

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**  
**ESCUELA DE POSGRADO**



**UNA PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN LA ORQUESTACIÓN  
INSTRUMENTAL: INTERPRETACIÓN DEL ANÁLISIS MARGINAL  
EN FUNCIONES ECONÓMICAS**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN  
ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**

**AUTOR**

Pedro Daniel Tasayco Casas

**ASESORA**

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Mayo, 2021

## RESUMEN

La presente investigación tiene por objetivo diseñar una propuesta didáctica basada en la Orquestación Instrumental que permita que los estudiantes de economía interpreten el análisis marginal de funciones económicas para lo cual nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación: *¿El diseño de una propuesta didáctica basada en la Orquestación Instrumental podría permitir que los estudiantes de economía interpreten el análisis marginal de funciones económicas?* Para responder dicha pregunta recurriremos a aspectos de la Genesis Instrumental y Orquestación Instrumental como base teórica mientras que la metodología tiene un enfoque cualitativo. Se propusieron dos secuencias didácticas con configuraciones en educación virtual con el apoyo del Geogebra y los modos de ejecución se basaron en la tipología propuesta por Şay y Akkoç, (2016) con el objetivo de provocar la emergencia de los esquemas uso, de acción instrumentada y acción colectiva instrumentada. Las secuencias didácticas buscan la Génesis instrumental del análisis marginal para que los estudiantes de economía puedan usarlo en la toma de decisiones en contextos económicos

Finalmente, en cada actividad hemos propuesto posibles esquemas de usos y de acción instrumentada que debería emerger al desarrollar la actividad. Estas serán identificables a través de técnicas instrumentadas, lo cual nos llevaría a concluir que, si los estudiantes de economía son capaces de resolver desarrollar las preguntas relacionadas al análisis marginal, entonces alcanzarían la Genesis Instrumental, siendo así observable la emergencia de técnicas instrumentadas en el estudiante de economía.

Palabras clave: Análisis marginal, Génesis Instrumental, Orquestación Instrumental, educación virtual, GeoGebra.

## ABSTRACT

The following research paper attempts to design a didactic proposal based on the Instrumental Orchestration that allows economics students to interpret the marginal analysis of economic functions for which we have established the following research question: *Will the design of a didactic proposal based on the Instrumental Orchestration allow economics students to interpret the marginal analysis of economic functions?*

To answer this question, we will resort to the aspects of the Instrumental Genesis and Instrumental Orchestration as theoretical foundation while the methodology has a qualitative focus. Two didactic sequences with virtual teaching arrangements were proposed with *Geogebra's* support and the execution modes were based on the typology proposed by Şay and Akkoç, (2016) with the goal of provoking the emergence of schemes of use, instrumented action and collective instrumented action. The didactic sequences look for the Instrumental Genesis of the marginal analysis, so that economics students can use it for decision-making within economic contexts.

Finally, in each activity we have proposed potential schemes of use and of instrumented action that should emerge when developing the activity. These will be identifiable through instrumented techniques which would lead us to conclude that if the economics students are able to develop the questions related to marginal analysis, then they would reach the instrumental genesis through which the emergence of the instrumented techniques would be noticeable in the economics students.

**Key Words:** Marginal Analysis, Instrumental Genesis, Instrumental Orchestration, Virtual Teaching, GeoGebra.



## **DEDICATORIA**

*A mis padres Marino y Gladys por el apoyo incansable, a mi esposa Nadiezhda por ser comprensiva y apoyarme en mis proyectos de formación académica y a mis hijos Daniel y Santiago porque su sola presencia me motiva a ser cada día mejor.*

## AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por el apoyo constante y orientación en cada fase de la investigación, por sus sugerencias que encaminan y por su exigencia en cada asesoría, me permitieron encontrar el horizonte tras cada presentación y entrega de versión preliminar.

A los miembros del jurado, Mg. Daysi Julissa García Cuellar, por sus importantes contribuciones a la presente tesis durante las exposiciones y los avances de tesis. A la Mg. Magaly Ethel Campos Motta por su tiempo en las revisiones y recomendaciones en la versión final de la tesis.

Al grupo de investigación de la Línea Tecnologías y Visualización en Educación Matemática (TecVEM) de la Pontificia Universidad Católica del Perú por el apoyo constante durante todo el proceso de la presente investigación

A todo el equipo docente de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por la formación académica y profesional, por su disposición a apoyarnos, en especial a los docentes Cecilia Gaita, Jesús Flores, Nélida Medina y Francisco Ugarte quienes en cada clase nos enriquecieron con conocimientos y motivaron a ser mejores.

A mis compañeros de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, con quienes hemos compartido muchas experiencias de vida cómo académicas.

A mis hermanos, Jaime y Luisa por confiar en mí y apoyarme siempre que los necesité.

# ÍNDICE

RESUMEN .....	ii
ÍNDICE .....	vi
LISTAS DE TABLAS .....	vii
LISTA DE FIGURAS .....	viii
INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN .....	3
1.1 Investigaciones de referencia.....	3
1.2 Justificación.....	15
1.3 Aproximación y Orquestación Instrumental.....	20
1.4 Pregunta y objetivos de la investigación .....	34
1.5 Metodología y procedimientos metodológicos .....	34
CAPÍTULO II: EL ANÁLISIS MARGINAL EN FUNCIONES ECONÓMICAS .....	38
2.1 La Derivada como base del análisis marginal. ....	38
2.2 El análisis marginal de funciones económicas. ....	41
2.3 El análisis marginal de funciones económicas en libros de Economía .....	46
CAPÍTULO III: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DEL ANÁLISIS MARGINAL DE FUNCIONES ECONÓMICAS. ....	55
3.1 Configuración Didáctica. ....	55
3.2 Modo de ejecución. ....	56
CONCLUSIONES.....	88
REFERENCIAS.....	92

## LISTAS DE TABLAS

Tabla 1. Tipos de orquestación (Say y Akkoc, 2016) .....	33
Tabla 2. Libro de economía analizados en la presente investigación. ....	47
Tabla 3. Estructura de secuencia de actividades de la propuesta didáctica. ....	56
Tabla 4. Algunos tipos de orquestación (Tabach, 2013) .....	62
Tabla 5. Tipos de orquestación propuestas para la presente investigación. ....	63



## LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 1.</i> Malla curricular de la carrera de Economía y Negocios Internacionales de la Facultad de Economía de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas .....	17
<i>Figura 2.</i> Plan de estudios de la carrera de Ingeniería Económica de la Universidad Nacional de Ingeniería. ....	17
<i>Figura 3.</i> Cronograma de actividades del curso de Matemáticas II para las carreras de Economía, Finanzas e ingeniería empresarial la carrera de Economía de la Universidad Del Pacífico. ....	18
<i>Figura 4.</i> Tipos de esquemas de acción instrumentada. ....	22
<i>Figura 5.</i> Componentes del instrumento. ....	24
<i>Figura 6.</i> Componentes de la génesis instrumental. ....	26
<i>Figura 7.</i> Elementos de una Orquestación Instrumental. ....	28
<i>Figura 8.</i> Fases de una orquestación instrumental.....	32
<i>Figura 9:</i> Proceso de investigación cualitativa.....	35
<i>Figura 10:</i> Proceso de investigación cualitativa.....	36
<i>Figura 11.</i> Producción total en función del trabajo. ....	48
<i>Figura 12.</i> Preguntas de repaso. ....	49
<i>Figura 13.</i> Comportamiento del consumidor.....	50
<i>Figura 14.</i> Ingreso marginal y elasticidad.....	51
<i>Figura 15.</i> Preguntas de repaso. ....	51
<i>Figura 16.</i> Función producción y costos totales. ....	52
<i>Figura 17.</i> Costos promedios y costos marginales.....	53
<i>Figura 18.</i> Pregunta 1 de la Actividad Exploratoria. ....	57
<i>Figura 19.</i> Tarea 2 de la actividad exploratoria. ....	59
<i>Figura 20.</i> Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 1.....	65
<i>Figura 21.</i> Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 1 .....	66

<i>Figura 22.</i> Actividad con orquestación Instrumental I. Pregunta 2 .....	67
<i>Figura 23.</i> Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 2 .....	67
<i>Figura 24.</i> Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 3.....	69
<i>Figura 25.</i> Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 3. ....	69
<i>Figura 26.</i> Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 4.....	70
<i>Figura 27.</i> Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 4. ....	70
<i>Figura 28.</i> Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 5.....	72
<i>Figura 29.</i> Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Prtegunta5. ....	72
<i>Figura 30.</i> Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 5a. ....	73
<i>Figura 31.</i> Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 5b. ....	74
<i>Figura 32:</i> Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 1.....	77
<i>Figura 33:</i> Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 1a. ....	78
<i>Figura 34.</i> Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 1b. ....	79
<i>Figura 35.</i> Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 2.....	81
<i>Figura 36.</i> Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 2b. ....	83
<i>Figura 37.</i> Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 3.....	85
<i>Figura 38.</i> Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 3b. ....	86

## INTRODUCCIÓN

El cálculo es una herramienta poderosa para describir los cambios, medirlos y predecirlos. En tal sentido la derivada juega un rol protagónico cuando se requiere cuantificar o medir cualquier fenómeno y los cambios que produce.

La enseñanza de la derivada usualmente inicia en las aulas universitarias, dichos conocimientos matemáticos son guiados por docentes que tienen sus formas particulares de presentarla y enseñarlas, en la mayoría de los casos se prioriza la parte algorítmica, así como las construcciones y validaciones formales, tal como lo señala Artigue (1995).

En ese sentido, los estudiantes cumplen el objetivo de calcular límites, derivar e integrar, pero difícilmente dichos conocimientos logran trascender a otras áreas. En ese sentido Dolores (2007) afirma: "Difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales sobre variación y cambio a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentran en esencia de este concepto" (p.1). Esta deficiente comprensión de la derivada acarrea consecuencias nefastas, más aún, en estudiantes que necesitan dichos conocimientos para aplicarlos en su vida profesional, como por ejemplo los estudiantes de ciencias económicas.

El desarrollo de métodos matemáticos en diferentes ciencias, en especial la física, y la aceptación de existencia de un lenguaje universal que permita transferir una proposición de un campo a otro permitieron el nacimiento de la teoría de la utilidad marginal a fines del siglo XIX. Aparecen tres autores con diferente formación económica casi en simultáneo con propuestas equivalentes, esto es un ejemplo claro de cómo los esfuerzos por formalizar las teorías influyen en el desarrollo de una ciencia. En el siglo XIX, con la aparición de los trabajos de Stanley Jevon (1871), Carl Menger (1871) y León Walras (1874) formalizan los conceptos clásicos de la economía mediante la introducción de los conceptos de utilidad marginal y maximización. En consecuencia, se les atribuye ser los gestores del marginalismo, por ser los pioneros en desarrollar la ley de la utilidad decreciente e incorporarlas al equilibrio general de la economía.

Se denomina análisis marginal al uso de la derivada o diferencial para predecir el cambio que de una función en un contexto económico (ingreso, costo, utilidad, producción, etc.) al aumentar en una unidad la variable independiente (Lial y

Hungerford, 2000). Al inmiscuirnos en los conceptos económicos podemos apreciar lo importante que es la derivada y cómo esta resulta indispensable para todo profesional que estudia o tiene formación en ciencias económicas. Las funciones marginales (ingreso, costo y utilidad o producción) son piezas fundamentales en el análisis de una determinada situación económica pero también hay otras que también aportan información valiosa como la elasticidad de la demanda, la propensión al ahorro, tasa marginal de sustitución, etc. El economista Gregory Mankiw en su libro “principios de economía” señala que el análisis marginal es uno de los diez principios de la economía y regula la manera de cómo las personas racionales toman sus decisiones en base a la marginalidad.

A continuación, presentamos la estructura de la investigación la cual está compuesta por tres capítulos.

En el primer capítulo, se mostrará la problemática de la investigación para lo cual se recopiló investigaciones referidas sobre el objeto matemático, la derivada, las cuales nos brindan un panorama de adonde apuntan las investigaciones y cuáles son las problemáticas actuales. También se hicieron indagaciones sobre el análisis marginal de funciones económicas las cuales nos permiten conocer la importancia de la derivada en la economía, así como la problemática sobre su enseñanza, así como focos donde esta investigación debe poner atención.

En el segundo capítulo, se abordará el estudio histórico y epistémico de la derivada, pero también de la economía con especial atención al surgimiento y evolución del análisis marginal. También se realizó un análisis de dos libros de uso frecuente por los estudiantes de economía para conocer cuáles son enfoques que usan en la enseñanza de análisis marginal.

En el tercer capítulo, se describe y fundamenta la propuesta didáctica para el estudio del análisis marginal de funciones económicas. Se detalla la configuración didáctica, así como los modos de ejecución.

Finalmente, se presentan las conclusiones de la investigación en concordancia a los aspectos teóricos y metodológicos, la pregunta de investigación y el objetivo general.

# **CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN**

En el presente capítulo se presentan las investigaciones de referencia, nacionales e internacionales, realizadas sobre el objeto de estudio, el análisis marginal de funciones económica, pero también se expondrán investigaciones del instrumento derivada en el contexto de la enseñanza de las matemáticas, finalmente se expondrán las razones que justifican la presente investigación.

## **1.1 Investigaciones de referencia**

Las investigaciones de referencia presentada en la presente tesis se encuentran organizada en dos grupos de acuerdo con el dominio en matemática de estudio, el primer lugar se presentan las investigaciones correspondientes al cálculo con especial atención a la derivada de una función real de variable real; en segundo lugar, a las investigaciones correspondientes a las ciencias económicas vinculadas con el análisis marginal.

### **1.1.1 Investigaciones sobre la derivada.**

En la búsqueda que se realizó sobre el instrumento derivada, se encontró abundante bibliografía, pero consideramos que las investigaciones de Sánchez- Matamoros, Ponciano y Riveros aportan sobre entender la complejidad y a la vez importancia de la noción de derivada en la enseñanza de las matemáticas a nivel superior puesto que, es bien sabido, la transcendencia que dicho concepto es clave en diferentes ramas de las ciencias. A continuación, detallaremos lo fundamental de cada investigación mencionada.

La matemática fue muy importante en la formalización del conocimiento en la economía, especialmente durante el siglo XIX, donde se dieron los primeros pasos para la integración de estas ciencias. Este hecho provocó un cambio en el currículo de secundaria como en el universitario dándole un protagonismo al cálculo. El entendimiento parcial de dichos conocimientos estudiados en la escuela y la universidad, originado por el excesivo componente memorística en estos procesos, no permite alcanzar una comprensión razonada y reflexiva (Sánchez-Matamoros, García y Linares, 2008). Hay evidencia que demuestran que muchos estudiantes concluyen

satisfactoriamente los cursos vinculados con el cálculo, teniendo serias dificultades en sus bases de conocimiento y habilidades de razonamiento, dicho fenómeno se encuentra documentado (Carlson, Madison y West, 2015)

Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) en su artículo, revisa y organiza las investigaciones realizadas sobre el objeto derivada (estudio del arte).

El autor revisa las investigaciones para organizarlos bajo la luz de los tres parámetros: a) Comprensión de derivada puntual; b) el rol de las diferentes representaciones de derivadas; c) características inherentes del desarrollo del esquema de derivadas.

Los investigadores concluye que las líneas de investigación que requieren ser profundizadas para tener una mejor comprensión de cómo los estudiantes adquieren y usan el concepto de derivada son: a) Investigaciones sobre diferentes maneras de mirar el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada; b) Investigaciones sobre la comprensión de la razón de cambio; c) Investigaciones sobre la relación de razón de cambio y el cociente incremental además de la Tasa de variación; d) Investigaciones sobre los sistemas de representación como herramientas para pensar sobre la derivada; e) Investigaciones sobre la relación entre la derivada puntual y la función derivada; f) Investigaciones sobre el desarrollo de la comprensión del esquema de derivada; g) investigaciones sobre el desarrollo de la comprensión de la regla de la cadena.

Sobre los sistemas de representación como herramientas para pensar sobre la derivada Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008), le atribuyen un papel preponderante dado que ayudan a dar significado a los conceptos. Desde este punto de vista proponen analizar el rol que cumplen las representaciones y sus interacciones, vistas como instrumento conceptuales o herramientas para resolver problemas.

Los autores indican que la razón de cambio es muy perceptible tanto en lo científico, como en la economía y hasta en la vida. Es de especial interés conocer cómo se comporta una magnitud con respecto a otra, es decir, ante un cambio dado de una magnitud (crece o decrece) por más pequeña que sea cómo afecta a otra magnitud (crece o decrece) y sus interpretaciones en las diferentes disciplinas matemáticas. Para la comprensión de la derivada es muy importante entender primero el concepto de razón de cambio como cociente incremental. Las investigaciones reportan los errores e inconvenientes que tienen los estudiantes sobre el concepto de derivada; Orton (1983)

reconoce tres tipos de errores frecuentes en los estudiantes en problemas de derivadas. Los errores estructurales (errores conceptuales), arbitrarios (errores aleatorios independientes de los datos del problema) y de manipulación (errores operativos). Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) basados en las exploraciones realizadas por Orton, propone realizar investigaciones sobre la razón de cambio en la comprensión de derivada, sea el foco de futuras investigaciones.

Por otro lado, Ponciano (2016) señala la importancia de investigar en la concepción del conocimiento y cómo se da este conocimiento en la formación de los futuros profesores, específicamente sobre la derivada. Los fundamentos teóricos sobre la derivada que se siguieron durante toda la investigación fueron tomados del libro Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. Además, el marco teórico sobre el cual se está realizando la investigación, es el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). Esta propuesta modela el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y además es una herramienta para analizar su práctica. Dentro de este marco se tiene a una categoría llamada Recursos y materiales, el autor explica que con este trabajo se pretende aportar a dicha categoría. La investigación es de tipo cualitativa y para ello se aplicó un estudio de caso. Éste se realizó sobre un profesor cuyo seudónimo es Pepe el cual tiene 8 años de experiencia docente y tiene el grado de magister y doctor en Matemática Educativa. El sujeto de la investigación ha impartido los cursos de Cálculo diferencial e integral, Álgebra, Geometría plana y analítica y Álgebra lineal. En este caso, él imparte el curso Laboratorio de Cálculo y Geometría II en la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Zacatecas, universidad ubicada en Zacatecas, México. El curso se imparte desde el 25 de enero hasta el 29 de mayo del 2016, pero las clases que se grabaron y analizaron son desde el 29 de febrero hasta el 19 de marzo. Estas clases se dan en una sala de cómputo, en ésta se cuentan con un proyector, una pizarrón electrónico y computadoras, que ya tienen instalado el GeoGebra, para el profesor y todos los estudiantes. Es importante mencionar que el análisis no se da solo en la clase en la sala de cómputo, también se tiene en cuenta la planeación del profesor para dichas clases.

En el caso de esta investigación, Ponciano (2016) quiere saber qué conocimientos pone en juego el profesor Pepe cuando enseña el tema de La derivada mediante el uso de recursos didácticos tecnológicos. Para saber ello. en la investigación se recurre a la grabación de videos (sobre las clases) y a la entrevista (hacia el profesor), teniendo en

cuenta siempre la planeación que realiza el profesor sobre las clases. Los instrumentos que se usarán para analizar la información recogida son: el modelo MTSK, para caracterizar el conocimiento del profesor, y otro modelo adaptado, que permite organizar y analizar la práctica del profesor.

Finalmente, Ponciano concluye que el GeoGebra es un recurso tecnológico y didáctico esencial en la enseñanza de la derivada, puesto que permiten circular en diferentes registros de representación (numérico, algebraico y gráfico) e incluso permite desarrollar la noción de límite al poder trabajar con cantidades pequeñas. También resalta, en este caso particular, que el profesor enriquece su quehacer docente mediante los recursos didácticos y tecnológicos, pero se debe de conocer las potencialidades y desventajas del recurso tecnológico haciendo uso de ellos cuando sea pertinente.

Por otro lado, Riveros (2019) su investigación se centra en cómo los estudiantes de undécimo grado se apropian de la noción de derivada mediante situaciones propuestas en entornos virtuales, desde un enfoque cualitativo, describe los factores vinculantes al pensamiento matemático en el proceso de aprendizaje de la derivada en estudiantes de un instituto técnico de Colombia. Basado en teoría de las representaciones semióticas propuestas por Duval la investigación recurre a la modelación como herramienta para plantear, resolver e interpretar fenómenos relacionados con el cambio para ello recurren a distintos recursos informáticos los cuales permitan proximidad a la comprensión de la matemática.

El investigador elaboró seis ambientes virtuales donde se evidencia el tratamiento del objeto derivada vinculada con el cambio, en cada una de ellas se proponen diversas actividades con el objetivo de desarrollar la observación, manipulación y el análisis en las situaciones problemáticas propuestas. Concluye que el uso de diferentes registros de representación semiótica (lenguaje natural, tabular, gráfico, numérico y algebraico) promueve el desarrollo del pensamiento matemático además se pudo establecer que los estudiantes se apoderan del objeto derivada desde una perspectiva covariacional, partiendo desde una actividad que involucre el cálculo de la velocidad instantánea de un cuerpo, para luego evolucionar el concepto a una razón de cambio entre incrementos, posteriormente definir la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto y encontrar la expresión algebraica de la derivada mediante un límite.

La propuesta didáctica de Riveros (2019) en la implementación de las actividades mediante el Geogebra en la investigación permitieron a los estudiantes mejorar y desarrollar aspectos del pensamiento matemático vinculados con la observación, modelación, simulación y análisis de las representaciones, dejando de lado a los procesos memorísticos de contenidos. Por otro lado, La manipulación, visualización, el uso de plataformas educativas y la implementación de diferentes tipos de representaciones semióticas permite que el docente enriquezca significativamente su desempeño en el aula, además de ser una actividad retadora el diseñar e implementar situaciones en los cuales se involucren diferentes representaciones de un determinado objeto matemático.

Por lo expuesto, queda claro que la enseñanza del objeto matemático, la derivada, puede ser abordado desde diferentes perspectivas, una propuesta es la de Riveros (2019) que dejando de lado los métodos memorísticos plantea el desarrollo del pensamiento matemático en el proceso de aprendizaje de la derivada a partir de la visualización mediante el uso del GeoGebra, para nuestra investigación resulta muy trascendentes lo propuesto por Rivero puesto que para entender el concepto de marginalidad se requiere de un fuerte componente visual y dinámico. Consideramos que el docente juega un rol importante pues es el quien organiza, planea y dirige la sesión, en ese sentido la investigación de Ponciano (2016) que señala la importancia de investigar en la concepción del conocimiento y cómo se da este conocimiento en la formación de los futuros profesores, específicamente sobre la derivada. Mientas Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2019) con su trabajo recopilatorio de investigaciones sobre la derivada nos muestran cuales son los focos que debemos prestar atención cuando se enseñan los conceptos de derivada.

### **1.1.2. Investigaciones sobre el análisis marginal en funciones económicas.**

Producto de la búsqueda bibliográfica, en la presente sección, resumiremos investigaciones sobre el análisis marginal de funciones económicas. Los investigadores como Mercapide, Feudel, Albán, Rojas además de Almendariz y Choez nos darán una visión de cómo se están orientando los estudios sobre el análisis marginal y hacia donde se dirigen en la actualidad.

Mercapide (2018) en su investigación se centra sobre la problemática de los estudiantes en su proceso de aprendizaje del cálculo y su enseñanza en la economía con especial atención a los conceptos de función y derivada en alumnos de nivel secundaria.

El investigador compiló literatura pertinente que ayudó a establecer un marco teórico relacionado con la problemática sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje del cálculo además de buscar en el currículo de secundaria sobre contenidos sobre matemática y economía. El investigador para comprobar el nivel de conocimiento de los estudiantes que han accedido a la universidad y estar cursando el primer ciclo de la carrera de economía tuvo que diseñar un instrumento de medición y análisis.

Al contrastar los datos obtenidas por el instrumento diseñado, con la bibliografía recopilada se atreve a proponer una propuesta didáctica con el fin de proveer a los actores de la sesión de clase herramientas más eficaces para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del cálculo la dicha sesión.

Los esquemas que emergieron basados en la teoría de la reificación sugieren una interacción entre dos concepciones. En un primer momento, un aprendizaje mecánico y asociado a un proceso algorítmico es decir una concepción operacional, para luego en un segundo momento, conseguir una comprensión más profunda del concepto matemático como objeto abstracto, es decir una concepción estructural.

Paralelamente, existen tres etapas claramente diferenciables en el proceso de aprendizaje del concepto matemático los cuales son: la interiorización, la condensación y la reificación siendo este último el más relevante por que promueve el desarrollo de capacidades que no tenían antes, haciendo aparecer en la mente del estudiante conceptos que antes no podía comprender.

La orientación metodológica aplicada en la investigación de Mercapide (2018) fue implementada en dos etapas. Primero una etapa de exploración (prueba piloto) donde se pone a prueba el cuestionario definitivo, en dicha exploración permitió la graduar la dificultad, tiempo de ejecución, así como la elaboración de una rúbrica y mejorar el texto

con el fin de que la redacción esté acorde de los estudiantes. La segunda etapa implementa las conclusiones de la prueba piloto para posteriormente ejecutar un cuestionario con problemas con el objetivo de comprobar su nivel de conocimiento sobre funciones y derivada.

En su propuesta didáctica el investigador recomienda el uso del GeoGebra como herramienta de visualización, interactiva y dinámica. Además, este software permite la presentación simultánea de varios registros (algebraico, gráfico y el tabular).

Mercapide (2018) destaca tres potencialidades del GeoGebra aplicado a la economía, primero, poder convertir lo abstracto a visual; segundo, estimula la comprensión de lo covariacional mediante el dinamismo del GeoGebra y, por último, es una herramienta interactiva lo cual promueve el aprendizaje autónomo debido a su fácil manejo.

La investigación concluye en que La normativa curricular del contexto propugna unos determinados estándares de aprendizaje asociados a la enseñanza del cálculo, pero la experiencia demuestra que el grado de comprensión de estos presenta un amplio margen de mejora mediante la incorporación de visualización para ayudar a desarrollar habilidades de razonamiento covariacional y comprensiones funcionales.

Por su parte la investigación de Feudel (2016) resalta la importancia de los conceptos matemáticos en las aplicaciones económicas específicamente en que gracias a la derivada podemos abordar los conceptos económicos de una manera reflexiva.

La investigación se basa en responder tres preguntas: ¿Qué comprensión del concepto de derivada necesitan tener los estudiantes de economía?, ¿Qué conocimiento de deben de tener los estudiantes de economía antes de asistir a la universidad? y ¿Qué conocimientos sobre el concepto de derivada tienen los estudiantes de economía después de llevar los cursos de matemática?

En la investigación Feudel (2016) menciona que existen diferentes representaciones para la derivada que los estudiantes de economía deben saber: a) gráficamente como la pendiente de la línea tangente en un punto, b) verbalmente como la tasa de cambio instantánea, c) físicamente como velocidad o velocidad, o d) simbólicamente como el límite del cociente de diferencia. Estas representaciones deben ser parte de una imagen conceptual adecuada, de la derivada, después del curso de matemáticas.

El objetivo del estudio fue descubrir cuáles de los aspectos del conocimiento esperado sobre la derivada, que se mencionaron anteriormente, se consideran importantes, por estudiantes de economía. Si los estudiantes no consideran que el conocimiento es relevante, probablemente lo olvidarán poco después del examen (o incluso nunca lo absorberán).

En la investigación de Feudel (2016) manifiesta que los estudiantes de economía también necesitan dar una interpretación de la derivada en contextos económicos (principalmente con unidades discretas en la variable independiente). En economía, la derivada a menudo se interpreta como el cambio absoluto de los valores de la función si la variable independiente de la función aumenta o disminuye en una unidad.

En el 2015, a los 700 estudiantes de economía de la Universidad de Paderborn, Alemania, se les indicó hacer un resumen conceptual sobre los conocimientos más importantes sobre la derivada en el curso de matemática. Los estudiantes fueron capacitados dos semanas antes para realizar dicha tarea llamada base de conceptos del curso en consecuencia estaban habituados con la tarea encomendada, de los cuales solo 146 lo entregaron. En la investigación los estudiantes de economía consideraron que: El conocimiento del procedimiento relacionado con la derivada (reglas de derivación, álgebra de derivadas, etc.) es más importante que el conocimiento conceptual, aunque se les dijo en clase que el conocimiento conceptual (la definición, ejemplos, visualizaciones, conexiones a otros conceptos o aplicaciones) es necesario para el examen. Por lo tanto, la investigación concluye que, si el conocimiento conceptual es un objetivo importante en un curso de matemáticas, los estudiantes deben experimentar la importancia del conocimiento conceptual por sí mismos durante el semestre, a través de una proporción adecuada entre tareas que involucran conocimiento conceptual y tareas que involucran conocimiento procesal en los ejercicios. Esto es aún más importante para los cursos de servicio de matemáticas, en los que muchos estudiantes solo planean aprobar el examen con el 50% de los puntos (al menos la mitad de las tareas deben involucrar conocimiento conceptual).

Otra conclusión de Feudel (2016) es que los estudiantes de economía no consideraron los antecedentes matemáticos relacionados con el uso de la derivada en economía como material de aprendizaje importante a pesar de que se enfatizaron esos antecedentes en el curso. Ese resultado es un problema porque los estudiantes que no

tienen ese conocimiento no podrán trabajar con la derivada en economía de manera reflexiva. Son posibles varias razones para la falta de importancia, por ejemplo, trivialidad de la interpretación económica, expectativa de que la interpretación económica no ocurriría en el examen, interés sólo en los procedimientos y el vocabulario cuando se trata de funciones económicas en contextos económicos y no en el conocimiento matemático de fondo, o incluso ningún interés en la economía en sí porque el tema de estudio "economía" fue elegido principalmente debido a un alto salario esperado.

Por otro Lado, Albán (2017), realiza una investigación dirigida a estudiantes del primer semestre, de la facultad de economía, en la Universidad Laica Eloy Alfaro de Marabí, de la ciudad de Manta, Ecuador donde declara que la resolución de problemas de optimización y las aplicaciones con derivadas son los temas donde los estudiantes tienen mayor dificultad, las causa que propone el autor son la forma rutinaria y algorítmica de resolver problemas usando métodos de forma mecánica enfocados en resolver problemas típicos sin preocuparse por el sentido lógico de los que se está resolviendo. Ante esta problemática el autor plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de resolución de problemas de optimización en estudiantes de primer semestre de economía? Para responder esta pregunta se propone investigar el proceso enseñanza aprendizaje del curso de matemática I de la facultad de economía de la mencionada universidad además de elaborar una alternativa metodología que favorezca la resolución de problemas en el contexto económico. En el desarrollo de la investigación se utilizaron diferentes métodos, a nivel teórico, usó la herramienta Sistémico Estructural Funcional, para elaborar una metodología para perfeccionar el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática superior, mientras a nivel empírico se realizaron encuestas a 36 estudiantes del primer semestre de economía y entrevistas a 4 docentes de la misma facultad para determinar los criterios esenciales con el tema de estudio.

En cuanto a la alternativa metodológica, Albán (2017), se apoya en la enseñanza basada en problemas, con el objetivo de dotar a los docentes de los recursos teóricos y metodológicos, para favorecer la enseñanza de los problemas de optimización vinculados con las ciencias económicas.

Finalmente, el autor concluye que la enseñanza basada en problemas satisface el proceso de enseñanza de aprendizaje, funcionando como un mediador pedagógico. Luego de realizar una evaluación por parte de los docentes del curso mediante la técnica de grupo focal o de discusión, se sustentó la validez, por consenso, de la pertinencia de la metodología EBP por sus potencialidades y objetividad. Además, mediante el estudio diagnóstico que se realizó, se identificaron limitaciones en la enseñanza de optimización en la carrera de economía, constatándose insuficiencias metodológicas de los docentes para abordar su enseñanza. La alternativa metodológica propuesta en esta investigación, tuvo en cuenta las dificultades encontradas, así como los conceptos matemáticos necesarios en la formación de economistas.

Mientras tanto, Ruiz (2016) realiza investigación donde analiza los conceptos matemáticos, con especial atención en la función y la derivada, en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la asignatura de economía en estudiantes de primero de bachillerato. La investigación se organiza en cuatro secciones, en la primera sección se realiza un análisis de las dificultades y obstáculos que presentan los estudiantes de bachillerato en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de función y derivada, en esta sección deja en claro que en el proceso de aprendizaje los estudiantes interiorizan la parte operativa, en forma preferente, que se requiere para trabajar los conceptos matemáticos, pero ello perjudica tanto a la asimilación del concepto cómo su posterior interiorización; es decir, los estudiantes en su mayoría logran realizar operaciones con funciones o derivadas, pero no logran un nivel adecuado de interiorización que les permita razonar e interpretar los resultados obtenidos. En la segunda sección se realiza una aproximación a los conocimientos con los que cuenta el estudiante al ingresar al primero de bachillerato, pero también de los conocimientos, relacionados con los conceptos de función y derivada, que adquieren en la asignatura de matemática I. En la tercera sección, se elabora un cuestionario como técnica de investigación cuantitativa con la intención de establecer el grado de comprensión de ambos conceptos matemáticos de los mencionados estudiantes. Por último, en la cuarta sección plantea dos sesiones donde su objetivo es trabajar la comprensión de los conceptos de función y derivada, y para ello utiliza funciones económicas (costo, ingreso y utilidad). Finalmente concluye que es necesaria realizar vinculaciones entre las diferentes representaciones matemáticas, teóricas y conocimientos que el estudiante tiene como base, con la intención de consolidar los

conocimientos y promover una interiorización de todo aprendido a lo largo de los años. Además, Ruiz (2016), puntualiza tres consideraciones en el contexto de la enseñanza de conceptos de índole matemática y económica: La propuesta pedagógica, así como los textos deben orientarse en buscar el razonamiento, la interiorización, la asociación y la aplicación de los conceptos enseñados; Los estudiantes deben de ser capaces de trasladar situaciones de la vida real (cotidianas) al dominio de los conceptos matemáticos y económicos, pero para ello se requiere proporcionar significado a lo aprendido y por último, las situaciones que se desarrollan en el aula no son representativas de la vida real, lo que provoca una pérdida de interés por el estudiante.

Diferentes autores como Sierra (2000) y Tzanakis dan cuenta del interés por incluir la historia de las matemáticas en su enseñanza, es decir se evidencia un movimiento de contra reforma, como respuesta a los fuertes abordajes que priorizan el desarrollo procedimental y algorítmico, dejando de lado la posibilidad de establecer articulaciones entre las disciplinas que la componen. En tal sentido, desde una perspectiva general las matemáticas constituyen un lenguaje que permite describir una situación, organizarla y por ende desarrolla un pensamiento; además cómo consecuencia de la intuición organiza procedimientos sistemáticos para obtener una solución, por lo que resultan ser herramientas eficaces para sustentar el análisis en otras ramas del conocimiento, permitiendo dar una argumentación lógica en un determinado campo disciplinar.

Anaconda (citado en Rojas, 2018) manifiesta que los estudios históricos sobre el desarrollo de un concepto revelan elementos lógicos y epistemológicos importantes en la constitución de una teoría, que hacen posible una mejor comprensión del concepto, pero además evidencian rasgos característicos de la actividad matemática en cuestión, que son dignos de ser considerados por los docentes en sus propuestas educativa.

Rojas (2018), realiza una investigación basada en el enfoque cualitativo y para ello opta por implementar un grupo focal integrados por matemáticos, y economistas que enseñan matemáticas de los cuales se busca conocer qué tipo de representaciones de la derivada usan y el abordaje que fomentan en los estudiantes de pregrado de carrera de ciencias económicas. La información obtenida se organiza en tres categorías: I) Visión Internalista y externaliza de las matemáticas, en el contexto de educación

superior, II) La derivada desde un enfoque histórico y epistemológico, III) La derivada, un objeto de la enseñanza en las ciencias empresariales.

Por otro lado, Medina, Armendáriz y Choez (2017) en su artículo sobre el cálculo diferencial y sus aplicaciones en la microeconomía bancarias, mediante el método bibliográfico o documental se buscaron establecer el vínculo teórico-conceptual constitutivo entre el Cálculo Diferencial y los distintos modelos microeconómicos que legitiman su existencia en los mercados financieros.

Las diferentes fuentes consultadas por los investigadores ecuatorianos concuerdan en que el cálculo es un área de la disciplina de la matemática encargada del estudio de las variaciones que se dan en las funciones, es decir, consiste en el estudio de la variación de las variables dependientes cuando cambian las variables independientes de una determinada función. Dado que la economía busca comprender los cambios en sus diferentes entornos de competencia, como por ejemplo la microeconomía, el cálculo es una herramienta necesaria para lograr dicho entendimiento. La aplicación más resaltante del cálculo diferencial en la microeconomía es el análisis marginal siendo esta expresada analíticamente como la derivada de una función. Además, el cálculo nos permite obtener los valores extremos de una función, por tal motivo son herramientas eficientes para solucionar problemas sobre optimización (maximizar ganancias y minimizar costos).

El análisis marginalista en la microeconomía, que tiene como base la definición de cambio instantáneo es descrito como el efecto sobre la variable endógena producto del cambio en la variable exógena, lo cual denominaremos cambio en el margen.

Por otro lado, la evolución de la microeconomía bancaria se sostiene en conceptos relacionados con información imperfecta, es decir cuando las decisiones tienen que hacerse en simultáneo por lo tanto tiene que analizarse todas las posibilidades antes de la toma de decisión, dicho modelo ha sido eficiente para explicar el rol de los bancos en la economía, pero también para desnudar las debilidades estructurales del sector bancario.

En este contexto el modelo de seguro de liquidez (Diamond y Dybvig, 1983) el cual se basa en diferenciar cuánto se destina a la inversión y cuánto se mantiene como liquidez, en este escenario el cálculo diferencial cumple un papel de validar la asignación eficiente (óptima), siendo esta interpretada, en la microeconomía, como una

maximización con restricciones para lo cual se usa el multiplicador de Lagrange ( $\lambda$ ) para obtener dichos valores óptimos.

Finalmente, los autores Medina, Armendáriz y Choez (2017) concluyen en que es evidente la relación entre el cálculo diferencial y la economía, específicamente como herramienta en la microeconomía. En una sociedad moderna y bancarizada, actualmente, tener conocimientos y educación sobre el sistema financiero nos permite tener una ventaja comparativa. En la historia económica la participación del banco se hace muy necesario por cuanto permiten la redistribución de fondos de los oferentes a los demandantes. Además, las investigaciones en estos aspectos validaron esas competencias mediante la formalidad de las matemáticas entre las cuales se encontraban el cálculo diferencial para determinar los resultados de optimización.

La revisión de investigaciones de Mercapide (2018), Feudel (2016), Alban (2017) coinciden en que existen muchos inconvenientes en la enseñanza de la derivada a estudiantes de economía debido a su aprendizaje mecánico, algorítmico, y faltos de preparación pues dichos conceptos recién se desarrollan en la universidad. En tal sentido sus investigaciones se centran en qué conceptos previos deben tener los estudiantes, en cómo enriquecer la enseñanza mediante la visualización con software como el GeoGebra y promover el pensamiento reflexivo. En cambio, Ruiz (2016), sostiene que la propuesta pedagógica para los estudiantes de economía debe buscar el razonamiento e interiorización de los conceptos. Por otro lado, Medina, Armendáriz y Choez (2017) resaltan la importancia del análisis marginal en la microeconomía y que su conocimiento brinda ventajas comparativas pues sustenta los modelos económicos que permiten que la toma de decisiones sea más eficiente.

## **1.2 Justificación**

El concepto de derivada es imprescindible en las carreras de ciencias económicas, los estudiantes en sus respectivos cursos de pregrado desarrollan el concepto de derivada y posteriormente realizan aplicaciones económicas donde se requiere un entendimiento global de la derivada, es decir el estudiante debe conocer la representación gráfica, como la pendiente de la recta tangente en un punto, además de que dicha interpretación significa razón de cambio instantánea, pero también representa el límite de un cociente incremental. Estas representaciones son conceptos que son desarrollados en los

cursos de pregrado para estudiantes de ciencias económicas en las diferentes universidades peruanas, pero el estudiante no alcanza a comprender en su totalidad, teniendo serias complicaciones por sus diferentes representaciones y significados, dependiendo del contexto.

Las investigaciones de Sánchez-Matamoros, García, Llinares (2008), resalta la complejidad que representa la comprensión del concepto de la derivada por sus diversas formas de representación y significado.

Además de la investigación de Mercapide (2018) y Feudel (2016) proponen la implementación de tecnología como herramienta facilitadora para el entendimiento reflexivo de la derivada en estudiantes de economía. Mientras tanto Albán (2017) hace visible la importancia de una adecuada metodología que tome en cuenta no solo los aspectos matemáticos en los contextos económicos, sino también las limitaciones en los conceptos previos, como la derivada, desde donde se fundamenta el conocimiento económico. La investigación de Ruiz (2016), propone que, para lograr la consolidación y una posterior interiorización de los conceptos impartidos, se hace necesario vincular las explicaciones teóricas con las diversas representaciones matemáticas mediante los conocimientos previos, además de dotar significado a los conocimientos enseñados, lo cual les permitirá hacer conversiones del contexto real al matemático- económico.

Por ello, se buscó información en universidades peruanas como la Universidad Del Pacífico (UP), Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), y de la Universidad Nacional de Ingeniería. (UNI) para indagar de qué manera se desarrollan los conceptos de derivada en las ciencias económicas en dichas universidades es decir nos centraremos en qué momento se introduce el concepto de marginalidad.

En la figura 1, se observa la malla curricular de la carrera de Economía y Negocios Internacionales de la Facultad de Economía de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas donde los conceptos de marginalidad son desarrollados desde el ciclo II en el curso de Cálculo diferencial e Integral, específicamente, en la segunda unidad además se puede evidenciar en dicha malla curricular los cursos que posteriormente involucran el uso del concepto de marginalidad como por ejemplo la Introducción a la Macroeconomía en el Ciclo III, Macroeconomía Avanzada en el ciclo IV, Microeconomía, etc.

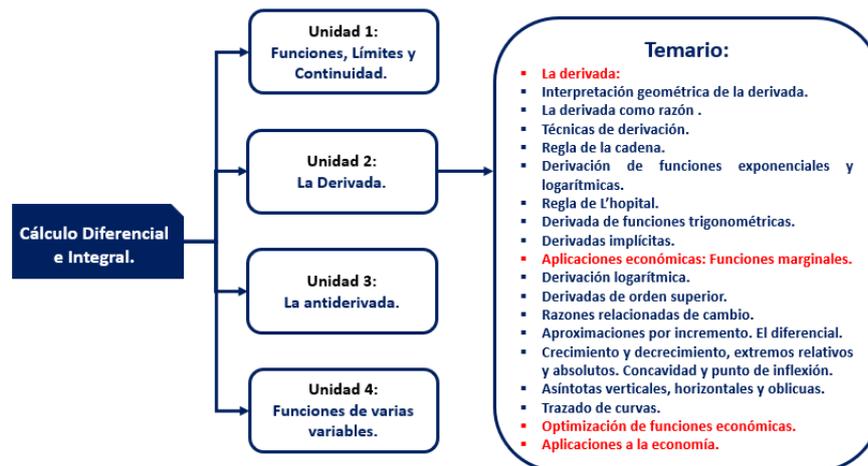


Figura 1. Malla curricular de la carrera de Economía y Negocios Internacionales de la Facultad de Economía de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Fuente: <https://n9.cl/p3a5>

Por otro lado, en la figura 2, se observa plan de estudios de la carrera de Ingeniería Económica de la Universidad Nacional de Ingeniería donde los conceptos de derivada y marginalidad son desarrollados desde el ciclo I, específicamente en la unidad 4, en el curso de Cálculo Diferencial, además de ser prerrequisitos de los cursos de Cálculo Integral, Economía General y Macroeconomía.

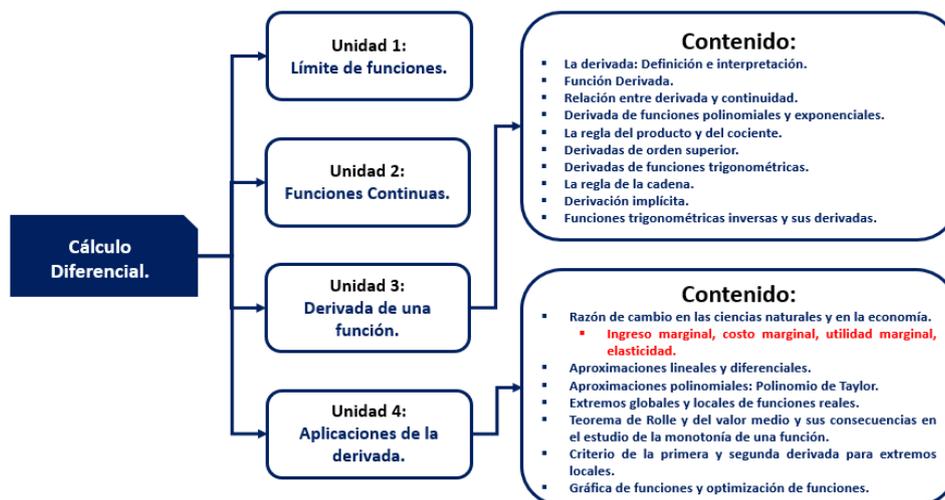


Figura 2. Plan de estudios de la carrera de Ingeniería Económica de la Universidad Nacional de Ingeniería.

Fuente: <https://cutt.ly/Pb0uu7L>

En la figura 3, se observa el cronograma de actividades del curso de Matemáticas II para las carreras de Economía, Finanzas e ingeniería empresarial de la Universidad

Del Pacífico donde se evidencia como parte de su formación académica el concepto de la derivada y consecuente aplicación económica. Además, dicho curso es prerrequisito para Matemáticas III y microeconomía. Desde la unidad II del curso de Matemáticas II, se van incluyendo los conceptos de derivada en contextos económicos mediante el análisis del marginal (costo marginal, ingreso marginal, utilidad marginal) además de elasticidad de demanda, tasa marginal de sustitución, etc. Siendo este un curso del ciclo II tiene una fuerte carga de conceptos económicos que serán muy útiles en los posteriores cursos de economía donde este curso es prerrequisito.

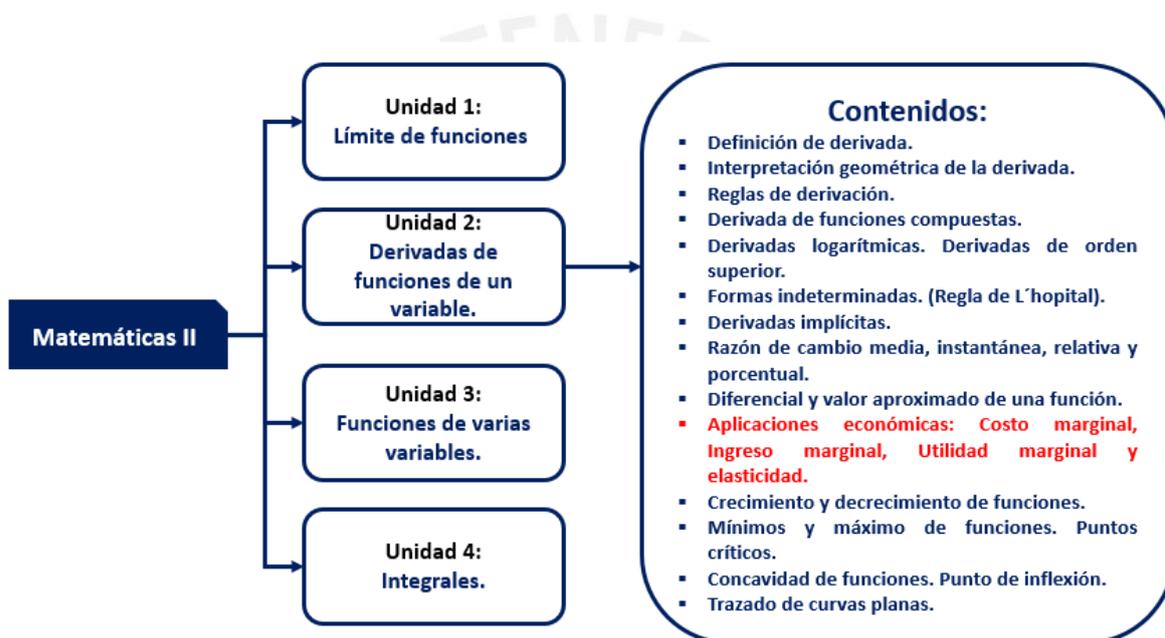


Figura 3. Cronograma de actividades del curso de Matemáticas II para las carreras de Economía, Finanzas e ingeniería empresarial la carrera de Economía de la Universidad Del Pacífico.

Fuente: <https://cutt.ly/lqk1wfg>

También es importante señalar que los egresados carrera de economía deben tener un perfil profesional que les permita tomar decisiones basadas en datos numéricos y específicamente con funciones económicas que se encuentran en constante cambio los conceptos matemáticos y los vincula a contextos económicos, por ejemplo, la marginalidad en funciones económicas podrá tomar mejores decisiones, esto se ve evidenciado en los perfil del egresado.

La Universidad del Pacífico, en su perfil del egresado de Economía, señala que los profesionales de dicha casa de estudio son protagonistas en la toma de decisiones y que su formación les permite gran capacidad de abstracción y análisis, y un excelente manejo de herramientas cuantitativas. Por su parte la Universidad Nacional de Ingeniería señala, en sus competencias lógico-económico, que sus egresados de Ingeniería Económica tendrán la capacidad de comprender cualquier problema económico utilizando sus conocimientos adquiridos a lo largo de su formación, de modo eficiente y conveniente. Mientras que los egresados de la carrera de Economía y Negocios Internacionales Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas en sus competencias específicas señalan que dichos profesionales utilizan teorías y casuísticas relevante para brindar soluciones, usando técnicas y programas especializados.

Basado en la información de las diferentes mallas curriculares de las universidades peruanas presentadas en esta investigación, podemos señalar que todas ellas desarrollan el tema de derivada a la par o previos a los cursos de carrera en ciencias económicas, en los cuales incluso ya se van incorporando aplicaciones económicas. Cabe resaltar que en todas las mallas curriculares la matemática, en cualquiera de sus denominaciones, Matemáticas II o Cálculo Diferencial, sirve de soporte teórico a los cursos de Economía General, Microeconomía, etc.

En base a revisión de la literatura se evidencia la trascendencia del concepto de la derivada y las diferentes propuestas que favorecen el proceso de enseñanza y aprendizaje de este concepto, por ello, en el presente estudio pretendemos investigar de qué manera se podría configurar el trabajo en el aula para propiciar la interpretación del análisis marginal de funciones económicas mediada por la tecnología digital, específicamente del software libre GeoGebra. Cabe resaltar que en el estudio se integran dos disciplinas, por un lado, la derivada desde un enfoque estrictamente matemático y por otro, el análisis marginal de funciones económicas, pero a su vez, como característica novedosa, organizada en una educación virtual, dada que las condiciones actuales de la pandemia del COVID 19 nos invita a explotar nuevas maneras de enseñanza.

Con este propósito tomaremos como base teórica la Aproximación Instrumental y la orquestación, las cuales- consideramos nosotros- nos permitirán responder la pregunta y cumplir los objetivos de investigación.

### 1.3 Aproximación y Orquestación Instrumental.

#### **Aproximación instrumental: nociones fundamentales.**

Para la presente investigación, donde la derivada funge de artefacto en el análisis marginal de funciones económicas utilizaremos como base teórica la Aproximación instrumental de Rabardel (2011) la cual nos permitirá explicar los fenómenos didácticos mediados por tecnologías digitales. Para poder entender cabalmente las actividades con instrumentos, en el sentido de Rabardel y Verillon (1985), es necesario especificar los términos propios de este enfoque siendo las nociones claves de **esquemas utilización, artefacto e instrumento** además del proceso de **génesis instrumental y sus niveles** para en seguida y de acuerdo con Trouche (2005) presentar aspectos de la orquestación instrumental que desarrollaremos a continuación.

En cuanto al **artefacto**, según este enfoque, hace referencia a un objeto material o simbólico susceptible de uso, es decir es elaborado con la finalidad de inscribirse en actividad del sujeto. Un artefacto podría ser un medio material como por ejemplo una calculadora o un medio simbólico como la representación de la derivada  $f'(x)$ , en cuanto a ello, Rabardel (2011) afirma que:

La noción de artefacto designa, en antropología, toda cosa que ha sufrido transformación, incluso mínima, de origen humano, y es entonces compatible con un punto de vista antropocéntrico, sin especificarlo en detalle. Esta noción presenta la ventaja de no restringir el significado a las cosas materiales (del mundo físico) pues incluye sin dificultad los sistemas simbólicos que pueden también ser instrumentos. (p. 91)

Por su parte Béguin y Rabardel afirma: “El artefacto puede ser material o simbólico, producido por el sujeto o por otros, uno o más esquemas asociados, resultantes de la propia construcción del sujeto, autónomo o de una apropiación de esquemas sociales ya formados fuera de él” (p. 8).

Cabe señalar que la intencionalidad es parte en el diseño del artefacto, es decir, es causa de su existencia. Cada artefacto es creado con la finalidad de provocar ciertas clases de efectos, y su utilización, en condiciones pronosticadas por los diseñadores, permite actualizar sus efectos. En nuestra investigación la derivada cumplirá el rol de artefacto pues pretendemos que a partir de ella y mediante una orquestación instrumental promover que los estudiantes de economía realicen un análisis marginal en funciones de su pertinencia profesional.

En cuanto a los esquemas, Vergnaud (1990) propone que los conocimientos de índole científica se construyen en base a esquemas de organización de conducta y enfatiza que es allí donde debemos buscar los elementos cognitivos que movilizan los sujetos para hacerla operatoria. En consecuencia, en base a la noción de esquema de Vergnaud, Rabardel (2011) afirma que un esquema “es la organización invariante de la conducta del sujeto para una clase de situaciones, tanto en términos de acción y actividad simbólica” (p. 164). Cabe señalar que los esquemas vinculados a la utilización de un artefacto son denominados **esquemas de utilización**, los cuales refieren a dos dimensiones de la actividad:

Las actividades relativas a las tareas “segundas”, es decir las relativas a la gestión de las características y propiedades particulares del artefacto [...]. Las actividades primeras, principales, las que están orientadas hacia el objeto de la actividad, y para las que el artefacto es un medio de realización [...]. (Rabardel, 2011, p. 171)

Rabardel (2011) distingue tres tipos de esquemas de utilización: Esquemas de uso, Esquemas de acción instrumentada y Esquemas de acción colectiva instrumentada, tal como se señala en la figura 4.



Figura 4. Tipos de esquemas de acción instrumentada.

Fuente: Adaptado de Manrique (2020, p.19)

#### **Los esquemas de uso** relativos a las tareas segundas.

[...] pueden situarse en el nivel de esquemas elementales (en el sentido de que no pueden descomponerse en unidades más pequeñas susceptibles de responder a una submeta identificable), pero esto no es necesario: pueden ellos mismos estar constituidos por totalidades que se articulan en un conjunto de esquemas elementales. Lo que los caracteriza es su orientación hacia las tareas segundas que corresponden a las acciones y actividades específicas directamente relacionadas con el artefacto [...]. (Rabardel, 2011, p.172)

Además, el autor señala que:

**Los esquemas de acción instrumentada**, que consisten en totalidades cuyo significado está dado por el acto global que tiene como meta operar transformaciones sobre el objeto de la actividad. Esos esquemas incorporan, como constituyentes, los esquemas del primer nivel. Lo que los caracteriza es que son relativos a las “tareas primeras”. Constituyen lo que Vigotsky llamaba los “actos instrumentales”, para los cuales hay una recomposición de la actividad dirigida hacia la tarea principal del sujeto, por el hecho de insertar el instrumento. (Rabardel, 2011, p.172)

En consecuencia, los esquemas de acción instrumentada emergen producto de la asimilación y acomodamiento de esquemas de uso y de otros esquemas en oportuna coordinación.

Según Rabardel (2011) un mismo esquema de utilización puede, dependiendo de la tarea, ser un esquema de uso o un esquema de acción instrumentada, es decir la acción instrumentada no es una propiedad del esquema en sí mismo, sino es un estadio en la actividad intencionada del sujeto. Además, propone que los esquemas de utilización engloban dos dimensiones: una dimensión *privada*, propia de un individuo y una dimensión *social*, siendo esta grupal o colectiva.

El proceso de enseñanza y aprendizaje se suele dar en contextos de actividad colectiva, es decir, que un mismo artefacto puede ser usado en simultáneo por un grupo de sujetos donde se requieren la constitución y aplicación de esquemas específicos. Bajo estas condiciones emergen los **esquemas de actividad colectiva**, siendo este un tercer nivel de esquema.

Asimismo, Rabardel (2011) afirma que dentro de los esquemas de utilización se encuentran incluidos los esquemas de **Esquemas de Acción Colectiva Instrumentada (EACI)**, **Esquemas de Acción Instrumentada (EAI)** y **Esquemas de uso (EU)**, además afirma que estos esquemas tienen relación de dependencia mutua, señala que a partir de los esquemas de uso y de acción instrumentada pueden aflorar, reformular y generalizar esquemas de actividad colectiva instrumentada. De la misma manera los esquemas de actividad colectiva instrumentada actúan como fuente desde la cual se pueden desarrollar, evolucionar y recomponerse los EAI y los EU.

En relación con el **instrumento**, Rabardel (2011) define como un artefacto en acción. Desde el punto de vista psicológico el instrumento tiene tanto de artefacto como de esquema de utilización, es decir el instrumento tiene dos componentes: una parte artefactual, material o simbólico producido por el sujeto o por otros sujetos; por otro lado, parte uno o más esquemas de utilización que son producto de una construcción propia del sujeto. Cabe resaltar que, si bien el instrumento vincula a el artefacto y los esquemas en una actividad determinada, también existe una relación de independencia relativa de los mismos esto se evidencia en el uso de un mismo esquema de utilización en diferentes artefactos.

## Instrumento

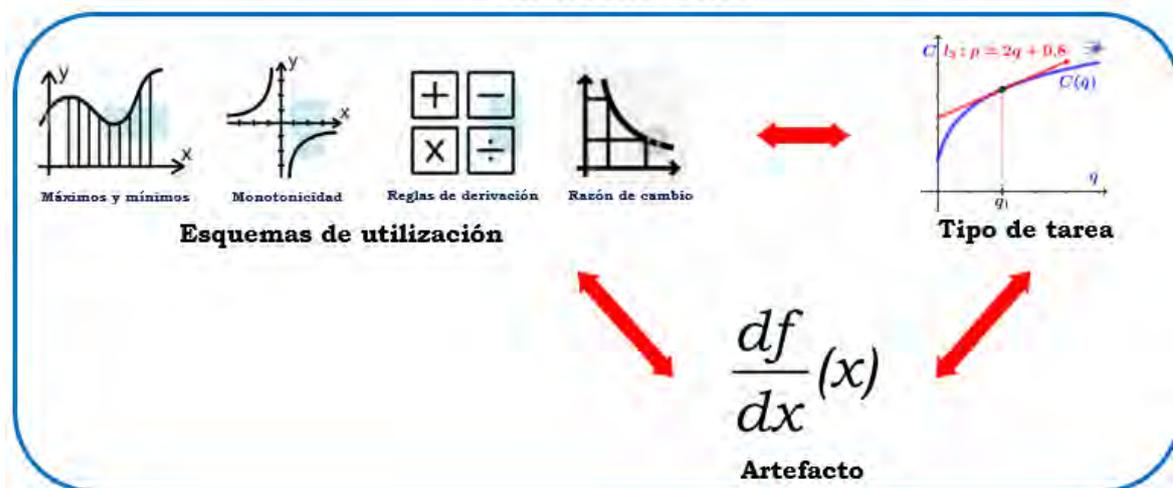


Figura 5. Componentes del instrumento.

Fuente: Adaptado de Drijvers y Trouche (2008, p. 6)

Por ejemplo, el concepto de derivada puede ser vista como un artefacto y los estudiantes (sujetos) al hacer frente a una tarea determinada – en este caso el análisis marginal- con la intención de resolver provocan la emergencia de los esquemas mentales (esquemas de utilización), es decir el instrumento consiste tanto en el artefacto como en los esquemas mentales que el sujeto desarrolla para realizar tipos específicos de tareas. Esta noción de instrumento se ilustra en la figura 5 y se puede resumir en:

*Instrumento = Artefacto + Esquemas para una clase de tareas.*

Con la finalidad de entender cómo evolucionan los artefactos para convertirse en instrumentos en vinculación con el usuario y la afloración de distintos usos como parte del mismo proceso instrumental es que el concepto de génesis instrumental surge con Rabardel.

Un artefacto, en un principio, no tiene valor instrumental para el sujeto, este valor llega mediante un proceso llamado génesis instrumental, el cual implica la construcción de esquemas de utilización. En tal sentido Verillon y Rabardel (1995, p.85) en cuanto al instrumento afirma:

El instrumento no existe en sí mismo, se vuelve un instrumento cuando el sujeto ha sido capaz de apropiarse de él, ha sido capaz de subordinarlo como un medio para fines y lo ha integrado a su actividad. Por lo tanto, se produce un instrumento de la creación, por parte del sujeto, de una relación instrumental con un artefacto, ya sea material o no, ya sea producido por otros o por sí mismo.

En consecuencia, Trouche (2004) reconoce que un proceso de génesis instrumental efectuado por un sujeto compete a dos polos de la entidad instrumental, el artefacto y los esquemas de utilización por lo tanto tiene dos dimensiones diferentes: la instrumentalización dirigida hacia el artefacto y la instrumentación relativa al sujeto mismo, tal como se puede ver en la figura 6.

Siguiendo la noción de Rabardel, el cual emplea el término **instrumentalización** para definir la génesis instrumental dirigida hacia al artefacto cuando este se ve potenciado y transformado para fines específicos.

Los procesos de **instrumentalización** se refieren al surgimiento y la evolución de los componentes artefacto del instrumento: selección, reagrupación, producción e institución de funciones, desvíos y catacresis, atribución de propiedades, transformación del artefacto (estructura, funcionamiento, etc.) que prolongan la creación y realización de artefactos cuyos límites son difíciles de determinar debido a este proceso de transformación” (Rabardel, 2011, p.211).

Mientras tanto, la **instrumentación**, la génesis instrumental está orientada al sujeto y guía el desarrollo y apropiación de los esquemas de acción instrumentada permitiendo una respuesta eficaz a una tarea específica.

Los procesos de **instrumentación** son relativos al surgimiento y a la evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada: constitución, funcionamiento, evolución por acomodación, coordinación, combinación inclusión, y asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos, etc. (Rabardel, 2011, p.211)

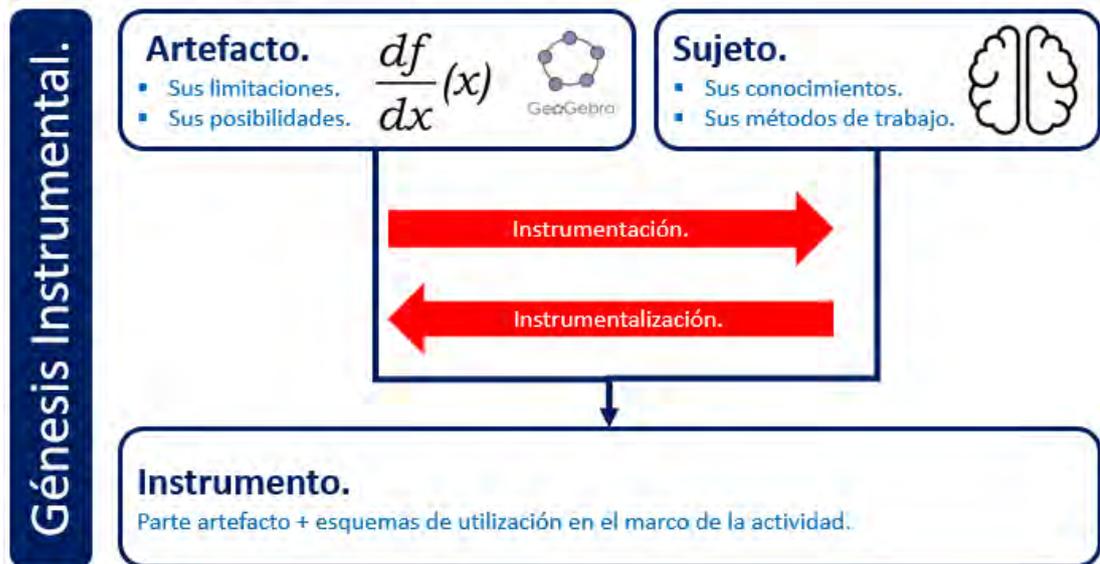


Figura 6. Componentes de la génesis instrumental.

Fuente: Adaptado de Trouche (2004, p 185)

En estos tiempos de modernidad tecnológica es inevitable de participación de esta en la educación. Desde inicio de siglo investigadores como Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche entre otros avizoraban la incorporación de la tecnología en la educación matemática, aunque hasta la fecha no satisface las expectativas de investigadores y educadores. La mayoría de las investigaciones se concentran en la génesis instrumental del estudiante, pero el actor principal de este proceso es el profesor, pues es quien planifica, estructura y ejecuta el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Artigue (citado en Drijvers et al. 2010) afirma que la aproximación instrumental acepta la dificultad de la integración de la tecnología en la educación matemática, además que el uso de la tecnología provoca la transformación del artefacto en instrumento mediante una génesis instrumental. En tal sentido el uso de la tecnología conlleva un proceso de génesis instrumental, durante el cual el artefacto se convierte en un instrumento, siendo este una construcción psicológica la cual combina el artefacto y los esquemas que el sujeto desarrolla para utilizarlo para determinada tarea. En los mencionados esquemas de instrumentación, se entrelazan el conocimiento técnico del artefacto y el conocimiento específico del dominio (conocimiento matemático). En conclusión, la génesis instrumental, es básicamente una co-emergencia de esquemas y técnicas para usar un determinado artefacto.

Pierce y Ball (citado en Drijvers, 2010) “el proceso de un maestro que desarrolla una Orquestación Instrumental se guía por su conocimiento, experiencia y puntos de vista sobre la Educación Matemática y el papel que cumple la tecnología” (p. 216).

Drijvers (2010) indica que la mayoría de los estudios se enfocan en la génesis instrumental de los estudiantes y de los probables beneficios en el aprendizaje, pero para conseguir la génesis instrumental esperada es necesario ser guiada por el profesor mediante una orquestación instrumental en una determinada situación matemática.

Dado que la investigación se orienta en construir un instrumento, el análisis marginal, el cual implica un desarrollo cognitivo y conceptual, el aspecto técnico del esquema de acción instrumentada podría ser considerado trivial. Sin embargo, los aspectos conceptuales y técnicos se interrelacionan en un esquema de acción instrumentada. Como es sabido los esquemas mentales no son observables pero las acciones técnicas si lo son, incluso pueden ser enseñadas. En ese sentido, Lagrange desarrolló las nociones de Técnicas Instrumentadas para el caso de entornos de álgebra computacional donde señala que las técnicas cambian cuando se involucran dispositivos tecnológicos, pero dichos cambios no deben ser considerados irrelevantes (Lagrange, 1999). Sustenta que las técnicas son trascendentes en el entorno del álgebra computacional, dado que se vinculan con aspectos conceptuales mediante esquemas de acción instrumentada. Lagrange define una técnica se la siguiente manera:

En esta línea de conceptos, el trabajo técnico en matemáticas no debe ser visto solo como habilidades y conocimientos. El trabajo técnico en un tema dado consiste en un conjunto de reglas y métodos, en Francia, los llamamos conjunto de técnicas, ya que son menos específicos e implica menos formación que habilidades y más reflexión que conocimientos (Lagrange, 1999).

En tal sentido, para esta investigación, consideraremos una técnica instrumentada como un conjunto de reglas y métodos, en un entorno tecnológico, que se usan para resolver una determinada tarea en el sentido de Lagrange, es decir una técnica instrumentada es la parte técnica del esquema de acción instrumentada, siendo esta el lado visible y manifiesta, mientras que en el esquema de acción instrumentada se conglomeran los aspectos mentales y cognitivos invisibles. La visibilidad de las técnicas instrumentadas es el motivo que- a diferencia de los esquemas de acción

instrumentada, que tienen un carácter personal e interno- son las que permiten el análisis de la Genesis Instrumental.

## Aspectos de la orquestación Instrumental

En cuanto a la orquestación instrumental propuesto por Trouche (2005) plantea un arreglo organizado pero intencional entre los artefactos y los seres humanos en un determinado entorno gestionado por el docente con el objetivo de lograr una tarea propuesta, es decir guiarlos hacia la génesis instrumental. Metafóricamente, el docente funge de director de orquesta quien es el responsable de construir la partitura (secuencia didáctica) con el fin fijar las armonías (tareas propuestas, directivas del docente, etc.) para lograr el sonido y ritmo deseado (génesis instrumental), cabe resaltar la importancia que el docente realice el monitoreo de las situaciones matemáticas mediante la orquestación. La orquestación al ser un arreglo organizado tiene un foco determinado y orden definido, es decir es un arreglo en forma sistémica, a su vez es intencional puesto que una orquestación trata de responder a una necesidad identificada con anterioridad. La siguiente figura describe el esquema de la orquestación instrumental propuesta por Trouche (2005).

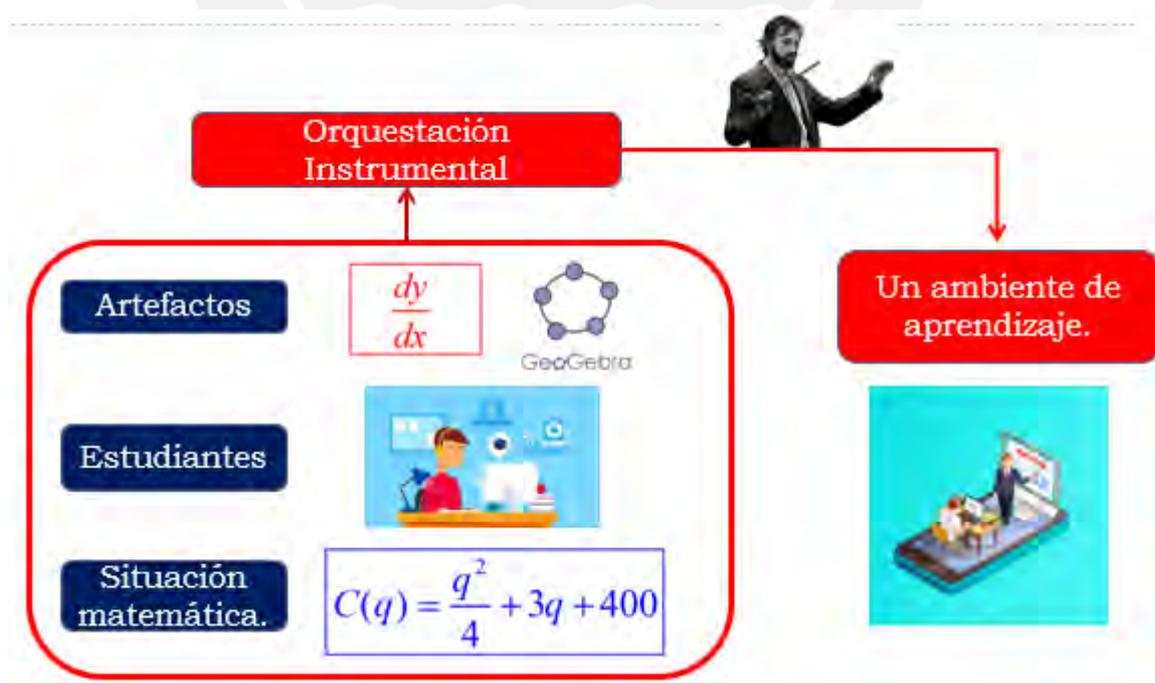


Figura 7. Elementos de una Orquestación Instrumental.

Fuente: Adaptado Trouche (2005)

La presente investigación es una propuesta en educación virtual mediante el software de video conferencias del Zoom y el applet del GeoGebra, donde el estudiante y un conjunto de artefactos materiales (lápiz y papel) y simbólicos - como la derivada en el sentido de Rabardel- cada uno de ellos puede ser usado para realizar una determinada tarea mediante una situación matemática y convertirlo en instrumento. La figura 7, muestra como el profesor organiza el escenario donde se integran y articulan los elementos de una orquestación instrumental.

El proceso de aprendizaje – enseñanza siempre se ha caracterizado cuando el profesor y los estudiantes se encuentren en un mismo ambiente físico (educación presencial), pero existen otras formas, como la educación a distancia donde se emplean diferentes medios para la interactividad con el estudiante en forma sincrónica o asincrónica ejemplo de ello tenemos: internet, Video conferencias, Foros y otros. Fainholc (1999) resalta el término interactividad al proceso que sucede en el ámbito educativo, es decir que requiere mediación pedagógica, los cuales se representan mediante acciones o intervenciones, recursos y materiales didácticos en el contexto de la educación a distancia. Por su parte Tintaya (2003) en cuanto a la educación virtual resalta que promueve las interrelaciones con nuevas tecnologías para el proceso de enseñanza – aprendizaje mediante redes de comunicación sin límite de tiempo. La presente coyuntura epidemiológica del COVID 19 nos obligado a explorar nuevas formas de enseñanza especialmente las relacionadas a educación virtual, donde se ve lo necesaria que es la virtualidad, la tecnología y de contar con diferentes redes de comunicación. En tal sentido, en la presente investigación usaremos el término educación virtual en el sentido de Lara (2002) quien afirma que la educación virtual es “la modalidad educativa que eleva la calidad de la enseñanza ...que respeta su flexibilidad o disponibilidad (en cualquier momento, tiempo o espacio). Alcanza su apogeo con la tecnología e integra los tres métodos: Asincrónico, sincrónico y autoformación.”

Por otro lado, Trouche (2004) y Drijvers, Kieran y Marriotti (2010) distinguen tres fases en una orquestación instrumental, la configuración didáctica, el modo de ejecución y el desempeño didáctico.

### **Configuración didáctica**

La **configuración didáctica** se refiere a la organización del entorno donde se realizará el proceso de enseñanza y los artefactos que serán involucrados en la actividad intencional. Usando la metáfora propuesta por Trouche (2005) esta fase representa la selección de los instrumentos musicales que participaran en la banda, así como la organización de estos con el objetivo de lograr una melodía armoniosa.

En tal sentido, la presente investigación se realizará en la modalidad de educación virtual, es decir, el proceso de enseñanza – aprendizaje se realizará mediante el software de videoconferencia del Zoom. La gestión del aprendizaje se efectuará con el apoyo del applet del Geogebra en consecuencia, los artefactos partícipes de la investigación son la derivada y el software libre GeoGebra.

Dado que el objetivo de esta investigación es que los estudiantes de economía logren que el análisis marginal sea un instrumento en la interpretación de funciones económicas (análisis del mercado), el applet de GeoGebra permitirá la visualización de las características dinámicas de las funciones económicas en especial el cambio en el margen (análisis marginal) mediante el uso del deslizado del GeoGebra. Para ello se realizarán una actividad exploratoria y la orquestación de dos actividades.

### **Modo de ejecución.**

En cuanto al **modo de ejecución** se refiere a la manera en que el docente opta por ejecutar las acciones que permitan la actividad intencional, incluye decisiones en cómo se elabora la tarea y la manera cómo se introduce, es decir, las diferentes maneras de como una tarea se pone en funcionamiento además de como los estudiantes abordan la resolución pero también cómo el docente utiliza la configuración didáctica para lograr el objetivo planteado para ello se requieren tomar “decisiones sobre el modo de ejecución puede ser vistas como parte del diseño de una trayectoria hipotética del aprendizaje” (Drijvers et al., 2010 p.215). Continuando con la metáfora, representan las armonías que emergen de los instrumentos que participan en un determinado orden intencional (partitura).

En nuestra investigación, el modo de ejecución es una propuesta en educación virtual mediante el software de videoconferencia del Zoom con apoyo del GeoGebra donde el

profesor guiará el proceso, para ello se opta por diferentes formas de cómo abordar el proceso de enseñanza – aprendizaje. En la **Actividad Exploratoria** se promueve el trabajo individual de los estudiantes, mientras que en la **Actividad con orquestación Instrumental I y II** el trabajo es colectivo en un primer momento a través del estudiante Sherpa (estudiante guía) y luego con un trabajo en parejas. El docente investigador cumple diferentes roles en cada una de las actividades con Orquestación Instrumental, en ocasiones ha de ser un experto, mientras que en otros momentos cumple el rol de “coach” que cuestiona o ayuda, con el propósito de que el estudiante de economía construya el concepto de marginalidad, mediante la resolución de la tarea propuesta.

### **Desempeño didáctico**

Mientras que el **desempeño didáctico**, según Drijvers et al (2010), involucra las acciones ejecutadas por los estudiantes como por el docente frente a la tarea propuesta, dicho de otro modo, las acciones que toma el docente con la intención de asegurar la esencia de la tarea propuesta. Además, el autor señala que “uno de los elementos claves para una integración exitosa de estos artefactos en un entorno de aprendizaje es la asistencia institucional y social de este proceso de acción individual” (Trouche 2004, p. 304).

Continuando con la metáfora, según Drijvers et al. (2010), el desempeño didáctico es comparable con la interpretación musical, la coordinación entre el director de orquesta (profesor) y los músicos (estudiantes).

En virtud de todo lo señalado, donde se evidencia la importancia del profesor en el proceso de génesis instrumental de los estudiantes de economía, pues es él quien con base en una adecuada configuración didáctica de los diferentes artefactos (derivada, applet de GeoGebra) que tiene a su disposición y una coherente ejecución coordinada de los mismos, para lograr los objetivos propuestos por las tareas o actividades, considero pertinente la presente investigación sobre una propuesta didáctica basada en la orquestación instrumental: Interpretación del análisis marginal de funciones económicas, donde se busca que los estudiantes de economía logren la Génesis Colectiva del concepto de marginalidad mediante una serie de tareas propuestas por el docente.

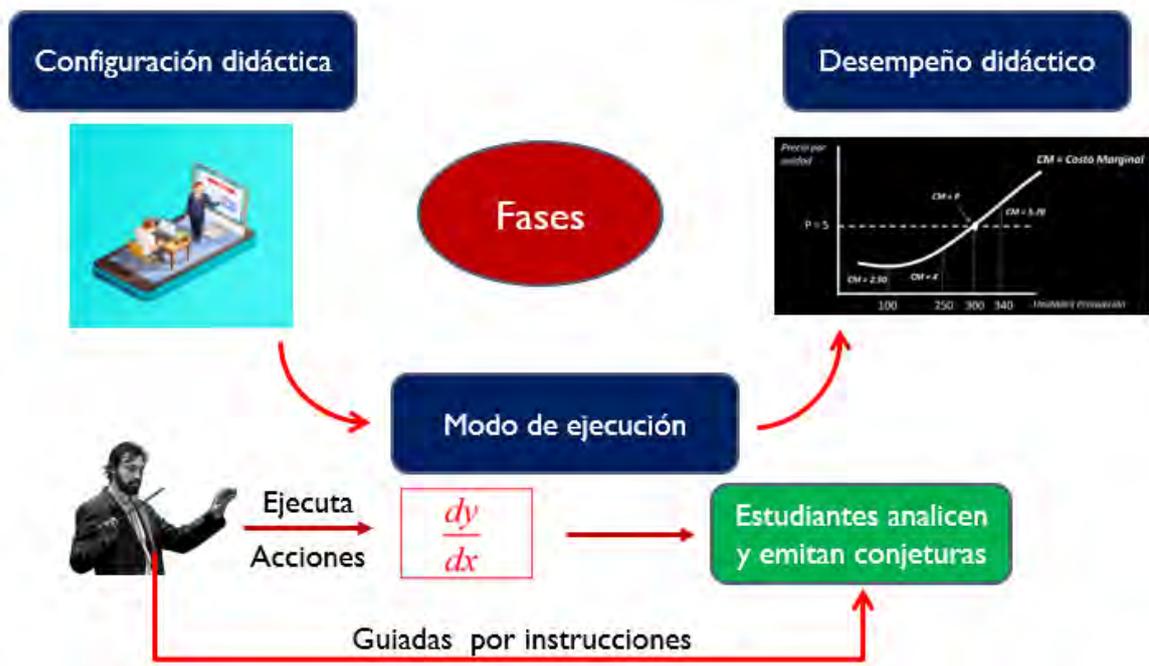


Figura 8. Fases de una orquestación instrumental

La figura 8, describe las fases de la orquestación instrumental con elementos de la presente investigación. **La configuración didáctica** se realizará mediante la modalidad de educación virtual donde el modo **de ejecución** se realizará mediante la plataforma Zoom donde el docente guiará el proceso de enseñanza aprendizaje con el apoyo del GeoGebra y una tarea propuesta, monitoreando e interactuando (**desempeño didáctico**) con el objetivo de logra la génesis instrumental individual y colectiva.

La posibilidad de incluir a la tecnología en el proceso de enseñanza invita al docente en formular distintas orquestaciones de los contenidos que se desean impartir, la investigación de Tabach (citado en Şay y Akkoç, 2016) distingue 10, de las cuales usaremos dos de ellas como parte de la presente investigación.

### Tipos de orquestación Instrumental.

Para resaltar la importancia del docente en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, Trouche a inicios del 2000, desarrolla la orquestación instrumental. El esfuerzo de investigaciones colectivas ha proporcionado una orientación teórica donde la orquestación es el eje central en la construcción de entornos de enseñanza y

aprendizaje eficaces desde la perspectiva del diseño. Es por tal sentido, Say y Akkoc (2016) identifica diez tipos de orquestación, los cuales resumimos en la tabla 1 extraída de Tabach (2013).

*Tabla 1. Tipos de orquestación (Say y Akkoc, 2016)*

Tipo de orquestación.	Configuración didáctica.	Modo de ejecución.
Demostración técnica. (Drijvers et all, 2010)	Entorno de clase completa, una pantalla central	El profesor explica los detalles técnicos para usar la herramienta
Explicar la pantalla. (Drijvers et all, 2010)	Entorno de clase completa, una pantalla central	Las explicaciones del profesor van más allá de las técnicas e involucran contenidos matemáticos.
Tablero de enlaces en la pantalla. (Drijvers et all, 2010)	Entorno de clase completa, una pantalla central	El maestro conecta representaciones en la pantalla con representantes de los mismos objetos matemáticos que aparecen en el libro o en la pizarra.
Sherpa en el trabajo (Drijvers et all, 2010)	Entorno de clase completa, una pantalla central	La tecnología está en manos de un estudiante, que la lleva a toda la clase para su discusión.
Tecnología sin uso. (Tabach, 2013)	Entorno de clase completa, una pantalla central	La tecnología está disponible pero el maestro decide no usarla.
Discutir la pantalla. (Drijvers et all, 2010)	Entorno de clase completa, una pantalla central	Discusión de toda la clase guiada por el profesor para potenciar la instrumental colectiva.
Spot- and - Show. (Drijvers et all, 2010)	Entorno de clase completa, una pantalla central	El maestro trae a colación el trabajo anterior de un alumno que había almacenado e identificado como relevante para su posterior discusión.
Trabajar y caminar. (Drijvers, 2012)	Los estudiantes trabajan individualmente o en pares con computadoras	El maestro camina entre los estudiantes, monitoreando su progreso y proporciona orientación cuando surge la necesidad
Discutir la tecnología. (Tabach, 2013)	Los estudiantes trabajan individualmente con su computadora.	El maestro usa el sistema de transporte móvil si necesita computadoras en la enseñanza.
Discutir la tecnología. (Tabach, 2011)		El docente utiliza un sistema de gestión del aprendizaje para orientar a los estudiantes.

*Fuente: Traducido de Tabach (2013) citado en Şay y Akkoç (2016, p. 2710)*

Dado que la presente investigación está orientada a que, mediante una propuesta de secuencia didáctica mediada por una orquestación instrumental se favorezca la Genesis instrumental de los estudiantes de economía mediante el análisis marginal, es importante la tipificación propuesta inicialmente por Tabach (2013) y conocer los diferentes arreglos del aprendizaje nutridos con tecnología los cuales será usados con fines adaptativos y de referencia para las intenciones de nuestra investigación.

## 1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

A continuación, presentamos la pregunta y objetivos de la investigación:

### Pregunta de investigación

*¿El diseño de una propuesta didáctica basada en la Orquestación Instrumental podría permitir que los estudiantes de economía interpreten el análisis marginal de funciones económicas?*

### Objetivo General.

*Diseñar una propuesta didáctica basada en la Orquestación Instrumental que permita que los estudiantes de economía puedan interpretar el análisis marginal de funciones económicas.*

### Objetivos específicos.

- Identificar los conocimientos previos que tienen los estudiantes de economía sobre los conceptos de la derivada mediante una actividad exploratoria
- Adaptar una configuración didáctica y dos modos de ejecución en la propuesta didáctica en educación virtual que favorezcan la interpretación del análisis marginal de funciones económicas.
- Proponer posibles esquemas de uso y de acción instrumentada emergentes por parte de los estudiantes de economía al interpretar funciones económicas mediante el análisis marginal.

## 1.5 Metodología y procedimientos metodológicos

La investigación que desarrollamos tiene un enfoque cualitativo conforme con Hernández, Fernández y Baptista (2014) quienes proponen que la esencia del enfoque cualitativo es comprender y profundizar los fenómenos, en un ambiente natural y en relación con el contexto, explorándolos desde la perspectiva de los participantes, es decir la manera en que los participantes perciben subjetivamente su realidad; por otro lado Monje (2011) afirma que su interés es captar la realidad social desde el punto de vista de las personas que están siendo estudiadas, dicho de otro modo, a partir de las percepción del sujeto sobre su propio contexto.

Mientas Borba (2004) enuncia que “una investigación cuantitativa en educación matemática prioriza procedimientos descriptivos ya que su visión del conocimiento admite explícitamente una interferencia subjetiva” (p.2).

Para la presente investigación, adoptaremos la posición Hernández, Fernández y Baptista (2014), puesto que, el interés de esta investigación es examinar la manera en que los estudiantes de economía usan la herramienta derivada para realizar análisis en contextos económicos específicamente la marginalidad de funciones económicas. Los investigadores proponen 9 fases tal como lo muestra la figura 9.

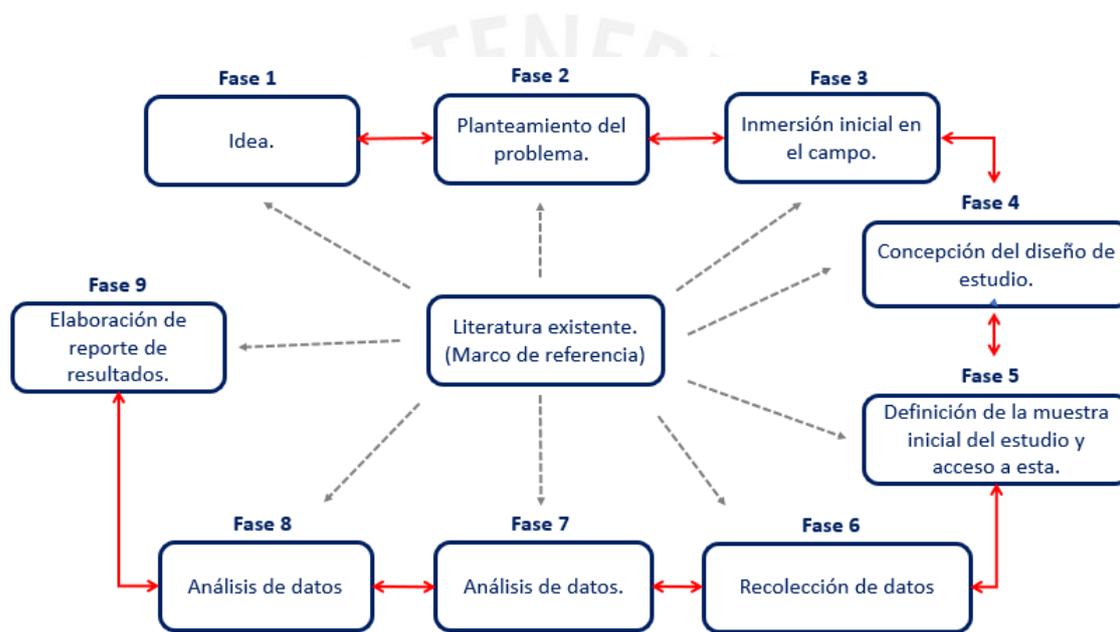
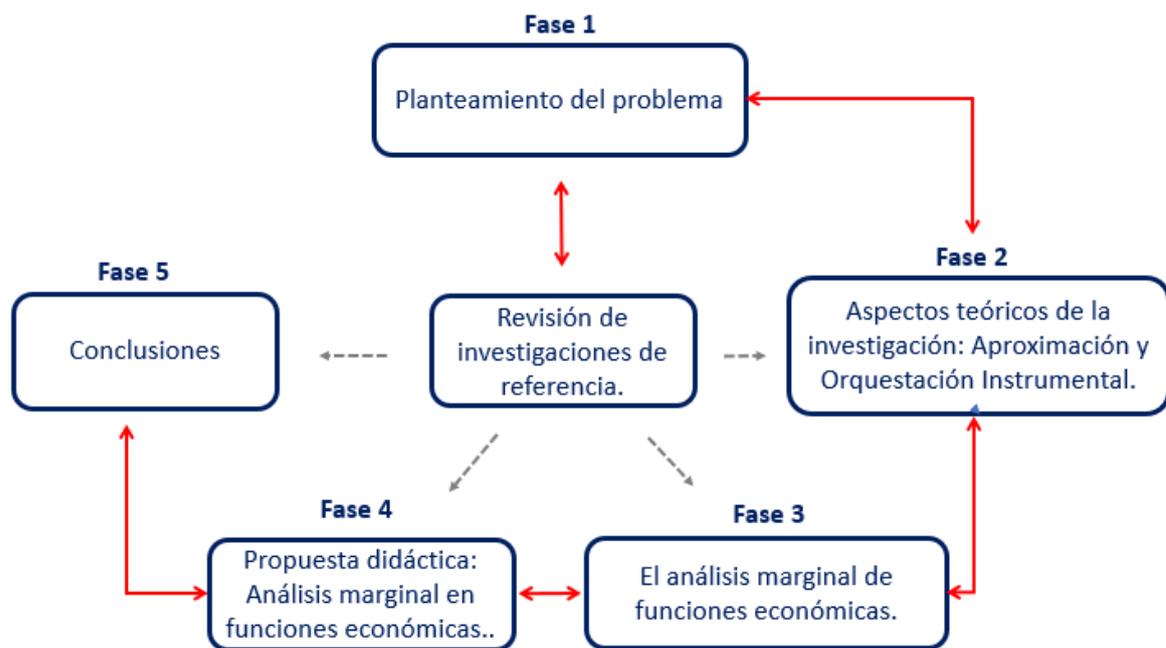


Figura 9: Proceso de investigación cualitativa

Fuente: Hernández et al. (2014, p.7)

Dada a la naturaleza cualitativa de la presente investigación, la revisión de la literatura estará presente en cada una de las fases, es decir, no tiene una secuencia lineal. Por eso, la investigación ha seguido las siguientes fases, como procedimientos metodológicos:



*Figura 10: Proceso de investigación cualitativa.*

Fuente: adaptado de Hernández et al. (2014, p.7)

A continuación, se detallarán cada una de las seis fases de la presente investigación señaladas en la figura 11.

### **Fase 1: Planteamiento del problema.**

Se realiza una revisión de investigaciones de referencia segmentadas en dos grupos, primero referidas a la derivada y un segundo grupo a las ciencias económicas y la derivada. Posteriormente, Basados en las investigaciones de referencias, como los currículos de universidades privadas y estatales que tiene la carrera de economía redactaremos la justificación de la investigación. Además, se plantea la pregunta de investigación, objetivos generales y específicos, los cuales al ser una investigación cualitativa podrían ir variando e incluso la pregunta de investigación al adquirir profundidad en el campo de estudio.

### **Fase 2: Aproximación y Orquestación Instrumental.**

En esta fase se seleccionan e interiorizarían los aspectos teóricos de la investigación: Aproximación y Orquestación Instrumental, haciendo explícito, en esta fase, cuáles son los conceptos teóricos importantes para esta investigación. Además, se presenta la

tipificación de la Orquestación que fundamentará dos tipos de orquestaciones que propondremos en la presente investigación.

### **Fase 3: El análisis marginal en funciones económicas.**

Se realizará un estudio de la marginalidad desde el punto de vista histórico y epistémico además abordaremos la evolución del concepto de derivada, haciendo énfasis en cómo estos dos conceptos se articulan. También analizaremos la organización de la enseñanza del concepto de marginalidad de los libros de Economía del autor Michael Parkin y Gregory Mankiw los cuales son los más referenciados en el curso de economía I.

### **Fase 4: Propuesta didáctica: análisis marginal en funciones económicas**

En virtud de los hechos actuales de la pandemia del COVID 19 que estamos viviendo, donde los procesos de enseñanza se están realizando de forma virtual, en dicho contexto, la presente investigación tiene como objetivo la organización una propuesta didáctica con la modalidad de educación virtual que propicie en los estudiantes de economía la interpretación del mercado mediante el análisis marginal la cual será guiada por la orquestación instrumental, en tal sentido se pretende que la propuesta didáctica contenga dos tipos de orquestación basados en la tipificación realizada por Tabach (2013), las cuales serán adaptadas a las condiciones actuales así mismo, se desarrollarán las configuraciones didácticas y el modo de ejecución.

### **Fase 5: Conclusiones.**

Con los datos recolectados se presentarán las conclusiones obtenidas por la investigación a la luz de la Aproximación y Orquestación Instrumental, así como recomendaciones para futuras investigaciones producto de este trabajo.

El siguiente capítulo muestra el análisis de la derivada desde dos perspectivas diferentes, por un lado, un contexto matemático donde será un estudio histórico-epistémico y por el otro desde punto de vista de las ciencias económicas.

## CAPÍTULO II: EL ANÁLISIS MARGINAL EN FUNCIONES ECONÓMICAS

En este capítulo, desarrollaremos un estudio matemático abordando aspectos históricos y epistemológicos sobre el análisis marginal, pero como ella se sustenta en la noción de derivada, también describiremos cómo la derivada participa en la elaboración de conceptos del área de la microeconomía, específicamente en el análisis marginal.

En cuanto al aspecto didáctico se describirá la manera en que se propone la enseñanza del análisis marginal en los libros: *Principio de Economía* del autor Gregory Mankiw y *Economía* del autor Michael Parkin, ambos gozan de mucha aceptación en el ámbito académico peruano.

### 2.1 La Derivada como base del análisis marginal.

El cálculo diferencial comienza a gestarse sobre los problemas de incremento y cantidades en cambio, importantes interrogantes para la ciencia en el siglo XVII las cuales motivaron su desarrollo y posterior formalización. Estas cuestiones provienen de los recientes problemas de la mecánica donde urgía un estudio del movimiento y de los antiguos problemas de geometría donde se buscaba determinar las tangentes a una curva dada. Si bien estos temas ya habían sido emprendidos por los matemáticos griegos Euclides, Arquímedes y Apolonio los cuales trazaron el sendero de las matemáticas, fue recién durante los años los años 300 al 200 a.c. que las producciones de estos tres matemáticos estuvieron en apogeo, por lo cual esa etapa se denominó la edad de oro de la matemática griega.

Siendo Euclides unos de los primeros matemáticos en introducir la noción de recta tangente en su libro *Elementos de Geometría*. El concepto de variación de cantidades no emergió en la matemática griega pues sus cantidades eran numéricas y discretas o geométricas además de ser estáticas. Debido a ello los conceptos de aceleración y velocidad instantánea eran ajenos para ellos.

El inicio del siglo XVII fue la etapa más productiva para las ciencias exactas como un todo, aportes como el de Johannes Kepler en la astronomía además de proporcionar

una resolución de un problema de aplicación práctica sobre máximos y mínimos, estos acontecimientos marcaron un hito en el desarrollo de las matemáticas en general y en el surgimiento del cálculo diferencial. Este surgimiento y desarrollo no se hubiera podido lograr sin las aportaciones de Viete al campo del álgebra y la publicación de su obra *El arte Analítica* además del nacimiento de la *Geometría Analítica*.

Newton y Leibniz abordan el cálculo infinitesimal desde dos perspectivas diferentes. Por un lado, Newton desde la noción de la mecánica se basa en la idea intuitiva del movimiento continuo, usando el concepto de *fluente*, para definir la variación de una cantidad con respecto del tiempo además de *fluxión* para definir el cambio de la velocidad con respecto al tiempo es por tal motivo que el cálculo desarrollado por Newton es conocido como *Cálculo fluxional*.

Leibniz desarrolla un cálculo más simbólico y analítico siendo las bases de su trabajo el cálculo de diferencias infinitesimales y la suma de áreas infinitamente pequeñas las cuales sentaron las estructuras del cálculo diferencial e integral. Fue él quien, por primera vez, introduce el término *Cálculo Diferencial* y plantea las fórmulas para derivar un producto, cocientes, potencias y raíces, pero también de aplicaciones geométricas para el cálculo de tangentes, máximos y mínimos, además de los puntos de inflexión.

El cálculo diferencial propuesto por Newton y Leibniz, a finales del siglo XVII aún no contaba con una fundamentación matemática rigurosa, los conceptos de Derivada y su formalización fueron evolucionando durante los siguientes 200 años en forma paralela a los conceptos de función, continuidad y límite. En este contexto, Bos (1984) indica que los avances obtenidos en estos siglos fueron claves para la fundamentación del cálculo diferencial y la definición actual de derivada. Estos avances fueron: 1) la concepción de que el cálculo está vinculado a las funciones, más que con variables; 2) La designación de la derivada como eje fundamental del *Cálculo Diferencial*, en vez de la *diferencial*; 3) La consideración de la derivada como una función; 4) Se explicita al límite como  $\lim_{h \rightarrow 0} p(h)$ , es decir el límite de una función cuando la variable independiente se comporta de una manera explicitada.

Los trabajos sobre esta rama de las matemáticas continuaron, Leonard Euler fue uno de los primeros matemáticos en proponer avances en dirección a la fundamentación del cálculo diferencial según señala Grattan-Guinness (1984), perfeccionando y desarrollando el campo del cálculo propuesto por Leibniz pese a que sus fundamentos

aún no estaban claramente definidos. Por este motivo, Euler es considerado fundador del análisis, toda una rama de las matemáticas que comprende los métodos infinitesimales del cálculo diferencial e integral. Para Euler (citado en Durán, 1996), lo expresa de la siguiente manera:

“... un método para determinar la proporción de los incrementos evanescentes, esto que las funciones toman cuando la variable de la función se modifica por uno de tales incrementos”.

Es decir, desde la concepción de Euler comienza a gestarse el cociente de incrementos

$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  el cual conlleva a la derivada de una función. Otro matemático que

aportó y trató de darle rigor al cálculo infinitesimal fue Jhosep Louis Lagrange a quien se le debe el teorema del valor medio para funciones derivables además del término de “función derivada” y de la notación  $f'$  para indicar la derivada de una función

Recién en el primer cuarto del siglo XIX se logra el impulso necesario para la fundamentación rigurosa del concepto de derivada por parte de Augustin Cauchy y Bernard Bolzano, pero fue Karl Weierstrass quien terminó el proceso al proponer la definición de límite que conocemos en la actualidad, lo resaltable de su trabajo es eliminar los aspectos inexactos que aparecían en la definición de Cauchy como por ejemplo *aproximan indefinidamente* o difieren tanto como uno desea, sustituyéndolos por la conocida expresión algebraica de épsilon y delta:

El límite de una función  $f(x)$  vale  $L$  cuando  $x$  tienda a  $x_0$  si para cualquier cantidad positiva  $\varepsilon > 0$  existe otra cantidad positiva  $\delta > 0$  de manera que para todo punto  $x$  verificado  $0 < |x - x_0| < \delta$  y donde la función  $f$  esté definida se tiene que  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . (Durán, 1996, p. 57)

También propuso una definición para la función continua tal y como la conocemos ahora:

$f(x)$  es continua en  $x_0$  para cualquier cantidad positiva  $\varepsilon > 0$ , existe otra cantidad positiva  $\delta > 0$  de manera que, para todo punto en el intervalo  $|x - x_0| < \delta$  donde la función este definida, se verifica que  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . (Ibid, p.59)

Finalmente, la derivada adquiere una fundamentación lógica rigurosa cimentada en el concepto de límite:  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

## 2.2 El análisis marginal de funciones económicas.

En la agonía del siglo XVIII, las matemáticas se convirtieron en el lenguaje de las ciencias debido a la cantidad de producciones y avances que obtuvieron en diferentes campos, pero fundamentalmente del cálculo diferencial. Fue inevitable el vínculo con la física, química astronomía, hoy conocidas como ciencias de la naturaleza, pero también con las ciencias sociales como la economía dándole formalidad matemática a sus conocimientos, en grado menor en comparación con la física.

Uno de los primeros inconvenientes es el impedimento de que algunos elementos de sistemas conceptuales de las ciencias económicas no eran posibles de cuantificar. Según Boudieu (2001) cuando no es viable la matematización de las nociones y las relaciones, se cuestiona el calificativo en la ciencia otorgado a dicho campo del saber, lo cual pone en valor la matematización que sin el cual le quita el reconocimiento de ciencia. Una de las áreas del conocimiento donde fue factible incluir el proceso de matematización de conceptos y relaciones fueron en el análisis de las riquezas de las naciones. Un hecho trascendente de las ciencias sociales fue el surgimiento de la Física social, un área del conocimiento que vinculó las matemáticas, usados para establecer relaciones entre aspectos establecidos teóricamente (abstractos), dicho de otra manera, la introducción al análisis, que hoy conocemos como relaciones entre variables.

Un punto aparte merece la evolución del concepto de riqueza, el establecer relaciones entre magnitudes fue impulsado por el análisis del valor de los bienes intercambiados en los mercados. Desde el siglo XV se usó la moneda para simbolizar valor en consecuencia a la asignación de valor a los metales. El oro en calidad de objeto valioso permitía ser intercambiado por otros bienes, posteriormente fue utilizado como patrón

de intercambio, convirtiéndolo en un medio de cambio acumulable, base del enriquecimiento. Por otro lado, para que la moneda sea reconocida como patrón de medida de otras mercancías y la represente en el proceso de intercambio, es decir, sea unidad de medida de la riqueza, necesita asignarle un valor nominal.

Otro enfoque del análisis de las riquezas (fisiocrática) llevó a instaurar que el trabajo (esfuerzo) invertido en su producción es el que establece el verdadero valor del intercambio de la mercadería, bajo esta perspectiva, un bien o conjunto de estos, serán más o menos valiosos en proporción al esfuerzo y fatiga exigido en su producción, pero la recompensa debido al esfuerzo puede alterarse, si esta mercadería es limitada.

En tal sentido, la noción de marginalidad comienza a gestarse a inicios de los años 1870 con las obras intelectuales de tres autores que, trabajando en forma independiente y desde diferentes enfoques intelectuales, propiciaron el marginalismo. La obra de Jevons "Teoría de la economía Política", Carl Menger "Principio de Economía Política además de los "Elementos de la economía Política" de Walras cuyo aporte más trascendente es el concepto de la utilidad marginalidad, que posteriormente, generalizaron a otras funciones económicas. En las obras originales el término Utilidad marginal no aparece tal como lo menciona Ning (2016), en cambio se utilizaban términos similares como rareté, intensidad o satisfacción de la unidad consumida.

Jevons y Walras usaban el término "utilidad" en el mismo sentido económico con que lo hacemos en la actualidad, es decir Jevons la define como el poder de un bien para satisfacer deseo, pero considerando que el poder no es cualidad constitutiva del bien, además señala que:

La utilidad adicional resultante de los incrementos de los productos básicos generalmente disminuye a alguna proporción, o como alguna función de la cantidad total recibida. [...] Esta variación existe incluso en las cantidades más pequeñas, en cuyo caso debemos retroceder a infinitesimales, y lo que llamaremos el coeficiente de utilidad, es decir, la relación entre el último incremento o la oferta infinitamente pequeña del objeto, y el incremento de placer que ocasiona. (Peart 1996, p.71)

Mientras tanto Walras en cuanto a la utilidad marginal la denota como utilidad Intensiva o rareté, para resaltar la intensidad del último deseo satisfecho por cualquier cantidad de un determinado bien. En tal sentido "sea la curva continua o discontinua, postulo

que los servicios intensivos siempre disminuyen en la primera unidad o fracción de una unidad consumida a la de la última unidad o fracción de unidad consumida” (Walras 2003, p.118)

Merger, a su vez, considera a la utilidad

La satisfacción de cualquier necesidad específica tiene, hasta cierto grado de completitud, una importancia relativa alta, hasta que finalmente se alcanza una etapa en la que una satisfacción más completa de esa necesidad particular es una cuestión de indiferencia. En última instancia, se produce una etapa en la que cada acto que tiene la satisfacción de esa necesidad no tiene más importancia para el consumidor. (Menger 2007, p.125)

En cuanto a la utilidad en la producción, los tres marginalista defiende la posición de que el valor de las mercancías está en función del último grado de utilidad (frontera), no en sus cualidades constitutivas, anteriormente determinada de por las cantidades.

Históricamente el concepto de marginalidad comenzó a gestarse a partir del análisis de la función utilidad por parte de los tres autores (Jevons Menger y Walras), posteriormente se extendió dicho concepto a las demás funciones económicas.

### **El análisis marginal como aplicación económica de la derivada.**

En un contexto donde los bienes son escasos, el estudio del cambio de las retribuciones al esfuerzo tomando en cuenta el comportamiento de los sujetos en los mercados es donde aflora la economía como ciencia, saber social que también tiene el estatus de ciencia basado en los procesos de matematización de sus diferentes sistemas conceptuales, es decir “se basa en la construcción de modelos de los fenómenos sociales, estos modelos deben ser como una representación de la realidad” (Varían 2010, p.1)

Este proceso de matematización de los conceptos económicos requirió de una estructura y lenguaje formal que la sustentara, es así como se hizo indispensable la participación del cálculo infinitesimal y la noción de valores extremos, pero también la noción de función y relación desde el punto de vista de interdependencia de valores que cambian.

En este contexto se desarrolla el análisis marginal, es decir:

Es el resultado científico en la búsqueda y elaboración de un método general que permita, de una forma ordenada, tratar el problema de obtener el mayor provecho posible de los recursos limitados de un sistema económico, lo que es equivalente, obtener algo con la menor cantidad de recursos. (Pérez 1980, p.473)

El término “Marginal” es acuñado por la escuela marginalista, que emerge en contraposiciones a los modelos ya existente que no pudieron resolver en su momento los problemas que proponían en la teoría económica. El marginalismo es producto de dos concepciones que se amalgaman entre sí, el saber social y el saber matemático, este enfoque permite declarar variables económicas y reconocer dependencia entre ellas es decir establecer una relación funcional y desde allí, el análisis marginal, se enfoca en estudiar el margen, dicho de otra manera, el borde en búsqueda de encontrar los efectos producidos en variable producto de la modificación de la magnitud-en una unidad-de la otra.

Visto desde un contexto económico dicho procedimiento matemático permite establecer la relación de cómo la variación en la asignación de los recursos incide en el nivel de satisfacción del consumidor y en la utilidad del vendedor, dicho de otra manera, establece una razón de cambio, lo cual desencadena en la posibilidad de identificar los valores que optimizan la función utilidad, lo cual se concreta mediante el cálculo de la derivada a dicho proceso se denominó análisis marginal. En ese sentido:

Desde el punto de vista técnico, las nuevas teorías del valor y de la distribución se reducirán realmente al descubrimiento al cálculo diferencial como instrumento de la economía. Y esto basta para mostrar lo absurda que es cualquier oposición de principio al marginalismo. (Pérez 1980, p.473)

Es por tal motivo que el análisis marginal recurre a la derivada, con la intención de determinar el cambio que representa una función modelada por un contexto económico como el ingreso, costo, utilidad o producción, al aumentar una unidad de un determina bien. Es decir “una de las principales aplicaciones del cálculo es determinar cómo cambia una variable respecto a la otra. Un hombre de negocios quiere saber cómo cambia las ganancias con respecto a la publicidad” (Lial y Hungerford 2000, p.402).

La importancia de la derivada como herramienta formalizadora de las ciencias económicas se ve reflejada que una evolución en sus conceptos, en ese sentido:

originalmente los economistas estudiaron el coste o costo marginal a un nivel de producción  $x$  como  $C(x+1) - C(x)$ , que es el coste de producir una unidad adicional de un producto, como:

$$C(x+1) - C(x) = \frac{C(x+1) - C(x)}{1} \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h} = C'(x).$$

De ahí que, el costo marginal ( $C'(x)$ ) al nivel de producción  $x$  es aproximadamente el coste de producir la unidad  $(x+1)$  (Salas, Hile y Etgen 2002, p.152)

Al inicio las funciones económicas se interpretaban mediante cantidades discretas, cuando las ciencias económicas comienzan su proceso de conversión a ciencia mediante la formalización de los conceptos económicos. En tal sentido, se tuvo que dar el salto de lo discreto a lo continuo, lo cual provocó un cambio de procesos como, por ejemplo, el cálculo del costo adición por una unidad más de producto.

En el mismo sentido, la microeconomía reconoce la necesidad de estudiar el efecto en la demanda ante una variación del precio. Matemáticamente, esto corresponde al concepto de pendiente en la curva que representa a la demanda, dado que la interpretación del objeto matemático en el contexto de la microeconomía representa el cociente de la variación del precio con respecto a la variación de la cantidad demanda.

$$\begin{array}{l} \text{Pendiente a la} \\ \text{curva de la demanda} \end{array} = \frac{\Delta p}{\Delta q}$$

Sin embargo, dicha medida presenta algunos inconvenientes matemáticos relacionadas con su interpretación. La pendiente a la curva de la demanda depende de las unidades en que fueron definidas la demanda y el precio. En tal sentido si las unidades de la demanda cambian, dichos cambios se ven reflejados en los valores de la pendiente (inclinación), por lo tanto, es necesario especificar las unidades (Varian, 2010). En consecuencia, era necesario tener una medida más independiente que refleje el efecto de la demanda ante un cambio de precio, por ellos los economistas prefieren usar la elasticidad ( $\epsilon$ ) para dichos fines.

La elasticidad de la demanda se define como una variación porcentual de la demanda ante un cambio de porcentual del precio, esta concepción elimina el uso de unidades,

por intermedio de los porcentajes, haciendo más fácil su interpretación más general. En consecuencia, la elasticidad de la demanda se define de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \frac{\Delta q / q}{\Delta p / p}$$

Dicha expresión se puede sintetizar en:  $\varepsilon = \frac{p \cdot \Delta q}{q \cdot \Delta p}$

Dado que la elasticidad es proporcional a la pendiente de la demanda, Varian (2010), advierte que elasticidad se puede representar en términos de la derivada de la función demanda, de la siguiente forma:

$$\varepsilon = \frac{p}{q} \cdot q'(p)$$

En consecuencia, podemos evidenciar la importancia de la marginalidad (derivada en la economía), en la medición del comportamiento de la demanda ante un cambio en los precios, siendo una herramienta en la toma de decisiones de las organizaciones ante el comportamiento del mercado.

El concepto de marginalidad involucra un cambio de lo discreto a lo continuo con la finalidad de aprovechar todo el potencial del cálculo diferencial. Tal como lo señala Sarmiento y Seijas (2006) muchos economistas critican a la teoría marginalista por el escaso realismo en sus conjeturas matemáticas, específicamente en cuanto a lo forzado de los modelos matemáticos para cumplir las condiciones de la formalidad matemática.

En ese sentido, la microeconomía adapta ciertos modelos que tienen orígenes en lo discreto, pero los considera continuo con el fin de poder hacer análisis como por ejemplo la razón de cambio instantánea, elasticidad, etc.

### **2.3 El análisis marginal de funciones económicas en libros de Economía**

En la presente sección se realizará un análisis de dos libros de uso frecuente en diferentes universidades del medio peruano que ofrecen la carrera de economía, dichos libros nos permitirán evidenciar los diferentes enfoques de los autores sobre cómo

abordan el análisis de marginal y su vinculación con el artefacto derivada, lo cual es de nuestro interés en la presente investigación.

Tabla 2. Libro de economía analizados en la presente investigación.

Título	Autor/ año
Economía	Michael Parkin (2009)
Principios de Economía	Gregory Mankiw (2012)

### **El análisis marginal en el libro Economía del autor Michael Parkin.**

En el capítulo I del libro encontramos un primer acercamiento al pensamiento de la marginalidad mediante dos ejemplos extramatemáticos donde se desea desarrollar la idea de beneficio y costo marginal además de comparación como herramienta efectiva en la toma de decisiones. Cabe resaltar que no usa símbolos matemáticos además de ser muy puntal.

En una sección del capítulo II establece la vinculación entre la *Frontera de posibilidades de producción* (FPP) y el *Costo marginal*, hace uso de un ejemplo extramatemático, y con el apoyo de un gráfico, se induce a ver al costo marginal como un cociente de incrementos. A continuación, se realiza una comparación gráfica en plano cartesiano de ambas funciones (costo y beneficio marginal) indicando el caso particular cuando ellas son iguales denominándolo punto de eficiencia de asignación. Esta sección culmina con pregunta de repaso, sin hacer uso de símbolos matemáticos para representar los conceptos económicos o fórmulas que involucren cómo calcularlas.

En el capítulo X, se desarrolla el concepto de curva de producto total y de curva de producto marginal, a partir de estos conceptos propios de la economía, especialmente el de marginalidad, se comienza a tratar la idea de cocientes incrementales para fundamenta la ley de los rendimientos decrecientes la cual sustenta que a medida que se use más un factor de producción variable, con una cantidad dada del factor de producción fijo, el producto marginal del insumo variable disminuye a la larga.

En cuanto a Producción y Costos el autor expone las consideraciones que deben tener las empresas sobre cuánto producir y el precio a cobrar, en relación con el tipo de

mercado (competencia perfecta, monopolio oligopolio, etc.). En ese sentido, circunscriben el análisis en marcos tiempo – corto y largo plazo- con el objetivo de analizar la vinculación entre la decisión de producción de una empresa y sus respectivos costos.

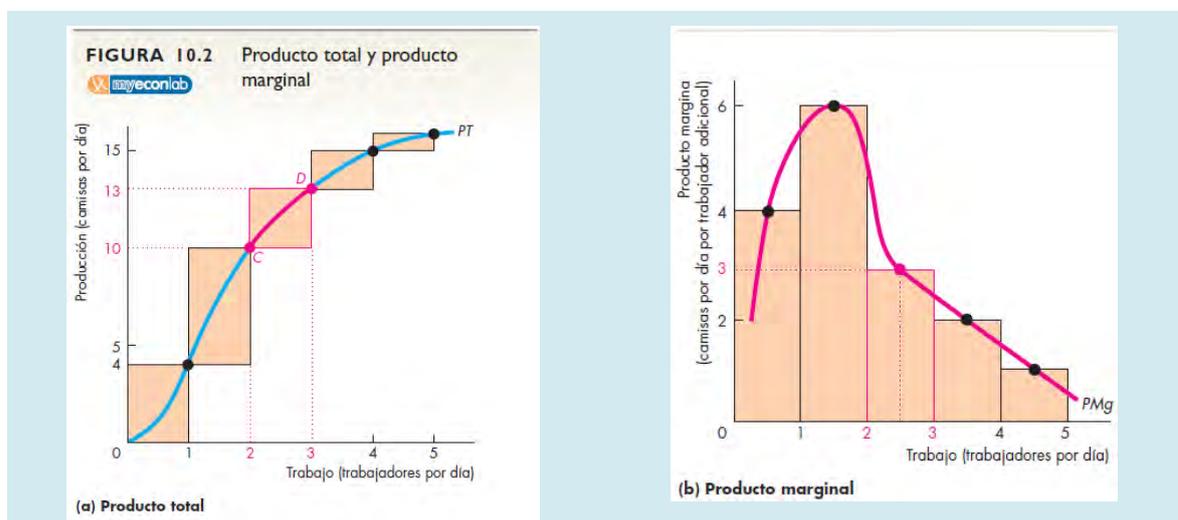
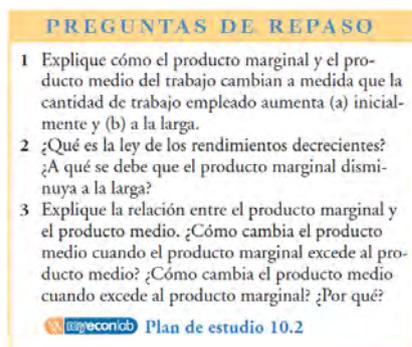


Figura 11. Producción total en función del trabajo.

Fuente: Economía, Parkin (2009, p.223)

En la figura 11, se muestra la gráfica (a) que representa la producción total (camisas por día) en función del trabajo (trabajadores por día) cada altura de los rectángulos representa el producto marginal. Como se puede ver, por ejemplo, cuando el trabajo aumenta de 1 a 2 la producción aumenta de 4 a 10 siendo el producto marginal 6 camisas por trabajador, mientras que cuando lo hace de 2 a 3 la producción aumenta de 10 a 13 siendo ahora el producto marginal 3 camisas por trabajador. Con la ayuda de los rectángulos se construye la gráfica (b) la cual representa el producto marginal.

Posteriormente, el autor propone preguntas de repaso sobre los temas bordados, como se muestra en la figura 12.



*Figura 12.* Preguntas de repaso.

Fuente: Economía, Parkin (2009, p.224)

Para que el estudiante pueda responder las preguntas, planteadas en el repaso, tiene que haber logrado una instrumentalización de noción de marginalidad, es decir el estudiante de economía movilice y evolucione el componente artefactual del instrumento (Derivada) para poder fundamentar sus respuestas.

Los fundamentos del análisis marginal que desarrollaron Jevons, Menger y Walras en sus correspondientes teorías sobre el intercambio coinciden con el concepto matemático de derivada, en donde la marginalidad o concepto de la última unidad, expresan el cambio de una variable ante aumentos infinitesimales de otra. Es por tal motivo que la derivada es la herramienta principal de la economía marginalista (en el borde) la cual permite eficiente cálculo de variaciones de funciones económicas (ingreso, costo utilidad, demanda, etc.) cuando la variable independiente aumenta en una unidad.

En el capítulo XII, desarrolla el tema del monopolio en donde se detallan las condiciones para su existencia, estrategias de fijación de precios, regulaciones gubernamentales, pero además se desarrolla como se decide la producción y el precio en contextos monopolistas y para ello se basan en el vínculo entre precio e ingreso marginal.

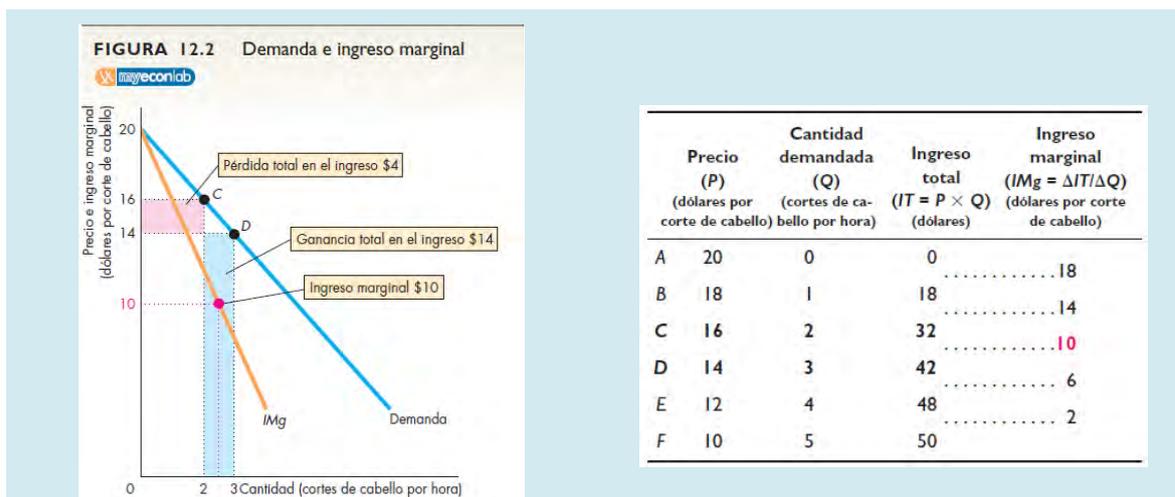


Figura 13. Comportamiento del consumidor.

Fuente: Economía, Parkin (2009, p.266)

La tabla de la figura 13 muestra el comportamiento de los consumidores (demanda), por ejemplo, cuando el precio es de 20 dólares no hay demanda de cortes, así mismo se evidencia que a medida que disminuye el precio del corte de cabello la demanda de cortes de cabello por hora aumenta. Además, el ingreso marginal representa el cambio de ingreso cuando la demanda aumenta en una unidad, por ejemplo, si el precio disminuye de 16 a 14 dólares la cantidad de cortes por hora aumenta de 2 a 3. En consecuencia, a cada nivel de producción el ingreso marginal es menor al precio por tal motivo la curva del ingreso marginal se encuentra por debajo de la demanda, es decir cuando el precio es de 16 dólares se requieren 2 cortes de cabello, pero si decide bajar el precio a 14 dólares se requieren 3 y el ingreso aumenta en 14 dólares.

El ejemplo propuesto por el libro se basa en cantidades discretas, lo cual facilita los cálculos además de que el estudiante compruebe que dichos valores corresponden a una recta. Es evidente que comportamiento del ingreso marginal corresponde a la noción de derivada. El entendimiento del comportamiento de las funciones con datos discretos permitiría que el estudiante, posteriormente utilicen los mismos esquemas de uso para funciones continuas, propiciando así la Genesis Instrumental basados en análisis marginal de las cantidades discretas.

Posteriormente, en el mismo contexto del monopolio, se establece la relación entre ingreso marginal y elasticidad.

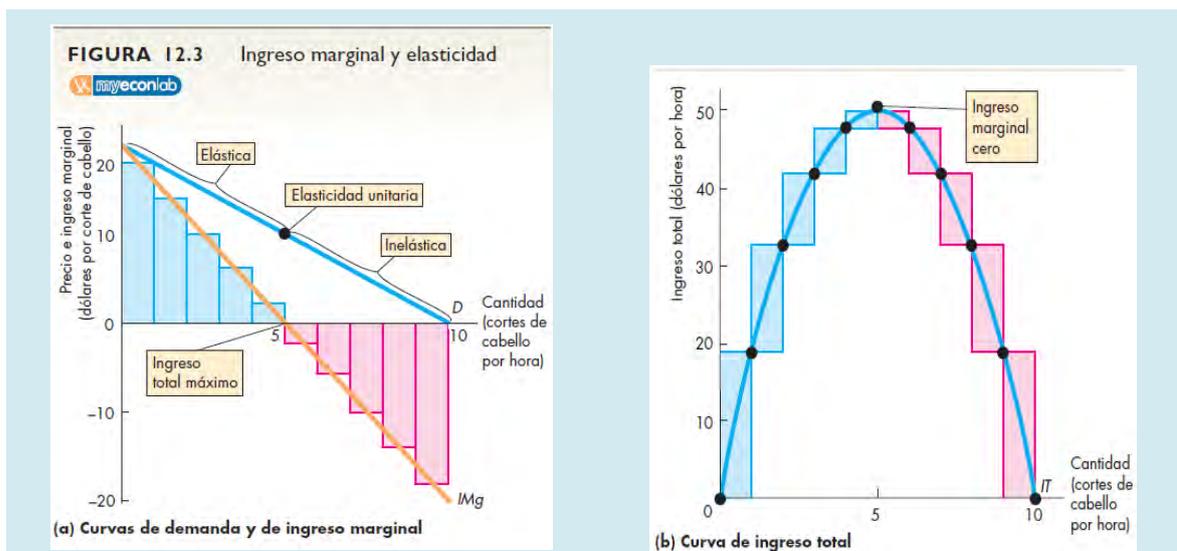


Figura 14. Ingreso marginal y elasticidad.

Fuente: Economía, Parkin (2009, p.267)

En la figura 14, el autor vincula la gráfica del ingreso marginal con la del ingreso, ambas gráficas resaltan el cambio por una unidad adicional mediante los rectángulos en las respectivas gráficas, detrás de la idea de marginalidad plasmadas por el autor se evidencia la noción de derivada.

Al final de la sección, propone preguntas de repaso como se muestra en la figura 15.

**PREGUNTAS DE REPASO**

- 1 ¿Cuál es la relación entre el costo marginal y el ingreso marginal cuando un monopolio de precio único maximiza sus utilidades?
- 2 ¿Cómo determina un monopolio de precio único el precio que cobrará a sus clientes?
- 3 ¿Cuál es la relación entre el precio, el ingreso marginal y el costo marginal cuando un monopolio de precio único maximiza sus utilidades?
- 4 ¿Por qué un monopolio puede obtener utilidades económicas positivas incluso a largo plazo?

Plan de estudio 12.2

Figura 15. Preguntas de repaso.

Fuente: Economía, Parkin (2009, p.269)

En el prefacio el autor declara que el presente libro cuenta con algunas características para la mejora de la enseñanza y el aprendizaje, dichas mejoras son: a) Al inicio de cada capítulo se presentan reflexiones con la intención de captar la atención del lector;

b) Se señalan los objetivos del capítulo; c) Preguntas de repaso; d) Glosario para los términos restados en cada capítulo.

## El análisis marginal en el libro de Principios de Economía del autor Gregory Mankiw.

En esta sección de la investigación describiremos la forma en que el libro de Gregory Mankiw titulado Principios de Economía aborda los conceptos económicos de marginalidad en su relación con el objeto matemático, la derivada.

En su introducción, señala que la economía es una ciencia social y por ende ella es un reflejo del comportamiento de los individuos que la componen, es por tal motivo que los individuos son piezas fundamentales en la regulación del comportamiento del mercado al tomar decisiones. El autor destaca cuatro principios, los cuales son siguientes: 1) Las personas enfrentan disyuntivas; 2) El costo de una cosa es aquello a lo que se renuncia para obtenerlo; 3) Las personas racionales piensan en términos marginales. 4) Las personas responden a los incentivos.

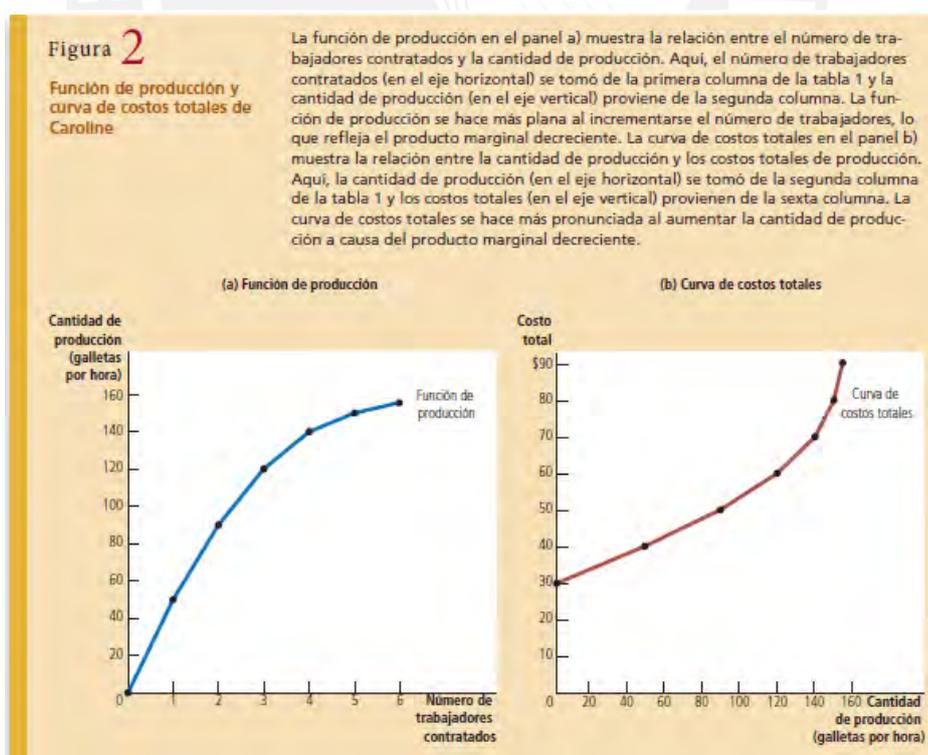


Figura 16. Función producción y costos totales.

Fuente: Principios de Economía, Mankiw (2012, p.264)

Basado en la premisa *las personas racionales piensan en términos marginales*, propuesta por el autor al inicio del libro, proponen que la marginalidad es un concepto clave para comprender al mercado. Define el producto marginal cómo el incremento de la cantidad producida que se obtiene por cada unidad adicional de un factor de producción. En la figura 16, se muestra la función de producción de galletas, cuando el número de trabajadores cambia de 1 a 2, la producción cambio de 50 a 90, en tal sentido concluimos que el producto marginal por el segundo trabajador es de 40 galletas. El autor hace notar que el producto marginal del tercer trabajador es de 30 galletas mientras que el del cuarto trabajador es de 20 galletas para finalmente señalar mediante este ejemplo contextualizado la propiedad de producto marginal decreciente, es decir mientras más trabajadores sean incorporados al proceso productivo, cada trabajador adicional contribuye menos a la producción total.

Este comportamiento decreciente de la función producción también puede ser analizado, por el autor, mediante la pendiente de la recta tangente a la curva de la función producción. Al aumentar la cantidad de trabajadores la recta tangente se vuelve más plana, evidenciando que el producto marginal disminuye.

En cuanto a la gráfica que representa a los costos totales, cuando la producción de galletas es enorme es más costoso producir una galleta adicional, es decir la función se vuelve más pronunciada

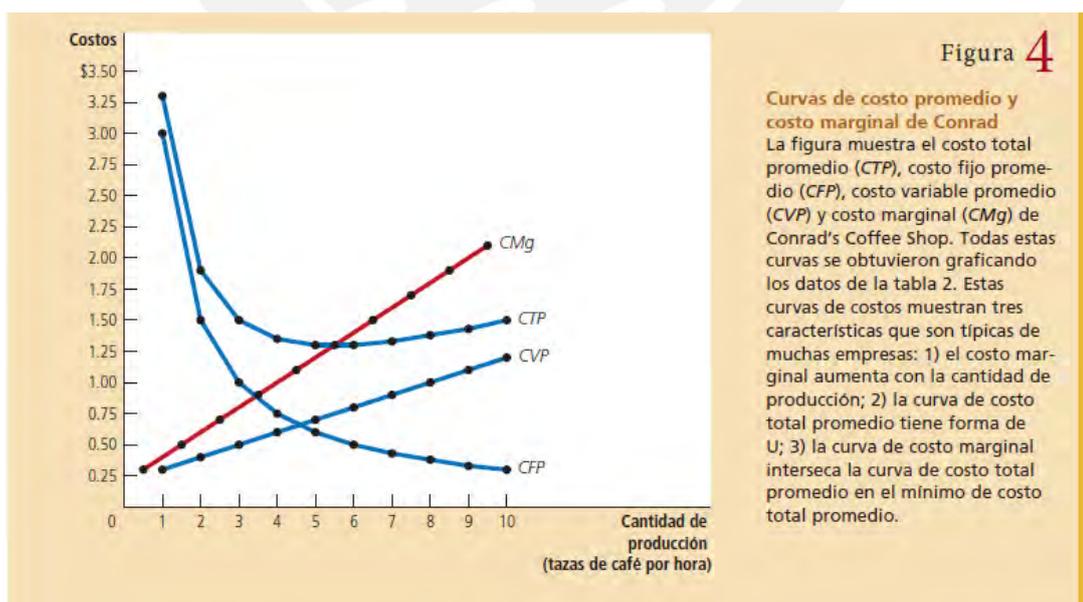
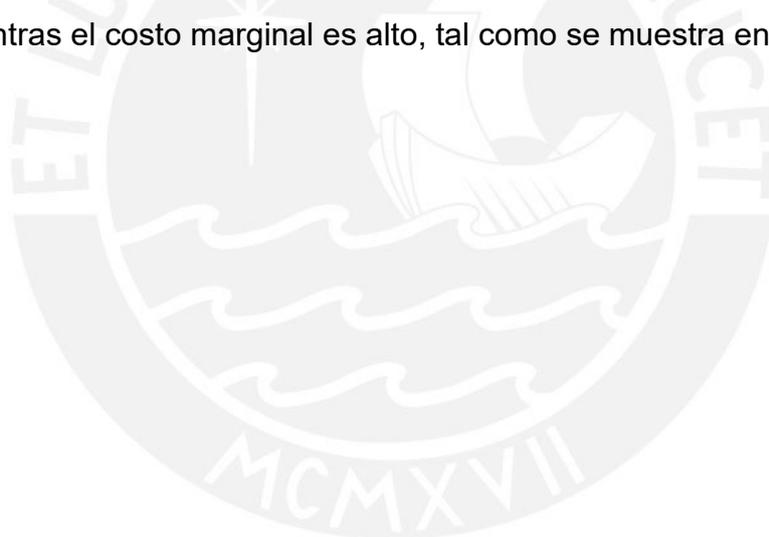


Figura 17. Costos promedios y costos marginales.

Fuente: Principios de Economía, Mankiw (2012, p.269)

Las curvas de costos, de una tienda de café, que se muestran en la figura 17 nos permite analiza la conducta de las empresas. Se muestran cuatro curvas: costo total promedio (CTP), costo fijo promedio (CFP), costo variable promedio (CVP) y costo marginal (CMg).

El costo marginal aumenta a medida que aumenta la cantidad de tazas de café Esto concuerda con la propiedad del producto marginal decreciente. Cuando se tiene una producción pequeña de café, se requieren pocos trabajadores y varios equipos están sin uso. En tal sentido al poner a trabajar esos recursos inactivos, el producto marginal de un trabajador adicional es significativo y el costo marginal por la taza extra es bajo. Pero cuando se produce mucho café, la tienda contará con muchos trabajadores además del uso de todos los equipos. Si se aumenta la cantidad de trabajadores es muy probable que se tengan que esperar para hacer uso de los equipos, es decir cuando se produce mucho café el producto marginal por el trabajador adicional es pequeño mientras el costo marginal es alto, tal como se muestra en la figura 18.



## **CAPÍTULO III: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DEL ANÁLISIS MARGINAL DE FUNCIONES ECONÓMICAS.**

En el presente capítulo describiremos los elementos constituyentes de una propuesta de Orquestación Instrumental que permita, a los estudiantes de economía, la interpretación del mercado mediante el análisis marginal de la función producción (Coob Douglas), es decir, la estructura de la propuesta constará con la configuración didáctica y el modo de ejecución, pero por motivos de la pandemia del COVID 19, que nos aqueja, no implementaremos el desempeño didáctico.

### **3.1 Configuración Didáctica.**

En cuanto a la configuración didáctica Trouche (2004) consiste en una organización del espacio del aula o medio ambiente, es decir, la configuración del entorno donde se realizará el proceso de enseñanza además de los artefactos que participan en ella mediante una tarea específica. En ese sentido, Drijvers (2012) afirma que: “Una configuración didáctica es una disposición de artefactos en el entorno, o, en otras palabras, una configuración del escenario de enseñanza y los artefactos involucrados en él” (p. 266).

La organización del escenario de la propuesta didáctica (Actividad Exploratoria y actividad mediada con Orquestación Instrumental) se realizará mediante la modalidad de educación virtual dada las condiciones de distanciamiento social obligatorio debido a la pandemia del COVID 19, en tal sentido, proceso de enseñanza – aprendizaje se realizará mediante el software de videoconferencia del Zoom. La gestión del aprendizaje se efectuará con el apoyo del applet del GeoGebra, en consecuencia, todos los participantes deberán de contar con dispositivos tecnológicos cómo laptops, tablets o celular con una adecuada y estable conexión a internet.

En cuanto a los ***sujetos de la investigación***, la presente investigación, pretende orientar a estudiantes de economía de cualquier universidad o carreras afines donde se desarrolle cursos de matemática aplicada a la economía. Es decir, donde se

desarrollen las nociones básicas del cálculo diferencial, pero también el curso de Economía en donde ponen en práctica los conceptos de marginalidad.

### 3.2 Modo de ejecución.

El modo ejecución, en el sentido de Trouche (2004), consiste en la forma de cómo el docente elige ejecutar acciones con la intención de cumplir el objetivo de una tarea determinada. En el mismo sentido Drijvers (citado en Say y Akkoc, 2016) en cuanto al modo de ejecución afirma que: “se define como las decisiones del profesor sobre la forma cómo o de qué manera configura una tarea al proporcionar ciertos roles para que los artefactos logren sus intenciones didácticas”.

En esta sección, describiremos la manera en que se llevará a cabo el diseño de propuesta didáctica que favorecería el análisis marginal de un determinado contexto económico basado en la orquestación instrumental.

La tabla 3, muestra la estructura y disposición de la propuesta que consta de una secuencia de dos actividades.

*Tabla 3. Estructura de secuencia de actividades de la propuesta didáctica.*

Actividad.	Sesión.	Contenido.	Duración.
Actividad exploratoria.	I	La derivada	40 minutos
Actividad orquestada.	II	Análisis Marginal	60 minutos.

A continuación, detallaremos la actividad exploratoria, así como dos diferentes modos de ejecución.

#### **Actividad Exploratoria**

Esta actividad tendrá una duración de 40 minutos (una sola sesión) divididas en dos tareas de 15 minutos cada una cuyo objetivo es identificar y reconocer los conocimientos previos que los estudiantes de economía tienen sobre la noción de derivada. En tal sentido se podrá identificar a los estudiantes que aún no han generado esquemas de utilización (respecto a la derivada) con los cuales el estudio se centraría

en ver cómo se genera la Génesis Instrumental del análisis marginal a partir de una orquestación instrumental. Mientras que con los estudiantes que ya han generado los esquemas de utilización sobre la derivada el estudio se enfocaría en ver cómo dichos estudiantes aportan a la Génesis Colectiva en base a la orquestación. En tal sentido, se diseñaron dos tareas asociadas a la noción de derivada con la intención de observar la emergencia de los esquemas de utilización que consideramos relevantes para la Génesis Instrumental del análisis marginal en funciones económicas. Al finalizar las dos tareas el docente investigador haría una socialización de los resultados esperados que ocuparía en tiempo de 10 minutos.

La Tarea 1 de la actividad exploratoria está compuesta por cuatro ítems los cuales podrán ser visualizados mediante un applet en GeoGebra la cual permitiría que el estudiante interactúe con la gráfica de la función mediante la manipulación de un deslizador del GeoGebra.

**Tarea 1**

La siguiente figura muestra la gráfica de  $f(x) = 0.3x^2$  y la recta secante que pasa por el punto  $P(1, 0.3)$ .  
 (Use el enlace de GeoGebra como apoyo para realizar los cálculos)  
<https://cutt.ly/ghxsrVH>

a) Complete la siguiente tabla con la información solicitada haciendo uso del deslizador.

$x_2$	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1
$\frac{f(x_2) - f(1)}{x_2 - 1}$					

b) Calcule el siguiente límite. Interprete.  

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

c) Determine  $f'(1)$  usando las reglas de derivación y compárelo con el resultado obtenido en el ítem anterior. Comente.

Figura 18. Pregunta 1 de la Actividad Exploratoria.

La Tarea 1, tiene como objetivo evidenciar que el estudiante conoce la definición de derivada como el límite de un cociente incremental pero además de la noción gráfica de la derivada como pendiente de una recta tangente, como se muestra en la figura 16.

**Técnica instrumentada esperada.**

- a) El estudiante deberá manipular el deslizador del applet del GeoGebra con el objetivo de completar la tabla, provocando que afloren sus esquemas de uso relacionados al cociente incremental cómo función y recta secante además de su interpretación gráfica.

$x_1$	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1
$\frac{f(x_1) - f(1)}{x_1 - 1}$	0,72	0.72	0.69	0.66	0.63

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0.3x^2 - 0.3}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

*Forma Indeter.*

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0.3 \cdot (x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} 0.3 \cdot (x + 1) = \boxed{0.6}$$

Este ítem busca la emergencia de esquemas de uso vinculados al cálculo de límite cómo función, factorización y definición de límite. Además, se espera que el estudiante relacione dicho límite con la convergencia del cociente incremental cuando  $x$  tiende a 1, lo que evidenciaría el desarrollo de un posible esquema de acción instrumentadas.

- c) Sea  $f(x) = 0.3x^2$ , al derivar se obtiene  $f'(x) = 0.6x$ . Cuando  $x = 1$  entonces  $f'(1) = 0.6$

El estudiante, primero, deberá movilizar los esquemas relacionados con las reglas de derivación para obtener la función derivada evidenciado así una actividad instrumentada, posteriormente deberá usar dicha función derivada  $f'(x)$  para obtener un valor puntual  $f'(1)$ .

Si el estudiante de economía logra responder satisfactoriamente los tres ítems de la Tarea 1 evidenciaría conocimientos de esquemas de uso mediante las acciones

relativas a las tareas secundarias como función, definición de derivada, reglas de derivación. Por otro lado, los esquemas de acción instrumentada serían revelados mediante las acciones relativas a las tareas principales como la relación del límite como la convergencia del cociente incremental cuando  $x$  tiende a  $x_0$  pero también su relación con la derivada puntual  $f'(x_0)$ .

La Tarea 2 de la actividad exploratoria está compuesta por cuatro ítems los cuales serán compartidos en la sesión de clase virtual mediante la opción de “compartir pantalla” de la plataforma Zoom. Para la investigación es muy importante la noción gráfica de la derivada por cuanto los estudiantes de economía hacen uso frecuente de la interpretación de las gráficas económicas en la toma de decisiones basado en el análisis marginal de estas.

**Tarea 2**

*Dada la representación gráfica de la derivada  $f'$  de cierta función continua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

*Complete:*

a)  *$f$  es decreciente en los intervalos :* \_\_\_\_\_

b)  *$f$  es creciente en los intervalos :* \_\_\_\_\_

c) *Los mínimos locales de  $f$  son :* \_\_\_\_\_

d) *Los máximos locales de  $f$  son :* \_\_\_\_\_

Figura 19. Tarea 2 de la actividad exploratoria.

La Tarea 2, tiene como objetivo evidenciar en los estudiantes de economía la relación de la derivada y los intervalos de monotonía de la función  $f$ , así como los valores

extremos de la función. Dichas características son fundamentales en el estudiante de economía pues permitiría una comprensión del modelo económico estudiado lo cual favorece la interpretación del mercado.

### Técnica instrumentada esperada.

a) Basados en el siguiente teorema sobre monotonidad:

$$f'(x) \leq 0, \forall x \in [a, b] \leftrightarrow f(x) \text{ Decreciente en } \underset{\text{interior}}{\forall x \in [a, b]}$$

El estudiante debe de analizar el gráfico de la derivada ( $f'(x)$ ) en busca de los intervalos donde se cumpla la condición de  $f'(x) \leq 0$ , dando como resultado  $]-\infty, -6], [1, 5]$ .

b) Basados en el teorema de señala que:

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \leftrightarrow f(x) \text{ Creciente en } \underset{\text{interior}}{\forall x \in [a, b]}$$

En consecuencia, el estudiante debe de analizar el gráfico de la derivada ( $f'(x)$ ) en busca de los intervalos donde se cumpla la condición de  $f'(x) \geq 0$ , dando como resultado  $[-6, 1], [5, +\infty[$

En los ítems a) y b) las técnicas que utilizarían los estudiantes evidenciarían sus esquemas de uso como función creciente, decreciente, intervalos y derivada de una función, todo a partir una representación gráfica, pero también pone en manifiesto los posibles esquemas de acción instrumentada cuando emplean propiedades gráficas de las funciones como por ejemplo dónde la función es positiva o negativa en base a la derivada, encontrar puntos críticos mediante las raíces de la derivada, etc.

- c) Por el criterio de la primera derivada, se debe concluir que hay un mínimo valor de  $f(x)$  cuándo  $x = -6$  y  $x = 5$ .
- d) Por el criterio de la primera derivada, se debe concluir que hay un máximo valor de  $f(x)$  cuándo  $x = 1$ .

En los ítems c) y d) el estudiante de economía podría optar por basar su respuesta en el criterio de la primera derivada (esquema de uso) la cual se sustenta en la monotonía de la función entorno al punto crítico ( $x_0$ ). Es decir, si  $f'(x) \geq 0$  para  $x < x_0$  y  $f'(x) \leq 0$  para  $x > x_0$  entonces  $f$  posee un máximo en  $x_0$ . Si  $f'(x) \leq 0$  para  $x < x_0$  y  $f'(x) \geq 0$  para  $x > x_0$  entonces  $f$  posee un mínimo en  $x_0$ . Para completar la tarea propuesta de estos ítems el estudiante tendría que hacer coordinación entre los conceptos de monotonía de una función en base al signo de la derivada y el criterio de la primera derivada lo cual evidenciaría un esquema de acción instrumentada de la derivada. Es evidente que el sujeto ha tenido que evolucionar los esquemas de uso de los ítems a) y b) por coordinación y acomodación para satisfacer el criterio de la primera derivada lo cual refleja en el estudiante un proceso de instrumentación.

Otra técnica que el estudiante podría usar para dar respuesta a la tarea planteada es mediante el criterio de la segunda derivada la cual se sustenta en la concavidad de la función. Es decir, siendo  $x_0$  un punto crítico de la primera derivada, si  $f''(x_0) < 0$  entonces  $f$  posee un máximo en  $x_0$ , mientras que si  $f''(x_0) > 0$  entonces  $f$  posee un mínimo en  $x_0$ . Se hace necesario que el estudiante movilice sus esquemas de uso (la derivada y recta tangente a una función) referentes a la interpretación gráfica de la derivada, es decir que la derivada en un punto representa la pendiente de la recta tangente en dicho punto, dicho conocimiento debe reacomodarse para concluir que la segunda derivada  $f''$  representa la pendiente de la recta tangente en un punto de la función derivada  $f'$ . Lo cual propiciaría la emergencia de esquemas de acción instrumentada (la pendiente de la recta a la función  $f'$  es  $f''$ ). El proceso de instrumentación se da cuando el sujeto evoluciona sus esquemas de pendiente de recta tangente de  $f$  para adecuarlos a la función derivada mientras que el proceso de instrumentalización cuando se apropia de las características del artefacto derivada para poder deducir el signo de la segunda derivada mediante su interpretación de pendiente de recta tangente. Cabe resaltar que ambos procesos (instrumentación e instrumentalización) ocurren en forma simultánea y es el investigador quien centra su interés en uno o en otro para cumplir los objetivos de la investigación.

Si el estudiante de economía logra responder satisfactoriamente los tres ítems de la Tarea 2 evidenciaría conocimientos de esquemas de acción instrumentada referidos a

la monotonía (función creciente y decreciente), externos relativos (máximos y mínimos de una función) además de convexidad y concavidad de funciones de variable real.

En cuanto a la actividad exploratoria, el artefacto está representado por la gráfica estática de la derivada en la Tarea 2, la dinámica de la Tarea 1 y la noción de derivada donde el estudiante de economía, para resolver la tarea encomendada, tendrá que movilizar sus esquemas de acción instrumentada lo cual evidenciaría una instrumentación del artefacto derivada, cumpliendo con los objetivos de esta actividad exploratoria de evidenciar si los estudiantes de economía tienen al objeto matemático, derivada, como un instrumento.

### Actividad con Orquestación Instrumental

Se tomará en cuenta la tipología propuesta por Şay y Akkoç (2016), pero para fines de nuestra investigación hemos seleccionado dos tipos de orquestación, como referentes para el estudio, las cuales detallamos en la siguiente tabla 4, por cuanto consideramos que estos son los más pertinentes, en concordancia con la educación virtual de nuestra investigación.

Tabla 4. Algunos tipos de orquestación (Tabach, 2013)

Tipo de orquestación.	Configuración didáctica.	Modo de ejecución.
Sherpa en el trabajo. (Drijvers et al., 2010)	Entorno de clase completa, una pantalla central	La tecnología está en manos de un estudiante, que la lleva a toda la clase para su discusión.
Trabajar y caminar. (Drijvers, 2012)	Los estudiantes trabajan individualmente o en pares con computadoras	El maestro camina entre los estudiantes, monitoreando su progreso y proporciona orientación cuando surge la necesidad

Fuente: Adaptado de Tabach 2013 citado en Şay y Akkoç (2016, p. 2710)

En tal sentido, utilizaremos los tipos de orquestación indicadas en la tabla anterior con el objetivo de adaptarlas para la presente investigación, las cuales tienen características novedosas, cómo una configuración didáctica basada en educación virtual.

Tabla 5. Tipos de orquestación propuestas para la presente investigación.

Tipo de orquestación.	Configuración didáctica.	Modo de ejecución.
Sherpa en el trabajo.	Clase virtual (video conferencia vía Zoom). Gestión del aprendizaje por applet del GeoGebra	Cada estudiante cuenta con un dispositivo (Tablet, Laptop celular) desde donde podrá interactuar con la clase.
Trabajar y saltar.	Los estudiantes trabajan en parejas mediante la configuración de grupos pequeños de la plataforma Zoom.	El profesor se dirige de grupo en grupo brindando orientación y monitoreando el avance de los estudiantes.

La **primera propuesta didáctica** con orquestación instrumental que utilizaremos en la presente investigación – sherpa en el trabajo – se da en torno al estudiante Sherpa que será el referente, guía y mediador en un contexto donde los estudiantes se encuentran utilizando el applet del GeoGebra e interconectados mediante el software de video conferencia del Zoom. El estudiante Sherpa o estudiante guía será el encargado de mostrar el desarrollo de una tarea asignada por el profesor mediante el GeoGebra la cual será presenciada por toda la clase, para ello se configura la videoconferencia para que el estudiante sherpa pueda compartir pantalla. Este tipo de orquestación promueve el manejo colectivo del artefacto y de los esquemas de utilización (instrumentación e instrumentalización) donde se evidencian los rastros de la actividad del estudiante Sherpa, los cuales son vistos por toda la clase. En tal sentido permite que el profesor compare las diferentes técnicas instrumentadas y los esquemas de acción instrumentada que están siendo construidos por el estudiante Sherpa Tal como señala Trouche (2005), las ventajas de esta configuración a razón de que:

- Es el profesor el responsable de guiar el proceso de enseñanza, por intermedio de la pantalla compartida del Zoom y el applet del GeoGebra del *estudiante - sherpa*.
- Además, el acceso a GeoGebra de la totalidad de los estudiantes (software gratuito) permite que el profesor (quien no realiza la acción instrumentada) pueda comparar y comprobar el proceso realizado por el *estudiante – sherpa*. En el proceso de enseñanza es factible combinar el trabajo a lápiz y papel con el trabajo en Geogebra realizado por el *estudiante – sherpa*.

- Se favorece el intercambio de ideas y puede promover la identificación de diferentes técnicas instrumentadas emergentes en clase además de la construcción explícita de los procedimientos, al aflorar diferentes formas de solución de la tarea permite evidenciar los diferentes esquemas de acción instrumentada de los estudiantes.

De la misma manera Trouche (2005) plantea diferentes formas de beneficios didácticos vinculados al *estudiante-sherpa*, dado que el profesor puede organizar el trabajo en clase de múltiples maneras:

- Los estudiantes pueden tener el GeoGebra inactivo, en consecuencia, potenciamos el trabajo a lápiz y papel.
- Estando en la plataforma zoom, se puede compartir la pantalla del *estudiante – sherpa* bajo la atenta supervisión del profesor, en esta organización (orquestración) de la instrumentación y los procesos de instrumentalización son fuertemente restringidos.
- Al realizar la tarea de manera individual, en forma simultánea, con la guía del *estudiante – sherpa*, la instrumentación y los procesos de instrumentalización son regulados por el tipo de tarea y la orientación por parte del *estudiante – sherpa*, dado que su pantalla es la que se visualiza en la actividad.
- Otra organización es que todos tengan activado el GeoGebra sin la participación del estudiante- sherpa. La instrumentación y el proceso de instrumentalización son débilmente restringidos.

En términos generales una orquestración instrumental involucra la coordinación de los instrumentos de los estudiantes, además de favorecer su apropiación con el objetivo de desarrollar la actividad intensional propuesta.

## Actividad con Orquestación Instrumental I

01. Con la ayuda del GeoGebra grafique la función producción  $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$  en unidades, donde  $L$  representa la fuerza laboral medida en horas trabajador y  $K$  representa el capital medido en miles de soles además calcule  $Q(20, 50)$ ,  $Q(100, 2\sqrt{5})$  e interprete dichos resultados.

Figura 20. Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 1.

### Técnica instrumentada esperada.

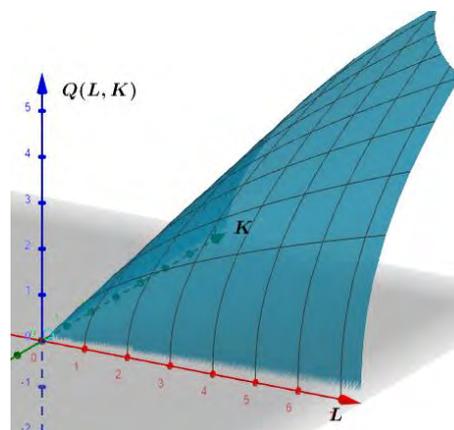
El estudiante, primero, debería configurar el GeoGebra para usar la vista gráfica 3D



Posteriormente el estudiante debería usar el interfaz algebraico para digitar la regla de correspondencia de la función producción, donde el eje  $x$  representa a la fuerza laboral ( $L$ ), el eje  $y$  representa al capital ( $K$ ) mientras que el eje  $z$  representará a la producción.



En consecuencia, la gráfica de la función producción  $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$  será:



El estudiante calcularía los valores numéricos de la función producción para los valores requeridos por la tarea haciendo uso de la vista algebraica.

$a = Q(20, 50)$	⋮
→ 28.85	←
$b = Q(100, 2\sqrt{5})$	⋮
→ 28.85	←

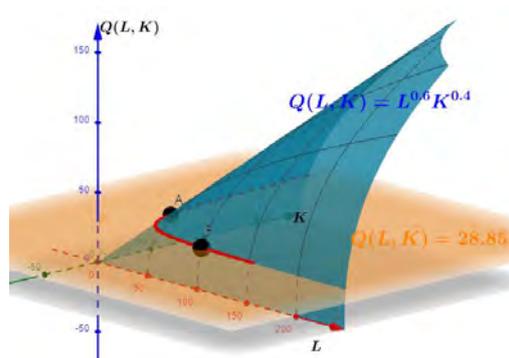


Figura 21. Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 1

$$Q(20, 50) = 28.85$$

$$Q(100, 2\sqrt{5}) = 28.85$$

Cuando la fuerza laboral es de 20 horas trabajador y el capital de 50 mil soles la producción es de 28.85 unidades.

Cuando la fuerza laboral es de 100 horas trabajador y el capital de  $2\sqrt{5}$  mil soles la producción es de 28.85 unidades.

El estudiante está habituado a trabajar con funciones de una variable, las cuales se representa gráficamente en el plano bidimensional, pero la función producción de esta tarea es una función de varias variables, representada en el plano tridimensional, posee infinitos punto con producción 28.85 (curva de color roja).

Los estudiantes tendrán que utilizar la vista gráfica de 2D y 3D del GeoGebra, en resumen, la **técnica instrumentada** es:

- Realizar la configuración vista gráfica 3D.
- Ajustar la escala de los ejes para que la gráfica se visualice completamente.
- Digitar las reglas de correspondencia de la función producción  $Q(L, K)$  en la vista gráfica adecuándola a tres dimensiones.
- Seleccionar la vista algebraica para determinar el valor numérico de la función producción.
- Realice el cambio de variable de  $(L, K)$  a  $(x, y)$ , para poder trabajar con la vista algebraica del GeoGebra.

En este ítem el estudiante podría de hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir, relativas a las tareas secundarias como la definición de función de varias variables y valor puntual de una función.

En cuanto a los **esquemas de acción instrumentada** están asociados a los esquemas mentales de los estudiantes y estos nos son visibles, pero se pueden evidenciar a partir de las técnicas instrumentadas las cuales son entendidas como el conjunto de gestos o acciones que inscriben a uno o varios artefactos. En este sentido, el esquema de acción instrumentada relativas a las tareas principales podría ser:

- El valor de la función en punto dado en un contexto económico de dos variables en concordancia con las unidades dadas.

Cabe resaltar que una técnica instrumentada puede ser enseñada pero no necesariamente los estudiantes la aprendan de una manera esperada, es decir existe una gran diferencia entre una técnica instrumentada de un principiante en relación con la de un experto dentro de una misma clase donde se mostró la misma técnica instrumentada.

02. Si fijamos el valor de uno de los insumos, el capital en 50 mil soles, el gráfico la función Producción  $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$  puede ser representado en un plano bidimensional. Complete la siguiente tabla y esboce la gráfica de la función  $Q(L)$ .

Figura 22. Actividad con orquestación Instrumental I. Pregunta 2

### Técnica instrumentada esperada.

$L$	$Q(L)$
<b>0</b>	<b>0</b>
<b>1</b>	<b>4.78</b>
<b>4</b>	<b>7.25</b>
<b>8</b>	<b>10.99</b>

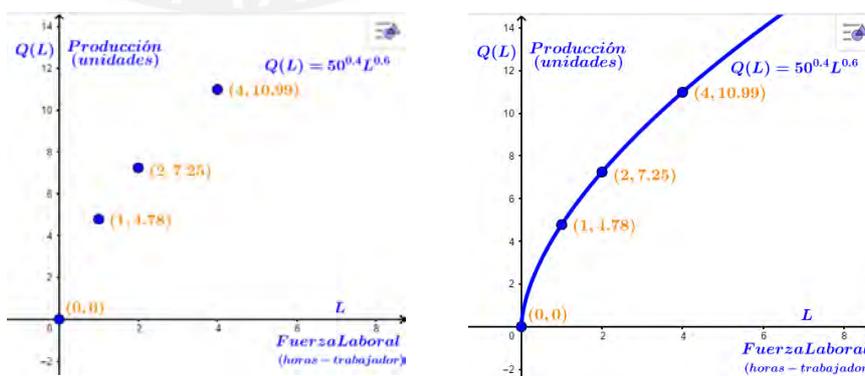


Figura 23. Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 2

Uno de los puntos trascendentes en la formalización matemática de la economía es la creación de modelos matemáticos que representen el comportamiento económico de determinado mercado y usar dicho conocimiento para tomar decisiones con respecto a los factores productivos con la intención de lograr una distribución eficiente de los mismos. En consecuencia, para realizar un análisis de dicho modelo matemático es importante evolucionar los conceptos económicos de lo discreto a lo continuo, en tal sentido el estudiante podría considerar, con justa razón, que el gráfico de la función producción propuesta para esta tarea es discreto o continuo.

La **técnica instrumentada** que se pueden presentar en el desarrollo de este ítem es:

- Realizar la configuración vista grafica a 2D.
- Realizar el cambio de variable de  $L$  a  $x$ , para poder trabajar con la vista algebraica del GeoGebra.
- Digitar la regla de correspondencia de la función producción a corto plazo  $Q(L)$  en la vista gráfica adecuándola a dos dimensiones.
- Ajustar la escala de los ejes para que la gráfica se visualice completamente.
- Seleccionar la vista algebraica para determinar el valor numérico de la función producción  $Q(L)$  en los valores que se requieran para completar la actividad.
- Trazar la curva de la función producción  $Q(L)$  a partir de los puntos calculados asumiendo continuidad y crecimiento.

En este ítem el estudiante podría de hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir, relativas a las tareas secundarias como la definición de función de varias variables y valor puntual de una función.

Los **esquemas de acción instrumentada** relativas a las tareas principales los cuales podrían ser:

- El valor de la función producción como la cantidad producida por cada trabajador que interviene en el proceso productivo.
- A medida que se contratan más trabajadores la cantidad total producida aumenta según en la representación gráfica de la función.

03. Si fijamos el valor de uno de los insumos de la función Producción  $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$ , por ejemplo, el capital ( $K=50$ ), el gráfico puede ser representado en un plano bidimensional. Complete la siguiente tabla y esboce la gráfica de la función  $PMe(L)$ .

Figura 24. Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 3.

**Técnicas instrumentadas esperadas.**

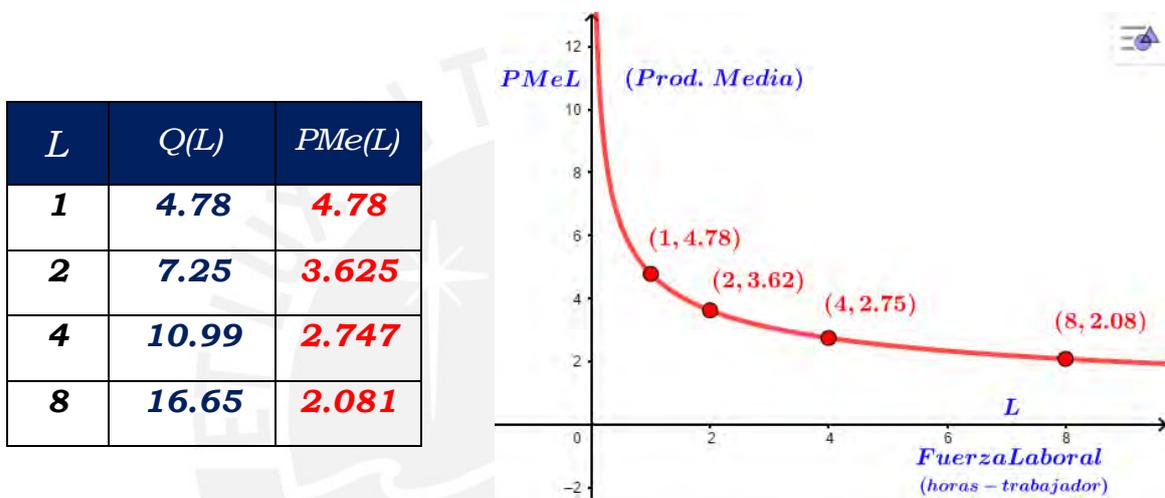


Figura 25. Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 3.

La **técnica instrumentada** que se pueden presentar en el desarrollo de este ítem es:

- Ajustar la escala de los ejes para que la gráfica se visualice completamente.
- Realizar el cambio de variable de  $L$  a  $x$ , para poder trabajar con la vista algebraica del GeoGebra.
- Determinar la regla de correspondencia de la función producto medio a corto plazo.
- Digitar la regla de correspondencia de la función producto medio a corto plazo  $PMe(L)$  en la vista gráfica adecuándola a dos dimensiones.
- Seleccionar la vista algebraica para determinar el valor numérico de la función producto medio  $PMe(L)$  en los valores que se requieran para completar la actividad y al interpretar dichos valores en el contexto económico.

- Trazar la curva de la función producto medio  $PMe(L)$  a partir de los puntos calculados asumiendo continuidad, decrecimiento además de su forma hiperbólica

En este ítem el estudiante podría hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir, relativas a las tareas secundarias como la función hiperbólica, valor puntual de una función y continuidad de una función.

Los **esquemas de acción instrumentada** relativas a las tareas principales los cuales podrían ser:

- El valor de la función producto medio como la cantidad promedio producida por cada trabajador.
- A medida que se contratan más trabajadores la cantidad producida por cada trabajador disminuye según la representación gráfica de esta función.

04. Si fijamos el valor de uno de los insumos de la función Producción  $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$ , por ejemplo, el capital ( $K = 50$ ) el gráfico puede ser representado en un plano bidimensional. Complete la siguiente tabla y esboce la gráfica de la función  $PMg(L)$ .

Figura 26. Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 4

**Técnica instrumentada esperada.**

$L$	$Q(L)$	$PMg(L)$
<b>1</b>	<b>4.78</b>	<b>4.78</b>
<b>2</b>	<b>7.25</b>	<b>3.625</b>
<b>4</b>	<b>10.99</b>	<b>2.747</b>
<b>8</b>	<b>16.65</b>	<b>2.081</b>

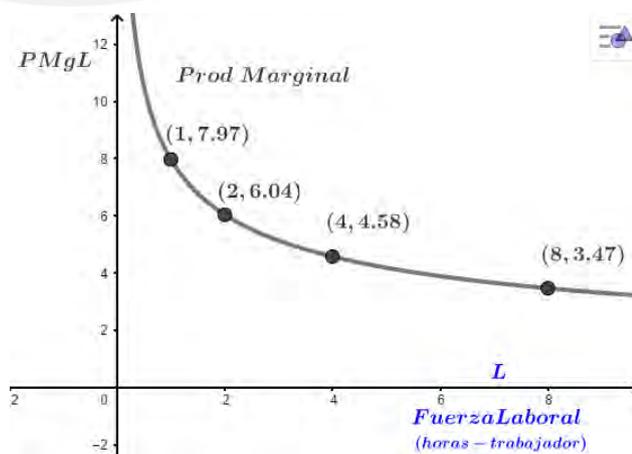


Figura 27. Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 4.

La **técnica instrumentada** que se pueden presentar en el desarrollo de este ítem es:

- Ajustar la escala de los ejes para que la gráfica se visualice completamente.
- Determinar la regla de correspondencia de la función producto marginal a corto plazo a partir de la derivada de la función producción.
- Digitar la regla de correspondencia de la función producto marginal a corto plazo  $PMg(L)$  en la vista gráfica adecuándola a dos dimensiones.
- Seleccionar la vista algebraica para determinar el valor numérico de la función producto medio  $PMg(L)$  en los valores que se requieran para completar la actividad y al interpretar dichos valores en el contexto económico.
- Realizar el cambio de variable de  $L$  a  $x$ , para poder trabajar con la vista algebraica del GeoGebra.
- Trazar la curva de la función producto marginal  $PMg(L)$  a partir de los puntos calculados asumiendo continuidad, decrecimiento además de su forma hiperbólica

En este ítem el estudiante podría hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir relativas a las tareas secundarias como la función hiperbólica, valor puntual de una función, continuidad de una función y reglas de derivación.

Los **esquemas de acción instrumentada** relativas a las tareas principales los cuales podrían ser:

- El valor de la función producto marginal como la cantidad adicional cuando se incrementa un trabajador.
- La monotonía de la función producto marginal y la justifica en base al valor del cambio de dicha función por unidad adicional.
- La función producto marginal mediante el análisis de cambio de valor de la pendiente de la recta tangente en cada punto.

05. Grafique, haciendo uso del GeoGebra, lo siguiente:

Función producción  $Q(L) = 50^{0.4} L^{0.6}$       Función producción marginal (PMgL) y medio (PMeL).

Responda.

a) ¿Por qué la función producto medio es decreciente?

b) ¿Por qué la función producto marginal es decreciente?

Figura 28. Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 5.

**Técnica instrumentada esperada.**

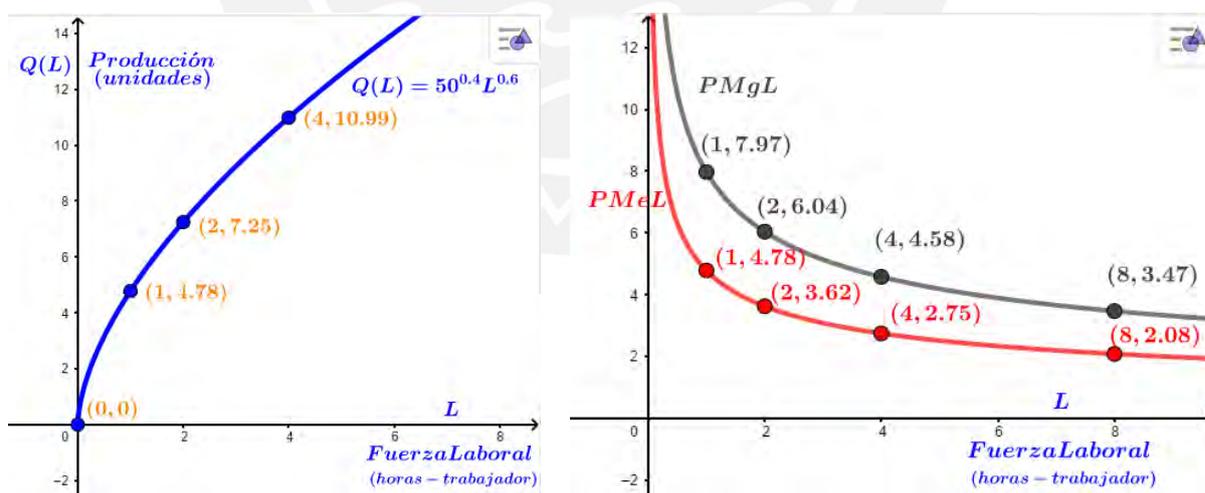


Figura 29. Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Prregunta 5.

a) Consideramos que hay dos formas de justificar este ítem.

Técnica instrumentada 1: A partir de la regla de correspondencia de la función producto medio, en ella se observa la división de un valor constante ( $50^{0.4}$ ) respecto a una variable ( $L^{0.4}$ ) que crece en consecuencia el cociente (producto medio) decrece.

$$PMe^L = \frac{Q(L)}{L} = \frac{50^{0.4} L^{0.6}}{L} = \frac{50^{0.4}}{L^{0.4}}$$

Técnica instrumentada 2: La función producto medio se define cómo la **cantidad promedio** producida por cada trabajador, en tal sentido al observar la función producción y en base a su forma cóncava creciente podemos argumentar que a medida que se incorporan más trabajadores al proceso dicha producción total no varía mucho en comparación de la cantidad de trabajadores lo cual implica que el promedio disminuye ( $PMe^L$  decreciente), tal como se muestra en la figura 30.

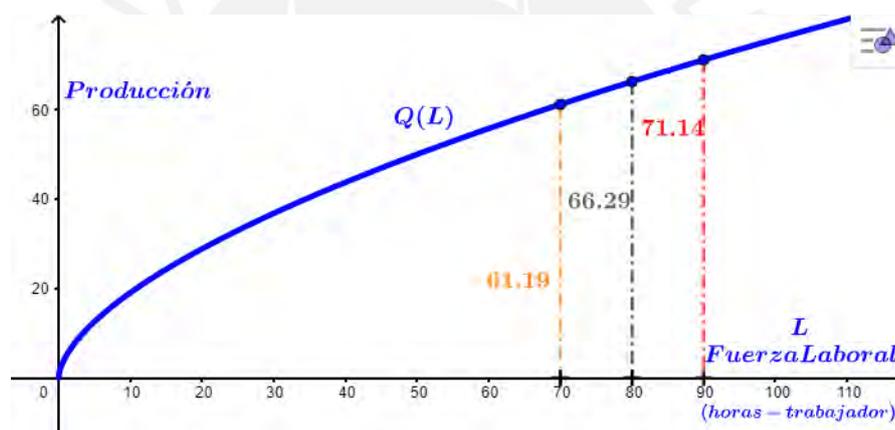


Figura 30. Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 5a.

b) Consideramos que hay dos formas de justificar este ítem.

Técnica instrumentada 1: A partir de la regla de correspondencia de la función producción y usando las reglas de derivación se obtiene la función producto marginal, en ella se observa la división de un valor constante ( $50^{0.4} \cdot 0.6$ ) respecto a una variable ( $L^{0.4}$ ) que crece en consecuencia el cociente (producto marginal) decrece.

$$PMg^L = \frac{dQ(L)}{d(L)} = \frac{d(50^{0.4} L^{0.6})}{d(L)} = \frac{50^{0.4} \cdot 0.6}{L^{0.4}}$$

Técnica instrumentada 2: La función producto marginal se define cómo la **cantidad adicional** producida cuando se incorpora a un trabajador al proceso productivo, en tal sentido al observar la función producción y en base a su forma cóncava creciente podemos argumentar que a medida que se incorporan más trabajadores al proceso dicha producción total no varía mucho en comparación de la cantidad de trabajadores los cual implica que el promedio disminuye, tal como se muestra en la figura 31

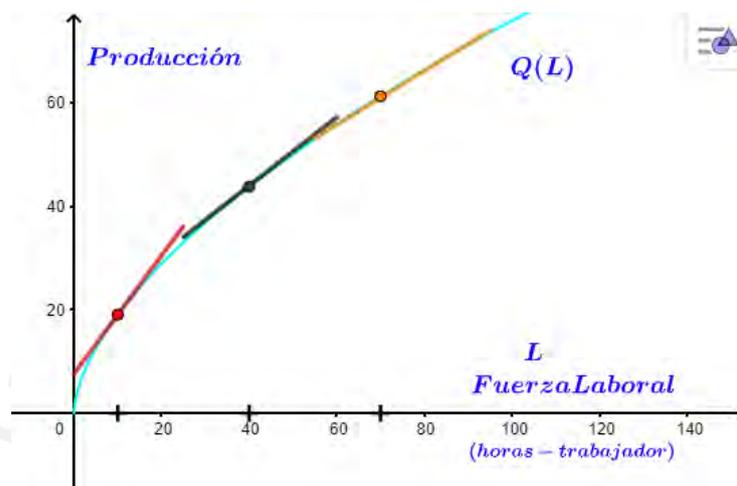


Figura 31. Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental I. Pregunta 5b.

En este ítem el estudiante podría hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir relativas a las tareas secundarias como la función hiperbólica, monotonidad, continuidad de una función y reglas de derivación.

Los **esquemas de acción instrumentada** relativas a las tareas principales los cuales podrían ser:

- El valor de la función producto marginal como la cantidad adicional cuando se incrementa un trabajador.
- La monotonidad de la función producto marginal y medio a partir gráficas de la función producción, mediante el análisis del cambio de dichas funciones al incrementar un trabajador (valores discretos).
- La función producto marginal mediante el análisis de cambio de valor de la pendiente de la recta tangente en cada punto (valores continuos).

## Sherpa y Génesis Instrumental

El estudiante-sherpa (sujeto epistémico) en esta configuración será encargado de socializar sus procedimientos mediante la pantalla compartida de la videoconferencia en la propuesta de educación virtual, cabe señalar que el docente puede designar un estudiante diferente para cada ítem en la actividad orquestada. Esta orquestación promueve el manejo colectivo de los procesos de instrumentación e instrumentalización. La socialización de la resolución de esta actividad orquestada 1 por parte del estudiante-sherpa permitiría observar la construcción de las técnicas instrumentadas por parte del estudiante y cómo las usa para resolver la tarea sobre marginalidad.

El estudiante se apropie del artefacto derivada, en este contexto será el medio, que nos permitirá interpretar las funciones económicas mediante el análisis marginal.

La actividad con orquestación instrumental fue configurada para ser aplicada en la modalidad de educación virtual con mediación del GeoGebra, mientras que interconexión se daría mediante un software de videoconferencia (Zoom, Google meet, etc.), consideramos que los estudiantes podrían alcanzar la Genesis Instrumental del análisis marginal no solo por el uso de herramientas virtuales, sino también por la integración adecuada de los artefactos (configuración didáctica), guía del estudiante sherpa (modo de ejecución), el objeto de conocimiento (análisis marginal) y la tarea (actividad diseñada). Como consecuencia la importancia de la Orquestación Instrumental se basa en articular los instrumentos vistos como un sistema y esa es, indudablemente, la propuesta de la investigación.

En cuanto a la **segunda propuesta didáctica** – Trabajar y saltar- haremos una adaptación dado que el proceso de enseñanza aprendizaje se realizará de manera virtual los estudiantes serán agrupados en parejas mediante la opción de grupos pequeños del software de video conferencias del Zoom y el docente interactúa con cada equipo de trabajo con la intención de monitorear el progreso además de brindar orientación para que se cumpla el objetivo de la tarea asignada. En tal sentido y para esta actividad definiremos “saltar” a la acción que realiza el docente al interactuar con los grupos al realizar su monitoreo del aprendizaje.

- Cada pareja cuenta con una computadora, laptop o Tablet con acceso a internet donde pueda manipular el applet del GeoGebra.
- Cada pareja tiene descarga a la actividad 2 (propuesta de secuencia didáctica) y uno de ellos hace uso de la pantalla compartida del grupo pequeño del Zoom socializando su solución a su compañero.
- Los estudiantes permutan los roles para que ambos socialicen sus respectivas soluciones de la tarea encomendada y de esta manera compararlas.
- El profesor ingresa a cada grupo con el fin de supervisar el trabajo y dar indicaciones.



## Actividad con Orquestación Instrumental II

01. Los datos de la siguiente tabla representan la producción de cierta empresa a corto plazo, donde  $K$  representa el número de máquina y  $L$  representa la cantidad de trabajadores en unidades.

Producción ( $Q$ ) (unidades)	Número de trabajadores. ( $L$ )	Número de máquinas. ( $K$ )
0	0	3
100	1	3
300	2	3
600	3	3
800	4	3
900	5	3
966	6	3
966	7	3
880	8	3

- Represente los datos de la tabla, de la función producción a corto plazo, en un plano bidimensional haciendo uso la vista gráfica del GeoGebra, luego interprete el valor de  $Q(2)$ .
- Calcule los valores del producto marginal para cada nivel de producción a corto plazo  $Q(L)$ , luego esboce la gráfica en otra vista gráfica del GeoGebra a partir de los puntos del ítem anterior y explique la relación entre la función producción y la producción marginal.
- Determine el (los) intervalos donde al incrementar un trabajador en el proceso productivo (función producción) provoque que el rendimiento sea menor a medida que se aumentan trabajadores.
- Determine los valores donde la función producción y la función producción marginal son máxima posteriormente interprete los resultados

Figura 32: Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 1

## Técnica instrumentada esperada.

a)

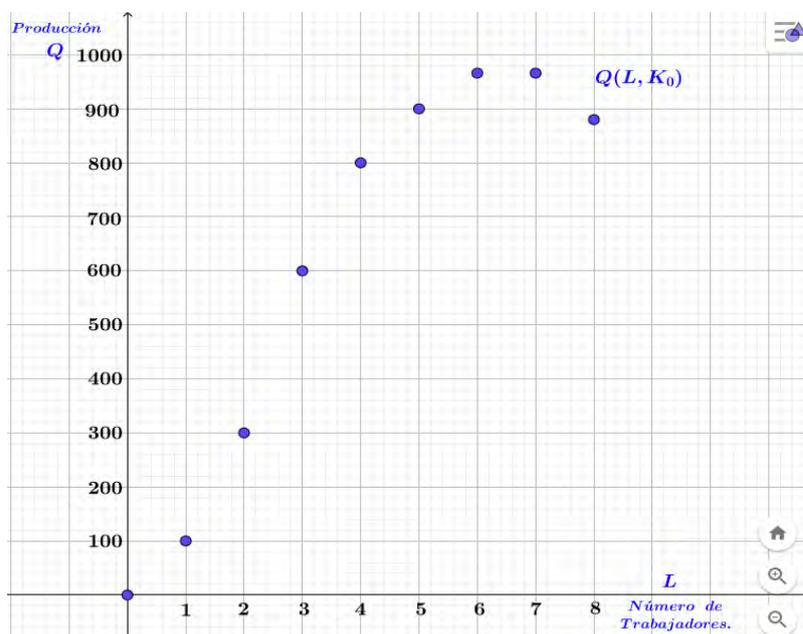


Figura 33: Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 1a.

$Q(2) = 300$  implica que, a corto plazo (tres máquinas), cuando se contratan dos trabajadores la producción será de 300 unidades

En este ítem el estudiante podría hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir, relativas a las tareas secundarias como par ordenado y noción gráfica de función.

Los **esquemas de acción instrumentada** relativos a las tareas principales el cual podrían ser:

- La tabla de valores como una relación de dependencia entre el número de trabajadores y la producción, exclusiva, sin la intervención del capital (corto plazo)

b)

$PMg = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$	-	$\frac{100-0}{1-0}$ 100	$\frac{300-100}{2-1}$ 200	$\frac{600-300}{3-2}$ 300	$\frac{800-600}{4-3}$ 200	$\frac{900-800}{5-4}$ 100	$\frac{966-900}{6-5}$ 66	$\frac{966-966}{7-6}$ 0	$\frac{880-966}{8-7}$ -86	
L		0	1	2	3	4	5	6	7	8

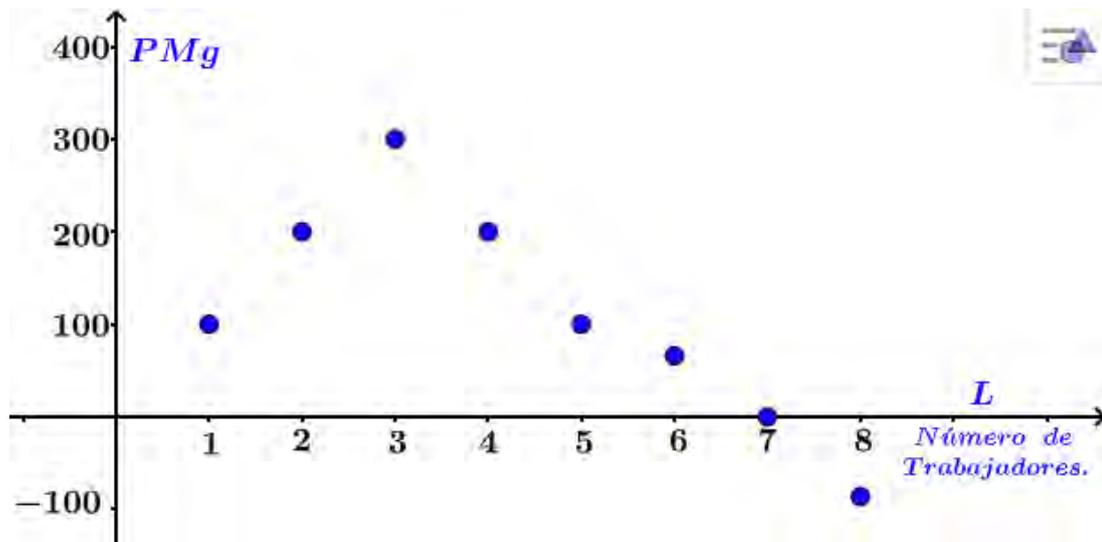


Figura 34. Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 1b.

En este ítem el estudiante podría hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir relativas a las tareas secundarias como par ordenado, noción gráfica de función y función marginal para valores discretos.

Los **esquemas de acción instrumentada** relativas a las tareas principales el cual podrían ser:

- El valor de la función producto marginal como la cantidad adicional cuando se incrementa un trabajador.

c) La respuesta a este ítem puede ser justificado de tres técnicas diferentes por parte de la pareja de estudiantes:

Técnica instrumentada 1: A partir de la gráfica de la producción podemos observar que cuando los trabajadores aumentan de 3 a 4 la producción aumenta en 200 unidades, cuando lo hacen de 4 a 5 la producción aumenta en 100 unidades mientras que cuando aumenta de 5 a 6 la producción aumenta en 66 unidades.

Técnica instrumentada 2: A partir de la tabla elaborada en el ítem b) donde bastará con que el estudiante compare dichos valores.

Técnica instrumentada 3: A partir de la gráfica del producto marginal donde el estudiante tendrá que enfocarse en el tamaño de la ordenada en cada punto.

A partir del tercer trabajador, al incorporar un trabajador al proceso productivo el rendimiento es cada vez menor.

Este ítem tiene como finalidad conocer cuál de los tipos de solución la pareja de estudiantes pondera puesto que eso evidenciaría emergencia de diferentes tipos de esquemas de acción instrumentada, aunque esta investigación se inclina por favorecer los esquemas donde movilicen la noción gráfica de marginalidad dado que es la preponderante en los estudiantes de economía en sus cursos de carrera.

En este ítem el estudiante podría hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir relativas a las tareas secundarias como par ordenado, noción gráfica de función y función marginal para valores discretos.

Los **esquemas de acción instrumentada** relativas a las tareas principales los cuales podrían ser:

- El valor de la función producto marginal como la cantidad adicional cuando se incrementa un trabajador.
  - El valor de la función producto marginal a partir del análisis del cambio en la gráfica de la función producción.
- d) En base a los gráficos de los ítems a) y b), la pareja de estudiantes observaría que la función producción alcanza su máximo valor cuando se contratan seis trabajadores lo cual representa que para dicha cantidad de trabajadores se obtendrá el mayor número unidades de producción mientras que la producción marginal alcanza su máximo valor cuando la fuerza laboral es de tres unidades lo cual implica que para dicha cantidad de trabajadores se obtendrá el mayor incremento por trabajador adicional.

La **Técnica instrumentada** que se pueden presentar en el desarrollo de este ítem es:

- Ajustar la escala del GeoGebra de la vista gráfica para que visualice la función completamente.
- Determinar función producto marginal a corto plazo para valores discretos haciendo uso de la definición.
- Digitar en la vista gráfica, los puntos calculados en el ítem b), de la función producto marginal a corto plazo  $PMg(L)$  en la vista gráfica en dos dimensiones.
- Realizar el cambio de variable de  $L$  a  $x$ , para poder trabajar con la vista algebraica del GeoGebra.

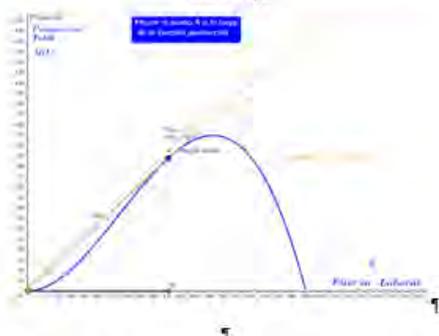
- Trazar la curva de la función producto marginal  $PMg(L)$  a partir de los puntos calculados asumiendo continuidad y monotonicidad.

En este ítem el estudiante podría hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir relativas a las tareas secundarias como extremos relativos de una función.

Los **esquemas de acción instrumentada** relativas a las tareas principales los cuales podrían ser:

- El valor de la función producto marginal como la cantidad adicional cuando se incrementa un trabajador.
- La monotonicidad de la función producto marginal a partir del análisis del cambio en la gráfica de la función producción cuando se incrementar un trabajador (valores discretos).
- La función producto marginal mediante el análisis de cambio de valor de la pendiente de la recta tangente en cada punto (valores continuos).
- La relación que existe entre la función producción y producto marginal.
- Los puntos donde las funciones alcanzan sus valores óptimos en un contexto económico.
- Intervalos con características específicas como por ejemplo los intervalos de rendimiento decrecientes basados en el análisis marginal.

02. A partir de la gráfica típica de la función Producción a corto plazo  $Q(L)$  y haciendo uso del deslizador del GeoGebra, responda las siguientes preguntas: (use el enlace <https://www.geogebra.org/classic/hvppnnum> para realizar la actividad)



a) Interprete el valor de la pendiente de la recta tangente en el contexto de dado e identifique la función económica que representa. Justifique.

b) ¿Qué función económica representa  $\frac{\Delta M}{\Delta M}$ ? Justifique y luego interprete su significado económico.

c) A partir de la información proporcionada esboce la gráfica de las funciones  $PMg^L$  y  $PMe^L$ .

d) ¿Cuántos trabajadores son razonable contratar de tal manera que se usen de forma eficiente los factores de producción? Justifique. (use el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/classic/yuxaabnp> para responder este ítem)

Figura 35. Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 2.

### Técnica instrumentada esperada.

Al acceder al enlace del GeoGebra, la pareja de estudiantes encontrará la gráfica de la función producción a corto plazo típica, una recta tangente a dicha curva. El applet del GeoGebra está configurado de tal manera que al desplazar el punto de tangencia mediante el deslizador se generen las curvas de la producción media ( $PMe^L$ ) y producción marginal ( $PMg^L$ ). Además, el applet cuenta con casillas dinámicas que muestran los valores de  $PMe^L$  y  $PMg^L$  a medida que se mueve el punto de tangencia lo cual permite que el estudiante observe el valor puntual de las funciones en forma dinámica y así por anticipar la forma de la gráfica que se van construyendo evidenciado la noción de marginalidad, tal como se muestra en la figura 25.

- a) La pendiente de la recta tangente a la curva de la función producción representa a la derivada en dicho punto, es decir el cambio en la producción por unidad adicional de fuerza laboral, lo cual coincide con la definición de producto marginal.

En este ítem el estudiante podría hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir, relativas a las tareas secundarias como recta tangente a una función y su pendiente.

Los **esquemas de acción instrumentada** relativas a las tareas principales los cuales podrían ser:

- La derivada de la función producción (producto marginal a corto plazo) con la pendiente de la recta tangente en dicho punto.
- La relación que existe entre la función producción y producto marginal a corto plazo.

- b) La pareja de estudiantes usa el applet del Geogebra y a partir del punto  $A$  que tiene coordenadas  $(L, f(L))$  infieren que el segmento  $AM$  representa la ordenada del

punto  $A$  y  $OM$  la abscisa. Por lo tanto  $\frac{AM}{OM}$  es equivalente a  $\frac{f(L)}{L}$  siendo este

cociente la definición de producto medio a corto plazo.

En este ítem el estudiante podría hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir, relativas a las tareas secundarias como recta secante a una función y su pendiente.

Los **esquemas de acción instrumentada** relativas a las tareas principales los cuales podrían ser:

- La función producto medio a corto plazo con la pendiente de la recta secante en dicho punto.
- La relación que existe entre la función producción y producto medio a corto plazo.

c) Haciendo uso del deslizador y con la ayuda del applet el cual muestra el valor de las funciones  $PMg^L$  y  $PMe^L$  en cada punto de la curva la pareja de estudiantes podrá construir un esbozo de las gráficas requeridas.

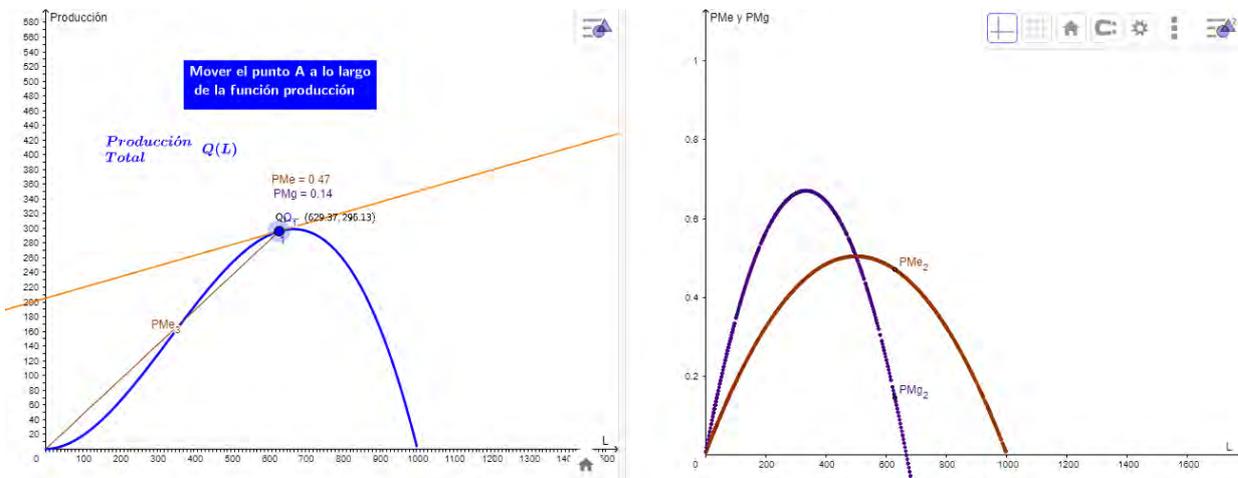


Figura 36. Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 2b.

La pareja de estudiantes tendrá que tomar una decisión sobre si trabaja con valores discretos o continuos para realizar el esbozo requerido. Lo óptimo sería que trabaje con ciertos valores discretos trascendentes para completar la tarea, como por ejemplo los puntos donde las funciones marginal y media son máximas o mínimas o donde los crecimientos son más pronunciados, etc.

En este ítem el estudiante podría hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir, relativas a las tareas secundarias como nociones de función.

Los **esquemas de acción instrumentada** relativas a las tareas principales los cuales podrían ser:

- La producción marginal ( $PMg^L$ ) es una función que representa una tasa de cambio de la producción respecto a la fuerza laboral) a partir de las gráficas de la función.

- La producción media ( $PM_e^L$ ) es una función que representa el promedio por trabajador a partir de la gráfica de la función.

d) El análisis marginal de la función producción pone en manifiesto que cuando se contraten 330 trabajadores el producto marginal es el mayor puesto que para valores superiores los rendimientos son decrecientes, es decir la producción adicional disminuye por cada trabajador que se agrega. Es muy probable que algunas parejas de estudiantes, al observarlas características gráficas de la función producción, consideren que el punto máximo solicitado en este ítem sea cuando la cantidad de trabajadores es de 668, puesto que para dicho punto la producción será máxima, pero no se están usando de manera eficiente los factores productivos.

En este ítem el estudiante podría hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir, relativas a las tareas secundarias como nociones de función y variación de una función. Los **esquemas de acción instrumentada** relativas a las tareas principales los cuales podrían ser:

- Los tramos donde las funciones  $PM_g^L$  es crecientes o decrecientes a partir de la gráfica de la función producción.
- El producto marginal ( $PM_g^L$ ) es una función que representa una tasa de cambio de la producción respecto a la fuerza laboral) a partir de la gráfica de la función producción.
- El punto óptimo que permite aprovechar eficientemente los factores de producción mediante el análisis marginal.
- El significado y relación económica en cada punto para cada función  $PM_g^L$  y  $Q$ .

03. Responda las siguientes preguntas argumentando de forma clara y concisa en base al análisis marginal de funciones económicas.

a) Nadia tiene una peluquería donde su función de producción es típica y solo depende de dos factores de producción, capital ( $K$ ) representado por el local alquilado y Trabajo ( $L$ ) representado por el número de trabajadores. En una reunión trabajo, Nadia le cuenta a su contador lo siguiente:

*“No me puedo quejar, el negocio va bien. Tengo un contrato de alquiler del local que por ahora no me permite cambiar de ubicación a uno más grande. Sin embargo, para mi es claro que, para utilizar bien este local, debo contratar tanta cantidad de trabajadores hasta que la producción del último trabajador contratado sea lo mayor posible. Eso me asegura que no contrataré trabajadores que aporten al producto total menos que lo que aporta el trabajador anterior. De esta manera me aseguro de utilizar más eficazmente mis factores de producción porque la producción promedio por trabajador siempre será creciente. Y esto es lo que estoy haciendo”.*

*Respuesta.*

Figura 37. Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 3

#### **Técnica instrumentada esperada.**

a) Las parejas de estudiantes deben inferir que dado que no se puede cambiar el alquiler del local (Capital), estamos en un análisis a corto plazo. Nadia está contratando trabajadores hasta el punto máximo de su  $PMg^L$  (Producto marginal respecto a la fuerza laboral), es decir, se encuentra en una posición en que agregar un trabajador provoca que el rendimiento de la producción sea menor a medida que se aumentan trabajadores.

En este ítem el estudiante podría hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir, relativas a las tareas secundarias como nociones de función y función producción marginal típica a corto plazo.

Los **esquemas de acción** relativos a las tareas principales el cual podrían ser:

- El producto marginal ( $PMg^L$ ) es una función que representa una tasa de cambio de la producción respecto a la fuerza laboral).

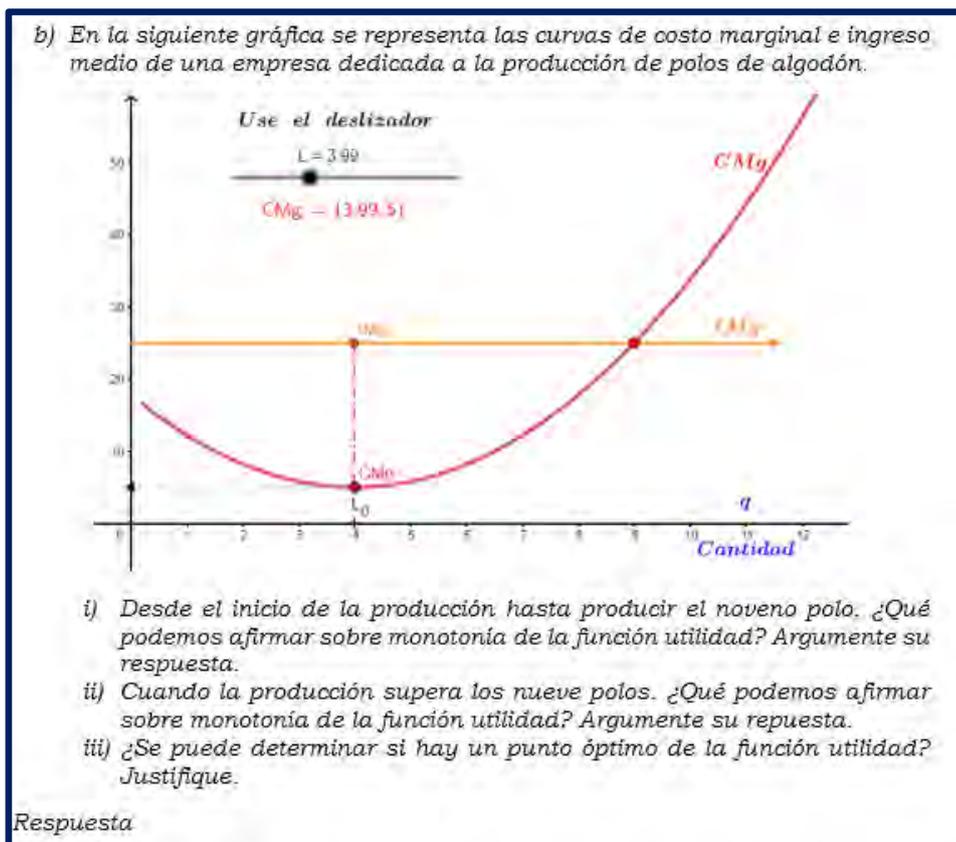


Figura 38. Técnica instrumentada esperada para Actividad con Orquestación Instrumental II. Pregunta 3b.

- b) Las parejas de estudiantes observarían que el ingreso marginal es constante durante todo el proceso productivo pero el costo marginal es cambiante.
- i) Para niveles de producción ( $q$ ) menores a nueve polos se cumple que el ingreso marginal excede costo marginal, esto significa en términos del análisis marginal que el ingreso extra por vender una unidad más excede al costo extra de producir dicha unidad en consecuencia la empresa obtiene utilidad sobre dicha unidad marginal; por lo tanto, la utilidad crece.

$$\forall q \in [0, 9], [IMg > CMg]$$

$$\forall q \in [0, 9], [IMg - CMg > 0]$$

$$\forall q \in [0, 9], [UMg > 0] \rightarrow \forall q \in [0, 9], U(q) \text{ es creciente}$$

- ii) Para niveles de producción ( $q$ ) mayores a nueve polos se cumple que el costo marginal excede ingreso marginal, esto significa en términos del análisis

marginal que el costo extra por producir una unidad más excede al ingreso extra de vender dicha unidad en consecuencia la empresa obtiene pérdidas sobre dicha unidad marginal; por lo tanto, la utilidad decrece.

$$\forall q \in [0,9], [IMg > CMg]$$

$$\forall q \in [0,9], [IMg - CMg > 0]$$

$$\forall q \in [0,9], [UMg > 0] \rightarrow \forall q \in [0,9], U(q) \text{ es creciente}$$

- iii) Una manera de justificar que hay un máximo valor de la función utilidad es que a partir de los ítems anteriores y en base al criterio de la primera derivada, la cual sustenta que si para valores menores a  $x_0$  la función es creciente mientras que para valores mayores a  $x_0$  la función es decreciente entonces  $x_0$  es un valor que maximiza la función. En consecuencia, para maximizar la utilidad se tendrán que producir nueve polos.

En este ítem el estudiante podría hacer uso de diferentes **esquemas de uso**, es decir, relativas a las tareas secundarias como nociones de función y la relación que existe entre el signo de la derivada y su monotonicidad.

Los **esquemas de acción instrumentada** relativas a las tareas principales los cuales podrían ser:

- Los tramos donde las funciones  $CMg$  y  $IMg$  son crecientes o decrecientes a partir sus gráficas.
- El costo marginal ( $CMg$ ) es una función que representa una tasa de cambio del costo respecto a la producción.
- Las variaciones puntuales de las funciones costo e ingreso marginales representa la utilidad en el margen (marginal).
- La marginalidad de la utilidad a partir de las funciones ingreso y costo.
- El máximo valor a partir de la monotonicidad de la función utilidad (criterio de la primera derivada)

## CONCLUSIONES

El docente debe de tener cierto grado de conocimientos sobre herramientas tecnológicas que pueda incluir en la propuesta didáctica con virtualización sin descuidar la configuración de estos, en virtud de lograr los objetivos deseados.

Es importante tener en cuenta las potencialidades y restricciones que poseen los artefactos al incluirlos en una propuesta didáctica puesto que una disposición adecuada podría favorecer y enriquecer los objetivos planteados.

La propuesta didáctica implementada en esta investigación aporta una nueva manera de cómo abordar la enseñanza del análisis marginal en estudiantes de economía, dada la coyuntura actual de distanciamiento social por la Covid-19, donde se requieren nuevas estrategias de enseñanza con la incorporación de la virtualización.

La propuesta didáctica pretende promover la comprensión del mercado mediante el análisis marginal, siendo esta una herramienta muy útil en la toma de decisiones en la vida profesional de los egresados de la carrera de economía es por tal motivo un aspecto clave para nuestra investigación es la interpretación gráfica de la derivada pues es ella quien nos permitirá alcanzar los objetivos de la investigación.

La Actividad Exploratoria debería permitir identificar quienes tienen nociones básicas de derivada o quienes están en proceso de apropiación. Ambos son importantes para la investigación puesto que los que ya están apropiados serán fuente de información de emergencia de técnicas instrumentadas lo que evidenciaría génesis instrumental mientras los que están en proceso de apropiación será fuente de información para Génesis Colectiva Instrumentada, es decir, que mediante la socialización de las técnicas por parte del estudiante sherpa, el trabajo en parejas o incluso cuando al finalizar las actividades el docente investigador comparte sus técnicas promueven que todo el grupo alcance la Genesis Instrumental.

La actividad con Orquestación Instrumental I, cuyo modo de ejecución está basado en el **estudiante-sherpa** sobre quien recae el proceso de educación virtual debería ser elegido con anticipación en base a los resultados de la actividad exploratoria dado que serán sesiones en diferentes días. También consideramos que el **estudiante-sherpa** debe tener ciertas características como habilidad comunicativa y ordenado al plasmar sus procedimientos dado que sus técnicas serán socializadas a toda la clase. La

atención del investigador debe estar puesta tanto en el **estudiante-sherpa** como en los demás estudiantes puesto que la instrumentación no solo se puede dar en él, sino también mediante la participación del resto de estudiantes. Permite que los estudiantes tengan la oportunidad de reaccionar, interactuar y por ende realizar aportes, si bien es cierto que el docente es quien gestiona la orquestación, pero la actividad se circunscribe en el estudiante. En cuanto a esta actividad hemos propuesto posibles esquemas de usos y de acción instrumentada que debería emerger al desarrollar la actividad, así como posibles técnicas instrumentales que nos llevarían a concluir que si el estudiante-sherpa fue capaz de desarrollar las preguntas relacionadas al análisis marginal alcanzarían la génesis instrumental por cuanto debería ser observable la emergencia de técnicas instrumentadas en él, tal como lo señala Trouche (2005). Esta orquestación tiene también un alcance colectivo, dados que los rastros o gestos (técnicas instrumentadas), por parte del sujeto epistémico, son observables por todos los participantes revelando los procesos de instrumentación e instrumentación. En cuanto al rol que cumple el docente en esta modalidad, su presencia se siente a lo largo de toda la actividad, supervisando al **estudiante-sherpa** y en constante interacción con él.

La actividad con Orquestación Instrumental II, cuyo modo de ejecución denominado **trabajar y saltar** implica formar parejas de estudiantes que estarán interconectados por el software de videollamadas del Zoom, pero en una sala privada donde ambos tendrán las opciones de compartir pantalla para intercambiar opiniones sobre la tarea propuesta. Es recomendable en aras de dar las mejores condiciones para que esté modo de ejecución cumpla con los objetivos, el docente investigador elija las parejas de estudiantes en función de la actividad exploratoria garantizando una mayor probabilidad a la génesis colectiva instrumentada. En cuanto a esta actividad hemos propuesto posibles esquemas de usos y de acción instrumentada que debería emerger al desarrollar la actividad, que se evidenciarían, por ejemplo, cuando las parejas de estudiantes fueron capaces de analizar y comprender el cambio de una función en margen (análisis marginal), cuando anticipan la forma de la función derivada ( $f'$ ) a partir de la función ( $f$ ) y viceversa o al usar la marginalidad para determinar el valor óptimo con eficiencia de los factores productivos. Esta orquestación también tiene un fuerte alcance colectivo, dado que, los rastros o gestos (técnicas instrumentadas) por parte un estudiante será socializado con su respectiva pareja, es decir, serían observables por su compañero revelando los procesos de instrumentación e

instrumentación. En cuanto al rol que cumple el docente en esta modalidad, permite al estudiante cierto grado de libertad para poder dialogar entre los integrantes de cada pareja e intercambiar técnicas, e intervenir para guiar el proceso de educación virtual al incorporarse a las salas de trabajo y monitorear el proceso de aprendizaje.

La investigación plantea tres objetivos específicos para alcanzar el objetivo general:

- Identificar los conocimientos previos que tiene los estudiantes de economía sobre los conceptos de la derivada mediante la actividad exploratoria, en la investigación se ha dejado en claro que en dicha actividad es importante por cuanto proporciona datos al investigador sobre que estudiantes tienen esquemas de uso sobre la derivada y quienes están en proceso de apropiación lo cual es trascendente para elegir al estudiante sherpa en la actividad con orquestación instrumental I pero también para formar los grupos en la actividad con orquestación Instrumental II 2. En consecuencia, damos por cumplido este objetivo.
- Adaptar una configuración didáctica y un modo de ejecución en la propuesta didáctica con educación virtual que favorezcan la interpretación del análisis marginal de funciones económicas, consideramos que dicho objetivo fue cumplido puesto que se elaboró la actividad orquestada 1 con modo de ejecución de **Sherpa en el trabajo** y la actividad orquestada 2 con modo de ejecución **Trabajar y saltar**.
- Proponer posibles esquemas de uso y de acción instrumentadas emergentes por parte de los estudiantes de economía al interpretar funciones económicas mediante el análisis marginal, consideramos que dicho objetivo fue cumplido puesto que a lo largo de las dos tareas en la actividad exploratoria y las dos actividades con Orquestación Instrumental se detallaron en los posibles esquemas de uso y acción instrumentada que podrían emerger.

Por lo expuesto, los tres objetivos específicos de nuestra investigación se lograron concretar mediante elaboración de las actividades con la configuración en educación virtual y con los dos modos de ejecución de la orquestación en busca de generar la Genesis Instrumental que permita a los estudiantes interpretar el análisis marginal en funciones económicas. Dado que los objetivos específicos fueron cumplidos entonces

podemos concluir que los objetivos generales también, lo cual nos permite responder la pregunta de investigación:

*Diseñar una propuesta didáctica basada en la Orquestación Instrumental que permita que los estudiantes de economía puedan interpretar el análisis marginal de funciones económicas.*

La investigación propone dos tipos diferentes de orquestación con modos de ejecución diferentes, en educación virtual, los cuales podrían ser comparados en función de su eficacia en determinar cuál de las propuestas general mayor impacto al promover la Génesis Instrumental en los estudiantes que permita interpretar el análisis marginal en funciones económicas

Nuestra investigación abre camino para que se siga explorando sobre dos aspectos importantes abordados: la educación virtual y la orquestación Instrumental, la pandemia del COVID- 19 nos ha demostrado que se puede enseñanza en forma virtual y que posiblemente esa sea una rama futura de la enseñanza, pero también es importante la articulación de los instrumentos desde la perspectiva de un sistema, con el objetivo de desarrollar la tarea. En tal sentido los próximos trabajos podrían considerar:

- Elaborar secuencias en la modalidad de educación virtual usando otras tipologías de orquestación instrumental que no fueron abordadas en esta investigación.
- Diseñar problemas que favorezcan la Génesis Instrumental mediante software dinámicos como el GeoGebra en otras áreas de la matemática.

## REFERENCIAS

- Alban, C (2017). *Alternativa metodológica para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de resolución de problemas de optimización de los estudiantes de economía de la universidad Laica Eloy Alfaro* (Tesis de maestría). Universidad de Holguín, Cuba. Recuperado de <https://cutt.ly/jb8Uv4R>.
- Artigué, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 1, 97-140.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 213–234. Recuperado de <https://cutt.ly/Lb8UYK0>.
- Drijvers, P. (2012). Teachers Transforming Resources into Orkestrations. In G. Gueudet, B. Pepin, y L. Trouche (Eds.), *From text to “lived” resources; mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 265–281). New York, NY: Springer.
- Fainholc, B. (2016). *La interactividad en la educación a distancia*. Buenos aires.
- Feudel, F. (2016). *Relevant knowledge concerning the derivative concept for students of economics-A normative point of view and students' perspectives*. Hal. Recuperado de <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337944>.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Recuperado de <https://cutt.ly/GgFrddN>
- Jiménez, Á. L. A. (2014). *Análisis del uso del concepto de derivada por estudiantes universitarios en el estudio de conceptos económicos* (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante, España. Recuperado de <https://cutt.ly/ogFrhZi>
- Lara, L. (2002). *Análisis de los recursos interactivos en las aulas*. Ponencia presentada en el segundo congreso virtual: *Integración sin barreras en el siglo XXI*. Argentina.
- Lagrange, J. B. (1999). Techniques and concepts in pre-calculus using CAS: A two-year classroom experiment with the TI-92. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 6(2), 143-65.
- Lial, M., y Hungerford, T. (2000). *Matemáticas para administración y economía*. México, D. F: Pearson Educación.
- Medina, H., Armendáriz, C, y Choez, V. (2017). El cálculo diferencial: aplicación en la microeconomía bancaria (Original). *Revista científica OLIMPIA*, 14(46), 55-69
- Monje, C. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa Guía didáctica*. Recuperado de <https://cutt.ly/4qFrgsA>.

- Manrique, A. (2020). *Una orquestación instrumental con la mediación de la calculadora grafica para movilizar la noción de la función cuadrática en estudiantes de nivel secundario*. (Tesis de maestría), Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de: <https://cutt.ly/3gmr32l>
- Mankiw, N. (2012). *Principios de economía*. 6ta edición. México: CENGAGE learning.
- Mercapide Argüello, G. (2018). *Dificultades de aprendizaje del cálculo y enseñanza de la economía. Los conceptos de función y derivada* (Tesis de Maestría). Universidad de Cantabria, España. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10902/13733>
- Ning, Ding. (2016). " *Rethinking the "Marginal Revolution" in the History of Economic Thought. A Brief Examination of the Marginal Utility Theory before and in the 1870s*" (Tesis de grado). University of Denver.
- Parkin, M. (2009). *Economía*. México: Pearson Educación.
- Ponciano, E. (2016). *Conocimientos de la enseñanza de la derivada usando recursos didácticos tecnológicos. El caso de un profesor* (tesis de maestría). Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México. Recuperado de <https://cutt.ly/Lb8USyj>.
- Peart, S. (1996). " *The economics of W.S. Jevons*". London: Routledge.
- Pérez, J. (1980). El método marginalista antes de AA. *Cuadernos de Economía* 8.23, 473-498.
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y la tecnología. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Bucaramanga, Colombia: Ediciones Universidad de Industrial de Santander.
- Riveros. F. (2019). *Desarrollo del pensamiento matemático en el aprendizaje de la derivada* (Tesis doctoral)), Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Rodríguez, C., Fiallo, J., y Parada, S. E. (2018). Habilidades Cognitivas en los niveles de Razonamiento Covariacional para el estudio de la derivada como razón de cambio. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 3(1), 34-36.
- Rojas, J. (2018). *Representación del sistema conceptual del cálculo, un asunto del profesor de matemáticas en programas de ciencias empresariales*. Tesis de maestría). Bogotá, Colombia recuperado de: <http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/11124>
- Ruiz, P (2016). *Los conceptos matemáticos de función y de derivada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía* (Tesis de maestría). Universidad de Cantabria, España. Recuperado de <https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/8902>
- Salas, S., Hille, E., y Etgen, G. (2002). *Calculus en una y varias variables*. Barcelona: Editorial Reverté, S.A.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista*

*latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2), 267-296.  
Recuperado de <https://cutt.ly/JgFrIrt>

- Şay, R., y Akkoç, H. (2015). *Beyond orchestration: Norm perspective in technology integration*.
- Sierra, M. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. En A. Martínón (ed.): *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos.*, 93-96.
- Tabach, M. (2013). Developing a general framework for instrumental orchestration. Proceedings of the 8th Congress of European Research of Mathematics Education, Antalya, Turkey.
- Tintaya, E. (2003). *Desafíos y fundamentos de educación virtual*. Material de enseñanza. Bolivia: Universidad Mayor San Andrés, Ciencias de la Educación.
- Trouche, L. (2004). Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized. Learning Environments: Guiding Students' Command Process through Instrumental. Orchestration. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.
- Trouche, L. (2005). Construction et conduit des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. *Didactique des mathématiques* v. 25, pp. 91-138.
- Varian, H. (2010). *Un enfoque actual, microeconomía intermedia*. Barcelona: AntoniBosh editor.
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Actgiviti. *European Journal of Psychology of Education*, X(1), 77-101.
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2), 3.
- Walras, León. (2003). *Elementos de Economía Pura*. London: Routledge.

## Anexos

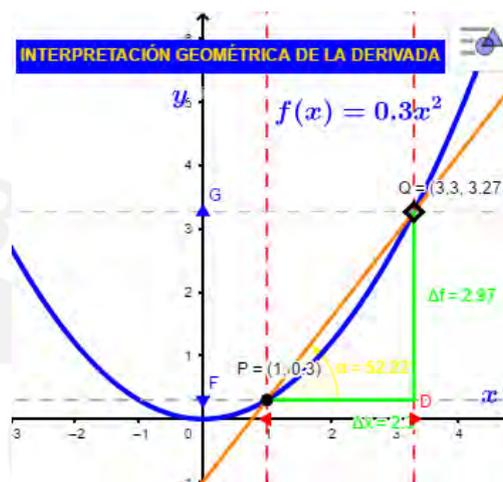
### Actividad Exploratoria

#### Tarea 1

La siguiente figura muestra la gráfica de  $f(x) = 0.3x^2$  y la recta secante que pasa por el punto  $P(1,0.3)$ .

(Use el enlace de GeoGebra como apoyo para realizar los cálculos)

<https://cutt.ly/ghxsrVH>



- a) Complete la siguiente tabla con la información solicitada haciendo uso del deslizador.

$x_1$	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1
$\frac{f(x_1) - f(1)}{x_1 - 1}$					

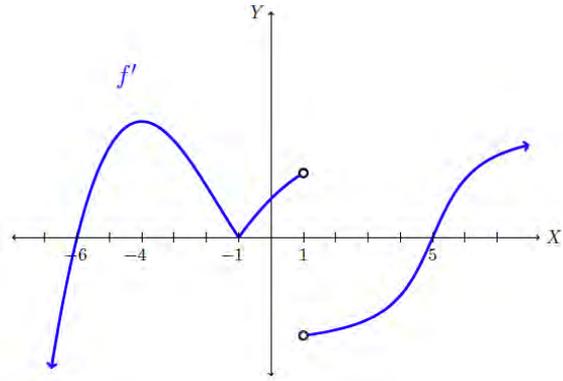
- b) Calcule el siguiente límite. Interprete.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

- c) Determine  $f'(1)$  usando las reglas de derivación y compárelo con el resultado obtenido en el ítem anterior. Comente.

## Tarea 2

Dada la representación gráfica de la derivada  $f'$  de cierta función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Complete:

- a)  $f$  es decreciente en los intervalos : \_\_\_\_\_
- b)  $f$  es creciente en los intervalos : \_\_\_\_\_
- c) Los mínimos locales de  $f$  son : \_\_\_\_\_
- d) Los máximos locales de  $f$  son : \_\_\_\_\_

## Actividad con Orquestación Instrumental I

### Función producción.

Es sabido que las empresas utilizan diferentes factores de producción o insumos con el fin de elaborar productos u ofrecer servicios. En ese sentido la función producción describe la relación de uno o varios insumos con la cantidad producida en un determinado proceso productivo.

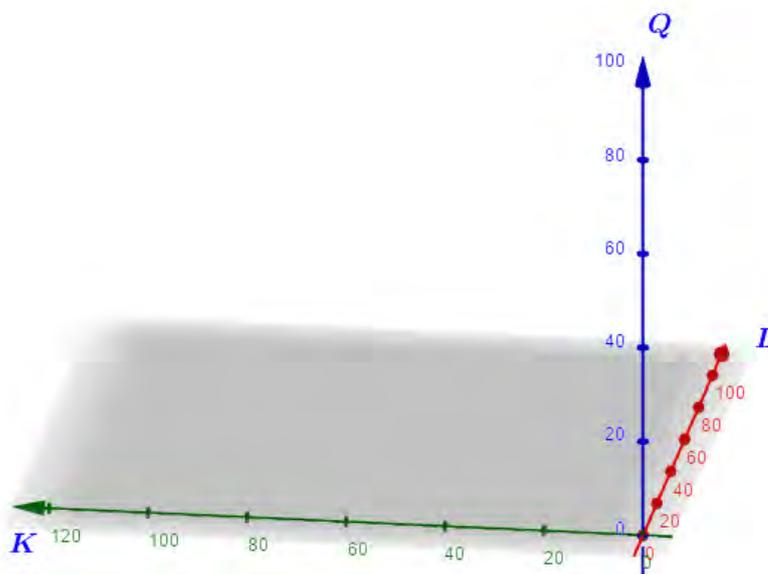
Cuando dicha relación es expresada mediante una función en términos matemáticos, generalmente como un modelo matemático, el cual nos permita analizar situaciones y extraer conclusiones a pesar de ser representado un modelo matemático (teórico).

Donde:

$$Q(L, K) = A \cdot L^\alpha K^\beta$$

- $Q$  : Cantidad total producida.
- $L$  : Cantidad de horas hombre consumidas en la producción.
- $K$  : Cantidad de capital aplicados a la producción.
- $A, \alpha, \beta$  : Constantes positivas producción.

01. Con la ayuda del GeoGebra grafique la función producción  $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$  en unidades, donde  $L$  representa la fuerza laboral medida en horas trabajador y  $K$  representa el capital medido en miles de soles además calcule  $Q(20, 50)$ ,  $Q(100, 2\sqrt{5})$  e interprete dichos resultados.



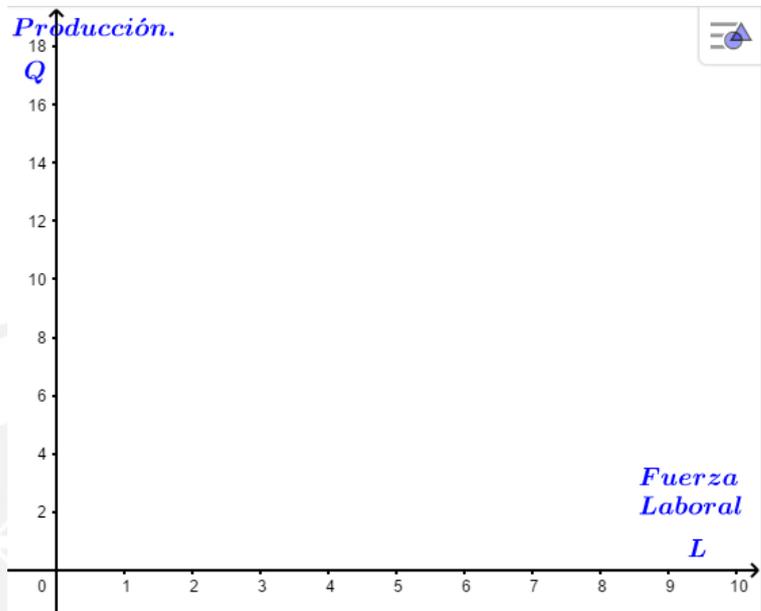
Complete:

$$Q(20, 50) =$$

$$Q(100, 2\sqrt{5}) =$$

02. Si fijamos el valor de uno de los insumos, el capital en 50 mil soles, el gráfico la función Producción  $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$  puede ser representado en un plano bidimensional. Complete la siguiente tabla y esboce la gráfica de la función  $Q(L)$ .

$L$	$Q(L)$
0	
1	
4	
8	



En esta situación en donde uno de los factores de producción se encuentre fijo, se le denomina “corto plazo”. Puesto que, si analizamos dicha función a largo plazo, ambos factores de producción  $(L, K)$  serian considerados variables. Particularmente se considera al trabajo  $(L)$  como variable del corto plazo, mientras que el capital  $(K)$  es solo variable en el largo plazo.

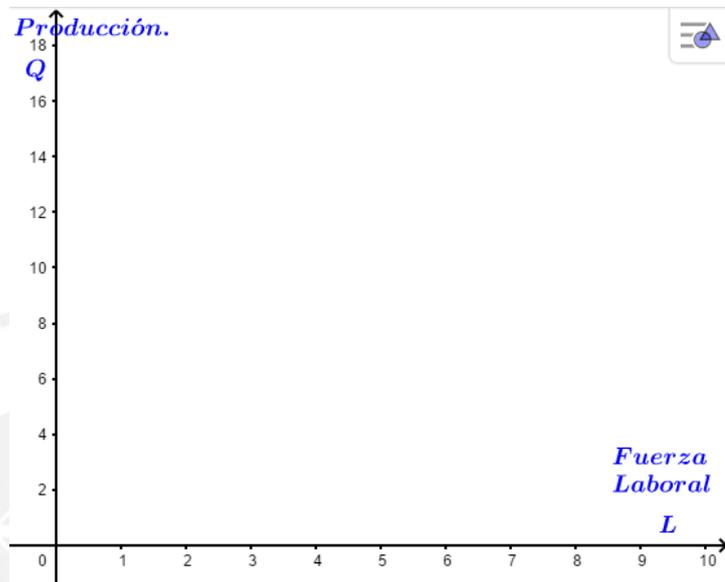
### **Producto Medio.**

El producto medio se define como la cantidad promedio producida, por cada unidad de un determinado factor. Si dicho factor es el trabajo  $(L)$ , dicho producto medio es el promedio producido por cada trabajador, es decir se obtiene al dividir la producción total, por el total de trabajadores.

$$PMe = \frac{\text{Cantidad de bienes producidos}}{\text{Cantidad del factor utilizado}}$$

03. Si fijamos el valor de uno de los insumos de la función Producción  $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$ , por ejemplo, el capital ( $K = 50$ ) el gráfico puede ser representado en un plano bidimensional. Complete la siguiente tabla y esboce la gráfica de la función  $PMe(L)$ .

$L$	$Q(L)$	$PMe(L)$
1		
2		
4		
8		



### Producto Marginal.

Se define cómo el aumento de la producción total, cuando se aumenta la cantidad utilizada de un insumo en una unidad.

Matemáticamente lo podemos definir de dos maneras diferentes.

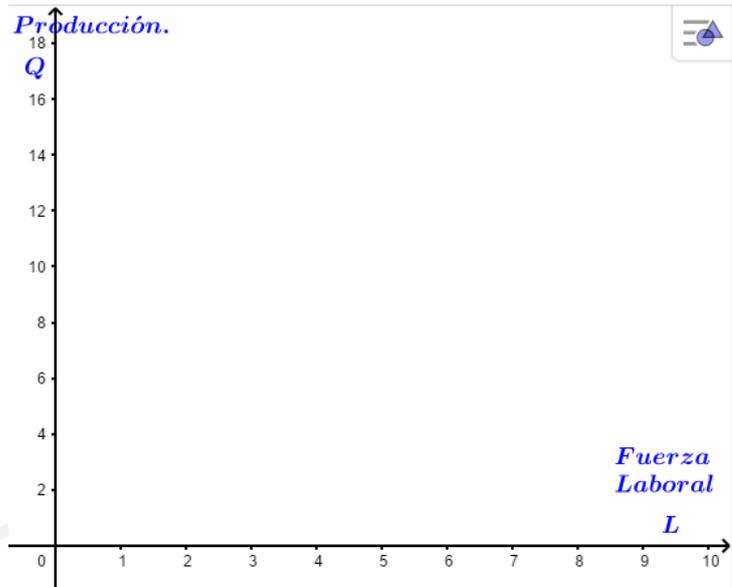
- Cuando el análisis es discreto.
- Cuando el análisis es infinitesimal.

$$PMe(L) = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

$$PMe(L) = \frac{dQ}{dL}$$

04. Si fijamos el valor de uno de los insumos de la función Producción  $Q(L, K) = L^{0.6} K^{0.4}$ , por ejemplo, el capital ( $K = 50$ ) el gráfico puede ser representado en un plano bidimensional. Complete la siguiente tabla y esboce la gráfica de la función  $PMg(L)$ .

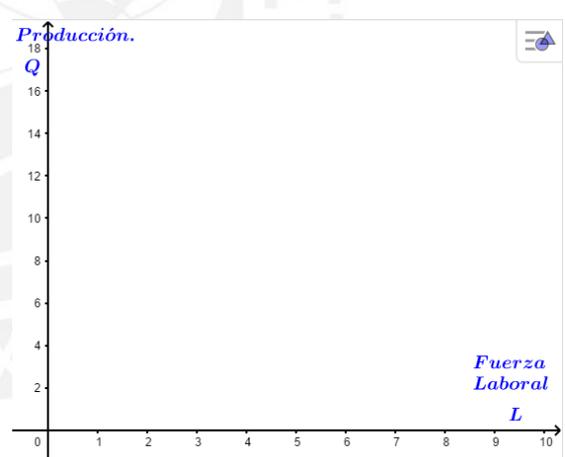
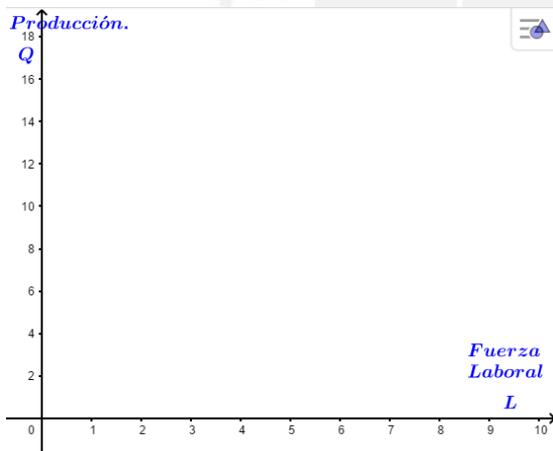
$L$	$Q(L)$	$PMg(L)$
1		
2		
4		
8		



05. Grafique, haciendo uso del GeoGebra, lo siguiente:

Función producción  $Q(L) = 50^{0.4} L^{0.6}$

Función producción marginal (PMgL) y medio (PMeL).



Responda.

- ¿Por qué la función producto medio es decreciente?
- ¿Por qué la función producto marginal es decreciente?

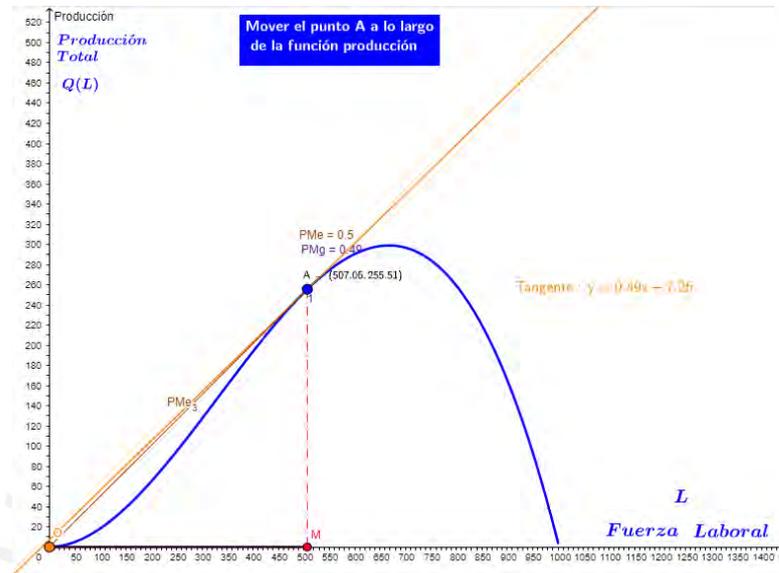
## Actividad con Orquestación Instrumental II

01. Los datos de la siguiente tabla representan la producción de cierta empresa a corto plazo, donde  $K$  representa el número de máquina y  $L$  representa la cantidad de trabajadores en unidades.

Producción ( $Q$ ) (unidades)	Número de trabajadores. ( $L$ )	Número de máquinas. ( $K$ )
0	0	3
100	1	3
300	2	3
600	3	3
800	4	3
900	5	3
966	6	3
966	7	3
880	8	3

- Represente los datos de la tabla, de la función producción a corto plazo, en un plano bidimensional haciendo uso la vista gráfica del GeoGebra, luego interprete el valor de  $Q(2)$ .
- Calcule los valores del producto marginal para cada nivel de producción a corto plazo  $Q(L)$ , luego esboce la gráfica en otra vista gráfica del GeoGebra a partir de los puntos del ítem anterior y explique la relación entre la función producción y la producción marginal.
- Determine el (los) intervalos donde al incrementar un trabajador en el proceso productivo (función producción) provoque que el rendimiento sea menor a medida que se aumentan trabajadores.
- Determine los valores donde la función producción y la función producción marginal son máxima posteriormente interprete los resultados

02. A partir de la gráfica típica de la función Producción a corto plazo  $Q(L)$  y haciendo uso del deslizador del GeoGebra, responda las siguientes preguntas: (use el enlace <https://www.geogebra.org/classic/hvupnum> para realizar la actividad)



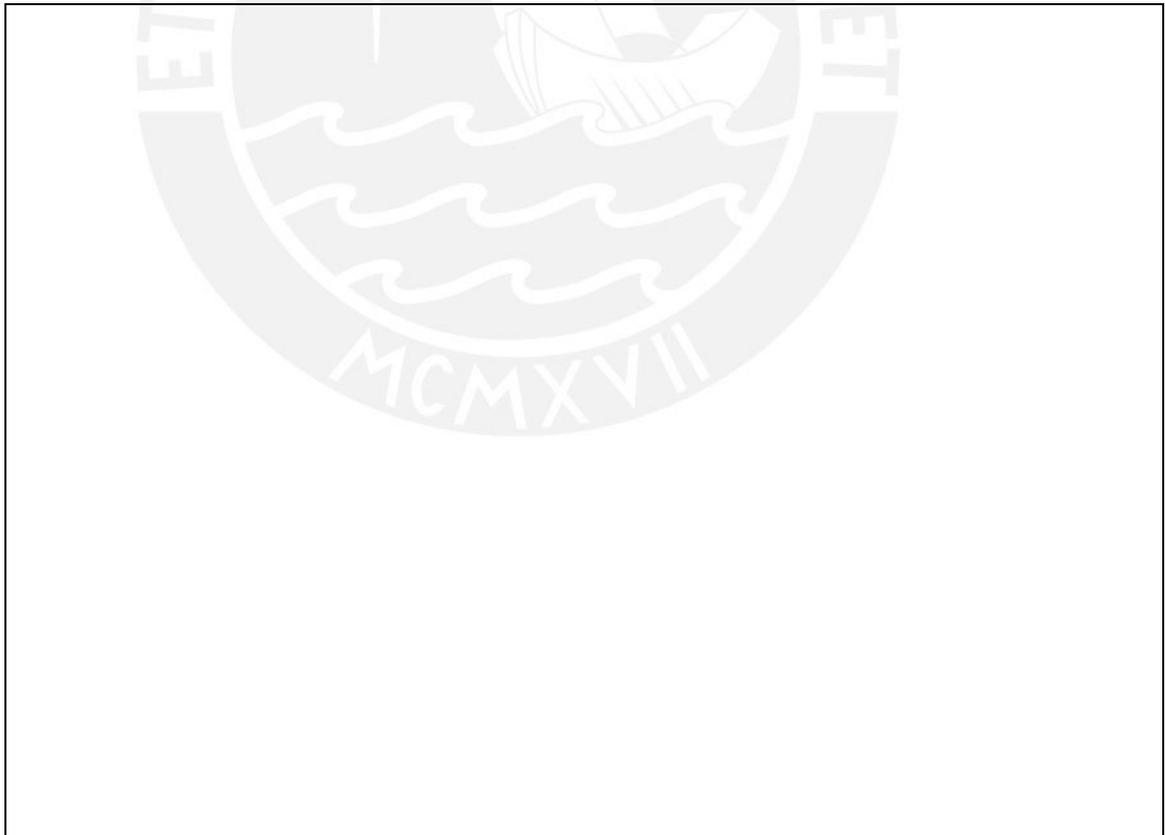
- Interprete el valor de la pendiente de la recta tangente en el contexto de dado e identifique la función económica que representa. Justifique
- ¿Qué función económica representa  $\frac{AM}{OM}$ ? Justifique y luego interprete su significado económico.
- A partir de la información proporcionada esboce la gráfica de las funciones  $PMg^L$  y  $PMe^L$ .
- ¿Cuántos trabajadores son razonable contratar de tal manera que se usen de forma eficiente los factores de producción? Justifique. (use el siguiente enlace <https://www.geogebra.org/classic/ywxaapnp> para responder este ítem)

03. Responda las siguientes preguntas argumentando de forma clara y concisa en base al análisis marginal de funciones económicas.

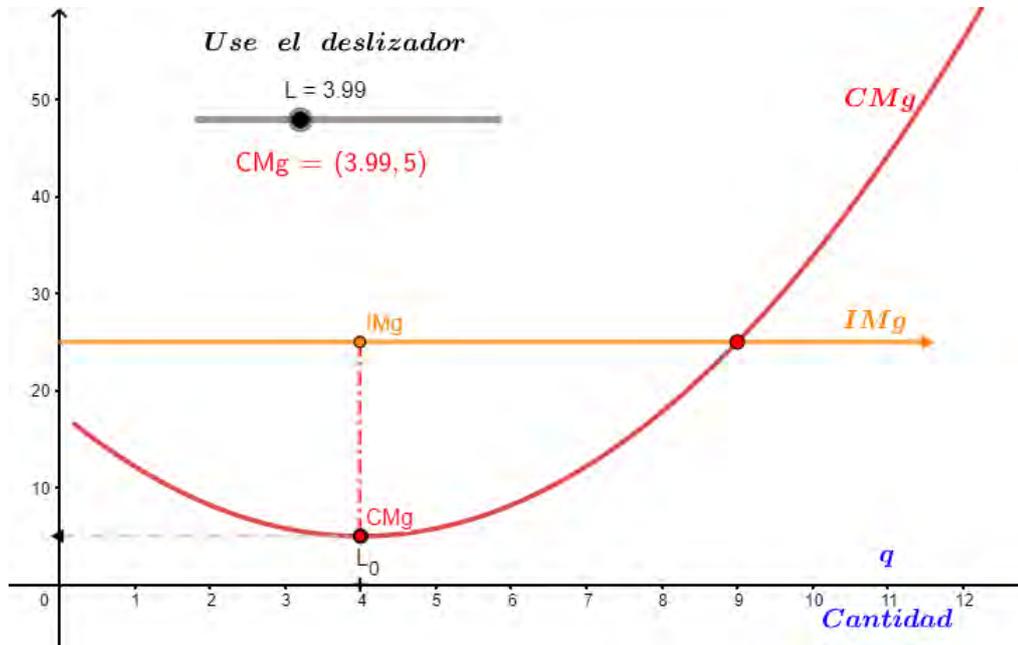
a) Nadia tiene una peluquería donde su función de producción es típica y solo depende de dos factores de producción, capital (K) representado por el local alquilado y Trabajo (L) representado por el número de trabajadores. En una reunión trabajo, Nadia le cuenta a su contador lo siguiente:

*“No me puedo quejar, el negocio va bien. Tengo un contrato de alquiler del local que por ahora no me permite cambiar de ubicación a uno más grande. Sin embargo, para mi es claro que, para utilizar bien este local, debo contratar tanta cantidad de trabajadores hasta que la producción del último trabajador contratado sea lo mayor posible. Eso me asegura que no contrataré trabajadores que aporten al producto total menos que lo que aporta el trabajador anterior. De esta manera me aseguro de utilizar más eficazmente mis factores de producción porque la producción promedio por trabajador siempre será creciente. Y esto es lo que estoy haciendo”.*

Respuesta.



b) En la siguiente gráfica se representa las curvas de costo marginal e ingreso medio de una empresa dedicada a la producción de polos de algodón.



- i) Desde el inicio de la producción hasta producir el noveno polo. ¿Qué podemos afirmar sobre monotonía de la función utilidad? Argumente su respuesta.
- ii) Cuando la producción supera los nueve polos. ¿Qué podemos afirmar sobre monotonía de la función utilidad? Argumente su respuesta.
- iii) ¿Se puede determinar si hay un punto óptimo de la función utilidad? Justifique.

Respuesta