

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado



Existencia de equilibrio competitivo en economías con bienes indivisibles y el teorema de unimodularidad

Tesis para optar el grado académico de Magíster en Matemáticas
Aplicadas que presenta:

Pedro Luis Leiva Huamaní

Asesor:

Dr. Abelardo Jordán Liza

Lima, 2021

Resumen

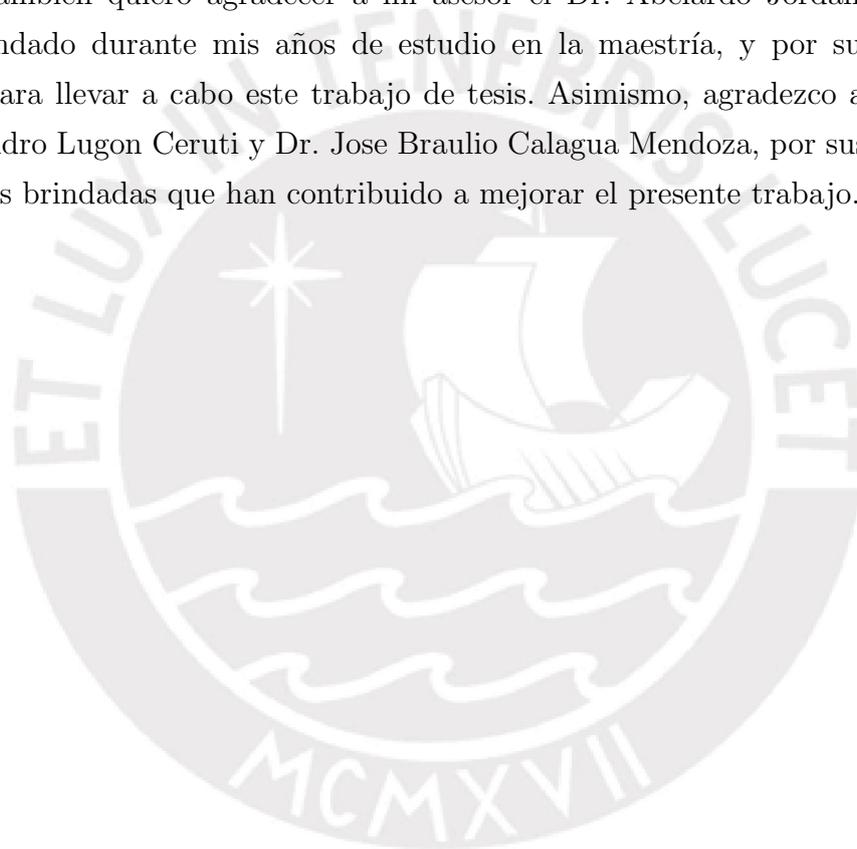
En esta tesis estudiamos un nuevo enfoque sobre las preferencias de un agente que adquiere cestas de consumo con bienes indivisibles y tenemos como objetivo principal encontrar condiciones bajo las cuales el equilibrio competitivo siempre existe para economías con bienes indivisibles en las que participan un conjunto finito de agentes. Por este motivo, consideramos una economía con n distintos bienes indivisibles que están disponibles en múltiples unidades y con un precio lineal, donde las preferencias de un agente están representadas por una función real definida sobre un subconjunto finito no vacío de \mathbb{Z}^n , llamada valoración. De esta manera, el primer objeto que estudiamos es el “Conjunto de precios de indiferencia” (LIP), el cual está conformado por los vectores de precios (en \mathbb{R}^n) que hacen que el agente sea indiferente entre más de una cesta de consumo. Además, se demuestra que este conjunto está conformado por una colección finita de conjuntos convexos $(n - 1)$ -dimensionales, los cuales forman un complejo poliedral racional $(n - 1)$ -dimensional. Después de esto, enunciamos el teorema de equivalencia valoración-complejo, el cual afirma que cualquier complejo poliedral que satisface una cierta propiedad corresponde al LIP de una valoración y viceversa. De esta manera, podemos estudiar las demandas del agente usando directamente la geometría del LIP. Luego, definimos los “Tipos de demanda \mathcal{D} ”, usando un conjunto de vectores que describen las formas en que las cestas demandadas por el agente pueden cambiar en respuesta a un pequeño cambio en los precios. Finalmente, probamos el “Teorema de unimodularidad”, el cual nos proporciona condiciones para la existencia del equilibrio competitivo en este tipo de economías. Cabe mencionar que el principal aporte de este trabajo, es la presentación detallada de los resultados que han sido establecidos en las referencias [1], [2] y [7], tanto en el contexto matemático como económico.

Abstract

In this thesis we study a new approach on the preferences of an agent that acquires consumption bundles with indivisible goods and our main objective is to find conditions under which competitive equilibrium always exists for economies with indivisible goods in which a finite set of agents participate. For this reason, we consider an economy with n distinct indivisible goods that are available in multiple units and with a linear price, where the preferences of an agent are represented by a real function defined over a non-empty finite subset of \mathbb{Z}^n , called valuation. In this way, the first object we study is the “Locus of Indifference Prices” (LIP), which comprises the price vectors (in \mathbb{R}^n) where the agent is indifferent between two or more bundles. Furthermore, it is shown that this set is made up of a finite collection of $(n - 1)$ -dimensional convex sets, which form a $(n - 1)$ -dimensional rational polyhedral complex. After this, we state the valuation-complex equivalence theorem, which claims that any polyhedral complex that satisfies a certain property corresponds to the LIP of a valuation and vice versa. In this way, we can study the agent demands using directly the geometry of the LIP. Next, we define the “demand type \mathcal{D} ”, using a set of vectors that describe the ways in which the bundles demanded by the agent can change in response to a small change in prices. Finally, we prove the “Unimodularity Theorem”, which provides us with conditions for the existence of competitive equilibrium in these types of economies. It is worth mentioning that the main contribution of this thesis is the detailed presentation of the results that have been established in references [1], [2] and [7], both in the mathematical and economic context.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por haberme dado las fuerzas para siempre perseverar y no rendirme ante las circunstancias adversas que me han tocado vivir. También agradezco a mis padres por todo el esfuerzo que dieron para que pueda tener la posibilidad de estudiar una carrera universitaria y por todo el apoyo emocional que me han dado en situaciones difíciles que me tocaron vivir. Quiero agradecer a mi hermano Junior, quien ha sido como un segundo padre para mí y quien muchas veces me ayudo durante mi etapa escolar. También quiero agradecer a mi asesor el Dr. Abelardo Jordán por todo el apoyo brindado durante mis años de estudio en la maestría, y por su paciencia y consejos para llevar a cabo este trabajo de tesis. Asimismo, agradezco a los jurados, Dr. Alejandro Lugon Ceruti y Dr. Jose Braulio Calagua Mendoza, por sus revisiones y sugerencias brindadas que han contribuido a mejorar el presente trabajo.



Dedicatoria

Esta tesis está dedicada a mis padres Alfredo Leiva y Marina Huamaní. A mis hermanos Junior, Jessenia y Maritza. A mi sobrina Daniela y a mi abuela Agueda Espinoza.

Índice general

| | |
|---|------------|
| 1. Geometría para ciertas funciones definidas en algún subconjunto finito de \mathbb{Z}^n | 1 |
| 1.1. Conceptos de geometría tropical | 1 |
| 1.2. Concavidad de funciones definidas en algún subconjunto finito de \mathbb{Z}^n | 9 |
| 1.3. La transformada de Legendre de funciones definidas en algún subconjunto finito de \mathbb{Z}^n | 16 |
| 2. Representación geométrica de demandas indivisibles | 19 |
| 2.1. El Conjunto de precios de indiferencia (LIP) | 19 |
| 2.2. Ejemplos | 27 |
| 2.3. El Complejo de precios | 41 |
| 2.4. Concavidad en valoraciones | 56 |
| 2.5. El teorema de equivalencia Valoración Complejo | 68 |
| 2.6. El Complejo de Demanda | 75 |
| 2.7. Dualidad entre el complejo de demanda para u y el complejo de precios ponderado de u | 86 |
| 2.8. Tipos de demanda \mathcal{D} | 93 |
| 2.9. Demanda agregada | 97 |
| 2.10. El Teorema de Unimodularidad | 104 |
| 3. Subasta “Product-Mix” y ejemplos de “Tipos de demanda” | 121 |
| 3.1. Subasta “Product-Mix” | 121 |
| 3.2. Sustitutos ordinarios y complementarios ordinarios | 134 |
| Conclusiones | 140 |
| A. Conceptos vectoriales | 141 |

| | |
|---|------------|
| B. Topología y Continuidad en \mathbb{R}^n | 143 |
| C. Análisis convexo clásico en \mathbb{R}^n | 146 |
| C.1. Conjunto o Variedad afín en \mathbb{R}^n | 146 |
| C.2. Convexidad en \mathbb{R}^n | 147 |
| C.3. Teoremas de separación e hiperplano soporte | 149 |
| C.4. Caras de conjuntos convexos en \mathbb{R}^n | 151 |
| C.5. Poliedros convexos en \mathbb{R}^n | 153 |
| C.6. Complejos poliedrales en \mathbb{R}^n | 156 |
| C.7. Politopos convexos | 157 |
| D. Unimodularidad | 158 |
| E. Semianillo tropical max-plus | 160 |
| Bibliografía | 161 |



Introducción

En una economía con un grupo finito de agentes que van a adquirir sus cestas con bienes indivisibles, un equilibrio competitivo es visto como un resultado deseable y que genera una satisfacción para todos los agentes. Como sabemos, mucho se ha trabajado sobre economías con bienes divisibles. Así que en este trabajo, consideramos una economía con n distintos bienes indivisibles que están disponibles en múltiples unidades y con un precio lineal, donde las preferencias de un agente están representadas por una función, llamada valoración, que simplemente es una función real definida sobre un subconjunto finito no vacío de \mathbb{Z}^n . El objetivo principal de esta tesis es encontrar condiciones bajo las cuales el equilibrio competitivo siempre existe para este tipo de economías.

En este sentido, en el apéndice presentamos conceptos preliminares que serán usados en todos los capítulos de este trabajo de tesis. Ponemos mucho énfasis en las propiedades de los poliedros convexos y en los conjuntos unimodulares.

En el capítulo 1 hacemos un estudio exhaustivo de las funciones reales definidas sobre algún subconjunto finito no vacío de \mathbb{Z}^n . Empezamos desarrollando algunos conceptos y resultados de la geometría tropical que tienen conexión con los objetos de estudio de este trabajo de tesis. Luego, definimos la concavidad para funciones reales definidas sobre algún subconjunto finito no vacío de \mathbb{Z}^n . Estudiamos algunas propiedades de este tipo de funciones y desarrollamos una caracterización para la mayorante cóncava de las funciones estudiadas en este capítulo. Finalmente, presentamos a la transformada de Legendre de este tipo de funciones y enunciamos un resultado que será útil para desarrollar el Teorema de equivalencia valoración-complejo. Esta última sección está basada en G. Mikhalkin [5].

El capítulo 2 está basado en el trabajo de E. Baldwin y P. Klemperer [1], y E. Baldwin y P. Klemperer [2]. Es en este capítulo donde estudiamos con mucho detalle todos los elementos involucrados en la economía que es de nuestro interés. El primer objeto que estudiamos es el “Conjunto de precios de indiferencia” (LIP), el cual está conformado por los vectores de precios (en \mathbb{R}^n) que hacen que el agente sea indiferente entre más de una cesta de consumo. Veremos que éste conjunto está conformado por una colección finita de conjuntos convexos $(n - 1)$ -dimensionales, los cuales forman un complejo poliedral racional $(n - 1)$ -dimensional. Además, podemos ver que la valoración del agente define un complejo poliedral racional, llamado “complejo de

precios”. Luego, usamos el teorema de equivalencia valoración-complejo para mostrar que cualquier complejo poliedral racional $(n - 1)$ -dimensional corresponde al LIP de alguna valoración si y solo si, este complejo es balanceado. Este teorema nos permite estudiar las demandas del agente usando directamente la geometría del LIP. Después de esto, estudiamos al “complejo de demanda” y establecemos una dualidad entre este complejo y el complejo de precios. Luego, definimos los “Tipos de demanda \mathcal{D} ”, usando un conjunto de vectores que describen las formas en que las cestas demandadas por el agente pueden cambiar en respuesta a un pequeño cambio en los precios; y damos algunos ejemplos para facilitar su entendimiento. Finalmente, probamos el “Teorema de unimodularidad”, el cual nos proporciona condiciones para la existencia del equilibrio competitivo en economías con bienes indivisibles en las que participan un conjunto finito de agentes.

En el capítulo 3 presentamos algunos ejemplos interesantes de todo lo desarrollado en el capítulo 2. La primera sección está basada principalmente en el trabajo de N. M. Tran y J. Yu [7]. Aquí presentamos toda la infraestructura matemática de la subasta “product-mix”, la cual es una subasta estática de oferta sellada para bienes diferenciados, es decir, ningún pujador conoce las ofertas de los otros pujadores, cada pujador presenta su oferta solamente una vez y hay diferentes tipos de bienes a ser subastados. La siguiente sección está basada principalmente en el trabajo de E. Baldwin y P. Klemperer [1], y E. Baldwin y P. Klemperer [2]. En esta sección estudiamos las valoraciones de sustitutos ordinarios y de complementarios ordinarios en base al enfoque de “tipos de demanda \mathcal{D} ”.

Notaciones

- $B_r(a)$: Bola abierta de centro $a \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$.
- $B_r[a]$: Bola cerrada de centro $a \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$.
- $|A|$: Cardinalidad de un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
- \overline{X} : Clausura o cerradura de un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$.
- \mathbb{Z}_+ : Conjunto de los números enteros positivos.
- \mathbb{N} : Conjunto de los números naturales.
- $\text{Fr}(X)$: Frontera de un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$.
- e^i : i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n .
- $\inf(X)$: ínfimo de un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$.
- $\text{int}(X)$: Interior de un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$.
- $\text{mcd}(a, b)$: Máximo común divisor de los números enteros a y b .
- $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$: Sucesión en \mathbb{R}^n .
- $\sup(X)$: supremo de un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Capítulo 1

Geometría para ciertas funciones definidas en algún subconjunto finito de \mathbb{Z}^n

1.1. Conceptos de geometría tropical

Sean A un subconjunto finito no vacío de \mathbb{Z}^n y $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

Definición 1.1.1 *El polinomio tropical de Laurent f_u en n variables reales, con potencias en $A \subset \mathbb{Z}^n$ y coeficientes $u(a) \in \mathbb{R}$ para cada $a \in A$, es una función definida como*

$$\begin{aligned} f_u : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_u(x) := \bigoplus_{a \in A} u(a) \odot x^{\odot a} = \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.1 *Consideremos $A = \{(0, 0); (1, 0); (0, 1)\}$ y $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$u(0, 0) = 0, \quad u(1, 0) = 5, \quad u(0, 1) = 4.$$

El polinomio tropical de Laurent f_u es

$$\begin{aligned} f_u(x_1, x_2) &= \max\{u(0, 0) + (0, 0) \cdot (x_1, x_2); u(1, 0) + (1, 0) \cdot (x_1, x_2); \\ &\quad u(0, 1) + (0, 1) \cdot (x_1, x_2)\} \\ f_u(x_1, x_2) &= \max\{0; 5 + x_1; 4 + x_2\} \end{aligned}$$

Definición 1.1.2 *La hipersuperficie tropical $T(f_u)$ de un polinomio tropical de Laurent f_u , es definida como*

$$T(f_u) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\} \right| > 1 \right\}$$

es decir, es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ en los cuales el máximo de la expresión que define a $f_u(x)$ es alcanzado en al menos dos elementos de A .

Ejemplo 1.1.2 Se puede mostrar que la hipersuperficie tropical $T(f_u)$ del polinomio tropical de Laurent f_u del ejemplo 1.1.1, es

$$T(f_u) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -5, x_2 < -4\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -5, x_2 = -4\} \\ \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -5 < x_1, -4 < x_2, x_2 = x_1 + 1\} \cup \{(-5, -4)\}$$

y su representación gráfica es

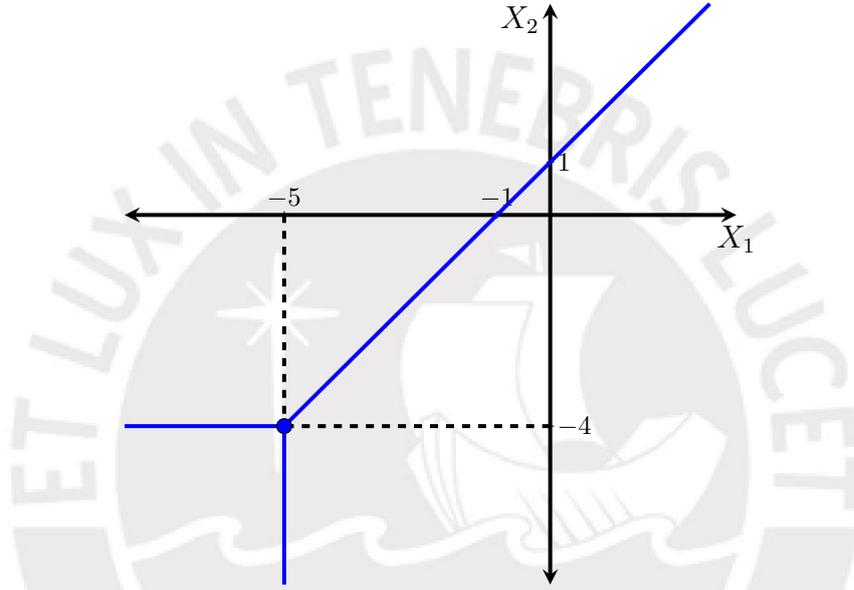


Figura 1.1: Hipersuperficie tropical $T(f_u)$

Observación 1.1.1 Notemos que $f_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa y ocasionalmente lineal por tramos. En este último caso, $T(f_u)$ es el conjunto de todos los puntos en donde la función $f_u(x)$ no es diferenciable.

Definición 1.1.3 La subdivisión regular Δ_u de A inducida por la función u es un subconjunto del conjunto potencia de A , $\mathcal{P}(A)$, definido por

$$\Delta_u := \left\{ \arg \max_{a \in A} \{u(a) \odot x^{\odot a}\} : x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Ejemplo 1.1.3 La subdivisión regular Δ_u de A inducida por la función u del ejemplo 1.1.1, es

$$\Delta_u = \{(0, 0)\}; \{(1, 0)\}; \{(0, 1)\}; \{(0, 0); (1, 0)\}; \{(0, 0); (0, 1)\}; \{(1, 0); (0, 1)\}; A\}$$

Definición 1.1.4

- 1) Los elementos de la subdivisión regular Δ_u son llamados **celdas**.
- 2) La cápsula convexa de una celda de la subdivisión regular Δ_u es llamada una **cara de la subdivisión regular Δ_u** .

Ejemplo 1.1.4 Para la función u del ejemplo 1.1.1 tenemos que las caras de la subdivisión regular Δ_u son:

$$F_1 = \text{conv}(\{(0, 0)\}) = \{(0, 0)\}.$$

$$F_2 = \text{conv}(\{(1, 0)\}) = \{(1, 0)\}.$$

$$F_3 = \text{conv}(\{(0, 1)\}) = \{(0, 1)\}.$$

$$F_4 = \text{conv}(\{(0, 0); (1, 0)\}) = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1\}.$$

$$F_5 = \text{conv}(\{(0, 0); (0, 1)\}) = \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \leq 1\}.$$

$$F_6 = \text{conv}(\{(1, 0); (0, 1)\}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}.$$

$$F_7 = \text{conv}(\{(0, 0); (1, 0); (0, 1)\}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1, 0 \leq x_1, 0 \leq x_2\}.$$

Además, F_1 , F_2 y F_3 son 0-dimensionales; F_4 , F_5 y F_6 son 1-dimensionales; y F_7 es 2-dimensional.

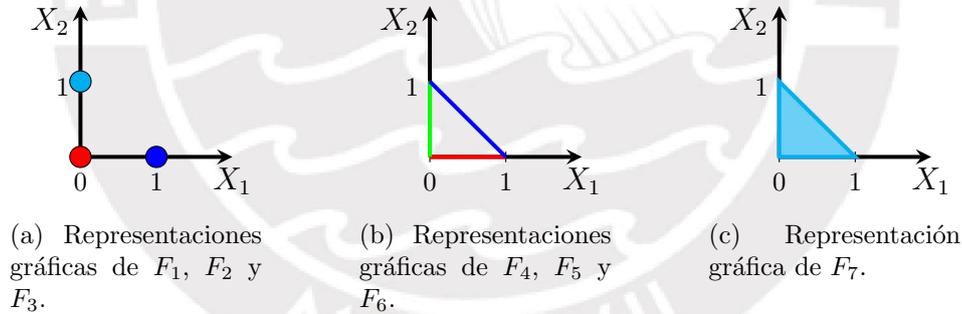


Figura 1.2: Caras de la subdivisión regular Δ_u .

Observación 1.1.2

- 1) Una celda de la subdivisión regular Δ_u es un conjunto finito de puntos de A , mientras que una cara de la subdivisión regular Δ_u es un politopo convexo (en el sentido usual).
- 2) Cada punto $a \in A$ está contenido en alguna cara de la subdivisión regular Δ_u , pero no necesariamente en una celda de la subdivisión regular Δ_u .

Definición 1.1.5 Un punto $a \in A$ es llamado un **punto marcado o elevado (marked point or lifted point)** de la subdivisión regular Δ_u , si este punto pertenece a alguna de las celdas de Δ_u .

Ahora mostraremos que la subdivisión regular Δ_u es **dual** a la hipersuperficie tropical $T(f_u)$ en el sentido que existe una biyección natural entre las caras de dimensión positiva de Δ_u y las caras de la hipersuperficie tropical $T(f_u)$.

Ejemplo 1.1.5 Las caras de la hipersuperficie tropical $T(f_u)$ del ejemplo 1.1.2 son:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -5, x_2 < -4\}. \\ C_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -5, x_2 = -4\}. \\ C_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -5 < x_1, -4 < x_2, x_2 = x_1 + 1\}. \\ C_4 &= \{(-5, -4)\}. \end{aligned}$$

Mientras que las caras de dimensión positiva de Δ_u son:

$$\begin{aligned} F_4 &= \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1\}. \\ F_5 &= \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \leq 1\}. \\ F_6 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}. \\ F_7 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1, 0 \leq x_1, 0 \leq x_2\}. \end{aligned}$$

Como vemos, la cantidad de caras de la hipersuperficie tropical $T(f_u)$ coincide con el número de caras de dimensión positiva de Δ_u , así que es posible establecer una correspondencia biyectiva entre estas dos colecciones.

Para establecer la dualidad entre $T(f_u)$ y Δ_u , definamos la siguiente relación sobre \mathbb{R}^n : Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, escribimos

$$x \mathcal{R} y \iff \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\} = \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot y\}$$

Proposición 1.1.1 \mathcal{R} es una relación de equivalencia en \mathbb{R}^n .

Demostración:

- i) Es claro que $x \mathcal{R} x$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, \mathcal{R} es reflexiva.
- ii) Es claro que para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $x \mathcal{R} y$ implica $y \mathcal{R} x$. Por lo tanto, \mathcal{R} es simétrica.

iii) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \mathcal{R} z$ y $z \mathcal{R} y$, entonces

$$\arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\} = \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot z\} = \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot y\}.$$

En consecuencia $x \mathcal{R} y$. Por lo tanto, \mathcal{R} es transitiva. □

Luego, por la proposición 1.1.1, \mathcal{R} induce una partición de \mathbb{R}^n . Denotemos por \mathcal{P} a dicha partición, por \bar{x} a la clase de equivalencia de $x \in \mathbb{R}^n$ y por F_{Δ_u} al conjunto de caras de Δ_u . Entonces la siguiente función está bien definida

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P} &\longrightarrow F_{\Delta_u} \\ \bar{x} &\longmapsto f(\bar{x}) := \text{conv} \left(\arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\} \right) \end{aligned}$$

Proposición 1.1.2 *La función f es inyectiva.*

Demostración: En efecto, sean $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{P}$ tal que $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$ entonces

$$\text{conv} \left(\arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\} \right) = \text{conv} \left(\arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot y\} \right).$$

Mostraremos que $\bar{x} = \bar{y}$, lo cual es equivalente a demostrar que $x \mathcal{R} y$, es decir,

$$\arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\} = \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot y\}.$$

Supongamos que

$$\left| \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\} \right| = n_x \text{ y } \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\} = \{a_1^x, a_2^x, \dots, a_{n_x}^x\} \quad (1.1)$$

y

$$\left| \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot y\} \right| = n_y \text{ y } \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot y\} = \{a_1^y, a_2^y, \dots, a_{n_y}^y\} \quad (1.2)$$

Sea $b \in \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\}$ fijo y arbitrario, entonces

$$u(a) + a \cdot x \leq u(b) + b \cdot x, \quad \forall a \in A. \quad (1.3)$$

Como $b \in \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\} \subset \text{conv} \left(\arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot y\} \right)$, entonces existen

$\lambda_1^y, \lambda_2^y, \dots, \lambda_{n_y}^y \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y = 1$ tal que $b = \sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y a_i^y$. Luego, por (1.3) obtenemos

$$u(a_i^y) + a_i^y \cdot x \leq u(b) + b \cdot x, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_y.$$

Para cada $i = 1, 2, \dots, n_y$; multiplicamos por λ_i^y a ambos lados de la desigualdad de arriba, obteniendose

$$\lambda_i^y u(a_i^y) + \lambda_i^y (a_i^y \cdot x) \leq \lambda_i^y u(b) + \lambda_i^y (b \cdot x), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_y.$$

Sumando las desigualdades desde $i = 1$ hasta $i = n_y$, conseguimos

$$\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y u(a_i^y) + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y a_i^y \right)}_b \cdot x \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y \right)}_1 u(b) + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y \right)}_1 b \cdot x$$

por lo cual

$$\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y u(a_i^y) \leq u(b). \quad (1.4)$$

Por otro lado, de (1.2) obtenemos

$$u(b) + b \cdot y \leq u(a_i^y) + a_i^y \cdot y, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_y.$$

Para cada $i = 1, 2, \dots, n_y$; multiplicamos por λ_i^y a ambos lados de la desigualdad de arriba, obteniendose

$$\lambda_i^y u(b) + \lambda_i^y (b \cdot y) \leq \lambda_i^y u(a_i^y) + \lambda_i^y (a_i^y \cdot y), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_y.$$

Sumando las desigualdades desde $i = 1$ hasta $i = n_y$, conseguimos

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y \right)}_1 u(b) + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y \right)}_1 b \cdot y \leq \sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y u(a_i^y) + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y a_i^y \right)}_b \cdot y$$

por lo cual

$$u(b) \leq \sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y u(a_i^y). \quad (1.5)$$

Por lo tanto, de (1.4) y (1.5) conseguimos

$$u(b) = \sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y u(a_i^y).$$

Por otro lado, de (1.2), para cada $a \in A$ se cumple

$$u(a) + a \cdot y \leq u(a_i^y) + a_i^y \cdot y, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_y.$$

Multiplicando por λ_i^y en ambos lados de la desigualdad, obtenemos

$$\lambda_i^y (u(a) + a \cdot y) \leq \lambda_i^y u(a_i^y) + \lambda_i^y (a_i^y \cdot y), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_y.$$

Sumando las desigualdades desde $i = 1$ hasta $i = n_y$, conseguimos

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y \right)}_1 (u(a) + a \cdot y) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y u(a_i^y)}_{u(b)} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n_y} \lambda_i^y a_i^y \right)}_b \cdot y.$$

Por lo tanto

$$u(a) + a \cdot y \leq u(b) + b \cdot y, \quad \forall a \in A,$$

es decir, $b \in \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot y\}$. Como b era fijo y arbitrario, concluimos que

$$\arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\} \subseteq \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot y\}. \quad (1.6)$$

De manera análoga se prueba que

$$\arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot y\} \subseteq \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\}. \quad (1.7)$$

Por lo tanto, de (1.6) y (1.7), conseguimos

$$\arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\} = \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot y\}.$$

En consecuencia, $\bar{x} = \bar{y}$. Por lo cual, f es inyectiva. \square

Proposición 1.1.3 *La función f es sobreyectiva.*

Demostración: Sea $\sigma \in F_{\Delta_u}$ entonces existe algún $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sigma = \text{conv} \left(\arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot x\} \right).$$

Si consideramos la clase de equivalencia \bar{x} , obtenemos $f(\bar{x}) = \sigma$. Por lo cual, f es sobreyectiva. \square

Notemos que la hipersuperficie tropical $T(f_u)$ es la unión de las clases de equivalencia \bar{x} de dimensión menor que n .

Ejemplo 1.1.6 *Para la función u del ejemplo 1.1.1 se cumple:*

- $(x_1, x_2) \mathcal{R}(-6, -5), \forall (x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -5, x_2 < -4\}$, es decir $\overline{(-6, -5)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -5, x_2 < -4\}$.
- $(x_1, x_2) \mathcal{R}(-4, -4), \forall (x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -5 < x_1, x_2 < x_1 + 1\}$, es decir $\overline{(-4, -4)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -5 < x_1, x_2 < x_1 + 1\}$.

- $(x_1, x_2) \mathcal{R}(-5, -3), \forall (x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 1 < x_2, -4 < x_2\}$, es decir $\overline{(-5, -3)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 1 < x_2, -4 < x_2\}$.
- $(x_1, x_2) \mathcal{R}(-5, -5), \forall (x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -5, x_2 < -4\}$, es decir $\overline{(-5, -5)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -5, x_2 < -4\} = C_1$.
- $(x_1, x_2) \mathcal{R}(-6, -4), \forall (x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -5, x_2 = -4\}$, es decir $\overline{(-6, -4)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -5, x_2 = -4\} = C_2$.
- $(x_1, x_2) \mathcal{R}(-4, -3), \forall (x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -5 < x_1, -4 < x_2, x_2 = x_1 + 1\}$, es decir $\overline{(-4, -3)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -5 < x_1, -4 < x_2, x_2 = x_1 + 1\} = C_3$.
- $\overline{(-5, -4)} = \{(-5, -4)\} = C_4$.

De esta manera obtenemos que una partición de \mathbb{R}^2 inducida por la relación de equivalencia \mathcal{R} es:

$$\mathcal{P} = \{\overline{(-6, -5)}, \overline{(-4, -4)}, \overline{(-5, -3)}, \overline{(-5, -5)}, \overline{(-6, -4)}, \overline{(-4, -3)}, \overline{(-5, -4)}\}.$$

En este caso, la función biyectiva $f : \mathcal{P} \rightarrow F_{\Delta_u}$ queda definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f(\overline{(-6, -5)}) &= \text{conv} \left(\arg \max_{a \in A} \{u(a) - a \cdot (-6, -5)\} \right) = \text{conv}(\{(0, 0)\}) = F_1 \\ f(\overline{(-4, -4)}) &= \text{conv} \left(\arg \max_{a \in A} \{u(a) - a \cdot (-4, -4)\} \right) = \text{conv}(\{(1, 0)\}) = F_2 \\ f(\overline{(-5, -3)}) &= \text{conv} \left(\arg \max_{a \in A} \{u(a) - a \cdot (-5, -3)\} \right) = \text{conv}(\{(0, 1)\}) = F_3 \\ f(\underbrace{\overline{(-5, -5)}}_{C_1}) &= \text{conv} \left(\arg \max_{a \in A} \{u(a) - a \cdot (-5, -5)\} \right) = \text{conv}(\{(0, 0); (1, 0)\}) = F_4 \\ f(\underbrace{\overline{(-6, -4)}}_{C_2}) &= \text{conv} \left(\arg \max_{a \in A} \{u(a) - a \cdot (-6, -4)\} \right) = \text{conv}(\{(0, 0); (0, 1)\}) = F_5 \\ f(\underbrace{\overline{(-4, -3)}}_{C_3}) &= \text{conv} \left(\arg \max_{a \in A} \{u(a) - a \cdot (-4, -3)\} \right) = \text{conv}(\{(1, 0); (0, 1)\}) = F_6 \\ f(\underbrace{\overline{(-5, -4)}}_{C_4}) &= \text{conv} \left(\arg \max_{a \in A} \{u(a) - a \cdot (-5, -4)\} \right) = \text{conv}(\{(0, 0); (1, 0); (0, 1)\}) \end{aligned}$$

Como podemos ver, f establece una correspondencia biyectiva entre las clases de equivalencia en \mathbb{R}^2 y las caras de Δ_u . Además, esta función es una biyección entre las caras de dimensión positiva de Δ_u y las caras de la hipersuperficie tropical $T(f_u)$.

1.2. Concavidad de funciones definidas en algún subconjunto finito de \mathbb{Z}^n

Sean $A = \{a^1, a^2, \dots, a^\alpha\}$ un subconjunto finito de \mathbb{Z}^n (es decir, $|A| = \alpha < \infty$) y $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Denotemos al gráfico de la función u por

$$\text{lift}_u(A) := \{(a, u(a)) : a \in A\} \subset A \times \mathbb{R}.$$

Definición 1.2.1 La *mayorante cóncava* de u se denota por $\text{conv}(u)$ y se define como la menor función cóncava definida sobre $\text{conv}(A)$ tal que

$$\text{conv}(u)(a) \geq u(a), \quad \forall a \in A.$$

Ejemplo 1.2.1 Sea $A = \{0, 1, 3, 5, 7, 8\}$ y $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida de la siguiente forma

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 2, \quad u(3) = 3, \quad u(5) = 7, \quad u(7) = 5, \quad u(8) = 6.$$

Entonces, la gráfica de la mayorante cóncava de u es

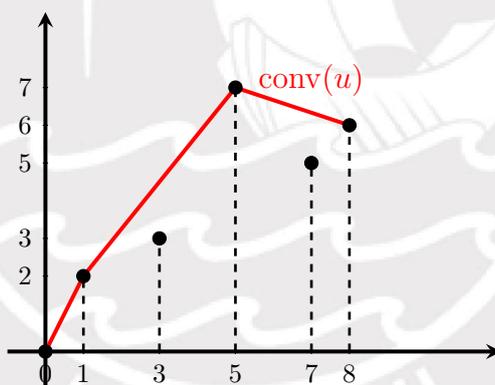


Figura 1.3: Los puntos negros representan al $\text{lift}_u(A)$ mientras que los segmentos cerrados de color rojo representan a la gráfica de la mayorante cóncava de u .

Ejemplo 1.2.2 Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida de la siguiente forma

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 2, \quad u(2) = 3.5, \quad u(3) = 4.5, \quad u(4) = 5, \quad u(5) = 5.$$

Entonces, la gráfica de la mayorante cóncava de u es

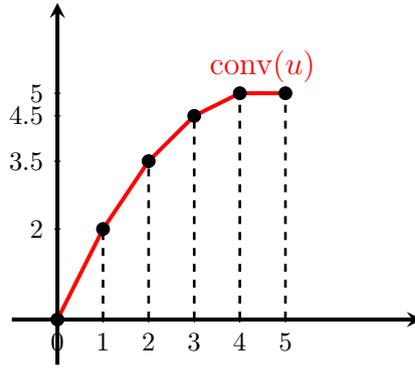


Figura 1.4: Los puntos negros representan al $\text{lift}_u(A)$ mientras que los segmentos cerrados de color rojo representan a la gráfica de la mayorante cóncava de u .

Ahora, definimos la concavidad de la función u en el sentido estándar de “cóncava extensible”, pero con una propiedad extra ya que el dominio de u es un subconjunto finito no vacío $A \subseteq \mathbb{Z}^n$.

Definición 1.2.2 Decimos que $u : A \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **cóncava**, si y solo si

$$A = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A) \quad \text{y} \quad u(a) = \text{conv}(u)(a), \quad \forall a \in A.$$

No debemos confundir la noción de concavidad dada en la definición 1.2.2 con la que se enunció en el apéndice C, pues en la definición 1.2.2 la función u está definida en un subconjunto finito no vacío de \mathbb{Z}^n , mientras que la función f de la definición C.2.3 está definida en un subconjunto convexo de \mathbb{R}^n . Así que siempre que digamos que una función es cóncava y tengamos en claro como es el dominio de esta función, no debemos entrar en confusión sobre cuál de las dos definiciones estamos usando.

Ejemplo 1.2.3 La función $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida en el ejemplo 1.2.1 no es cóncava porque $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A) = \text{conv}(A) \cap \mathbb{Z} = [0, 8] \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \supsetneq A$.

Mientras que la función $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida en el ejemplo 1.2.2 es cóncava porque

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A) = \text{conv}(A) \cap \mathbb{Z} = [0, 5] \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = A$$

y de la figura 1.4 obtenemos

$$u(a) = \text{conv}(u)(a), \quad \forall a \in A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Ahora vamos a caracterizar a la gráfica de la mayorante cóncava $\text{conv}(u)$ a través de lo que se denomina “la frontera superior del conjunto $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$, con respecto a su última coordenada”. Para ello, definamos lo siguiente.

Definición 1.2.3 Sean $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Z \subseteq \mathbb{R}$ dos subconjuntos no vacíos. La frontera superior de $X = Y \times Z$, con respecto a su última coordenada; se define de la siguiente manera

$$\text{FSUC}(X) = \{(y, \beta) \in Y \times Z : \beta > z, \forall (y, z) \in Y \times Z\}.$$

Por otro lado, notemos que el conjunto $\text{conv}(\text{lift}_u(A)) = \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$, es convexo, acotado y cerrado; de hecho, este conjunto es un politopo. Denotemos por π a la función proyección, definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \pi : \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

es decir, π es la función que proyecta de cada punto del conjunto $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$ sus primeras n componentes.

Lema 1.2.1 $\pi(\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})) = \text{conv}(A)$.

Demostración:

(\subseteq):

Sea $x \in \pi(\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}))$ fijo y arbitrario, mostraremos que $x \in \text{conv}(A)$. Como la proyección π es sobreyectiva, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x, y) \in \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}).$$

Entonces, existen $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^\alpha \in [0, 1]$, con $\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k = 1$ y $A = \{a^1, a^2, \dots, a^\alpha\}$ tal que

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k (a^k, u(a^k)). \text{ Por consiguiente, } x = \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k a^k, \text{ y así } x \in \text{conv}(A).$$

(\supseteq):

Sea $x \in \text{conv}(A)$ fijo y arbitrario, mostraremos que $x \in \pi(\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}))$. Dado que $x \in \text{conv}(A)$, existen $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^\alpha \in [0, 1]$, con $\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k = 1$ y $A =$

$\{a^1, a^2, \dots, a^\alpha\}$ tal que $x = \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k a^k$. Si definimos $y = \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k u(a^k)$, entonces

$$(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k a^k, \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k u(a^k) \right) = \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k (a^k, u(a^k)) \in \text{conv}(\text{lift}_u(A)).$$

Por consiguiente $\pi(x, y) = \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k a^k = x \in \pi(\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}))$. \square

Ahora, para la función $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ definamos la siguiente correspondencia

$$\Gamma_u : \text{conv}(A) \rightrightarrows \mathbb{R}$$

mediante $\Gamma_u(x) := \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \text{conv}(\text{lift}_u(A))\}$, para cada $x \in \text{conv}(A)$.

Lema 1.2.2 *La correspondencia Γ_u es de valor convexo, es decir,*

$$\Gamma_u(x) \text{ es convexo, para cada } x \in \text{conv}(A).$$

Demostración: Sea $x \in \text{conv}(A)$ fijo y arbitrario, mostraremos que $\Gamma_u(x)$ es convexo. Sean $y, \tilde{y} \in \Gamma_u(x)$, $\lambda \in [0, 1]$ fijos y arbitrarios, entonces

$$(x, y), (x, \tilde{y}) \in \text{conv}(\text{lift}_u(A)).$$

Por lo cual

$$(x, \lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}) = \lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x, \tilde{y}) \in \text{conv}(\text{lift}_u(A)).$$

Por consiguiente, $\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y} \in \Gamma_u(x)$. Finalmente, por la arbitrariedad de x concluimos que $\Gamma_u(x)$ es convexo, para cada $x \in \text{conv}(A)$. \square

Lema 1.2.3 *La correspondencia Γ_u es de valor compacto, es decir,*

$$\Gamma_u(x) \text{ es compacto, para cada } x \in \text{conv}(A).$$

Demostración: Sea $x \in \text{conv}(A)$ fijo y arbitrario, mostraremos que $\Gamma_u(x)$ es compacto. Dado que $\text{conv}(\text{lift}_u(A))$ es acotado, concluimos que $\Gamma_u(x)$ también es acotado.

Afirmación: $\Gamma_u(x)$ es cerrado.

En efecto, sea $(y^m) \subseteq \Gamma_u(x)$ una sucesión fija y arbitraria, tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} y^m = y$. Dado que $y^m \in \Gamma_u(x)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$(x, y^m) \in \text{conv}(\text{lift}_u(A)), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Como $\text{conv}(\text{lift}_u(A))$ es cerrado, entonces obtenemos que

$$(x, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} (x, y^m) \in \text{conv}(\text{lift}_u(A))$$

por lo cual, $y \in \Gamma_u(x)$. Por lo tanto, por la arbitrariedad de la sucesión, se concluye que $\Gamma_u(x)$ es cerrado.

Por lo cual, $\Gamma_u(x)$ es compacto. Luego, por la arbitrariedad de x , concluimos que $\Gamma_u(x)$ es compacto, para cada $x \in \text{conv}(A)$. \square

Ahora por los lemas 1.2.2 y 1.2.3 concluimos que $\Gamma_u(x)$ es un intervalo cerrado y acotado, para cada $x \in \text{conv}(A)$. De esta manera, para la función $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, la siguiente función

$$\begin{aligned} G_u : \text{conv}(A) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G_u(x) := \max_{y \in \Gamma_u(x)} y \end{aligned}$$

está bien definida.

Lema 1.2.4 *La función G_u es cóncava.*

Demostración: Sean $x, \tilde{x} \in \text{conv}(A)$ y $\lambda \in [0, 1]$ fijos y arbitrarios, mostraremos que

$$G_u(\lambda x + (1 - \lambda)\tilde{x}) \geq \lambda G_u(x) + (1 - \lambda)G_u(\tilde{x}).$$

Dado que $(x, G_u(x)) \in \text{conv}(\text{lift}_u(A))$ y $(\tilde{x}, G_u(\tilde{x})) \in \text{conv}(\text{lift}_u(A))$, tenemos que

$$\lambda(x, G_u(x)) + (1 - \lambda)(\tilde{x}, G_u(\tilde{x})) \in \text{conv}(\text{lift}_u(A)),$$

entonces

$$(\lambda x + (1 - \lambda)\tilde{x}, \lambda G_u(x) + (1 - \lambda)G_u(\tilde{x})) \in \text{conv}(\text{lift}_u(A)).$$

Por consiguiente,

$$\lambda G_u(x) + (1 - \lambda)G_u(\tilde{x}) \in \Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)\tilde{x})$$

y así,

$$G_u(\lambda x + (1 - \lambda)\tilde{x}) \geq \lambda G_u(x) + (1 - \lambda)G_u(\tilde{x}).$$

□

Ahora se enunciará y demostrará el teorema que nos permite caracterizar a la gráfica de la mayorante cóncava $\text{conv}(u)$ como “la frontera superior del conjunto $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$, con respecto a su última coordenada”.

Teorema 1.2.1 $\text{conv}(u)(x) = G_u(x)$, $\forall x \in \text{conv}(A)$.

Demostración: Sabemos que $(a, u(a)) \in \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$, para cada $a \in A$. Entonces $u(a) \in \Gamma_u(a)$, para cada $a \in A$. Por consiguiente,

$$G_u(a) \geq u(a), \quad \forall a \in A.$$

Luego, como G_u es una función cóncava definida sobre $\text{conv}(A)$ y por la definición de la mayorante cóncava de u , concluimos que

$$G_u(x) \geq \text{conv}(u)(x), \quad \forall x \in \text{conv}(A).$$

Ahora mostraremos que se cumple la desigualdad inversa. Sea $x \in \text{conv}(A)$ fijo y arbitrario.

Afirmación: $\text{conv}(u)(x) \geq y, \forall y \in \Gamma_u(x)$.

En efecto, sea $y \in \Gamma_u(x)$ fijo y arbitrario, entonces $(x, y) \in \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$.

Por consiguiente, existen $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^\alpha \in [0, 1]$ con $\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k = 1$ y $A = \{a^1, a^2, \dots, a^\alpha\}$ tal que

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k (a^k, u(a^k)) = \left(\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k a^k, \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k u(a^k) \right).$$

Entonces

$$x = \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k a^k, \quad y = \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k u(a^k).$$

Luego, dado que $\text{conv}(u)$ es una función cóncava, obtenemos

$$\text{conv}(u)(x) = \text{conv}(u) \left(\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k a^k \right) \geq \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k \text{conv}(u)(a^k).$$

Además, sabemos que $\text{conv}(u)(a^k) \geq u(a^k)$, para cada $a^k \in A$. Por consiguiente

$$\text{conv}(u)(x) \geq \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k (u)(a^k) = y.$$

Luego, por la afirmación, tenemos que $\text{conv}(u)(x) \geq G_u(x)$. Dado que $x \in \text{conv}(A)$ era fijo y arbitrario, concluimos que

$$\text{conv}(u)(x) \geq G_u(x), \quad \forall x \in \text{conv}(A).$$

□

Luego, por el teorema 1.2.1, podemos decir que para cada $x \in \text{conv}(A)$, los puntos $(x, \text{conv}(u)(x))$ se encuentran en la frontera superior del politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$, con respecto a su última coordenada. De esta manera, podemos pensar en la gráfica de $\text{conv}(u)$ como una superficie formada por piezas lineales.

Por otro lado, las proyecciones de las piezas lineales de la gráfica de $\text{conv}(u)$ sobre $\text{conv}(A)$ son las caras de Δ_u , la subdivisión regular de A inducida por u . De esta

manera, podemos dar una interpretación geométrica de cuando un punto dado en la subdivisión regular Δ_u es un punto elevado. Notese que un punto $a \in \mathbb{Z}^n$ es elevado (o marcado) si y solo si, $\text{conv}(u)(a) = u(a)$.

Ahora denotemos por \hat{u} a la restricción de $\text{conv}(u)$ a $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, es decir,

$$\begin{aligned} \hat{u} : \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \hat{u}(a) = \text{conv}(u)(a) \end{aligned}$$

Proposición 1.2.1 \hat{u} es cóncava.

Demostración: Mostraremos que $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)) = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ y que $\text{conv}(\hat{u})(a) = \hat{u}(a)$, para cada $a \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$.

i) Dado que $A \subseteq \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, concluimos que $\text{conv}(A) \subseteq \text{conv}(\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A))$. Por otro lado tenemos que

$$\text{conv}(\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)) = \text{conv}(\text{conv}(A) \cap \mathbb{Z}^n) \subseteq \text{conv}(\text{conv}(A)) = \text{conv}(A).$$

Por lo tanto, $\text{conv}(\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)) = \text{conv}(A)$. Luego,

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)) = \text{conv}(\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)) \cap \mathbb{Z}^n = \text{conv}(A) \cap \mathbb{Z}^n = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A).$$

ii) Sabemos que

$$\hat{u}(a) \leq \text{conv}(\hat{u})(a), \quad \forall a \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A). \quad (1.8)$$

Por otro lado, dado que $\text{conv}(u)(a) : \text{conv}(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ es cóncava y $\hat{u}(a) = \text{conv}(u)(a)$, $\forall a \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$; entonces, por la definición de mayorante cóncava tenemos

$$\text{conv}(\hat{u})(a) \leq \text{conv}(u)(a), \quad \forall a \in \text{conv}(\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)) = \text{conv}(A). \quad (1.9)$$

En particular

$$\text{conv}(\hat{u})(a) \leq \text{conv}(u)(a) = \hat{u}(a), \quad \forall a \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A). \quad (1.10)$$

Por lo tanto, de (1.8) y (1.10) concluimos que

$$\text{conv}(\hat{u})(a) = \hat{u}(a), \quad \forall a \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A).$$

Por consiguiente, de i) y ii), \hat{u} es cóncava. □

Proposición 1.2.2 $\text{conv}(\hat{u})(a) = \text{conv}(u)(a)$, $\forall a \in \text{conv}(\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)) = \text{conv}(A)$.

Demostración: Dado que $A \subseteq \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, obtenemos

$$u(a) \leq \text{conv}(u)(a) = \hat{u}(a) = \text{conv}(\hat{u})(a), \forall a \in A;$$

y como $\text{conv}(\hat{u})(a) : \text{conv}(A) \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava, entonces por la definición de mayorante cóncava, tenemos

$$\text{conv}(u)(a) \leq \text{conv}(\hat{u})(a), \forall a \in \text{conv}(\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)) = \text{conv}(A). \quad (1.11)$$

Por lo tanto, de (1.9) y (1.11) obtenemos

$$\text{conv}(\hat{u})(a) = \text{conv}(u)(a), \forall a \in \text{conv}(\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)) = \text{conv}(A).$$

□

1.3. La transformada de Legendre de funciones definidas en algún subconjunto finito de \mathbb{Z}^n

Un complejo poliedral racional Π en \mathbb{R}^n tiene las siguientes características

- i) Π puede ser presentado como una unión finita de poliedros convexos cerrados en \mathbb{R}^n , llamados celdas. La dimensión de una celda es, por definición, la dimensión de su cápsula afín. De esta manera, una celda de dimensión k , se denomina k -celda.
- ii) El subespacio vectorial de \mathbb{R}^n paralelo a la cápsula afín de cada celda está definido sobre \mathcal{Q} .
- iii) La frontera relativa de una k -celda es una unión de $(k - 1)$ -celdas.
- iv) Los interiores relativos de las celdas no se intersecan.

De esta manera, un complejo poliedral racional Π en \mathbb{R}^n se define, de forma equivalente a la definición C.6.3, como un subconjunto $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ que cumple las propiedades i), ii), iii) y iv) de arriba.

Consideremos que $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ es un $(n - 1)$ -complejo poliedral racional ponderado. Si F es una faceta de Π , con peso $w(F)$, entonces F es paralela a un hiperplano en \mathbb{R}^n definido sobre \mathcal{Q} . Por lo tanto, ésta define un covector entero

$$\pm c_F : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$$

salvo su signo, tal que

- i) El núcleo o “kernel” de c_F es un plano paralelo a F .
- ii) $\frac{1}{w(F)}c_F : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ es un covector entero primitivo (es decir, no divisible).

Incluso el signo de c_F queda bien definido una vez que hemos co-orientado $F \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 1.3.1 Un $(n-1)$ -complejo poliedral racional ponderado $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ es llamado **balanceado**, si para cada $(n-2)$ -celda $G \subset \Pi$ se cumple la siguiente condición: Sean F_1, \dots, F_k las $(n-1)$ -celdas adyacentes a G , y elijamos una dirección rotacional alrededor de G que define una co-orientación coherente en estas $(n-1)$ -celdas, entonces

$$\sum_{j=1}^k c_{F_j} = 0.$$

Sean A un subconjunto finito no vacío de \mathbb{Z}^n y $v : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función, entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$, la función

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto f(a) = a \cdot x - v(a) \end{aligned}$$

alcanza un valor máximo. Por lo tanto, la siguiente expresión está bien definida

$$\max_{a \in A} \{a \cdot x - v(a)\}.$$

La transformada de Legendre de v se denota por L_v y se define como

$$\begin{aligned} L_v : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto L_v(x) := \max_{a \in A} \{a \cdot x - v(a)\} \end{aligned}$$

Dado que el máximo se toma sobre un conjunto finito, el resultado L_v es una función convexa, lineal por tramos. Definimos Π_v como el conjunto de todos los puntos donde L_v no es diferenciable.

Notemos que la transformada de Legendre de v coincide con el polinomio tropical de Laurent f_{-v} :

$$L_v(x) = \max_{a \in A} \{a \cdot x - v(a)\} = \max_{a \in A} \{-v(a) + a \cdot x\} = f_{-v}(x).$$

Por la observación 1.1.1 sabemos que $T(f_{-v})$ es el conjunto de todos los puntos donde f_{-v} no es diferenciable. Por lo tanto, la hipersuperficie tropical $T(f_{-v})$ coincide con Π_v .

Definición 1.3.2 Una subdivisión de un poliedro convexo (en \mathbb{R}^n) en poliedros más pequeños es llamada **subdivisión reticular**, si todos sus subpoliedros son reticulares, es decir, sus vértices pertenecen a \mathbb{Z}^n .

Proposición 1.3.1 *El conjunto Π_v es un complejo poliedral racional dual a una cierta subdivisión reticular de $\text{conv}(A)$.*

Demostración: Ver [5]. □

Notemos que Π_v es un complejo poliedral racional ponderado. De hecho, una $(n-1)$ -celda $F \subset \Pi_v$ viene como una intersección entre las gráficas de dos funciones lineales. La diferencia entre estas funciones es un covector entero c_F . Definimos $w(F) \in \mathbb{N}$ como el máximo divisor entero de c_F .

Proposición 1.3.2 *El complejo poliedral racional ponderado Π_v es balanceado.*

Demostración: Ver [5]. □

Observación 1.3.1 *Notemos que varias funciones v diferentes definen el mismo complejo poliedral racional Π_v . Aquí está la lista de ambigüedades.*

- 1) Sea $c \in \mathbb{R}$ una constante y sea v' una función definida como

$$\begin{aligned} v' &: A \longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto v'(a) = v(a) + c \end{aligned}$$

entonces $\Pi_{v'} = \Pi_v$.

- 2) Sea $A' = A + z$, donde $z \in \mathbb{Z}^n$; y sea v' una función definida como

$$\begin{aligned} v' &: A' \longrightarrow \mathbb{R} \\ a + z &\longmapsto v'(a + z) = v(a) \end{aligned}$$

entonces $\Pi_{v'} = \Pi_v$.

- 3) Sea $A' \subsetneq \mathbb{Z}^n$ tal que $\text{conv}(A') = \text{conv}(A)$; y sea \hat{v} (respectivamente \hat{v}') la máxima función convexa tal que $\hat{v} \leq v$ (respectivamente $\hat{v}' \leq v'$). Si $\hat{v} = \hat{v}'$ entonces $\Pi_v = \Pi_{v'}$.

Proposición 1.3.3 *Supongamos que $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ es un complejo poliedral racional balanceado entonces existen un conjunto finito no vacío $A \subsetneq \mathbb{Z}^n$ y una función $v : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Pi = \Pi_v$. La cápsula convexa de A es única salvo una traslación en \mathbb{Z}^n . La elección de la función v es única salvo la ambigüedad de la observación 1.3.1.*

Demostración: Ver [5] □

Capítulo 2

Representación geométrica de demandas indivisibles

Consideramos una economía de n distintos bienes indivisibles. Cada uno de estos bienes está disponible en múltiples unidades, con un precio lineal.

En este contexto, una cesta de consumo puede ser negativa o de signo mixto (las coordenadas negativas representan unidades de bienes vendidos).

En esta economía, las preferencias de un agente económico están representadas por una función $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre un conjunto finito no vacío de cestas de consumo $A \subseteq \mathbb{Z}^n$. Esta función u es llamada **valoración** del agente. Notemos que el dominio A , de cestas de consumo que el agente considera posible, puede ser cualquier subconjunto finito no vacío de \mathbb{Z}^n . Por lo tanto, el agente puede demandar varias unidades de cada bien. Además, A no necesita contener toda cesta entera en su cápsula convexa. Tampoco es necesario que A incluya cada cesta de consumo que está disponible en la economía. En particular, si una cesta es completamente inaceptable para el agente, entonces simplemente ésta no está en A (lo cual es equivalente a permitir que el agente valore algunas cestas de consumo en “ $-\infty$ ”, y es más conveniente para nuestro estudio). Finalmente, no necesitamos que las valoraciones sean positivas o crecientes.

2.1. El Conjunto de precios de indiferencia (LIP)

Sea $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector de precios, donde p_i es el precio por una unidad del i -ésimo bien; entonces la cantidad de dinero que el agente debe pagar por la cesta de consumo $x \in A \subseteq \mathbb{Z}^n$, es $p \cdot x$. De esta manera, el beneficio del agente que compra la cesta de consumo x al precio p es

$$u(x) - p \cdot x.$$

Por lo tanto, el problema del agente es

$$\max_{x \in A} \{u(x) - p \cdot x\} \quad (2.1)$$

Dado que $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ es finito, el problema (2.1) siempre tendrá solución. Luego, el conjunto de demanda del agente al vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$, es el conjunto de cestas de consumo que maximizan su beneficio. De esta manera, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.1 *El conjunto de demanda del agente al vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$ se denota por $D_u(p)$ y se define como*

$$D_u(p) = \arg \max_{x \in A} \{u(x) - p \cdot x\}.$$

El primer objeto geométrico que estudiaremos será el conjunto conformado por los vectores de precios que hacen que el agente sea indiferente entre más de una cesta de consumo, estos son aquellos vectores de precios en los que su conjunto de demanda contiene varias cestas de bienes. Formalmente para el agente tipificado con valoración u , tenemos

Definición 2.1.2 *El conjunto de precios de indiferencia del agente se denota por \mathcal{L}_u y se define como el conjunto de vectores de precios tales que para cada uno de ellos el agente es indiferente entre más de una cesta de consumo, es decir,*

$$\mathcal{L}_u := \{p \in \mathbb{R}^n : |D_u(p)| > 1\}.$$

Usamos las siglas **LIP** para referirnos al conjunto de precios de indiferencia \mathcal{L}_u del agente con valoración u , dado que sus siglas corresponden a “**Locus of indifference prices**”.

Observación 2.1.1 *La conexión entre la matemática tropical y la geometría de la valoración u del agente, es la siguiente: Haciendo $x = -p$ en las definiciones dadas en el capítulo 1, tenemos*

- 1) $f_u(-p) = \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot (-p)\} = \max_{a \in A} \{u(a) - p \cdot a\}$, es decir, $f_u(-p)$ es el máximo beneficio del agente al vector de precios p .

$$\begin{aligned}
2) \quad -T(f_u) &= - \left\{ -p \in \mathbb{R}^n : \left| \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot (-p)\} \right| > 1 \right\} \\
-T(f_u) &= \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \left| \arg \max_{a \in A} \{u(a) - p \cdot a\} \right| > 1 \right\} \\
-T(f_u) &= \{p \in \mathbb{R}^n : |D_u(p)| > 1\} \\
-T(f_u) &= \mathcal{L}_u
\end{aligned}$$

es decir, \mathcal{L}_u es una **hipersuperficie tropical**.

$$\begin{aligned}
3) \quad \Delta_u &= \left\{ \arg \max_{a \in A} \{u(a) + a \cdot (-p)\} : -p \in \mathbb{R}^n \right\} \\
\Delta_u &= \left\{ \arg \max_{a \in A} \{u(a) - p \cdot a\} : p \in \mathbb{R}^n \right\} \\
\Delta_u &= \{D_u(p) : p \in \mathbb{R}^n\}
\end{aligned}$$

es decir, las **celdas de la subdivisión regular** Δ_u son todos los conjuntos de demanda $D_u(p)$ posibles a medida que variamos el vector de precios p .

Definición 2.1.3

- 1) Decimos que la cesta de consumo $x \in A$ es **demandada** por el agente, si existe algún vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in D_u(p)$.
- 2) Decimos que la cesta de consumo $x \in A$ es **no demandada** o **nunca demandada** por el agente, si para cada vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $x \notin D_u(p)$.

Definición 2.1.4 Decimos que la cesta de consumo $x \in A$ demandada por el agente, es **únicamente demandada**, si existe algún vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\{x\} = D_u(p)$.

Definición 2.1.5 Dado $x \in A$. Una **región de demanda única** de la valoración u es un conjunto que consiste de todos los vectores de precios $p \in \mathbb{R}^n$ para los cuales $x \in A$ es únicamente demandada y se denota por $\mathcal{R}_u(x)$, es decir,

$$\mathcal{R}_u(x) = \{p \in \mathbb{R}^n : \{x\} = D_u(p)\}.$$

Usamos las siglas **UDR** para referirnos a una región de demanda única del agente con valoración u , dado que sus siglas corresponden a “**Unique demand region**”.

Observación 2.1.2 Si denotamos por \mathcal{R}_u a la unión de todas las UDRs de la valoración u , es decir,

$$\mathcal{R}_u = \{p \in \mathbb{R}^n : |D_u(p)| = 1\};$$

obtenemos que

$$\mathcal{R}_u \cap \mathcal{L}_u = \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_u \cup \mathcal{L}_u = \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto, la unión de todas las regiones de demanda única comprende todos los vectores de precios que no están en el LIP del agente.

Teorema 2.1.1 *Cada UDR es un conjunto convexo.*

Demostración: Sean $x \in A$; $p, q \in \mathcal{R}_u(x)$ y $\lambda \in [0, 1]$ fijos y arbitrarios; mostraremos que $\lambda p + (1 - \lambda)q \in \mathcal{R}_u(x)$.

Basta considerar cuando $\lambda \in]0, 1[$. Dado que $p \in \mathcal{R}_u(x)$, tenemos $\{x\} = D_u(p)$. Entonces

$$u(x) - p \cdot x > u(a) - p \cdot a, \quad \forall a \in A \setminus \{x\}.$$

Por consiguiente

$$\lambda[u(x) - p \cdot x] > \lambda[u(a) - p \cdot a], \quad \forall a \in A \setminus \{x\},$$

es decir,

$$\lambda u(x) - (\lambda p) \cdot x > \lambda u(a) - (\lambda p) \cdot a, \quad \forall a \in A \setminus \{x\}. \quad (2.2)$$

De manera análoga, dado que $q \in \mathcal{R}_u(x)$, obtenemos

$$(1 - \lambda)u(x) - ((1 - \lambda)q) \cdot x > (1 - \lambda)u(a) - ((1 - \lambda)q) \cdot a, \quad \forall a \in A \setminus \{x\}. \quad (2.3)$$

Luego, sumando miembro a miembro de (2.2) y (2.3), obtenemos

$$u(x) - (\lambda p + (1 - \lambda)q) \cdot x > u(a) - (\lambda p + (1 - \lambda)q) \cdot a, \quad \forall a \in A \setminus \{x\}.$$

Por lo cual, $\{x\} = D_u(\lambda p + (1 - \lambda)q)$, es decir, $\lambda p + (1 - \lambda)q \in \mathcal{R}_u(x)$. Por lo tanto, $\mathcal{R}_u(x)$ es convexo. \square

Proposición 2.1.1 *Las UDRs son las componentes conexas de \mathcal{R}_u (el complemento de \mathcal{L}_u).*

Demostración: Como cada UDR es convexo entonces cada UDR es conexo. Luego, si $p \in \mathcal{R}_u$, entonces existe alguna UDR que contiene a p , es decir, existe alguna cesta únicamente demandada $x \in A$ tal que $p \in \mathcal{R}_u(x)$. Como las UDRs son disjuntas dos a dos, entonces la componente conexas de p es $\mathcal{R}_u(x)$. Por lo tanto, las UDRs son las componentes conexas de \mathcal{R}_u . \square

Teorema 2.1.2 *Cada UDR es un conjunto abierto.*

Demostración: Sea $x \in A$ una cesta únicamente demandada. Notemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_u(x) &= \{p \in \mathbb{R}^n : \{x\} = D_u(p)\} \\
&= \{p \in \mathbb{R}^n : u(x) - p \cdot x > u(a) - p \cdot a, \forall a \in A \setminus \{x\}\} \\
&= \bigcap_{a \in A \setminus \{x\}} \{p \in \mathbb{R}^n : u(x) - p \cdot x > u(a) - p \cdot a\} \\
&= \bigcap_{a \in A \setminus \{x\}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot (x - a) < u(x) - u(a)\}
\end{aligned}$$

Afirmación: Para cada $a \in A \setminus \{x\}$, el conjunto $\{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot (x - a) < u(x) - u(a)\}$ es abierto.

En efecto, para cada $a \in A \setminus \{x\}$, la función

$$\begin{aligned}
g_a : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\
p &\longmapsto g_a(p) := p \cdot (x - a)
\end{aligned}$$

es continua en \mathbb{R}^n . Como $] - \infty, u(x) - u(a)[$ es un conjunto abierto en \mathbb{R} , concluimos que $g_a^{-1}(] - \infty, u(x) - u(a)[)$ es abierto en \mathbb{R}^n . Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
\{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot (x - a) < u(x) - u(a)\} &= \{p \in \mathbb{R}^n : g_a(p) < u(x) - u(a)\} \\
&= \{p \in \mathbb{R}^n : g_a(p) \in] - \infty, u(x) - u(a)[\} \\
&= g_a^{-1}(] - \infty, u(x) - u(a)[)
\end{aligned}$$

entonces $\{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot (x - a) < u(x) - u(a)\}$ es abierto en \mathbb{R}^n . Por lo tanto, la afirmación es válida.

Luego, dado que la intersección finita de conjuntos abiertos es abierto, concluimos que $\mathcal{R}_u(x)$ es un conjunto abierto. \square

Corolario 2.1.1 *Cada UDR es un conjunto convexo n -dimensional.*

Demostración: Sea $x \in A$ una cesta únicamente demandada. Como $\mathcal{R}_u(x)$ es abierto, entonces $\text{aff}(\mathcal{R}_u(x)) = \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $\mathcal{R}_u(x)$ es n -dimensional. \square

Corolario 2.1.2 *\mathcal{R}_u es un conjunto abierto.*

Demostración: Sabemos que \mathcal{R}_u es la unión de las UDRs; y por el teorema 2.1.2, cada UDR es un conjunto abierto. Por lo tanto \mathcal{R}_u es la unión de conjuntos abiertos. Dado que la unión de conjuntos abiertos es abierto, concluimos que \mathcal{R}_u es abierto. \square

Teorema 2.1.3 *Sea $x \in A$ una cesta únicamente demandada, entonces*

$$x \in D_u(p), \forall p \in \text{Fr}(\mathcal{R}_u(x)).$$

Demostración: Sea $p \in \text{Fr}(\mathcal{R}_u(x))$ fijo y arbitrario, mostraremos que $x \in D_u(p)$. Sea $q \in \mathcal{R}_u(x)$ fijo. Como $\mathcal{R}_u(x)$ es convexo y abierto, entonces por el teorema C.2.4 obtenemos

$$p + \lambda(q - p) \in \mathcal{R}_u(x), \forall \lambda \in]0, 1]. \quad (2.4)$$

Además, dado que $\mathcal{R}_u(x)$ es abierto, tendremos que $\mathcal{R}_u(x) \cap \text{Fr}(\mathcal{R}_u(x)) = \emptyset$; por lo cual, $q \notin \text{Fr}(\mathcal{R}_u(x))$. Dado que $\text{Fr}(\mathcal{R}_u(x))$ es cerrado, concluimos que

$$d(q; \text{Fr}(\mathcal{R}_u(x))) > 0.$$

Por consiguiente, $\|q - p\| = d(q, p) > 0$. Luego, por la propiedad Arquimediana, existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{m_0} < \|q - p\|$. Definimos

$$q^m := p + \frac{1}{m + m_0 - 1}(q - p) \in \{p + \lambda(q - p) : \lambda \in]0, 1]\}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Entonces, por (2.4) concluimos que $q^m \in \mathcal{R}_u(x)$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Además,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(p + \frac{1}{m + m_0 - 1}(q - p) \right) = p.$$

Dado que $q^m \in \mathcal{R}_u(x)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\{x\} = D_u(q^m), \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

es decir,

$$u(x) - q^m \cdot x > u(a) - q^m \cdot a, \quad \forall a \in A \setminus \{x\}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [u(x) - q^m \cdot x] \geq \lim_{m \rightarrow \infty} [u(a) - q^m \cdot a], \quad \forall a \in A \setminus \{x\},$$

es decir,

$$u(x) - p \cdot x \geq u(a) - p \cdot a, \quad \forall a \in A \setminus \{x\}.$$

Por lo cual, $x \in D_u(p)$. Por lo tanto, $x \in D_u(p)$, $\forall p \in \text{Fr}(\mathcal{R}_u(x))$. \square

Observación 2.1.3 *De los teoremas 2.1.2 y 2.1.3 podemos concluir que: para cualquier vector de precios que se encuentra en la frontera de alguna UDR, $\mathcal{R}_u(x)$, el agente demanda más de una cesta de consumo, siendo x una de estas cestas demandadas.*

Ahora mostramos algunas propiedades del LIP de u . Algunas de estas propiedades se pueden obtener de manera directa ya que el LIP de u es una hipersuperficie tropical, pero preferimos demostrar estas propiedades usando las definiciones y teoremas dados hasta el momento en esta sección, junto con algunas nociones de topología.

Proposición 2.1.2 $\text{int}(\mathcal{L}_u) = \emptyset$.

Demostración: Para cada $p \in \mathcal{L}_u$, se cumple que $|D_u(p)| > 1$. Por consiguiente, existen $x^1, x^2, \dots, x^k \in A$, con $k \geq 2$, tal que $D_u(p) = \{x^1, x^2, \dots, x^k\}$. Por lo cual,

$$p \in \{q \in \mathbb{R}^n : u(x^1) - q \cdot x^1 = u(x^2) - q \cdot x^2\} = \{q \in \mathbb{R}^n : q \cdot (x^1 - x^2) = u(x^1) - u(x^2)\}.$$

Como $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ es finito, concluimos que \mathcal{L}_u esta contenido en una unión finita de hiperplanos de la forma $\{q \in \mathbb{R}^n : q \cdot (x - \hat{x}) = u(x) - u(\hat{x})\}$. Luego, dado que cada hiperplano tiene interior vacío, concluimos que $\text{int}(\mathcal{L}_u) = \emptyset$. \square

Corolario 2.1.3 $\text{Fr}(\mathcal{R}_u) = \mathcal{L}_u$.

Demostración:

(\subseteq):

Como \mathcal{R}_u es un conjunto abierto, entonces $\mathcal{R}_u \cap \text{Fr}(\mathcal{R}_u) = \emptyset$. Luego, dado que $\text{Fr}(\mathcal{R}_u) \neq \emptyset$ y por la observación 2.1.2, concluimos que $\text{Fr}(\mathcal{R}_u) \subseteq \mathcal{L}_u$.

(\supseteq):

Por el método de reducción al absurdo, supongamos que existe algún $p \in \mathcal{L}_u$ tal que $p \notin \text{Fr}(\mathcal{R}_u)$, entonces

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tal que } B_\epsilon(p) \cap \mathcal{R}_u = \emptyset \text{ ó } B_\epsilon(p) \cap \underbrace{(\mathcal{R}_u)^c}_{\mathcal{L}_u} = \emptyset.$$

Como $p \in \mathcal{L}_u$, entonces no se puede cumplir que $B_\epsilon(p) \cap \mathcal{L}_u = \emptyset$. Por consiguiente, se cumplirá que $B_\epsilon(p) \cap \mathcal{R}_u = \emptyset$; entonces, por la observación 2.1.2 obtenemos $B_\epsilon(p) \subseteq \mathcal{L}_u$. Por lo tanto, $p \in \text{int}(\mathcal{L}_u)$, lo cual es una contradicción con la proposición 2.1.2. Por lo cual, $\mathcal{L}_u \subseteq \text{Fr}(\mathcal{R}_u)$. \square

Corolario 2.1.4 *La unión de las fronteras de las UDRs coincide con el LIP; es decir,*

$$\bigcup_{x \in A_{UDR}} \text{Fr}(\mathcal{R}_u(x)) = \mathcal{L}_u,$$

donde A_{UDR} denota a la colección de todas las cestas únicamente demandadas.

Demostración:

(\subseteq):

Sea $p \in \bigcup_{x \in A_{UDR}} \text{Fr}(\mathcal{R}_u(x))$ fijo y arbitrario, entonces existe alguna cesta únicamente demandada $x \in A_{UDR}$, tal que $p \in \text{Fr}(\mathcal{R}_u(x))$. Como $\mathcal{R}_u(x)$ es abierto, entonces $\mathcal{R}_u(x) \cap \text{Fr}(\mathcal{R}_u(x)) = \emptyset$. Por lo cual, existe alguna otra cesta $\hat{x} \in A$ tal que $x, \hat{x} \in D_u(p)$. Por consiguiente, $p \in \mathcal{L}_u$. Dado que p era fijo y arbitrario, concluimos que $\bigcup_{x \in A_{UDR}} \text{Fr}(\mathcal{R}_u(x)) \subseteq \mathcal{L}_u$.

(\supseteq):

Por el corolario 2.1.3 y el ítem 1) de la proposición B.0.1 obtenemos

$$\mathcal{L}_u = \text{Fr}(\mathcal{R}_u) \subseteq \bigcup_{x \in A_{UDR}} \text{Fr}(\mathcal{R}_u(x)).$$

□

Corolario 2.1.5 \mathcal{R}_u es denso en \mathbb{R}^n .

Demostración: Sabemos que $\overline{\mathcal{R}_u} = \text{int}(\mathcal{R}_u) \cup \text{Fr}(\mathcal{R}_u)$. Por el corolario 2.1.2 y el corolario 2.1.3 obtenemos

$$\overline{\mathcal{R}_u} = \text{int}(\mathcal{R}_u) \cup \text{Fr}(\mathcal{R}_u) = \mathcal{R}_u \cup \mathcal{L}_u = \mathbb{R}^n;$$

es decir, \mathcal{R}_u es denso en \mathbb{R}^n .

□

Observación 2.1.4 Por el teorema 2.1.3 y el corolario 2.1.4 podemos concluir que para cada vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$, existe alguna cesta únicamente demandada $x \in A$ tal que $x \in D_u(p)$.

Teorema 2.1.4 Sea $x \in A$ una cesta demandada, pero no únicamente demandada, entonces existe alguna cesta únicamente demandada $\tilde{x} \in A$ tal que

$$C^x := \{q \in \mathbb{R}^n : x \in D_u(q)\} \subseteq \{p \in \mathbb{R}^n : \tilde{x} \in D_u(p)\}. \quad (2.5)$$

Demostración: Notemos que C^x es convexo y no vacío, entonces $\text{ri}(C^x) \neq \emptyset$. Sea $\hat{p} \in \text{ri}(C^x)$, entonces existe alguna cesta únicamente demandada $\tilde{x} \in A$ tal que $\tilde{x} \in D_u(\hat{p})$, es decir,

$$u(a) - \hat{p} \cdot a \leq u(\tilde{x}) - \hat{p} \cdot \tilde{x} = u(x) - \hat{p} \cdot x, \quad \forall a \in A \setminus \{x, \tilde{x}\}. \quad (2.6)$$

Ahora mostraremos que se cumple (2.5). En efecto, por el método de reducción al absurdo, supongamos que existe algún $p^* \in C^x$ tal que $p^* \notin \{p \in \mathbb{R}^n : \tilde{x} \in D_u(p)\}$, entonces

$$u(\tilde{x}) - p^* \cdot \tilde{x} < u(x) - p^* \cdot x. \quad (2.7)$$

Luego, dado que $\hat{p} \in \text{ri}(C^x)$, existe algún $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\hat{p}) \cap \text{aff}(C^x) \subseteq C^x$. Por otro lado,

$$p^* + \lambda(\hat{p} - p^*) \in \text{aff}(C^x), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

En particular,

$$p^0 := p^* + \left(1 + \frac{\epsilon}{1 + \|\hat{p} - p^*\|}\right) (\hat{p} - p^*) \in \text{aff}(C^x);$$

y además

$$\|p^0 - \hat{p}\| = \left\| \left(\frac{\epsilon}{1 + \|\hat{p} - p^*\|} \right) (\hat{p} - p^*) \right\| = \frac{\epsilon}{1 + \|\hat{p} - p^*\|} \|\hat{p} - p^*\| < \epsilon,$$

es decir, $p^0 \in B_\epsilon(\hat{p})$. De esta manera obtenemos que $p^0 \in B_\epsilon(\hat{p}) \cap \text{aff}(C^x) \subseteq C^x$, pero de (2.6) y (2.7) obtenemos

$$\begin{aligned} p^0 \cdot (x - \tilde{x}) &= \underbrace{\hat{p} \cdot (x - \tilde{x})}_{= u(x) - u(\tilde{x})} + \frac{\epsilon}{1 + \|\hat{p} - p^*\|} \underbrace{\hat{p} \cdot (x - \tilde{x})}_{= u(x) - u(\tilde{x})} - \frac{\epsilon}{1 + \|\hat{p} - p^*\|} \underbrace{p^* \cdot (x - \tilde{x})}_{< u(x) - u(\tilde{x})} \\ &> u(x) - u(\tilde{x}), \end{aligned}$$

es decir, $u(\tilde{x}) - p^0 \cdot \tilde{x} > u(x) - p^0 \cdot x$. En consecuencia, $p^0 \notin C^x$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $C^x \subseteq \{p \in \mathbb{R}^n : \tilde{x} \in D_u(p)\}$. \square

Observación 2.1.5 *Por el teorema 2.1.4, concluimos que si $x \in A$ es una cesta demandada pero no únicamente demandada, entonces existe alguna cesta únicamente demandada $\tilde{x} \in A$ tal que $C^x = \{q \in \mathbb{R}^n : x, \tilde{x} \in D_u(q)\}$.*

Antes de terminar esta sección, creemos que es conveniente dar un nombre específico a las cestas de consumo descritas en el teorema 2.1.4 y la observación 2.1.5. Por lo tanto, decimos que una cesta de consumo $x \in A$ es **marginalmente demandada** si x es una cesta demandada pero no únicamente demandada.

2.2. Ejemplos

A lo largo de esta sección, cuando consideremos economías en las que hay dos distintos tipos de bienes, denotaremos por $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ al vector de precios, donde p_1 es el precio por una unidad del bien 1 y p_2 es el precio por una unidad del bien 2. Mientras que cuando trabajemos con economías en las que hay tres distintos tipos de bienes, denotaremos por $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ al vector de precios, donde p_1 es el precio por una unidad del bien 1, p_2 es el precio por una unidad del bien 2 y p_3 es el precio por una unidad del bien 3.

Ejemplo 2.2.1 Consideremos una economía en la que hay dos distintos bienes indivisibles (es decir, $n = 2$) y un agente con una valoración $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, donde $A = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ y u está definida de la siguiente forma

$$u((0, 0)) = 0, u((1, 0)) = 5, u((0, 1)) = 4.$$

Entonces, el conjunto de demanda $D_u(p)$ del agente, está dado por

$$\begin{aligned} D_u(p) &= \arg \max_{a \in A} \{u(a) - p \cdot a\} \\ &= \arg \max_{a \in A} \left\{ \underbrace{u((0, 0)) - p \cdot (0, 0)}_0, \underbrace{u((1, 0)) - p \cdot (1, 0)}_{5-p_1}, \underbrace{u((0, 1)) - p \cdot (0, 1)}_{4-p_2} \right\}. \end{aligned}$$

Regiones de demanda única (UDRs):

Notemos que

$$D_u(p) = \{(0, 0)\} \iff 5 - p_1 < 0, 4 - p_2 < 0 \iff \mathbf{5 < p_1, 4 < p_2}.$$

$$D_u(p) = \{(1, 0)\} \iff 0 < 5 - p_1, 4 - p_2 < 5 - p_1 \iff \mathbf{p_1 < 5, p_1 < p_2 + 1}.$$

$$D_u(p) = \{(0, 1)\} \iff 0 < 4 - p_2, 5 - p_1 < 4 - p_2 \iff \mathbf{p_2 < 4, p_2 + 1 < p_1}.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{R}_u((0, 0)) = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 5 < p_1, 4 < p_2\}.$$

$$\mathcal{R}_u((1, 0)) = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 < 5, p_1 < p_2 + 1\}.$$

$$\mathcal{R}_u((0, 1)) = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 < 4, p_2 + 1 < p_1\}.$$

La representación gráfica de estas UDRs es:

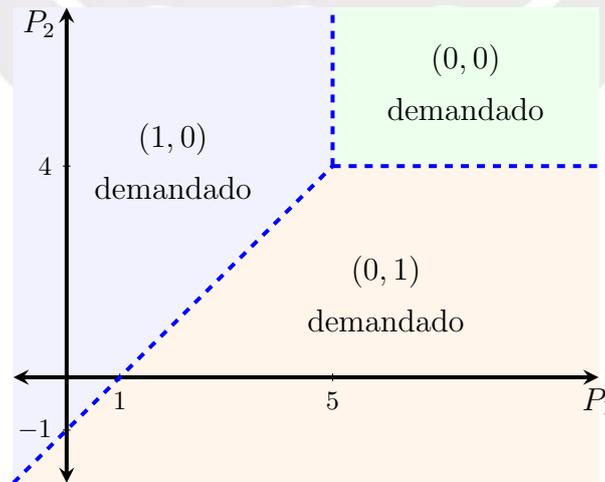


Figura 2.1: Regiones de demanda única de la valoración u del ejemplo 2.2.1

El conjunto de precios de indiferencia (LIP):

De la figura 2.1 y por la observación 2.1.2, el LIP de u es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u = \{ & (5, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 4 < p_2 \} \cup \{ (p_1, 4) \in \mathbb{R}^2 : 5 < p_1 \} \\ & \cup \{ (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = p_2 + 1, p_2 < 4 \} \cup \{ (5, 4) \}. \end{aligned}$$

La representación gráfica de esta LIP es:

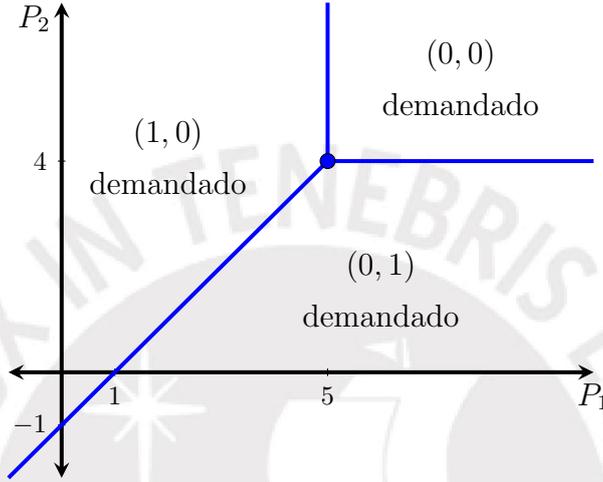


Figura 2.2: LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.1

El LIP de u también puede ser hallado de manera analítica (es decir, sin usar el gráfico de las UDRs de u). Notamos que

- $D_u((p_1, p_2)) = \{(0, 0), (1, 0)\} \iff 0 = 5 - p_1, 4 - p_2 < 0 \iff p_1 = 5, 4 < p_2.$
- $D_u((p_1, p_2)) = \{(0, 0), (0, 1)\} \iff 0 = 4 - p_2, 5 - p_1 < 0 \iff p_2 = 4, 5 < p_1.$
- $D_u((p_1, p_2)) = \{(1, 0), (0, 1)\} \iff 5 - p_1 = 4 - p_2, 0 < 4 - p_2.$
 $\iff p_2 + 1 = p_1, p_2 < 4.$
- $D_u((p_1, p_2)) = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \iff 0 = 5 - p_1 = 4 - p_2$
 $\iff p_1 = 5, p_2 = 4.$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u = \{ & (5, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 4 < p_2 \} \cup \{ (p_1, 4) \in \mathbb{R}^2 : 5 < p_1 \} \\ & \cup \{ (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = p_2 + 1, p_2 < 4 \} \cup \{ (5, 4) \}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.2 Consideremos una economía en la que hay dos distintos bienes indivisibles (es decir, $n = 2$) y un agente con una valoración $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, donde $A = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (0, 2)\}$ y u está definida de la siguiente forma

$$u((0, 0)) = 0, \quad u((1, 0)) = 6, \quad u((0, 1)) = 1, \quad u((0, 2)) = 6.$$

Entonces, el conjunto de demanda $D_u(p)$ del agente, está dado por

$$\begin{aligned} D_u(p) &= \arg \max_{a \in A} \{u(a) - p \cdot a\} \\ &= \arg \max_{a \in A} \left\{ \underbrace{u((0, 0)) - p \cdot (0, 0)}_0, \underbrace{u((1, 0)) - p \cdot (1, 0)}_{6-p_1}, \underbrace{u((0, 1)) - p \cdot (0, 1)}_{1-p_2}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{u((0, 2)) - p \cdot (0, 2)}_{6-2p_2} \right\}. \end{aligned}$$

Regiones de demanda única (UDRs):

Notemos que

- $D_u(p) = \{(0, 0)\} \iff 6 - p_1 < 0, 1 - p_2 < 0, 6 - 2p_2 < 0.$
 $\iff 6 < p_1, 1 < p_2, 3 < p_2.$
 $\iff 6 < p_1, 3 < p_2.$
- $D_u(p) = \{(1, 0)\} \iff 0 < 6 - p_1, 1 - p_2 < 6 - p_1, 6 - 2p_2 < 6 - p_1.$
 $\iff p_1 < 6, p_1 < p_2 + 5, p_1 < 2p_2.$
 $\iff \mathbf{p_1 < 6, p_1 < 2p_2.}$
- $D_u(p) = \{(0, 1)\} \iff 0 < 1 - p_2, 6 - p_1 < 1 - p_2, 6 - 2p_2 < 1 - p_2.$
 $\iff p_2 < 1, p_2 + 5 < p_1, 5 < p_2.$
 $\iff p_2 + 5 < p_1, \mathbf{5 < p_2 < 1.}$

Como podemos ver, llegamos a la contradicción $5 < p_2 < 1$. Por lo tanto, la cesta $(0, 1)$ no puede ser únicamente demandada por el agente a cualquier vector de precios $p = (p_1, p_2)$.

- $D_u(p) = \{(0, 2)\} \iff 0 < 6 - 2p_2, 6 - p_1 < 6 - 2p_2, 1 - p_2 < 6 - 2p_2.$
 $\iff p_2 < 3, 2p_2 < p_1, p_2 < 5.$
 $\iff \mathbf{p_2 < 3, 2p_2 < p_1.}$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_u((0, 0)) &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 6 < p_1, 3 < p_2\}. \\ \mathcal{R}_u((1, 0)) &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 < 6, p_1 < 2p_2\}. \\ \mathcal{R}_u((0, 2)) &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 < 3, 2p_2 < p_1\}. \end{aligned}$$

La representación gráfica de estas UDRs es:

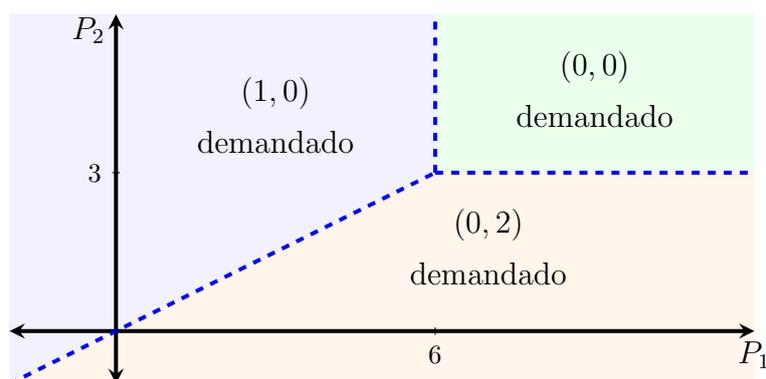


Figura 2.3: Regiones de demanda única de la valoración u del ejemplo 2.2.2

El conjunto de precios de indiferencia (LIP):

De la figura 2.3 y por la observación 2.1.2, el LIP de u es

$$\mathcal{L}_u = \{(6, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 3 < p_2\} \cup \{(p_1, 3) \in \mathbb{R}^2 : 6 < p_1\} \\ \cup \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = 2p_2, p_2 < 3\} \cup \{(6, 3)\}.$$

La representación gráfica de esta LIP es:

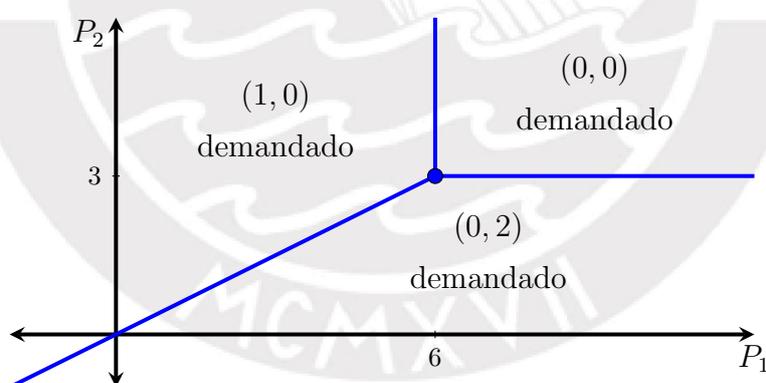


Figura 2.4: LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.2

El LIP de u también puede ser hallado de manera analítica (es decir, sin usar el gráfico de las UDRs de u). Primero analicemos si la cesta de consumo $(0, 1)$ es o no demandada. Sabemos que la cesta $(0, 1)$ no es únicamente demandada, pero ¿existe

algún vector de precios $p = (p_1, p_2)$ tal que $(0, 1) \in D_u(p)$? Notemos que

$$\begin{aligned} (0, 1) \in D_u((p_1, p_2)) &\iff 0 \leq 1 - p_2; 6 - p_1 \leq 1 - p_2; 6 - 2p_2 \leq 1 - p_2. \\ &\iff p_2 \leq 1; p_2 + 5 \leq p_1; 5 \leq p_2. \\ &\iff \mathbf{5 \leq p_2 \leq 1}; p_2 + 5 \leq p_1. \end{aligned}$$

Como podemos ver, llegamos a la contradicción $5 \leq p_2 \leq 1$. Por lo tanto, no existe algún vector de precios $p = (p_1, p_2)$ para el cual la cesta $(0, 1)$ sea demandada. Por otro lado, observamos que

- $D_u((p_1, p_2)) = \{(0, 0), (1, 0)\} \iff 0 = 6 - p_1, 1 - p_2 < 0, 6 - 2p_2 < 0.$
 $\iff p_1 = 6, 1 < p_2, 3 < p_2.$
 $\iff p_1 = 6, 3 < p_2.$
- $D_u((p_1, p_2)) = \{(0, 0), (0, 2)\} \iff 0 = 6 - 2p_2, 6 - p_1 < 0, 1 - p_2 < 0.$
 $\iff p_2 = 3, 6 < p_1, 1 < p_2.$
 $\iff 6 < p_1, p_2 = 3.$
- $D_u((p_1, p_2)) = \{(1, 0), (0, 2)\} \iff 6 - p_1 = 6 - 2p_2, 0 < 6 - 2p_2,$
 $1 - p_2 < 6 - 2p_2.$
 $\iff p_1 = 2p_2, p_2 < 3, p_2 < 5.$
 $\iff p_1 = 2p_2, p_2 < 3.$
- $D_u((p_1, p_2)) = \{(0, 0), (1, 0), (0, 2)\} \iff 0 = 6 - p_1 = 6 - 2p_2, 1 - p_2 < 6 - 2p_2$
 $\iff p_1 = 6, p_2 = 3, p_2 < 5.$
 $\iff p_1 = 6, p_2 = 3.$

Por lo tanto, el LIP de u es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u = \{ &(6, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 3 < p_2 \} \cup \{ (p_1, 3) \in \mathbb{R}^2 : 6 < p_1 \} \\ &\cup \{ (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = 2p_2, p_2 < 3 \} \cup \{ (6, 3) \}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.3 Consideremos una economía en la que hay dos distintos bienes indivisibles (es decir, $n = 2$) y un agente con una valoración $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, donde $A = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ y u está definida de la siguiente forma

| x_1 | | | $u(\mathbf{x})$ | x_2 |
|-------|----|---|-----------------|-------|
| 2 | 1 | 0 | | |
| 8 | 4 | 0 | 0 | |
| 10 | 8 | 8 | 1 | |
| 11 | 11 | 8 | 2 | |

Entonces, el conjunto de demanda $D_u(p)$ del agente, está dado por

$$\begin{aligned}
D_u(p) &= \arg \max_{(x_1, x_2) \in A} \{u((x_1, x_2)) - (p_1, p_2) \cdot (x_1, x_2)\} \\
&= \arg \max_{(x_1, x_2) \in A} \left\{ \underbrace{u((0, 0)) - p \cdot (0, 0)}_0, \underbrace{u((1, 0)) - p \cdot (1, 0)}_{4-p_1}, \underbrace{u((2, 0)) - p \cdot (2, 0)}_{8-2p_1}, \right. \\
&\quad \left. \underbrace{u((0, 1)) - p \cdot (0, 1)}_{8-p_2}, \underbrace{u((1, 1)) - p \cdot (1, 1)}_{8-p_1-p_2}, \underbrace{u((2, 1)) - p \cdot (2, 1)}_{10-2p_1-p_2}, \right. \\
&\quad \left. \underbrace{u((0, 2)) - p \cdot (0, 2)}_{10-2p_2}, \underbrace{u((1, 2)) - p \cdot (1, 2)}_{11-p_1-2p_2}, \underbrace{u((2, 2)) - p \cdot (2, 2)}_{11-2p_1-2p_2} \right\}.
\end{aligned}$$

Regiones de demanda única (UDRs):

Notemos que

- $D_u(p) = \{(0, 0)\} \iff 4 - p_1 < 0, 8 - 2p_1 < 0, 8 - p_2 < 0, 8 - p_1 - p_2 < 0,$
 $10 - 2p_1 - p_2 < 0, 10 - 2p_2 < 0,$
 $11 - p_1 - 2p_2 < 0, 11 - 2p_1 - 2p_2 < 0.$
 $\iff 4 < p_1, 4 < p_1, 8 < p_2, 8 < p_1 + p_2, 10 < 2p_1 + p_2,$
 $5 < p_2, 11 < p_1 + 2p_2, 11 < 2p_1 + 2p_2.$
 $\iff \mathbf{4 < p_1, 8 < p_2}.$
- $D_u(p) = \{(1, 0)\} \iff 0 < 4 - p_1, 8 - 2p_1 < 4 - p_1, 8 - p_2 < 4 - p_1,$
 $8 - p_1 - p_2 < 4 - p_1, 10 - 2p_1 - p_2 < 4 - p_1,$
 $10 - 2p_2 < 4 - p_1, 11 - p_1 - 2p_2 < 4 - p_1,$
 $11 - 2p_1 - 2p_2 < 4 - p_1.$
 $\iff p_1 < 4, 4 < p_1, 4 < p_2 - p_1, 4 < p_2, 6 < p_1 + p_2,$
 $6 < 2p_2 - p_1, 7/2 < p_2, 7 < p_1 + 2p_2.$
 $\iff \mathbf{4 < p_1 < 4}, 4 < p_2 - p_1, 4 < p_2, 6 < p_1 + p_2,$
 $6 < 2p_2 - p_1, 7 < p_1 + 2p_2.$

Como podemos ver, llegamos a la contradicción $4 < p_1 < 4$. Por lo tanto, la cesta $(1, 0)$ no puede ser únicamente demandada por el agente a cualquier vector de precios $p = (p_1, p_2)$.

- $D_u(p) = \{(2, 0)\} \iff 0 < 8 - 2p_1, 4 - p_1 < 8 - 2p_1, 8 - p_2 < 8 - 2p_1,$
 $8 - p_1 - p_2 < 8 - 2p_1, 10 - 2p_1 - p_2 < 8 - 2p_1,$
 $10 - 2p_2 < 8 - 2p_1, 11 - p_1 - 2p_2 < 8 - 2p_1,$
 $11 - 2p_1 - 2p_2 < 8 - 2p_1.$
 $\iff p_1 < 4, p_1 < 4, 2p_1 < p_2, p_1 < p_2, 2 < p_2,$

$$1 + p_1 < p_2, 3 + p_1 < 2p_2, 3/2 < p_2.$$

$$\iff \mathbf{p_1 < 4, 2 < p_2, 2p_1 < p_2.}$$

- $D_u(p) = \{(0, 1)\} \iff 0 < 8 - p_2, 4 - p_1 < 8 - p_2, 8 - 2p_1 < 8 - p_2,$
 $8 - p_1 - p_2 < 8 - p_2, 10 - 2p_1 - p_2 < 8 - p_2,$
 $10 - 2p_2 < 8 - p_2, 11 - p_1 - 2p_2 < 8 - p_2,$
 $11 - 2p_1 - 2p_2 < 8 - p_2.$
 $\iff p_2 < 8, p_2 < 4 + p_1, p_2 < 2p_1, 0 < p_1, 1 < p_1, 2 < p_2,$
 $3 < p_1 + p_2, 3 < 2p_1 + p_2.$
 $\iff \mathbf{1 < p_1, 2 < p_2 < 8, p_2 < 2p_1.}$

- $D_u(p) = \{(1, 1)\} \iff 0 < 8 - p_1 - p_2, 4 - p_1 < 8 - p_1 - p_2, 8 - 2p_1 < 8 - p_1 - p_2,$
 $8 - p_2 < 8 - p_1 - p_2, 10 - 2p_1 - p_2 < 8 - p_1 - p_2,$
 $10 - 2p_2 < 8 - p_1 - p_2, 11 - p_1 - 2p_2 < 8 - p_1 - p_2,$
 $11 - 2p_1 - 2p_2 < 8 - p_1 - p_2.$
 $\iff p_1 + p_2 < 8, p_2 < 4, p_2 < p_1, p_1 < 0, 2 < p_1,$
 $2 + p_1 < p_2, 3 < p_2, 3 < p_1 + p_2.$
 $\iff \mathbf{2 < p_1 < 0, 3 < p_2 < 4, p_2 < p_1, 3 < p_1 + p_2 < 8,}$
 $2 + p_1 < p_2.$

Como podemos ver, llegamos a la contradicción $2 < p_1 < 0$. Por lo tanto, la cesta $(1, 1)$ no puede ser únicamente demandada por el agente a cualquier vector de precios $p = (p_1, p_2)$.

- $D_u(p) = \{(2, 1)\} \iff 0 < 10 - 2p_1 - p_2, 4 - p_1 < 10 - 2p_1 - p_2,$
 $8 - 2p_1 < 10 - 2p_1 - p_2, 8 - p_2 < 10 - 2p_1 - p_2,$
 $8 - p_1 - p_2 < 10 - 2p_1 - p_2, 10 - 2p_2 < 10 - 2p_1 - p_2,$
 $11 - p_1 - 2p_2 < 10 - 2p_1 - p_2,$
 $11 - 2p_1 - 2p_2 < 10 - 2p_1 - p_2.$
 $\iff 2p_1 + p_2 < 10, p_1 + p_2 < 6, p_2 < 2, p_1 < 1, p_1 < 2,$
 $2p_1 < p_2, 1 + p_1 < p_2, 1 < p_2.$
 $\iff \mathbf{p_1 < 1, 1 < p_2 < 2, 1 + p_1 < p_2.}$

- $D_u(p) = \{(0, 2)\} \iff 0 < 10 - 2p_2, 4 - p_1 < 10 - 2p_2, 8 - 2p_1 < 10 - 2p_2,$
 $8 - p_2 < 10 - 2p_2, 8 - p_1 - p_2 < 10 - 2p_2,$
 $10 - 2p_1 - p_2 < 10 - 2p_2, 11 - p_1 - 2p_2 < 10 - 2p_2,$
 $11 - 2p_1 - 2p_2 < 10 - 2p_2.$
 $\iff p_2 < 5, 2p_2 < 6 + p_1, p_2 < 1 + p_1, p_2 < 2, p_2 < 2 + p_1,$

$$p_2 < 2p_1, 1 < p_1, 1/2 < p_1.$$

$$\iff \mathbf{1 < p_1, p_2 < 2.}$$

- $D_u(p) = \{(1, 2)\} \iff 0 < 11 - p_1 - 2p_2, 4 - p_1 < 11 - p_1 - 2p_2,$
 $8 - 2p_1 < 11 - p_1 - 2p_2, 8 - p_2 < 11 - p_1 - 2p_2,$
 $8 - p_1 - p_2 < 11 - p_1 - 2p_2, 10 - 2p_1 - p_2 < 11 - p_1 - 2p_2,$
 $10 - 2p_2 < 11 - p_1 - 2p_2,$
 $11 - 2p_1 - 2p_2 < 11 - p_1 - 2p_2.$
 $\iff p_1 + 2p_2 < 11, p_2 < 7/2, 2p_2 < 3 + p_1,$
 $p_1 + p_2 < 3, p_2 < 3, p_2 < 1 + p_1, p_1 < 1, 0 < p_1.$
 $\iff \mathbf{0 < p_1 < 1, p_2 < 1 + p_1.}$

- $D_u(p) = \{(2, 2)\} \iff 0 < 11 - 2p_1 - 2p_2, 4 - p_1 < 11 - 2p_1 - 2p_2,$
 $8 - 2p_1 < 11 - 2p_1 - 2p_2, 8 - p_2 < 11 - 2p_1 - 2p_2,$
 $8 - p_1 - p_2 < 11 - 2p_1 - 2p_2, 10 - 2p_1 - p_2 < 11 - 2p_1 - 2p_2,$
 $10 - 2p_2 < 11 - 2p_1 - 2p_2,$
 $11 - p_1 - 2p_2 < 11 - 2p_1 - 2p_2.$
 $\iff p_1 + p_2 < 11/2, p_1 + 2p_2 < 7, p_2 < 3/2,$
 $2p_1 + p_2 < 3, p_1 + p_2 < 3, p_2 < 1, p_1 < 1/2, p_1 < 0.$
 $\iff \mathbf{p_1 < 0, p_2 < 1.}$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_u((0, 0)) &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 4 < p_1, 8 < p_2\}. \\ \mathcal{R}_u((2, 0)) &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 < 4, 2 < p_2, 2p_1 < p_2\}. \\ \mathcal{R}_u((0, 1)) &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < p_1, 2 < p_2 < 8, p_2 < 2p_1\}. \\ \mathcal{R}_u((2, 1)) &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 < 1, 1 < p_2 < 2, 1 + p_1 < p_2\}. \\ \mathcal{R}_u((0, 2)) &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < p_1, p_2 < 2\}. \\ \mathcal{R}_u((1, 2)) &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < p_1 < 1, p_2 < 1 + p_1\}. \\ \mathcal{R}_u((2, 2)) &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 < 0, p_2 < 1\}. \end{aligned}$$

La representación gráfica de estas UDRs es:

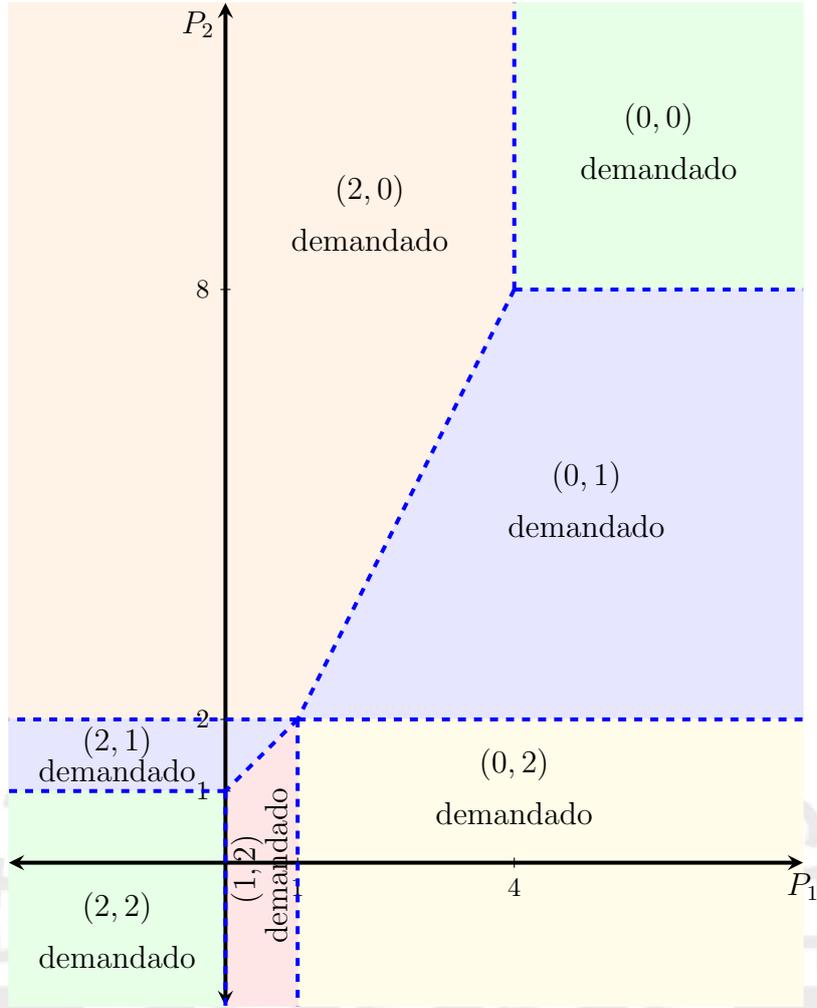


Figura 2.5: Regiones de demanda única de la valoración u del ejemplo 2.2.3

El conjunto de precios de indiferencia (LIP):

De la figura 2.5 y por la observación 2.1.2, el LIP de u es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_u = & \{(4, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 8 < p_2\} \cup \{(p_1, 8) \in \mathbb{R}^2 : 4 < p_1\} \\
 & \cup \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 = 2p_1, 1 < p_1 < 4\} \cup \{(p_1, 2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 < 1\} \\
 & \cup \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 = p_1 + 1, 0 < p_1 < 1\} \cup \{(1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 < 2\} \\
 & \cup \{(p_1, 2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < p_1\} \cup \{(p_1, 1) \in \mathbb{R}^2 : p_1 < 0\} \\
 & \cup \{(0, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 < 1\} \cup \{(0, 1)\} \cup \{(1, 2)\} \cup \{(4, 8)\}.
 \end{aligned}$$

La representación gráfica de esta LIP es:

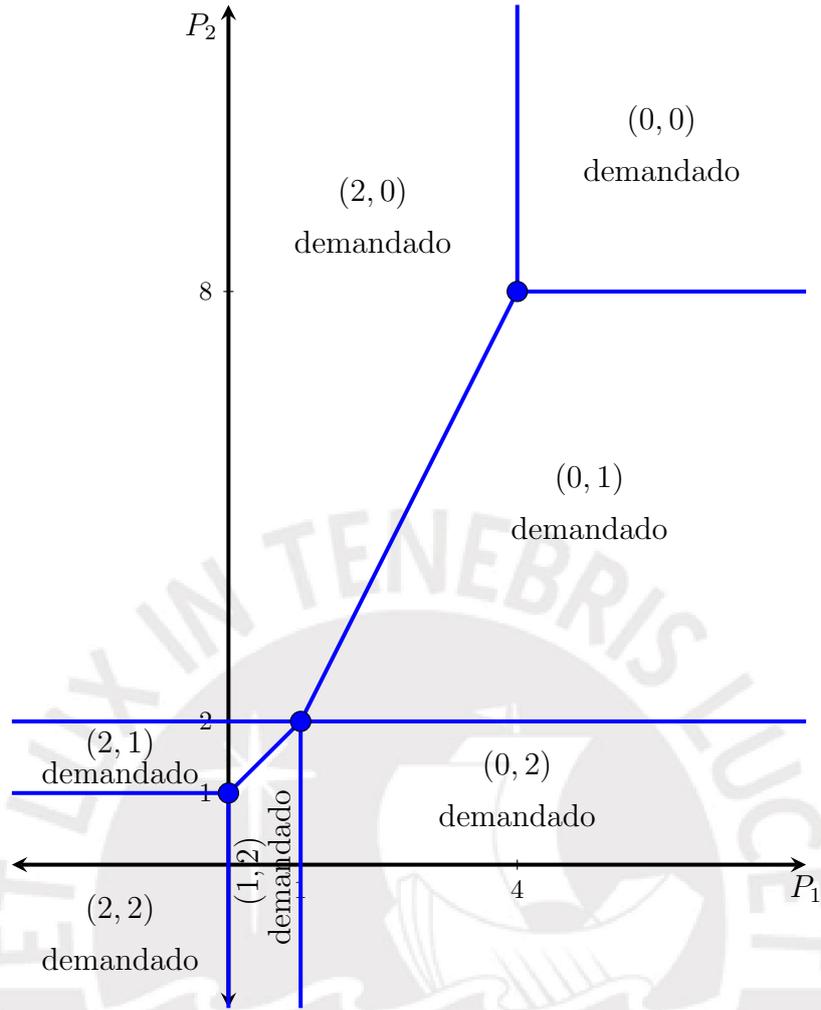


Figura 2.6: LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.3

Ejemplo 2.2.4 Consideremos una economía en la que hay tres distintos bienes indivisibles (es decir, $n = 3$) y un agente con una valoración $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, donde $A = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y u está definida de la siguiente forma

$$u((0, 0, 0)) = 0, \quad u((1, 0, 0)) = u((0, 1, 0)) = u((0, 0, 1)) = 1$$

Entonces, el conjunto de demanda $D_u(p)$ del agente, está dado por

$$\begin{aligned} D_u(p) &= \arg \max_{a \in A} \{u(a) - p \cdot a\} \\ &= \arg \max_{a \in A} \left\{ \underbrace{u((0, 0, 0)) - p \cdot (0, 0, 0)}_0, \underbrace{u((1, 0, 0)) - p \cdot (1, 0, 0)}_{1-p_1}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{u((0, 1, 0)) - p \cdot (0, 1, 0)}_{1-p_2}, \underbrace{u((0, 0, 1)) - p \cdot (0, 0, 1)}_{1-p_3} \right\}. \end{aligned}$$

Regiones de demanda única (UDRs):

Notemos que

- $D_u(p) = \{(0, 0, 0)\} \iff 1 - p_1 < 0, 1 - p_2 < 0, 1 - p_3 < 0.$
 $\iff 1 < p_1, 1 < p_2, 1 < p_3.$

La representación gráfica de esta UDR es:

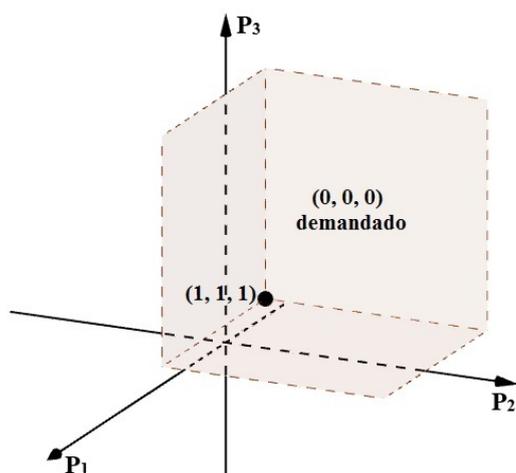


Figura 2.7: UDR de la valoración u del ejemplo 2.2.4.

- $D_u(p) = \{(1, 0, 0)\} \iff 0 < 1 - p_1, 1 - p_2 < 1 - p_1, 1 - p_3 < 1 - p_1.$
 $\iff p_1 < 1, p_1 < p_2, p_1 < p_3.$

La representación gráfica de esta UDR es:

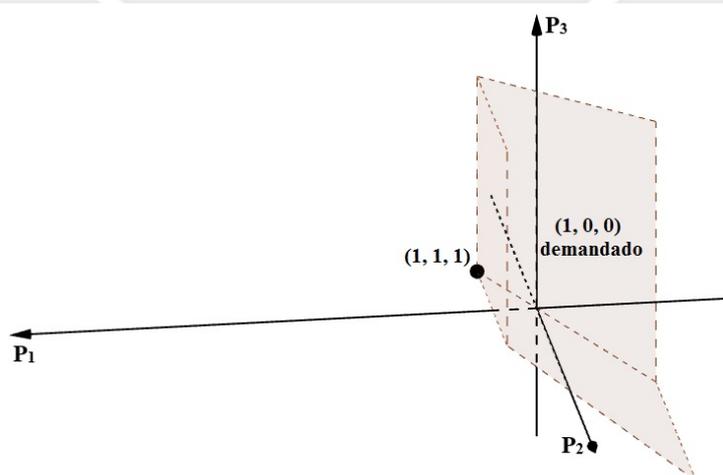


Figura 2.8: UDR de la valoración u del ejemplo 2.2.4.

- $D_u(p) = \{(0, 1, 0)\} \iff 0 < 1 - p_2, 1 - p_1 < 1 - p_2, 1 - p_3 < 1 - p_2.$
 $\iff p_2 < 1, p_2 < p_1, p_2 < p_3.$

La representación gráfica de esta UDR es:

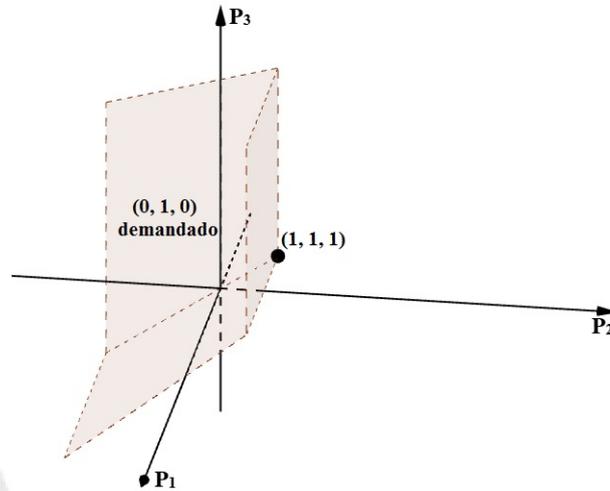


Figura 2.9: UDR de la valoración u del ejemplo 2.2.4.

- $D_u(p) = \{(0, 0, 1)\} \iff 0 < 1 - p_3, 1 - p_1 < 1 - p_3, 1 - p_2 < 1 - p_3.$
 $\iff p_3 < 1, p_3 < p_1, p_3 < p_2.$

La representación gráfica de esta UDR es:

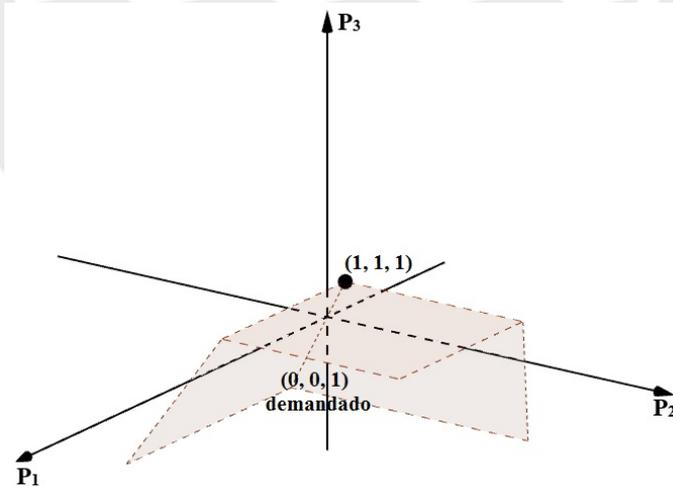


Figura 2.10: UDR de la valoración u del ejemplo 2.2.4.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_u((0,0,0)) &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 < p_1, 1 < p_2, 1 < p_3\}. \\ \mathcal{R}_u((1,0,0)) &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : p_1 < 1, p_1 < p_2, p_1 < p_3\}. \\ \mathcal{R}_u((0,1,0)) &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : p_2 < 1, p_2 < p_1, p_2 < p_3\}. \\ \mathcal{R}_u((0,0,1)) &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : p_3 < 1, p_3 < p_1, p_3 < p_2\}.\end{aligned}$$

El conjunto de precios de indiferencia (LIP):

De las figuras 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 y por la observación 2.1.2, el LIP de u es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u &= \{(1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 < p_2, 1 < p_3\} \cup \{(p_1, 1, p_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 < p_1, 1 < p_3\} \\ &\cup \{(p_1, p_2, 1) \in \mathbb{R}^3 : 1 < p_1, 1 < p_2\} \cup \{(1, 1, 1)\} \\ &\cup \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : p_1 = p_2, p_1 < 1, p_1 < p_3\} \\ &\cup \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : p_1 = p_3, p_3 < 1, p_1 < p_2\} \\ &\cup \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : p_2 = p_3, p_2 < 1, p_2 < p_1\} \\ &\cup \{(p_1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 : 1 < p_1\} \cup \{(1, p_2, 1) \in \mathbb{R}^3 : 1 < p_2\} \\ &\cup \{(1, 1, p_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 < p_3\} \cup \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : p_1 = p_2 = p_3, p_1 < 1\}.\end{aligned}$$

La representación gráfica de esta LIP es:

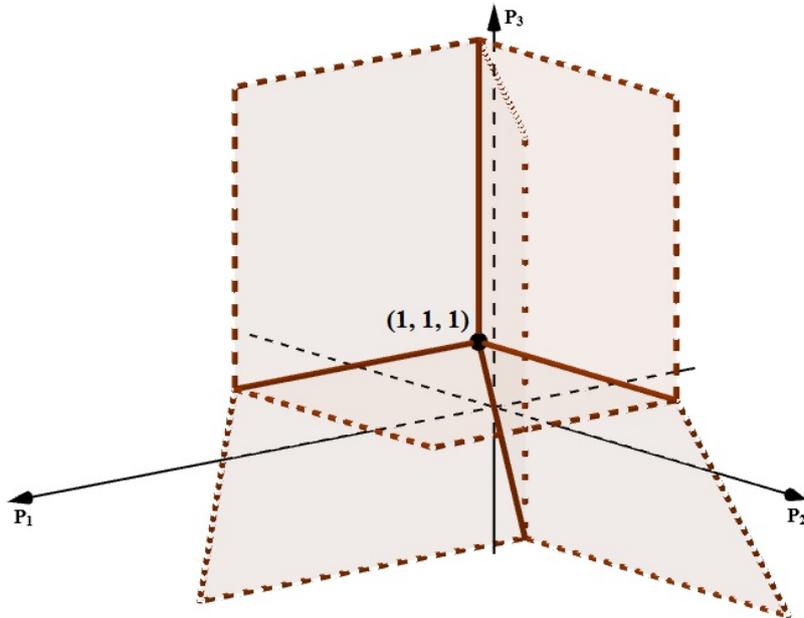


Figura 2.11: LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.4.

2.3. El Complejo de precios

Para poder hacer uso de la proposición 1.3.3 y desarrollar el teorema de equivalencia valoración-complejo, necesitamos entender como la valoración u define un complejo poliedral racional, al cual llamaremos “complejo de precios” de u .

Definición 2.3.1 Una **celda de precios** de u es todo conjunto no vacío $C \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que existen $x^1, \dots, x^k \in A$, con $k \geq 1$, que satisfacen

$$C = \{p \in \mathbb{R}^n : x^1, \dots, x^k \in D_u(p)\}.$$

Definición 2.3.2 El **complejo de precios** de u (denotado por $\text{pc}(u)$) es el conjunto de todas las celdas de precios de u .

En adelante, algunas veces las celdas de precios de u serán llamadas **celdas del complejo de precios** de u .

Ejemplo 2.3.1 Las celdas del complejo de precios de la valoración $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ del ejemplo 2.2.1 están dadas por

i) $C_1 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0) \in D_u((p_1, p_2))\}$. Notemos que

$$(0, 0) \in D_u((p_1, p_2)) \iff 5 - p_1 \leq 0; 4 - p_2 \leq 0 \iff 5 \leq p_1; 4 \leq p_2.$$

Por lo tanto, $C_1 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 5 \leq p_1, 4 \leq p_2\}$.

ii) $C_2 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (1, 0) \in D_u((p_1, p_2))\}$. Notemos que

$$(1, 0) \in D_u((p_1, p_2)) \iff 0 \leq 5 - p_1; 4 - p_2 \leq 5 - p_1 \iff p_1 \leq 5; p_1 \leq p_2 + 1.$$

Por lo tanto, $C_2 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 \leq 5; p_1 \leq p_2 + 1\}$.

iii) $C_3 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 1) \in D_u((p_1, p_2))\}$. Notemos que

$$(0, 1) \in D_u((p_1, p_2)) \iff 0 \leq 4 - p_2; 5 - p_1 \leq 4 - p_2 \iff p_2 \leq 4; p_2 + 1 \leq p_1.$$

Por lo tanto, $C_3 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 \leq 4; p_2 + 1 \leq p_1\}$.

iv) $C_4 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (1, 0) \in D_u((p_1, p_2))\}$. Notemos que

$$(0, 0), (1, 0) \in D_u((p_1, p_2)) \iff 0 = 5 - p_1; 4 - p_2 \leq 0 \iff p_1 = 5; 4 \leq p_2.$$

Por lo tanto, $C_4 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = 5; 4 \leq p_2\}$.

v) $C_5 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (0, 1) \in D_u((p_1, p_2))\}$. Notemos que

$$(0, 0), (0, 1) \in D_u((p_1, p_2)) \iff 0 = 4 - p_2; 5 - p_1 \leq 0 \iff p_2 = 4; 5 \leq p_1.$$

Por lo tanto, $C_5 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 = 4; 5 \leq p_1\}$.

vi) $C_6 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (1, 0), (0, 1) \in D_u((p_1, p_2))\}$. Notemos que

$$\begin{aligned} (1, 0), (0, 1) \in D_u((p_1, p_2)) &\iff 5 - p_1 = 4 - p_2; 0 \leq 4 - p_2 \\ &\iff p_2 + 1 = p_1; p_2 \leq 4. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $C_6 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 + 1 = p_1; p_2 \leq 4\}$.

vii) $C_7 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (1, 0), (0, 1) \in D_u((p_1, p_2))\}$. Notemos que

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1) \in D_u((p_1, p_2)) \iff 0 = 5 - p_1 = 4 - p_2 \iff p_1 = 5; p_2 = 4.$$

Por lo tanto, $C_7 = \{(5, 4)\}$.

Note que todas estas celdas del complejo de precios de u pudieron ser halladas de manera inmediata a partir de todo lo expuesto en el ejemplo 2.2.1.

Ejemplo 2.3.2 Para la valoración $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ del ejemplo 2.2.2 vimos que la cesta $(0, 1)$ es nunca demandada. Luego, de manera análoga al ejemplo 2.3.1, concluimos que las celdas del complejo de precios de la valoración $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ del ejemplo 2.2.2 están dadas por

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 6 \leq p_1; 3 \leq p_2\}. \\ C_2 &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (1, 0) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 \leq 6; p_1 \leq 2p_2\}. \\ C_3 &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 2) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 \leq 3; 2p_2 \leq p_1\}. \\ C_4 &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (1, 0) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = 6; 3 \leq p_2\}. \\ C_5 &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (0, 2) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 6 \leq p_1; p_2 = 3\}. \\ C_6 &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (1, 0), (0, 2) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = 2p_2; p_2 \leq 3\}. \\ C_7 &= \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (1, 0), (0, 2) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(6, 3)\}. \end{aligned}$$

Más adelante mostraremos que toda celda del complejo de precios es un conjunto convexo. De esta manera, decimos que C es una k -celda del complejo de precios, si C es una celda del complejo de precios tal que $\dim(\text{aff}(C)) = k$, es decir, C es k -dimensional. Además, dado que $C \subseteq \mathbb{R}^n$, se cumple que $k \leq n$.

Proposición 2.3.1 Si $x \in A$ es una cesta únicamente demandada a algún vector de precios, entonces $C = \{p \in \mathbb{R}^n : x \in D_u(p)\}$ es una n -celda del complejo de precios.

Demostración: Por el corolario 2.1.1, tenemos que

$$\mathcal{R}_u(x) = \{q \in \mathbb{R}^n : \{x\} = D_u(q)\} \text{ es } n\text{-dimensional.}$$

Luego, dado que $\mathcal{R}_u(x) = \{q \in \mathbb{R}^n : \{x\} = D_u(q)\} \subset \{p \in \mathbb{R}^n : x \in D_u(p)\}$; concluimos que $C = \{p \in \mathbb{R}^n : x \in D_u(p)\}$ es n -dimensional. Por lo tanto, C es una n -celda del complejo de precios de u . \square

Teorema 2.3.1 *El complejo de precios de u es un complejo poliedral racional n -dimensional.*

Demostración: Sea $C \neq \emptyset$ una celda del complejo de precios de u , entonces existen $x^1, x^2, \dots, x^k \in A$, con $k \geq 1$, tal que $C = \{p \in \mathbb{R}^n : x^1, \dots, x^k \in D_u(p)\}$. Por lo cual,

$$\begin{aligned} C = \{p \in \mathbb{R}^n : & u(x^l) - p \cdot x^l = u(x^i) - p \cdot x^i, \forall l, i = 1, 2, \dots, k; \\ & u(a) - p \cdot a \leq u(x^i) - p \cdot x^i, \forall i = 1, 2, \dots, k \text{ y} \\ & \forall a \in A \setminus \{x^1, \dots, x^k\}\}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} C = \{p \in \mathbb{R}^n : & p \cdot (x^i - x^l) = u(x^i) - u(x^l), \forall l, i = 1, 2, \dots, k; \\ & p \cdot (x^i - a) \leq u(x^i) - u(a), \forall i = 1, 2, \dots, k \text{ y} \\ & \forall a \in A \setminus \{x^1, \dots, x^k\}\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por lo tanto, C es un poliedro convexo racional.

Según la definición C.6.3, para demostrar que el complejo de precios de u es un complejo poliedral racional, debemos mostrar lo siguiente:

- i) Si C es una celda del complejo de precios de u , entonces una cara propia de C es un subconjunto de C en el cual al menos una de las desigualdades que aparece en (2.8) se cumple con igualdad. Por lo tanto, cada cara propia de C también es una celda del complejo de precios de u .
- ii) Sean C y \tilde{C} dos celdas del complejo de precios de u , entonces $C \cap \tilde{C} = \emptyset$ o $C \cap \tilde{C} \neq \emptyset$. Si $C \cap \tilde{C} = \emptyset$, entonces no hay nada más que probar, pero si $C \cap \tilde{C} \neq \emptyset$, entonces mostraremos que $C \cap \tilde{C}$ es una cara de ambos. Sean $X \subseteq A$ y $\tilde{X} \subseteq A$ tales que $C = \{p \in \mathbb{R}^n : X \subseteq D_u(p)\}$ y $\tilde{C} = \{p \in \mathbb{R}^n : \tilde{X} \subseteq D_u(p)\}$. Entonces, $C \cap \tilde{C} = \{p \in \mathbb{R}^n : X \cup \tilde{X} \subseteq D_u(p)\}$. Por lo tanto, $C \cap \tilde{C}$ es una cara de C y también de \tilde{C} .

Finalmente mostraremos que el complejo de precios de u es un complejo poliedral racional n -dimensional. Sea $C \neq \emptyset$ una celda del complejo de precios de u , entonces existen $x^1, x^2, \dots, x^k \in A$, con $k \geq 1$, tal que $C = \{p \in \mathbb{R}^n : x^1, \dots, x^k \in D_u(p)\}$. Luego, si para algún $r \in \{1, 2, \dots, k\}$, se cumple que x^r es una cesta únicamente demandada a algún vector de precios; entonces $C = \{p \in \mathbb{R}^n : x^1, \dots, x^k \in D_u(p)\} \subseteq \{q \in \mathbb{R}^n : x^r \in D_u(q)\}$. Por otro lado, por la proposición 2.3.1, $\{q \in \mathbb{R}^n : x^r \in D_u(q)\}$ es una n -celda del complejo de precios de u . Por lo tanto, la celda C está contenida en una n -celda del complejo de precios de u .

Pero si ninguna cesta x^r es únicamente demandada, $r \in \{1, 2, \dots, k\}$; entonces por el teorema 2.1.4 tenemos que para $r = 1$ existe una cesta únicamente demandada $\tilde{x} \in A$ tal que $C \subseteq \{p \in \mathbb{R}^n : x^1 \in D_u(p)\} \subseteq \{q \in \mathbb{R}^n : \tilde{x} \in D_u(q)\}$. Por otro lado, por la proposición 2.3.1, $\{q \in \mathbb{R}^n : \tilde{x} \in D_u(q)\}$ es una n -celda del complejo de precios de u . Por lo tanto, la celda C está contenida en una n -celda del complejo de precios de u . Entonces, en cualquiera de los dos casos posibles, la celda del complejo de precios C está contenida en alguna n -celda del complejo de precios de u . \square

Definición 2.3.3 *Las celdas del LIP, \mathcal{L}_u , son las celdas del complejo de precios de u que están contenidas en el LIP.*

Observación 2.3.1 *$C \neq \emptyset$ es una celda del LIP si y solo si existen $x^1, x^2, \dots, x^k \in A$, con $k \geq 2$, que satisfacen $C = \{p \in \mathbb{R}^n : x^1, \dots, x^k \in D_u(p)\}$.*

Ejemplo 2.3.3 *Usando el ejemplo 2.3.1 concluimos que las celdas del LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.1 son*

$$i) C_4 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (1, 0) \in D_u((p_1, p_2))\}$$

$$C_4 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = 5; 4 \leq p_2\}.$$

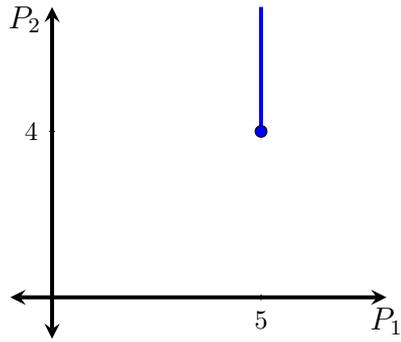
$$ii) C_5 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (0, 1) \in D_u((p_1, p_2))\}$$

$$C_5 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 = 4; 5 \leq p_1\}.$$

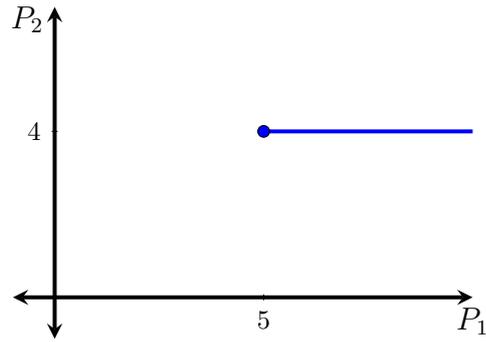
$$iii) C_6 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (1, 0), (0, 1) \in D_u((p_1, p_2))\}$$

$$C_6 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 + 1 = p_1; p_2 \leq 4\}.$$

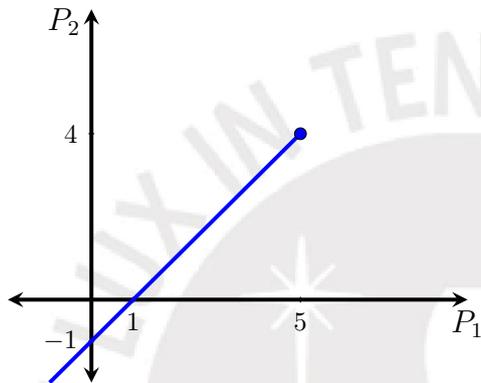
$$iv) C_7 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (1, 0), (0, 1) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(5, 4)\}.$$



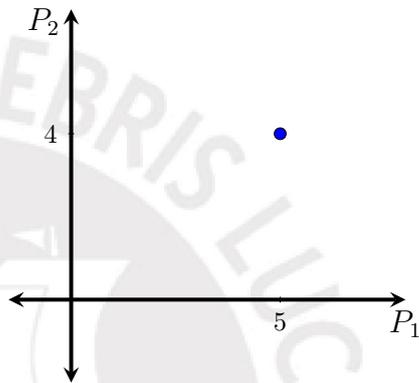
(a) Representación gráfica de C_4



(b) Representación gráfica de C_5



(c) Representación gráfica de C_6



(d) Representación gráfica de C_7

Figura 2.12: Celdas del LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.1

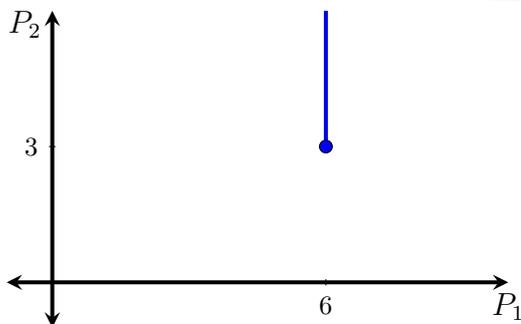
Ejemplo 2.3.4 Usando el ejemplo 2.3.2 concluimos que las celdas del LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.2 son

$$C_4 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (1, 0) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = 6 ; 3 \leq p_2\}.$$

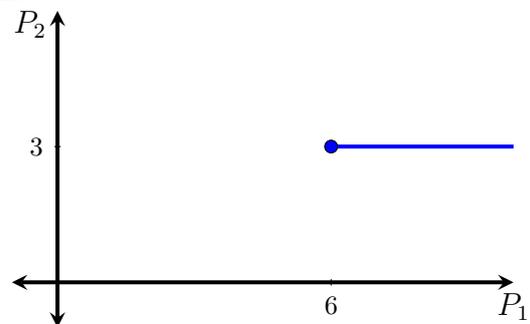
$$C_5 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (0, 2) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 6 \leq p_1 ; p_2 = 3\}.$$

$$C_6 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (1, 0), (0, 2) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = 2p_2 ; p_2 \leq 3\}.$$

$$C_7 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (1, 0), (0, 2) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(6, 3)\}.$$



(a) Representación gráfica de C_4



(b) Representación gráfica de C_5

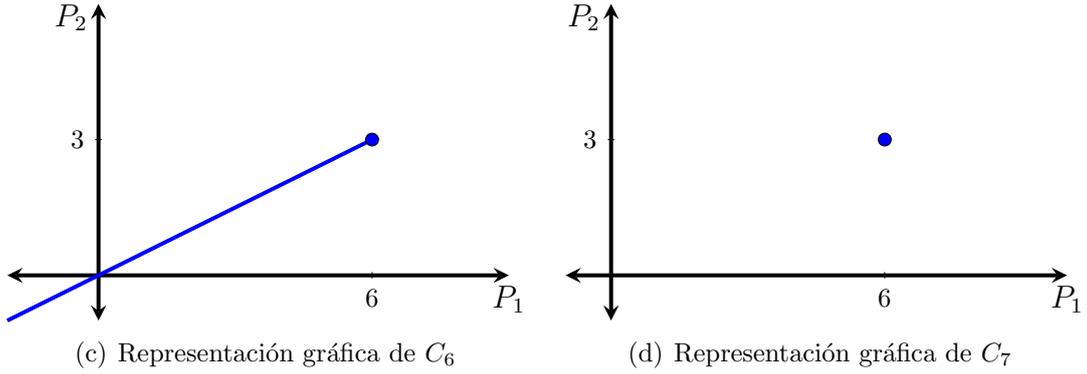


Figura 2.13: Celdas del LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.2

Proposición 2.3.2 *Toda celda del LIP es cara propia de alguna n -celda del complejo de precios.*

Demostración: Sea C una celda del LIP, entonces existen $x^1, x^2, \dots, x^k \in A$, con $k \geq 2$, tal que $C = \{p \in \mathbb{R}^n : x^1, x^2, \dots, x^k \in D_u(p)\}$. Luego, si para algún $r \in \{1, 2, \dots, k\}$, se cumple que x^r es una cesta únicamente demandada a algún vector de precios; entonces $C = \{p \in \mathbb{R}^n : x^1, x^2, \dots, x^k \in D_u(p)\} \subsetneq \{q \in \mathbb{R}^n : x^r \in D_u(q)\}$. Por el teorema 2.3.1 concluimos que C es una cara propia de la n -celda $\{q \in \mathbb{R}^n : x^r \in D_u(q)\}$.

Pero si ninguna cesta x^r es únicamente demandada, entonces por el teorema 2.1.4 tenemos que para $r = 1$, existe una cesta $\tilde{x} \in A$ únicamente demandada a algún vector de precios, tal que $C \subsetneq \{p \in \mathbb{R}^n : x^1 \in D_u(p)\} \subsetneq \{q \in \mathbb{R}^n : \tilde{x} \in D_u(q)\}$. Por el teorema 2.3.1 concluimos que C es una cara propia de la n -celda $\{q \in \mathbb{R}^n : \tilde{x} \in D_u(q)\}$.

Entonces, en cualquiera de los dos casos posibles, la celda del LIP C es cara propia de alguna n -celda del complejo de precios de u . \square

Ahora veremos que el recíproco de la proposición 2.3.1 también se cumple.

Proposición 2.3.3 *Si C es una n -celda del complejo de precios de u , entonces existe alguna cesta $x \in A$ únicamente demandada a algún vector de precios tal que*

$$C = \{p \in \mathbb{R}^n : x \in D_u(p)\}.$$

Demostración: Como C es una celda del complejo de precios de u entonces existen $x^1, x^2, \dots, x^k \in A$, con $k \geq 1$, que satisfacen $C = \{p \in \mathbb{R}^n : x^1, x^2, \dots, x^k \in D_u(p)\}$. Si $k \geq 2$ entonces, por la observación 2.3.1, C es una celda del LIP. Luego, por la proposición 2.3.2, C es una cara propia de alguna n -celda del complejo de precios de u . Por consiguiente, $\dim(C) < n$; lo cual es una contradicción con la hipótesis de esta

proposición. Por lo tanto, se debe cumplir que $k = 1$ y x^1 sea una cesta únicamente demandada a algún vector de precios. Por consiguiente, $C = \{p \in \mathbb{R}^n : x^1 \in D_u(p)\}$. \square

Observación 2.3.2 *Toda cara propia de una celda del complejo de precios es una celda del LIP. En particular, las caras propias de toda n -celda del complejo de precios son celdas del LIP.*

Proposición 2.3.4 *Sea C una celda del complejo de precios de u . C es una celda del LIP si y solo si $\dim(C) < n$.*

Demostración: Por la proposición 2.3.2 y la observación 2.3.2, C es una celda del LIP si y solo si C es una cara propia de alguna n -celda del complejo de precios de u , esto es, si y solo si $\dim(C) < n$. \square

Teorema 2.3.2 *Las celdas del LIP forman un complejo poliedral racional $(n - 1)$ -dimensional.*

Demostración: Por el teorema 2.3.1, cada celda del LIP es un poliedro convexo racional; y por la observación 2.3.2, cada cara propia de una celda del LIP también es una celda del LIP. Además, si C y \tilde{C} son celdas del LIP, entonces por el teorema 2.3.1, concluimos que $C \cap \tilde{C} = \emptyset$ o $C \cap \tilde{C}$ es una cara de C y también de \tilde{C} . Por otro lado, si $S \neq \emptyset$ es una celda del LIP, entonces por la proposición 2.3.2, S es una cara propia de alguna n -celda del complejo de precios \tilde{S} . Luego, por el teorema C.5.3, \tilde{S} tiene caras de todas las dimensiones desde $\dim(S)$ hasta n . Además, por ese mismo teorema, S está contenido en alguna $(n - 1)$ -celda del complejo de precios S_1 , que es una cara propia de \tilde{S} y una celda del LIP. Por lo tanto, las celdas del LIP forman un complejo poliedral racional $(n - 1)$ -dimensional. \square

Por el teorema 2.3.2, concluimos que el LIP, \mathcal{L}_u , es igual a la unión de sus $(n - 1)$ -celdas. Estos últimos serán los conjuntos que más adelante se denominan facetas del LIP. De manera formal, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.4 *Una **faceta del LIP** \mathcal{L}_u es un subconjunto $F \subseteq \mathcal{L}_u$ tal que existen $x, x' \in A$ con $x \neq x'$ que satisfacen $F = \{p \in \mathcal{L}_u : x, x' \in D_u(p)\}$ y tal que $\dim(F) = n - 1$.*

Ejemplo 2.3.5 *En el ejemplo 2.3.3 encontramos todas las celdas del LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.1. Para determinar qué celdas del LIP de esta valoración, son facetas, analizamos la dimensión de cada una de éstas; y en caso que la dimensión de alguna de ellas sea igual a $n - 1 = 2 - 1 = 1$, diremos que es una faceta del LIP.*

i) La cápsula afín de la celda del LIP, C_4 , es $\text{aff}(C_4) = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = 5\}$.
Por lo cual,

$$\text{aff}(C_4) - \{(5, 0)\} = \underbrace{\{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = 0\}}_{V_1} \quad y \quad \dim(V_1) = 1.$$

Entonces, $\dim(C_4) = 1$. Por lo tanto, C_4 es una faceta de \mathcal{L}_u .

ii) La cápsula afín de la celda del LIP, C_5 , es $\text{aff}(C_5) = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 = 4\}$.
Por lo cual,

$$\text{aff}(C_5) - \{(0, 4)\} = \underbrace{\{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 = 0\}}_{V_2} \quad y \quad \dim(V_2) = 1.$$

Entonces, $\dim(C_5) = 1$. Por lo tanto, C_5 es una faceta de \mathcal{L}_u .

iii) La cápsula afín de la celda del LIP, C_6 , es $\text{aff}(C_6) = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 + 1 = p_1\}$.
Por lo cual,

$$\text{aff}(C_6) - \{(1, 0)\} = \underbrace{\{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 = p_1\}}_{V_3} \quad y \quad \dim(V_3) = 1.$$

Entonces, $\dim(C_6) = 1$. Por lo tanto, C_6 es una faceta de \mathcal{L}_u .

iv) La cápsula afín de la celda del LIP, C_7 , es $\text{aff}(C_7) = \{(5, 4)\}$. Por lo cual,

$$\text{aff}(C_7) - \{(5, 4)\} = \{(0, 0)\} \quad y \quad \dim(\{(0, 0)\}) = 0.$$

Entonces, $\dim(C_7) = 0$. Por lo tanto, C_7 no es una faceta de \mathcal{L}_u .

Ejemplo 2.3.6 De manera análoga al ejemplo 2.3.5, las facetas del LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.2, son:

$$C_4 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (1, 0) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = 6; 3 \leq p_2\}.$$

$$C_5 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (0, 2) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 6 \leq p_1; p_2 = 3\}.$$

$$C_6 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (1, 0), (0, 2) \in D_u((p_1, p_2))\} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = 2p_2; p_2 \leq 3\}.$$

Como sabemos, las regiones de demanda única (UDRs) y el LIP son disjuntos y su unión es igual a \mathbb{R}^n . Luego, dado que A es finito, concluimos que existe una cantidad finita de facetas del LIP y también de UDRs. Por lo tanto, como todas las facetas del LIP son $(n - 1)$ -dimensionales y las UDRs son n -dimensionales, concluimos que las facetas del LIP separan a las UDRs.

Las facetas del LIP contienen la siguiente importante información económica: Para cualquier vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$ en una faceta F del LIP, el agente es indiferente entre las cestas x y \tilde{x} demandadas en las UDRs que se ubican una en cada lado de F . Esto es,

$$u(x) - p \cdot x = u(\tilde{x}) - p \cdot \tilde{x}, \quad \forall p \in F.$$

Proposición 2.3.5 *Si $x \in A$ y $\tilde{x} \in A$ son cestas únicamente demandadas una en cada lado de la faceta $F \subseteq \mathcal{L}_u$, entonces $p \cdot (\tilde{x} - x)$ es constante para todo $p \in F$.*

Demostración: Por la observación de arriba, tenemos que

$$u(x) - p \cdot x = u(\tilde{x}) - p \cdot \tilde{x}, \quad \forall p \in F.$$

Por lo tanto

$$p \cdot (\tilde{x} - x) = u(\tilde{x}) - u(x), \quad \forall p \in F;$$

es decir, $p \cdot (\tilde{x} - x)$ es constante para todo $p \in F$. □

Observación 2.3.3 *De la proposición 2.3.5 concluimos que el vector que produce el cambio en la demanda, $\tilde{x} - x$, entre las UDRs que se ubican una en cada lado de la faceta F ; es un vector normal a la faceta F .*

Definición 2.3.5 *Sean $x \in A$ y $\tilde{x} \in A$ las cestas demandadas en las UDRs que se ubican una en cada lado de la faceta $F \subseteq \mathcal{L}_u$. El **peso** de F , denotado por $w_u(F)$, se define como el máximo común divisor de las entradas de $\tilde{x} - x$, es decir,*

$$w_u(F) = \text{mcd}(\tilde{x}_1 - x_1, \dots, \tilde{x}_n - x_n)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$.

Ejemplo 2.3.7 *En el ejemplo 2.3.5 encontramos todas las facetas del LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.1. Ahora encontraremos el peso de cada una de éstas. Para determinar cuales son las cestas únicamente demandadas una en cada lado de una faceta, usamos la figura 2.2.*

i) El peso de la faceta del LIP $C_4 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (1, 0) \in D_u((p_1, p_2))\}$ es

$$w_u(C_4) = \text{mcd}(1 - 0, 0 - 0) = \text{mcd}(1, 0) = 1$$

ii) El peso de la faceta del LIP $C_5 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (0, 1) \in D_u((p_1, p_2))\}$ es

$$w_u(C_5) = \text{mcd}(0 - 0, 1 - 0) = \text{mcd}(0, 1) = 1$$

iii) El peso de la faceta del LIP $C_6 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (1, 0), (0, 1) \in D_u((p_1, p_2))\}$ es

$$w_u(C_6) = \text{mcd}(1 - 0, 0 - 1) = \text{mcd}(1, -1) = 1$$

Ejemplo 2.3.8 En el ejemplo 2.3.6 encontramos todas las facetas del LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.2. Ahora encontraremos el peso de cada una de éstas. Para determinar cuales son las cestas únicamente demandadas una en cada lado de una faceta, usamos la figura 2.4.

i) El peso de la faceta del LIP $C_4 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (1, 0) \in D_u((p_1, p_2))\}$ es

$$w_u(C_4) = \text{mcd}(1 - 0, 0 - 0) = \text{mcd}(1, 0) = 1$$

ii) El peso de la faceta del LIP $C_5 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0), (0, 2) \in D_u((p_1, p_2))\}$ es

$$w_u(C_5) = \text{mcd}(0 - 0, 2 - 0) = \text{mcd}(0, 2) = 2$$

iii) El peso de la faceta del LIP $C_6 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : (1, 0), (0, 2) \in D_u((p_1, p_2))\}$ es

$$w_u(C_6) = \text{mcd}(1 - 0, 0 - 2) = \text{mcd}(1, -2) = 1$$

La definición 2.3.5 nos permite establecer el siguiente teorema.

Teorema 2.3.3 Las celdas del LIP, junto con los pesos de las facetas, forman un complejo poliedral racional ponderado $(n - 1)$ -dimensional.

Demostración: Por el teorema 2.3.2, tenemos que, las celdas del LIP forman un complejo poliedral racional $(n - 1)$ -dimensional. Luego, dado que para cada faceta F del LIP, se cumple que $w_u(F) \in \mathbb{Z}_{++}$; concluimos que las celdas del LIP, junto con los pesos de las facetas, forman un complejo poliedral racional ponderado $(n - 1)$ -dimensional. \square

Hacemos la siguiente convención en esta sección. Sean \vec{a} y \vec{b} dos vectores no nulos en \mathbb{R}^n . Decimos que \vec{a} y \vec{b} **tienen o apuntan en direcciones opuestas** si y solo si $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

Proposición 2.3.6 Sea $F \subseteq \mathcal{L}_u$ una faceta del LIP. El cambio en la demanda, cuando cambian los precios entre las UDRs ubicadas una en cada lado de F , es $w_u(F)$ veces el vector entero primitivo que es normal a F , y apunta en la dirección opuesta al cambio en el precio.

Demostración: Sean $x \in A$ y $\tilde{x} \in A$ las cestas únicamente demandadas en las UDRs que se ubican una en cada lado de la faceta F entonces, por la definición 2.3.5, el vector $\vec{v} = \frac{1}{w_u(F)}(\tilde{x} - x)$ es un vector entero primitivo; y por la proposición 2.3.5, \vec{v} es normal a F . Dado que $x, \tilde{x} \in A \subseteq \mathbb{Z}^n$, concluimos que \vec{v} es el cambio más pequeño posible en \mathbb{Z}^n que experimentan las cestas x y \tilde{x} en la dirección $\tilde{x} - x$. Por consiguiente, el peso de la faceta, $w_u(F)$, es el número de veces que se realiza este cambio más pequeño posible en \mathbb{Z}^n entre las cestas x y \tilde{x} cuando cruzamos la faceta F . Por otro lado, si $p \in \mathcal{R}_u(x)$ tenemos

$$u(\tilde{x}) - p \cdot \tilde{x} < u(x) - p \cdot x \quad (2.9)$$

y si $\tilde{p} \in \mathcal{R}_u(\tilde{x})$ tenemos

$$u(x) - \tilde{p} \cdot x < u(\tilde{x}) - \tilde{p} \cdot \tilde{x} \quad (2.10)$$

Sumando (2.9) y (2.10) conseguimos

$$-p \cdot \tilde{x} - \tilde{p} \cdot x < -p \cdot x - \tilde{p} \cdot \tilde{x}$$

es decir

$$(\tilde{p} - p) \cdot (\tilde{x} - x) < 0$$

Por lo tanto, el ángulo formado por los vectores $\tilde{p} - p$ y $\tilde{x} - x$ es obtuso. Como el vector $\tilde{p} - p$ se dirige desde $\mathcal{R}_u(x)$ hacia $\mathcal{R}_u(\tilde{x})$, entonces el vector $\tilde{x} - x$ se debe dirigir desde $\mathcal{R}_u(\tilde{x})$ hacia $\mathcal{R}_u(x)$. De esta manera, el vector \vec{v} apunta desde $\mathcal{R}_u(\tilde{x})$ hacia $\mathcal{R}_u(x)$, en la dirección opuesta al cambio de precios, $\tilde{p} - p$. Además, dado que F es $(n - 1)$ -dimensional, existe un único vector entero primitivo normal a F y apuntando en la dirección de \vec{v} . De esta manera \vec{v} es el único vector entero primitivo normal a F que apunta en dirección opuesta al cambio de precios, $\tilde{p} - p$. \square

Denotemos por w_u al vector cuyas componentes o entradas son los pesos $w_u(F)$ de cada una de las faceta F del LIP. También, w_u puede ser visto como una función que a cada faceta del LIP, F , le asigna su peso $w_u(F)$. Por lo tanto, el LIP y su vector, w_u de pesos, tomados en conjunto, incorporan toda la información sobre cómo cambia la demanda entre las UDRs.

Dado que cada celda del complejo de precios es un conjunto convexo no vacío, entonces el interior relativo de cada una de ellas es no vacío. Por lo tanto, el interior relativo de una celda, simplemente será llamado interior de la celda. Además, dado que cada celda del complejo de precios es un conjunto cerrado, entonces su frontera relativa será igual a la diferencia conjuntista entre dicha celda y el interior relativo de

dicha celda; y la frontera relativa de una celda, simplemente será llamado frontera de la celda. Recuerde que, si C es una celda del complejo de precios, entonces cada cara propia \tilde{C} de C es también una celda del complejo de precios. Además, en los vectores de precios de \tilde{C} , el agente demanda cestas adicionales a las que él demanda en C . En cambio, veremos que el conjunto de demanda es constante en el interior de C .

Lema 2.3.1 *Sea C una celda del complejo de precios, entonces para cada $p^\circ \in \text{ri}(C)$, se cumple*

$$C = \{p \in \mathbb{R}^n : D_u(p^\circ) \subseteq D_u(p)\}.$$

Demostración: Sea $p^\circ \in \text{ri}(C)$ fijo y arbitrario. Notamos que el conjunto $C' = \{p \in \mathbb{R}^n : D_u(p^\circ) \subseteq D_u(p)\}$ es no vacío, pues $p^\circ \in C'$. Por lo tanto, C' es una celda del complejo de precios. Ahora mostraremos que $C' = C$. Sea $X \subseteq A$ tal que

$$C = \{p \in \mathbb{R}^n : X \subseteq D_u(p)\}.$$

Afirmación 1: $C' \subseteq C$.

En efecto, sea $p' \in C'$ fijo y arbitrario, entonces $D_u(p^\circ) \subseteq D_u(p')$. Dado que $p^\circ \in \text{ri}(C) \subseteq C$, obtenemos que $X \subseteq D_u(p^\circ)$. Por lo cual, $X \subseteq D_u(p')$, es decir, $p' \in C$.

Por otro lado, dado que $p^\circ \in C$ y $p^\circ \in C'$, concluimos que $C \cap C' \neq \emptyset$. Además, $C \cap C'$ es una cara de C y de C' .

Afirmación 2: $C \cap C' = C$.

En efecto, por el método de reducción al absurdo, supongamos que $C \cap C'$ es una cara propia de C ($C \cap C' \subsetneq C$). Dado que $p^\circ \in \text{ri}(C)$, obtenemos que $p^\circ \notin C \cap C'$, lo cual es una contradicción. Entonces $C \cap C'$ no es una cara propia de C . Por lo tanto, $C \cap C' = C$.

Luego, de las afirmaciones 1 y 2, obtenemos $C = C'$, es decir,

$$C = \{p \in \mathbb{R}^n : D_u(p^\circ) \subseteq D_u(p)\}.$$

□

Teorema 2.3.4 *Sea C una celda del complejo de precios, entonces $D_u(p^\circ)$ es constante para todo $p^\circ \in \text{ri}(C)$.*

Demostración: Sean $p^\circ, q^\circ \in \text{ri}(C)$ fijos y arbitrarios, con $p^\circ \neq q^\circ$. Mostraremos que $D_u(p^\circ) = D_u(q^\circ)$. Por el lema 2.3.1, tenemos

$$D_u(p^\circ) \subseteq D_u(p), \quad \forall p \in C \tag{2.11}$$

y

$$D_u(q^\circ) \subseteq D_u(q), \forall q \in C. \quad (2.12)$$

Luego, si en (2.11) elegimos $p = q^\circ$, obtenemos $D_u(p^\circ) \subseteq D_u(q^\circ)$ y si en (2.12) elegimos $q = p^\circ$, obtenemos $D_u(q^\circ) \subseteq D_u(p^\circ)$. Por lo tanto, $D_u(p^\circ) = D_u(q^\circ)$. \square

Las siguientes proposiciones nos permiten conocer todas las celdas del complejo de precios de u , a partir de las UDRs de u .

Proposición 2.3.7 *Si $x \in A$ es una cesta únicamente demandada a algún vector de precios, entonces*

$$\overline{\mathcal{R}_u(x)} = \{p \in \mathbb{R}^n : x \in D_u(p)\}.$$

Es decir, la cerradura de una UDR es una n -celda del complejo de precios de u .

Demostración:

(\subseteq):

Dado que $\mathcal{R}_u(x) \subseteq \{p \in \mathbb{R}^n : x \in D_u(p)\}$, obtenemos $\overline{\mathcal{R}_u(x)} \subseteq \overline{\{p \in \mathbb{R}^n : x \in D_u(p)\}}$.
Luego, como $\{p \in \mathbb{R}^n : x \in D_u(p)\}$ es un conjunto cerrado; conseguimos

$$\overline{\mathcal{R}_u(x)} \subseteq \{p \in \mathbb{R}^n : x \in D_u(p)\}.$$

(\supseteq):

Sea $q \in \{p \in \mathbb{R}^n : x \in D_u(p)\}$ fijo y arbitrario, mostraremos que existe una sucesión $(q^m) \subseteq \mathcal{R}_u(x)$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} q^m = q$. Tenemos que $x \in D_u(q)$, es decir,

$$u(x) - q \cdot x \geq u(a) - q \cdot a, \quad \forall a \in A \setminus \{x\}.$$

Entonces

$$u(x) - q \cdot x > u(a) - q \cdot a, \quad \forall a \in A \setminus \{x\}$$

ó

$$\begin{cases} u(x) - q \cdot x = u(\hat{a}) - q \cdot \hat{a}, & \text{para algún } \hat{a} \in A \setminus \{x\}. \\ u(x) - q \cdot x \geq u(a) - q \cdot a, & \forall a \in A \setminus \{x, \hat{a}\}. \end{cases}$$

Si $u(x) - q \cdot x > u(a) - q \cdot a$, $\forall a \in A \setminus \{x\}$, entonces $\{x\} = D_u(q)$. Por lo cual, definimos $q^m = q$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Entonces $(q^m) \subseteq \mathcal{R}_u(x)$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} q^m = q$.

Si $u(x) - q \cdot x = u(\hat{a}) - q \cdot \hat{a}$, para algún $\hat{a} \in A \setminus \{x\}$, entonces $\hat{a} \in D_u(q)$. Por lo cual, $|D_u(q)| \geq 2$. Por consiguiente, $q \in \mathcal{L}_u$. Por otro lado, como x es una cesta únicamente demandada a algún vector de precios, entonces existe una faceta $F \subset \mathcal{L}_u$ del LIP tal

que x es únicamente demandado a un lado de F y $q \in F$. Sea $p^* \in \mathcal{R}_u(x)$ fijo. Como F es cerrado y $p^* \notin F$, entonces $d(p^*, F) > 0$. Por lo cual, $d(p^*, q) = \|p^* - q\| > 0$. Luego, por la propiedad Arquimediana, existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{m_0} < \|p^* - q\|$. Definimos

$$q^m := q + \frac{1}{m + m_0 - 1}(p^* - q) \in \{q + \lambda(p^* - q) : \lambda \in [0, 1]\}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Afirmación: $q^m \in \mathcal{R}_u(x)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

En efecto, sea $m \in \mathbb{N}$ fijo y arbitrario. Mostraremos que

$$u(x) - q^m \cdot x > u(a) - q^m \cdot a, \quad \forall a \in A \setminus \{x\}.$$

Sea $a \in A \setminus \{x\}$ fijo y arbitrario. Dado que $x \in D_u(q)$, tenemos

$$u(x) - q \cdot x \geq u(a) - q \cdot a,$$

entonces

$$\left(1 - \frac{1}{m + m_0 - 1}\right) [u(x) - q \cdot x] \geq \left(1 - \frac{1}{m + m_0 - 1}\right) [u(a) - q \cdot a],$$

es decir,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{m + m_0 - 1}\right) u(x) - \left(q - \frac{1}{m + m_0 - 1}q\right) \cdot x \geq \\ \left(1 - \frac{1}{m + m_0 - 1}\right) u(a) - \left(q - \frac{1}{m + m_0 - 1}q\right) \cdot a. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por otro lado, dado que $p^* \in \mathcal{R}_u(x)$, tenemos $\{x\} = D_u(p^*)$. Por lo cual,

$$u(x) - p^* \cdot x > u(a) - p^* \cdot a,$$

entonces

$$\frac{1}{m + m_0 - 1} [u(x) - p^* \cdot x] > \frac{1}{m + m_0 - 1} [u(a) - p^* \cdot a],$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m + m_0 - 1} u(x) - \left(\frac{1}{m + m_0 - 1} p^*\right) \cdot x > \frac{1}{m + m_0 - 1} u(a) \\ - \left(\frac{1}{m + m_0 - 1} p^*\right) \cdot a. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Luego, sumando miembro a miembro de (2.13) y (2.14), obtenemos

$$u(x) - \left(q + \frac{1}{m + m_0 - 1}(p^* - q)\right) \cdot x > u(a) - \left(q + \frac{1}{m + m_0 - 1}(p^* - q)\right) \cdot a,$$

es decir,

$$u(x) - q^m \cdot x > u(a) - q^m \cdot a.$$

Luego, como a era fijo y arbitrario, concluimos que

$$u(x) - q^m \cdot x > u(a) - q^m \cdot a, \quad \forall a \in A \setminus \{x\}.$$

Es decir, $q^m \in \mathcal{R}_u(x)$. Finalmente, dado que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} q^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(q + \frac{1}{m + m_0 - 1} (p^* - q) \right) = q$$

obtenemos que $q \in \overline{\mathcal{R}_u(x)}$. □

Proposición 2.3.8 $\emptyset \neq C \subseteq \mathcal{L}_u$ es una celda del LIP si y solo si C es la intersección de n -celdas del complejo de precios de u .

Demostración:

(\Rightarrow):

Supongamos que C es una celda de \mathcal{L}_u entonces, por la proposición 2.3.2, C es cara propia de alguna n -celda del complejo de precios de u , \tilde{C} . Luego, por el teorema C.5.3, C es la intersección de las $(n - 1)$ -celdas contenidas en \tilde{C} . Por otro lado, cada $(n - 1)$ -celda (faceta del LIP) es igual a la intersección de las dos n -celdas adyacentes a ella (cerraduras de las UDRs que se ubican una en cada lado de la $(n - 1)$ -celda). De esta manera concluimos que C es la intersección de algunas n -celdas del complejo de precios.

(\Leftarrow):

Supongamos que C es la intersección de algunas n -celdas del complejo de precios, entonces C será una cara propia de cada una de estas n -celdas del complejo de precios. Por lo tanto, C es una celda de \mathcal{L}_u . □

De la proposición 2.3.7, concluimos que la cerradura de una UDR es una n -celda del complejo de precios de u y ésta contiene a todos los vectores de precios para los cuales una cesta particular es demandada. De esta manera, para encontrar todas las celdas del complejo de precios de u , lo primero que haremos será encontrar las cerraduras de las UDRs de u ; y luego, por la proposición 2.3.8, las otras celdas del complejo de precios de u , serán las celdas del LIP, las cuales se hallan al intersecar las n -celdas del complejo de precios de u , siempre que esta intersección sea no vacía.

2.4. Concavidad en valoraciones

A lo largo de esta sección, suponemos que $A = \{a^1, a^2, \dots, a^\alpha\}$ (es decir, $|A| = \alpha < \infty$). Para poder desarrollar el Teorema de Unimodularidad y el corolario 2.5.1 que proviene del Teorema de Equivalencia Valoración-Complejo, necesitamos definir la concavidad para la valoración u . Dado que el dominio de u es un subconjunto finito no vacío A de \mathbb{Z}^n , entonces la definición de concavidad de la valoración u será la misma que definimos para funciones cuyo dominio es un subconjunto finito no vacío de \mathbb{Z}^n en el capítulo 1. En esta sección enunciamos y demostramos algunos teoremas que nos permitirán verificar si una valoración es cóncava o no, pero antes de ello enunciamos algunas proposiciones relacionadas al politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$, las cuales serán de gran utilidad en esta sección y en las siguientes.

Proposición 2.4.1 *Sea $p \in \mathbb{R}^n$, entonces para cada $x \in D_u(p)$ se cumple*

$$(-p, 1) \cdot v \leq u(x) - p \cdot x, \quad \forall v \in \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}).$$

Demostración: Sea $p \in \mathbb{R}^n$, entonces para cada $x \in D_u(p)$, se cumple que

$$u(a^k) - p \cdot a^k \leq u(x) - p \cdot x, \quad \forall k = 1, 2, \dots, \alpha. \quad (2.15)$$

Sea $v \in \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$ fijo y arbitrario, entonces existen $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^\alpha \in [0, 1]$ con $\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k = 1$ tal que $v = \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k (a^k, u(a^k))$. Luego,

$$\begin{aligned} (-p, 1) \cdot v &= (-p, 1) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k a^k, \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k u(a^k) \right) \\ &= -p \cdot \left(\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k a^k \right) + \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k u(a^k) \\ &= \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k (-p \cdot a^k) + \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k u(a^k) \\ &= \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k (u(a^k) - p \cdot a^k) \end{aligned}$$

Entonces, por (2.15), tenemos

$$(-p, 1) \cdot v \leq \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k (u(x) - p \cdot x) = u(x) - p \cdot x.$$

Dado que v era fijo y arbitrario, concluimos que

$$(-p, 1) \cdot v \leq u(x) - p \cdot x, \quad \forall v \in \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}).$$

□

Corolario 2.4.1 Para cada $p \in \mathbb{R}^n$, se cumple $\text{conv}(u)(x) = u(x)$, $\forall x \in D_u(p)$.

Demostración: Dado que $(x, \text{conv}(u)(x)) \in \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$, $\forall x \in D_u(p)$; entonces, por la proposición 2.4.1 obtenemos

$$(-p, 1) \cdot (x, \text{conv}(u)(x)) \leq u(x) - p \cdot x, \quad \forall x \in D_u(p)$$

es decir,

$$\text{conv}(u)(x) - p \cdot x \leq u(x) - p \cdot x, \quad \forall x \in D_u(p).$$

Entonces,

$$\text{conv}(u)(x) \leq u(x), \quad \forall x \in D_u(p).$$

Luego, por definición de la mayorante cóncava de u , concluimos que

$$\text{conv}(u)(x) = u(x), \quad \forall x \in D_u(p).$$

□

Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y supongamos que $D_u(p) = \{a_1^p, a_2^p, \dots, a_{n_p}^p\}$ (es decir, $|D_u(p)| = n_p < \alpha$), entonces por el corolario 2.4.1, los puntos $(a_k^p, u(a_k^p))$ se encuentran en la frontera superior del conjunto $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$, con respecto a su última coordenada; y por la proposición 2.4.1, el hiperplano

$$H = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : (-p, 1) \cdot v = u(a_1^p) - p \cdot a_1^p\}$$

es un hiperplano soporte a $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$ en cada $(a_k^p, u(a_k^p))$. Luego, como $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$ es un politopo y los vértices de este politopo que pertenecen al hiperplano soporte H , están aquí $\{(a_1^p, u(a_1^p)), (a_2^p, u(a_2^p)), \dots, (a_{n_p}^p, u(a_{n_p}^p))\}$; entonces

$$H \cap \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}) = \text{conv}(\{(x, u(x)) : x \in D_u(p)\}).$$

Además, $\text{conv}(\{(x, u(x)) : x \in D_u(p)\})$ es una cara expuesta de $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$. En el corolario 2.4.3 damos una primera caracterización para esta cara expuesta.

Corolario 2.4.2 Si $D_u(p) = \{a_1^p, a_2^p, \dots, a_{n_p}^p\}$ (es decir, $|D_u(p)| = n_p < \alpha$); entonces

$$\text{conv}(u) \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) = \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k u(a_k^p), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_p} \in [0, 1] \quad \text{con} \quad \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k = 1.$$

Demostración: Por la concavidad de $\text{conv}(u)$ y por el corolario 2.4.1 tenemos que

$$\text{conv}(u) \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) \geq \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k \text{conv}(u)(a_k^p) = \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k u(a_k^p) \quad (2.16)$$

Por otro lado, por la proposición 2.4.1, obtenemos

$$(-p, 1) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p, \text{conv}(u) \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) \right) \leq u(a_i^p) - p \cdot a_i^p, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_p$$

es decir,

$$\text{conv}(u) \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) - p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) \leq u(a_i^p) - p \cdot a_i^p, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_p.$$

Multiplicando por λ_i a ambos lados de la desigualdad, obtenemos

$$\lambda_i \left(\text{conv}(u) \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) - p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) \right) \leq \lambda_i u(a_i^p) - p \cdot (\lambda_i a_i^p), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_p.$$

Sumando desde $i = 1$ hasta $i = n_p$, conseguimos

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \left(\text{conv}(u) \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) - p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) \right)}_{\text{conv}(u) \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) - p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right)} \leq \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i u(a_i^p) - p \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i a_i^p \right).$$

es decir,

$$\text{conv}(u) \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) - p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) \leq \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k u(a_k^p) - p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right).$$

Por lo cual,

$$\text{conv}(u) \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) \leq \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k u(a_k^p). \quad (2.17)$$

Por lo tanto, de (2.16) y (2.17) concluimos que la proposición es válida. \square

Corolario 2.4.3

$$\text{conv}(\{(x, u(x)) : x \in D_u(p)\}) = \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in \text{conv}(D_u(p))\}.$$

Demostración: Supongamos que $D_u(p) = \{a_1^p, a_2^p, \dots, a_{n_p}^p\}$.

(\subseteq) :

Sea $v \in \text{conv}(\{(x, u(x)) : x \in D_u(p)\})$ fijo y arbitrario, entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_p} \in [0, 1]$ con $\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k = 1$ tal que $v = \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k (a_k^p, u(a_k^p))$. Luego, por el corolario 2.4.2, obtenemos

$$v = \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k (a_k^p, u(a_k^p)) = \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p, \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k u(a_k^p) \right) = \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p, \text{conv}(u) \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) \right)$$

Por lo cual, $v \in \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in \text{conv}(D_u(p))\}$. Por lo tanto, por la arbitrariedad de v concluimos que

$$\text{conv}(\{(x, u(x)) : x \in D_u(p)\}) \subseteq \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in \text{conv}(D_u(p))\}.$$

(\supseteq) :

Sea $v \in \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in \text{conv}(D_u(p))\}$ fijo y arbitrario, entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_p} \in [0, 1]$ con $\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k = 1$ tal que $v = \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p, \text{conv}(u) \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) \right)$. Luego, por el corolario 2.4.2, obtenemos

$$v = \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p, \text{conv}(u) \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p \right) \right) = \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p, \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k u(a_k^p) \right) = \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k (a_k^p, u(a_k^p))$$

Por lo cual, $v \in \text{conv}(\{(x, u(x)) : x \in D_u(p)\})$. Por lo tanto, por la arbitrariedad de v concluimos que

$$\{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in \text{conv}(D_u(p))\} \subseteq \text{conv}(\{(x, u(x)) : x \in D_u(p)\}).$$

□

Para el siguiente teorema, definamos el siguiente conjunto

$$D_{\text{conv}(u)}(p) = \arg \max_{x \in \text{conv}(A)} \{\text{conv}(u)(x) - p \cdot x\}.$$

Teorema 2.4.1 $D_{\text{conv}(u)}(p) = \text{conv}(D_u(p))$, $\forall p \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: Sea $p \in \mathbb{R}^n$ fijo y arbitrario, entonces definimos el hiperplano

$$H_0 = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : (-p, 1) \cdot v = \text{conv}(u)(x_0) - p \cdot x_0\}$$

donde $x_0 \in D_{\text{conv}(u)}(p)$ es un elemento fijo. Luego,

$$(x, \text{conv}(u)(x)) \in H_0, \quad \forall x \in D_{\text{conv}(u)}(p). \quad (2.18)$$

Por otro lado, para cada $\tilde{x} \in \text{conv}(A) \setminus D_{\text{conv}(u)}(p)$, se cumple que

$$\text{conv}(u)(\tilde{x}) - p \cdot \tilde{x} < \text{conv}(u)(x_0) - p \cdot x_0,$$

es decir,

$$(-p, 1) \cdot (\tilde{x}, \text{conv}(u)(\tilde{x})) < \text{conv}(u)(x_0) - p \cdot x_0, \quad \forall \tilde{x} \in \text{conv}(A) \setminus D_{\text{conv}(u)}(p). \quad (2.19)$$

Además, por el teorema 1.2.1, para cada $x' \in \text{conv}(A)$ y para cada $y' \in \Gamma_u(x') \setminus \{\text{conv}(u)(x')\}$, se cumple que

$$(-p, 1) \cdot (x', y') = y' - p \cdot x' < \text{conv}(u)(x') - p \cdot x' \leq \text{conv}(u)(x_0) - p \cdot x_0. \quad (2.20)$$

Por lo tanto, de (2.18), (2.19) y (2.20) concluimos que H_0 es un hiperplano soporte a $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$ en cada $(x, \text{conv}(u)(x))$, donde $x \in D_{\text{conv}(u)}(p)$. Además

$$H_0 \cap \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}) = \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in D_{\text{conv}(u)}(p)\}.$$

Como H y H_0 son hiperplanos paralelos, y además ambos hiperplanos intersecan al politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$ en su frontera superior, con respecto a su última coordenada; entonces se debe cumplir que $H = H_0$. Por lo cual,

$$\{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in D_{\text{conv}(u)}(p)\} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in \text{conv}(D_u(p))\}.$$

Entonces, $D_{\text{conv}(u)}(p) = \text{conv}(D_u(p))$. □

Es de esperar que las valoraciones cóncavas sean aquellas para las que cada cesta posible es demandada a algún vector de precios, y para las que el conjunto de demanda en algún vector de precios, es convexo discreto. Estas afirmaciones son probadas en los siguientes teoremas.

Teorema 2.4.2 *La valoración $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava si y solo si para cada $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ existe algún $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in D_u(p)$.*

Demostración:

(\Rightarrow) :

Dado que u es cóncava, tenemos que $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A) = A$ y $u(x) = \text{conv}(u)(x)$, $\forall x \in A$.

Sea $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A) = A$ fijo y arbitrario, entonces el punto $(x, u(x))$ se encuentra en la frontera superior del conjunto $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$, con respecto a su última coordenada. Por consiguiente, existe un hiperplano no vertical, con normal apuntando hacia afuera, soporte a $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$ en $(x, u(x))$; es decir, existe $q \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $q_{n+1} > 0$ tal que

$$q \cdot v \leq q \cdot (x, u(x)) , \forall v \in \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}).$$

En particular,

$$q \cdot (a, u(a)) \leq q \cdot (x, u(x)) , \forall a \in A. \quad (2.21)$$

Definimos

$$p = \left(-\frac{q_1}{q_{n+1}}, -\frac{q_2}{q_{n+1}}, \dots, -\frac{q_n}{q_{n+1}} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Afirmación: $u(a) - p \cdot a \leq u(x) - p \cdot x , \forall a \in A.$

En efecto, para cada $a \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} u(a) - p \cdot a &= u(a) - \left(-\frac{q_1}{q_{n+1}}, -\frac{q_2}{q_{n+1}}, \dots, -\frac{q_n}{q_{n+1}} \right) \cdot a \\ &= u(a) + \frac{1}{q_{n+1}} (q_1, q_2, \dots, q_n) \cdot a \\ &= \frac{1}{q_{n+1}} (q_{n+1} u(a) + (q_1, q_2, \dots, q_n) \cdot a) \\ &= \frac{1}{q_{n+1}} (q \cdot (a, u(a))). \end{aligned}$$

Entonces, por (2.21) obtenemos

$$\begin{aligned} u(a) - p \cdot a &\leq \frac{1}{q_{n+1}} (q \cdot (x, u(x))) \\ &= \frac{1}{q_{n+1}} ((q_1, q_2, \dots, q_n) \cdot x + q_{n+1} u(x)) \\ &= u(x) - \left(-\frac{q_1}{q_{n+1}}, -\frac{q_2}{q_{n+1}}, \dots, -\frac{q_n}{q_{n+1}} \right) \cdot x \\ &= u(x) - p \cdot x. \end{aligned}$$

Luego, de la afirmación, tenemos que $x \in D_u(p)$. Dado que x era fijo y arbitrario, concluimos que, para cada $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ existe algún $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in D_u(p)$.

(\Leftarrow) :

Por hipótesis tenemos que para cada $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ existe algún $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in D_u(p) \subset A$. Por consiguiente, $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A) = A$.

Por otro lado, si $x \in A = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ fijo y arbitrario, entonces existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que

$x \in D_u(p)$. Luego, por el corolario 2.4.1, $\text{conv}(u)(x) = u(x)$. Como $x \in A = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ era fijo y arbitrario, concluimos que

$$\text{conv}(u)(x) = u(x), \forall x \in A = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A).$$

Por lo tanto, u es cóncava. □

Teorema 2.4.3 *La valoración $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava si y solamente si, $D_u(p) = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_u(p))$, $\forall p \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración:

(\Rightarrow):

Sea $p \in \mathbb{R}^n$ fijo y arbitrario, mostraremos que $D_u(p) = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_u(p))$. Consideremos que $|D_u(p)| = n_p \geq 1$ y $D_u(p) = \{a_1^p, a_2^p, \dots, a_{n_p}^p\}$. Sabemos que $D_u(p) \subseteq \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_u(p))$, así que ahora probaremos que $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_u(p)) \subseteq D_u(p)$. Sea $\bar{a} \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_u(p))$ fijo y arbitrario, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_p} \in [0, 1]$, con $\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k = 1$ tal que $\bar{a} = \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p$.

Por otro lado, dado que u es cóncava, obtenemos que $\text{conv}(u)(\bar{a}) = u(\bar{a})$; y por el

corolario 2.4.2 conseguimos $u(\bar{a}) = \text{conv}(u)\left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p\right) = \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k u(a_k^p)$.

Luego, para cada $a \in A$ se cumple

$$\begin{aligned} u(a) - p \cdot a &= \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k (u(a) - p \cdot a) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k (u(a_k^p) - p \cdot a_k^p) \\ &= \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k u(a_k^p) - p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k a_k^p\right) \\ &= u(\bar{a}) - p \cdot \bar{a}. \end{aligned}$$

Por lo cual, $\bar{a} \in D_u(p)$. Dado que \bar{a} era fijo y arbitrario, concluimos que

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_u(p)) \subseteq D_u(p).$$

(\Leftarrow):

Sea \hat{u} la restricción de $\text{conv}(u)$ a $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, entonces por el teorema 2.4.1 y la proposición 1.2.2 obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{conv}(D_{\hat{u}}(p)) &= D_{\text{conv}(\hat{u})}(p) \\
&= \arg \max_{x \in \text{conv}(A)} \{\text{conv}(\hat{u})(x) - p \cdot x\} \\
&= \arg \max_{x \in \text{conv}(A)} \{\text{conv}(u)(x) - p \cdot x\} \\
&= D_{\text{conv}(u)}(p) \\
&= \text{conv}(D_u(p)).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Por la proposición 1.2.1, sabemos que \hat{u} es cóncava; entonces por la condición necesaria de este mismo teorema (teorema 2.4.3) obtenemos

$$D_{\hat{u}}(p) = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{\hat{u}}(p)), \forall p \in \mathbb{R}^n. \tag{2.23}$$

Luego, de (2.22), (2.23) y por la hipótesis, obtenemos

$$\begin{aligned}
D_{\hat{u}}(p) &= \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{\hat{u}}(p)), \forall p \in \mathbb{R}^n \\
&= \text{conv}(D_{\hat{u}}(p)) \cap \mathbb{Z}^n, \forall p \in \mathbb{R}^n \\
&= \text{conv}(D_u(p)) \cap \mathbb{Z}^n, \forall p \in \mathbb{R}^n \\
&= \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_u(p)), \forall p \in \mathbb{R}^n \\
&= D_u(p), \forall p \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Como \hat{u} es cóncava, entonces por el teorema 2.4.2 se cumple que para cada $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)) = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ existe algún $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in D_{\hat{u}}(p) = D_u(p)$. Es decir, para cada $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ existe algún $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in D_u(p) \subset A$. Por lo tanto, por el teorema 2.4.2, u es cóncava. \square

Ejemplo 2.4.1 *Para la valoración u del ejemplo 2.2.2 tenemos que no existe algún vector de precios $p = (p_1, p_2)$ al cual la cesta $(0, 1)$ se demanda, es decir, ningún vector de precios $p = (p_1, p_2)$ satisface $(0, 1) \in D_u(p)$. Por lo tanto, por el teorema 2.4.2, la valoración u no es cóncava.*

También podemos usar el teorema 2.4.3 para mostrar que esta valoración no es cóncava. De la figura 2.4 tenemos que para el vector de precios $p = (7, 3)$ se cumple

$$D_u(7, 3) = \{(0, 0), (0, 2)\}.$$

Luego, la cápsula convexa discreta de este conjunto es

$$\begin{aligned}
\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_u(7, 3)) &= \text{conv}(D_u(7, 3)) \cap \mathbb{Z}^2 \\
\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_u(7, 3)) &= \{t(0, 0) + (1-t)(0, 2) : t \in [0, 1]\} \cap \mathbb{Z}^2 \\
\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_u(7, 3)) &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}
\end{aligned}$$

entonces $D_u(7, 3)$ no es convexo discreto. Por lo tanto, u no es cóncava.

Finalmente, mostramos que ésta misma valoración u no es cóncava, pero usando la definición de concavidad del capítulo 1. Gráficamente podemos notar que el dominio A de la valoración u es convexo discreto

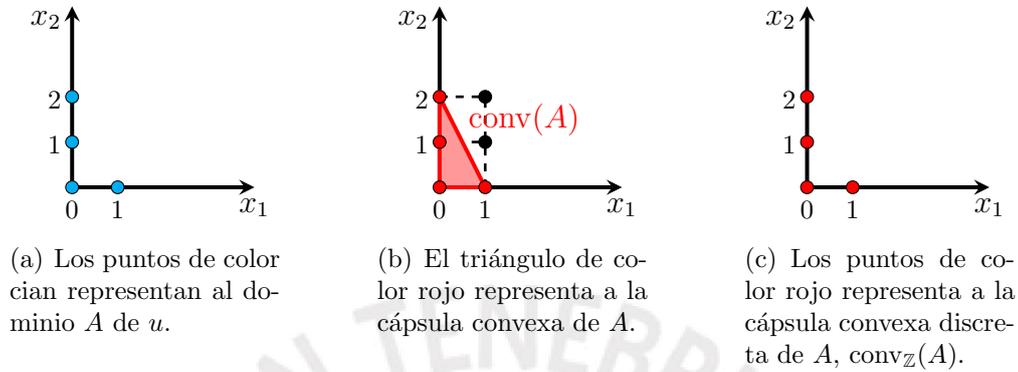


Figura 2.14: Representación gráfica de A y de sus cápsulas convexas usual y discreta.

Graficando la valoración u y su mayorante cóncava $\text{conv}(u)$, notamos que esta valoración no es cóncava, dado que $u(0, 1) < \text{conv}(u)(0, 1)$.

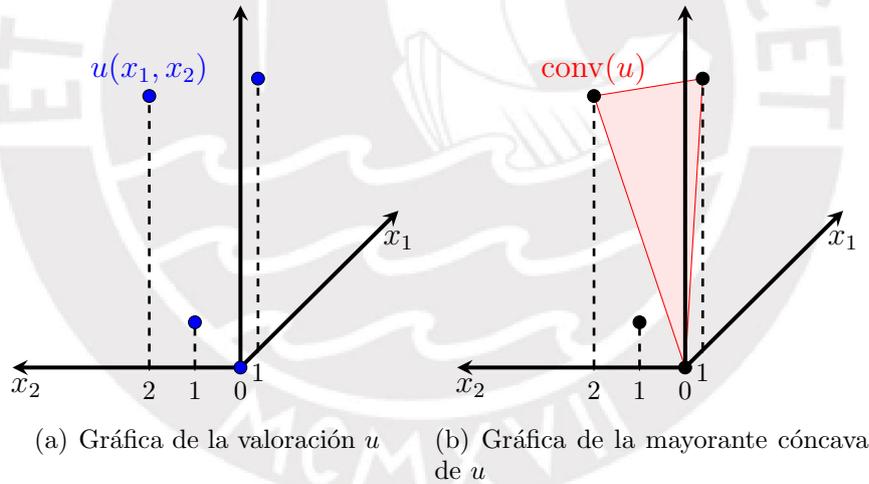


Figura 2.15: Gráfica de la valoración u del ejemplo 2.2.2, y de su mayorante cóncava.

Aunque el dominio A de la valoración u , del ejemplo 2.2.2, es convexo discreto; obtuvimos que la valoración u no es cóncava, dado que de la figura 2.15(b) se observa que $u(0, 1) < \text{conv}(u)(0, 1)$. Si incrementamos el valor de $u(0, 1)$ de tal manera que $u(0, 1) = \text{conv}(u)(0, 1)$, conseguiremos que u sea cóncava.

En general, si aumentamos débilmente una valoración hasta que llegue a ser cóncava, los únicos valores que necesitamos cambiar son los de las cestas nunca demandadas.

Además, aumentar el valor de cualquier cesta nunca demandada no tiene ningún efecto sobre el comportamiento del agente mientras que la cesta se convierta en una cesta marginalmente demandada, cuando la valoración llega a ser localmente afín. La cesta definida marginalmente es añadida al conjunto de demanda a algunos precios, pero nunca es demandada de manera única. Todas las demás cestas se demandan exactamente como antes, por lo que el LIP \mathcal{L}_u no se modifica. De manera más general, se cumplen los siguientes teoremas:

Teorema 2.4.4 *Sea $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ una valoración y sea $x \in A$. Entonces*

- 1) *Si $u(x) = \text{conv}(u)(x)$, entonces existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in D_u(p)$.*
- 2) *Si existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in D_u(p)$, entonces $u(x) = \text{conv}(u)(x)$.*

Demostración:

- 1) Si $u(x) = \text{conv}(u)(x)$, entonces el punto $(x, u(x))$ se encuentra en la frontera superior del politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$, con respecto a su última coordenada. Por consiguiente, existe un hiperplano, no vertical con normal apuntando hacia afuera, soporte a $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$ en $(x, u(x))$; es decir, existe $q \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $q_{n+1} > 0$ tal que

$$q \cdot v \leq q \cdot (x, u(x)), \quad \forall v \in \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}).$$

En particular,

$$q \cdot (a, u(a)) \leq q \cdot (x, u(x)), \quad \forall a \in A. \quad (2.24)$$

Definimos,

$$p = \left(-\frac{q_1}{q_{n+1}}, -\frac{q_2}{q_{n+1}}, \dots, -\frac{q_n}{q_{n+1}} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Afirmación: $u(a) - p \cdot a \leq u(x) - p \cdot x, \quad \forall a \in A$.

En efecto, para cada $a \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} u(a) - p \cdot a &= u(a) - \left(-\frac{q_1}{q_{n+1}}, -\frac{q_2}{q_{n+1}}, \dots, -\frac{q_n}{q_{n+1}} \right) \cdot a \\ &= u(a) + \frac{1}{q_{n+1}} (q_1, q_2, \dots, q_n) \cdot a \\ &= \frac{1}{q_{n+1}} (q_{n+1} u(a) + (q_1, q_2, \dots, q_n) \cdot a) \\ &= \frac{1}{q_{n+1}} (q \cdot (a, u(a))). \end{aligned}$$

Entonces, por (2.24), tenemos

$$\begin{aligned}
u(a) - p \cdot a &\leq \frac{1}{q_{n+1}}(q \cdot (x, u(x))) \\
&= \frac{1}{q_{n+1}}((q_1, q_2, \dots, q_n) \cdot x + q_{n+1} u(x)) \\
&= u(x) + \frac{1}{q_{n+1}}(q_1, q_2, \dots, q_n) \cdot x \\
&= u(x) - \left(-\frac{q_1}{q_{n+1}}, -\frac{q_2}{q_{n+1}}, \dots, -\frac{q_n}{q_{n+1}} \right) \cdot x \\
&= u(x) - p \cdot x.
\end{aligned}$$

Luego, de la afirmación, conseguimos $x \in D_u(p)$.

2) Si $x \in D_u(p)$ entonces, por el corolario 2.4.1, $u(x) = \text{conv}(u)(x)$.

□

Lema 2.4.1 *Si \hat{u} es la restricción de $\text{conv}(u)$ a $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, entonces*

$$|D_u(p)| = 1 \iff |D_{\hat{u}}(p)| = 1.$$

Demostración:

(\Rightarrow) :

Si $|D_u(p)| = 1$, entonces $D_u(p) = \text{conv}(D_u(p))$. Además, por el teorema 2.4.1, obtenemos que $D_u(p) = D_{\text{conv}(u)}(p)$. Luego, por la proposición 1.2.2, $D_u(p) = D_{\text{conv}(u)}(p) = D_{\text{conv}(\hat{u})}(p)$. Finalmente, aplicando el teorema 2.4.1 a la función \hat{u} , obtenemos

$$D_u(p) = D_{\text{conv}(\hat{u})}(p) = \text{conv}(D_{\hat{u}}(p)) \supseteq D_{\hat{u}}(p).$$

Entonces, dado que $D_{\hat{u}}(p) \neq \emptyset$, concluimos que $|D_{\hat{u}}(p)| = 1$.

(\Leftarrow) :

Si $|D_{\hat{u}}(p)| = 1$, entonces $D_{\hat{u}}(p) = \text{conv}(D_{\hat{u}}(p))$. Además, aplicando el teorema 2.4.1 a la función \hat{u} , obtenemos $D_{\hat{u}}(p) = D_{\text{conv}(\hat{u})}(p)$. Luego, por la proposición 1.2.2, $D_{\hat{u}}(p) = D_{\text{conv}(\hat{u})}(p) = D_{\text{conv}(u)}(p)$. Finalmente, por el teorema 2.4.1, conseguimos

$$D_{\hat{u}}(p) = D_{\text{conv}(u)}(p) = \text{conv}(D_u(p)) \supseteq D_u(p).$$

Entonces, dado que $D_u(p) \neq \emptyset$, concluimos que $|D_u(p)| = 1$.

□

Teorema 2.4.5 $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_{\hat{u}}$, donde \hat{u} es la restricción de $\text{conv}(u)$ a $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$.

Demostración: Por el lema 2.4.1, obtenemos

$$\mathcal{L}_u = \{p \in \mathbb{R}^n : |D_u(p)| > 1\} = \{p \in \mathbb{R}^n : |D_{\hat{u}}(p)| > 1\} = \mathcal{L}_{\hat{u}}.$$

□

Proposición 2.4.2 $D_u(p) = \{x \in A : u(x) = \text{conv}(u)(x)\} \cap D_{\text{conv}(u)}(p)$, $\forall p \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: Sea $p \in \mathbb{R}^n$ fijo y arbitrario.

(\subseteq):

Sea $x \in D_u(p)$ fijo y arbitrario. Por el corolario 2.4.1 tenemos que $u(x) = \text{conv}(u)(x)$.

Por otro lado, por la proposición 2.4.1, obtenemos

$$(-p, 1) \cdot (a, \text{conv}(u)(a)) \leq u(x) - p \cdot x, \forall a \in \text{conv}(A);$$

es decir,

$$\text{conv}(u)(a) - p \cdot a \leq \text{conv}(u)(x) - p \cdot x, \forall a \in \text{conv}(A).$$

Por lo tanto, $x \in D_{\text{conv}(u)}(p)$.

(\supseteq):

Sea $\tilde{x} \in \{x \in A : u(x) = \text{conv}(u)(x)\} \cap D_{\text{conv}(u)}(p)$ fijo y arbitrario, entonces

$$u(\tilde{x}) = \text{conv}(u)(\tilde{x}) \quad \text{y} \quad \text{conv}(u)(a) - p \cdot a \leq \text{conv}(u)(\tilde{x}) - p \cdot \tilde{x}, \forall a \in \text{conv}(A).$$

Es decir,

$$\text{conv}(u)(a) - p \cdot a \leq u(\tilde{x}) - p \cdot \tilde{x}, \forall a \in \text{conv}(A).$$

En particular,

$$\text{conv}(u)(a) - p \cdot a \leq u(\tilde{x}) - p \cdot \tilde{x}, \forall a \in A.$$

Entonces

$$u(a) - p \cdot a \leq \text{conv}(u)(a) - p \cdot a \leq u(\tilde{x}) - p \cdot \tilde{x}, \forall a \in A.$$

Por lo tanto, $\tilde{x} \in D_u(p)$.

□

Teorema 2.4.6 Si $x \in A$ es una cesta demandada, entonces para cada $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in \text{conv}(D_u(p))$ se cumple que $x \in D_u(p)$.

Demostración: Como $x \in A$ es una cesta demandada, entonces existe algún $q \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in D_u(q)$. Luego, por el corolario 2.4.1 tenemos que $u(x) = \text{conv}(u)(x)$.

Sea $p \in \mathbb{R}^n$ fijo y arbitrario tal que $x \in \text{conv}(D_u(p))$, mostraremos que $x \in D_u(p)$.

Por el teorema 2.4.1 obtenemos que $x \in \text{conv}(D_u(p)) = D_{\text{conv}(u)}(p)$. Entonces, por la proposición 2.4.2 concluimos que

$$x \in \{a \in A : u(a) = \text{conv}(u)(a)\} \cap D_{\text{conv}(u)}(p) = D_u(p).$$

□

2.5. El teorema de equivalencia Valoración Complejo

En esta sección enunciamos “El Teorema de equivalencia Valoración-Complejo”. Este teorema nos muestra que un conjunto \mathcal{L} en \mathbb{R}^n , que está conformado por una colección finita de conjuntos $(n - 1)$ -dimensionales que originan un complejo poliedral racional ponderado $(n - 1)$ -dimensional, es el LIP de alguna valoración u si y solo si este conjunto satisface la condición de equilibrio que definimos a continuación.

Definición 2.5.1 *Un complejo poliedral racional ponderado $(n - 1)$ -dimensional (Π, w) es **balanceado** o **equilibrado**, si para cada $(n - 2)$ -celda $G \in \Pi$, los pesos $w(F_j)$ de las facetas F_1, \dots, F_l que contienen a G , y los vectores normales enteros primitivos v_{F_j} para estas facetas que están definidos por una dirección de rotación fija alrededor de G , satisfacen*

$$\sum_{j=1}^l w(F_j) v_{F_j} = 0 \in \mathbb{R}^n. \quad (2.25)$$

Observación 2.5.1

- 1) Para $n = 3$, la dirección de rotación fija alrededor de G en la definición de arriba se interpreta de la siguiente manera: Tomamos cualquier círculo suficientemente pequeño, alrededor de un punto en G e incrustado en un plano bidimensional perpendicular a G ; entonces todos los vectores v_{F_j} deben apuntar en una dirección consistente alrededor de este círculo.
- 2) La igualdad (2.25) es conocida como la **condición de equilibrio** (balancing condition).

Ejemplo 2.5.1 *Por lo desarrollado en los ejemplos 2.3.4 y 2.3.6, la única 0-celda del LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.2, es $C_7 = \{(6, 3)\}$, así que vamos a analizar la condición de equilibrio sobre esta celda.*

Por lo obtenido en la demostración de la proposición 2.3.6 tenemos que los vectores enteros primitivos normales a las facetas C_4 , C_5 y C_6 que contienen a C_7 son, respectivamente,

$$v_{C_4} = \frac{1}{w(C_4)}((0, 0) - (1, 0)) = \frac{1}{1}(-1, 0) = (-1, 0)$$

$$v_{C_5} = \frac{1}{w(C_5)}((0, 2) - (0, 0)) = \frac{1}{2}(0, 2) = (0, 1)$$

$$v_{C_6} = \frac{1}{w(C_6)}((1, 0) - (0, 2)) = \frac{1}{1}(1, -2) = (1, -2)$$

Usando la figura 2.4 obtenemos

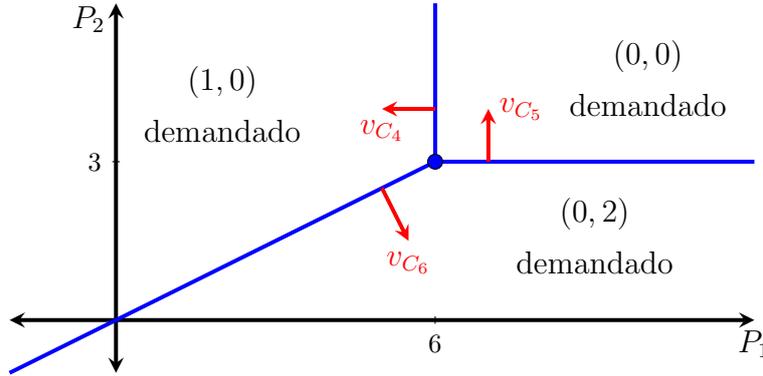


Figura 2.16: Facetas del LIP de u junto con sus respectivos vectores normales enteros primitivos.

Recuerde que los pesos de cada una de estas facetas fueron calculados en el ejemplo 2.3.8. Finalmente

$$w(C_4)v_{C_4} + w(C_6)v_{C_6} + w(C_5)v_{C_5} = 1 \times (-1, 0) + 1 \times (1, -2) + 2 \times (0, 1) = (0, 0)$$

Por lo tanto, las celdas del LIP de u junto con los pesos de las facetas del LIP forman un complejo poliedral racional balanceado $(n - 1)$ -dimensional.

Teorema 2.5.1 “Teorema de Equivalencia Valoración-Complejo” Supongamos que (Π, w) es un complejo poliedral racional ponderado $(n - 1)$ -dimensional en \mathbb{R}^n y \mathcal{L} es la unión de las celdas de Π , entonces se cumple que: Existe un conjunto finito no vacío $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ y una función $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}$ y $w_u = w$, si y solo si (Π, w) es balanceado.

Demostración:

(\Rightarrow) :

Supongamos que existe un conjunto finito no vacío $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ y una función $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}$ y $w_u = w$. Mostraremos que (Π, w) es balanceado. En efecto, para cada $(n - 2)$ -celda $G \in \Pi$, sean F_1, \dots, F_l las facetas del LIP que contienen a G , y sea x_1 la cesta de consumo únicamente demandada a un lado de F_1 , entonces por lo obtenido en la demostración de la proposición 2.3.6 tenemos que $v_{F_1} = \frac{1}{w(F_1)}(x_1 - x_2)$ es un vector entero primitivo normal a F_1 y se dirige desde $\mathcal{R}_u(x_1)$ hacia $\mathcal{R}_u(x_2)$, donde x_2 es la cesta únicamente demandada al otro lado de F_1 . Si consideramos que la cesta x_2

es únicamente demandada a un lado de F_2 ; y x_3 es la cesta de consumo únicamente demandada al otro lado de F_2 y demandada a un lado de F_3 y así sucesivamente; entonces el vector $v_{F_j} = \frac{1}{w(F_j)}(x_j - x_{j+1})$ es un vector entero primitivo normal a F_j y se dirige desde $\mathcal{R}_u(x_j)$ hacia $\mathcal{R}_u(x_{j+1})$. De esta manera, una vez que conocemos la demanda en una UDR particular y los pesos de cada una de las facetas de \mathcal{L}_u , podemos inferir la demanda en cada UDR pasando por una serie de facetas. Por lo tanto, estos vectores v_{F_j} están siguiendo una dirección de rotación fija alrededor de G . Dado que A es finito y seguimos a un agente a lo largo de una ruta de precios que termina donde comenzó, la demanda final debe ser la misma que al principio, es decir, concluimos que la cesta únicamente demandada x_{l+1} debe coincidir con la cesta únicamente demandada x_1 . Luego,

$$\sum_{j=1}^l w(F_j)v_{F_j} = \sum_{j=1}^l w(F_j) \left[\frac{1}{w(F_j)}(x_j - x_{j+1}) \right] = \sum_{j=1}^l (x_j - x_{j+1}) = x_1 - \underbrace{x_{l+1}}_{x_1} = 0$$

Por lo tanto, (Π, w) es balanceado.

(\Leftarrow):

Supongamos que (Π, w) es balanceado; mostraremos que existe un conjunto finito $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ y una función $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}$ y $w_u = w$.

Consideremos la colección $\tilde{\Pi} = \{-C : C \in \Pi\}$ y $\tilde{\mathcal{L}}$ la unión de las celdas en $\tilde{\Pi}$.

Afirmación: $\tilde{\Pi}$ es un complejo poliedral racional $(n-1)$ -dimensional en \mathbb{R}^n .

En efecto, si C es una celda de Π , entonces existen $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{Z}^n$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$C = \bigcap_{i=1}^k \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v_i \leq \alpha_i\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} -C &= -\bigcap_{i=1}^k \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v_i \leq \alpha_i\} \\ &= \bigcap_{i=1}^k \{-p \in \mathbb{R}^n : (-p) \cdot (-v_i) \leq \alpha_i\} \\ &= \bigcap_{i=1}^k \{q \in \mathbb{R}^n : q \cdot (-v_i) \leq \alpha_i\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $-C$ es un poliedro convexo racional.

Según la definición C.6.3, para demostrar que $\tilde{\Pi}$ es un complejo poliedral racional, debemos mostrar lo siguiente:

- i) Sea C una celda de Π y \tilde{C} una cara de $-C$; mostraremos que \tilde{C} pertenece a $\tilde{\Pi}$. Como \tilde{C} es una cara de $-C$, entonces existen $v \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$p \cdot v \leq q \cdot v = \alpha, \quad \forall p \in -C, \forall q \in \tilde{C}.$$

Reescribiendo la desigualdad de arriba, obtenemos

$$(-p) \cdot (-v) \leq (-q) \cdot (-v) = \alpha, \quad \forall p \in -C, \forall q \in \tilde{C}.$$

Es decir,

$$(-p) \cdot (-v) \leq (-q) \cdot (-v) = \alpha, \quad \forall -p \in C, \forall -q \in -\tilde{C}.$$

Por consiguiente, $-\tilde{C}$ es una cara de C . Dado que Π es un complejo poliedral racional y C es una celda de Π , concluimos que $-\tilde{C}$ es una celda de Π . Por lo tanto, $\tilde{C} = -(-\tilde{C})$ pertenece a $\tilde{\Pi}$.

- ii) Sean C y C' dos celdas de Π , entonces $(-C) \cap (-C') = \emptyset$ o $(-C) \cap (-C') \neq \emptyset$. Si $(-C) \cap (-C') = \emptyset$ entonces no hay nada más que probar. Ahora supongamos que $(-C) \cap (-C') \neq \emptyset$, entonces mostraremos que $(-C) \cap (-C')$ es una cara de ambas celdas $-C$ y $-C'$. Dado que Π es un complejo poliedral racional y C, C' son celdas de Π , concluimos que $C \cap C'$ es una cara de ambas celdas C y C' . Por consiguiente, existen $v, v' \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} p \cdot v \leq q \cdot v = \alpha, \quad \forall p \in C, \forall q \in C \cap C' \\ p \cdot v' \leq q \cdot v' = \alpha', \quad \forall p \in C', \forall q \in C \cap C' \end{aligned}$$

Reescribiendo las desigualdades de arriba, obtenemos

$$\begin{aligned} (-p) \cdot (-v) \leq (-q) \cdot (-v) = \alpha, \quad \forall -p \in -C, \forall -q \in -(C \cap C') \\ (-p) \cdot (-v') \leq (-q) \cdot (-v') = \alpha', \quad \forall -p \in -C', \forall -q \in -(C \cap C') \end{aligned}$$

Luego, dado que $(-C) \cap (-C') = -(C \cap C')$, conseguimos

$$\begin{aligned} (-p) \cdot (-v) \leq (-q) \cdot (-v) = \alpha, \quad \forall -p \in -C, \forall -q \in (-C) \cap (-C') \\ (-p) \cdot (-v') \leq (-q) \cdot (-v') = \alpha', \quad \forall -p \in -C', \forall -q \in (-C) \cap (-C') \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(-C) \cap (-C')$ es una cara de ambas celdas $-C$ y $-C'$.

Finalmente mostraremos que $\tilde{\Pi}$ es un complejo poliedral $(n-1)$ -dimensional. Sea C una celda de Π . Dado que Π es un complejo poliedral $(n-1)$ -dimensional, entonces existe alguna $(n-1)$ -celda de Π , F , tal que $C \subseteq F$. Por lo cual, $-C \subseteq -F$ y $-F$ es una $(n-1)$ -celda de $\tilde{\Pi}$.

Continuando con la demostración del teorema, si para cada $(n - 1)$ -celda $-F$ de $\tilde{\Pi}$, definimos $\tilde{w}(-F) = w(F)$, concluimos que $(\tilde{\Pi}, \tilde{w})$ es un complejo poliedral racional ponderado $(n - 1)$ -dimensional. Además, dado que (Π, w) es balanceado y $-\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}$, obtenemos que $(\tilde{\Pi}, \tilde{w})$ es balanceado. Luego, por la proposición 1.3.3, existe un conjunto finito $A \subsetneq \mathbb{Z}^n$ y una función $v : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $-\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} = \Pi_v$. Definimos

$$\begin{aligned} u & : A \longrightarrow \mathbb{R} \\ a & \longmapsto u(a) := -v(a) \end{aligned}$$

entonces $\mathcal{L} = -\Pi_v = -\Pi_{-u} = -T(f_u) = \mathcal{L}_u$. Además, $w_u = w$. \square

Como podemos ver, la “condición de equilibrio” es la única condición que debe satisfacer un complejo poliedral racional ponderado $(n - 1)$ -dimensional, para corresponder al LIP de alguna valoración. Sin embargo, esta valoración no es única. Recordemos que en el teorema 2.4.5 mostramos que cada valoración u da lugar al mismo LIP que la restricción \hat{u} de la mayorante cóncava de u a $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, donde además esta valoración \hat{u} es cóncava. Por otro lado, se puede demostrar sin dificultad que

- 1) Si $c \in \mathbb{R}$ una constante y u' es una valoración definida como

$$\begin{aligned} u' & : A \longrightarrow \mathbb{R} \\ a & \longmapsto u'(a) = u(a) + c \end{aligned}$$

entonces $\mathcal{L}_{u'} = \mathcal{L}_u$.

- 2) Si $A' = A + z$, donde $z \in \mathbb{Z}^n$; y u' es una valoración definida como

$$\begin{aligned} u' & : A' \longrightarrow \mathbb{R} \\ a + z & \longmapsto u'(a + z) = u(a) \end{aligned}$$

entonces $\mathcal{L}_{u'} = \mathcal{L}_u$.

Así que para precisar una única valoración cóncava, necesitamos especificar el conjunto de demanda a algún vector de precios y el valor de una cesta de consumo. Estas ideas son reflejadas en el siguiente corolario.

Corolario 2.5.1 *Supongamos que (Π, w) es un complejo poliedral racional ponderado $(n - 1)$ -dimensional en \mathbb{R}^n , \mathcal{L} es la unión de las celdas en Π , y $p \in \mathbb{R}^n$ es cualquier vector de precios que no pertenece a \mathcal{L} . Si (Π, w) es balanceado, entonces existe un conjunto finito no vacío $A \subsetneq \mathbb{Z}^n$ con $0 \in A$ y una única valoración cóncava $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $D_u(p) = \{0\}$, $u(0) = 0$, $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}$, y $w_u = w$.*

Demostración: Si (Π, w) es balanceado entonces por el teorema 2.5.1, existe un conjunto finito no vacío $\tilde{A} \subsetneq \mathbb{Z}^n$ y una función $\tilde{v} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_{\tilde{v}} = \mathcal{L}$ y $w_{\tilde{v}} = w$. Como $p \notin \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tilde{v}}$ entonces existe un $a^* \in \tilde{A}$ tal que $D_{\tilde{v}}(p) = \{a^*\}$. Definimos el conjunto $A' := \tilde{A} - a^* \subsetneq \mathbb{Z}^n$ y la función

$$\begin{aligned} v' : A' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{a} - a^* &\longmapsto v'(\tilde{a} - a^*) := \tilde{v}(\tilde{a}) \end{aligned}$$

Afirmación 1: $D_{\tilde{v}}(q) - a^* \subseteq D_{v'}(q), \forall q \in \mathbb{R}^n$.

En efecto, sea $q \in \mathbb{R}^n$ fijo y arbitrario. Para cada $x \in D_{\tilde{v}}(q) \subseteq \tilde{A}$, se cumple

$$\tilde{v}(\tilde{a}) - q \cdot \tilde{a} \leq \tilde{v}(x) - q \cdot x, \forall \tilde{a} \in \tilde{A},$$

entonces

$$v'(\tilde{a} - a^*) - q \cdot \tilde{a} \leq v'(x - a^*) - q \cdot x, \forall \tilde{a} - a^* \in \tilde{A} - a^*.$$

Sumando $q \cdot a^*$ en ambos lados de la desigualdad de arriba, obtenemos

$$v'(\tilde{a} - a^*) - q \cdot (\tilde{a} - a^*) \leq v'(x - a^*) - q \cdot (x - a^*), \forall \tilde{a} - a^* \in A'.$$

Por lo cual, $x - a^* \in D_{v'}(q), \forall x \in D_{\tilde{v}}(q)$. Por consiguiente, $D_{\tilde{v}}(q) - a^* \subseteq D_{v'}(q)$.

Finalmente, por la arbitrariedad de $q \in \mathbb{R}^n$, concluimos que la afirmación 1 es válida.

Afirmación 2: $D_{v'}(q) + a^* \subseteq D_{\tilde{v}}(q), \forall q \in \mathbb{R}^n$.

En efecto, sea $q \in \mathbb{R}^n$ fijo y arbitrario. Para cada $x \in D_{v'}(q) \subseteq A'$, se cumple

$$v'(\tilde{a} - a^*) - q \cdot (\tilde{a} - a^*) \leq v'(x) - q \cdot x, \forall \tilde{a} - a^* \in A',$$

entonces

$$\tilde{v}(\tilde{a}) - q \cdot \tilde{a} + q \cdot a^* \leq v'(x + a^* - a^*) - q \cdot x, \forall \tilde{a} \in A' + a^*.$$

Luego, por la definición de la función v' , tenemos

$$\tilde{v}(\tilde{a}) - q \cdot \tilde{a} \leq \tilde{v}(x + a^*) - q \cdot (x + a^*), \forall \tilde{a} \in \tilde{A},$$

Por lo cual, $x + a^* \in D_{\tilde{v}}(q), \forall x \in D_{v'}(q)$. Por consiguiente, $D_{v'}(q) + a^* \subseteq D_{\tilde{v}}(q)$.

Finalmente, por la arbitrariedad de $q \in \mathbb{R}^n$, concluimos que la afirmación 2 es válida.

Luego, de las afirmaciones 1 y 2, tenemos

$$D_{v'}(q) = D_{\tilde{v}}(q) - a^*, \forall q \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo cual,

$$|D_{v'}(q)| = |D_{\tilde{v}}(q)|, \forall q \in \mathbb{R}^n.$$

Por consiguiente, $\mathcal{L}_{v'} = \mathcal{L}_{\bar{v}} = \mathcal{L}$ y $w_{v'} = w_{\bar{v}} = w$. Además,

$$D_{v'}(p) = D_{\bar{v}}(p) - a^* = \{a^*\} - a^* = \{0\}.$$

Ahora definimos

$$\begin{aligned} v &: A' \longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto v(a) := v'(a) - v'(0) \end{aligned}$$

Afirmación 3: $D_v(q) = D_{v'}(q), \forall q \in \mathbb{R}^n$.

En efecto, para cada $q \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\begin{aligned} x \in D_{v'}(q) &\iff v'(a) - q \cdot a \leq v'(x) - q \cdot x, \forall a \in A' \\ &\iff v'(a) - v'(0) - q \cdot a \leq v'(x) - v'(0) - q \cdot x, \forall a \in A' \\ &\iff v(a) - q \cdot a \leq v(x) - q \cdot x, \forall a \in A' \\ &\iff x \in D_v(q). \end{aligned}$$

Por lo cual, la afirmación 3 es válida.

Continuando con la demostración del corolario, de la afirmación 3 tenemos $\mathcal{L}_v = \mathcal{L}_{v'} = \mathcal{L}$ y $w_v = w_{v'} = w$. Además,

$$D_v(p) = D_{v'}(p) = \{0\} \text{ y } v(0) = v'(0) - v'(0) = 0.$$

Denotemos por A a la cápsula convexa de A' , es decir, $A = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A')$; y por u a la restricción de $\text{conv}(v)$ a $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A')$. Luego, por la proposición 1.2.1, u es cóncava. Además, por el teorema 2.4.5, $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_v = \mathcal{L}$ y $w_u = w_v = w$. Por otro lado, por el teorema 2.4.1, obtenemos $D_{\text{conv}(v)}(p) = \text{conv}(D_v(p)) = \text{conv}(\{0\}) = \{0\}$. De esta manera, tenemos

$$\text{conv}(v)(a) - p \cdot a < \text{conv}(v)(0) - p \cdot 0, \quad \forall a \in \text{conv}(A') \setminus \{0\}.$$

En particular,

$$\underbrace{\text{conv}(v)(a)}_{u(a)} - p \cdot a < \underbrace{\text{conv}(v)(0)}_{u(0)} - p \cdot 0, \quad \forall a \in A = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A') \setminus \{0\}.$$

Por lo cual, $D_u(p) = \{0\}$. Luego, aplicando el ítem 1) del teorema 2.4.4 a la función v , conseguimos

$$u(0) = \text{conv}(v)(0) = v(0) = 0.$$

De esta manera, hemos mostrado que existe un conjunto finito no vacío $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ y una valoración cóncava $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $D_u(p) = \{0\}$, $u(0) = 0$, $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}$, y $w_u = w$. Finalmente, la unicidad de esta valoración cóncava u se puede justificar a partir de que hemos especificado la demanda $0 \in A$ establecida a algún vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$ y el valor de u en la cesta de consumo $0 \in A$. \square

2.6. El Complejo de Demanda

En esta sección describimos el “Complejo de Demanda” (en el espacio de cantidades), el cual es dual a nuestro complejo de precios ponderado.

Definición 2.6.1 Una **celda de demanda**, σ , para u es un conjunto de la forma $\sigma := \text{conv}(D_u(p))$, para algún vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 2.6.1 Cada celda de demanda para u es un poliedro convexo racional.

Demostración: Sea σ una celda de demanda para u , entonces existe algún $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma = \text{conv}(D_u(p))$. Como $D_u(p) \subseteq A \subseteq \mathbb{Z}^n$ y A es finito, concluimos que $\sigma = \text{conv}(D_u(p))$ es un politopo racional o reticular. Por lo tanto, $\sigma = \text{conv}(D_u(p))$ es un poliedro convexo racional acotado. \square

Definición 2.6.2 El **complejo de demanda** para u , Σ_u , (también denotado por $\text{dc}(u)$) es el conjunto de todas las celdas de demanda para u .

En adelante, algunas veces las celdas de demanda para u serán llamadas **celdas del complejo de demanda** de u .

Definición 2.6.3

- 1) *Los vértices del complejo de demanda de u son sus 0-celdas.*
- 2) *Los bordes del complejo de demanda de u son sus 1-celdas.*
- 3) *La longitud de un borde del complejo de demanda de u es el número de vectores enteros primitivos, que se encuentran a lo largo de él (es decir, su longitud o norma euclidiana dividida por la longitud o norma euclidiana del vector entero primitivo paralelo a él).*

Ejemplo 2.6.1 Para la valoración u del ejemplo 2.2.1 tenemos

- 1) $D_u(p_1, p_2) = \{(0, 0)\}$, $\forall (p_1, p_2) \in \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : 5 < p_1, 4 < p_2\}$. Entonces

$$\sigma_1 = \text{conv}(D_u(p_1, p_2)) = \text{conv}(\{(0, 0)\}) = \{(0, 0)\}$$

es una celda del complejo de demanda para u . En la figura 2.17 (a), esta celda está sombreada de color rojo.

2) $D_u(p_1, p_2) = \{(1, 0)\}$, $\forall (p_1, p_2) \in \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 < 5, p_1 < p_2 + 1\}$. Entonces

$$\sigma_2 = \text{conv}(D_u(p_1, p_2)) = \text{conv}(\{(1, 0)\}) = \{(1, 0)\}$$

es una celda del complejo de demanda para u . En la figura 2.17 (a), esta celda está sombreada de color cian.

3) $D_u(p_1, p_2) = \{(0, 1)\}$, $\forall (p_1, p_2) \in \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 < 4, p_2 + 1 < p_1\}$. Entonces

$$\sigma_3 = \text{conv}(D_u(p_1, p_2)) = \text{conv}(\{(0, 1)\}) = \{(0, 1)\}$$

es una celda del complejo de demanda para u . En la figura 2.17 (a), esta celda está sombreada de color verde.

4) $D_u(5, p_2) = \{(0, 0), (1, 0)\}$, $\forall p_2 \in \{p_2 \in \mathbb{R} : 4 < p_2\}$. Entonces

$$\sigma_4 = \text{conv}(\{(0, 0), (1, 0)\}) = \{(t, 0) : t \in [0, 1]\}$$

es una celda del complejo de demanda para u . En la figura 2.17 (b), esta celda está sombreada de color rojo.

5) $D_u(p_1, 4) = \{(0, 0), (0, 1)\}$, $\forall p_1 \in \{p_1 \in \mathbb{R} : 5 < p_1\}$. Entonces

$$\sigma_5 = \text{conv}(\{(0, 0), (0, 1)\}) = \{(0, t) : t \in [0, 1]\}$$

es una celda del complejo de demanda para u . En la figura 2.17 (b), esta celda está sombreada de color verde.

6) $D_u(p_1, p_2) = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\forall (p_1, p_2) \in \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = p_2 + 1, p_2 < 4\}$. Entonces

$$\sigma_6 = \text{conv}(\{(1, 0), (0, 1)\}) = \{t(1, 0) + (1 - t)(0, 1) : t \in [0, 1]\}$$

es una celda del complejo de demanda para u . En la figura 2.17 (b), esta celda está sombreada de color azul.

7) $D_u(5, 4) = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \sigma_7 &= \text{conv}(\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}) \\ &= \{t(0, 0) + r(1, 0) + s(0, 1) : t, r, s \in [0, 1] \text{ y } t + r + s = 1\} \end{aligned}$$

es una celda del complejo de demanda para u . En la figura 2.17 (c), esta celda está sombreada de color azul.

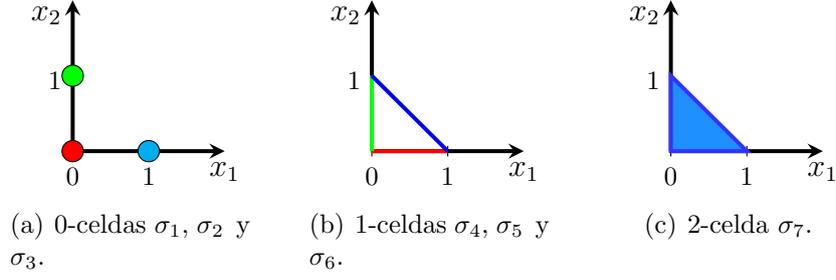


Figura 2.17: Celdas del complejo de demanda para u del ejemplo 2.2.1

En el capítulo 1, vimos que $\{(x, \text{conv}(u)(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \text{conv}(A)\}$ (la gráfica de la mayorante cóncava de u , $\text{conv}(u)$) es la frontera superior de $\text{conv}(\text{lift}_u(A)) = \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$, con respecto a su última coordenada. Llamamos a este conjunto, el “techo” de la valoración u ; y a los conjuntos de la forma $\hat{\sigma} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D_{\text{conv}(u)}(p)\}$, los llamamos “caras del techo” de u . Además, por el corolario 2.4.3 y por el teorema 2.4.1, tenemos que $\hat{\sigma} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D_{\text{conv}(u)}(p)\}$ es una cara expuesta del politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$. Luego, por el teorema C.7.1, $\hat{\sigma}$ es un politopo.

Proposición 2.6.2 *Las “caras del techo” de u forman un complejo poliedral.*

Demostración: Sabemos que todas las “caras del techo” de u son politopos. Según la definición C.6.1, para demostrar que las “caras del techo” de u forman un complejo poliedral, debemos mostrar lo siguiente:

- i) Si $\hat{\sigma}$ es una “cara del techo” de u entonces, por el teorema C.4.2, cada cara propia de $\hat{\sigma}$ es una cara expuesta del politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$. Además, estas caras propias de $\hat{\sigma}$ son “caras del techo” de u .
- ii) Sean $\hat{\sigma}$ y $\tilde{\sigma}$ dos “caras del techo” de u , entonces $\hat{\sigma} \cap \tilde{\sigma} = \emptyset$ ó $\hat{\sigma} \cap \tilde{\sigma} \neq \emptyset$. Si $\hat{\sigma} \cap \tilde{\sigma} = \emptyset$ entonces no hay nada más que probar. Ahora supongamos que $\hat{\sigma} \cap \tilde{\sigma} \neq \emptyset$, entonces mostraremos que $\hat{\sigma} \cap \tilde{\sigma}$ es una cara de ambos. Por el teorema C.4.4, $\hat{\sigma} \cap \tilde{\sigma}$ es una cara expuesta del politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$. Luego, dado que $\hat{\sigma} \cap \tilde{\sigma} \subseteq \hat{\sigma}$ y $\hat{\sigma} \cap \tilde{\sigma} \subseteq \tilde{\sigma}$ entonces, por la proposición C.5.1, concluimos que $\hat{\sigma} \cap \tilde{\sigma}$ es una cara de $\hat{\sigma}$ y de $\tilde{\sigma}$.

□

Proposición 2.6.3 *Sea $x \in A$ una cesta de consumo marginalmente demandada por el agente, entonces $(x, u(x))$ no es un vértice del politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$.*

Demostración: Por el método de reducción al absurdo, supongamos que $(x, u(x))$ es un vértice del politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$. Dado que $x \in A$ es una cesta de consumo demandada por el agente, entonces por el corolario 2.4.1 tenemos que $u(x) = \text{conv}(u)(x)$. Por lo cual, el punto $(x, u(x))$ se encuentra en la frontera superior de $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$, con respecto a su última coordenada. Por consiguiente, existe un hiperplano H no vertical, con normal apuntando hacia afuera, soporte a $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$ en $(x, u(x))$ tal que

$$H \cap \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}) = \{(x, u(x))\}$$

es decir, existe un $q \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $q_{n+1} > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$H := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : q \cdot v = \beta\} \text{ y } H \cap \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}) = \{(x, u(x))\} \quad (2.26)$$

Si definimos $p = \left(-\frac{q_1}{q_{n+1}}, -\frac{q_2}{q_{n+1}}, \dots, -\frac{q_n}{q_{n+1}}\right) \in \mathbb{R}^n$, entonces por (2.26), para cada $a \in A \setminus \{x\}$ se cumplirá

$$\begin{aligned} u(a) - p \cdot a &= u(a) - \left(-\frac{q_1}{q_{n+1}}, -\frac{q_2}{q_{n+1}}, \dots, -\frac{q_n}{q_{n+1}}\right) \cdot a \\ &= \frac{1}{q_{n+1}}(q_{n+1}u(a) + (q_1, q_2, \dots, q_n) \cdot a) \\ &= \frac{1}{q_{n+1}}q \cdot (a, u(a)) \\ &< \frac{1}{q_{n+1}}q \cdot (x, u(x)) \\ &= u(x) - p \cdot x \end{aligned}$$

Por lo cual, $u(a) - p \cdot a < u(x) - p \cdot x$, $\forall a \in A \setminus \{x\}$; lo cual es una contradicción porque x no es una cesta únicamente demandada. Por lo tanto, $(x, u(x))$ no es un vértice del politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$. \square

Proposición 2.6.4 *Sea $x \in A$ una cesta de consumo únicamente demandada a algún vector de precios, entonces $(x, u(x))$ es un vértice del politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$.*

Demostración: Como $x \in A$ es una cesta de consumo únicamente demandada, entonces existe algún $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $D_u(p) = \{x\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x = a^1$. De esta manera tenemos que

$$u(a^k) - p \cdot a^k < u(x) - p \cdot x, \quad \forall k = 2, 3, \dots, \alpha. \quad (2.27)$$

Afirmación: $(-p, 1) \cdot v < u(x) - p \cdot x$, $\forall v \in \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$.

En efecto, sea $v \in \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$ fijo y arbitrario, entonces existen $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^\alpha \in [0, 1]$ con $\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k = 1$ tal que $v = \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k (a^k, u(a^k))$. Luego,

$$\begin{aligned} (-p, 1) \cdot v &= (-p, 1) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k a^k, \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k u(a^k) \right) \\ &= -p \cdot \left(\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k a^k \right) + \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k u(a^k) \\ &= \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k (-p \cdot a^k) + \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k u(a^k) \\ &= \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k (u(a^k) - p \cdot a^k) \end{aligned}$$

Entonces, por (2.27), obtenemos

$$(-p, 1) \cdot v < \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda^k (u(x) - p \cdot x) = u(x) - p \cdot x.$$

Dado que v era fijo y arbitrario, concluimos que

$$(-p, 1) \cdot v < u(x) - p \cdot x, \forall v \in \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}).$$

Ahora definimos el hiperplano

$$H := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : (-p, 1) \cdot v = u(x) - p \cdot x\}.$$

Entonces por la afirmación, H es un hiperplano soporte a $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$ en $\{(x, u(x))\}$; y además $H \cap \text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}) = \{(x, u(x))\}$. Por lo tanto, $(x, u(x))$ es un vértice del politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$. \square

El siguiente lema nos permite encontrar una relación entre las caras del techo de u y las celdas del complejo de demanda para u .

Lema 2.6.1 *Sea $\hat{\sigma} \subsetneq \{(x, \text{conv}(u)(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \text{conv}(A)\}$, entonces se cumple que: $\hat{\sigma}$ es una cara del techo de la valoración u si y solo si la proyección de $\hat{\sigma}$ respecto a sus primeras n coordenadas, $\pi(\hat{\sigma})$, es una celda $\sigma \subsetneq \text{conv}(A) \subsetneq \mathbb{R}^n$ del complejo de demanda para u .*

Demostración:

(\Rightarrow):

Como $\hat{\sigma}$ es una cara del techo de la valoración u , entonces existe algún $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\hat{\sigma} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D_{\text{conv}(u)}(p)\}$. Por lo cual, la proyección de $\hat{\sigma}$ respecto a sus primeras n coordenadas es $\sigma = \pi(\hat{\sigma}) = D_{\text{conv}(u)}(p)$. Luego, por el teorema 2.4.1, obtenemos que $\sigma = \pi(\hat{\sigma}) = \text{conv}(D_u(p))$. Por lo tanto, la proyección de $\hat{\sigma}$ respecto a sus primeras n coordenadas es una celda del complejo de demanda para u .

(\Leftarrow):

Como $\pi(\hat{\sigma}) = \sigma$ es una celda del complejo de demanda para u , entonces existe algún $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi(\hat{\sigma}) = \sigma = \text{conv}(D_u(p))$. Luego, por el teorema 2.4.1, obtenemos que $\pi(\hat{\sigma}) = \sigma = D_{\text{conv}(u)}(p)$. Por lo tanto, $\hat{\sigma} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D_{\text{conv}(u)}(p)\}$. \square

De esta manera, podemos usar el lema 2.6.1 para hallar las celdas del complejo de demanda para u . Lo único que haremos será proyectar las caras del techo de u sobre \mathbb{R}^n y así obtener la colección de todas las celdas del complejo de demanda para u .

Ejemplo 2.6.2 *Las gráficas de la valoración u del ejemplo 2.2.3 y de su mayorante cóncava son:*

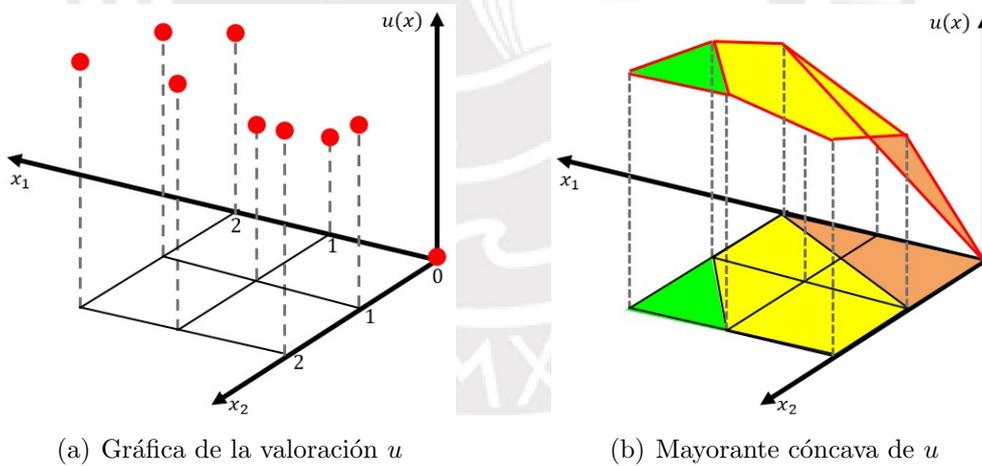


Figura 2.18: Gráfica de la valoración u del ejemplo 2.2.3 y su mayorante cóncava.

Sabemos que el “techo” de u coincide con la gráfica de la mayorante cóncava de u , así que las “caras del techo” de u , de dimensión 2, son las placas cerradas de color verde claro, amarillo y marrón claro que se encuentran sobre la gráfica de la mayorante cóncava de u en la figura 2.18(b). Mientras que las “caras del techo” de u , de dimensión

1, son todos los segmentos cerrados de color rojo que se encuentran sobre la gráfica de la mayorante cóncava de u en la figura 2.18(b). Además, las “caras del techo” de u , de dimensión 0, son todas las intersecciones no vacías entre los segmentos cerrados de color rojo que se encuentran sobre la gráfica de la mayorante cóncava de u en la figura 2.18(b). Proyectando las caras del techo de u en \mathbb{R}^2 obtenemos las celdas del complejo de demanda para u .

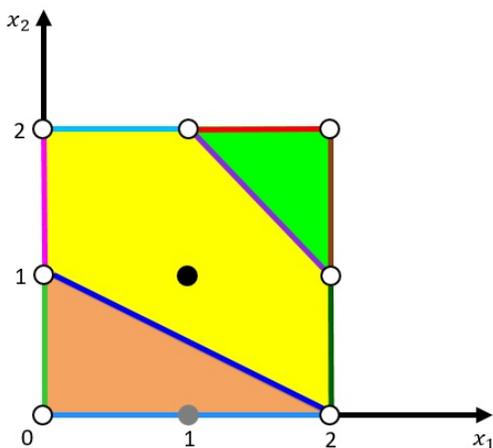


Figura 2.19: Complejo de demanda para u .

La figura 2.19, muestra las tres 2-celdas del complejo de demanda para u , sombreadas de color verde claro, amarillo y marrón claro para que coincidan con las caras del techo de u en la figura 2.18(b). Además, las 2-celdas están separadas por nueve bordes (segmentos cerrados que son las 1-celdas del complejo de demanda para u). Estos nueve bordes se intersecan en los siete vértices del complejo de demanda para u , los cuales están representados por los círculos “blancos”. Por otro lado, los círculos de colores gris y negro representan a cestas de consumo que no son vértices del complejo de demanda para u , ya que ellos no son únicamente demandados a ningún vector de precios.

Del ejemplo 2.6.2, observamos que el complejo de demanda no puede decirnos si las cestas no-vértice son nunca demandadas. Sin embargo, nos dice que si una cesta no-vértice, x , es demandada a algún vector de precios, entonces x es demandada en los vectores de precios correspondientes a las celdas del complejo de demanda en las que se encuentra x . Esto fue demostrado en el teorema 2.4.6.

Teorema 2.6.1 *El complejo de demanda para u , $dc(u)$, es un complejo poliedral racional.*

Demostración: De la proposición 2.6.1 sabemos que cada celda del complejo de demanda para u es un poliedro racional. Según la definición C.6.3, para demostrar que el complejo de demanda para u es un complejo poliedral racional, debemos mostrar lo siguiente:

- i) Sea C una cara propia de la celda del complejo de demanda $\sigma = \text{conv}(D_u(p))$, mostraremos que C es una celda del complejo de demanda para u . Consideremos los conjuntos

$$\hat{\sigma} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in \sigma\} \quad \text{y} \quad \hat{C} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in C\}.$$

Como C es una cara de σ entonces existen $v \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot v \leq x \cdot v = \beta, \quad \forall a \in \sigma \quad \text{y} \quad \forall x \in C. \quad (2.28)$$

Luego, dado que $\text{conv}(u)(x) - p \cdot x = \text{conv}(u)(x') - p \cdot x'$ para cada $x, x' \in \sigma$, denotamos a este valor constante por $r = \text{conv}(u)(x) - p \cdot x$, donde $x \in \sigma$. Ahora, definimos $\hat{v} = (v - p, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $\hat{\beta} = \beta + r$.

Afirmación: $\hat{a} \cdot \hat{v} \leq \hat{x} \cdot \hat{v} = \hat{\beta}, \quad \forall \hat{a} \in \hat{\sigma} \quad \text{y} \quad \forall \hat{x} \in \hat{C}$.

En efecto, para cada $\hat{a} \in \hat{\sigma}$ y $\hat{x} \in \hat{C}$, existen $a \in \sigma$ y $x \in C$, respectivamente, tal que $\hat{a} = (a, \text{conv}(u)(a))$ y $\hat{x} = (x, \text{conv}(u)(x))$. Luego,

$$\hat{a} \cdot \hat{v} = (a, \text{conv}(u)(a)) \cdot (v - p, 1) = a \cdot (v - p) + \text{conv}(u)(a) = a \cdot v - a \cdot p + \text{conv}(u)(a).$$

De (2.28) obtenemos

$$\hat{a} \cdot \hat{v} \leq x \cdot v + \text{conv}(u)(a) - p \cdot a.$$

Dado que $a \in \sigma$ y $x \in C \subset \sigma$; y por el teorema 2.4.1, concluimos que

$$\text{conv}(u)(a) - p \cdot a = \text{conv}(u)(x) - p \cdot x.$$

Por lo cual,

$$\hat{a} \cdot \hat{v} \leq x \cdot v + \text{conv}(u)(x) - p \cdot x = (x, \text{conv}(u)(x)) \cdot (v - p, 1) = \hat{x} \cdot \hat{v} = \hat{\beta}.$$

Por lo tanto, se cumple la afirmación.

De esta afirmación concluimos que \hat{C} es una cara de $\hat{\sigma}$. Entonces, dado que $\hat{\sigma}$ es una cara del techo, por la proposición 2.6.2 concluimos que \hat{C} también es una cara del techo; por lo cual, existe algún $q \in \mathbb{R}^n$ tal que $\hat{C} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D_{\text{conv}(u)}(q)\}$. Por consiguiente, $C = D_{\text{conv}(u)}(q) = \text{conv}(D_u(q))$, es decir, C es una celda del complejo de demanda para u .

ii) Sean $\sigma = \text{conv}(D_u(p))$ y $\rho = \text{conv}(D_u(q))$ dos celdas del complejo de demanda para u , entonces $\sigma \cap \rho = \emptyset$ ó $\sigma \cap \rho \neq \emptyset$.

Si $\sigma \cap \rho = \emptyset$ entonces no hay nada más que probar.

Ahora supongamos que $\sigma \cap \rho \neq \emptyset$, entonces mostraremos que $\sigma \cap \rho$ es una cara de ambos. Consideremos los conjuntos

$$\hat{\sigma} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in \sigma\} \quad \text{y} \quad \hat{\rho} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in \rho\}.$$

Entonces $\hat{\sigma} \cap \hat{\rho} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in \sigma \cap \rho\} \neq \emptyset$. Dado que $\hat{\sigma}$ y $\hat{\rho}$ son caras del techo, por la proposición 2.6.2, concluimos que $\hat{\sigma} \cap \hat{\rho}$ es una cara de ambos. En particular, $\hat{\sigma} \cap \hat{\rho}$ es una cara de $\hat{\sigma}$; por consiguiente, existen $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $\bar{\beta} \in \mathbb{R}$ tal que para cada $(x, \text{conv}(u)(x)) \in \hat{\sigma}$ y $(\bar{x}, \text{conv}(u)(\bar{x})) \in \hat{\sigma} \cap \hat{\rho}$ se cumple

$$(x, \text{conv}(u)(x)) \cdot \bar{v} \leq (\bar{x}, \text{conv}(u)(\bar{x})) \cdot \bar{v} = \bar{\beta}. \quad (2.29)$$

Si $\bar{v}_{n+1} = 0$, definimos $v^* = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \in \mathbb{R}^n$. En este caso, por (2.29), para cada $\bar{x} \in \sigma \cap \rho$ y cada $x \in \sigma$, obtenemos

$$x \cdot v^* = (x, \text{conv}(u)(x)) \cdot \bar{v} \leq (\bar{x}, \text{conv}(u)(\bar{x})) \cdot \bar{v} = \bar{x} \cdot v^* = \bar{\beta},$$

es decir, $\sigma \cap \rho$ es una cara de σ .

Si $\bar{v}_{n+1} > 0$, definimos $v = \left(\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_{n+1}} + p_1, \dots, \frac{\bar{v}_n}{\bar{v}_{n+1}} + p_n \right) \in \mathbb{R}^n$. Tengamos presente que $\text{conv}(u)(x) - p \cdot x = \text{conv}(u)(x') - p \cdot x'$ para cada $x, x' \in \sigma$, y denotemos a este valor constante por $r = \text{conv}(u)(x) - p \cdot x$, donde $x \in \sigma$. De esta manera, definimos $\beta = \frac{\bar{\beta}}{\bar{v}_{n+1}} - r \in \mathbb{R}$. En este caso, para cada $x \in \sigma$, tenemos que

$$\begin{aligned} x \cdot v &= x \cdot \left(\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_{n+1}} + p_1, \dots, \frac{\bar{v}_n}{\bar{v}_{n+1}} + p_n \right) \\ &= \frac{1}{\bar{v}_{n+1}} x \cdot (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) + x \cdot p \\ &= \frac{1}{\bar{v}_{n+1}} x \cdot (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) + \text{conv}(u)(x) - \text{conv}(u)(x) + p \cdot x \\ &= \frac{1}{\bar{v}_{n+1}} [x \cdot (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) + \bar{v}_{n+1} \text{conv}(u)(x)] - \text{conv}(u)(x) + p \cdot x \\ &= \frac{1}{\bar{v}_{n+1}} (x, \text{conv}(u)(x)) \cdot \bar{v} - [\text{conv}(u)(x) - p \cdot x] \end{aligned}$$

Luego, por (2.29), para cada $\bar{x} \in \sigma \cap \rho$, obtenemos

$$x \cdot v \leq \frac{1}{\bar{v}_{n+1}} (\bar{x}, \text{conv}(u)(\bar{x})) \cdot \bar{v} - [\text{conv}(u)(x) - p \cdot x] = \frac{\bar{\beta}}{\bar{v}_{n+1}} - r = \beta.$$

Dado que $x \in \sigma$ y $\bar{x} \in \sigma$, entonces por el teorema 2.4.1, obtenemos que

$$\text{conv}(u)(x) - p \cdot x = \text{conv}(u)(\bar{x}) - p \cdot \bar{x}.$$

Por lo cual,

$$\begin{aligned} x \cdot v &\leq \frac{1}{\bar{v}_{n+1}} (\bar{x}, \text{conv}(u)(\bar{x})) \cdot \bar{v} - \text{conv}(u)(\bar{x}) + p \cdot \bar{x} \\ &= \frac{1}{\bar{v}_{n+1}} [\bar{x} \cdot (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) + \bar{v}_{n+1} \text{conv}(u)(\bar{x})] - \text{conv}(u)(\bar{x}) + p \cdot \bar{x} \\ &= \frac{1}{\bar{v}_{n+1}} \bar{x} \cdot (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) + \text{conv}(u)(\bar{x}) - \text{conv}(u)(\bar{x}) + \bar{x} \cdot p \\ &= \frac{1}{\bar{v}_{n+1}} \bar{x} \cdot (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) + \bar{x} \cdot p \\ &= \bar{x} \cdot \left(\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_{n+1}} + p_1, \dots, \frac{\bar{v}_n}{\bar{v}_{n+1}} + p_n \right) \\ &= \bar{x} \cdot v = \beta \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sigma \cap \rho$ es una cara de σ .

En tanto, si $\bar{v}_{n+1} < 0$, definimos $v' = \left(-\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_{n+1}} - p_1, \dots, -\frac{\bar{v}_n}{\bar{v}_{n+1}} - p_n \right) \in \mathbb{R}^n$ y

$\beta' = -\frac{\bar{\beta}}{\bar{v}_{n+1}} + r \in \mathbb{R}$. Con éstas asignaciones llegamos a

$$x \cdot v' \leq \bar{x} \cdot v' = \beta', \quad \forall x \in \sigma, \forall \bar{x} \in \sigma \cap \rho.$$

Por lo cual, $\sigma \cap \rho$ es una cara de σ .

De manera análoga se puede demostrar que $\sigma \cap \rho$ es una cara de ρ . Por lo tanto, $\sigma \cap \rho$ es una cara de σ y de ρ .

□

Del lema 1.2.1, podemos concluir que

$$\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in \text{conv}(A), y \in \Gamma_u(x)\}.$$

Luego, $\Gamma_u(x) = \{\text{conv}(u)(x)\}$ para cada $x \in \text{conv}(A)$, si y solo si

$$\dim(\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})) = \dim(\text{conv}(A)).$$

Mientras que,

$$\dim(\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})) = \dim(\text{conv}(A)) + 1$$

si y solo si existe algún $x \in \text{conv}(A)$ tal que $\Gamma_u(x)$ no es unitario. Ahora usaremos esta observación para demostrar que el complejo de demanda para u , $\text{dc}(u)$, es un complejo poliedral racional r -dimensional, donde $r = \dim(\text{conv}(A))$.

Teorema 2.6.2 *El complejo de demanda para u , $\text{dc}(u)$, es un complejo poliedral racional r -dimensional, donde $r = \dim(\text{conv}(A))$.*

Demostración: Por el teorema 2.6.1 sabemos que el complejo de demanda para u , $\text{dc}(u)$, es un complejo poliedral racional. Ahora mostraremos que este complejo poliedral es r -dimensional, donde $r = \dim(\text{conv}(A))$.

Caso 1: $\dim(\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})) = \dim(\text{conv}(A)) < n + 1$.

En este caso, existe un hiperplano no vertical, con normal apuntando hacia arriba, que contiene a $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$; es decir, existe un $q \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $q_{n+1} > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\}) \subset H := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : q \cdot v = \beta\}.$$

Si definimos $p = \left(-\frac{q_1}{q_{n+1}}, -\frac{q_2}{q_{n+1}}, \dots, -\frac{q_n}{q_{n+1}}\right) \in \mathbb{R}^n$, entonces para cada $a \in A$ se cumple

$$\begin{aligned} u(a) - p \cdot a &= u(a) - \left(-\frac{q_1}{q_{n+1}}, -\frac{q_2}{q_{n+1}}, \dots, -\frac{q_n}{q_{n+1}}\right) \cdot a \\ &= \frac{1}{q_{n+1}}(q_{n+1}u(a) + (q_1, q_2, \dots, q_n) \cdot a) \\ &= \frac{1}{q_{n+1}}q \cdot (a, u(a)) \\ &= \frac{\beta}{q_{n+1}} \quad (\text{constante}) \end{aligned}$$

Por lo cual,

$$u(a) - p \cdot a = u(x) - p \cdot x, \quad \forall a, x \in A.$$

Por lo tanto, $D_u(p) = A$ y además $\dim(\text{conv}(D_u(p))) = \dim(\text{conv}(A))$. Luego, si σ es una celda del complejo de demanda para u , entonces existe algún $p' \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma = \text{conv}(D_u(p'))$. Como $D_u(p') \subseteq D_u(p) = A$, entonces obtenemos que

$$\sigma = \text{conv}(D_u(p')) \subseteq \text{conv}(D_u(p)) = \text{conv}(A).$$

Por lo cual, cada celda σ del complejo de demanda para u , esta contenida en la r -celda $\text{conv}(D_u(p))$ del complejo de demanda para u .

Caso 2: $\dim(\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})) = \dim(\text{conv}(A)) + 1 \leq n + 1$.

Si $x' \in A$ es una cesta únicamente demandada, entonces existe algún $p' \in \mathbb{R}^n$ tal que $D_u(p') = \{x'\}$, por lo cual, $\text{conv}(D_u(p')) = \{x'\}$ y además $\dim(\text{conv}(D_u(p'))) = 0$. Entonces, el politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$ tiene caras propias de todas las dimensiones, desde cero hasta $r = \dim(\text{conv}(A))$. Sea σ una celda del complejo de

demanda para u , entonces existe algún $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma = \text{conv}(D_u(p))$, por lo cual, $\hat{\sigma} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in D_{\text{conv}(u)}(p)\}$ es una cara expuesta del politopo $\text{conv}(\{(a, u(a)) : a \in A\})$. Luego, $\hat{\sigma}$ es igual a la intersección de todas las r -caras del techo de u que contienen a $\hat{\sigma}$. Por consiguiente, existe algún $\tilde{p} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\hat{\sigma}$ esta contenido en la r -cara expuesta $\tilde{\sigma} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in D_{\text{conv}(u)}(\tilde{p})\}$, es decir,

$$\hat{\sigma} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in D_{\text{conv}(u)}(p)\} \subset \tilde{\sigma} = \{(x, \text{conv}(u)(x)) : x \in D_{\text{conv}(u)}(\tilde{p})\}.$$

Entonces

$$D_{\text{conv}(u)}(p) \subset D_{\text{conv}(u)}(\tilde{p}).$$

Luego, por el teorema 2.4.1, obtenemos

$$\sigma = \text{conv}(D_u(p)) \subset \text{conv}(D_u(\tilde{p})).$$

Por lo cual, la celda σ del complejo de demanda para u está contenida en la r -celda $\text{conv}(D_u(\tilde{p}))$ del complejo de demanda para u .

Entonces, en cualquiera de los dos casos posibles se cumple que toda celda del complejo de demanda para u , está contenida en alguna r -celda del complejo de demanda para u . Por lo tanto, el complejo de demanda para u , $\text{dc}(u)$, es un complejo poliedral racional r -dimensional, donde $r = \dim(\text{conv}(A))$. \square

2.7. Dualidad entre el complejo de demanda para u y el complejo de precios ponderado de u

Sea σ una celda del complejo de demanda de u ($\sigma \in \text{dc}(u)$), entonces existe algún $p \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sigma = \text{conv}(D_u(p)).$$

Para esta celda del complejo de demanda de u , asociemos la celda del complejo de precios de u , C_σ , definida por

$$C_\sigma := \{q \in \mathbb{R}^n : D_u(p) \subseteq D_u(q)\} \in \text{pc}(u).$$

Notemos que, si $p^* \in \mathbb{R}^n$ es un vector de precios distinto de p , tal que $\sigma = \text{conv}(D_u(p^*))$ entonces $\{q \in \mathbb{R}^n : D_u(p) \subseteq D_u(q)\} = \{q \in \mathbb{R}^n : D_u(p^*) \subseteq D_u(q)\}$. De esta manera, la siguiente función está bien definida

$$\begin{aligned} F_d : \text{dc}(u) &\longrightarrow \text{pc}(u) \\ \sigma &\longmapsto F_d(\sigma) := C_\sigma \end{aligned}$$

Proposición 2.7.1 *La función F_d es biyectiva.*

Demostración: Primero demostramos que la función F_d es inyectiva. Sean $\sigma, \hat{\sigma} \in \text{dc}(u)$ tal que $F_d(\sigma) = C_\sigma = C_{\hat{\sigma}} = F_d(\hat{\sigma})$, mostraremos que $\sigma = \hat{\sigma}$. Como $\sigma, \hat{\sigma} \in \text{dc}(u)$ entonces existen $p, \hat{p} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma = \text{conv}(D_u(p))$ y $\hat{\sigma} = \text{conv}(D_u(\hat{p}))$. Se cumple que $D_u(p) = D_u(\hat{p})$, puesto que por hipótesis tenemos que $p \in C_\sigma = C_{\hat{\sigma}}$, entonces $D_u(\hat{p}) \subseteq D_u(p)$. Además, dado que $\hat{p} \in C_{\hat{\sigma}} = C_\sigma$, obtenemos que $D_u(p) \subseteq D_u(\hat{p})$. Esto nos permite concluir que $\sigma = \text{conv}(D_u(p)) = \text{conv}(D_u(\hat{p})) = \hat{\sigma}$.

Ahora probaremos que la función F_d es sobreyectiva. Sea $C \in \text{pc}(u)$ entonces por el lema 2.3.1, $C = \{p \in \mathbb{R}^n : D_u(p^\circ) \subseteq D_u(p)\}$, para algún $p^\circ \in \text{ri}(C)$. Definimos $\sigma = \text{conv}(D_u(p^\circ))$, entonces $F_d(\sigma) = C$. Por lo tanto, F_d es sobreyectiva. \square

Por el teorema 2.3.4, para cada celda C del complejo de precios de u ($C \in \text{pc}(u)$), podemos asociar la celda del complejo de demanda de u , σ_C , definida por

$$\sigma_C = \text{conv}(D_u(p^\circ)),$$

donde $p^\circ \in \text{ri}(C)$. Además, por este mismo teorema, la celda del complejo de demanda, σ_C , no varía. Por lo tanto, la siguiente función está bien definida.

$$\begin{aligned} F_p : \text{pc}(u) &\longrightarrow \text{dc}(u) \\ C &\longmapsto F_p(C) := \sigma_C \end{aligned}$$

Proposición 2.7.2 *F_p es la función inversa de F_d .*

Demostración:

i) Sea $C \in \text{pc}(u)$ entonces

$$\begin{aligned} (F_d \circ F_p)(C) &= F_d(F_p(C)) \\ &= F_d(\text{conv}(D_u(p^\circ))), \text{ donde } p^\circ \in \text{ri}(C) \\ &= \{p \in \mathbb{R}^n : D_u(p^\circ) \subseteq D_u(p)\}, \text{ donde } p^\circ \in \text{ri}(C) \\ &= C, \text{ por el lema 2.3.1} \end{aligned}$$

ii) Sea $\sigma \in \text{dc}(u)$ entonces existe algún $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma = \text{conv}(D_u(p))$. Luego,

$$(F_p \circ F_d)(\sigma) = F_p(F_d(\sigma)) = F_p(\underbrace{\{q \in \mathbb{R}^n : D_u(p) \subseteq D_u(q)\}}_{C_\sigma}). \quad (2.30)$$

Afirmación: $D_u(p) = D_u(q^\circ)$, $\forall q^\circ \in \text{ri}(C_\sigma)$.

En efecto, para cada $q^\circ \in \text{ri}(C_\sigma) \subseteq C_\sigma$ se cumple que $D_u(p) \subseteq D_u(q^\circ)$. Además, dado que $p \in C_\sigma$, por el lema 2.3.1 concluimos que $D_u(q^\circ) \subseteq D_u(p)$, para cada $q^\circ \in \text{ri}(C_\sigma)$. Por lo tanto, $D_u(p) = D_u(q^\circ)$, $\forall q^\circ \in \text{ri}(C_\sigma)$.

Luego, de la afirmación concluimos que $p \in \text{ri}(C_\sigma)$. Entonces, en (2.30) obtenemos

$$(F_p \circ F_d)(\sigma) = \text{conv}(D_u(p)) = \sigma.$$

Por lo tanto, F_p es la función inversa de F_d . □

Teorema 2.7.1 (Dualidad) *Existe una correspondencia biyectiva entre el complejo de demanda para u , $\text{dc}(u)$, y el complejo de precios ponderado de u , $\text{pc}(u)$, que asocia: vértices del complejo de demanda para u con cerraduras de UDRs de u ; bordes del complejo de demanda para u con facetas ponderadas del LIP, \mathcal{L}_u ; y k -celdas σ del complejo de demanda para u con $(n - k)$ -celdas C_σ del complejo de precios de u , para $1 \leq k \leq \dim(\text{conv}(A))$; tal que*

- 1) $\sigma = \text{conv}(D_u(p^\circ))$ si y solo si $p^\circ \in \text{ri}(C_\sigma)$.
- 2) $C_\sigma = \{p \in \mathbb{R}^n : \sigma \subseteq \text{conv}(D_u(p))\}$.
- 3) Relaciones de inclusión inversa: $\sigma \subsetneq \hat{\sigma}$ si y solo si $C_{\hat{\sigma}} \subsetneq C_\sigma$.
- 4) $(q - p) \cdot (y - x) = 0$, $\forall p, q \in C_\sigma, \forall x, y \in \sigma$.
- 5) Tal correspondencia hace que las facetas F_σ del LIP esten asociadas a bordes σ (del complejo de demanda para u) de longitud $w_u(F_\sigma)$.

Demostración: De las proposiciones 2.7.1 y 2.7.2 es claro que existe una correspondencia biyectiva entre $\text{dc}(u)$ y $\text{pc}(u)$. Además, por las proposiciones 2.6.3 y 2.6.4 se obtiene que esta correspondencia biyectiva asocia vértices del complejo de demanda para u con cerraduras de las UDRs de u .

Sea $\sigma = \text{conv}(D_u(p^\circ))$ una k -celda del complejo de demanda para u , con $1 \leq k \leq \dim(\text{conv}(A))$; entonces

$$C_\sigma = \{p \in \mathbb{R}^n : D_u(p^\circ) \subseteq D_u(p)\}, \text{ donde } p^\circ \in \text{ri}(C_\sigma). \quad (2.31)$$

Supongamos que $D_u(p^\circ) = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$, entonces

$$C_\sigma = \{p \in \mathbb{R}^n : x^1, \dots, x^m \in D_u(p)\};$$

es decir,

$$\begin{aligned}
C_\sigma = \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot (x^i - x^l) = u(x^i) - u(x^l), \forall l, i = 1, 2, \dots, m; \\
p \cdot (x^i - a) \leq u(x^i) - u(a), \forall i = 1, 2, \dots, m \text{ y} \\
\forall a \in A \setminus D_u(p^\circ)\}. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Por lo cual,

$$\text{aff}(C_\sigma) = \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot (x^i - x^l) = u(x^i) - u(x^l), \forall l, i = 1, 2, \dots, m \text{ con } i \neq l\}.$$

Dado que $\sigma = \text{conv}(D_u(p^\circ))$ es k -dimensional, concluimos que hay k vectores linealmente independientes de la forma $x^i - x^l$. Por lo tanto, $\dim(C_\sigma) = n - k$.

- 1) De las proposiciones 2.7.1 y 2.7.2 concluimos que $\sigma = \text{conv}(D_u(p^\circ))$ si y solo si $p^\circ \in \text{ri}(C_\sigma)$.
- 2) Sabemos que $C_\sigma = \{q \in \mathbb{R}^n : D_u(p^\circ) \subseteq D_u(q)\}$, donde $p^\circ \in \text{ri}(C_\sigma)$. Luego, para cada $q \in C_\sigma$, se cumple que $\sigma = \text{conv}(D_u(p^\circ)) \subseteq \text{conv}(D_u(q))$. Por lo cual, $C_\sigma \subseteq \{p \in \mathbb{R}^n : \sigma \subseteq \text{conv}(D_u(p))\}$. Por otro lado, sea $p^* \in \{p \in \mathbb{R}^n : \sigma \subseteq \text{conv}(D_u(p))\}$ fijo y arbitrario.

Afirmación: $D_u(p^\circ) \subseteq D_u(p^*)$.

En efecto, para cada $x \in D_u(p^\circ)$ se cumple que

$$x \in \sigma = \text{conv}(D_u(p^\circ)) \subseteq \text{conv}(D_u(p^*)).$$

Luego, por el teorema 2.4.6, $x \in D_u(p^*)$. Por lo tanto, $D_u(p^\circ) \subseteq D_u(p^*)$.

De la afirmación obtenemos que $p^* \in C_\sigma$. Por lo tanto, $C_\sigma = \{p \in \mathbb{R}^n : \sigma \subseteq \text{conv}(D_u(p))\}$.

- 3) (\Rightarrow):

Supongamos que $\sigma \subsetneq \hat{\sigma}$. Por el ítem 2) de este teorema, para cada $p^* \in C_{\hat{\sigma}} = \{p \in \mathbb{R}^n : \hat{\sigma} \subseteq \text{conv}(D_u(p))\}$ se cumple que $\sigma \subsetneq \hat{\sigma} \subseteq \text{conv}(D_u(p^*))$. Entonces, $p^* \in C_\sigma = \{p \in \mathbb{R}^n : \sigma \subseteq \text{conv}(D_u(p))\}$. Por lo tanto, $C_{\hat{\sigma}} \subseteq C_\sigma$. Además, por la proposición 2.7.1, $C_{\hat{\sigma}} \subsetneq C_\sigma$.

- (\Leftarrow):

Supongamos que $C_{\hat{\sigma}} \subsetneq C_\sigma$. Sea $\hat{p}^\circ \in \text{ri}(C_{\hat{\sigma}}) \subseteq C_{\hat{\sigma}} \subsetneq C_\sigma$, entonces por el lema 2.3.1 se cumple que $D_u(p^\circ) \subseteq D_u(\hat{p}^\circ)$, donde $p^\circ \in \text{ri}(C_\sigma)$. Por consiguiente, $\sigma = \text{conv}(D_u(p^\circ)) \subseteq \text{conv}(D_u(\hat{p}^\circ)) = \hat{\sigma}$. Además, por las proposiciones 2.7.1 y 2.7.2, $\sigma \subsetneq \hat{\sigma}$.

4) De (2.31) y (2.32), obtenemos que

$$p \cdot (x^i - x^l) = u(x^i) - u(x^l), \quad \forall i, l = 1, 2, \dots, m \quad \text{y} \quad \forall p \in C_\sigma.$$

Por lo cual,

$$(q - p) \cdot (x^i - x^l) = 0, \quad \forall i, l = 1, 2, \dots, m \quad \text{y} \quad \forall p, q \in C_\sigma. \quad (2.33)$$

Sean $x, y \in \sigma = \text{conv}(D_u(p^\circ))$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in [0, 1]$ con $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$ y $\sum_{k=1}^m \beta_k = 1$ tal que $x = \sum_{k=1}^m \lambda_k x^k$ e $y = \sum_{k=1}^m \beta_k x^k$. Luego, para cada $p, q \in C_\sigma$ se cumple

$$\begin{aligned} (q - p) \cdot (y - x) &= (q - p) \cdot \left(\sum_{k=1}^m \beta_k x^k - \sum_{k=1}^m \lambda_k x^k \right) \\ &= (q - p) \cdot \left(\sum_{k=1}^m \beta_k x^k - x^1 + x^1 - \sum_{k=1}^m \lambda_k x^k \right) \\ &= (q - p) \cdot \left(\sum_{k=1}^m \beta_k x^k - \sum_{k=1}^m \beta_k x^1 + \sum_{k=1}^m \lambda_k x^1 - \sum_{k=1}^m \lambda_k x^k \right) \\ &= (q - p) \cdot \left(\sum_{k=1}^m \beta_k (x^k - x^1) + \sum_{k=1}^m \lambda_k (x^1 - x^k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \beta_k (q - p) \cdot (x^k - x^1) + \sum_{k=1}^m \lambda_k (q - p) \cdot (x^1 - x^k). \end{aligned}$$

Siguiendo (2.33) se concluye, $(q - p) \cdot (y - x) = 0$, $\forall p, q \in C_\sigma, \forall x, y \in \sigma$.

5) Sea F_σ una faceta de \mathcal{L}_u , entonces existen dos cestas x y x' únicamente demandadas una en cada lado de F_σ . Además, $\{x, x'\} \subseteq D_u(p^\circ)$, para todo $p^\circ \in \text{ri}(F_\sigma)$. Luego, por las proposiciones 2.6.3 y 2.6.4, las cestas x, x' son los extremos del borde $\sigma = \text{conv}(D_u(p^\circ))$. Adicionalmente, por lo obtenido en la demostración de la proposición 2.3.6 tenemos que $v_{F_\sigma} = \frac{1}{w_u(F_\sigma)}(x - x')$ es un vector entero primitivo normal a F_σ . Por consiguiente, la longitud del borde σ es $\frac{\|x - x'\|}{\|v_{F_\sigma}\|} = w_u(F_\sigma)$. Por lo tanto, facetas F_σ de \mathcal{L}_u están asociadas a bordes σ (del complejo de demanda para u) de longitud $w_u(F_\sigma)$.

□

Para ilustrar el teorema de dualidad, recordemos el LIP, las regiones de demanda única y las celdas del complejo de demanda de la valoración u del ejemplo 2.2.3

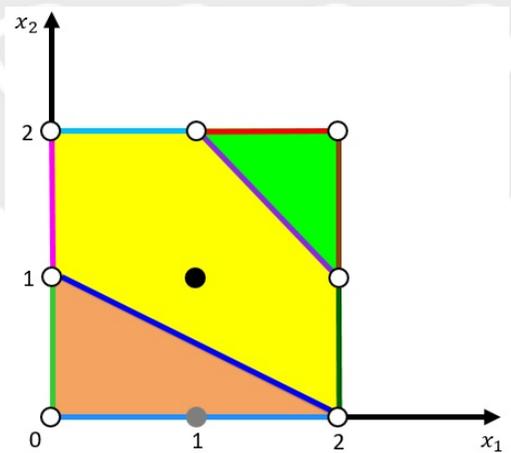
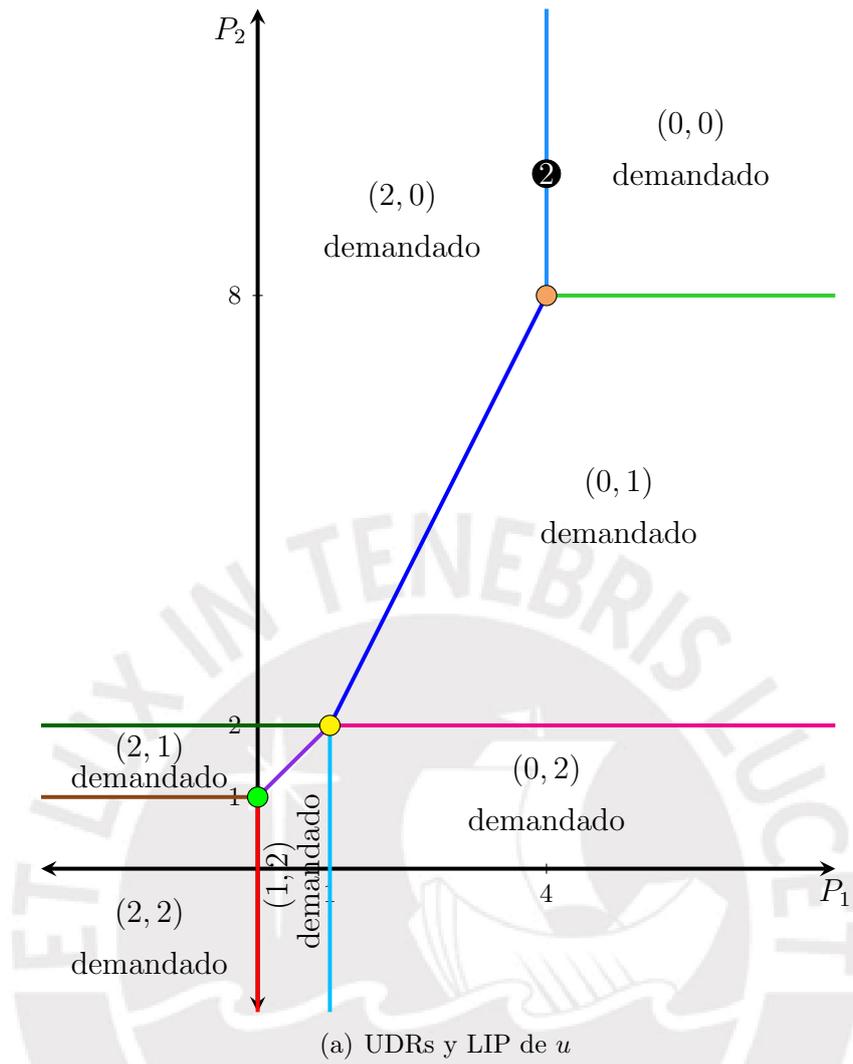


Figura 2.20: El complejo de precios de u y el complejo de demanda para u

De la figura 2.20 observamos que las 0-celdas del LIP de u , $C_1 = \{(4, 8)\}$, $C_2 = \{(1, 2)\}$ y $C_3 = \{(0, 1)\}$ son duales a las 2-celdas de colores marrón claro, amarillo y verde claro del complejo de demanda para u , respectivamente. Las nueve facetas de \mathcal{L}_u de la figura 2.20(a) son duales a los nueve bordes del complejo de demanda para u de la figura 2.20(b), con el color correspondiente. Cada una de las siete UDRs de u , alrededor del LIP de la figura 2.20(a), es dual a alguna de las siete cestas representadas en los círculos blancos de la figura 2.20(b), los cuales son los siete vértices del complejo de demanda para u .

Notemos que el borde horizontal de color azul claro en la parte inferior del complejo de demanda para u pasa a través de una cesta y tiene longitud 2 (en el sentido de la definición 2.6.3, parte 3). Este borde es dual a la faceta vertical de color azul claro del LIP de u , que correspondientemente tiene peso 2, y así está etiquetada. Por otro lado, todos los demás bordes de este complejo de demanda de u tienen longitud 1 y todas las demás facetas del LIP de u tienen correspondientemente peso 1.

Como observamos en el ejemplo 2.6.2, ni la cesta de color gris ni la cesta de color negro son vértices del complejo de demanda para u , ya que ninguna de las dos cestas es únicamente demandada a ningún vector de precios, por lo que tampoco corresponden a ninguna UDR de u .

Por otro lado, el teorema 2.4.6 y el ítem 1) del teorema de dualidad nos permiten caracterizar el conjunto de precios a los que una cesta x es demandada:

Corolario 2.7.1 *Supongamos que σ es la mínima (en el sentido de la inclusión) celda del complejo de demanda para u tal que $x \in \sigma$, y que x es una cesta de consumo demandada a algún vector de precios. Entonces, $x \in D_u(p)$ si y solo si $p \in C_\sigma$.*

Demostración:

(\Rightarrow) :

Si $x \in D_u(p)$, entonces $x \in \text{conv}(D_u(p))$. Luego, dado que σ es la mínima celda del complejo de demanda para u tal que $x \in \sigma$; entonces se cumple $\sigma \subseteq \text{conv}(D_u(p))$. Por el ítem 2) del teorema 2.7.1, concluimos que $p \in C_\sigma = \{q \in \mathbb{R}^n : \sigma \subseteq \text{conv}(D_u(q))\}$.

(\Leftarrow) :

Si $p \in C_\sigma$, entonces por el ítem 2) del teorema 2.7.1 obtenemos $\sigma \subseteq \text{conv}(D_u(p))$. Luego, dado que la cesta x es demanda y $x \in \sigma \subseteq \text{conv}(D_u(p))$, por el teorema 2.4.6 concluimos que $x \in D_u(p)$. \square

Por último, para cualquier complejo de demanda único, existen múltiples LIPs pon-

derados que satisfacen las correspondencias y relaciones de ortogonalidad del Teorema de Dualidad. Por lo tanto, es natural agrupar todas las valoraciones cuyos complejos de demanda son iguales o difieren solo por un cambio constante en alguna cesta, x .

Definición 2.7.1 *Dos valoraciones u y u' tienen el mismo **tipo combinatorio**, si ellas tienen el mismo complejo de demanda, ó si existe algún $x \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\sigma \in \text{dc}(u)$ si y solo si $\{x\} + \sigma \in \text{dc}(u')$.*

Antes de terminar esta sección daremos algunas observaciones y/o comparaciones acerca de trabajar en el espacio de precios o en el espacio de cantidades. Por ejemplo, el Teorema de equivalencia valoración-complejo se aplica únicamente en el espacio de precios. En el espacio de cantidades, por el contrario, no es cierto que todas las formas de subdividir $\text{conv}(A)$ en un complejo poliedral racional produzcan un complejo de demanda.

Además, los LIPs nos muestran los vectores de precios reales a los que se demandan las cestas, mientras que un complejo de demanda solo nos muestra conjuntos de cestas entre los cuales el agente es indiferente para algunos vectores de precios.

Consideramos que la forma más fácil de calcular el LIP de una valoración específica es a menudo encontrando primero el complejo de demanda (por ejemplo, es fácil pasar de la regla de correspondencia de la valoración u del ejemplo 2.2.3 a la Figura 2.19 y luego, usando la dualidad, a la Figura 2.20(a)).

Por lo tanto, el hecho de que las diferentes representaciones sean útiles en diferentes contextos hace que la capacidad de moverse fácilmente entre ellas, utilizando la dualidad, sea muy valiosa.

2.8. Tipos de demanda \mathcal{D}

Hemos visto que los vectores normales de las facetas del LIP describen cómo cambia la demanda entre las UDRs. Por lo tanto, ellas dan todas las direcciones posibles de cambio en la demanda (si las hay) que pueden resultar genéricamente de un pequeño cambio en los precios. Así que, es por esta razón que clasificamos las valoraciones en “tipos de demanda” de acuerdo a los vectores normales de las facetas del LIP.

Definición 2.8.1 *Sea $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{Z}^n$ un conjunto de vectores enteros primitivos no nulos, tal que si $v \in \mathcal{D}$ entonces $-v \in \mathcal{D}$. El **tipo de demanda** definido por \mathcal{D} comprende valoraciones u tales que cada faceta de \mathcal{L}_u tiene un vector normal en \mathcal{D} .*

Ejemplo 2.8.1 Del ejemplo 2.5.1, obtenemos que la valoración u del ejemplo 2.2.2, es del tipo de demanda $\mathcal{D} = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, -2)\}$.

Ejemplo 2.8.2 También se puede probar que la valoración u del ejemplo 2.2.1, es del tipo de demanda $\mathcal{D} = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(-1, 1)\}$.

Observación 2.8.1 Una valoración u es de cualquier tipo de demanda \mathcal{D} que contenga a los vectores normales de las facetas de su LIP. No nos restringimos a considerar el mínimo (en el sentido de la inclusión) de tales conjuntos, es decir, si la valoración u es del tipo de demanda \mathcal{D} y $\tilde{\mathcal{D}} \subsetneq \mathbb{Z}^n$ es un conjunto de vectores enteros primitivos no nulos tal que si $v \in \tilde{\mathcal{D}}$ entonces $-v \in \tilde{\mathcal{D}}$, y además $\mathcal{D} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}$; entonces u es del tipo de demanda $\tilde{\mathcal{D}}$.

Proposición 2.8.1 Cada tipo de demanda definida por un conjunto finito de vectores enteros primitivos, \mathcal{D} , es el mínimo tipo de demanda para alguna valoración.

Demostración: Supongamos que $|\mathcal{D}| = 2d < +\infty$ y $\mathcal{D} = \{\pm v^1, \pm v^2, \dots, \pm v^d\}$. Definimos la colección Π , cuyos elementos son conjuntos de la forma

$$C = \left(\bigcap_{l \in \Lambda} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l = 0\} \right) \cap \left(\bigcap_{l \in \Gamma} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l \leq 0\} \right) \cap \left(\bigcap_{l \in \Omega} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l \geq 0\} \right) \quad (2.34)$$

donde $\{1, 2, \dots, d\} = \Lambda \cup \Gamma \cup \Omega$, los conjuntos Λ , Γ y Ω son disjuntos dos a dos; y siempre $\Lambda \neq \emptyset$. Por lo tanto, C es un poliedro convexo racional.

Afirmación: Π es un complejo poliedral racional.

Según la definición C.6.3, para demostrar que Π es un complejo poliedral racional, debemos mostrar lo siguiente:

i) Sea $C \in \Pi$, entonces una cara propia de C es un subconjunto de C en el cual al menos una de las desigualdades que aparece en (2.34) se cumple con igualdad. Por lo tanto, cada cara propia de C también pertenece a Π .

ii) Sean $C \in \Pi$ y $\tilde{C} \in \Pi$, entonces

$$C = \left(\bigcap_{l \in \Lambda} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l = 0\} \right) \cap \left(\bigcap_{l \in \Gamma} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l \leq 0\} \right) \cap \left(\bigcap_{l \in \Omega} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l \geq 0\} \right) \quad (2.35)$$

y

$$\tilde{C} = \left(\bigcap_{l \in \tilde{\Lambda}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l = 0\} \right) \cap \left(\bigcap_{l \in \tilde{\Gamma}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l \leq 0\} \right) \cap \left(\bigcap_{l \in \tilde{\Omega}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l \geq 0\} \right) \quad (2.36)$$

donde $\{1, 2, \dots, d\} = \Lambda \cup \Gamma \cup \Omega = \tilde{\Lambda} \cup \tilde{\Gamma} \cup \tilde{\Omega}$, los conjuntos Λ , Γ y Ω son disjuntos dos a dos, con $\Lambda \neq \emptyset$; y los conjuntos $\tilde{\Lambda}$, $\tilde{\Gamma}$ y $\tilde{\Omega}$ son disjuntos dos a dos, con $\tilde{\Lambda} \neq \emptyset$. Notemos que $0 \in C \cap \tilde{C}$, por lo cual $C \cap \tilde{C} \neq \emptyset$. Luego, obtenemos que

$$C \cap \tilde{C} = \left[\bigcap_{l \in \Lambda \cap \tilde{\Lambda}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l = 0\} \right] \cap \left[\bigcap_{l \in \Lambda \cap \tilde{\Gamma}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l = 0\} \right] \cap \left[\bigcap_{l \in \Lambda \cap \tilde{\Omega}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l = 0\} \right] \cap \left[\bigcap_{l \in \Gamma \cap \tilde{\Lambda}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l = 0\} \right] \cap \left[\bigcap_{l \in \Gamma \cap \tilde{\Gamma}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l \leq 0\} \right] \cap \left[\bigcap_{l \in \Gamma \cap \tilde{\Omega}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l = 0\} \right] \cap \left[\bigcap_{l \in \Omega \cap \tilde{\Lambda}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l = 0\} \right] \cap \left[\bigcap_{l \in \Omega \cap \tilde{\Gamma}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l = 0\} \right] \cap \left[\bigcap_{l \in \Omega \cap \tilde{\Omega}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l \geq 0\} \right].$$

Si denotamos a $(\Lambda \cap \tilde{\Lambda}) \cup (\Lambda \cap \tilde{\Gamma}) \cup (\Lambda \cap \tilde{\Omega}) \cup (\Gamma \cap \tilde{\Lambda}) \cup (\Gamma \cap \tilde{\Omega}) \cup (\Omega \cap \tilde{\Lambda}) \cup (\Omega \cap \tilde{\Gamma})$ por $\hat{\Lambda}$, obtenemos

$$C \cap \tilde{C} = \left(\bigcap_{l \in \hat{\Lambda}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l = 0\} \right) \cap \left(\bigcap_{l \in \Gamma \cap \tilde{\Gamma}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l \leq 0\} \right) \cap \left(\bigcap_{l \in \Omega \cap \tilde{\Omega}} \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l \geq 0\} \right)$$

donde $\{1, 2, \dots, d\} = \hat{\Lambda} \cup (\Gamma \cap \tilde{\Gamma}) \cup (\Omega \cap \tilde{\Omega})$, los conjuntos $\hat{\Lambda}$, $\Gamma \cap \tilde{\Gamma}$ y $\Omega \cap \tilde{\Omega}$ son disjuntos dos a dos; y además $\hat{\Lambda} \neq \emptyset$. Por lo cual, $C \cap \tilde{C} \in \Pi$ y además $C \cap \tilde{C}$ es una cara de C y de \tilde{C} .

Por otro lado, si $C \in \Pi$ entonces, por (2.34), $\dim(C) \leq n - 1$. Además, existen algunas celdas de Π que tienen dimensión $n - 1$; y por como han sido definidos los elementos de Π , cualquier celda de Π está contenida en alguna $(n - 1)$ -celda de Π . Si a cada $(n - 1)$ -celda F de Π le asignamos peso $w(F) = 1$, obtenemos que (Π, w) es un complejo poliedral racional ponderado $(n - 1)$ -dimensional en \mathbb{R}^n .

Notemos que la unión de todas las celdas $C \in \Pi$ es igual a la unión finita de los hiperplanos $H_l := \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^l = 0\}$, donde $l = 1, 2, \dots, d$. Denotemos a esta unión por $\mathcal{L} = \bigcup_{l=1}^d H_l$.

Luego, cada $(n - 2)$ -celda G de Π es igual a la intersección de los hiperplanos H_1, H_2, \dots, H_k , donde $2 \leq k \leq d$. Para cada uno de estos hiperplanos H_l , existen dos $(n - 1)$ -celdas $F_{l,1}$ y $F_{l,2}$ de Π tal que cada una de ellas contiene a G . Sin pérdida de generalidad podemos considerar que los vectores normales enteros primitivos a $F_{l,1}$ y $F_{l,2}$ son v^l y $-v^l$, respectivamente. Por consiguiente,

$$\sum_{l=1}^k w(F_{l,1})v^l + \sum_{l=1}^k w(F_{l,2})(-v^l) = \sum_{l=1}^k 1 \times v^l + \sum_{l=1}^k 1 \times (-v^l) = \sum_{l=1}^k (v^l - v^l) = 0$$

Por lo tanto, (Π, w) es balanceado. Luego, por el Teorema de Equivalencia Valoración-Complejo (Teorema 2.5.1), existe un conjunto finito no vacío $A \subsetneq \mathbb{Z}^n$ y una función $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}$ y $w_u = w$. Además, \mathcal{D} es el mínimo conjunto (en el sentido de la inclusión) tal que u es del tipo de demanda \mathcal{D} . \square

Por el teorema de dualidad, podemos clasificar de manera equivalente las valoraciones de acuerdo con las direcciones de los bordes de sus complejos de demanda.

Decimos que una propiedad se cumple para todo $p \in \mathbb{R}^n$ “genérico” si se cumple para todo p en algún subconjunto abierto y denso en \mathbb{R}^n . Recordemos que \mathcal{R}_u (la unión de todas las UDRs de la valoración u) es un subconjunto abierto y denso en \mathbb{R}^n .

Proposición 2.8.2 *Las siguientes proposiciones son equivalentes para una valoración u .*

- 1) u es del tipo de demanda \mathcal{D} .
- 2) Para cualquier $t \in \mathbb{R}^n$ y para $p \in \mathbb{R}^n$ genérico, si existe un $\epsilon > 0$ tal que p y $p + \epsilon t$ pertenecen a distintas UDRs, y tal que no existe $\hat{\epsilon} \in]0, \epsilon[$ tal que $p + \hat{\epsilon} t$ pertenece a una distinta tercera UDR, entonces la diferencia entre las cestas demandadas en p y $p + \epsilon t$ es un múltiplo entero de algún vector en \mathcal{D} .

Demostración: Ver [2]. \square

2.9. Demanda agregada

Ahora consideremos que hay un número finito J de agentes. Usaremos el superíndice $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ para hacer referencia a un agente en particular. En este caso, la valoración del j -ésimo agente es de la forma $u^j : A^j \rightarrow \mathbb{R}$, donde A^j es un subconjunto finito no vacío de \mathbb{Z}^n .

Sabemos que la demanda agregada es la suma Minkowski de las demandas individuales, pero para poder aplicar nuestras técnicas estudiadas, trataremos a la demanda agregada como la demanda de un solo agente (**agente agregado**).

Definición 2.9.1 Una valoración agregada de $\{u^j : A^j \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=1}^J$ es una valoración $U : A \rightarrow \mathbb{R}$ con dominio $A := \sum_{i=1}^J A^j$ tal que $D_U(p) = \sum_{j=1}^J D_{u^j}(p)$, $\forall p \in \mathbb{R}^n$.

Las valoraciones agregadas no están definidas de forma única. Sin embargo, ésto no es relevante, ya que los conjuntos de demanda agregada no son ambiguos, las propiedades tales como la concavidad de las valoraciones agregadas tampoco son ambiguas, y el LIP ponderado agregado es único. Esto se ve reflejado en el simple hecho de que podemos construir el LIP agregado a partir de los LIPs individuales sin la necesidad de conocer la forma explícita de U , lo cual es una ventaja importante de agregación en el espacio de precios.

Antes de continuar y mostrar algunas propiedades de la valoración agregada de un conjunto finito de valoraciones, es importante discutir la existencia de ésta. La existencia de una valoración agregada U para un conjunto finito de valoraciones $\{u^j\}_{j=1}^J$ se puede demostrar teniendo en cuenta lo siguiente: Consideremos la colección Π cuyos elementos son conjuntos no vacíos de la forma

$$C = \bigcap_{j=1}^J C_j, \quad \text{donde } C_j \in \text{pc}(u^j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, J.$$

Dado que cada complejo de precios $\text{pc}(u^j)$ es un complejo poliedral racional n -dimensional concluimos que Π también será un complejo poliedral racional n -dimensional. Si denotamos por $\bar{\Pi}$ a la subcolección de Π , conformada por las celdas de Π de dimensión menor que n ; entonces $\bar{\Pi}$ será un complejo poliedral racional $(n-1)$ -dimensional. Además, dado que $\bar{\Pi}$ es derivado de complejos poliedrales balanceados, concluimos que $\bar{\Pi}$ será balanceado. Finalmente, aplicando el Teorema de equivalencia Valoración-Complejo (teorema 2.5.1), concluimos que la unión de las celdas de $\bar{\Pi}$ corresponde a

alguna valoración. Por otro lado, la unión de las celdas de $\bar{\Pi}$ coincide con $\bigcup_{j=1}^J \mathcal{L}_{u^j}$ y en el siguiente teorema se mostrará que esta unión de LIPs individuales coincide con el LIP agregado. Así que la valoración encontrada será una valoración agregada de las valoraciones $\{u^j\}_{j=1}^J$.

Teorema 2.9.1 *Dado un conjunto finito de valoraciones $\{u^j\}_{j=1}^J$, se cumple que*

$$1) \mathcal{L}_U = \bigcup_{j=1}^J \mathcal{L}_{u^j}.$$

2) Si F es una faceta de \mathcal{L}_U , entonces $w_U(F) = \sum_{F^j \in \mathcal{F}} w_{u^j}(F^j)$, donde \mathcal{F} es el conjunto de todas las facetas de las LIPs individuales \mathcal{L}_{u^j} que contienen a F .

Demostración:

1) (\subseteq):

Afirmación 1: Si $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $|D_{u^j}(p)| = 1, \forall j = 1, 2, \dots, J$; entonces $|D_U(p)| = 1$.

En efecto, supongamos que $D_{u^j}(p) = \{x^j\}, \forall j = 1, 2, \dots, J$; entonces

$$D_U(p) = \sum_{j=1}^J D_{u^j}(p) = \left\{ \sum_{j=1}^J x^j \right\}.$$

Por lo tanto, la afirmación 1 es válida.

Sea $q \in \mathcal{L}_U$ fijo y arbitrario, entonces $|D_U(q)| > 1$. Luego, por la afirmación 1, existe algún $j_0 \in \{1, 2, \dots, J\}$ tal que $|D_{u^{j_0}}(q)| > 1$, es decir, $q \in \mathcal{L}_{u^{j_0}}$.

Entonces, $q \in \bigcup_{j=1}^J \mathcal{L}_{u^j}$. Por lo tanto, dado que q era fijo y arbitrario, concluimos

$$\text{que } \mathcal{L}_U \subseteq \bigcup_{j=1}^J \mathcal{L}_{u^j}.$$

(\supseteq):

Afirmación 2: Si $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $|D_U(p)| = 1$, entonces $|D_{u^j}(p)| = 1, \forall j = 1, 2, \dots, J$.

En efecto, por el método de reducción al absurdo, supongamos que existe algún $j_0 \in \{1, 2, \dots, J\}$ tal que $|D_{u^{j_0}}(p)| > 1$. Si $D_U(p) = \{x\}$, entonces

$$x = \sum_{j=1}^J x^j, \text{ donde } x^j \in D_{u^j}(p), \forall j = 1, 2, \dots, J.$$

Luego,

$$x = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^J x^j + \tilde{x}^{j_0} \quad \text{y} \quad x = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^J x^j + \hat{x}^{j_0}, \quad \text{con} \quad \tilde{x}^{j_0}, \hat{x}^{j_0} \in D_{u^{j_0}}(p) \quad \text{y} \quad \tilde{x}^{j_0} \neq \hat{x}^{j_0}.$$

Entonces, igualando ambas expresiones para x , obtenemos que $\tilde{x}^{j_0} = \hat{x}^{j_0}$; lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la afirmación 2 es válida.

Sea $q \in \bigcup_{j=1}^J \mathcal{L}_{u^j}$ fijo y arbitrario, entonces existe algún $j_0 \in \{1, 2, \dots, J\}$ tal que $q \in \mathcal{L}_{u^{j_0}}$; es decir, $|D_{u^{j_0}}(q)| > 1$. Luego, si suponemos que $|D_U(q)| = 1$, entonces, por la afirmación 2, obtenemos que $|D_{u^{j_0}}(q)| = 1$; lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se debe cumplir que $|D_U(q)| > 1$, es decir, $q \in \mathcal{L}_U$. Luego, dado que q era fijo y arbitrario, concluimos que $\bigcup_{j=1}^J \mathcal{L}_{u^j} \subseteq \mathcal{L}_U$.

2) Si F es una faceta de \mathcal{L}_U , entonces existirá un subconjunto no vacío $\mathcal{K} \subseteq$

$\{1, 2, \dots, J\}$ tal que $F = \left(\bigcap_{j \in \mathcal{K}} F^j \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \notin \mathcal{K}}}^J C^j \right)$, donde F_j es una faceta del

LIP \mathcal{L}_{u^j} ; y C^j es una n -celda de $\text{pc}(u^j)$. Luego, si x y \tilde{x} son las cestas únicamente demandadas a ambos lados de F , entonces existen cestas x^j y \tilde{x}^j únicamente demandadas a ambos lados de F^j y cestas únicamente demandadas y^j tal que

$C^j = \mathcal{R}_{u^j}(y^j)$, las cuales satisfacen $x = \sum_{j \in \mathcal{K}} x^j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \mathcal{K}}}^J y^j$ y $\tilde{x} = \sum_{j \in \mathcal{K}} \tilde{x}^j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \mathcal{K}}}^J y^j$. Por

lo cual, $x - \tilde{x} = \sum_{j \in \mathcal{K}} (x^j - \tilde{x}^j)$ y $\frac{1}{w_U(F)}(x - \tilde{x})$ es un vector entero primitivo nor-

mal a F que se dirige desde $\mathcal{R}_U(x)$ hacia $\mathcal{R}_U(\tilde{x})$. En consecuencia, $\frac{1}{w_U(F)}(x - \tilde{x})$ también será un vector entero primitivo normal a F^j que se dirige desde $\mathcal{R}_{u^j}(x^j)$ hacia $\mathcal{R}_{u^j}(\tilde{x}^j)$. De esta manera obtenemos que $x^j - \tilde{x}^j = \frac{w_{u^j}(F^j)}{w_U(F)}(x - \tilde{x})$. Por lo tanto,

$$x - \tilde{x} = \sum_{j \in \mathcal{K}} \frac{w_{u^j}(F^j)}{w_U(F)}(x - \tilde{x}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{K}} w_{u^j}(F^j)}{w_U(F)}(x - \tilde{x})$$

Entonces $w_U(F) = \sum_{j \in \mathcal{K}} w_{u^j}(F^j)$. Si cambiamos la notación y escribimos \mathcal{F} para denotar al conjunto de todas las facetas de las LIPs individuales \mathcal{L}_{u^j} que contienen

a F , es decir, $\mathcal{F} = \{F^j : j \in \mathcal{K}\}$, obtenemos la igualdad escrita en el enunciado de este teorema. □

Corolario 2.9.1 *Sea \mathcal{U} una colección de valoraciones individuales. Todas las valoraciones $u \in \mathcal{U}$ son del tipo de demanda \mathcal{D} si y solo si toda valoración agregada de cada subconjunto finito no vacío de \mathcal{U} es del tipo de demanda \mathcal{D} .*

Demostración:

(\Rightarrow):

Supongamos que todas las valoraciones $u \in \mathcal{U}$ son del tipo de demanda \mathcal{D} . Sea $\{u^j\}_{j=1}^J$ un conjunto finito de valoraciones de \mathcal{U} y sea U una valoración agregada de $\{u^j\}_{j=1}^J$; mostraremos que U es del tipo de demanda \mathcal{D} . Por el teorema 2.9.1, para cada faceta F de \mathcal{L}_U existe alguna faceta F_j de \mathcal{L}_{u^j} tal que $F \subseteq F_j$. Como u^j es del tipo de demanda \mathcal{D} entonces la faceta F_j tiene vector normal en \mathcal{D} . Por consiguiente, la faceta F también tiene vector normal en \mathcal{D} . Por lo tanto, U es del tipo de demanda \mathcal{D} .

(\Leftarrow):

Sea $u \in \mathcal{U}$ una valoración, mostraremos que u es del tipo de demanda \mathcal{D} . Consideremos otra valoración $u' \in \mathcal{U}$, entonces por hipótesis, la valoración agregada $U := u + u'$ es del tipo de demanda \mathcal{D} . Luego, por el teorema 2.9.1, $\mathcal{L}_U = \mathcal{L}_u \cup \mathcal{L}_{u'}$. Entonces, para cada faceta F de \mathcal{L}_u existe alguna faceta \tilde{F} de \mathcal{L}_U tal que $\tilde{F} \subseteq F$. Como U es del tipo de demanda \mathcal{D} entonces la faceta \tilde{F} tiene vector normal en \mathcal{D} . Por consiguiente, la faceta F también tiene vector normal en \mathcal{D} . Por lo tanto, u es del tipo de demanda \mathcal{D} . □

Ejemplo 2.9.1 *Consideremos una economía en la que hay dos distintos tipos de bienes indivisibles (es decir, $n = 2$) y dos agentes “s” y “c” cuyas valoraciones están definidas de la siguiente manera*

$$\begin{aligned} u^s : \{0, 1\} \times \{0, 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto u^s(x_1, x_2) := \text{máx} \{40x_1, 30x_2\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u^c : \{0, 1\} \times \{0, 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto u^c(x_1, x_2) := \text{mín} \{50x_1, 50x_2\} \end{aligned}$$

Podemos hallar analíticamente el LIP de cada una de estas valoraciones, de manera análoga a como se halló el LIP de las valoraciones de los ejemplos de la sección 2 de este capítulo. En la siguiente imagen mostramos las representaciones gráficas de los LIPs de u^s y u^c .

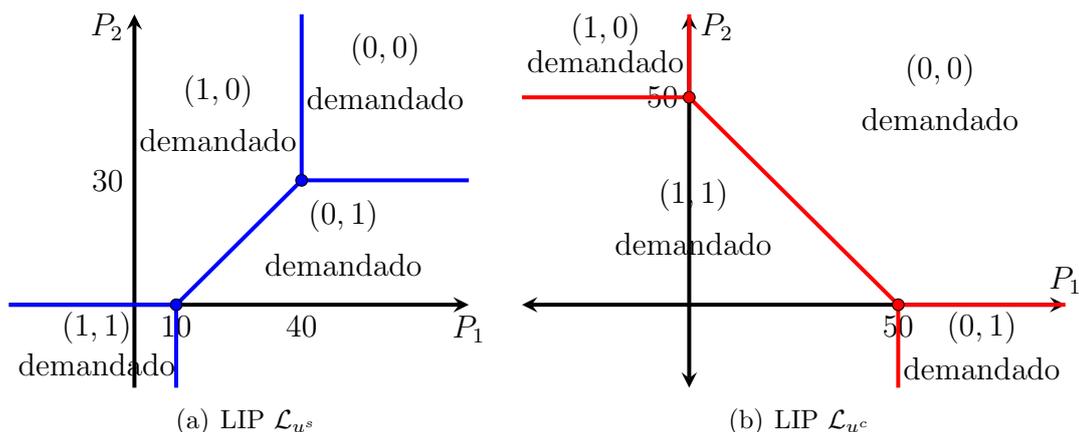


Figura 2.21: Representaciones gráficas de los LIPs de las valoraciones u^s y u^c

Luego, por el teorema 2.9.1, la representación gráfica del LIP agregado $\mathcal{L}_{u^{\{s,c\}}}$ es

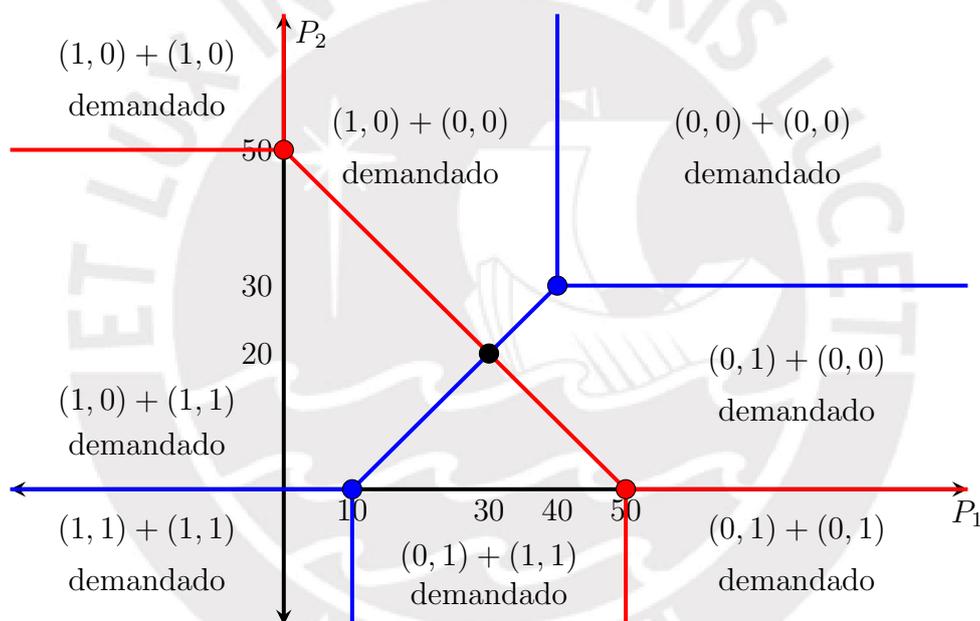


Figura 2.22: Representación gráfica del LIP agregado $\mathcal{L}_{u^{\{s,c\}}}$

Sin embargo, no podemos encontrar el complejo de demanda de una valoración agregada utilizando solamente los complejos de demanda individuales, ya que un complejo de demanda no corresponde a una única valoración, y la valoración agregada de un conjunto finito de valoraciones puede definirse de varias maneras. Para ilustrar ésto, consideremos un tercer agente “ c^* ” (que sustituirá al agente “ c ”) cuya valoración está definida de la siguiente manera

$$u^{c^*} : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto u^{c^*}(x_1, x_2) := \min \{100x_1, 100x_2\}$$

y además la representación gráfica del LIP de u^{c^*} es

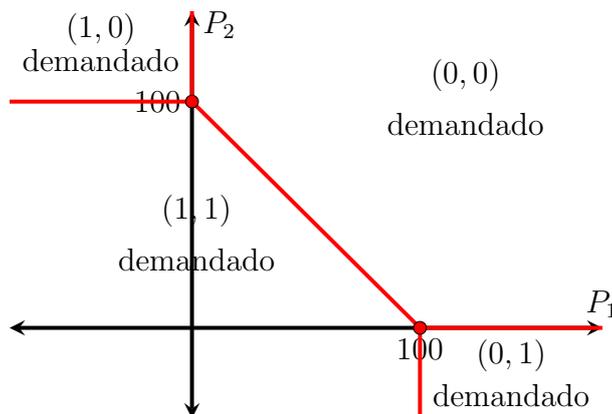


Figura 2.23: Representación gráfica del LIP $\mathcal{L}_{u^{c^*}}$

Luego, por el teorema 2.9.1, la representación gráfica del LIP agregado $\mathcal{L}_{u\{s,c^*\}}$ es

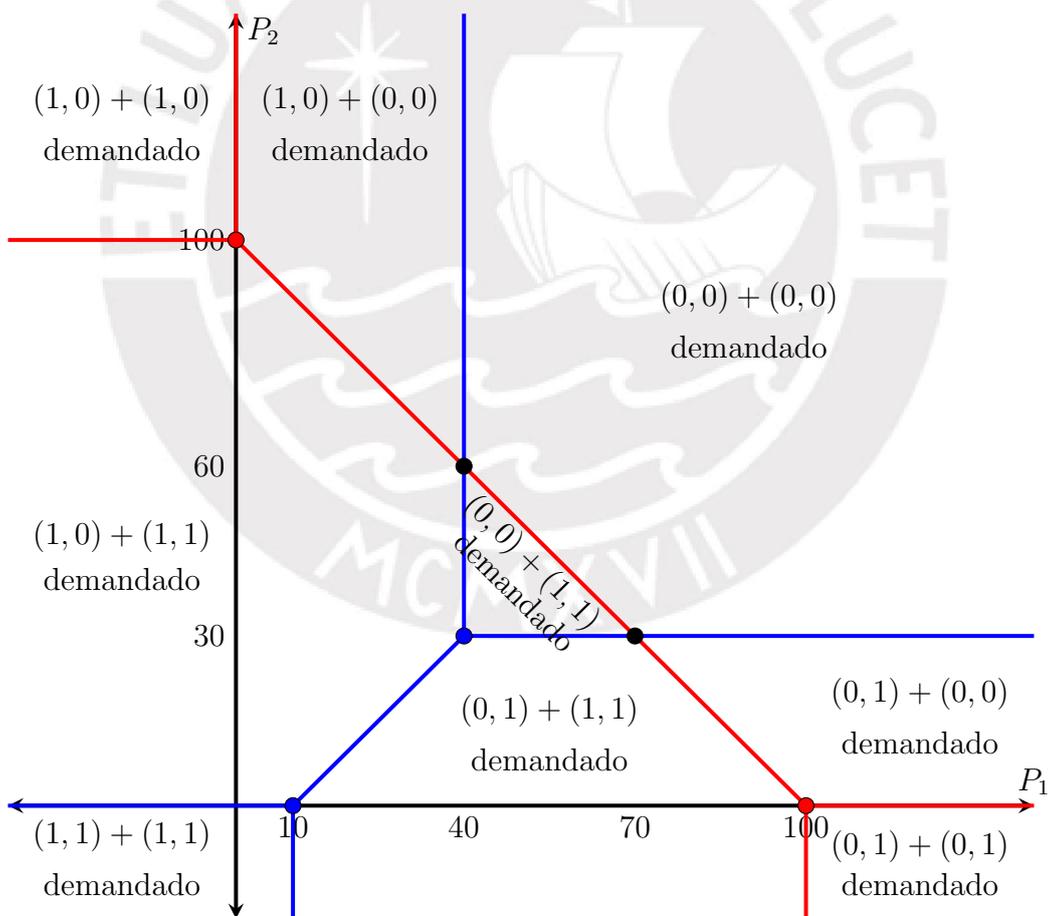
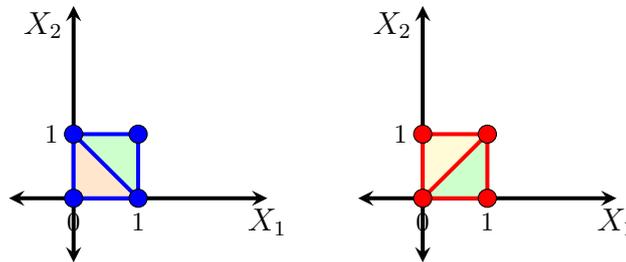


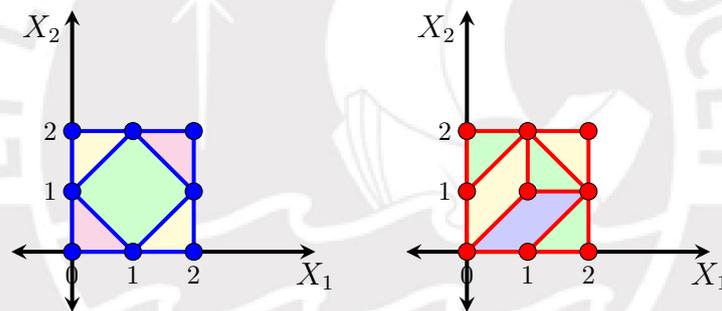
Figura 2.24: Representación gráfica del LIP agregado $\mathcal{L}_{u\{s,c^*\}}$

Por otro lado, las representaciones gráficas de los complejos de demanda duales a los LIPs \mathcal{L}_{u^s} , \mathcal{L}_{u^c} , $\mathcal{L}_{u^{c^*}}$, $\mathcal{L}_{u^{\{s,c\}}}$ y $\mathcal{L}_{u^{\{s,c^*\}}}$ son



(a) Los círculos azules, los segmentos cerrados azules, y los triángulos cerrados anaranjado y verde representan al $dc(u^s)$. (b) Los círculos rojos, los segmentos cerrados rojos, y los triángulos cerrados verde y amarillo representan al $dc(u^c) = dc(u^{c^*})$.

Figura 2.25: Complejos de demandas individuales. Note que en este caso el complejo de demanda $dc(u^{c^*})$ coincide con el complejo de demanda $dc(u^c)$.



(a) Los círculos azules, los segmentos cerrados azules, y las placas cerradas amarillas, magentas y verde representan al $dc(u^{\{s,c\}})$. (b) Los círculos rojos, los segmentos cerrados rojos, y las placas cerradas amarillas, verdes y morada representan al $dc(u^{\{s,c^*\}})$.

Figura 2.26: Complejos de demanda agregada

Como podemos ver los complejos de demanda de las valoraciones u^c y u^{c^*} son iguales pero los complejos de demanda agregada $dc(u^{\{s,c\}})$ y $dc(u^{\{s,c^*\}})$ son diferentes. Por lo tanto, no existe un único complejo de demanda agregada correspondiente a los complejos de demanda de las figuras 2.25.

2.10. El Teorema de Unimodularidad

En esta sección enunciamos y demostramos el teorema de unimodularidad y algunos corolarios inmediatos, así como el papel que desempeña la unimodularidad en la existencia del equilibrio. Por este motivo empezamos enunciando una noción estándar de equilibrio competitivo. En la economía, que sirve de escenario para definir nuestro equilibrio competitivo, suponemos que los agentes involucrados no poseen dotaciones iniciales. Ésto se debe a que la noción de equilibrio que estudiamos, tiene su origen en un modelo de subasta donde la oferta del mercado está diseñada por un decisor central.

Definición 2.10.1 *Un equilibrio (competitivo) para un conjunto finito de valoraciones $\{u^j : A^j \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=1}^J$ y una oferta de mercado $x \in \mathbb{Z}^n$, consiste de un vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$ y asignaciones $\{x^j\}_{j=1}^J$ tal que*

$$i) \quad x = \sum_{j=1}^J x^j.$$

$$ii) \quad x^j \in D_{u^j}(p), \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, J\}.$$

Como podemos ver, un equilibrio es definido por un vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$ tal que la oferta $x \in \mathbb{Z}^n$ pertenece al conjunto de demanda agregada de las valoraciones individuales, es decir,

$$x = \sum_{j=1}^J x^j \in \sum_{j=1}^J D_{u^j}(p) = D_U(p)$$

Proposición 2.10.1 *Sean $\{u^j : A^j \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=1}^J$ un conjunto finito de valoraciones y $U : A \rightarrow \mathbb{R}$ una valoración agregada de $\{u^j : A^j \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=1}^J$ entonces se cumple que: U es cóncava si y solo si, existe un equilibrio $(p, \{x^j\}_{j=1}^J)$ para $\{u^j\}_{j=1}^J$ y para cada $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, donde $A = \sum_{j=1}^J A^j$.*

Demostración:

(\Rightarrow) :

Supongamos que U es cóncava, y sea $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ fijo y arbitrario. Aplicando el teorema 2.4.2 a la valoración agregada U , obtenemos que existe algún $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in D_U(p)$. Además, por la definición de valoración agregada, tenemos $D_U(p) = \sum_{j=1}^J D_{u^j}(p)$.

Por lo cual, para cada $j \in \{1, 2, \dots, J\}$, existe algún $x^j \in D_{u^j}(p)$ tal que $x = \sum_{j=1}^J x^j$.

De este modo, $(p, \{x^j\}_{j=1}^J)$ es un equilibrio para $\{u^j\}_{j=1}^J$ y $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$.

(\Leftarrow):

Sea $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ fijo y arbitrario, entonces por la hipótesis existe un equilibrio $(p, \{x^j\}_{j=1}^J)$ para $\{u^j\}_{j=1}^J$ y $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, es decir,

$$x = \sum_{j=1}^J x^j \quad \text{y} \quad x^j \in D_{u^j}(p), \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, J\}.$$

Por la definición de valoración agregada, tenemos que $D_U(p) = \sum_{j=1}^J D_{u^j}(p)$. Por consiguiente, $x \in D_U(p)$. Luego, por el teorema 2.4.2, la valoración agregada U es cóncava. \square

En este contexto, las ofertas de mercado $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, son llamadas “cestas de oferta relevante”.

En el primer lema necesario para demostrar el teorema de unimodularidad, mostraremos que existe equilibrio para un conjunto finito de valoraciones y una cesta de oferta relevante, centrándonos solo en las intersecciones de los LIPs individuales: sabemos que el equilibrio siempre existe, es decir, cada cesta de oferta relevante es demanda a algún precio si y solo si, cualquier valoración agregada es cóncava, ésto es si y solo si, el conjunto de demanda agregada es convexo-discreto a cada vector de precios. Pero veremos en este lema que solo necesitamos verificar la convexidad discreta de los conjuntos de demanda agregada a los precios en los que dos o más agentes tienen una demanda no-única.

Lema 2.10.1 *Para un conjunto finito de valoraciones cóncavas $\{u^j : A^j \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=1}^J$, existe un equilibrio para cada cesta de oferta relevante $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, si y solo si*

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_U(p)) = D_U(p), \quad \forall p \in \mathcal{L}_{u^j} \cap \mathcal{L}_{u^k}, \quad \forall j, k = 1, 2, \dots, J \quad \text{con } j \neq k. \quad (2.37)$$

Demostración:

(\Rightarrow):

Por definición de equilibrio, tenemos que para cada $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ existe un par $(q, \{x^j\}_{j=1}^J)$ tal que

$$x = \sum_{j=1}^J x^j \quad \text{y} \quad x^j \in D_{u^j}(q), \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, J\}.$$

Por consiguiente, $x = \sum_{j=1}^J x^j \in \sum_{j=1}^J D_{u^j}(q) = D_U(q)$. De esta manera, para cada $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ existe un $q \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in D_U(q)$. Luego, aplicando el teorema 2.4.2 a la valoración agregada U , concluimos que U es cóncava. Por lo tanto, por el teorema 2.4.3, $D_U(p)$ es convexo discreto para todo $p \in \mathbb{R}^n$. En particular, $D_U(p)$ es convexo discreto para todo $p \in \mathcal{L}_{u^j} \cap \mathcal{L}_{u^k}$, $\forall j, k = 1, 2, \dots, J$ con $j \neq k$; es decir,

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_U(p)) = D_U(p), \forall p \in \mathcal{L}_{u^j} \cap \mathcal{L}_{u^k}, \forall j, k = 1, 2, \dots, J \text{ con } j \neq k.$$

(\Leftarrow):

Primero mostraremos que $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_U(p)) = D_U(p)$, $\forall p \in \mathbb{R}^n$.

Caso 1: De la demostración del ítem 1) del teorema 2.9.1 obtenemos que el conjunto de demanda agregada $D_U(p)$ consiste de una única cesta si y solo si todos los conjuntos de demanda individual $D_{u^j}(p)$ también son conjuntos unitarios. Luego, para cada $\tilde{p} \in \mathbb{R}^n$ tal que $|D_{u^j}(\tilde{p})| = 1$, $\forall j = 1, 2, \dots, J$, se cumplirá que $|D_U(\tilde{p})| = 1$. Por consiguiente

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_U(\tilde{p})) = \text{conv}(D_U(\tilde{p})) \cap \mathbb{Z}^n = D_U(\tilde{p}) \cap \mathbb{Z}^n = D_U(\tilde{p}). \quad (2.38)$$

Caso 2: Sea $p' \in \mathbb{R}^n$ tal que existe un $j_0 \in \{1, 2, \dots, J\}$ para el cual se cumple

$$|D_{u^{j_0}}(p')| > 1 \quad \text{y} \quad |D_{u^j}(p')| = 1, \forall j \neq j_0.$$

Luego, $D_U(p') = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^J D_{u^j}(p') + D_{u^{j_0}}(p')$, entonces

$$\begin{aligned} \text{conv}(D_U(p')) &= \text{conv} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^J D_{u^j}(p') + D_{u^{j_0}}(p') \right) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^J \text{conv}(D_{u^j}(p')) + \text{conv}(D_{u^{j_0}}(p')) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^J D_{u^j}(p') + \text{conv}(D_{u^{j_0}}(p')) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Afirmación: $D_U(p') = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^J D_{u^j}(p') + \text{conv}(D_{u^{j_0}}(p')) \right) \cap \mathbb{Z}^n$.

En efecto, si $x \in D_U(p')$, entonces

$$x \in \mathbb{Z}^n \quad \text{y} \quad x \in \sum_{j=1}^J D_{u^j}(p') \subseteq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^J D_{u^j}(p') + \text{conv}(D_{u^{j_0}}(p')).$$

Por consiguiente, $x \in \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^J D_{u^j}(p') + \text{conv}(D_{u^{j_0}}(p')) \right) \cap \mathbb{Z}^n$.

Por otro lado, si $x \in \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^J D_{u^j}(p') + \text{conv}(D_{u^{j_0}}(p')) \right) \cap \mathbb{Z}^n$ entonces $x \in \mathbb{Z}^n$ y $x =$

$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^J x^j + x^{j_0}$, donde $D_{u^j}(p') = \{x^j\}$, $\forall j \neq j_0$ y $x^{j_0} \in \text{conv}(D_{u^{j_0}}(p'))$. Luego, $x^{j_0} =$

$x - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^J x^j \in \mathbb{Z}^n$. Por lo cual, $x^{j_0} \in \text{conv}(D_{u^{j_0}}(p')) \cap \mathbb{Z}^n = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u^{j_0}}(p'))$. Dado que u^{j_0} es cóncava, por el teorema 2.4.3, concluimos que $x^{j_0} \in D_{u^{j_0}}(p')$. Por consiguiente, $x \in D_U(p')$.

Luego, de (2.39) y la afirmación, concluimos que

$$D_U(p') = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^J D_{u^j}(p') + \text{conv}(D_{u^{j_0}}(p')) \right) \cap \mathbb{Z}^n = \text{conv}(D_u(p')) \cap \mathbb{Z}^n = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_U(p')) \quad (2.40)$$

Por lo tanto, de (2.37), (2.38) y (2.40) concluimos que

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_U(p)) = D_U(p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$$

y por el teorema 2.4.3, U es cóncava. Luego, por la proposición 2.10.1, existe un equilibrio para cada cesta de oferta relevante $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$. \square

De ahora en adelante, algunas veces la valoración agregada para un conjunto finito de k valoraciones $\{u^j : A^j \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=1}^k$, será denotada por $u^{\{1,2,\dots,k\}}$.

Definición 2.10.2 Sean u^1 y u^2 dos valoraciones de dos agentes distintos.

- 1) La intersección de \mathcal{L}_{u^1} y \mathcal{L}_{u^2} es transversa en $p \in \mathcal{L}_{u^1} \cap \mathcal{L}_{u^2}$, si $\dim(C^1 + C^2) = n$, donde C^j es la mínima celda (en el sentido de la inclusión) de \mathcal{L}_{u^j} que contiene a p , para $j = 1, 2$.

2) La intersección de \mathcal{L}_{u^1} y \mathcal{L}_{u^2} es transversa, si $\mathcal{L}_{u^1} \cap \mathcal{L}_{u^2}$ es transversa en cada punto $p \in \mathcal{L}_{u^1} \cap \mathcal{L}_{u^2}$.

3) La intersección de $\{\mathcal{L}_{u^j}\}_{j=1}^k$ es transversa en p , si la intersección de $\mathcal{L}_{u^{\{1,2,\dots,j\}}}$ y $\mathcal{L}_{u^{j+1}}$ es transversa en $p \in \mathcal{L}_{u^{\{1,2,\dots,j\}}} \cap \mathcal{L}_{u^{j+1}}$, para todo $j = 1, 2, \dots, k-1$.

Por ejemplo, en dimensión 2, dos rectas que se cruzan en un solo punto se intersecan transversalmente. Sin embargo, dos rectas coincidentes no se intersecan transversalmente, y tampoco una recta que atraviesa una 0-celda (un punto del plano) se intersecan transversalmente. En dimensión 3, una 1-celda y una faceta que se cruzan en un solo punto, se intersecan transversalmente. Dos facetas que se intersecan a lo largo de una línea recta, se intersecan transversalmente. Tres facetas que se intersecan en un solo punto, se intersecan transversalmente.

Es importante destacar que la transversalidad de las intersecciones de los LIPs es genérica:

Lema 2.10.2 Para cualesquiera valoraciones u^1 y u^2 con LIPs \mathcal{L}_{u^1} y \mathcal{L}_{u^2} , respectivamente; y $v \in \mathbb{R}^n$ genérico, se cumple que la intersección de \mathcal{L}_{u^1} y $\mathcal{L}_{u^2} + \{\epsilon v\}$ es transversa, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Demostración: Ver [4]. □

Lema 2.10.3 Si no existe equilibrio para las valoraciones $u^1 : A^1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $u^2 : A^2 \rightarrow \mathbb{R}$, y alguna cesta de oferta relevante $\tilde{x} \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A^1 + A^2)$, entonces para cualquier $v \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tampoco existe equilibrio para la cesta de oferta relevante $\tilde{x} \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A^1 + A^2)$ y las valoraciones u^1 y $u^{2[\epsilon]}$, donde $u^{2[\epsilon]}(x) = u^2(x) + \epsilon v \cdot x$.

Demostración: Ver [2]. □

Proposición 2.10.2 Si existe equilibrio para cada par de valoraciones cóncavas de tipo de demanda \mathcal{D} , cuya intersección de LIPs es transversa; y para cada cesta de oferta relevante, entonces existe equilibrio para cada par de valoraciones cóncavas de tipo de demanda \mathcal{D} y cada cesta de oferta relevante.

Demostración: Por el método de reducción al absurdo, supongamos que existe un par de valoraciones cóncavas $u^1 : A^1 \subsetneq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $u^2 : A^2 \subsetneq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de tipo de demanda \mathcal{D} , y una cesta de oferta relevante $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A^1 + A^2)$ tal que no existe equilibrio para

ellos.

Para el primer vector canónico $v = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, definimos la valoración

$$\begin{aligned} u^{2[\epsilon]} &: A^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto u^{2[\epsilon]}(a) := u^2(a) + \epsilon v \cdot a \end{aligned}$$

Luego, dado que el LIP de $u^{2[\epsilon]}$ es $\mathcal{L}_{u^{2[\epsilon]}} = \mathcal{L}_{u^2} + \{\epsilon v\}$, concluimos que la valoración $u^{2[\epsilon]}$ es de tipo de demanda \mathcal{D} . Por otro lado, definimos la función

$$\begin{aligned} w &: \text{conv}(A^2) \longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto w(a) := \text{conv}(u^2)(a) + \epsilon v \cdot a \end{aligned}$$

Afirmación 1: w es cóncava.

En efecto, sean $a, \tilde{a} \in \text{conv}(A^2)$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces por la concavidad de $\text{conv}(u^2)$ tenemos que

$$\begin{aligned} w(\lambda a + (1 - \lambda)\tilde{a}) &= \text{conv}(u^2)(\lambda a + (1 - \lambda)\tilde{a}) + \epsilon v \cdot (\lambda a + (1 - \lambda)\tilde{a}) \\ &\geq \lambda \text{conv}(u^2)(a) + (1 - \lambda)\text{conv}(u^2)(\tilde{a}) + \epsilon v \cdot (\lambda a + (1 - \lambda)\tilde{a}) \\ &= \lambda [\text{conv}(u^2)(a) + \epsilon v \cdot a] + (1 - \lambda) [\text{conv}(u^2)(\tilde{a}) + \epsilon v \cdot \tilde{a}] \\ &= \lambda w(a) + (1 - \lambda)w(\tilde{a}) \end{aligned}$$

Afirmación 2: $u^{2[\epsilon]}(a) = w(a)$, $\forall a \in A^2$.

En efecto, dado que u^2 es cóncava, obtenemos

$$u^{2[\epsilon]}(a) = u^2(a) + \epsilon v \cdot a = \text{conv}(u^2)(a) + \epsilon v \cdot a = w(a), \quad \forall a \in A^2.$$

Luego, de las afirmaciones 1 y 2, concluimos que

$$\text{conv}(u^{2[\epsilon]})(a) \leq w(a), \quad \forall a \in \text{conv}(A^2).$$

Por consiguiente,

$$u^{2[\epsilon]}(a) = \text{conv}(u^{2[\epsilon]})(a), \quad \forall a \in A^2.$$

Entonces, $u^{2[\epsilon]}$ es cóncava.

De esta manera tenemos que u^1 y $u^{2[\epsilon]}$ son cóncavas y de tipo de demanda \mathcal{D} . Luego, por el lema 2.10.2, la intersección de \mathcal{L}_{u^1} y $\mathcal{L}_{u^{2[\epsilon]}}$ es transversa. Finalmente, por el lema 2.10.3, tampoco existe equilibrio para la cesta x y las valoraciones u^1 y $u^{2[\epsilon]}$; lo cual es una contradicción con la hipótesis de este corolario. Por lo tanto, existe equilibrio para cada par de valoraciones cóncavas de tipo de demanda \mathcal{D} y cada cesta de oferta relevante. \square

Otra propiedad de las intersecciones transversales que será importante para la demostración del teorema de unimodularidad, está referida a los cambios entre las cestas (que están en direcciones “fundamentalmente diferentes”, en un sentido que aclararemos en el corolario 2.10.1) a cualquier vector de precios de estas intersecciones.

Definición 2.10.3 *El subespacio generado por los cambios en la demanda asociado a la celda del complejo de demanda, σ , es el conjunto de combinaciones lineales de los vectores de $\{y - x : x, y \in \sigma\}$. Este subespacio vectorial será denotado por K_σ .*

Lema 2.10.4 *Para un conjunto finito de valoraciones $\{u^1, u^2, \dots, u^J\}$, y $p \in \mathbb{R}^n$, escribimos $\sigma^j = \text{conv}(D_{u^j}(p))$ y $\sigma^{\mathcal{J}} = \text{conv}(D_U(p))$, donde U es una valoración agregada de $\{u^1, u^2, \dots, u^J\}$. Se cumple*

$$1) \sigma^{\mathcal{J}} = \sum_{j=1}^J \sigma^j.$$

$$2) K_{\sigma^{\mathcal{J}}} = \sum_{j=1}^J K_{\sigma^j}.$$

3) Si los LIPs $\{\mathcal{L}_{u^j}\}_{j=1}^J$ se intersecan en $p \in \mathbb{R}^n$, entonces la intersección de $\{\mathcal{L}_{u^j}\}_{j=1}^J$ es transversa en $p \in \bigcap_{j=1}^J \mathcal{L}_{u^j}$ si y solo si $K_{\sigma^{\mathcal{J}}} = \bigoplus_{j=1}^J K_{\sigma^j}$.

Demostración:

$$1) \sigma^{\mathcal{J}} = \text{conv}(D_U(p)) = \text{conv}\left(\sum_{j=1}^J D_{u^j}(p)\right) = \sum_{j=1}^J \text{conv}(D_{u^j}(p)) = \sum_{j=1}^J \sigma^j.$$

2) (\subseteq):

Sea $z \in K_{\sigma^{\mathcal{J}}}$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, $x^1, x^2, \dots, x^m \in \sigma^{\mathcal{J}}$ y $y^1, y^2, \dots, y^m \in \sigma^{\mathcal{J}}$ tal que $z = \sum_{i=1}^m \lambda_i (y^i - x^i)$. Luego, para cada x^i , existen $a^{i,j} \in \sigma^j$, $j = 1, 2, \dots, J$; y para cada y^i , existen $b^{i,j} \in \sigma^j$, $j = 1, 2, \dots, J$; tal que

$$x^i = \sum_{j=1}^J a^{i,j} \quad \text{y} \quad y^i = \sum_{j=1}^J b^{i,j}.$$

Entonces

$$z = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\sum_{j=1}^J b^{i,j} - \sum_{j=1}^J a^{i,j} \right) = \sum_{j=1}^J \underbrace{\sum_{i=1}^m \lambda_i (b^{i,j} - a^{i,j})}_{\in K_{\sigma^j}} \in \sum_{j=1}^J K_{\sigma^j}.$$

Por lo cual, $K_{\sigma^{\mathcal{J}}} \subseteq \sum_{j=1}^J K_{\sigma^j}$.

(\supseteq):

Sea $z \in \sum_{j=1}^J K_{\sigma^j}$, entonces existen $z^j \in K_{\sigma^j}$ tal que $z = \sum_{j=1}^J z^j$. Luego, para cada z^j , existen $\lambda_{1,j}, \lambda_{2,j}, \dots, \lambda_{m_j,j} \in \mathbb{R}$, $x^{1,j}, x^{2,j}, \dots, x^{m_j,j}, y^{1,j}, y^{2,j}, \dots, y^{m_j,j} \in \sigma^j$ tal que $z^j = \sum_{i=1}^{m_j} \lambda_{i,j}(y^{i,j} - x^{i,j})$. Luego, $z = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{m_j} \lambda_{i,j}(y^{i,j} - x^{i,j})$. Notamos que

$$y^{i,j} - x^{i,j} = \underbrace{(y^{i,1} + \dots + y^{i,j-1} + y^{i,j} + y^{i,j+1} + \dots + y^{i,J})}_{\in \sigma^{\mathcal{J}}} - \underbrace{(y^{i,1} + \dots + y^{i,j-1} + x^{i,j} + y^{i,j+1} + \dots + y^{i,J})}_{\in \sigma^{\mathcal{J}}}.$$

Entonces $\sum_{i=1}^{m_j} \lambda_{i,j}(y^{i,j} - x^{i,j}) \in K_{\sigma^{\mathcal{J}}}$. Dado que $K_{\sigma^{\mathcal{J}}}$ es un subespacio vectorial, concluimos que $z = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{m_j} \lambda_{i,j}(y^{i,j} - x^{i,j}) \in K_{\sigma^{\mathcal{J}}}$. Por lo cual, $\sum_{j=1}^J K_{\sigma^j} \subseteq K_{\sigma^{\mathcal{J}}}$.

3) Caso 1: $J = 2$

Sean $k^j = \dim(\sigma^j) = \dim(K_{\sigma^j})$, para cada $j = 1, 2$; y $k^{\mathcal{J}} = \dim(\sigma^{\mathcal{J}}) = \dim(K_{\sigma^{\mathcal{J}}})$. Luego, dado que $K_{\sigma^{\mathcal{J}}} = K_{\sigma^1} + K_{\sigma^2}$, obtenemos

$$\dim(K_{\sigma^{\mathcal{J}}}) = \dim(K_{\sigma^1}) + \dim(K_{\sigma^2}) - \dim(K_{\sigma^1} \cap K_{\sigma^2})$$

es decir,

$$k^{\mathcal{J}} = k^1 + k^2 - \dim(K_{\sigma^1} \cap K_{\sigma^2}) \quad (2.41)$$

Por otro lado, también tenemos que

$$\dim(C_{\sigma^1} + C_{\sigma^2}) = \dim(C_{\sigma^1}) + \dim(C_{\sigma^2}) - \dim(C_{\sigma^{\mathcal{J}}})$$

es decir,

$$\dim(C_{\sigma^1} + C_{\sigma^2}) = (n - k^1) + (n - k^2) - (n - k^{\mathcal{J}}).$$

Luego, la intersección de \mathcal{L}_{u^1} y \mathcal{L}_{u^2} es transversa en $p \in \mathcal{L}_{u^1} \cap \mathcal{L}_{u^2}$ si y solo si

$$\dim(C_{\sigma^1} + C_{\sigma^2}) = n;$$

esto es, si y solo si

$$n = (n - k^1) + (n - k^2) - (n - k^{\mathcal{J}});$$

es decir, si y solo si

$$k^{\mathcal{J}} = k^1 + k^2.$$

Luego, por (2.41), la intersección de \mathcal{L}_{u^1} y \mathcal{L}_{u^2} es transversa en $p \in \mathbb{R}^n$ si y solo si

$$\dim(K_{\sigma^1} \cap K_{\sigma^2}) = 0.$$

Por lo tanto, por el ítem 2) de éste lema, la intersección de \mathcal{L}_{u^1} y \mathcal{L}_{u^2} es transversa en $p \in \mathbb{R}^n$ si y solo si $K_{\sigma^{\mathcal{J}}} = K_{\sigma^1} \oplus K_{\sigma^2}$.

Caso 2: $J \geq 3$

Por definición, la intersección de los LIPs $\{\mathcal{L}_{u^j}\}_{j=1}^J$ es transversa en $p \in \mathbb{R}^n$ si y solo si la intersección de $\mathcal{L}_{u^{\{1, \dots, j\}}}$ y $\mathcal{L}_{u^{j+1}}$ es transversa en p , $\forall j = 1, 2, \dots, J-1$; ésto es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{u^1} \cap \mathcal{L}_{u^2} &\text{ es transversa en } p. \\ \mathcal{L}_{u^{\{1,2\}}} \cap \mathcal{L}_{u^3} &\text{ es transversa en } p. \\ &\vdots \\ \mathcal{L}_{u^{\{1,2,\dots,J-1\}}} \cap \mathcal{L}_{u^J} &\text{ es transversa en } p. \end{aligned}$$

Luego, por el caso 1, la intersección de los LIPs $\{\mathcal{L}_{u^j}\}_{j=1}^J$ es transversa en $p \in$

$\bigcap_{j=1}^J \mathcal{L}_{u^j}$ si y solo si

$$\begin{aligned} K_{\sigma^{\{1,2\}}} &= K_{\sigma^1} \oplus K_{\sigma^2}. \\ K_{\sigma^{\{1,2,3\}}} &= K_{\sigma^{\{1,2\}}} \oplus K_{\sigma^3}. \\ &\vdots \\ K_{\sigma^{\{1,2,\dots,J-1,J\}}} &= K_{\sigma^{\{1,2,\dots,J-1\}}} \oplus K_{\sigma^J}. \end{aligned}$$

Por otro lado, por el ítem 2) de este lema, obtenemos que

$$K_{\sigma^{\{1,2,\dots,j-1,j\}}} = K_{\sigma^{\{1,2,\dots,j-1,j\}}}, \quad \forall j = 3, 4, \dots, J.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} K_{\sigma^{\{1,2\}}} &= K_{\sigma^1} \oplus K_{\sigma^2}. \\ K_{\sigma^{\{1,2,3\}}} &= K_{\sigma^{\{1,2\}}} \oplus K_{\sigma^3}. \\ &\vdots \\ K_{\sigma^{\{1,2,\dots,J-1,J\}}} &= K_{\sigma^{\{1,2,\dots,J-1\}}} \oplus K_{\sigma^J}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la intersección de los LIPs $\{\mathcal{L}_{u^j}\}_{j=1}^J$ es transversa en $p \in \bigcap_{j=1}^J \mathcal{L}_{u^j}$ si

y solo si $K_{\sigma^{\mathcal{J}}} = K_{\sigma^{\{1,2,\dots,J-1,J\}}} = \bigoplus_{j=1}^J K_{\sigma^j}$.

□

Corolario 2.10.1 *Supongamos que los LIPs \mathcal{L}_{u^1} y \mathcal{L}_{u^2} se intersecan en $p \in \mathbb{R}^n$, y las celdas del complejo de demanda individuales de los dos agentes a este vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$ son σ^1 y σ^2 , mientras que la celda del complejo de demanda-agregada es $\sigma^{\{1,2\}}$. Entonces, la intersección de \mathcal{L}_{u^1} y \mathcal{L}_{u^2} es transversa en p si y solo si cada vector en $K_{\sigma^{\{1,2\}}}$ puede ser escrito únicamente como una suma de un vector en K_{σ^1} y un vector en K_{σ^2} .*

Demostración: Por el ítem 3) del lema 2.10.4, la intersección de los LIPs \mathcal{L}_{u^1} y \mathcal{L}_{u^2} es transversa en p si y solo si $K_{\sigma^{\{1,2\}}} = K_{\sigma^1} \oplus K_{\sigma^2}$. Por lo tanto, la intersección de los LIPs \mathcal{L}_{u^1} y \mathcal{L}_{u^2} es transversa en p si y solo si cada vector en $K_{\sigma^{\{1,2\}}}$ puede ser escrito únicamente como una suma de un vector en K_{σ^1} y un vector en K_{σ^2} . \square

El corolario 2.10.1 nos permitirá mostrar que la unimodularidad es una condición suficiente para la existencia del equilibrio cuando la intersección de los LIPs es transversa.

Por otro lado, para concluir con el teorema de unimodularidad, se demostrará que la unimodularidad es una condición necesaria para la existencia del equilibrio en economías con dos agentes.

Lema 2.10.5 *Supongamos que $J \leq n$ y que v^1, v^2, \dots, v^J son vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n . Sea $p \in \mathbb{R}^n$, tal que $D_{u^j}(p) = \{x^j, x^j + v^j\}$, para cada $j = 1, 2, \dots, J$. El conjunto $\{v^1, v^2, \dots, v^J\}$ es unimodular si y solo si, cada cesta entera en $\text{conv}(D_U(p))$ es demandada (por el agente agregado) a algún vector de precios, donde U es una valoración agregada de $\{u^1, u^2, \dots, u^J\}$.*

Demostración:

(\Rightarrow):

Supongamos que $\{v^1, v^2, \dots, v^J\}$ es unimodular. Notamos que

$$\begin{aligned} D_U(p) &= \sum_{j=1}^J D_{u^j}(p) = \sum_{j=1}^J \{x^j, x^j + v^j\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^J (x^j + \delta_j v^j) : \delta_j \in \{0, 1\}, \forall j = 1, 2, \dots, J \right\} \\ &= \sum_{j=1}^J x^j + \left\{ \sum_{j=1}^J \delta_j v^j : \delta_j \in \{0, 1\}, \forall j = 1, 2, \dots, J \right\} \end{aligned}$$

Como v^1, v^2, \dots, v^J son vectores linealmente independientes, entonces los puntos del conjunto $D_U(p)$ son los vértices de paralelepípedo J -dimensional en \mathbb{Z}^n , $\mathcal{P} =$

$\sum_{j=1}^J x^j + \left\{ \sum_{j=1}^J \delta_j v^j : \delta_j \in [0, 1], \forall j = 1, 2, \dots, J \right\}$, con bordes v^1, v^2, \dots, v^J . Por otro lado, dado que $\{v^1, v^2, \dots, v^J\}$ es unimodular, entonces, por la proposición D.0.1, concluimos que los únicos puntos de coordenadas enteras en el paralelepípedo \mathcal{P} , son los vértices de este paralelepípedo. Luego, si $x \in \mathbb{Z}^n$ tal que $x \in \text{conv}(D_U(p)) = \mathcal{P}$, entonces necesariamente x debe ser un vértice de \mathcal{P} . Por lo cual, $x \in D_U(p)$; es decir, x es demandado (por el agente agregado) al vector de precios p .

(\Leftarrow):

Supongamos que cada $x \in \mathbb{Z}^n \cap \text{conv}(D_U(p))$ es demandado (por el agente agregado) a algún vector de precios, entonces, por el teorema 2.4.6, $x \in D_U(p)$. Por lo cual,

$$D_U(p) = \mathbb{Z}^n \cap \text{conv}(D_U(p)) = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_U(p)).$$

De este modo, concluimos que los únicos puntos de coordenadas enteras en el paralelepípedo $\mathcal{P} = \text{conv}(D_U(p))$, son los vértices de este paralelepípedo, es decir los puntos de $D_U(p)$. Notemos que \mathcal{P} es una traslación del paralelepípedo

$$\mathcal{P}(v^1, v^2, \dots, v^J) = \left\{ \sum_{j=1}^J \delta_j v^j : \delta_j \in [0, 1], \forall j = 1, 2, \dots, J \right\},$$

así que los únicos puntos de coordenadas enteras en $\mathcal{P}(v^1, v^2, \dots, v^J)$, son los vértices de ese paralelepípedo, es decir los puntos de $\left\{ \sum_{j=1}^J \delta_j v^j : \delta_j \in \{0, 1\}, \forall j = 1, 2, \dots, J \right\}$.

Para mostrar que $\{v^1, v^2, \dots, v^J\}$ es unimodular, probaremos que para cada subconjunto linealmente independiente $\{v^{m_1}, v^{m_2}, \dots, v^{m_l}\}$ de $\{v^1, v^2, \dots, v^J\}$ no existe punto de coordenadas enteras en el paralelepípedo

$$\mathcal{P}(v^{m_1}, v^{m_2}, \dots, v^{m_l}) = \left\{ \sum_{i=1}^l \lambda^i v^{m_i} : \lambda^i \in [0, 1], \forall i = 1, 2, \dots, l \right\}$$

a no ser que sea un vértice. En efecto, $\mathcal{P}(v^{m_1}, v^{m_2}, \dots, v^{m_l})$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(v^1, v^2, \dots, v^J)$; y por lo tanto, los únicos puntos de coordenadas enteras en el paralelepípedo $\mathcal{P}(v^{m_1}, v^{m_2}, \dots, v^{m_l})$ son los vértices de $\mathcal{P}(v^{m_1}, v^{m_2}, \dots, v^{m_l})$. Entonces, por la proposición D.0.1, concluimos que $\{v^1, v^2, \dots, v^J\}$ es unimodular. \square

Teorema 2.10.1 (Teorema de Unimodularidad) *Sea $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{Z}^n$ un conjunto de vectores enteros primitivos no nulos. Existe un equilibrio para cada par de valoraciones cóncavas del tipo de demanda \mathcal{D} (donde cada valoración corresponde a un distinto agente y estamos considerando economías con dos agentes) y para todas las cestas de oferta relevante, si y solo si \mathcal{D} es unimodular.*

Demostración:

(\Rightarrow) :

Por el método de reducción al absurdo, supongamos que \mathcal{D} no es unimodular, entonces existe un subconjunto $\{v^1, v^2, \dots, v^r\} \subset \mathcal{D}$ linealmente independiente, con $r < n$, que no puede ser extendido a una base de \mathbb{R}^n de vectores enteros tal que el determinante de la matriz que tiene a los vectores de ésta base como sus columnas es ± 1 . Por lo cual, $\{v^1, v^2, \dots, v^r\}$ no es unimodular. Por otro lado, dado que todo vector entero primitivo satisface la condición 3) de la proposición D.0.1, concluimos que $\{v^i\}$ es unimodular para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Luego, sin pérdida de generalidad, existe algún $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ tal que

$$\{v^1, v^2, \dots, v^k\} \text{ es unimodular}$$

y

$$\{v^1, v^2, \dots, v^k, v^{k+1}\} \text{ no es unimodular.}$$

De esta manera podemos considerar $k+1$ agentes cuyas valoraciones son

$$u^j : \begin{array}{l} A^j = \{0, v^j\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ 0 \longmapsto u^j(0) = 1 \\ v^j \longmapsto u^j(v^j) = 1 \end{array}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k, k+1.$$

Podemos notar que $\mathcal{L}_{u^j} = \{p \in \mathbb{R}^n : D_{u^j}(p) = \{0, v^j\}\} = \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^j = 0\}$, $\forall j = 1, 2, \dots, k, k+1$; por lo cual, cada u^j es del tipo de demanda \mathcal{D} . Además, como cada vector v^j es entero y primitivo, se cumple que $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A^j) = A^j$. Por consiguiente, u^j es cóncava, para cada $j = 1, 2, \dots, k, k+1$.

Ahora mostraremos que el conjunto de demanda agregada, de la valoración agregada $u^{\{1,2,\dots,k\}}$, es convexo discreto. Si $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $D_{u^j}(p) = \{0, v^j\}$, $\forall j = 1, 2, \dots, k$; entonces se cumple que

- i) $|\{1, 2, \dots, k\}| = k \leq r-1 < n$.
- ii) $\{v^1, v^2, \dots, v^k\}$ es linealmente independiente.
- iii) $D_{u^j}(p) = \{0, 0 + v^j\}$, $\forall j = 1, 2, \dots, k$.

Como el conjunto $\{v^1, v^2, \dots, v^k\}$ es unimodular, entonces por el lema 2.10.5 concluimos que cada cesta entera en $\text{conv}(D_{u^{\{1,2,\dots,k\}}}(p))$ es demandada a algún precio; es decir, para cada $\tilde{x} \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u^{\{1,2,\dots,k\}}}(p))$ se cumple que \tilde{x} es demandado a algún precio $p' \in \mathbb{R}^n$.

Luego, por el teorema 2.4.6, $\tilde{x} \in D_{u\{1,2,\dots,k\}}(p)$. Por lo cual, $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u\{1,2,\dots,k\}}(p)) \subseteq D_{u\{1,2,\dots,k\}}(p)$. Por consiguiente,

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u\{1,2,\dots,k\}}(p)) = D_{u\{1,2,\dots,k\}}(p). \quad (2.42)$$

Por otro lado, si $q \in \mathbb{R}^n$ tal que $q \in \mathcal{L}_{u^{\tilde{j}}}$, $\forall \tilde{j} \in \mathcal{K} \subsetneq \{1, 2, \dots, k\}$; y $\forall \hat{j} \in \{1, 2, \dots, k\} \setminus \mathcal{K}$ se cumple que $|D_{u^{\hat{j}}}(q)| = 1$.

Afirmación 1: $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u\{1,2,\dots,k\}}(q)) \subseteq D_{u\{1,2,\dots,k\}}(q)$.

En efecto, sea $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u\{1,2,\dots,k\}}(q))$ fijo y arbitrario, entonces

$$x \in \mathbb{Z}^n \quad \text{y} \quad x \in \text{conv}(D_{u\{1,2,\dots,k\}}(q)).$$

Luego, dado que

$$\begin{aligned} \text{conv}(D_{u\{1,2,\dots,k\}}(q)) &= \text{conv}\left(\sum_{j=1}^k D_{u^j}(q)\right) \\ &= \sum_{j=1}^k \text{conv}(D_{u^j}(q)) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{K}} \text{conv}(D_{u^j}(q)) + \sum_{j \notin \mathcal{K}} \text{conv}(D_{u^j}(q)) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{K}} \text{conv}(D_{u^j}(q)) + \sum_{j \notin \mathcal{K}} D_{u^j}(q) \end{aligned}$$

concluimos que x toma la forma $x = \sum_{j \in \mathcal{K}} \lambda_j v^j + \sum_{j \notin \mathcal{K}} y^j$, donde $\lambda_j \in [0, 1]$, $\forall j \in \mathcal{K}$ y

$D_{u^j}(q) = \{y^j\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, k\} \setminus \mathcal{K}$. Por consiguiente, $\sum_{j \in \mathcal{K}} \lambda_j v^j = x - \sum_{j \notin \mathcal{K}} y^j \in \mathbb{Z}^n$.

Como $\{v^1, v^2, \dots, v^k\}$ es unimodular y linealmente independiente, entonces $\{v^j : j \in \mathcal{K}\}$ es linealmente independiente. Luego, por la proposición D.0.1, $\lambda_j \in \mathbb{Z}$, $\forall j \in \mathcal{K}$.

Entonces $\lambda_j = 0$ o $\lambda_j = 1$, $\forall j \in \mathcal{K}$. Por consiguiente, $\lambda_j v^j \in D_{u^j}(q)$, $\forall j \in \mathcal{K}$. En

consecuencia, $x \in \sum_{j \in \mathcal{K}} D_{u^j}(q) + \sum_{j \notin \mathcal{K}} D_{u^j}(q) = D_{u\{1,2,\dots,k\}}(q)$. De este modo

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u\{1,2,\dots,k\}}(q)) \subseteq D_{u\{1,2,\dots,k\}}(q).$$

Por lo tanto, de (2.42) y de la afirmación 1, concluimos que

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u\{1,2,\dots,k\}}(\tilde{p})) = D_{u\{1,2,\dots,k\}}(\tilde{p}), \quad \forall \tilde{p} \in \mathcal{L}_{u^j} \cap \mathcal{L}_{u^l}, \quad \forall j, l = 1, 2, \dots, k \quad \text{con} \quad j \neq l.$$

Entonces, por el lema 2.10.1, existe un equilibrio para cada cesta de oferta relevante

$x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}\left(\sum_{j=1}^k A^j\right)$; es decir, para cada $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}\left(\sum_{j=1}^k A^j\right)$, existe $\hat{p} \in \mathbb{R}^n$ tal

que $x \in D_{u^{\{1,2,\dots,k\}}}(\hat{p})$. Luego, por el teorema 2.4.2, $u^{\{1,2,\dots,k\}} : \sum_{j=1}^k A^j \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava.

Consideremos que $u^{\{1,2,\dots,k\}}$ es la valoración de un nuevo agente k^* , entonces $u^{\{k^*,k+1\}} = u^{\{1,2,\dots,k\} \cup \{k+1\}}$. Dado que $0 \in \mathcal{L}_{u^j}, \forall j = 1, 2, \dots, k, k+1$; obtenemos

- i) $|\{1, 2, \dots, k, k+1\}| = k+1 \leq r < n$.
- ii) $\{v^1, v^2, \dots, v^k, v^{k+1}\}$ es linealmente independiente.
- iii) $D_{u^j}(0) = \{0, 0 + v^j\}, \forall j = 1, 2, \dots, k, k+1$.

Como el conjunto $\{v^1, v^2, \dots, v^k, v^{k+1}\}$ no es unimodular, entonces por el lema 2.10.5 concluimos que existe alguna cesta entera en $\text{conv}(D_{u^{\{k^*,k+1\}}}(0))$ que no es demandada por el agente agregado a ningún precio. Por lo tanto, no existe precio de equilibrio para tal cesta y valoraciones u^{k^*}, u^{k+1} ; lo cual es una contradicción con la hipótesis.

(\Leftarrow) :

Supongamos que \mathcal{D} es unimodular. Sean $u^1 : A^1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $u^2 : A^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos valoraciones cóncavas de tipo de demanda \mathcal{D} tal que la intersección de \mathcal{L}_{u^1} y \mathcal{L}_{u^2} es transversa. Sea $p \in \mathcal{L}_{u^1} \cap \mathcal{L}_{u^2}$ fijo y arbitrario, mostraremos que $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u^{\{1,2\}}}(p)) = D_{u^{\{1,2\}}}(p)$. Denotemos por

$$\sigma^1 = \text{conv}(D_{u^1}(p)), \quad \sigma^2 = \text{conv}(D_{u^2}(p)) \quad \text{y} \quad \sigma^{\{1,2\}} = \text{conv}(D_{u^{\{1,2\}}}(p)).$$

Afirmación 2: $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u^{\{1,2\}}}(p)) \subseteq D_{u^{\{1,2\}}}(p)$.

En efecto, sea $y \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u^{\{1,2\}}}(p)) = \sigma^{\{1,2\}} \cap \mathbb{Z}^n$ fijo y arbitrario. Por definición de subespacio generado por los cambios en la demanda, $y - \hat{x} \in K_{\sigma^{\{1,2\}}}$ para cualquier $\hat{x} \in \sigma^{\{1,2\}}$. En particular, para cualquier vértice x de $\sigma^{\{1,2\}}$ se cumple que $y - x \in K_{\sigma^{\{1,2\}}}$. Ahora fijemos una base¹ β para $K_{\sigma^{\{1,2\}}}$, compuesta de vectores borde de $\sigma^{\{1,2\}}$. Entonces, por el teorema 2.7.1, los vectores de la base β son las normales a las facetas de $\mathcal{L}_{u^{\{1,2\}}}$ que contienen a $p \in \mathbb{R}^n$. Por otro lado, por el corolario 2.9.1 y dado que las valoraciones u^1 y u^2 son del tipo de demanda \mathcal{D} , concluimos que $u^{\{1,2\}}$ es de tipo de demanda \mathcal{D} . De esta manera tenemos que $\beta \subset \mathcal{D}$. En consecuencia, β es unimodular. Si denotamos a β por $\beta = \{v^1, v^2, \dots, v^b\}$ entonces

$$y - x = \sum_{i=1}^b \lambda_i v^i, \quad \text{donde } \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, b.$$

¹La existencia de esta base no la discutiremos porque su demostración escapa de los temas tratados en este trabajo

Luego, por la condición 3) de la proposición D.0.1, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, para cada $i = 1, 2, \dots, b$. Por otro lado, dado que $\mathcal{L}_{u\{1,2\}} = \mathcal{L}_{u^1} \cup \mathcal{L}_{u^2}$, entonces cada vector de β es normal a una faceta de \mathcal{L}_{u^1} o de \mathcal{L}_{u^2} . Así, podemos separar esta base β en dos conjuntos, es decir, $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ donde β_1 contiene a los vectores de la base β que son normales a alguna faceta de \mathcal{L}_{u^1} y β_2 contiene a los vectores de la base β que son normales a alguna faceta de \mathcal{L}_{u^2} . Entonces

$$y - x = z^1 + z^2, \quad \text{donde } z^1 \in K_{\sigma^1} \cap \mathbb{Z}^n \text{ y } z^2 \in K_{\sigma^2} \cap \mathbb{Z}^n. \quad (2.43)$$

Luego, dado que $\sigma^{\{1,2\}} = \sigma^1 + \sigma^2$, entonces existen $y^1 \in \sigma^1$ y $y^2 \in \sigma^2$ tal que $y = y^1 + y^2$. Por otro lado, como x es un vértice de $\sigma^{\{1,2\}}$, entonces x es una cesta únicamente demandada y $p \in \text{Fr}(\mathcal{R}_{u\{1,2\}}(x))$. Por consiguiente, $x \in D_{u\{1,2\}}(p)$. Por lo cual, $x = x^1 + x^2$, donde $x^1 \in D_{u^1}(p)$ y $x^2 \in D_{u^2}(p)$. Luego,

$$y - x = (y^1 + y^2) - (x^1 + x^2) = \underbrace{(y^1 - x^1)}_{\in K_{\sigma^1}} + \underbrace{(y^2 - x^2)}_{\in K_{\sigma^2}}. \quad (2.44)$$

Por (2.43), (2.44) y el corolario 2.10.1, tenemos

$$y^1 - x^1 = z^1 \quad \text{y} \quad y^2 - x^2 = z^2.$$

Luego, dado que $x^1, z^1, x^2, z^2 \in \mathbb{Z}^n$, obtenemos que $y^1, y^2 \in \mathbb{Z}^n$. Por lo cual,

$$y^1 \in \sigma^1 \cap \mathbb{Z}^n = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u^1}(p)) \quad \text{y} \quad y^2 \in \sigma^2 \cap \mathbb{Z}^n = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u^2}(p)).$$

Como u^1 y u^2 son cóncavas, entonces por el teorema 2.4.3, obtenemos que

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u^1}(p)) = D_{u^1}(p) \quad \text{y} \quad \text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u^2}(p)) = D_{u^2}(p),$$

en consecuencia, $y^1 \in D_{u^1}(p)$ y $y^2 \in D_{u^2}(p)$. Por lo tanto,

$$y = y^1 + y^2 \in D_{u\{1,2\}}(p).$$

De la afirmación 2 obtenemos que $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u\{1,2\}}(p)) = D_{u\{1,2\}}(p)$. Por lo tanto,

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(D_{u\{1,2\}}(p)) = D_{u\{1,2\}}(p), \quad \forall p \in \mathcal{L}_{u^1} \cap \mathcal{L}_{u^2}.$$

Luego, por el lema 2.10.1, existe un equilibrio para cada cesta de oferta relevante $\tilde{x} \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A^1 + A^2)$. Finalmente, por la proposición 2.10.2, concluimos que existe un equilibrio para cada par de valoraciones cóncavas de tipo de demanda \mathcal{D} y para todas las cestas de oferta relevante. \square

Corolario 2.10.2 Sea $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{Z}^n$ un conjunto de vectores enteros primitivos no nulos. Existe un equilibrio para cada conjunto finito de valoraciones cóncavas de tipo de demanda \mathcal{D} y para todas las cestas de oferta relevante, si y solo si \mathcal{D} es unimodular.

Demostración:

(\Rightarrow):

Sea $\{u^j : A^j \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=1}^J$ un conjunto finito de valoraciones cóncavas del tipo de demanda \mathcal{D} entonces la valoración agregada $u^{\{1,2,\dots,J\}}$ es cóncava y del tipo de demanda \mathcal{D} . Consideremos otra valoración $u^{J+1} : A^{J+1} \rightarrow \mathbb{R}$ cóncava y del tipo de demanda \mathcal{D} ; entonces por hipótesis, existe equilibrio para las valoraciones $u^{\{1,2,\dots,J\}}$ y u^{J+1} y para todas las cestas de oferta relevante $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}} \left(\sum_{j=1}^{J+1} A^j \right)$. Luego, por el teorema de unimodularidad, concluimos que \mathcal{D} es unimodular.

(\Leftarrow):

Supongamos que \mathcal{D} es unimodular y sea $\{u^j : A^j \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=1}^J$ un conjunto finito de valoraciones cóncavas del tipo de demanda \mathcal{D} . Aplicando el teorema de unimodularidad a las valoraciones u^1 y u^2 , concluimos que existe equilibrio para las valoraciones u^1 y u^2 ; y para todas las cestas de oferta relevante $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}} (A^1 + A^2)$. Por otro lado, tenemos que la valoración agregada $u^{\{1,2\}}$ también será cóncava y del tipo de demanda \mathcal{D} . Así que aplicando nuevamente el teorema de unimodularidad obtenemos que existe equilibrio para las valoraciones $u^{\{1,2\}}$ y u^3 ; y para todas las cestas de oferta relevante $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}} (A^1 + A^2 + A^3)$. Finalmente, si aplicamos repetidamente el teorema de unimodularidad, concluiremos que existe equilibrio para las valoraciones $\{u^j\}_{j=1}^J$ y para todas las cestas de oferta relevante $x \in \text{conv}_{\mathbb{Z}} \left(\sum_{j=1}^J A^j \right)$. \square

Corolario 2.10.3 Sea $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{Z}^n$ un conjunto de vectores enteros primitivos no nulos. Para una economía con n distintos bienes tal que \mathcal{D} genera \mathbb{R}^n , se cumple que existe un equilibrio para cada conjunto finito de valoraciones cóncavas de tipo de demanda \mathcal{D} y para todas las cestas de oferta relevante, si y solo si para cada subconjunto de n vectores de \mathcal{D} , el determinante de la matriz que tiene por columnas a estos n vectores, es igual a 0 ó ± 1 .

Demostración:

(\Rightarrow):

Supongamos que existe un equilibrio para cada conjunto finito de valoraciones cóncavas del tipo de demanda \mathcal{D} y para todas las cestas de oferta relevante, entonces por

el corolario 2.10.2, \mathcal{D} es unimodular. Sea $\beta = \{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ un subconjunto de n vectores de \mathcal{D} .

Caso 1: Si β es linealmente dependiente entonces $\det[v^1|v^2|\dots|v^n] = 0$.

Caso 2: Si β es linealmente independiente entonces $\det[v^1|v^2|\dots|v^n] \neq 0$. Dado que \mathcal{D} es unimodular, concluimos que el determinante solamente podría tomar los valores ± 1 .

(\Leftarrow):

Sea $\{v^1, v^2, \dots, v^k : 1 \leq k \leq n\} \subseteq \mathcal{D}$ un subconjunto linealmente independiente. Dado que \mathcal{D} genera \mathbb{R}^n entonces existe un subconjunto de vectores $\{v^{k+1}, \dots, v^n\} \subseteq \mathcal{D}$ tal que $\{v^1, v^2, \dots, v^k, v^{k+1}, \dots, v^n\}$ genera \mathbb{R}^n . Además, dado que \mathbb{R}^n es n -dimensional, obtenemos que $\{v^1, v^2, \dots, v^k, v^{k+1}, \dots, v^n\}$ es una base para \mathbb{R}^n . En particular, $\{v^1, v^2, \dots, v^k, v^{k+1}, \dots, v^n\}$ es linealmente independiente, así que $\det[v^1|v^2|\dots|v^n] \neq 0$. Entonces, por hipótesis $\det[v^1|v^2|\dots|v^n] = \pm 1$. Finalmente, concluimos que \mathcal{D} es unimodular. Por lo tanto, por el corolario 2.10.2, existe un equilibrio para cada conjunto finito de valoraciones cóncavas del tipo de demanda \mathcal{D} y para todas las cestas de oferta relevante. □



Capítulo 3

Subasta “Product-Mix” y ejemplos de “Tipos de demanda”

3.1. Subasta “Product-Mix”

Una subasta “product-mix” es una subasta estática de oferta sellada para bienes diferenciados, es decir, ningún pujador conoce las ofertas de los otros pujadores, cada pujador presenta su oferta solamente una vez y hay diferentes tipos de bienes a ser subastados. En este contexto, solamente consideramos bienes indivisibles. Por otro lado, cada pujador indica su valoración, o cuánto vale para él cada cesta de bienes. La valoración del pujador es descrita mediante una función. Finalmente, después de ver las ofertas, el subastador establece el precio por unidad para cada bien y divide la oferta en cestas, una para cada pujador. Luego, cada pujador paga su cesta asignada de acuerdo a los precios establecidos. Notemos que pueden existir varias formas en las que el subastador divida la oferta, pero si existiese una selección de precios y una forma de dividir la oferta de modo que a cada pujador se le asigne una cesta que maximice su beneficio entonces diremos que existe equilibrio competitivo.

A lo largo de esta sección suponemos que hay n tipos de bienes indivisibles y un número finito J de pujadores. De esta manera, una **cesta de bienes** es un punto en \mathbb{Z}^n . Usamos el superíndice $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ para hacer referencia a un pujador en particular.

Definición 3.1.1 Para cada $j \in \{1, 2, \dots, J\}$, la valoración (**pujas**) del j -ésimo pujador, es una función $u^j : A^j \rightarrow \mathbb{R}$, donde $A^j \subset \mathbb{Z}^n$ y $u^j(a)$ es su puja por la cesta $a \in A^j$.

Definición 3.1.2 El conjunto de todas las posibles cestas de bienes en la economía que pueden potencialmente ser puestos al conjunto de pujadores, es definido como la suma Minkowski

$$A := \sum_{j=1}^J A^j = \left\{ \sum_{j=1}^J a^j : a^j \in A^j, \forall j \in \{1, 2, \dots, J\} \right\}.$$

Supongamos que $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ es un vector de precios fijado, donde p_i es el precio por una unidad del i -ésimo bien, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces el **beneficio** del j -ésimo pujador por comprar una cesta $a \in A^j$ al vector de precios p es $u^j(a) - p \cdot a$. Por consiguiente, el **conjunto de demanda** del j -ésimo pujador al vector de precios p , $D_{w^j}(p)$, es el conjunto de cestas que maximizan su beneficio, es decir,

$$D_{w^j}(p) := \arg \max_{a \in A^j} \{u^j(a) - p \cdot a\}.$$

Consideremos la función U , definida por

$$U : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a \longmapsto U(a) := \max \left\{ \sum_{j=1}^J u^j(a^j) : a^j \in A^j \text{ y } \sum_{j=1}^J a^j = a \right\}$$

es decir, U es la máxima valoración total tomada sobre todas las formas de particionar cada cesta $a \in A$.

En el siguiente teorema mostramos que esta función U es una valoración agregada de $\{u^j\}_{j=1}^J$. Así que la demanda agregada al vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto de demanda de la valoración agregada U ,

$$D_U(p) := \arg \max_{a \in A} \{U(a) - p \cdot a\} \subseteq A.$$

Teorema 3.1.1 *La función U es una valoración agregada de $\{u^j\}_{j=1}^J$, es decir,*

$$D_U(p) = \sum_{j=1}^J D_{w^j}(p), \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración: Sea $p \in \mathbb{R}^n$ un vector de precios fijo y arbitrario.

(\subseteq):

Sea $a \in D_U(p)$ fijo y arbitrario, mostraremos que $a \in \sum_{j=1}^J D_{w^j}(p)$. Dado que $a \in D_U(p)$, tenemos

$$U(a) - p \cdot a \geq U(b) - p \cdot b, \forall b \in A. \quad (3.1)$$

Además, para a existen $a^1 \in A^1, a^2 \in A^2, \dots, a^J \in A^J$ con $\sum_{j=1}^J a^j = a$ tal que

$$U(a) = \sum_{j=1}^J u^j(a^j). \quad (3.2)$$

Afirmación 1: $a^j \in D_{u^j}(p)$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, J\}$.

En efecto, sea $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ fijo y arbitrario. Probaremos que

$$u^j(a^j) - p \cdot a^j \geq u^j(\bar{a}^j) - p \cdot \bar{a}^j, \forall \bar{a}^j \in A^j.$$

Sea $\bar{a}^j \in A^j$ fijo y arbitrario. De (3.1) y (3.2) obtenemos

$$\sum_{k=1}^J u^k(a^k) - p \cdot \sum_{k=1}^J a^k \geq U(a^1 + \dots + \bar{a}^j + \dots + a^J) - p \cdot (a^1 + \dots + \bar{a}^j + \dots + a^J)$$

entonces

$$\sum_{k=1}^J u^k(a^k) - p \cdot a^j \geq U(a^1 + \dots + \bar{a}^j + \dots + a^J) - p \cdot \bar{a}^j. \quad (3.3)$$

Por la definición de la función U , tenemos

$$U(a^1 + \dots + \bar{a}^j + \dots + a^J) \geq u^1(a^1) + \dots + u^j(\bar{a}^j) + \dots + u^J(a^J).$$

Luego, comparando con (3.3) obtenemos

$$\sum_{k=1}^J u^k(a^k) - p \cdot a^j \geq u^1(a^1) + \dots + u^j(\bar{a}^j) + \dots + u^J(a^J) - p \cdot \bar{a}^j$$

por lo tanto

$$u^j(a^j) - p \cdot a^j \geq u^j(\bar{a}^j) - p \cdot \bar{a}^j.$$

Como $\bar{a}^j \in A^j$ era fijo y arbitrario, concluimos que

$$u^j(a^j) - p \cdot a^j \geq u^j(\bar{a}^j) - p \cdot \bar{a}^j, \forall \bar{a}^j \in A^j$$

es decir, $a^j \in D_{u^j}(p)$. Como $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ también era fijo y arbitrario, concluimos que $a^j \in D_{u^j}(p)$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, J\}$. Por lo tanto, la afirmación 1 es válida.

Luego, por la afirmación 1 conseguimos que $a = \sum_{j=1}^J a^j \in \sum_{j=1}^J D_{u^j}(p)$.

(\supseteq):

Sean $a^1 \in D_{u^1}(p)$, $a^2 \in D_{u^2}(p)$, \dots , $a^J \in D_{u^J}(p)$ fijos y arbitrarios, mostraremos que

$a := \sum_{j=1}^J a^j \in D_U(p)$. Dado que $a^j \in D_{u^j}(p)$, obtenemos

$$u^j(a^j) - p \cdot a^j \geq u^j(\bar{a}^j) - p \cdot \bar{a}^j, \forall \bar{a}^j \in A^j, \forall j \in \{1, 2, \dots, J\}. \quad (3.4)$$

Afirmación 2: $U(a) = \sum_{j=1}^J u^j(a^j)$.

En efecto, sean $\hat{a}^1 \in A^1, \hat{a}^2 \in A^2, \dots, \hat{a}^J \in A^J$ fijos y arbitrarios con $\sum_{j=1}^J \hat{a}^j = a$. De (3.4) obtenemos

$$u^j(a^j) - p \cdot a^j \geq u^j(\hat{a}^j) - p \cdot \hat{a}^j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, J\}.$$

Sumando las desigualdades desde $j = 1$ hasta $j = J$, obtenemos

$$\sum_{j=1}^J (u^j(a^j) - p \cdot a^j) \geq \sum_{j=1}^J (u^j(\hat{a}^j) - p \cdot \hat{a}^j)$$

es decir

$$\sum_{j=1}^J u^j(a^j) - p \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^J a^j}_a \geq \sum_{j=1}^J u^j(\hat{a}^j) - p \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^J \hat{a}^j}_a$$

por consiguiente

$$\sum_{j=1}^J u^j(a^j) \geq \sum_{j=1}^J u^j(\hat{a}^j).$$

Como los $\hat{a}^j \in A^j$ eran fijos y arbitrarios, concluimos que

$$\sum_{j=1}^J u^j(a^j) \geq \sum_{j=1}^J u^j(\hat{a}^j), \quad \forall \hat{a}^j \in A^j \text{ tal que } \sum_{j=1}^J \hat{a}^j = a.$$

Por lo cual, $U(a) = \sum_{j=1}^J u^j(a^j)$. Por lo tanto, la afirmación 2 es válida.

Luego, para cada $b \in A$, existen $b^1 \in A^1, b^2 \in A^2, \dots, b^J \in A^J$ con $\sum_{j=1}^J b^j = b$ tal que

$$U(b) = \sum_{j=1}^J u^j(b^j). \text{ Entonces, por (3.4),}$$

$$u^j(a^j) - p \cdot a^j \geq u^j(b^j) - p \cdot b^j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, J\}.$$

Sumando las desigualdades desde $j = 1$ hasta $j = J$, obtenemos

$$\sum_{j=1}^J (u^j(a^j) - p \cdot a^j) \geq \sum_{j=1}^J (u^j(b^j) - p \cdot b^j)$$

es decir

$$\sum_{j=1}^J u^j(a^j) - p \cdot \sum_{j=1}^J a^j \geq \sum_{j=1}^J u^j(b^j) - p \cdot \sum_{j=1}^J b^j$$

por lo cual

$$U(a) - p \cdot a \geq U(b) - p \cdot b, \forall b \in A$$

por consiguiente

$$\sum_{j=1}^J a^j = a \in D_U(p).$$

Como los $a^j \in D_{u^j}(p)$ eran fijos y arbitrarios, concluimos que

$$\sum_{j=1}^J D_{u^j}(p) \subseteq D_U(p).$$

□

De la definición de equilibrio competitivo dada en el capítulo anterior, decimos que el conjunto de valoraciones (pujas) $\{u^j\}_{j=1}^J$ **tiene equilibrio competitivo** en una oferta de mercado $a \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, si existe algún vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $a \in D_U(p)$. Decimos que **existe equilibrio competitivo** para el conjunto de valoraciones $\{u^j\}_{j=1}^J$, si estas valoraciones tienen equilibrio competitivo en cada $a \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$.

Es evidente que si existe equilibrio competitivo para el conjunto de valoraciones $\{u^j\}_{j=1}^J$, entonces $A = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$.

Como podemos ver, la subasta “product-mix” es ideal para poder aplicar toda la teoría desarrollada en el capítulo 2. Así que el teorema de unimodularidad es el resultado que nos brinda las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de equilibrio competitivo en este tipo de subastas.

Ejemplo 3.1.1 *Supongamos que $n = 1$ y $J = 2$, es decir, hay un solo tipo de bien y dos pujadores. También supongamos que el subastador tiene dos unidades del mismo bien para vender. Además, la valoración de cada pujador está definida de la siguiente manera:*

Para el pujador 1: $A^1 = \{0, 1, 2\}$ y $u^1 : A^1 \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por:

$$u^1(0) = 0, u^1(1) = 10, u^1(2) = 11.$$

Para el pujador 2: $A^2 = \{0, 1, 2\}$ y $u^2 : A^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por:

$$u^2(0) = 0, u^2(1) = 2, u^2(2) = 3.$$

Si $p \in \mathbb{R}$ denota al precio por una unidad del bien, entonces el conjunto de demanda de cada pujador está dado por:

Para el pujador 1:

$$\begin{aligned} D_{u^1}(p) &= \arg \max_{a \in A^1} \{u^1(a) - p \cdot a\} \\ &= \arg \max_{a \in A^1} \left\{ \underbrace{u^1(0) - p \cdot 0}_0, \underbrace{u^1(1) - p \cdot 1}_{10-p}, \underbrace{u^1(2) - p \cdot 2}_{11-2p} \right\}. \end{aligned}$$

Notamos que:

- $D_{u^1}(p) = \{0\} \iff 10 - p < 0, 11 - 2p < 0 \iff 10 < p.$
- $D_{u^1}(p) = \{1\} \iff 0 < 10 - p, 11 - 2p < 10 - p \iff 1 < p < 10.$
- $D_{u^1}(p) = \{2\} \iff 0 < 11 - 2p, 10 - p < 11 - 2p \iff p < 1.$

Además:

$$D_{u^1}(1) = \arg \max_{a \in A^1} \left\{ \underbrace{u^1(0) - 1 \cdot 0}_0, \underbrace{u^1(1) - 1 \cdot 1}_9, \underbrace{u^1(2) - 1 \cdot 2}_9 \right\} = \{1, 2\}$$

y

$$D_{u^1}(10) = \arg \max_{a \in A^1} \left\{ \underbrace{u^1(0) - 10 \cdot 0}_0, \underbrace{u^1(1) - 10 \cdot 1}_0, \underbrace{u^1(2) - 10 \cdot 2}_{-9} \right\} = \{0, 1\}.$$

Gráficamente:

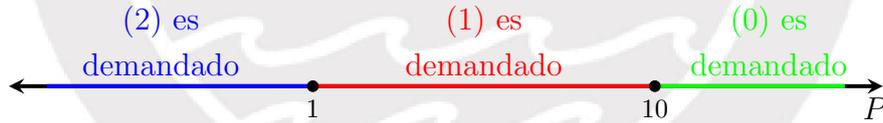


Figura 3.1: El espacio de precios \mathbb{R} es particionado de acuerdo a los conjuntos de demanda del pujador 1.

Para el pujador 2:

$$\begin{aligned} D_{u^2}(p) &= \arg \max_{a \in A^2} \{u^2(a) - p \cdot a\} \\ &= \arg \max_{a \in A^2} \left\{ \underbrace{u^2(0) - p \cdot 0}_0, \underbrace{u^2(1) - p \cdot 1}_{2-p}, \underbrace{u^2(2) - p \cdot 2}_{3-2p} \right\}. \end{aligned}$$

Notamos que:

- $D_{u^2}(p) = \{0\} \iff 2 - p < 0, 3 - 2p < 0 \iff 2 < p.$

- $D_{u^1}(p) = \{1\} \iff 0 < 2 - p, 3 - 2p < 2 - p \iff 1 < p < 2.$
- $D_{u^1}(p) = \{2\} \iff 0 < 3 - 2p, 2 - p < 3 - 2p \iff p < 1.$

Además:

$$D_{u^2}(1) = \arg \max_{a \in A^2} \{ \underbrace{u^2(0) - 1 \cdot 0}_0, \underbrace{u^2(1) - 1 \cdot 1}_1, \underbrace{u^2(2) - 1 \cdot 2}_1 \} = \{1, 2\}$$

y

$$D_{u^2}(2) = \arg \max_{a \in A^2} \{ \underbrace{u^2(0) - 2 \cdot 0}_0, \underbrace{u^2(1) - 2 \cdot 1}_0, \underbrace{u^2(2) - 2 \cdot 2}_{-1} \} = \{0, 1\}.$$

Gráficamente:



Figura 3.2: El espacio de precios \mathbb{R} es particionado de acuerdo a los conjuntos de demanda del pujador 2.

Por otro lado, el dominio de la valoración agregada U es $A = A^1 + A^2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y esta valoración agregada U es calculada de la siguiente forma:

- La cesta $a = 0 \in A$ solamente puede ser particionada como $0 = 0 + 0$, entonces

$$U(0) = u^1(0) + u^2(0) = 0 + 0 = 0.$$

- La cesta $a = 1 \in A$ puede ser particionada como $1 = 1 + 0 = 0 + 1$, entonces

$$U(1) = \max \{ \underbrace{u^1(1)}_{10} + \underbrace{u^2(0)}_0, \underbrace{u^1(0)}_0 + \underbrace{u^2(1)}_2 \} = \max \{10, 2\} = 10.$$

- La cesta $a = 2 \in A$ puede ser particionada como $2 = 0 + 2 = 1 + 1 = 2 + 0$, entonces

$$U(2) = \max \{ \underbrace{u^1(0)}_0 + \underbrace{u^2(2)}_3, \underbrace{u^1(1)}_{10} + \underbrace{u^2(1)}_2, \underbrace{u^1(2)}_{11} + \underbrace{u^2(0)}_0 \} = \max \{3, 12, 11\} = 12$$

- La cesta $a = 3 \in A$ puede ser particionada como $3 = 1 + 2 = 2 + 1$, entonces

$$U(3) = \max \{ \underbrace{u^1(1)}_{10} + \underbrace{u^2(2)}_3, \underbrace{u^1(2)}_{11} + \underbrace{u^2(1)}_2 \} = \max \{13, 13\} = 13.$$

- La cesta $a = 4 \in A$ solamente puede ser particionada como $4 = 2 + 2$, entonces

$$U(4) = u^1(2) + u^2(2) = 11 + 3 = 14.$$

Finalmente, la demanda agregada al precio $p \in \mathbb{R}$ puede ser hallada utilizando el teorema 3.1.1 y las figuras 3.1 y 3.2. De esta manera, obtenemos lo siguiente:

- Si $p < 1$ entonces $D_U(p) = \underbrace{D_{u^1}(p)}_{\{2\}} + \underbrace{D_{u^2}(p)}_{\{2\}} = \{4\}$.
- Si $p = 1$ entonces $D_U(1) = \underbrace{D_{u^1}(1)}_{\{1,2\}} + \underbrace{D_{u^2}(1)}_{\{1,2\}} = \{2, 3, 4\}$.
- Si $1 < p < 2$ entonces $D_U(p) = \underbrace{D_{u^1}(p)}_{\{1\}} + \underbrace{D_{u^2}(p)}_{\{1\}} = \{2\}$.
- Si $p = 2$ entonces $D_U(2) = \underbrace{D_{u^1}(2)}_{\{1\}} + \underbrace{D_{u^2}(2)}_{\{0,1\}} = \{1, 2\}$.
- Si $2 < p < 10$ entonces $D_U(p) = \underbrace{D_{u^1}(p)}_{\{1\}} + \underbrace{D_{u^2}(p)}_{\{0\}} = \{1\}$.
- Si $p = 10$ entonces $D_U(10) = \underbrace{D_{u^1}(10)}_{\{0,1\}} + \underbrace{D_{u^2}(10)}_{\{0\}} = \{0, 1\}$.
- Si $10 < p$ entonces $D_U(p) = \underbrace{D_{u^1}(p)}_{\{0\}} + \underbrace{D_{u^2}(p)}_{\{0\}} = \{0\}$.

Gráficamente:



Figura 3.3: El espacio de precios \mathbb{R} es particionado de acuerdo a los conjuntos de demanda del agente agregado.

En este caso tenemos que para cada oferta de mercado $a \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A) = A$ existe algún precio $p \in \mathbb{R}$ tal que $a \in D_U(p)$. Por lo tanto, las valoraciones u^1 y u^2 tienen equilibrio competitivo en cada $a \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, pero dado que el subastador solamente dispone de dos unidades del bien, entonces no tiene sentido hablar de las ofertas de mercado 3 y 4. Por otro lado, el subastador siempre desea vender las dos unidades del bien, por consiguiente los precios de equilibrio competitivo son $\{p \in \mathbb{R} : 1 \leq p \leq 2\}$. A

estos precios, cada pujador compra una unidad del bien, así que el máximo ingreso en equilibrio competitivo que recibe el subastador es $2 \times 2 = 4$. Sin embargo, si el subastador establece el precio $p = 10$, entonces el pujador 1 compra una unidad del bien y el pujador 2 no compra nada. En este caso, no todas las unidades del bien son vendidas pero el subastador alcanza un ingreso de $1 \times 10 = 10$. Sin embargo, si comparamos el beneficio agregado, notamos que

$$U(2) - 2 \cdot 2 = 12 - 4 = 8 > U(1) - 10 \cdot 1 = 10 - 10 = 0.$$

Ejemplo 3.1.2 Supongamos que $n = 2$ y $J = 2$, es decir, hay dos tipos de bienes y dos pujadores. Para cualesquiera valoraciones u^1 y u^2 con dominios $A^1 = \{(0, 0), (1, 0)\}$ y $A^2 = \{(0, 0), (1, 2)\}$, respectivamente, el dominio de la valoración agregada U es

$$\begin{aligned} A &= A^1 + A^2 \\ A &= \{(0, 0) + (0, 0), (1, 0) + (0, 0), (0, 0) + (1, 2), (1, 0) + (1, 2)\} \\ A &= \{(0, 0), (1, 0), (1, 2), (2, 2)\} \end{aligned}$$

y la cápsula convexa discreta de A es

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A) = \text{conv}_{\mathbb{Z}}\{(0, 0), (1, 0), (1, 2), (2, 2)\} = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2)\}.$$

Luego, como $(1, 1)$ no pertenece al dominio de U , es decir $(1, 1) \notin A$; entonces podemos considerar que $U(1, 1) = -\infty$. Por lo tanto, el equilibrio competitivo sobre $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ fallaría en el punto $(1, 1) \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A) \setminus A$ para cualquier par de valoraciones u^1 y u^2 .

Por lo tanto, el ejemplo 3.1.2 nos muestra que si A es un subconjunto propio de $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, entonces no existirá equilibrio competitivo en un punto $a \in \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A) \setminus A$, para cualesquiera valoraciones u^j de los agentes. Esto se debe a que la valoración agregada solamente es finita sobre A y es $-\infty$ en cualquier otro punto, así que el equilibrio competitivo no se mantiene para puntos fuera de A . Por otro lado, sabemos que la condición $A = \text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$ no es suficiente para garantizar la existencia de equilibrio competitivo en cada $a \in A$. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 3.1.3 Supongamos que $n = 2$ y $J = 2$, es decir, hay dos tipos de bienes y dos pujadores. Definamos la valoración de cada pujador de la siguiente manera:

Para el pujador 1: $A^1 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$ y $u^1 : A^1 \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por:

$$u^1((0, 0)) = 0, \quad u^1((0, 1)) = 3, \quad u^1((0, 2)) = 5, \quad u^1((1, 2)) = 9.$$

Para el pujador 2: $A^2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ y $u^2 : A^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por:

$$u^2((0, 0)) = 0, \quad u^2((1, 0)) = 1, \quad u^2((0, 1)) = 1.$$

Si $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ denota al vector de precios, donde p_1 es el precio por una unidad del bien 1 y p_2 es el precio por una unidad del bien 2 entonces el conjunto de demanda de cada pujador está dado por:

Para el pujador 1:

$$\begin{aligned} D_{u^1}(p) &= \arg \max_{a \in A^1} \{u^1(a) - p \cdot a\} \\ &= \arg \max_{a \in A^1} \left\{ \underbrace{u^1((0, 0)) - p \cdot (0, 0)}_0, \underbrace{u^1((0, 1)) - p \cdot (0, 1)}_{3-p_2}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{u^1((0, 2)) - p \cdot (0, 2)}_{5-2p_2}, \underbrace{u^1((1, 2)) - p \cdot (1, 2)}_{9-p_1-2p_2} \right\}. \end{aligned}$$

De manera análoga a todos los ejemplos que hemos desarrollado en este capítulo y en el anterior, podemos encontrar de forma analítica las UDRs y el LIP de u^1 . Gráficamente tenemos:

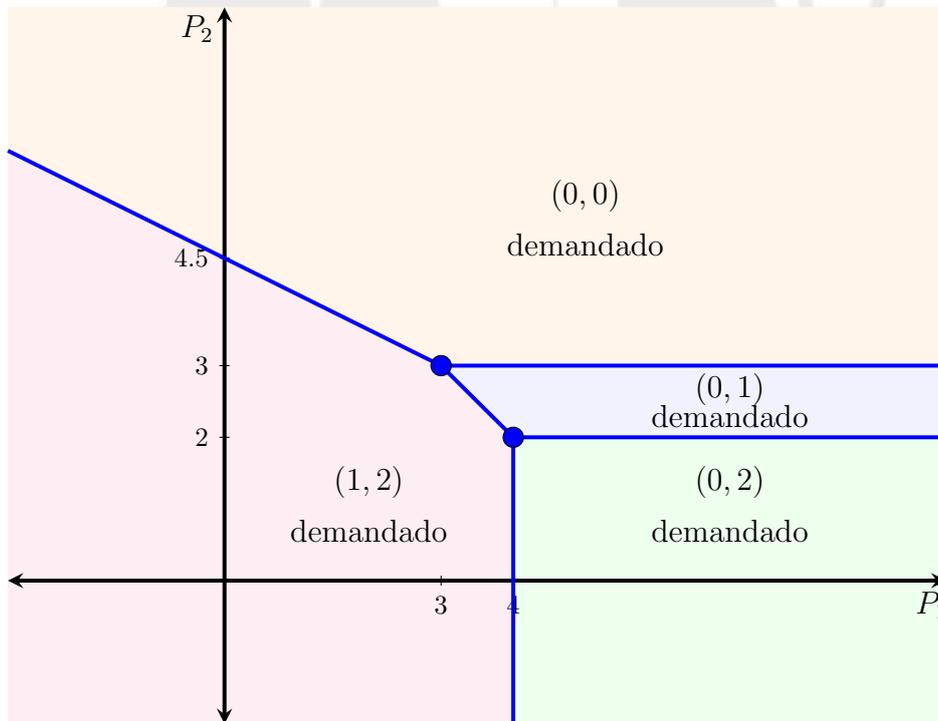


Figura 3.4: UDRs y LIP de u^1

Para el pujador 2:

$$\begin{aligned}
 D_{u^2}(p) &= \arg \max_{a \in A^2} \{u^2(a) - p \cdot a\} \\
 &= \arg \max_{a \in A^2} \left\{ \underbrace{u^2((0,0)) - p \cdot (0,0)}_0, \underbrace{u^2((1,0)) - p \cdot (1,0)}_{1-p_1}, \underbrace{u^2((0,1)) - p \cdot (0,1)}_{1-p_2} \right\}
 \end{aligned}$$

De manera análoga a todos los ejemplos que hemos desarrollado en este capítulo y en el anterior, podemos encontrar de forma analítica las UDRs y el LIP de u^2 . Gráficamente tenemos:

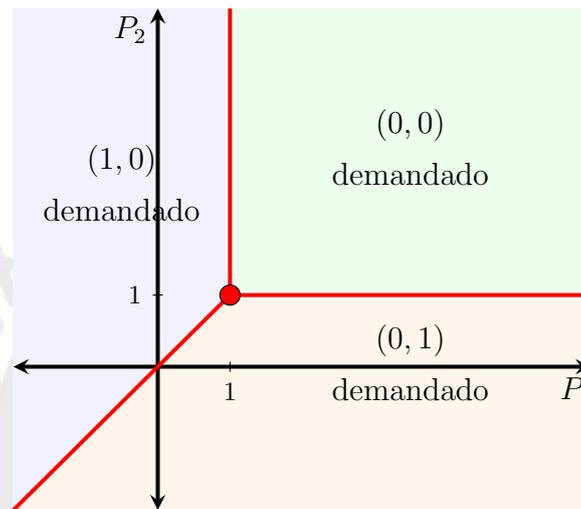


Figura 3.5: UDRs y LIP de u^2

Por otro lado, el dominio de la valoración agregada U es

$$A = A^1 + A^2 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,2), (1,0), (1,1), (2,2), (0,3), (1,3)\}$$

y por el teorema 2.9.1, podemos graficar el LIP de la valoración agregada U , a partir de las gráficas de los LIPs de u^1 y u^2 .

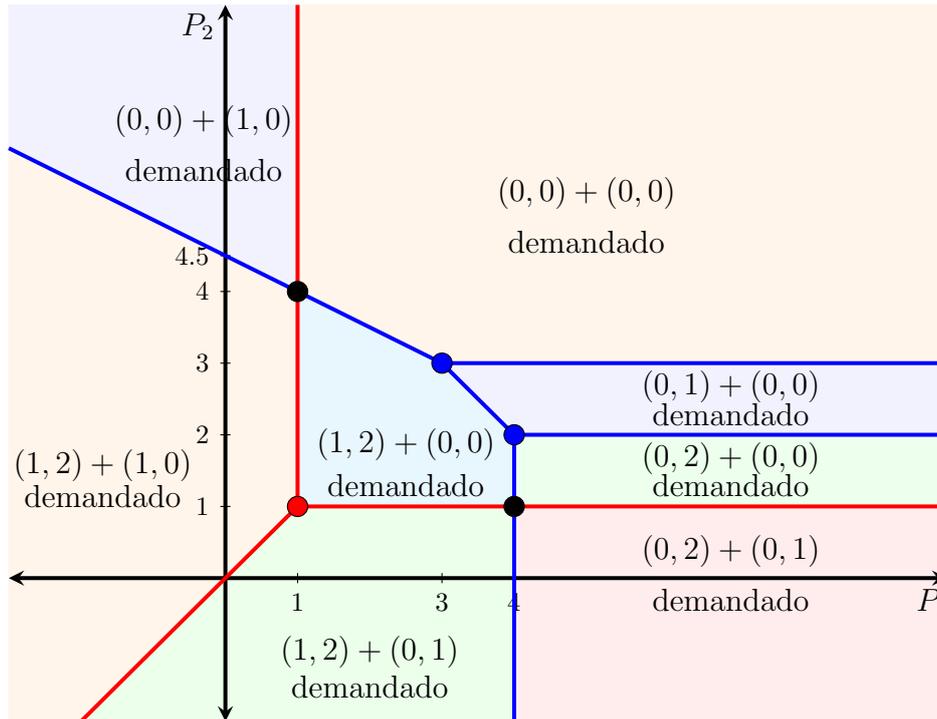


Figura 3.6: UDRs y LIP de U

De la figura 3.6 notamos que la cesta $(1,1) \in A$ no es únicamente demandada, entonces analizaremos si esta cesta es marginalmente demandada. Para hacer este análisis primero hallemos la valoración agregada U .

- La cesta $a = (0,0) \in A$ solamente puede ser particionada como $(0,0) = (0,0) + (0,0)$, entonces

$$U((0,0)) = u^1((0,0)) + u^2((0,0)) = 0 + 0 = 0.$$

- La cesta $a = (0,1) \in A$ puede ser particionada como $(0,1) = (0,1) + (0,0) = (0,0) + (0,1)$, entonces

$$U((0,1)) = \max \left\{ \underbrace{u^1((0,1))}_3 + \underbrace{u^2((0,0))}_0, \underbrace{u^1((0,0))}_0 + \underbrace{u^2((0,1))}_1 \right\} = \max \{3, 1\} = 3$$

- La cesta $a = (0,2) \in A$ puede ser particionada como $(0,2) = (0,2) + (0,0) = (0,1) + (0,1)$, entonces

$$U((0,2)) = \max \left\{ \underbrace{u^1((0,2))}_5 + \underbrace{u^2((0,0))}_0, \underbrace{u^1((0,1))}_3 + \underbrace{u^2((0,1))}_1 \right\} = \max \{5, 4\} = 5$$

- La cesta $a = (0, 3) \in A$ solamente puede ser particionada como $(0, 3) = (0, 2) + (0, 1)$, entonces

$$U((0, 3)) = u^1((0, 2)) + u^2((0, 1)) = 5 + 1 = 6.$$

- La cesta $a = (1, 0) \in A$ solamente puede ser particionada como $(1, 0) = (0, 0) + (1, 0)$, entonces

$$U((1, 0)) = u^1((0, 0)) + u^2((1, 0)) = 0 + 1 = 1.$$

- La cesta $a = (1, 1) \in A$ solamente puede ser particionada como $(1, 1) = (0, 1) + (1, 0)$, entonces

$$U((1, 1)) = u^1((0, 1)) + u^2((1, 0)) = 3 + 1 = 4.$$

- La cesta $a = (1, 2) \in A$ puede ser particionada como $(1, 2) = (1, 2) + (0, 0) = (0, 2) + (1, 0)$, entonces

$$U((1, 2)) = \max \left\{ \underbrace{u^1((1, 2))}_9 + \underbrace{u^2((0, 0))}_0, \underbrace{u^1((0, 2))}_5 + \underbrace{u^2((1, 0))}_1 \right\} = \max \{9, 6\} = 9$$

- La cesta $a = (1, 3) \in A$ solamente puede ser particionada como $(1, 3) = (1, 2) + (0, 1)$, entonces

$$U((1, 3)) = u^1((1, 2)) + u^2((0, 1)) = 9 + 1 = 10.$$

- La cesta $a = (2, 2) \in A$ solamente puede ser particionada como $(2, 2) = (1, 2) + (1, 0)$, entonces

$$U((2, 2)) = u^1((1, 2)) + u^2((1, 0)) = 9 + 1 = 10.$$

Luego, la demanda agregada al vector de precios $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ es:

$$\begin{aligned} D_U(p) &= \arg \max_{a \in A} \{U(a) - p \cdot a\} \\ &= \arg \max_{a \in A} \left\{ \underbrace{U((0, 0)) - p \cdot (0, 0)}_0, \underbrace{U((0, 1)) - p \cdot (0, 1)}_{3-p_2}, \underbrace{U((0, 2)) - p \cdot (0, 2)}_{5-2p_2}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{U((0, 3)) - p \cdot (0, 3)}_{6-3p_2}, \underbrace{U((1, 0)) - p \cdot (1, 0)}_{1-p_1}, \underbrace{U((1, 1)) - p \cdot (1, 1)}_{4-p_1-p_2}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{U((1, 2)) - p \cdot (1, 2)}_{9-p_1-2p_2}, \underbrace{U((1, 3)) - p \cdot (1, 3)}_{10-p_1-3p_2}, \underbrace{U((2, 2)) - p \cdot (2, 2)}_{10-2p_1-2p_2} \right\}. \end{aligned}$$

Sea $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector de precios tal que $(1, 1) \in D_U(\bar{p})$, entonces:

$$\begin{aligned}
 (1, 1) \in D_U(\bar{p}) &\Leftrightarrow 0 \leq 4 - \bar{p}_1 - \bar{p}_2, 3 - \bar{p}_2 \leq 4 - \bar{p}_1 - \bar{p}_2, 5 - 2\bar{p}_2 \leq 4 - \bar{p}_1 - \bar{p}_2, \\
 &6 - 3\bar{p}_2 \leq 4 - \bar{p}_1 - \bar{p}_2, 1 - \bar{p}_1 \leq 4 - \bar{p}_1 - \bar{p}_2, \\
 &9 - \bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 \leq 4 - \bar{p}_1 - \bar{p}_2, 10 - \bar{p}_1 - 3\bar{p}_2 \leq 4 - \bar{p}_1 - \bar{p}_2, \\
 &10 - 2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 \leq 4 - \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \\
 &\Leftrightarrow \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \leq 4, \bar{p}_1 \leq 1, \bar{p}_1 + 1 \leq \bar{p}_2, \bar{p}_1 + 2 \leq 2\bar{p}_2, \bar{p}_2 \leq \mathbf{3}, \\
 &\mathbf{5} \leq \bar{p}_2, \mathbf{3} \leq \bar{p}_2, 6 \leq \bar{p}_1 + \bar{p}_2.
 \end{aligned}$$

Por las contradicciones que se producen en las dos líneas previas (de las desigualdades de arriba), respecto a \bar{p}_2 , concluimos que la cesta $(1, 1)$ nunca es demandada. Por lo tanto, aunque la cesta $(1, 1)$ pertenece a A , la valoración agregada en $(1, 1)$ es tan pequeña que no existe algún vector de precios $p \in \mathbb{R}^2$ tal que la cesta $(1, 1)$ sea demandada.

3.2. Sustitutos ordinarios y complementarios ordinarios

Definición 3.2.1 Sea A un subconjunto finito no vacío de \mathbb{Z}^n y $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ la valoración de un agente.

- 1) Decimos que u es una **valoración de sustitutos ordinarios** si y solo si para cualquier par de precios p' y p en dos UDRs distintas con $p' \geq p$, $D_u(p) = \{x\}$ y $D_u(p') = \{x'\}$, se cumple que $x'_k \geq x_k, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $p'_k = p_k$.
- 2) Decimos que u es una **valoración de complementarios ordinarios** si y solo si para cualquier par de precios p' y p en dos UDRs distintas con $p' \geq p$, $D_u(p) = \{x\}$ y $D_u(p') = \{x'\}$, se cumple que $x'_k \leq x_k, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $p'_k = p_k$.

Definición 3.2.2 Los **vectores de sustitutos ordinarios** (n -dimensionales) son los vectores primitivos no nulos $v \in \mathbb{Z}^n$ con a lo más una coordenada positiva y a lo más una coordenada negativa. Ellos definen el **tipo de demanda de sustitutos ordinarios** para n bienes.

Sea $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una valoración del tipo de demanda de sustitutos ordinarios, es decir, los vectores normales a cada una de las facetas de su LIP, tienen a lo más una coordenada positiva y a lo más una coordenada negativa.

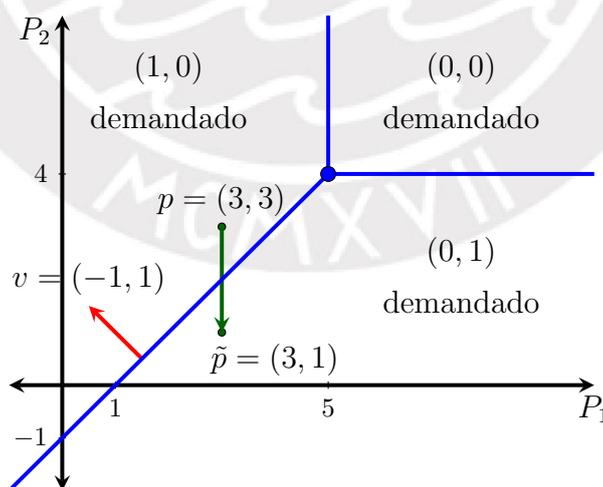
Consideremos que $x \in A$ es una cesta demandada en la UDR que se ubica a un lado de la faceta F del LIP \mathcal{L}_u , y sea $p \in \mathbb{R}^n$ un vector de precios tal que $D_u(p) = \{x\}$. Supongamos que el precio del i -ésimo bien, disminuye al cruzar la faceta F , es decir, p_i disminuye; entonces

- La demanda cambia de x a $\tilde{x} = x + w_u(F)v$, donde v es un vector entero primitivo que es normal a F , y apunta en la dirección opuesta al cambio en el precio.
- Por la ley de la demanda: $v_i > 0$.

Luego, dado que v es un vector de sustitutos ordinarios, concluimos que $v_j \leq 0, \forall j \neq i$.

Ejemplo 3.2.1 Para ilustrar lo mencionado en las líneas de arriba, consideremos la valoración u del ejemplo 2.2.1. Para esta valoración, la cesta $x = (1, 0)$ es únicamente demandada al vector de precios $p = (3, 3)$. Si disminuimos el precio del bien 2, al cruzar una faceta F del LIP \mathcal{L}_u ; notamos que

- La demanda cambia de $x = (1, 0)$ a $\tilde{x} = (0, 1)$.
- $w_u(F) = \text{mcd}(1 - 0, 0 - 1) = \text{mcd}(1, -1) = 1$.
- El vector $v = \tilde{x} - x = (-1, 1)$ es un vector entero primitivo que es normal a F , y apunta en la dirección opuesta al cambio en el precio.
- $v_2 = 1 > 0$, es decir, se cumple la ley de la demanda.



Proposición 3.2.1 La función $u : A \subsetneq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una valoración de sustitutos ordinarios si y solo si, u es del tipo de demanda de sustitutos ordinarios para n bienes.

Demostración:

(\Rightarrow):

Por el método de reducción al absurdo, supongamos que u no es del tipo de demanda de sustitutos ordinarios, entonces existe una faceta F del LIP, con vector normal primitivo v tal que existen $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$ con $v_i < 0$, $v_j < 0$ ó $v_i > 0$, $v_j > 0$.

Caso 1: $v_i < 0$, $v_j < 0$

Sean $x, x' \in A$ las cestas únicamente demandadas una a cada lado de F , entonces podemos elegir un vector de precios $p \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ tal que $p \in \mathcal{R}_u(x)$ y $p + \epsilon e^i \in \mathcal{R}_u(x')$. Por otro lado, como u es una valoración de sustitutos ordinarios y $p + \epsilon e^i \geq p$ entonces

$$x'_k \geq x_k, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}. \quad (3.5)$$

Como $x' - x$ es un vector normal a F que apunta desde $\mathcal{R}_u(x')$ hacia $\mathcal{R}_u(x)$ en dirección opuesta al cambio de precios $p + \epsilon e^i - p = \epsilon e^i$ y $(p + \epsilon e^i - p) \cdot v = \epsilon e^i \cdot v = \epsilon v_i < 0$, entonces $x' - x$ es un múltiplo entero positivo de v . Por lo cual, existe $t \in \mathbb{Z}_+$ tal que $x' - x = tv$. Por consiguiente, $x'_j - x_j = tv_j < 0$, entonces $x'_j < x_j$, lo cual es una contradicción con (3.5).

Caso 2: $v_i > 0$, $v_j > 0$

Si definimos $\tilde{v} = -v$ y aplicamos la misma idea del caso 1, llegaremos a una contradicción.

Por lo tanto, u debe ser del tipo de demanda de sustitutos ordinarios para n bienes.

(\Leftarrow):

Supongamos que u es del tipo de demanda de sustitutos ordinarios. Sean $x', x \in A$ dos cestas únicamente demandadas por u . Consideremos los vectores de precios $p \in \mathcal{R}_u(x)$ y $p' \in \mathcal{R}_u(x')$ tal que $p' \geq p$ y definamos $t := p' - p$. Luego, por la proposición 2.8.2, podemos elegir un vector de precios $\tilde{p} \in \mathcal{R}_u(x)$ y $\epsilon > 0$ tal que $\tilde{p}'' = \tilde{p} + \epsilon t$ pertenece a la primera UDR distinta de $\mathcal{R}_u(x)$ y adyacente a $\mathcal{R}_u(x)$. Denotemos por $x'' \in A$ a la cesta únicamente demandada por u al precio \tilde{p}'' (es decir, $\tilde{p}'' \in \mathcal{R}_u(x'')$), entonces, dado que u es del tipo de demanda de sustitutos ordinarios, obtenemos que $x'' - x$ es un múltiplo entero de un vector de sustitutos ordinarios. Por otro lado, tenemos que $(x'' - x) \cdot (\tilde{p}'' - \tilde{p}) < 0$, pero $\tilde{p}'' - \tilde{p} = \epsilon t = \epsilon(p' - p) \geq 0$, así que $x'' - x$ debe tener al menos una coordenada negativa para algún bien cuyo precio crece estrictamente de p a p' . Pero, dado que $x'' - x$ es un múltiplo entero de un vector de sustitutos ordinarios, concluimos que $x'' - x$ debe tener a lo más una coordenada negativa. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x''_1 - x_1 \leq 0$ con $\tilde{p}''_1 - \tilde{p}_1 > 0$. Por lo tanto, $x''_k - x_k \geq 0$, $\forall k \in \{2, \dots, n\}$. En particular, $x''_k \geq x_k$, $\forall k \in \{2, \dots, n\}$ tal que $\tilde{p}''_k = \tilde{p}_k$. Si aplica-

mos repetidamente este proceso de hallar \tilde{p}'' , hasta llegar a un precio final en la UDR $\mathcal{R}_u(x')$, llegamos a la misma conclusión en cada paso. Entonces, se cumplirá que u es una valoración de sustitutos ordinarios. \square

Usando la proposición 3.2.1 podemos reconocer de manera más práctica si una valoración es o no es del tipo de demanda de sustitutos ordinarios.

Ejemplo 3.2.2 *Se ha mostrado anteriormente que la valoración u del ejemplo 2.2.1 es del tipo de demanda $\{\pm(1, 0); \pm(0, 1); \pm(-1, 1)\}$. Por lo tanto, esta valoración es del tipo de demanda de sustitutos ordinarios.*

Ejemplo 3.2.3 *Se ha mostrado anteriormente que la valoración u del ejemplo 2.2.2 es del tipo de demanda $\{\pm(1, 0); \pm(0, 1); \pm(1, -2)\}$. Por lo tanto, esta valoración es del tipo de demanda de sustitutos ordinarios.*

Ejemplo 3.2.4 *De la figura 2.6 obtenemos que los vectores normales a cada una de las nueve facetas del LIP de la valoración u del ejemplo 2.2.3 son*

$$\begin{aligned}
 v_1 &= (2, 0) - (0, 0) = (2, 0) \\
 v_2 &= (0, 1) - (0, 0) = (0, 1) \\
 v_3 &= (2, 0) - (0, 1) = (2, -1) \\
 v_4 &= (0, 2) - (0, 1) = (0, 1) \\
 v_5 &= (1, 2) - (0, 2) = (1, 0) \\
 v_6 &= (2, 2) - (1, 2) = (1, 0) \\
 v_7 &= (2, 1) - (1, 2) = (1, -1) \\
 v_8 &= (2, 2) - (2, 1) = (0, 1) \\
 v_9 &= (2, 1) - (2, 0) = (0, 1).
 \end{aligned}$$

Entonces, u es del tipo de demanda $\{\pm(1, 0); \pm(0, 1); \pm(2, -1); \pm(1, -1)\}$. Por lo tanto, esta valoración es del tipo de demanda de sustitutos ordinarios.

Ejemplo 3.2.5 *De la figura 2.21 (a) obtenemos que los vectores normales a cada una de las cinco facetas del LIP de la valoración u^s del ejemplo 2.9.1 son*

$$\begin{aligned}
v_1 &= (1, 0) - (0, 0) = (1, 0) \\
v_2 &= (0, 1) - (0, 0) = (0, 1) \\
v_3 &= (1, 0) - (0, 1) = (1, -1) \\
v_4 &= (1, 1) - (1, 0) = (0, 1) \\
v_5 &= (1, 1) - (0, 1) = (1, 0).
\end{aligned}$$

Entonces, u^s es del tipo de demanda $\{\pm(1, 0); \pm(0, 1); \pm(1, -1)\}$. Por lo tanto, u^s es del tipo de demanda de sustitutos ordinarios.

Por otro lado, de la figura 2.21 (b) obtenemos que los vectores normales a cada una de las cinco facetas del LIP de la valoración u^c del ejemplo 2.9.1 son

$$\begin{aligned}
v_1 &= (1, 0) - (0, 0) = (1, 0) \\
v_2 &= (0, 1) - (0, 0) = (0, 1) \\
v_3 &= (1, 1) - (0, 0) = (1, 1) \\
v_4 &= (1, 1) - (1, 0) = (0, 1) \\
v_5 &= (1, 1) - (0, 1) = (1, 0).
\end{aligned}$$

Entonces, la valoración u^c es del tipo de demanda $\{\pm(1, 0); \pm(0, 1); \pm(1, 1)\}$. Dado que $v_3 = (1, 1)$ tiene dos coordenadas positivas, concluimos que u^c no es del tipo de demanda de sustitutos ordinarios.

De manera general, podemos decir que un vector que es normal a una faceta de un LIP correspondiente a una valoración de sustitutos ordinarios, no puede tener dos componentes no nulas del mismo signo. Para entender la necesidad de esto, pensemos en una economía en la que hay tres distintos tipos de bienes (es decir, $n = 3$) y un agente cuyo LIP correspondiente a su valoración, posee una faceta tal que la primera y tercera componente de su vector normal tienen el mismo signo. Entonces, aumentar el precio del bien 1 o del bien 3 puede llevarnos a cruzar la faceta del LIP, disminuyendo la demanda de los bienes 1 y 3. Por lo tanto, esta faceta genera complementariedades en algunos precios y, no podría ser parte de un LIP correspondiente a una valoración de sustitutos ordinarios.

Recordemos que para los bienes complementarios, un cambio de precio que reduce la demanda de un bien puede reducir la demanda de otros bienes.

Definición 3.2.3 *Los vectores de complementarios ordinarios* (n - dimensionales), son los vectores primitivos no nulos $v \in \mathbb{Z}^n$ tales que todas sus coordenadas no nulas son del mismo signo. Ellos definen el **tipo de demanda de complementarios ordinarios** para n bienes.

Sea $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una valoración del tipo de demanda de complementarios ordinarios, es decir, los vectores normales a cada una de las facetas de su LIP, tienen todas sus coordenadas no nulas del mismo signo.

Consideremos que $x \in A$ es una cesta demandada en la UDR que se ubica a un lado de la faceta F del LIP \mathcal{L}_u , y sea $p \in \mathbb{R}^n$ un vector de precios tal que $D_u(p) = \{x\}$. Supongamos que el precio del i -ésimo bien, disminuye al cruzar la faceta F , es decir, p_i disminuye; entonces

- La demanda cambia de x a $\tilde{x} = x + w_u(F)v$, donde v es un vector entero primitivo que es normal a F , y apunta en la dirección opuesta al cambio en el precio.
- Por la ley de la demanda: $v_i > 0$.

Luego, dado que v es un vector de complementarios ordinarios, concluimos que $v_j \geq 0$, $\forall j \neq i$.

Proposición 3.2.2 *La función $u : A \subsetneq \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una valoración de complementarios ordinarios si y solo si, u es del tipo de demanda de complementarios ordinarios para n bienes.*

La proposición 3.2.2 se prueba usando argumentos similares de la demostración de la proposición 3.2.1.

Ejemplo 3.2.6 *Se ha mostrado anteriormente que la valoración u^c del ejemplo 2.9.1 es del tipo de demanda $\{\pm(1, 0); \pm(0, 1); \pm(1, 1)\}$. Por lo tanto, u^c es del tipo de demanda de complementarios ordinarios.*

Antes de concluir esta sección, notemos que los vectores de complementarios ordinarios pueden tener cualquier número de coordenadas distintas de cero y del mismo signo, pero cualquier par de coordenadas distintas de cero en un vector de sustitutos ordinarios debe tener signos opuestos. Por lo tanto, los vectores de sustitutos ordinarios pueden tener como máximo dos coordenadas no nulas.

Conclusiones

1. En el capítulo 1 presentamos algunos conceptos y resultados de la geometría tropical y en el inicio del capítulo 2 mostramos la conexión que hay entre la geometría tropical y los elementos de la economía que estamos estudiando. Aunque no llegamos a estudiar toda esta economía desde el enfoque de la geometría tropical, mencionamos que hay algunos resultados del capítulo 2 que se pudieron demostrar desde ese enfoque. Decidimos usar conceptos de topología y análisis convexo en \mathbb{R}^n para demostrar la mayoría de resultados del capítulo 2 porque sabíamos que eran posibles las demostraciones usando conceptos matemáticos de dichas áreas y también para facilitar el entendimiento de los lectores que no estén familiarizados con conceptos matemáticos más avanzados.
2. El teorema de unimodularidad, teorema principal de esta tesis, puede ser demostrado usando algunas otras herramientas matemáticas, distintas a las que se usaron en esta tesis. Por ejemplo, en [7] también se demuestra el teorema de unimodularidad pero usando programación entera.
3. Hay otros ejemplos en los que se puede aplicar todo lo desarrollado en el capítulo 2. Nosotros solamente desarrollamos algunos de ellos en el capítulo 3 y dimos mayor importancia a la subasta "product-mix". El objetivo de la primera sección del capítulo 3 era estudiar todos los elementos de esta subasta en lugar de mostrar un ejemplo que involucre un contexto real.

Apéndice A

Conceptos vectoriales

Sea $(V, +, \cdot)$ un **espacio vectorial real** (o \mathbb{R} -espacio vectorial), se definen

- 1) Dado $A \subset V$, el conjunto $\mathcal{L}(A)$ de las combinaciones lineales de vectores de A es un subespacio de V , llamado el **subespacio generado por A** .
- 2) Si $\mathcal{L}(A) = V$, decimos que A es un **conjunto de generadores** de V .

Definición A.0.1 Si S y S' son subespacios de V , entonces la suma de estos subespacios se define como

$$S + S' = \{u + v : u \in S, v \in S'\}.$$

Note que la suma de subespacios de V es también un subespacio de V .

Definición A.0.2 Si S y S' son subespacios de V tal que $S \cap S' = \{0\}$, entonces la suma de estos subespacios $S + S'$ se llama **suma directa** y se denota con $S \oplus S'$.

Proposición A.0.1 Sean S y S' dos subespacios de V . Entonces la suma $S + S'$ es directa si y solo si todo elemento $u \in S + S'$ se escribe de modo único en la forma $u = v + w$, donde $v \in S$ y $w \in S'$.

De manera general tenemos que si $\{S_j\}_{j=1,2,\dots,k}$ es una familia de subespacios de V , entonces la suma de estos subespacios se define como

$$\sum_{j=1}^k S_j = \left\{ \sum_{j=1}^k v_j : v_j \in S_j, j = 1, 2, \dots, k \right\}.$$

Esta suma es directa si

$$S_j \cap (S_1 + \dots + S_{j-1} + S_{j+1} + \dots + S_k) = \{0\}, \forall j = 1, 2, \dots, k$$

y se denota por

$$\sum_{j=1}^k S_j = \bigoplus_{j=1}^k S_j.$$

Definición A.0.3 Un conjunto $\beta \subset V$ es una **base** de V si

- i) β genera V , es decir $V = \mathcal{L}(\beta)$.
- ii) β es linealmente independiente.

Definición A.0.4 Llamamos **dimensión** del espacio vectorial V al número de elementos de una base de V . Este número se denota por $\dim(V)$.



Apéndice B

Topología y Continuidad en \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n es un espacio vectorial real de dimensión n , con las operaciones usuales de suma de vectores y producto de un escalar por un vector. Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. El **producto interno** de x e y , denotado por $x \cdot y$, es el número real

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Decimos que x es **ortogonal** a y , lo que denotamos por $x \perp y$, si y solo si $x \cdot y = 0$.

La **norma** de x , denotada por $\|x\|$, es definida como

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

La **distancia** entre x e y , denotada por $d(x, y)$, es definida como $d(x, y) = \|x - y\|$.

Algunas veces haremos uso de las siguientes notaciones:

- i) $x \geq y$ si y solo si $x_i \geq y_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$.
- ii) $x > y$ si y solo si $x_i \geq y_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$; y $x_j > y_j$, para algún $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- iii) $x \gg y$ si y solo si $x_i > y_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de \mathbb{R}^n . La **distancia** entre los conjuntos A y B , denotada por $d(A; B)$, es definida como

$$d(A; B) = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}.$$

En particular, la **distancia** entre el punto $x \in \mathbb{R}^n$ y el conjunto B , denotada por $d(x; B)$, es definida como $d(x; B) = \inf\{\|x - b\| : b \in B\}$.

Si A es un subconjunto de \mathbb{R}^n , entonces la cardinalidad de A será denotada por $|A|$. La suma Minkowski de dos conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, denotada por $A + B$, es definida como el conjunto $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. El producto entre un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se denota por λA y se define como el conjunto $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$. Escribimos $-A$ para denotar al conjunto $(-1)A$, y $A - B$ para el conjunto $A + (-B)$.

Decimos que un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ está **acotado** si existe algún $r \geq 0$ tal que $\|a\| \leq r, \forall a \in A$.

Definición B.0.1 Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que $a \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de X si y solo si para cada $r > 0$ se cumple que $B_r(a) \cap X \neq \emptyset$ y $B_r(a) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos frontera de X es llamado **frontera** de X y lo denotamos por $\text{Fr}(X)$ o ∂X .

Teorema B.0.1 Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, X es abierto si y solo si $X \cap \text{Fr}(X) = \emptyset$.

Proposición B.0.1 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces se cumple

- 1) $\text{Fr}(A \cup B) \subseteq \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$.
- 2) $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$.
- 3) $\text{Fr}(A)$ es cerrado.
- 4) $\overline{A} = \text{int}(A) \cup \text{Fr}(A)$.

Definición B.0.2 Decimos que un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es **denso** en \mathbb{R}^n , si y solo si $\overline{D} = \mathbb{R}^n$.

Definición B.0.3 Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, decimos que los subconjuntos $A, B \subseteq X$ forman una **escisión** de X si y solo si satisfacen las siguientes condiciones: $X = A \cup B$, $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Notamos que, si $A = X$ y $B = \emptyset$, entonces A y B forman una escisión de X , llamada **escisión trivial**. Luego todo subconjunto de \mathbb{R}^n admite una escisión trivial.

Definición B.0.4 Decimos que un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es **conexo**, si y solo si X sólo admite la escisión trivial. Un conjunto que no es conexo, es llamado **disconexo**.

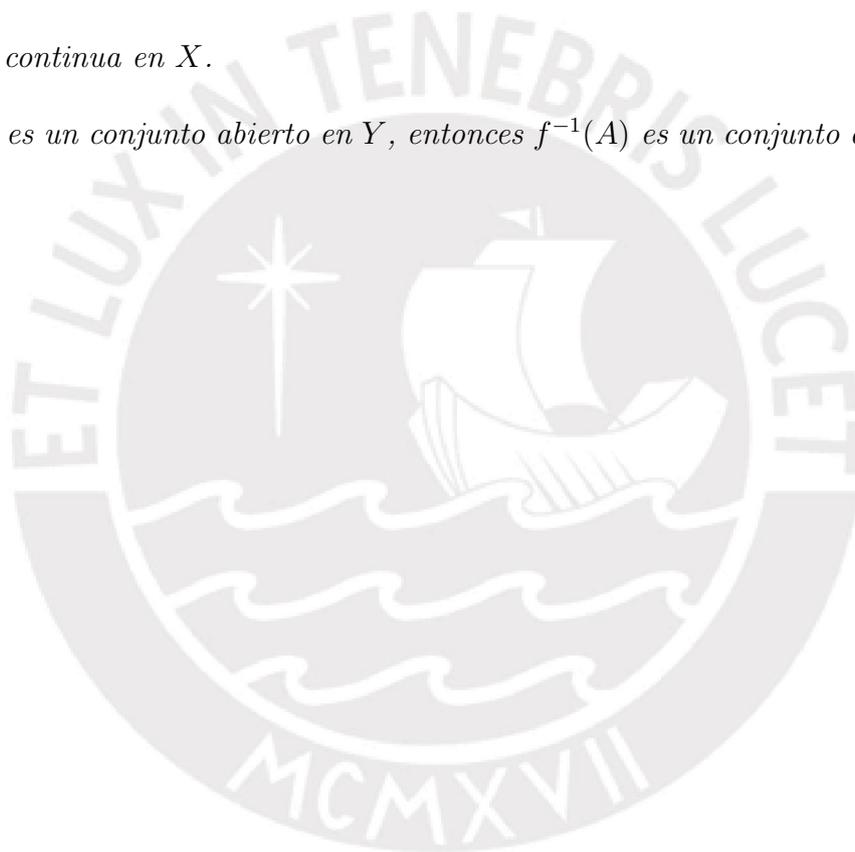
Definición B.0.5 Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x \in X$. La **componente conexa** de x en X , denotada por C_x , es el mayor subconjunto conexo de X que contiene a x .

Proposición B.0.2 Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $x, y \in X$, entonces $C_x \cap C_y = \emptyset$ ó $C_x = C_y$.

Definición B.0.6 Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$. Decimos que un subconjunto $A \subseteq X$ es **abierto relativo a X** o simplemente **abierto en X** si y solo si existe un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $A = U \cap X$.

Teorema B.0.2 Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto no vacío y $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Denotemos $Y = f(X)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- 1) f es continua en X .
- 2) Si A es un conjunto abierto en Y , entonces $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en X .



Apéndice C

Análisis convexo clásico en \mathbb{R}^n

C.1. Conjunto o Variedad afín en \mathbb{R}^n

La recta que pasa por los puntos distintos a y b de \mathbb{R}^n es el conjunto

$$\{\lambda a + (1 - \lambda)b : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Definición C.1.1 Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **afín**, si y solo si para todo par de puntos $a, b \in A$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $\lambda a + (1 - \lambda)b \in A$.

En otras palabras, un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es afín si y solo si contiene a todas las rectas que pasan por dos cualesquiera de sus puntos.

Definición C.1.2 La **cápsula afín** del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es denotada por $\text{aff}(A)$ y se define como la intersección de todos los conjuntos afines en \mathbb{R}^n que contienen a A .

Sea A un conjunto afín en \mathbb{R}^n , entonces para cada $a \in A$, el conjunto

$$V_a := A \setminus \{a\} = \{x - a : x \in A\}$$

es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n . De hecho, este subespacio es independiente de la elección de $a \in A$. En este caso, decimos que A es un subespacio paralelo a V_a , y definimos la dimensión de A como la dimensión de V_a . Además, denotamos a la dimensión de A por $\dim(A)$. Si $\dim(A) = r$ entonces diremos que A es r -dimensional.

Notemos que cuando un conjunto afín en \mathbb{R}^n es también un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n , su dimensión, tal como se definió arriba, coincide con su dimensión como subespacio del espacio vectorial real \mathbb{R}^n . Por lo tanto, podemos usar el término “dimensión” sin ambigüedad tanto para conjuntos afines como para subespacios vectoriales de \mathbb{R}^n .

Proposición C.1.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $\text{aff}(A) = \text{aff}(\overline{A})$.

Demostración: Ver [3]. □

Definición C.1.3 Dados $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, el hiperplano $H(p, \alpha)$ se define como el conjunto

$$H(p, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n : p \cdot x = \alpha\}.$$

Notemos que cuando $\alpha = 0$, $H(p, 0)$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n de dimensión $n-1$ y $x \in H(p, 0)$ si y solo si $x \perp p$. En este caso, decimos que p es un vector ortogonal al subespacio vectorial $H(p, 0)$ (comunmente decimos que p es **normal** a $H(p, 0)$). En general, decimos que el hiperplano $H(p, \alpha)$ es paralelo al subespacio vectorial $H(p, 0)$ y que tiene vector normal p .

Definición C.1.4 Dado el hiperplano $H(p, \alpha)$, se generan los siguientes subconjuntos

- 1) $H(p, \alpha)^{\leq} := \{x \in \mathbb{R}^n : p \cdot x \leq \alpha\}$ y $H(p, \alpha)^{\geq} := \{x \in \mathbb{R}^n : p \cdot x \geq \alpha\}$ que se denominan **semiespacios cerrados**.
- 2) $H(p, \alpha)^{<} := \{x \in \mathbb{R}^n : p \cdot x < \alpha\}$ y $H(p, \alpha)^{>} := \{x \in \mathbb{R}^n : p \cdot x > \alpha\}$ que se denominan **semiespacios abiertos**.

Definición C.1.5 Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que $a \in X$ es un **punto interior relativo** de X si y solo si existe algún $r > 0$ tal que $B_r(a) \cap \text{aff}(X) \subseteq X$. El conjunto de todos los puntos interiores relativos de X es llamado **interior relativo** de X y lo denotamos por $\text{ri}(X)$.

Definición C.1.6 Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que $a \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera relativo** de X si y solo si $a \in \overline{X} \setminus \text{ri}(X)$. El conjunto de todos los puntos frontera relativo de X es llamado **frontera relativa** de X y lo denotamos por $\text{rebd}(X)$.

C.2. Convexidad en \mathbb{R}^n

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, el **segmento de recta** que une los puntos x e y , denotado por $[x, y]$, es definido como

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Definición C.2.1 Decimos que un subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si y solo si para todo par de puntos $x, y \in C$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$, se cumple que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

En otras palabras, un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si y solo si contiene a todos los segmentos cerrados que conectan a dos cualesquiera de sus puntos. Equivalentemente, C es convexo si y solo si $[x, y] \subset C, \forall x, y \in C$.

Una propiedad esencial de los conjuntos convexos es que la intersección de una familia arbitraria de conjuntos convexos en \mathbb{R}^n , también es convexo en \mathbb{R}^n .

Algunos ejemplos de conjuntos convexos son: el conjunto vacío \emptyset , los conjuntos unitarios $\{x\}$, los hiperplanos $H(p, \alpha)$ y \mathbb{R}^n . En general, todo conjunto afín es convexo.

La dimensión de un conjunto convexo C en \mathbb{R}^n es definida como la dimensión de su cápsula afín. Si $\dim(C) = r$ entonces diremos que C es r -dimensional.

Definición C.2.2 La **cápsula convexa** del conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se denota por $\text{conv}(C)$ y se define como la intersección de todos los conjuntos convexos en \mathbb{R}^n que contienen a C .

Decimos que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es una **combinación convexa** de puntos $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$ tal que

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m.$$

Teorema C.2.1 Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces la cápsula convexa $\text{conv}(C)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de C .

Demostración: Ver [8]. □

Teorema C.2.2 La cápsula convexa de un conjunto abierto en \mathbb{R}^n es también un conjunto abierto en \mathbb{R}^n y la cápsula convexa de un conjunto compacto en \mathbb{R}^n es también un conjunto compacto en \mathbb{R}^n .

Demostración: Ver [8]. □

Corolario C.2.1 La cápsula convexa de un conjunto finito en \mathbb{R}^n es un conjunto compacto en \mathbb{R}^n .

Demostración: Ver [8]. □

Proposición C.2.1 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces $\text{conv}(A + B) = \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$.

Proposición C.2.2 Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces C es conexo.

Ahora enunciaremos algunas propiedades acerca del interior, interior relativo y la cerradura de un conjunto convexo.

Teorema C.2.3 *El interior relativo de un conjunto convexo no vacío en \mathbb{R}^n es también no vacío.*

Demostración: Ver [8]. □

Teorema C.2.4 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Si $a \in \text{ri}(C)$ y $b \in \overline{C}$ entonces $\lambda a + (1 - \lambda)b \in \text{ri}(C)$, para todo $0 < \lambda \leq 1$.*

Demostración: Ver [8]. □

Teorema C.2.5 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, entonces $\text{ri}(C)$, $\text{int}(C)$ y \overline{C} también son conjuntos convexos.*

Demostración: Ver [8]. □

Teorema C.2.6 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, entonces $\text{ri}(C) = \text{ri}(\overline{C})$ y $\overline{C} = \overline{\text{ri}(C)}$.*

Demostración: Ver [8]. □

Definición C.2.3 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo no vacío y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función.*

- i) *Decimos que f es cóncava si y solo si $f(ta + (1 - t)b) \geq tf(a) + (1 - t)f(b)$, $\forall a, b \in C$, y $\forall t \in [0, 1]$.*
- ii) *Decimos que f es convexa si y solo si $f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$, $\forall a, b \in C$, y $\forall t \in [0, 1]$.*

C.3. Teoremas de separación e hiperplano soporte

Definición C.3.1 *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ y sea H un hiperplano en \mathbb{R}^n .*

- 1) *Decimos que H **separa** A y B , si A está contenido en uno de los semiespacios cerrados determinados por H , y B está contenido en el otro semiespacio cerrado determinado por H . Esto es equivalente a decir que existen $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $H = H(p, \alpha)$ y $p \cdot a \leq \alpha \leq p \cdot b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$.*

- 2) Decimos que H **separa** A y B **propriadamente**, si H los separa pero A y B no yacen en H simultáneamente.
- 3) Decimos que H **separa** A y B **estrictamente**, si A está contenido en uno de los semiespacios abiertos determinados por H , y B está contenido en el otro semiespacio abierto determinado por H . Esto es equivalente a decir que existen $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $H = H(p, \alpha)$ y $p \cdot a < \alpha < p \cdot b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$.

Sabemos que los semiespacios cerrados son conjuntos convexos. Así que si un hiperplano separa dos conjuntos, entonces este hiperplano también separa sus cápsulas convexas. Por lo tanto, solamente consideramos la separación de conjuntos convexos.

Teorema C.3.1 Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos convexos no vacíos y disjuntos tal que A es cerrado y B es compacto, entonces A y B pueden ser separados estrictamente por un hiperplano en \mathbb{R}^n .

Demostración: Ver [8]. □

Teorema C.3.2 Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos convexos no vacíos y disjuntos, entonces A y B pueden ser separados propriadamente por un hiperplano en \mathbb{R}^n .

Demostración: Ver [8]. □

Definición C.3.2 Sean B un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n y H un hiperplano en \mathbb{R}^n . Decimos que H es un **hiperplano soporte** a B si H interseca a \overline{B} y B está contenido en uno de los semiespacios cerrados determinados por H . En este caso, H es llamado **soporte** a B en los puntos donde H interseca a \overline{B} .

Un hiperplano en \mathbb{R}^n es un hiperplano soporte **trivial** a cada uno de sus subconjuntos no vacíos.

Definición C.3.3 Sea H un hiperplano soporte a $B \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que H es un **hiperplano soporte no trivial** a B si H no contiene a B .

Teorema C.3.3 Sea C un subconjunto propio convexo y no vacío de \mathbb{R}^n . A través de cada punto frontera de C en \mathbb{R}^n pasa un hiperplano soporte a C , y a través de cada punto frontera relativo de C pasa un hiperplano soporte no trivial a C .

Demostración: Ver [8]. □

C.4. Caras de conjuntos convexos en \mathbb{R}^n

Definición C.4.1 Una **cara** de un conjunto convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto convexo $B \subseteq A$ tal que cuando $\lambda x + \mu y \in B$, donde $x, y \in A$ y $\lambda, \mu > 0$ con $\lambda + \mu = 1$, entonces $x, y \in B$.

Notemos que cada conjunto convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene las caras \emptyset y A ; éstas son llamadas **caras impropias** de A . Mientras que las otras caras de A , distintas de \emptyset y A , son llamadas **caras propias** de A .

Una cara k -dimensional de un conjunto convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamada **k -cara**. En particular, las 0-caras de A son llamadas **puntos extremos** de A .

Ejemplo C.4.1 El cuadrado $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$, tiene cuatro 0-caras (sus vértices), cuatro 1-caras (sus bordes), una 2-cara (el mismo conjunto C) y una -1 -cara (el conjunto vacío). Gráficamente tenemos:

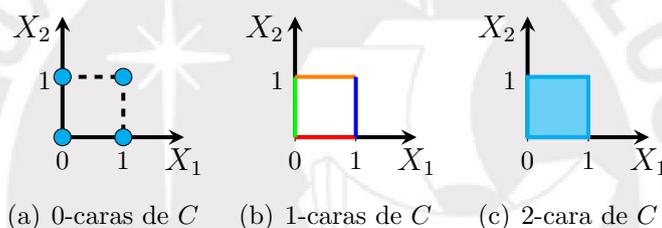


Figura C.1: Representaciones gráficas de las caras de C

Teorema C.4.1 Sea B un subconjunto convexo de un conjunto convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces B es una cara de A si y solo si $A \setminus B$ es convexo y $B = \text{aff}(B) \cap A$. En particular, un punto $a \in A$ es un punto extremo de A si y solo si $A \setminus \{a\}$ es convexo.

Demostración: Ver [8]. □

Corolario C.4.1 Cada cara de un conjunto convexo cerrado en \mathbb{R}^n , es cerrado.

Demostración: Ver [8]. □

Teorema C.4.2 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, entonces

- i) La intersección de cualquier familia no vacía de caras de A es una cara de A .
- ii) Si B es una cara de A , y C es una cara de B , entonces C es una cara de A .
- iii) La intersección de A con cada uno de sus hiperplanos soporte es una cara de A .

Teorema C.4.3 Sea B una cara de un conjunto convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Supongamos que C es un subconjunto de A tal que $\text{ri}(C) \cap B$, entonces $C \subseteq B$.

Demostración: Ver [8]. □

Corolario C.4.2 Si B es una cara de un conjunto convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, diferente de A , entonces $\dim(B) < \dim(A)$.

Demostración: Ver [8]. □

Del ítem *iii*) del teorema C.4.2 tenemos que la intersección de un conjunto convexo en \mathbb{R}^n con uno de sus hiperplanos soporte es una cara del conjunto. Estas caras son llamadas **caras expuestas** del conjunto. En la gran mayoría de textos de análisis convexo, se considera que para un conjunto convexo $C \subseteq \mathbb{R}^n$, el conjunto vacío y el propio conjunto C son caras expuestas de C . Por lo tanto, una cara expuesta de un conjunto convexo C o es el conjunto vacío, o es el propio conjunto C , o es la intersección de C con uno de sus hiperplanos soporte.

Teorema C.4.4 La intersección de cualquier familia no vacía de caras expuestas de un conjunto convexo en \mathbb{R}^n es una cara expuesta del conjunto.

Demostración: Ver [8]. □

Las caras expuestas 0-dimensionales de un conjunto convexo A en \mathbb{R}^n son llamadas **puntos expuestos** de A . Notemos que cada punto expuesto de un conjunto convexo en \mathbb{R}^n es uno de los puntos extremos de dicho conjunto, pero no necesariamente se cumple lo inverso.

Ejemplo C.4.2 Consideremos el conjunto convexo A cuya representación gráfica es

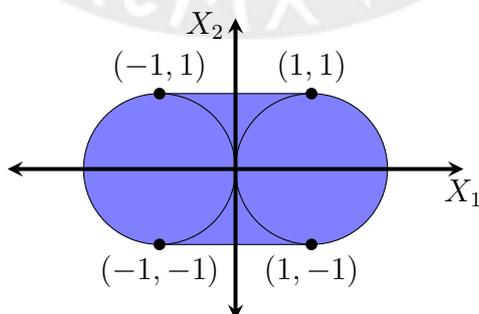


Figura C.2: Representación gráfica de A

Notamos que el punto $(-1, 1) \in A$ es un punto extremo de A pero no es un punto expuesto de A .

C.5. Poliedros convexos en \mathbb{R}^n

Definición C.5.1 Un conjunto **poliedral convexo** (o **poliedro convexo**) es una intersección de una familia finita de semiespacios cerrados en \mathbb{R}^n .

Observación C.5.1 Equivalentemente, un poliedro convexo es el conjunto de todos los puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen un sistema finito de inecuaciones lineales con coeficientes reales de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

Si denotamos por $a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $A = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, concluimos que todo poliedro convexo $P \subset \mathbb{R}^n$ puede ser expresado como

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

donde A es una matriz de orden $m \times n$ y b es un vector columna de orden $m \times 1$.

Notamos que los poliedros convexos son conjuntos cerrados y convexos. Además, la intersección de cualquier familia finita de poliedros convexos es un poliedro convexo.

Algunos ejemplos de poliedros convexos son: el conjunto vacío \emptyset , los hiperplanos $H(p, \alpha)$, los conjuntos afines y \mathbb{R}^n .

Una inecuación $a^i \cdot x \leq b_i$ del sistema $Ax \leq b$ es llamada una **igualdad implícita** (en $Ax \leq b$) si $a^i \cdot x = b_i$, para todo x que satisface $Ax \leq b$.

Ejemplo C.5.1 Consideremos el sistema $x_1 \leq 0$, $-x_2 \leq 0$, $-x_1 + x_2 \leq 0$. El conjunto solución de este sistema es $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Por lo tanto, cada una de las inecuaciones del sistema es una igualdad implícita.

Para un sistema $Ax \leq b$, denotamos por $A^-x \leq b^-$ al subsistema de igualdades implícitas en $Ax \leq b$; y denotamos por $A^+x \leq b^+$ al subsistema de todas las otras inecuaciones en $Ax \leq b$.

Una restricción en un sistema de restricciones es llamada **redundante** (en el sistema) si esta restricción es implicada por las otras restricciones del sistema. (Por lo tanto, las restricciones redundantes se pueden eliminar; sin embargo, eliminar una restricción redundante puede hacer que otras restricciones redundantes sean irredundantes, de modo que generalmente no todas las restricciones redundantes se pueden eliminar al mismo tiempo). El sistema es **irredundante** si no tiene restricciones redundantes.

Teorema C.5.1 Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ un poliedro convexo no vacío, entonces

$$\text{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : A^=x \leq b^=\}$$

Demostración: Ver [6]. □

Definición C.5.2 Sea P un poliedro convexo en \mathbb{R}^n y $w \in \mathbb{R}^n$ visto como un funcional lineal. Definimos

$$\text{face}_w(P) := \{u \in P : w \cdot u \geq w \cdot v, \forall v \in P\}.$$

Cada uno de estos subconjuntos $F = \text{face}_w(P)$ de P se denomina una **cara** de P .

Notese que $F = \text{face}_w(P) = \arg \max_{v \in P} \{w \cdot v\}$.

Observación C.5.2

i) Si $w = 0$, entonces $P = \text{face}_0(P)$.

ii) Alternativamente, F es una cara de un poliedro convexo $P \subsetneq \mathbb{R}^n$ si y solo si F es no vacío y

$$F = \{x \in P : A'x = b'\}$$

para algún subsistema $A'x \leq b'$ de $Ax \leq b$.

iii) Para cada poliedro convexo, la definición C.5.2 es equivalente a la definición C.4.1.

Proposición C.5.1 Sea P un poliedro convexo. Si F es una cara de P y $F' \subseteq F$, entonces F' es una cara de P si y solo si F' es una cara de F .

Definición C.5.3 La **dimensión** de una cara F de un poliedro convexo P es la dimensión de su cápsula afín, y su **codimensión** es

$$\text{codim}_P(F) := \dim(P) - \dim(F).$$

Ejemplo C.5.2 Notamos que el conjunto C del ejemplo C.4.1 es un poliedro convexo, pues $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -x_1 \leq 0, x_1 \leq 1, -x_2 \leq 0, x_2 \leq 1\}$. Además, $\dim(C) = 2$. Para su 0-cara $C_1 = \{(0, 0)\}$, se cumple $\text{codim}_C(C_1) = 2 - 0 = 2$; y para su 1-cara $C_2 = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1\}$, se cumple $\text{codim}_C(C_2) = 2 - 1 = 1$.

Definición C.5.4 Sea P un poliedro convexo r -dimensional en \mathbb{R}^n .

- 1) Una **faceta** de P es una cara propia $(r - 1)$ -dimensional de P .
- 2) Un **vértice** de P es una cara 0-dimensional de P .
- 3) Un **borde** de P es una cara 1-dimensional de P .

Teorema C.5.2 Supongamos que el poliedro convexo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ no es un conjunto afín y que

$$P = \text{aff}(P) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 \cdot x \leq \alpha_1\} \cap \dots \cap \{x \in \mathbb{R}^n : a_m \cdot x \leq \alpha_m\},$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y ninguno de los semiespacios cerrados en la intersección puede ser omitido. Para cada $i = 1, \dots, m$, sea

$$F_i := P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \cdot x = \alpha_i\}.$$

Entonces:

- i) $\text{ri}(P) = \{a \in P : a_1 \cdot a < \alpha_1, \dots, a_m \cdot a < \alpha_m\}$.
- ii) $\text{rebd}(P) = F_1 \cup \dots \cup F_m$.
- iii) Las facetas de P son precisamente los conjuntos F_1, \dots, F_m .
- iv) Cada cara propia de P es la intersección de aquellas facetas de P que la contienen.
- v) P tiene un número finito de caras, cada una de las cuales es expuesta.
- vi) Cada cara de P es un conjunto poliedral.
- vii) Sean B_j una j -cara de P y B_k una k -cara de P ($0 \leq j \leq k - 2$) tal que $B_j \subset B_k$. Entonces existen caras B_{j+1}, \dots, B_{k-1} de P tal que, para cada $i = j, \dots, k - 1$, la cara B_i es una faceta de B_{i+1} .

Demostración: Ver [8]. □

Teorema C.5.3 Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro convexo. Entonces P tiene un número finito de caras, cada una de las cuales es expuesta y un poliedro convexo. Cada cara propia de P es la intersección de estas facetas de P que la contienen, y $\text{rebd}(P)$ es la unión de todas las facetas de P . Si P tiene una cara no vacía de dimensión s , entonces P tiene caras de todas las dimensiones desde s hasta $\dim(P)$.

Demostración: Ver [8]. □

Si P es un poliedro convexo no vacío, entonces su interior relativo es también no vacío y se demuestra que

$$\text{ri}(P) = \{p \in P : p \notin F, \text{ para cualquier cara propia } F \subsetneq P\}.$$

C.6. Complejos poliedrales en \mathbb{R}^n

Definición C.6.1 Un **complejo poliedral** Δ es una colección finita de poliedros convexos en \mathbb{R}^n tal que:

- i) Si $P \in \Delta$ y F es una cara de P , entonces $F \in \Delta$.
- ii) Si $P_1, P_2 \in \Delta$ entonces $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ o $P_1 \cap P_2$ es una cara de P_1 y de P_2 .

Ejemplo C.6.1 La colección Δ formada por los poliedros convexos $P_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0, x_1 \geq 0\}$, $P_2 = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0\}$, $P_3 = \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 0\}$ y $P_4 = \{(0, 0)\}$ es un complejo poliedral.

Definición C.6.2 Un poliedro convexo P se denomina **poliedro racional** si P es de la forma $P = \bigcap_{i=1}^m \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v^i \leq \alpha_i\}$ para algún $m \in \mathbb{N}$; $v^1, \dots, v^m \in \mathbb{Z}^n$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

Definición C.6.3 Un **complejo poliedral racional** Π es una colección finita de poliedros racionales en \mathbb{R}^n tal que:

- i) Si $P \in \Pi$ y F es una cara de P , entonces $F \in \Pi$.
- ii) Si $P_1, P_2 \in \Pi$ entonces $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ o $P_1 \cap P_2$ es una cara de P_1 y de P_2 .

Ejemplo C.6.2 El complejo poliedral Δ del ejemplo C.6.1 es racional.

Los elementos de un complejo poliedral son llamados celdas del complejo poliedral. Una celda del complejo poliedral de dimensión k se denomina k -celda del complejo poliedral. Una faceta del complejo poliedral es una $(n - 1)$ -celda del complejo poliedral.

Definición C.6.4 *Un complejo poliedral Δ se denomina **k -dimensional**, si para cada celda del complejo poliedral existe una k -celda del complejo poliedral Δ tal que la contiene. En este caso, Δ se denomina k -complejo poliedral.*

Ejemplo C.6.3 *El complejo poliedral racional Δ del ejemplo C.6.1 es 1-dimensional.*

Definición C.6.5 *Un complejo poliedral Π es llamado **ponderado**, si existe un número natural $w(F)$, llamado peso, asignado a cada una de sus $(n - 1)$ -celdas F . Este complejo se suele denotar por (Π, w) , donde w es un vector cuyas coordenadas son los pesos $w(F) \in \mathbb{N}$ de cada faceta $F \in \Pi$.*

Ejemplo C.6.4 *Si a cada una de las facetas P_1 , P_2 y P_3 del 1-complejo poliedral racional Δ del ejemplo C.6.1, le asignamos peso $w(P_1) = w(P_2) = w(P_3) = 1$, obtenemos que Δ es un 1-complejo poliedral racional ponderado.*

Observación C.6.1 *Cualquier complejo poliedral puede ser considerado como un complejo poliedral ponderado. Por ejemplo, ésto se consigue asignando peso 1 a cada $(n - 1)$ -celda (faceta).*

C.7. Politopos convexos

Definición C.7.1 *Un **politopo convexo**, o simplemente un **politopo**, es la cápsula convexa de un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^n .*

Por el corolario C.2.1, concluimos que los politopos son conjuntos convexos compactos. Un politopo de dimensión r es llamado un r -politopo.

Teorema C.7.1 *Cada politopo en \mathbb{R}^n tiene solo un número finito de caras, y cada una de estas es un politopo.*

Demostración: Ver [8]. □

Teorema C.7.2 *$C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un politopo si y solo si éste es un poliedro convexo acotado.*

Demostración: Ver [8]. □

Apéndice D

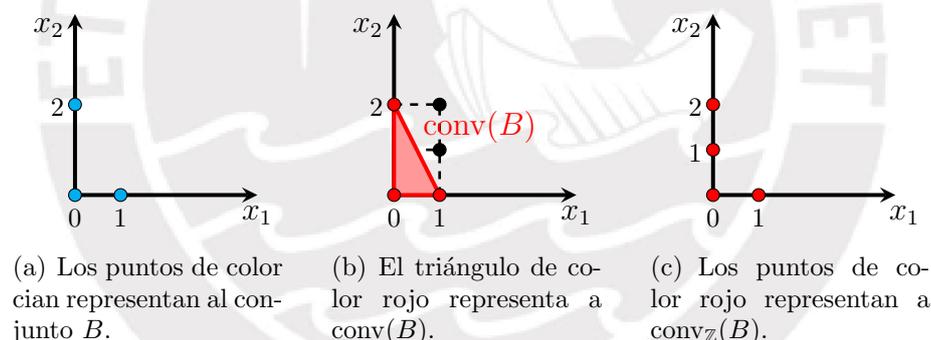
Unimodularidad

Definición D.0.1 Sea A un subconjunto de \mathbb{Z}^n . La cápsula convexa discreta de A , denotada por $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A)$, se define como $\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A) = \text{conv}(A) \cap \mathbb{Z}^n$.

Ejemplo D.0.1 Sea $A = \{0, 1, 3, 5\} \subsetneq \mathbb{Z}$ entonces

$$\text{conv}_{\mathbb{Z}}(A) = \text{conv}(A) \cap \mathbb{Z} = [0, 5] \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Mientras que si $B = \{(0, 0); (1, 0); (0, 2)\} \subsetneq \mathbb{Z}^2$ obtenemos



De ahora en adelante, un vector $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ en \mathbb{R}^n de coordenadas enteras ($v_i \in \mathbb{Z}$) se denominará **vector entero**.

Definición D.0.2 Un vector entero no nulo $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ es llamado **primitivo** si el máximo común divisor de sus coordenadas es igual a 1, es decir,

$$\text{mcd}(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1.$$

Definición D.0.3 Una colección \mathcal{D} de elementos de \mathbb{Z}^n es **unimodular** si cada subconjunto linealmente independiente $\{v^1, v^2, \dots, v^k : 1 \leq k \leq n\} \subseteq \mathcal{D}$ puede ser

extendido a una base $\beta = \{v^1, v^2, \dots, v^k, w^{k+1}, \dots, w^n\}$ para \mathbb{R}^n , de vectores de componentes enteras, tal que la matriz $n \times n$ que tiene a los vectores de esta base como sus columnas tiene determinante ± 1 , es decir,

$$\det[v^1|v^2|\dots|v^k|w^{k+1}|\dots|w^n] = \pm 1.$$

Observación D.0.1 Recordemos que si intercambiamos dos columnas de una matriz entonces el determinante de la matriz cambia de signo. Por esta razón, el orden de los vectores en el determinante de la definición D.0.3 no es importante ya que no nos interesa el signo del determinante.

Ejemplo D.0.2 La colección $\mathcal{D} = \{(1, 0, 1); (1, 1, 0); (0, 1, 1)\} \subsetneq \mathbb{Z}^3$ es unimodular.

Definición D.0.4 Sea $\{v^1, v^2, \dots, v^k : k \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ un subconjunto linealmente independiente en \mathbb{R}^n . Denotamos por $\mathcal{P}(v^1, v^2, \dots, v^k)$ al conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \lambda^i v^i : \lambda^i \in [0, 1], \forall i = 1, 2, \dots, k \right\}$$

al cual llamamos paralelepípedo generado por los vectores v^1, v^2, \dots, v^k . Estos últimos se denominan bordes de $\mathcal{P}(v^1, v^2, \dots, v^k)$.

Observación D.0.2 Los vértices del paralelepípedo $\mathcal{P}(v^1, v^2, \dots, v^k)$ son los vectores de la forma

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \lambda^i v^i : \lambda^i \in \{0, 1\}, \forall i = 1, 2, \dots, k \right\}.$$

Otra forma de describir a los vértices del paralelepípedo $\mathcal{P}(v^1, v^2, \dots, v^k)$ es mediante la siguiente suma de subconjuntos

$$\sum_{i=1}^k \{0, v^i\} = \{0, v^1\} + \{0, v^2\} + \dots + \{0, v^k\}.$$

Proposición D.0.1 Sea $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{Z}^n$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- 1) \mathcal{D} es unimodular.
- 2) Para cada subconjunto linealmente independiente $\{v^1, v^2, \dots, v^k\}$ de \mathcal{D} , no existe punto de coordenadas enteras en el paralelepípedo $\mathcal{P}(v^1, v^2, \dots, v^k)$ a no ser que sea un vértice.
- 3) Para cada subconjunto linealmente independiente $\{v^1, v^2, \dots, v^k\}$ de \mathcal{D} , se cumple: Si $x \in \mathbb{Z}^n$ y $x = \sum_{i=1}^k \alpha^i v^i$ con $\alpha^i \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha^i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, 2, \dots, k$.

Demostración: Ver [2]. □

Apéndice E

Semianillo tropical max-plus

Denotemos por $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Consideremos en \mathbb{T} un orden \preceq que es una extensión natural del orden \leq de \mathbb{R} , de modo que \preceq es \leq si se restringe a \mathbb{R} , mientras que $-\infty \prec a$, para todo $a \in \mathbb{R}$. La terna $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$, donde

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{T} \times \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ (a, b) &\longmapsto \oplus(a, b) := \text{máx}\{a, b\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{T} \times \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ (a, b) &\longmapsto \odot(a, b) := a + b \end{aligned}$$

es un semianillo, llamado **semianillo tropical max-plus**. El elemento neutro para \oplus es $0_{\mathbb{T}} := -\infty$ y el elemento neutro para \odot es $1_{\mathbb{T}} := 0$.

De ahora en adelante, para todo $a, b \in \mathbb{T}$, denotaremos los valores de $\oplus(a, b)$ y $\odot(a, b)$, por $a \oplus b$ y $a \odot b$, respectivamente.

También denotaremos por $\mathbb{T}^n := \mathbb{T} \times \dots \times \mathbb{T}$ (n – veces). La suma Minkowski de dos conjuntos $S, S' \subset \mathbb{T}^n$, denotada por $S \oplus S'$, es definida como el conjunto $\{x \oplus x' : (x, x') \in S \times S'\}$.

Si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{T}$, definimos $x^{\odot n} := \underbrace{x \odot x \odot \dots \odot x}_{n \text{ veces}}$. De esta manera obtenemos que $x^{\odot n} = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ veces}} = nx$. Luego, para $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n$, definimos

$$x^{\odot a} = x_1^{\odot a_1} \odot x_2^{\odot a_2} \odot \dots \odot x_n^{\odot a_n} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = a \cdot x.$$

Bibliografía

- [1] E. Baldwin, P. Klemperer. *Tropical geometry to analyse demand*. Nuffield College, disponible en www.nuffield.ox.ac.uk/economics/Papers/2014/tropicalgeom.pdf, 2014.
- [2] E. Baldwin, P. Klemperer. *Understanding preferences: “demand types”, and the existence of equilibrium with indivisibilities*. *Econometrica*, Vol. 87, No. 3 (May, 2019), 867-932, 2019.
- [3] Dimitri P. Bertsekas. *Convex Analysis and optimization*. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2003.
- [4] D. Maclagan y B. Sturmfels. *Introduction to Tropical Geometry*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 161. Providence, RI: American Mathematical Society, 2015.
- [5] G. Mikhalkin. *Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces*. *Topology*, 43(5):1035-1065, 2004.
- [6] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimisation. Wiley-Interscience, 2000.
- [7] N. M. Tran y J. Yu *Product-Mix auctions and tropical geometry*. *Mathematics of Operations Research*, 2019.
- [8] R. Webster *Convexity*. Oxford University Press, 1994.