PONTIFICA UNIVERSIDAD

CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Modelos de regulación monopólica bajo información asimétrica

Tesis para obtener el grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas que presenta:

Andy Marcial Inga Martel

Asesor

José Braulio Calagua Mendoza

Lima, 2021

Resumen

En un modelo tradicional, la política de regulación de un monopolio recomienda que el precio se sitúe al nivel del costo marginal y que el tamaño del subsidio permita a la firma cubrir sus costos fijos. Sin embargo, estos resultados se basan en un supuesto irreal, en el cual todos los agentes tienen información perfecta para tomar sus decisiones de manera óptima. Dado este panorama, el objetivo de este trabajo es presentar los principales modelos de regulación en un contexto de información asimétrica, en el cual el regulador tiene información imperfecta acerca de algunas características de la firma (costos, calidad del bien/servicio, entre otros) o del mercado (demanda). En particular, se presenta dos grupos de modelos: (i) los modelos unidimensionales, caracterizados porque la asimetría de información ocurre solo en un parámetro (costos); y (ii) los modelos bidimensionales, en donde la asimetría de información se da en dos parámetros conjuntamente (costos y demanda). Para estos modelos, la política regulatoria difiere del caso tradicional, ya que el precio regulado, en general, supera al costo marginal y el subsidio entregado a la firma no necesariamente cubre la totalidad de sus costos. Estos resultados se producen en un contexto en el cual el regulador busca reducir la ventaja informacional de la firma. Adicionalmente este trabajo encontró resultados distintos al ejemplo planteado en el documento original de Lewis and Sappington (1988b). Este hallazgo constituye la principal contribución realizada en este documento.

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a mi asesor, el doctor Braulio Calagua Mendoza, por su valioso apoyo en la elaboración del presente trabajo de investigación. Del mismo modo, un agradecimiento especial para a los profesores Abelardo Jordan y Alejandro Lugon, por sus valiosos comentarios que contribuyeron a mejorar el presente trabajo. Es menester agradecer también a todos los docentes de maestría de matemáticas aplicadas de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, quienes siempre estuvieron dispuestos a orientarme y atender mis consultas a lo largo de nuestro recorrido académico.

Dedicatoria

Este trabajo esta dedicado a mi familia, quienes fueron el soporte emocional durante toda mi etapa en la maestría en la Pontificia Universidad Católica del Perú. Asimismo, quiero expresar un especial agradecimiento a mi madre, Ofelia Martel Cuba, quien es la mujer que me motivó, ayudó e inspiró a concluir este trabajo de investigación.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Uno de los principales objetivos la la teoría económica es estudiar cómo lograr el máximo beneficio social con recursos limitados (por ejemplo, el presupuesto). Desde una perspectiva tradicional, la solución a este problema se da en un "contexto competencia perfecta" (*sin fallas de mercado*). Según esta óptica los agentes disponen de información perfecta para poder tomar decisiones en virtud de su propio beneficio y ninguno de los agentes que intervienen en la industria tiene poder de mercado. En teoría de regulación, el objetivo sigue siendo lograr el máximo bienestar social; sin embargo, el regulador enfrenta un doble reto en búsqueda de este objetivo (i) la estructura de mercado en el que se desenvuelve, y (ii) las restricciones de información.

El primer inconveniente esta relacionado con que la empresa a regular es un monopolio. En un modelo en competencia perfecta se asume que existen muchas empresas, por lo tanto, una empresa particular no tiene poder de mercado para influir en el precio y cantidad de equilibrio. En consecuencia, la cantidad y precio de equilibrio están determinados por las fuerzas de la oferta y demanda del mercado. Este resultado maximiza el beneficio social (entendido como la suma del excedente del consumidor y productor), ya que el precio de equilibrio se sitúa en el mismo nivel que el costo marginal; y así, el beneficio social de cada unidad producida es mayor al costo marginal social. Este caso se conoce como el resultado de *primer mejor*; y a los niveles de precio y cantidad de equilibrio se le conocen como *precio y cantidad eficientes.*

Por el contrario, cuando la firma es un monopolio, esta es la única que puede proveer el bien/servicio; y por ello, tiene el poder de influir en el precio (o cantidad) de equilibrio. Así, en un contexto sin regulación, los objetivos del monopolista no necesariamente están alineados con los intereses de la sociedad. En efecto, el precio de equilibrio resulta ser mayor que el costo marginal y la cantidad de equilibrio es menor a la *cantidad eficiente.* De esta forma, se produce una *pérdida de eficiencia social* (PES), ya que hay unidades de producción para los cuales hubiera sido eficiente que se transen en el mercado, pues para estas unidades el beneficio social es mayor al costo marginal social.

Una respuesta natural en este contexto es que el regulador obligue a la firma a cobrar un precio igual al costo marginal, de tal forma que se alcance los resultados de *primer mejor.* Sin embargo; esta política no necesariamente es sostenible en el tiempo; pues la firma podría obtener beneficios negativos; y así, quebrar o decidir *apriori* no participar en la industria (Braeutigam, 1989) (Braeutigam, 1989). Estas consecuencias se producen, generalmente, si la firma es un monopolio natural; lo cual es común para bienes/servicios con costos hundidos altos (agua, electricidad, etc.). Por lo tanto, el regulador tiene por objetivo lograr el máximo beneficio social posible (o minimizar el PES) considerando que la política de precios sea sostenible en el tiempo; es decir, garantice beneficios económicos no negativos a la firma o, dicho de otro modo, considere la *restricción de participación* (IR, por sus siglas en inglés) de la firma.

Por otro lado, el regulador también enfrenta un reto vinculado a la disposición de la información acerca de la firma. A diferencia de los modelos con información completa; el regulador no tiene capacidad para conocer y/o observar perfectamente algunas características de la firma o del mercado que esta regulando. Por ejemplo, dada la experiencia de la firma en la industria, esta tiene mayor y mejor información respecto al regulador acerca de la demanda y/o los costos y/o calidad del bien o servicio que subministra. De esta forma, el agente más informado puede aprovechar esta ventaja para obtener algún beneficio extraordinario; y en consecuencia, se produce un resultado ineficiente.

Si bien el regulador no tiene información precisa acerca de los costos (o la demanda); el planificador dispone de información acerca de la probabilidad de los posibles valores que puede tomar los costos (o demanda) de la firma. Dado este conocimiento, el propósito del regulador es diseñar una política óptima que estimule a la firma a revelar su información privada. Para ello, el regulador debe considerar la *restricción de compatibilidad de incentivos* (IC por sus siglas en ingles) de las firmas; es decir, la política de precios debe ser tal que el beneficio esperado que reciben las firmas para elegir la opción de revelar su información privada sea mayor o igual al beneficio esperado que le proporcionaría la opción de no revelar su información privada. De esta forma, se asegura que la firma siempre manifieste su información privada. Por lo tanto; el regulador tiene por objetivo maximizar el bienestar social esperado (teniendo en cuenta todos los valores que los costos/demanda pueda tomar) sujeto a la IR y IC.

Por otra parte, en teoría de regulación no solo se enfocan en caracterizar la política regulatoria óptima; sino también abordan el tema de la *implementación* del resultado óptimo. Para lograr este objetivo, el regulador diseña una política regulatoria (precios y transferencia) para cada uno de los posibles escenarios que represente los valores de la variable desconocida por este agente (costo y/o demanda). De esta manera, cuando el regulador pregunte a la firma acerca de su información privada; este último elegirá la mejor alternativa entre todas las opciones que le proporciona la política regulatoria. En efecto, la mejor alternativa será aquella que le brinde el beneficio más alto.

Por lo expuesto, la mayoría de modelos de regulación restringen el espacio de opciones de política regulatoria óptima a solo aquellas alternativas para las cuales la firma siempre elegirá la opción que se ajuste a la información privada con la que cuenta. Formalmente, esto se justifica mediante el principio de revelación.

En base a Laffont and Martimort (2009) se presenta el *principio de revelación*. Para ello, se describe un *mecanismo* como un instrumento de comunicación entre la firma y el regulador. En ese sentido, cualquier *mecanismo* debe considerar que firma puede mentir/ocultar su información privada (o tipo). Sea $\Gamma = \{(p, s) : p \in \mathbb{R}_+, s \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de todas las posibles asignaciones regulatorias, donde p y s representan el precio y subsidio fijado por el regulador, respectivamente. Igualmente, sea M el espacio de mensajes que la firma puede reportar al regulador y Θ representa al espacio que ordena a las firmas de acuerdo a los valores de su información privada en *tipos de firmas*. Entonces, condicional a algún mensaje $m \in M$, el regulador establece el precio $\tilde{p}(m)$ y subsidio $\tilde{s}(m)$ óptimo. De esta forma, se puede definir un *mecanismo* como un conjunto de mensajes M y una función $\tilde{g}(.)$ de M a Γ, el cual puede ser escrita como $\tilde{g}(m) = (\tilde{p}(m), \tilde{s}(m))$ para todo $m \in M$.

Detrás de la elección del mensaje que la firma decida enviar, hay un proceso de optimización. Dado que para cada mensaje m, la firma conoce el precio y el subsidio que serán fijados por el regulador; la empresa del tipo θ evalúa todos posibles mensajes y elige aquel $m^*(\theta)$ que le genere el mayor beneficio posible. De esta manera, el *mecanismo* $(M, \tilde{g}(.))$ induce una regla de asignación $a(\theta) = (\tilde{p}(m^*(\theta)), \tilde{s}(m^*(\theta)))$ que lleva de un conjunto de tipos Θ a un conjunto de asignaciones Γ.

Debido que el regulador esta interesado en implementar un mecanismo que facilite la revelación de la información privada, se define un *mecanismo de revelación directa* como una función $g : \Theta \to \Gamma$, donde el regulador se compromete a establecer un precio $p(\theta)$ y subsidio $s(\theta)$ cuando la firma reporte θ. Este mecanismo puede ser escrito como $g(\theta) = (p(\theta), s(\theta))$ para cualquier valor de $\theta \in \Theta$. Si el mecanismo de revelación $g(.)$ satisface la IC; entonces se dice que $g(.)$ es un *mecanismo de revelación directa que incentiva reportes verdaderos*, pues la firma declarará su información privada.

De esta manera, el *principio de revelación* asegura que cualquier regla de asignación $a(\theta)$ obtenida con el mecanismo $(M, \tilde{g}(.))$ puede ser implementada con un *mecanismo de revelación directa que incentiva reportes verdaderos.*

Un efecto directo del *principio de revelación* es que los modelos que implican relaciones contractuales, como en el caso la regulación de un monopolio, se pueden simplificar; ya que, el análisis se restringe a los mecanismos de revelación que satisfagan la IC.

Dado este panorama, el objetivo de este este trabajo se centrará en brindar una exposición detallada de los conceptos y el tratamiento riguroso de las demostraciones de los principales modelos de regulación en un contexto de información asimétrica. Para ello, se ha agrupado a los modelos de regulación en dos tipos (i) modelos unidimensionales y (ii) modelos bidimensionales. Los modelos *unidimensionales* se caracterizan porque la fuente de asimetría de información se genera en una sola variable, ya sea en los costos o en la demanda. Este tipo de modelos son tratados en el capítulo 2. En tanto, los *modelos bidimensionales* se distinguen porque la asimetría de información se produce en la demanda y en los costos simultáneamente. En el capítulo 3 se discutirá acerca de este grupo de modelos.

Uno de los primeros modelos que plantean un política de regulación óptima en un contexto de información asimétrica fue propuesto por Baron and Myerson (1982). En la sección 2.1 se analiza este modelo, el cual establece que la fuente de asimetría de información se produce en algún parámetro que influye en la función de costos (en el costo fijo o costo marginal); es decir, la firma conoce el verdadero parámetro que determina sus costos, pero el regulador no tiene acceso a esta información. En estas circunstancias, el regulador fija un precio que esta por encima del costo marginal; y por lo tanto, se produce un resultado ineficiente, ya que los consumidores tendrán que pagar un precio más alto y las unidades disponibles en el mercado son menores en comparación a lo obtenido en un contexto de información simétrica(*primer mejor*). Sin embargo; el hecho que el precio regulado exceda al costo marginal crea los incentivos necesarios para que la firma no mienta acerca de sus costos y así lograr una política que satisface la IC. Por lo tanto, el costo de incentivar la revelación privada de información esta dado por un mayor precio y menores cantidades, lo cual es asumido por los consumidores. Adicionalmente, a diferencia del resultado de *primer mejor*, el regulador permite que las firmas puedan obtener beneficios positivos. A esta característica se le conoce como la *renta informacional*, que representa el beneficio extra que la firma obtiene debido a su ventaja informacional.

Asimismo, en la sección 2.2 se analizará el modelo de regulación planteado por Lewis and Sappington (1988a). A diferencia del anterior modelo, en este modelo la asimetría de información se produce en la demanda. Si bien el regulador conoce los costos, es bastante coherente pensar que la firma regulada disponga de una mejor información acerca de la demanda que el regulador; ya que la empresa conoce mejor las características del bien/servicio que comercializa y que influyen en la demanda. Esta ventaja informacional genera que la política regulatoria sea diferente a lo obtenido en el modelo donde algún parámetro de la función de costos era desconocido por el regulador. Ciertamente, cuando la firma tiene costos marginales decrecientes, los incentivos de la empresa coinciden con los los intereses sociales; y por lo tanto, la política regulatoria óptima coincide con el resultado de *primer mejor*. Por otro lado, cuando los costos marginales son decrecientes, resulta bastante costoso satisface la IC; y por ende, el precio regulado óptimo es constante. Luego, el precio óptimo resulta menor al costo marginal cuando la demanda es pequeña; mientras que cuando la demanda es grande, el precio resulta estar por encima del costo marginal.

En las dos primeras secciones se analizó los casos donde la asimetría de información fue del tipo *selección adversa*; es decir, el regulador no tiene información perfecta acerca de algunas variables exógenas a la firma (costos o demanda); esto es, variables que son determinadas de manera aleatoria por la *naturaleza*. Sin embargo, en la sección 2.3 se analiza el caso donde, además de un caso de *selección adversa*, la asimetría de información se presenta bajo la categoría de *riesgo moral*. En este tipo de problemas, el regulador no puede observar alguna variable endógena a la firma; es decir, variables sobre las cuales decide la firma.

En el modelo desarrollado por Laffont and Tirole (1986) se considera que los costos no solo están determinados por la cantidad de producción; sino también están influidas por esfuerzo que las firmas ejecuten y por un componente aleatorio. De esta forma, un mayor esfuerzo supone un menor costo esperado, pero también implica una desutilidad para firma. Dado que el objetivo del regulador es que la producción se de al menor costo posible, este buscará que las firmas puedan aumentar su intensidad de esfuerzo; sin embargo, el regulador no tiene capacidad para observar y monitorear el esfuerzo (al menos no de manera directa). Adicionalmente, el planificador no puede observar los costos de la firma. A pesar de ello, el regulador puede observar el costo realizado; y por ende, este constituirá el único instrumento de regulación para gestionar los incentivos de la empresa de tal forma que esta ejerza un nivel de esfuerzo óptimo y no mienta acerca de sus costos.

En la sección 2.4 se discute una extensión a los modelos unidimensionales, en el cual se le permite al regulador llevar a cabo un proceso de auditoría para conocer *ex post* los costos realizados. En este modelo propuesto por Baron and Besanko (1984); si bien el costo es aleatorio, la firma tiene mayor información para conocer con qué probabilidad se da algún evento del costo. En tanto, el planificador solo puede observar el costo realizado (*ex post*) si decide realizar una auditoría; y en consecuencia, tiene la facultad de penalizar a la firma si considera que esta ha sobreestimado sus costos. El proceso de auditoría conjuntamente con la penalización funcionan como instrumentos que el regulador utiliza para adecuar los incentivos de la firma y lograr que se reporte su información privada. De esta manera, la auditoría reduce el costo de satisfacer la IC. Uno de los resultados más relevantes de este modelo se refiere a la *característica de separación* de la política de precios y la auditoría. En efecto, para un cierto tramo, el proceso de auditoría puede llevarse a cabo, sin que esto implique un actualización/revisión de los precios.

En el capítulo 3 se analiza los modelos *bidimensionales*. Así, en la sección 3.1 se examina el modelo planteado por Lewis and Sappington (1988b), los cuales proponen un política de regulación óptima para una empresa con costos y demanda desconocidos por el regulador. A diferencia de los modelos expuestos en el capitulo 2, desde el punto de vista del regulador, los *tipos* de empresa no se distribuyen sobre un espacio lineal; sino sobre un área, pues ahora hay dos dimensiones desconocidos. Esta característica representa un reto para el regulador, ya que ahora no cuenta con información completa acerca de dos parámetros y solo dispone de un instrumento de regulación, el precio. Sin embargo, esta particularidad también da algunas luces acerca de la manera de solucionar a este problema; pues se genera un *agrupamiento* de firmas que eligen un mismo precio (estipulado en un contrato). En consecuencia, el modelo caracteriza a este grupo de firmas bajo una curva *iso precio* y resuelve el problema del regulador dado que el precio debe ser constante en esa curva.

Los resultados obtenidos muestran que el precio regulado óptimo no solo tiene el objetivo de generar los incentivos correctos para que la firma no exagere su verdaderos costos; sino también para que esta no subestime la información acerca de la demanda. En ese sentido, para ciertos tramos, el precio regulado es inferior al costo marginal esperado; lo cual es un resultado diferente a lo obtenido por Baron and Myerson (1982). Asimismo, es preciso resaltar que la solución numérica a un ejemplo presentado en el documento original no coincide con los cálculos realizados en este trabajo. De hecho, Armstrong (1999) menciona que la solución al ejemplo planteado por Lewis and Sappington (1988b) no es válida, ya que el precio óptimo tiende al infinito para curvas *isoprecio* altos; con lo cual no se satisface la restricción IC. Sin embargo, la solución que se encontró en este trabajo muestra que el precio óptimo tiene una cota superior, y por lo tanto el precio no tiende al infinito.

Finalmente en la sección 3.2 se estudia la solución de un modelo de regulación del tipo *selección adversa* donde el regulador no conoce el costo marginal y el costo fijo de la firma. En contraste con el anterior modelo; Rochet (2009), inspirado en la propuesta de Baron and Myerson (1982), presenta una solución para el modelo *bidimensional* sin el *condición de cruzamiento simple* (SCC por sus siglas en inglés) [1]. La ausencia de esta condición dificulta que la restricción IC pueda ser representada en una versión local[2]; y por ende, se complica la tarea de transformar el problema del regulador a un problema de control óptimo. A respecto, en esta sección se propone un método para solucionar este problema y así derivar la política óptima. Uno de los resultados importantes muestran que el precio regulado encontrado en el modelo de Baron and Myerson (1982) es un caso particular de este modelo.

Para facilitar la lectura, a lo largo del trabajo se dejarán en un apéndice (uno por capítulo) las demostraciones más técnicas y que no signifiquen uno de los principales resultados de cada sección. Asimismo, cabe indicar que estos cálculos representan un despliegue minucioso de lo expuesto en los trabajos de los autores a los que se hace referencia en cada sección.

[1]La SCC ocurre cuando la parte más informada (firma) tiene preferencias de tal forma que su tasa marginal de sustitución entre el precio y subsidio se incrementa conforme al parámetro *unidimensional* en el que se da la información asimétrica. Por ejemplo, si el regulador no conoce los costos de la firma, la SCC implica que mientras más ineficiente sea la firma (mayores costos); esta valorará más el precio que el subisidio.

[2]Cuando la asimetría de información se produce en los costos ;la restricción IC local asegura que la firma siempre prefiera declarar sus verdaderos costos antes que reportar algún otro costo que pertenezca a la vecindad de su verdadero costo

1.1 Modelo de regulación simple para el caso discreto

A pesar que los modelos de regulación que se abordan en este trabajo consideran que las firmas (los agente más informados) están ordenados en un continuo de *tipos* de acuerdo al parámetro que da origen a la información asimétrica; es bastante aleccionador presentar un modelo donde solo existen dos tipos de firmas (i) la firma de costos altos; y (ii) la frma de costos bajos. El modelo presentado a continuación se basa en lo expuesto por Armstrong and Sappington (2007).

1.1.1 Regulación con información completa

Antes de analizar el problema del regulador en un contexto de información asimétrica; se analiza el caso donde el planificador tiene la capacidad de observar los costos de la firma y la demanda de la industria. Sea $p \geq 0$ el precio del bien/servicio transado. Asimismo se define el excedente del consumidor como $V(p) = \int_0^p Q(\tilde{p})d\tilde{p}$, donde $Q(.)$ representa la función la demanda.

Asimismo, la función de costos de la firma está dada por:

$$C(q, \theta) = (c_0 + c_1\theta)\, q + (k_0 + k_1\theta) \tag{1.1}$$

cuando $q > 0$ y $C(q, \theta) = 0$ si $q = 0$. Donde c_1 y k_1 son parámetros positivos, y c_0 y k_0 son constantes conocidas. El beneficio de la empresa viene dado por:

$$\pi(p) = pQ(p) - C(q) + s \tag{1.2}$$

donde s representa el subsidio que el regulador le otorga a la empresa. Luego, el problema del regulador consiste en maximizar el beneficio social considerando la restricción que asegura la participación de la firma en el mercado; es decir:

$$\begin{aligned} \underset{p,s}{max} \quad & (V(p) - pQ(p) - s) + \alpha\pi(p) \\ \text{s.t.} \quad & \pi(p) \geq 0, \forall p \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $\alpha \in [0, 1]$ representa el peso que tiene las firmas en el beneficio social. Si se despeja el subsidio s de la expresión 1.2 y se reemplaza en la función objetivo del regulador; entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \underset{p,\pi(p)}{max} \quad & V(p) - C(q) - (1-\alpha)\pi(p) \\ \text{s.t.} \quad & \pi(p) \geq 0, \forall p \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \tag{1.4}$$

Es importante notar que el beneficio de la firma $\pi(p)$ afecta de forma negativa a la función objetivo del problema 1.4; entonces, en el óptimo este debe ser cero, $\pi(p) = 0$. Asimismo, se obtiene que el precio debe ser igual al costo marginal, $p^* = Cmg$. Por lo tanto, el resultado *primer mejor* involucra la firma no obtenga beneficios extraordinarios y que el precio óptimo sea igual al costo marginal.

1.1.2 Regulación con información asimétrica

En este caso se asume que el regulador no conoce el parámetro θ, y por lo tanto tampoco conoce los costos de la firma. Sin embargo, el regulador sabe que el parámetro θ solo puede tomar dos valores $\theta \in \{\underline{\theta}, \bar{\theta}\}$, donde $\bar{\theta} > \underline{\theta}$. Asimismo, desde el punto de vista del planificador, $\theta = \underline{\theta}$ ocurre con una probabilidad de ϕ y $\theta = \bar{\theta}$ se da con una probabilidad de $1 - \phi$.

En primer lugar se muestra que implementar el resultado de *primer mejor* no es un mecanismo factible en un contexto de información asimétrica, ya que incentiva que las firma de parámetro $\theta = \underline{\theta}$ reporte $\theta = \bar{\theta}$. Si el regulador se compromete a establecer un precio $p(\theta) = Cmg = c_0 + c_1\theta$ y subsidio $s = s(\theta)$ si la firma declara

$\theta \in \{\underline{\theta}, \bar{\theta}\}$; entonces, el beneficio de la firma con parámetro $\theta = \underline{\theta}$ que elige la opción $\{p(\underline{\theta}), s(\underline{\theta})\}$ esta dado por:

$$\pi(\underline{\theta}, \underline{\theta}) = (p(\underline{\theta}) - (c_0 + c_1\underline{\theta}))\, Q(p(\underline{\theta})) - (k_0 + k_1\underline{\theta}) + s(\underline{\theta})$$

Por el contrario si esta firma eligiese la opción $\{p(\bar{\theta}), s(\bar{\theta})\}$, el beneficio que obtendría sería:

$$\begin{aligned}
\pi(\underline{\theta}, \bar{\theta}) &= \left(p(\bar{\theta}) - (c_0 + c_1\underline{\theta})\right) Q(p(\bar{\theta})) - (k_0 + k_1\underline{\theta}) + s(\bar{\theta}) \\
\pi(\underline{\theta}, \bar{\theta}) &= \pi(\bar{\theta}, \bar{\theta}) + \left(\bar{\theta} - \underline{\theta}\right) \left[c_1 Q(p(\bar{\theta})) + k_1\right]
\end{aligned}$$

A partir de estas expresiones, si el regulador quiere inducir a la firma del tipo $\theta = \underline{\theta}$ a elegir el contrato $\{p(\underline{\theta}), s(\underline{\theta})\}$, entonces:

$$\pi(\underline{\theta}, \underline{\theta}) \geq \pi(\underline{\theta}, \bar{\theta}) = \pi(\bar{\theta}, \bar{\theta}) + \left(\bar{\theta} - \underline{\theta}\right) \left[c_1 Q(p(\bar{\theta})) + k_1\right] \tag{1.5}$$

El resultado de *primer mejor* implica que $\pi(\underline{\theta}, \underline{\theta}) = \pi(\bar{\theta}, \bar{\theta}) = 0$. Asimismo, se conoce que $\left(\bar{\theta} - \underline{\theta}\right) > 0$ y $c_1, k_1 > 0$; por lo tanto, la desigualdad 1.5 no se satisface. De esta manera, se demuestra que si se implementa la política de *primer mejor*, la firma del tipo $\theta = \underline{\theta}$ elegirá el contrato $\{p(\bar{\theta}), s(\bar{\theta})\}$ y por conseguiente la restricción IC no se cumple.

Es así que el problema del regulador debe considerar esta restricción. Luego, el regulador elige de manera óptima el precio regulado $p()$ que resuelve el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
\max_{p(.),\pi(\theta)} \quad & \phi\,[V(p(\underline{\theta})) - C(q(\underline{\theta})) - (1-\alpha)\pi(\underline{\theta},\underline{\theta})] \\
& + (1-\phi)\left[V(p(\bar{\theta})) - C(q(\bar{\theta})) - (1-\alpha)\pi(\bar{\theta},\bar{\theta})\right] \\
\text{s.t.} \quad & \pi(\underline{\theta},\underline{\theta}) \geq 0, && \text{(IR-1)} \\
& \pi(\bar{\theta},\bar{\theta}) \geq 0, && \text{(IR-2)} \\
& \pi(\underline{\theta},\underline{\theta}) \geq \pi(\bar{\theta},\bar{\theta}) + \left(\bar{\theta} - \underline{\theta}\right)\left[c_1 Q(p(\bar{\theta})) + k_1\right] && \text{(IC-1)} \\
& \pi(\bar{\theta},\bar{\theta}) \geq \pi(\underline{\theta},\underline{\theta}) - \left(\bar{\theta} - \underline{\theta}\right)\left[c_1 Q(p(\underline{\theta})) + k_1\right] && \text{(IC-2)}
\end{aligned}
$$

Es importante observar que IC-1 y IR-2 implica IR-1. Esto se da porque $\pi(\bar{\theta},\bar{\theta}) \geq 0$ de IR-2, $\bar{\theta} > \underline{\theta}$ y c_1, $k_1 > 0$, entonces $\pi(\underline{\theta},\underline{\theta}) > 0$. Por lo tanto, se garantiza IR-1 y así se puede prescindir de IR-1 si se conservan IC-1 y IR-2.

Adicionalmente, en la función objetivo del regulador, el término $\pi(\bar{\theta},\bar{\theta})$ incide de manera negativa en la función de bienestar social; por lo tanto, en el óptimo $\pi(\bar{\theta},\bar{\theta}) = 0$. Luego, la restricción IC-1 queda como:

$$
\pi(\underline{\theta},\underline{\theta}) \geq \left(\bar{\theta} - \underline{\theta}\right)\left[c_1 Q(p(\bar{\theta})) + k_1\right] > 0
$$

Además, como $\pi(\underline{\theta},\underline{\theta})$ incide de manera negativa a la función objetivo del regulador; por consiguiente, en el óptimo $\pi(\underline{\theta},\underline{\theta}) = \left(\bar{\theta} - \underline{\theta}\right)\left[c_1 Q(p(\bar{\theta})) + k_1\right]$. De esta forma, la restricción IC-2 queda satisfecha. Por lo tanto, se reemplaza en la función de bienestar $\pi(\bar{\theta},\bar{\theta}) = 0$ y $\pi(\underline{\theta},\underline{\theta}) = \left(\bar{\theta} - \underline{\theta}\right)\left[c_1 Q(p(\bar{\theta})) + k_1\right]$ y se maximiza respecto a $p(.)$

$$
\begin{aligned}
\max_{p(.)} \quad & \phi\left[V(p(\underline{\theta})) - C(q(\underline{\theta})) - (1-\alpha)\left(\bar{\theta} - \underline{\theta}\right)\left[c_1 Q(p(\bar{\theta})) + k_1\right]\right] \\
& + (1-\phi)\left[V(p(\bar{\theta})) - C(q(\bar{\theta}))\right]
\end{aligned}
$$

Los precios óptimos indican que:

$$p(\underline{\theta}) = c_o + c_1\underline{\theta} = Cmg(\underline{\theta}) \tag{1.6}$$

$$p(\bar{\theta}) = Cmg(\bar{\theta}) + \frac{\phi}{1-\phi}(1-\alpha)(\bar{\theta}-\underline{\theta})c_1 \tag{1.7}$$

y los beneficios

$$\pi(\underline{\theta}, \underline{\theta}) = \left(\bar{\theta} - \underline{\theta}\right)\left[c_1 Q(p(\bar{\theta})) + k_1\right] \tag{1.8}$$

$$\pi(\bar{\theta}, \bar{\theta}) = 0 \tag{1.9}$$

Así, el regulador permite que la firma más eficiente (menor costo) puede obtener beneficios extraordinarios en virtud de la información privada que dispone. Contrariamente, el beneficio percibido por firma menos eficiente (mayor costo) es igual al que obtendría en un contexto de información simétrica. Adicionalmente, se puede notar que el precio óptimo para la firma más ineficiente es mayor que el costo marginal. La lógica detrás de este resultado es que al tener un precio más alto, la cantidad demandada será menor; y en consecuencia, se reduce el beneficio de la firma del tipo $\theta = \underline{\theta}$, si esta pretende elegir un contrato diferente a su tipo $\left\{p(\bar{\theta}), s(\bar{\theta})\right\}$. Así, se satisface la restricción IC para este tipo de firma.

Capítulo 2

Modelos Unidimensionales

2.1 Regulación con información asimétrica: Costos desconocidos

El regulador tiene por objetivo lograr el máximo beneficio social posible; sin embargo, enfrenta ciertas condiciones adversas que dificultan el cumplimientos de dichas metas. Uno de los principales problemas es la *asimetría de información.* Como se analizó en el capitulo anterior, este problema provoca que la capacidad de establecer precios no sea otorgada enteramente al mercado; sino que el regulador pueda administrar esta potestad garantizando (i) la participación voluntaria de la firma en la industria y (ii) que la firma tenga los incentivos correctos para revelar su información privada.

En ese sentido, en esta sección se desarrolla el modelo propuesto por Baron and Myerson (1982). Los autores plantean un modelo de regulación en un contexto de información asimétrica, donde el planificador no conoce los costos de producción de la firma.

Dada la experiencia de la firma en la industria, el supuesto que establece que la empresa es el agente que tiene mejor y mayor información acerca de sus costos es bastante sensato. La ventaja informacional que dispone la firma crea incentivos para que esta sobreestime sus costos, de tal forma que obtenga un mayor precio, y con ello ganancias más altas. En consecuencia, el diseño de la política óptima de precios (y subsidios) considera el costo reportado por la firma e incluye un sistema de incentivos para que la firma declare sus verdaderos costos.

Los resultados muestran que si se ejecuta la política de *primer mejor* (esto es, precio igual al costo marginal), esta no resulta ser un política factible; es decir, se crean incentivos para que la firma más eficiente declare costos más altos. Por lo tanto, la política de regulatoria óptima establece que el precio regulado sea mayor al costo marginal para evitar evitar los incentivos de una sobreestimación en los costos. La lógica detrás de este resultado se basa en el hecho que un mayor precio reduce la cantidad de unidades transadas; y por ende, las ganancias que una firma de costos bajos pueda obtener si pretende reportar costos más altos . Además, mientras menor sea el costo, mayor será el incentivo de la firma para sobreestimar sus costos; y por lo tanto, el precio regulado debe ser más alto. De esta forma, se concluye que los precios son no decrecientes respecto al parámetro de costos que las firmas declaren.

Por otra parte, a diferencia del resultado en un contexto de *información completa*, el beneficio que perciben las firmas es estrictamente positiva para las empresas que tienen costos menores al costo más alto posible; mientras que para las firmas con el costo más alto, el beneficio es nulo. El regulador permite que la empresa obtenga beneficios positivos debido a la ventaja informacional que esta tiene. Dado que las firmas que tienen menores costos tienen mayores incentivos de reportar costos más altos; son a estas que les es permitido percibir ganancias más altas.

Asimismo, se discute acerca de la implementación de esta política regulatoría óptima. Para ello, el regulador debe fijar una “tasa de ganancia justa” para la firma, y entregar un subisidio igual al costo fijo a fin de inducir a la empresa a producir.

2.1.1 Modelo

La función de costos de una empresa monopolística que produce q unidades está dada por:

$$C(q, \theta) = (c_0 + c_1\theta)q + (k_0 + k_1\theta) \text{ si } q > 0 \text{ , y } C(0, \theta) = 0 \tag{2.1}$$

Donde c_0, c_1, k_0, k_1 son constantes conocidas y $c_1 \geq 0$ y $k_1 \geq 0$. Asimismo, θ representa el parámetro que captura la información asimétrica; y por ende, solo es conocido por la firma. Por fines técnicos, es preciso indicar los valores de θ pertenecen al intervalo $\Theta \equiv [\theta_0, \theta_1]$ con $\theta_0 < \theta_1$.

De la expresión (2.1), el término $c_0 + c_1\theta$ representa al costo marginal, mientras que $k_0 + k_1\theta$ se refiere al costo cuasi fijo. Ambos términos son desconocidos, pues en los dos está involucrado el parámetro θ. Así, la función de costos definida en la expresión (2.1) representa un caso general, en el cual, tanto el costo marginal como el costo fijo son desconocidos por el regulador.

Asimismo, se asume que el regulador conoce que el parámetro θ se distribuye siguiendo una función de densidad f sobre $[\theta_0, \theta_1]$. Además, se asume que $f(\theta)$ es continua y positiva $f(\theta) > 0$ para cualquier valor de $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Se denota a $F(\theta)$ como la función de distribución acumulada hasta θ.

Adicionalmente, en este modelo la función de demanda es conocida por el regulador y la firma. Sea $P(.)$ la inversa de la función de demanda, donde $P(q)$ representa el precio que los consumidores están dispuestos a pagar por una cantidad de q unidades.

El beneficio que obtienen los consumidores de un nivel de producción de q unidades está definida como el área debajo de la función inversa de la demanda:

$$V(q) = \int_0^q P(\tilde{q})d\tilde{q} \tag{2.2}$$

Así, el excedente del consumidor neto está dado por $V(q) - qP(q)$.

El regulador tiene tres instrumentos:

- Decidir si permite a la firma ingresar a la industria.
- Si se le permite a la firma operar en la industria, entonces, el precio o la cantidad pueden ser regulados.
- El regulador puede cobrar un impuesto u otorgar un subsidio a la empresa.

De esta forma, por el *principio de revelación*, los contratos que se derivan de una política regulatoria estarán en función del parámetro $\hat{\theta}$ declarado por la firma. Así para cualquier $\hat{\theta} \in [\theta_0, \theta_1]$, $r(\hat{\theta})$ representa la probabilidad que el regulador le otorgue a la firma el permiso para operar en la industria [1] [2]. Entonces, $r(\hat{\theta})$ debe satisfacer:

$$0 \leq r(\hat{\theta}) \leq 1 \tag{2.3}$$

Si la firma ingresa a la industria después de haber reportado $\hat{\theta}$, entonces $p(\hat{\theta})$ será el precio regulado que le corresponde y $q(\hat{\theta})$ la cantidad demandada a ese precio (determinada en la función de demanda). Entonces, se debe se satisfacer:

$$p(\hat{\theta}) = P(q(\hat{\theta})) \tag{2.4}$$

[1] La potestad del regulador para permitir o no el ingreso de una firma a la industria puede ser entendida como la capacidad de otorgar una concesión de un bien o servicio

[2] Desde el punto de vista de la firma, esta no conoce si el regulador le otorgará el permiso para ingresar a la industria. En ese sentido, la maximización del beneficio esperado debe considerar esta posibilidad

Finalmente $s(\hat{\theta}) = r(\hat{\theta})s^*(\hat{\theta})$ representa al subsidio esperado otorgado a la firma si reporta $\hat{\theta}$, donde $s^*(\hat{\theta})$ es el subsidio que recibe la firma si le es permitido operar en la industria (y no recibe nada si no se le permite entrar en la industria). Es importante resaltar que si $s(\hat{\theta})$ es negativa, entonces se trata de un impuesto a la firma.

Por otra parte, el beneficio de la firma que tiene una función de costos con parámetro θ (en adelante firma del tipo θ)[3], pero declara $\hat{\theta}$, está dado por:

$$\pi^*(\hat{\theta}, \theta) = [p(\hat{\theta})q(\hat{\theta}) - (c_0 + c_1\theta)q(\hat{\theta}) - k_0 - k_1\theta]r(\hat{\theta}) + s(\hat{\theta}) \tag{2.5}$$

En esa línea, si la firma del tipo θ declara su verdadero parámetro, entonces el beneficio obtenido será:

$$\pi(\theta, \theta) \equiv \pi(\theta) = [p(\theta)q(\theta) - (c_0 + c_1\theta)q(\theta) - k_0 - k_1\theta]r(\theta) + s(\theta) \tag{2.6}$$

Para garantizar los incentivos adecuados de tal forma que la firma del tipo θ declare su verdadero parámetro, se debe tener en cuenta que la firma elige el $\hat{\theta} = \theta$ si esta elección le genera el mayor beneficio posible en comparación a otras alternativas. Esto es:

$$\pi(\theta) = \max_{\hat{\theta}} \quad \pi^*(\hat{\theta}, \theta) \tag{2.7}$$

para todo $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. La expresión (2.7) es también conocida en la literatura de regulación como la restricción IC.

Además, se debe de satisfacer la restricción IR; en la cual se garantiza que la firma pueda operar en la industria, al menos, cubriendo sus costos económicos;

[3]Es común en modelos de selección adversa, distinguir a las firmas de acuerdo a su parámetro que captura su información privada.

es decir:

$$\pi(\theta) \geq 0 \tag{2.8}$$

para todo $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$

Así, una política regulatoria $(r(\theta), p(\theta), q(\theta), s(\theta)) \in \mathbb{R}^4$ es *factible* si satisface las condiciones de las expresiones (2.3), (2.4), (2.7) y (2.8) para todo $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. En virtud del *principio de revelación*, si el regulador emplea una política factible, se espera que la firma declare su verdadero parámetro θ y opere si le es permitido entrar en la industria.

El problema del regulador consiste en elegir una política factible que maximice el beneficio social esperado, el mismo que está compuesto por el excedente del consumidor y productor. Dada una política $(r(\theta), p(\theta), q(\theta), s(\theta))$, el beneficio esperado de los consumidores es igual al excedente neto esperado de los consumidores menos el subsidio esperado de la firma[4] [5]:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} ([V(q(\theta)) - p(\theta)q(\theta)]r(\theta) - s(\theta))f(\theta)d\theta$$

De igual modo, el beneficio esperado de la firma, está dado por:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \pi(\theta)f(\theta)d\theta$$

Así, la función objetivo del regulador es igual a la suma ponderada del excedente esperado del consumidor y la firma.

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} ([V(q(\theta)) - p(\theta)q(\theta)]r(\theta) - s(\theta))f(\theta)d\theta + \alpha \int_{\theta_0}^{\theta_1} \pi(\theta)f(\theta)d\theta \tag{2.9}$$

Donde $\alpha \in [0, 1]$ (parámetro exógeno) representa la importancia que el regulador

[4] El subsidio pagado a la empresa es obtenida del excedente del consumidor a través de una política de impuestos

[5] Si $s(\theta)$ es negativo, entonces, se interpreta como una retribución que la firma paga a los consumidores

le otorga a la firma [6]. Si $\alpha = 0$, entonces, la importancia de la firma para el regulador es nula; por el contrario, si $\alpha = 1$, entonces el regulador considera que la firma y a los consumidores son igual de importantes.

2.1.2 Política Óptima

A continuación se plantean dos lemas que ayudan a caracterizar la solución óptima.

Lema 2.1. *Una politica regulatoria* (r, p, q, s) *es factible si y solo si satisface las siguientes condiciones* $\forall\theta \in [\theta_0, \theta_1]$

$$0 \leq r(\theta) \leq 1 \tag{2.3}$$

$$p(\theta) = P(q(\theta)) \tag{2.4}$$

$$\pi(\theta) = \pi(\theta_1) + \int_{\theta}^{\theta_1} r(\tilde{\theta})(c_1 q(\tilde{\theta}) + k_1) d\tilde{\theta} \tag{2.10}$$

$$\pi(\theta_1) \geq 0 \tag{2.11}$$

$$r(\theta)(c_1 q(\theta) + k_1) \geq r(\hat{\theta})(c_1 q(\hat{\theta}) + k_1), \forall\hat{\theta} \geq \theta \tag{2.12}$$

El lema 2.1 proporciona, entonces, una caracterización equivalente para definir una política *factible*. De igual forma, el lema 2.2 permite obtener una expresión equivalente a la función objetivo del regulador. Las pruebas a los lemas 2.1 y 2.2 se encuentran en el apéndice A).

Lema 2.2. *Para cualquier política regulatoria factible, la función de bienestar social dada en la ecuación (9) es igual a:*

[6] Es importante notar que α no puede ser mayor a 1, pues para este modelo se asume que los consumidores nunca tendrán menor importancia que las firmas para el planificador. Esto se puede explicar porque los consumidores tienen menor poder de mercado en comparación a las firmas; entonces, el planificador tiene la tarea de equilibrar este poder.

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} [V(q(\theta)) - (c_0 + c_1 z_\alpha(\theta))q(\theta) - k_0 - k_1 z_\alpha(\theta)]r(\theta)f(\theta)d\theta - (1-\alpha)\pi(\theta_1) \tag{2.13}$$

Donde

$$z_\alpha(\theta) = \theta + (1-\alpha)\frac{F(\theta)}{f(\theta)} \tag{2.14}$$

La expresión (2.13) da alguna idea del procedimiento para poder obtener la política factible óptima del problema del regulador. De hecho, en base a la ecuación de Euler, la cantidad óptima $q^*(\theta)$ se elige al maximizar $V(q(\theta)) - (c_0 + c_1 z_\alpha(\theta))q(\theta)$. Asimismo $r^*(\theta)$ solo puede tomar el valor de 1 o 0 dependiendo del signo del término en corchetes.

Además, para que esta política sea factible, la condición (2.12) tiene que ser satisfecha. Ello implica que $z_\alpha(\theta)$ sea no decreciente; sin embargo, esto no siempre sucede.

Veamos por qué la condición (2.12) implica que $z_\alpha(\theta)$ sea no decreciente; es decir, $z'_\alpha(\theta) \geq 0, \forall\theta$. Supongamos lo contrario, esto es que $z_\alpha(\theta)$ sea decreciente ($z'_\alpha(\theta) < 0, \forall\theta$). La elección de $q^*(\theta)$ implica:

$$\begin{aligned} V'(q(\theta)) - (c_0 + c_1 z_\alpha(\theta)) &= 0 \\ p^*(\theta) &= c_0 + c_1 z_\alpha(\theta) \end{aligned} \tag{*}$$

Dado que $z_\alpha(\theta)$ es decreciente en θ, entonces $p^*(\theta)$ también es decreciente; luego, $q^*(\theta)$ es creciente en θ. Asimismo, se deriva el término $[V(q) - P(q)q]$ respecto a

q y se evalúa en el óptimo

$$\frac{d}{dq}[V(q) - P(q)q] = V^{'}(q) - (P^{'}(q)q + P(q)) = -P^{'}(q*)q* > 0 \qquad (**)$$

Como $q(\theta)$ es creciente en θ, entonces $[V(q^*(\theta)) - P(q^*(\theta))q^*(\theta)]$ es creciente en θ. De este modo, el término en corchetes de la expresión (2.13) $[V(q^*(\theta)) - P(q^*(\theta))q^*(\theta) - (k_0 + k_1 z_\alpha(\theta))]$ es una función creciente en θ, y en consecuencia $r(\theta)$ debe ser no decreciente.

Para dos valores arbitrarios θ y $\hat{\theta}$ tal que $\hat{\theta} > \theta$, se tiene que:

$$r(\hat{\theta})(c_1 q(\hat{\theta}) + k_1) \geq r(\theta)(c_1 q(\theta) + k_1)$$

Lo cual contradice la condición (2.12); por lo tanto $z_\alpha(\theta)$ debe ser no decreciente.

De esta forma, es importante asegurar que $z_\alpha(\theta)$ sea no decreciente en θ. Sin embargo, para ciertas funciones de densidad $f(\theta)$, la expresión $z_\alpha(\theta)$ definida en (2.14) no siempre es no decreciente. Así, a continuación se construye una función que sea siempre no decreciente. Dado $z_\alpha(.)$ de (2.14) sea

$$h_\alpha(\phi) = z_\alpha(F^{-1}(\phi)) \tag{2.15}$$

para cualquier ϕ entre 0 y 1[7]. Además

$$H_\alpha(\phi) = \int_0^\phi h(\tilde{\phi})d\tilde{\phi} \tag{2.16}$$

Luego, sea $\bar{H}_\alpha(.)$ la máxima función convexa en el intervalo $[0, 1]$ que satisface $H_\alpha(\phi) \geq \bar{H}_\alpha(\phi)$ para todo $\phi \in [0, 1]$

$$\bar{H}_\alpha(\phi) = conv H_\alpha(\phi) \tag{2.17}$$

[7]Notar que la función de distribución acumulada $F(\theta)$ es estrictamente creciente, por lo tanto, la inversa de esta función está bien definida

Dado que $\bar{H}_\alpha$ es convexa, entonces es diferenciable en casi todo punto. Así se puede definir

$$\bar{h}_\alpha(\phi) = \bar{H}_\alpha'(\phi) \tag{2.18}$$

Finalmente, sea:

$$\bar{z}_\alpha(\theta) = \bar{h}_\alpha(F(\theta)) \tag{2.19}$$

De esta forma $\bar{z}_\alpha(\theta)$ es una función no decreciente[8]. El siguiente lema aborda la relación entre $\bar{z}_\alpha(\theta)$ y $z_\alpha(\theta)$ (prueba se encuentra en el apéndice A).

Lema 2.3. *Existe una función continua $G_\alpha : [\theta_0, \theta_1] \to \mathbb{R}$ tal que $G_\alpha(\theta) \geq 0$ para todo θ, $\overline{z}_\alpha(\theta)$ es localmente constante si $G_\alpha(\theta) > 0$, y*

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} A(\theta) z_\alpha(\theta) f(\theta) d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} A(\theta) \overline{z}_\alpha(\theta) f(\theta) d\theta - \int_{\theta=\theta_0}^{\theta_1} G_\alpha(\theta) dA(\theta) \tag{2.20}$$

Para cualquiera función monótona $A(.)$. Además $\overline{z}_\alpha(\theta)$ es una función no decreciente en θ, y si $z_\alpha(\theta)$ es una función no decreciente en θ entonces $\overline{z}_\alpha(\theta) = z_\alpha(\theta)$

A continuación se caracteriza a la solución óptima, donde $\bar{p}(\theta)$ y $\bar{q}(\theta)$ se definen como:

$$\bar{p}(\theta) = c_0 + c_1 \bar{z}_\alpha(\theta) \tag{2.21}$$

$$P(\bar{q}(\theta)) = \bar{p}(\theta) \tag{2.22}$$

y $\bar{r}(\theta)$ como:

$$\bar{r}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } V(\bar{q}(\theta)) - \bar{p}(\theta)\bar{q}(\theta) \geq k_0 + k_1 \bar{z}_\alpha(\theta) \\ 0 & \text{si } V(\bar{q}(\theta)) - \bar{p}(\theta)\bar{q}(\theta) < k_0 + k_1 \bar{z}_\alpha(\theta) \end{cases} \tag{2.23}$$

[8]Sean θ' y θ'' tal que $\theta' \geq \theta''$, entonces $F(\theta') \geq F(\theta'')$. Como $\bar{H}_\alpha(.)$ es una función convexa, luego $\bar{H}_\alpha'(F(\theta')) = \bar{h}_\alpha(F(\theta')) \geq \bar{H}_\alpha'(F(\theta'')) = \bar{h}_\alpha'(F(\theta''))$. Así, se tiene que $\bar{z}_\alpha(\theta') \geq \bar{z}_\alpha(\theta'')$

Además, $\bar{s}(\theta)$ queda dado como:

$$\bar{s}(\theta) = [(c_0 + c_1\theta)\bar{q}(\theta) + k_0 + k_1\theta - \bar{p}(\theta)\bar{q}(\theta)]\,\bar{r}(\theta) + \int_{\theta}^{\theta_1} \bar{r}(\tilde{\theta})(c_1\bar{q}(\tilde{\theta}) + k_1)d\tilde{\theta} \tag{2.24}$$

El siguiente teorema justifica que las expresiones (2.21)-(2.24) constituyen la política factible óptima del regulador.

Teorema 2.1. *La política regulatoria* $(\bar{r}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{s})$ *dadas en (2.21)-(2.24) es factible y maximiza la función de bienestar social expresada en (2.9) entre todas las políticas factibles.*

Proof. En primer lugar se muestra que la política descrita en las expresiones (2.21)-(2.24) es **factible**. Para ello usamos la condiciones de factibilidad descritas en el lema 2.1. Se puede observar que (2.3) se satisface, pues de (2.23), $\bar{r}(\theta)$ solo puede tomar dos valores (0 o 1). De igual, forma, la expresión (2.4) se verifica en (2.22).

Para verificar (2.10) y (2.11); reemplazamos la expresión (2.24) en (2.6) para obtener:

$$\pi(\theta) = \int_{\theta}^{\theta_1} \bar{r}(\tilde{\theta})(c_1\bar{q}(\tilde{\theta}) + k_1)d\tilde{\theta} \tag{a}$$

De (a) se obtiene que $\pi(\theta_1) = 0$; luego se satisface la condición (2.11). Asimismo, dado que $\pi(\theta_1) = 0$, la expresión (a), puede ser reescrita como:

$$\pi(\theta) = \pi(\theta_1) + \int_{\theta}^{\theta_1} \bar{r}(\tilde{\theta})(c_1\bar{q}(\tilde{\theta}) + k_1)d\tilde{\theta}$$

De esta forma se garantiza la condición (2.10).

Para mostrar (2.12), se sabe que $\bar{z}_\alpha(\theta)$ es no decreciente, en consecuencia $\bar{p}(\theta)$ es no decreciente (en la expresión (2.21)) y $\bar{q}(\theta)$ es decreciente en θ.

Asimismo, se tiene que el término $[V(q) - P(q)q]$ es no decreciente en q, pues .

$$\frac{d}{dq}[V(q) - P(q)q] = -P'(q)q \geq 0$$

Dado que $\bar{q}(\theta)$ es decreciente en θ y $[V(\bar{q}(\theta)) - P(\bar{q}(\theta))\bar{q}(\theta)]$ es no decreciente en $\bar{q}$. Entonces $[V(\bar{q}(\theta)) - P(\bar{q}(\theta))\bar{q}(\theta)]$ es no creciente en θ. En consecuencia, en (2.23) $\bar{r}(\theta)$ es no creciente en θ.

Para cualquier θ y $\hat{\theta}$ tal que $\hat{\theta} > \theta$, se tiene:

$$c_1\bar{q}(\hat{\theta}) + k_1 \leq c_1\bar{q}(\theta) + k_1$$

Dado que $\bar{r}(\theta)$ es no creciente en θ, cumple que $\bar{r}(\hat{\theta}) \leq \bar{r}(\theta)$. Entonces, con la expresión anterior se obtiene (2.12).

$$\bar{r}(\hat{\theta})(c_1\bar{q}(\hat{\theta}) + k_1) \leq \bar{r}(\theta)(c_1\bar{q}(\theta) + k_1)$$

De esta forma se prueba que la solución planteada en las expresiones (2.21)-(2.24) es un política *factible*.

A continuación se prueba que las expresiones (2.21)-(2.24) maximizan el bienestar social entre todas las políticas factibles; es decir, configuran una solución **óptima**.

Se toma la función creciente $A(\theta) = -r(\theta)(c_1q(\theta) + k_1)$, entonces en (2.20):

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} -r(\theta)(c_1q(\theta) + k_1)z_\alpha(\theta)f(\theta)d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} -r(\theta)(c_1q(\theta) + k_1)\bar{z}_\alpha(\theta)f(\theta)d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta_1} G_\alpha(\theta)dA(\theta) \tag{b}$$

Reescribiendo la función objetivo dado en (2.13)

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} [V(q(\theta)) - c_0q(\theta) - k_0]r(\theta)f(\theta)d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_1} -r(\theta)(c_1q(\theta) + k_1)z_\alpha(\theta)f(\theta)d\theta - (1-\alpha)\pi(\theta_1)$$

Usando la expresión (b)

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} [V(q(\theta)) - c_0 q(\theta) - k_0] r(\theta) f(\theta) d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_1} -r(\theta)(c_1 q(\theta) + k_1)\bar{z}_\alpha(\theta) f(\theta) d\theta$$
$$- \int_{\theta_0}^{\theta_1} G_\alpha(\theta) dA(\theta) - (1-\alpha)\pi(\theta_1)$$

Reordenando los términos se obtiene:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} [V(q(\theta)) - (c_0 + c_1\bar{z}_\alpha(\theta))q(\theta) - k_0 - k_1\bar{z}_\alpha(\theta)] r(\theta) f(\theta) d\theta -$$
$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} G_\alpha(\theta) d[-r(\theta)(c_1 q(\theta) + k_1)] - (1-\alpha)\pi(\theta_1) \quad \text{(c)}$$

Dado que $G_\alpha \geq 0$ y $[-r(\theta)(c_1 q(\theta) + k_1)]$ son no decrecientes [9], por ello la segunda integral de la expresión (c) es no negativa para cualquier política factible. Sin embargo, es puede notar que esta integral es cero para $(\bar{r}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{s})$, ya que $\bar{z}_\alpha(\theta)$, $\bar{q}(\theta)$ y $\bar{r}(\theta)$ son localmente constantes cuando $G_\alpha(\theta) > 0$.

De igual modo, el término $(1-\alpha)\pi(\theta_1)$ es no negativo y afecta de manera negativa a la función objetivo del regulador (expresión c). Así, en el óptimo esta expresión debe ser cero, por ello, $\pi(\theta_1) = 0$.

Además, del primer término de la expresión (c), la condición de Euler exige que el q óptimo debe de satisfacer:

$$0 = V'(\bar{q}(\theta)) - (c_0 + c_1\bar{z}_\alpha(\theta))$$
$$\bar{p}(\theta) = c_0 + c_1\bar{z}_\alpha(\theta)$$

Por otro lado, con el objetivo de maximizar la expresión (c), r toma dos valores, dependiendo el signo del término en corchetes en la primera integral. En consecuencia, si el término en corchetes es negativo, entonces $\bar{r}(\theta) = 0$; por el

[9] Notar que $\frac{\partial}{d\theta}[-r(\theta)(c_1 q(\theta) + k_1)] = -r'(\theta)(c_1 q(\theta) + k_1) - r(\theta)c_1 q'(\theta) \geq 0$, pues $q(\theta)$ y $r(\theta)$ son no crecientes.

contrario, si este término es positivo, entonces $\bar{r}(\theta) = 1$.

$$\bar{r}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } V(\bar{q}(\theta)) - \bar{p}(\theta)\bar{q}(\theta) \geq k_0 + k_1\bar{z}_\alpha(\theta) \\ 0 & \text{si } V(\bar{q}(\theta)) - \bar{p}(\theta)\bar{q}(\theta) < k_0 + k_1\bar{z}_\alpha(\theta) \end{cases}$$

Finalmente, de la expresión (2.10) y $\pi(\theta_1) = 0$, tenemos:

$$\pi(\theta) = \int_\theta^{\theta_1} r(\tilde{\theta})(c_1 q(\tilde{\theta}) + k_1)d\tilde{\theta} \tag{d}$$

Así de la expresión (2.6) se despeja $s(\theta)$ y se usa (d) para obtener:

$$\bar{s}(\theta) = \left[(c_0 + c_1\theta)\bar{q}(\theta) + k_0 + k_1\theta - \bar{p}(\theta)\bar{q}(\theta)\right]\bar{r}(\theta) + \int_\theta^{\theta_1} \bar{r}(\tilde{\theta})(c_1\bar{q}(\tilde{\theta}) + k_1)d\tilde{\theta}$$

□

2.1.3 Análisis de la política óptima

Es útil comparar la solución óptima bajo un contexto de información asimétrica con aquella en donde el regulador tiene información completa acerca del parámetro θ. De esta forma, la solución bajo información completa esta dado por:

$$p(\theta) = c_0 + c_1\theta \text{ , } q(\theta) = P^{-1}(p(\theta)) \tag{2.25}$$

$$r(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } V(q(\theta)) - p(\theta)q(\theta) \geq k_0 + k_1\theta \\ 0 & \text{si } V(q(\theta)) - p(\theta)q(\theta) < k_0 + k_1\theta \end{cases} \tag{2.26}$$

$$s(\theta) = (k_0 + k_1\theta)r(\theta) \tag{2.27}$$

La política propuesta en las expresiones (2.25)-(2.27) no es factible cuando el regulador no conoce el parámetro θ, ya que no se cumple la restricción IC expresada en (2.7). En efecto, si firma del tipo θ declara su verdadero tipo obtiene un beneficio igual a cero, $\pi(\theta) = 0$; sin embargo, si sobreestima sus costos y decide reportar $\hat{\theta}$ tal que $\hat{\theta} > \theta$, obtiene un beneficio mayor que cero. La expresión (2.5) se puede escribir como:

$$\pi(\hat{\theta}, \theta) = \pi(\hat{\theta}) + r(\hat{\theta})(\hat{\theta} - \theta)[c_1 q(\hat{\theta}) + k_1]$$

En esta expresión, el primer término $\pi(\hat{\theta}) = 0$, pues representa al beneficio de la empresa del tipo $\hat{\theta}$ que declara su verdadero tipo. Asimismo, el segundo término de la expresión anterior resulta positiva, ya que $r(\hat{\theta})$, $(\hat{\theta} - \theta)$ y $[c_1 q(\hat{\theta}) + k_1]$ son mayores que cero. De esta forma, se muestra que la empresa con costos θ tiene incentivos para sobreestimar sus costos, ya que de esta forma obtendría un mayor beneficio.

Por otra parte, se puede observar en (2.21)-(2.23) que $\bar{p}$, $\bar{q}$ y $\bar{r}$ dependen de $\bar{z}_\alpha(\theta)$ en la solución bajo información incompleta. En contraste, estos mismos parámetros solo dependen de θ en el modelo bajo información completa. De (2.14), se sabe que $\bar{z}_\alpha(\theta) > \theta$; por ello, la introducción del término $\bar{z}_\alpha(\theta)$ es importante para poder redirigir los incentivos de las firmas y evitar la sobreestimación de los costos. Respecto al subsidio, en un contexto de información completa, este es útil para poder cubrir los costos fijos de la firma; mientras que bajo la perspectiva de información incompleta, el subsidio es un mecanismo para prevenir la subestimación de los costos.

Es importante resaltar que el precio de equilibrio, definida en la expresión (2.21), no depende de la función demanda; sola precisa del parámetro θ que la firma declara. Así, es posible que este precio de equilibrio sea mayor al precio que fija el monopolista en un contexto sin regulación[10]. Por ejemplo, consideremos una

[10] El monopolista sin regulación determina el precio que maximice sus beneficios; esto ocurre, cuando el costo marginal (Cmg) es igual al ingreso marginal (Img)

función de costos sin costos fijos; es decir $k_0 = k_1 = 0$.

$$C(q, \theta) = (c_0 + c_1\theta)q$$

Por consiguiente, el costo marginal es constante $Cmg = c_0 + c_1\theta$. Si la función de demanda es tal que interseca al eje de los precios en un tramo entre Cmg y el precio de equilibrio en información asimétrica $\bar{p}(\theta)$; entonces, el precio de equilibrio del monopolio sin regulación $p^M(\theta)$ sería menor al precio con regulación $\bar{p}(\theta)$.

La explicación de este hecho está basado en los incentivos que genera la política regulatoria bajo información asimétrica. El objetivo del regulador es asegurar que la firma declare que tiene costos bajos cuando los tenga. Para prevenir la sobreestimación de los costos; el regulador premia a la firma (con un subsidio) si declara tener costos bajos y castiga (con un impuesto) si anuncia tener costos altos. Así, una firma de costos altos tiene dos alternativas (i) son tan altos sus costos que no se le permite participar en la industria $(\bar{r}(\theta))$[11] o (ii) si ingresa a la industria, dado este castigo, se le permite cobrar un precio alto para compensar la pérdida de ingresos ocasionada por los impuestos.

2.1.4 Estática comparativa

En adelante se presentan algunas resultados que describen la estática comparativa de los principales parámetros de equilibrio del regulador bajo información incompleta.

En el óptimo, $\bar{p}(\theta)$ es una función no decreciente en θ y $\bar{q}(\theta)$ es una función no creciente. Asimismo se destaca que $\bar{r}(\theta)$ es una función no creciente en θ, pues $[V(\bar{q}(\theta)) - \bar{p}(\theta)\bar{q}(\theta)]$ es no creciente en θ y $[k_0 + k_1\bar{z}_\alpha(\theta)]$ es no decreciente en

[11]Notar que $\bar{r}(\theta)$ es un función no creciente en θ

θ. Sea θ^* el valor crítico, en el cual para cualquier θ tal que $\theta \leq \theta^*$, $r(\theta) = 1$; mientras que para cualquier valor $\theta > \theta^*$, $\bar{r}(\theta) = 0$.

Diferenciando (2.24) en el intervalo en el cual $\bar{r}(\theta) = 1$, se obtiene:

$$\bar{s}'(\theta) = \bar{q}'(\theta)\Big([c_0 + c_1\theta] - [\bar{p}(\theta) + \bar{q}(\theta)\bar{p}'(\theta)]\Big)$$
$$\bar{s}'(\theta) = \bar{q}'(\theta)\Big(Cmg(\bar{q}(\theta)) - Img(\bar{q}(\theta))\Big)$$

Como $\bar{q}'(\theta) \leq 0$, entonces el signo de $\bar{s}'(\theta)$ depende del signo del término en paréntesis. Si $Img(\bar{q}(\theta)) > Cmg(\bar{q}(\theta))$, entonces $\bar{s}(\theta)$ es creciente; por el contrario, si $Img(\bar{q}(\theta)) < Cmg(\bar{q}(\theta))$, entonces $\bar{s}(\theta)$ es decreciente. Una manera alternativa de interpretar este resultado es a través de la comparación entre el precio con regulación $\bar{p}(\theta)$ y el precio sin regulación $p^M(\theta)$. Si $\bar{p}(\theta) > p^M(\theta)$, entonces $\bar{s}(\theta)$ es creciente; en cambio, si $\bar{p}(\theta) < p^M(\theta)$, entonces $\bar{s}(\theta)$ es decreciente.

La diferencia entre $\bar{p}(\theta)$ y $p^M(\theta)$ se da para poder generar incentivos a la firma a no subestimar sus costos, de tal manera que se obtenga un precio cercano al precio del monopolio sin regulación. De esta forma, las firmas con costos altos (o costos bajos) obtendrían un mayor precio (o menor precio). En tanto, $\bar{s}(\theta)$ funciona para compensar esta ganancia (o pérdida) producida por un mayor precio (o menor precio).

A pesar que $\bar{s}(\theta)$ puede ser creciente o decreciente, el beneficio siempre es decreciente en θ cuando $\bar{r}(\theta) = 1$, pues $\bar{r}(.)$ y $\bar{q}(.)$ son funciones no crecientes en θ.

$$\pi'(\theta) = -\bar{r}(\theta)(c_1\bar{q}(\theta) + k_1) \leq 0$$

En tal caso, a la empresa de costos bajos se le permite obtener mayores beneficios para incentivar que esta reporte dichos costos.

Por otro lado, el parámetro α captura la importancia que el regulador le otorga a la firma en comparación al consumidor. Así, resulta importante entender como varía la política óptima en función a este parámetro.

Colorario 2.1. *Para todo $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, $\bar{z}_\alpha(\theta)$ es una función no creciente en α.*

La prueba del colorario 2.1 se encuentra en el apéndice A

A partir del colorario 2.1, $\bar{p}(\theta) = c_0 + c_1\bar{z}_\alpha(\theta)$ resulta ser una función no creciente en α y $\bar{q}(\theta)$ una función no decreciente en α. Asimismo se puede mostrar que $\bar{r}(\theta)$ es una función no decreciente en α. De (2.23), se tiene:

$$\frac{d}{d\alpha}[V(\bar{q}(\theta)) - P(\bar{q}(\theta))\bar{q}(\theta)] = -P'(\bar{q}(\theta))\bar{q}(\theta)\frac{\bar{q}(\theta)}{d\alpha} \geq 0$$

De igual modo, el término $[k_0 + k_1\bar{z}_\alpha(\theta)]$ es no creciente en α. De esta manera, se muestra que $\bar{r}(\theta)$ es no decreciente en α.

Respecto al beneficio, de (2.10) se obtiene:

$$\pi(\theta) = \int_{\theta}^{\theta^*} (c_1\bar{q}(\tilde{\theta}) + k_1)d\tilde{\theta}$$

donde θ^* es el valor crítico; es decir $\theta^* = \max\{\theta : \bar{r}(\theta) = 1\}$. Dado que $\bar{r}(\theta)$ es no decreciente, entonces θ^* es creciente en α. Así, para un θ fijo, el beneficio resulta ser una función creciente en α. De esta manera, a medida que la firma tenga más importancia (esto es α mas grande), los consumidores pagan un mayor precio y las firmas obtienen un mayor beneficio. Por consiguiente, el subsidio óptimo $\bar{s}(\theta)$ es creciente en α, pues es una manera de incrementar sus beneficios (dado que ahora el precio regulado es no creciente en α).

Finalmente, el precio óptimo esperado[12] es:

$$E[\bar{p}(\theta)] = c_0 + c_1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \bar{z}_\alpha(\theta)f(\theta)d\theta$$

[12] la esperanza se toma en función de θ

Si $A(\theta) = 1$ y aplicamos el lema 2.3 se obtiene que $z_\alpha(\theta) = \bar{z}_\alpha(\theta)$, por ello

$$\begin{aligned}
E[\bar{p}(\theta)] &= c_0 + c_1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} z_\alpha(\theta) f(\theta) d\theta \\
E[\bar{p}(\theta)] &= c_0 + c_1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(\theta + (1-\alpha)\frac{F(\theta)}{f(\theta)}\right) f(\theta) d\theta \\
E[\bar{p}(\theta)] &= c_0 + c_1 \left[\int_{\theta_0}^{\theta_1} \theta f(\theta) d(\theta) + (1-\alpha) \int_{\theta_0}^{\theta_1} F(\theta) d\theta\right]
\end{aligned}$$

Aplicando integración por partes a $\int_{\theta_0}^{\theta_1} F(\theta) d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int_{\theta_0}^{\theta_1} F(\theta) d\theta &= (F(\theta)\theta)\Big|_{\theta_0}^{\theta_1} - \int_{\theta_0}^{\theta_1} \theta f(\theta) d\theta \\
&= \theta_1 - E[\theta]
\end{aligned}$$

Entonces $E[\bar{p}(\theta)]$ queda como:

$$E[\bar{p}(\theta)] = c_0 + c_1 (\alpha E[\theta] + (1-\alpha)\theta_1)$$

En esta última expresión, se puede verificar el rol de α en la determinación del precio esperado. Si el regulador no le da importancia a las firma $\alpha = 0$, entonces el precio esperado será igual al costo marginal. Por el contrario, si el regulador valora a la firma y al consumidor en igual nivel de importancia $\alpha = 1$, entonces el precio esperado sera igual al costo marginal esperado.

2.1.5 Ejemplos

Costo fijo conocido y costo marginal desconocido

Para poder ilustrar mejor la política regulatoria óptima se plantea un ejemplo, en el cual, la asimetría de información solo se produce en el costo marginal. Así,

$k_1 = c_0 = 0$ y $c_1 = 1$, entonces la función de costos está dado como:

$$C(q, \theta) = k_0 + \theta q$$

Asimismo, la función de densidad $f(\theta)$ es uniforme en $[\theta_0, \theta_1]$. De esta forma, se tiene:

$$f(\theta) = \frac{1}{\theta_1 - \theta_0}$$

Además, se asume que la función de demanda en lineal, y tiene la siguiente forma:

$$q = P^{-1}(p) = a - bp \text{ donde } b > 0 \text{ y } a > 2b\theta_1$$

En base a estas consideraciones, la función $z_\alpha(.)$ queda dada por:

$$z_\alpha(\theta) = \theta + (1 - \alpha)(\theta - \theta_0)$$

Luego esta función es no decreciente en θ; entonces, por el lema 2.3, $\bar{z}_\alpha(\theta) = z_\alpha(\theta)$. Por ello, $\bar{p}(\theta)$ para todo $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ queda como:

$$\bar{p}(\theta) = \theta + (1 - \alpha)(\theta - \theta_0)$$
$$\bar{p}(\theta) = (2 - \alpha)\theta - (1 - \alpha)\theta_0$$

y $\bar{q}(\theta)$

$$\bar{q}(\theta) = a - b\left[(2 - \alpha)\theta - (1 - \alpha)\theta_0\right]$$

Por otra parte, si se asume que el costo fijo k_0 satisface:

$$V(\bar{q}(\theta_1)) - \bar{p}(\theta_1)\bar{q}(\theta_1) \geq k_0$$

entonces $\bar{r}(\theta) = 1$ para todo $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ y el beneficio para la empresa queda como:

$$\bar{\pi}(\theta) = \int_{\theta}^{\theta_1} \bar{q}(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}$$

el cual es positivo para cualquier valor de $\theta < \theta_1$. En tanto, el subsidio $\bar{s}(\theta)$ es igual a:

$$\bar{s}(\theta) = \int_{\theta}^{\theta_1} \bar{q}(\tilde{\theta})d\tilde{\theta} - ((\bar{p}(\theta) - \theta)\bar{q}(\theta) - k_0)$$

Costo marginal conocido y costo fijo no conocido

En el caso cuando el costo marginal es conocido (es decir $c_1 = k_0 = 0$), pero el costo fijo es desconocido (esto es $k_1 = 1$), la función de costos tiene la siguiente forma:

$$C(q, \theta) = \theta + c_0 q$$

Entonces, $\bar{p}(\theta) = c_0$ y $\bar{q}(\theta) = P^{-1}(c_0)$. De igual modo $\bar{r}(\theta)$ queda dado como:

$$\bar{r}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } V_0 \geq \bar{z}_\alpha(\theta) \\ 0 & \text{si } V_0 < \bar{z}_\alpha(\theta) \end{cases}$$

donde $V_0 = V(P^{-1}(c_0)) - c_0 P^{-1}(c_0)$ representa al excedente del consumidor neto cuando el precio cobrado es igual al costo marginal. Dado que $\bar{z}_\alpha(\theta)$ no decreciente en θ, existe un θ^* que cumple $\theta^* = \bar{z}_\alpha^{-1}(V_0)$. De esta forma, $\bar{r}(\theta)$ puede escribirse como:

$$\bar{r}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \leq \theta^* \\ 0 & \text{si } \theta > \theta^* \end{cases}$$

En tanto, el subsidio $\bar{s}(\theta)$ queda como:

$$\bar{s}(\theta) = \begin{cases} \theta + \int_{\theta}^{\theta^*} d\tilde{\theta} = \theta^* & \text{si } \theta \leq \theta^* \\ 0 & \text{si } \theta > \theta^* \end{cases}$$

y el beneficio $\pi(\theta)$

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \int_{\theta}^{\theta^*} d\tilde{\theta} = \theta^* - \theta & \text{si } \theta \leq \theta^* \\ 0 & \text{si } \theta > \theta^* \end{cases}$$

En este ejemplo, el regulador ofrece pagar θ^* a la empresa si esta produce y vende a un precio igual al costo marginal. La empresa acepta si su costo fijo no supera a θ^*; por el contrario, rechaza la propuesta y no ingresa a operar en la industria.

Por otra parte, la pérdida de eficiencia social (PES) puede tomar tres valores dependiendo del parámetro declarado por la firma y el valor del excedente de los consumidores. En primer lugar, si $\theta \geq V_0 > \theta^*$, entonces la PES es nula, pues al igual que el caso de información incompleta; en un contexto de información completa tampoco es eficiente que la firma produzca. En segundo lugar, si $V_0 > \theta > \theta^*$, bajo la política regulatoria, al firma no produciría; entonces la PES será el excedente neto de los consumidores V_0 menos el subsidio que se le hubiese pagado a la firma en un contexto de información incompleta θ^*. En tercer lugar, si $\theta < \theta^*$, la PES será la diferencia entre el subsidio bajo información incompleta θ^* y el subsidio otorgado en información completa θ (cubre el costo fijo) menos el peso que se le da a firma en la función de bienestar social. De esta forma la PES resulta:

$$PES(\theta) = \begin{cases} (1-\alpha)(\theta^* - \theta) & \text{si } \theta \leq \theta^* \\ V_0 - \theta & \text{si } \theta^* < \theta < V_0 \\ 0 & \text{si } \theta \geq V_0 \end{cases}$$

2.2 Regulación con información asimétrica: demanda desconocida

En esta sección se expone el modelo de regulación propuesto por Lewis and Sappington (1988a), en el cual la fuente de asimetría de información solo se produce en la demanda del bien/servicio transado. En este caso se asume que, en comparación al regulador, la firma tiene mejor información acerca de la demanda del mercado. En efecto, la firma conoce mejor la calidad del producto que comercializa; y dado que este componente es uno de los principales determinantes de la demanda, la empresa puede predecir con más exactitud la cantidad demanda al precio regulado establecido. Otro motivo que explica el conocimiento superior de la empresa acerca de la demanda es que esta puede llevar a cabo estudios de mercado periódicos que le generen un mejor entendimiento de la dinámica de la demanda.

La política regulatoria en un contexto de asimetría de información en la demanda es diferente a la política cuando la asimetría de información se produce en los costos. Cuando el regulador no conoce los costos, la política de precios depende de la información privada que tiene la firma. En consecuencia, se le permite a la empresa tener beneficios positivos y que el precio óptimo pueda ser mayor al costo marginal, de tal forma que se pueda limitar los beneficios de la firma e incrementar el beneficio social.

Por el contrario, cuando la asimetría de información se da en la demanda, la política óptima depende del costo marginal. En caso de que el costo marginal sea creciente, los precios de *primer mejor* son alcanzados. Así, a pesar de que la autoridad para la fijación de precios se le otorgue a la firma, esta puede ser inducida para usar su conocimiento superior de la demanda para obtener el máximo bienestar social. De esta forma, se establece un precio óptimo igual al costo marginal para cualquier nivel de demanda reportado y se implementa un subsidio de tal forma que el beneficio obtenido por la empresa sea nulo. Esta política es suficiente para eliminar los incentivos que tiene la empresa a subestimar o sobreestimar su demanda.

En tanto, cuando el costo marginal es decreciente, el regulador no delega alguna autoridad de precios a la firma; sino que, establece un precio fijo independiente de la demanda reportada. En consecuencia, el precio resulta mayor al costo marginal para realizaciones de demanda pequeñas; y el precio es superior al costo marginal para realizaciones de demanda grandes. Esto sucede, porque es costoso incentivar a la firma a usar su ventaja informacional acerca de demanda en virtud del interés social.

2.2.1 Modelo

El costo de producir q unidades está dado por $C(q)$. En tanto, la función de demanda, que solo es conocida por la firma viene dado por $q = Q(p, \theta)$ donde θ es el parámetro que captura la información asimetría que se genera entre la firma y el regulador.

Si bien el regulador no posee información certera sobre θ, conoce que este parámetro sigue una función de densidad $f(.)$, la cual es estrictamente positiva sobre el intervalo $[\theta_0, \theta_1]$. De esta forma, $f(\theta)$ es de conocimiento común, pero la realización de θ solo es observada por la firma antes de la interacción con el regulador.

Intuitivamente, el parámetro θ representa la intensidad de la demanda. Si θ es grande, entonces cantidad demandada será mayor, independientemente de cuál sea el precio. Por ello, se asume que $Q_\theta(p, \theta) \geq 0$ y que la cantidad demandada y el precio siguen una relación inversa, esto es $Q_p(p, \theta) < 0$. Adicionalmente se asume que:

$$|C''(Q(p,\theta))| < |Q_p(p,\theta)|^{-1}, \forall p,\theta;\ \text{cuando } C''(.) < 0 \tag{A1}$$

Este supuesto significa que la pendiente de la curva de demanda es mayor a la pendiente del costos marginal cuando la empresa tiene costos marginales decrecientes. Desde un punto de vista técnico, este supuesto ayuda a evitar una caracterización de mínimo local en lugar del máximo en el problema del regulador.

El regulador posee dos instrumentos regulatorios: (i) capacidad de establecer un precio por cada unidad vendida, y (ii) entregar un subsidio o transferencia s a las firmas, el mismo que es obtenido de los consumidores. Así, el regulador no controla la cantidad transada directamente. De hecho se asume que supervisar la cantidad vendida resulta muy costoso (por ello, solo la firma tiene información privada de la demanda). Entonces, con el objetivo de asegurar la provisión de la cantidad pactada al precio regulado, el regulador solo necesita invitar a los consumidores a reportar si la firma se niega a ofrecer la cantidad pactada.

El beneficio que obtiene la firma del tipo θ [13], pero declara un parámetro $\hat{\theta}$ es:

$$\pi(\hat{\theta},\theta) = p(\hat{\theta})Q(p(\hat{\theta}),\theta) - C(Q(p(\hat{\theta}),\theta)) + s(\hat{\theta}) \tag{2.28}$$

En caso que la firma declarase su verdadero tipo, el beneficio está dado por:

$$\pi(\theta) = p(\theta)Q(p(\theta),\theta) - C(Q(p(\theta),\theta)) + s(\theta) \tag{2.29}$$

Asimismo, se plantea la restricción IC que asegura que la firma prefiera $\{p(\theta), s(\theta)\}$ a cualquier otra asignación cuando la información privada es θ. Entonces:

$$\pi(\theta) \geq \pi(\hat{\theta},\theta), \quad \forall \theta, \hat{\theta} \in [\theta_0, \theta_1] \tag{2.30}$$

[13] Se distingue a la firma de acuerdo al parámetro que captura la información asimétrica.

En tanto, la restricción IR garantiza que la firma no obtenga beneficios negativos para cualquier asignación precio-transferencia. Así:

$$\pi(\theta) \geq 0 \quad \forall\theta \in [\theta_0, \theta_1] \tag{2.31}$$

Por otro lado, el beneficio obtenido por el consumidor está dado por su excedente neto $V(Q(p,\theta)) - pQ(p,\theta)$ menos el subsidio $s(\theta)$ otorgado a las firmas.

El regulador maximiza el beneficio ponderado de los consumidores y las firmas, dado por:

$$\alpha[V(Q(p,\theta)) - pQ(p,\theta) - s(\theta)] + (1-\alpha)\pi(\theta) \tag{2.32}$$

donde $\alpha \in]0.5, 1]$ representa la importancia que el regulador le otorga a los consumidores; mientras que $1-\alpha$ es la importancia de las firmas. Por lo tanto, el problema del regulador está dado por:

$$\begin{aligned}
\underset{p(\theta),s(\theta)}{max} \quad & \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left\{\alpha[V(Q(p,\theta)) - pQ(p,\theta) - s(\theta)] + (1-\alpha)\pi(\theta)\right\} f(\theta)d\theta \\
\text{s.t.} \quad & \pi(\theta) \geq 0, \qquad \forall\theta \in [\theta_0, \theta_1] \qquad (2.31) \\
& \pi(\theta) \geq \pi(\hat{\theta}, \theta), \quad \forall\theta, \hat{\theta} \in [\theta_0, \theta_1] \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

La siguiente definición presenta la solución en un contexto de información completa o también llamado solución de *primer mejor.* A partir de ello, se mostrará como los resultados cambian cuando el regulador no tiene la capacidad de observar la demanda.

Definición 2.1. *La política de primer mejor consiste en un precio $p^*(\theta)$ y una transferencia $s^*(\theta)$ que satisface las siguientes propiedades para $\forall\theta \in [\theta_0, \theta_1]$*

$$p^*(\theta) = C'(Q(p^*(\theta), \theta)) \tag{2.33}$$

$$s^*(\theta) = C(Q(p^*(\theta), \theta)) - p^*(\theta)Q(p^*(\theta), \theta) \tag{2.34}$$

La política de *primer mejor* maximiza la función de bienestar social. De esta forma, se logra que el precio de equilibrio sea igual al costo marginal y que las empresas no perciban beneficios extraordinarios.

2.2.2 Costos marginales crecientes

En esta sección se mostrará que la política de *primer mejor* puede ser implementada a pesar que el regulador tiene información incompleta acerca de la demanda.

Proposición 2.1. *Si $C''(q) \geq 0 \quad \forall q \geq 0$, entonces la solución al problema del regulador es la política de primer mejor.*

Proof. Se prueba la **factibilidad** de la política de primer mejor. Para cualesquiera $\theta_1, \theta_2 \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ con $\theta_2 > \theta_1$, se define $p_i \equiv p^*(\theta_i)$ y $s_i \equiv s^*(\theta_i)$. Así, la tarea es probar que cuando $\theta = \theta_i$, la firma prefiere $\{p_i, s_i\}$ a cualquier otra asignación p, s . Para ello es suficiente probar que p_i, s_i satisface la restricción IC, esto es que se cumplan las condiciones (a) y (b):

$$\begin{aligned} \pi(\theta_2, \theta_1) &\leq \pi(\theta_1, \theta_1) = 0 \\ p_2 Q(p_2, \theta_1) - C(Q(p_2, \theta_1)) + s_2 &\leq 0 \qquad \text{(a)} \\ \pi(\theta_1, \theta_2) &\leq \pi(\theta_2, \theta_2) = 0 \\ p_1 Q(p_1, \theta_2) - C(Q(p_1, \theta_2)) + s_1 &\leq 0 \qquad \text{(b)} \end{aligned}$$

Caso 1: $Q(p_1, \theta_1) = Q(p_1, \theta_2)$

Se quiere mostrar que $p_1 = p_2$. Supongamos lo caso contrario; es decir, $p_1 \gtrless p_2$, entonces $Q(p_2, \theta_2) \gtrless Q(p_1, \theta_2)$. Dado que los costos marginales son crecientes, se cumple que $C'(Q(p_2, \theta_2)) \gtrless C'(Q(p_1, \theta_2))$.

Asimismo de la política de primer mejor se tiene $p_1 = C'(Q(p_1, \theta_1)) = C'(Q(p_1, \theta_2)) \lesseqgtr C'(Q(p_2, \theta_2)) = p_2$, donde la segunda igualdad ocurre por el supuesto del caso 1

$(Q(p_1,\theta_1) = Q(p_1,\theta_2))$. Así $p_1 \lesseqgtr p_2$, lo que lleva a una contradicción, luego $p_1 = p_2$. Dado que $\pi(\theta_1,\theta_1) = 0$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= C(Q(p_1,\theta_1)) - p_1 Q(p_1,\theta_1) \\
s_1 &= C(Q(p_1,\theta_2)) - p_1 Q(p_1,\theta_2) \\
s_1 &= C(Q(p_2,\theta_2)) - p_2 Q(p_2,\theta_2) \\
s_1 &= s_2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\pi(\theta_1,\theta_1) = \pi(\theta_2,\theta_1)$ y $\pi(\theta_2,\theta_2) = \pi(\theta_1,\theta_2)$ para cualquier $\theta_1,\theta_2 \in [\underline{\theta},\bar{\theta}]$, y en consecuencia, se satisface la restricción IC.

Caso 2: $Q(p_1,\theta_1) < Q(p_1,\theta_2)$

Este caso implica que $p_1 \leq p_2$. Supongamos lo contrario; es decir, $p_1 > p_2$. Ello implica que $Q(p_2,\theta_2) > Q(p_1,\theta_2)$. Dado que los costos marginales son crecientes, entonces $C'(Q(p_2,\theta_2)) > C'(Q(p_1,\theta_2))$

Dada la política de primer mejor y los costos marginales crecientes

$$p_1 = C'(Q(p_1,\theta_1)) < C'(Q(p_1,\theta_2)) < C'(Q(p_2,\theta_2)) = p_2$$

Así se obtiene una contradicción, por lo tanto $p_1 \leq p_2$.

Como $p_2 > p_1$ implica que $C'(Q(p_2,\theta_2)) > C'(Q(p_1,\theta_1))$. Así, $Q(p_2,\theta_2) > Q(p_1,\theta_1) > Q(p_2,\theta_1)$. De esta forma, otra manera de escribir la expresión (a), donde $\pi(\theta_2, \theta_1) - \pi(\theta_1, \theta_1) \leq 0$ se da de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&p_2 Q(p_2, \theta_1) - C(Q(p_2, \theta_1)) + C(Q(p_2, \theta_2)) - p_2 Q(p_2, \theta_2) \leq 0 \\
&p_2[Q(p_2, \theta_1) - Q(p_2, \theta_2)] \leq C(Q(p_2, \theta_1)) - C(Q(p_2, \theta_2)) \\
&p_2 \geq \frac{C(Q(p_2, \theta_2)) - C(Q(p_2, \theta_1))}{Q(p_2, \theta_2) - Q(p_2, \theta_1)} \\
&C'(Q(p_2, \theta_2)) \geq \frac{C(Q(p_2, \theta_2)) - C(Q(p_2, \theta_1))}{Q(p_2, \theta_2) - Q(p_2, \theta_1)} \qquad \text{(c)}
\end{aligned}$$

Del mismo modo la desigualdad (b) se puede reescribir como:

$$C'(Q(p_1, \theta_1)) \leq \frac{C(Q(p_1, \theta_2)) - C(Q(p_1, \theta_1))}{Q(p_1, \theta_2) - Q(p_1, \theta_1)} \qquad \text{(d)}$$

Las expresiones (c) y (d) se cumplen, $\forall \theta$ con $\theta_2 > \theta_1$ si y solo si, $C''(q) \geq 0, \forall \theta$; es decir la función de costos es convexa, la cual es condición de la proposición 2.1.

Caso 3: $Q(p_1, \theta_1) > Q(p_1, \theta_2)$

Este caso implica que $p_1 \geq p_2$. Como $p_1 > p_2$ implica que $C'(Q(p_1, \theta_1)) > C'(Q(p_2, \theta_2))$. Así, $Q(p_1, \theta_1) > Q(p_2, \theta_2) > Q(p_1, \theta_2)$. Por ello, las desigualdades (a) y (b) se pueden reexpresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
C'(Q(p_2, \theta_2)) &\leq \frac{C(Q(p_2, \theta_2)) - C(Q(p_2, \theta_1))}{Q(p_2, \theta_2) - Q(p_2, \theta_1)} \qquad \text{(d)} \\
C'(Q(p_1, \theta_1)) &\geq \frac{C(Q(p_1, \theta_2)) - C(Q(p_1, \theta_1))}{Q(p_1, \theta_2) - Q(p_1, \theta_1)} \qquad \text{(e)}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (d) y (e) se cumplen $\forall \theta$ con $\theta_2 > \theta_1$ si y solo si, $C''(q) \geq 0, \forall \theta$; es decir la función de costos es convexa, la cual es condición de la proposición 2.1.

De esta forma, se demuestra que la política de *primer mejor* es factible y es la política que maximiza la función de bienestar social entre todas las políticas factibles. □

La proposición 2.1 muestra que el regulador puede alcanzar los resultados de *primer mejor*, incluso si no tiene información de la demanda. Así, el regulador solo tendría que preguntar a la firma acerca de la función de demanda e implementar la política regulatoria de *primer mejor*. La firma, por su parte, no tiene incentivos en sobreestimar (o subestimar) la demanda, pues si bien este comportamiento le permite obtener un mayor precio y con ello un mayor beneficio; el nivel de transferencia (o impuesto) que recibe (o paga) reduciría su beneficio.

La figura 2.1 muestra el caso donde $Q_\theta(p,\theta) > 0, \forall p, \theta$ y $q_{ij} = Q(p(\theta_i), \theta_j)$. Si la firma tiene información que la demanda esta dada por $\theta = \theta_2$ y reporta θ_1, entonces el precio regulado se fija en $p(\theta_1) \equiv p_1$. Dado que $p_1 < p_2$, se genera una pérdida en los ingresos dado por las áreas A, B, D, E, F y G. Respecto a las transferencia se produce una ganancia dada por las áreas A, B y D. Por lo tanto, la firma obtiene una pérdida neta expresadas en las áreas E, F y G. De esta forma, prefiere la asignación $\{p^*(\theta_2), s^*(\theta_2)\}$ respecto a $\{p^*(\theta_1), s^*(\theta_1)\}$.

De igual forma, si la firma que tiene información privada de la demanda dado por $\theta = \theta_1$ y reporta θ_2, entonces el precio regulado se fija en $p(\theta_2) = p_2$. Desde que $p_1 < p_2$ se genera una ganancia en los ingresos dado por el área A, y a la vez una pérdida en los ingreso expresado por el área J. Respecto a las transferencia, se produce una pérdida dada por las áreas A, B y D. Por lo tanto, si la firma eligiese $\{p^*(\theta_2), s^*(\theta_2)\}$ obtendría una pérdida dada por las áreas B, D y J. De esta forma, prefiere la asignación $\{p^*(\theta_1), s^*(\theta_1)\}$ a $\{p^*(\theta_2), s^*(\theta_2)\}$.

Costos marginales decrecientes

Para esta sección se asume que para realizaciones de θ más altos le corresponde una mayor demanda independientemente de cuál sea el nivel de precio. De esta forma, se asume que $Q_\theta(p,\theta) > 0, \forall p, \theta$. Un supuesto adicional establece *la propiedad de cruzamiento simple* (SC por sus siglas en inglés); la cual implica que cuanto mayor sea la demanda, la firma está dispuesta a sacrificar una mayor

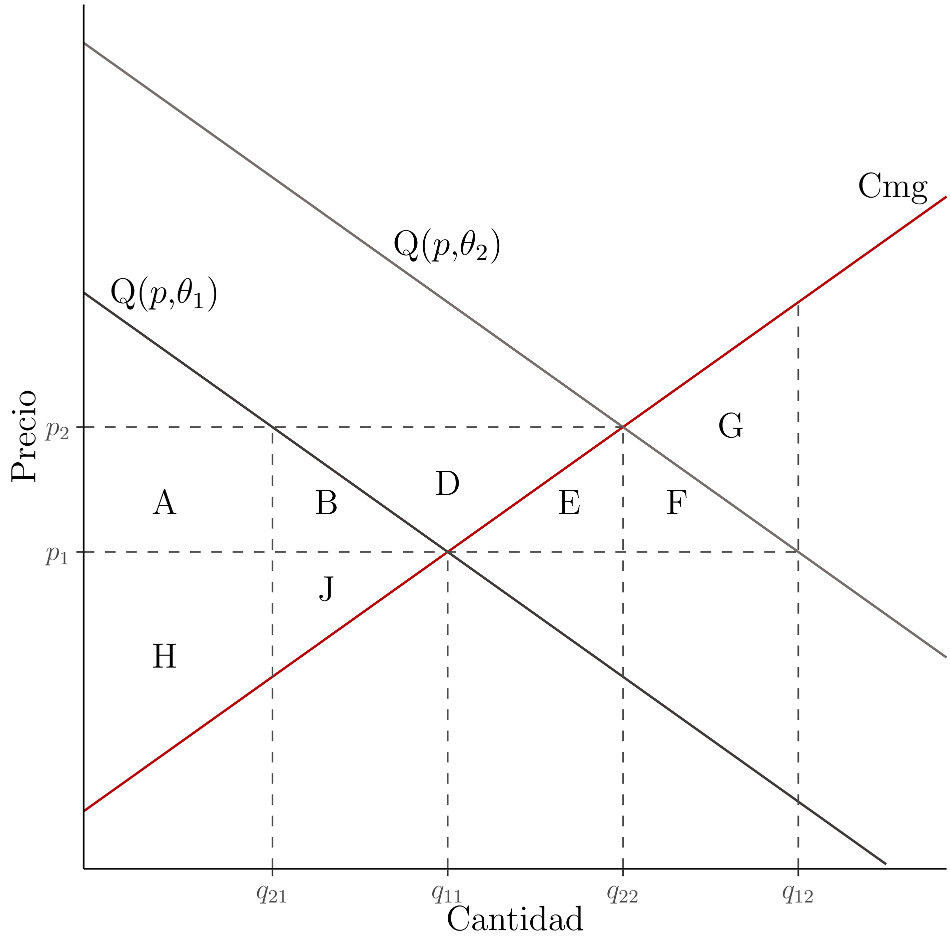

Figure 2.1: Incentivos cuando los costos marginales son crecientes

transferencia a cambio de obtener un mayor precio. Formalmente, la propiedad SC se define como:

Definición 2.2. *La propiedad cruzamiento simple (SC)*[14]*, ocurre si la tasa marginal de sustitución precio-transferencia* $\frac{\pi_p(p,\theta)}{\pi_s(p,\theta)} = \pi_p(p,\theta)$ *es monótona pero no constante en* $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$*, donde* $\pi(p,\theta) = pQ(p,\theta) - C(Q(p,\theta)) + s$

Por otra parte, cabe indicar que cuando los costos marginales son decrecientes, la política regulatoria de *primer mejor* no constituye una política factible, pues no satisface la restricción IC. De hecho, la política de *primer mejor* sugiere que a medida que la demanda se incrementa, el precio sea menor (pues los costos

[14]Geométricamente, la propiedad SC significa que cualquier par de curvas de nivel isobeneficio en el plano $p - s$ (correspondiente a dos realizaciones θ) se intersecan máximo una vez

marginales son decrecientes) y la transferencia otorgada sea mayor. Sin embargo, dada la condición SC, la firma prefiere tener un precio más alto, en lugar de una generosa transferencia cuando la demanda es alta. Así, la empresa tiene incentivo para subestimar el reporte de la demanda cuando esta es alta.

Definición 2.3. *Un esquema de precio-transferencia, $\{p(\theta), s(\theta)\}$, es compatible con incentivos si satisface la restricción IC y la restricción IR.*

A continuación se establece una condición suficiente para el cumplimiento de la condición SC.

Lema 2.4. *Si $Q_{p\theta}(p,\theta) = 0, \forall\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ y $p \geq 0$, entonces se cumple SC*

El lema 2.4 (la prueba se encuentra en el apéndice A) asegura que si la información privada acerca de la demanda solo afecta la posición de la demanda, mas no la forma (esto es, la pendiente de la demanda), entonces la propiedad SC es satisfecha[15].

El siguiente lema muestra que si la propiedad SC ocurre (en un contexto de costos marginales decrecientes) el precio tiene que ser no decreciente. Esta característica no es satisfecha cuando la política regulatoria es de *primer mejor.* Por el contrario, esta última política sugiere que los precios sean decrecientes en θ.

Lema 2.5. *Dada una política compatible con incentivos, si ocurre SC entonces $p'(\theta) \geq 0$.*

La intuición detrás del lema 2.5 (la prueba se encuentra en el apéndice A) muestra que si el regulador quiere inducir a la firma a cobrar un menor precio ($p_2 < p_1$) cuando la demanda es alta ($\theta = \theta_2$), entonces tiene que entregar una mayor transferencia ($s_2 > s_1$), de tal modo que compense la pérdida de beneficio causado por un menor precio. Dado que la propiedad SC ocurre, entonces cuanto mayor

[15]En este caso, se trata de desplazamientos paralelos de la curva de demanda.

sea la demanda, mayor será el subsidio que el regulador tiene que transferir a la firma. Así, el costo de crear incentivos para reducir el precio se incrementa a medida que la demanda es más alta.

La siguiente proposición anuncia la solución óptima del problema del regulador cuando los costos marginales son decrecientes.

Proposición 2.2. *Supongamos que $C''(q) < 0, \forall q \geq 0$ y SC ocurre. Entonces, en la solución del problema del regulador, el precio (y transferencia) implementado es constante e independiente de la demanda.*

Proof. Dado que la propiedad SC ocurre, a partir del lema 2.5, se conoce que para cualquier política *compatible con incentivos*, $p'(\theta) \geq 0, \forall \theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Sea $p(\theta)$ una solución propuesta que resuelve el problema del regulador y $p^*(\theta)$ una política de *primer mejor.*

En base a $C''(q) < 0, \forall q \geq 0$, entonces se presentan dos casos (i) ambos esquemas se intersecan en al menos un punto en $[\theta_0, \theta_1]$ y (ii) ambas políticas no se cruzan en ningún punto del dominio $[\theta_0, \theta_1]$.

Sea $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ el punto donde ambas políticas de precios se intersecan, entonces $p^{*\prime}(\theta) = C''(Q(p^*(\theta), \theta)) < 0$ y $p(\theta) \geq 0$.

Respecto al primer caso, sea $\theta^0 \in [\theta_0, \theta_1]$ un punto donde ambas políticas de precios se intersecan, entonces $p(\theta^0) = p^*(\theta^0)$.

Se propone un esquema $\{p^R, s^R\}, \forall \theta \in [\theta_0, \theta_1]$ tal que:

$$p^R(\theta) \equiv p^*(\theta^0) = p(\theta^0) \qquad s^R(\theta) \equiv -p(\theta^0)Q(p(\theta^0), \theta^0) + C(Q(p(\theta^0), \theta^0))$$

Por lo tanto, el objetivo es mostrar que $\{p^R(\theta), s^R(\theta)\} \succeq \{p(\theta), s(\theta)\}, \forall \theta \in [\theta_0, \theta_1]$; es decir, siempre es posible encontrar un política de precios (constantes) de tal modo que la firma prefiera esta política a otra política que sea diferente al resultado de *primer mejor*.

En primer lugar, se prueba que $\{p^R(\theta), s^R(\theta)\}$ es factible; esto es, que cumpla las restricciones IC y IR. Vemos que:

$$\pi(\hat{\theta}, \theta) = p^R(\hat{\theta})Q(p^R(\hat{\theta}), \theta) - C(Q(p^R(\hat{\theta}), \theta)) + s^R(\hat{\theta})$$
$$\pi(\theta, \theta) = p^R(\theta)Q(p^R(\theta), \theta) - C(Q(p^R(\theta), \theta)), \theta)) + s^R(\theta)$$

Ahora, como $s^R(\hat{\theta}) = s^R(\theta)$ y $p^R(\hat{\theta}) = p^R(\theta)$. Entonces $\pi(\hat{\theta}, \theta) = \pi(\theta, \theta)$, así cumple la restricción de IC.

En tanto, para la verificar que la política $\{p^R(\theta), s^R(\theta)\}$ satisface la restricción IR, se tiene que:

$$\pi(\theta, \theta) = p^R(\theta)Q(p^R(\theta), \theta) - C(Q(p^R(\theta), \theta)) + s^R(\theta)$$
$$\pi(\theta, \theta) = p(\theta^0)Q(p(\theta^0), \theta) - C(Q(p(\theta^0), \theta)) + s^R(\theta)$$
$$\pi(\theta, \theta) = \pi(\theta^0, \theta) \tag{a}$$

Dado que la función de costos es $C(.)$ es cóncava, entonces:

$$C(Q(p(\theta^0), \theta)) \leq C(Q(p(\theta^0), \theta^0)) + C'(Q(p(\theta^0), \theta^0))\Big[Q(p(\theta^0), \theta) - Q(p(\theta^0), \theta^0)\Big]$$

Multiplicamos por -1, sumamos $p(\theta^0)Q(p(\theta^0), \theta)$ y $s^R(\theta^0)$, se obtiene

$$\pi(\theta^0, \theta) \geq -C(Q(p(\theta^0), \theta^0)) + C'(Q(p(\theta^0), \theta^0))\Big[Q(p(\theta^0), \theta^0) - Q(p(\theta^0), \theta)\Big] + p(\theta^0)Q(p(\theta^0), \theta) + s^R(\theta^0)$$

$$\pi(\theta^0, \theta) \geq -C(Q(p(\theta^0), \theta^0)) + p(\theta^0)\Big[Q(p(\theta^0), \theta^0) - Q(p(\theta^0), \theta)\Big] + p(\theta^0)Q(p(\theta^0), \theta) + s^R(\theta^0)$$

$$\pi(\theta^0, \theta) \geq -C(Q(p(\theta^0), \theta^0)) + p(\theta^0)Q(p(\theta^0), \theta^0) + s^R(\theta^0)$$
$$\pi(\theta^0, \theta) \geq \pi(\theta^0, \theta^0) = 0$$

Entonces, considerando (a) obtenemos que la política $\{p^R(\theta), s^R(\theta)\}$, satisface la restricción IR; es decir $\forall\theta \in [\theta_0, \theta_1], \pi(\theta,\theta) = \pi(\theta) \geq 0$

Ahora, dado que $\{p^R(\theta), s^R(\theta)\}$ es una política factible, entonces basta mostrar que esta política es preferible a $\{p(\theta), s(\theta)\}$.

Se denota $R(\theta,\theta) \equiv p(\theta)Q(p(\theta),\theta) - C(Q(p(\theta),\theta))$. Entonces, la función objetivo del regulador puede expresarse como:

$$=\alpha[V(Q(p(\theta),\theta)) - p(\theta)Q(p(\theta),\theta) - s(\theta)] + (1-\alpha)\pi(\theta,\theta)$$
$$=\alpha[V(Q(p(\theta),\theta)) - p(\theta)Q(p(\theta),\theta) - s(\theta)] + (1-\alpha)\pi(\theta,\theta) + \alpha R(\theta,\theta) - \alpha R(\theta,\theta)$$
$$=\alpha[V(Q(p(\theta),\theta)) - C(Q(p(\theta),\theta))] - (2\alpha-1)\pi(\theta,\theta)$$

Por consiguiente, el problema del regulador se puede reescribir como:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \{\alpha[V(Q(p(\theta),\theta)) - C(Q(p(\theta),\theta))] - (2\alpha-1)\pi(\theta,\theta)\} f(\theta)d\theta \qquad \text{(b)}$$

A continuación se muestra que la política p^R genera un mayor excedente social que la política p para cualquier valor de $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$.

Si $\theta = \theta^0$, ambos esquemas dan lugar al mismo beneficio, pues $p^R(\theta) = p(\theta)$

Si $\theta \in [\theta_0, \theta^0\rangle$. Como $p(.)$ es creciente en θ (por el lema 2.5) se tiene que:

$$\theta < \theta^0$$
$$p(\theta) < p(\theta^0) = p^R(\theta)$$

En tanto, la política de *primer mejor* sugiere que un aumento en θ da lugar a una disminución en p^* (precio de *primer mejor*). Así:

$$\theta < \theta^0$$
$$p^*(\theta) > p^*(\theta^0) = p^R(\theta)$$

Entonces, se tiene $p(\theta) < p^R(\theta) < p^*(\theta)$. Dado que el primer término de la función objetivo $V(.) - C()$ alcanza un máximo global con el esquema del *primer mejor* $p^*(\theta)$[16] . Entonces, el esquema $p^R(\theta)$ otorga un mayor beneficio que el esquema $p(\theta)$, pues este último está mucho más distanciado del precio de primer mejor.

Si $\theta \in [\theta^0, \theta_1]$. Dado que $p(.)$ es creciente y el costo marginal es decreciente (precio de primer mejor) en θ. Entonces se tiene:

$$p(\theta) > p(\theta^0) = p^*(\theta^0) = p^R(\theta) > p^*(\theta)$$

Dado que el primer término de la función objetivo $V(.) - C(.)$ se maximiza con el esquema de primer mejor $p^*(\theta)$. Entonces, el esquema $p^R(\theta)$ otorga un beneficio mayor que el esquema $p(\theta)$, pues este último está mucho más distanciado del precio de primer mejor $p^*(\theta)$.

De esta forma, se muestra que el valor $[V(.) - C(.)]$ obtenido por la política $p^R(\theta)$ produce un mayor valor en comparación a la política $p(\theta)$.

Ahora, se mostrará que el beneficio que obtiene la firma es mayor con la política $p^R(\theta)$, en comparación a lo obtenido con $p(\theta)$. Así, se evidencia que la función de bienestar social es mayor con la política $p^R(\theta)$ respecto a la política $p(\theta)$.

Diferenciando los beneficios obtenidos con la política $p(\theta)$ respecto a θ, se obtiene:

$$\begin{aligned} \pi_\theta(p, \theta) = {} & p'(\theta)Q(p(\theta), \theta) + p(\theta)\left[Q_p(Q(p(\theta), \theta))p'(\theta) + Q_\theta(p(\theta), \theta)\right] \\ & - C'(Q(p(\theta), \theta))\Big[Q_p(Q(p(\theta), \theta))p'(\theta) + Q_\theta(p(\theta), \theta)\Big] + s'(\theta) \end{aligned} \tag{c}$$

Por otra parte, la firma para elegir el parámetro $\hat{\theta}$ a reportar, resuelve el problema

[16] La derivada de $[V(.) - C(.)]$ respecto al $p(\theta)$ resulta $\frac{d}{dp(\theta)}\left[V(Q(p(\theta), \theta)) - C(Q(p(\theta), \theta))\right] = Q_p\left[p(\theta) - C'(Q(p(\theta), \theta))\right]$. Por condición del modelo se tiene que $Q_p < 0$. Además, se sabe que la expresión $[V(.) - C(.)]$ alcanza su máximo valor cuando $\frac{d}{dp}\left[V(.) - C(.)\right] = 0$; es decir, cuando $p(\theta) = C'(Q(p(\theta), \theta))$. Este resultado se produce bajo el esquema de primer mejor $p^*(\theta)$.

$\pi(\theta,\theta) = \max_{\hat{\theta}} \pi(\hat{\theta},\theta)$, entonces las condiciones de primer orden implican que:

$$0 = p'(\hat{\theta})Q(p(\hat{\theta}),\theta) + p(\hat{\theta})Q_p(p(\hat{\theta}),\theta)p'(\hat{\theta}) - C'(.)Q_p(p(\hat{\theta}),\theta)p'(\hat{\theta}) + s'(\hat{\theta})$$

Dado que la política $p(\theta)$ satisface la restricción IC, la firma elige $\hat{\theta} = \theta$, entonces

$$0 = p'(\theta)Q(p(\theta),\theta) + p(\theta)Q_p(p(\theta),\theta)p'(\theta) - C'(.)Q_p(p(\theta),\theta)p'(\theta) + s'(\theta)$$

Usando esta expresión en (c) se obtiene:

$$\pi_\theta(p,\theta) = [p(\theta) - C'(Q(p(\theta),\theta))]\, Q_\theta(p(\theta),\theta) \tag{d}$$

Si $\theta < \theta^0$, implica que $Q(p(\theta^0),\theta) < Q(p(\theta^0),\theta^0)$. Como el $C''(.) < 0$, entonces $C'\left(Q\left(p(\theta^0),\theta\right)\right) > C'\left(Q\left(p(\theta^0),\theta^0\right)\right)$. Luego $C'\left(Q\left(p^R(\theta),\theta\right)\right) > p^R(\theta)$, y así, en (d) se obtiene que $\pi_\theta(p,\theta) < 0$; es decir el beneficio es decreciente en θ.

De igual manera, si $\theta > \theta^0$, implica que $Q\left(p(\theta^0),\theta\right) > Q\left(p(\theta^0),\theta^0\right)$. Como el $C''(.) < 0$, entonces $C'\Big(Q(p(\theta^0),\theta)\Big) < C'\left(Q\left(p(\theta^0),\theta^0\right)\right)$. Luego $C'\left(Q\left(p^R(\theta),\theta\right)\right) < p^R(\theta)$, y así, en (d) se obtiene que $\pi_\theta(p,\theta) < 0$; es decir el beneficio es creciente en θ.

De esta forma, si $\pi(\theta)$ es decreciente hasta θ^0 y creciente después de θ^0. Así, el beneficio alcanza un mínimo en θ^0. Asimismo, a partir de (d) se sabe que la tasa de decrecimiento (o crecimiento) cuando $\theta < \theta^0$ (o $\theta > \theta^0$), es proporcional a la brecha entre el precio y el costo marginal (precio de *primer mejor*). Como, esta brecha es menor bajo la política de precios p^R [17], entonces, para cualquier θ, el beneficio es menor con $p^R(\theta)$ respecto a lo obtenido con $p(\theta)$.

Por lo tanto, tomando en consideración el beneficio social, la política $p^R(\theta)$ es preferible a la política $p(\theta)$, pues no solo confiere un mayor valor al exedente del

[17] Si $\theta < \theta^0$, entonces $p^* > p^R > p(\theta)$; mientras que si $\theta > \theta^0$, entonces $p^* < p^R < p(\theta)$. En cualquier caso, la diferencia entre el precio propuesto p^R y el precio de primer mejor p^* es menor que la diferencia entre el precio creciente p y el precio de primer mejor p^* , $|p^R - p^*| < |p - p^*|$

consumidor, sino que también limita el beneficio de las firmas (la cual afecta de manera negativa a la función objetivo del planificador).

Hasta aquí se ha discutido el caso donde la política de precios $p(\theta)$ y $p^*(\theta)$ se cruzan al menos en un punto. **A continuación, se analiza el caso la política $p(\theta)$ está encima (o debajo) del precio de primer mejor $p^*(\theta)$ en todo el dominio** $[\theta_0, \theta_1]$. Se propone una política $p^R(\theta) = p^*(\theta_0)$ $(p^*(\theta_1))$ y $s^R(\theta) = -p(\theta_0)Q(p(\theta_0), \theta_0) + C(Q(p(\theta_0), \theta_0))$ (o $-p(\theta_1)Q(p(\theta_1), \theta_1) + C(Q(p(\theta_1), \theta_1))$ en el caso que $p(\theta)$ este por debajo de $p^*(\theta)$). La idea es mostrar que la política $\left\{p^R, s^R\right\}$ es factible y preferible a la política $\{p, s\}$ (en el sentido que se logra un mayor bienestar social).

Para probar la factibilidad, se debe verificar la restricción IC. En efecto:

$$\pi(\hat{\theta}, \theta) = p^R(\hat{\theta})Q(p^R(\hat{\theta}), \theta) - C(Q(p^R(\hat{\theta}), \theta)) + s^R(\hat{\theta})$$
$$\pi(\theta, \theta) = p^R(\theta)Q(p^R(\theta), \theta) - C(Q(p^R(\theta), \theta)), \theta)) + s^R(\theta)$$

Dado que $p^R(\hat{\theta}) = p^R(\theta)$ y $s^R(\hat{\theta}) = s^R(\theta)$; entonces $\pi(\hat{\theta}, \theta) = \pi(\theta, \theta)$, luego se satisface la condición (IC).

Asimismo, para la verificación de la restricción IR se sigue el mismo procedimiento que el caso anterior. Se puede mostrar que:

$$\pi(\theta, \theta) = \pi(\theta_0, \theta)$$

Como la función de costos es cóncava, se cumple que:

$$C(Q(p^R(\theta_0), \theta)) \leq C(Q(p^R(\theta_0), \theta_0)) + C'(Q(p^R(\theta_0), \theta_0)) \left[Q(p^R(\theta_0), \theta) - Q(p^R(\theta_0), \theta_0)\right]$$

Multiplicamos por -1 y sumamos $p^R(\theta_0)Q(p^R(\theta_0),\theta)$ y $s^R(\theta)$, se obtiene:

$$\pi(\theta_0,\theta) \geq -C(Q(p^R(\theta_0),\theta_0)) + p^R(\theta_0)Q(p^R(\theta_0),\theta_0) + s^R(\theta_0)$$
$$\pi(\theta_0,\theta) \geq -C(Q(p^*(\theta_0),\theta_0)) + p^*(\theta_0)Q(p^*(\theta_0),\theta_0) + s^*(\theta_0) = 0$$

Así, como $\pi(\theta,\theta) = \pi(\theta_0,\theta)$, entonces $\pi(\theta,\theta) \geq 0$, luego se satisface la restricción IR, y por lo tanto la política $\left\{p^R, s^R\right\}$ es factible.

Para probar que la política $\left\{p^R, s^R\right\}$ es preferible a $\{p, s\}$, se conoce que $p(\theta) > p^R(\theta) > p^*(\theta), \forall\theta \in [\theta_0,\theta_1]$ si $p(\theta)$ esta por encima de $p^*(\theta)$ (o $p(\theta) < p^R(\theta) < p^*(\theta)$ si $p(\theta)$ esta por debajo de $p^*(\theta)$).En base a que el primer término en la expresión (b) $V(.) + R(.)$ alcanza un máximo global con el esquema de precios de *primer mejor*, entonces con la política $P^R(\theta)$ se obtiene un mayor valor, pues está más cerca que el precio de *primer mejor*.

Por otro lado, en la expresión (d), el beneficio es estrictamente creciente (o decreciente) pues $C'(Q(p^R(\theta_0),\theta_0)) < p^R(\theta)$ (o $C'(Q(p^R(\theta_0),\theta_0)) > p^R(\theta)$). Esta tasa de crecimiento (o decrecimiento) es proporcional a la brecha entre el precio y el costo marginal. Dado que esta brecha es menor bajo la política de precios $p^R(\theta)$, entonces para cualquier θ, el beneficio es menos con $p^R(\theta)$ respecto a lo obtenido con $p(\theta)$.

Por lo tanto, la política $\left\{p^R, s^R\right\}$ es preferible a $\{p, s\}$ y así, siempre es posible encontrar una política de precios constantes que sea preferible a cualquier otra política que satisface la propiedad SC de forma estricta. □

Cuando los costos marginales son crecientes, la firma está dispuesta a usar su información privada de la demanda para implementar el resultado socialmente preferido; es decir, establecer un precio igual al costo marginal. En ese escenario, el papel del regulador se limita a conferir el control absoluto de precios a la firma. Por el contrario, cuando los costos marginales son decrecientes, los intereses de la firma no coinciden con el interés social. En efecto, resulta bastante costoso para el regulador inducir a la firma que use su ventaja informacional para aproximarse al resultado que maximiza el bienestar social. Ante ello, de acuerdo al resultado de la proposición 2.2, el regulador opta por una política en base a la información imperfecta de la estructura de la demanda; esto es, una política de precios constantes e independiente de la demanda.

2.3 Regulación del tipo *riesgo moral* con costos estocásticos

A diferencia de las anteriores secciones, en este apartado se desarrollará un modelo de regulación en un contexto de información asimétrica del tipo *riesgo moral*. En esta clase de modelos, la asimetría de información se produce *ex post al contrato*; es decir, el regulador conoce la función de costos (o demanda) de la firma, pero no puede observar las acciones (por ejemplo, el esfuerzo) de la firma una vez que se le es permitido operar en la industria. En ese sentido, el regulador tiene por objetivo diseñar una política óptima con el propósito de establecer los incentivos correctos para que la acción no observable se lleve a cabo de manera óptima (por ejemplo, que la firma realice el esfuerzo óptimo).

Laffont and Tirole (1986) discuten un modelo en donde el regulador puede observar el costo realizado; sin embargo, la función de costos no solo depende de la cantidad producida, sino también del esfuerzo ejercido por la firma y un componente aleatorio. Así, se asume que el regulador no puede observar el parámetro de eficiencia ni el componente aleatorio. En contraste, la firma conoce su parámetro de eficiencia antes del contrato; y después del contrato, elige óptimamente el nivel de esfuerzo y la cantidad a producir, que conjuntamente con la realización del componente aleatorio configura el costo realizado que el regulador si puede observar. Cabe destacar que el componente aleatorio es necesario para que el regulador no pueda inferir directamente a acción a partir del costo realizado. Por lo tanto, usando el reporte del parámetro de eficiencia y el costo realizado, el planificador tiene por objetivo diseñar una política que proporcione los incentivos necesarios para que la firma pueda realizar el esfuerzo óptimo (aquel que maximice el bienestar social).

Los principales resultados de este modelo de *riesgo moral* es que la cantidad de producción y el nivel de esfuerzo ejercido por la firma resultan menores respecto a los obtenido en condiciones información completa. Esto se produce porque el regulador solo puede reembolsar una parte de los costos incurridos por la empresa, ya que tiene información incompleta acerca de esta. En consecuencia, la firma tiene incentivos para ejercer un menor nivel de esfuerzo para reducir la cantidad producida, y con ello los costos incurridos.

Respecto a la implementación de la solución óptima, es importante indicar que el componente aleatorio en la función de costos, implica un reto importante en la ejecución de la solución óptima. En efecto, si este componente no existiera, el esquema de implementación se resumiría en tres pasos: (i) preguntar a la firma acerca de sus parámetro de eficiencia; (ii) Fijar la cantidad óptima a producir en base a lo reportado por la firma; y (iii) entregar el subsidio óptimo si el costo realizado es igual al costo óptimo proyectado (en base al parámetro de eficiencia declarado por la empresa) y no entregar un subsidio si no se da este escenario. No obstante; la aleatoriedad en los costos involucra que el costo realizado no necesariamente sea igual al costo óptimo proyectado; y por lo tanto, el regulador podría estar castigando a una empresa que si se esforzó óptimamente, pero que el componente aleatorio elevó sus costos.

En ese sentido, se muestra que la solución óptima, en un contexto de costos aleatorios y asimetría de información, puede ser implementada mediante un esquema de incentivos lineal a los costos observados. Este esquema consiste en un pago de una suma fija, determinado antes de la firma del contrato; y una reembolso que cubre una fracción de los costos incurridos. Esta fracción es inversamente relacionado con el pago fijo y decrece con la cantidad producida y/o el nivel de esfuerzo ejercido por la firma. La lógica detrás de esta dinámica se sostiene en que las firmas de costos bajos son los que más producen; y en consecuencia, pueden soportar que el regulador cubra una menor fracción de sus costos a cambio de un mayor pago fijo. De esta forma, la firma tiene incentivos para ejercer un mayor nivel de esfuerzo a fin de disminuir sus costos y obtener mayores beneficios.

2.3.1 Modelo

El costo de producir una q unidades está dado por:

$$C = (\theta - e)q + \varepsilon \tag{2.35}$$

Donde $e \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ representan el nivel de esfuerzo y el costo marginal inicial de la firma, respectivamente. Asimismo de ε es una variable aleatoria con media cero y denota al componente aleatorio de la función de costos. Se asume que este error es independiente de los parámetros y las variables de elección del modelo.

Además, se asume que el producto no es comercializable por la firma; es decir, la empresa no obtiene ingresos por este producto (esto es semejante a la producción de un bien público). Sin embargo, la producción sí produce un beneficio para los consumidores, capturado por el excedente del consumidor $V(q)$ $(V' > 0, V'' < 0)$. El regulador puede observar el costo realizado y reembolsar la totalidad del costo incurrido por la firma, y además entrega una transferencia o subsidio t. Por lo tanto, el beneficio de la firma está dado por:

$$U = E[t] - \varphi(e) \tag{2.36}$$

Donde $\varphi(.)$ representa la desutilidad del esfuerzo, el cual tiene $\varphi^{'}(e) > 0$ y $\varphi^{''}(e) > 0$ para cualquier $e > 0$. Es importante destacar que, si bien un mayor nivel de esfuerzo ,ejercido por la firma, genera una disminución de los costos realizados (ver la expresión (2.35)); también representa un costo para la firma, ya que incide negativamente en sus beneficios (ver la expresión (2.36)). De esta forma, para la sociedad, un mayor nivel de esfuerzo es deseable; pero esta decisión no necesariamente está dentro de los intereses de la firma. Es así, que el regulador tiene la tarea de brindar los incentivos necesarios para lograr un *esfuerzo óptimo* que sea beneficioso para la sociedad (consumidores y firmas).

Por otra parte, el beneficio neto de los consumidores está dado por:

$$V(q) - (1+\lambda)E[t+C] \tag{2.37}$$

Donde $(1+\lambda)$ representa el costo social de recaudar una unidad monetaria con $\lambda > 0$ [18]. Dado que el regulador reembolsa la totalidad de los costos y además entrega un subsidio, entonces la recaudación total será $E[t+C]$. Por ello, el costo total de la recaudación está dado por $(1+\lambda)E[t+C]$, el mismo que afecta de manera negativa al beneficio del consumidor.

El regulador, utilitarista, maximiza el beneficio que obtienen los consumidores y la firma otorgando igual importancia a ambos agentes. Entonces la función objetivo del regulador está dado por:

$$V(q) - (1+\lambda)E[t+C] + U$$

Usando la definición del costo C de la expresión (2.35); la función objetivo se

[18] El parámetro λ se puede interpretar como el costo social de recaudar impuestos y se mide como una proporción de lo que se quiere recaudar. Por ejemplo, si el regulador planea recaudar 100 unidades tributarias; además de esta cantidad, la distorsión del mercado genera un costo de $\lambda(100)$

puede expresar como:

$$V(q) - (1+\lambda)E[t + (\theta - e)q + \varepsilon] + U$$

Se suma y resta λU, y se usa el hecho que $E[\varepsilon] = 0$, entonces se tiene:

$$V(q) - (1+\lambda)E[t + (\theta - e)q] + U - \lambda U + \lambda U$$

A continuación se usa la definición de U para obtener:

$$\begin{aligned} &V(q) - (1+\lambda)\{E[t] + (\theta - e)q - E[t] + \varphi(e)\} - \lambda U \\ &V(q) - (1+\lambda)\{\varphi(e) + (\theta - e)q\} - \lambda U \end{aligned}$$

2.3.2 Información Simétrica

En un contexto de información simétrica, el planificador puede observar C y e. Por lo tanto, el problema del regulador queda como:

$$\begin{aligned} &\underset{q,e,U}{max} \quad \{V(q) - (1+\lambda)(\varphi(e) + (\theta - e)q) - \lambda U\} \\ &\text{s.t.} \quad U \geq 0, \end{aligned} \tag{2.38}$$

Donde $U \geq 0$ representa la restricción IR. Las condiciones de primer de este problema establecen que:

$$U = 0 \tag{2.39}$$

$$V'(q) = (1+\lambda)(\theta - e) \tag{2.40}$$

$$\varphi'(e) = q \tag{2.41}$$

La expresión (2.39) indica que la restricción (IR) se satisface con igualdad, dado que U afecta de manera negativa a la función objetivo del regulador, por lo tanto, en el óptimo, esta debería tomar el menor valor de U[19]. En tanto, la expresión (2.40) muestra que el beneficio marginal social $V^{'}(q)$ debe ser igual al costo marginal social de la producción $(1+\lambda)(\theta-e)$. Igualmente, la expresión (2.41) señala que la desutilidad marginal del esfuerzo $\varphi^{'}(e)$ es igual a la utilidad marginal (esto es, la disminución marginal del costo q).

Para garantizar que la solución al problema (2.38) exista y sea única, se establece los siguientes supuestos:

$$V'(0) > (1+\lambda)\left(\theta_1 - \frac{1}{\varphi'(0)}\right) \tag{S1}$$

$$\varphi'(\theta_0) > \bar{q} \quad \text{donde } \bar{q} \text{ está definido por } V'(\bar{q}) = 0 \tag{S2}$$

$$-V''(q)\left(\varphi''\left(\frac{1}{\varphi'(q)}\right)\right) > (1+\lambda) \tag{S3}$$

El supuesto (S1) sugiere que incluso cuando la producción es nula, el beneficio bruto marginal de los consumidores no es tan pequeño. En tanto, el supuesto S2 establece que es muy costoso (en términos de esfuerzo) reducir el costos marginal a cero, independiente del nivel del costo marginal inicial. Finalmente, el supuesto S3 es una condición suficiente para garantizar la convexidad del problema (2.38).

2.3.3 Información Asimétrica

En un contexto de información asimétrica, el regulador no puede observar el esfuerzo que ejerce la firma. De hecho, el regulador solo puede observar el costo realizado C y la cantidad producida q. En base a estos parámetros *observables*, el regulador diseñará una política regulatoria óptima. De esta forma, el objetivo de esta sección, es caracterizar y estudiar los mecanismos basados en la observabilidad de q y C.

[19] En línea con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, se obtiene $\lambda U = 0$. Dado que $\lambda > 0$, entonces $U = 0$

Si bien, el regulador no puede observar el costo marginal inicial θ (parámetro de eficiencia) ni el nivel de esfuerzo e de la firma; se asume que el regulador conoce que θ se distribuye de manera uniforme sobre $[\theta_0, \theta_1]$ y tiene conocimiento sobre la función objetivo de la firma.

Este modelo se puede ver como un juego de dos etapas. En la primera etapa, el regulador pregunta a la firma acerca de su parámetro de productividad θ. Luego, la firma elige óptimamente el parámetro θ a declarar. En la segunda etapa, a partir del *principio de revelación*, el regulador premia a la firma en función al parámetro θ declarado y el costo observado C, $t(\theta, C)$. Adicionalmente, el regulador establece la cantidad producida $q(\theta)$ en base al parámetro θ que le ha sido reportado.

A continuación se caracteriza las **asignaciones implementables** $\{q(\theta), t(\theta, C)\}$ como asignaciones que inducen a la firma a reportar su verdadero parámetro θ y que a partir de la transferencia $t(\theta, C)$, incentivar a la firma elegir el nivel de esfuerzo óptimo.

Sean:

$$C(\theta) = (\beta + e(\theta))q(\theta)$$
$$s(\theta) = E[t(\theta, C(\theta) + \varepsilon)]$$

el costo y la transferencia esperada, respectivamente.

Problema de la firma

En equilibrio, la firma del tipo $\hat{\theta}$ debe elegir $\left\{\theta = \hat{\theta}, e = e(\hat{\theta})\right\}$ maximizando su función de utilidad $\left\{E[t(\theta, (\hat{\theta} - e)q(\theta) + \varepsilon)] - \varphi(e)\right\}$.

Una desviación a la estrategia óptima $\left\{\hat{\theta}, e(\hat{\theta})\right\}$ para la firma del tipo $\hat{\theta}$ sería

$\left\{\theta, \tilde{e}(\theta|\hat{\theta})\right\}$, en la cual la empresa anuncia θ y ejerce un nivel de esfuerzo dado por $\tilde{e}\left(\theta|\hat{\theta}\right) \equiv e(\theta) + \hat{\theta} - \theta$. Así, el *conjunto de desviaciones* está dado por $D = \left\{\theta, \tilde{e}(\theta|\hat{\theta})\right\}$. Es importante notar que este conjunto incluye $\{\theta, e(\theta)\}$. Entonces, el problema de la firma del tipo $\hat{\theta}$ se puede escribir como:

$$\max_{\theta \in [\theta_0, \theta_1]} \quad U(\theta|\hat{\theta}) = s(\theta) - \varphi\Big(\tilde{e}(\theta|\hat{\theta})\Big) \tag{2.42}$$

Las condiciones de primer orden de este problema establecen que:

$$\dot{s}(\theta) - \varphi^{'}(\tilde{e}(\theta|\hat{\theta}))\dot{\tilde{e}}(\theta|\hat{\theta}) = 0 \tag{2.43}$$

Si la firma declara su verdadero parámetro, es decir $\theta = \hat{\theta}$ y considerando $\tilde{e}\left(\theta|\hat{\theta}\right) \equiv e(\theta) + \hat{\theta} - \theta$, entonces la expresión (2.43) puede escribirse como:

$$\dot{s}(\theta) - \varphi^{'}(e(\theta))(\dot{e}(\theta) - 1) = 0 \tag{2.44}$$

En tanto, para obtener las condiciones de segundo orden, se diferencia la expresión (2.43) respecto a θ y se obtiene

$$\ddot{s}(\theta) - \varphi''(\tilde{e}(\theta|\hat{\theta}))\dot{\tilde{e}}(\theta|\hat{\theta})^2 - \varphi'(\tilde{e}(\theta|\hat{\theta}))\ddot{\tilde{e}}(\theta|\hat{\theta})$$

Dada esta expresión, se usa $\tilde{e}\left(\theta|\hat{\theta}\right) \equiv e(\theta) + \hat{\theta} - \theta$ para obtener:

$$\ddot{s}(\theta) - \varphi''(\tilde{e}(\theta|\hat{\theta}))[\dot{e}(\theta) - 1]^2 - \varphi'(\tilde{e}(\theta|\hat{\theta}))\ddot{e}(\theta)$$

Evaluando esta expresión en $\theta = \hat{\theta}$ se obtiene

$$\ddot{s}(\hat{\theta}) - \varphi''(e(\hat{\theta}))[\dot{e}(\hat{\theta}) - 1]^2 - \varphi'(e(\hat{\theta}))\ddot{e}(\hat{\theta}) \tag{2.45}$$

La expresión (2.44) cumple para todo θ, entonces, en particular cumple para $\hat{\theta}$.

Así, esta expresión puede escribirse como:

$$\dot{s}(\hat{\theta}) - \varphi^{'}(e(\hat{\theta}))(\dot{e}(\hat{\theta}) - 1) = 0$$

Diferenciando esta última expresión respecto a $\hat{\theta}$, se obtiene

$$\ddot{s}(\hat{\theta}) - \varphi''(e(\hat{\theta}))(\dot{e}(\hat{\theta}))(\dot{e}(\hat{\theta}) - 1) - \varphi^{'}(e(\hat{\theta}))\ddot{e}(\hat{\theta}) = 0 \tag{2.46}$$

Usando (2.46) en (2.45) se obtiene:

$$\varphi''(e(\hat{\theta}))(\dot{e}(\hat{\theta}) - 1)$$

Para que $\theta = \hat{\theta}$ sea un máximo y (2.44) sea una condición suficiente, entonces:

$$\varphi''(e(\hat{\theta}))(\dot{e}(\hat{\theta}) - 1) \leq 0$$

Dado que $\varphi'' > 0$, así la condición suficiente para garantizar un máximo local es:

$$\dot{e}(\theta) \leq 1, \forall \theta \in [\theta_0, \theta_1] \tag{2.47}$$

La siguiente proposición afirma que la condición expuesta en la expresión (2.47) no solo garantiza que la elección de $\theta = \hat{\theta}$ sea un máximo local, sino que este también resulta ser un máximo global.

Proposición 2.3. *La condición local de segundo orden dado en la expresión (2.47), implica que la condición global de segundo orden es satisfecha.*

Proof. En primer lugar, se prueba que si $\frac{d}{d\theta}U$ es (estrictamente) monótona en $\hat{\theta}$, entonces la condición local de segundo orden implica una condición global.

La condición local de segundo orden implica que $\hat{\theta}$ es un máximo local para la firma tipo $\hat{\theta}$. Por contradicción, se asume que $\hat{\theta}$ no es un máximo global; es decir, existe $\theta \neq \hat{\theta}$ que maximiza la función $U(.)$. De este modo θ también debe de satisfacer la condición de primer orden; y por lo tanto se tiene:

$$\frac{d}{d\theta}U(\theta/\hat{\theta}) = \frac{d}{d\theta}U(\hat{\theta}/\hat{\theta}) = 0$$

Ello implica que:

$$\frac{d}{d\theta}U(\theta/\hat{\theta}) = \frac{d}{d\theta}U(\theta/\theta) = 0$$

Esto contradice el hecho que $dU(.)/d\theta$ es monótona en su segundo argumento. Por lo tanto, si $\frac{d}{d\theta}U$ es (estrictamente) monótona en $\hat{\theta}$, entonces la condición local de segundo orden implica una condición global.

En segundo lugar, se muestra que $\frac{d^2}{d\theta d\hat{\theta}}U$ es (estrictamente) positiva si la condición local de segundo orden es satisfecha (es decir la expresión (2.47)). Diferenciado (2.43) respecto a $\hat{\theta}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}U &= \dot{s}(\theta) - \varphi'(\tilde{e}(\theta|\hat{\theta}))(\dot{e}(\theta) - 1) \\
\frac{d}{d\theta d\hat{\theta}}U &= -\varphi''(\tilde{e}(\theta|\hat{\theta}))\frac{d\tilde{e}(\theta|\hat{\theta})}{d\hat{\theta}}(\dot{e}(\theta) - 1) \\
\frac{d}{d\theta d\hat{\theta}}U &= -\varphi''(\tilde{e}(\theta|\hat{\theta}))(\dot{e}(\theta) - 1) \geq 0
\end{aligned}$$

pues, $\varphi''(.) > 0$ y por (2.47) $\dot{e}(\theta) \leq 1$.

De esta forma, se garantiza que $\frac{d}{d\theta}U$ es una función no decreciente en $\hat{\theta}$ (por ello monótona). Por lo tanto, como se cumple la condición local de segundo orden, entonces ello implica que la condición global también es satisfecha. $\square$

La expresión (2.47) implica que el costo medio esperado sea decreciente respecto a θ. De la expresión (2.35) se obtiene el costo medio esperado $Cme(\theta) = \theta - e(\theta)$, luego $\partial Cme(\theta)/\partial\theta = 1 - \dot{e}(\theta) \leq 0$, ya que la expresión (2.47) garantiza que $\dot{e}(\theta) \leq 1$

Finalmente, sea $U(\theta) = s(\theta) - \varphi(e(\theta))$ la utilidad de equilibrio de la firma θ que declara su verdadero tipo. Diferenciando respecto a θ, se obtiene:

$$\dot{U}(\theta) = \dot{s}(\theta) - \varphi'(e(\theta))(\dot{e}(\theta) - 1)$$

Así, una manera alternativa de escribir la expresión (2.44) es:

$$\dot{U}(\theta) = -\varphi'(e(\theta)) \tag{2.48}$$

A continuación se presenta una proposición que resume los principales resultados del problema de optimización de la firma:

Proposición 2.4. *Los resultados pueden resumirse en:*

(i) Si las opciones del conjunto D (conjunto de desviaciones) no son rentables, entonces las funciones del esfuerzo, transferencia y utilidad son diferenciables en casi todo punto

(ii) La restricción IC dado por (2.48) es una condición suficiente si la función del esfuerzo satisface (2.47).

Para probar esta proposición, se anuncia algunos lemas previos. El lema 2.6 establece que una firma con costos caracterizado por $\hat{\theta}$ declara al regulador tener un menor costo, entonces esta tiene que realizar un mayor esfuerzo. De esta forma, se garantiza que la firma no tenga incentivos para subestimar sus costos (La prueba a este lema se encuentra en el apéndice A).

Lema 2.6. *Si $\theta < \hat{\theta}$; entonces $\tilde{e}(\theta/\hat{\theta}) \geq \tilde{e}(\hat{\theta}/\hat{\theta})$*

En tanto, el lema 2.7 (prueba se encuentra en el apéndice A) muestra que mientras más alto sea el parámetro de costos reportado por la firma, el nivel esfuerzo ejercido será mayor.

Lema 2.7. *La función* $\tilde{e}(\theta/\hat{\theta})$ *es no creciente en* θ

El lema 2.7 garantiza que $\tilde{e}(\theta|\hat{\theta})$ diferenciable en casi todo punto en θ. Entonces la función del esfuerzo $e(\theta) = \tilde{e}(\theta|\hat{\theta}) + \Big(\theta - \hat{\theta}\Big)$ es diferenciable en casi todo punto.

Lema 2.8. *La función* $U(\theta/\hat{\theta})$ *es no decreciente en* $[\theta_0, \hat{\theta}]$ *y no creciente en* $[\hat{\theta}, \theta_1]$

Lema 2.9. $s(\theta)$ *es una función no creciente en* θ.

Las pruebas de los lemas 2.8 2.9 se encuentran en el apéndice A.

Entonces, la prueba de la primera parte de la proposición 2.4 se usan los lemas 2.7 y 2.9. De hecho, en base al lema 2.7, $\tilde{e}(.)$ es una función monótona no creciente, entonces $\tilde{e}(.)$ (y por ello también e) es una función diferenciable en casi todo punto. Del mismo modo, por el lema 2.9 sigue que $s(.)$ es una función monótona no creciente, entonces $s()$ diferenciable en casi todo punto. Luego, como la utilidad $U(.)$ está definida en función de $e(.)$ y $s(.)$, entonces $U(.)$ es también diferenciable en casi todo punto.

La prueba a la segunda parte de la proposición 2.4 se analizó en las párrafos precedentes(ver prueba de la proposición 2.3).

Problema del regulador

El regulador no puede observar el parámetro θ, pero conoce que este parámetro se distribuye de manera uniforme sobre $[\theta_0, \theta_1]$. Asimismo se asume que el regulador es utilitarista, por lo tanto, para cualquier θ, su función objetivo está dado por:

$$V(q(\theta)) - (1 + \lambda)E[t(\theta, C) + C] + U$$

Usando las definiciones de C y U, la función objetivo del regulador puede escribirse como:

$$V(q(\theta)) - (1+\lambda)E[t(\theta,C) + (\theta - e(\theta))q(\theta) + \varepsilon] + E[t(\theta,C)] - \varphi(e(\theta))$$
$$V(q(\theta)) - (1+\lambda)E[(\theta - e(\theta))q(\theta) + \varepsilon] - \lambda E[t(\theta,C)] - \varphi(e(\theta))$$

Sumando y restando $\lambda\varphi(e(\theta))$

$$V(q(\theta)) - (1+\lambda)E[(\theta - e(\theta))q(\theta) + \varepsilon] - \lambda E[t(\theta,C)] - \varphi(e(\theta)) - \lambda\varphi(e(\theta)) + \lambda\varphi(e(\theta))$$
$$V(q(\theta)) - (1+\lambda)E[\varphi(e(\theta)) + (\theta - e(\theta))q(\theta) + \varepsilon] - \lambda\{E[t(\theta,C)] - \varphi(e(\theta))\}$$
$$V(q(\theta)) - (1+\lambda)E[\varphi(e(\theta)) + (\theta - e(\theta))q(\theta) + \varepsilon] - \lambda U$$

Entonces, el problema del regulador (P) está dado por:

$$\begin{aligned}
max \quad & E\left\{\int_{\theta_0}^{\theta_1} [V(q(\theta)) - (1+\lambda)(\varphi(e(\theta)) + (\theta - e(\theta))q(\theta) + \varepsilon) - \lambda U]d\theta\right\} \\
\text{s.t.} \quad & \dot{U}(\theta) = -\varphi'(e(\theta)) && (2.48) \\
& \dot{e}(\theta) \leq 1 && (2.47) \\
& U(\theta) \geq 0, \forall\theta
\end{aligned}$$

donde las expresiones (2.48) y (2.47) representan la condiciones de primer y segundo orden del problema de la firma. El cumplimiento de estas condiciones asegura que la firma revele su verdadero parámetro θ, es decir se satisface la restricción IC. En tanto, la condición $U(\theta) \geq 0$ representa la restricción IR.

El supuesto del modelo establece que $\varphi'(.) > 0$; esto indica que cuanto mayor sea el esfuerzo ejercido por la firma, mayor será la desutilidad que obtiene por esa decisión. Es así que de la expresión (2.48) se tiene $\dot{U}(\theta) = -\varphi'(e(\theta)) < 0$; en consecuencia, se muestra que $U(.)$ es una función estrictamente decreciente en θ. Entonces, para garantizar la restricción IR es suficiente establecer que $U(\theta_1) = 0$, pues para cualquier $\theta < \theta_1$, $U(\theta) > 0$.

De esta forma, se puede plantear un problema simplificado (P') de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&max \quad E\left\{\int_{\theta_0}^{\theta_1} [V(q(\theta)) - (1+\lambda)(\varphi(e(\theta)) + (\theta - e(\theta))q(\theta) + \varepsilon) - \lambda U]d\theta\right\} \\
&\text{s.t.} \qquad \dot{U}(\theta) = -\varphi'(e(\theta)) \qquad (2.48)\\
&\qquad\qquad U(\theta_1) = 0, \qquad (2.49)
\end{aligned}
$$

A diferencia del problema original P, la condición de suficiencia (2.47) no aparece. Así, los resultados del problema P' deben verificar ex-post la restricción (2.47). El problema (P') es un problema de optimización dinámica, donde U es la variable de estado, mientras que e y q son las variables de control.

La siguiente proposición plantes la condiciones de primer orden para el problema (P').

Proposición 2.5. *Las condiciones necesarias para el problema (P') son:*

$$U(\theta_1) = 0 \qquad (2.49)$$

$$\dot{U}(\theta) = -\varphi'(e(\theta)) \qquad (2.48)$$

$$V'(q) = (1+\lambda)(\theta - e) \qquad (2.50)$$

$$\varphi'(e) = q - \frac{\lambda}{1+\lambda}(\theta - \theta_0)\varphi''(e) \qquad (2.51)$$

Proof. Para un mejor entendimiento de la demostración de la proposición 2.5 se escribe $\dot{q}$ (o $\dot{e}$ o $\dot{U}$) para referirse la la derivada de este q (o e o U) respecto de θ.

En primer lugar, para derivar las condiciones necesarias para el problema (P') se plantea el hamiltoniano H.

$$H = [V(q) - (1+\lambda)(\varphi(e) - (\theta - e)q) - \lambda U] + \mu(-\varphi'(e))$$

Entonces, estas condiciones están dadas por:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = V'(q) - (1+\lambda)(\theta - e) = 0 \tag{a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial e} = -(1+\lambda)(\varphi'(e) - q) - \mu\varphi''(e) = 0 \tag{b}$$

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial U} = \lambda \tag{c}$$

$$\mu(\theta_0) = 0 \tag{d}$$

Integrando (c) y usando (d) se obtiene:

$$\mu = \lambda(\theta - \theta_0) \tag{e}$$

Luego, se reeemplaza la expresión (e) en (b) para obtener:

$$\begin{aligned} -(1+\lambda)(\varphi'(e) - q) &= \lambda(\theta - \theta_0)\varphi''(e) \\ \varphi'(e) &= q - \frac{\lambda}{1+\lambda}(\theta - \theta_0)\varphi''(e) \end{aligned} \tag{2.51}$$

Por otras parte, de (a) se obtiene (2.50)

$$V'(q) = (1+\lambda)(\theta - e) \tag{2.50}$$

En tanto, las condiciones (2.49) y (2.48) se obtiene de las restricciones del problema (P').

En segundo lugar se verifican que estas condiciones también son suficientes. A partir de (2.50) y (2.51), se garantiza que las funciones q y e son diferenciables, pues $\varphi''(.)$ es diferenciable. Asimismo, se puede verificar que la función H es lineal en su variable de estado U, luego H es cóncava en U. De esta forma, por el teorema de Arrow, se prueba que las condiciones necesarias también son suficientes. □

Las expresiones (2.50) y (2.51) determinan la cantidad $q^*(\theta)$ y el esfuerzo $e^*(\theta)$

óptimos. En tanto, de las expresiones (2.48) y (2.49) se puede obtener la utilidad de equilibrio:

$$U^*(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \varphi'(e^*(\delta))d\delta$$

Adicionalmente, la transferencia esperada se determina en: $s^*(\theta) = U^*(\theta) + \varphi(e^*(\theta))$

Del problema (P') al poblema (P)

La proposición 2.5 establece las condiciones necesarias para resolver el problema P'. Sin embargo, aún no se conoce si estas condiciones resuelven también el problema P. Para ello, es necesario verificar que las expresiones de la proposición 2.5 cumplan la condición $\dot{e}(\theta) \leq 1$

Derivando la expresión (2.50) respecto de θ, se obtiene

$$V''\dot{q} = (1+\lambda) - (1+\lambda)\dot{e} \tag{2.52}$$

Del mismo modo, se deriva la expresión (2.51) respecto a θ.

$$\varphi''\dot{e} = \dot{q} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\varphi'' + (\theta-\theta_0)\varphi'''\dot{e}\right)$$

Reordenando se obtiene:

$$\left(\varphi'' + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\theta-\theta_0)\varphi'''\right)\dot{e} - \dot{q} = -\frac{\lambda}{1+\lambda}\varphi'' \tag{2.53}$$

La expresión (2.52) en (2.53) se tiene:

$$\left(\varphi'' + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\theta-\theta_0)\varphi'''\right)\dot{e} - \frac{(1+\lambda)(1-\dot{e})}{V''} = -\frac{\lambda}{1+\lambda}\varphi''$$

Factorizando $\dot{e}$

$$\left(\varphi'' + \frac{1+\lambda}{V''} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\theta-\theta_0)\varphi'''\right)\dot{e} = \frac{1+\lambda}{V''} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\varphi'' \tag{2.54}$$

En la expresión (2.54) se puede notar que el término $\left[\varphi'' + \frac{1+\lambda}{V''}\right] > 0$ por el supuesto (S3). Asimismo, el término $\frac{\lambda}{1+\lambda}(\theta-\theta_0) > 0$, pues $\lambda > 0$ y $\theta - \theta_0 > 0$. En tanto, la parte izquierda de la expresión (2.54) es negativo, ya que $V'' \leq 0$ y $\varphi'' > 0$. De este modo, si $\varphi''' > 0$, entonces $\dot{e} < 0$ y así cumple la condición (2.47).

Estos resultados se resumen en la siguientes proposición:

Proposición 2.6. *Cuando $\varphi''' > 0$, entonces $\dot{e} < 0$ y la condición de segundo orden es satisfecha. Por lo tanto, la solución del problema (P') es también solución del problema (P).*

Implementación

Desde un punto de vista normativo, el regulador necesita encontrar una forma de implementar los resultados de la política regulatoria óptima dados en la proposición 2.5. Para ello, debe encontrar una función de transferencia explícita $t(\theta, C)$ que lleve a la práctica su política regulatoria.

Sea la $\Big(e^*(\theta), q^*(\theta), U^*(\theta), S^*(\theta), c^*(\theta)\Big)$ la solución óptima al problema (P').

Si la función de costos no tuviese una componente aleatorio, es decir $\varepsilon = 0$, entonces la implementación se daría en tres pasos: (i) el regulador pregunta a la firma acerca del parámetro θ, (ii) se elige $q^*(\theta)$ y (iii) el regulador entrega una transferencia a la firma de $s^*(\theta)$ si el costo observado es igual al costo óptimo $C = C^*(\theta)$ o una penalidad $s = -\infty$ si el costo observado difiere del costo óptimo $C \neq C^*(\theta)$.

Sin embargo, la presencia del parámetro aleatorio en la función de costos $\varepsilon \neq 0$ provoca que la regla de implementación descrita en el anterior párrafo no necesariamente premia el esfuerzo óptimo de la firma. En efecto, la firma puede haber ejercido un esfuerzo óptimo y aún así el costo observado puede ser alto, debido al parámetro aleatorio. De esta forma, siguiendo la regla de implementación anterior, el regulador debe penalizar a la firma, pues es probable que el costo observado C difiera del costo óptimo $C^*(\theta)$. Este mecanismo de incentivos puede provocar que la firma desista a participar en la industria, a pesar que su participación es socialmente deseable.

Así, el objetivo es encontrar una función $t(\theta, C)$ tal que para la firma tipo $\hat{\theta}$, la opción $\left(\hat{\theta}, e^*(\hat{\theta})\right)$ sea óptima; es decir, debe resolver:

$$\underset{\theta,e}{max} \quad E\left[t(\theta, (\hat{\theta} - e)q^*(\theta) + \varepsilon) - \varphi(e)\right] \tag{C1}$$

La función de transferencia $t(.)$ debe ser tal que la solución al problema (C1) debe satisface $\theta = \hat{\theta}$ y $e = e^*(\hat{\theta})$. Asimismo, la función de transferencia propuesta $t(\theta, C)$ debe cumplir que la transferencia esperada debe ser igual a la transferencia óptima esperada $s^*(\theta)$, esto es:

$$E\left[t(\hat{\theta}, (\hat{\theta} - e^*(\hat{\theta}))q^*(\hat{\theta}) + \varepsilon\right] = s^*(\hat{\theta}) \tag{C2}$$

A continuación se propone la siguiente función de transferencia

$$t(\theta, C) = s^*(\theta) + K^*(\theta)(C^*(\theta) - C) \tag{2.55}$$

donde

$$K^*(\theta) = \frac{\varphi'(e^*(\theta))}{q^*(\theta)} \tag{2.56}$$

Proposición 2.7. *Si $\dot{e}^*(\theta) < 0$ (esto se da por ejemplo cuando $\varphi''' > 0$), entonces la solución óptima puede ser implementada por el esquema lineal propuesto en*

(2.55) y (2.56).

Cabe resaltar la importancia que la función de esfuerzo óptimo sea decreciente respecto al parámetro de productividad θ como condición suficiente para poder implementar la solución óptima y para garantizar que las condiciones (2.48), (2.49), (2.50) y (2.51) sean necesarias y suficientes para resolver el problema P'. Así, $\dot{e}^* < 0$ implica que el regulador espera que las firmas ineficientes (esto es, tengan costos altos/un mayor parámetro θ) ejerzan un menor nivel esfuerzo óptimo.

La siguiente proposición justifica que la transferencia lineal propuesta en (2.55) es la única la única propuesta lineal que implementa la asignación óptima (la prueba se encuentra en el apéndice A).

Proposición 2.8. *Si se asume que el esfuerzo es no decreciente (esto se da si $\varphi''' > 0$), entonces el esquema lineal expresada en (2.55) $t(\theta, C) = s^*(\theta) + k^*(\theta)(C^*(\theta) - C)$ implementa la asignación óptima social para cualquier función de costos con incertidumbre (con media cero). Este es el único esquema lineal que cumple esta propiedad.*

Es necesario indicar que la cantidad óptima $q^*(\theta)$ es una función decreciente en θ. Esto se hace evidente si se diferencia (2.50) respecto a θ:

$$V''(q^*)\dot{q}^* = (1+\lambda) - (1+\lambda)\dot{e}^* = (1+\lambda)(1-\dot{e}^*)$$
$$\dot{q}^* = \frac{(1+\lambda)(1-\dot{e}^*)}{V''(q^*)} < 0$$

pues $V''(.) < 0, \lambda \geq 0$ y $\dot{e}^* < 0$. En el óptimo, la cantidad socialmente eficiente es menor a medida que la función de costos de la firma sea mayor (θ mayor). Asimismo, el beneficio óptimo obtenido por la empresa es decreciente (ver (2.48)), lo cual implica que la empresa más ineficiente $\theta = \theta_1$ obtiene un beneficio igual a cero.

Esquema regulatorio óptimo en un contexto de no observabilidad de costos - Modelo de Baron-Myerson

En esta sección, a diferencia del análisis precedente, se asume que el regulador no puede observar los costos; y así, no pueda usar esta información para poder implementar un esquema de precios que maximice el bienestar social e induzca a la firma a reportar su verdadero parámetro. Este modelo sigue lo propuesto por Baron and Myerson (1982) y **?**.

Sea $s(\theta)$ la transferencia bruta que hace el regulador a la firma cuando esta anuncia θ. De esta forma, la función objetivo de la firma tipo $\hat{\theta}$ que anuncia un parámetro θ, está dado por:

$$s(\theta) - C - \varphi(e) = s(\theta) - (\hat{\theta} - e)q(\theta) - \varphi(e)$$

La firma elige el parámetro de costos a anunciar y el nivel esfuerzo que va a ejercer, de tal forma que maximice su función objetivo. Esto es:

$$U(\hat{\theta}) = \max_{\theta,e} \quad s(\theta) - (\hat{\theta} - e)q(\theta) - \varphi(e) \tag{2.57}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \dot{s}(\theta) - (\hat{\theta} - e)\dot{q}(\theta) \\ q(\theta) - \varphi'(e) \end{bmatrix} = 0$$

Así, se obtienen:

$$\dot{s}(\theta) = (\hat{\theta} - e)\dot{q}(\theta) \tag{2.58}$$

$$\varphi'(e(\theta)) = q(\theta) \tag{2.59}$$

La expresión (2.59) implica que el nivel de esfuerzo es condicional a la cantidad producida $q(\theta)$, y ambos depende el parámetro reportado por la empresa. Esta característica ocurre porque ahora el planificador no puede observar los costos, y entonces todo depende íntegramente de lo reportado por la empresa.

En el óptimo, la firma tipo θ debe elegir reportar su verdadero parámetro θ, entonces el beneficio que obtiene esta firma es $U(\theta) = s(\theta) - (\theta - e(\theta))q(\theta) - \varphi(e(\theta))$. Se diferencia este beneficio $U(\theta)$ respecto a θ y se obtiene:

$$\dot{U}(\theta) = \dot{s}(\theta) - (1 - \dot{e}(\theta))q(\theta) - (\theta - e(\theta))\dot{q}(\theta) - \varphi'(.)\dot{e}(\theta)$$

Usando (2.58) se obtiene:

$$\dot{U} = -q + \dot{e}(\theta)(q(\theta) - \varphi'(.))$$

Y en base de (2.59) se tiene:

$$\dot{U}(\theta) = -q(\theta) \tag{2.60}$$

La condición (2.60) garantiza que la restricción IC; es decir, la firma elija declarar su verdadero parámetro y elija esforzarse de acuerdo al parámetro que caracteriza su función de costos. De esta forma, el problema del regulador queda como:

$$\begin{aligned} \underset{q(\theta),e(\theta)}{max} \quad & \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Big(V(q(\theta)) - (1+\lambda)(\varphi(e(\theta)) + (\theta - e(\theta))q(\theta)) - \lambda U(\theta)\Big) d\theta \\ \text{s.t.} \quad & \dot{U}(\theta) = -q(\theta) \\ & U(\theta_1) = 0 \end{aligned} \tag{2.61}$$

La expresión (2.61) garantiza que la firma participe en la industria. Esto se justifica a partir de la expresión (2.60), pues la función de utilidad es estrictamente decreciente ($\dot{U}(\theta) = -q(\theta) < 0$). Así, para garantizar la participación de la firma es suficiente asegurar que el beneficio de la empresa más ineficiente $\theta = \theta_1$ sea igual a cero.

Las condiciones necesarias del problema del regulador son:

$$V'(q(\theta)) = (1+\lambda)(\theta - e(\theta)) + \lambda(\theta - \theta_0) \tag{2.62}$$

$$\varphi'(e(\theta)) = q \tag{2.63}$$

Es útil comparar la solución este modelo, donde el regulador no puede observar el costo realizado, con la solución encontrada en las secciones anteriores, en donde el regulador tiene la capacidad de observar el costo realizado. El superíndice "SO" denotará al primer escenario, mientras que el superíndice "O" denota a la segunda situación.

A partir de las expresiones (2.50) y (2.62) se tiene que $V^{SO\prime}(q(\theta)) > V^{O\prime}(q(\theta))$. Además, dado que $V''(.) < 0$, entonces $q^O(\theta) < q^{SO}(\theta)$. Por lo tanto, cuando el planificador no puede observar los costos, la cantidad transada es menor respecto a la cantidad cuando el regulador si puede observar los costos.

De igual manera, se puede verificar que $\varphi^{SO\prime}(e(\theta)) > \varphi^{O\prime}(e(\theta))$. Dado que $\varphi''(.) > 0$, entonces $e^{SO}(\theta) > e^O(\theta)$; es decir, el esfuerzo que ejerce la firma cuando no se puede observar los costos es mayor al esfuerzo cuando el regulador puede observar los costos.

Comparación del caso de información completa e información incompleta

Proposición 2.9. *Para cualquier θ (excepto θ_1)), en un contexto de información simétrica, la cantidad y el esfuerzo óptimos son mayores en comparación a lo obtenido en un contexto de información asimétrica.*

La proposición 2.9 indica que en un contexto de información asimétrica, el regulador no puede reembolsar la totalidad del costo incurrido por la firma. Así, lo óptimo será implementar el esquema a partir de la no observabilidad de costos (Baron and Myerson, 1982). Sin embargo, bajo este esquema, la firma aún se hace cargo de una parte de sus costos, por lo que tiene incentivos a subreportar su nivel de eficiencia θ en costos, de tal forma que le sea asignado un menor nivel de producción $q(\theta)$ y así reducir sus costos.

Para evitar este comportamiento, el regulador tiene compensar a la firma con una parte del beneficio social $V(q)/(1+\lambda)$. Esta compensación tiene un costo alto, en términos redistributivos, en un contexto de información asimétrica. Otra forma, parcial, de evitar los incentivos a subreportar el parámetro de productividad es que el regulador se haga cargo de una ´parte de los costos. De hecho, en ausencia de información asimétrica, lo óptimo sería que el regulador compense la totalidad de los costos de la firma.

Entonces, las condiciones descritas en las expresiones (2.48), (2.49), (2.50) y (2.51) que se dan en un contexto de información asimétrica, se ubican en un nivel intermedio. Esto es, el regulador se hace cargo una parte de los costos de la firma y transfiere parte del beneficio social. Así, el nivel de esfuerzo de la empresa es subóptimo (comparado al caso de información simétrica), y por lo tanto, la cantidad producida también será subóptima.

2.4 Regulación con auditoría y costos estocásticos

En esta sección se analiza un modelo de información asimétrica en el cuál la fuente de asimetría de información se produce en los costos; es decir, los función de costos solo es conocido por la firma y no por el regulador. Sin embargo, a diferencia de los anteriores modelos, en los cuales el regulador tenía a disposición los clásicos instrumentos de regulación (fijación del precio y transferencia); la política de regulación que se plantea en esta sección permite al regulador llevar a cabo un proceso de auditoría e imponer una penalidad. Asimismo, el costo realizado tiene un componente aleatorio; el cual implica que la penalidad establecida puede presentar un cierto nivel de riesgo de error.

Este modelo puede ser resumido en cinco etapas. En la primera etapa, la naturaleza elige aleatoriamente el parámetro de costos que caracteriza a la firma. En la segunda etapa, el regulador diseña una política regulatoria óptima en base a los posibles escenarios que configuran los valores de parámetro de costos. En la tercera etapa, la firma reporta información acerca del parámetro de costos al regulador seleccionando alguna de las opciones de política regulatoría planteadas en la etapa anterior. Así, se fija el precio y la transferencia. En la cuarta etapa, dado el precio regulado, se determina la cantidad y el costo total es realizado. Finalmente, en la última etapa el regulador evalúa la conveniencia de llevar a cabo un proceso de auditoría para observar el costo realizado e imponer una penalidad si es necesario.

La decisión de auditar está basado fundamentalmente en el parámetro de costo que la firma reporta al regulador. Dada esta información, el regulador lleva a cabo un proceso de auditoría; si encuentra que el parámetro de costo reportado es alto, y no se realiza la auditoría si los costos reportados son bajos. La lógica detrás de esta decisión está dada por los incentivos que tiene la firma para sobredimensionar su parámetro de costo. En efecto, declarar un mayor costo supone un mayor precio regulado, y en consecuencia un beneficio más alto.

Si se realiza una auditoría, el planificador puede observar el costo realizado e imponer una posible penalidad en el caso que se encuentre suficiente evidencia que demuestra que la firma ha sobreestimado sus costos; esto es, que el costo observado sea menor al costo reportado. Desde la teoría positiva de la regulación, esta penalidad puede ser entendida como un reembolso a los consumidores producto de haber fijado un precio regulado en base a costos sobreestimados.

La auditoría como instrumento de regulación tiene por objetivo crear los incentivos correctos para que la firma declare sus verdaderos costos, ya que implica un aumento del costo de oportunidad en el caso que la firma decida sobreestimar sus costos. Asimismo, para el regulador, el proceso de auditoría disminuye los costos de satisfacer la restricción de compatibilidad de incentivos.

Uno de los principales resultados del modelo de regulación con auditoría es la característica de *separación*, en el cual se establece que la política de fijación de precios se da de manera independiente al proceso de auditoría. Esta característica es importante ya que las decisiones para la fijación de precios no debe ser actualizadas si el regulador decide auditar a la firma.

2.4.1 Modelo

La firma regulada que produce Q unidades tiene la siguiente función de costos:

$$\tilde{C} = \tilde{c}Q + k \tag{2.64}$$

donde k y $\tilde{c}$ representan al costo fijo y al costo marginal aleatorio, respectivamente. Asimismo se asume que k es un parámetro no negativo. Es importante mencionar que la aleatoriedad de $\tilde{c}$ captura la información imperfecta que tiene la firma sobre la función de costos; es decir, se asume que la firma no tiene conocimiento perfecto acerca de sus costos. Intuitivamente, la aleatoriedad de los costos se puede dar por distintas razones. Por ejemplo, al implementar una nueva tecnología se puede producir algunas "fallas tecnológicas" que generen costos más altos a lo esperado. Otra fuente de aleatoriedad se da cuando la firma compra alguno de sus insumos de producción en un mercado financiero, donde el precio fluctúa mucho, y por lo tanto los costos de la firma tiende a ser incierto.

Para modelar la incertidumbre, se asume que la distribución condicional de $\tilde{c}$

esta dada por $G(c|\theta)$ y es de conocimiento común. No obstante, la realización del parámetro θ solo es observado por la firma. Si bien ningún agente (regulador o firma) observa el verdadero valor de $\tilde{c}$, la firma tiene un mayor conocimiento acerca de la probabilidad que puede tomar las posibles valores de este parámetro. En efecto, el parámetro θ representa la información privada que tiene la firma y que le ayuda a tener un conocimiento más preciso acerca de $\tilde{c}$, y con ello de los costos. De manera concreta, el parámetro θ puede representar la frecuencia de fallas de la nueva tecnología o promedios históricos de los precios en el mercado financiero. Adicionalmente, se asume que $\bar{c}(\theta)$ es la media de $\tilde{c}$ y es creciente respecto a θ.

Este modelo de política regulatoria es de un periodo. Al inicio del periodo, el regulador solicita que la firma reporte información acerca del parámetro $\hat{\theta}$. Con esta información el regulador fija el precio regulado $p\left(\hat{\theta}\right)$ y el subsidio $s\left(\hat{\theta}\right)$ que será entregado a la firma[20]. Estos instrumentos regulatorios se fijan óptimamente con la finalidad de otorgar los incentivos correctos para que la empresa reporte su verdadero parámetro (esto es $\hat{\theta} = \theta$). Dado el precio regulado, en la función de demanda, se determina la cantidad producida $Q\left(p\left(\hat{\theta}\right)\right)$.

Al final del periodo regulatorio, el costo total C es realizado. El regulador puede observar el costo C si realiza una auditoría, pero si lleva a cabo este proceso incurre en un costo de a. Asimismo, el planificador se compromete a realizar una auditoría con una probabilidad de $\beta(\hat{\theta})$, la cuál depende del parámetro $\hat{\theta}$ reportado por la firma.

Si el regulador audita y observa C, entonces le es permitido imponer una penalidad de $N(C, \hat{\theta}) \in [0, \bar{N}]$ si encuentra que la firma ha exagerado sus costos. Esta penalidad puede ser pensada como una compensación a los consumidores por parte de las firmas. La penalidad tiene una cota superior de $\bar{N}$, la cual puede

[20]Estos dos instrumentos de regulación se pueden ajustar a un esquema de tarifa de dos partes, compuesta por una parte variable (precio) y otra fija (subsidio). El costo que genera este esquema es asumido de manera equitativa por todos los consumidores

ser especificada por las legislaciones de los países.

Se puede observar que la penalidad depende el costo realizado C y el parámetro $\hat{\theta}$ reportado por la firma. De esta forma, la auditoría se configura como un proceso administrativo en donde el regulador decide si llevarla a cabo dependiendo de lo reportado por la empresa. Asimismo, la penalidad puede ser la máxima posible si el costo realizado cae en una *región crítica* o puede ser igual a cero si cae afuera de esa *región*. El regulador es responsable de determinar dichas *regiones* de tal forma que se otorgue los incentivos correctos para que la empresa declare sus verdaderos costos. Por ejemplo, el regulador podría auditar cuando el costo reportado es alto (dado que la firma tiene incentivos a sobreestimar sus costos) y penalizar si encuentra evidencia que la firma ha sobreestimado sus costos.

Una política regulatoria está compuesta por un conjunto de funciones $\Sigma \equiv \Big(p(\hat{\theta}), s(\hat{\theta}), \beta(\hat{\theta}), N(\hat{\theta}, C)\Big)$ para todo $\hat{\theta} \in [\theta_0, \theta_1]$ y para todo C. Esta política puede ser pensada como en un juego cuyas etapas se listan a continuación:

(1) Natura elige $\hat{\theta} \in [\theta_0, \theta_1]$.

(2) El regulador anuncia la política regulatoria Σ para todo $\hat{\theta} \in [\theta_0, \theta_1]$ y para todo C.

(3) La firma elige, de manera óptima, reportar algún θ. En el caso que la política regulatoria propuesta en la etapa 2 satisfaga la restricciój IC y la firma decide reportar $\theta = \hat{\theta}$. De esta forma, dada la política regulatoria, conoce el precio $p(\hat{\theta})$ y el subsidio $s(\hat{\theta})$ establecidos.

(4) Se satisface la demanda $Q(p(\hat{\theta}))$ y el costo es realizado $C = cQ(p(\hat{\theta})) + k$ al final del periodo.

(5) Con probabilidad $\beta(\theta)$, el regulador realiza una auditoría. Entonces, puede observar C e imponer una penalidad de $N(\hat{\theta}, C)$.

Se asume que la firma es un agente neutral al riesgo. Por lo tanto, el beneficio esperado $\pi\left(\hat{\theta},\theta\right)$ de la empresa con parámetro de costo θ, que reporta $\hat{\theta}$ está dado por:

$$\pi(\hat{\theta},\theta) = p(\hat{\theta})Q(p(\hat{\theta})) - \bar{c}(\theta)Q(p(\hat{\theta})) - k + s(\hat{\theta}) - \beta(\hat{\theta})E\left[N(\hat{\theta},\tilde{C})|\theta\right] \tag{2.65}$$

en el cual $E[N(\hat{\theta},\tilde{C})|\theta] = \int_{\Gamma} N(\hat{\theta},C)h(C|\theta)dC$. Donde, Γ denota el dominio de $\tilde{C}$ y $h(C|\theta)$ es la función de densidad inducida de la variable $\tilde{C}$[21] . La expresión (2.65) revela que la penalidad puede ser pensada como un ajuste *ex post* al subsidio otorgado por la empresa. Asimismo, cabe destacar que a diferencia del precio o el subsidio, la penalidad no solo depende del costo reportado $\hat{\theta}$, sino también del costo realizado.

Por otro lado, la restricción IR asegura que la empresa obtenga beneficios no negativos. La lógica detrás de la restricción IR se basa en que la firma tiene tiene el derecho de no producir en la industria si su beneficio percibido no cubre su beneficio de reserva (mínimo beneficio que la firma espera recibir)[22]:

$$\pi(\theta) \geq 0, \quad \forall\theta \in [\theta_0,\theta_1] \tag{2.66}$$

Asimismo, el principio de revelación implica la restricción de compatibilidad IC, bajo el cual la firma no tiene incentivos para mentir acerca su parámetro de costos. De esta forma, la restricción IC asegura que el beneficio esperado de la firma que reporta su verdadero parámetro de costo nunca debe ser menor al beneficio esperado si la firma miente acerca de este parámetro.

$$\pi(\theta,\theta) \equiv \pi(\theta) \geq \pi(\hat{\theta},\theta), \quad \forall\theta,\hat{\theta} \in [\theta_0,\theta_1] \tag{2.67}$$

Si bien el regulador no tiene certeza acerca del parámetro θ, sabe que se este

[21] Se puede mostrar que $h(C|\theta) = g\left(\left.\frac{C-k}{Q(p(\hat{\theta}))}\right|\theta\right)\Big/Q(p(\hat{\theta}))$, donde $g(.)$ corresponde a la función de densidad de G(.)

[22] En este caso se ha normalizado el beneficio de reserva a 0

parámetro se distribuye siguiendo una función de densidad $f(.)$, la cuál es positiva en el intervalo $[\theta_0, \theta_1]$ y es cero fuera de este intervalo.

El regulador maximiza el beneficio social, el mismo que se define como la suma ponderada del beneficio de la empresa y los consumidores. Para una política que satisface la restricción IC, el beneficio de las firmas está dado por $\pi(\theta)$ y el *beneficio operativo* de los consumidores es $[V(Q(p(\theta))) - p(\theta)Q(p(\theta) - s(\theta)]$, donde $V(.)$ representa el excedente bruto de los consumidores definida por $V(q) = \int_0^q P(q)dq$ y $P(q)$ denota la inversa de la función de demanda. Al *beneficio operativo*, se le resta los costos asociados a una auditoría (ponderada por la probabilidad que la auditoría se lleve a cabo) y se le adiciona la penalidad esperada. Entonces, el beneficio social está dado por:

$$\begin{aligned} W = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Big\{ & V(Q(p(\theta))) - p(\theta)Q(p(\theta)) - s(\theta) - a\beta(\theta) \\ & + \beta(\theta)E[N(\theta, \tilde{C})/\theta] + \alpha\pi(\theta) \Big\} f(\theta)\partial\theta \end{aligned} \tag{2.68}$$

donde $\alpha \in [0, 1]$ representa la importancia que el regulador le otorga a las firmas. Asimismo, se puede expresar la función de beneficio social de otra forma al despejar $s(\theta)$ de la función de beneficios $\pi(\theta)$ (en la expresión (2.65)):

$$\pi(\theta, \theta) = \pi(\theta) = p(\theta)Q(p(\theta)) - \bar{c}(\theta)Q(p(\theta)) - k + s(\theta) - \beta(\theta)E[N(\theta, \tilde{C})/\theta]$$
$$s(\theta) = \pi(\theta) - p(\theta)Q(p(\theta)) + \bar{c}(\theta)Q(p(\theta)) + k + \beta(\theta)E[N(\theta, \tilde{C})/\theta]$$

Entonces, una forma equivalente de escribir la expresión (2.68) es:

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Big\{ V(Q(p(\theta))) - \bar{c}(\theta)Q(p(\theta)) - k - a\beta(\theta) - (1 - \alpha)\pi(\theta) \Big\} f(\theta)\partial\theta$$

Por lo tanto, el regulador elige $\{p(\theta), \beta(\theta), N(\theta, C), \pi(\theta)\}$ de tal modo que resuelva el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
max \quad & W = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Big\{ V(Q(p(\theta))) - \bar{c}(\theta)Q(p(\theta)) - k - a\beta(\theta) - (1-\alpha)\pi(\theta) \Big\} f(\theta)d\theta \\
\text{s.t.} \quad & \qquad (2.66), (2.67) \\
& 0 \leq \beta(\theta) \leq 1, \ \forall\theta \in [\theta_0, \theta_1] \\
& 0 \leq N(\theta, C) \leq \bar{N}, \forall\theta \in [\theta_0, \theta_1] \forall C \in \Gamma
\end{aligned} \tag{2.69}$$

2.4.2 Caracterización de la solución óptima

Para determinar las condiciones necesarias (y suficientes) del problema (2.69), se resuelve primero un problema en el cuál la restricción IC, dada en la expresión (2.67) (en adelante, restricción IC global), es reemplazada por una restricción de *compatibilidad de incentivos local* (en adelante restricción IC local). Si la solución a este *problema transformado* verifica la restricción IC global, entonces se dice que esta solución resuelve el problema original. La restricción IC local está dada por:

$$\frac{d\pi(\theta)}{d\theta} = -\bar{c}'(\theta)Q(p(\theta)) - \beta(\theta) \int_{\Gamma} N(\theta, C) \frac{\partial h(C|\theta)}{\partial\theta} dC \tag{2.70}$$

La restricción IC local asegura que el beneficio de la firma al declarar el verdadero parámetro de costo θ es mayor al beneficio obtenido de declarar cualquier otro parámetro en la vecindad de θ. Entonces, en el problema transformado, el regulador elige $\{p(\theta), \beta(\theta), N(\theta, C), \pi(\theta)\}$ de tal modo que resuelva el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
max \quad W = & \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Big\{ V(Q(p(\theta))) - \bar{c}(\theta)Q(p(\theta)) - k - a\beta(\theta) - (1-\alpha)\pi(\theta) \Big\} f(\theta) d\theta \\
\text{s.t.} \qquad & \pi(\theta) \geq 0, \ \forall\theta \in [\theta_0, \theta_1] \\
& \frac{d\pi(\theta)}{d\theta} = -\bar{c}'(\theta)Q(p(\theta)) - \beta(\theta) \int_\Gamma N(\theta, C)\frac{h(C|\theta)}{d\theta} dC \\
& 0 \leq \beta(\theta) \leq 1, \ \forall\theta \in [\theta_0, \theta_1] \\
& 0 \leq N(\theta, C) \leq \bar{N}, \forall\theta \in [\theta_0, \theta_1]
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

Es importante indicar que la restricción IC global es condición suficiente para que la restricción IC local ocurra. El siguiente lema presenta esta idea (la prueba se puede encontrar en el apéndice A):

Lema 2.10. *Se tiene:*

- *La restricción IC global implica la restricción IC local.*
- *La restricción IC local implica la restricción IC global solamente alrededor de un cierto punto.*

El problema (2.71) es de control óptimo, donde la variable de estado es $\pi(\theta)$ y las variables de control son $p(\theta)$, $\beta(\theta)$ y $N(\theta, C)$. Entonces, se plantea el hamiltoniano:

$$
\begin{aligned}
H = & V(Q(p(\theta))) - \bar{c}(\theta)Q(p(\theta)) - k - a\beta(\theta) - (1-\alpha)\pi(\theta) \Big\} f(\theta) \\
& + \mu(\theta) \left(-\bar{c}'(\theta)Q(p(\theta)) - \beta(\theta) \int_\Gamma N(\theta, C)\frac{h(C/\theta)}{d\theta} dC \right) + \tau(\theta)\pi(\theta)
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

donde $\mu(\theta)$ representa a la variable de coestado correspondiente a la restricción IC local y $\tau(\theta)$ es el multiplicador correspondiente a la restricción IR. La variable de coestado está caracterizada en el lema 2.11 (la prueba se encuentra en apéndice A).

Lema 2.11. *La variable de coestado $\mu(\theta)$ satisface:*

$$\mu(\theta) = (1-\alpha)F(\theta) - \int_{\theta_0}^{\theta_1} \tau(v)dv \quad \forall\theta \in [\theta_0, \theta_1] \tag{2.73}$$

y

$$\mu(\theta_0) = 0; \qquad \mu(\theta_1)\pi(\theta_1) = 0 \tag{2.74}$$

La variable de coestado $\mu(\theta)$ puede ser interpretada como el costo marginal de satisfacer la restricción IC. Por ejemplo, en ausencia de auditoría (esto es $\beta(\theta) = 0$), la expresión (2.70) indica que el beneficio es decreciente respecto a θ, pues $d\pi(\theta)/d\theta = -\overline{c}'(\theta)Q(p(\theta)) < 0$. Así, si se establece que el beneficio de la firma con el parámetro de costo más alto es cero $\pi(\theta_1) = 0$, entonces la restricción IC será satisfecha $\forall\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. En este contexto, el $\pi(\theta) > 0$ para $\forall\theta \in [\theta_0, \theta_1\rangle$; lo que implica que $\tau(\theta) = 0$. Luego en la expresión (2.73) se tiene que la variable de coestado será $\mu(\theta) = (1-\alpha)F(\theta)$. Dado que $F(\theta)$ es una función estrictamente creciente, la función $\mu(.)$ será también estrictamente creciente. Este hecho refleja que las firmas con parámetro de costos pequeños tienen altos incentivos de reportar costos más altos en un intento de obtener mayores beneficios.

No obstante, con auditoría la expresión (2.70) podría ser positiva; es decir, puede existir un tramo donde el beneficio sea creciente. Esto sugiere que para algún $\theta^+ \in [\theta_0, \theta_1]$ el beneficio debe ser igual a cero $\pi(\theta^+) = 0$. Si para el tramo $[\theta_0, \theta^+]$ el beneficio es estrictamente positivo, entonces $\tau(\theta) = 0$ y la variable de coestado sería positivo $\mu(\theta) = (1-\alpha)F(\theta) > 0$ (excepto para θ_0). No obstante, como en θ^+ el beneficio se hace nulo, entonces el término $\int_{\theta_0}^{\theta^+}$ resulta ser positivo, lo cual reduce el costo marginal $\mu(\theta)$ de cumplir con la restricción IC local . Así, la auditoría como instrumento regulatorio disminuye el costo (respecto al caso donde no hay auditoría) que genera otorgar incentivos a las firmas para que estas no exageren sus costos. El lema 2.12 (prueba se encuentra en el apéndice A) muestra que el costo marginal de satisfacer la restricción IC siempre es no negativa.

Por otra parte la proposición 2.10 (la prueba se encuentra en el apéndice A) caracteriza a la penalidad $N(\theta, C)$ dado que $h(C|\theta)$ satisface la propiedad de *ratio de verosimilitud*, la misma que está definida como:

Definición 2.4. *Se dice que la función de densidad $h(C/\theta)$ satisface la propiedad de ratio de verosimilitud si para cada $\theta', \theta'' \in [\theta_0, \theta_1]$ tal que $\theta' > \theta''$, el ratio $\frac{h(C/\theta')}{h(C/\theta'')}$ es monótonamente creciente en C.*

Proposición 2.10. *Suponga que $h(C/\theta)$ es una función de verosimilitud inducida, continuamente diferenciable y que satisface la propiedad de ratio verosimilitud. Sea $\theta^*(C)$ es el estimador de máxima verosimilitud (único) del parámetro θ cuando el costo C es realizado. Se asume que $\theta^*(C)$ es estrictamente creciente en C. Sea $Z^*(\theta)$ la inversa de la función $\theta^*(C)$. Entonces, la función de penalidad óptima del problema transformado está dado por:*

$$N(\hat{\theta}, C) = \begin{cases} \bar{N}, & si\ C < Z(\hat{\theta}) \\ 0, & si\ C \geq Z(\hat{\theta}) \end{cases}$$

Lema 2.12. *En una política de compatibilidad de incentivos, el costo marginal de satisfacer la restricción de compatibilidad de incentivos es no negativo. Esto es $\mu(\theta) \geq 0$, para todo $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$.*

A partir de la proposición 2.10 se puede destacar que la penalidad toma solo los valores extremos ($\bar{N}$ o 0). Esta característica ocurre porque la penalidad es lineal en la función objetivo del planificador y en la restricción IC local,

Adicionalmente, la proposición 2.10 proporciona un panorama acerca del método regulatorio del planificador auditor. En primer lugar, el regulador recibe información acerca del parámetro de costo $\hat{\theta}$ y luego observa el costo realizado C. Con esta información, el regulador calcula el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de costo $\theta^*(C)$. Si $\theta^*(C) < \hat{\theta}$ (esto es $C < Z^*(\hat{\theta})$), entonces el regulador tiene evidencia para suponer que la firma ha mentido en sus costos y por lo tanto tiene que recibir una penalidad. Por el contrario, si $\theta^*(C) \geq \hat{\theta}$ (esto es $C \geq Z^*(\hat{\theta})$), entonces la firma no ha mentido en sus costos y por ende no es necesario imponer una penalidad. Es importante resaltar que bajo una política regulatoria óptima, la firma nunca tiene incentivos a mentir acerca de sus costos (ya que se satisface la restricción IC); sin embargo, siempre existe la probabilidad que la firma sea penalizada (salvo que $Z^*(\theta) = \inf \Gamma$). Así, a pesar de que el regulador reconoce que la firma siempre declarará sus verdaderos costos, es deseable iniciar un proceso de auditoría, ya que este instrumento ayuda a reducir los costos *apriori* para inducir a la firma a declarar su verdadero parámetro de costos.

A partir de los lemas 2.11 y 2.12 se puede caracterizar la variable de estado $\pi(\theta)$. Se integra la expresión (2.70) de θ a θ_1:

$$\pi(\theta) = \pi(\theta_1) + \int_{\theta}^{\theta_1} \left[\vec{c}'(\tilde{\theta})Q(p(\tilde{\theta})) + \beta(\tilde{\theta}) \int_{\Gamma} N(\tilde{\theta}, C) \frac{\partial h(C|\theta^+)}{\partial \theta} dC \right] d\tilde{\theta} \tag{2.75}$$

Si bien el lema 2.11 establece que $\pi(\theta_0) > 0$, el siguiente lema caracteriza el beneficio de la firma que posee el parámetro de costo más alto.

Lema 2.13. *Si* $\alpha < 1$, *entonces* $\pi(\theta_1) = 0$

Proof. Por el absurdo, supongamos que $\pi(\theta_1) > 0$. Por la condición de transversalidad ($\pi(\theta_1)\mu(\theta_1) = 0$) este supuesto implica que $\mu(\theta_1) = 0$. Dado que $\pi(\theta_1) > 0$ (lo que implica que $\tau(\theta)$), entonces existe θ^+ tal que $\pi(\theta) > 0$ para todo $\theta \in \langle \theta^+, \theta_1]$[23]. En la expresión (2.73)

$$\mu(\theta_1) = (1-\alpha)F(\theta_1) - \int_{\theta_0}^{\theta_1} \tau(v)dv$$

$$\mu(\theta_1) = (1-\alpha) - \int_{\theta_0}^{\theta^+} \tau(v)dv \tag{a}$$

[23]En la expresión (2.75), el integrando es positivo ($[.] > 0$); por lo tanto, debe existir algún tramo en θ tal que $\pi(\theta) > 0$

De igual manera, al evaluar θ^+ en la expresión (2.73):

$$\mu(\theta^+) = (1-\alpha)F(\theta^+) - \int_{\theta_0}^{\theta^+} \tau(v)dv \tag{b}$$

De (a) se despeja $\int_{\theta_0}^{\theta^+} \tau(v)dv$ y se reemplaza en (b)

$$\mu(\theta^+) = \mu(\theta_1) - (1-\alpha)(1-F(\theta^+))$$

Se puede notar que $\mu(\theta^+) < \mu(\theta_1)$, pues $(1-\alpha)(1-F(\theta^+)) > 0$. En base a que $\mu(\theta_1) = 0$, entonces $\mu(\theta^+) < 0$, lo cual contradice el lema 2.11. Por lo tanto, $\pi(\theta_1) = 0$ $\square$

El segundo término de la expresión (2.75) representa el beneficio adicional que obtienen las firmas cuyo parámetro de costo es menor al costo más alto. De este modo, el regulador permite que las firmas con costos más bajos perciban beneficios más altos, de tal forma que se vean incentivados para no exagerar sus costos (*renta informacional*). En un contexto sin auditoría, el beneficio es estrictamente decreciente, sin embargo, con auditoría, esto no necesariamente es así.

Otro parámetro importante dentro de la política regulatoría óptima es la probabilidad con la que el regulador lleva a cabo un proceso de auditoría, $\beta(\hat{\theta})$. Este parámetro depende del costo reportado por la firma $\hat{\theta}$. La proposición 2.11 (la prueba se encuentra en el apéndice A) caracteriza a la probabilidad de auditoría óptima, así como la solución del problema transformado.

Proposición 2.11. *Si $F(\theta)/f(\theta)$ es no decreciente en θ, $\tilde{c}$ sigue una distribución normal con parámetros $(\bar{c}(\theta), \sigma^2)$, y $\bar{c}(\theta)$ es diferenciable, no decreciente y (débilmente)* *convexa en θ. Así, la solución óptima del problema transformado está dado por:*

$$Z^*(\theta) = \bar{c}(\theta)Q(p^*(\theta)) + k = E(\tilde{C}|\theta) \tag{2.76}$$

$$E[N^*(\theta, \tilde{C})|\theta] = \frac{\bar{N}}{2} \tag{2.77}$$

$$\beta^*(\theta) = \begin{cases} 0 & si\ \frac{\mu(\theta)\bar{N}\bar{c}'(\theta)}{\sqrt{2\pi}\sigma} - af(\theta) < 0 \\ 1 & si\ \frac{\mu(\theta)\bar{N}\bar{c}'(\theta)}{\sqrt{2\pi}\sigma} - af(\theta) > 0 \\ \in [0,1] & si\ \frac{\mu(\theta)\bar{N}\bar{c}'(\theta)}{\sqrt{2\pi}\sigma} - af(\theta) = 0 \end{cases} \tag{2.78}$$

$$p^*(\theta) = \bar{c}(\theta) + \bar{c}'(\theta)\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)} \tag{2.79}$$

$$\tau(\theta) \geq 0; \tau(\theta)\pi(\theta) = 0 \tag{2.80}$$

Para el caso donde $\pi(\theta) > 0$ (esto es para $\forall\theta \in [\theta_0, \theta_1\rangle$), se conoce que $\tau(\theta) = 0$, luego en la expresión (2.73) se tiene que $\mu(\theta) = (1-\alpha)F(\theta)$. Por lo tanto, la expresión (2.79) queda como:

$$p^*(\theta) = \bar{c}(\theta) + \bar{c}'(\theta)\frac{(1-\alpha)F(\theta)}{f(\theta)} \equiv y_\alpha(\theta) \tag{2.81}$$

Asimismo se sabe que

$$\frac{\mu(\theta)\bar{N}\bar{c}'(\theta)}{f(\theta)\sqrt{2\pi}\sigma} \gtreqless a$$

$$(1-\alpha)\frac{F(\theta)}{f(\theta)}\frac{\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\bar{c}'(\theta) \gtreqless a$$

donde el término del lado izquierdo es no decreciente, ya que $F(\theta)/f(\theta)$ y $\bar{c}'(\theta)$ son funciones no decrecientes. De esta forma se define θ_a como:

$$(1-\alpha)\frac{F(\theta_a)}{f(\theta_a)}\frac{\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\bar{c}'(\theta_a) = a \tag{2.82}$$

En el caso que la solución a (2.82) no exista, se considera que $\theta_a = \theta_1$. En consecuencia, la probabildiad de auditar (en la expresión (2.78)) puede ser escrita como:

$$\beta^*(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta < \theta_a \\ 1 & \text{si } \theta \geq \theta_a \end{cases} \tag{2.83}$$

En la expresión (2.81) el término $(1-\alpha)(F(\theta)/f(\theta))\bar{c}'(\theta)$ puede ser interpretado, en base a los términos usado en el documento de Baron and Myerson (1982), como el *costo informacional* que el regulador debe pagar a la firma de costos bajos para que esta no exagere sus costos. Adicionalmente, es importante indicar que el precio óptimo en un contexto donde el regulador está facultado a auditar es independiente a la política de auditoría (ver la expresión (2.81))[24]. Esta característica de *separación* es importante desde un punto de vista administrativo dado que el planificador puede establecer su política de precios, sin la necesidad actualizar ese tarifario cuando decida auditar.

La característica de *separación* no es consecuencia del supuesto de normalidad en los costos; sino depende de que la restricción IR se cumpla de forma estricta ($\pi(\theta) > 0$). Una condición suficiente para que esto se produzca es $[d\pi(\theta)/d\theta] < 0$ para $\theta \geq \theta_a$. Para el caso donde el costo sigue una distribución normal, la condición suficiencia es equivalente a [25]:

$$Q(y_a(\theta_1)) \geq \frac{\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

Se puede observar que la característica de *separación* se produce con mayor probabilidad cuando (i) el monto de penalidad máximo $\bar{N}$ es pequeño; (ii) la desviación estándar σ es grande; (iii) la demanda del mercado es grande y/o (iv) el peso α que tiene la firma en la función de bienestar es pequeño[26].

[24] La expresión (2.81) no depende de los parámetros de la política de auditoría, esto es de $\beta(\theta)$ y $N(\theta, C)$

[25] En la política óptima y a partir de la expresión (2.70) se tiene que $d\pi(\theta)/d\theta = -\bar{c}'(\theta)Q(p^*(\theta)) - \beta(\theta)\int_\Gamma N(\theta, C)(\partial h(C|\theta)/\partial\theta)dC < 0$. Se reduce esta expresión a $-\bar{c}'(\theta)Q(p^*(\theta)) - \bar{N}\int_{C<Z^*(\theta)}(\partial h(C|\theta)/\partial\theta)dC < 0$, entonces $Q(y_a(\theta_1)) \geq \bar{N}/\sqrt{2\pi}\sigma$

[26] Si α es pequeño, entonces el precio $y_\alpha(\theta_1)$ también será pequeño; y por lo tanto, la demanda

En el caso que la función de densidad $f(.)$ sea uniforme y por lo tanto $y_\alpha(\theta_1) = \theta_1 + (1+\alpha)(\theta_1 - \theta_0)$; la caracteristica de *separación* ocurre si el rango de $(\theta_1 - \theta_0)$ es pequeño (dado que θ_1 fijo).

Por otra parte, es importante examinar la política óptima cuando la restricción IR se cumple con igualdad. Sea $\underline{\theta}$ el primer valor de θ en el cuál la restricción IR es igual a cero. Es decir; supongamos que $\pi(\theta) > 0$ para $\theta \in [\theta_0, \underline{\theta}\rangle$ y $\pi(\theta) = 0$ para $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ donde $\theta \leq \theta_1$.

Se puede mostrar que $\underline{\theta} \geq \theta_a$. Por el absurdo, supongamos que $\underline{\theta} < \theta_a$. Para un δ muy pequeño tal $\underline{\theta} + \delta < \theta_a$ se tiene que $\forall\theta \in [\underline{\theta}, \underline{\theta} + \delta\rangle$ cumple $\beta(\theta) = 0$ y $\pi(\theta) = 0$. Dado que $\beta(\theta) = 0$, entonces en la expresión (2.70) $\pi(\theta)$ es estrictamente decreciente en ese rango (pues $d\pi(\theta)/d\theta < 0$), sin embargo, esto contradice el hecho que $\pi(\theta) = 0$ para ese rango. Por lo tanto $\underline{\theta} \geq \theta_a$.

La política regulatoria óptima sobre el intervalo $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ viene dado en la proposición 2.11 y por el hecho que sobre este intervalo se cumple que $[d\pi(\theta)/d\theta] = Q(p(\theta)) + \beta(\theta)\bar{c}'(\theta)(\bar{N}/\sqrt{2\pi}\sigma) = 0$[27], pues $\pi(\theta) = 0, \forall\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. La proposición 2.12 resume la política óptima (la prueba se encuentra en el apéndice A):

Proposición 2.12. *Caso 1: La política óptima es:*

$$p^*(\theta) = P\left(\frac{\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) \equiv \bar{p} \tag{2.84}$$

$$\beta^*(\theta) = 1 \tag{2.85}$$

$$\mu(\theta) = (\bar{p} - \bar{c}(\theta))\frac{f(\theta)}{\bar{c}'(\theta)} \tag{2.86}$$

Este caso se cumple si y solo si $\mu(\theta) \geq af(\theta)\sqrt{2\pi}\sigma/\bar{c}'(\theta)\bar{N}$*, la cuál es equivalente a:*

$$\bar{p} \geq \bar{c}(\theta) + \frac{a\sqrt{2\pi}\sigma}{\bar{N}}$$

crecerá.

[27] En la expresión (2.70), se considera el caso donde $f(\theta)$ sigue una distribución normal

Caso 2: La política óptima es:

$$p^*(\theta) = \bar{c}(\theta) + \frac{a\sqrt{2\pi}\sigma}{\bar{N}} \tag{2.87}$$

$$\beta^*(\theta) = \frac{Q(p^*(\theta))}{Q(\bar{p})} < 1 \tag{2.88}$$

$$\mu(\theta) = \frac{af(\theta)\sqrt{2\pi}\sigma}{\bar{c}'(\theta)\bar{N}} \tag{2.89}$$

Este caso se cumple si y solo si, los valores del parámetro θ cumplen que $\beta(\theta) < 1$, el cuál ocurre si y solo si:

$$\bar{p} < \bar{c}(\theta) + \frac{a\sqrt{2\pi}\sigma}{\bar{N}}$$

En la figura 2.2 se muestra el caso cuando $\underline{\theta} > \theta_a$ y $\bar{\theta} = \theta_1$. Se define el parámetro θ' como $\bar{p} = \bar{c}(\theta') + a\left(\sqrt{2\pi}\sigma/\bar{N}\right)$. A partir de esta definición se puede notar que el parámetro θ' está en la frontera entre el caso 1 y caso 2 de la proposición 2.12.

Respecto al precio óptimo, se puede observar que en el intervalo $[\theta_0, \underline{\theta}]$, este es igual a $y_\alpha(\theta)$ (el mismo precio encontrado en el documento de Baron and Myerson (1982)). Sin embargo, a partir de $\theta = \underline{\theta}$, el precio se vuelve estrictamente menor a $y_\alpha(\theta)$. De igual manera, la probabilidad de auditoría óptima es nula en el intervalo $[\theta_0, \theta_a]$, luego la auditoría es segura en $[\theta_a, \theta']$, y finalmente la probabilidad tiene un comportamiento decreciente por debajo de 1. Es importante resaltar que cuando la restricción IR se cumple con igualdad (esto es $\pi(\theta) = 0$) es óptimo, para el regulador, reducir el precio y la probabilidad de auditar. Esto se produce porque en este intervalo $[\theta', \bar{\theta}]$, el multiplicador de lagrange asociado al beneficio es estrictamente positivo $\tau(\theta) > 0$, lo que implica que el regulador obtiene beneficios marginales positivos si decide relajar la restricción IR, esto es $\pi(\theta) > 0$.

Para el caso donde $f(.)$ sigue una distribución normal, la función de beneficios de

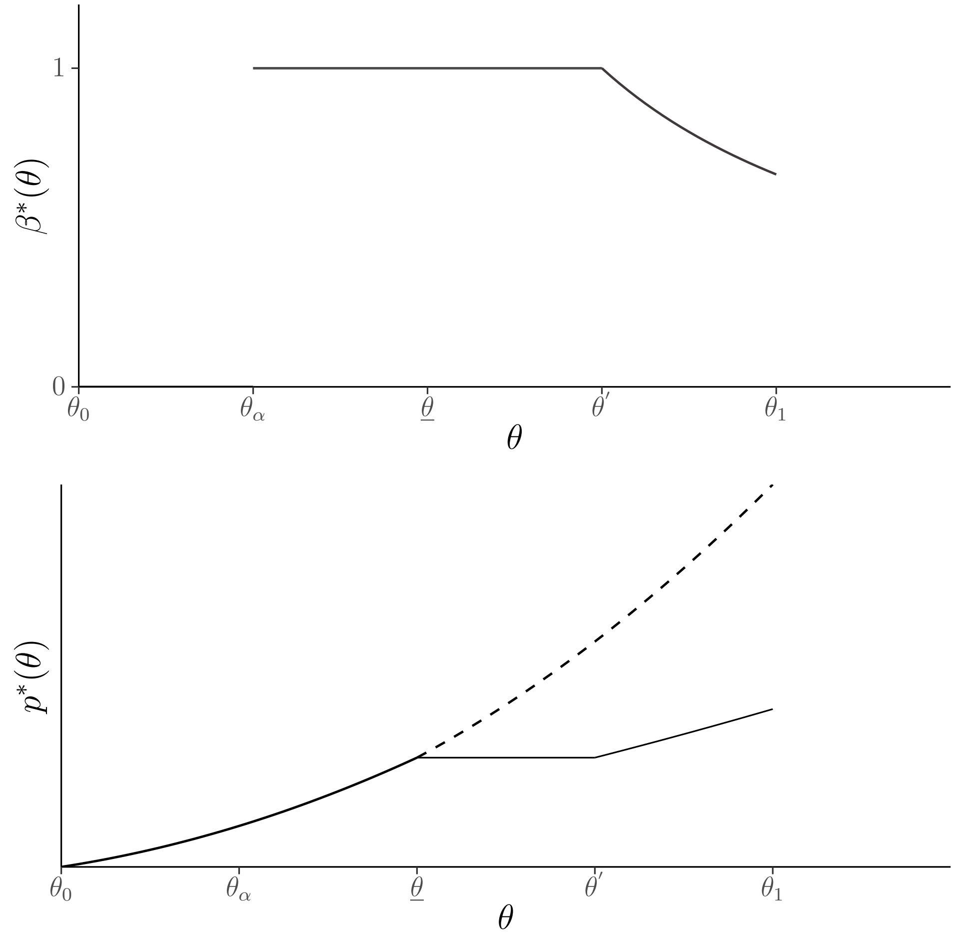

Figure 2.2: Incentivos cuando los costos marginales son crecientes

la firma (dada en la expresión (2.75)), pues $\pi(\theta_1) = 0$ (del lema 2.13)

$$\pi(\theta) = \int_{\theta}^{\theta_1} \left[\vec{c}'(\tilde{\theta})Q(p(\tilde{\theta})) - \beta(\tilde{\theta})\frac{\vec{c}'(\tilde{\theta})\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right] d\tilde{\theta}$$

Se puede verificar que un mayor beneficio *ceteris paribus* se obtiene a partir de (i) disminuir los precios (implica un aumento en la cantidad) y/o (ii) reducir la probabilidad de auditar. De este modo, para que el regulador asegure la participación de la firma en la industria debe incrementar la *renta informacional* de la firma a través de establecer un precio menor y/o reducir su probabilidad de auditar.

2.4.3 Mecanismo de la política regulatoria

La política regulatoría con *separación* expuesta en la proposición 2.11 puede ser resumida en un proceso de dos etapas. En la primera etapa, el regulador decide llevar a cabo una auditoría si el parámetro de costo reportado por la firma es *alto* ($\hat{\theta} \geq \theta_a$); esto es valores θ mayores a un umbral θ_a. Desde el punto de vista del regulador, si este recibe información sobre costos altos, entonces le conviene realizar un proceso de verificación de estos, pues es posible que la firma haya exagerado sus costos. En tanto, desde la perspectiva de la firma, la auditoría implica un costo adicional, ya que es probable que se le imponga un penalidad. Por lo tanto, si la firma tiene costos bajos no le conviene sobredimensionarlos. De esta forma, la auditoría es un instrumento adicional que es útil para otorgar incentivos a la empresa de tal forma que esta no mienta acerca de sus costos.

En la segunda etapa, cuando la auditoría es realizada y la realización de costo C es observado, el regulador compara el valor observado C con un valor crítico $Z^*(\theta)$ para decidir la aplicación de la penalidad. Si $C \leq Z^*(\theta)$, el regulador infiere que la firma a mentido en sus costos y por lo tanto es merecedor de una penalidad. Esto ocurre porque un costo realizado inferior al costo reportado esperado es evidencia que la firma a sobreestimado sus costos. A partir de la proposición 2.11 se conoce que la probabilidad de que la firma sea penalizada es 0.5, entonces la penalidad esperada es $\bar{N}/2$.

$$Pr\left(\tilde{C} \leq Z^*(\theta)|\theta\right) = G\left(\tilde{c}(\theta)|\theta\right) = 0.5$$

La política de auditoría óptima tiene por objetivo desincentivar a la firma a sobreestimar sus costos, pues un costo elevado implica una mayor probabilidad de que una penalidad se impuesta. De hecho, la firma con costos bajos tiene incentivos para sobreestimar sus costos con la finalidad de obtener un precio más alto, y así percibir beneficios más altos. Para lidiar con estos incentivos, la política óptima sugiere que las firmas de costos bajos $\theta \leq \theta_a$ no son acreedores de una auditoría y en consecuencia de una penalidad; por el contrario, se premia a estas firmas incrementando su beneficio esperado. De esta forma, se genera los incentivos correctos para que la empresa declare sus verdaderos costos.

En la figura 2.3 se muestra la región de auditoría en una política regulatoria con *separación*.

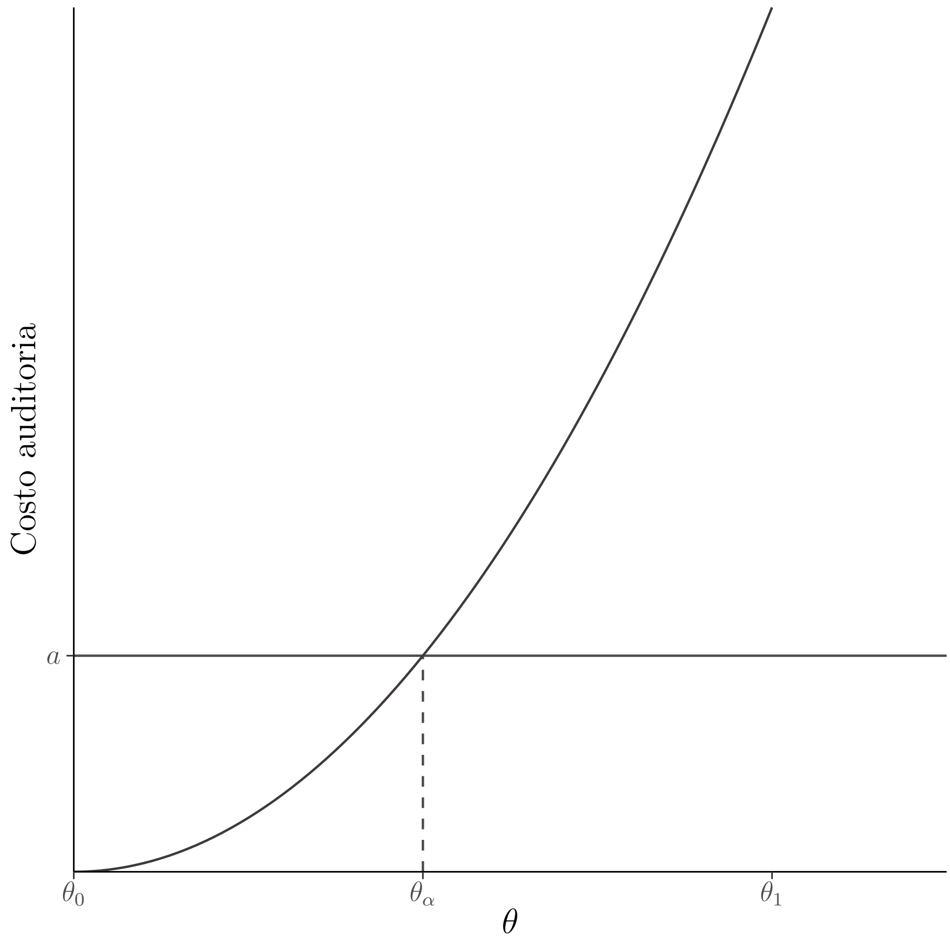

Figure 2.3: Incentivos cuando los costos marginales son crecientes

A partir de la expresión (2.82), puede mostrar algunos resultados de estática comparativa

$$\partial\theta_a/\partial a > 0 \tag{2.90}$$

$$\partial\theta_a/\partial\sigma > 0 \tag{2.91}$$

$$\partial\theta_a/\partial\bar{N} < 0 \tag{2.92}$$

$$\partial\theta_a/\partial\alpha > 0 \tag{2.93}$$

La expresión (2.90) indica que cuando el costo de la auditoría a se incrementa, la región de auditoría se contrae. De hecho, si este costo fuese nulo, entonces el regulador realizaría una auditoría para cualquier nivel de costo.

En tanto, la expresión (2.91) sugiere que cuando la varianza del costo marginal se incrementa, la región de auditoría se reduce. Una varianza grande en los costos implica que el parámetro reportado por la empresa θ es poco informativo para el regulador (a fin de que este pueda inferir el costo real), por lo tanto, el proceso de auditoría no es de mucha utilidad.

La expresión (2.92), por su parte, indica que un mayor monto de penalidad expande la región de auditoría. En efecto, una penalidad mayor funciona como un mecanismo que desincentiva a las firmas para sobreestimar sus costos. Así, si le es permitido al regulador imponer una mayor penalidad, entonces también es coherente ampliar la región de auditoría.

Finalmente la expresión (2.93) indica que si las firmas tienen mayor importancia en el beneficio social, entonces la región de auditoría se reduce. Este resultado se sustenta en el hecho de que la auditoría y transferencia $s(\theta)$ son dos instrumentos regulatorios sustitutos imperfectos. Así, cuando α se aproxima a uno, la política de *transferencia* se vuelve menos costosa para el regulador (en términos de reducir el bienestar social), pues esta política representaría una "transferencia pura" entre los consumidores y las firmas[28]. Dado que la transferencia es menos costosa, el

[28]Esto se da cuando en el caso extremo de $\alpha = 1$

regulador prefiere usar este instrumento para inducir a las firmas a reportar sus verdaderos costos.

2.4.4 Efecto de la política regulatoria con *separación* en el bienestar social

En esta sección se analiza el efecto que tiene la auditoría en la función de bienestar social cuando la función de beneficios es estrictamente positiva [29]; es decir, en un contexto en que la política regulatoria tiene la característica de *separación.*

El bienestar social ha sido definido como la suma ponderada del beneficio de las firmas y los consumidores. Así, en primer lugar, se analiza el efecto de la auditoría sobre el beneficio obtenido por las firmas. Para ello, se denota como $\pi^0(\theta)$ al beneficio cuando la auditoría no está permitida. La siguiente proposición señala la diferencia entre el beneficio de las firmas cuando la auditoría es permitida y cuando no lo está.

Proposición 2.13. *Bajo los mismos supuestos de la proposición 2.11, si la restricción IR no se cumple con igualdad para cualquier* $\theta < \theta_1$*, entonces el beneficio que perciben las firmas es menor cuando la auditoría es posible para todo* $\theta < \theta_1$*. Esto es:*

$$\pi^*(\theta) = \pi^0(\theta) - \int_{\max \theta, \theta_a}^{\theta_1} \frac{\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \vec{c}'(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} \tag{2.94}$$

Proof. A partir de los resultados del lema 2.13 se tiene que $\pi(\theta_1) = 0$. Asimismo, de acuerdo a la hipótesis de la proposición, h sigue una distribución normal, entonces la expresión (2.75) puede ser reescrita como:

$$\pi^*(\theta) = \int_{\theta}^{\theta_1} \left(\vec{c}'(\tilde{\theta}) Q(p^*(\tilde{\theta})) - \beta^*(\tilde{\theta}) \left(\frac{\bar{N}\vec{c}'(\tilde{\theta})}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) \right) d\tilde{\theta}$$

[29] esto es la restricción IR no se cumple con igualdad

Resaltar que se usó el hecho que $\int_\Gamma (N(\tilde{\theta}, C)dh(C|\tilde{\theta})/d\theta)dC = \bar{N}\bar{c}'(\tilde{\theta})/\sqrt{2\pi}\sigma$[30]. En la expresión anterior, se reemplaza $\beta^*(\theta)$ de (2.78), entonces

$$\pi^*(\theta) = \int_\theta^{\theta_1} \left(\bar{c}'(\tilde{\theta})Q(p^*(\tilde{\theta}))\right) d\tilde{\theta} - \int_{\theta_a}^{\theta_1} \left(\frac{\bar{N}\bar{c}'(\tilde{\theta})}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) d\tilde{\theta}$$

En tanto, el beneficio sin auditoría $\beta(\theta) = 0$ está dado por $\pi^0(\theta) = \int_\theta^{\theta_1} \left(\bar{c}'(\tilde{\theta})Q(p^*(\tilde{\theta}))\right) d\tilde{\theta}$. Por lo tanto, se obtiene

$$\pi^*(\theta) = \pi^0(\theta) - \int_{\max \theta, \theta_a}^{\theta_1} \frac{\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\bar{c}'(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}$$

□

La expresión (2.94) indica que la diferencia entre el beneficio que percibe la empresa con y sin auditoría $[\pi^*(\theta) - \pi^0(\theta)]$ es negativa; es decir, el beneficio de la empresa es mayor en un contexto en el que no se lleva a cabo un proceso de auditoría. Esta diferencia es constante e igual a $\int_{\theta_a}^{\theta_1} \frac{\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\bar{c}'(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}$ cuando $\theta \leq \theta_a$; mientras que es estrictamente decreciente cuando $\theta > \theta_a$. Dado que una parte de los beneficios se produce porque la firma tiene una mejor información; la auditoría busca aminorar esa ventaja.

En segundo lugar, para evaluar el efecto de la auditoria sobre el beneficio social, se denota a $T(\theta)$ como la diferencia del bienestar social en un contexto con auditoría y sin auditoría ($\beta(\theta) = 0$); entonces:

$$T(\theta) = -s^*(\theta) - a\beta^*(\theta) + 0.5\beta^*(\theta)\bar{N} + \alpha\pi^*(\theta) + s^0(\theta) - \alpha\pi^0(\theta)$$

El subsidio $s^*(\theta)$ se obtiene a partir de (2.65). Entonces, conjuntamente con la proposición 2.13, se tiene:

$$-s^*(\theta) = -s^0(\theta) - 0.5\beta^*(\theta) + \int_{\max \theta, \theta_a}^{\theta_1} \frac{\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\bar{c}'(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}$$

[30] Ver las pruebas a las proposición 2.11; y los lemas 2.11 y 2.12.

donde $s^0(\theta)$ representa la transferencia fija en un contexto sin auditoría.

$$-s^0(\theta) = p^*(\theta)Q(p^*(\theta)) - \bar{c}(\theta)Q(p^*(\theta)) - k - \int_{\theta}^{\theta_1} \bar{c}'(\tilde{\theta})Q(p^*(\tilde{\theta}))d\tilde{\theta}$$

Se reemplaza $s^*(\theta)$ y $s^0(\theta)$ en $T(\theta)$ y se obtiene

$$T(\theta) = (1-\alpha)(\pi^0(\theta) - \pi^*(\theta)) - a\beta^*(\theta) \tag{2.95}$$

Así, cuando la restricción IR es estricta (esto es $\pi(\theta) > 0$), la ganancia en el beneficio social producto de la auditoría es igual a la ganancia marginal $(1-\alpha)$ de transferir renta entre consumidores y firma multiplicada por la renta informativa $(\pi^0(\theta) - \pi^*(\theta))$ menos el costo esperado de la auditoría.

Para $\theta < \theta_a$, el regulador no lleva a cabo un proceso de auditoría, por lo tanto, a partir de (2.95), $T(\theta)$ resulta ser no negativo, pues $\alpha \in [0,1]$. Por otra parte, si $\theta > \theta_a$, la auditoría es segura, esto es $\beta^*(\theta) = 1$. Así, de la expresión (2.94) en (2.95) se obtiene:

$$T(\theta) = (1-\alpha)\int_{\theta}^{\theta_1} \frac{\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\bar{c}'(\tilde{\theta})d\tilde{\theta} - a$$

A partir de la definición de θ_a en (2.82), $T(\theta)$ queda dado como:

$$T(\theta) = \frac{(1-\alpha)\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\int_{\theta}^{\theta_1} \bar{c}'(\tilde{\theta})d\tilde{\theta} - \frac{F(\theta_a)}{f(\theta_a)}\bar{c}'(\theta_a)\right) \tag{2.96}$$

Esta expresión puede ser negativa indicando que el beneficio social se reduce cuando se lleva a cabo una auditoría. Por ejemplo, si $\bar{c}'(\theta) = \gamma$ y $F(\theta) = \frac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}$ (una función de distribución uniforme), entonces la expresión (2.96) resulta

$$T(\theta) = \frac{(1-\alpha)\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\gamma(\theta_a - \theta)$$

el cual es negativo para todo $\theta > \theta_a$.

Dado que $T(\theta)$ puede tomar valores positivos y negativos, es importante calcular el valor esperado de esta expresión, el cual está dado por:

$$\begin{aligned}E[T(\theta)] &= Pr(\beta(\theta)=0)\left((1-\alpha)(\pi^0(\theta)-\pi^*(\theta))\right) \\ &+ Pr(\beta(\theta)=1)\left((1-\alpha)(\pi^0(\theta)-\pi^*(\theta))-a\beta^*(\theta)\right)\end{aligned}$$

El primer término viene dado por la expresión (2.95) y segundo término por la expresión (2.96). Entonces:

$$\begin{aligned}E[T(\theta)] &= \frac{(1-\alpha)\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\theta_a}^{\theta_1}\bar{c}'(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}Pr(\theta\leq\theta_a) \\ &+ \frac{(1-\alpha)\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\int_{\theta}^{\theta_1}\bar{c}'(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}-\frac{F(\theta_a)}{f(\theta_a)}\bar{c}'(\theta_a)\right)Pr(\theta>\theta_a)\end{aligned}$$

Operando y reordenando se obtiene:

$$E[T(\theta)] = \frac{(1-\alpha)\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\theta_a}^{\theta_1}\bar{c}'(\tilde{\theta})F(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}-a(1-F(\theta_a)) \qquad (2.97)$$

Si $\alpha=1$, entonces $\theta_a=\theta_1$ y por lo tanto $E[T\theta]=0$. De esta modo, cuando el planificador valora en igual medida a los consumidores y a las firmas, los beneficios adicionales de la auditoría son nulos.

Para $\alpha<1$ y $\theta_a<\theta_1$, la definición para a de (2.82) se reemplaza en (2.97) y se obtiene

$$E[T(\theta)] = \frac{(1-\alpha)\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\theta_a}^{\theta_1}\left[\bar{c}'(\tilde{\theta})F(\tilde{\theta})-\bar{c}'(\theta_a)F(\theta_a)\frac{f(\tilde{\theta})}{f(\theta_a)}\right]d\tilde{\theta}$$

el cual es no negativo; es decir, el beneficio social que se obtiene dentro de una política donde se considera una auditoría nunca es menor al beneficio social sin auditoría. En base a (2.97) se puede obtener como cambia la ganancia de beneficio social producto de una auditoría cuando cambia la máxima penalidad impuesta

$$\frac{dE[T(\theta)]}{d\bar{N}} = \frac{(1-\alpha)}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\theta_a}^{\theta_1}\bar{c}'(\tilde{\theta})F(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}>0$$

Así, el valor esperado de $T(\theta)$ crece cuando la penalidad máxima $\bar{N}$ se incrementa.

Capítulo 3

Modelos Bidimensionales

3.1 Regulación con información asimétrica: Costos y demanda desconocidos

Esta sección tiene por objetivo analizar el modelo propuesto por Lewis and Sappington (1988b), en el cual la fuente de asimetría de información se produce en dos parámetros: la demanda y los costos. Como se había visto en modelos unidimensionales (esto es; la asimetría de información se produce en la demanda o en la oferta, pero no en ambos a la vez), el diseño de una política óptima de regulación depende de la fuente de información asimétrica. En esa línea, esta sección explora la estructura y las características de la política regulatoria cuando la demanda y los costos son desconocidos por el regulador, pero conocidos por la firma. En ese sentido, se dice que este modelo configura una estructura general que incluye a los modelos propuestos en el capítulo 1.

El supuesto acerca de la naturaleza bidimensional de la asimetría de información es más realista en comparación a lo planteado en los modelos unidimensionales. Dada la experiencia de la firma en la industria, es probable que la empresa disponga de mayor y mejor información acerca de los componentes de la demanda y los costos de producción. Sin embargo, resulta útil comparar los resultados en cuanto al precio y beneficios con lo obtenido en el caso donde la información asimétrica solo ocurre en un parámetro (costo o demanda) y donde información es completa.

Dado que la fuente de incertidumbre se produce en la demanda y en los costos, la solución al problema del regulador (esto es, la maximización de la función de bienestar social) no sigue métodos estándar. Para ello, se plantea reducir la dimensionalidad del problema de dos dimensiones a una sola dimensión, y de esta forma, obtener un problema convencional como el tratado en los modelos de Baron and Myerson (1982) y Lewis and Sappington (1988a). En ese sentido, se construye un espacio *isoprecio*, el cual resume la información provista por los dos parámetros desconocidos por el regulador (demanda y costos) en una sola variable.

Uno de los principales resultados de este modelo es el comportamiento que adquiere el precio regulado. Para combinaciones de costo y demanda bajas, el precio regulado puede exceder al costo marginal esperado. Esto se produce para reducir la cantidad de equilibrio, y con ello limitar los beneficios de la firma ante una posible exageración de sus costos. Este resultado es similar a lo obtenido en el caso donde la incertidumbre se produce solo en los costos.

Por otro lado, la incertidumbre en la demanda exige que para algunas combinaciones costo-demanda altas, el precio regulado pueda situarse por debajo del costo marginal esperado. Un menor precio (y un mayor nivel de subsidio), en un contexto en donde la demanda es alta, tiene por objetivo reducir los beneficios percibidos por las firmas y de este modo desincentivar una posible subreporte del parámetro de demanda.

Adicionalmente, se desarrolla un ejemplo sencillo que permite caracterizar la solución regulatoria óptima. Sin embargo, a diferencia del artículo original de Lewis and Sappington (1988b), los resultados a los que se llega no son los mismos. En efecto, el precio regulado que se obtiene en la solución original tiende al infinito para las combinaciones costo-demanda altas violando el supuesto que asegura que la demanda sea no negativa (Armstrong, 1999). En contraste, la solución que se presenta en esta sección evidencia que el precio tiene una cota superior para niveles costo-demanda altas.

3.1.1 Modelo

El costo de producir q unidades está dado por:

$$\tilde{C}\,(q, c) = C(q) + \delta^C cq \tag{3.1}$$

donde $c > 0$ es una variable aleatoria que cambia la posición de la función de costos y $\delta^C \geq 0$ es una constante. Asimismo, se tiene que la demanda por el producto $q = Q(p, \theta)$ está dado por:

$$Q(p, \theta) = h(p) + \delta^D \theta \tag{3.2}$$

donde θ es un parámetro aleatorio que captura el cambio de posición de la demanda y $\delta^D \geq 0$ es una constante. Así, cambios en δ^D miden los efectos del componente aleatorio en la demanda.

La asimetría de información se produce sobre los parámetros (θ, c). Así, solo la firma conoce la realización de estos parámetros. El regulador asume que estos parámetros se distribuyen siguiendo una función de densidad $f(\theta, c)$ sobre el conjunto $D = [\underline{\theta}, \overline{\theta}]x[\underline{c}, \overline{c}]$. Asimismo, cabe indicar que los componentes $C(q)$ y $h(p)$ representan a las funciones de costo y demanda que son de conocimiento común por parte de las firmas y del regulador.

El modelo asume que la cantidad demandada varía de manera inversa al precio; es decir $Q_p(p,\theta) = h'(p) < 0$. Además, se considera que el costo es estrictamente creciente en q, esto es:

$$\tilde{C}_q(q,c) = C'(q) + \delta^D c > 0$$

Adicionalmente, para caracterizar un máximo local en vez de un mínimo, se considera el siguiente supuesto

$$[1 - C''(.)Q_p(.)] > 0 \tag{S1}$$

cuando $\tilde{C}_{qq}(.) < 0$. Este supuesto asegura que la pendiente de la demanda es mayor a la pendiente del costo marginal, cuando este último es decreciente. Este hecho asegura que cuando el precio y el costo marginal sean iguales, el excedente social[1] alcanza un punto máximo (local).

De igual manera, se asume que la demanda es suficientemente grande y que el costo es suficientemente pequeño para todas las realizaciones de (θ, c). Además, se restringe el espacio de (θ, c) a $D' \subseteq D$ tal que para cualquier (θ, c), la cantidad es estrictamente positiva

$$D' \equiv \{(\theta, c) | Q(p(\theta, c), \theta) > 0\}$$

Bajo la estructura de este modelo, el regulador ofrece a la firma un menú de contratos que está compuesto por un precio p y una transferencia T. Esta transferencia es el "pago" que los consumidores le hacen a la firma, y puede ser pensado como una *tarifa de acceso* o un costo fijo que los consumidores asumen en un contexto de *tarifa en dos partes*. Asimismo, se asume que el monopolista proveerá toda la demanda requerida al precio regulado p [2].

[1] El excedente del consumidor y productor

[2] A pesar de que resulta bastante costoso verificar la cantidad vendida por la firma, el regulador puede garantizar que la firma suministrará toda la demanda requerida a través de los consumidores. En efecto, los consumidores pueden quejarse si se les niega adquirir el bien o se les cobra un precio más alto al establecido, y por consiguiente la firma puede ser sancionada.

El modelo puede ser pensado como un juego en varias etapas. En la primera etapa, la firma observa las realizaciones de c y θ. En base al conocimiento apriori de estos parámetros (capturado por $f(\theta, c)$), el regulador diseña una política regulatoria a fin de maximizar el excedente esperado del consumidor. Luego, la firma observa la política anunciada y selecciona, óptimamente, una opción del menú de contratos. Finalmente, la firma produce la cantidad que satisface la demanda al precio acordado [3].

La firma con parámetros (θ, c) que declara $(\hat{\theta}, \hat{c})$ obtiene un beneficio dado por:

$$\pi(\hat{\theta}, \hat{c}|\theta, c) = p(\hat{\theta}, \hat{c})Q(p(\hat{\theta}, \hat{c}), \theta) - \tilde{C}(Q(p(\hat{\theta}, \hat{c}), \theta), c) + T(\hat{\theta}, \hat{c}) \tag{3.3}$$

La restricción IR asegura que la firma obtenga un beneficio que, al menos ,sea igual a su *renta de reserva* al declarar su información privada (θ, c). Esto es:

$$\pi(\theta, c) \equiv \pi(\theta, c|\theta, c) \geq 0, \quad \forall(\theta, c) \in D \tag{3.4}$$

En tanto, la restricción IC asegura que la firma del tipo (θ, c), prefiera el contrato $p(\theta, c), T(\theta, c)$ a cualquier otro contrato. Así la restricción IC viene dado por:

$$\pi(\theta, c) \geq \pi(\hat{\theta}, \hat{c}|\theta, c), \quad \forall(\hat{\theta}, \hat{c}), (\theta, c) \in D \tag{3.5}$$

Se asume que el regulador maximiza solo la función de bienestar de los consumidores. De esta forma, la función objetivo del regulador está dado como:

$$W = V(Q(\theta, c), \theta) - p(\theta, c)Q(p(\theta, c), \theta) - T(\theta, c)$$

donde $V(Q, \theta)$ denota el excedente bruto del consumidor y está definido como $V(Q, \theta) = \int_0^Q P(\xi, \theta)d\xi$, en el cuál $P(.)$ representa la función inversa de la demanda.

[3]La participación de la firma en el mercado es voluntaria dependiendo de que sus beneficios percibidos cubran su *renta de reserva*; sin embargo, se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que todas las firmas siempre participarán en la industria porque la política regulatoria está diseñada para que la firma obtenga al menos su *renta de reserva*.

A partir de (3.3), se despeja $T(\theta,c)=\pi(\theta,c)-p(\theta,c)Q(p(\theta,c),\theta)+\tilde{C}(Q(p(\theta,c),\theta),c)$. Entonces la función objetivo del planificador se expresa como:

$$W = V(Q(\theta,c),\theta) - \tilde{C}(Q(p(\theta,c),\theta),c) - \pi(\theta,c) \tag{3.6}$$

Por lo tanto, el problema del regulador está dado por:

$$\begin{aligned}
\underset{p,T}{max} \quad & \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \left\{ V(Q(\theta,c),\theta) - \tilde{C}(Q(p(\theta,c),\theta),c) - \pi(\theta,c) \right\} f(\theta,c) dc d\theta \\
\text{s.t.} \quad & \pi(\theta,c) \geq 0, \qquad \forall(\theta,c) \in D \\
& \pi(\theta,c) \geq \pi(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c), \forall(\hat{\theta},\hat{c}),(\theta,c) \in D
\end{aligned} \tag{3.7}$$

3.1.2 Reformulación del problema del regulador

El objetivo de esta sección consiste en transformar el problema de dos dimensiones a una sola dimensión. Asimismo, se modifica la restricción IC planteada en la expresión (3.5) (en adelante, restricción IC global) a una más relajada (restricción IC local) de tal forma que se facilite la resolución del problema (3.7).

Respecto a la primera tarea (transformar el problema de dos dimensiones a una sola dimensión) se construye una curva *isoprecio* en un espacio (θ,c). Cada curva *isoprecio* consiste en todos los puntos (θ,c) para los cuales el mismo precio $p(\theta,c)$ es cobrado. Este espacio *isoprecio* es caracterizado por el lema 3.1 (la prueba se encuentra en el apéndice B).

Lema 3.1. *Sea* $\Pi(p,\theta,c) = pQ(p,\theta) - \tilde{C}(Q(p,\theta),c) + T$. *Entonces, en la solución al problema (3.7), la pendiente* λ *de la curva isoprecio en el espacio* (θ,c) *está dado por:*

$$\lambda \equiv \frac{dc}{d\theta}\Big|_{dp=0} = -\frac{\Pi_{p\theta}(p,\theta,c)}{\Pi_{pc}(p,\theta,c)} = \frac{\delta^D\left[1 - C''(Q(p,\theta))h'(p)\right]}{\delta^C h'(p)} < 0$$

En la figura 3.1 se puede observar las curvas *isoprecio* para el caso donde estas curvas son lineales.

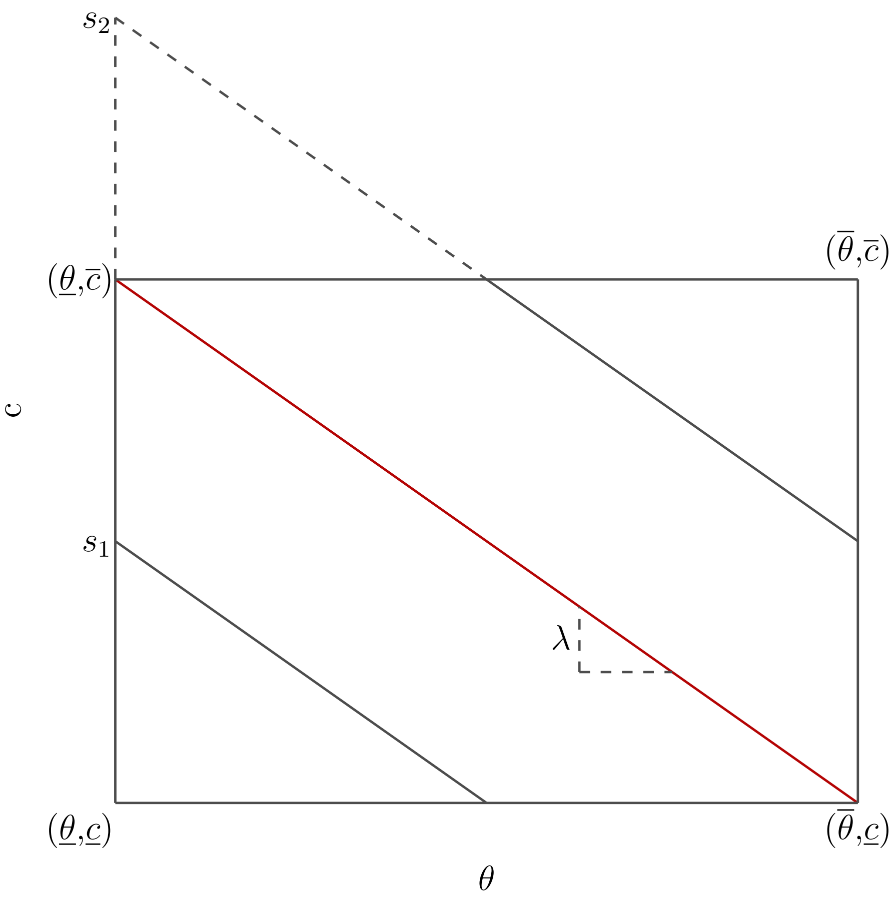

Figure 3.1: Espacio isoprecio

El espacio *isoprecio* facilita la reducción de la dimensionalidad del problema del regulador al introducir una nueva variable s, la misma que se define, de manera implícita, como:

$$r(s) := p(\underline{\theta}, s) = p(\theta, c) \tag{3.8}$$

Un caso particular del espacio *isoprecio* es cuando esta es lineal. Para ello es necesario que [4]:

$$C'''(.) = 0, \quad q \geq 0$$

En la figura 3.1 se presenta el caso donde las curvas *isoprecio* son lineales. De esta forma, s representa el intercepto en el eje vertical e identifica de forma única a cada curva *isoprecio*. Así, la relación entre c y s está dado por:

$$c = s + [\theta - \underline{\theta}]\lambda \tag{3.9}$$

Notar que s se incrementa cuando c y θ se incrementan, ya que $\lambda < 0$. Así, un mayor nivel de s sugiere una combinación más alta de (c, θ). Por ejemplo, en la figura 3.1, las combinaciones (c, θ) que configuran la curva s_2 son más altas a las combinaciones de las curvas s_1 (crecen en dirección noreste).

De esta forma, el problema (3.7) se puede transformar a uno en el que se elige $r(.)$ (definido en la expresión (3.8)) para cada nivel realización s. Ello, en en lugar de elegir $p(.)$ para cada realización (θ, c). De esta manera, se reduce el problema a una sola dimensión.

Por otro lado, se introduce la restricción IC local, la misma que garantiza que la firma no tenga incentivos para mentir acerca de la verdadera realización (θ, c) y declarar $(\hat{\theta}, c), (\theta, \hat{c})$ o $(\hat{\theta}, \hat{c})$ en la vecindad de (θ, c). Así, los requerimientos son:

$$\pi_{\hat{c}}(\theta, \hat{c}|\theta, c)|_{\hat{c}=c} = 0 \tag{3.10}$$

$$\pi_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}, c|\theta, c)|_{\hat{\theta}=\theta} = 0 \tag{3.11}$$

[4]Si $C'''(.) = 0$, entonces $C''(.)$ es constante (no depende de q). De esta forma, considerando el lema 3.1, se da cuenta que la pendiente de la curva *isoprecio* λ solo depende del precio p. Por lo tanto, dado un precio, λ no depende de θ ni c, y por consiguiente la curva isoprecio es lineal.

La expresión $\pi_{\hat{c}}(\theta,\hat{c}|\theta,c)$ está dado por:

$$\pi_{\hat{c}}(.) = \frac{dp(\theta,\hat{c})}{d\hat{c}}Q(p(\theta,\hat{c}),\theta) + p(\theta,\hat{c})\frac{dQ}{dp}\frac{dp(\theta,\hat{c})}{d\hat{c}} - \frac{\tilde{C}}{dQ}\frac{dQ}{dp}\frac{dp}{d\hat{c}} + \frac{dT}{d\hat{c}}$$

Evaluando esta expresión en $\hat{c}=c$, se tiene que:

$$\pi_{\hat{c}}(.)|_{\hat{c}=c}= \frac{dp(\theta,c)}{dc}Q(p(\theta,c),\theta) + p(\theta,c)\frac{dQ}{dp}\frac{dp(\theta,c)}{dc} - \frac{\tilde{C}}{dQ}\frac{dQ}{dp}\frac{dp}{dc} + \frac{dT}{dc}$$

Sumando y restando $\pi_c(\theta,\hat{c}|\theta,c)|_{\hat{c}=c}= d\tilde{C}/dc = \delta^C Q(p,\theta)$, se tiene:

$$\pi_{\hat{c}}(.)|_{\hat{c}=c} = \frac{dp(\theta,c)}{dc}Q(.) + p(\theta,c)\frac{dQ}{dp}\frac{dp(\theta,c)}{dc} - \frac{\tilde{C}}{dQ}\frac{dQ}{dp}\frac{dp}{dc} + \frac{dT}{dc} - \frac{d\tilde{C}}{dc} + \frac{d\tilde{C}}{dc}$$

$$\pi_{\hat{c}}(.)|_{\hat{c}=c} = \pi_c(\theta,c) + \pi_c(\theta,\hat{c}|\theta,c)_{\hat{c}=c}$$

Como $\pi_{\hat{c}}(\theta,\hat{c}|\theta,c)|_{\hat{c}=c}= 0$, entonces (3.10) se puede expresar como:

$$\pi_c(\theta,c) = -\pi_c(\theta,\hat{c}|\theta,c)|_{\hat{c}=c}= -\delta^C Q(p,\theta) \tag{3.12}$$

De igual modo, para la expresión (3.11), se tiene:

$$\pi_{\hat{\theta}}(\hat{\theta},c|\theta,c) = \frac{dp(\hat{\theta},c)}{d\hat{\theta}}Q(p(\hat{\theta},c),\theta) + p(\hat{\theta},c)\frac{dQ}{dp}\frac{dp}{d\hat{\theta}} - \frac{d\tilde{C}}{dQ}\frac{dQ}{dp}\frac{dp}{d\hat{\theta}} + \frac{T(\hat{\theta},c)}{d\hat{\theta}}$$

Evaluando esta expresión cuando $\hat{\theta}=\theta$, se obtiene:

$$\pi_{\hat{\theta}}(\hat{\theta},c|\theta,c)|_{\hat{\theta}=\theta}= \frac{dp(\theta,c)}{d\theta}Q(p(\theta,c),\theta) + p(\theta,c)\frac{dQ}{dp}\frac{dp}{d\theta} - \frac{d\tilde{C}}{dQ}\frac{dQ}{dp}\frac{dp}{d\theta} + \frac{T(\theta,c)}{d\theta}$$

Sumando y restando $\pi_\theta(\hat{\theta},c|\theta,c)|_{\hat{\theta}=\theta}= p(\theta,c)\frac{dQ}{d\theta} - \frac{d\tilde{C}}{dQ}\frac{dQ}{d\theta} = \delta^D\left[p(\theta,c) - \tilde{C}_Q(Q(p(\theta,c),\theta),c)\right]$, se tiene:

$$\begin{aligned}\pi_{\hat\theta}(\hat\theta,c|\theta,c)|_{\hat\theta=\theta}=&\ \frac{dp(\theta,c)}{d\theta}Q(p(\theta,c),\theta)+p(\theta,c)\frac{dQ}{dp}\frac{dp}{d\theta}-\frac{d\tilde{C}}{dQ}\frac{dQ}{dp}\frac{dp}{d\theta}+\frac{T(\theta,c)}{d\theta}\\ &+p(\theta,c)\frac{dQ}{d\theta}-\frac{d\tilde{C}}{dQ}\frac{dQ}{d\theta}-p(\theta,c)\frac{dQ}{d\theta}+\frac{d\tilde{C}}{dQ}\frac{dQ}{d\theta}\\ \pi_{\hat\theta}(\hat\theta,c|\theta,c)|_{\hat\theta=\theta}=&\ \frac{dp(\theta,c)}{d\theta}Q(p(\theta,c),\theta)+p(\theta,c)\left[\frac{dQ}{dp}\frac{dp}{d\theta}+\frac{dQ}{d\theta}\right]-\frac{d\tilde{C}}{dQ}\left[\frac{dQ}{dp}\frac{dp}{d\theta}+\frac{dQ}{d\theta}\right]\\ &+\frac{T(\theta,c)}{d\theta}-\left(p(\theta,c)\frac{dQ}{d\theta}-\frac{d\tilde{C}}{dQ}\frac{dQ}{d\theta}\right)\end{aligned}$$

Así:

$$\pi_{\hat\theta}(\hat\theta,c|\theta,c)|_{\hat\theta=\theta}=\pi_\theta(\theta,c)-\pi_\theta(\hat\theta,c|\theta,c)|_{\hat\theta=\theta}$$

Como $\pi_{\hat\theta}(\hat\theta,c|\theta,c)|_{\hat\theta=\theta}=0$, entonces (3.11) se expresa como:

$$\pi_\theta(\theta,c)=\pi_\theta(\hat\theta,c|\theta,c)|_{\hat\theta=\theta}=\delta^D\left[p(\theta,c)-\tilde{C}_Q(Q(p(\theta,c),\theta),c)\right] \tag{3.13}$$

Las expresiones (3.12) y (3.13) constituyen otra forma de representar a restricción IC local. De (3.12), integrando de c a $\bar{c}$ se tiene una expresión para $\pi(\theta,c)$

$$\begin{aligned}\int_c^{\bar c}d\pi(\theta,c)&=\int_c^{\bar c}-\delta^C Q(p(\theta,c),\theta)dc\\ \pi(\theta,\bar c)-\pi(\theta,c)&=\int_c^{\bar c}-\delta^C Q(p(\theta,c),\theta)dc\end{aligned}$$

Entonces:

$$\pi(\theta,c)=\pi(\theta,\bar c)+\int_c^{\bar c}\delta^C Q(p(\theta,c),\theta)dc \tag{3.14}$$

A partir de (3.14) la función objetivo del regulador puede escribirse como:

$$\int_{\underline\theta}^{\overline\theta}\int_{\underline c}^{\bar c}\left\{V(Q(\theta,c),\theta)-\tilde{C}(Q(p(\theta,c),\theta),c)-\int_c^{\bar c}\delta^C Q(p(\theta,c),\theta)dc-\pi(\theta,\bar c)\right\}f(\theta,c)dcd\theta$$

Se realiza algunas operaciones aritméticas, entonces la función objetivo a maximizar será:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \Big\{ V(Q(\theta,c),\theta) - \tilde{C}(Q(p(\theta,c),\theta),c) - \pi(\theta,\bar{c}) \Big\} f(\theta,c) dc d\theta$$
$$- \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \left(\int_{c}^{\overline{c}} \delta^C Q(p(\theta,c),\theta) dc \right) f(\theta,c) dc d\theta$$

Integrando por partes el último término, se tiene:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \left(\int_{c}^{\overline{c}} \delta^C Q(p(\theta,c),\theta) dc \right) f(\theta,c) dc d\theta = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \Bigg\{ \left(\left(\int_{c}^{\overline{c}} \delta^C Q(p(\theta,c),\theta) dc \right) F(\theta,c) \right) \Bigg|_{\underline{c}}^{\overline{c}}$$
$$- \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} -F(\theta,c)\delta^C Q(p(\theta,c),\theta) dc \Bigg\} d\theta$$

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \left(\int_{c}^{\overline{c}} \delta^C Q(p(\theta,c),\theta) dc \right) f(\theta,c) dc d\theta = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} F(\theta,c)\delta^C Q(p(\theta,c),\theta) dc d\theta$$

donde $F(\theta,c)$ representa la función acumulada para c condicional en θ, definida como $F(\theta,c) = \int_{\underline{c}}^{c} f(\theta,\tilde{c})d\tilde{c}$. De esta forma, la función objetivo del regulador queda como:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \Big\{ V(Q(\theta,c),\theta) - \tilde{C}(Q(p(\theta,c),\theta),c) - \pi(\theta,\bar{c}) \Big\} f(\theta,c) dc d\theta$$
$$- \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} F(\theta,c)\delta^C Q(p(\theta,c),\theta) dc d\theta$$

Entonces:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \left\{ V(Q(\theta,c),\theta) - \tilde{C}(Q(p(\theta,c),\theta),c) - \delta^C Q(p(\theta,c),\theta) \frac{F(\theta,c)}{f(\theta,c)} - \pi(\theta,\bar{c}) \right\} f(\theta,c) dc d\theta \tag{3.15}$$

La expresión (3.13) ayuda a caracterizar $\pi(\theta,\bar{c})$. Para ello se establece los siguientes supuestos:

Supuesto 3.1. *La demanda es lineal; esto es $Q(p,\theta) = a + \delta^D\theta - bp$, donde a y b son constantes estrictamente positiva.*

Supuesto 3.2. *El costo marginal declina linealmente; esto es, $C'''(q) = 0, \quad \forall q \geq 0$.*

Supuesto 3.3. *El beneficio* $\pi(\theta, \bar{c}) = 0$ *para el intervalo* $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Considerando estos supuestos y (3.13) se puede obtener una expresión para $\pi(\theta, \bar{c})$. Así se tiene que:

$$d\pi(\theta, \bar{c}) = \delta^D \left[p(\theta, \bar{c}) - \tilde{C}_Q(Q(p(\theta, \bar{c}), \theta), \bar{c})\right] d\theta$$

Para cualquier $\theta \in [\underline{\theta}, \theta_1]$, integrando la expresión de θ a θ_1, se obtiene

$$\begin{aligned}
\pi(\theta_1, \bar{c}) - \pi(\theta, \bar{c}) &= \int_{\theta}^{\theta_1} \delta^D \left[p(\theta, \bar{c}) - \tilde{C}_Q(Q(p(\theta, \bar{c}), \theta), \bar{c})\right] d\theta \\
\pi(\theta, \bar{c}) &= -\delta^D \int_{\theta}^{\theta_1} \left[p(\theta, \bar{c}) - \tilde{C}_Q(Q(p(\theta, \bar{c}), \theta), \bar{c})\right] d\theta
\end{aligned}$$

pues $\pi(\theta_1, \bar{c}) = \pi(\theta_2, \bar{c}) = 0$ por el supuesto 3.3. De igual forma, integrando para cualquier $\theta \in [\theta_2, \bar{\theta}]$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\pi(\theta, \bar{c}) - \pi(\theta_2, \bar{c}) &= \int_{\theta_2}^{\theta} \delta^D \left[p(\theta, \bar{c}) - \tilde{C}_Q(Q(p(\theta, \bar{c}), \theta), \bar{c})\right] d\theta \\
\pi(\theta, \bar{c}) &= \delta^D \int_{\theta_2}^{\theta} \left[p(\theta, \bar{c}) - \tilde{C}_Q(Q(p(\theta, \bar{c}), \theta), \bar{c})\right] d\theta
\end{aligned}$$

Dado que para cualquier $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ se tiene que $\pi(\theta, \bar{c}) = 0$, entonces:

$$\pi(\theta, \bar{c}) = \begin{cases}
-\delta^D \int_{\theta}^{\theta_1} \left[p(\theta, \bar{c}) - \tilde{C}_Q(Q(p(\theta, \bar{c}), \theta), \bar{c})\right] d\theta & \text{si } \theta \in [\underline{\theta}, \theta_1] \\
0 & \text{si } \theta \in [\theta_1, \theta_2] \\
\delta^D \int_{\theta_2}^{\theta} \left[p(\theta, \bar{c}) - \tilde{C}_Q(Q(p(\theta, \bar{c}), \theta), \bar{c})\right] d\theta & \text{si } \theta \in [\theta_2, \bar{\theta}]
\end{cases} \tag{3.16}$$

De (3.16), se puede obtener una expresión para $\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} \pi(\theta, \bar{c}) f(\theta, c) dc d\theta$. Se denota $\tilde{g}(\theta) = \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} f(\theta, c) dc$ y $\tilde{G}(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} \tilde{g}(\xi) d\xi$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} \pi(\theta, \bar{c}) f(\theta, c) dc d\theta &= \int_{\underline{\theta}}^{\theta_1} \pi(\theta, \bar{c}) \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} f(\theta, c) dc d\theta + \int_{\theta_2}^{\bar{\theta}} \pi(\theta, \bar{c}) \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} f(\theta, c) dc d\theta \\
&= \int_{\underline{\theta}}^{\theta_1} \pi(\theta, \bar{c}) \tilde{g}(\theta) d\theta + \int_{\theta_2}^{\bar{\theta}} \pi(\theta, \bar{c}) \tilde{g}(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

Al integrar por partes se obtiene:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} \pi(\theta, \bar{c}) f(\theta, c) dc d\theta = -\, \delta^D \int_{\underline{\theta}}^{\theta_1} \Big[p(\theta, \bar{c}) - \tilde{C}_Q(Q(p(\theta, \bar{c}), \theta), \bar{c}) \Big] \tilde{G}(\theta) d\theta$$
$$+ \delta^D \int_{\theta_2}^{\bar{\theta}} \Big[p(\theta, \bar{c}) - \tilde{C}_Q(Q(p(\theta, \bar{c}), \theta), \bar{c}) \Big] \Big[1 - \tilde{G}(\theta) \Big] d\theta \tag{3.17}$$

Entonces, el problema del planificador consiste en elegir $p(\theta, c)$ y $T(\theta, c)$ de tal modo que se maximice la siguiente función:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} \left\{ V(Q(p(\theta, c), \theta), \theta) - \tilde{C}(Q(p(\theta, c), \theta), c) - \delta^C Q(p(\theta, c), \theta) \frac{F(\theta, c)}{f(\theta, c)} \right\} f(\theta, c) dc d\theta$$
$$+ \delta^D \int_{\underline{\theta}}^{\theta_1} \Big[p(\theta, \bar{c}) - \tilde{C}_Q(Q(p(\theta, \bar{c}), \theta), \bar{c}) \Big] \tilde{G}(\theta) d\theta$$
$$- \delta^D \int_{\theta_2}^{\bar{\theta}} \Big[p(\theta, \bar{c}) - \tilde{C}_Q(Q(p(\theta, \bar{c}), \theta), \bar{c}) \Big] \Big[1 - \tilde{G}(\theta) \Big] d\theta$$

Al usar las expresiones (3.8) y (3.9) se puede tener cambiar c a s y $p(\theta, c)$ a $r(s)$. Asimismo, se intercambia el orden de las integrales [5]. Así, la primera parte de la expresión anterior se puede escribir como:

$$\int_{\underline{c}}^{\bar{s}} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \Big\{ V(Q(r(s), \theta), \theta) - \tilde{C}\left(Q(r(s), \theta), c(s, \theta)\right) -$$
$$\delta^C Q(r(s), \theta) \frac{F(\theta, c(s, \theta))}{f(\theta, c(s, \theta))} \Big\} f(\theta, c(s, \theta)) d\theta ds$$

De igual manera, se aplica las mismas transformaciones [6] a las dos últimas expresiones:

$$\int_{\bar{c}}^{s_1} \delta^D \Big[r(s) - \tilde{C}_Q(Q(r(s), \theta), \bar{c}) \Big] G(s) ds - \int_{s_2}^{\bar{s}} \delta^D \Big[r(s) - \tilde{C}_Q(Q(r(s), \theta), \bar{c}) \Big] [1 - G(s)] ds$$

[5] Se tiene que $\underline{c} \leq c \leq \bar{c}$. Asimismo de (3.9) se obtiene que $\underline{c} - \lambda[\theta - \underline{\theta}] \leq s \leq \bar{c} - \lambda[\theta - \underline{\theta}]$. Como $\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$, entonces los límites de s serán $\underline{c}$ y $\bar{s} \equiv \bar{c} - [\bar{\theta} - \underline{\theta}]\lambda$

[6] Dado que el parámetro c esta fijo en $\bar{c}$, entonces se cambia de variable de θ a s. Para el primer término, se tiene que $\underline{\theta} \leq \theta \leq \theta_1$. Así, usando la expresión (3.9) se puede obtener que $\bar{c} \leq s \leq \bar{c} - \lambda - \lambda(\theta_1 - \underline{\theta}) \equiv s_1$. De igual manera para el segundo término, se obtiene que $s_2 \equiv \bar{c} - \lambda(\theta_2 - \underline{\theta}) \leq s \leq \bar{c} - \lambda(\bar{\theta} - \underline{\theta}) \equiv \bar{s}$.

donde $\tilde{G}(\theta)d\theta = \tilde{G}\left(\underline{\theta} - \frac{1}{\lambda}(s-\bar{c})\right)\left(-\frac{1}{\lambda}\right)ds \equiv G(s)ds$[7] y $\left[1-\tilde{G}(\theta)\right] = \left[1-\tilde{G}\left(\underline{\theta} - \frac{1}{\lambda}(s-\bar{c})\right)\right] \equiv$ $[1-G(s)]$. Entonces el problema del regulador (3.7) puede ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
\underset{r(s),s_1,s_2}{max} \quad & \int_{\underline{c}}^{\bar{s}} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \Big\{ V(Q(r(s),\theta),\theta) - \tilde{C}(Q(r(s),\theta),c(s,\theta)) \\
& - \delta^C Q(r(s),\theta)\frac{F(\theta,c(s,\theta))}{f(\theta,c(s,\theta))}\Big\} f(\theta,c(s,\theta))d\theta ds \\
& + \int_{\bar{c}}^{s_1} \delta^D \left[r(s) - \tilde{C}_Q(Q(r(s),\theta),\bar{c})\right] G(s)ds \\
& - \int_{s_2}^{\bar{s}} \delta^D \left[r(s) - \tilde{C}_Q(Q(r(s),\theta),\bar{c})\right] [1-G(s)]\, ds
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

donde $c(s,\theta) = s + \lambda[\theta - \underline{\theta}]$ y $s_i = \bar{c} - \lambda[\theta_i - \underline{\theta}]$ para $i = 1, 2$. Además para todo $s \in [\bar{c}, \bar{c} - \lambda(\bar{\theta} - \underline{\theta})]$

$$
\begin{aligned}
g(s) &= \tilde{g}\left(\underline{\theta} - \frac{1}{\lambda}(s-\bar{c})\right)\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \\
G(s) &= \int_{\bar{c}}^{s} g(\xi)d\xi
\end{aligned}
$$

El problema reestructurado (3.18) resulta beneficioso por dos motivos: (i) la solución óptima se obtiene a través de *pointwise maximization* sobre $r(s)$, s_1 y s_2; y (ii) el problema (3.18) incorpora la restricción IC local. En tanto, la restricción IC global debería ser verificada ex-post para resolver el problema original del regulador. El siguiente lema expresa las condiciones para las cuales se garantiza que la solución al problema transformado (3.18) sea también la solución al problema original (3.7) (es decir que satisfaga la restricción IC global).

Lema 3.2. *Si los supuestos 1-3 son satisfechos y la solución al problema (3.18) tiene la siguiente característica:*

$$r'(s) \geq 0 \quad \forall s \in [\underline{c}, \bar{s}]$$

entonces la solución a (3.18) es también solución a (3.7).

Lema 3.3. *En la solución del problema (3.7), $p_\theta(\theta, c) \geq 0$ y $p_c(\theta, c) \geq 0$, $\forall(\theta, c) \in$*

[7] De (3.9) se conoce que $s = \bar{c} - \lambda(\theta - \underline{\theta})$, entonces $\frac{ds}{d\theta} = -\lambda$

D'

La prueba a los lemas 3.2 y 3.3 se encuentran en el apéndice B. El lema 3.3 indica que el precio regulado sera mayor mientras más alto sea la demanda (θ) y los costos de producción (c).

3.1.3 Política Óptima Regulatoria

A partir de la reformulación del problema del planificador, se puede obtener la política óptima regulatoria. Para facilitar la notación se hacen las siguientes definiciones:

Definición 3.1.

$$EMC(s) = \frac{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \tilde{C}_Q \left(Q(r(s), \theta), c(s, \theta)\right) f\left(\theta, c(s, \theta)\right) d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f\left(\theta, c(s, \theta)\right) d\theta}$$

La EMC representa al costo marginal esperado a lo largo de la curva isoprecio de intercepto s.

Definición 3.2.

$$AMC(s) = EMC(s) + \frac{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} F\left(\theta, c(s, \theta)\right) d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f\left(\theta, c(s, \theta)\right) d\theta}$$

Por su parte, el AMC representa al costo marginal esperado ajustado a lo largo de la curva isoprecio de intercepto s. El segundo término de esta expresión constituye la generalización multidimensional de la inversa del ratio de hazard (siguiendo al modelo planteado por Baron and Myerson (1982)). Este término captura la magnitud por el cuál el precio regulado se diferencia del costo marginal esperado. De esta forma, se produce un *trade-off*. Por un lado se produce una pérdida de eficiencia debido a un mayor precio; y por otro lado, el aumento en el precio resulta en una ganancia esperada al reducir las brechas informacionales. De hecho, un mayor precio brinda un incentivo para que la firma declare su información privada.

Proposición 3.1. *Si los supuestos 3.1-3.3 son satisfechos, entonces en la solución al problema (3.18) para* $(\theta, c) \in D'$ *se tiene:*

$$r(s) = \begin{cases} AMC(s) & si\ s \in [\underline{c}, \bar{c}\rangle \\ AMC(s) + \frac{\delta^D G(s)[1+bC''(Q(r(s),\theta))]}{b|\lambda|\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f(\theta,c(s,\theta))d\theta} & si\ s \in [\bar{c}, s_1\rangle \\ \tilde{C}_Q(Q(r(s),\theta),\bar{c}) & si\ s \in [s_1, s_2\rangle \\ AMC(s) - \frac{\delta^D [1-G(s)][1+bC''(Q(r(s),\theta))]}{b|\lambda|\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f(\theta,c(s,\theta))d\theta} & si\ s \in [s_2, \bar{s}\rangle \end{cases} \tag{3.19}$$

Además $r'(s) \geq 0, \quad \forall s \in [\underline{c}, \bar{s}]$

Proof. Dado el supuesto 3.1, la función de demanda es lineal $Q(p, \theta) = a + \delta^D\theta - bp$. Para algún $s \in [\underline{c}, \bar{c}]$ solo se considera el primer término de la expresión (3.18) para una maximización puntual.

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \left[V_Q Q_{r(s)} - \tilde{C}_Q Q_{r(s)} - \delta^C Q_{r(s)} \frac{F(\theta, c(s,\theta))}{f(\theta, c(s,\theta))} \right] f(\theta, c(s,\theta))\, d\theta = 0$$

Considerando que $V_Q = r(s)$ y $Q_{r(s)} = -b < 0$. Entonces, la expresión anterior será:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \left[r(s)(-b) - \tilde{C}_Q(-b) - \delta^C(-b) \frac{F(\theta, c(s,\theta))}{f(\theta, c(s,\theta))} \right] f(\theta, c(s,\theta))\, d\theta = 0$$

Así

$$r(s) = \frac{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \tilde{C}_Q(Q(r(s),\theta), c(s,\theta)) f(\theta, c(s,\theta))\, d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f(\theta, c(s,\theta))\, d\theta} + \frac{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} F(\theta, c(s,\theta))\, d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f(\theta, c(s,\theta))\, d\theta}$$

$$r(s) = AMC(s)$$

De igual manera, para algún $s \in [\bar{c}, s_1]$ se considera el primer y segundo término de la expresión (3.18) para la maximización puntual.

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \left[V_Q Q_{r(s)} - \tilde{C}_Q Q_{r(s)} - \delta^C Q_{r(s)} \frac{F(\theta, c(s,\theta))}{f(\theta, c(s,\theta))}\right] f(\theta, c(s,\theta))\, d\theta$$
$$+\delta^D G(s) \left(1 - \tilde{C}_{QQ} Q_{r(s)}\right) = 0$$
$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \left[r(s)(-b) - \tilde{C}_Q(-b) - \delta^C(-b) \frac{F(\theta, c(s,\theta))}{f(\theta, c(s,\theta))}\right] f(\theta, c(s,\theta))\, d\theta$$
$$+\delta^D G(s) \left(1 - \tilde{C}_{QQ}(-b)\right) = 0$$

De esta forma

$$r(s) = AMC(s) + \frac{\delta^D G(s)\left(1 + bC''(.)\right)}{b \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f(\theta, c(s,\theta))\, d\theta}$$

Finalmente, para algún $s \in [s_2, \bar{s}]$ se considera el primer y tercer término de la expresión (3.7) para la maximización puntual. Entonces se obtiene:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \left[V_Q Q_{r(s)} - \tilde{C}_Q Q_{r(s)} - \delta^C Q_{r(s)} \frac{F(\theta, c(s,\theta))}{f(\theta, c(s,\theta))}\right] f(\theta, c(s,\theta))\, d\theta$$
$$+\delta^D \left(1 - G(s)\right) \left(1 - \tilde{C}_{QQ} Q_{r(s)}\right) = 0$$
$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \left[r(s)(-b) - \tilde{C}_Q(-b) - \delta^C(-b) \frac{F(\theta, c(s,\theta))}{f(\theta, c(s,\theta))}\right] f(\theta, c(s,\theta))\, d\theta$$
$$-\delta^D \left(1 - G(s)\right) \left(1 - \tilde{C}_{QQ}(-b)\right) = 0$$

Despejando $r(s)$

$$r(s) = AMC(s) - \frac{\delta^D \left(1 - G(s)\right)\left(1 + bC''(.)\right)}{b \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f(\theta, c(s,\theta))\, d\theta}$$

Estas condiciones, de primer orden, son también suficientes ya que $r'(s) \geq 0$ por el lema 3.2. $\square$

La condición de monoticidad de la proposición 3.1 $r'(s) \geq 0$ establece que el precio regulado es creciente en s; es decir, una combinación de demanda y costos apropiados más altos implica un mayor precio regulado.

Es importante comparar los resultados expuestos en la proposición 3.1 y aquellos encontrados en los modelos unidimensionales. El modelo donde la asimetría de información se produce solo en los costos (Baron and Myerson, 1982) se puede plantear en términos del modelo presentado en esta sección. Así el parámetro $\delta^D = 0$ y la solución al problema (3.7) para $\forall\theta \in \left[\underline{\theta}, \bar{\theta}\right]$ viene dado por:

(i) $p\left(\theta, \underline{c}\right) = \tilde{C}_Q\left(Q(p\left(\theta, \underline{c}\right), \theta), \underline{c}\right);$

(ii) $p\left(\theta, c\right) > \tilde{C}_Q\left(Q(p\left(\theta, c\right), \theta), c\right), \quad \forall c > \underline{c}$

(iii) $p_c\left(\theta, c\right) \geq 0 \quad \forall c \in [\underline{c}, \bar{c}];$

(iv) $\pi\left(\theta, \bar{c}\right) = 0$ y

(v) $\pi\left(\theta, c\right) > 0 \quad \forall c < \bar{c}$

Según el modelo de Baron and Myerson (1982), los resultados expuestos en (i)-(ii) indican que cuando existe incertidumbre se produce solo en los costos, el regulador fija el precio por encima del costo marginal para realizaciones de costos menores al costo más alto $\bar{c}$. Similarmente, para el caso donde la incertidumbre se da sobre los parámetros de demanda θ y costo c, el precio regulado, también, se fija por encima del costo marginal esperado. De hecho, esta característica se reflejado en el segundo término de $AMC(s)$. La lógica de ajustar el precio por encima del costo marginal se da porque se quiere ofrecer los incentivos correctos a la firma para que esta no sobreestime sus costos (en el caso que los costos sean bajos). Así, un mayor precio da lugar a que disminuya la cantidad producida (que se determina en la demanda); y de este modo, se reduce el número de unidades en los que la firma pueda ejercer una ventaja debido a sus costos bajos.

El resultado (iii) es similar a lo obtenido en este modelo. En efecto, según el lema 3.3, el precio regulado es creciente respecto a c. Esta característica induce un menor nivel producción cuando los costos son altos (de hecho, un mayor costo c da lugar a un mayo precio, y este a una menor producción). De esta forma, si el regulador quiere incentivar que las firmas de costos altos produzcan una mayor cantidad, tiene que entregar una compensación T más alta. Por lo tanto, al igual que en el modelo de Baron and Myerson (1982), el precio y la transferencia se relacionan de manera inversa.

Adicionalmente, de acuerdo al resultado (iv); cuando la asimetría de información se presenta solo en los costos, el regulador establece una combinación precio/transferencia apropiados, de tal forma que cuando el costo más alto es realizado $\bar{c}$, la firma obtenga beneficios nulos. De manera similar, cuando la asimetría de información se da sobre los costos y la demanda, para algunas realizaciones de θ ($\theta \in [\theta_1, \theta_2]$), la firma recibe un beneficio nulo cuando el costo más alto es realizado. Asimismo, la expresión (3.14) indica que el beneficio que perciben las firmas es igual al beneficio que obtiene la firma de costos más altos más un cierto margen dado por el término $\int_c^{\bar{c}} Q(p(\theta, c), \theta)$. De esta forma, se da cuenta que el beneficio es decreciente respecto a c.

Por otra parte, a partir de la proposición 3.1 se puede advertir el rol que tiene el precio regulado, no solo para poder brindar los incentivos idóneos para que la firma revele su información privada; sino también, para poder limitar el beneficio de la firma sin sacrificar eficiencia. Así, las desviaciones del precio al costo marginal ajustado se dan en la misma dirección de modo que se pueda limitar la tasa en la cuál el beneficio varía con la demanda (θ). Cuando el precio es mayor que el costo marginal, entonces el beneficio que percibe la firma crece a medida que la demanda θ es más alta; mientras que si el precio es menor al costo marginal, el beneficio decrece respecto a la demanda θ. Asimismo, a partir del lema 3.3 se conoce que el precio se incrementa con la demanda θ. Entonces, el planificador debería, de manera óptima, reducir el precio regulado, cuando el precio supere al costo marginal (es decir para realizaciones de demanda alta) y aumentar el precio regulado cuando el precio este por debajo del costo marginal (esto es para realizaciones de demanda baja). Esta dinámica del precio regulado se puede observar en la proposición 3.1. En efecto, para curvas isoprecios con interceptos pequeños, $s \in [\bar{c}, s_1)$ (que corresponde a $\theta \in [\bar{\theta}, \theta_1)$) los precios suben; mientras que, para $s \in [s_2, \bar{s}]$ (que corresponde a $\theta \in \left[\theta_2, \overline{\theta}\right]$) los precios decrecen.

.

Colorario 3.1. *Bajo las condiciones de la proposición 3.1 se tiene que* $p\left(\underline{\theta}, \underline{c}\right) = \tilde{C}_Q\left(Q\left(p\left(\underline{\theta}, \underline{c}\right)\underline{\theta}\right)\underline{c}\right)$ *es la solución a (3.7)*

El colorario 3.1 revela otra similitud con los resultados encontrados cuando la asimetría de información se produce en los costos o en la demanda (más no en ambos). El mercado alcanza el máximo nivel de eficiencia cuando los niveles costo y demanda realizados son los más bajos posibles. Esto se produce porque la firma no tiene incentivos para mentir acerca de sus costos y demanda.

Adicionalmente, es preciso indicar que la diferencia entre la política regulatoria óptima con una y dos fuentes de asimetría depende del grado de incertidumbre de los costos y/o demanda. Si uno de las fuentes de incertidumbre se hace irrelevante, entonces la política óptima converge a aquella política donde solo hay una fuente de incertidumbre. Por ejemplo, si la demanda no es "tan incierta", esto es, si δ^D se aproxima a 0, entonces la curva isoprecio se vuelve horizontal (del lema (3.1)). Esto indica que el precio óptimo solo depende de las realizaciones del costo. Además, en la solución descrita en la proposición 3.1 se tiene que el precio excede al costo marginal para todo $c > \underline{c}$ (el mismo resultado que obtuvieron Baron and Myerson (1982)). Del mismo modo, si los costos no son inciertos ($\delta^C \to 0$), entonces $AMC(s) \to EMC(s)$ y por lo tanto el precio es igual al costo marginal para todas las realizaciones de demanda θ y la firma obtendría beneficios nulos (de la expresión (3.14)) (mismos resultados que obtuvieron Lewis and Sappington (1988a))

Sin embargo, la principal diferencia entre el caso unidimensional y bidimensional se produce porque en este último, el regulador puede establecer un precio por debajo del costo marginal para algunos valores de θ. En contraste, en un contexto unidimensional, el precio óptimo nunca es menor al costo marginal.

Según los resultados de Baron and Myerson (1982), el regulador fija un precio por encima del costo marginal con el objetivo de disuadir a la firma de exagerar sus costos[8]. Asimismo, para compensar la ganancias operativas[9] debido a los precios más altos, la transferencia óptima tiende a disminuir. Sin embargo, esta lógica solo funciona si se asume que la cantidad demanda será baja. En efecto, si la demanda es alta, incrementar el precio y disminuir las transferencias puede resultar beneficioso para la firma, pues esta obtendría mayores beneficios debido a un precio regulado más alto y una demanda alta. Esta ganancia puede compensar la disminución en las transferencias. De esta forma, intentar desincentivar la exageración de costos puede provocar que la firma subestime la información que tiene acerca de la demanda, y así no lograr los resultados deseados.

Por el contrario, un precio regulado por debajo del costo marginal y un incremento en las transferencia cuando la demanda es baja, da lugar a un efecto contrario. De este modo, si la realización de demanda es alta (información privada de la firma), la firma no tiene incentivos para subestimar la demanda, pues si lo hace recibirá un menor precio (por debajo del costo marginal), lo cual supone pérdidas en sus ventas. Así, tiene sentido que en un contexto en el cual la incertidumbre se produce en los costos y la demanda, el precio regulado óptimo esté por debajo del costo marginal.

El hecho que el precio este por debajo, igual o por encima del costo marginal depende de la función de densidad $f(.)$, la misma que captura la probabilidad de las realizaciones (θ, c). Si la realización de la demanda es baja θ, entonces, para el planificador, es más probable que la demanda estimada supere a la demanda realizada, y en consecuencia es más probable que se intente subestimar

[8]Un mayor precio provoca que la cantidad disminuya, y en consecuencia, la firma no puede aprovechar su ventaja en costos

[9]precio por cantidad

la demanda. Por lo tanto el precio regulado debe ser menor al costo marginal para evitar dicho comportamiento. Así, la probabilidad que el precio este por debajo del costo marginal aumenta a medida que la probabilidad de realizaciones de *demanda baja* sean altas.

3.1.4 Ejemplo

A continuación se presenta un ejemplo para ilustrar la solución numérica al caso donde la asimetría de información ocurre en los costos y en la demanda.

Se definen las funciones de demanda y costos como:

$$Q(p,\theta) = a + \theta - p$$
$$\tilde{C}(q,c) = K + [c_0 + c]\, q$$

donde $c_0, K \geq 0$. Asimismo, se asume que los parámetros (θ, c) siguen una distribución uniforme.

$$f(\theta,c) = \frac{1}{\bar{\theta}\bar{c}} \quad \forall\theta \in \left[0,\bar{\theta}\right] \text{ y } \forall c \in [0,\bar{c}]$$

Para facilitar los cálculos, este ejemplo asume que $\bar{\theta} = \bar{c}$ y $\delta^C = \delta^D = 1$. De igual manera, el parámetro a es suficientemente grande en comparación a K y c_0. De este modo, la cantidad producida es estrictamente positiva, incluso para las realizaciones de demanda bajas θ.

A partir del lema 3.1, se puede calcular la pendiente de la curva isoprecio, la misma que es igual a -1. Asimismo, el dominio de s está dado por $[0, 2\bar{c}]$ ya que de esta forma se abarca a todos los puntos (θ, c). Con estas consideraciones el valor de EMC(s) será [10]:

$$EMC(s) = \frac{\int_0^{\bar{\theta}} (c_0 + s - \theta)\, \frac{1}{\bar{\theta}^2} d\theta}{1/\bar{\theta}} = c_0 + s - \frac{\bar{\theta}}{2}$$

Asimismo, se calcula el AMC(s)

$$\begin{aligned}
AMC(s) &= EMC(s) + \frac{\int_0^{\bar{\theta}} \frac{c(s,\theta)}{\bar{c}^2} d\theta}{1/\bar{c}} \\
AMC(s) &= EMC(s) + \frac{1}{\bar{c}} \int_0^{\bar{\theta}} (s - \theta) d\theta \\
AMC(s) &= EMC(s) + s - \frac{\bar{\theta}}{2} = c_0 + 2s - \bar{\theta} = c_0 + 2s - \bar{c}
\end{aligned}$$

Del mismo modo, los otros términos que componen la solución del ejemplo se calculan en:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^D G(s)[1 + bC''(Q(r(s),\theta))]}{b|\lambda| \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f(\theta, c(s,\theta)) d\theta} &= s - \bar{c} \\
\frac{\delta^D [1 - G(s)][1 + bC''(Q(r(s),\theta))]}{b|\lambda| \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f(\theta, c(s,\theta)) d\theta} &= 2\bar{c} - s
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución a este ejemplo viene dado por:

$$r(s) = \begin{cases} c_0 + 2s - \bar{c} & \text{si } s \in [0, \bar{c}\rangle \\ c_0 + 3s - 2\bar{c} & \text{si } s \in [\bar{c}, s_1\rangle \\ c_0 + \bar{c} & \text{si } s \in [s_1, s_2\rangle \\ c_0 + 3s - 3\bar{c} & \text{si } s \in [s_2, 2\bar{c}] \end{cases}$$

[10] Los cálculos previos que justifican la solución son: $\tilde{C}_Q(Q(r(s),\theta), c(s,\theta)) = c_0 + c(s,\theta) = c_0 + s - \theta$, $\int_0^{\bar{\theta}} f(\theta, c(s,\theta)) d\theta = 1/\bar{c} = 1/\bar{\theta}$, $F(\theta, c) = \int_0^c f(\theta, \tilde{c}) d\tilde{c} = \int_0^c \frac{1}{\bar{c}^2} d\tilde{c} = \frac{c}{\bar{c}^2}$. Además $G(s) = \frac{1}{\bar{c}}(s - \bar{c})$.

Para el caso donde $c_0 = 0$ y $\bar{c} = 1$[11], la solución se configura como:

$$r(s) = \begin{cases} 2s - 1 & \text{si } s \in [0, 1\rangle \\ 3s - 2 & \text{si } s \in [1, s_1\rangle \\ 1 & \text{si } s \in [s_1, s_2\rangle \\ 3s - 3 & \text{si } s \in [s_2, 2] \end{cases}$$

Los valores de s_1 y s_2 se determinan al maximizar la función objetivo del regulador (3.18), el cual esta dado por:

$$\frac{23}{6} - a + a^2 - 8s_2 + 6s_2^2 - \frac{3s_2^3}{2} - 2K + \frac{9s_1}{2} + \frac{9s_1^2}{2} + \frac{3s_1^3}{2}$$

Las condiciones de primer orden establecen una única solución $s_1 = 1$ y $s_2 = 4/3$. Por lo tanto, la solución númerica queda como:

$$r(s) = \begin{cases} 2s - 1 & \text{si } s \in [0, 1\rangle \\ 1 & \text{si } s \in [1, 4/3\rangle \\ 3s - 3 & \text{si } s \in [4/3, 2] \end{cases}$$

En la figura 3.2 se puede observar las curvas *isoprecio* para el ejemplo. En este caso, $r'(s)$ es una función creciente respecto a s; por lo tanto, esta solución también resuelve el problema original (es decir se cumple la restricción IC global).

[11]Ello implica que $G(s) = s - 1$

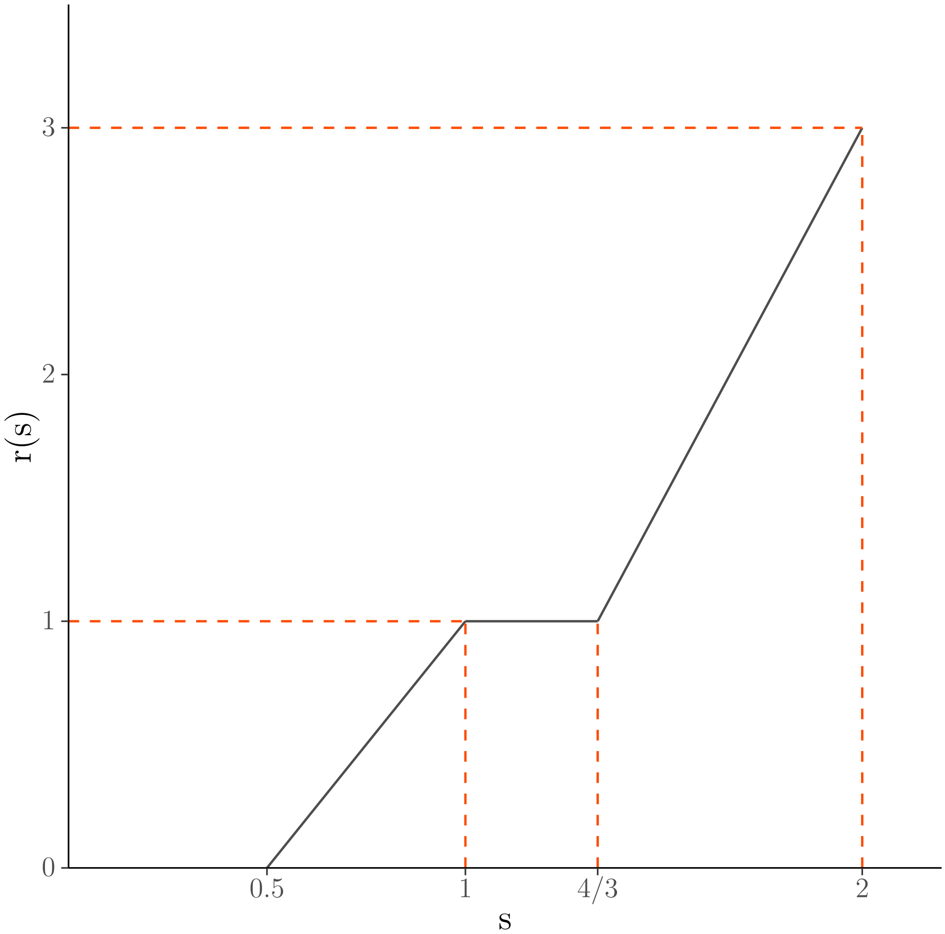

Figure 3.2: Precio óptimo del ejemplo

3.2 Regulación con información asimétrica en los costos: Una solución sin la condición de *cruzamiento simple*

En esta sección se presenta el modelo propuesto por Rochet (2009), en el cual la asimetría de información se presenta función de costos. A diferencia de lo desarrollado en la sección 3.1, este modelo es de naturaleza bidimensional, ya que, si bien la demanda es de conocimiento común, el costo marginal y el costo fijo solo puede observado por la firma.

Dada la naturaleza de este problema, se compara los resultados obtenidos con su contraparte unidimensional; esto es, el modelo donde la asimetría de información ocurre solo el costo marginal o en el costo fijo (Baron and Myerson, 1982). En el caso unidimensional, cuando el costo fijo es conocido, pero el costo marginal no es observable por el regulador, el precio óptimo es mayor al costo marginal. Este resultado se da con el objetivo de incentivar a las firmas de costos bajos a no exagerar sus costos. Para el caso bidimensional se obtiene un resultado similar cuando el costo fijo esta distribuido uniformemente. Bajo esta consideración, la brecha entre el precio y costo marginal se incrementa en dos casos: (i) cuando el regulador le otorga una mayor importancia a las firmas (en comparación a los consumidores) en la función de bienestar social y/o (ii) cuando el conocimiento que el regulador tiene acerca de la distribución del parámetro que representa al costo marginal es poco informativo.

Sin embargo, la principal diferencia con el modelo de Baron and Myerson (1982) radica en la probabilidad óptima con el que se le permite a la firma operar en la industria. En el modelo unidimensional, la firma monopolística produce si el excedente del consumidor excede al costo marginal. En ese sentido, *la probabilidad de operar* solo toma dos valores: (i) 1, si se le permite a la firma operar en la industria; o (ii) 0, si no se le permite operar la industria. No obstante, en el modelo bidimensional, además de los casos anteriores, se muestra la existencia de una región donde *la probabilidad de operar* se encuentra entre 0 y 1; es decir, esta probabilidad se vuelve aleatoria.

Desde un punto de vista técnico, cuando la asimetría de información ocurre sobre dos parámetros, entonces la solución al problema del regulador implica un reto cuando la propiedad de *cruzamiento simple* (sc, por sus siglas en inglés) no es satisfecha. En efecto, la propiedad SC facilita la solución de los modelos unidimensionales y bidimensionales, ya que permite justificar que la restricción IC local implica la restricción IC global (Araujo and Moreira, 2010). En base a ello, se puede plantear un problema transformado, en donde la restricción IC global es reemplazada por su versión local (similar al procedimiento aplicado en la sección anterior).

Sin embargo, cuando la propiedad SC no es satisfecha, entonces el procedimiento es diferente a lo usual. De este modo, en esta sección se desarrolla un método para transformar el problema del regulador a un problema de cálculo de variaciones, y así obtener la política regulatoria óptima. Asimismo, se presenta un ejemplo, para el cual se obtiene una solución explícita.

3.2.1 Modelo

Este modelo es una extensión de lo propuesto por Baron and Myerson (1982) en un contexto bidimensional. Así la función de costos de la firma monopolística está dado por:

$$C(q,\theta) = \begin{cases} \theta_1 q + \theta_2 & \text{si } q > 0 \\ 0 & \text{si } q = 0 \end{cases}$$

donde q es la cantidad producida por la firma y $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ representa los parámetros de costos desconocidos por el regulador, y en consecuencia, constituyen la fuente de información asimétrica del modelo. Si bien el regulador no tiene información certera acerca de θ, sabe su distribución, la misma que es recogido por la función $f(\theta)$. Esta función tiene como dominio el subconjunto $\Theta = [\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_1]x[\underline{\theta}_2, \bar{\theta}_2]$ de $\mathbb{R}^2_+$, es estrictamente positiva en Θ y diferenciable en el interior de Θ. Asimismo, se denota a $F(\theta)$ como la función acumulada con respecto a θ_1 por:

$$F(\theta_1, \theta_2) = \int_{\underline{\theta}_1}^{\theta_1} f(s, \theta_2) ds$$

Por otra parte, el bienestar de los consumidores se mide como el excedente del consumidor bruto menos el gasto que estos agentes realizan:

$$V(q) - qP(q)$$

donde $P = D^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es la inversa de la función de demanda y V representa al excedente bruto, el cuál está definido como:

$$V(q) = \int_0^q P(s)ds \tag{3.20}$$

Se asume que $V(q)$ es estrictamente cóncava.

En este modelo, el regulador determina el precio y el subsidio para la empresa en función a los parámetros $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ reportados por la firma. Como establece el *principio de revelación*, sin pérdida de generalidad, se puede restringir el conjunto de políticas regulatorias a aquellas en donde la firma no tenga incentivos a mentir en sus parámetros de costos $\hat{\theta}$.

En base a lo planteado por Baron and Myerson (1982), una *política regulatoria* está dada por $(r, p, q, s) : \Theta \to \mathbb{R}^4$, en el cual $r(\hat{\theta})$ representa a la probabilidad que se le permita producir a la firma y $\hat{\theta}$ son los parámetros de costos reportados por la empresa. Entonces:

$$0 \leq r(\hat{\theta}) \leq 1 \tag{3.21}$$

Si se le permite producir a la firma, entonces $p(\hat{\theta})$ representa el precio que el planificador fija y $q(\hat{\theta})$ es la cantidad demandada a ese precio, las mismas que deben de satisfacer la función de demanda:

$$p(\hat{\theta}) = P(q(\hat{\theta})) \tag{3.22}$$

Asimismo, se asume que la cantidad demanda es no negativa:

$$q(\hat{\theta}) \geq 0 \tag{3.23}$$

Finalmente $s(\hat{\theta})$ representa el subsidio que el regulador paga a la firma.

Es importante distinguir entre el vector de costos reportado por la firma $\hat{\theta}$ y el verdadero vector de costos θ. Este último solo es conocido por la firma. Tomando en cuenta esta distinción, el beneficio esperado de la firma está definido como:

$$\Pi^*(\hat{\theta}, \theta) = \left[p(\hat{\theta})q(\hat{\theta}) - c(\theta, q(\hat{\theta}))\right] r(\hat{\theta}) + s(\hat{\theta})$$

La restricción IC establece los incentivos necesarios para que la firma declare su verdadero parámetro de costos. Ello implica, que el beneficio que obtiene la empresa de declarar su verdaderos costos es más alto al beneficio que obtendría al declarar otro vector de costos:

$$\Pi^*(\theta, \theta) \geq \Pi^*(\hat{\theta}, \theta) \quad \forall \hat{\theta}, \theta \in \Theta \tag{3.24}$$

Además, para aquellas empresas que participen en la industria, el regulador tiene que asegurar que estas no obtengan beneficios negativos. Así, la restricción IR establece que:

$$\Pi^*(\theta, \theta) \geq 0 \quad \forall \theta \in \Theta \tag{3.25}$$

Se dice a una *política regulatoria factible* a aquella que satisface las expresiones (3.21)-(3.25).

La función objetivo del regulador se define como la suma ponderada del beneficio de los consumidores y productores

$$\Phi = \int_{\underline{\theta}_1}^{\bar{\theta}_1} \int_{\underline{\theta}_2}^{\bar{\theta}_2} \{[V(q) - pq]\, r - s + \alpha\pi\} f d\theta_1 d\theta_2$$

donde $\alpha \in [0, 1]$ es el peso que el regulador le otorga a la firma. Si $\alpha = 1$ significa que el regulador valora en igual magnitud a los consumidores y la firma; mientras que si $\alpha = 0$, significa que el regulador solo toma en cuenta a los consumidores en su función de bienestar.

Entonces, el problema del regulador queda como:

$$\begin{aligned}
\underset{r,p,q,s}{max} \quad & \int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\overline{\theta}_2} \{[V(q(\theta)) - p(\theta)q(\theta)]\, r(\theta) - s(\theta) + \alpha\pi\}\, f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\
\text{s.t.} \quad & \pi^*(\theta, \theta) \geq \pi^*(\hat{\theta}, \theta), \qquad \forall(\hat{\theta}, \theta) \in \Theta \\
& \pi^*(\theta, \theta) \geq 0, \qquad \forall\theta \in \Theta \\
& (3.21), (3.22), (3.23)
\end{aligned} \tag{P}$$

3.2.2 Transformación del problema del regulador

Sea $\Pi(\theta)$ la función de beneficios asociada a la política regulatoria (r, p, q, s).

$$\Pi(\theta) = \Pi^*(\theta, \theta) = [p(\theta)q(\theta) - c(\theta, q(\theta))]\, r(\theta) + s(\theta)$$

El siguiente lema (la prueba se encuentra en el apéndice B) establace una forma equivalente de la restricción IC.

Lema 3.4. *La condición (3.24) es equivalente a las siguientes dos condiciones:*

$$\begin{cases} \Pi \text{ es convexo} \\ -\left(q(\theta)r(\theta), r(\theta)\right. \in \partial\Pi(\theta)) \end{cases} \tag{3.26}$$

para todo θ, donde $\partial\Pi(\theta)$ es el subdiferencial de Π en θ.

Como $\Pi(\theta)$ es una función convexa, entonces, esta función resulta diferenciable en casi todo punto. Entonces para cualquier política regulatoria, las expresiones del lema 3.4 implican

$$\begin{cases} \frac{\partial\Pi}{\partial\theta_1} = -q(\theta)r(\theta) \\ \frac{\partial\Pi}{\partial\theta_2} = -r(\theta) \end{cases} \tag{3.27}$$

para casi todo $\theta \in \Theta$. Se denota a $\Pi_1 \equiv \partial\Pi/\partial\theta_1$ y $\Pi_2 \equiv \partial\Pi/\partial\theta_2$. De este modo, el conjunto de políticas regulatorias factibles C puede ser escrito como:

$$C = \{\Pi : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}_+, \Pi \text{ es convexo y a.e. } \theta : \Pi_1 \leq 0, -1 \leq \Pi_2 \leq 0, \Pi_2 = 0 \leftrightarrow \Pi_1 = 0\}$$

El siguiente lema establece una caracterización alternativa al problema (P).

Lema 3.5. *El problema (P) es equivalente al siguiente problema:*

$$\max_{\Pi \in C} \quad \mathit{\Phi} = \int_{\underline{\theta}_1}^{\bar{\theta}_1} \int_{\underline{\theta}_2}^{\bar{\theta}_2} \left\{ -\Pi_2 V \left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2} \right) + \theta_1 \Pi_1 + \theta_2 \Pi_2 - (1-\alpha)\Pi \right\} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \tag{P*}$$

En efecto, (P*) constituye un problema de cálculo variacional que consiste en elegir $\Pi \in C$ de tal modo que se maximice la funcional $\mathit{\Phi}$.

3.2.3 Derivación de la política óptima

Es importante observar que (P*) es un problema de optimización cóncava. En el sentido que C es convexo y $\mathit{\Phi} : C \to \mathbb{R}$ es una función cóncava en C. De esta forma, las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes para el óptimo.

Veamos porque C es un *conjunto convexo*. Sean $\Pi', \Pi'' \in C$ y $t \in [0,1]$. Entonces, el objetivo es mostrar que $\Pi^c = (t\Pi' + (1-t)\Pi'') \in C$; es decir, $\Pi_1^c \leq 0$, $-1 \leq \Pi_2^c \leq 0$ y $\Pi_2^c(\theta) = 0 \leftrightarrow \Pi_1^c(\theta) = 0$. En primer lugar, se puede verificar que $\Pi_1^c = (t\Pi_1' + (1-t)\Pi_1'') \leq 0$, pues $\Pi_1' \leq 0$ y $\Pi_1'' \leq 0$. De igual forma, $-1 \leq \Pi_2^c = (t\Pi_2' + (1-t)\Pi_2'') \leq 0$, pues $-1 \leq \Pi_2' \leq 0$ y $-1 \leq \Pi_2'' \leq 0$.

Asimismo, si $\Pi_2^c = 0 = t\Pi_2'(\theta) + (1-t)\Pi_2''(\theta)$, entonces $\Pi_2'(\theta) = \Pi_2''(\theta) = 0$ para cualquier $t \in \langle 0, 1 \rangle$ [12]. Ello, porque los componentes de $\Pi_2^c(\theta)$ son no positivos

[12] Si $t = 1$, entonces $\Pi^c = \Pi' \in C$ o si $t = 0$, entonces $\Pi^c = \Pi'' \in C$

$\Pi_2'(\theta), \Pi_2''(\theta) \in [-1, 0]$. Dado que $\Pi_2'(\theta) = 0$, entonces $\Pi_1'(\theta) = 0$ y del mismo modo, $\Pi_2''(\theta) = 0$ implica $\Pi_1''(\theta) = 0$. Por lo tanto, $\Pi_1^c = t\Pi_1'(\theta) + (1-t)\Pi_1''(\theta) = 0$. De igual manera, si $\Pi_1^c = 0$, entonces $\Pi_1'(\theta) = \Pi_1''(\theta) = 0$; luego, $\Pi_2'(\theta) = \Pi_2''(\theta) = 0$. Así, $\Pi_2^c = 0$.

Por otro lado, para verificar que *Φ es una función cóncava en C*. Sean $\Pi', \Pi'' \in C$ y $\Pi^c = (t\Pi' + (1-t)\Pi'')$ para cualquier $t \in [0, 1]$. Se observar que $\Pi_1^c = t\Pi_1' + (1-t)\Pi_1''$ y $\Pi_2^c = t\Pi_2' + (1-t)\Pi_2''$. Como, $V(.)$ es una función estrictamente cóncava, se tiene:

$$V\left(\left(\frac{t\Pi_2'}{t\Pi_2' + (1-t)\Pi_2''}\right)\frac{\Pi_1'}{\Pi_2'} + \left(\frac{(1-t)\Pi_2''}{t\Pi_2' + (1-t)\Pi_2''}\right)\frac{\Pi_1''}{\Pi_2''}\right) > \\ \left(\frac{-t\Pi_2'}{-(t\Pi_2' + (1-t)\Pi_2'')}\right) V\left(\frac{\Pi_1'}{\Pi_2'}\right) + \left(\frac{-(1-t)\Pi_2''}{-(t\Pi_2' + (1-t)\Pi_2'')}\right) V\left(\frac{\Pi_1''}{\Pi_2''}\right)$$

Entonces

$$-\Pi_2^c V\left(\frac{\Pi_1^c}{\Pi_2^c}\right) > -t\Pi_2' V\left(\frac{\Pi_1'}{\Pi_2'}\right) - (1-t)\Pi_2'' V\left(\frac{\Pi_1''}{\Pi_2''}\right)$$

Si sumamos $\theta_1\Pi_1^c$, $\theta_2\Pi_2^c$ y $-(1-\alpha)\Pi^c$ a ambos lados de la expresión anterior, se obtiene:

$$-\Pi_2^c V\left(\frac{\Pi_1^c}{\Pi_2^c}\right) + \theta_1\Pi_1^c + \theta_2\Pi_2^c - (1-\alpha)\Pi^c > t\left(-\Pi_2' V\left(\frac{\Pi_1'}{\Pi_2'}\right) + \theta_1\Pi_1' + \theta_2\Pi_2' - (1-\alpha)\Pi'\right) \\ + (1-t)\left(-\Pi_2'' V\left(\frac{\Pi_1''}{\Pi_2''}\right) + \theta_1\Pi_1'' + \theta_2\Pi_2'' - (1-\alpha)\Pi''\right)$$

Por lo tanto la función Φ es cóncava.

A continuación, para resolver el problema (P*) se define el lagrangiano

$$L = \int_{\underline{\theta}_1}^{\bar{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\bar{\theta}_2}\left\{-\Pi_2 V\left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2}\right) + \theta_1\Pi_1 + \theta_2\Pi_2 - (1-\alpha)\Pi + \beta\Pi + \lambda\Pi_1 + \mu\Pi_2\right\} f(\theta_1, \theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \tag{3.28}$$

donde β, λ y μ son los multiplicadores de Π, Π_1 y Π_2, respectivamente. Es importante notar que no se consideran las restricciones que Π sea convexa y

$\Pi_2(\theta) = 0 \leftrightarrow \Pi_1(\theta) = 0$ del conjunto C. Estas restricciones serán verificadas *aposteriori*.

Asimismo, para casi todo θ, las condiciones de complementaridad establecen lo siguiente:

$$\beta(\theta) \geq 0 \text{ y } \beta(\theta) = 0 \text{ si } \Pi(\theta) > 0$$
$$\lambda(\theta) \geq 0 \text{ y } \lambda(\theta) = 0 \text{ si } \Pi_1(\theta) > 0$$
$$\mu(\theta) \leq 0 \text{ si } \Pi_2(\theta) > -1 \text{ y } \mu(\theta) \geq 0 \text{ si } \Pi_2(\theta) < 0$$

Las condiciones necesarias son también suficientes. Estas están dadas por la ecuación de euler, las condiciones de esquina y transversalidad. La *ecuación de euler* queda como:

$$\frac{\partial L}{\partial \Pi} = \frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\frac{\partial L}{\partial \Pi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \Pi_2}\right)$$

donde, $\frac{\partial L}{\partial \Pi_1}$ y $\frac{\partial L}{\partial \Pi_2}$ son funciones continuas.

En base a (3.28), se puede tener las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial L}{\partial \Pi} = (\beta - (1-\alpha))\, f \tag{3.29}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \Pi_1} = (-P(q) + \theta_1 + \lambda)\, f \tag{3.30}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \Pi_2} = (\theta_2 + \mu - V(q) + qP(q))\, f \tag{3.31}$$

se debe tener en cuenta que $q = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$ y $V'(q) = P(q)$. Al hacer uso de las expresiones (3.29)-(3.31) en la ecuación de euler, las condiciones de esquina y las condiciones de transversalidad, se tienen un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que adoptan diferentes formas dependiendo si las restricciones se cumplen con igualdad o no. Así, se define tres áreas:

$$\Theta_1 = \{\theta : \bar{r}(\theta) = 1, \bar{\Pi}(\theta) > 0, \bar{q}(\theta) > 0\}$$
$$\Theta_2 = \{\theta : 0 < \bar{r}(\theta) < 1, \bar{\Pi}(\theta) > 0, \bar{q}(\theta) > 0\}$$
$$\Theta_3 = \{\theta : \bar{q}(\theta) = \bar{\Pi}(\theta) = \bar{r}(\theta) = 0\}$$

donde $(\bar{\Pi}, \bar{q}, \bar{r})$ denota la solución óptima.

Es importante notar que la solución en las áreas Θ_1 y Θ_3 son parecidas a las soluciones que se obtuvieron en el documento de Baron and Myerson (1982). Estos autores indicaban que la probabilidad óptima que el regulador permita a la firma operar en la industria $\bar{r}$ solo podía tomar dos valores: 0 o 1. Sin embargo, en el siguiente ejemplo, se puede mostrar que el conjunto Θ_2 es diferente al vacío. De esta forma, en un modelo bidimensional, es posible que en la solución óptima, la probabilidad de permiso $\bar{r}$ puede ser aleatoria.

En la siguiente proposición (la prueba se encuentra en el apéndice B) se verifica que el resultado obtenido por Baron and Myerson (1982) es un caso particular del modelo bidimensional cuando la asimetría de información se produce solo en el costo marginal θ_1 y el término $\theta_1 + (1-\alpha)\frac{F(\theta_1)}{f(\theta_1)}$ es no decreciente.

Proposición 3.2. *Si f es independiente de θ_2 y si la función $g(\theta_1) = \theta_1 + (1-\alpha)\frac{F(\theta_1)}{f(\theta_1)}$ es no decreciente; entonces, la política óptima es tal que:*

$$\bar{p}(\theta) = V'(\bar{q}(\theta)) = \theta_1 + (1-\alpha)\frac{F(\theta_1)}{f(\theta_1)} \tag{3.32}$$

para todo $\theta \in \Theta_1$

La expresión (3.32) define el *precio ajustado de equilibrio* que fue obtenido por Baron and Myerson (1982). En competencia perfecta, el precio debe ser igual al costos marginal $\bar{p}(\theta) = \theta_1$, no obstante, debido a la asimetría de información, el regulador tiene que ajustar el precio de tal modo que incentive a la firma de costos bajos a declarar su verdadero tipo. El factor de ajuste $(1-\alpha)\frac{F(\theta_1)}{f(\theta_1)}$ depende de α y $f(\theta)$. Asimismo, se puede notar que el precio no depende de la función de demanda.

Por otro lado, la solución en Θ_2 es más complicada. La siguiente proposición (la prueba se encuentra en el apéndice B) propone una ecuación diferencial parcial cuando la función de densidad es uniforme.

Proposición 3.3. *Si la distribución es uniforme. Entonces, el precio óptimo regulado en Θ_2 proviene de resolver la ecuación parcial diferencial:*

$$\frac{\partial p}{\partial \theta_1} - D(p)\frac{\partial p}{\partial \theta_2} = 3 - \alpha \tag{3.33}$$

3.2.4 Ejemplo

Para ilustrar solución del método propuesto en las secciones anteriores, se presenta un ejemplo. Se considera una función de distribución $f(.)$ uniforme y una función de demanda lineal

$$D(p) = k_0 + k_1 p$$

donde, para simplificar el análisis, $k_0 = k_1 = 1$, $\underline{\theta}_1 = \underline{\theta}_2 = 0$, $\bar{\theta}_1 = 1$ y $\bar{\theta}_2 = 0.5$. De este modo, las expresiones (3.29)-(3.31) quedarían como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \Pi} &= \beta - (1-\alpha) \\
\frac{\partial L}{\partial \Pi_1} &= \theta_1 - (1-q) + \lambda \\
\frac{\partial L}{\partial \Pi_2} &= \theta_2 + \mu - \frac{q^2}{2}
\end{aligned}$$

La ecuación de euler (una de las condiciones de primer orden) estaría dada por:

$$\beta - (1-\alpha) = \left(1 + \frac{\partial q}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_1}\right) + \left(1 + \frac{\partial \mu}{\partial \theta_2} - q\frac{\partial q}{\partial \theta_2}\right)$$

Reordenando:

$$0 = (3 - \alpha - \beta(\theta_1,\theta_2)) + \left(\frac{\partial q}{\partial \theta_1} - q\frac{\partial q}{\partial \theta_2}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \mu}{\partial \theta_2} \tag{3.34}$$

En tanto, las condiciones de esquina $\frac{\partial L}{\partial \Pi_1} = 0$ y $\frac{\partial L}{\partial \Pi_2} = 0$ establecen que:

$$\begin{aligned} q(\theta_1,\theta_2) &= 1 - \theta_1 - \lambda(\theta_1,\theta_2) && \text{para } \theta_1 = \underline{\theta}_1, \bar{\theta}_1 \\ 0.5q(\theta_1,\theta_2)^2 &= \theta_2 - \mu(\theta_1,\theta_2) && \text{para } \theta_1 = \underline{\theta}_2, \bar{\theta}_2 \end{aligned}$$

Y las condiciones de transversalidad:

$$\beta(\theta_1,\theta_2) \geq 0 \text{ y } \beta(\theta_1,\theta_2) = 0 \text{ si } \Pi(\theta_1,\theta_2) > 0$$

$$\lambda(\theta_1,\theta_2) \geq 0 \text{ y } \lambda(\theta_1,\theta_2) = 0 \text{ si } q(\theta_1,\theta_2)r(\theta_1,\theta_2) > 0$$

$$\mu(\theta_1,\theta_2) \leq 0 \text{ si } \Pi_2 > -1 \text{ y } \mu(\theta_1,\theta_2) \geq 0 \text{ si } \Pi_2 < 0$$

En primer lugar, se resuelve para $\Theta_1 = \{\theta : \bar{r}(\theta) = 1, \bar{\Pi}(\theta) > 0, \bar{q}(\theta) > 0\}$. Para este caso, $q(\theta)r(\theta) = q(\theta) > 0$, entonces $\lambda(\theta) = 0$. De igual forma, por condición $\Pi(\theta) > 0$, entonces $\beta(\theta) = 0$. Así, la ecuación de euler (3.34) queda como:

$$0 = (3-\alpha) + \left(\frac{\partial q}{\partial \theta_1} - q\frac{\partial q}{\partial \theta_2}\right) + \frac{\partial \mu}{\partial \theta_2}$$

Por otra parte, a partir de $\partial\Pi/\theta_2 = -r(\theta) = -1$, se tiene que $\partial^2\Pi/\partial\theta_2\theta_1 = 0$. Dado que la función de Π es de clase C_2, entonces $\partial^2\Pi/\partial\theta_1\theta_2 = \partial^2\Pi/\partial\theta_2\theta_1 = 0$. Esto sugiere que $q(\theta)$ es independiente de θ_2. Por ello la ecuación de euler queda como:

$$0 = (3-\alpha) + \frac{\partial q}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \mu}{\partial \theta_2}$$

Usando la segunda condición de transversalidad

$$\mu(\theta) = 0.5q(\theta_1)^2 - \theta_2 \text{ para } \forall\theta \in \Theta_1$$

De esta expresión $\partial\mu(\theta)/\partial\theta_2 = -1$. Así la ecuación de euler es:

$$0 = (3-\alpha) + \frac{\partial q}{\partial \theta_1} - 1$$

Integrando esta expresión y usando la primera ecuación de transversalidad, se obtiene $\bar{q}$ en Θ_1

$$\bar{q}(\theta) = 1 - (2-\alpha)\theta_1 \equiv \gamma(\theta_1)$$

mientras μ queda como:

$$\mu(\theta) = 0.5\gamma^2(\theta_1) - \theta_2$$

Para determinar $\Pi(\theta)$ se conoce que $\partial\Pi/\partial\theta_1 = -q(\theta)r(\theta) = (2-\alpha)\theta_1 - 1$ y $\partial\Pi/\partial\theta_2 = -r(\theta) = -1$. De la primera ecuación diferencial se tiene:

$$\bar{\Pi}(\theta) = -\theta_1 + (2-\alpha)\frac{\theta_1^2}{2} + \kappa(\theta_2)$$

En tanto, de $\partial\Pi/\partial\theta_2 = -1$ se obtiene:

$$\bar{\Pi}(\theta) = -\theta_2 + \kappa(\theta_1)$$

Entonces

$$\bar{\Pi}(\theta) = -\theta_2 - \theta_1 + (2-\alpha)\frac{\theta_1^2}{2}$$

expresando en términos de $\gamma(\theta_1)$, se tiene

$$\bar{\Pi}(\theta) = 0.5 - \theta_2 + \frac{1}{2(2-\alpha)}\left(\gamma^2(\theta_1) - 1\right)$$

La ecuación que configura la frontera de Θ_1 es:

$$C_1 : \mu = 0 \leftrightarrow \theta_2 = 0.5\gamma^2(\theta_1)$$

En segundo lugar, se resuelve para $\Theta_2 = \left\{\theta : 0 < \bar{r}(\theta) < 1, \bar{\Pi}(\theta) > 0, \bar{q}(\theta) > 0\right\}$. Al igual que el anterior caso, las condiciones complementaridad implican que $\beta(\theta) = \lambda(\theta) = 0$. Por lo tanto, la ecuación de euler:

$$0 = (3 - \alpha) + \frac{\partial q}{\partial \theta_1} - q\frac{\partial q}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \mu}{\partial \theta_2}$$

Asimismo, se conoce que $\Pi_2 = -r \in \langle -1, 0\rangle$; entonces, de la primera condición de complementaridad se tiene $\mu = 0$. Así, la condición de euler queda como:

$$0 = (3 - \alpha) + \frac{\partial q}{\partial \theta_1} - q\frac{\partial q}{\partial \theta_2} \tag{3.35}$$

Es necesario encontrar la solución a (3.35) tal que:

$$q(\theta) = \gamma(\theta_1) \quad \text{si} \quad (\theta_1, \theta_2) \in C_1$$

Para ello, las ecuaciones características en su forma paramétrica implican que:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = 1 \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -q \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \theta_1} = \alpha - 3 \tag{3.38}$$

Asimismo considerando las restricciones del problema se tiene: $\theta_1(s, 0) = s$, $\theta_2(s, 0) = 0.5(1 - (2 - \alpha)s)^2$ y $q(s, 0) = 1 - (2 - \alpha)s$. Integrando la expresión (3.36) y (3.38) se obtiene $\theta_1 = t + c_1(s)$ y $q = (\alpha - 3)t + c_2(s)$, respectivamente.

De este modo, tomando en cuenta las restricciones se obtienen:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= t + s \\
q &= (\alpha - 3)t + (1 - (2 - \alpha)s)
\end{aligned}$$

Entonces en la expresión (3.37):

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = (3 - \alpha)t + ((2 - \alpha)s - 1)$$

De igual manera, integrando esta expresión y usando las restricciones del problema

$$\theta_2 = (3 - \alpha)\frac{t^2}{2} + ((2 - \alpha)s - 1)t + \frac{1}{2}(1 - (2 - \alpha)s)^2$$

Dado que $\theta_1 = t + s$, entonces

$$\begin{aligned}
\theta_2 &= (3 - \alpha)\frac{t^2}{2} + ((2 - \alpha)(\theta_1 - t) - 1)t + \frac{1}{2}(1 - (2 - \alpha)(\theta_1 - t))^2 \\
\theta_2 &= (3 - \alpha)\frac{t^2}{2} - t\left(\gamma(\theta_1) + (2 - \alpha)t\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma(\theta_1) + (2 - \alpha)t\right)^2 \\
0 &= \left(\alpha^2 - 3\alpha + 3\right)t^2 + 2\gamma(\theta_1)(1 - \alpha)t + \gamma^2(\theta_1) - 2\theta_2 \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

De igual manera, considerando que $s = \theta_1 - t$, la expresión de q queda:

$$\begin{aligned}
q &= (\alpha - 3)t + (1 - (2 - \alpha)(\theta_1 - t)) \\
q &= (\alpha - 3)t + \gamma(\theta_1) + (2 - \alpha)t \\
q &= \gamma(\theta_1) - t
\end{aligned}$$

Como se puede observar, la tarea es despejar t de la expresión (3.39) y reemplazar en (**??**). La expresión cuadrática para t de (3.39), se resuelve.

$$t = \frac{-\gamma(\theta_1)(1 - \alpha) \pm \sqrt{\gamma^2(\theta_1)(1 - \alpha)^2 - \delta(\gamma^2(\theta_1) - 2\theta_2)}}{\delta}$$

donde $\delta = (\alpha^2 - 3\alpha + 3)$. Entonces q queda definido en (**??**) como:

$$q = \frac{\delta\gamma(\theta_1) + \gamma(\theta_1)(1-\alpha) \pm \sqrt{\gamma^2(\theta_1)(1-\alpha)^2 - \delta(\gamma^2(\theta_1) - 2\theta_2)}}{\delta}$$
$$q = \frac{1}{\delta}\left[(2-\alpha)^2\gamma(\theta_1) - \sqrt{2\theta_2\delta - (2-\alpha)\gamma^2(\theta_1)}\right]$$

Por otra parte para encontrar Π se usa la expresión (3.27) donde $\partial\Pi/\partial\theta_1 = -\bar{q}(\theta)\bar{r}(\theta)$ y $\partial\Pi/\partial\theta_2 = -\bar{r}(\theta)$. Entonces, la ecuación parcial diferencial a resolver es:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\theta_1} = \bar{q}(\theta)\frac{\partial\Pi}{\theta_2}$$

tal que $\Pi(\theta) = 0.5 + -\theta_2 + \frac{1}{2(2-\alpha)}(\gamma^2(\theta_1) - 1)$ cuando $\theta \in C_1$. De manera similar se obtiene:

$$\bar{\Pi}(\theta) = \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}\left[1 - \left\{\frac{2-\alpha}{\delta}\sqrt{2\theta_2\delta - (2-\alpha)\gamma^2(\theta_1)} + \frac{\gamma(\theta_1)}{\delta}\right\}^2\right] \qquad (3.40)$$

Dado que $\partial\Pi/\partial\theta_2 = -\bar{r}(\theta)$, entonces para obtener $\bar{r}(\theta)$ se diferencia la expresión (3.40) respecto a θ_2 y se obtiene:

$$\bar{r}(\theta) = \frac{1-\alpha}{\delta}\left[2 - \alpha + \frac{\gamma(\theta_1)}{\sqrt{2\delta\theta_2 - (2-\alpha)\gamma^2(\theta_1)}}\right]$$

Se puede verificar que $0 < \bar{r} \leq 1$ y que $\bar{r}(\theta) = 1$ en C_1.

Bibliografía

Araujo, A. and Moreira, H. (2010). Adverse selection problems without the spence–mirrlees condition. *Journal of Economic Theory*, 145(3):1113–1141.

Armstrong, M. (1999). Optimal regulation with unknown demand and cost functions. *Journal of Economic Theory*, 84(2):196–215.

Armstrong, M. and Sappington, D. E. (2007). Recent developments in the theory of regulation. *Handbook of industrial organization*, 3:1557–1700.

Baron, D. P. and Besanko, D. (1984). Regulation, asymmetric information, and auditing. *The RAND Journal of Economics*, pages 447–470.

Baron, D. P. and Myerson, R. B. (1982). Regulating a monopolist with unknown costs. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 911–930.

Braeutigam, R. R. (1989). Optimal policies for natural monopolies. *Handbook of industrial organization*, 2:1289–1346.

Laffont, J.-J. and Martimort, D. (2009). *The theory of incentives: the principal-agent model*. Princeton university press.

Laffont, J.-J. and Tirole, J. (1986). Using cost observation to regulate firms. *Journal of political Economy*, 94(3, Part 1):614–641.

Lewis, T. R. and Sappington, D. E. (1988a). Regulating a monopolist with unknown demand. *The American Economic Review*, pages 986–998.

Lewis, T. R. and Sappington, D. E. (1988b). Regulating a monopolist with unknown demand and cost functions. *The RAND Journal of Economics*, pages 438–457.

Rochet, J.-C. (2009). Monopoly regulation without the spence–mirrlees assumption. *Journal of Mathematical Economics*, 45(9-10):693–700.

Apéndice A

Modelos unidimensionales

A continuación se muestra las pruebas de los lemas y proposiciones presentados en el capítulo 1, el mismo que aborda los modelos unidimensionales. Cabe indicar que el desarrollo de estas demostraciones consiste en un despliegue detallado en base a lo expuesto por Baron and Myerson (1982), Lewis and Sappington (1988a), Laffont and Tirole (1986) y Baron and Besanko (1984).

Prueba del lema 2.1. Mostramos que las ecuaciones (2.3),(2.4),(2.7) y (2.8) implican las condiciones del lema. Las condiciones (2.3) y (2.4) son redundantes; mientras que la condición (2.11) se justifica fácilmente a partir de la restricción de participación; pues la condición (2.8) implica que $\pi(\theta) \geq 0$ para todo $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, en particular para $\theta = \theta_1$.

Para probar (2.12). Sean θ y $\hat{\theta}$ tal que $\hat{\theta} > \theta$. La restricción de compatibilidad de incentivos (2.7) para la firma con parámetro θ implica:

$$\begin{aligned}
&\pi(\theta) \geq \pi(\hat{\theta}, \theta) = \left[p(\hat{\theta})q(\hat{\theta}) - (c_0 + c_1\theta)\, q(\hat{\theta}) - (k_0 + k_1\theta)\right] r(\hat{\theta}) + s(\hat{\theta}) \\
&\pi(\theta) \geq \left[p(\hat{\theta})q(\hat{\theta}) - (c_0 + c_1\hat{\theta} - c_1\hat{\theta} + c_1\theta)q(\hat{\theta}) - (k_0 + k_1\hat{\theta} - k_1\hat{\theta} + k_1\theta)\right] r(\hat{\theta}) + s(\hat{\theta}) \\
&\pi(\theta) \geq \pi(\hat{\theta}) + r(\hat{\theta})(c_1 q(\hat{\theta}) + k_1)(\hat{\theta} - \theta) \\
&\pi(\theta) - \pi(\hat{\theta}) \geq r(\hat{\theta})(c_1 q(\hat{\theta}) + k_1)(\hat{\theta} - \theta) \qquad \text{(a)}
\end{aligned}$$

De manera análoga para la firma tipo $\hat{\theta}$.

$$\begin{aligned}
&\pi(\hat{\theta}) \geq \pi(\theta, \hat{\theta}) = \left[p(\theta)q(\theta) - \left(c_0 + c_1\hat{\theta}\right) q(\theta) - \left(k_0 + k_1\hat{\theta}\right)\right] r(\theta) + s(\theta) \\
&\pi(\hat{\theta}) - \pi(\theta) \geq r(\theta)(c_1 q(\theta) + k_1)(\theta - \hat{\theta}) \qquad \text{(b)}
\end{aligned}$$

Así, (a) y (b) implican

$$r(\hat{\theta})(c_1 q(\hat{\theta}) + k_1)(\hat{\theta} - \theta) \leq \pi(\theta) - \pi(\hat{\theta}) \leq r(\theta)(c_1 q(\theta) + k_1)(\hat{\theta} - \theta) \qquad \text{(c)}$$

Como $\hat{\theta} > \theta$,entonces dividiendo por $\hat{\theta} - \theta$ los términos extremos de la expresión (c), se obtiene (2.12):

$$r(\hat{\theta})(c_1 q(\hat{\theta}) + k_1) \leq r(\theta)(c_1 q(\theta) + k_1)$$

Ahora para mostrar (2.10), se divide la expresión (c) entre $\hat{\theta} - \theta$ y tomando límite $\hat{\theta} \to \theta$, se obtiene (2.10):

$$\begin{aligned}
\pi^{'}(\theta) &= -r(\theta)(c_1 q(\theta) + k_1) \\
\pi(\theta)\Big|_{\theta}^{(\theta=\theta_1)} &= -\int_{\theta}^{\theta_1} r(\tilde{\theta})(c_1 q(\tilde{\theta}) + k_1)d\tilde{\theta} \\
\pi(\theta) = \pi(\theta_1) &+ \int_{\theta}^{\theta_1} r(\tilde{\theta})(c_1 q(\tilde{\theta}) + k_1)d\tilde{\theta}
\end{aligned}$$

Ahora se prueba que las restricciones expresadas en el lema implican las restricciones (2.7) y (2.8). Las condiciones (2.10) y (2.11) implica (2.8) ya que $k_1, c_1 \geq 0$. Así se cumple que $\pi(\theta) \geq 0$, $\forall \theta \in [\theta_0, \theta_1]$.

Ahora para probar (2.7), se sabe que:

$$\pi(\hat{\theta},\theta) = \pi(\hat{\theta}) + r(\hat{\theta})(c_1 q(\hat{\theta}) + k_1)(\hat{\theta} - \theta)$$

$$\pi(\hat{\theta},\theta) = \pi(\hat{\theta}) + \int_{\theta}^{\hat{\theta}} r(\hat{\theta})(c_1 q(\hat{\theta}) + k_1) d\tilde{\theta} \tag{d}$$

Asimismo, de (2.10) se tiene:

$$\pi(\theta) = \pi(\hat{\theta}) + \int_{\theta}^{\hat{\theta}} r(\tilde{\theta})(c_1 q(\tilde{\theta}) + k_1) d\tilde{\theta}$$

$$\pi(\hat{\theta}) = \pi(\theta) - \int_{\theta}^{\hat{\theta}} r(\tilde{\theta})(c_1 q(\tilde{\theta}) + k_1) d\tilde{\theta} \tag{e}$$

Usando (d) y (e), podemos obtener la siguiente expresión

$$\pi(\hat{\theta},\theta) = \pi(\theta) - \int_{\theta}^{\hat{\theta}} \left[r(\tilde{\theta})(c_1 q(\tilde{\theta}) + k_1) - r(\hat{\theta})(c_1 q(\hat{\theta}) + k_1) \right] d\tilde{\theta}$$

Si $\hat{\theta} \geq \theta$ entonces por (2.12), la expresión dentro del integral es mayor que 0. Así $\pi(\theta) \geq \pi(\hat{\theta},\theta)$ para cualquier $\hat{\theta}$

Por otra parte, si $\hat{\theta} \leq \theta$, entonces la expresión dada dentro del integral es menor que 0, entonces $\int_{\theta}^{\hat{\theta}} \geq 0$. Así, $\pi(\theta) \geq \pi(\hat{\theta},\theta)$ para cualquier $\hat{\theta}$. Por lo tanto la condición (2.7) se cumple. □

Prueba del lema 2.2. De la definición $\pi(\theta)$ en la expresión (2.6), tenemos:

$$p(\theta)q(\theta)r(\theta) + s(\theta) = \pi(\theta) + \left[(c_0 + c_1\theta)q(\theta) + k_0 + k_1\theta\right] r(\theta) \tag{a}$$

Integrando la expresión (2.10) de θ_0 a θ_1:

$$\begin{aligned}
\int_{\theta_0}^{\theta_1} \pi(\theta)f(\theta)d\theta &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(\pi(\theta_1) + \int_{\theta}^{\theta_1} r(\tilde{\theta})(c_1 q(\tilde{\theta}) + k_1)d\tilde{\theta}\right) f(\theta)d(\theta) \\
&= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(\int_{\theta}^{\theta_1} r(\tilde{\theta})(c_1 q(\tilde{\theta}) + k_1)d\tilde{\theta}\right) f(\theta)d(\theta) + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \pi(\theta_1)f(\theta)d(\theta) \\
&= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(\int_{\theta}^{\theta_1} r(\tilde{\theta})(c_1 q(\tilde{\theta}) + k_1)f(\theta)d\tilde{\theta}\right) d(\theta) + \pi(\theta_1) \\
&= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(\int_{\theta_0}^{\tilde{\theta}} r(\tilde{\theta})(c_1 q(\tilde{\theta}) + k_1)f(\theta)d(\theta)\right) d\tilde{\theta} + \pi(\theta_1) \\
&= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(r(\tilde{\theta})(c_1 q(\tilde{\theta}) + k_1)\int_{\theta_0}^{\tilde{\theta}} f(\theta)d(\theta)\right) d\tilde{\theta} + \pi(\theta_1) \\
\int_{\theta_0}^{\theta_1} \pi(\theta)f(\theta)d\theta &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(r(\theta)(c_1 q(\theta) + k_1)F(\theta)\right) d\theta + \pi(\theta_1) \qquad \text{(b)}
\end{aligned}$$

Reemplazando (a) y (b) en (2.9)

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \{[V(q(\theta)) - p(\theta)q(\theta)]r(\theta) - s(\theta) + \alpha\pi(\theta)\}f(\theta)d\theta \qquad (2.9)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} (V(q(\theta))r(\theta) - \pi(\theta) - [(c_0 + c_1\theta)q(\theta) + k_0 + k_1\theta]r(\theta) - (1-\alpha)\pi(\theta))f(\theta)d\theta$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} ((V(q(\theta)) - (c_0 + c_1\theta)q(\theta) - k_0 - k_1\theta)r(\theta) - (1-\alpha)\pi(\theta))f(\theta)d\theta$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} ((V(q(\theta)) - (c_0 + c_1\theta)q(\theta) - k_0 - k_1\theta)r(\theta))f(\theta)d\theta$$

$$-(1-\alpha)\int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(r(\theta)(c_1 q(\theta) + k_1)F(\theta)\frac{f(\theta)}{f(\theta)}\right) d\theta - (1-\alpha)\pi(\theta_1)$$

Haciendo que $z_\alpha(\theta) = \theta + (1-\alpha)\frac{F(\theta)}{f(\theta)}$, entonces se obtiene la ecuación (2.13)

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} [V(q(\theta)) - (c_0 + c_1 z_\alpha(\theta))q(\theta) - k_0 - k_1 z_\alpha(\theta)]r(\theta)f(\theta)d\theta - (1-\alpha)\pi(\theta_1)$$

$\square$

Prueba del lema 2.3. Sea la función $G_\alpha(\theta) = H_\alpha(F(\theta)) - \bar{H}_\alpha(F(\theta))$. Por construcción $G_\alpha(\theta) \geq 0$ y es una función continua, pues H_α y $\bar{H}_\alpha$ son funciones continuas. Asimismo, si $H_\alpha > \bar{H}_\alpha$, entonces H_α no es una función convexa en todo su dominio, luego existe un tramo dentro del intervalo 0 y 1, donde $\bar{H}_\alpha$ es una recta. Por ello, $\bar{h}_\alpha$ ($\bar{H}'_\alpha = \bar{h}_\alpha$) es contante en dicho intervalo. Así, $\bar{z}_\alpha = \bar{h}_\alpha$ es localmente constante.

Para mostrar (2.20), se deriva la función $G_\alpha(\theta)$ en función de θ.

$$\begin{aligned}\frac{d[H_\alpha(F(\theta)) - \bar{H}_\alpha(F(\theta))]}{d\theta} &= H'_\alpha(F(\theta))f(\theta) - \bar{H}'_\alpha(F(\theta))f(\theta)\\ &= (Z_\alpha(\theta) - \bar{Z}_\alpha(\theta))f(\theta) \qquad (*)\end{aligned}$$

Ahora, usando (*) se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{\theta_0}^{\theta_1} A(\theta)(Z_\alpha(\theta) - \bar{Z}_\alpha(\theta))f(\theta)d\theta &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} A(\theta)d[H_\alpha(F(\theta)) - \bar{H}_\alpha(F(\theta))]\\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} A(\theta)dG_\alpha(\theta)\\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} A(\theta)dG'_\alpha(\theta)d(\theta)\end{aligned}$$

Usando integración por partes

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} A(\theta)(Z_\alpha(\theta) - \bar{Z}_\alpha(\theta))f(\theta)d\theta = \left(A(\theta)G_\alpha(\theta) - \int_{\theta_0}^{\theta_1} A(\theta)'G_\alpha(\theta)d(\theta)\right)\Big|_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_1}$$
$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} A(\theta)(Z_\alpha(\theta) - \bar{Z}_\alpha(\theta))f(\theta)d\theta = A(\theta_1)G_\alpha(\theta_1) - A(\theta_0)G_\alpha(\theta_0) - \int_{\theta_0}^{\theta_1} G_\alpha(\theta)dA(\theta)$$

Veamos que $G_\alpha(\theta_1) = H_\alpha(F(\theta_1)) - \bar{H}_\alpha(F(\theta_1)) = H_\alpha(1) - \bar{H}_\alpha(1) = 0$. De igual manera, $G_\alpha(\theta_0) = H_\alpha(F(\theta_0)) - \bar{H}_\alpha(F(\theta_0)) = H_\alpha(0) - \bar{H}_\alpha(0) = 0$. Entonces

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} A(\theta)(Z_\alpha(\theta) - \bar{Z}_\alpha(\theta))f(\theta)d\theta = -\int_{\theta_0}^{\theta_1} G_\alpha(\theta)dA(\theta)$$
$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} A(\theta)z_\alpha(\theta)f(\theta)d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} A(\theta)\bar{z}_\alpha(\theta)f(\theta)d\theta - \int_{\theta=\theta_0}^{\theta_1} G_\alpha(\theta)dA(\theta) \qquad (2.20)$$

Ahora para mostrar que $\bar{z}_\alpha(\theta)$ es una función no decreciente, notar que:

$$\bar{Z}_\alpha(\theta) = \bar{H}_\alpha^{'}(F(\theta))$$
$$\bar{Z}_\alpha^{'}(\theta) = \bar{H}_\alpha^{''}(F(\theta)) \geq 0$$

Ello porque $\bar{H}(.)$ es una función convexa. Por lo tanto, $\bar{z}_\alpha(\theta)$ es no decreciente.

Finalmente, se muestra que si $Z_\alpha(\theta)$ es no decreciente, entonces $Z_\alpha = \bar{Z}_\alpha$. Primero se verifica que H_α es una función convexa

$$H_\alpha(\phi) = \int_0^\phi h(\phi)d\phi$$
$$H_\alpha^{''}(\phi) = h^{'}(\phi) \geq 0$$

Ello porque $h_\alpha^{'}(\phi) = z_\alpha^{'}(.) \geq 0$, pues $z_\alpha(.)$ es no decreciente.

Como $H_\alpha(.)$ es convexa, entonces $H_\alpha(.) = \bar{H}_\alpha(.)$, lo que implica que $Z_\alpha = \bar{Z}_\alpha$ $\square$

Prueba del Colorario 2.1. Sean α y β tal que $0 \leq \alpha < \beta < 1$. Denotemos como $\triangle(\theta) = \bar{z}_\beta(\theta) - \bar{z}_\alpha(\theta)$ y $\triangle^+(\theta) = \max[0, \triangle(\theta)]$.

Aplicando el lema 2.3 para $A(\theta) = \triangle^+(\theta)$ en α y β, se tiene:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \triangle^+(\theta) z_\alpha(\theta) f(\theta) d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \triangle^+(\theta) \bar{z}_\alpha(\theta) f(\theta) d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta_1} G_\alpha(\theta) d[\triangle^+(\theta)] \quad \text{(a)}$$
$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \triangle^+(\theta) z_\beta(\theta) f(\theta) d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \triangle^+(\theta) \bar{z}_\beta(\theta) f(\theta) d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta_1} G_\beta(\theta) d[\triangle^+(\theta)] \quad \text{(b)}$$

Restando (b)-(a), se obtiene:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \triangle^+(\theta)(z_\beta(\theta) - z_\alpha(\theta)) f(\theta) d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \triangle^+(\theta)(\bar{z}_\beta(\theta) - \bar{z}_\alpha(\theta)) f(\theta) d\theta +$$
$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} (G_\alpha(\theta) - G_\beta(\theta)) d[\triangle^+(\theta)] \quad \text{(c)}$$

Se observa que el término $\triangle^+(\theta)(\bar{z}_\beta(\theta) - \bar{z}_\alpha(\theta))$ es no negativa.

Si $\triangle^+(\theta)$ es creciente en θ, entonces $\bar{z}'_\beta(\theta) - \bar{z}'_\alpha(\theta) \geq 0$; esto implica que $\bar{z}'_\beta(\theta) > 0$ ($\bar{z}_\beta(\theta)$ es creciente en θ); así $G_\beta(\theta) = 0$ (pues $z_\beta(\theta) = \bar{z}_\beta(\theta)$). Por consiguiente, el término $\int_{\theta_0}^{\theta_1}(G_\alpha(\theta) - G_\beta(\theta))d[\triangle^+(\theta)] = \int_{\theta_0}^{\theta_1} G_\alpha(\theta)d[\triangle^+(\theta)] \geq 0$. De igual forma, si $\triangle^+(\theta)$ es decreciente en θ, entonces $\bar{z}'_\beta(\theta) - \bar{z}'_\alpha(\theta) \leq 0$; esto implica que $\bar{z}'_\alpha(\theta) > 0$ ($\bar{z}_\alpha(\theta)$ es creciente en θ); así $G_\alpha(\theta) = 0$ (pues $z_\alpha(\theta) = \bar{z}_\alpha(\theta)$). En consecuencia, el término $\int_{\theta_0}^{\theta_1}(G_\alpha(\theta) - G_\beta(\theta))d[\triangle^+(\theta)] = \int_{\theta_0}^{\theta_1} -G_\beta(\theta)d[\triangle^+(\theta)] \geq 0$.

Se puede observar que el término derecho de la expresión (c) es no negativa, así $\int_{\theta_0}^{\theta_1} \triangle^+(\theta)(z_\beta(\theta) - z_\alpha(\theta))f(\theta)d\theta \geq 0$, sin embargo $\triangle^+(\theta) \geq 0$ y

$$z_\beta(\theta) - z_\alpha(\theta) = (\alpha - \beta)\frac{F(\theta)}{f(\theta)} < 0$$

pues $\beta > \alpha$. Estas características exigen que $\triangle^+(\theta) = 0$, así $\triangle(\theta) = \bar{z}_\beta(\theta) - \bar{z}_\alpha(\theta) \leq 0$. Por lo tanto, $\bar{z}_\beta(\theta) \leq \bar{z}_\alpha(\theta)$ para $\beta > \alpha$; luego, $\bar{z}_\alpha$ es no creciente en α. □

Prueba del lema 2.4. Diferenciando $\pi(p, \theta)$:

$$\begin{aligned}
\pi_p(p,\theta) \quad &= Q(p,\theta) + pQ_p(p,\theta) - C'(Q(p,\theta))Q_p(p,\theta) \\
\pi_{p\theta}(p,\theta) \quad &= Q_\theta(p,\theta) + pQ_{p\theta}(p,\theta) - C''(Q(p,\theta))Q_\theta(p,\theta)Q_p(p,\theta) - C'(Q(p,\theta))Q_{p\theta}(p,\theta)
\end{aligned}$$

Como $Q_{p\theta}(p, \theta) = 0$, entonces la expresión anterior es igual a:

$$\begin{aligned}
\pi_{p\theta}(p,\theta) &= Q_\theta(p,\theta) - C''(Q(p,\theta))Q_\theta(p,\theta)Q_p(p,\theta) \\
\pi_{p\theta}(p,\theta) &= Q_\theta(p,\theta)[1 - C''(Q(p,\theta))Q_p(p,\theta)] \qquad (*)
\end{aligned}$$

Asimismo, el supuesto del modelo señala que $|C''(Q(p,\theta))| < |Q_p(p,\theta)|^{-1}$, lo que implica que $1 - C''(Q(p,\theta))Q_p(p,\theta) > 0$. Además $Q_\theta(p,\theta) > 0$. Entonces en la expresión (*)

$$\pi_{p\theta}(p,\theta) > 0$$

De esta forma, se satisface la SC. $\square$

Prueba del lema 2.5. Sea $\theta'' > \theta' \in [\theta_0, \theta_1]$ y $p(\theta)$ una política compatible con incentivos. Entonces $\pi(\theta'') \geq \pi(\theta', \theta'')$ implica

$$p(\theta'')Q(p(\theta''),\theta'') - C(Q(p(\theta''),\theta'')) + s(\theta'') \geq p(\theta')Q(p(\theta'),\theta'') - C(Q(p(\theta'),\theta'')) + s(\theta')$$
$$\pi(\theta'') \geq \pi(\theta') + p(\theta')Q(p(\theta'),\theta'') - C(Q(p(\theta'),\theta'')) - [p(\theta')Q(p(\theta'),\theta') - C(Q(p(\theta'),\theta'))] \tag{*}$$

Del mismo modo, $\pi(\theta') \geq \pi(\theta'', \theta')$ implica

$$\pi(\theta') \geq \pi(\theta'') + \{p(\theta'')Q(p(\theta''),\theta'') - C(Q(p(\theta''),\theta'')) - [p(\theta'')Q(p(\theta''),\theta') - C(Q(p(\theta''),\theta'))]\} \tag{**}$$

Sumando (*) + (**), se obtiene:

$$\pi(\theta'') - \pi(\theta'',\theta') \geq \pi(\theta',\theta'') - \pi(\theta')$$
$$\pi(p_2,\theta'') - \pi(p_2,\theta') \geq \pi(p_1,\theta'') - \pi(p_1,\theta')$$

usando la notación de la definición 2.1 ($p_1 = p(\theta')$ y $p_2 = p(\theta'')$). Luego dividiendo ambas expresiones entre $\theta'' - \theta'$ y tomando límite obtenemos:

$$\pi_\theta(p_2,\theta) \geq \pi_\theta(p_1,\theta)$$

Entonces como SC ocurre, entonces $\pi_{\theta p} \geq 0$, por lo tanto $p_2 \geq p_1$ ($p(\theta'') \geq p(\theta')$). Así, se muestra que $p(\theta)$ es no decreciente respecto a θ. $\square$

Prueba del lema 2.6. Por contradicción, asumamos que:

$$\tilde{e}(\theta/\hat{\theta}) < \tilde{e}(\hat{\theta}/\hat{\theta}) \tag{a}$$

A partir de la restricción IC, se tiene:

$$s(\hat{\theta}) - \varphi(\tilde{e}(\hat{\theta}/\hat{\theta})) \geq s(\theta) - \varphi(\tilde{e}(\theta/\hat{\theta}))$$
$$s(\theta) - \varphi(\tilde{e}(\theta/\theta)) \geq s(\hat{\theta}) - \varphi(\tilde{e}(\hat{\theta}/\theta))$$

Sumando ambos términos se obtiene:

$$\varphi(\tilde{e}(\theta/\hat{\theta})) - \varphi(\tilde{e}(\theta/\theta)) \geq \varphi(\tilde{e}(\hat{\theta}/\hat{\theta})) - \varphi(\tilde{e}(\hat{\theta}/\theta)) \tag{b}$$

Asimismo, en base a la definición de la función $\tilde{e}(.)$, se tiene:

$$\tilde{e}(\theta/\hat{\theta}) - \tilde{e}(\theta/\theta) = e(\theta) + \hat{\theta} - \theta - e(\theta) = \hat{\theta} - \theta > 0$$
$$\tilde{e}(\hat{\theta}/\hat{\theta}) - \tilde{e}(\hat{\theta}/\theta) = e(\hat{\theta}) - (e(\hat{\theta}) + \theta - \hat{\theta}) = \hat{\theta} - \theta > 0$$

Entonces:

$$\tilde{e}(\theta/\hat{\theta}) - \tilde{e}(\theta/\theta) = \hat{\theta} - \theta = \tilde{e}(\hat{\theta}/\hat{\theta}) - \tilde{e}(\hat{\theta}/\theta) \tag{c}$$

De (b) y (c) se tiene:

$$\frac{\varphi(\tilde{e}(\theta/\hat{\theta})) - \varphi(\tilde{e}(\theta/\theta)}{\tilde{e}(\theta/\hat{\theta}) - \tilde{e}(\theta/\theta)} \geq \frac{\varphi(\tilde{e}(\hat{\theta}/\hat{\theta})) - \varphi(\tilde{e}(\hat{\theta}/\theta))}{\tilde{e}(\hat{\theta}/\hat{\theta}) - \tilde{e}(\hat{\theta}/\theta)}$$

Tomando límite

$$\varphi'(\tilde{e}(\theta/\theta)) \geq \varphi'(\tilde{e}(\hat{\theta}/\theta))$$
$$\varphi'(\tilde{e}(\hat{\theta}/\theta)) - \varphi'(\tilde{e}(\theta/\theta)) \leq 0$$

Dado que $\varphi''(.) > 0$, entonces:

$$\tilde{e}(\theta/\theta) > \tilde{e}(\hat{\theta}/\theta)$$

De (c), se sabe que $\tilde{e}(\hat{\theta}/\theta) - \tilde{e}(\theta/\theta) = \tilde{e}(\hat{\theta}/\hat{\theta}) - \tilde{e}(\theta/\hat{\theta})$. Entonces, la desigualdad anterior implica que $\tilde{e}(\hat{\theta}/\hat{\theta}) - \tilde{e}(\theta/\hat{\theta}) < 0$, lo que contradice el supuesto inicial (a). Por lo tanto, se prueba que si $\theta < \hat{\theta}$; entonces $\tilde{e}(\theta/\hat{\theta}) \geq \tilde{e}(\hat{\theta}/\hat{\theta})$. □

Prueba del lema 2.7. Sean θ y θ' tal que $\theta > \theta'$. Se define:

$$\triangle(\hat{\theta}) \equiv \tilde{e}(\theta'/\hat{\theta}) - \tilde{e}(\theta/\hat{\theta})$$

En base a la definición de $\tilde{e}(.)$ se obtiene $\triangle(\hat{\theta}) = (e(\theta') - \theta') - (e(\theta) - \theta)$. De esta forma, $\triangle(\hat{\theta})$ no depende de $\hat{\theta}$, y por el lema 2.6, $\triangle(\hat{\theta}) \leq 0$; entonces $\tilde{e}(\theta'/\hat{\theta}) \leq \tilde{e}(\theta/\hat{\theta})$. □

Prueba del lema 2.8. Para el intervalo $[\theta_0, \hat{\theta}]$, sean $\theta < \theta' < \hat{\theta}$. Por contradicción asumamos que $U(\theta/\hat{\theta}) > U(\theta'/\hat{\theta})$. Entonces:

$$s(\theta) - \varphi(\tilde{e}(\theta/\hat{\theta})) > s(\theta') - \varphi(\tilde{e}(\theta'/\hat{\theta})) \qquad \text{(a)}$$

La restricción IC asegura que la firma tipo θ' prefiera anunciar θ' que θ. De esta forma.

$$s(\theta') - \varphi(\tilde{e}(\theta'/\theta')) > s(\theta) - \varphi(\tilde{e}(\theta/\theta')) \qquad \text{(b)}$$

Sumando las expresiones (a) y (b), se tiene:

$$\varphi(\tilde{e}(\theta/\theta')) - \varphi(\tilde{e}(\theta'/\theta')) > \varphi(\tilde{e}(\theta/\hat{\theta})) - \varphi(\tilde{e}(\theta'/\hat{\theta})) \qquad \text{(c)}$$

Como $\theta' > \theta$, por el lema 2.7 se tiene

$$\tilde{e}(\theta/\theta') - \tilde{e}(\theta'/\theta') = \theta' - \theta = \tilde{e}(\theta/\hat{\theta}) - \tilde{e}(\theta'/\hat{\theta}) > 0 \tag{d}$$

Asimismo, se conoce que $\tilde{e}(\theta'/\theta') = e(\theta')$ y $\tilde{e}(\theta'/\hat{\theta}) = e(\theta') + \hat{\theta} - \theta'$. Como $\hat{\theta} > \theta'$. entonces:

$$\tilde{e}(\theta'/\theta') < \tilde{e}(\theta'/\hat{\theta}) \tag{e}$$

Dividiendo (c) y (d) se obtiene:

$$\frac{\varphi(\tilde{e}(\theta/\theta')) - \varphi(\tilde{e}(\theta'/\theta'))}{\tilde{e}(\theta/\theta') - \tilde{e}(\theta'/\theta')} > \frac{\varphi(\tilde{e}(\theta/\hat{\theta})) - \varphi(\tilde{e}(\theta'/\hat{\theta}))}{\tilde{e}(\theta/\hat{\theta}) - \tilde{e}(\theta'/\hat{\theta})}$$

Tomando límite

$$\varphi'(\tilde{e}(\theta'/\theta')) > \varphi'(\tilde{e}(\theta'/\hat{\theta}))$$

Como $\varphi''(.) > 0$, entonces $\tilde{e}(\theta'/\theta') > \tilde{e}(\theta'/\hat{\theta})$; sin embargo, esto contradice a la expresión (e). Por lo tanto, se muestra que $U(\theta/\hat{\theta}) \leq U(\theta'/\hat{\theta})$; es decir $U(\theta/\hat{\theta})$ es no decreciente en el intervalo $[\theta_0, \hat{\theta}]$. El mismo proceder para el intervalo $[\hat{\theta}, \theta_1]$. □

Prueba del lema 2.9. Por definición

$$s(\theta) = U(\theta/\theta_0) + \varphi(\tilde{e}(\theta/\theta_0))$$

Por el lema 3.3, $U(\theta/\theta_0)$ es una función no creciente en θ. Asimismo, por el lema 3.2, $\tilde{e}(\theta/\theta_0)$ es no creciente en θ y $\varphi()$ es una función creciente; lo cuál implica que $\varphi(\tilde{e}(\theta/\theta_0))$ sea una función no creciente en θ. Por lo tanto, $s(\theta)$ es no creciente en θ. □

Prueba de la proposición 2.7. Con el esquema (2.55) y (2.56), la función objetivo de firma $\hat{\theta}$ queda como:

$$E\Big[k^*(\theta)(C^*(\theta) - ((\hat{\theta} - e)q^*(\theta) + \varepsilon)) + s^*(\theta) - \varphi(e)\Big]$$

Usando las definiciones de $C^*(\theta) = (\theta - e^*(\theta))q^*(\theta)$ y $k^*(\theta)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&E\left[(\theta - e^*(\theta))\varphi'(e^*(\theta)) - \varphi'(e^*(\theta))\left((\hat{\theta} - e) + \frac{\varepsilon}{q^*(\theta)}\right) + s^*(\theta) - \varphi(e)\right] \\
&(\theta - \hat{\theta} - e^*(\theta))\varphi'(e^*(\theta)) + \varphi'(e^*(\theta))e - E\left[\frac{\varphi'(e^*(\theta))\varepsilon}{q^*(\theta)}\right] + s^*(\theta) - \varphi(e) \\
&s^*(\theta) - \varphi'(e^*(\theta))\tilde{e}^*(\theta/\hat{\theta}) + \varphi'(e^*(\theta))e - \varphi(e)
\end{aligned}$$

De esta forma, la firma tipo $\hat{\theta}$ resuelve:

$$\underset{\theta, e}{max} \quad s^*(\theta) - \varphi'(e^*(\theta))\tilde{e}^*(\theta/\hat{\theta}) + \varphi'(e^*(\theta))e - \varphi(e)$$

La optimización con respecto a e implica:

$$\begin{aligned}
\varphi'(e^*(\theta)) - \varphi'(e) &= 0 \\
\varphi'(e^*(\theta)) &= \varphi'(e)
\end{aligned}$$

con lo cuál se obtiene

$$e = e^*(\theta) \tag{A.1}$$

es decir, la firma ejerce voluntariamente el esfuerzo óptimo. De igual modo, usando (A.1), la optimización con respecto a θ implica:

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{s}^*(\theta) - \varphi''(e^*(\theta))\dot{e}^*(\theta)\tilde{e}^*(\theta/\hat{\theta}) - \varphi'(e^*(\theta))\dot{\tilde{e}}^*(\theta/\hat{\theta}) + \varphi''(e^*(\theta))\dot{e}^*(\theta)e \\
0 &= \dot{s}^*(\theta) - \varphi'(e^*(\theta))\dot{\tilde{e}}^*(\theta/\hat{\theta}) + \varphi''(e^*(\theta))\dot{e}^*(\theta)[e - \tilde{e}^*(\theta/\hat{\theta})]
\end{aligned}$$

De (2.44) se sabe que $\dot{s}^*(\theta) - \varphi'(e^*(\theta))\dot{\tilde{e}}^*(\theta/\hat{\theta}) = 0$. Entonces, usando (A.1) se tiene:

$$0 = \varphi''(e^*(\theta))\dot{e}^*(\theta)[\theta - \hat{\theta}]$$

Como $\varphi''(.) > 0$ y por condición $\dot{e}^*(.) < 0$, entonces:

$$\theta = \hat{\theta} \tag{A.2}$$

La expresión (A.2) muestra que en el óptimo, la firma reporta su verdadero parámetro de productividad.

En tanto, para verificar que (A.1) y (A.2) son máximos locales, se evalúa estos puntos en la matriz hessiana. Si la función objetivo de la firma tipo θ es A, entonces la gradiente será:

$$\nabla(A) = \begin{bmatrix} \varphi'(e^*(\theta)) - \varphi'(e) \\ \varphi''(e^*(\theta))\dot{e}^*(\theta)[e - \tilde{e}^*(\theta/\hat{\theta})] \end{bmatrix}$$

Al evaluar en la matriz hessiana los puntos (A.1) y (A.2) se obtiene:

$$H(A) = \begin{bmatrix} -\varphi''(e^*(\hat{\theta})) & \varphi''(e^*(\hat{\theta}))\dot{e}^*(\hat{\theta}) \\ \varphi''(e^*(\hat{\theta}))\dot{e}^*(\hat{\theta}) & \varphi''(e^*(\hat{\theta}))\dot{e}^*(\hat{\theta})(1 - \dot{e}^*(\hat{\theta})) \end{bmatrix}$$

Se puede notar que $\partial^2 A/\partial e^2 < 0$ (pues $\varphi''(.) > 0$) y la determinante de la matriz hessiana esta dado por $|H| = -\varphi''(e^*)^2\dot{e}^* > 0$, ya que $\varphi''(.) > 0$ y la condición $\dot{e}^* < 0$. De esta manera se prueba que cumple la condición (C1).

Para la condición (C2) exige que:

$$E[t(\hat{\theta}, C)] = E[s^*(\hat{\theta}) + k^*(\hat{\theta})(C^*(\hat{\theta}) - C)]$$
$$E[t(\hat{\theta}, C)] = E[s^*(\hat{\theta}) + k^*(\hat{\theta})(C^*(\hat{\theta}) - (\hat{\theta} - e)q^*(\hat{\theta}) - \varepsilon)]$$
$$E[t(\hat{\theta}, C)] = s^*(\hat{\theta}) + k^*(\hat{\theta})C^*(\hat{\theta}) - k^*(\hat{\theta})(\hat{\theta} - e)q^*(\hat{\theta})$$

Dado (A.1) se tiene que $e = e^*(\theta)$, entonces $(\hat{\theta}-e)q^*(\hat{\theta}) = (\hat{\theta}-e^*(\theta))q^*(\hat{\theta}) = C^*(\hat{\theta})$. Así, se obtiene:

$$E[t(\hat{\theta}, C)] = s^*(\hat{\theta})$$

Así la política de transferencia propuesta cumple la condición (C2); luego implementa la asignación del óptimo social. □

Prueba de la proposición 2.8. Se mostrará que un esquema no lineal en costos no puede puede implementar la solución óptima para para todas las funciones de costos con componente aleatorio.

Sea $t(\theta, C)$ un esquema de transferencia no lineal, que implementa la solución óptima. En consecuencia tiene que cumplir la condición (C2) para cualquier evento aleatorio:

$$s^*(\theta) = E[t(\theta, (\theta - e^*(\theta))q^*(\theta) + \varepsilon)] \tag{a}$$

Asimismo, dado que t es no lineal, entonces existe θ, C_1, C_2, C_3 tal que:

$$\begin{aligned} &\frac{t(\theta, (\theta - e^*(\theta))q^*(\theta) + \varepsilon_1) - t(\theta, (\theta - e^*(\theta))q^*(\theta) + \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \\ &\neq \frac{t(\theta, (\theta - e^*(\theta))q^*(\theta) + \varepsilon_1) - t(\theta, (\theta - e^*(\theta))q^*(\theta) + \varepsilon_3)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \end{aligned}$$

Se define $\varepsilon_i \equiv C_i - (\theta - e^*(\theta))q^*(\theta)$ y se denota como $A = (\theta - e^*(\theta))q^*(\theta)$. Entonces la expresión anterior queda como:

$$\frac{t(\theta, A + \varepsilon_1) - t(\theta, A + \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \neq \frac{t(\theta, A + \varepsilon_1) - t(\theta, A + \varepsilon_3)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \tag{b}$$

Dado que la condición (a) debe de satisfacer para cualquier ε, entonces la condición

(a) se puede reescribir como:

$$s^*(\theta) = E[t(\theta, A + \varepsilon)] \tag{c}$$

Ahora se considera una familia de distribuciones discretas con pesos en $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y ε_3. Si se asume que los pesos para $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y ε_3 son iguales, entonces la condición (c) exige que:

$$E[t(\theta, A + \varepsilon_1)] = E[t(\theta, A + \varepsilon_2)] = E[t(\theta, A + \varepsilon_3)] \tag{d}$$

Se toma esperanza a la expresión (b), entonces se obtiene:

$$\frac{E\left[t(\theta, A + \varepsilon_1) - t(\theta, A + \varepsilon_2)\right]}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \neq \frac{E\left[t(\theta, A + \varepsilon_1) - t(\theta, A + \varepsilon_3)\right]}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$$

Si se usa la expresión d, se llega a un absurdo, pues $0 \neq 0$. De esta forma, se garantiza que no existe una función no lineal en costos que implemente la solución óptima. $\square$

Prueba del lema 2.10. Se muestra la parte (i) del lema 2.10. Si la restricción IC global ocurre, entonces la empresa del tipo θ no declara $\hat{\theta}$. Así:

$$\pi(\theta) \geq \pi(\hat{\theta}, \theta) = p(\hat{\theta})Q(p(\hat{\theta})) - \bar{c}(\theta)Q(p(\hat{\theta})) - k + s(\hat{\theta}) - \beta(\hat{\theta})E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})|\theta]$$
$$\pi(\theta) \geq \pi(\hat{\theta}) + [\bar{c}(\hat{\theta}) - \bar{c}(\theta)]Q(p(\hat{\theta})) + \beta(\hat{\theta})\left(E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})|\hat{\theta}] - E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})|\theta]\right) \tag{a}$$

De igual forma, para la empresa que tiene el parámetro $\hat{\theta}$; la restricción IC global implica que:

$$\pi(\hat{\theta}) \geq \pi(\theta) + [\bar{c}(\theta) - \bar{c}(\hat{\theta})]Q(p(\theta)) + \beta(\theta)\left(E[N(\theta, \tilde{C})|\theta] - E[N(\theta, \tilde{C})|\hat{\theta}]\right) \tag{b}$$

A partir de (a) y (b) se establece que:

$$-[\bar{c}(\hat{\theta})-\bar{c}(\theta)]Q(p(\theta))-\beta(\theta)\left(E[N(\theta,\tilde{C})|\hat{\theta}]-E[N(\theta,\tilde{C})|\theta]\right)\leq\pi(\hat{\theta})-\pi(\theta)$$
$$\leq-[\bar{c}(\hat{\theta})-\bar{c}(\theta)]Q(p(\hat{\theta}))-\beta(\hat{\theta})\left(E[N(\hat{\theta},\tilde{C})|\hat{\theta}]-E[N(\hat{\theta},\tilde{C})|\theta]\right)\quad\text{(c)}$$

Dividiendo la expresión (c) entre $(\hat{\theta}-\theta)$ y tomando el límite cuando $\hat{\theta}\to\theta$, se obtiene la restricción IC local:

$$\frac{\partial\pi(\theta)}{\partial\theta}=-\bar{c}'(\theta)Q(p(\theta))-\beta(\theta)\int_{\Gamma}N(\theta,C)\frac{\partial h(C|\theta)}{\partial\theta}\partial C$$

Por otro lado, para mostrar la parte (ii) del lema 2.10, el beneficio $\pi(\hat{\theta},\theta)$ puede ser escrita como:

$$\pi(\hat{\theta},\theta)=\pi(\hat{\theta})-[\bar{c}(\theta)-\bar{c}(\hat{\theta})]Q(p(\hat{\theta}))+\beta(\hat{\theta})\left(E[N(\hat{\theta},\tilde{C})|\hat{\theta}]-E[N(\hat{\theta},\tilde{C})|\theta]\right)$$

Asimismo, de la definición del integral se sabe que $\pi(\theta)=\pi(\theta_1)-\int_{\theta}^{\theta_1}\frac{\partial\pi(\theta^+)}{\partial\theta}\partial\theta^+$, entonces $\pi(\hat{\theta})=\pi(\theta_1)-\int_{\hat{\theta}}^{\theta_1}\frac{\partial\pi(\theta^+)}{\partial\theta}\partial\theta^+$. De esta forma, en los beneficios de la firma de tipo $\hat{\theta}$ se obtiene:

$$\pi(\hat{\theta},\theta)=\pi(\theta_1)-\int_{\hat{\theta}}^{\theta_1}\frac{\partial\pi(\theta^+)}{\partial\theta}\partial\theta^+-[\bar{c}(\theta)-\bar{c}(\hat{\theta})]Q(p(\hat{\theta}))+$$
$$\beta(\hat{\theta})\left(E[N(\hat{\theta},\tilde{C})/\hat{\theta}]-E[N(\hat{\theta},\tilde{C})/\theta]\right)$$

Reemplazando $\pi(\theta_1) = \pi(\theta) + \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{\partial \pi(\theta^+)}{\partial \theta} \partial \theta^+$ para $\hat{\theta} > \theta$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\pi(\hat{\theta}, \theta) =& \pi(\theta) + \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{\partial \pi(\theta^+)}{\partial \theta} \partial \theta^+ - \int_{\hat{\theta}}^{\theta_1} \frac{\partial \pi(\theta^+)}{\partial \theta} \partial \theta^+ - [\bar{c}(\theta) - \bar{c}(\hat{\theta})] Q(p(\hat{\theta})) + \\
& \beta(\hat{\theta}) \left(E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})/\hat{\theta}] - E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})/\theta] \right) \\
\pi(\hat{\theta}, \theta) =& \pi(\theta) + \int_{\theta}^{\hat{\theta}} \frac{\partial \pi(\theta^+)}{\partial \theta} \partial \theta^+ + [\bar{c}(\hat{\theta}) - \bar{c}(\theta)] Q(p(\hat{\theta})) + \\
& \beta(\hat{\theta}) \left(E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})/\hat{\theta}] - E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})/\theta] \right) \\
\pi(\hat{\theta}, \theta) =& \pi(\theta) + \int_{\theta}^{\hat{\theta}} \frac{\partial \pi(\theta^+)}{\partial \theta} \partial \theta^+ + \frac{[\bar{c}(\hat{\theta}) - \bar{c}(\theta)]}{\hat{\theta} - \theta} Q(p(\hat{\theta}))(\hat{\theta} - \theta) + \\
& \beta(\hat{\theta}) \left(\frac{E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})/\hat{\theta}] - E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})/\theta]}{\hat{\theta} - \theta} (\hat{\theta} - \theta) \right)
\end{aligned}$$

Notar que $\int_{\theta}^{\hat{\theta}} d\theta^+ = \hat{\theta} - \theta$. Entonces la expresión anterior queda dado como:

$$\begin{aligned}
\pi(\hat{\theta}, \theta) =& \pi(\theta) + \int_{\theta}^{\hat{\theta}} \left\{ \frac{\partial \pi(\theta^+)}{\partial \theta} + \frac{[\bar{c}(\hat{\theta}) - \bar{c}(\theta)]}{\hat{\theta} - \theta} Q(p(\hat{\theta})) + \right. \\
& \beta(\hat{\theta}) \left(\frac{E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})/\hat{\theta}] - E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})/\theta]}{\hat{\theta} - \theta} \right) \partial \theta^+
\end{aligned} \tag{d}$$

Como $\hat{\theta} > \theta$, el lado derecho de la desigualdad (c) establece que:

$$\pi(\hat{\theta}) - \pi(\theta) \leq -[\bar{c}(\hat{\theta}) - \bar{c}(\theta)] Q(p(\hat{\theta})) - \beta(\hat{\theta}) \left(E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})/\hat{\theta}] - E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})/\theta] \right)$$

$$\frac{\pi(\hat{\theta}) - \pi(\theta)}{\hat{\theta} - \theta} + \frac{[\bar{c}(\hat{\theta}) - \bar{c}(\theta)]}{\hat{\theta} - \theta} Q(p(\hat{\theta})) + \beta(\hat{\theta}) \frac{\left(E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})/\hat{\theta}] - E[N(\hat{\theta}, \tilde{C})/\theta] \right)}{\hat{\theta} - \theta} \leq 0$$

Por lo tanto, el integral de la expresión (d) resulta ser no positivo. Así para todo $\theta^+ \in [\theta, \hat{\theta}]$ se cumple que:

$$\pi(\hat{\theta}, \theta) \leq \pi(\theta)$$

De igual manera, si $\theta > \hat{\theta}$, entonces reemplazando $\pi(\theta_1)$ en la función de beneficios se obtiene:

$$\pi(\hat{\theta},\theta) = \pi(\theta) - \int_{\hat{\theta}}^{\theta} \frac{\partial \pi(\theta^{+})}{\partial \theta} \partial\theta^{+} + \left(\bar{c}(\hat{\theta}) - \bar{c}(\theta)\right) Q\left(p\left(\hat{\theta}\right)\right)$$
$$+ \beta(\hat{\theta})\left(E\left[N\left(\hat{\theta},\tilde{C}\right)|\hat{\theta}\right] - E\left[N\left(\hat{\theta},\tilde{C}\right)|\theta\right]\right)$$

Cuando $\hat{\theta}$ esta cercano a θ, la expresión anterior resulta:

$$\begin{aligned}\pi(\hat{\theta},\theta) = \pi(\theta) - \int_{\hat{\theta}}^{\theta} \Bigg\{ & \frac{\partial \pi(\theta^{+})}{\partial \theta} + \frac{[\bar{c}(\theta) - \bar{c}(\hat{\theta})]}{\theta - \hat{\theta}} Q(p(\hat{\theta})) \\ & + \beta(\hat{\theta}) \left(\frac{E[N(\hat{\theta},\tilde{C})/\theta] - E[N(\hat{\theta},\tilde{C})/\hat{\theta}]}{\theta - \hat{\theta}} \right) \partial\theta^{+}\end{aligned} \tag{e}$$

Como $\hat{\theta} < \theta$, el lado izquierdo de la desigualdad (c) es no negativa. Por lo tanto, se puede mostrar que el integral de la expresión (e) es no negativa. Así, $\forall\theta^{+} \in [\hat{\theta},\theta]$:

$$\pi(\hat{\theta},\theta) \leq \pi(\theta)$$

□

Prueba del lema 2.11. Las condiciones necesarias del problema (2.71) establecen que:

$$\frac{\partial L}{\partial \pi(\theta)} = -\mu'(\theta) = -(1-\alpha) f(\theta) + \tau(\theta) \tag{a}$$

$$\pi(\theta) \geq 0, \quad \tau(\theta)\pi(\theta) = 0 \tag{b}$$

El parámetro $\mu(\theta)$ representa el beneficio marginal de la variable de estado $\pi(\theta)$ sobre la función de bienestar social. Sea W^{*} el valor máximo que la función $W(.)$ y se denota $\pi_0 \equiv \pi(\theta_0)$ y $\pi_1 \equiv \pi(\theta_1)$; entonces:

$$\frac{\partial W^{*}(\pi_0,\pi_1)}{\partial \pi_0} = \mu(\theta_0)$$

A continuación se mostrará que $\pi_0 > 0$. Se asume lo contrario; es decir, $\pi_0 = 0$, lo que implica que $\mu(\theta_0) \leq 0$, ya que $W^*(.)$ alcanzó su máximo en π_0, y por lo tanto cualquier desviación debe otorgar un beneficio marginal no positivo. Dado que $\pi(\theta) \geq 0$, entonces:

$$\frac{\pi(\theta_0 + a) - \pi(\theta_0)}{a} = \frac{\pi(\theta_0 + a)}{a} \geq 0$$

Así:

$$\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_0} \geq 0$$

En la restricción IC local, esta condición solo se cumple si $\beta(\theta_0) > 0$ y

$$\int_\Gamma N(\theta, C)\frac{h(C/\theta)}{d\theta} dC < 0 \tag{c}$$

En el lagrangiano se puede observar que $\beta(\theta_0)$ es una función lineal de L. Así, $\beta(\theta_0) > 0$ solo si $\left[-af(\theta_0) - \mu(\theta_0)\int_\Gamma N(\theta, C)\frac{h(C/\theta)}{d\theta}dC\right] > 0$. Esta condición requiere que $\mu(\theta_0) > 0$ (a partir del signo encontrado en (c)), lo cual contradice lo que implica del supuesto inicial $\pi_0 = 0$ ($\mu(\theta_0) \leq 0$)). Por lo tanto, $\pi_0 > 0$, y así $\mu(\theta_0) = 0$.

De manera similar, la derivada de la función de bienestar social óptima W^* respecto a π_1 debe de cumplir que:

$$\frac{\partial W^*(\pi_0, \pi_1)}{\partial \pi_1} = -\mu(\theta_1)$$

Entonces, si $\pi_1 > 0$, $\mu(\theta_1) = 0$, por la condición de transversalidad que establece $\mu(\theta_1)\pi(\theta_1) = 0$.

Por otra lado, se integra la expresión (a) sobre el $[\theta_0, \theta]$ y se obtiene:

$$\mu(\theta) = (1 - \alpha)F(\theta) - \int_{\theta_0}^{\theta_1} \tau(v)dv$$

De esta forma se demuestra el lema 2.11. □

Prueba de la proposición 2.9. En primer lugar se compara la cantidad $q(\theta)$.

A partir de la expresión (2.40) se tiene la condición necesaria para el caso de información simétrica (se denota con el superíndice FB):

$$V'(q^{FB}(\theta)) = (1+\lambda)(\theta - e)$$

En tanto, de la expresión (2.50) señala la condición necesaria en el caso de información asimétrica (se denota con el superíndice SB):

$$V'(q^{SB}(\theta)) = (1+\lambda)(\theta - e)$$

De esta forma se concluye que en ambos escenarios las cantidades óptimas se dan en el mismo nivel $q^{FB}(\theta) = q^{SB}(\theta)$.

Por otra parte, la desutilidad del esfuerzo en el caso de información simétrica viene dado por la expresión (2.41):

$$\varphi'(e^{FB}(\theta)) = q$$

En tanto, para el caso de información asimétrica se tiene de la expresión (2.51):

$$\varphi'(e^{SB}(\theta)) = q - \frac{\lambda}{1+\lambda}\varphi''(e^{SB}(\theta))(\theta - \theta_1)$$

Se puede notar que $\frac{\lambda}{1+\lambda}\varphi''(e^{SB}(\theta))(\theta - \theta_0) \geq 0, \forall\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, luego $\varphi'(e^{FB}(\theta)) \geq \varphi'(e^{SB}(\theta))$. Dado que $\varphi''() > 0$, entonces $e^{FB}(\theta) \geq e^{SB}(\theta)$ □

Prueba de la proposición 2.10. A partir del lagrangiano planteado en la expresión (2.72), $N(\theta, C)$ debe maximizar

$$
\begin{aligned}
&-\mu(\theta)\beta(\theta)\int_{\Gamma} N(\theta, C)\frac{\partial h(C/\theta)}{d\theta}dC \\
&-\mu(\theta)\beta(\theta)\int_{\Gamma} N(\theta, C)\frac{\partial h(C/\theta)}{\partial\theta h(C/\theta)}h(C/\theta)\partial C
\end{aligned} \tag{a}
$$

sujeto a que $N(\theta, C) \in [0, \bar{N}]$. Si se asume que $\mu(\theta) \geq 0$ y se define $\Gamma_1(\theta) \equiv \left\{C|\frac{\partial h(C/\theta)}{\partial\theta h(C/\theta)} < 0\right\}$. Dado que $N(\theta, C)$ es lineal en la expresión (a) entonces:

$$
N^*(\theta, C) = \begin{cases} \bar{N}, & \text{si } C \in \Gamma_1 \\ 0, & \text{si } C \in \Gamma - \Gamma_1 \end{cases}
$$

La prueba se completa si se muestra que $\Gamma_1(\theta) = \{C|C < Z^*(\theta)\}$. En primer lugar, dado que $\theta^*(\theta)$ es un estimador de máxima verosimilitud, luego $\theta^*(C)$ es un maximizador de $h(C/\theta)$. Por ello, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial\theta}(C/\theta^*(C)) = 0 \\
\frac{1}{h(C/\theta)}\frac{\partial h}{\partial\theta}(C/\theta^*(C)) = 0
\end{aligned} \tag{b}
$$

pues $h(C/\theta) \geq 0$. Dado que $h(C/\theta)$ cumple con la propiedad de *ratio de verosimilitud*, entonces $(\partial h/\partial\theta)/h$ es monótonamente creciente en C [1]. Así, $h(.)$ es una función cóncava.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial\theta}(C/\theta^*(C)) < 0, \quad \forall\theta > \theta^*(C) \\
\frac{\partial h}{\partial\theta}(C/\theta^*(C)) > 0, \quad \forall\theta < \theta^*(C)
\end{aligned} \tag{c}
$$

Como $\theta^*(C)$ es estrictamente creciente, se puede expresar (a) y (b) para un θ fijo

[1] Sean $\theta' > \theta''$, la propiedad de ratio de verosimilitud sugiere que $\frac{h(C/\theta')-h(C/\theta'')}{h(C/\theta'')}\frac{\theta'-\theta''}{\theta'-\theta''}$ es creciente en C. El límite de esta expresión $\theta' \to \theta''$ produce que $\partial h/\partial\theta h$ es creciente en C

(y C variable).:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial \theta}(C/\theta^*(C)) < 0, \quad \forall C < Z^*(\theta)\\
&\frac{\partial h}{\partial \theta}(C/\theta^*(C)) > 0, \quad \forall C > Z^*(\theta)\\
&\frac{\partial h}{\partial \theta}(C/\theta^*(C)) = 0, \quad \forall C = Z^*(\theta)
\end{aligned} \tag{d}$$

Por lo tanto (d) implica el conjunto Γ_1. □

Prueba del lema 2.12. Por contradicción. Si existe θ tal que $\mu(\theta) < 0$. Similar a la demostración anterior se define $\Gamma_1(\theta) \equiv \left\{C|\frac{\partial h(C/\theta)}{\partial \theta h(C/\theta)} \geq 0\right\}$, entonces se tiene que:

$$N^*(\theta, C) = \bar{N} \quad C \in \Gamma_1$$

y cero en otro caso. Asimismo, dado que $\mu(\theta) < 0$ se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} N(\theta, C)\frac{\partial h(C/\theta)}{\partial \theta}\partial C &= \bar{N}\int_{C \geq Z^*(\theta)} N(\theta, C)\frac{\partial h(C/\theta)}{\partial \theta}\partial C\\
&= \bar{N}\frac{\partial(1 - H(Z^*(\theta)/\theta))}{\partial \theta} = -\bar{N}\frac{\partial H(Z^*(\theta)/\theta)}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{a}$$

Sea θ^* tal que $\mu(\theta^*) < 0$. Como $\mu(\theta)$ es continuo, entonces, existe un intervalo $[\theta^-, \theta^+]$ tal que $\mu(\theta) \leq 0, \forall \theta \in [\theta^-, \theta^+]$, donde θ^- es el máximo valor de θ tal que $\mu(\theta) = 0$, esto es $\theta^- = \max\{\theta|\mu(\theta) = 0 \text{ y } \theta < \theta^+\}$. En θ^-, $\mu(\theta^-) = 0$, y por eso en la expresión (2.73) se tiene

$$0 = \mu(\theta^-) = (1 - \alpha)F(\theta^-) - \int_{\theta_0}^{\theta^-} \tau(v)\partial v$$

Para un $\epsilon > 0$, se define $\theta_\epsilon = \theta^- + \epsilon$ tal que $\theta_\epsilon \in <\theta^-, \theta^+]$. Se tiene que $F(\theta_\epsilon) > F(\theta^-)$, entonces para que $\mu(\theta) < 0$ debe satisfacer que:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_\epsilon} \tau(v)\partial v > 0$$

Así para cualquier $\theta \in <\theta^{-}, \theta_{\epsilon}]$, ocurre que $\mu(\theta) < 0$ y $\tau(\theta) > 0$. Si $\tau(\theta) > 0$; entonces, $\pi(\theta) = 0$, y en consecuencia $\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} = 0$ para cualquier $\theta \in <\theta^{-}, \theta_{\epsilon}]$.

Asimismo, si $\mu(\theta) < 0$, entonces usando la expresión dada en (a), la restricción IC local (expresión (2.12) , se tiene

$$\frac{d\pi(\theta)}{d\theta} = -\bar{c}'(\theta)Q(p(\theta)) + \beta(\theta)\bar{N}\frac{\partial H(Z^{*}(\theta)/\theta)}{\partial \theta}$$

En base al supuesto del modelo $G_{\theta} < 0$, implica que $[\partial \pi(\theta)/\partial \theta] < 0$. Entonces, la integral de la expresión IC local es estrictamente negativa, $\partial \pi(\theta)/\partial \theta < 0$ para todo $\theta \in <\theta^{-}, \theta_{\epsilon}]$. Ello contradice, la implicancia de $\tau(\theta) > 0$ ($\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} = 0$). Así $\mu(\theta) \geq 0$ para cualquier $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. □

Prueba de la proposición 2.11. En primer lugar se conoce que $h(C|\theta)$ esta definido como:

$$h(C|\theta) = g\left(\frac{C-k}{Q}\Big|\theta\right)\Big/Q$$

Como $\tilde{c} \sim N(\bar{c}(\theta), \sigma^2)$ y $C = \tilde{c}Q + k$, entonces $E[C] = \bar{c}(\theta)Q + k$ y $Var(C) = Q^2\sigma^2$. Así, la expresión anterior queda dada como:

$$h(C|\theta) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}Q\sigma}exp\left[\frac{-1}{2Q^2\sigma^2}\left(C - \bar{c}(\theta)Q - k\right)^2\right]\right\}\Big/Q \qquad \text{(a)}$$

Se mostrará que la expresión dada en (a) es estrictamente pseudo-cóncava en θ.

La función $h(C|\theta)$ será estrictamente pesudo-cóncava en $\tilde{\theta}$, si la función es diferenciable en dicho punto y $\nabla h(C|\theta)(\theta - \tilde{\theta}) < 0, \forall \theta$, entonces $h(C|\theta) < h(C|\tilde{\theta})$. Si ello se cumple para cualquier punto del dominio de $h(C|\theta)$, se dice que $h(C|\theta)$ es estrictamente pseudo-cóncava.

Sea $\tilde{\theta} \in [\theta_0, \theta_1]$, entonces:

$$\frac{\partial h(C|\theta)}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\tilde{\theta}} \left(\theta - \tilde{\theta}\right) = h(C|\tilde{\theta}) \left(\frac{C - \bar{c}(\tilde{\theta})Q - k}{Q^2\sigma^2}\right) Q\bar{c}'(\tilde{\theta}) \left(\theta - \tilde{\theta}\right) < 0$$

Como $h(.) \geq 0$, pues representa a la función de densidad de C, y $\bar{c}(\theta)$ es no decreciente; entonces:

$$\left(C - \bar{c}(\tilde{\theta})Q - k\right) \left(\theta - \tilde{\theta}\right) < 0 \tag{b}$$

Si $\theta > \tilde{\theta}$, de (b) se tiene que $\left(C - \bar{c}(\tilde{\theta})Q - k\right) < 0$. Asimismo, como $\bar{c}(\theta)$ es no decreciente, entonces, $(C - \bar{c}(\theta) - k) \leq (C - \bar{c}(\tilde{\theta}) - k) < 0$, y en consecuencia $h(C|\tilde{\theta}) \geq h(C|\theta)$.

De igual modo, si $\tilde{\theta} > \theta$, de (b) $\left(C - \bar{c}(\tilde{\theta})Q - k\right) > 0$. Asimismo, como $\bar{c}(\theta)$ es no decreciente, entonces $0 < (C - \bar{c}(\tilde{\theta}) - k) \leq (C - \bar{c}(\theta) - k) < 0$, y en consecuencia $h(C|\tilde{\theta}) \geq h(C|\theta)$. Por lo tanto, la función $h(.)$ es pseudo-cóncava en $\tilde{\theta}$. Además, como $\tilde{\theta}$ fue tomado como un punto genérico dentro del dominio $[\theta_0, \theta_1]$, entonces se dice que $h(.)$ es una función pesudo cóncava.

Como $h(.)$ es estríctamente pseudo cóncava con respecto a θ; entonces, las condiciones de primer orden resuelven:

$$0 = \frac{\partial h}{\partial \theta} h(C|\theta)$$
$$0 = -\bar{c}'(\theta) h(C|\theta) \frac{[\bar{c}(\theta)Q + k - C]}{\sigma^2 Q^2}$$

Dado que $\theta^*(C)$ es un maxizador de la función $h(.)$, en consecuencia debe satisfacer la ecuación anterior, por lo que se obtiene:

$$C = \bar{c}(\theta^*(C))Q + k$$

La función inversa implica que:

$$Z^{*}(\theta) = \bar{c}(\theta)Q + K = E[\tilde{C}|\theta]$$

Por otro lado, se conoce que:

$$\begin{aligned} E[N(\theta,\tilde{C})|\theta] &= \bar{N}Pr(\tilde{<}Z^{*}(\theta)|\theta) \\ &= \bar{N}G(G(\bar{C}(\theta))|\theta) = \frac{\bar{N}}{2} \end{aligned}$$

ya que $\tilde{C}$ sigue una distribución normal y es simétrica respecto a su media.

En tanto, para encontrar $p^{*}(\theta)$ y $\beta^{*}(\theta)$ óptimo, la restricción IC local puede ser escrita como::

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} &= -\bar{c}'(\theta)Q(p(\theta)) - \beta(\theta)\int_{\Gamma} N(\theta,C)\frac{\partial h(C|\theta)}{\partial \theta}dC \\ &= -\bar{c}'(\theta)Q(p(\theta)) - \beta(\theta)\int_{c<Z(\theta)} \bar{N}\frac{\partial h(C|\theta)}{\partial \theta}dC \\ &= -\bar{c}'(\theta)Q(p(\theta)) - \beta(\theta)\bar{N}\frac{\partial H(Z^{*}(\theta)|\theta)}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{c}$$

Notar que $H(.)$ esta definido del siguiente modo:

$$\begin{aligned} H(C|\theta) &= Pr\left(\tilde{C} \leq C|\theta\right) \\ &= G\left(\frac{C-k}{Q}\Big|\theta\right) \end{aligned}$$

Entonces en (c)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} &= -\bar{c}'(\theta)Q(p(\theta)) - \beta(\theta)\bar{N}\frac{\partial}{\partial \theta}G\left(\frac{Z^{*}(\theta)-k}{Q}\Big|\theta\right) \\ &= -\bar{c}'(\theta)Q(p(\theta)) - \beta(\theta)\bar{N}\frac{\partial}{\partial \theta}G\left(\bar{c}(\theta)|\theta\right) \\ &= -\bar{c}'(\theta)Q(p(\theta)) + \beta(\theta)\frac{\bar{N}\bar{c}'(\theta)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \end{aligned}$$

Así, el lagrangiano queda como:

$$\begin{aligned}L = &\{V(Q(p(\theta))) - \bar{c}(\theta)Q(p(\theta)) - k - a\beta(\theta) - (1-\alpha)\pi(\theta)\} f(\theta)\\ &+\mu(\theta)\left(-\bar{c}'(\theta)Q(p(\theta)) + \beta(\theta)\frac{\bar{N}\bar{c}'(\theta)}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) + \tau(\theta)\pi(\theta)\end{aligned}$$

La condición de primer orden establece que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q} &= \{V'(.) - \bar{c}(\theta)\} f(\theta) - \mu(\theta)\bar{c}'(\theta) = 0\\ &= \{p^*(\theta) - \bar{c}(\theta)\} f(\theta) - \mu(\theta)\bar{c}'(\theta) = 0\\ p^*(\theta) &= \bar{c}(\theta) + \bar{c}'(\theta)\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}\end{aligned}$$

Adicionalmente, se puede observar que $\beta(\theta)$ es lineal en la función $L(.)$, en consecuencia

$$\beta^*(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{\mu(\theta)\bar{N}\bar{c}'(\theta)}{\sqrt{2\pi}\sigma} - af(\theta) < 0\\ 1, & \text{si } \frac{\mu(\theta)\bar{N}\bar{c}'(\theta)}{\sqrt{2\pi}\sigma} - af(\theta) > 0\\ [0,1], & \text{si } \frac{\mu(\theta)\bar{N}\bar{c}'(\theta)}{\sqrt{2\pi}\sigma} - af(\theta) = 0\end{cases}$$

□

Prueba de la proposición 2.12. Para el caso 1, se conoce que $\mu(\theta) \geq af(\theta)\sqrt{2\pi}\sigma/\bar{c}'(\theta)\bar{N}$, entonces en la expresión (2.78) se tiene la probabilidad de auditoría óptima es igual a uno $\beta^*(\theta) = 1$. Asimismo, como $[d\pi(\theta)/d\theta] = Q(p(\theta)) + \beta(\theta)\bar{c}'(\theta)(\bar{N}/\sqrt{2\pi}\sigma) = 0$ para este intervalo, entonces la cantidad es igual a $Q(p(\theta)) = \beta(\theta)\frac{\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. Dado que $\beta^*(\theta) = 1$, la cantidad óptima será $Q^*(p(\theta)) = \frac{\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, por lo tanto en la función inversa de la demandad $P(.)$, el precio óptimo viene dado por:

$$p^*(\theta) = P\left(\frac{\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) \equiv \bar{p}$$

Esta última expresión debe satisfacer a la expresión (2.79) que caracteriza al precio óptimo, entonces:

$$p^*(\theta) = \bar{c}(\theta) + \bar{c}'(\theta)\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)} = \bar{p}$$

Así, se obtiene $\mu^* = (\bar{p} - \bar{c}(\theta))\frac{f(\theta)}{\bar{c}'(\theta)}$.

Ahora se muestra que si se satisface (2.84)-(2.86), entonces se cumple que $\mu(\theta) \geq af(\theta)\sqrt{2\pi}\sigma/\bar{c}'(\theta)\bar{N}$. Dado que $\beta^*(\theta) = 1$, en la expresión (2.78), esta posibilidad solo se da si $\mu(\theta) \geq af(\theta)\sqrt{2\pi}\sigma/\bar{c}'(\theta)\bar{N}$.

Asimismo, dado que $\mu^* = (\bar{p} - \bar{c}(\theta))\frac{f(\theta)}{\bar{c}'(\theta)}$, entonces se obtiene una expresión equivalente a la condición $\mu(\theta) \geq af(\theta)\sqrt{2\pi}\sigma/\bar{c}'(\theta)\bar{N}$:

$$\bar{p} \geq \bar{c}(\theta) + \frac{a\sqrt{2\pi}\sigma}{\bar{N}}$$

Por otro lado, el caso 2 se conoce que a partir del hecho de los valores de θ tal que $\beta(\theta) < 1$, se obtiene la cantidad óptima

$$Q(p^*(\theta)) = \frac{\beta(\theta)\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

Del anterior caso se tiene que $Q(\bar{p}) = \frac{\bar{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. Entonces, la probabilidad óptima esta dado por:

$$\beta^*(\theta) = \frac{Q(p^*(\theta))}{Q(\bar{p})} < 1$$

En la función de bienestar social se tiene:

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_1} V(Q(p^*(\theta))) - \bar{c}(\theta)Q(p^*(\theta)) - a\left(\frac{Q(p^*(\theta))}{Q(\bar{p})}\right)$$

pues para ese intervalo $\pi(\theta) = 0$. La condición necesaria satisface:

$$V'(.) = \bar{c}(\theta) + \frac{a}{Q(\bar{p})}$$
$$p^*(\theta) = \bar{c}(\theta) + \frac{a\sqrt{2\pi}\sigma}{\bar{N}}$$

Este precio óptimo debe de satisfacer la expresión (2.79), entonces

$$p^*(\theta) = \bar{c}(\theta) + \bar{c}'(\theta)\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}$$
$$\bar{c}(\theta) + \frac{a\sqrt{2\pi}\sigma}{\bar{N}} = \bar{c}(\theta) + \bar{c}'(\theta)\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}$$

De esta forma $\mu^*(\theta)$ queda dado como:

$$\mu^*(\theta) = \frac{af(\theta)\sqrt{2\pi}\sigma}{\bar{c}'(\theta)\bar{N}}$$

Mostrar que si se cumple (2.87)-(2.89), entonces satisface que $\beta(\theta) < 1$ es directo a partir de la expresión (2.88). $\square$

Apéndice B

Modelos bidimensionales

Este apéndice desarrolla las pruebas de los lemas y proposiciones presentados en el capitulo 2 de este trabajo, el cual aborda los modelos bidimensionales. Cabe indicar que el desarrollo de estas demostraciones consiste en un despliegue minucioso en base a lo expuesto por Lewis and Sappington (1988b) y Rochet (2009).

Prueba del lema 3.1. En el óptimo, se satisface la restricción IC local, por lo tanto la condiciones de primer orden establecen que:

$$\pi_1\left(\hat{\theta}, \hat{c}|\theta, c\right)\Big|_{(\hat{\theta}=\theta, \hat{c}=c)} = 0 \tag{a}$$

$$\pi_2\left(\hat{\theta}, \hat{c}|\theta, c\right)\Big|_{(\hat{\theta}=\theta, \hat{c}=c)} = 0 \tag{b}$$

De (a) se tiene que:

$$0 = \pi_1\left(\hat{\theta}, \hat{c}|\theta, c\right)\Big|_{(\hat{\theta}=\theta, \hat{c}=c)} = p_Q Q\left(p(\theta, c), \theta\right) + p(\theta, c) Q_p p_\theta - C_Q Q_p p_\theta + T_\theta$$

Se deriva la expresión anterior respecto a c:

$$\begin{aligned}0 =& p_{\theta c}Q(.) + p_{\theta}Q_p p_c + p_c Q_p p_{\theta} + pQ_{pp}p_c p_{\theta} + pQ_p p_{\theta c} - C_{Qc}Q_p p_{\theta} \\ &- C_{QQ}Q_p p_c Q_p p_{\theta} - C_Q Q_{pp} p_c p_{\theta} - C_Q Q_p p_{\theta c} + T_{\theta c}\end{aligned} \tag{c}$$

Asimismo, se puede verificar las expresiones $\pi_{12}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)}$ y $\pi_{14}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)}$.

$$\begin{aligned}\pi_{12}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} =& p_{\theta c}Q(.) + p_{\theta}Q_p p_c + p_c Q_p p_{\theta} + pQ_{pp}p_c p_{\theta} + pQ_p p_{\theta c} \\ &-C_{QQ}Q_p p_c Q_p p_{\theta} - C_Q Q_{pp} p_c p_{\theta} - C_Q Q_p p_{\theta c} + T_{\theta c} \\ \pi_{14}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} =& -C_{Qc}Q_p p_{\theta}\end{aligned}$$

En la expresión (c) se puede identificar estos términos. De esta forma, se tiene que:

$$0 = \pi_{12}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} + \pi_{14}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} \tag{d}$$

De igual manera, a partir de (b) se tiene:

$$0 = \pi_2\left(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c\right)\Big|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} = p_c Q(.) + pQ_p p_c - C_Q Q_p p_c + T_c$$

Diferenciando esta expresión respecto a θ

$$\begin{aligned}0 =& p_{cQ}Q + p_c Q_{\theta} + p_c Q_p p_{\theta} + p_{\theta} Q_p p_c + pQ_{p\theta} p_c + pQ_{pp} p_{\theta} p_c + pQ_p p_{c\theta} \\ &- C_{QQ}Q_{\theta}Q_p p_c - C_{QQ}Q_p p_{\theta} Q_p p_c - C_Q Q_{p\theta} p_c - C_Q Q_{pp} p_{\theta} p_c \\ &- C_Q Q_p p_{c\theta} + T_{c\theta}\end{aligned} \tag{e}$$

Asimismo, se puede verificar las expresiones $\pi_{21}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)}$ y $\pi_{23}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)}$.

$$\begin{aligned}\pi_{21}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} =& p_{cQ}Q + p_c Q_p p_{\theta} + p_{\theta} Q_p p_c + pQ_{pp} p_{\theta} p_c + pQ_p p_{c\theta} \\ &- C_{QQ}Q_p p_{\theta} Q_p p_c - C_Q Q_{p\theta} p_c - C_Q Q_{pp} p_{\theta} p_c - C_Q Q_p p_{c\theta} + T_{c\theta}\end{aligned}$$

y

$$\pi_{23}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} = p_c Q_\theta + pQ_{p\theta}p_c - C_{QQ}Q_\theta Q_p p_c - C_Q Q_{p\theta}p_c$$

Se puede identificar estas expresiones en (e), entonces:

$$0 = \pi_{21}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} + \pi_{23}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} \tag{f}$$

Dado que $\pi_{12}(.) = \pi_{21}(.)$, entonces en las expresiones (d) y (f) se tiene:

$$\begin{aligned}
\pi_{14}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} &= \pi_{23}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} \\
-p_\theta(\theta,c)\delta^C h'(p) &= p_c(\theta,c)\delta^D\left[1 - C''(.)h'(p)\right] \\
\left.\frac{dc}{d\theta}\right|_{dp=0} &= -\frac{p_\theta(.)}{p_c(.)} = \frac{\delta^D\left[1 - C''(.)h'(p)\right]}{\delta^C h'(p)} = -\frac{\Pi_{p\theta}(.)}{\Pi_{pc}(.)}
\end{aligned}$$

De esta manera se demuestra que la pendiente del espacio isprecio. □

Prueba del lema 3.2. El objetivo es mostrar que la solución óptima de (3.18) es también una solución a (3.7). Es decir, la solución satisface la restricción IC global dada la restricción IC local. Para ello, se debe notar que a partir del supuesto 3.2 $C'''(.) = 0$ se satisface la propiedad de *cruzamiento simple.* Así, se quiere mostrar que:

$$\pi\left(\theta, c|\theta, c\right) \geq \pi\left(\hat{\theta}, \hat{c}|\theta, c\right), \quad \forall(\theta, c), (\hat{\theta}, \hat{c}) \in D$$

Se define $\theta^\alpha = \alpha\hat{\theta} - (1-\alpha)\theta$ y $c^\alpha = \alpha\hat{c} - (1-\alpha)c$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\pi\left(\hat{\theta}, \hat{c}|\theta, c\right) &= \pi\left(\theta, c|\theta, c\right) + \pi\left(\hat{\theta}, \hat{c}|\theta, c\right) - \pi\left(\theta, c|\theta, c\right) \\
\pi\left(\hat{\theta}, \hat{c}|\theta, c\right) &= \pi\left(\theta, c|\theta, c\right) + \pi\left(\theta^1, c^1|\theta, c\right) - \pi\left(\theta^0, c^0|\theta, c\right) \\
&= \pi\left(\theta, c|\theta, c\right) + \pi\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta, c\right)\Big]_{\alpha=0}^{\alpha=1} \\
\pi\left(\hat{\theta}, \hat{c}|\theta, c\right) &= \pi\left(\theta, c|\theta, c\right) + \int_0^1 \frac{\partial \pi\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta, c\right)}{\partial\alpha} d\alpha \qquad \text{(a)}
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial \pi\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta, c\right)}{\partial\alpha} = \pi_1\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta, c\right)\left(\hat{\theta} - \theta\right) + \pi_2\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta, c\right)\left(\hat{c} - c\right) \qquad \text{(b)}$$

Asimismo, se define $\theta^\lambda = \lambda\theta + (1-\lambda)\theta^\alpha$ y $c^\lambda = \lambda c + (1-\lambda)c^\alpha$. De esta forma se puede escribir $\pi_1\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta, c\right)$ y $\pi_2\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta, c\right)$ como:

$$\begin{aligned}
\pi_1\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta, c\right) &= \pi_1\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta^\alpha, c^\alpha\right) + \int_0^1 \frac{\partial\left[\pi_1\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta^\lambda, c^\lambda\right)\right]}{\partial\lambda} d\lambda \qquad \text{(c)} \\
\pi_2\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta, c\right) &= \pi_2\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta^\alpha, c^\alpha\right) + \int_0^1 \frac{\partial\left[\pi_2\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta^\lambda, c^\lambda\right)\right]}{\partial\lambda} d\lambda \qquad \text{(d)}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left[\pi_1\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta^\lambda, c^\lambda\right)\right]}{\partial\lambda} &= \pi_{13}(.)\left(\theta - \theta^\alpha\right) + \pi_{14}(.)\left(c - c^\alpha\right) \qquad \text{(e)} \\
\frac{\partial\left[\pi_2\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta^\lambda, c^\lambda\right)\right]}{\partial\lambda} &= \pi_{23}(.)\left(\theta - \theta^\alpha\right) + \pi_{24}(.)\left(c - c^\alpha\right) \qquad \text{(f)}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta $\pi(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta, c)$ y $\Pi(p, \theta, c) = pQ(p, \theta) - \tilde{C}(Q(p, \theta), c) + T$ se tiene una expresión para $\pi_{13}(.)$, $\pi_{14}(.)$, $\pi_{23}(.)$ y $\pi_{24}(.)$ evaluados en el óptimo.

$$\begin{aligned}
\pi_{13}(.) &= p_{\theta^\alpha}(.)\left[Q_\theta - \left(\tilde{C}_{Q\theta}Q_p + \tilde{C}_Q Q_{p\theta}\right) + pQ_{p\theta}\right] \\
\pi_{13}(.) &= p_{\theta^\alpha}(.)\Pi_{p\theta}(.) \\
\pi_{13}(.) &= p_\theta(.)\Pi_{p\theta}(.)
\end{aligned}$$

De igual manera para $\pi_{14}(.)$, $\pi_{23}(.)$ y $\pi_{24}(.)$ se tiene:

$$\pi_{14}(.) = p_\theta(.)\Pi_{pc}(.)$$
$$\pi_{23}(.) = p_c(.)\Pi_{p\theta}(.)$$
$$\pi_{24}(.) = p_c(.)\Pi_{pc}(.)$$

Entonces en (c) y (d) se obtiene:

$$\pi_1\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta, c\right) = \int_0^1 \left[\Pi_{p\theta} p_\theta \left(\theta - \theta^\alpha\right) + \Pi_{pc} p_\theta \left(c - c^\alpha\right)\right] d\lambda \tag{g}$$
$$\pi_2\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta, c\right) = \int_0^1 \left[\Pi_{p\theta} p_c \left(\theta - \theta^\alpha\right) + \Pi_{pc} p_c \left(c - c^\alpha\right)\right] d\lambda \tag{h}$$

Ello considerando que $\pi_1\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta^\alpha, c^\alpha\right) = \pi_2\left(\theta^\alpha, c^\alpha|\theta^\alpha, c^\alpha\right) = 0$, ya que se cumple la restricción IC local. Esta última expresión en (a) se obtiene:

$$\begin{aligned}\pi\left(\hat{\theta}, \hat{c}|\theta, c\right) = \pi\left(\theta, c|\theta, c\right) &+ \int_0^1\int_0^1 \left[\Pi_{p\theta} p_\theta \left(\theta - \theta^\alpha\right) + \Pi_{pc} p_\theta \left(c - c^\alpha\right)\right]\left[\hat{\theta} - \theta\right] d\lambda d\alpha \\ &+ \int_0^1\int_0^1 \left[\Pi_{p\theta} p_c \left(\theta - \theta^\alpha\right) + \Pi_{pc} p_c \left(c - c^\alpha\right)\right]\left[\hat{c} - c\right] d\lambda d\alpha\end{aligned}$$

En base de la prueba del lema 3.1, se conoce que $\Pi_{pc} p_\theta = \Pi_{p\theta} p_c$, entonces la anterior expresión queda como:

$$\begin{aligned}\pi\left(\hat{\theta}, \hat{c}|\theta, c\right) = \pi\left(\theta, c|\theta, c\right) + \int_0^1\int_0^1 \left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)\Pi_{p\theta} + \left(\hat{c} - c\right)\Pi_{pc}\right]\Big[\left(\theta - \theta^\alpha\right) p_\theta \\ + \left(c - c^\alpha\right) p_c\Big] d\lambda d\alpha\end{aligned}$$

Finalmente a partir de $\Pi_{pc} = \Pi_{p\theta} p_c / p_\theta$ del lema 3.1 y las definciones $\theta - \theta^\alpha = -\alpha\left(\hat{\theta} - \theta\right)$ y $c - c^\alpha = -\alpha\left(\hat{c} - c\right)$, la expresión anterior puede ser reescrita como:

$$\pi\left(\hat{\theta}, \hat{c}|\theta, c\right) = \pi\left(\theta, c|\theta, c\right) - \alpha\int_0^1\int_0^1 \frac{\Pi_{p\theta}}{p_\theta}\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right) p_\theta + \left(\hat{c} - c\right) p_c\right]^2 d\lambda d\alpha$$

Es importante resaltar que $\Pi_{p\theta} = \delta^D\left[1 - C''(.)h'(p)\right] \geq 0$ cuando $\delta^D \geq 0$, pues el segundo término es no negativo por supuesto del modelo. Asimismo, $p_\theta \geq 0$ por lo que se demostrará en el lema 3.3 [1]. Así, el integrando resulta ser no negativo, y en consecuencia se garantiza:

$$\pi\left(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c\right) \geq \pi\left(\theta,c|\theta,c\right)$$

$\square$

Prueba del lema 3.3. La restricción IC implica que la firma de tipo (θ, c) elija $(\hat{\theta}=\theta, \hat{c}=c)$ en un problema de maximización:

$$\underset{\hat{\theta},\hat{c}}{max} \quad \pi(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c) = p(\hat{\theta},\hat{c})Q(p(\hat{\theta},\hat{c}),\theta) - C(Q(p(\hat{\theta},\hat{c}),\theta),c) + T(\hat{\theta},\hat{c})$$

Evaluados en el óptimo $(\hat{\theta}=\theta, \hat{c}=c)$, las condiciones de primer orden requieren que

$$\pi_1(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} = \pi_2(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} = 0 \qquad \text{(a)}$$

donde $\pi_i(.)$ representa la derivada respecto de i ésimo argumento, $i = 1, ..., 4$. Asimismo, las condiciones de segundo orden[2], que se asume que ocurren, evaluados en el óptimo $(\hat{\theta}=\theta, \hat{c}=c)$ establecen que:

$$\pi_{11}(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} \leq 0 \text{ y } \pi_{22}(.)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} \leq 0 \qquad \text{(b)}$$

A partir de (a), se tiene:

$$0 = \pi_1(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} = p_\theta Q(p(\theta,c),\theta) + p(\theta,c)Q_p p_\theta - C_Q Q_p p_\theta + T_\theta$$

[1] El lema 3.3 garantiza que $p_\theta(.) \geq 0$ para la solución al problema (3.7); es decir, cuando la solución satisface la restricción IC global. En particular, se cumple para aquella solución que satisface la restricción IC local.

[2] la condiciones de segundo orden establecen que $\pi_{11}\pi_{22} \geq \pi_{12}^2$

Derivando la expresión anterior respecto a θ

$$\begin{aligned} 0 =& p_{\theta\theta}Q(p(\theta,c),\theta) + p_\theta(Q_p p_\theta + Q_\theta) + p_\theta Q_p p_\theta + p(\theta,c)Q_{pp}p_\theta^2 + p(\theta,c)Q_p p_{\theta\theta} \\ &- C_{QQ}\left(Q_p p_\theta + Q_\theta\right)Q_p p_\theta - C_Q Q_{pp} p_\theta^2 - C_Q Q_p p_{\theta\theta} + T_{\theta\theta} \end{aligned} \tag{c}$$

Asimismo, la expresión para $\pi_{11}(.)$ es:

$$\begin{aligned} \pi_{11}(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c) =& p_{\hat{\theta}\hat{\theta}}Q(.) + p_{\hat{\theta}}Q_p p_{\hat{\theta}} + p_{\hat{\theta}}^2 Q_p + p(\hat{\theta},\hat{c})Q_{pp}p_{\hat{\theta}}^2 + p(\hat{\theta},\hat{c})Q_p p_{\hat{\theta}\hat{\theta}} \\ &- C_{QQ}Q_p^2 p_{\hat{\theta}}^2 - C_{QQ}Q_{pp}p_{\hat{\theta}}^2 - C_Q Q_p p_{\hat{\theta}\hat{\theta}} + T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} \end{aligned}$$

Evaluando la expresión anterior en $\hat{\theta} = \theta$ y $\hat{c} = c$, tenemos:

$$\begin{aligned} \pi_{11}(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c)|_{(\hat{\theta}=}\theta,\hat{c}=c) =& p_{\theta\theta}Q(.) + p_\theta Q_p p_\theta + p_\theta^2 Q_p + p(\theta,c)Q_{pp}p_\theta^2 + p(\theta,c)Q_p p_{\theta\theta} \\ &- C_{QQ}Q_p^2 p_\theta^2 - C_Q Q_{pp}p_\theta^2 - C_Q Q_p p_{\theta\theta} + T_{\theta\theta} \end{aligned} \tag{d}$$

Se reemplaza (d) en (c)

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_{11}(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} + p_\theta Q_\theta - C_{QQ}Q_\theta Q_p p_\theta \\ 0 &= \pi_{11}(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} + p_\theta \delta^D \left(1 - C_{QQ}h^{'}(p)\right) \\ p_\theta &= -\frac{\pi_{11}(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)}}{\delta^D\left(1 - C_{QQ}h^{'}(p)\right)} \geq 0 \end{aligned}$$

Esta desigualdad ocurre por la condición de segundo orden (ver la expresión (b)) $\pi_{11}(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} \leq 0$ y el denominador es estrictamente positivo (por supuesto del modelo).

De igual manera, a partir de (a) se tiene:

$$0 = \pi_2(\hat{\theta},\hat{c}|\theta,c)|_{(\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c)} = p_c Q(.) + pQ_p p_c - C_Q Q_p p_c + T_c$$

Se deriva esta última expresión respecto a c y se identifica $\pi_{22}(.)|_{\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c}$ y $\pi_{24}(.)|_{\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c}$, entonces:

$$\pi_{22}(.)|_{\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c}+\pi_{24}(.)|_{\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c}=0$$
$$\pi_{22}(.)|_{\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c}+p_c(.)\left(-\delta^C h'(p)\right)=0$$

Por lo tanto:

$$p_c(.)=\frac{\pi_{22}(.)|_{\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c}}{\delta^C h'(p)}\geq 0$$

pues, a partir de (b) se tiene $\pi_{22}(.)|_{\hat{\theta}=\theta,\hat{c}=c}\leq 0$ y $\delta^C h'(p)\leq 0$ para $\delta^C>0$. De esta forma se demuestra el lema. □

Prueba del colorario 3.1. Sea $\tilde{\theta}(s)=\min\left\{\bar{\theta},\theta^I(s)\right\}$, donde $\theta^I(s)$ representa el θ más alto que pertenece a la curva *isoprecio* con intercepto s. Entonces, $\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f\left(\theta,c(s,\theta)\right)d\theta = \int_{\underline{\theta}}^{\tilde{\theta}(s)} f\left(\theta,c(s,\theta)\right)d\theta$. Así, tomando límite a la expresión AMC(s) cuando $s\to\underline{c}$, se tiene:

$$\lim_{s\to\underline{c}} AMC(s)=EMC(\underline{c})+\delta^C\lim_{s\to\underline{c}}\left(\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} F\left(\theta,c(s,\theta)\right)d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} f\left(\theta,c(s,\theta)\right)d\theta}\right)$$
$$\lim_{s\to\underline{c}} AMC(s)=EMC(\underline{c})+\delta^C\lim_{s\to\underline{c}}\left(\frac{\int_{\underline{\theta}}^{\tilde{\theta}(s)} F\left(\theta,c(s,\theta)\right)d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\tilde{\theta}(s)} f\left(\theta,c(s,\theta)\right)d\theta}\right)$$

Se aplica la regla de hospital, y luego por el primer teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$\lim_{s\to \underline{c}} AMC(s) = EMC(\underline{c}) + \delta^C \left(\frac{\lim_{s\to\underline{c}} \frac{d}{ds} \int_{\underline{\theta}}^{\tilde{\theta}(s)} F\left(\theta, c(s,\theta)\right) d\theta}{\lim_{s\to\underline{c}} \frac{d}{ds} \int_{\underline{\theta}}^{\tilde{\theta}(s)} f\left(\theta, c(s,\theta)\right) d\theta} \right)$$

$$\lim_{s\to \underline{c}} AMC(s) = EMC(\underline{c}) + \delta^C \left(\frac{F\left(\tilde{\theta}\left(\underline{c}\right), c\left(s, \tilde{\theta}\left(\underline{c}\right)\right)\right) \tilde{\theta}'\left(\underline{c}\right) - F\left(\underline{\theta}, c\left(s, \underline{\theta}\right)\right) \underline{\theta}'}{f\left(\tilde{\theta}\left(\underline{c}\right), c\left(s, \tilde{\theta}\left(\underline{c}\right)\right)\right) \tilde{\theta}'\left(\underline{c}\right) - f\left(\underline{\theta}, c\left(s, \underline{\theta}\right)\right) \underline{\theta}'} \right)$$

$$\lim_{s\to \underline{c}} AMC(s) = EMC(\underline{c}) + \delta^C \left(\frac{F\left(\underline{\theta}, \underline{c}\right) \tilde{\theta}'\left(\underline{c}\right)}{f\left(\underline{\theta}, \underline{c}\right) \tilde{\theta}'\left(\underline{c}\right)} \right)$$

$$\lim_{s\to \underline{c}} AMC(s) = EMC(\underline{c}) + \delta^C \left(\frac{\tilde{\theta}'\left(\underline{c}\right) \int_{\underline{c}}^{\underline{c}} f\left(\underline{\theta}, \tilde{c}\right) d\tilde{c}}{f\left(\underline{\theta}, \underline{c}\right) \tilde{\theta}'\left(\underline{c}\right)} \right)$$

$$\lim_{s\to \underline{c}} AMC(s) = EMC(\underline{c})$$

De esta forma, en el primer término la expresión (3.19), se reconoce que cuando la realización de los cotos es baja, entonces el precio regulado es igual al costo marginal □

Prueba del lema 3.4. En primer lugar se prueba que la condición (3.24) implica que Π sea convexa y que $-\left(q(\theta)r(\theta), r(\theta)\right) \in \partial\Pi(\theta))$.

Se conoce que $\Pi^*(\hat{\theta}, \theta) = \left[p(\hat{\theta})q(\hat{\theta}) - c(\theta, q(\hat{\theta}))\right] r(\hat{\theta}) + s(\hat{\theta})$ es lineal en θ, pues la función de costos es un función lineal en θ. Asimismo, de la condición (3.24) se establece que $\Pi^*(\theta, \theta)$ es el supremo de todas las funciones lineales en θ. Por lo tanto, $\Pi^*(\theta, \theta) = \Pi(\theta)$ es una función convexa [3].

[3]Sean θ_1, θ_2 y $t \in [0, 1]$. Dado que Π^* es una función convexa en θ; entonces $\Pi^*(\hat{\theta}, t\theta_1 + (1 - t)\theta_2) \leq t\Pi^*(\hat{\theta}, \theta_1) + (1 - t)\Pi^*(\hat{\theta}, \theta_2) \leq t\Pi^*(\theta, \theta_1) + (1 - t)\Pi^*(\theta, \theta_2)$. La última desigualdad se da porque Π^* esta acotado superiormente por el supremo. Finalmente, tomando el supremo a los extremos de esta desigualdad se obtiene $\Pi(\theta, t\theta_1 + (1 - t)\theta_2) \leq t\Pi(\theta, \theta_1) + (1 - t)\Pi(\theta, \theta_2)$. Luego, $\Pi(\theta) = \sup_{\hat{\theta}} \Pi^*(\hat{\theta}, \theta)$.

Además, sean $\bar{\theta}, \theta \in \Theta$, la condición (3.24) implica que:

$$\begin{aligned}
\Pi(\bar{\theta}) = \Pi^*(\bar{\theta}, \bar{\theta}) &\geq \Pi^*(\theta, \bar{\theta}) \\
\Pi(\bar{\theta}) - \Pi(\theta) &\geq \Pi^*(\theta, \bar{\theta}) - \Pi(\theta) \\
\Pi(\bar{\theta}) - \Pi(\theta) &\geq r(\theta)\left[c(\theta, q(\theta)) - c(\bar{\theta}, q(\theta))\right] \\
\Pi(\bar{\theta}) - \Pi(\theta) &\geq \left(\theta_1 - \bar{\theta}_1\right) q(\theta) r(\theta) + \left(\theta_2 - \bar{\theta}_2\right) r(\theta) \qquad \text{(a)}
\end{aligned}$$

Dado que el subdiferencial $\partial\Pi(\theta)$ en θ esta definido como:

$$\partial\Pi(\theta) = \left\{\mu \in \mathbb{R}^2 : \Pi(\bar{\theta}) \geq \Pi(\theta) + \langle \mu, \bar{\theta} - \theta \rangle \text{ para todo } \bar{\theta} \in \Theta \right\}$$

De esta forma, la expresión (a) sugiere que $-(q(\theta)r(\theta), r(\theta)) \in \partial\Pi(\theta)$

Por otro lado; si $-(q(\theta)r(\theta), r(\theta)) \in \partial\Pi(\theta)$, entonces, para cualquier $\bar{\theta}$ y θ se puede obtener la expresión (a), y en consecuencia:

$$\Pi(\bar{\theta}) \geq \Pi^*(\theta, \bar{\theta})$$

De esta forma, generalizando para todo $(\theta, \hat{\theta})$ se tiene la expresión (3.24). □

Prueba del lema 3.5. El planificador maximiza la función objetivo dado por:

$$\left[V(q(\theta)) - p(\theta)q(\theta)\right] r(\theta) - s(\theta) + \alpha\Pi \qquad \text{(a)}$$

Una manera equivalente de escribir la expresión (a) es despejando $s(\theta)$ de la función de beneficios de la firma. Así, $s(\theta) = \Pi(\theta) - \left[p(\theta)q(\theta) - c(\theta, q(\theta))\right] r(\theta)$. Entonces, la expresión (a) es equivalente a:

$$\begin{aligned}
&V(q(\theta))r(\theta) - c(\theta, q(\theta))r(\theta) - (1-\alpha)\Pi \\
&V(q(\theta))r(\theta) - (\theta_1 q(\theta) + \theta_2)r(\theta) - (1-\alpha)\Pi \\
&V(q(\theta))r(\theta) - q(\theta)r(\theta)\theta_1 - r(\theta)\theta_2 - (1-\alpha)\Pi \qquad \text{(b)}
\end{aligned}$$

La idea es reescribir esta expresión en función de Π_1, Π_2 y Π. A partir de la expresión (3.27):

$$\begin{cases} \Pi_1 = -q(\theta)r(\theta) \\ \Pi_2 = -r(\theta) \end{cases}$$

se puede escribir $r(\theta) = -\Pi_2$ y $q(\theta) = \Pi_1/\Pi_2$. De esta forma, la expresión (b) queda como

$$-\Pi_2 V\left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2}\right) + \Pi_1\theta_1 + \Pi_2\theta_2 - (1-\alpha)\Pi$$

Así, el problema del planificador queda como:

$$\varPhi = \int_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}^{\overline{\theta}_2}\left\{-\Pi_2 V\left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2}\right) + \theta_1\Pi_1 + \theta_2\Pi_2 - (1-\alpha)\Pi\right\} f(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2$$

□

Prueba de la proposición 3.2. Para $\theta \in \Theta_1$, se cumple que $\bar{r}(\theta) = 1$. De esta forma, $\partial^2\Pi/\partial\theta_2\partial\theta_1 = 0$. Además, como Π es una función de clase C_2, entonces $0 = \partial^2\Pi/\partial\theta_2\partial\theta_1 = \partial^2\Pi/\partial\theta_1\partial\theta_2 = \partial q(\theta)/\partial\theta_2$. Por lo tanto, $\bar{q}(\theta)$ es independiente de θ_2.

Por otra parte, para cualquier $\theta \in \Theta_1$ se cumple que $\bar{q}(\theta) > 0$ y $\bar{\Pi}(\theta) > 0$. Así, $\beta(\theta) = \lambda(\theta) = 0$.

De esta forma la ecuación de euler (se toma en cuenta las expresiones (3.29)-(3.31)) queda como:

$$\begin{aligned} -(1-\alpha)f(\theta) =& \frac{\partial}{\partial\theta_1}\{[(\theta_1 - P(\bar{q}(\theta))]\, f(\theta)\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial\theta_2}\{[(\theta_2 + \mu - V(\bar{q}(\theta)) + \bar{q}(\theta)P(\bar{q}(\theta))]\, f(\theta)\} \end{aligned}$$

Se puede notar que $\frac{\partial}{\partial\theta_2}[\theta_2 + \mu - V(\bar{q}) + \bar{q}P(\bar{q})]$ es independiente de θ_2, pues $\bar{q}$ es independiente de θ_2. Además, la segunda ecuación de transversalidad sugiere que:

$$[\theta_2 + \mu - V(\bar{q}) + \bar{q}P(\bar{q})] = 0 \quad \text{si } \theta_2 = \underline{\theta}_2, \bar{\theta}_2$$

Así, la expresión $\frac{\partial}{\partial\theta_2}[\theta_2 + \mu - V(\bar{q}) + \bar{q}P(\bar{q})]$ es igual a 0, para todo θ_2. Por ello, la ecuación de euler se puede expresar como:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\alpha)f(\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta_1}\{[(\theta_1 - P(\bar{q}(\theta))]\, f(\theta)\} \\ 0 &= (1-\alpha)f(\theta_1) + \frac{\partial}{\partial\theta_1}\{[(\theta_1 - P(\bar{q}(\theta_1))]\, f(\theta_1)\} \end{aligned}$$

pues $q(\theta)$ y $f(\theta)$ es independiente de θ_2. En la expresión anterior tomando integrales, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\theta}_1}^{\theta_1} -(1-\alpha)f(\theta_1)\partial\theta_1 &= \int_{\underline{\theta}_1}^{\theta_1} \partial\{[(\theta_1 - P(\bar{q}(\theta_1))]\, f(\theta_1)\} \\ -(1-\alpha)F(\theta_1) &= \{\theta_1 - P(\bar{q}(\theta_1))\}f(\theta_1) - \{\underline{\theta}_1 - P(\bar{q}(\underline{\theta}_1))\}f(\underline{\theta}_1) \end{aligned}$$

sin embargo, por la primera ecuación de transversalidad, se tiene que $\{\theta_1 - P(\bar{q}(\theta_1))\}f(\theta_1) = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} -(1-\alpha)F(\theta_1) &= \{\theta_1 - P(\bar{q}(\theta_1))\}f(\theta_1) \\ P(q) &= \theta_1 + (1-\alpha)\frac{F(\theta_1)}{f(\theta_1)} \equiv \bar{p}(\theta) \end{aligned}$$

□

Prueba de la proposición 3.3. Cualquier $\theta \in \Theta_2$ satisface que $\beta(\theta) = \lambda(\theta) = 0$ (ello porque $q(\theta) > 0$ y $\Pi(\theta) > 0$) y $\mu(\theta) = 0$ (pues $-1 < r(\theta) < 0$). Por lo tanto, la ecuación de euler queda como:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\alpha) + \frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_1 - P(q)) + \frac{\partial}{\partial\theta_2}(\theta_2 - V(q) + qP(q)) \\ 0 &= (3-\alpha) - \frac{\partial}{\partial\theta_1}(P(q)) + \frac{\partial}{\partial\theta_2}(-V(q) + qP(q)) \end{aligned}$$

Notar que $\frac{\partial V(q)}{\partial \theta_2} = \left(\frac{\partial V(q)}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial \theta_2}\right) = P(q)\left(\frac{\partial q}{\partial \theta_2}\right)$, entonces

$$
\begin{aligned}
0 &= (3-\alpha) - \frac{\partial}{\partial \theta_1}(P(q)) - P(q)\frac{\partial q}{\partial \theta_2} + \frac{\partial q}{\partial \theta_2}P(q) + q\frac{P(q)}{\partial \theta_2} \\
0 &= (3-\alpha) - \frac{\partial}{\partial \theta_1}(P(q)) + q\frac{P(q)}{\partial \theta_2}
\end{aligned}
$$

Dado que $\bar{p}(\theta) = P(\bar{q}(\theta))$, la expresión anterior queda como:

$$
\begin{aligned}
0 &= (3-\alpha) - \frac{\partial}{\partial \theta_1}\bar{p}(\theta) + \bar{q}(\theta)\frac{\bar{p}(\theta)}{\partial \theta_2} \\
(3-\alpha) &= \frac{\partial}{\partial \theta_1}\bar{p}(\theta) - \bar{q}(\theta)\frac{\bar{p}(\theta)}{\partial \theta_2}
\end{aligned}
$$

□