Pontificia Universidad Católica del Perú
Escuela de Posgrado

LA HIPÓTESIS DE RIEMANN COMO PROBLEMA DE ANÁLISIS FUNCIONAL

Tesis para optar el Grado de
Doctor en Matemáticas

ALFREDO SOTELO PEJERREY

Asesor
DR. JULIO CÉSAR ALCÁNTARA BODE

Jurado
DR. CHRISTIAN HOLGER VALQUI HAASE
DR. JOSÉ MANUEL AROCA HERNÁNDEZ
DR. OSWALDO JOSÉ VELÁSQUEZ CASTAÑON
DR. CARLOS ANDRÉS CHIRRE CHÁVEZ

Lima - Perú
Marzo 2021

LA HIPÓTESIS DE RIEMANN COMO PROBLEMA DE ANÁLISIS FUNCIONAL

Alfredo Sotelo Pejerrey

Tesis presentada en la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú para obtener el grado académico de Doctor en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. Julio César Alcántara Bode (Asesor)

Dr. Christian Holger Valqui Haase (Presidente)

Dr. José Manuel Aroca Hernández (Tercer miembro)

Dr. Oswaldo José Velásquez Castañon (Cuarto miembro)

Dr. Carlos Andrés Chirre Chávez (Quinto miembro)

Lima - Perú

Marzo 2021

Resumen

Alfredo Sotelo Pejerrey

Doctorado en Matemática

La Hipótesis de Riemann como problema de Análisis Funcional

J. Alcántara-Bode demuestra en [3] que la Hipótesis de Riemann es verdad si y sólo si el operador integral en $L^2(0,1)$, $(A_\rho f)(\theta) = \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) f(x)dx$ es inyectivo, donde ρ es la función parte fraccionaria. El operador A_ρ es Hilbert-Schmidt, no nuclear y se conoce su determinante de Fredholm.

En el presente trabajo de tesis, varias herramientas del análisis funcional son usadas para obtener información adicional no trivial de los operadores A_ρ y $A_\rho(\alpha)$, donde $(A_\rho(\alpha)f)(\theta) = \int_0^1 \rho\left(\frac{\alpha\theta}{x}\right) f(x)dx$.

Usando el teorema de descomposición de Ringrose de A_ρ y $A_\rho(\alpha)$, brindamos información espectral de sus partes normales y Volterras, así como una estimativa de sus números singulares.

Basados en el teorema de Müntz, se demuestran fórmulas que involucran a los operadores $A_\rho(\alpha)$ y $A_\rho(\beta)$, aplicamos el lema de Douglas para establecer que $h \in \text{Ran}\,(A_\rho(\alpha))$ y $\text{Ker}(A_\rho^*(\alpha)) = \{0\}$, para todo $0 < \alpha < 1$ y $h(x) = x$.

Situado en el contexto de trazas singulares, demostramos que si A_ρ pertenece a algún ideal geométricamente estable I de $L^2(0,1)$, entonces $\tau(A_\rho) = 0$ para toda τ traza singular no trivial en I. Esto fue posible gracias a los resultados de N. Kalton, A. Albeverio, D. Guido, T. Isola y el hecho que los operadores $\frac{1}{\alpha}A_\rho(\alpha) - \frac{1}{\beta}A_\rho(\beta)$ son Volterra.

Finalmente, fórmulas inductivas son presentadas para calcular las trazas de las potencias de A_ρ y $A_\rho(\alpha)$, así como la construcción de una familia de isometrías parciales con propiedades muy particulares.

Palabras claves: Hipótesis de Riemann, lema de Douglas, operador Volterra, determinante modificado de Fredholm, números singulares, traza singular.

Abstract

J. Alcántara-Bode shows in [3] that the Riemann hypothesis is true if and only if the integral operator on $L^2(0,1)$, $(A_\rho f)(\theta) = \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) f(x)dx$ is injective, where ρ is the fractional part function. The operator A_ρ is non-nuclear Hilbert-Schmidt and its Fredholm determinant is known.

In the present thesis work, several tools of functional analysis are used to obtain non-trivial additional information of the operators A_ρ and $A_\rho(\alpha)$, where $(A_\rho(\alpha)f)(\theta) = \int_0^1 \rho\left(\frac{\alpha\theta}{x}\right) f(x)dx$.

Using the Ringrose decomposition of A_ρ and $A_\rho(\alpha)$, we give spectral information of their normal and Volterra parts, as well as an estimate of their singular numbers.

Based on the Muntz's theorem, we show formulas between the operators A_ρ and $A_\rho(\alpha)$, we apply the Douglas lemma to show that $h \in \text{Ran}(A_\rho(\alpha))$ and $\text{Ker}(A_\rho^*(\alpha)) = \{0\}$, for all $0 < \alpha < 1$.

In the context of singular traces, we show that if A_ρ belongs to a geometrically stable ideal I of $L^2(0,1)$, then $\tau(A_\rho) = 0$ for every singular trace τ on I. This was possible thanks to the results of N. Kalton, A. Albeverio, D. Guido, T. Isola and the fact that the operators $\frac{1}{\alpha}A_\rho(\alpha) - \frac{1}{\beta}A_\rho(\beta)$ are Volterra.

Finally, inductive formulas are presented to calculate the traces of the powers of A_ρ and $A_\rho(\alpha)$, we also construct a family of partial isometries with special properties.

Key words: Riemann hypothesis, Douglas lemma, Volterra operator, modified Fredholm determinant, singular numbers, singular trace.

El presente trabajo de tesis está dedicado a mi padre Alfredo, mi madre Flor y mi asesor el Dr. Julio Alcántara.

Índice

Introducción **1**

1 Trazas, determinantes y subespacio conmutador **8**

1.1. La traza de operadores de rango finito y nucleares 9

1.2. Trazas singulares 21

1.2.1 Trazas de Dixmier y Connes-Dixmier 22

1.2.2 Operadores excéntricos y excéntricos generalizados 31

1.3. Determinantes 36

1.4. El subespacio conmutador 44

2 Lema de Douglas e isometrías parciales **47**

2.1. El lema de Douglas 47

2.2. Isometrías parciales 48

3 La hipótesis de Riemann **50**

3.1. Descripción de la hipótesis de Riemann 50

3.2. La función de correlación de Beurling 52

3.3. La hipótesis de Riemann como problema de análisis funcional . . . 56

3.4. Cálculo de $\mathrm{Tr}(A_\rho^n)$, $n \geqslant 2$ 72

3.5. Una construcción de una familia de isometrías parciales 75

Conclusiones **79**

Apéndice A: Operadores compactos **80**

Apéndice B: Ecuaciones integrales de Fredholm **82**

Apéndice C: Orden y tipo de una función entera **84**

Apéndice D: Problemas mal propuestos **85**

Bibliografía **89**

Introducción

La función zeta de Riemann es una función de variable compleja s definida en el semiplano $\{s = \sigma + it,\ \sigma > 1, t \in \mathbb{R}\}$ por la serie absolutamente convergente

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

B. Riemann demostró que esta función puede ser prolongada analíticamente a todo el plano complejo, excepto en $s = 1$, donde tiene un polo simple con residuo 1, y satisface la ecuación funcional

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\text{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

donde $\Gamma(s)$ denota la función Gamma.
La ecuación funcional nos dice que para $s = -2, -4, -6, \cdots$ se tiene que $\zeta(s) = 0$, esto es, todo entero par negativo es un cero de la función zeta de Riemann llamado cero trivial. Todos los otros puntos complejos donde $\zeta(s)$ se anula son llamados ceros no triviales de la función zeta de Riemann y su importancia radica en la distribución de los números primos. La conexión entre los ceros no triviales de la función zeta de Riemann y la distribución de los números primos fue observada por Riemann en su artículo de 1859. Es en este artículo que Riemann propuso la conocida hipótesis:

"La parte real de todo cero no trivial de la función zeta de Riemann es 1/2".

La hipótesis de Riemann ha sido reformulada de diversas formas, entre las cuales podemos destacar:

Criterio de Nyman-Beurling [17]

Sea $\rho(x) = x - [x],\ x \in \mathbb{R},\ [x] \in \mathbb{Z},\ [x] \leqslant x < [x] + 1$ y

$$M=\left\{f:f(x)=\sum_{k=1}^{N}a_k\rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right),\ \sum_{k=1}^{N}a_k\theta_k=0,\ 0<\theta_k\leqslant 1,\right.$$
$$\left.a_k\in\mathbb{C},\ 1\leqslant k\leqslant N,\ N\in\mathbb{N}\right\}$$

Para $1<p<\infty$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\overline{M}=L^p(0,1)$;

b) $\zeta(s)\neq 0,\ \mathrm{Re}(s)>\frac{1}{p}$;

c) $1\in\overline{M}$.

Sea

$$\rho_\alpha(x)=\left[\frac{\alpha}{x}\right]-\alpha\left[\frac{1}{x}\right],\ 0<\alpha\leqslant 1,$$

entonces por el criterio de Nyman-Beurling, la hipótesis de Riemann es verdad si y solo si $1\in\overline{\mathrm{span}\{\rho_\alpha(x),\ 0<\alpha\leqslant 1\}}$, en $L^2(0,1)$.

Una generalización del criterio de Nyman-Beurling es dada por J. Yang y afirma que:

Criterio de J. Yang [85]

La hipótesis de Riemann es verdad si y solo si $\chi_{(a,b)}\in\overline{\mathrm{span}\{\rho_\alpha(x),\ 0<\alpha\leqslant 1\}}$ para algún $0\leqslant a<b\leqslant 1$.

Si ahora consideramos el espacio

$$B=\mathrm{span}\left\{\rho_{1/n}(x),\ n\in\mathbb{N}\right\},$$

entonces

$$B\subset\mathrm{span}\{\rho_\alpha(x),\ 0<\alpha\leqslant 1\}.$$

Autores como L. Báez-Duarte, M. Balazard, É. Saias, J.B. Conrey, B. Landreu. J. Lee, N. Nikolski y V.I. Vasyunin conjeturaron que la condición

$$1\in\overline{\mathrm{span}\{\rho_\alpha(x),\ 0<\alpha\leqslant 1\}}$$

puede ser sustituida por

$$1\in\overline{B}.$$

Báez-Duarte logró demostrar la conjetura y así tenemos el siguiente criterio.

Criterio de Báez-Duarte [10]

La hipótesis de Riemann es verdad si y sólo si $1\in\overline{B}$.

Este último enfoque, permitió reformular la Hipótesis de Riemann de la siguiente forma:

Criterio de B. Bagchi [12]

Sea el espacio de Hilbert

$$H = \left\{ (a_n) \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n(n+1)} < \infty \right\}$$

con el producto interno

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \overline{b_n}}{n(n+1)} < \infty.$$

Para $l = 1, 2, 3, \cdots$ sea $\beta_l \in H$ la sucesión

$$\beta_l = \left(\rho \left(\frac{n}{l} \right) \right).$$

Sea además, $\beta = (1, 1, 1, \cdots) \in H$, entonces la hipótesis de Riemann se cumple si y solo si $\beta \in \overline{\text{span}\{\beta_l,\ l \in \mathbb{N}\}}$.

Motivados en el criterio de Nyman-Beurling, V.I. Vasyunin [81] introdujo sucesiones especiales de funciones en B que toman valores solo en el conjunto $\{0, 1\}$ y que convergen puntualmente a 1. Por ejemplo, la sucesión

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k,$$

donde

$$c_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 1 \\ 1 - \sum_{k=1}^{n-1} c_k f_k(n) & , \quad n > 1 \end{cases}$$

y

$$f_n(x) = \left[\frac{x}{n} \right] - 2 \left[\frac{x}{2n} \right]$$

converge puntualmente a 1. Sin embargo, Báez-Duarte demostró que la sucesión (φ_n) diverge en $L^2((1, +\infty), \frac{dx}{x^2})$. Al parecer, las otras sucesiones construidas por Vasyunin podrían diverger, pero aún es un problema abierto.

El último criterio que enunciamos, basado en el criterio de Nyman-Beurling, es el criterio de J. Alcántara-Bode:

Criterio de J. Alcántara-Bode [3]

La hipótesis de Riemann es verdad si y solo si el operador integral definido en $L^2(0, 1)$ por

$$(A_\rho f)(\theta) = \int_0^1 \rho \left(\frac{\theta}{x} \right) f(x) dx$$

es inyectivo, o si y solo si $h \notin \mathrm{Ran}(A_\rho)$, con $h(x) = x$.

La presente tesis, está centrada en este último enfoque y estudia exhaustivamente diferentes propiedades del operador A_ρ usando herramientas del análisis funcional. El primer capítulo de este trabajo de tesis se centra en el estudio de trazas, determinantes y el subespacio conmutador de un ideal. Inicialmente, los funcionales traza y determinante sobre operadores de rango finito son estudiados para luego definir la traza usual y el determinante de operadores de clase traza. A continuación, se estudia la traza de Dixmier como ejemplo de traza singular. Este funcional no es extensión de la traza usual y sus aplicaciones son dadas en el libro de A. Connes [26]. El problema de la existencia de trazas singulares que son no triviales en un operador compacto T, es decir, sobre el ideal generado por T es un trabajo difícil. Este problema ha sido estudiado por J. Varga [79] y ha sido resuelto por A. Albeverio et al. [2], todo esto nos llevará a estudiar los operadores irregulares, excéntricos y excéntricos generalizados. Una breve discusión del determinante modificado de Fredholm es estudiado en esta sección, culminando con la fórmula de Plemelj-Smithies; esta fórmula permite calcular el determinante modificado de Fredholm de un operador Hilbert-Schmidt a partir de sus trazas.

Sea I un ideal bilátero del álgebra de operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert complejo. Es conocido que si τ es un funcional lineal en I, entonces τ es una traza si y solo si $\tau(T) = 0$, $\forall T \in \mathrm{Com}(I)$, donde $\mathrm{Com}(I)$ es el subespacio conmutador de I. Es así que surge la necesidad de estudiar este subespacio. El subespacio conmutador ha sido caracterizado sobre ideales normados simétricos en [77] y en general sobre ideales geométricamente estables por N. Kalton [61], [62].

En el segundo capítulo empezamos con el enunciado del lema de Douglas [23], este es un resultado que relaciona la factorización, mayorización e inclusión de rangos de operadores sobre espacios de Hilbert. Un breve estudio de isometrías parciales es dada en la sección 2.2, donde sus propiedades básicas son estudiadas.

En el último capítulo, aplicamos todas las herramientas vistas en las secciones anteriores.

Los principales resultados están organizados de la siguiente manera:

1. La sección 3.2 corresponde al estudio de la función de correlación de Beurling, la cual está definida por

$$J(\alpha) = \int_0^1 \rho\left(\frac{1}{x}\right)\rho\left(\frac{\alpha}{x}\right),\ \alpha \in [0,1].$$

La importancia de esta función es debido a su aparición en el estudio de la hipótesis de Riemann [6, 7]. Basándonos en [81, Proposition 4] demostramos la siguiente proposición:

Proposición 0.1.

1) Si $0 < \theta_1 \leqslant \theta_2 < \theta_3 \leqslant 1$ *y* $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ *entonces*

$$\theta_2 J\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) - \theta_3 J\left(\frac{\theta_2}{\theta_3}\right) - \theta_3 J\left(\frac{\theta_1}{\theta_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\theta_3\ln\theta_3 - \theta_1\ln\theta_1 - \theta_2\ln\theta_2\right) - \theta_3\left(\ln(2\pi) - \gamma\right) + \theta_2.$$

2) Si $0 < \theta_3 < \theta_1 < \theta_4 < \theta_2 < \theta_5 \leqslant 1$, $\theta_1 + \theta_2 = \theta_3 + \theta_4 + \theta_5,\ \theta_1 = 2\theta_3$. *Además si* $\theta_2 = 2\theta_4$ *entonces*

$$\begin{aligned}
&\theta_2 J\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) + \theta_4 J\left(\frac{\theta_3}{\theta_4}\right) + \theta_5 J\left(\frac{\theta_3}{\theta_5}\right) + \theta_5 J\left(\frac{\theta_4}{\theta_5}\right) - \theta_1 J\left(\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)\\
&\quad - \theta_2 J\left(\frac{\theta_3}{\theta_2}\right) - \theta_2 J\left(\frac{\theta_4}{\theta_2}\right) - \theta_5 J\left(\frac{\theta_2}{\theta_5}\right) - \theta_4 J\left(\frac{\theta_1}{\theta_4}\right) - \theta_5 J\left(\frac{\theta_1}{\theta_5}\right)\\
&\qquad = \frac{1}{2}\left(\theta_1\ln\theta_1 + \theta_2\ln\theta_2 - \theta_3\ln\theta_3 - \theta_4\ln\theta_4 - \theta_5\ln\theta_5\right)\\
&\qquad\quad - \left(\ln(2\pi) - \gamma\right)\left(\theta_1 + \theta_2\right) + \theta_1 + \theta_2,
\end{aligned}$$

donde γ *es la constante de Euler.*

2. En la sección 3.3 estudiamos el operador compacto A_ρ desde el punto de vista de trazas singulares.

Si H representa un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $K(H)$ denota el ideal de operadores compactos en H, entonces todo operador $T \in K(H)$ admite la llamada descomposición de Ringrose, es decir existe un operador compacto normal N y un operador Volterra Q tal que $T = N + Q$ y $(\lambda_n(T) = (\lambda_n(T)))$, donde $(\lambda_n(T))$ es la sucesión de valores propios no nulos de T, cada valor propio se repite de acuerdo a su multiplicidad algebraica y la sucesión está ordenada de modo que $|\lambda_n(T)| \geqslant |\lambda_{n+1}(T)|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $(s_n(T))$

denota la sucesión de números singulares de $T \in K(H)$ y $\operatorname{Tr}_w(T)$ es la traza de Dixmier de T asociada al estado singular w invariante por D_2 (ver Definición 1.11) hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 0.1. *Si $A_\rho = N + Q$ es la descomposición de Ringrose de A_ρ entonces*

a) *N es excéntrico generalizado, no nuclear y pertenece a $S_p(L^2(0,1))$, $p > 1$.*

b) $\operatorname{Tr}_w(N) = w\left(\dfrac{1}{\log(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A_\rho)\right)$ *y* $|\operatorname{Tr}_w(N)| \leqslant e$.

c) *Q es Hilbert-Schmidt.*

Nuestro siguiente resultado presenta una estimativa para los números singulares del operador A_ρ.

Teorema 0.2. *Si $A_\rho = N + Q$ es la descomposición de Ringrose de A_ρ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

1) $s_n(A_\rho) \leqslant \dfrac{\left(\frac{\ln(2\pi)-\gamma}{2} - \frac{1}{3}\right)^{1/2}}{\sqrt{n}}$.

2) $s_n(N) \leqslant \dfrac{e}{n}$.

3) $s_{2n}(Q) \leqslant \dfrac{\left(\frac{\ln(2\pi)-\gamma}{2} - \frac{1}{3}\right)^{1/2}}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{e}{n}$ *y*

$$s_{2n-1}(Q) \leqslant \frac{\left(\frac{\ln(2\pi)-\gamma}{2} - \dfrac{1}{3}\right)^{1/2}}{\sqrt{n}} + \frac{e}{n}.$$

El resultado principal de esta sección calcula todas las trazas singulares no triviales definidas en un ideal geométricamente que contiene A_ρ. Más precisamente, hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 0.3. *Sea I un ideal geométricamente estable en $L^2(0,1)$ y suponga que $A_\rho \in I$, entonces $\tau(A_\rho) = 0$ para toda τ traza singular no trivial en I.*

3. Para $0 < \alpha < 1$, el determinante modificado de Fredholm de $A_\rho(\alpha)$ ha sido calculado en [5]. Basados en este cálculo, en la sección 3.4 presentamos una fórmula recursiva para evaluar las trazas $\operatorname{Tr}(A_\rho^n(\alpha))$, $n \geqslant 2$. De manera explícita tenemos que

$$\operatorname{Tr}(A_\rho^2(\alpha)) = \alpha^2 - \frac{\zeta(2)}{2}\alpha^3,$$

y para $n \geqslant 2$

$$\operatorname{Tr}(A_\rho^{n+1}(\alpha)) = -(n+1)\Gamma_{n+1} - \alpha\Gamma_n - \sum_{k=1}^{n-1} \Gamma_{n-k} \operatorname{Tr}(A_\rho^{k+1}(\alpha)),$$

donde

$$\Gamma_n(\alpha) = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ -\alpha & , \quad n = 1 \\ \dfrac{(-1)^n \alpha^{n(n+1)/2}}{n!n} \displaystyle\prod_{\ell=1}^{n-1} \zeta(\ell+1) & , \quad n \geqslant 2 \end{cases}.$$

4. Para $0 < \alpha < 1$, J-Alcántara-Bode ha definido la familia de operadores

$$\hat{A}_\rho(\alpha) = A_\rho(\alpha) - \|g_\alpha\|^{-2} \langle \cdot, g_\alpha \rangle h,$$

donde $h(x) = x$ y g_α es la solución de mínima norma de la ecuación

$$A_\rho(\alpha) g = h.$$

Relaciones entre los operadores $\hat{A}_\rho(\alpha)$ y $\hat{A}_\rho(\beta)$ dan lugar a una familia de isometrías parciales con propiedades especiales. De esta manera, nuestro último resultado es el siguiente:

Teorema 0.4. *Existe una familia* $(U_{\alpha,\beta})_{0<\alpha,\beta<1}$ *de isometrías parciales tal que* $U_{\alpha\beta}$ *tiene como espacio inicial* $\overline{\operatorname{Ran}(\hat{A}_\rho^*(\alpha))}$ *y espacio final* $\overline{\operatorname{Ran}(\hat{A}_\rho^*(\beta))}$. *Además*

1) $U_{\alpha\gamma} = U_{\beta\sigma} U_{\alpha\beta}$.

2) $U_{\alpha\alpha} = P_{\overline{\operatorname{Ran}(\hat{A}_\rho^*(\alpha))}}$, *donde* $P_{\overline{\operatorname{Ran}(\hat{A}_\rho^*(\alpha))}}$ *es la proyección ortogonal sobre* $\overline{\operatorname{Ran}(\hat{A}_\rho^*(\alpha))}$.

3) $U_{\alpha\beta}^* = U_{\beta\alpha}$.

Capítulo 1

Trazas, determinantes y subespacio conmutador

En este capítulo tratamos el estudio de trazas sobre ciertos ideales de operadores, en primera instancia, sobre espacios de Banach, luego sobre espacios de Hilbert separables.

El capítulo también contiene el estudio de trazas singulares, donde la traza de Dixmier juega un papel importante.

La existencia de una traza singular, que es no trivial sobre un operador compacto T en un espacio de Hilbert separable, es un trabajo difícil. Estudiaremos este problema en 1.2.2 basados en [1].

La sección 1.3 contiene la teoría de determinantes y determinantes modificados sobre subálgebras normadas de operadores en espacios de Banach. El determinante modificado sobre el espacio de operadores de rango finito admite extensión continua a ciertas subálgebras normadas, es así que el teorema de extensión es enunciado y aplicado al álgebra de operadores Hilbert-Schmidt.

Finalmente, en la sección 1.4 el subespacio conmutador de un ideal geométricamente estable es caracterizado en términos de la media aritmética de los términos de una sucesión.

1.1. La traza de operadores de rango finito y nucleares

Sea $\mathscr{L}(X)$ el álgebra de operadores lineales y acotados sobre un espacio de Banach complejo X y sea $\mathcal{F}(X)$ el subálgebra de todos los operadores de rango finito, es decir,

$$\mathcal{F}(X) = \{T \in \mathscr{L}(X) \ / \ \text{rang}(T) = \dim \operatorname{Ran}(T) < \infty\}.$$

El siguiente teorema está inmerso en [36, Lemma 1.1] y establece la representación de un operador de rango finito.

Teorema 1.1. *Un operador $T \in \mathcal{F}(X)$ si y solo si T tiene una representación finita de la forma*

$$T = \sum_{k=1}^{n} f_k \otimes \varphi_k, \tag{1.1}$$

donde $f_1, f_2, \cdots, f_n \in X^*$, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in X$ y $(f_k \otimes \varphi_k)(x) = \langle x, f_k\rangle \varphi_k$.

Sea $T \in \mathcal{F}(X)$. Por teorema 1.1, T se puede escribir de la forma

$$T = \sum_{k=1}^{n} f_k \otimes \varphi_k,$$

y definimos la traza de T como

$$\operatorname{Tr}_1(T) := \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi_k, f_k\rangle .$$

Manipulaciones algebraicas prueban que esta suma no depende de la representación (1.1).

No es difícil demostrar que Tr_1 es un funcional lineal y si $T \in \mathcal{F}(X)$ y $S \in \mathscr{L}(X)$ entonces

$$ST = \sum_{k=1}^{n} f_k \otimes S\varphi_k \ \text{ y } \ TS = \sum_{k=1}^{n} S^* f_k \otimes \varphi_k.$$

Por lo tanto

$$\operatorname{Tr}_1(ST) = \sum_{k=1}^{n} \langle S\varphi_k, f_k\rangle \ \text{ y } \ \operatorname{Tr}_1(TS) = \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi_k, S^* f_k\rangle .$$

Esto nos dice que

$$\operatorname{Tr}_1(ST) = \operatorname{Tr}_1(TS).$$

Observación 1.1.

Puede encontrarse en [67, 4.2.15] que la traza Tr_1 es espectral, es decir, si $T \in \mathcal{F}(X)$ entonces

$$\mathrm{Tr}_1(T) = \sum_k \lambda_k(T),$$

donde $(\lambda_k(T))$ son los valores propios de T teniendo en cuenta sus multiplicidades algebraicas.

Ejemplo 1.1.

Sea $X = L^p[a,b]$, $p \geqslant 1$.

Consideremos $T \in \mathcal{F}(X)$ de rango n, entonces

$$T = \sum_{k=1}^{n} g_k \otimes \varphi_k, \quad g_k \in X^*, \ \varphi_k \in X.$$

Sean p y q exponentes conjugados. Como $L^q[a,b]$ es isométricamente isomorfo a $(L^p[a,b])^*$, para cada $g_k \in X^*$ existe $\psi_k \in L^q[a,b]$ tal que

$$\langle f, g_k \rangle = \int_a^b f(s)\psi_k(s)ds, \quad \forall f \in L^p[a,b].$$

Con ello T queda representado como

$$(Tf)(t) = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\psi_k(s) \right) f(s)ds. \tag{1.2}$$

Sea

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\psi_k(s),$$

luego podemos escribir (1.2) como

$$(Tf)(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)ds.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_1(T) &= \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi_k, g_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \varphi_k(s)\psi_k(s)ds. \\ &= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(s)\psi_k(s)ds, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathrm{Tr}_1(T) = \int_a^b K(s,s)ds.$$

Durante esta sección H denotará un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $K(H)$ el ideal de operadores compactos en H. El siguiente resultado puede encontrarse en [37, Ch. IV, Theorem 5.1], y afirma que todo operador compacto autoadjunto sobre un espacio de Hilbert separable es diagonalizable.

Teorema 1.2. *Sea $T \in K(H)$ autoadjunto y no nulo. Entonces existe un sistema ortonormal $(x_n)_{n=1}^{v(T)}$ de autovectores de T con autovalores no nulos correspondientes $(\lambda_n(T))_{n=1}^{v(T)}$ tal que T admite la siguiente representación*

$$T = \sum_{n=1}^{v(T)} \lambda_n(T) \langle \cdot, x_n \rangle x_n,$$

donde si $v(T) = \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(T) = 0$ y la serie converge con la norma de operadores.

En general si T es compacto tenemos la representación de Hilbert-Schmidt [36, Ch. IV, Theorem 2.1].

Teorema 1.3 (Representación de Hilbert-Schmidt)**.** *Sea $T \in K(H)$. Entonces existen sistemas ortonormales $(x_n)_{n=1}^{v(T)}$ y $(y_n)_{n=1}^{v(T)}$ en H tal que*

$$T = \sum_{n=1}^{v(T)} \sqrt{\lambda_n(T^*T)} \langle \cdot, x_n \rangle y_n, \tag{1.3}$$

donde $(\lambda_n(T^*T))_{n=1}^{v(T)}$ son los autovalores no nulos de T^*T dados en el teorema 1.2. Además si $v(T) = \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\lambda_n(T^*T)} = 0$ y la serie en (1.3) converge con la norma de operadores. Los números $\sqrt{\lambda_n(T^*T)}$ están únicamente determinados por T. Sin embargo, los sistemas ortonormales $(x_n)_{n=1}^{v(T)}$ y $(y_n)_{n=1}^{v(T)}$, en general, no son únicos.

Definimos el n-ésimo número singular de $T \in K(H)$ por

$$s_n(T) := \sqrt{\lambda_n(T^*T)},\ n = 1, 2, \cdots, v(T).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tienen las siguientes propiedades:

a) $s_n(T) = s_n(T^*)$, $s_n(U^*TU) = s_n(T)$, $\forall U \in \mathscr{L}(H)$ unitario.

b) $s_n(T) = \min\limits_{\dim M = n-1} \left(\max\limits_{0 \neq x \perp M} \left\{ \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \right\} \right)$

c) $s_n(AT) \leqslant \|A\| s_n(T)$, $s_n(TA) \leqslant \|A\| s_n(T)$, $\forall A \in \mathscr{L}(H)$.

d) $s_n(T) = \text{mín}\{\|T - K\|,\ K \in \mathscr{L}(H), \text{rang}(K) \leqslant n-1\}$.

e) $|s_n(T) - s_n(S)| \leqslant \|T - S\|, \forall T, S \in K(H)$.

f) Desigualdad de Weyl

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k(T)|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k^p(T), \quad 0 < p < \infty$$

g) $s_{n+m-1}(T + S) \leqslant s_n(T) + s_m(S), \forall T, S \in K(H), m \geqslant 1$.

h) Para $p \geqslant 1$ se tiene

- $\left(\sum_{k=1}^{n} s_k^p(T+S)\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} s_k^p(T)\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} s_k^p(S)\right)^{1/p}$
- $\sum_{k=1}^{n} s_k^p(TS) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} s_k^p(T)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} s_k^p(S)\right), \ \forall T, S \in K(H).$

i) Si $T, S \in K(H)$ son operadores positivos, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} s_k(T) + \sum_{k=1}^{n} s_k(S) \leqslant \sum_{k=1}^{2n} s_k(T+S).$$

Definición 1.1. Para $p \geqslant 1$ la **p-clase de Schatten-Von Neumann** se define por

$$S_p(H) = \left\{ T \in K(H) \ / \ \|T\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k^p(T)\right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

De las propiedades $e)$ y $h)$ no es difícil probar que $(S_p(H), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.
$S_1(H)$ y $S_2(H)$ son llamados el espacio de operadores de **clase traza** y **Hilbert-Schmidt** respectivamente. Debido a las propiedades $c)$ y $h)$, $S_1(H)$ y $S_2(H)$ son ideales biláteros del álgebra $\mathscr{L}(H)$.

Ejemplo 1.2. Sea $K \in L^2([a,b] \times [a,b])$ y $T : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ definido por

$$(Tf)(t) = \int_a^b K(t,s) f(s) ds$$

entonces $T \in S_2(L^2[a,b])$.
En efecto, es fácil ver que T es un operador compacto y $\|T\| \leqslant \|K\|_2$.
Sea (e_n) una base ortonormal de $L^2[a,b]$ entonces (ϕ_{nk}) es una base ortonormal de $L^2([a,b] \times [a,b])$, donde $\phi_{nk}(t,s) = e_n(t)\overline{e_k(s)}$. Luego

$$
\begin{aligned}
\langle Te_k, e_n\rangle &= \int_a^b (Te_k)(t)\overline{e_n(t)}dt = \int_a^b\int_a^b K(t,s)e_k(s)\overline{e_n(t)}dtds \\
&= \int_a^b\int_a^b K(t,s)\overline{\phi_{nk}(t,s)}dtds = \langle K, \phi_{nk}\rangle
\end{aligned}
$$

implica

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} |\langle Te_k, e_n\rangle|^2 = \sum_{k,n=1}^{\infty} |\langle K, \phi_{nk}\rangle|^2$$

y por la identidad de Parseval

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} |\langle Te_k, e_n\rangle|^2 = \|K\|_2^2 < \infty.$$

Para concluir, veamos que $\sum\limits_{k,n=1}^{\infty} |\langle Te_k, e_n\rangle|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n^2(T)$.

De la identidad de Parseval y el teorema 1.2 se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,n=1}^{\infty} |\langle Te_k, e_n\rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle T^*Te_k, e_k\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} s_m^2(T)\langle e_k, x_m\rangle x_m, e_k \right\rangle \\
&= \sum_{m,k=1}^{\infty} s_m^2(T)|\langle e_k, x_m\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} s_m^2(T).
\end{aligned}
$$

Usando (1.3) y la desigualdad de Bessel los siguientes teoremas son inmediatos.

Teorema 1.4. *Sea $T \in S_1(H)$ y (φ_n), (ψ_n) sucesiones ortonormales en H. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle T\varphi_n, \psi_n\rangle| \leqslant \|T\|_1.$$

Teorema 1.5. *Si $T \in S_1(H)$ entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle T\varphi_n, \varphi_n\rangle$ converge absolutamente para toda (φ_n) base ortonormal y su suma no depende de la elección de (φ_n).*

Con lo hecho en el teorema 1.5, podemos introducir la funcional

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}: S_1(H) &\to \mathbb{C} \\
\mathrm{Tr}(T) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \langle T\varphi_n, \varphi_n\rangle,
\end{aligned}
$$

para alguna base ortonormal (φ_n), llamada **la traza usual**.

Obviamente el funcional Tr satisface las siguientes propiedades

i) Tr es lineal.

ii) Por teorema 1.4, $|\operatorname{Tr}(T)| \leqslant \|T\|_1, \ \forall T \in S_1(H)$.

iii) $\operatorname{Tr}(TR) = \operatorname{Tr}(RT), \ \forall T \in \mathscr{L}(H), \forall R \in S_1(H)$.

iv) La traza usual es una extensión del funcional Tr_1.

El famoso teorema de Lidskii puede ser encontrado en [71, XI.11] y afirma que:

$$\text{“Si } T \in S_1(H) \text{ entonces } \operatorname{Tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)\text{”}, \tag{1.4}$$

donde $(\lambda_n(T))$ es la sucesión de autovalores no nulos de T teniendo en cuenta sus multiplicidades algebraicas.

Ejemplo 1.3. El clásico teorema de Mercer [37, Theorem 3.1] afirma que:
Sea K continua en $[a, b] \times [a, b]$. Supongamos que el operador integral $T : L^2[a, b] \to L^2[a, b]$, $(Tf)(t) = \displaystyle\int_a^b K(t, s)f(s)ds$ es positivo.
Entonces

$$K(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n(t)\overline{X_n(s)}, \ \forall t, s \in [a, b].$$

La serie converge absoluta y uniformemente en $[a, b] \times [a, b]$, donde (X_n) son los vectores propios del teorema 1.2 para T.
Como consecuencia directa se tiene que

$$K(t, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |X_n(t)|^2$$

converge uniformemente en $[a, b]$.
Por lo tanto

$$\int_a^b K(t, t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|X_n\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T),$$

luego T es de clase traza y por el teorema de Lidskii, concluimos que

$$\int_a^b K(t, t)dt = \operatorname{Tr}(T). \tag{1.5}$$

Ejemplo 1.4. Sea $T : L^2[a, b] \to L^2[a, b], \ (Tf)(t) = \displaystyle\int_a^b K(t, s)f(s)ds$, con K continua en $[a, b] \times [a, b]$. Si T es un operador de clase traza entonces por [36, Ch. IV, Theorem 8.1]

$$\operatorname{Tr}(T) = \int_a^b K(t, t)dt. \tag{1.6}$$

Observación 1.2.
Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, las fórmulas (1.5) y (1.6) motiva a preguntarnos ¿cuáles son las condiciones necesarias y suficientes sobre $K : X \times X \to \mathbb{R}$ para que su correspondiente operador integral T sobre $L^2(X)$ sea de clase traza, y cómo calcular $\operatorname{Tr} T$ en términos de su núcleo? Estudios sobre estos problemas han sido tratados por M. Duflo [22] y C. Brislawn [16], donde fórmulas del tipo (1.5) y (1.6) son demostradas. La importancia de las fórmulas (1.5) y (1.6) radica en el hecho de que se pueden determinar trazas sin conocer el espectro del operador considerado.

Extensiones del teorema de Lidskii han sido demostradas para operadores nucleares sobre ciertos espacios de Banach. La noción de operador nuclear sobre espacios de Banach fue introducida por Grothendieck y es la siguiente:

Definición 1.2. Sea X un espacio de Banach complejo y $T : X \to X$ un operador lineal y acotado. El operador T es llamado **nuclear** si puede representarse de la forma

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \otimes \varphi_n, \ (f_n) \subset X^*, (\varphi_n) \subset X \tag{1.7}$$

donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \|\varphi_n\| < \infty.$$

Observación 1.3.
Por [71, Theorem X.5], si H es un espacio de Hilbert separable entonces la clase de operadores nucleares en H coincide con la clase de operadores de clase traza.

En general si $T : X \to X$ es un operador nuclear, la expresión

$$\text{tr}(T) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, f_n \rangle$$

depende de la expresión (1.7). Sin embargo de acuerdo a [36 , Ch. V, Theorem 1.2], esto es subsanable si el espacio de Banach X satisface la **propiedad de aproximación**, es decir, si para cada compacto $K \subset X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un operador F de rango finito tal que $\|x - Fx\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.
Varias condiciones equivalentes a la propiedad de aproximación son dadas en [48], con ellas tenemos el teorema:

Teorema 1.6. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *X tiene la propiedad de aproximación.*

ii) *Para cada sucesión $(x_n) \subset X$ y $(f_n) \subset X^*$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \|x_n\| < \infty$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, f_n \rangle x_n = 0$ para todo $x \in X$, se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, f_n \rangle = 0$.*

iii) *Para cada espacio de Banach Y, cada operador compacto $T : Y \to X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un operador $T_1 : Y \to X$ de rango finito con*

$$\|T - T_1\| < \varepsilon.$$

Observación 1.4.

Como todo operador compacto entre espacios de Hilbert es el límite, con la norma de operadores, de operadores de rango finito, el teorema anterior nos dice que todo espacio de Hilbert tiene la propiedad de aproximación. Además si H es un espacio de Hilbert separable y T es un operador en H de clase traza entonces tr(T) es igual a Tr(T).

Supongamos ahora que X es un espacio de Banach con base de Schauder (x_n), es decir, si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares (α_n) tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

Sea

$$S_n x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \text{ con } x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

entonces cada $S_n : X \to X$ es un operador lineal de rango finito.

Así $\sup\limits_{n \geqslant 1} \|S_n x\| < \infty$ y por el teorema de Banach-Steinhaus $\sup\limits_{n \geqslant 1} \|S_n\| = s < \infty$.

Sea $K \subset X$ compacto, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, por compacidad, K puede cubrirse con una cantidad finita de bolas de radio $\dfrac{\varepsilon}{2(1+s)}$ centrada en $(y_j)_{j=1}^{m}$. Luego existe un y_j tal que

$$\|x - y_j\| < \frac{\varepsilon}{2(1+s)}$$

y existe un entero positivo N tal que $\|y_j - S_n(y_j)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, para $j = 1, 2, \cdots, m$ si $n > N$.

Así

$$\begin{aligned} \|x - S_n x\| &\leqslant \|x - y_j\| + \|y_j - S_n y_j\| + \|S_n x - S_n y_j\| \\ &\leqslant \|x - y_j\|(1+s) + \|y_j - S_n y_j\| < \varepsilon, \text{ para } n > N. \end{aligned}$$

Con todo esto hemos probado que:

Teorema 1.7. *Todo espacio de Banach con base de Schauder tiene la propiedad de aproximación.*

Para $p \geqslant 1$, denotemos por ℓ_p al espacio de Banach de sucesiones (a_n) con valores complejos tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < \infty$. Según [55, p. 90] para cada $1 \leqslant p \neq 2 < \infty$ existe un operador nuclear $T : \ell_p \to \ell_p$ tal que $T^2 = 0$ y $\mathrm{tr}(T) \neq 0$. Claramente la sucesión (x_n) en ℓ_p definida por

$$x_n = (0, 0, \cdots, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{orden } ''n''}}{1}, 0, 0, \cdots)$$

forma una base de Schauder de ℓ_p. Entonces, por el teorema anterior, el espacio de Banach ℓ_p tiene la propiedad de aproximación.

Como $T^2 = 0$ entonces $\lambda_n(T) = 0$, $\forall n \geqslant 1$. Con este ejemplo hemos demostrado que el teorema de Lidskii no admite extensión en este contexto.

Sin embargo, si $T : X \to X$ es un operador nuclear tal que la sucesión de autovalores (λ_n) de T es absolutamente sumable, el teorema de Lidskii es aplicable si X es un espacio de Hilbert débil, llamado así por su cercanía a los espacios de Hilbert. Para introducir la noción de espacio de Hilbert débil, es necesario definir los espacios de Banach de tipo 2 y cotipo 2.

Definición 1.3. Un espacio de Banach X se dice **tipo** p si existe una constante $\alpha > 0$ tal que para todo entero m y toda elección $(x_i)_{i=1}^n$ en X tenemos

$$\left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n \Gamma_i(t) x_i \|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \alpha \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{1/p}$$

donde si $\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ es la función signo de un número real x, $\Gamma_n(t) = \mathrm{sign}(\mathrm{sen} 2^n \pi t),\ t \in [0,1]$.

Un espacio de Banach de dice de **cotipo** q si existe una constante $\beta > 0$ tal que para todo entero m y toda elección $(x_i)_{i=1}^n$ en X se tiene que

$$\left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n \Gamma_i(t) x_i \|^2 dt\right)^{1/2} \geqslant \beta \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{1/q}$$

donde $\Gamma_n(t) = \mathrm{sign}(\mathrm{sen} 2^n \pi t),\ t \in [0,1]$.

Una de las primeras caracterizaciones isomorfas (homeomorfismo lineal) de espacios de Hilbert fue dada en [64, Proposition 3.1] y afirma que:
"Un espacio de Banach X es isomorfo a un espacio de Hilbert si y solo si existe una constante $c > 0$ tal que para cualquier elección $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ se cumple

$$c^{-1}\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leqslant \int_0^1 \|\sum_{i=1}^n x_i\Gamma_i(t)\|^2 dt \leqslant c\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2."$$

Con esto el siguiente teorema es obvio:

Teorema 1.8. *Un espacio de Banach X es isomorfo a un espacio de Hilbert si y solo si X es de tipo 2 y cotipo 2.*

Sea $\mathrm{GL}(X,Y)$ el espacio de todos los isomorfismos entre los espacios de Banach X e Y. La distancia de Banach-Mazur entre X e Y es el número $d(X,Y) = \text{ínf}\{\|T\|\|T^{-1}\|,\ T \in \mathrm{GL}(X,Y)\}$.
Por [60, Theorem 1] las siguientes afirmaciones para un espacio de Banach X son equivalentes:

i) Para cada $\delta \in]0,1[$ existe una constante C_δ tal que, todo subespacio de dimensión finita E contiene un subespacio $F \subset E$ de dimensión $\dim F \geqslant \delta \dim E$ tal que

$$d(F, \ell_2^{\dim F}) \leqslant C_\delta,$$

donde ℓ_2^n es el espacio $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$.

ii) Existe un $\delta_0 \in]0,1[$ y una constante C_{δ_0} tal que se cumple lo mismo que i).

Definición 1.4. Un espacio de Banach que satisface alguna de las afirmaciones anteriores es llamado un **espacio débil cotipo 2**.

Por [60, Theorem 10] las siguientes afirmaciones para un espacio de Banach X son equivalentes:

A) Para cada $\delta \in]0,1[$ existe una constante C_δ tal que para todo subespacio $S \subset X$ y todo operador $u : S \to \ell_2^n$, existe una proyección ortogonal $P : \ell_2^n \to \ell_2^n$ con $\mathrm{rang}(P) \geqslant \delta n$ tal que el operador $Pu : S \to \ell_2^n$ admite una extensión $\tilde{u} : X \to \ell_2^n$ satisfaciendo $\|\tilde{u}\| \leqslant C_\delta \|u\|$.

B) Existe un $\delta_0 \in]0,1[$ y una constante C_{δ_0} tal que se cumple lo mismo que A).

Definición 1.5. Un espacio de Banach que satisface alguna de las afirmaciones anteriores es llamado un **espacio débil tipo 2**.

Observación 1.5.

- Por [33, Theorem 5.2] todo espacio de Banach cotipo 2 es un espacio débil cotipo 2.
- Por [60, Remark 11] todo espacio de Banach tipo 2 es un espacio débil tipo 2.

Hemos visto en el teorema 1.8, que todo espacio de Banach de tipo 2 y cotipo 2 es isomorfo a un espacio de Hilbert, asi es natural considerar la clase de espacios débiles de tipo 2 y cotipo 2.

Definición 1.6. Un espacio de Banach es llamado un espacio de **Hilbert débil** si es débil tipo 2 y débil cotipo 2.

Usando las definiciones dadas, no es difícil probar las siguientes propiedades de estabilidad:

1) Si X es un espacio de Hilbert débil entonces todo subespacio también lo es.

2) La suma directa de un número finito de espacios de Hilbert débil es Hilbert débil.

Un resultado no trivial que puede encontrarse en [69, Proposition 1.2] afirma que:

"X es un espacio de Hilbert débil si y sólo si X^* lo es".

Finalmente, una extensión del teorema de Lidskii esta dada en [69, Theorem 5.4] y afirma que:

Teorema 1.9.
Sea $T : X \to X$ un operador nuclear sobre un espacio de Hilbert débil X. Asumamos que la sucesión de autovalores de T es absolutamente sumable. Entonces

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n.$$

Ejemplo 1.5.

1) Sabemos que para cada $p \geqslant 1$, $p \neq 2$ y $p < \infty$ existe un operador nuclear $T : \ell_p \to \ell_p$ tal que $T^2 = 0$ y tr$(T) \neq 0$. Esto muestra que $\lambda_n(T) = 0$, $\forall n \geqslant 1$ y por lo tanto el teorema 1.9 es falso en ℓ_p para $p \neq 2$. Concluimos entonces que ℓ_p para $p \neq 2$ y $1 \leqslant p < \infty$ es un espacio de Banach que no es Hilbert débil.

   Además como la sucesión (x_n) en ℓ_p definida por

$$x_n = (0, 0, \cdots, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{orden } ''n''}}{1}, 0, 0, \cdots)$$

   forma una base de Schauder de ℓ_p, por el teorema 1.7, el espacio de Banach ℓ_p tiene la propiedad de aproximación.

2) Por [69, Theorem 5.1] se tiene que todo espacio de Hilbert débil tiene la propiedad de aproximación. Los primeros ejemplos de espacios de Banach sin la propiedad de aproximación, y por lo tanto no son Hilbert débiles, fueron dados en [65] y en [28].

3) Por el teorema 1.8 y la observación 1.5, todo espacio de Hilbert es Hilbert débil.

Definición 1.7. Un espacio de Banach complejo X tiene la **propiedad de Lidskii** si para $T : X \to X$ un operador nuclear cuya sucesión de autovalores es absolutamente sumable se tiene que la traza tr de T es igual a la suma de sus autovalores (tomando en cuenta las multiplicidades algebraicas).

Definición 1.8. Un **nido** N en un espacio de Banach complejo X es una familia de subespacios cerrados de X totalmente ordenado por la inclusión. Decimos que un nido N tiene la **N-propiedad de aproximación** si existe una net de operadores de rango finito en X que converge uniformemente a la identidad en conjuntos compactos y deja invariante todos los subespacios de N. Si X tiene la N-propiedad de aproximación para todos los nidos, decimos que X tiene la propiedad de aproximación anidada.

Suponga que X es un espacio de Banach complejo con la propiedad de aproximación, entonces por [34, Theorem 3.2] las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) X tiene la propiedad de aproximación anidada.

2) X tiene la propiedad de Lidskii.

3) Todo operador nuclear cuasinilpotente en X tiene traza cero.

Por el teorema 1.9, todo espacio de Hilbert débil satisface 3) y por lo tanto tiene la propiedad de aproximación anidada.

1.2. Trazas singulares

Por [24, Theorem 1.4] tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.10. *Sea H un espacio de Hilbert. Si $\mathcal{J}$ es un ideal bilátero de $\mathscr{L}(H)$ entonces $\mathcal{J} = \mathscr{L}(H)$ o $\mathcal{J} \subset K(H)$.*

Observación 1.6.
Si $\mathcal{J}$ es un ideal bilátero de $\mathscr{L}(H)$, entonces por [24, Theorem 1.7] tenemos que $\mathcal{F}(H) \subset \mathcal{J}$. Por lo tanto, del teorema 1.10 llegamos a que

$$\mathcal{F}(H) \subset \mathcal{J} \subset K(H).$$

Definición 1.9. Una traza t sobre un ideal $\mathcal{J}$ bilátero de $\mathscr{L}(H)$ es un funcional lineal positivo unitariamente invariante, es decir, $t : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal tal que

i) $t(T) \geqslant 0$, $\forall T \in \mathcal{J}$ operador positivo;

ii) $t(U^*TU) = t(T)$, $\forall T \in \mathcal{J}$, $\forall U \in \mathscr{L}(H)$ operador unitario.

Que t sea unitariamente invariante es equivalente a que una traza se anule en los conmutadores, como nos lo dice el lema:

Lema 1.1. *Un funcional lineal $t : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ es una traza si y solo si*

$$t(TS) = t(ST),\ \forall T \in \mathcal{J},\ \forall S \in \mathscr{L}(H),$$

o equivalentemente que $t([T, S]) = 0,\ [T, S] := TS - ST$.

Prueba.
Si $t(TS) = t(ST)$ y $U \in \mathscr{L}(H)$ es unitario, obviamente $t(U^*TU) = t(T)$. Para la otra implicación, basta usar el hecho que todo $S \in \mathscr{L}(H)$ es combinación lineal de cuatro operadores unitarios [72, p. 209]. ■

Ejemplo 1.6. La traza usual es un ejemplo de traza sobre el ideal $S_1(H)$.

Por la observación 1.6, la definición siguiente tiene sentido:

Definición 1.10. Una traza $t : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ es llamada **singular** si $t(F) = 0,\ \forall F \in \mathcal{F}(H)$.

Una particularidad de las trazas singulares es que, como se anulan en el espacio de operadores de rango finito, estas no son extensiones del funcional Tr_1.
Otro hecho importante para estudiar trazas singulares es que toda traza t puede descomponerse de manera única como:

$$t = \alpha \operatorname{Tr} + t_2$$

donde α es una constante positiva, Tr es la traza usual y t_2 es una traza singular.
El resultado anterior puede encontrarse en [2, Proposition 2.3].

1.2.1. Trazas de Dixmier y Connes-Dixmier

Como ejemplo de traza singular tenemos la traza de Dixmier. Para su construcción necesitamos la existencia de un estado singular en ℓ^∞ invariante por el operador dilatación D_2, donde ℓ^∞ es el espacio de sucesiones acotadas.
Por [25, Theorem 4.3] existe un estado w en ℓ^∞ (un funcional lineal positivo en ℓ^∞ tal que $w(1, 1, 1, \cdots) = 1$) tal que para cada $n \geqslant 1$ se tiene

$$w \circ D_n = w \circ T = w \circ H = w$$

donde

$$\begin{aligned}
&T : \ell^\infty \to \ell^\infty,\ T(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots),\\
&H : \ell^\infty \to \ell^\infty,\ H(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \cdots),\\
&D_n : \ell^\infty \to \ell^\infty,\ D_n(x_1, x_2, \cdots) = (\underbrace{x_1, x_1, \cdots, x_1}_{n-\text{veces}}, \underbrace{x_2, x_2, \cdots, x_2}_{n-\text{veces}}, \cdots).
\end{aligned}$$

Observación 1.7.

i) Por [59, Theorem 3.3.1] y [59, Theorem 3.3.4] todo estado w en ℓ^∞ es acotado y $\|w\| = 1$.

ii) Si un estado w en ℓ^∞ es invariante por T entonces $w(a) = 0$ para todo $a \in$CN, donde CN es el espacio de sucesiones con una cantidad finita de términos no nulos. Además como CN es denso en C_0, por continuidad $w(a) = 0$ para todo $a \in C_0$.

iii) Estados w con la propiedad: $w(a) = 0$ para todo $a \in$CN, son llamados estados singulares. Por lo tanto el [25, Theorem 4.3] garantiza la existencia de estados singulares invariantes por D_2.

Conociendo la existencia de estados singulares en ℓ^∞ invariantes por el operador D_2, procedemos a construir la traza de Dixmier.
Para ello consideramos el siguiente ideal de operadores:

$$M_{1,\infty}(H) = \left\{ T \in K(H) \;\; / \;\; \|T\|_{1,\infty} = \sup_{n \geqslant 1} \left\{ \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} s_k(T) \right\} < \infty \right\}$$

Usando las propiedades c) y h) de números singulares se prueba que $M_{1,\infty}(H)$ es un ideal bilátero del álgebra $\mathscr{L}(H)$.
Sea w un estado singular en ℓ^∞ invariante por el operador D_2, definimos sobre $M^+_{1,\infty}(H) = \{T \in M_{1,\infty}(H), T \text{ positivo } \}$ el funcional Tr_w por

$$\mathrm{Tr}_w(T) := w\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} s_k(T) \right) \right).$$

Por la propiedad a) de números singulares, obviamente Tr_w es unitariamente invariante, y por el lema 1.1 restaría probar la linealidad.
En efecto, sean
$T_1,\, T_2 \in M^+_{1,\infty}(H)$, $\alpha_n = \dfrac{1}{\log(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_k(T_1)$, $\beta_n = \dfrac{1}{\log(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_k(T_2)$ y
$\gamma_n = \dfrac{1}{\log(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_n(T_1 + T_2)$.
Por la propiedad h) de números singulares se tiene que

$$\gamma_n \leqslant \alpha_n + \beta_n,$$

lo cual implica que

$$\mathrm{Tr}_w(T_1 + T_2) \leqslant \mathrm{Tr}_w(T_1) + \mathrm{Tr}_w(T_2).$$

Por la propiedad i) de números singulares tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} s_k(T_1) + \sum_{k=1}^{n} s_k(T_2) \leqslant \sum_{k=1}^{2n} s_k(T_1 + T_2),$$

implicando
$$\alpha_n + \beta_n \leqslant \frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)}\gamma_{2n}, \tag{1.8}$$
y como
$$\left(\frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)}\gamma_{2n} - \gamma_{2n}\right) \in C_0$$
entonces
$$w((\gamma_{2n})) = w\left(\left(\frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)}\gamma_{2n}\right)\right). \tag{1.9}$$
Veamos ahora que
$$w((\gamma_{2n})) = w((\gamma_n)). \tag{1.10}$$
En efecto, como w es invariante por D_2, lo que queremos probar es equivalente a que
$$w(\gamma_2, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_4, \cdots) = w((\gamma_n)).$$
Como w es una extensión del límite usual, basta verificar que
$$(\gamma_n) - (\gamma_2, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_4, \cdots) \in C_0.$$
Restando lo anterior tenemos
$$(\gamma_1 - \gamma_2, 0, \gamma_3 - \gamma_4, 0, \gamma_5 - \gamma_6, 0, \cdots),$$
luego veamos que esta última sucesión converge a cero.
Para esto, basta verificar que $(\gamma_{2n-1} - \gamma_{2n}) \in C_0$.
$$\begin{aligned} \gamma_{2n-1} - \gamma_{2n} &= \frac{1}{\log(2n)}\sum_{k=1}^{2n-1} s_k(T_1+T_2) - \frac{1}{\log(2n+1)}\sum_{k=1}^{2n} s_k(T_1+T_2) \\ &= \frac{\log(1+\frac{1}{2n})}{\log(2n+1)}\gamma_{2n-1} - \frac{s_{2n}(T_1+T_2)}{\log(2n+1)} \to 0. \end{aligned}$$
Tomando w en (1.8), y por (1.9) y (1.10) tenemos que
$$\mathrm{Tr}_w(T_1) + \mathrm{Tr}_w(T_2) \leqslant \mathrm{Tr}_w(T_1+T_2),$$
concluimos entonces que Tr_w es una traza sobre el ideal $M^+_{1,\infty}(H)$.

Definición 1.11. La **traza de Dixmier** de un operador autoadjunto $T \in M_{1,\infty}(H)$ está definida por
$$\mathrm{Tr}_w(T) := \mathrm{Tr}_w(T_+) - \mathrm{Tr}_w(T_-)$$
donde $T_+ = \frac{1}{2}(T + |T|)$ y $T_- = -\frac{1}{2}(T - |T|)$ son operadores positivos llamados la **parte positiva** y **negativa** de T respectivamente, donde $|T|$ denota la raíz cuadrada del operador T^*T.

La traza de Dixmier de un operador arbitrario $T \in M_{1,\infty}(H)$ es

$$\mathrm{Tr}_w(T) := \mathrm{Tr}_w(\mathrm{Re}(T)) + i\,\mathrm{Tr}_w(\mathrm{Im}(T))$$

donde $\mathrm{Re}(T) = \frac{1}{2}(T + T^*)$ y $\mathrm{Im}(T) = -\frac{i}{2}(T - T^*)$ son operadores autoadjuntos llamados la **parte real** e **imaginaria** de T respectivamente.

Proposición 1.1.

1) Tr_w *es una traza sobre el ideal* $M_{1,\infty}(H)$.

2) $\mathrm{Tr}_w(T) = 0$, $\forall T \in S_1(H)$.

3) Tr_w *es un funcional lineal continuo con la norma* $\|\cdot\|_{1,\infty}$, *mas precisamente,*

$$|\,\mathrm{Tr}_w(T)| \leqslant \|T\|_{1,\infty}, \forall T \in M_{1,\infty}(H)$$

Prueba.

1) Todo $T \in M_{1,\infty}(H)$ puede escribirse como $T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4$ donde $T_1 = (\mathrm{Re}(T))_+$, $T_2 = (\mathrm{Re}(T))_-$, $T_3 = (\mathrm{Im}(T))_+$, $T_4 = (\mathrm{im}(T))_-$ son operadores positivos en $M_{1,\infty}(H)$. Como Tr_w es aditivo en $M^+_{1,\infty}(H)$, entonces Tr_w es un funcional lineal en todo $M_{1,\infty}(H)$. Que el funcional lineal Tr_w sea unitariamente invariante se sigue del hecho que $s_n(U^+TU) = s_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $U \in \mathscr{L}(H)$ operador unitario.

2) Basta ver que si $T \in S_1(H)$ es positivo entonces $\mathrm{Tr}_w(T) = 0$.

En efecto, como $T \in S_1(H)$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty$ luego

$$\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} s_k(T) \leqslant \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} s_k(T)$$

teniendo que

$$\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} s_k(T) \to 0$$

por lo tanto $\mathrm{Tr}_w(T) = 0$.

3) Por la observación 1.7, basta usar el hecho que w es un funcional lineal acotado con $\|w\| = 1$ y por lo tanto

$$|\mathrm{Tr}_w(T)| \leqslant \|T\|_{1,\infty}, \;\; \forall T \in M^+_{1,\infty}(H)$$

el cual permite establecer la desigualdad para todo T en $M_{1,\infty}(H)$.

■

Observación 1.8.

i) Es importante mencionar que el conjunto de todas las trazas de Dixmier en $M_{1,\infty}(H)$ es equivalente al conjunto de todos los funcionales completamente simétricos en este espacio, este resultado es el aporte principal de [63].

ii) Por [77, Theorem 7.3.1] la fórmula de Lidskii [71, XI.11] puede ser extendida a trazas de Dixmier en el ideal $M_{1,\infty}(H)$. Esto es, si $A \in M_{1,\infty}(H)$ entonces

$$\text{Tr}_w(A) = w\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)\right).$$

En general se cumple, si $\Psi : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ es una función cóncava creciente con

$$\lim_{t\to 0^+}\Psi(t) = 0,\ \lim_{t\to+\infty}\Psi(t) = \infty \text{ y } \liminf_{t\to+\infty}\frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} = 1$$

entonces por [77, Lemma 6.3.4] existe un estado w singular invariante por D_2 en ℓ^∞ tal que

$$w\left(\frac{n\Psi'(n)}{\Psi(n)}\right) = 0.$$

Con ello tenemos el ideal de Banach

$$M_\Psi = \left\{T \in K(H)\ \ /\ \ \|T\|_{M_\Psi} = \sup_{n\geqslant 1}\left\{\frac{1}{\Psi(n)}\sum_{k=1}^{n}s_k(T)\right\} < \infty\right\}.$$

Asociado a w, sobre $M_\Psi^+ = \{T \in M_\Psi,\ T \text{ positivo}\}$ el funcional

$$Tr_w(T) = w\left(\frac{1}{\Psi(n)}\sum_{k=1}^{n}s_k(T)\right)$$

se extiende por linealidad a una traza singular a todo M_Ψ. (Ver [77, Theorem 6.3.3]).
Connes sugirió otra manera de obtener estados invariantes por el operador D_2.
El proceso es el siguiente:
Sea el operador acotado

$$M : \ell^\infty \to \ell^\infty,\ M((x_n)) = \left(\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\right),$$

y considere γ un estado singular, es decir, un estado que se anula en CN.

Por [68, Lemma 3.3] se tiene que

$$MD_2x - Mx \in C_0,\ \forall x \in \ell^\infty. \tag{1.11}$$

Tenemos entonces por (1.11) y la continuidad de γ que

$$\gamma MD_2 = \gamma M.$$

Sea ahora $w = \gamma M$, entonces w es un estado singular invariante por D_2.
La traza de Dixmier asociada al estado w construida de esta forma recibe el nombre de traza de Connes-Dixmier.
Según lo explicado, tenemos que el conjunto de trazas de Dixmier $\mathcal{D}$ contiene el conjunto de Connes-Dixmier $\mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, donde

$$\mathcal{C} = \{\mathrm{Tr}_w \ \ /\ \ w = \gamma \circ M; ,\ \gamma \text{ es un estado singular}\},$$

$$\mathcal{D} = \{\mathrm{Tr}_w \ \ /\ \ w \text{ es un estado singular invariante por } D_2\}.$$

Observación 1.9.
Por [78, Theorem 2.2] la inclusión de arriba es propia.

Otro aspecto importante del estudio de trazas de Dixmier y Connes-Dixmier es la noción de operadores medibles introducido por A. Connes [26].

Definición 1.12. $T \in M_{1,\infty}(H)$ es llamado Dixmier medible si $\mathrm{Tr}_w(T)$ toma el mismo valor para toda $\mathrm{Tr}_w \in \mathcal{D}$. Un operador $T \in M_{1,\infty}(H)$ es llamado Connes-Dixmier medible si $\mathrm{Tr}_w(T)$ toma el mismo valor para toda $\mathrm{Tr}_w \in \mathcal{C}$.

Sea $(a_n) \in C_0$, en lo que sigue diag$((a_n))$ denota el siguiente operador

$$\mathrm{diag}((a_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \otimes e_n,\ \ (e_n \otimes e_n)(x) = \langle x, e_n \rangle e_n,$$

donde (e_n) es una base ortonormal de H.

Ejemplo 1.7.

1) Sea el operador

$$T = \mathrm{diag}\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Claramente T es positivo y $s_n(T) = \dfrac{1}{n}$.

Como
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$$
entonces
$$\mathrm{Tr}_w(T)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$$
para todo $\mathrm{Tr}_w\in\mathcal{D}$, luego T es Dixmier medible.

2) Consideramos un operador que no sea Dixmier medible
$$T=\mathrm{diag}((a_n))$$
con $a_n\to 0$ y $a_n\geqslant 0$, $\forall n\geqslant 1$.

Sea
$$B=\mathrm{diag}((b_n)),\ (b_n)=(a_1,-a_1,a_2,-a_2,\cdots).$$
Como
$$B_+=\mathrm{diag}((c_n)),\ (c_n)=(a_1,0,a_2,0,\cdots)$$
$$B_-=\mathrm{diag}((d_n)),\ (d_n)=(0,a_1,0,a_2,\cdots)$$
entonces para todo $\mathrm{Tr}_w\in\mathcal{D}$ se tiene
$$\mathrm{Tr}_w(B)=\mathrm{Tr}_w(B_+)-\mathrm{Tr}_w(B_-)=0,$$
por lo tanto B es Dixmier medible, pero B_+ y B_- no lo son.

3) Sea $V:L^2[0,1]\to L^2[0,1]$ el operador integral
$$(Vf)(t)=2i\int_0^t f(s)ds.$$
Tomando
$$k(t,s)=\begin{cases}1\ ,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\\ 0\ ,\ s>t\end{cases}$$
vemos, por el ejemplo 1.2, que $V\in S_2(L^2[0,1])$.

Como
$$(V^*f)(t)=-2i\int_t^1 f(s)ds$$
entonces
$$(V^*Vf)(t)=4\int_t^1\left(\int_0^s f(n)dn\right)ds.$$

Si

$$4\int_t^1 \left(\int_0^s f(n)dn\right) ds = \lambda f(t),\ \lambda > 0$$

entonces

$$\lambda f'' + 4f = 0,\ f(1) = f'(0) = 0.$$

luego la solución general de la ecuación diferencial es

$$f(t) = ae^{\frac{2it}{\sqrt{\lambda}}} + be^{\frac{-2it}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Usando las condiciones iniciales se tiene que

$$s_k(V) = \sqrt{\lambda} = \frac{4}{(2k-1)\pi},\ k = 1, 2, \cdots .$$

Esto nos dice que

$$V \in M_{1,\infty}(L^2[0,1]).$$

Finalmente si

$$Vf = \lambda f,\ f \neq 0$$

entonces

$$\int_0^t f(s)ds = \lambda f(t).$$

Luego

$$f(t) = \lambda f'(t),\ f(0) = 0,$$

por lo tanto $f = 0$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto el espectro de V es el cero, y por la observación 1.8, $ii)$ se tiene que V es Dixmier medible y

$$\text{Tr}_w(V) = 0,\ \forall \text{Tr}_w \in \mathcal{D}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} (\text{Re}(V)f)(t) &= i\int_0^1 \text{sign}(t-s)f(s)ds, \\ (\text{Im}(V)f)(t) &= \int_0^1 f(s)ds, \end{aligned}$$

luego la parte imaginaria de V es un operador de rango 1 con autovalor $\lambda = 1$ y correspondiente autofunción $f = 1$. Un trabajo similar a lo hecho para V demuestra que

$$\lambda_k(\text{Re}(V)) = \frac{2}{(2k-1)\pi},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

y por lo tanto

$$s_k(\text{Re}(V)) = \frac{2}{(2k-1)\pi},\ k = 1, 2, \cdots$$

Por [39, Ch. III, Theorem 2.1], para cada n se cumple

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\text{Re}(V)_-) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\text{Re}(V)_+) = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1},$$

lo que nos permite afirmar que $\text{Re}(V)_-$ y $\text{Re}(V)_+$ son no nucleares. Finalmente como

$$V = \text{Re}(V) + i\text{Im}(V),$$

entonces $R(\text{tr}\, V)$ es una línea recta (apéndice A).

Observación 1.10.

i) Es claro que el conjunto de operadores Dixmier medibles y Connes-Dixmier medibles son subespacios cerrados de $M_{1,\infty}(H)$.

ii) Obviamente, todo operador Dixmier medible es Connes-Dixmier medible.

El siguiente resultado puede encontrarse en [25, Theorem 6.6] y [25, Theorem 6.7] el cual afirma que:

Teorema 1.11. *Un operador positivo $T \in M_{1,\infty}(H)$ es Dixmier medible si y solo si es Connes-Dixmier medible si y solo si el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(T)$$

existe.

Los siguientes teoremas caracterizan a los operadores Dixmier medibles sobre los ideales de operadores $M_{1,\infty}(H)$ y $\mathscr{L}^{1,\infty}(H)$ donde

$$\mathscr{L}^{1,\infty}(H) = \{T \in K(H)\ /\ \|T\|_\infty = \sup_{n\geqslant 1}\{ns_n(T)\}\},$$

y pueden encontrarse en [82, Theorem 4] y en [77, Theorem 9.7.5].

Teorema 1.12. *Un operador $T \in M_{1,\infty}(H)$ es Dixmier medible si y solo si el límite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\log(k+1)} \sum_{i=1}^{k} \tilde{s}_{[\alpha i]}(T)$$

existe uniformemente en $\alpha \geqslant 1$ donde

$$\tilde{s}_k(T) = s_k(T_1) - s_k(T_2) + is_k(T_3) - is_k(T_4)$$

con $T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4$, $T_j \in M_{1,\infty}(H)$ operadores positivos, $j = 1, 2, 3, 4$.

Teorema 1.13. *Un operador $T \in \mathscr{L}^{1,\infty}(H)$ es Dixmier medible si y solo si el límite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(T)$$

existe.

Terminamos esta sección con la observación:

Observación 1.11.

i) Teniendo en cuenta el teorema 1.11 es natural preguntarse si el conjunto de operadores Dixmier medibles y Connes-Dixmier medibles coinciden. La respuesta a esta pregunta es afirmativa en el ideal de operadores cuasibanach $\mathscr{L}^{1,\infty}(H)$, ver [76, Theorem 7.7].

ii) La traza de Dixmier para operadores Hankel sobre el espacio de Bergman del disco unitario cerrado es estudiada en [30], donde se obtiene una fórmula similar a (1.5).

iii) Por [77, Corollary 5.7.7], toda traza en $\mathscr{L}^{1,\infty}(H)$ es singular.

iv) Un operador $T \in M_{1,\infty}(H)$ es llamado **tauberiano** si el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(T)$$

existe. Por el teorema 1.11 todo operador positivo $T \in M_{1,\infty}(H)$ es tauberiano si y solo si es Dixmier medible.

Si $T \in \mathscr{L}^{1,\infty}(H)$, entonces T es tauberiano si y solo si es Dixmier medible. Sin embargo, por [77, Example 9.7.6] existe un operador Dixmier medible $T \in M_{1,\infty}(H)$ que no es tauberiano.

1.2.2. Operadores excéntricos y excéntricos generalizados

Probar la existencia de trazas singulares que son no triviales en un operador compacto T, es decir, sobre el ideal generado por T en $\mathscr{L}(H)$ es un trabajo difícil. Basándonos en [2] daremos discusión a este problema.

En lo que sigue $\delta_n(T) := \sum_{k=1}^{n} s_k(T)$ y $\mu_n(T) := \begin{cases} \delta_n(T), \ T \notin S_1(H) \\ \delta_n(T) - \mathrm{Tr}(|T|), \ T \in S_1(H) \end{cases}$.

Definición 1.13. Un operador $T \in K(H)$ es llamado

i) **regular** si $\left(\dfrac{\delta_n(T)}{ns_n(T)}\right) \in \ell^\infty$,

ii) **irregular** si no es regular,

iii) **excéntrico** si es irregular no nuclear,

iv) **excéntrico generalizado** si 1 es un punto límite de la sucesión $\left(\dfrac{\mu_{2n}(T)}{\mu_n(T)}\right)$.

Usando la concavidad de la sucesión $(\delta_n(T))$, se prueba el siguiente lema [79, Lemma 1]:

Lema 1.2. *Para un operador $T \in K(H)$ son equivalentes:*

i) T es irregular,

ii) $\inf\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\delta_{2n}(T)}{\delta_n(T)} = 1$

iii) $\inf\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\delta_{kn}(T)}{\delta_n(T)} = 1, \ \forall k \in \mathbb{N}$,

iv) $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\delta_{3kn_k}(T)}{\delta_{n_k}(T)} = 1$ *para alguna sucesión creciente (n_k) de números naturales.*

El siguiente lema nos da una condición equivalente a que T sea excéntrico generalizado.

Lema 1.3. *$T \in K(H)$ es excéntrico generalizado si y sólo si existe una sucesión creciente (P_k) de números naturales tal que* $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\mu_{kP_k}(T)}{\mu_{P_k}(T)} = 1$.

Prueba.
Usando la concavidad de la sucesión $(\delta_n(T))$, obviamente la sucesión $(\mu_n(T))$ también lo es, esto es:

$$\left(\frac{k-2}{k-1}\right)\mu_n(T) + \frac{1}{k-1}\mu_{kn}(T) \leqslant \mu_{2n}(T), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall k \geqslant 2.$$

Si asumimos que $T \notin S_1(H)$, entonces dividiendo la desigualdad anterior entre $\delta_n(T)$ tenemos que

$$1 - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1}\left(\frac{\delta_{kn}(T)}{\delta_n(T)}\right) \leqslant \frac{\delta_{2n}(T)}{\delta_n(T)},$$

luego

$$\frac{\delta_{kn}(T)}{\delta_n(T)} - 1 \leqslant (k-1)\left(\frac{\delta_{2n}(T)}{\delta_n(T)} - 1\right).$$

Si asumimos ahora que $T \in S_1(H)$, de forma similar llegamos a que

$$(k-1)\left(\frac{\mu_{2n}(T)}{\mu_n(T)} - 1\right) \leqslant \frac{\mu_{kn}(T)}{\mu_n(T)} - 1.$$

Con todo esto, tenemos que

$$\left|1 - \frac{\mu_{kn}(T)}{\mu_n(T)}\right| \leqslant (k-1)\left|1 - \frac{\mu_{2n}(T)}{\mu_n(T)}\right|, \ \forall k, n \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Suponiendo que T es excéntrico generalizado, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una sucesión (P_k) tal que

$$\left|1 - \frac{\mu_{2P_k}(T)}{\mu_{P_k}(T)}\right| \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

Entonces en (1.12) tenemos que

$$\left|1 - \frac{\mu_{kP_k}(T)}{\mu_{P_k}(T)}\right| \leqslant \frac{k-1}{k^2},$$

concluyendo que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mu_{kP_k}(T)}{\mu_{P_k}(T)} = 1.$$

Para la otra implicación basta observar que

$$1 \leqslant \frac{\mu_{2P_k}(T)}{\mu_{P_k}(T)} \leqslant \frac{\mu_{kP_k}(T)}{\mu_{P_k}(T)}, \forall\, k \geqslant 2.$$

■

Que un operador sea excéntrico generalizado puede reformularse de la siguiente manera:

Lema 1.4. *$T \in K(H)$ es excéntrico generalizado si y sólo si el cero es punto límite de la sucesión* $\left(\dfrac{ns_n(T)}{\mu_n(T)}\right)$.

Prueba.

Caso 1. Si $T \notin S_1(H)$.

Como

$$0 < \frac{\delta_{2n}(T)}{\delta_n(T)} - 1 = \frac{s_{n+1}(T) + \cdots + s_{2n}(T)}{\delta_(T)} \leqslant \frac{s_n(T) + \cdots + s_n(T)}{\delta_n(T)} = \frac{ns_n(T)}{\delta_n(T)}$$

entonces

$$0 < \frac{\delta_{2n}(T)}{\delta_n(T)} - 1. \tag{1.13}$$

Como

$$
\begin{aligned}
0<\frac{2ns_{2n}(T)}{\delta_{2n}(T)} &= \frac{2\left(\overbrace{s_{2n}(T)+\cdots+s_{2n}(T)}^{n-\text{veces}}\right)}{\delta_{2n}(T)} \leqslant \frac{2(s_{n+1}(T)+s_{n+2}(T)+\cdots+s_{2n}(T))}{\delta_{2n}(T)}\\
&= \frac{2(\delta_{2n}(T)-\delta_n(T))}{\delta_{2n}(T)} = 2\left(1-\frac{\delta_n(T)}{\delta_{2n}(T)}\right)
\end{aligned}
$$

entonces

$$0<\frac{2ns_{2n}(T)}{\delta_{2n}(T)} \leqslant 2\left(1-\frac{\delta_n(T)}{\delta_{2n}(T)}\right). \tag{1.14}$$

De (1.13) y (1.14) se tiene el resultado.

Caso 2. Si $T \in S_1(H)$.

Similarmente al caso 1, llegamos a las desigualdades

$$\left|\frac{\mu_{2n}(T)}{\mu_n(T)}-1\right| \leqslant \left|\frac{ns_n(T)}{\mu_n(T)}\right|,$$

$$\left|\frac{2ns_{2n}(T)}{\mu_{2n}(T)}\right| \leqslant 2\left|1-\frac{\mu_n(T)}{\mu_{2n}(T)}\right|$$

y por lo tanto el resultado. ∎

Observación 1.12.

Por el Lema 1.2, $iv)$ se tiene que todo operador nuclear es irregular.

Observación 1.13.

Si $T \notin S_1(H)$, por los Lemas 1.2 y 1.3, el operador T es irregular si y solo si es excéntrico generalizado.

Ejemplo 1.8.

Sea (e_n) una base ortonormal de H, entonces

i) $D_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \otimes e_n$ es irregular no nuclear, y por la observación 1.13, D_1 es excéntrico generalizado.

ii) $D_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e_n \otimes e_n$ no es excéntrico generalizado, para esto basta ver que $\mu_n(D_2) = -\frac{1}{2^n}$ y usar el Lema 1.4.

iii) $D_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} e_n \otimes e_n$, $0<r<1$ es no nuclear y regular, y por la observación 1.13, D_3 no es excéntrico generalizado.

El ideal generado por un operador $T \in \mathscr{L}(H)$ es el conjunto

$$(T) = \bigcup_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{r} A_i T B_i ;\ A_i, B_i \in \mathscr{L}(H),\ i = 1, 2, \cdots, r. \right\}$$

Sea la terna $\Omega = (T, w, (n_k))$, donde T es un operador excéntrico generalizado, w es un estado singular en ℓ^∞ y $n_k = kP_k$, donde (P_k) es la sucesión de números naturales dada en el Lema 1.3.

Asociada a la terna Ω, sobre $(T)^+ = \{T \in (T),\ T \text{ positivo}\}$ definimos el funcional t_Ω por

$$t_\Omega(A) := w\left(\left(\frac{\mu_{n_k}(A)}{\mu_{n_k}(T)}\right)\right).$$

Por [2, Theorem 2.11] se tiene que t_Ω se extiende por linealidad a una traza singular sobre todo el ideal (T), en este caso, como $s_n(T) = s_n(|T|)$ se tiene que $t_\Omega(|T|) = 1$.

Recíprocamente, si existe una traza singular t tal que $0 < t(|T|) < \infty$ entonces T es excéntrico generalizado, ver [2, Theorem 2.10].

Observación 1.14.

i) Si T es de rango finito entonces T no es excéntrico generalizado, ya que si lo fuese, debería existir una traza singular t tal que $t(|T|) = 1$. Pero como $|T|$ es de rango finito y t es singular entonces $t(|T|) = 0$, lo cual es una contradicción.

ii) Si $T \in K(H)$ entonces por [49, Theorem 3.1] existe un operador excéntrico generalizado B tal que $T \in (B)_0$, donde $(B)_0 = \{A \in (B) /$ existe un operador positivo $P \in (B)$ tal que para todo $\varepsilon > 0, \exists F_\varepsilon \in \mathcal{F}(H)$ con $|A| < \varepsilon P + F_\varepsilon\}$

Terminemos esta sección con el siguiente problema.

¿La suma de operadores excéntricos generalizados es excéntrico generalizado?

Para responder esto, usaremos [80, Theorem 2]:

Teorema 1.14 (Har Krishan Vasudeva)**.** *Sean (λ_k) y (u_k) dos sucesiones monótonas diferentes de números reales, donde cada una tiene a cero como el único punto límite. Asuma que $u_j \in (\lambda_j, \lambda_{j+1})$ para cada j y $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - \lambda_n)$ converge.*

Sea A un operador compacto autoadjunto en un espacio de Hilbert H tal que λ_j son sus autovalores. Entonces existe un elemento x normalizado y una correspondiente proyección P unidimensional tal que para un apropiado $t > 0$ el operador $B = A + tP$ tiene como autovalores u_i.

Para responder a la pregunta anterior, consideremos las sucesiones $(\lambda_n) = (-\frac{1}{2n-1})$ y $(u_n) = (-\frac{1}{2n})$. Es claro que las sucesiones (λ_n) y (u_n) satisfacen las hipótesis del teorema 1.14. Si tomamos el operador diagonal

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2n-1} e_n \otimes e_n,$$

donde (e_n) es una base ortonormal de H, el teorema 1.14 nos garantiza la existencia de un operador

$$B = A + tP,$$

donde P es una proyección unidimensional, $t > 0$ y B tiene como autovalores $(u_n) = (-\frac{1}{2n})$.

Es claro que $s_n(A) = \frac{1}{2n-1}$, $s_n(B) = \frac{1}{2n}$ y por el ejemplo 1.5, i), A y B son excéntricos generalizados.

Como $A - B = tP$, entonces $A - B$ es de rango 1, y por la observación 1.14, $A - B$ no puede ser excéntrico generalizado. Así concluimos que la clase de operadores excéntricos generalizados no admite estructura de subespacio vectorial.

1.3. Determinantes

En el teorema 1.1 hemos visto que todo operador $F \in \mathcal{F}(X)$ sobre un espacio de Banach X admite la representación:

$$F = \sum_{k=1}^{n} f_k \otimes \varphi_k.$$

Ello permite definir el funcional det$(I + \cdot)$ sobre $\mathcal{F}(X)$ por

$$\text{det}(I + F) := \det(\delta_{jk} + \langle \varphi_j, f_k \rangle)_{j,k=1}^{n} \tag{1.15}$$

donde

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}.$$

Se prueba que el funcional $\det(I + \cdot)$ no depende de la representación de F, es un funcional multiplicativo y

$$\det(I + FK) = \det(I + KF).$$

Además por [67, 4.3.22] se tiene que

$$\det(I+F)=\prod_k(1+\lambda_k(F))$$

donde $(\lambda_k(T))$ son los valores propios no nulos de T teniendo en cuenta sus multiplicidades algebraicas.

Ejemplo 1.9.
Sea $X=L^p[a,b],\ p\geqslant 1$. Si $T\in\mathcal{F}(X)$ es de rango n entonces

$$T=\sum_{k=1}^{n} g_k\otimes\psi_k.$$

De forma similar al ejemplo 1.1, para cada $g_k\in X^*$ existe $\varphi_k\in L^q[a,b]$ tal que

$$\langle f,g_k\rangle=\int_a^b f(s)\varphi_k(s)ds,\ \forall f\in X,$$

luego

$$(Tf)(t)=\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)\psi_k(s)\right)f(s)ds.$$

Si

$$K(t,s)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)\psi_k(s)$$

y desarrollamos (1.15) se tiene

$$\det(I+T)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\det(\langle\varphi_{i_p},f_{i_q}\rangle)_{p,q=1}^{k}.$$

Desarrollando la última sumatoria concluimos que

$$\det(I+T)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\int_{[a,b]^k}\det\begin{pmatrix}K(t_1,t_1)&\cdots&K(t_1,t_k)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ K(t_k,t_1)&\cdots&K(t_k,t_k)\end{pmatrix}dt_1\cdots dt_k$$

llamada la **forma de Fredholm** del determinante.

Sea $F\in\mathcal{F}(X)$ un operador de rango n y $\lambda\in\mathbb{C}$, entonces

$$\det(I+\lambda F)=\prod_{k=1}^{n}(1+\lambda\lambda_k(F))=1+\sum_{k=1}^{n}d_k\lambda^k$$

es un polinomio en λ.
La fórmula de Plemelj-Smithies [36, Ch. I, Theorem 7.2] permite expresar d_k en términos de $\mathrm{Tr}_1(F),\mathrm{Tr}_1(F^2),\cdots$ como sigue:

Teorema 1.15 (Fórmulas de Plemelj-Smithies). *Sea $F \in \mathcal{F}(X)$ de rango n y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\det(I + \lambda F) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k(F)}{k!} \lambda^k,$$

donde

$$c_k(F) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}_1(F) & k-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{Tr}_1(F^2) & \mathrm{Tr}_1(F) & k-2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \mathrm{Tr}_1(F^k) & \mathrm{Tr}_1(F^{k-1}) & \cdots & \cdots & \cdots & \mathrm{Tr}_1(F) \end{pmatrix}.$$

Parece natural extender el determinante $\det(I + \cdot)$ de $\mathcal{F}(X)$ a su clausura con la norma de operadores en $\mathscr{L}(X)$, como sigue:
Si $F_n \to T$ en $\mathscr{L}(X)$, $(F_n) \subset \mathcal{F}(x)$ entonces $\lim\limits_{n \to +\infty} \det(I + F_n)$ existe, y $\det(I+T)$ estaría definido como este límite. Sin embargo, puede suceder que:
Sea X un espacio de Banach con base de Schauder (w_n) y (f_n) su correspondiente sistema biortogonal. Sea

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \text{ con } S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \otimes w_k.$$

Como la sucesión $(\|S_n\|)$ es acotada entonces $F_n \to 0$. Pero

$$\begin{aligned} \det(I + F_n) &= \det \left(\delta_{jk} + \frac{1}{\sqrt{n}} \langle w_j, f_k \rangle \right)_{j,k=1}^{n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \to \infty \end{aligned}$$

y

$$\mathrm{Tr}_1(F_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \langle w_k, f_k \rangle = \frac{n}{\sqrt{n}} \to \infty.$$

Es por esto que surge el problema de definir el determinante y traza sobre ciertas subálgebras normadas de $\mathscr{L}(X)$.

Definición 1.14. Una subálgebra D de $\mathscr{L}(X)$ es llamada **sumergida continuamente** si existe una norma $\| \cdot \|_D$ en D tal que

1. $\|A\| \leqslant C\|A\|_D, \ \forall A \in D$, para alguna $C > 0$.

2. $\|AB\|_D \leqslant \|A\|_D \|B\|_D, \forall A, B \in D$.

Si adicionalmente, $\mathcal{F}_D = \mathcal{F}(X) \cap D$ es denso en D respecto a la norma $\|\cdot\|_D$, diremos que D tiene la propiedad de aproximación.

El siguiente teorema puede encontrarse en [36, Ch. II, Theorem 2.1] y establece las condiciones que permite extender continuamente la traza y determinante de $\mathcal{F}_D$ a D.

Teorema 1.16. *Sea $D \subset \mathscr{L}(X)$ un subálgebra sumergida continuamente con la propiedad de aproximación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) La función $\det(I + \cdot) : \mathcal{F}_D \to \mathbb{C}$ admite una extensión continua de $\mathcal{F}_D$ a D con la norma $\|\cdot\|_D$.

b) La función $\det(I + \cdot)$ definida en $\mathcal{F}_D$ es continua en $F = 0$ con la norma $\|\cdot\|_D$.

c) El funcional lineal $\mathrm{Tr}_1(F)$ es acotado en $\mathcal{F}_D$ con la norma $\|\cdot\|_D$.

Sea $D \subset \mathscr{L}(X)$ un subálgebra sumergida continuamente con la propiedad de aproximación de tal manera que se cumpla una de las condiciones equivalentes del teorema.

Definimos la traza del operador $T \in D$ y el determinante del operador $I + T$ en D por

$$\det{}_D(I + T) = \lim_{n\to\infty} \det(I + F_n) \text{ y } \mathrm{Tr}_D(T) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}_1(F_n),$$

donde $\|F_n - T\|_D \to 0$ y $(F_n) \subset \mathcal{F}_D$.

Sea H un espacio de Hilbert separable y $S_1(H)$ el ideal de operadores de clase traza. Usando las propiedades de números singulares es claro que $S_1(H)$ con la norma $\|\cdot\|_1$ es un subálgebra sumergida continuamente y tiene la propiedad de aproximación ya que si $T \in S_1(H)$ y

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x, x_n \rangle y_n$$

es la representación Hilbert-Schmidt de T y definimos

$$F_n x = \sum_{k=1}^{n} s_k(T) \langle x, x_k \rangle y_k,$$

entonces

$$\|T - F_n\|_1 = \sum_{k>n} s_k(T) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Finalmente si $F \in \mathcal{F}(H)$ es de rango n, por la desigualdad de Weyl dada en la página 12 y la observación 1.1 se tiene

$$|\,\mathrm{Tr}_1(F)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(F)\right| \leqslant \|F\|_1.$$

Asi el funcional Tr_1 es acotado en $\mathcal{F}_{S_1(H)} = \mathcal{F}(H)$ con la norma $\|\cdot\|_1$, y por el teorema 1.16 los funcionales Tr_1 y $\det(I+\cdot)$ se pueden extender continuamente de $\mathcal{F}(H)$ a $S_1(H)$.
Preservaremos las notaciones Tr_1 y $\det$ para esta traza y determinante extendida:
Si $T \in S_1(H)$ tenemos

$$\mathrm{Tr}_1(T) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}_1(F_n),\ \det(I+T) = \lim_{n\to\infty} \det(I+F_n),$$

donde $(F_n) \subset \mathcal{F}(H)$ y $\|T - F_n\|_1 \to 0$.
Esta traza y determinante extendida satisfacen las siguientes propiedades de la traza y determinante discutidas para operadores de rango finito, es decir, si $T, S \in S_1(H)$ entonces

- $\mathrm{Tr}_1(TS) = \mathrm{Tr}_1(ST)$
- $\det(I+TS) = \det(I+ST)$
- $\det((I+T)(I+S)) = \det(I+T)\cdot\det(I+S)$.

Observación 1.15.
Si $T \in S_1(H)$ entonces la traza dada por el límite de arriba admite la representación

$$\mathrm{Tr}_1(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T\varphi_n, \varphi_n\rangle$$

para alguna (o cualquier) base ortonormal (φ_n) de H y por lo tanto este funcional es el mismo que la traza usual Tr introducida en la página 13.

Usando el teorema 1.16 y las fórmulas de Plemelj-Smithies para operadores de rango finito se tiene.

Teorema 1.17 (Fórmulas de Plemelj-Smithies)**.** *Si $T \in S_1(H)$ entonces $\det(I+\lambda T)$ es una función entera con serie de Taylor*

$$\det(I+\lambda T) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(T)}{n!}\lambda^n,$$

donde

$$c_n(T) = \det\begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(T) & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{Tr}(T^2) & \mathrm{Tr}(T) & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \mathrm{Tr}(T^n) & \mathrm{Tr}(T^{n-1}) & \cdots & \cdots & \mathrm{Tr}(T) \end{pmatrix}.$$

Adicionalmente por [36, Ch. IV, Theorem 4.1] se cumple

$$\det(I+T) \leqslant e^{\|T\|_1}.$$

En el contexto de operadores integrales en $L^2[a,b]$ de clase traza con núcleo $k \in C([a,b] \times [a,b])$, y usando la forma de Fredholm del determinante para operadores de rango finito se deduce que:

$$\det(I+T) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n(T),$$

donde

$$a_n(T) = \int_{[a,b]^n} \det \begin{pmatrix} k(t_1,t_1) & \cdots & k(t_1,t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(t_n,t_1) & \cdots & k(t_n,t_n) \end{pmatrix} dt_1 \cdots dt_n$$

llamado el **determinante de Fredholm** de T.

A continuación haremos una breve discusión de los determinantes regularizados.

Definición 1.15. Sea X un espacio de Banach y $F \in \mathcal{F}(X)$. Definimos

$$\det_2(I+F) = \det(I+F)e^{-\operatorname{Tr}_1(F)}.$$

Hemos visto que el funcional $\det(I+\cdot)$ no puede extenderse continuamente de $\mathcal{F}(X)$ a su clausura con la norma de operadores. Lo mismo sucede con el funcional $\det_2(I+\cdot)$, basta considerar un espacio de Banach X con base de Schauder (w_n), con sistema biortogonal (f_n), definir

$$F_n = \frac{i}{\sqrt[3]{n}} S_n \text{ con } S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \otimes w_k$$

y verificar que

$$\|F_n\| \to 0 \text{ pero } \det_2(I+F_n) \to \infty.$$

El siguiente teorema puede encontrarse en [36, Ch. IX, Theorem 2.1] y establece las condiciones que permite extender continuamente el $\det_2(I+\cdot)$ de $\mathcal{F}_D$ a D donde D es un subálgebra sumergida continuamente con la propiedad de aproximación.

Teorema 1.18. *Sea $D \subset \mathscr{L}(X)$ un subálgebra sumergida continuamente, con la norma $\|\cdot\|_D$, con la propiedad de aproximación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) La función $\det_2(I+\cdot):\mathcal{F}_D\to\mathbb{C}$ *admite una extensión continua de* $\mathcal{F}_D$ *a* D *con la norma* D.

b) La forma cuadrática $\operatorname{Tr}_1(F^2)$ *es acotada en* $\mathcal{F}_D$*, es decir, existe una constante* $C>0$ *tal que*

$$|\operatorname{Tr}_1(F^2)|\leqslant\alpha\|F\|_D^2.$$

c) El funcional bilineal $\operatorname{Tr}_1(F_1F_2)$ *es acotado en* $\mathcal{F}_D\times\mathcal{F}_D$ *con la norma* D*, es decir, existe una constante* $C>0$ *tal que*

$$|\operatorname{Tr}_1(F_1F_2)|\leqslant C\|F_1\|_D\|F_2\|_D$$

para todo $F_1,F_2\in\mathcal{F}_D$.

Sea H un espacio de Hilbert separable y $S_2(H)$ el ideal de operadores Hilbert-Schmidt. Usando las propiedades de números singulares es claro que $S_2(H)$ con la norma $\|\cdot\|_2$ es un subálgebra sumergida continuamente con la propiedad de aproximación. Además si $F\in\mathcal{F}(H)$ es de rango n, la desigualdad de Weyl y la observación 1.1 nos permiten deducir que

$$\left|\operatorname{Tr}_1(F^2)\right|\leqslant\|F\|_2^2.$$

Así la forma cuadrática $\operatorname{Tr}_1(F^2)$ es acotada en $\mathcal{F}_{S_2(H)}=\mathcal{F}(H)$ con la norma $\|\cdot\|_2$ y por el teorema 1.18 el funcional $\det_2(I+\cdot)$ admite extensión continua de $\mathcal{F}(H)$ a $S_2(H)$ con la norma $\|\cdot\|_2$. Preservaremos la notación $\det_2(I+\cdot)$ para este funcional extendido:
Si $T\in S_2(H)$ tenemos

$$\det_2(I+T)=\lim_{n\to\infty}\det_2(I+F_n),$$

donde $(F_n)\subset\mathcal{F}(H)$ y $\|T-F_n\|_2\to 0$.
El siguiente teorema puede encontrarse en [36, Ch. IX, Theorem 3.1] y expresa el $\det_2(I+\cdot)$ sobre el álgebra de operadores Hilbert-Schmidt $S_2(H)$ en función de $\operatorname{Tr}(A^2)$, $\operatorname{Tr}(A^3),\cdots$ como sigue:

Teorema 1.19 (Fórmulas de Plemelj-Smithies)**.** *Si* $T\in S_2(H)$ *entonces* $\det_2(I+\lambda T)$ *es una función entera con serie de Taylor*

$$\det{}_2(I+\lambda T)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}c_n(T)\lambda^n,$$

donde

$$c_n(T) = \det \begin{pmatrix} 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathrm{Tr}(A^2) & 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \mathrm{Tr}(A^2) & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{Tr}(A^{n-1}) & \mathrm{Tr}(A^{n-2}) & \mathrm{Tr}(A^{n-3}) & \cdots & 0 & 1 \\ \mathrm{Tr}(A^n) & \mathrm{Tr}(A^{n-1}) & \mathrm{Tr}(A^{n-2}) & \cdots & \mathrm{Tr}(A^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 1.16.

Basados en el teorema de Lidskii y el hecho de que $\det_2(I - \lambda T)$ es una función entera por [86, p. 349] se tiene

$$\frac{\det_2'(I - \lambda T)}{\det_2(I - \lambda T)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n+1} \lambda^n$$

para λ suficientemente pequeño y $\delta_n = \mathrm{Tr}(T^n)$.

En particular si consideramos $T : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ definido por

$$(Tf)(t) = \int_a^b k(t,s) f(s) ds$$

con $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$, el ejemplo 1.2 nos dice que $T \in S_2(L^2[a,b])$. El determinante de Hilbert-Carleman de T se define por:

$$\mathrm{Det}(I + \lambda T) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n(T) \lambda^n}{n!},$$

donde

$$a_n(T) = \int_{[a,b]^n} \det \begin{pmatrix} 0 & k(t_1,t_2) & \cdots & k(t_1,t_n) \\ k(t_2,t_1) & 0 & \cdots & k(t_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(t_n,t_1) & k(t_n,t_2) & \cdots & 0 \end{pmatrix} dt_1 \cdots dt_n.$$

El teorema [36 , Ch. X, Theorem 3.1] nos dice que el **determinante de Hilbert-Carleman** coincide con el determinante modificado de Fredholm, en otras palabras, se cumple el teorema:

Teorema 1.20. *Si $T : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ es un operador integral con núcleo $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$, y por lo tanto T es un operador Hilbert-Schmidt, entonces*

$$\mathrm{Det}(I + \lambda T) = \det{}_2(I + \lambda T).$$

Terminamos esta sección comentando algunas aplicaciones de la teoría de trazas y determinantes.

Basados en el trabajo de Marchenko, H. Aden y B. Carl [1] inventaron el método del operador o método de traza para encontrar soluciones para la ecuación escalar Korteweg-de Vries (Kdv):

$$v_t = v_{xxx} + 3v_x^2.$$

La principal idea de este método consiste en:

Dada una ecuación diferencial parcial no lineal y una solución escalar específica, el primer paso para encontrar otras soluciones es trasladar la ecuación no lineal dada, a una ecuación de operadores con su respectiva solución. Habiendo obtenido esta solución, el segundo paso es transferirla a una solución escalar usando un funcional adecuado (una traza).

Este método fue usado en [14, 19, 20, 51] a otras ecuaciones diferenciales no lineales como la Kdv modificada, Sine-Gordon y la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (KP).

La teoría de ecuaciones integrales es una de las ramas más importantes del análisis matemático y su estudio empezó a desarrollarse con el famoso trabajo de Fredholm titulado "un nuevo método de solución para el problema de Dirichlet". Este método usa el determinante de Fredholm y los llamados menores de Fredholm, y es aplicado para resolver ecuaciones de Fredholm de segundo tipo, ecuaciones de Fredholm homogéneas y no homogéneas, así como el cálculo de las funciones propias y funciones propias generalizadas correspondientes a autovalores con multiplicidad algebraica dada (apéndice B).

1.4. El subespacio conmutador

En lo que sigue I denotará un ideal bilátero del álgebra $\mathscr{L}(H)$ de operadores lineales y acotados.

El **subespacio conmutador** de I es el conjunto:

$$\text{Com}(I) = \text{span}\{[A, B] : A \in I, B \in \mathscr{L}(H)\}.$$

Sabemos que por el lema 1.1, si τ es un funcional lineal en I entonces τ es una traza si y solo si $\tau(T) = 0, \forall T \in \text{Com}(I)$.

El subespacio conmutador ha sido estudiado exhaustivamente por autores como K. Dykema, T. Fiegel, G. Weiss, N. Kalton y M. Wodzicki, que lo han caracterizado en términos de la media aritmética de los términos de una sucesión.
Para operadores normales, el [62, Theorem 3.1] afirma que:

Teorema 1.21. *Sea $T \in I$ un operador normal. Entonces $T \in \mathrm{Com}(I)$ si y solo*

$$\mathrm{diag}\left(\frac{1}{n}(\lambda_1(T) + \cdots + \lambda_n(T))\right) \in I.$$

Definición 1.16. I es llamado un **ideal normado simétrico** si existe una norma $\|\cdot\|_I$ que hace a I un espacio de Banach y satisface:

$$\|STR\|_I \leqslant \|S\|\|T\|_I\|R\|, \forall S, R \in \mathscr{L}(H), \forall T \in I.$$

En el contexto de ideales normados simétricos el [77, Theorem 5.1.3] establece que:

Teorema 1.22. *Sea I un ideal normado simétrico y $T \in I$. Entonces $T \in \mathrm{Com}(I)$ si y solo si* $\mathrm{diag}\left(\frac{1}{n}(\lambda_1(T) + \cdots + \lambda_n(T))\right) \in I$.

El teorema anterior puede extenderse a ideales geometricamente estables, noción que fue establecida por N. Kalton.

Definición 1.17. I es llamado **geométricamente estable** si para (s_n) una sucesión decreciente de números reales no negativos se tiene que $\mathrm{diag}(s_n) \in I$ si y solo si $\mathrm{diag}\left((s_1.s_2 \cdots s_n)^{1/n}\right) \in I$

Por [77, Lemma 5.5.9] tenemos que todo ideal normado simétrico es geométricamente estable y el [62, Theorem 3.3] extiende el teorema 1.22 probando que:

Teorema 1.23. *Sea I un ideal geométricamente estable y $T \in I$. Entonces $T \in \mathrm{Com}(I)$ si y solo si* $\mathrm{diag}\left(\frac{1}{n}(\lambda_1(T) + \cdots + \lambda_n(T))\right) \in I$.

Finalizamos el presente capítulo con las siguientes observaciones:

Observación 1.17.
Si Q es un operador Volterra (un operador compacto con $\sigma(Q) = \{0\}$) e I es un ideal geométricamente estable tal que $Q \in I$, entonces por el teorema 1.23 se tiene que $Q \in \mathrm{Com}(I)$. Este resultado, en general, es falso si I es un ideal bilátero. Por ejemplo en [61], Kalton y Dykema construyeron un ideal que no es geométricamente estable J y un operador Volterra $Q \in J$ tal que $Q \notin \mathrm{Com}(J)$.

Observación 1.18.

Por [61, Corollary 2.4], toda traza τ, definida en un ideal geométricamente estable I es espectral, es decir, para todo $T \in I$, $\tau(T)$ solo depende de los autovalores de T y sus multiplicidades algebraicas. Para probar esto, el [62, Theorem 3.3] y el teorema de descomposición de Ringrose son las herramientas principales.

Capítulo 2

Lema de Douglas e isometrías parciales

La sección 2.1 contiene el lema de Douglas, este es un resultado que relaciona la factorización, mayorización e inclusión de rangos de operadores sobre espacios de Hilbert. Finalmente, propiedades básicas de las isometrías parciales son tratadas en la sección 2.2.

2.1. El lema de Douglas

Antes, solo necesitamos recordar que si $T \in \mathscr{L}(H)$ entonces

i) $H = \text{Ker}(T) \oplus (\text{Ker}(T))^{\perp}$

ii) $(\text{Ker}(T))^{\perp} = \overline{\text{Ran}(T^*)}$

iii) $(\text{Ran}(T))^{\perp} = \text{Ker}(T^*)$.

El lema de Douglas aparece en la referencia [23] y afirma que:

Teorema 2.1 (Douglas)**.** *Sean $A, B \in \mathscr{L}(H)$. Son equivalentes:*

1) $\text{Ran}(A) \subset \text{Ran}(B)$*,*

2) $AA^* \leqslant \lambda^2 BB^*$ *para algún* $\lambda \geqslant 0$*,*

3) $A = BC$ *para algún* $C \in \mathscr{L}(H)$*.*

Además si $\text{Ran}(C) \subset \overline{\text{Ran}(B^*)}$ *entonces C es único. Tal C se denomina factor mínimo. Si C es el factor mínimo entonces:*

a) $\|C\|^2 = \text{ínf}\{\mu \;/\; AA^* \leqslant \mu BB^*\}$

b) $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(C)$

c) $\text{Ran}(C) \subset \overline{\text{Ran}(B^*)}$

Observación 2.1.

i) Si $A = BD$ entonces $(I - P_{\text{Ker}(B)})D$ es el factor mínimo, donde $P_{\text{Ker}(B)}$ denota la proyección ortogonal sobre $\text{Ker}(B)$.

ii) Suponiendo 1) o 2) en el teorema 2.1, el lema de Douglas resuelve la ecuación $AX = B$ para operadores lineales y acotados sobre espacios de Hilbert.

iii) Una generalización del lema de Douglas aparece en [31], en el contexto de C^*-módulos de Hilbert. En [32], una generalización del lema de Douglas es demostrada para operadores no acotados en espacios de Banach.

2.2. Isometrías parciales

Definición 2.1. Un operador $U \in \mathscr{L}(H)$ es llamado una **isometría parcial** si existe un subespacio cerrado M tal que

$$\|Ux\| = \begin{cases} \|x\| & , \quad x \in M \\ 0 & , \quad x \in M^{\perp} \end{cases}$$

El espacio M es llamado el **espacio inicial** de U y $\text{Ran}(U)$, el cual es un subespacio cerrado, es llamado el **espacio final** de U.

Información adicional actualizada relacionada a isometrías parciales puede encontrarse en [92, Ch. 11]. Las propiedades básicas de una isometría parcial están dadas en el siguiente teorema [35, Ch. II, Theorem 2.3].

Teorema 2.2.

a) Un operador $U \in \mathscr{L}(H)$ es una isometría parcial si y solo si U^*U es una proyección.

b) U es una isometría parcial si y solo si U^* lo es y el espacio inicial de U^* es el espacio final de U.

Observación 2.2.

Notar que si U es una isometría parcial, con espacio inicial M, entonces $M = (\text{Ker}(U))^\perp$.

En efecto, obviamente $M^\perp \subset \text{Ker}(U)$ lo que implica que $(\text{Ker}(U))^\perp \subset M$.
Sea $x \in M$ entonces $\|Ux\| = \|x\|$.
Como $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \text{Ker}(U)$, $x_2 \in (\text{Ker}(U))^\perp$
entonces

$$\|x\| = \|Ux\| = \|Ux_1 + Ux_2\| = \|Ux_2\| = \|x_2\|.$$

Finalmente, como

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$$

tenemos que $x_1 = 0$, implicando que $x = x_2 \in (\text{Ker}(U))^\perp$.

Observación 2.3.

i) En general, la composición de isometrías parciales no es una isometría parcial ya que si consideramos

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \text{ y}$$
$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ S(x, y) = (0, x).$$

Claramente T y S son isometrías parciales, pero TS no lo es.

ii) Condiciones necesarias y suficientes, para que la composición de isometrías parciales, en espacios de Hilbert, sea una isometría parcial, fueron establecidas por I. Erdelyi [29, Theorem 1].

Como consecuencia del teorema 2.2 tenemos el corolario [35, Ch. II, Corollary 7.3]:

Corolario 2.1. Sean $A, B \in \mathscr{L}(H)$. Entonces

$$AA^* = BB^*$$

si y solo si existe una isometría parcial con $\overline{\text{Ran}(B^*)}$ como su espacio final tal que

$$A = BU.$$

Capítulo 3

La hipótesis de Riemann

En este último capítulo, aplicaremos las herramientas estudiadas en las secciones anteriores para establecer nuevas propiedades del operador compacto A_ρ. Empecemos describiendo la hipótesis de Riemann.

3.1. Descripción de la hipótesis de Riemann

La hipótesis de Riemann es una conjetura sobre la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann $\zeta(s)$. Describamos el problema:
Sea $s \in \mathbb{C}$ con Re$(s) > 1$ entonces la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge absolutamente para Re$(s) > 1$, lo que nos permite definir la función

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

llamada función zeta de Riemann.
En 1737 Leonhard Euler demuestra el siguiente teorema:
"Sea f una función aritmética multiplicativa tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge absolutamente. Entonces la suma de la serie puede ser expresada como el producto infinito

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} (1 + f(p) + f(p^2) + \cdots)$$

extendida sobre todos los números primos. Si f es completamente multiplicativa, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \frac{1}{1 - f(p)}."$$

Aplicando este teorema a la función completamente multiplicativa $f(n) = \dfrac{1}{n^s}$ tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \text{ para } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Lo anterior nos dice que $\zeta(s)$ no tiene ceros en la región $\mathrm{Re}(s) > 1$.

La función zeta de Riemann $\zeta(s)$ puede ser prolongada analíticamente a todo el plano complejo excepto en $s = 1$ donde tiene un polo simple con residuo 1.

Aplicando la fórmula de Hurwitz se tiene que para todo $s \neq 1$ se cumple

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

llamada la ecuación funcional para la función zeta de Riemann, donde $\Gamma(s)$ es la función Gamma.

La ecuación funcional nos dice que para $s = -2, -4, -6, \cdots$ se tiene que $\zeta(s) = 0$, esto es, todo entero par negativo es un cero de la función zeta de Riemann llamado **cero trivial**.

La ecuación funcional también nos permite afirmar que los ceros no triviales deben pertenecer en la franja $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, llamada **franja crítica**.

Identificar regiones donde la función zeta de Riemann no se anula es un trabajo difícil. Como referencia a este problema podemos citar [58, Ch. 8], donde es usado un método de localización.

La conexión entre los ceros no triviales de la función zeta de Riemann y la distribución de los números primos fue observada por Riemann en su artículo de 1859. Es en este artículo que Riemann propuso la conocida hipótesis:

"La parte real de todo cero no trivial de la función zeta de Riemann es $\frac{1}{2}$".

Esta conjetura ha sido reformulada por autores como J. Alcántara-Bode [3], L. Báez-Duarte [10], A. Beurling [17], etc.

Por todo lo explicado, la investigación de la función zeta de Riemann en la franja crítica es extremadamente importante en teoría de números, pero su comportamiento aún parece un misterio. Una propiedad especial de la función zeta de Riemann es su **universalidad**, es decir, toda función holomorfa en la franja $\{\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ y sin ceros puede ser uniformemente aproximada en conjuntos compactos por traslaciones imaginarias de la función zeta. Este notable resultado se debe a S.M. Voronin [84] y es denominado el teorema de universalidad de Voronin.

Generalizaciones del teorema de universalidad de Voronin a otras funciones zeta y sus aplicaciones pueden encontrarse en [90, pp. 95-114]. Existen diferentes enfoques para la prueba del teorema de universalidad de Voronin; uno de ellos puede encontrarse en [91, Ch. 7] o en el libro de F. Bayart y E. Matheron [11], donde combina teoría analítica de números, geometría de espacios de Hilbert y teoría ergódica.

Esta propiedad de universalidad de la función zeta de Riemann permite obtener una propiedad de independencia funcional [83], es decir, si $F_0, F_1, \cdots, F_N$ son funciones continuas en $\mathbb{C}^{N+1}$ tal que

$$\sum_{k=0}^{N} s^k F_k(\zeta(s), \zeta'(s), \cdots, \zeta^N(s)) = 0 \text{ para todo } s \in \mathbb{C}-\{1\} \text{ entonces } F_0 = \cdots = F_N = 0.$$

3.2. La función de correlación de Beurling

El criterio de Nyman - Beurling aparece en [17] y afirma que:

Teorema 3.1. *Sea* $\rho(x) = x - [x],\ x \in \mathbb{R}$, $[x] \in \mathbb{Z}$, $[x] \leqslant x < [x] + 1$ *y*

$$M = \{f \in L^2(0,1) \ / \ f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right),\ \sum_{k=1}^{n} a_k\theta_k = 0,$$
$$0 < \theta_k \leqslant 1,\ a_k \in \mathbb{C},\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Entonces la hipótesis de Riemann es verdad si y solo si $\overline{M} = L^2(0,1)$. *Además* $\overline{M} = L^2(0,1)$ *si y sólo si* $1 \in \overline{M}$.

Para saber si la función constante 1 pertenezca a la clausura de M, uno debería evaluar la siguiente norma

$$\left\| 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right) \right\|_2^2.$$

Al hacer esto vamos a tener

$$\left\| 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right) \right\|_2^2 = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{Re}(a_k) \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right) dx + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \int_0^1 \rho^2\left(\frac{\theta_k}{x}\right) dx$$
$$+ \sum_{k<j} 2\operatorname{Re}(a_k\overline{a_j}) \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right) \rho\left(\frac{\theta_j}{x}\right) dx \quad (3.1)$$

donde $\sum_{k=1}^{n} a_k\theta_k = 0$.

De [6, pp. 6-7] tenemos las siguientes fórmulas

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) dx = -\theta\ln\theta + (1-\gamma)\theta \tag{3.2}$$

$$\int_0^1 \rho^2\left(\frac{\theta}{x}\right) dx = (\ln(2\pi)-\gamma)\theta - \theta^2 \tag{3.3}$$

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta_r}{x}\right)\rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right) dx = \theta_k\int_0^1 \rho\left(\frac{1}{x}\right)\rho\left(\frac{\theta_r/\theta_k}{x}\right) dx + (1-\theta_k)\theta_r \tag{3.4}$$

donde $\theta \in (0,1),\ 0 < \theta_r \leqslant \theta_k \leqslant 1$ y γ es la constante de Euler.

Para $1 \geqslant \theta_1 > \theta_2 > \cdots > \theta_n > 0$, aplicando (3.2), (3.3) y (3.4) se tiene

$$\begin{aligned}\left\|1+\sum_{k=1}^{n} a_k\rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right)\right\|_2^2 &= 1-\sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{Re}(a_k)\theta_k\ln(\theta_k) + \sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\theta_k[\ln(2\pi)-\gamma] \\ &\quad + \sum_{k<j} 2\operatorname{Re}(a_k\overline{a_j})\left(\theta_k J((\frac{\theta_j}{\theta_k}) + \theta_j)\right)\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde

$$J(\alpha) = \int_0^1 \rho\left(\frac{1}{x}\right)\rho\left(\frac{\alpha}{x}\right) dx,\ \alpha \in [0,1].$$

La importancia de la función J radica en su aparición en la expresión (3.5). La función J es llamada **función de correlación de Beurling** y varias de sus propiedades han sido estudiadas por J. Alcántara-Bode en [6] y en [7].

Sea

$$\rho_\alpha(x) = \left[\frac{\alpha}{x}\right] - \alpha\left[\frac{1}{x}\right],\ 0 < \alpha \leqslant 1,$$

entonces por el criterio de Nyman-Beurling es claro que la hipótesis de Riemann es verdad si y solo si $1 \in \overline{\operatorname{span}\{\rho_\alpha(x),\ 0 < \alpha \leqslant 1\}}$.

En [10], Báez-Duarte refinó este criterio demostrado que la hipótesis de Riemann es cierta si y solo si $1 \in \overline{\operatorname{span}\{\rho_{\frac{1}{n}}(x),\ n \in \mathbb{N}\}}$. Esto conduce al estudio de sumas finitas de la forma

$$\sum c_k\left[\frac{1}{n_k x}\right], n_k \in \mathbb{N},\ \text{donde} \sum\frac{c_k}{n_k} = 0.$$

Esta fue la motivación de V.I. Vasyunin para estudiar el siguiente problema planteado en [81].

Problema 1

Describir todas las sumas finitas de la forma

$$\sum c_k\left[\frac{1}{xn_k}\right],\ n_k \in \mathbb{N}$$

tomando valores en el conjunto $\{0,1\}$.

Entre otros resultados, se demuestra que:

Proposición 3.1.

1) Todas las soluciones del problema 1 son funciones que se representan en la forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{xn_k}\right] - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \left[\frac{1}{xn_k}\right].$$

2) La función

$$f(x) = \left[\frac{1}{xn_1}\right] - \left[\frac{1}{xn_2}\right] - \left[\frac{1}{xn_3}\right]$$

toma los valores 0 y 1 si y solo si

$$\frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}.$$

3) Supongamos que

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5},\ n_3 = 2n_1.$$

Si

$$n_4 = 2n_2 \ \ o \ \ n_2 = 2n_4,$$

entonces la función

$$f(x) = \left[\frac{1}{xn_1}\right] + \left[\frac{1}{xn_2}\right] - \left[\frac{1}{xn_3}\right] - \left[\frac{1}{xn_4}\right] - \left[\frac{1}{xn_5}\right]$$

toma los valores 0 y 1.

J. Bober en [15], complementa los resultados de V.I. Vasyunin demostrando:

Proposición 3.2.

1) El problema 1 no tiene soluciones con un número de términos mayor a 9.

2) Existen solo 21 soluciones irreducibles de 7 términos del problema 1.

3) Existen solo 2 soluciones irreducibles de 9 términos del problema 1.

Observación 3.1.
En los numerales 2 y 3 de la proposición 3.1 no se usa la propiedad de que n_k sea entero, los resultados son válidos para todo número positivo n_k.

Con ayuda de la proposición 3.1 podemos deducir propiedades adicionales de la función de correlación de Beurling.

Proposición 3.3.

1) Si $0 < \theta_1 \leqslant \theta_2 < \theta_3 \leqslant 1$ *y* $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ *entonces*

$$\theta_2 J\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) - \theta_3 J\left(\frac{\theta_2}{\theta_3}\right) - \theta_3 J\left(\frac{\theta_1}{\theta_3}\right) = \frac{1}{2}(\theta_3 \ln\theta_3 - \theta_1 \ln\theta_1 - \theta_2 \ln\theta_2) - \theta_3(\ln(2\pi) - \gamma) + \theta_2.$$

2) Si $0 < \theta_3 < \theta_1 < \theta_4 < \theta_2 < \theta_5 \leqslant 1$, $\theta_1 + \theta_2 = \theta_3 + \theta_4 + \theta_5$, $\theta_1 = 2\theta_3$. *Además si* $\theta_2 = 2\theta_4$ *entonces*

$$\theta_2 J\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) + \theta_4 J\left(\frac{\theta_3}{\theta_4}\right) + \theta_5 J\left(\frac{\theta_3}{\theta_5}\right) + \theta_5 J\left(\frac{\theta_4}{\theta_5}\right) - \theta_1 J\left(\frac{\theta_3}{\theta_1}\right) - \theta_2 J\left(\frac{\theta_3}{\theta_2}\right) - \theta_2 J\left(\frac{\theta_4}{\theta_2}\right) - \theta_5 J\left(\frac{\theta_2}{\theta_5}\right) - \theta_4 J\left(\frac{\theta_1}{\theta_4}\right) - \theta_5 J\left(\frac{\theta_1}{\theta_5}\right) =$$

$$\frac{1}{2}(\theta_1 \ln\theta_1 + \theta_2 \ln\theta_2 - \theta_3 \ln\theta_3 - \theta_4 \ln\theta_4 - \theta_5 \ln\theta_5) - (\ln(2\pi) - \gamma)(\theta_1 + \theta_2) + \theta_1 + \theta_2.$$

Prueba.

1) Sea $0 < \theta_1 \leqslant \theta_2 < \theta_3 \leqslant 1$ con $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$. Por la proposición 3.1 la función

$$f(x) = \left[\frac{\theta_3}{x}\right] - \left[\frac{\theta_1}{x}\right] - \left[\frac{\theta_2}{x}\right] = \rho\left(\frac{\theta_1}{x}\right) + \left(\frac{\theta_2}{x}\right) - \rho\left(\frac{\theta_3}{x}\right)$$

toma los valores 0 y 1. Luego

$$f^2(x) = f(x),$$

entonces

$$\rho^2\left(\frac{\theta_1}{x}\right) + \rho^2\left(\frac{\theta_2}{x}\right) + \rho^2\left(\frac{\theta_3}{x}\right) + 2\rho\left(\frac{\theta_1}{x}\right)\rho\left(\frac{\theta_2}{x}\right) - 2\rho\left(\frac{\theta_1}{x}\right)\rho\left(\frac{\theta_3}{x}\right) - 2\rho\left(\frac{\theta_2}{x}\right)\rho\left(\frac{\theta_3}{x}\right) = \rho\left(\frac{\theta_1}{x}\right) + \rho\left(\frac{\theta_2}{x}\right) - \rho\left(\frac{\theta_3}{x}\right).$$

Integramos de 0 a 1 y usamos las fórmulas (3.2), (3.3) y (3.4) para obtener el resultado.

2) La prueba es similar a 1).

■

Casos particulares de la proposición anterior son las ecuaciones funcionales obtenidas en [7]:

$$\frac{-\alpha\ln\alpha}{2}-\frac{(1-\alpha)\ln(1-\alpha)}{2}=J(1)-J(\alpha)-J(1-\alpha)+\alpha+ (1-\alpha)J\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right),\ \forall\alpha\in\ ]\,0,1/2]\,.$$

$$\frac{1}{2}[\ln 2+3\ln\pi-3\gamma]+4(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)+2\alpha^2=1+2(1-\alpha)J\left(\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\right)$$
$$+(1-\alpha)J\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right)+\alpha(\alpha+1)+J(2\alpha)+2(1-\alpha)J\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}\right),\ \forall\alpha\in]0,1/3].$$

Además para $\alpha\in]0;1]$ se cumple:

$$J(\alpha)=-\frac{\alpha\ln\alpha}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{\alpha}\right]}\frac{1}{k}\right)-\ln\left[\frac{n}{\alpha}\right]-\gamma-\frac{1}{2\left[\frac{n}{\alpha}\right]}\right\}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\ln\left(1-\frac{\alpha\rho\left(\frac{n}{\alpha}\right)}{n}\right)+\frac{\alpha\rho\left(\frac{n}{\alpha}\right)}{n}\right\}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\rho\left(\frac{n}{\alpha}\right)}{\left[\frac{n}{\alpha}\right]n}+\frac{\alpha}{2}\left\{\ln(2\pi)-\gamma-1\right\}.$$

3.3. La hipótesis de Riemann como problema de análisis funcional

En [3], J. Alcántara-Bode ha reformulado la hipótesis de Riemann (HR) como un problema de análisis funcional. El teorema es el siguiente:

Teorema 3.2. *Sea* $(A_\rho f)(\theta)=\displaystyle\int_0^1\rho\left(\frac{\theta}{x}\right)f(x)dx$*, donde* $\rho(x)=x-[x]$*,* $x\in\mathbb{R}$*,* $[x]\in\mathbb{Z}$*,* $[x]\leqslant x<[x]+1$*, un operador integral en* $L^2(0,1)$*. Entonces la* HR *es verdad si y solo si* $\mathrm{Ker}(A_\rho)=\{0\}$ *o si y solo si* $h\notin\mathrm{Ran}(A_\rho)$ *donde* $h(x)=x$*.*

Importantes propiedades del operador integral A_ρ son establecidas en [3] como:

i) A_ρ es no normal; A_ρ es Hilbert-Schmidt no nuclear.

ii) $\lambda\in\sigma(A_\rho)\backslash\{0\}$ si y solo si $T(\lambda^{-1})=0$ donde

$$T(u)=1-u+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r+1}\left(\frac{\prod_{\ell=1}^{r}\zeta(\ell+1)}{(r+1)!(r+1)}\right)u^{r+1}\qquad(3.6)$$

es una función entera de orden uno y tipo uno (apéndice C), además cada autovalor no nulo $\lambda=\mu^{-1}$ tiene multiplicidad geométrica uno con función propia $\Psi_\mu(x)=xT'(\mu x)$.

iii) Usando la analiticidad de las funciones propias de A_ρ se determina que $\det_2(I - uA_\rho) = e^u T(u),\ \forall u \in \mathbb{C}$.

iv) Si (λ_n) es la sucesión de autovalores no nulos de A_ρ ordenados de modo que $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|, \forall n \in \mathbb{N}$ y cada uno de ellos se repite según su multiplicidad algebraica entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| = \infty$ y $\lambda_n \notin \mathbb{R}$ para un número infinito de valores de "n". Además, si consideramos A_ρ como un operador en el espacio de Banach ordenado $(C[0,1], F)$, donde

$$F = \{f \in C[0,1] \ / \ f(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [0,1]\},$$

entonces por el teorema de Krein-Rutman (apéndice A), el primer autovalor λ_1 es positivo y tiene multiplicidad algebraica uno.

Considere el operador $A_\rho(\alpha) : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definido por

$$(A_\rho(\alpha)f)(\theta) = \int_0^1 \rho\left(\frac{\alpha\theta}{x}\right) f(x)dx,\ 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Por [8, Theorem 2.1], para $0 < \alpha < 1$ se demuestra que el conjunto de autovectores y autovectores generalizados correspondientes a los autovalores no nulos de $A_\rho(\alpha)$ es total en $L^2(0,1)$ (apéndice A).

Para establecer una relación entre los operadores $A_\rho(\alpha)$ y A_ρ introducimos el operador $V_\alpha : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definido por

$$(V_\alpha f)(x) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \chi_{[0,\alpha]}(x).$$

Propiedades de V_α están dadas en la siguiente proposición:

Proposición 3.4.

i) $\|V_\alpha\| = \sqrt{\alpha}$ *y* $(V_\alpha^* f)(x) = \alpha f(\alpha x)$.

ii) $V_\alpha^* V_\alpha = \alpha I$ *y* $V_\alpha V_\alpha^* = \alpha \chi_{[0,\alpha]}$.

iii) $V_\alpha^* A_\rho V_\alpha = \alpha^2 A_\rho$.

iv) $A_\rho(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} V_\alpha^* A_\rho$ *y* $A_\rho(\alpha) V_\alpha = \alpha A_\rho$.

v) $A_\rho(\alpha)$ *es Hilbert-Schmidt no nuclear.*

Prueba.

i)

$$\begin{aligned}\|V_\alpha f\|^2 &= \int_0^1 |V_\alpha(f)(x)|^2 dx = \int_0^\alpha \left|f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right|^2 dx \\ &= \alpha\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \alpha\|f\|^2,\end{aligned}$$

lo que nos dice que $\|V_\alpha\| = \sqrt{\alpha}$.

La otra propiedad es consecuencia directa de la definición.

$ii)$, $iii)$ y $iv)$ son inmediatas de $i)$.

v) De $iv)$ y usando la propiedad c) de números singulares tenemos que $A_\rho(\alpha)$ es Hilbert-Schmidt no nuclear.

■

En lo que sigue estableceremos algunas nuevas propiedades del operador A_ρ con las herramientas estudiadas en los capítulos 1 y 2.
Para establecer nuestro primer resultado, el teorema de descomposición de Ringrose [73] es de vital importancia.

Teorema 3.3 (Ringrose)**.**
Sea $T \in K(H)$. Existe un operador normal N y un operador Volterra Q tal que $T = N + Q$ y $(\lambda_n(T)) = (\lambda_n(N))$.

Usando la descomposición de Ringrose para A_ρ tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.4.
Si $A_\rho = N + Q$ es la descomposición de Ringrose de A_ρ entonces

a) *N es excéntrico generalizado, no nuclear y pertenece a $S_p(L^2(0,1))$, $p > 1$.*

b) *$N \in M_{1,\infty}(L^2(0,1))$, $\mathrm{Tr}_w(N) = w\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A_\rho)\right)$ y $|\mathrm{Tr}_w(N)| \leqslant e$, donde w es un estado singular invariante por D_2.*

c) *Q es Hilbert-Schmidt.*

Prueba.

a) De (3.6) se tiene que $T(0) = 1$, entonces para todo $r > 0$ tenemos que

$$n_T(r) \leqslant \ln(M_T(er))$$

(apéndice C). De (3.6) se tiene que

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

donde $a_0 = 1$ y $|a_n| = (-1)^n a_n$ para todo $n \geqslant 1$. Como

$$|T(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-|z|)^n = T(-|z|),$$

entonces $M_T(er) = T(-er)$. Por lo tanto

$$n_T(r) \leqslant \ln(M_T(er)) = \ln(T(-er)) \leqslant er,$$

lo que implica

$$|\lambda_n(A_\rho)| \leqslant \frac{e}{n}, \ \forall n \geqslant 1. \tag{3.7}$$

Como N es normal, el teorema espectral para operadores compactos normales [77, Theorem 1.1.12] nos permite afirmar que

$$|\lambda_n(A_\rho)| = |\lambda_n(N)| = s_n(N).$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(A_\rho)| = +\infty$ entonces la igualdad anterior nos dice que N es no nuclear, y por (3.7) tenemos que $N \in S_p(L^2(0,1))$, $p > 1$.

De (3.7) se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} s_k(N) \leqslant \frac{e}{n s_n(N)} \sum_{k=1}^{n} s_k(N),$$

Pero como N es no nuclear la sucesión $\left(\dfrac{\delta_n(N)}{n s_n(N)}\right)$ no es acotada, luego N es irregular.

Como N es no nuclear entonces $\mu_n(N) = \delta_n(N)$, y por la observación 1.13, N es excéntrico generalizado.

b) De (3.7) se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} s_k(N) \leqslant \frac{e}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

y como $\displaystyle\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to 1$ entonces $N \in M_{1,\infty}(L^2(0,1))$ y

$$\|N\|_{1,\infty} \leqslant e.$$

Por la proposición 1.1 tenemos que

$$|\operatorname{Tr}_w(N)| \leqslant e.$$

Por (3.7) y la observación 1.8 concluimos que

$$\operatorname{Tr}_w(N) = w\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A_\rho)\right)\right).$$

c) Como A_ρ, $N \in S_2(L^2(0,1))$ entonces $Q \in S_2(L^2(0,1))$.

■

Para $0 < \alpha < 1$, en [5] se ha calculado el determinante modificado de Fredholm $D^*_\alpha(u) = \det_2[I - uA_\rho(\alpha)]$, obteniendo

$$D^*_\alpha(u) = e^{\alpha u} T_\alpha(u), \ \forall u \in \mathbb{C},$$

donde

$$T_\alpha(u) = 1 - \alpha u + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1} \alpha^{(r+1)(r+2)/2}}{(r+1)!(r+1)} \prod_{\ell=1}^{r} \zeta(\ell+1) u^{r+1}$$

es una función entera de orden cero y D^*_α tiene orden 1 y tipo α (apéndice C). Además, $\lambda \in \sigma(A_\rho(\alpha))\backslash\{0\}$ si y solo si $T_\alpha(\lambda^{-1}) = 0$.

Es importante mencionar que el método usado en [5], para calcular $\det_2(I - \mu A_\rho)$, consiste en demostrar que las funciones propias de los correspondientes autovalores no nulos son analíticas y tienen multiplicidad geométrica uno. Otro ingrediente importante es notar que h es un vector cíclico de A_ρ (apéndice A) y finalmente algunas propiedades de operadores compactos en espacios de Hilbert son usadas. Este método puede usarse para calcular el determinante modificado de Fredholm, por ejemplo, de $A_\rho(\alpha)$ y $A_\rho + Q_f$ donde $Q_f(g) = \langle g, f \rangle h$.

Esto nos permite establecer el siguiente resultado:

Teorema 3.5.

Si $0 < \alpha < 1$ *y* $A_\rho(\alpha) = N_\alpha + Q_\alpha$ *es la descomposición de Ringrose de* $A_\rho(\alpha)$ *entonces*

a) $N_\alpha \in S_p(L^2(0,1))$, $\forall p \geqslant 1$ *y en particular* $Tr_w(N_\alpha) = 0$, $\forall w$ *estado singular en* ℓ^∞ *invariante por* D_2.

b) Q_α *es Hilbert-Schmidt y no nuclear.*

Prueba.

a) Como $T_\alpha(u)$ es una función entera de orden cero entonces la sucesión $\left(\dfrac{1}{|\lambda_n(A_\rho(\alpha))|}\right)$ tiene exponente de convergencia $\tau = 0$ (apéndice C), es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(A_\rho(\alpha))|^r < \infty, \ \forall r > 0,$$

luego $N_\alpha \in S_p(L^2(0,1)), \ \forall p \geqslant 1$. Finalmente por el numeral 2 de la proposición 1.1, tenemos que $\mathrm{Tr}_w(N_\alpha) = 0$, para todo w estado singular en ℓ^∞ invariante por D_2.

b) Como $A_\rho(\alpha), \ N_\alpha \in S_2(L^2(0,1))$ entonces $Q_\alpha \in S_2(L^2(0,1))$, y como N_α es nuclear entonces Q_α no lo es.

■

Por la proposición 3.4 tenemos las desigualdades

$$s_n(A_\rho(\alpha)) \leqslant \alpha^{-1}\|V_\alpha^*\| s_n(A_\rho) = \alpha^{-1/2} s_n(A_\rho),$$

$$\alpha s_n(A_\rho) \leqslant s_n(A_\rho(\alpha))\|V_\alpha\| = \alpha^{1/2} s_n(A_\rho(\alpha)).$$

Entonces para cada $n \geqslant 1$ se tiene

$$\alpha^{1/2} \leqslant \frac{s_n(A_\rho(\alpha))}{s_n(A_\rho)} \leqslant \alpha^{-1/2}. \tag{3.8}$$

Similarmente se deduce que para cada $n \geqslant 1$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2} \leqslant \frac{s_n(A_\rho(\alpha))}{s_n(A_\rho(\beta))} \leqslant \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}, 0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant 1. \tag{3.9}$$

Esto nos conduce a nuestro siguiente teorema:

Teorema 3.6. *A_ρ es excéntrico generalizado si y sólo si $A_\rho(\alpha)$ es excéntrico generalizado para algún $\alpha \in \langle 0,1]$.*

Prueba.
De la desigualdad (3.9) se tiene que si $A_\rho(\alpha)$ es regular para algún $\alpha \in \langle 0,1]$, lo es para todo $\alpha \in \langle 0,1]$.
De la misma forma por (3.8), $A_\rho(\alpha)$ es regular para algún $\alpha \in \langle 0,1]$ si y solo si A_ρ es regular.
Lo anterior nos permite afirmar que A_ρ es irregular si y solo si $A_\rho(\alpha)$ es irregular para algún $\alpha \in \langle 0,1]$.
Finalmente, como A_ρ y $A_\rho(\alpha)$ son no nucleares, la observación 1.13 concluye la prueba.

■

Observación 3.2.
Por lo hecho en la prueba del teorema 3.6 se puede afirmar que si $A_\rho(\alpha)$ es excéntrico generalizado para algún $\alpha \in \langle 0,1]$ entonces lo es para todo $\alpha \in \langle 0,1]$.

Observación 3.3.

i) Una sucesión decreciente (a_n) de números positivos, con $a_1 = 1$, es llamada binormalizante si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Como A_ρ es no nuclear entonces la sucesión $u = \left(\dfrac{s_n(A_\rho)}{\|A_\rho\|}\right)$ es binormalizante [38, p. 141]. Por [38, Ch. III, Theorem 14.1] tenemos el ideal normado simétrico no separable

$$G_u = \left\{ A \in K(H) \ / \ \|A\|_u = \|A_\rho\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} s_k(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n} s_k(A_\rho)} \right\} < \infty \right\}$$

con la norma $\|\cdot\|_u$.

ii) Si $A_\rho = N + Q$ es la descomposición de Ringrose de A_ρ entonces $A_\rho \in G_u$ y por la desigualdad de Weyl dada en la página 12, $\|N\|_u \leqslant \|A_\rho\| < \infty$ lo que nos conduce a concluir que $Q \in G_u$, esto es, existe un $M > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sum_{k=1}^{n} s_k(Q) \leqslant M \sum_{k=1}^{n} s_k(A_\rho).$$

iii) Por los lemas 1.2 y 1.3 y los teoremas 2 y 3 de [79] concluimos que:

A_ρ es excéntrico generalizado $\Leftrightarrow$ A_ρ es irregular $\Leftrightarrow$ A_ρ es excéntrico $\Leftrightarrow \overline{(A_\rho)}^{\|\cdot\|_u} \underset{+}{\subseteq} G_u \Leftrightarrow (A_\rho) \underset{+}{\subseteq} \overline{(A_\rho)}^{\|\cdot\|_u}$.

Todo operador Hilbert-Schmidt, sobre un espacio de Hilbert separable, satisface para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$n s_n^2(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k^2(A) \leqslant \|A\|_2^2,$$

así

$$s_n(A) \leqslant \frac{\|A\|_2}{\sqrt{n}}. \tag{3.10}$$

En nuestro contexto si consideramos $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$s_n(A_\rho(\alpha) - A_\rho(\beta)) \leqslant \frac{\|A_\rho(\alpha) - A_\rho(\beta)\|_2}{\sqrt{n}}. \tag{3.11}$$

Pero, por el ejemplo 1.2, la norma $\|A_\rho(\alpha) - A_\rho(\beta)\|_2$ se calcula por

$$\|A_\rho(\alpha) - A_\rho(\beta)\|_2 = \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\rho\left(\frac{\alpha\theta}{x}\right) - \rho\left(\frac{\beta\theta}{x}\right)\right)^2 d\theta dx\right)^{1/2}$$

y por las fórmulas (3.2), (3.3) y (3.4) llegamos a que

$$\|A_\rho(\alpha) - A_\rho(\beta)\|_2 = \left((\ln(2\pi) - \gamma)(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2) - 2\left[\frac{\beta J(\frac{\alpha}{\beta})}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha\beta}{3}\right]\right)^{1/2}.$$

Finalmente en (3.11) tendríamos que

$$s_n(A_\rho(\alpha) - A_\rho(\beta)) \leqslant \frac{\left((\ln(2\pi) - \gamma)(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2) - 2\left[\frac{\beta J(\frac{\alpha}{\beta})}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha\beta}{3}\right]\right)^{1/2}}{\sqrt{n}}.$$

Si en la desigualdad anterior tomamos, en particular, los valores de $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ deducimos que

$$s_n(A_\rho) \leqslant \frac{\left(\frac{\ln(2\pi)-\gamma}{2} - \frac{1}{3}\right)^{1/2}}{\sqrt{n}}. \tag{3.12}$$

Ahora si

$$A_\rho = N + Q$$

es la descomposición de Ringrose de A_ρ, entonces por la propiedad g) de números singulares tenemos que

$$s_{n+m-1}(A_\rho - N) = s_{n+m-1}(Q) \leqslant s_m(A_\rho) + s_n(N).$$

Si tomamos $m = n+1$ y usamos las desigualdades (3.7) y (3.12)

$$s_{2n}(Q) \leqslant \frac{\left(\frac{\ln(2\pi)-\gamma}{2} - \frac{1}{3}\right)^{1/2}}{\sqrt{n+1}} + \frac{e}{n}.$$

Ahora si $m = n$ y nuevamente usamos (3.7) y (3.12) entonces

$$s_{2n-1}(Q) \leqslant \frac{\left(\frac{\ln(2\pi)-\gamma}{2} - \frac{1}{3}\right)^{1/2}}{\sqrt{n}} + \frac{e}{n}.$$

Así hemos deducido nuestro teorema:

Teorema 3.7.

Si $A_\rho = N + Q$ es la descomposición de Ringrose de A_ρ entonces

1) $s_n(A_\rho) \leqslant \dfrac{\left(\frac{\ln(2\pi)-\gamma}{2} - \frac{1}{3}\right)^{1/2}}{\sqrt{n}}$

2) $s_n(N) \leqslant \dfrac{e}{n}$

3) $s_{2n}(Q) \leqslant \dfrac{\left(\frac{\ln(2\pi)-\gamma}{2} - \frac{1}{3}\right)^{1/2}}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{e}{n}$ *y*

$s_{2n-1}(Q) \leqslant \dfrac{\left(\frac{\ln(2\pi)-\gamma}{2} - \frac{1}{3}\right)^{1/2}}{\sqrt{n}} + \dfrac{e}{n}.$

Observación 3.4.

1) Con un trabajo similar a lo hecho en la prueba del teorema 3.7, se demuestra en general que para $0 < \alpha \leqslant 1$ se cumple que

- $s_n(A_\rho(\alpha)) \leqslant \dfrac{\left((\ln(2\pi)-\gamma)\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}(\alpha^2)\right)^{1/2}}{\sqrt{n}}.$
- $s_n(N_\alpha) \leqslant \dfrac{\alpha e}{n}.$
- $s_{2n}(Q_\alpha) \leqslant \dfrac{\left((\ln(2\pi)-\gamma)\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}(\alpha^2)\right)^{1/2}}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{\alpha e}{n}.$
- $s_{2n-1}(Q_\alpha) \leqslant \dfrac{\left((\ln(2\pi)-\gamma)\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}(\alpha^2)\right)^{1/2}}{\sqrt{n}} + \dfrac{\alpha e}{n}.$

  donde $A_\rho(\alpha) = N_\alpha + Q_\alpha$ es la descomposición de Ringrose de $A_\rho(\alpha)$.

2) Si $0 < r, \beta < \alpha \leqslant 1$ y $\alpha = \beta + r$ entonces

$$s_n(A_\rho(\beta) + A_\rho(r) - A_\rho(\alpha)) \leqslant \frac{\ln^{1/2}\left(\frac{\alpha^{\alpha/2}}{\beta^{\beta/2} \cdot r^{r/2}}\right)}{\sqrt{n}}.$$

En efecto, con estas hipótesis, la proposición 3.1 nos dice que la función

$$f(x) = \left[\frac{\alpha\theta}{x}\right] - \left[\frac{\beta\theta}{x}\right] - \left[\frac{r\theta}{x}\right] = -\rho\left(\frac{\alpha\theta}{x}\right) + \rho\left(\frac{\beta\theta}{x}\right) + \rho\left(\frac{r\theta}{x}\right)$$

toma los valores 0 y 1.

Luego

$$f(x) = f^2(x),$$

e integrando respecto a x y θ se tiene que

$$\frac{\alpha}{2}\ln(\alpha) - \frac{\beta}{2}\ln(\beta) - \frac{r}{2}\ln(r) = \|A_\rho(\beta) + A_\rho(r) - A_\rho(\alpha)\|_2^2,$$

y por (3.10) tenemos lo deseado.

Un ingrediente importante, para establecer más propiedades de A_ρ y $A_\rho(\alpha)$ es el siguiente teorema de aproximación [18]:

Teorema 3.8 (Müntz)**.**
Sea (λ_n) *una sucesión de números reales diferentes con* $\lambda_n > \frac{-1}{2}$ *para cada* n*. Entonces el conjunto* $\operatorname{span}\{x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \cdots\}$ *es denso en* $L^2(0,1)$ *si y solo si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n + 1}{(2\lambda_n + 1)^2 + 1}$$

diverge.

En lo que sigue, h denotará la función $h(x) = x$ en $L^2(0,1)$.
Basándose en el teorema de Müntz y el lema de Douglas, J. Alcántara-Bode (comunicación personal) ha deducido los siguientes tres resultados:

Teorema 3.9.

$$A_\rho(\alpha) = A_\rho(\beta)V^*_{\frac{\alpha}{\beta}} + \alpha\left\langle \cdot, \chi_{[\frac{\alpha}{\beta},1]}\frac{1}{h}\right\rangle h,\ 0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant 1 \qquad (3.13)$$

Prueba.

Por el teorema 3.8, basta verificar la fórmula (3.13) en h^r con $r \in \mathbb{N}$, donde $h(x) = x$. Evaluando la parte derecha de (3.13) se tiene

$$\begin{aligned}
&A_\rho(\beta)V^*_{\frac{\alpha}{\beta}}(h^r)(\theta) + \alpha\left(\int_0^1 h^r(x)\chi_{[\frac{\alpha}{\beta},1]}(x)\frac{1}{h(x)}dx\right)h(\theta)\\
&\qquad = \frac{\alpha}{\beta}A_\rho(\beta)(h^r(\frac{\alpha}{\beta}\theta)) + \alpha\left(\int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 x^{r-1}dx\right)\theta\\
&\qquad = \frac{\alpha^{r+1}}{\beta^{r+1}}A_\rho(\beta)(\theta^r) + \frac{\alpha}{r}\left(x^r\Big|_{\frac{\alpha}{\beta}}^1\right)\theta\\
&\qquad = \frac{\alpha^{r+1}}{\beta^{r+1}}\int_0^1 \rho\left(\frac{\beta\theta}{x}\right)x^r dx + \frac{\alpha}{r}\left(1 - \frac{\alpha^r}{\beta^r}\right)\theta \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

La siguiente identidad puede encontrarse en [17, p. 312] y afirma que

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right)x^r dx = \frac{\theta}{r} - \frac{\zeta(r+1)}{r+1}\theta^{r+1}. \qquad (3.15)$$

Reemplazando esta identidad en la integral de (3.14) se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha^{r+1}}{\beta^{r+1}}\left(\frac{\beta\theta}{r} - \frac{\zeta(r+1)}{r+1}(\beta\theta)^{r+1}\right) + \frac{\alpha}{r}\left(1 - \frac{\alpha^r}{\beta^r}\right)\theta\\
&= \frac{\alpha\theta}{r} - \frac{\zeta(r+1)}{r+1}(\alpha\theta)^{r+1} = A_\rho(\alpha)(\theta^r)\\
&= A_\rho(\alpha)(h^r)(\theta).
\end{aligned}$$

Concluimos que (3.13) es cierto en h^r y por lo tanto en todo $L^2(0,1)$. ■

Corolario 3.1.

Para $\lambda > 0$ y $\lambda\alpha,\ \lambda\beta \in \langle 0, 1]$ con $0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ se cumple la fórmula

$$A_\rho(\alpha)A^*_\rho(\lambda\alpha) = \frac{\alpha}{\beta}A_\rho(\beta)A^*_\rho(\lambda\beta) + \frac{\lambda\alpha}{3}(\beta - \alpha)P \qquad (3.16)$$

donde P es la proyección ortogonal sobre el subespacio $M = \{\lambda h,\ \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Prueba.

Reemplazando en (3.13) el valor de $\lambda\alpha$ y $\lambda\beta$ en lugar de α y β tenemos la fórmula

$$A_\rho(\lambda\alpha) = A_\rho(\lambda\beta)V^*_{\frac{\alpha}{\beta}} + \lambda\alpha\left\langle \cdot, \chi_{[\frac{\alpha}{\beta},1]}\frac{1}{h}\right\rangle h.$$

Si tomamos adjunto a la fórmula anterior tenemos

$$A^*_\rho(\lambda\alpha) = V_{\frac{\alpha}{\beta}}A^*_\rho(\lambda\beta) + \lambda\alpha\langle \cdot, h\rangle \frac{1}{h}\chi_{[\frac{\alpha}{\beta},1]}, \qquad (3.17)$$

y multiplicando (3.13) con (3.17) deducimos que

$$A_\rho(\alpha)A_\rho^*(\lambda\alpha) = A_\rho(\beta)V_{\frac{\alpha}{\beta}}^*V_{\frac{\alpha}{\beta}}A_\rho^*(\lambda\beta) + \frac{\lambda\alpha^2}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\right)P,$$

así concluimos usando la proposición 3.4, ii). ■

Teorema 3.10. *Para* $0 < \alpha < 1$, $h \in \operatorname{Ran}(A_\rho(\alpha))$ *y* $\operatorname{Ker}(A_\rho^*(\alpha)) = \{0\}$.

Prueba.
Tomando $\lambda = 1$ en la fórmula (3.16) tenemos que

$$A_\rho(\alpha)A_\rho^*(\alpha) = \frac{\alpha}{\beta}A_\rho(\beta)A_\rho^*(\beta) + \frac{\alpha}{3}(\beta-\alpha)P,$$

esto implica

$$\frac{\alpha}{3}(\beta-\alpha)P \leqslant A_\rho(\alpha)A_\rho^*(\alpha),$$

y por el teorema 2.1

$$\operatorname{Ran}(P) \subset \operatorname{Ran}(A_\rho(\alpha)),\ 0 < \alpha < 1.$$

pero como $h \in \operatorname{Ran}(P)$ entonces $h \in \operatorname{Ran}(A_\rho(\alpha))$.
De la identidad (3.15) tenemos

$$A_\rho(\alpha)(h^r) = \frac{\alpha h}{r} - \frac{\zeta(r+1)}{r+1}(\alpha h)^{r+1},\ \operatorname{Re}(r) > -1.$$

Como $h \in \operatorname{Ran}(A_\rho(\alpha))$ entonces

$$\{h^r,\ r \in \mathbb{N}\} \subset \operatorname{Ran}(A_\rho(\alpha)),$$

y por el teorema de Müntz, $\operatorname{Ran}(A_\rho(\alpha))$ es denso en $L^2(0,1)$, lo que implica que $\operatorname{Ker}(A_\rho^*(\alpha)) = \{0\}$. ■

Observación 3.5.
Si tomamos $f \in L^2(0,1)\setminus \{0\}$ tal que $V_\alpha^*(f) = 0$ y $\displaystyle\int_\alpha^1 \frac{f(x)}{x}dx = 0$ entonces $f \in \operatorname{Ker}(A_\rho(\alpha))$, por lo tanto $\operatorname{Ker}(A_\rho(\alpha)) \neq \{0\}$. Esto y el teorema 3.10 nos dicen que el operador $A_\rho(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, no satisface las condiciones necesarias y suficientes que se debe imponer a A_ρ para que la hipótesis de Riemann se cumpla.

En lo que sigue, mostraremos más propiedades del operador A_ρ desde el punto de vista de trazas singulares. Un aporte de este trabajo de tesis es:

Teorema 3.11. *Sea I un ideal geométricamente estable en $L^2(0,1)$ y suponga que $A_\rho \in I$, entonces $\tau(A_\rho) = 0$, para toda τ traza singular no trivial en I.*

Prueba.

Primera parte

Para que nuestro teorema tenga sentido, primero demostremos que si $T \notin S_1(H)$ entonces la familia

$$\begin{aligned}\eta_T = \{\tau : I_\tau \to \mathbb{C} \,/\, I_\tau \text{ es un ideal geométricamente estable,}\\ \tau \text{ es una traza singular no trivial, } T \in I_\tau \text{ y } \tau(T) = 0\}\end{aligned}$$

es no vacía.

En efecto, por la observación 1.14 ii) existe un operador B excéntrico generalizado tal que $T \in (B)_0 \subset (B)$. Como $T \in (B)$ existe un r tal que

$$T = \sum_{i=1}^{r} C_i B R_i,\ (C_i)_{i=1}^r, (R_i)_{i=1}^r \subset \mathscr{L}(H).$$

Luego

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} s_k(T) &= \sum_{k=1}^{n} s_k\left(\sum_{i=1}^{r} C_i B R_i\right)\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k(B) \sum_{i=1}^{r} \|C_i\| \|R_i\|,\end{aligned}$$

entonces $B \notin S^1(H)$.

En la sección 1.2.2 hemos visto que a B le podemos asociar la terna $\Omega = (B, w, (n_k))$. Asociada a la terna Ω tenemos el funcional t_Ω definido en $(B)^+$ por

$$t_\Omega(A) = w\left(\left(\frac{\mu_{n_k}(A)}{\delta_{n_k}(B)}\right)\right).$$

que se extiende por linealidad a una traza singular sobre todo el ideal (B) y $t_\Omega(|B|) = 1$.

Es claro que el funcional t_Ω es acotado en (B) con la norma $\|\cdot\|_B$, donde

$$\|A\|_B = \|B\| \sup_{n \geqslant 1} \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_k(A)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_k(B)} \right\},$$

y por lo tanto admite una extensión a $\overline{(B)}^{\|\cdot\|_B}$, llamemos a esta extensión $\tilde{t}_\Omega$. Claramente $\tilde{t}_\Omega$ es una traza singular sobre el ideal $\overline{(B)}^{\|\cdot\|_B}$ que, por la observación 3.3, i), es un ideal normado simétrico y $\tilde{t}_\Omega(|B|) = 1$, es decir, es no trivial.

Como el ideal $\overline{(B)}^{\|\cdot\|_B}$ es normado simétrico entonces es geométricamente estable. Por definición de $(B)_0$ tenemos que $\tilde{t}_\Omega(T) = 0$. Concluimos entonces que $\tilde{t}_\Omega \in \eta_T$ y por lo tanto la familia η_T es no vacía.

Segunda parte

Los operadores
$$\frac{1}{\alpha}A_\rho(\alpha) - \frac{1}{\beta}A_\rho(\beta),\ \alpha, \beta \in \langle 0, 1]$$
son Volterra (J. Alcántara - Bode, Comunicación personal).

En efecto, suponga que $\lambda \neq 0$, $\varphi_\lambda \in L^2(0,1)$, $\varphi_\lambda \neq 0$ y
$$\left(\frac{1}{\alpha}A_\rho(\alpha) - \frac{1}{\beta}A_\rho(\beta)\right)\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda,$$
de forma similar a [3, Theorem 3] se tiene que φ_λ es analítica en $[0,1]$ y puede extenderse a una función entera, luego
$$\varphi_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,\ c_n = c_n(\lambda).$$
Sustituyendo esta serie se tiene
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\alpha}A_\rho(\alpha)(x^n) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\beta}A_\rho(\beta)(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda c_n x^n.$$
Por (3.15)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\alpha}\left(\frac{\alpha x}{n} - \frac{\zeta(n+1)}{n+1}(\alpha x)^{n+1}\right) - \frac{c_n}{\beta}\left(\frac{\beta x}{n} - \frac{\zeta(n+1)}{n+1}(\beta x)^{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda c_n x^n,$$
es así que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(n+1)\frac{c_n}{n+1}(\beta^n - \alpha^n)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda c_n x^n$$
e igualando tenemos que para cada n se cumple $c_n = 0$, y por lo tanto $\varphi_\lambda = 0$, lo cual es una contradicción. Concluimos entonces que el único valor en el espectro de $\frac{1}{\alpha}A_\rho(x) - \frac{1}{\beta}A_\rho(\beta)$ es el cero.

Tercera parte

Como $A_\rho(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}V_\alpha^* A_\rho$ y usando (3.13) para $\beta = 1$ tenemos
$$\frac{1}{\alpha}V_\alpha^* A_\rho - A_\rho V_\alpha^* = \alpha\left\langle \cdot, \chi_{[\alpha,1]}\frac{1}{h}\right\rangle h,\ 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{3.18}$$
Como el operador de la derecha de (3.18) es de rango 1, usando la linealidad de τ y el lema 1.1 tenemos que
$$\frac{1}{\alpha}\tau(V_\alpha^* A_\rho) = \tau(A_\rho V_\alpha^*) = \tau(V_\alpha^* A_\rho),$$

luego

$$\tau(V_\alpha^* A_\rho) = 0,\ 0 < \alpha < 1. \tag{3.19}$$

Por (3.18) y la proposición 3.4, $iv)$ para $0 < \alpha < 1$ tenemos que

$$\frac{1}{\alpha} A_\rho(\alpha) - A_\rho + A_\rho - \frac{1}{\alpha} A_\rho V_\alpha^* = \left\langle \cdot, \chi_{[\alpha,1]} \frac{1}{h} \right\rangle h, \tag{3.20}$$

pero como $\frac{1}{\alpha} A_\rho(\alpha) - A_\rho$ es Volterra, y por hipótesis $A_\rho \in I$, entonces por la observación 1.17 tenemos que

$$\frac{1}{\alpha} A_\rho(\alpha) - A_\rho \in \text{Com}(I).$$

Por último, tomando τ en (3.20) tenemos que

$$\tau\left(\frac{1}{\alpha} A_\rho(\alpha) - A_\rho\right) + \tau(A_\rho) - \frac{1}{\alpha}\tau(A_\rho V_\alpha^*) = 0,$$

y por (3.19), concluimos que

$$\tau(A_\rho) = 0.$$

■

Lo hecho en la prueba del teorema 3.11 puede repetirse para el operador A_ρ^* como nos lo dice el teorema:

Teorema 3.12. *Sea I un ideal geométricamente estable en $L^2(0,1)$ y suponga que $A_\rho \in I$, entonces $\tau(A_\rho^*) = 0$, para toda τ traza singular no trivial en I.*

Prueba.
Tomando adjunto en (3.18) se tiene

$$A_\rho^*(\alpha) = V_\alpha A_\rho^* + \alpha \langle \cdot, h \rangle \chi_{[\alpha,1]} \frac{1}{h},\ 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{3.21}$$

Tomando τ en la fórmula anterior tenemos

$$\tau\left(\frac{1}{\alpha} A_\rho^* V_\alpha\right) = \tau(A_\rho^*(\alpha)) = \tau(V_\alpha A_\rho^*) = \tau(A_\rho^* V_\alpha),$$

luego

$$\frac{1}{\alpha}\tau(A_\rho^* V_\alpha) = \tau(A_\rho^* V_\alpha),$$

así

$$\tau(A_\rho^* V_\alpha) = 0,\ 0 < \alpha < 1, \tag{3.22}$$

y por lo tanto

$$\tau(A_\rho^*(\alpha)) = 0,\ 0 < \alpha < 1. \tag{3.23}$$

Para $0 < \alpha < 1$, sumamos y restamos A_ρ^* en (3.21) y se tiene

$$\frac{1}{\alpha}A_\rho^*(\alpha) - A_\rho^* + A_\rho^* - \frac{1}{\alpha}V_\alpha A_\rho^* + \langle \cdot, h\rangle \chi_{[\alpha,1]}\frac{1}{h},$$

Como cada $\frac{1}{\alpha}A_\rho(\alpha) - A_\rho$ es Volterra, es claro que $\frac{1}{\alpha}A_\rho^*(\alpha) - A_\rho^*$ es Volterra. Así tomando τ en la identidad anterior y usando la observación 1.17 concluimos que

$$\tau(A_\rho^*) = \tau(A_\rho^*(\alpha)),$$

y por (3.23)

$$\tau(A_\rho^*) = 0.$$

■

Si en los teoremas 3.11 y 3.12 tomamos, en particular, la traza de Dixmier tenemos los corolarios:

Corolario 3.2. Si $A_\rho \in \mathscr{L}^{1,\infty}(L^2(0,1))$ entonces A_ρ y A_ρ^* son Dixmier medibles y

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A_\rho) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A_\rho^*) = 0.$$

Prueba.
Por lo hecho en los teoremas 3.11 y 3.12, A_ρ y A_ρ^* son Dixmier medibles y $\mathrm{Tr}_w(A_\rho) = \mathrm{Tr}_w(A_\rho^*) = 0$ para todo w estado singular en ℓ^∞ invariante por D_2. Finalmente con el teorema 1.13 llegamos a lo requerido. ■

Corolario 3.3. Si $A_\rho \in M_{1,\infty}(L^2(0,1))$ entonces A_ρ y A_ρ^* son Dixmier medibles y los límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\log(k+1)}\sum_{i=1}^{k}\tilde{s}_{[\alpha i]}(A_\rho)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\log(k+1)}\sum_{i=1}^{k}\tilde{s}_{[\alpha i]}(A_\rho^*)$$

existen uniformemente en $\alpha \geqslant 1$.

Prueba.
Basta usar los teoremas 1.12, 3.12 y 3.11. ■

Observación 3.6.

i) Si I es un ideal geométricamente estable y $A_\rho \in I$ entonces por (3.19) y el teorema 3.11 se tiene que para $0 < \alpha \leqslant 1$ se cumple que $\tau(A_\rho(\alpha)) = 0$ para toda τ traza singular en I.

ii) Si I es un ideal geométricamente estable y $A_\rho \in I$ entonces por (3.22) y el teorema 3.12 se tiene que para $0 < \alpha \leqslant 1$ se cumple que $\tau(A_\rho^*(\alpha)) = 0$ para toda τ traza singular en I.

iii) (3.13) es un caso particular de

$$\frac{\beta}{\alpha} V^*_{\frac{\alpha}{\beta}} A_\rho(\beta) - A_\rho(\beta) V^*_{\frac{\alpha}{\beta}} = \alpha \left\langle \cdot, \chi_{[\frac{\alpha}{\beta},1]} \frac{1}{h} \right\rangle h,\ 0 < \alpha < \beta \leqslant 1.$$

(J. Alcántara - Bode, comunicación personal).

iv) De forma similar a lo hecho en la segunda parte del teorema 3.11 se demuestra que los operadores $A_\rho(\alpha+\beta) - A_\rho(\alpha) - A_\rho(\beta)$, $0 < \alpha + \beta \leqslant 1$ son Volterra.

3.4. Cálculo de $\mathrm{Tr}(A_\rho^n)$, $n \geqslant 2$

En [3] aparece una fórmula recursiva para evaluar las trazas $\mathrm{Tr}(A_\rho^n),\ n \geqslant 2$. Un trabajo similar puede ser hecho para calcular $\mathrm{Tr}(A_\rho^n(\alpha)),\ n \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$. El proceso para A_ρ es el siguiente:
Por el teorema 1.20 se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A_\rho^2) &= \int_0^1 \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) \rho\left(\frac{x}{\theta}\right) dx d\theta = 2 \int_0^1 \int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) \frac{x}{\theta} dx d\theta - 1 \\
&= 2 \int_0^1 \frac{1}{\theta} \left[\int_0^1 \rho\left(\frac{\theta}{x}\right) x dx \right] d\theta - 1
\end{aligned}$$

por (3.15)

$$\mathrm{Tr}(A_\rho^2) = 2 \int_0^1 \frac{1}{\theta} \left[\theta - \frac{\zeta(2)}{2} \theta^2 \right] d\theta - 1.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Tr}(A_\rho^2) = 1 - \frac{\zeta(2)}{2}. \tag{3.24}$$

Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\det{}_2(I - \lambda A_\rho) = e^{\lambda} T(\lambda), \tag{3.25}$$

donde

$$T(\lambda) = 1 - \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\prod_{\ell=1}^{n} \zeta(\ell+1)}{(n+1)!(n+1)} \lambda^{n+1}. \tag{3.26}$$

Además, por la observación 1.16, se tiene para λ suficientemente pequeño

$$\frac{\det_2'(I - \lambda A_\rho)}{\det_2(I - \lambda A_\rho)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tr}(A_\rho^{n+1}) \lambda^n. \tag{3.27}$$

Si reemplazamos (3.26) en (3.27) tenemos

$$1 + \frac{T'(\lambda)}{T(\lambda)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tr}(A_\rho^{n+1}) \lambda^n$$

lo que implica

$$T'(\lambda) = T(\lambda)(-1 - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Tr}(A_\rho^{n+1}) \lambda^n).$$

Reemplazando (3.26) se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \lambda^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n \right),$$

donde

$$b_n = \begin{cases} -1 & , \quad n = 0 \\ -\operatorname{Tr}(A_\rho^{n+1}) & , \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

y

$$a_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ -1 & , \quad n = 1 \\ \frac{(-1)^n}{n!n} \prod_{\ell=1}^{n-1} \zeta(\ell+1) & , \quad n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Usando la fórmula del producto de Cauchy para series tenemos

$$\begin{aligned} (n+1) a_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \\ &= -a_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} \operatorname{Tr}(A_\rho^{k+1}) - \operatorname{Tr}(A_\rho^{n+1}). \end{aligned}$$

Finalmente para $n \geqslant 2$ tenemos

$$\operatorname{Tr}(A_\rho^{n+1}) = -(n+1) a_{n+1} - a_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} \operatorname{Tr}(A_\rho^{k+1}) \tag{3.28}$$

La fórmula (3.28), es una fórmula recursiva que permite evaluar todas las trazas $\operatorname{Tr}(A_\rho^n)$, $n \geqslant 2$. Por ejemplo para $n = 3$ y usando (3.24) se tiene

$$\operatorname{Tr}(A_\rho^3) = 1 - \frac{3}{4}\zeta(2) + \frac{1}{6}\zeta(2)\zeta(3),$$

y en general $\mathrm{Tr}(A_\rho^n)$ para $n \geqslant 2$ es un polinomio en $\zeta(2), \zeta(3), \cdots, \zeta(n)$ con coeficientes racionales.

Para el caso de $A_\rho(\alpha)$, todo lo hecho anteriormente puede repetirse. En resumen:

Para $0 < \alpha < 1$ se cumple

$$\det{}_2(I - \lambda A_\rho(\alpha)) = e^{\alpha\lambda} T_\alpha(\lambda), \tag{3.29}$$

donde

$$T_\alpha(\lambda) = 1 - \alpha\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\alpha^{(n+1)(n+2)/2}}{(n+1)!(n+1)} \prod_{\ell=1}^{n} \zeta(\ell+1)\lambda^{n+1}.$$

De forma similar al cálculo hecho para $\mathrm{Tr}(A_\rho^2)$ se demuestra que:

$$\mathrm{Tr}(A_\rho^2(\alpha)) = \alpha^2 - \frac{\zeta(2)}{2}\alpha^3. \tag{3.30}$$

Por (3.29) y lo hecho en el cálculo de $\mathrm{Tr}(A_\rho^n)$, se demuestra la siguiente fórmula recursiva:

Para $n \geqslant 2$ se tiene

$$\mathrm{Tr}(A_\rho^{n+1}(\alpha)) = -(n+1)\Gamma_{n+1} - \alpha\Gamma_n - \sum_{k=1}^{n-1} \Gamma_{n-k}\,\mathrm{Tr}(A_\rho^{k+1}(\alpha)),$$

donde

$$\Gamma_n(\alpha) = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ -\alpha & , \quad n = 1 \\ \frac{(-1)^n \alpha^{n(n+1)/2}}{n!n} \prod_{\ell=1}^{n-1} \zeta(\ell+1) & , \quad n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Terminamos esta sección con una pequeña reseña histórica de los valores de la función zeta de Riemann en los enteros positivos.

La pregunta sobre los valores de la función zeta de Riemann en los enteros positivos tiene su origen en el siglo XVII. El primer gran resultado fue establecido por Euler, quien demostró las fórmulas:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \cdots$$

De forma general demostró que:

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!},$$

donde B_n denota el n-ésimo número de Bernoulli. Esta fórmula combinada con los resultados de Lindemann demuestra la trascendencia de los valores $\zeta(2n),\ n \in \mathbb{Z}^+$.

A pesar de que se tiene buena información de la estructura de los valores de la función zeta de Riemann en los enteros positivos pares, muy poca es conocida para los valores $\zeta(2n+1),\ n \in \mathbb{Z}^+$. Se espera que estos valores sean números trascendentes, pero al parecer está lejos de ser resuelto. Sin embargo, se tiene la siguiente información:

- $\zeta(3)$ es irracional (R. Apéry [9]).
- Una cantidad infinita de los números $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \cdots$ son irracionales (T. Rivoal [74]).
- Al menos uno de los cuatro números $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ es irracional (W. Zudilin [87], [88]).
- Cada conjunto $\zeta(s+2), \zeta(s+4), \cdots,\ \zeta(8s-3),\ \zeta(8s-1)$, con $s > 1$ impar, contiene al menos un número irracional (W. Zudilin [89]).

3.5. Una construcción de una familia de isometrías parciales

Sabemos que, por la observación 2.3, la composición de isometrías parciales, en general, no es una isometría parcial. El obtener una familia de isometrías parciales cuya composición de elementos lo sea, es un resultado no trivial. Veamos esto:
Por el teorema 3.10, $h \in \text{Ran}(A_\rho(\alpha)),\ 0 < \alpha < 1$, luego existe $g \in L^2(0,1)$ tal que

$$A_\rho(\alpha)g = h. \tag{3.31}$$

Como el conjunto de soluciones g en (3.31) es convexo y cerrado, existe una única solución de mínima norma, llamemosla g_α.
Para $0 < \alpha < 1$, J. Alcántara-Bode ha definido la familia de operadores

$$\widehat{A}_\rho(\alpha) = A_\rho(\alpha) - \|g_\alpha\|^{-2}\langle\cdot, g_\alpha\rangle h,$$

Puede probarse que $\text{Ker}(\hat{A}_\rho^*(\alpha)) = \{0\}$, $h \notin \text{Ran}(\hat{A}_\rho(\alpha))$. (J. Alcántara-Bode, comunicación personal)
El siguiente teorema muestra la existencia de una familia de isometrías parciales con propiedades bastante particulares.

Teorema 3.13. *Existe una familia* $(U_{\alpha\beta})_{0<\alpha,\beta<1}$ *de isometrías parciales, donde cada* $U_{\alpha\beta}$ *tiene como espacio inicial* $\overline{\mathrm{Ran}(\widehat{A}_\rho^*(\alpha))}$ *y espacio final* $\overline{\mathrm{Ran}(\widehat{A}_\rho^*(\beta))}$*, tal que*

$$U_{\alpha\gamma} = U_{\beta\gamma}U_{\alpha\beta},\ 0 < \alpha,\, \gamma,\, \beta < 1.$$

Prueba.

Para $0 < \alpha, \beta < 1$, el corolario 3.1 nos dice que

$$A_\rho(\alpha)A_\rho^*(\alpha) = \alpha A_\rho A_\rho^* + \frac{\alpha(1-\alpha)}{3}P,$$

$$A_\rho(\beta)A_\rho^*(\beta) = \beta A_\rho A_\rho^* + \frac{\beta(1-\beta)}{3}P.$$

Igualando la expresión $A_\rho A_\rho^*$ tenemos

$$\alpha^{-1}A_\rho(\alpha)A_\rho^*(\alpha) - \frac{1}{3}(1-\alpha)P = \beta^{-1}A_\rho(\beta)A_\rho^*(\beta) - \frac{1}{3}(1-\beta)P. \tag{3.32}$$

Un simple reemplazo de $A_\rho^*(\alpha)$ permite deducir que

$$\hat{A}_\rho(\alpha)\hat{A}_\rho^*(\alpha) + \frac{1}{3}\|g_\alpha\|^{-2}P = A_\rho(\alpha)A_\rho^*(\alpha). \tag{3.33}$$

Reemplazando (3.33) en (3.32) obtenemos

$$\alpha^{-1}\hat{A}_\rho(\alpha)\hat{A}_\rho^*(\alpha) + \lambda_{\alpha,\beta}P = \beta^{-1}\hat{A}_\rho(\beta)\hat{A}_\rho^*(\beta), \tag{3.34}$$

donde

$$\lambda_{\alpha,\beta} = \frac{1}{3}\alpha^{-1}\|g_\alpha\|^{-2} - \frac{1}{3}\beta^{-1}\|g_\beta\|^{-2} + \frac{1}{3}(\alpha-\beta). \tag{3.35}$$

Si $\lambda_{\alpha,\beta} > 0$, de (3.34) y el teorema 2.1 tenemos que

$$\mathrm{Ran}(P) \subset \mathrm{Ran}(\hat{A}_\rho(\beta)),$$

lo que implica que $h \in \mathrm{Ran}(\hat{A}_\rho(\beta))$, lo cual es una contradicción. Si $\lambda_{\alpha,\beta} < 0$ lleva a la misma conclusión. Por lo tanto $\lambda_{\alpha,\beta} = 0$ para todo $\alpha, \beta \in]0,1[$. Toda esta primera parte de la prueba está basada en apuntes de J. Alcántara-Bode (comunicación personal). Así para $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ y (3.34) tenemos que

$$\alpha^{-1}\widehat{A}_\rho(\alpha)\widehat{A}_\rho^*(\alpha) = \beta^{-1}\widehat{A}_\rho(\beta)\widehat{A}_\rho^*(\beta) = \gamma^{-1}\widehat{A}_\rho(\gamma)\widehat{A}_\rho^*(\gamma).$$

Entonces, por el corolario 2.1, existen isometrías parciales $U_{\alpha\beta}$, $U_{\beta\gamma}$, $U_{\alpha\gamma}$ con espacios finales $\overline{\mathrm{Ran}(\widehat{A}_\rho^*(\beta))}$, $\overline{\mathrm{Ran}\widehat{A}_\rho^*(\gamma)}$ y $\overline{\mathrm{Ran}\widehat{A}_\rho^*(\gamma)}$ respectivamente, y espacios iniciales $\overline{\text{Ran}(\widehat{A}_\rho^*(\alpha))}$, $\overline{\text{Ran}\widehat{A}_\rho^*(\beta)}$ y $\overline{\text{Ran}\widehat{A}_\rho^*(\alpha)}$ respectivamente tales que

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\widehat{A}_\rho(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\widehat{A}_\rho(\beta)U_{\alpha\beta}, \tag{3.36}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}}\widehat{A}_\rho(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\widehat{A}_\rho(\gamma)U_{\beta\gamma}, \tag{3.37}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\widehat{A}_\rho(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\widehat{A}_\rho(\gamma)U_{\alpha\gamma}. \tag{3.38}$$

De (3.36), (3.37) y (3.38) se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\widehat{A}_\rho(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\widehat{A}_\rho(\gamma)U_{\beta\gamma}U_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\widehat{A}_\rho(\gamma)U_{\alpha\gamma}. \tag{3.39}$$

De (3.39) tenemos 2 descomposiciones para $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\widehat{A}_\rho(\alpha)$, pero como

$$\text{Ran}(U_{\beta\gamma}U_{\alpha\beta}) \subset \text{Ran}(U_{\beta\gamma}) = \overline{\text{Ran}(\widehat{A}_\rho^*(\gamma))},$$
$$\text{Ran}(U_{\alpha\gamma}) = \overline{\text{Ran}\widehat{A}_\rho^*(\gamma)}$$

entonces por la unicidad del lema de Douglas concluimos que

$$U_{\alpha\gamma} = U_{\beta\gamma}U_{\alpha\beta}. \tag{3.40}$$

■

Observación 3.7.
(3.40) es una relación de tipo cociclo multiplicativo [50, Ch. 6], [40, Ch. 5]. Ejemplos de cociclos pueden encontrarse en [50, Section 6.2], y sus aplicaciones en [41, 42, 43, 44, 45, 46]. Isometrías parciales en el contexto de C^*-álgebras puede encontrarse en [93, Ch. 12].

Corolario 3.4.

a) $U_{\alpha\alpha} = P_{\overline{\text{Ran}(\widehat{A}_\rho^*(\alpha))}}$, $0 < \alpha < 1$.

b) $U_{\alpha\beta}^* = U_{\beta\alpha}$, $0 < \alpha, \beta < 1$.

Prueba.

a) Si en (3.40) hacemos $\alpha = \gamma$ tenemos

$$U_{\alpha\alpha} = U_{\beta\alpha}U_{\alpha\beta},\ 0 < \alpha, \beta < 1,$$

luego

$$U^*_{\beta\alpha}U_{\alpha\alpha} = U^*_{\beta\alpha}U_{\beta\alpha}U_{\alpha\beta},$$

pero como, por teorema 2.2, $U^*_{\beta\alpha}U_{\beta\alpha}$ es una proyección ortogonal sobre $\overline{\text{Ran}(\widehat{A}^*_\rho(\beta))}$ entonces

$$U^*_{\beta\alpha}U_{\alpha\alpha} = U_{\alpha\beta}. \tag{3.41}$$

Finalmente, si en (3.41) hacemos $\alpha = \beta$ llegamos a

$$U_{\alpha\alpha} = U^*_{\alpha\alpha}U_{\alpha\alpha},$$

y nuevamente por el teorema 2.2, $U_{\alpha\alpha}$ es la proyección ortogonal sobre $\overline{\text{Ran}(\widehat{A}^*_\rho(\alpha))}$.

b) Tomando adjunto en (3.41) se tiene

$$U^*_{\alpha\beta} = U_{\alpha\alpha}U_{\beta\alpha}$$

y por la parte a) concluimos que

$$U^*_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha}$$

■

Observación 3.8 (J. Alcántara-Bode, comunicación personal)**.**
De (3.35) se deduce que

$$\|g_\alpha\|^2 = \alpha^{-1}(C-\alpha)^{-1}, 0 < \alpha < 1$$

para alguna constante $C \geqslant 1$. Además se cumple:

1) Si la hipótesis de Riemann es falsa se tiene

$$C = 1 + \|g_1\|^{-2}.$$

2) La hipótesis de Riemann es verdad si y solo si $C = 1$.

Conclusiones

1) Si bien es cierto no se conoce si $A_\rho \in M_{1,\infty}(L^2(0,1))$, el teorema 3.4 nos permite afirmar que existe un operador Volterra Q tal que $A_\rho - Q$ es excéntrico generalizado y pertenece a $M_{1,\infty}(L^2(0,1))$.

2) Con las funciones dadas en la proposición 3.1, tenemos una forma alternativa de deducir las ecuaciones funcionales dadas en [7]. Esto también permitió calcular una estimativa para la sucesión de números singulares del operador $A_\rho(\beta) + A_\rho(r) - A_\rho(\alpha)$ con $0 < r, \beta < \alpha \leqslant 1$ y $\alpha = \beta + r$.

3) El teorema 3.11 calcula todas las trazas singulares de A_ρ sobre los ideales geométricamente estables que lo contienen.

4) Por el teorema 3.8 y la identidad (3.15), la función $h(x) = x$ es un vector cíclico para A_ρ. Esto nos dice que Ran(A_ρ) es denso en $L^2(0,1)$ y como A_ρ es compacto, Ran(A_ρ) no es cerrado. Por lo tanto el problema de verificar la condición $h \in$ Ran(A_ρ) está mal propuesto "ill posed problem" en el sentido de Hadamard (apéndice D).

5) Tanto el determinante de Fredholm de A_ρ como de $A_\rho(\alpha)$ permitió demostrar fórmulas recursivas para el cálculo de las trazas de sus potencias.

6) El estudio de la solución de mínima norma de la ecuación (3.31) brinda otro enfoque para estudiar la hipótesis de Riemann.

Apéndice A: Operadores compactos

Sea H un espacio de Hilbert. Sea $T \in \mathscr{L}(H)$, un punto $\lambda \in \mathbb{C}$ es llamado punto regular de T si $\lambda I - T$ es invertible, donde $I(x) = x$ es el operador identidad. El conjunto $\rho(T)$ de puntos regulares de T es llamado el conjunto resolvente de T. El espectro $\sigma(T)$ de T es el complemento de $\rho(T)$. A cada operador $T \in \mathscr{L}(H)$ le corresponde un único operador $T^* \in \mathscr{L}(H)$, llamado adjunto de T, tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ para todo $x, y \in H$. Un operador $T \in \mathscr{L}(H)$ es llamado

i) **autoadjunto** si $T = T^*$,

ii) **unitario** si $TT^* = T^*T = I$, donde $I(x) = x$,

iii) **positivo** si $T = T^*$ y $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ para todo $x \in H$,

iv) **compacto** si para toda sucesión (x_n) acotada en H, $(T(x_n))$ tiene una subsucesión convergente en H.

v) **cuasinilpotente** si $\sigma(T) = \{0\}$.

Un subconjunto M de H es llamado **total** en H si no existe un $x \in H$ no nulo tal que $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in M$.
Es conocido que todo operador positivo $T \in \mathscr{L}(H)$ admite una única raíz cuadrada, es decir existe un único operador positivo $S \in \mathscr{L}(H)$ tal que $S^2 = T$.
Sea $T \in \mathscr{L}(H)$ y $x \in H$. Decimos que x es un **vector cíclico** para T si $\overline{\operatorname{span}\{T^n(x);\ n = 0, 1, 2, \cdots\}} = H$. Si $K(H)$ denota el espacio de operadores compactos en H entonces $K(H) \neq \mathscr{L}(H)$ si y solo si $\dim H = \infty$, ya que el operador identidad I no es compacto. Además, si $T \in K(H)$ y Ran(T) es cerrado, se sigue del teorema de la aplicación abierta que dim$(\operatorname{Ran}(T)) < \infty$.
Sea $T \in K(H)$ y $\sigma(T)$ su espectro, entonces todo $\mu \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ es un autovalor o valor propio, esto es Ker$\,(\mu I - T) \neq \{0\}$, y todo elemento de Ker$\,(\mu I - T)\backslash\{0\}$ es llamado un **autovector de T correspondiente al autovalor** μ, en este caso

el número $m_\mu = \dim(\text{Ker}(\mu I - T))$ es finito y es llamado la **multiplicidad geométrica** del autovalor μ. Para tal μ, el número $p_\mu = \dim\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{Ker}(\mu I - T)^k\right)$ es también finito y es por definición la **multiplicidad algebraica** de μ. Obviamente $p_\mu \geqslant m_\mu$, pero para operadores compactos normales $p_\mu = m_\mu$. La desigualdad $p_\mu > m_\mu$ se cumple si y solo si $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{Ker}\,(\mu I - T)^k \neq \text{Ker}(\mu I - T)$; en este caso los elementos de $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{Ker}(\mu I - T)^k \backslash \text{Ker}(\mu I - T)$ son llamados **autovectores generalizados** de T asociados al autovalor μ. Obviamente $f \in H$ es un autovector generalizado de T correspondiente al autovalor $u \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ si y solo si existe un $\ell \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ tal que

$$(T - \mu I)^\ell(f) = 0 \ \text{ y } \ (T - \mu I)^{\ell-1}(f) \neq 0.$$

Si (X, F) es un espacio de Banach ordenado con $\text{int}(F) \neq \varnothing$ y $T \in K(X)$ es un **operador fuertemente positivo**, es decir, $T(F\backslash\{0\}) \subset \text{int}(F)$. El teorema de Krein-Rutman [21] afirma que:

i) El radio espectral $r(T) > 0$ es un autovalor simple, es decir, su multiplicidad algebraica y geométrica es uno, con autovector $f \in \text{int}(F)$.

ii) Ningún otro autovalor de T tiene un autovector positivo.

iii) Para cada $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{r(t)\}$, se cumple $|\lambda| < r(T)$.

Sea H un espacio de Hilbert separable y $T \in K(H)$. Sea $\phi = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de H. Decimos que $\phi \in \text{Dom}(\text{tr}\, T)$ si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n\rangle$ converge. En este caso, denotamos el número complejo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n\rangle$ por $\text{tr}_\phi(T)$. Por lo tanto, $\text{tr}_\phi(T)$ es una función con dominio $\text{Dom}(\text{tr}\, T)$ y valores en el plano complejo. La imagen de $\text{Tr}\, T$ será denotada por $R(\text{tr}\, T)$. En [13], A. Ben-Artzi prueba el siguiente teorema conjeturado por I. Gohberg:
Sea $T \in K(H)$ con $\text{Dom}(\text{tr}\, T) \neq \varnothing$. Entonces $R(\text{tr}\, T)$ es un punto o una línea recta en el plano complejo o todo el plano complejo. Además, $R(\text{tr}\, T)$ es una línea recta si y solo si T puede representarse de la forma $T = \lambda A + R$, donde R es un operador de clase traza, λ es un número complejo no nulo y A es un operador autoadjunto donde ni su parte positiva ni su parte negativa es de clase traza.

Apéndice B: Ecuaciones integrales de Fredholm

El material contenido en esta sección puede encontrarse en [53] y [66].

Una ecuación integral de Fredholm de segundo tipo es una ecuación de la forma

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} N(x,y)\varphi(y)dy, \tag{3.42}$$

donde $f(x)$ es una función dada, definida en todo punto x del conjunto acotado Ω, $N(x,y)$ es una función dada, definida para todo par de puntos x e y del conjunto Ω, y $\varphi(x)$ es una función desconocida en Ω.

Fredholm demostró que la serie

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p} \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} N\begin{pmatrix} s_1, s_2, \cdots, s_p \\ s_1, s_2, \cdots, s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \cdots ds_p$$

converge para todo valor del parámetro λ, si $N(x,y)$ es acotada y Riemann integrable, donde

$$N\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} N(x_1,y_1) & N(x_1,y_2) & \cdots & N(x_1,y_n) \\ N(x_2,y_1) & N(x_2,y_2) & \cdots & N(x_2,y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ N(x_n,y_1) & N(x_n,y_2) & \cdots & N(x_n,y_n) \end{bmatrix}.$$

Bajo la hipótesis que $f(x)$ y $N(x,y)$ sean Riemann integrables y $D(\lambda) \neq 0$, la ecuación 3.42 tiene una única solución, la cual es de la forma

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} R(x,y,\lambda) f(y)dy,$$

donde

$$R(x,y,\lambda) = \frac{D(x,y,\lambda)}{D(\lambda)}$$

y

$$D(x,y,\lambda) = N(x,y) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} N \begin{pmatrix} x, s_1, \cdots, s_p \\ y, s_1, s_2, \cdots, s_p \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_p$$

Si consideramos la ecuación homogénea

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\Omega} N(x,y)\varphi(y)dy \tag{3.43}$$

con $D(\lambda) \neq 0$ entonces $\varphi(x) = 0$ en Ω. Es así que Fredholm se enfocó en buscar soluciones no triviales de (3.43).

Para esto, consideremos λ_0 un cero de $D(\lambda)$ con multiplicidad q, es decir,

$$D(\lambda_0) = 0,\ D^{(n)}(\lambda_0) = 0,\ D^{(q)}(\lambda_0) \neq 0,\ n = 1, 2, \cdots, q-1.$$

Fredholm demuestra que la ecuación homogénea

$$\varphi(x) = \lambda_0 \int_{\Omega} N(x,y)\varphi(y)dy$$

tiene al menos una, y a lo mas q, soluciones linealmente independientes

$$\varphi_i(x) = D_n \begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n \\ y_1, \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots y_n \end{pmatrix} | \lambda_0 \Bigg)$$

con $i = 1, 2, \cdots, n$, $1 \leqslant n \leqslant q$ y

$$\begin{aligned} D_n \begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_n \\ y_1, y_2, \cdots, y_n \end{pmatrix} | \lambda \Bigg) &= N \begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_n \\ y_1, y_2, \cdots, y_n \end{pmatrix} \\ &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} N \begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_n, s_1, \cdots, s_p \\ y_1, y_2, \cdots, y_n, s_1, \cdots, s_p \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_p. \end{aligned}$$

Además cualquier solución de (3.43) es combinación lineal de estas soluciones. El número

$$D_n \left(\begin{matrix} x_1, x_2, \cdots, x_n \\ y_1, y_2, \cdots, y_n \end{matrix} \ | \ \lambda \right)$$

es llamado el menor de Fredholm de orden n relativo al núcleo $N(x,y)$.

Apéndice C: Orden y tipo de una función entera

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera y $M_f(r)$ definido por

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Por [56, Lemma 4] tenemos que si f es entera y $|f(0)| = 1$ entonces para todo $r > 0$ se tiene que $n_f(r) \leqslant \ln(M_f(er))$, donde $n_f(r)$ denota el número de ceros de f en el círculo $\{z \,/\, |z| < r\}$.

El **orden ρ de una función entera** f está dada por

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln(\ln(M_f(r)))}{\ln(r)},$$

y el **tipo σ de una función entera** f con orden ρ está definida como sigue

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln(M_f(r))}{r^\rho}.$$

Sea (a_n) una sucesión de números complejos tal que para cada n, $a_n \neq 0$, $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

La mayor cota inferior de los números $\lambda \geqslant 0$ para el cual la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda}$$

converge, es llamado el **exponente de convergencia de la sucesión** (a_n). Si la serie diverge para todo $\lambda > 0$, decimos que el exponente de convergencia de la sucesión (a_n) es infinito.

Por ejemplo los exponentes de convergencia de las sucesiones (e^n) y $(n^{1/\tau})$ y $\ln(n+1)$ son 0, τ y ∞ respectivamente.

Por [57, Theorem 10.4] se puede afirmar que:

sea f una función entera de orden finito ρ con ceros no nulos $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ tal que para cada n, $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Si (a_n) tiene exponente de convergencia τ entonces $\tau \leqslant \rho$.

Apéndice D: Problemas mal propuestos

Sea A un operador de un espacio topológico Q a un espacio topológico F. Para cualquier espacio topológico Q, sea $V(q)$ una vecindad de un elemento $q \in Q$.

Definición 3.1 (Problema bien propuesto en el sentido de Hadamard)**.** El problema $Aq = f$ se dice **bien propuesto** si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1) Para cada $f \in F$ existe una solución $q_e \in Q$ de la ecuación $Aq = f$, es decir, $\text{Ran}(A) = F$ (**condición de existencia**);

2) la solución q_e de la ecuación $Aq = f$ es única (**condición de unicidad**);

3) para cualquier vecindad $V(q_e) \subset Q$ de la solución q_e de la ecuación $Aq = f$, existe una vecindad $V(f) \subset F$ de f tal que para todo $f_\delta \in V(f)$ el elemento $A^{-1}f_\delta = q_\delta$ pertenece a la vecindad $V(q_e)$, es decir, el operador A^{-1} es continuo (**condición de estabilidad**).

Definición 3.2. El problema $Aq = f$ se dice **mal propuesto**, si alguna de sus tres condiciones anteriores no se satisface.

Ejemplos

1) Considere la ecuación Volterra de segundo tipo

$$q(x) = g(x) + \int_0^x p(x,t)q(t)dt, \ x \in (0,T) \tag{3.44}$$

donde $q(x)$ se debe buscar.

Si $g \in C[0,T]$ y $p(x,t) \in C \ (0 \leqslant t \leqslant x \leqslant T)$, entonces el problema (3.44) está bien propuesto en $C[0,T]$ (54, Theorem 4.2.1).

2) Considere el problema de resolver una ecuación integral de Fredholm de primer tipo
$$\int_a^b k(x,s)q(s)ds = f(x), c \leqslant x \leqslant d, \tag{3.45}$$
donde el núcleo $k(x,s)$ y la función $f(x)$ son dadas y se busca la función $q(s)$.

Se asume que $f \in C[c,d]$, $q \in C[a,b]$, y $k(x,s)$, $k_x(x,s)$, y $k_s(x,s)$ son continuas en el rectángulo $c \leqslant x \leqslant d$, $a \leqslant s \leqslant b$. El problema de resolver la ecuación está mal propuesto ya que las soluciones podrían no existir para algunas funciones $f \in C[c,d]$. Por ejemplo, si tomamos una función $f(x)$ que es continua pero no diferenciable en $[c,d]$. Con tal función, la ecuación no puede tener una solución continua $q(s)$ ya que las condiciones del núcleo $k(x,s)$ implican que la integral en la izquierda de (3.45) es diferenciable respecto al parámetro x para cualquier función continua $q(s)$.

La ecuación (3.45) no satisface la condición de estabilidad de soluciones. Para ello, considere la sucesión de funciones
$$q_n(s) = q(s) + n\,\mathrm{sen}\,(n^2 s),\ n = 0, 1, 2, \cdots$$
sustituyendo $q_n(s)$ en (3.45) obtenemos
$$\begin{aligned} f_n(s) &= \int_a^b k(x,s)q_n(s)ds \\ &= f(x) + \int_a^b k(x,s)\,n\,\mathrm{sen}\,(n^2 s)ds. \end{aligned}$$
Como
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{C}{n},$$
donde C es una constante que no depende de n, tenemos
$$\|f_n - f\|_{C[c,d]} \leqslant \frac{C}{n},\ n = 0, 1, 2, \cdots$$
Por otra parte
$$\|q_n - q\|_{C[a,b]} \to +\infty,\ n \to +\infty.$$

3) Considere el problema de determinar una función de dos varibales $q(x;y)$ de la integral de esta función sobre una colección de círculos cuyos centros pertenecen a una recta fija.

Asumamos que $q(x,y)$ es continua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Consideremos una colección de círculos cuyos centros pertenecen a una recta fija, por ejemplo, la recta $y = 0$. Sea $L(a, r)$ el círculo $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, el cual pertenece a esta colección. Se quiere determinar $q(x, y)$ para una función dada $f(x, r)$ tal que

$$\int_{L(x,r)} q(\eta, \tau) d\ell = f(x, r), \tag{3.46}$$

y $f(x, r)$ está definida para todo $x \in (-\infty, +\infty)$ y $r > 0$.

La solución de este problema no es único en la clase de funciones continuas, ya que para cualquier función continua $\tilde{q}(x, y)$ con $\tilde{q}(x, y) = -\tilde{q}(x, -y)$ las integrales

$$\int_{L(x,r)} \tilde{q}(\eta, \tau) d\ell$$

se anulan para todo $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Para esto basta usar el cambio $\eta = x + r\cos\theta$, $\tau = r\operatorname{sen}\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$.

Así, si $q(x, y)$ es una solución del problema (3.46) y $\tilde{q}(x, y)$ es cualquier solución continua tal que $\tilde{q}(x, y) = -\tilde{q}(x, -y)$, entonces $q(x, y) + \tilde{q}(x, y)$ es también una solución de (3.46).

Existen modelos que pueden formularse como ecuaciones integrales de Fredholm de primer tipo [47], entre los cuales podemos enunciar:

1) **Un problema gravitacional**

   El problema de distribuir una masa en un anillo circular de radio $\frac{1}{2}$ centrado en el origen con densidad $q = q(\theta)$, donde θ es el ángulo polar, puede formularse de la siguiente forma

$$\gamma \int_0^{2\pi} \frac{2 - \cos(\varphi - \theta)}{(5 - 4\cos(\varphi - \theta))^{3/2}} q(\theta) d\theta = f(\varphi),$$

   donde γ es la constante de gravedad universal y en los puntos del circulo concéntrico de radio 1, en el mismo plano, la componente de fuerza gravitacional $f = f(\varphi)$, φ es el ángulo polar, apunta hacia el centro del anillo.

2) **Paleoclimatología**

   Un problema bastante estudiado en paleoclimatología es referente a la reconstrucción del historial de la temperatura de la superficie de la tierra, tomando las medidas de la temperatura de un pozo en el tiempo presente. En este modelo asumamos que el pozo está en una tierra homogénea semi infinita (la dirección z positiva se extiende hacia abajo de la superficie) con constante térmica de difusividad 1. El problema de determinar la desviación de la temperatura de un nivel de referencia $u(z,T) = f(z)$, $z \geqslant 0$, donde se ha medido la temperatura en el tiempo presente T, consiste en encontrar el historial de la temperatura de la superficie $h(t) = u(0,t)$ en el tiempo pasado $t \leqslant T$, y puede formularse por la ecuación

$$\frac{z}{\sqrt{4\pi}} \int_0^T T^{-3/2} \exp\left(-\frac{z^2}{4T}\right) q(\tau) d\tau = f(z),$$

donde $q(\tau) = h(T-\tau)$ es la temperatura de la superficie en el tiempo $\tau \leqslant T$.

Los fundadores de la teoría de problemas mal propuestos son A.N. Tikhonov, V.K. Ivanov y M.M. Lavrentiev. El método usado por Tikhonov es la base para la teoría de problemas condicionalmente bien propuestos y para construir una variedad de algoritmos numéricos efectivos para resolverlos. El concepto de cuasi solución introducida por Ivanov, generaliza el concepto de una solución, todas las condiciones para que el problema sea bien propuesto son restauradas pasando a cuasi soluciones, y brinda nuevos algoritmos para la solución aproximada de problemas mal propuestos. Finalmente, el método de Lavrentiev es usado para construir algoritmos numéricos para resolver una amplia clase de sistemas de ecuaciones algebraicas, ecuaciones integrales lineales y no lineales de primer tipo.

Bibliografía

[1] H. Aden and B. Carl, On realizations of solutions of the KdV equation by determinants on operator ideals, J. Math. Phys. 37 (1996), 1833-1857.

[2] A. Albeverio, D. Guido, A Ponosov, and S. Scarlatti, Singular traces and compact operators, J. Funct.Anal. 137,281-302(1996).

[3] J.Alcántara-Bode, An integral equation formulation of the Riemann Hypothesis, J. Integral Equations and Operator Theory 17(1993), 151-168.

[4] J. Alcántara-Bode, A Completeness Problem Related to the Riemann Hypotesis, J. Integral Equations and Operator Theory 53(2005), 301-309.

[5] J. Alcántara-Bode, An algorithm for the Evaluation of certain Fredholm Determinants, J. Integral Equation and Operator Theory 39, (2001), 153-158.

[6] J. Alcántara-Bode, Some properties of the Beurling function, Pro Mathematica Vol XIV, Nos. 27-28 (2000), 5-11.

[7] J. Alcántara-Bode, Some properties of the Beurling Correlation Function, Pro Mathematica, 26, Nos. 51-52 (2012), 159-168.

[8] J. Alcántara-Bode, A completeness problem related to the Riemann Hypothesis, J. Integral Equation and Operator Theory, 53(3), (2005), 301-309.

[9] R. Apéry, Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Astérisque 61 (1979), 11-13.

[10] L. Baez-Duarte, A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis, Atti Acad. Naz. Lincei 14 (2003), 5-11.

[11] F. Bayart, E. Matheron, Dinamics of Linear Operators, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[12] Bagchi, B. "On Nyman, Beurling and Baez-Duarte's Hilbert space reformulation of the Riemann hypothesis." The Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Mathematical Sciences 116, no. 2 (2006): 137-146.

[13] A. Ben-Artzi, Traces of compact operators. Integral Equations Operator Theory 7 (1984), 310-324.

[14] H. Blohm, Solution of nonlinear equations by trace methods, Nonlinearity 13 (2000), 1925-1964.

[15] J. Bober, Factorial ratios, hypergeometric series, and a family of step functions, J. Lond. Math. Soc. (2) 79 (2009), no. 2, 422-444.

[16] C. Brislawn, Kernels of trace class operators, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988) 1181-1190.

[17] A. Beurling, A closure problem related to the Riemann zeta-function, Proc. Nat. Acad. Sci. 41 (1955), 312-314.

[18] P. Borwein, T. Erdelyi, The Full Muntz theorem in C[0,1] and $L_1[0,1]$, J. London Math. Soc. (2) 54 (1996), 102-110.

[19] B. Carl and C. Schiebold, Nonlinear equations in soliton physics and operator ideals, Nonlinearity 12 (1999), 333-364.

[20] B. Carl and S.-Z. Huang, On realizations of solutions of the KdV equation by the C_0-semigroup method, Amer. J. Math. 122 (2000), 403-438.

[21] K. Deimling, Non linear functional analysis, Springer, Berlin, 1985.

[22] M. Duflo, Généralités sur les représentations induites, Représentations des Groupes de Lie Résolubles, Monographies de la Soc. Math, de France, vol. 4, Dunod, Paris, 1972, pp. 93 119.

[23] R. G. Douglas, On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert Spaces, Proc Armer. Math. Soc., 17(1966), 413-415.

[24] J. Calkin,Two-ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space, Ann. of Math. (2) 42 (1941), 839-873.

[25] A. L. Carey and F. A. Sukochev, Dixmier Traces and some applications to noncommutative geometry, Uspek hi mat. Nauk,61(6(372)):45-110, 2006.

[26] A. Connes, “Geometrie non commutative,” Intereditions, Paris, 1990.

[27] J. Dixmier, Existences de traces non normales, C.R. Acad. Sci. Paris 262 (1966).

[28] P. Enflo, A counterexample to the approximation property in Banach spaces. Acta Math. 130, 309-317(1973).

[29] I. Erdelyi, Partial isometries Closed Under Multiplication on Hilbert Spaces, J. of mathematical analysis and applications, 22 (1968), 546-551.

[30] M. Englis and R. Rochberg, The Dixmier trace of Hankel operators on the Bergman space, Journal of Functional Analysis 257 (2009) 1445-1479.

[31] X. Fang, J. Yu and H. Yao, Solutions to operator equations on Hilbert C^*-modules, Linear Algebra Appl. 431 (2009), 2142-2153.

[32] M. Forough, Majorization, range inclusion and factorization for unbounded operators on Banach Spaces, Linear Algebra and its Applications. 449 (2014), 60-67.

[33] T. Figiel, J. Lindenstrauss, and V. Milman, The dimension of almost spherical sections of convex bodies, Ada Math. 139 (1977) 53-94.

[34] T. Fiegel and W.B. Johnson, The Lidskii trace property and the nest approximation property in Banach Spaces, J. Funct. Anal. 271 (2016), no.3, 566-576.

[35] Paul A. Fuhrmann, Linear Systems and Operators in Hilbert Space. McGraw-Hill, 1981.

[36] I. Gohberg, S. Goldberg and N. Krupnik, Traces and determinants of linear operators, OperatorTheory: Advances and Applications 116, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[37] I. Gohberg, S. Goldberg, M. Kaashoek. Basic Classes of Linear Operators; Birkhäuser; 2003.

[38] I. Gohberg and M. G. Krein, Introduction to the Theory of Non-selfadjoint Operators, Moscow, 1985.

[39] I. Gohberg and M. G. Krein, Theory and applications of Volterra operators in Hilbert Space, Moscow, 1970.

[40] I. Gohberg, J. Leiterer, Holomorphic Operator Functions of One Variable and Applications: Methods from Complex Analysis in Several Variables, Birkhauser, 2009.

[41] I. Gohberg, J. Leiterer, Holomorphic vector-valued functions of one variable. I. Functions on a compact set (Russian), Mat. Issled. 7 (1972), no. 4(26), 60-84, 252.

[42] I. Gohberg, J. Leiterer, Holomorphic vector-valued functions of one variable. II. Functions in a domain (Russian), Mat. Issled. 8 (1973), no. 1(27), 37-58, 236.

[43] I. Gohberg, J. Leiterer, Cocycles, operator-valued functions and families of subspaces (Russian), Mat. Issled. 8 (1973), no. 2(28), 23-56, 188.

[44] H. Grauert, Approximationssatze fur holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Raumen, Math. Ann. 133 (1957), 139-159.

[45] H. Grauert, Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen, Math. Ann. 133 (1957), 450-472.

[46] H. Grauert, Analytische Faserungen uber holomorph-vollstandigen Raumen, Math. Ann. 135 (1958), 263-273.

[47] C. W. Groetsch, Integral equations of the first kind, inverse problems and regularization: a crash course, Journal of Physics: Conference Series 73 (2007).

[48] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[49] D. Guido and T. Isola, On the Domain of Singular Traces, J. Funct. Anal. 13 (2002), 667-674.

[50] K.J. Horadam, Hadamard Matrices and Their Applications, Princeton University Press, 2006.

[51] S.-Z. Huang, An operator method for finding exact solutions to vector Korteweg-de Vries equations, J. Math. Phys. 44 (2003).

[52] W.B. Johnson, A. Szankowski, The trace formula in Banach spaces, Israel Journal of Mathematics 203 (2014) 1-16.

[53] K. Jorgens, G.F. Roach, Linear Integral Operators, Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[54] S.I. Kabanikhin, Inverse and ill-posed problems:Theory and Applications, De Gruyter, 2012.

[55] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach spaces I. Sequence spaces (Springer, Berlin, 1977).

[56] J. Levin, Distributions of zeros of entire functions, A. M. S., Rhore Island, 1964.

[57] A. Markushevich, Teoría de las funciones analíticas, Vol. II, Mir, Moscow, 1978.

[58] N. K. Nikolski, Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading, Vol. I, Hardy, Hankel, Toeplitz, American Mathematical Society, 2002.

[59] G.J. Murphy, C*-algebras and operator theory, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990

[60] V. Milman and G. Pisier, Banach spaces with a weak cotype 2 property, Israel I. Math. 54 (1986) 139-158.

[61] N. J. Kalton, Spectral characterization of sums of commutators II, J. reine angew. Math. 504 (1998), 127-137.

[62] N. J. Kalton, Spectral characterization of sums of commutators I, J. reine angew. Math. 504 (1998), 115-125.

[63] N. Kalton, A. Sedaev, and F. Sukochev. Fully symmetric functionals on a Marcinkiewicz space are Dixmier traces. Adv. Math., 226 (4) (2011), 3540-3549.

[64] S. Kwapien, Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector coefficients, Studia Math. 44 (1972) 583-595.

[65] S. Kwapien, On Enflo's example of a Banach space without the approximation property, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972-1973: Équations aux dérivées partielles et analyse fonctionnelle, Exp. No. 8, 9 pp. Centre de Math., École Polytech., Paris, 1973.

[66] W. Pogorzelski, Integral Equations and Their Applications, Volumen 1. Elsevier Science & Technology, 1966.

[67] A. Pietsch, Eigenvalues and s-Numbers, Geest & Portig, Leipzig, and Cambridge Univ. Press, 1987.

[68] A. Pietsch, Connes-Dixmier versus Dixmier traces, Integral Equations Operator Theory 77(2) (2013) 243-259.

[69] G. Pisier, Weak Hilbert spaces, Proceedings of the London Mathematical Society 56 (1988), 547-579.

[70] G. Pisier, The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 94, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[71] J. R. Retherford. Hilbert Space: Compact Operator and the Trace Theorem. Cambrigdge University Press. 1993.

[72] M. Reed and B. Simon, Methods of modern mathematical physics. I, second ed, Academic Press Inc. [Harcourt Brace JovanovichPublishers], New York, 1980.

[73] J. Ringrose, Super-diagonal forms for compact linear operators, Proc. Lond. Math. Soc. (3)12(1962), 367- 384.

[74] T. Rivoal, La fonction zeta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 331:4 (2000), 267-270.

[75] A.A. Sedaev, F.A. Sukochev, D.V. Zanin, Lidskii-type formulae for Dixmier traces, Integral Equations Operator Theory 68(4) (2010) 551-572.

[76] E. Semenov, F.A. Sukochev, A. Usachev. D.V. Zanin, Banach Limits and traces on $\mathscr{L}_{(1,\infty)}$.

[77] Steven Lord, Fedor Sukochev, Dmitriy Zanin: Singular Traces, Theory and Applications de Gruyter, 2012.

[78] F. Sukochev, A. Usachev, D. Zanin, On the distinction between the classes of Dixmier and Connes-Dixmier traces, Proc. Amer. Math. Soc. 141(6) (2013) 2169-2179

[79] J. V. Varga, Traces on irregular ideals, Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), 715.

[80] H. Vasudeva, One dimensional perturbations of compact operators, Proc. Amer. Math. Soc. 57 (1976), 58-60.

[81] V. I. Vasyunin, On a system of step functions, Journal of Mathematical Sciences, 110, no. 5, (2002), 2930-2943.

[82] F. Sukochev, A. Usachev, D. Zanin, Generalized Limits with Additional Invariance Properties and their Applications to Noncommutative Geometry", Adv. Math., 239 (2013), 164-189.

[83] S. M. Voronin. The distribution of the non-zero values of the Riemann zeta function. Trudy Mat. Inst. Steklov, 128: 131-150, 1972.

[84] S. M. Voronin. A theorem on the "universality" of the Riemann zeta function. Math. USSR-Izv., 9: 443-453, 1975.

[85] J. Yang, A generalization of Beurling´s criterion for the Riemann hypothesis, Journal of Number Theory, 164 (2016), 299-302.

[86] A.C. Zaanen, Linear Analysis, North Holland, Amsterdam,1984.

[87] W. Zudilin, One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational, Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys], 56:4 (2001), 149-150.

[88] W. Zudilin, Arithmetic of linear forms involving odd zeta values, J. Théor. Nombres Bordeaux, 16:1 (2004), 251-291.

[89] W. Zudilin, Irrationality of values of the Riemann zeta function, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. [Russian Acad. Sci. Izv. Math.] 66:3 (2002), 49-102.

[90] S. V. Rogosin, A. A. Koroleva, Advances in Applied Analysis, Birkhauser, 2012.

[91] H. Queffélec, M, Queffélec, Diophantine Approximation and Dirichlet Series, Hindustan Book Agency, 2013.

[92] K. Schmudgen, An Invitation to Unbounded Representations of *-Algebras on Hilbert Spaces, Springer Nature, 2020.

[93] R. Exel, Partial Dynamical Systems, Fell Bundles and Applications, American Mathematical Society, 2017.