(u+1) = 1 - \rho_1(u+1) = 1 - \rho_2(u+2) = \rho_1(u+2) \tag{5.29}$$

y en consecuencia $\varphi_1(u) = \varphi_1(u+2)$. De manera análoga tenemos $\rho_2(u) = \rho_2(u+2)$ y $\varphi_2(u) = \varphi_2(u+2)$. Debido a (5.27), $\rho_2(u)$ debe ser decreciente en el intervalo $[1, 2]$, dado que $\rho_1(u)$ lo es en el intervalo $[0, 1]$. Además dado que $\rho_2(u)$ crece de 0 a 1 en el intervalo $[0, 1]$, lo mismo debe ser cierto para $\rho_1(u)$ en el intervalo $[-1, 0]$ debido a (5.27) y entonces esto se mantiene en el intervalo $[1, 2]$, y por tanto debido a que $\rho_2(u) = \rho_2(u+2)$, tenemos para todo u ,

$$0 \leq \rho_1(u) \leq 1, \quad 0 \leq \rho_2(u) \leq 1. \tag{5.30a,b}$$

De este modo las funciones $\varphi_1(u)$ y $\varphi_2(u)$ están bien definidas para todo u ,

$$0 \leq \varphi_1(u) \leq 1, \quad 0 \leq \varphi_2(u) \leq 1. \quad (5.31a,b)$$

Por otro lado es sencillo mostrar que para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\rho_1(2n) = \varphi_1(2n) = 1, \quad \rho_1(2n+1) = \varphi_1(2n+1) = 0 \quad (32a,b)$$

$$\rho_2(2n) = \varphi_2(2n) = 0, \quad \rho_2(2n+1) = \varphi_2(2n+1) = 1 \quad (33a,b)$$

Por otro lado tenemos

$$\chi(u) = \operatorname{sen}(\pi u) \exp\left(\frac{-1}{\operatorname{sen}^2(\pi u)}\right) = \frac{1}{e} \operatorname{sen}(\pi u) \exp(-\cot^2(\pi u)) \quad (5.34)$$

Aunque la función $\cot u$ es una función trigonométrica elemental, construir expresiones para sus derivadas superiores es complicado y poco transparente. Por ejemplo, una simple observación

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \cot u &= (-1)(1 + \cot^2 u) \\ \frac{d^2}{du^2} \cot u &= (-1)^2(2 \cot u + 2 \cot^3 u) \\ \frac{d^3}{du^3} \cot u &= (-1)^3(2 + 8 \cot^2 u + 6 \cot^4 u) \\ \frac{d^4}{du^4} \cot u &= (-1)^4(16 \cot u + 40 \cot^3 u + 24 \cot^5 u) \\ &\vdots \end{aligned}$$

sugiere que $\frac{d^n}{du^n} \cot u$, $n \in \mathbb{N}$ es un polinomio en $\cot u$. De manera más precisa podemos encontrar en [Hof95a], [Kö96] y [Ada07] que

$$\frac{d^n}{du^n} \cot u = (-1)^n P_n(\cot u)$$

donde P_n es un polinomio de grado $n+1$, pero encontrar los coeficientes es más complicado. Michael Hoffman resolvió este problema dando la fórmula recursiva

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k(x) P_{n-k}(x)$$

donde $P_0(x) = x$, $P_1(x) = x^2 + 1$ y $x = \cot u$.

Generalmente, algunas funciones trigonométricas e hiperbólicas pertenecen a la clase de funciones cuyas derivadas son polinomios en términos de la misma función, ver por ejemplo [KB67], [Hof95b] y [Kno03].

Luego es claro que una derivada arbitrariamente alta de $\chi(u)$ se puede expresar como el producto de una la función $\exp(-\cot^2 x)$ y una función racional que consta de $\sin(\pi u)$, $\cos(\pi u)$ y $\cot(\pi u)$. Si hacemos que u tienda hacia algún número entero, notamos que tanto la función $\chi(u)$ como todas sus derivadas tienden a cero. De esto se concluye que en estos puntos la función $\chi(u)$ es continua y todas sus derivadas existen y son iguales a cero. No hace falta decir que la función también tiene derivada de cualquier orden en todos los demás puntos.

Según (5.21a,b) y (5.23) tenemos

$$\frac{d^n}{du^n} \rho_1(u) = \frac{1}{A} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \chi(u+1) = -\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \chi(u) \quad (5.35)$$

y de manera análoga

$$\frac{d^n}{du^n} \rho_2(u) = \frac{1}{A} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \chi(u). \quad (5.36)$$

Debido a las propiedades de la función $\chi(u)$ tenemos que las funciones $\rho_1(u)$ y $\rho_2(u)$ también tienen derivadas de cualquier orden en todas partes. Para el entero u , todas las derivadas son iguales a cero, mientras que $\rho_1(u)$ y $\rho_2(u)$ toman los valores dados en (32a,b) y (33a,b) en estos puntos.

Debido a (5.22a,b) podemos concluir que en todos los lugares donde $\rho_1(u) > 0$ (respectivamente $\rho_2(u) > 0$), se tiene que $\varphi_1(u)$ (respectivamente $\varphi_2(u)$), tiene derivadas de cualquier orden. Para establecer esto también en los puntos donde φ_1 y φ_2 fallan, tengamos en cuenta que por ejemplo la n -ésima derivada de φ_2 es

$$\frac{d^n}{du^n} \varphi_2(u) = \frac{d^n}{du^n} \sqrt{\rho_2} \quad (5.37)$$

Es decir aquí estamos considerando la n -ésima derivada de una composición de funciones $g \circ f$ donde $f(u) = \rho_2(u)$ y $g(u) = \sqrt{u}$. Por otro lado, tenemos la fórmula de Faà di Bruno

Teorema 5.3.2 (Fórmula de Faà di Bruno, 1855). *Si f y g son funciones n -diferenciables, entonces*

$$\frac{d^n}{du^n}(g \circ f) = \sum_{b_1+2b_2+\dots+nb_n=n} \frac{n!}{b_1!b_2!\dots b_n!} \cdot \frac{d^k}{df^k} g \left(\frac{f'}{1!} \right)^{b_1} \left(\frac{f''}{2!} \right)^{b_2} \dots \left(\frac{f^{(n)}}{n!} \right)^{b_n}$$

donde $k := b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Demostración. Ver [FdB55], [Rom80] o [Joh02]. \square

Aplicando la fórmula de Faà di Bruno, para $f(u) = \rho_2(u)$ y $g(u) = \sqrt{u}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^n \rho_2^{\frac{1}{2}}}{du^n} &= \sum \frac{n!}{b_1!b_2!\dots b_n!} \cdot \frac{d^k}{d\rho_2^k} \rho_2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho_2'}{1!} \right)^{b_1} \left(\frac{\rho_2''}{2!} \right)^{b_2} \dots \left(\frac{\rho_2^{(n)}}{n!} \right)^{b_n} \\ &= \sum \frac{n!}{b_1!b_2!\dots b_n!} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \dots \left(\frac{1}{2} - k + 1 \right) \rho_2^{\frac{1}{2}-k} \left(\frac{\rho_2'}{1!} \right)^{b_1} \left(\frac{\rho_2''}{2!} \right)^{b_2} \dots \left(\frac{\rho_2^{(n)}}{n!} \right)^{b_n} \end{aligned}$$

donde $k = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Tomemos $a_k = \frac{n! \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \dots \left(\frac{1}{2} - k + 1 \right)}{b_1!b_2!\dots b_n! \cdot (1!)^{b_1} (2!)^{b_2} \dots (n!)^{b_n}}$, entonces tenemos la siguiente expresión

$$\frac{d^n \rho_2^{\frac{1}{2}}}{du^n} = \sum a_k \rho_2^{\frac{1}{2}-k} (\rho_2')^{b_1} (\rho_2'')^{b_2} \dots (\rho_2^{(n)})^{b_n} \quad (5.38)$$

Ahora recordemos que toda derivada de ρ_2 es el producto de la función exponencial dada en (5.34) y una función racional que consta de $\text{sen}(\pi u)$, $\text{cos}(\pi u)$ y $\text{cot}(\pi u)$. Si denotamos dicha función por $\mathcal{R}(u)$, entonces dicha suma $\mathcal{S}(u)$ tendrá la forma

$$\mathcal{S}(u) = \mathcal{R}(u) \cdot \exp \left(-(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \text{cot}^2(\pi u) \right) \cdot \rho_2^{\frac{1}{2}-k}. \quad (5.39)$$

Ahora sea $m \in \mathbb{Z}$. Usando la regla de L'Hôpital, primero calculamos el límite

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 2m} \frac{\text{sen}^3(\pi u) \rho_2'}{2\pi \rho_2(u)} &= \lim_{u \rightarrow 2m} \frac{\text{sen}^3(\pi u) \chi(u)}{2\pi A \rho_2(u)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 2m} \frac{3\pi \text{sen}^2(\pi u) \text{cos}(\pi u) \chi(u) + \text{sen}^3(\pi u) \chi'(u)}{2\pi \chi(u)} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5.40)$$

usando las ecuaciones (5.34) y (5.40) tenemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow 2m} \mathcal{S}(u) &= \lim_{u \rightarrow 2m} \mathcal{R}(u) \cdot \exp\left(- (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \cot^2(\pi u)\right) \cdot \rho_2^{\frac{1}{2}-k} \\
&= \lim_{u \rightarrow 2m} (2\pi)^{k-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}-3k}(\pi u) \cdot \exp\left(- (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \cot^2(\pi u)\right) \cdot \\
&\quad \cdot \mathcal{R}(u) \cdot [\rho_2(u)]^{\frac{1}{2}-k} \cdot \left[\frac{2\pi\rho_2(u)}{\operatorname{sen}^3(\pi u)\rho_2'(u)} \right]^{\frac{1}{2}-k} \\
&= \lim_{u \rightarrow 2m} (2\pi)^{k-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}-3k}(\pi u) \cdot \exp\left(- (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \cot^2(\pi u)\right) \cdot \\
&\quad \cdot \mathcal{R}(u) \cdot [\rho_2(u)]^{\frac{1}{2}-k} \\
&= \lim_{u \rightarrow 2m} (2\pi)^{k-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}-3k}(\pi u) \cdot \exp\left(- (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \cot^2(\pi u)\right) \cdot \\
&\quad \cdot \mathcal{R}(u) \cdot \exp\left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}-k}(\pi u) \cdot \exp\left(- \left(\frac{1}{2} - k\right) \cot^2(\pi u)\right) \\
&= \lim_{u \rightarrow 2m} (2\pi)^{k-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(k - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen}^{2-4k}(\pi u) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cot^2(\pi u)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego de (5.38) se sigue que $\frac{d^n}{du^n} \varphi_2(u) \rightarrow 0$ cuando $u \rightarrow 2m$. Dado que $\varphi_2(u)$ es continua para $u = 2m$, también deducimos que todas las derivadas existen en estos puntos y son iguales a cero. Debido a (5.28) lo mismo se sigue inmediatamente para $\varphi_1(u)$ en los puntos $u = 2m + 1$. Finalmente, es sencillo ver que las funciones $f_1(u)$ y $f_2(u)$ definidas en (5.18a,b) también tienen derivadas de cualquier orden en todas partes. Recordemos que las funciones $\psi_1(u)$ y $\psi_2(u)$ que aparecen en las denominadas funciones escalonadas de acuerdo a (5.16a,b), se caracterizan por que $\psi_1(u)$ tiene puntos de discontinuidad para u impares y $\psi_2(u)$, para u pares; es decir precisamente donde se anulan funciones del numerador y todas sus derivadas. También es sencillo notar que las derivadas de f_1 y f_2 tienden para 0 cuando uno se acerca a estos puntos “ $2m$ ” y “ $2m + 1$ ” por la derecha o por la izquierda, por tanto todas las derivadas existen en estos puntos y son cero. Ahora nuestro objetivo es mostrar que la función $x_1(u, v)$ definida en (5.19a) está bien definida. Para ello necesitamos conocer más acerca de $|\varphi_1'(u)|$ y $|\varphi_2'(u)|$.

Dado que $\chi(u)$ es una función impar según (5.34) y $\varphi_2(u)$ es una función par según (5.21a,b) y (5.22a,b), de modo que debido a (5.30a,b) tenemos

$$\varphi_2(u) = \varphi_2(-u) = \varphi_2(2 - u) \quad (5.41)$$

y también

$$\varphi_2'(u) = -\varphi_2'(2-u). \quad (5.42)$$

Por tanto podemos restringirnos al intervalo $[0, 1]$ y, debido a (5.28), a la función $\varphi_2(u)$. Además en este intervalo tenemos

$$|\varphi_2'(u)| = \varphi_2'(u) = \frac{\rho_2'(u)}{2\sqrt{\rho_2(u)}} = \frac{\chi(u)}{2A\varphi_2(u)} \quad (5.43)$$

En el intervalo $[1/2, 1]$ el numerador decrece hacia 0, mientras que el denominador

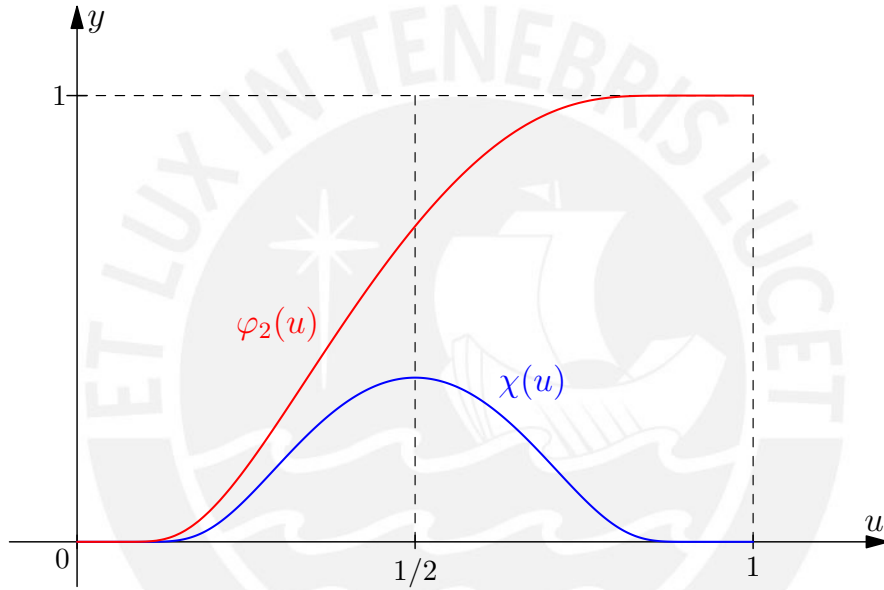


Figura 5.3: Funciones $\chi(t)$ y $\varphi_2(u)$ para $u \in [0, 1]$

crece hacia $2A$. Por tanto, el máximo de $\varphi_2'(u)$ debe estar en $[0, 1/2]$. Además en este intervalo tenemos

$$u \leq \text{sen}(\pi u) \leq \pi u \quad (5.44)$$

y por tanto

$$\varphi_2'(u) = \frac{\text{sen}(\pi u) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi u)}\right)}{2\sqrt{A \int_0^u \text{sen}(\pi t) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi t)}\right) dt}} \leq \frac{\pi u \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi u)}\right)}{2\sqrt{A \int_0^u t \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi t)}\right) dt}} \quad (5.45)$$

Tomemos $0 < \lambda < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^u t \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi t)}\right) dt &> \int_{\lambda u}^u t \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi t)}\right) dt \\ &> \int_{\lambda u}^u \lambda u \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi \lambda u)}\right) dt \\ &= u^2 \lambda (1 - \lambda) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi \lambda u)}\right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

reemplazando en (5.45) tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_2'(u) &< \frac{\pi \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi u)}\right)}{2\sqrt{A\lambda(1-\lambda)} \exp\left(\frac{-1}{2\text{sen}^2(\pi \lambda u)}\right)} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{A\lambda(1-\lambda)}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2\text{sen}^2(\pi \lambda u)} - \frac{1}{\text{sen}^2(\pi u)}\right). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Dado que la función $\frac{\text{sen}(\pi u)}{u}$ es decreciente para $0 < u < 1$ tenemos, para $0 < x < u$, que

$$\frac{\text{sen}(\pi u)}{u} < \frac{\text{sen}(\pi x)}{x}$$

tomando ahora $x = \lambda u$,

$$\text{sen}(\pi u) < \frac{\text{sen}(\pi \lambda u)}{\lambda}.$$

Entonces para $\frac{1}{\lambda} < \sqrt{2}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\pi u) &< \sqrt{2} \text{sen}(\pi \lambda u) \\ \frac{1}{2\text{sen}^2(\pi \lambda u)} - \frac{1}{\text{sen}^2(\pi u)} &< 0 \\ \exp\left(\frac{1}{2\text{sen}^2(\pi \lambda u)} - \frac{1}{\text{sen}^2(\pi u)}\right) &< 1 \end{aligned} \quad (5.48)$$

Por ejemplo podemos elegir en particular $\lambda = \frac{4}{5} > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Luego de (5.47) y (5.48) obtenemos

$$\varphi_2'(u) < \frac{\pi}{2\sqrt{A\lambda(1-\lambda)}} = \frac{5\pi}{4\sqrt{A}}. \quad (5.49)$$

Para estimar la constante A , escribimos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi t) \exp\left(\frac{-1}{\operatorname{sen}(\pi t)}\right) dt \\ &> \int_{1/4}^{3/4} \operatorname{sen}(\pi t) \exp\left(\frac{-1}{\operatorname{sen}(\pi t)}\right) dt \\ &> \int_{1/4}^{3/4} \operatorname{sen}(\pi/4) \exp\left(\frac{-1}{\operatorname{sen}(\pi/4)}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}e^2} \end{aligned}$$

y por otro lado

$$|\varphi'_2(u)| < \frac{5\sqrt[4]{8}e}{4} < 18 \quad (5.50)$$

de manera análoga tenemos

$$|\varphi'_1(u)| < 18 \quad (5.51)$$

para todo u . Como $f_1(u) = \frac{\varphi_1(u)}{\psi_1(u)} \cdot \operatorname{senh} u$, entonces, entonces

$$f'_1(u) = \frac{1}{\psi_1(u)} (\varphi_1(u) \cosh u + \varphi'_1(u) \operatorname{senh} u)$$

luego por (5.31a,b) y (5.51) tenemos

$$\begin{aligned} |f'_1(u)| &\leq \frac{1}{\psi_1(u)} \left(|\varphi_1(u)| \cdot |\cosh u| + |\varphi'_1(u)| \cdot |\operatorname{senh} u| \right) \\ &\leq \frac{1}{\psi_1(u)} \left(|\varphi_1(u)| \cdot \exp |u| + |\varphi'_1(u)| \cdot \exp |u| \right) \\ &< \frac{19}{\psi_1(u)} \exp |u| \end{aligned}$$

así mismo, debido a (5.31a,b) y (5.50) tenemos

$$|f'_2(u)| < \frac{19}{\psi_2(u)} \exp |u|.$$

Por otro lado sabemos que $m - [m] < 1$, entonces

$$\frac{|u| + 1}{2} - \left\lfloor \frac{|u| + 1}{2} \right\rfloor < 1 \quad \text{y} \quad \frac{|u|}{2} - \left\lfloor \frac{|u|}{2} \right\rfloor < 1$$

luego tenemos

$$2 \left\lfloor \frac{|u|+1}{2} \right\rfloor + 1 > |u| \quad \text{y} \quad 2 \left\lfloor \frac{|u|}{2} \right\rfloor + 2 > |u|.$$

Debido a (5.16a,b) tenemos

$$\psi_1(u) = \exp \left(2 \left\lfloor \frac{|u|+1}{2} \right\rfloor + 5 \right) > \exp (|u| + 4), \quad (5.52a)$$

$$\psi_2(u) = \exp \left(2 \left\lfloor \frac{|u|}{2} \right\rfloor + 6 \right) > \exp (|u| + 4), \quad (5.52b)$$

en consecuencia, para $j = 1, 2$,

$$|f'_j(u)| < \frac{19}{\psi_j(u)} \exp |u| < \frac{19}{e^4} < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5.53)$$

Con lo cual tenemos que $1 - [f'_1(t)]^2 - [f'_2(t)]^2 > 0$ es decir la función $x_1(u, v)$ está bien definida. Debido a todo estos resultados podemos ver que (5.19) está bien definida, solo falta ver que es realmente una inmersión isométrica inyectiva. Ahora veremos que el pullback tiene realmente la forma (5.20). Hagamos unas cuentas que nos facilitarán el trabajo más adelante, para no sobrecargar la notación ni los cálculos tomemos $\theta = v \cdot \psi(u)$

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^u \sqrt{1 - [f'_1]^2 - [f'_2]^2} dt \\ dx_1 &= \sqrt{1 - [f'_1]^2 - [f'_2]^2} du \\ dx_1^2 &= \left(1 - [f'_1]^2 - [f'_2]^2 \right) du^2 \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= v \\ dx_2^2 &= dv^2 \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= f_1 \cdot \cos (v \cdot \psi_1) = f_1 \cdot \cos \theta \\ dx_3 &= f'_1 \cos \theta du - f_1 \psi_1 \sin \theta dv \\ dx_3^2 &= [f'_1]^2 \cos^2 \theta du^2 - 2f_1 f'_1 \psi_1 \sin \theta \cos \theta dudv + f_1^2 \psi_1^2 \sin^2 \theta dv^2 \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} x_4 &= f_1 \cdot \sen (v \cdot \psi_1) = f_1 \cdot \sen \theta \\ dx_4 &= f'_1 \sen \theta du + f_1 \psi_1 \cos \theta dv \\ dx_4^2 &= [f'_1]^2 \cos^2 \theta du^2 + 2f_1 f'_1 \psi_1 \sen \theta \cos \theta dudv + f_1^2 \psi_1^2 \sen^2 \theta dv^2 \end{aligned} \quad (5.57)$$

De (5.56) y (5.57) podemos ver que

$$dx_3^2 + dx_4^2 = [f_1']^2 du^2 + f_1^2 \psi_1^2 dv^2 \quad (5.58)$$

y de manera análoga

$$dx_5^2 + dx_6^2 = [f_2']^2 du^2 + f_2^2 \psi_2^2 dv^2 \quad (5.59)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \varphi^* g &= \sum_{k=1}^6 dx_k^2 \\ &= \left(1 - [f_1']^2 - [f_2']^2\right) du^2 + dv^2 + [f_1']^2 du^2 + f_1^2 \psi_1^2 dv^2 + [f_2']^2 du^2 + f_2^2 \psi_2^2 dv^2 \\ &= du^2 + (1 + (f_1 \psi_1)^2 + (f_2 \psi_2)^2) dv^2 \\ &= du^2 + (1 + (\varphi_1 \cdot \sinh v)^2 + (\varphi_2 \cdot \sinh v)^2) dv^2 \\ &= du^2 + (1 + (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \cdot \sinh^2 v) dv^2 \\ &= du^2 + (1 + \sinh^2 v) dv^2 \\ &= du^2 + \cosh^2 v dv^2 \\ &= g_{\cosh} \end{aligned}$$

Sean $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{H}^2$ tales que $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2)$, entonces

$$(x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1, x_6^1) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2, x_6^2)$$

donde estamos denotando $x_k^j = x_k(u_j, v_j)$ para $k = 1, 2, \dots, 6$ y $j = 1, 2$. Luego tenemos que $v_1 = x_2^1 = x_2^2 = v_2$, esto gracias a (5.19b). Por otro lado tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial} x_1(u, v) = \sqrt{1 - [f_1'(u)]^2 - [f_2'(u)]^2} > 0$$

es decir $x_1(u, v)$ es una función creciente, se sigue que $u_1 = u_2$. Lo cual muestra que φ es una inmersión isométrica sin auto intersecciones.

5.3.2 Teorema de Blauša para el espacio hiperbólico \mathbb{H}^n

Con todo lo visto en la sub-sección anterior podemos preguntarnos, si dicha inmersión isométrica inyectiva de \mathbb{H}^2 en \mathbb{R}^6 admite una generalización. Danilo Blauša en el mismo artículo [Bla55] muestra el siguiente teorema

Teorema 5.3.3 (Blanuša, 1955). *Existe una inmersión isométrica inyectiva, de clase C^∞ , del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^{6n-5} , con $n \geq 3$.*

Sean φ_1 y φ_2 nuevamente las funciones definidas en (5.17). También usaremos las funciones escalonadas ψ_1 y ψ_2 de acuerdo con (5.16a,b). Además, sea $u > 0$

$$F_1(u) = \frac{\varphi_1(1/u)}{\psi_1(1/u)} \cdot \sqrt{\frac{1}{u^2} - e^{-2u}}, \quad F_2(u) = \frac{\varphi_2(1/u)}{\psi_2(1/u)} \cdot \sqrt{\frac{1}{u^2} - e^{-2u}} \quad (5.60a,b)$$

Consideremos la siguiente aplicación, donde $z = (u, v_1, \dots, v_{n-1})$,

$$\begin{aligned} \varphi: (\mathbb{R}^n, g_P) &\longrightarrow (\mathbb{R}^{6n-5}, g) \\ z &\longmapsto \varphi(z) := (x_0(z), x_{11}(z), \dots, x_{16}(z), x_{(n-1)1}(z), \dots, x_{(n-1)6}(z)) \end{aligned}$$

tal que para cada $k = 1, 2, \dots, n-1$, tenemos

$$x_0(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = \int_1^u \sqrt{\frac{1}{t^2} - [F_1'(t)]^2 - [F_2'(t)]^2} - e^{-2t} dt, \quad (5.61a)$$

$$x_{k1}(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{n-1}} \cdot \cos(\sqrt{n-1} \cdot v_k) \quad (5.61b)$$

$$x_{k2}(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{n-1}} \cdot \text{sen}(\sqrt{n-1} \cdot v_k) \quad (5.61c)$$

$$x_{k3}(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = \frac{F_1(u)}{\sqrt{n-1}} \cdot \cos(\sqrt{n-1} \cdot v_k \cdot \psi_1(1/u)) \quad (5.61d)$$

$$x_{k4}(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = \frac{F_1(u)}{\sqrt{n-1}} \cdot \text{sen}(\sqrt{n-1} \cdot v_k \cdot \psi_1(1/u)) \quad (5.61e)$$

$$x_{k5}(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = \frac{F_2(u)}{\sqrt{n-1}} \cdot \cos(\sqrt{n-1} \cdot v_k \cdot \psi_2(1/u)) \quad (5.61f)$$

$$x_{k6}(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = \frac{F_2(u)}{\sqrt{n-1}} \cdot \text{sen}(\sqrt{n-1} \cdot v_k \cdot \psi_2(1/u)) \quad (5.61g)$$

haciendo uso de (5.58) en los cálculos sencillos pero engorrosos podemos obtener

$$\varphi^*g = dx_0^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^6 dx_{kj}^2 = \frac{1}{u^2} \left(du^2 + \sum_{k=1}^{n-1} dv_k^2 \right).$$

Por otro lado sabemos que $\frac{1}{u^2} > e^{-2u}$, para $u > 0$, de modo que F_1 y F_2 están bien definidas. Ahora nuestro objetivo es mostrar la buena definición de

$x_0(u, v_1, \dots, v_{n-1})$. Consideremos $t > 1$, luego

$$\begin{aligned} F'_1(t) &= \frac{1}{\psi_1(1/t)} \left[\varphi'_1(1/t) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{t^2} - e^{-2t}} + \varphi_1(1/t) \cdot \frac{-\frac{2}{t^3} + 2e^{-2t}}{2\sqrt{\frac{1}{t^2} - e^{-2t}}} \right] \\ &= \frac{1}{t\psi_1(1/t)\sqrt{1 - t^2e^{-2t}}} \left[-\varphi'_1(1/t) \cdot \left(\frac{1}{t^2} - e^{-2t}\right) - \varphi_1(1/t) \cdot \left(\frac{1}{t} - t^2e^{-2t}\right) \right] \end{aligned}$$

Es claro que para $t > 1$, tenemos

$$0 < \frac{1}{t^2} - e^{-2t} < 1. \quad (5.62)$$

Como el mínimo de la función $1 - t^3e^{-2t}$, el cual se da para $t = 3/2$, es positivo entonces para $t > 1$ tenemos:

$$0 < \frac{1}{t} - t^2e^{-2t} < 1. \quad (5.63)$$

Finalmente, el mínimo de $1 - t^2e^{-2t}$, el cual se da para $t = 1$, es igual a $1 - e^{-2}$, luego para $t > 1$ tenemos:

$$1 - t^2e^{-2t} > 1 - e^{-2} > \frac{6}{7} > \frac{6^2}{7^2} \quad (5.64)$$

Con lo cual tenemos

$$|F'_1(t)| < \frac{7}{6t\psi_1(1/t)} \left[|\varphi'_1(1/t)| + \varphi_1(1/t) \right] \quad (5.65)$$

por causa de (5.31a,b) y (5.51), entonces para $t > 1$

$$|F'_1(t)| < \frac{7 \cdot 19}{6t\psi_1(1/t)}. \quad (5.66)$$

Por otro lado para $t > 1$ tenemos

$$\psi_1(1/t) = \exp \left(2 \left\lfloor \frac{\left| \frac{1}{t} \right| + 1}{2} \right\rfloor + 5 \right) = e^5, \quad (5.67a)$$

$$\psi_2(1/t) = \exp \left(2 \left\lfloor \frac{\left| \frac{1}{t} \right|}{2} \right\rfloor + 6 \right) = e^6, \quad (5.67b)$$

y por tanto

$$|F'_1(t)| < \frac{133}{6te^5}, \quad |F'_2(t)| < \frac{133}{6te^6}. \quad (5.68a,b)$$

En consecuencia de (5.64) y (5.68a,b) tenemos

$$\frac{1}{t^2} - e^{-2t} > \frac{6^2}{7^2 t^2} > \left(\frac{133}{6te^5}\right)^2 + \left(\frac{133}{6te^6}\right)^2 > |F'_1(t)| + |F'_2(t)|$$

y por tanto para $t > 1$

$$\frac{1}{t^2} - |F'_1(t)| - |F'_2(t)| - e^{-2t} > 0$$

lo cual concluye que la función $x_0(u, v_1, \dots, v_{n-1})$ definido en (5.61a) está bien definido, para $t > 1$. Tomemos ahora $t \leq 1$. De modo que escribimos $F'_1(t)$ de la siguiente, manera

$$F'_1(t) = \frac{1}{t^4 \psi(1/t) \sqrt{\frac{1}{t^2} - e^{-2t}}} \cdot \left[-\varphi'_1(1/t) \cdot (1 - t^2 e^{-2t}) - \varphi_1(1/t)(t - t^4 e^{-2t}) \right].$$

Además tenemos, para $t \leq 1$

$$1 - t^2 e^{-2t} < 1, \quad (5.69a)$$

$$t - t^4 e^{-2t} = t(1 - t^3 e^{-2t}) < 1 \quad (5.69b)$$

$$\frac{1}{t^2} - e^{-2t} > \frac{1}{2e^2}. \quad (5.69c)$$

Con la ayuda de (5.69) obtenemos

$$|F'_1(t)| < \frac{\sqrt{2}}{t^2 \psi_1(1/t)} \cdot \left[|\varphi'_1(1/t)| + \varphi'_1(1/t) \right] < \frac{19\sqrt{2}}{t^2 \psi_1(1/t)} \quad (5.70)$$

mediante un cálculo análogo tenemos

$$|F'_2(t)| < \frac{19\sqrt{2}}{t^2 \psi_1(1/t)}. \quad (5.71)$$

Con respecto a (5.52) tenemos

$$\psi_1(1/t) \geq \exp\left(\frac{1}{t} + 4\right), \quad \psi_2(1/t) \geq \exp\left(\frac{1}{t} + 4\right). \quad (5.72a,b)$$

Además tenemos que $\exp\left(\frac{1}{t}\right) > \frac{1}{t^2}$. Por tanto

$$|F'_1(t)| < \frac{19\sqrt{2}}{te^4}, \quad |F'_2(t)| < \frac{19\sqrt{2}}{te^4}. \quad (5.73a,b)$$

Entonces en consecuencia de (5.69c) y (5.73a,b)

$$|F'_1(t)|^2 + |F'_2(t)|^2 < 2 \left(\frac{19\sqrt{2}}{te^4} \right)^2 < \frac{1}{2t^2} < \frac{1}{t^2} - e^{-2t}$$

y por tanto para $t \leq 1$

$$\frac{1}{t^2} - |F'_1(t)| - |F'_2(t)| - e^{-2t} > 0$$

lo cual concluye que la función $x_0(u, v_1, \dots, v_{n-1})$ definido en (5.61a) también está bien definido, para $t \leq 1$.

Veamos ahora que hiper-superficie no tiene auto-intersecciones. Supongamos que existen dos puntos $(u^1, v_1^1, \dots, v_{n-1}^1)$ y $(u^2, v_1^2, \dots, v_{n-1}^2)$ en \mathbb{H}^n tales que $\varphi(u^1, v_1^1, \dots, v_{n-1}^1) = \varphi(u^2, v_1^2, \dots, v_{n-1}^2)$, entonces

$$(x_0^1, x_{k1}^1, \dots, x_{k6}^1) = (x_0^2, x_{k1}^2, \dots, x_{k6}^2).$$

Podemos ver inmediatamente que $x_0(u, v_1, \dots, v_{n-1})$ como función de u es creciente. De $x_0^1 = x_0^2$ se sigue que $u^1 = u^2$. Observemos también que F_1 y F_2 nunca se anulan al mismo tiempo. Si tomamos $F_1(u) \neq 0$, entonces se sigue que $x_{k3}^1 = x_{k3}^2$ y $x_{k4}^1 = x_{k4}^2$ en (5.61d) y (5.61e)

$$\sqrt{n-1} \cdot v_k^1 \cdot \psi_1(1/u) = \sqrt{n-1} \cdot v_k^2 \cdot \psi_1(1/u) + 2k_1\pi \quad (5.74)$$

y de $x_{k1}^1 = x_{k1}^2$ y $x_{k2}^1 = x_{k2}^2$ en (5.61b) y (5.61c)

$$\sqrt{n-1} \cdot v_k^1 = \sqrt{n-1} \cdot v_k^2 + 2k_2\pi. \quad (5.75)$$

Como $\psi_1(1/u)$ es una potencia de e con un exponente entero positivo, por ejemplo r . Las ecuaciones (5.74) y (5.75) implican que

$$k_1 = k_2 e^r.$$

Pero esto solo es posible para $k_1 = k_2 = 0$, dado que de lo contrario e^r tendría que ser racional, es decir e sería algebraico. Por tanto $v_k^1 = v_k^2$ ($k = 1, \dots, n-1$). Si $F_1(u) = 0$, entonces $F_2(u) \neq 0$ y llegaríamos de manera análoga a las mismas conclusiones de las ecuaciones (5.61b), (5.61c), (5.61f) y (5.61g).

El caso particular $n = 2$ da como resultado una inmersión isométrica inyectiva del plano hiperbólico en \mathbb{R}^7 , sin embargo, como se indicó en la sub-sección anterior se puede construir una inmersión isométrica inyectiva en \mathbb{R}^6 para este caso.

Método de Blanuša

Nuestro objetivo ahora es rescatar las partes importantes del método usado por Danilo Blanuša dentro del teorema 5.3.1 para de esa manera generalizar dicho método.

Recordamos que un papel importante en la construcción, de tal inmersión isométrica, lo juegan dos pares de funciones auxiliares. Uno de ellos lo denotamos por $\varphi_j(u) \geq 0$ para $j = 1, 2$; estas son funciones de clase C^∞ , periódicas de periodo 2 es decir $\varphi_j(u) = \varphi_j(u+2)$. Mientras que el otro par de funciones fueron denotadas por $\psi_j(u) > 0$; éstas son funciones escalonadas, que además crecen arbitrariamente rápido cuando $u \rightarrow \pm\infty$. Las funciones φ_j están sujetas a la siguiente condición: $\varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u) = 1$ y cada uno de los φ_j tiene por ceros a los puntos de discontinuidad de la función ψ_j para $j = 1, 2$. Claramente, φ_j con tales propiedades pueden ser elegidos con gran arbitrariedad. Además, utilizamos una función auxiliar $B(u) > 0$ de clase C^∞ , cuya forma concreta se indicará más adelante y depende de la métrica del espacio que deseamos sea inmerso isométricamente en \mathbb{R}^6 . A partir de estas funciones definimos para $j = 1, 2$,

$$f_j(u) = \frac{\varphi_j(u)}{\psi_j(u)} \cdot B(u) \quad (5.76)$$

y también la expresión $h := (f_1')^2 + (f_2')^2 > 0$.

Para $B(u)$ y $\varphi_j(u)$ ya fijados, las funciones escalonadas $\psi_j(u)$ son elegidas de modo que

$$h(u) < 1 - \varepsilon \quad \text{cuando} \quad -\infty < u < \infty,$$

Consideremos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : (M, g_M) &\longrightarrow (\mathbb{R}^6, g) \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) := (x_1(u, v), x_2(u, v), \dots, x_6(u, v)) \end{aligned}$$

con las funciones coordenadas $x_k(u, v)$ dadas por

$$x_1(u, v) = \int_0^u \sqrt{1 - h(t)} dt = \int_0^u \sqrt{1 - [f_1'(t)]^2 - [f_2'(t)]^2} dt, \quad (5.77a)$$

$$x_2(u, v) = v, \quad (5.77b)$$

$$x_3(u, v) = f_1(u) \cdot \cos(v \cdot \psi_1(u)), \quad (5.77c)$$

$$x_4(u, v) = f_1(u) \cdot \text{sen}(v \cdot \psi_1(u)), \quad (5.77d)$$

$$x_5(u, v) = f_2(u) \cdot \cos(v \cdot \psi_2(u)), \quad (5.77e)$$

$$x_6(u, v) = f_2(u) \cdot \text{sen}(v \cdot \psi_2(u)), \quad (5.77f)$$

Gracias al hecho de que las discontinuidades de las funciones escalonadas ψ_j son, por así decirlo, “anuladas” por los ceros de las funciones φ_j , entonces todas las $x_k(u, v)$, para $1 \leq k \leq 6$, son continuas. Como se vio en la demostración del teorema 5.3.1, Blauša muestra que sus derivadas parciales en todos los órdenes también son continuas. Por lo tanto, la superficie resultante resulta ser de clase C^∞ , y se proyecta de manera inyectiva en el plano x_1x_2 .

Luego gracias a (5.58) y (5.59) logramos obtener

$$\varphi^*g = du^2 + f^2(u)dv^2 \quad (5.78)$$

donde $f(u) = \sqrt{1 + B^2(u)} \geq 1$, además en aquellos puntos donde las funciones ψ_j son discontinuas, la métrica anterior preserva la continuidad. En particular, si tomamos $B(u) = \sinh u$, entonces las fórmulas (5.77) dan una inmersión isométrica inyectiva de clase C^∞ de $\mathbb{H}^2 = (\mathbb{R}^2, g_{\cosh})$ en (\mathbb{R}^6, g) .

5.3.3 Teorema de Rozendorn

Media década después de los teoremas de Blauša, en 1960, Èmil' Renol'dovich Rozendorn haciendo uso del método usado por Danilo Blauša el cual fue expuesto a detalle en la sub-sección anterior, logra probar el siguiente teorema, ver [Roz60]

Teorema 5.3.4 (Rozendorn, 1960). *Existe una inmersión isométrica, no inyectiva, de clase C^∞ , del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 en \mathbb{R}^5 .*

Como podemos ver, Rozendorn bajó la codimensión de la inmersión isométrica, pero su costo es la pérdida de la inyectividad.

Usando el método de auto-intersección (o auto-contacto) junto al método de Danilo Blauša, podemos encontrar una superficie en \mathbb{R}^5 con métrica

$$ds^2 = du^2 + f^2(u)dv^2, \quad (5.79)$$

donde $f(u)$ es una función positiva continuamente diferenciable definida para todos los valores de u ($-\infty < u < \infty$), y la indicada superficie pertenece a la misma clase C^n o C^∞ , que $f(u)$. En particular, si consideramos $f(u) = \cosh u$, se muestra la inmersión isométrica no inyectiva del plano hiperbólico en \mathbb{R}^5 .

Usando las funciones:

$$\begin{aligned}\varphi_1(u) &= \left(\int_0^1 e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t \right)^{-1/2} \cdot \left(\int_0^{a-1} e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t \right)^{1/2}, \\ \varphi_2(u) &= \left(\int_0^1 e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t \right)^{-1/2} \cdot \left(\int_0^a e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi t}} \sin \pi t \right)^{1/2}, \\ \psi_1 &= Na \left(\left\lfloor \max_{2n-1 \leq u < 2n+1} (|f|, |f'|) \right\rfloor + 1 \right), \text{ cuando } 2n-1 \leq u < 2n+1, \\ \psi_2 &= Na \left(\left\lfloor \max_{2n-2 \leq u < 2n} (|f|, |f'|) \right\rfloor + \sqrt{2} \right), \text{ cuando } 2n-2 \leq u < 2n,\end{aligned}$$

Aquí $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la parte entera de n , que toma todos los valores posibles, $N \geq 2$ un entero fijo, $a = \lfloor \max |\varphi_i| \rfloor + 2$. Las funciones φ_1 y φ_2 son las mismas que fueron definidas en 5.3.2, por otro lado ψ_1 y ψ_2 son análogas a las funciones escalonadas en 5.3.2. Para las realizaciones, son importantes las siguientes propiedades de φ_i , vistas también en 5.3.2:

1. $\varphi_i(u)$ son funciones periódicas de clase C^∞ y de periodo 2,
2. $\varphi_1(1) = \varphi_1^{(k)}(1) = \varphi_2(0) = \varphi_2^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, para $u \neq 2n+1$ tenemos $\varphi_1(u) \neq 0$, y para $u \neq 2n$ tenemos $\varphi_2(u) \neq 0$,
3. $\varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u) = 1$.

Luego la superficie con ecuaciones

$$x_1 = f(u) \cdot \varphi_1(u) \cdot \frac{\cos(v\psi_1(u))}{\psi_1(u)}, \quad (5.80a)$$

$$x_2 = f(u) \cdot \varphi_1(u) \cdot \frac{\sen(v\psi_1(u))}{\psi_1(u)}, \quad (5.80b)$$

$$x_3 = f(u) \cdot \varphi_2(u) \cdot \frac{\cos(v\psi_2(u))}{\psi_2(u)}, \quad (5.80c)$$

$$x_4 = f(u) \cdot \varphi_2(u) \cdot \frac{\sen(v\psi_2(u))}{\psi_2(u)}, \quad (5.80d)$$

$$x_5 = \int_0^u \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\psi_1(t) \frac{d}{dt}(f(t)\varphi_1(t))} \right)^2 - \left(\frac{1}{\psi_2(t) \frac{d}{dt}(f(t)\varphi_2(t))} \right)^2} \quad (5.80e)$$

realiza la métrica (5.79). Esto se puede verificar calculando directamente $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_5^2$ (teniendo en cuenta que $\psi_1'(u) + \psi_2'(u) = 0$).

Observación 5.3.5. El integrando en las fórmulas (5.80) tiene sentido, en virtud de la construcción de ψ_i ,

$$\left| \frac{1}{\psi_i(u)} \frac{d}{du} (f(u)\varphi_i(u)) \right| \leq \frac{1}{2} \quad (5.81)$$

Razonando análogos a los de Danilo Blanuša, se puede establecer que x pertenece a la misma clase C^n o C^∞ , a la que pertenece $f(u)$.

Vamos a detenernos un momento en la superficie ubicada en \mathbb{R}^5 dada por las ecuaciones (5.80). De (5.80), (5.81) y de las propiedades de φ_1 y φ_2 se sigue lo siguiente:

1. La superficie se extiende indefinidamente a lo largo del eje x_5 y está encerrada dentro de un cilindro $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2(Na)^{-1}$, cuyo radio puede hacerse arbitrariamente pequeño eligiendo N .
2. Las curvas $v = \text{const.}$ se proyectan de forma única sobre el eje x_5 .
3. Las diferentes curvas $u = \text{const.}$ no tienen puntos en común. Cada uno de ellos se proyecta sobre el plano (x_1, x_2) y (x_3, x_4) en los círculos $x_1^2 + x_2^2 = r_1^2(u)$ y $x_3^2 + x_4^2 = r_2^2(u)$, respectivamente, donde $r_i(u) = f(u)\varphi_i(u)(\psi_i(u))^{-1}$. Si u_0 no es un número entero, entonces en la curva $u = u_0$ diferentes valores de v corresponden a diferentes puntos.

A este de superficies se les conoce como superficies de Rozendorn. Años más tarde en 1992, Èmil' Renol'dovich Rozendorn en [Roz92] nos brinda una modificación de la construcción hecha por Danilo Blanuša, sustituyendo $B(u) = f(u)$ en (5.76) y además poniendo $x_2(u, v) = 0$ en (5.77b). De modo que surgen auto-intersecciones en la superficie, y además la codimensión se reduce en uno. La forma de la métrica (5.78) se preserva. En particular cuando $B(u) = \cosh u$ obtenemos un inmersión isométrica de clase C^∞ de $(\mathbb{R}^2, g_{\cosh})$ en (\mathbb{R}^5, g) . Mientras que si consideramos $B(u) = e^{\pm u}$, entonces las fórmulas (5.77) dan una inmersión isométrica inyectiva de clase C^∞ de (\mathbb{R}^2, g_e) en (\mathbb{R}^5, g) .

Posteriormente este resultado se generaliza a un espacio hiperbólico n -dimensional, el objetivo era reducir la codimensión de esta realización. En esta dirección tenemos los siguientes resultados:

Teorema 5.3.6 (Henke, 1981). *El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n puede estar C^∞ -inmerso isométricamente en el espacio euclidiano $(4n - 3)$ -dimensional.*

Teorema 5.3.7 (Azov, 1985). *Considerando las dos clases de métricas riemannianas,*

$$ds^2 = du_1^2 + f(u_1) \sum_{i=2}^l du_i^2, \quad f > 0$$

$$ds^2 = g^2(u_1) \sum_{i=2}^l du_i^2, \quad g > 0$$

Azov resolvió el problema de su realización en \mathbb{R}^n , $n > l$. Donde las funciones f y g son de clase C^1 . Entonces las métricas admiten una inmersión isométrica en el espacio euclidiano \mathbb{R}^{4l-3} . En el caso particular $g(u_1) = \frac{1}{u_1}$, $u_1 > 0$ obtenemos la métrica del espacio hiperbólico

Teorema 5.3.8 (Henke-Nettekov, 1987). *El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n puede estar C^∞ -inmerso isométricamente en el espacio euclidiano $(6n - 5)$ -dimensional.*

Todos estos resultados usan el método encontrado por Blanša, y sus demostraciones se pueden encontrar en [Hen81], [Azo85] y [HN87]. Hasta el momento no se ha podido reducir la codimensión de estas realizaciones, así tenemos algunas preguntas abiertas:

1. ¿El espacio hiperbólico \mathbb{H}^2 se puede realizar en \mathbb{R}^4 ?
2. ¿El espacio hiperbólico \mathbb{H}^2 se puede realizar de manera inyectiva en \mathbb{R}^5 ?
3. ¿El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n se puede realizar en \mathbb{R}^{2n-1} ?

Por otro lado, no es posible realizar el espacio hiperbólico \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^{2n-2} ni siquiera de manera local, esto es gracias a Élie Cartan [Car19] y [Car20], y A. E. Liber [Lib38].

Apéndice

En este apéndice daremos encontraremos esta expresión sin hacer uso de la fórmula de Faà di Bruno,

$$\left(\rho_2^{1/2}\right)^{(n)} = \sum a_r \rho_2^{1/2-r_0} (\rho_2')^{r_1} (\rho_2'')^{r_2} \dots (\rho_2^{(n)})^{r_n}$$

Una fórmula para calcular la n -ésima derivada de funciones compuestas se establece en [GQ16, Theorema 8.1]

Teorema (Regla de la cadena generalizada de Hoppe). *Sea $g(f)$ una función de valores reales o complejos que es n -diferenciable respecto de f . Sea $f = f(u)$, donde $f(u)$ es también una función n -diferenciable respecto de u . Entonces g es n -diferenciable respecto de u , y además*

$$\frac{d^n}{du^n} g(f) = \sum_{k=1}^n \frac{d^k}{df^k} g(f) \frac{(-1)^k}{k} \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} f^{k-j} \frac{d^n}{du^n} f^j$$

Aplicando el teorema anterior para $g(f) = f^{\frac{1}{2}}$, obtenemos

$$\frac{d^n}{du^n} f^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^n \frac{d^k}{df^k} f^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} f^{k-j} \frac{d^n}{du^n} f^j \quad (82)$$

primero vamos a obtener $\frac{d^k}{df^k} f^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned}
 \frac{d^k}{df^k} f^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) f^{\frac{1}{2}-k} \\
 &= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3) f^{\frac{1}{2}-k} \\
 &= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k (2k-1)} (2k-1)!! f^{\frac{1}{2}-k} \\
 &= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k (2k-1)} \frac{(2k)!}{(2k)!!} f^{\frac{1}{2}-k} \\
 &= \frac{(-1)^{k-1}}{4^k (2k-1)} \frac{(2k)!}{k!} f^{\frac{1}{2}-k}
 \end{aligned} \tag{83}$$

entonces al reemplazar (83) en (82) tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d^n}{du^n} f^{\frac{1}{2}} &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{4^k (2k-1)} \frac{(2k)!}{k!} f^{\frac{1}{2}-k} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} f^{k-j} \frac{d^n}{du^n} f^j \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k (2k-1)} \binom{2k}{k} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \binom{k}{j} f^{\frac{1}{2}-j} \frac{d^n}{du^n} f^j \\
 &= \sum_{j=1}^n f^{\frac{1}{2}-j} \frac{d^n}{du^n} f^j \sum_{k=j}^n (-1)^{j+1} \frac{1}{4^k (2k-1)} \binom{2k}{k} \binom{k}{j}
 \end{aligned}$$

en la última igualdad cambiamos el orden de la suma para reducir el número de términos con el operador de diferenciación. Antes de continuar verifiquemos que la fórmula obtenida realmente cumple con las expectativas. Primero calcularemos

la segunda derivada según la fórmula de Hoppes, para el caso $n = 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{du^2} f^{\frac{1}{2}} &= \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} f^{\frac{1}{2}-j} \frac{d^2}{du^2} f^j \sum_{k=j}^2 \frac{1}{4^k (2k-1)} \binom{2k}{k} \binom{k}{j} \\
&= f^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2}{du^2} f \sum_{k=1}^2 \frac{1}{4^k (2k-1)} \binom{2k}{k} \binom{k}{1} - f^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2}{du^2} f^2 \sum_{k=2}^2 \frac{1}{4^k (2k-1)} \binom{2k}{k} \binom{k}{2} \\
&= f^{-\frac{1}{2}} f'' \left(\frac{1}{4} \binom{2}{1} \binom{1}{1} + \frac{1}{16 \cdot 3} \binom{4}{2} \binom{2}{1} \right) - f^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2}{du^2} f^2 \left(\frac{1}{16 \cdot 3} \binom{4}{2} \binom{2}{2} \right) \\
&= f^{-\frac{1}{2}} f'' \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{8} f^{-\frac{3}{2}} \left(2 \frac{d}{du} (f f') \right) \\
&= \frac{3}{4} f^{-\frac{1}{2}} f'' - \frac{1}{4} f^{-\frac{3}{2}} \left((f')^2 + f f'' \right) \\
&= \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f'' - \frac{1}{4} f^{-\frac{3}{2}} (f')^2
\end{aligned}$$

Ahora obtendremos manualmente $\frac{d}{du^2} f^{\frac{1}{2}}$, y veremos como actúa este resultado

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} f^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f' \\
\frac{d^2}{du^2} f^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \frac{d}{du} \left(f^{-\frac{1}{2}} f' \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(f^{-\frac{1}{2}} f'' - \frac{1}{2} f^{-\frac{3}{2}} (f')^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f'' - \frac{1}{4} f^{-\frac{3}{2}} (f')^2
\end{aligned}$$

Bibliografia

- [Abe72] Kinetsu Abe, *A complex analogue of hartman-nirenberg cylinder theorem*, Journal of Differential Geometry **7** (1972), no. 3-4, 453–460.
- [Ada07] Victor S Adamchik, *On the hurwitz function for rational arguments*, Applied Mathematics and Computation **187** (2007), no. 1, 3–12.
- [AM21] Lewa' Alzaleq and Valipuram Manoranjan, *Analytical solutions for the generalized sine-gordon equation with variable coefficients*, Physica Scripta **96** (2021), no. 5, 055218.
- [AT12] Marco Abate and Francesca Tovena, *Curves and surfaces*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [AVS93] Dmitrij Vladimirovich Alekseevskij, Ernest Borisovich Vinberg, and Aleksandr Samuilovich Solodovnikov, *Geometry of spaces of constant curvature*, in Vinberg [Vin93], pp. 1–138.
- [Azo85] Dmitrii Georgievich Azov, *Imbedding by the blanusa method of certain classes of complete n-dimensional riemannian metrics in euclidean spaces*, Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika (1985), no. 5, 72–74.
- [Bäc83] Albert Victor Bäcklund, *Om ytor med konstant negativ krökning*, Fr. Berlings Boktryckeri och Stilgjuteri **19** (1883), 1–48.
- [Bel68a] Eugenio Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, Giornale di Matematiche **6** (1868), 285–315 (italian).
- [Bel68b] ———, *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (1867-1897) **2** (1868), 232–255.

- [Bel72] ———, *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo superficie pseudosferiche*, *Giornale di Matematiche* **10** (1872), 12–16 (italian).
- [BEMS71] A Barone, F Esposito, CJ Magee, and AC Scott, *Theory and applications of the sine-gordon equation*, *La Rivista del Nuovo Cimento* (1971-1977) **1** (1971), no. 2, 227–267.
- [Bia79] Luigi Bianchi, *Ricerche sulle superficie elicoidali e sulle superficie a curvatura costante*, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze* **Ser. 1, 2** (1879), 285–341 (italian).
- [Bia92] ———, *Sulla trasformazione di backlund per le superficie pseudosferiche*, *Tip. della R. Accademia dei Lincei* **5** (1892), 3–12.
- [Bia23] ———, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. 2, Enrico Spoerri, 1922-1923 (Italiano).
- [Bie32] Ludwig Bieberbach, *Eine singularitätenfreie fläche konstanter negativer krümmung in hilbertschen raum*, *Commentarii Mathematici Helvetici* **4** (1932), no. 1, 248–255.
- [Bla52] Danilo Blanuša, *Eine isometrische und singularitätenfreie einbettung des n-dimensionale hyperbolischen raumes im hilbertschen raum*, *Monatshefte für Mathematik* **57** (1952), no. 2, 102–108.
- [Bla55] ———, *Über die einbettung hyperbolischer räume in euklidische räume*, *Monatshefte für Mathematik* **59** (1955), no. 3, 217–229.
- [Bon55] Pierre Ossian Bonnet, *Sur quelques propriétés des lignes géodésiques*, *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris* **40** (1855), no. 935, 1311–1313.
- [Bon56] ———, *Deuxième note sur les lignes géodésiques*, *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris* **41** (1856), no. 935, 32–35.
- [BP96] Alexander Bobenko and Ulrich Pinkall, *Discrete surfaces with constant negative gaussian curvature and the hirota equation*, *Journal of Differential Geometry* **43** (1996), 527–611.

- [Bri86] Alexander von Brill, *Bemerkung über pseudosphärische mannigfaltigkeiten von drei dimensionen*, *Mathematische Annalen* **26** (1886), no. 2, 300–303.
- [Bur31] C. Burstin, *Ein beitrag zum problem der einbettung der riemannschen raume in euklidischen raumen*, *Mathematical collection* **38** (1931), no. 3-4, 74–85.
- [BZ92] Yuriy Dmitrievich Burago and Viktor Abramovich Zalgaller (eds.), *Geometry iii: Theory of surfaces*, 1 ed., *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. 48, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [Cal67] Eugenio Calabi, *On ricci curvature and geodesics*, *Duke Math. Journal* **34** (1967), no. 4, 667 – 676.
- [Car19] Élie Cartan, *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien*, *Bulletin de la Société mathématique de France* **47** (1919), 125–160.
- [Car20] ———, *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien*, *Bulletin de la Société mathématique de France* **48** (1920), 132–208.
- [Car27] ———, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*, *Ann. Soc. Polon. Math.* **6** (1927), 1–7.
- [Che45] Shiing-Shen Chern, *Some new characterizations of the euclidean sphere*, *Duke Mathematical Journal* **12** (1945), 279–290.
- [che55] *Tchebycheff or chebyshev?*, *IRE Transactions on Circuit Theory* **2** (1955), no. 1, 105–105.
- [CMKW14] Jesús Cuevas-Maraver, Panayotis G Kevrekidis, and Floyd Williams, *The sine-gordon model and its applications*, *Nonlinear systems and complexity* **10** (2014).
- [CPS⁺78] G. Costabile, R. D. Parmentier, B. Savo, D. W. McLaughlin, and A. C. Scott, *Exact solutions of the sine-gordon equation describing oscillations in a long (but finite) josephson junction*, *Applied Physics Letters* **32** (1978), no. 9, 587–589.

- [CV36] Stefan Èmmanuilovich Cohn-Vossen, *Bending of surfaces in the large*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk (1936), no. 1, 33–76.
- [Din65] Ulisse Dini, *Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (1858-1865) **7** (1865), no. 1, 5–18.
- [DT02] Marcos Dajczer and Ruy Tojeiro, *An extension of the classical ribaucour transformation*, Proceedings of the London Mathematical Society **85** (2002), no. 1, 211–232.
- [Efi63] Nikolai Vladimirovich Efimov, *The impossibility in euclidean 3-space of a complete regular surface with a negative upper bound of the gaussian curvature*, Doklady Akademii Nauk, vol. 150, Russian Academy of Sciences, 1963, pp. 1206–1209.
- [Efi64] ———, *Generation of singularities on surfaces of negative curvature*, Mat. Sb. **64** (1964), no. 2, 286–320.
- [Efi68] ———, *Differential criteria for homeomorphism of certain mappings with applications to the theory of surfaces*, Mathematics of the USSR-Sbornik **5** (1968), no. 4, 475.
- [Efi75] ———, *Non-embeddability of the Lobatchevsky half-plane*, Vestn. Mosk. Univ., Ser. I **30** (1975), no. 2, 83–86 (Russian).
- [Eis60] Luther Pfahler Eisenhart, *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*, Cornell University Library historical math monographs, Ginn, 1909 (reprinted 1960).
- [FdB55] Cavaliere Francesco Faà di Bruno, *Sullo sviluppo delle funzioni*, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche **6** (1855), 479–480.
- [Gar05] Ronaldo A Garcia, *Curvature lines on orthogonal surfaces of r^3 and joachimsthal theorem*, Civilizar. Ciencias Sociales y Humanas (2005), no. 8, 141–151.
- [Gau27] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, vol. 1, Typis Dieterichianis, 1827.

- [Ghy11] Étienne Ghys, *Sur la coupe des vêtements. variation autour d'un thème de tchebychev*, L'Enseignement Mathématique **57** (2011), no. 1, 165–208.
- [GQ16] Henry Wadsworth Gould and Jocelyn Quaintance, *Combinatorial identities for stirling numbers the unpublished notes of h. w. gould*, World Scientific, 2016.
- [GR70] Mikhael Leonidovich Gromov and Vladimir Abramovich Rokhlin, *Embeddings and immersions in riemannian geometry*, no. 5, 1–57.
- [Gro86] Mikhael Gromov, *Partial differential relations*, vol. 9, Springer Science & Business Media, 1986.
- [Gü89] Matthias Günther, *Zum einbettungssatz von j. nash*, Mathematische Nachrichten **144** (1989), no. 1, 165–187.
- [Gü10] ———, *Isometric embeddings of riemannian manifolds*, 2010.
- [Har02] Philip Hartman, *Ordinary differential equations*, 2nd ed ed., Classics in applied mathematics 38, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [Haz80] J. N. Hazzidakis, *Über einige eigenschaften der flächen mit konstante krümmungsmass.*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (1880), no. 88-89, 68–73.
- [Hei55] Erhard Heinz, *Über flächen mit eineindeutiger projektion auf eine ebene, deren krümmungen durch ungleichungen eingeschränkt sind*, Mathematische Annalen **129** (1955), no. 1, 451–454.
- [Hen81] Wolfgang Henke, *Isometrische immersionen des n -dim. hyperbolischen raumes \mathbb{H}^n in E^{4n-3}* , manuscripta mathematica **34** (1981), no. 2, 265–278.
- [Hil01] David Hilbert, *Über flächen von konstanter gaußscher krümmung*, Transactions of the American Mathematical Society **2** (1901), no. 1, 87–99.
- [Hil09] ———, *Grundlagen der geometrie*, 3 ed., Leipzig, 1909.

- [HN59] Philip Hartman and Louis Nirenberg, *On spherical image maps whose jacobians do not change sign*, American Journal of Mathematics **81** (1959), no. 4, 901–920.
- [HN87] Wolfgang Henke and Wolfgang Nettekoven, *The hyperbolic n -space as a graph in euclidean $(6n - 6)$ -space*, manuscripta mathematica **59** (1987), no. 1, 13–20.
- [Hof95a] Michael E. Hoffman, *Derivative polynomials for tangent and secant*, The American Mathematical Monthly **102** (1995), no. 1, 23–30.
- [Hof95b] ———, *Derivative polynomials for tangent and secant*, The American mathematical monthly **102** (1995), no. 1, 23–30.
- [Hol02] M.Erik Holmgren, *Sur les surfaces à courbure constante négative*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris (1902), no. 134, 740–743.
- [HR31] Heinz Hopf and Willi Rinow, *über den begriff der vollständigen differentialgeometrischen fläche*, Commentarii Mathematici Helvetici **3** (1931), 209–225 (German).
- [HW51] Philip Hartman and Aurel Wintner, *On the asymptotic curves of a surface*, American Journal of Mathematics **73** (1951), no. 1, 149–172.
- [Jan26] Maurice Janet, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*, Ann. Soc. Pol. Math **5** (1926), 38–43.
- [Joh94] Mark Johnston, *Geometry and the sine-gordon equation*, 1994.
- [Joh02] Warren P. Johnson, *The curious history of faà di bruno's formula*, The American Mathematical Monthly **109** (2002), no. 3, 217–234.
- [KB67] Donald E Knuth and Thomas J Buckholtz, *Computation of tangent, euler, and bernoulli numbers*, Mathematics of Computation **21** (1967), no. 100, 663–688.
- [KI15] Sergey Nikolaevich Krivoshapko and Vyacheslav Nikolaevich Ivanov, *Surfaces of joachimsthal*, Encyclopedia of Analytical Surfaces, Springer, 2015, pp. 557–559.

- [Kno03] Peter M Knopf, *The operator and its applications to series*, Mathematics Magazine **76** (2003), no. 5, 364–371.
- [Kui55a] Nicolaas Hendrik Kuiper, *On C^1 -isometric imbeddings i*, Indagationes Mathematicae (Proceedings) **58** (1955), 545–556.
- [Kui55b] ———, *On C^1 -isometric imbeddings ii*, Indagationes Mathematicae (Proceedings) **58** (1955), 683–689.
- [Kö96] Kurt Siegfried Kölbig, *The polygamma function and the derivatives of the cotangent function for rational arguments*, Tech. report, CERN, Geneva, Jun 1996.
- [Lib38] AE Liber, *On a class of riemannian spaces of constant negative curvature*, Fluchen. Zap. Saratov Gos. Univ. Ser. Fiz. Mat **1** (1938), no. 2, 105–122.
- [Lie99] Heinrich Liebmann, *Über die verbiegung der geschlossenen flächen positiver krümmung*, Mathematische Annalen **53** (1899), 81–112 (German).
- [LL03] Elon Lages Lima, *Fundamental groups and covering spaces*, AK Peters, 2003.
- [LS90] Decio Levi and Antoni Sym, *Integrable systems describing surfaces of non-constant curvature*, Physics Letters A **149** (1990), no. 7, 381–387.
- [Mas61] William Schumacher Massey, *Surfaces of gaussian curvature zero in euclidean 3-space*, Tohoku Mathematical Journal, Second Series **14** (1961), no. 1, 73–79.
- [Mas00] LA Masal'tsev, *Joachimsthal surfaces in S^3* , Mathematical Notes **67** (2000), no. 2, 176–182.
- [Mas17] Yannick Masson, *Existence and construction of chebyshev nets with singularities and application to gridshells*, 2017.
- [McL94] Robert McLachlan, *A gallery of constant-negative-curvature surfaces*, The Mathematical Intelligencer **16** (1994), no. 4, 31–37.

- [MD05] Ligia Munteanu and Stefania Donescu, *Introduction to soliton theory: applications to mechanics*, vol. 143, Springer Science & Business Media, 2005.
- [Mil72] Tilla Klotz Milnor, *Efimov's theorem about complete immersed surfaces of negative curvature*, *Advances in Mathematics* **8** (1972), no. 3, 474–543.
- [Min38] Ferdinand Minding, *Ueber die biegun krummer flächen.*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **18** (1838), 365–368.
- [Min39] ———, *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst bemerkungen über die flächen von unveränderlichem krümmungsmaaße.*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **19** (1839), 370–387 (german).
- [Min40] ———, *Beiträge zur theorie der kürzesten linien auf krummen flächen.*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **20** (1840), 323–327.
- [Mon01] Gaspard Monge, *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*, Baudouin, imprimeur du corps législatif, du tribunat et de l'institut national, 1801 (france).
- [MS93] Mike Melko and Ivan Sterling, *Application of soliton theory to the construction of pseudospherical surfaces in \mathbb{R}^3* , *Annals of Global Analysis and Geometry* **11** (1993), 65–107.
- [Nas54] John Nash, *C^1 isometric imbeddings*, *Annals of Mathematics* **60** (1954), no. 3, 383–396.
- [Nas56] ———, *The imbedding problem for riemannian manifolds*, *Annals of Mathematics* **63** (1956), no. 1, 20–63.
- [Nor56] Aleksandr Petrovich Norden, *Foundations of geometry*, Collection of Classical Works on Lobachevsky's Geometry and the Development of its Ideas, Gosudarstv. Izdat. Tekhn.-Teor. Lit., Moscow, 1956 (Russian).

- [PBSF21] Teguh Prayitno, Esmar Budi, Sunaryo, and Riser Fahdiran, *Physical problem in interpreting classical energy of soliton of sine gordon equation*, Journal of Physics: Conference Series **1869** (2021), no. 1, 012191.
- [PdC15] Manfredo Perdigão do Carmo, *Formas diferenciais e aplicações*, 1 ed., IMPA, 2015.
- [PdC16] ———, *Differential geometry of curves and surfaces*, 2 ed., Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2016.
- [PM07] Andrei Gennad'evich Popov and Evgenii Valer'evich Maevskii, *Analytical approaches to the study of the sine-gordon equation and pseudospherical surfaces*, Journal of Mathematical Sciences **142** (2007), no. 5, 2377–2418.
- [Pop07] Andrei Gennad'evich Popov, *Pseudospherical surfaces and some problems of mathematical physics*, Journal of Mathematical Sciences **141** (2007), 1062–1070.
- [PS76] Èduard Genrikhovich Poznyak and Evgenii Viktorovich Shikin, *Surfaces of negative curvature*, Journal of Soviet Mathematics **5** (1976), no. 6, 865–887.
- [PS90] ———, *Differentsial'naya geometriya*, Izdatel'stvo Mosk. Un-ta, 1990 (Ruso).
- [Rom80] Steven Roman, *The formula of faa di bruno*, The American Mathematical Monthly **87** (1980), no. 10, 805–809.
- [Roz60] Èmil' Renol'dovich Rozendorn, *Realization of the metric $ds^2 = du^2 + f^2(u)dv^2$ in five-dimensional euclidean space*, Dokl. Akad. Nauk Arm. SSR, vol. 30, 1960, pp. 197–199 (Russian).
- [Roz92] ———, *Surfaces of negative curvature*, in Burago and Zalgaller [BZ92], pp. 87–178.
- [Sch71] Ludwig Schläfli, *Nota alla memoria del sig. beltrami, «sugli spazii di curvatura costante»*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (1867-1897) **5** (1871), no. 1, 178–193.

- [Sch86] Friedrich Schur, *Ueber die deformation der räume constanten riemann'schen krümmungsmaasses*, *Mathematische Annalen* **27** (1886), no. 2, 163–176.
- [Sch72] Rolf Schneider, *Konvexe flächen mit langsam abnehmender krümmung*, *Archiv der Mathematik* **23** (1972), 650–654 (German).
- [SD95] Sandra L Samelson and WP Dayawansa, *On the existence of global tchebychev nets*, *Transactions of the American Mathematical Society* **347** (1995), no. 2, 651–660.
- [Shu63] Valentin Ivanovich Shulikovskii, *Classical differential geometry*, Nauka, 1963 (Ruso).
- [Spi99a] Michael Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, 3rd ed., vol. 3, Publish or Perish, 1999.
- [Spi99b] ———, *A comprehensive introduction to differential geometry*, 3rd ed., vol. 1, Publish or Perish, 1999.
- [Spi99c] ———, *A comprehensive introduction to differential geometry*, 3rd ed., vol. 2, Publish or Perish, 1999.
- [Sto61] James Johnston Stoker, *Developable surfaces in the large*, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **14** (1961), no. 3, 627–635.
- [Sto89] ———, *Differential geometry*, Pure and applied mathematics volume 20, Wiley-Interscience, 1989.
- [Tch78] Pafnuti Lvóvich Tchebychev, *Sur la coupe des vêtements*, Association française pour l'avancement des sciences, Congrès de Paris (1878), 154–155 (Frances).
- [TT80] Keti Tenenblat and Chuu-Lian Terng, *Bäcklund's theorem for n -dimensional submanifolds of $r2n - 1$* , *Annals of Mathematics* **111** (1980), no. 3, 477–490.
- [Vin93] Ernest Borisovich Vinberg (ed.), *Geometry ii: Spaces of constant curvature*, 1 ed., *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. 29, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.

- [Vor75] L. I. Vorob'eva, *On impossibility of C^2 -isometric immersion of the lobachevsky half-plane into \mathbb{R}^3* , Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1975), no. 5, 42–46.
- [Wil59] Thomas James Willmore, *An introduction to differential geometry*, 1 ed., Oxford University Press, 1959.
- [ZK65] Norman Zabusky and Martin Kruskal, *Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Physical Review Letters **15** (1965), 240–243.



Índice alfabético

- θ –entorno, 108
- θ –región, 105
- ε –franja, 104
- ξ –cadena, 130
- Tchebycheff, red de, 47

- Aplicación diferenciable, 16
- Atlas
 - coherente, 17
 - diferenciable, 16

- Beltrami, superficie de, 59
- Bianchi, transformada de, 63
- Blanuša
 - método de, 183
- Bonnet, teorema de, 38
- Bäcklund, transformada de, 68

- Camino
 - g^* –minimizante, 116
 - pre-horizontal, 138
 - pre-horizontal maximal, 138
 - pre-vertical, 126
 - propio, 130
 - rectificable, 116
- Campos de direcciones, 8
- Cartas locales, 16
- Christoffel, símbolos de, 10

- Cilindro, 7
- Condiciones de compatibilidad, 10
- Coordenadas locales, 16
- Cuasi-distancia, 118
 - mayorada, 118
- Cuasi-longitud, 118
- Curva
 - asintótica, 8
 - asintótica maximal, 9
 - integral, 8

- Dini, superficie de, 62
- Dirección asintótica, 8
- Disco geodésico, 89
- Distancia, 12

- Ecuaciones
 - de Gauss, 10
 - de Mainardi-Codazzi, 10
 - de Weingarten, 10
- Ecuación de sine-Gordon, 55
- Efimov
 - teorema de, 88, 94
- Espacio
 - hiperbólico, 25
 - tangente, 17
- Estructura
 - riemanniana, 18

- Expresión de Frobenius, 11
- Formula de Gauss, 11
- Frobenius, expresión de, 11
- Gauss
 ecuaciones de, 10
 fórmula de, 11
- Hadamard
 teorema de, 19
 variedad de, 19
- Hartman-Nirenberg
 teorema de, 35
- Hazzidakis, teorema de, 54
- Hilbert
 lema de, 41
 teorema de, 76
- Homotopía de caminos, 15
- Isometría, 19
 local, 19
- Joachimsthal-Enneper, superficie de,
 70
- Kuen, superficie de, 66
- Lema
 A, 94
 B, 94
 de Hilbert, 41
 principal, 95
- Levantamiento de caminos, 14
- Liebmann, teorema de, 39, 43
- Lobachevsky, plano de, 20
- Localmente isométricas, 19
- Mainardi-Codazzi, ecuaciones de, 10
- Massey
 proposición de, 34
- Minding
 bobbing, 59
 teorema de, 7
 top, 59
- Modelo
 de la semiesfera, 21
 de Lorenz, 21
 del disco de Poincaré, 21
 del semiplano de Poincaré, 21
 del sistema de coordenadas
 horocíclicas, 21
 en coordenadas de Fermi, 21
 en coordenadas geodésicas, 21
- Método de Blanuša, 183
- Métrica riemanniana, 18
- Olinde Rodriguez, proposición de , 9
- Parametrización
 ortogonal, 11
- Plano
 de Lobachevsky, 20
 hiperbólico, 20
- Proposición
 de Massey, 34
 de Olinde Rodriguez, 9
- pseudo-esfera, 59
- Rayo distinguido, 117
- Rectángulo exterior, 90
- Recubrimiendo duplo orientable, 20
- Red de Tchebycheff, 47
- Rozendorn, teorema de, 184
- sine-Gordon, ecuación de, 55

- Subconjunto convexo, 93
- Superficie
- completa, 8
 - conexa, 7
 - convexo, 93
 - cóncavo, 90
 - de Beltrami, 59
 - de Dini, 62
 - de Joachimsthal-Enneper, 70
 - de Kuen, 66
 - de revolución, 12
 - de Rozendorn, 186
 - pseudo-convexo, 91
 - pseudo-esférica, 47, 58
 - pulsante, 70
- Símbolos de Christoffel, 10
- Teorema
- de Blanuša, 179
 - de Bonnet, 38
 - de Efimov, 88, 94
 - de Hadamard, 19
 - de Hartman-Nirenberg, 35
 - de Hazzidakis, 54
 - de Hilbert, 76
 - de Liebmann, 39, 43
 - de Minding, 7
 - de Rozendorn, 184
 - fundamental de superficies, 9
- Tractriz, 59
- Transformada
- de Bianchi, 63
 - de Bäcklund, 68
- Variación
- acotada, 116
 - total, 116
 - total de ξ en $F \circ \gamma$, 117
- Variedad
- (es) isométricas, 19
 - de Hadamard, 19
 - diferencial, 16
 - no orientable, 17
 - orientable, 17
 - riemanniana, 18
- Weingarten, ecuaciones de, 10